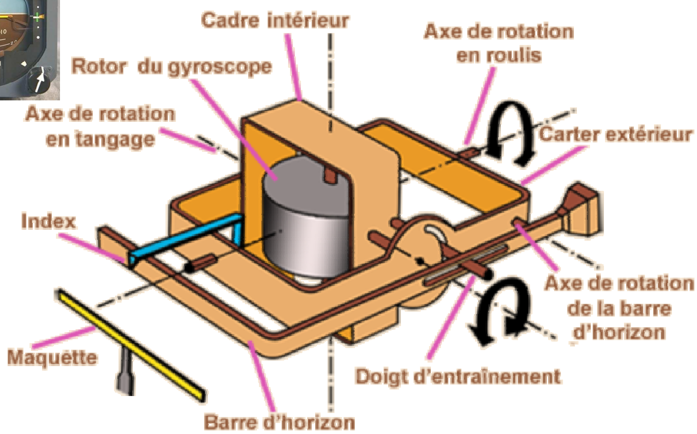
Recherche des lois du mouvement à l'aide du PFD

Chaines cinématiques ouvertes
Exemple du gyroscope d'horizon artificiel



Chaines cinématiques fermées
Exemple du vibreur d'olivier (TD14)

L'horizon artificiel est un gyroscope à 2 degrés de liberté à axe vertical, suspendu par son centre de gravité qui détermine la verticale du lieu d'un avion. Le rotor du gyroscope correspond à la cage d'écureuil d'un moteur asynchrone triphasé en 26 volts/400 Hz, le stator est solidaire du carter. La vitesse de rotation est de l'ordre de 20 000tr/mn. Ce système permet au final d'indiquer via un cadran l'assiette longitudinale de l'avion et l'inclinaison de l'avion.

Exemples de systèmes mécaniques
GYROSCOPE D'HORIZON ARTIFICIEL – VIBREUR OLIVIER

La recherche des lois du mouvement sur un système mécanique correspond à un problème de type 1.

Pour déterminer ces lois du mouvement à l'aide du PFD il faut dans un premier temps identifier la nature de la chaine cinématique car les méthodes de calcul différent en fonction de ce critère. L'objectif de ce cours de mettre en place les démarche afin de déterminer les lois du mouvement dans les chaines cinématiques ouvertes et les chaines cinématiques fermées.

Problème de type 1

On connait :
- Les actionneurs
- Les inerties

⇩

On cherche à déterminer
- Les lois du mouvement
- Les actions mécaniques des liaisons

1. Recherche des lois du mouvement dans le cas d'une chaine ouverte

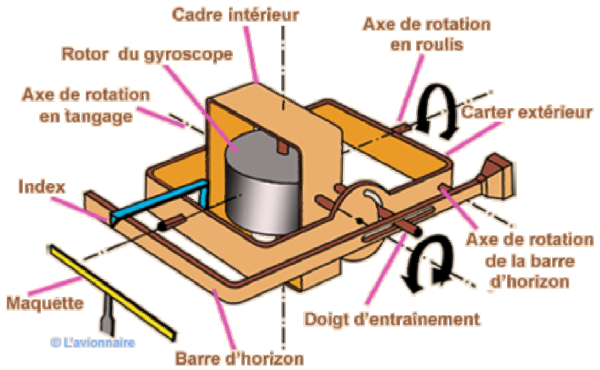
Pour déterminer les lois du mouvement à l'aide du PFD dans une chaine ouverte, il faut rechercher autant d'équations scalaires dans laquelle il n'y a pas d'inconnues de liaison que de paramètres cinématiques inconnus.

Pour un solide (ou un ensemble de solides) en liaison pivot (parfaite) par rapport à un autre solide, l'équation du moment dynamique suivant l'axe de rotation permet d'exprimer la dérivée seconde du paramètre de position angulaire en fonction du couple appliqué (couple connu).

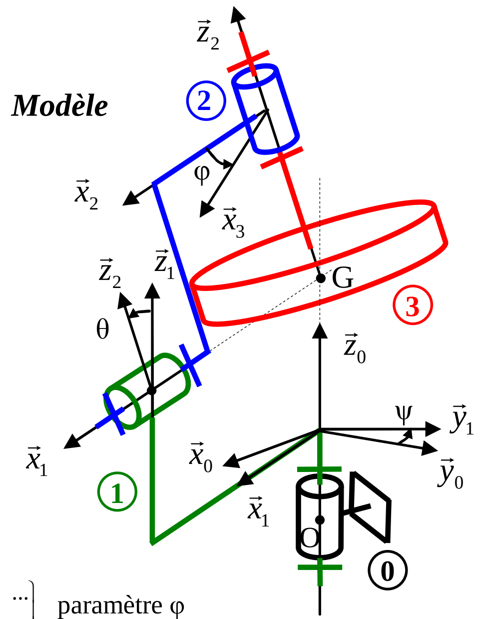
Pour un solide (ou un ensemble de solides) en liaison pivot (parfaite) par rapport à un autre solide, l'équation du moment dynamique suivant l'axe de rotation permet d'exprimer la dérivée seconde du paramètre de position angulaire en fonction du couple appliqué (couple connu).

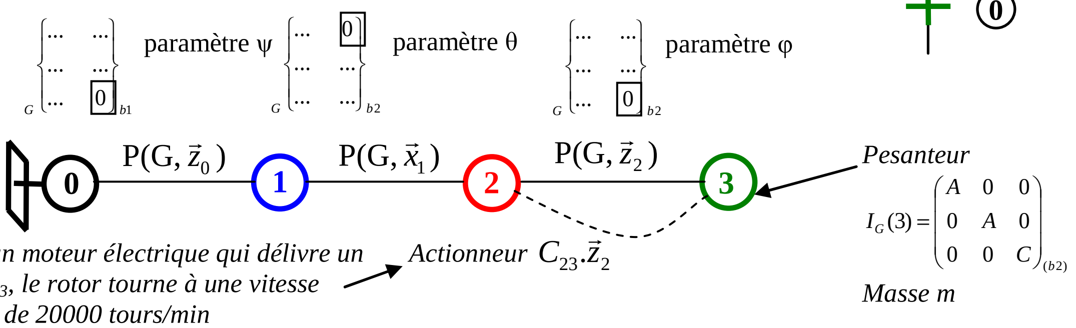
Application sur le gyroscope d'horizon artificiel

Réel

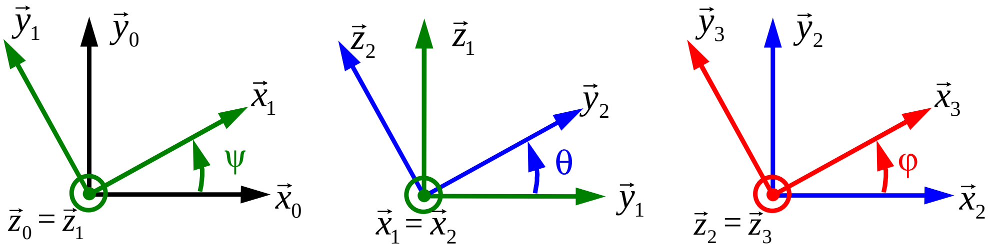


Modèle

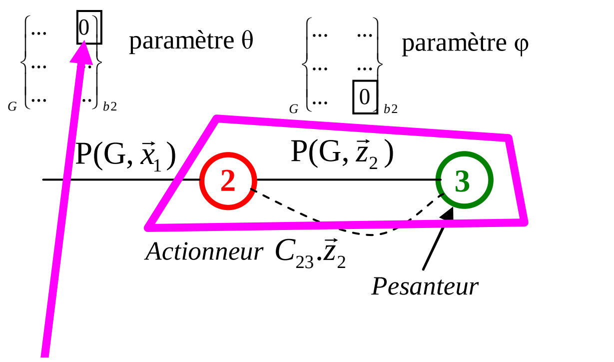




Grâce à un moteur électrique qui délivre un couple C_{23}, le rotor tourne à une vitesse constante de 20000 tours/min

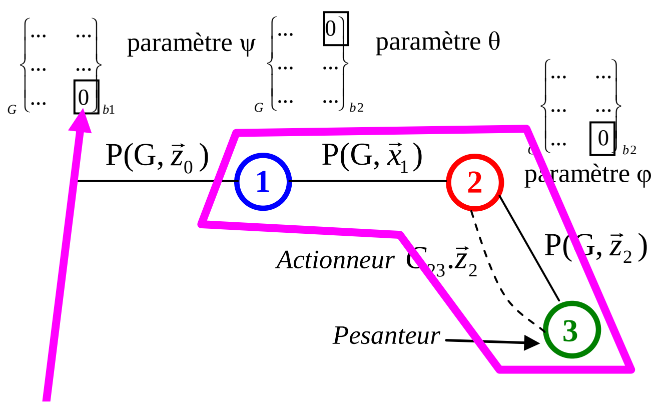


Le modèle possède 3 paramètres cinématiques : ψ, θ et φ. Il existe une condition liée à la loi horaire : $\dot{\varphi}=\Omega=cte$ $\rightarrow$ il y a donc 2 degrés de liberté de mouvement en ψ et θ et il faut rechercher 2 équations scalaires à l'aide du PFD liées à ces 2 degrés de liberté de mouvement ne faisant pas intervenir les inconnues de liaisons.



On isole 2+3 et on utilise le théorème du moment dynamique écrit en G et projeté sur $\vec{x}_2$.

$\rightarrow \overrightarrow{\delta_{G,\,2+3/0}}.\vec{x}_2=0$



On isole 1+2+3 et on utilise le théorème du moment dynamique écrit en G et projeté sur $\vec{z}_1$.

$\rightarrow \overrightarrow{\delta_{G,\,1+2+3/0}}.\vec{z}_1=0$

Calcul de $\overrightarrow{\delta_{G,\,2+3/0}}.\vec{x}_2 = 0$ *:*

Il faut utiliser pour des calculs de ce type une intégration par partie (u'.v = [u.v]' – u.v')

$$\overrightarrow{\delta_{G,\,2+3/0}}.\vec{x}_2 = \frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{G,\,2+3/0}}.\vec{x}_2\Big|_0 - \overrightarrow{\sigma_{G,\,2+3/0}}.\frac{d}{dt}\vec{x}_2\Big|_0$$ *(fonctionne car G centre de gravité)*

$$\overrightarrow{\sigma_{G,\,2+3/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G,\,2/0}} + \overrightarrow{\sigma_{G,\,3/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G,\,3/0}} = I_G(3).\overrightarrow{\Omega_{30}} \text{ avec } \overrightarrow{\Omega_{30}} = \dot{\psi}.\vec{z}_1 + \dot{\theta}.\vec{x}_1 + \dot{\varphi}.\vec{z}_2$$

$$\overrightarrow{\sigma_{G,\,3/0}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(b2)} .(\dot{\psi}.\sin\theta.\vec{y}_2 + \dot{\theta}.\vec{x}_2 + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}.\cos\theta).\vec{z}_2) = A.\dot{\theta}.\vec{x}_2 + A.\dot{\psi}.\sin\theta.\vec{y}_2 + C.(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.\cos\theta).\vec{z}_2$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\delta_{G,\,2+3/0}}.\vec{x}_2 &= A.\ddot{\theta} - (A.\dot{\theta}.\vec{x}_2 + A.\dot{\psi}.\sin\theta.\vec{y}_2 + C.(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.\cos\theta).\vec{z}_2).\dot{\psi}.\vec{y}_1 \\ &= A.\ddot{\theta} - (A.\dot{\psi}^2.\sin\theta.\vec{y}_2.\vec{y}_1 + C.\dot{\psi}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.\cos\theta).\vec{z}_2.\vec{y}_1) \\ &= A.\ddot{\theta} - (A.\dot{\psi}^2.\sin\theta.\cos\theta - C.\dot{\psi}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.\cos\theta).\sin\theta)\end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{A.\ddot{\theta} - A.\dot{\psi}^2.\sin\theta.\cos\theta + C.\dot{\psi}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.\cos\theta).\sin\theta = 0} \qquad (1)$$

Calcul de $\overrightarrow{\delta_{G,\,1+2+3/0}}.\vec{z}_1 = 0$ *:*

Il faut utiliser pour des calculs de ce type une intégration par partie (u'.v = [u.v]' – u.v')

$$\overrightarrow{\delta_{G,\,1+2+3/0}}.\vec{z}_1 = \frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{G,\,1+2+3/0}}.\vec{z}_1\Big|_0 - \overrightarrow{\sigma_{G,\,1+2+3/0}}.\frac{d}{dt}\vec{z}_1\Big|_0$$

$$\overrightarrow{\sigma_{G,\,1+2+3/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G,\,1/0}} + \overrightarrow{\sigma_{G,\,2/0}} + \overrightarrow{\sigma_{G,\,3/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G,\,3/0}} = A.\dot{\theta}.\vec{x}_2 + A.\dot{\psi}.\sin\theta.\vec{y}_2 + C.(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.\cos\theta).\vec{z}_2$$

$$\overrightarrow{\delta_{G,\,1+2+3/0}}.\vec{z}_1 = \frac{d}{dt}A.\dot{\psi}.\sin\theta.\vec{y}_2.\vec{z}_1 + C.(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.\cos\theta).\vec{z}_2.\vec{z}_1\Big|_0 = \frac{d}{dt}A.\dot{\psi}.\sin^2\theta + C.(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.\cos\theta).\cos\theta\Big|_0$$

$$\rightarrow \boxed{A.\dot{\psi}.\sin^2\theta + C.(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.\cos\theta).\cos\theta = cte} \qquad (2)$$

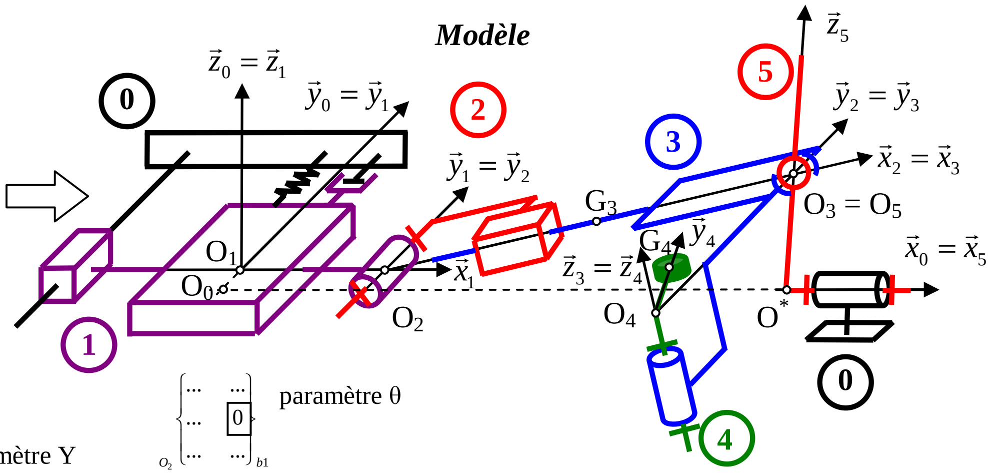
Les équations (1) et (2) correspondent aux lois du mouvement du système.

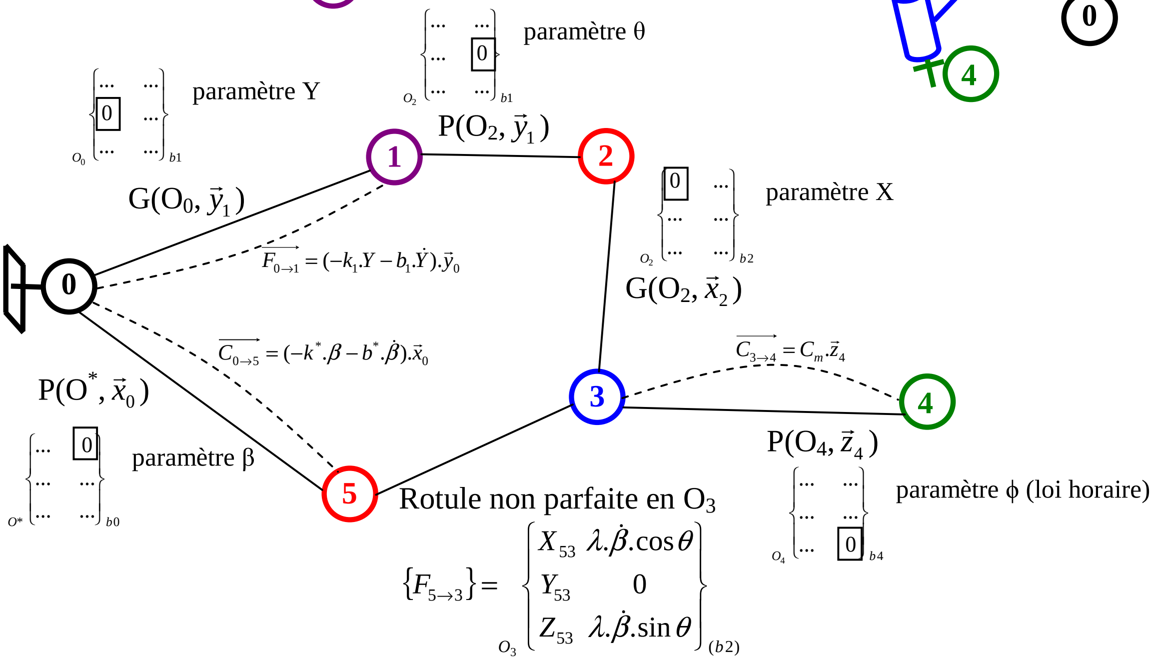
2. Recherche des lois du mouvement dans le cas d'une chaine fermée

Pour déterminer les lois du mouvement à l'aide du PFD dans une chaine fermée, il faut dans un premier temps « ouvrir la chaine » en supprimant une liaison de la chaine fermée (on choisit en général la liaison qui possède le plus de degré de liberté et donc le moins d'inconnues de liaisons). Il faut ensuite écrire N équations scalaires dans laquelle il n'y a pas d'inconnues de liaison supplémentaires. N correspond au nombre de paramètres cinématiques inconnus ajouté au nombre d'inconnues de liaison la liaison coupée pour ouvrir la chaine.

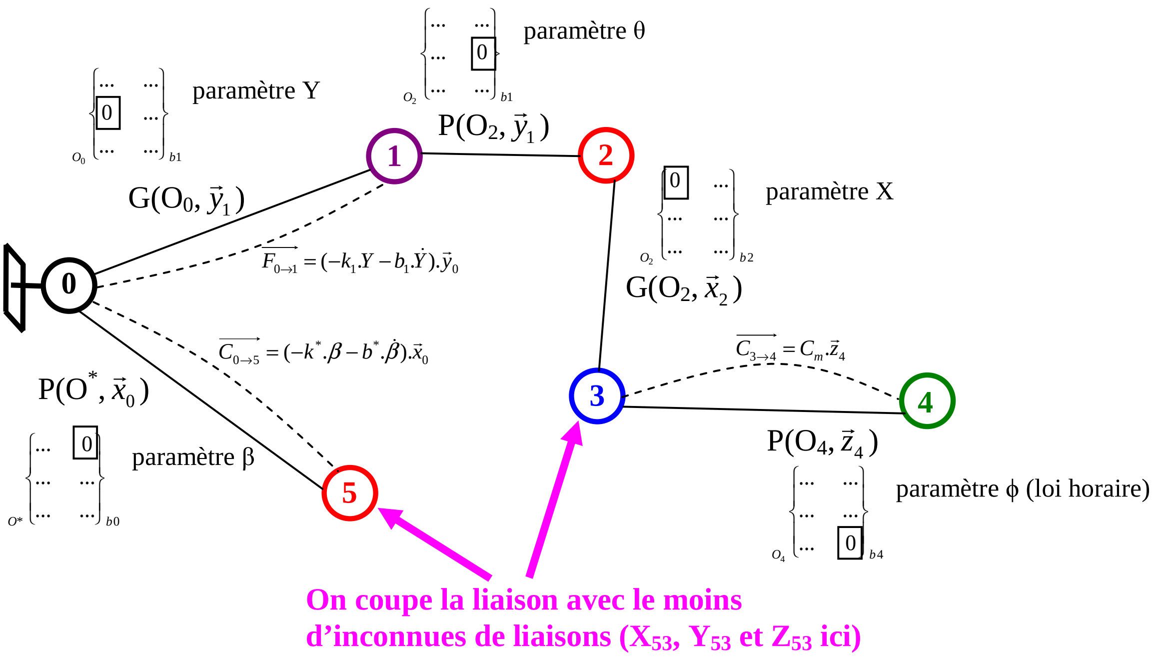
Application sur le vibreur d'olivier (toutes les données d'entrée du problème sont à récupérer TD14)

Réel ***Modèle***





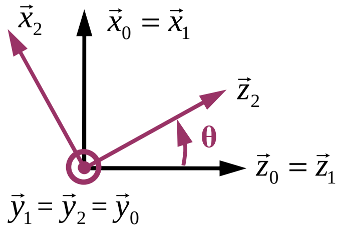
Le système est une chaine cinématique fermée avec 5 degrés de liberté (5 DDLs) : Y, θ, X, ϕ et β.
On « ouvre » la chaine cinématique :

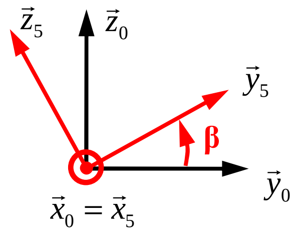


*On injecte par conséquent 3 inconnues de liaisons supplémentaires dans le système d'équation qui permettra d'obtenir les lois du mouvement → Soit un total de **8** équations à trouver.*

La fermeture géométrique de la boucle permet de lier certain de ces paramètres et d'obtenir les 1ères équations $\rightarrow \overrightarrow{O_0O^*}+\overrightarrow{O^*O_5}=\overrightarrow{O_0O_1}+\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2G_3}+\overrightarrow{G_3O_5} \rightarrow d_0.\vec{x}_0+l_5.\vec{z}_5=Y.\vec{y}_1+l_1.\vec{x}_1+X.\vec{x}_2+l_3.\vec{x}_2$

En projection dans la base 0 :





$$\begin{cases} d_0=l_1+(X+l_3).\cos\theta \\ \quad -l_5.\sin\beta=Y \\ l_5.\cos\beta=-(X+l_3).\sin\theta \end{cases}$$

Hypothèse θ et β petits $\rightarrow \begin{cases} d_0=l_1+(X+l_3) \\ \quad -l_5.\beta=Y \\ l_5=-(X+l_3).\theta \end{cases}$

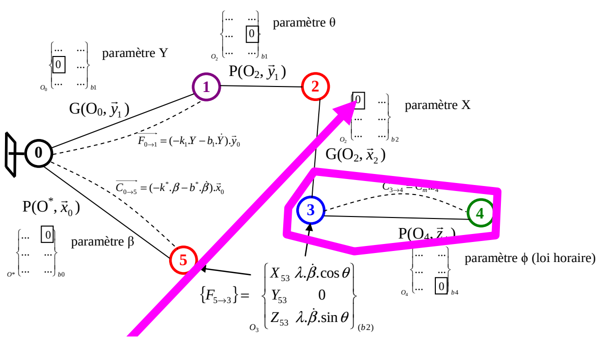
Soit : $\boxed{Y=-l_5.\beta}$ *(1)*

$\boxed{X=d_0-l_1-l_3=cte}$ *(2)*

$\boxed{\theta=-\dfrac{l_5}{X+l_3}=cte}$ *(3)*

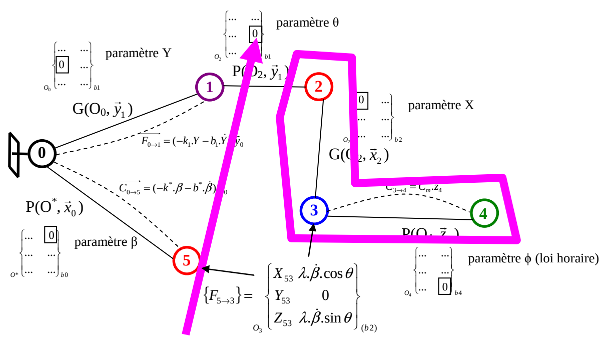
De plus une loi horaire est imposée sur le paramètre ϕ *:* $\boxed{\phi=\Omega.t}$ *avec Ω=cte* *(4)*

Soit 4 équations sur 8. Il y a donc au final un seul degré de liberté en mouvement β et l'équation du mouvement est donc une équation en fonction de β et des ses dérivées. Pour trouver cette équation, il reste 4 équations à écrire à l'aide du PFD en allant « chercher les 0 » des liaisons :



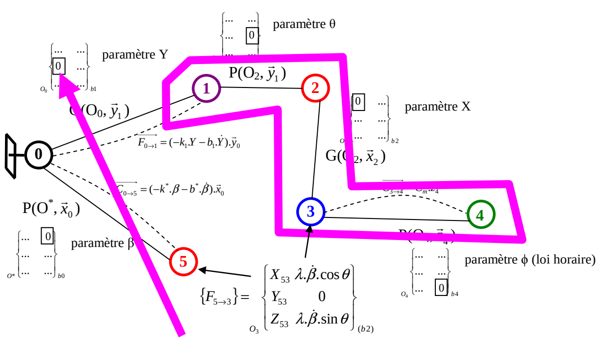
On isole 3+4 et on utilise le théorème de la résultante dynamique projeté sur $\vec{x}_2$.

$\rightarrow \overrightarrow{R_{d,\,3+4/0}}.\vec{x}_2=\Sigma\overrightarrow{F_{ext\rightarrow 3+4}}.\vec{x}_2$



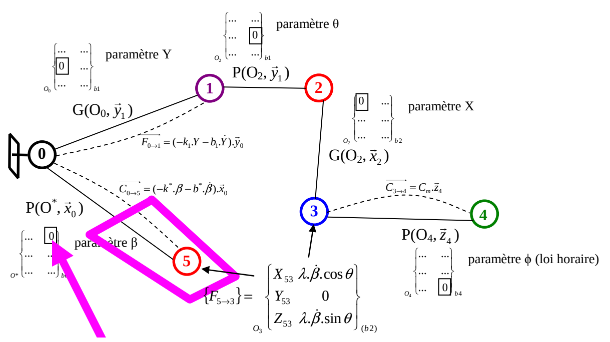
On isole 2+3+4 et on utilise le théorème du moment dynamique en O₂ projeté sur $\vec{y}_2$.

$\rightarrow \overrightarrow{\delta_{O_2,\,2+3+4/0}}.\vec{y}_2=\Sigma\overrightarrow{M_{O_2,ext\rightarrow 2+3+4}}.\vec{y}_2$



On isole 1+2+3+4 et on utilise le théorème de la résultante dynamique projeté sur $\vec{y}_1$.

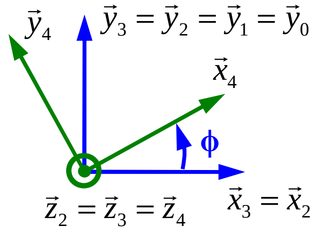
$\rightarrow \overrightarrow{R_{d,\,1+2+3+4/0}}.\vec{y}_1=\Sigma\overrightarrow{F_{ext\rightarrow 1+2+3+4}}.\vec{y}_1$



On isole 5 et on utilise le théorème du moment dynamique en O projeté sur* $\vec{x}_0$.

$\rightarrow \overrightarrow{\delta_{O^*,\,5/0}}.\vec{x}_0=\Sigma\overrightarrow{M_{O^*,ext\rightarrow 5}}.\vec{x}_0$

1. *Calcul de* $\overrightarrow{R_{d,\,3+4/0}}.\vec{x}_2 = \Sigma\overrightarrow{F_{ext\to 3+4}}.\vec{x}_2$ *:*



$\overrightarrow{R_{C,\,3+4/0}} = \overrightarrow{R_{C,\,3/0}} + \overrightarrow{R_{C,4/0}}$ *avec* $\overrightarrow{R_{C,\,3/0}} = m_3.\overrightarrow{V_{G_3\,3/0}} = m_3.\dot{Y}.\vec{y}_1$

et $\overrightarrow{R_{C,\,4/0}} = m_4.\overrightarrow{V_{G_4\,4/0}}$ *où*

$$\overrightarrow{V_{G_4\,4/0}} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{O_0O_4} + \overrightarrow{O_4G_4})\bigg|_0 = \dot{Y}.\vec{y}_1 + e.\frac{d}{dt}\vec{y}_4\bigg|_0 = \dot{Y}.\vec{y}_1 - e.\dot{\phi}.\vec{x}_4$$

$$\overrightarrow{R_{C,\,3+4/0}} = (m_3+m_4).\dot{Y}.\vec{y}_1 - m_4.e.\dot{\phi}.\vec{x}_4$$

$$\overrightarrow{R_{d,\,3+4/0}}.\vec{x}_2 = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{R_{C,\,3+4/0}}.\vec{x}_2)\bigg|_0 - \overrightarrow{R_{C,\,3+4/0}}.\frac{d}{dt}\vec{x}_2\bigg|_0 = \frac{d}{dt}(-m_4.e.\dot{\phi}.\vec{x}_4.\vec{x}_2)\bigg|_0 = \frac{d}{dt}(-m_4.e.\dot{\phi}.\cos\phi)\bigg|_0 = m_4.e.\dot{\phi}^2.\sin\phi$$

$$\Sigma\overrightarrow{F_{ext\to 3+4}}.\vec{x}_2 = X_{53} \longrightarrow \boxed{m_4.e.\dot{\phi}^2.\sin\phi = X_{53}} \qquad (5)$$

2. *Calcul de* $\overrightarrow{\delta_{O_2,\,2+3+4/0}}.\vec{y}_2 = \Sigma\overrightarrow{M_{O_2,ext\to 2+3+4}}.\vec{y}_2$ *:*

$\overrightarrow{\delta_{O_2,\,2+3+4/0}}.\vec{y}_2 = \overrightarrow{\delta_{O_2,\,4/0}}.\vec{y}_2$ *car 2/0 et 3/0 mouvements de translation suivant* $\vec{y}_2$

$$\overrightarrow{\sigma_{G_4,\,4/0}} = I_{G_4}(S_4).\overrightarrow{\Omega_{40}} = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{(b4)} .\dot{\phi}.\vec{z}_4 = C_4.\dot{\phi}.\vec{z}_4$$

$$\overrightarrow{\delta_{G_4,\,4/0}} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{G_4,\,4/0}}\bigg|_0 = C_4.\ddot{\phi}.\vec{z}_4$$

$\overrightarrow{\delta_{O_2,\,4/0}} = \overrightarrow{\delta_{G_4,\,4/0}} + \overrightarrow{O_2G_4} \wedge \overrightarrow{R_{d,\,4/0}}$ *avec :*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O_2G_4} \wedge \overrightarrow{R_{C,\,4/0}} &= ((X+l_3).\vec{x}_2 - d.\vec{y}_2 + e.\vec{y}_4) \wedge (m_4.\ddot{Y}.\vec{y}_1 - m_4.e.\dot{\phi}^2.\vec{y}_4) \\ &= m_4.\ddot{Y}.(X+l_3).\vec{z}_2 - m_4.e.\dot{\phi}^2.(X+l_3).\cos\phi.\vec{z}_3 + m_4.d.e.\dot{\phi}^2.\sin\phi.\vec{z}_3 - m_4.\ddot{Y}.e.\sin\phi.\vec{z}_3\end{aligned}$$

Or $\vec{z}_2 = \vec{z}_3 = \vec{z}_4$ d'où $\overrightarrow{\delta_{O_2,\,4/0}}.\vec{y}_2 = 0$

$$\Sigma\overrightarrow{M_{O_2,ext\to 2+3+4}}.\vec{y}_2 = \overrightarrow{M_{O_2,5\to 3}}.\vec{y}_2 + \overrightarrow{M_{O_2,1\to 2}}.\vec{y}_2$$

$$\{F_{5\to 3}\} = {}_{O_3}\begin{Bmatrix} X_{53} & \lambda.\dot{\beta}.\cos\theta \\ Y_{53} & 0 \\ Z_{53} & \lambda.\dot{\beta}.\sin\theta \end{Bmatrix}_{(b2)} \longrightarrow \overrightarrow{M_{O_2,5\to 3}}.\vec{y}_2 = \left(\overrightarrow{M_{O_3,5\to 3}} + \overrightarrow{O_2O_3} \wedge (X_{53}.\vec{x}_2 + Y_{53}.\vec{y}_2 + Z_{53}.\vec{z}_2)\right).\vec{y}_2$$

$$\overrightarrow{M_{O_2,5\to 3}}.\vec{y}_2 = \left[(X+l_3).\vec{x}_2 \wedge (X_{53}.\vec{x}_2 + Y_{53}.\vec{y}_2 + Z_{53}.\vec{z}_2)\right].\vec{y}_2 = -(X+l_3).Z_{53}$$

$$\longrightarrow \overrightarrow{\delta_{O_2,\,2+3+4/0}}.\vec{y}_2 = \Sigma\overrightarrow{M_{O_2,ext\to 2+3+4}}.\vec{y}_2 \longrightarrow -(X+l_3).Z_{53} = 0 \longrightarrow \boxed{Z_{53} = 0} \qquad (6)$$

3. Calcul de $\overrightarrow{R_{d,\,1+2+3+4/0}}.\vec{y}_1 = \Sigma\overrightarrow{F_{ext\to 1+2+3+4}}.\vec{y}_1$:

$$\overrightarrow{R_{C,1+2+3+4/0}} = (m_1+m_2+m_3+m_4).\dot{Y}.\vec{y}_1 - m_4.e.\dot{\phi}.\vec{x}_4$$

$$\overrightarrow{R_{d,\,1+2+3+4/0}}.\vec{y}_1 = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{R_{C,\,1+2+3+4/0}}.\vec{y}_1)\Big|_0 - \overrightarrow{R_{C,\,1+2+3+4/0}}.\frac{d}{dt}\vec{y}_1\Big|_0 = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{R_{C,\,1+2+3+4/0}}.\vec{y}_1)\Big|_0$$

$$= \frac{d}{dt}((m_1+m_2+m_3+m_4).\dot{Y} - m_4.e.\dot{\phi}.\vec{x}_4.\vec{y}_1)\Big|_0 = (m_1+m_2+m_3+m_4).\ddot{Y} - \frac{d}{dt}m_4.e.\dot{\phi}.\sin\phi\Big|_0$$

$$= (m_1+m_2+m_3+m_4).\ddot{Y} - m_4.e.\dot{\phi}^2.\cos\phi$$

$$\Sigma\overrightarrow{F_{ext\to 1+2+3+4}}.\vec{y}_1 = -k_1.Y - b_1.\dot{Y} + Y_{53}$$

$$\to\ \overrightarrow{R_{d,\,1+2+3+4/0}}.\vec{y}_1 = \Sigma\overrightarrow{F_{ext\to 1+2+3+4}}.\vec{y}_1 \ \to\ \boxed{(m_1+m_2+m_3+m_4).\ddot{Y} - m_4.e.\dot{\phi}^2.\cos\phi = -k_1.Y - b_1.\dot{Y} + Y_{53}} \qquad (7)$$

4. Calcul de: $\overrightarrow{\delta_{O^*,\,5/0}}.\vec{x}_0 = \Sigma\overrightarrow{M_{O^*,ext\to 5}}.\vec{x}_0$:

$$\overrightarrow{\delta_{O^*,\,5/0}}.\vec{x}_0 = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{\sigma_{O^*,\,5/0}}.\vec{x}_0)\Big|_0 - \overrightarrow{\sigma_{O^*,\,5/0}}.\frac{d}{dt}\vec{x}_0\Big|_0 = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{\sigma_{O^*,\,5/0}}.\vec{x}_0)\Big|_0$$

$$\overrightarrow{\sigma_{O^*,\,5/0}} = I_{O^*}(S_5).\overrightarrow{\Omega_{50}} = \begin{pmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}_{(b5)} .\dot{\beta}.\vec{x}_5 = A_5.\dot{\beta}.\vec{x}_5 \ \to\ \overrightarrow{\delta_{O^*,\,5/0}}.\vec{x}_0 = A_5.\ddot{\beta}$$

$$\Sigma\overrightarrow{M_{O^*,ext\to 5}}.\vec{x}_0 = -k^*.\beta - b^*.\dot{\beta} + \overrightarrow{M_{O^*,3\to 5}}.\vec{x}_0$$

$$\{F_{5\to 3}\} = \underset{O_3}{\begin{Bmatrix} X_{53} & \lambda.\dot{\beta}.\cos\theta \\ Y_{53} & 0 \\ Z_{53} & \lambda.\dot{\beta}.\sin\theta \end{Bmatrix}}_{(b2)} \ \to\ \overrightarrow{M_{O^*,3\to 5}}.\vec{x}_0 = \left(\overrightarrow{M_{O_3,5\to 3}} + \overrightarrow{O^*O_3} \wedge -(X_{53}.\vec{x}_2 + Y_{53}.\vec{y}_2 + Z_{53}.\vec{z}_2)\right).\vec{x}_0$$

$$\overrightarrow{M_{O^*,3\to 5}}.\vec{x}_0 = -\lambda.\dot{\beta} + \left(l_5.\vec{z}_5 \wedge -(X_{53}.\vec{x}_0 + Y_{53}.\vec{y}_0 + Z_{53}.\vec{z}_0)\right).\vec{x}_0 = -\lambda.\dot{\beta} - l_5.Y_{53}.\cos\beta$$

$$\to\ \overrightarrow{\delta_{O^*,\,5/0}}.\vec{x}_0 = \Sigma\overrightarrow{M_{O^*,ext\to 5}}.\vec{x}_0 \ \to\ \boxed{A_5.\ddot{\beta} = -k^*.\beta - b^*.\dot{\beta} - \lambda.\dot{\beta} - l_5.Y_{53}.\cos\beta} \qquad (8)$$

Au final : En utilisant les équations (1), (4), (7) et (8) :

$$(m_1+m_2+m_3+m_4).\ddot{Y} - m_4.e.\dot{\phi}^2.\cos\phi = -k_1.Y - b_1.\dot{Y} + Y_{53}$$

$A_5.\ddot{\beta} = -k^*.\beta - b^*.\dot{\beta} - \lambda.\dot{\beta} - l_5.Y_{53}.\cos\beta \ \to\ A_5.\ddot{\beta} = -k^*.\beta - b^*.\dot{\beta} - \lambda.\dot{\beta} - l_5.Y_{53}$ *(hypothèse β petit)*

$$Y = -l_5.\beta \ \to\ \dot{Y} = -l_5.\dot{\beta} \ \to\ \ddot{Y} = -l_5.\ddot{\beta}$$

$$\phi = \Omega.t$$

On obtient :

$$-(m_1+m_2+m_3+m_4).l_5.\ddot{\beta}-m_4.e.\Omega^2.\cos\Omega.t-k_1.l_5.\beta-b_1.l_5.\dot{\beta}=Y_{53}\ \ et\ \ \frac{1}{l_5}.(A_5.\ddot{\beta}+k^*.\beta+b^*.\dot{\beta}+\lambda.\dot{\beta})=Y_{53}$$

$$\rightarrow\ -(m_1+m_2+m_3+m_4).l_5{}^2.\ddot{\beta}-m_4.l_5.e.\Omega^2.\cos\Omega.t-k_1.l_5{}^2.\beta-b_1.l_5{}^2.\dot{\beta}=A_5.\ddot{\beta}+k^*.\beta+b^*.\dot{\beta}+\lambda.\dot{\beta}$$

$$(m_1+m_2+m_3+m_4).l_5{}^2.\ddot{\beta}+k_1.l_5{}^2.\beta+b_1.l_5{}^2.\dot{\beta}+A_5.\ddot{\beta}+k^*.\beta+b^*.\dot{\beta}+\lambda.\dot{\beta}=-m_4.l_5.e.\Omega^2.\cos\Omega.t$$

Soit la loi du mouvement :

$$\boxed{\left(A_5+(m_1+m_2+m_3+m_4).l_5{}^2\right).\ddot{\beta}+(b^*+b_1.l_5{}^2+\lambda).\dot{\beta}+(k_1.l_5{}^2+k^*).\beta=-m_4.l_5.e.\Omega^2.\cos\Omega.t}$$