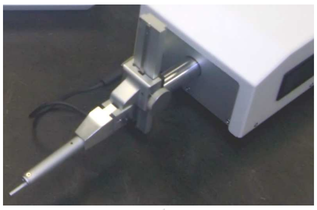
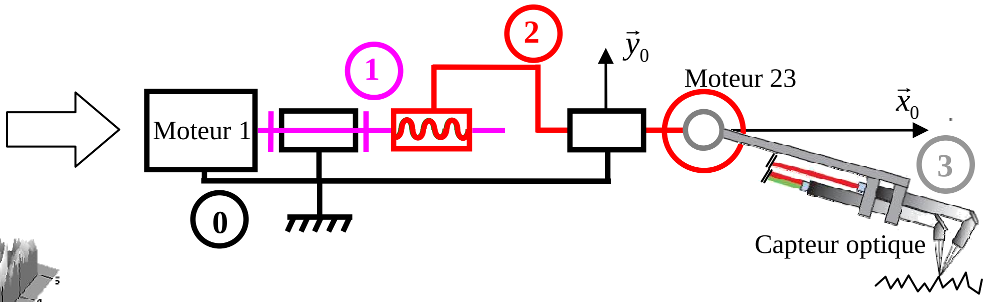
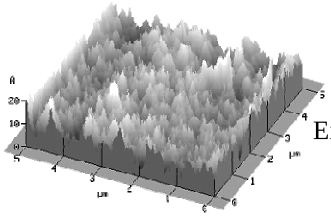
Théorème de l'Energie Cinétique (TEC)

Réel ***Modèle***







Exemple d'état de surface mesuré

Surface à mesurer

La rugosimétrie est la mesure de l'état de surface des pièces mécaniques. L'ordre de grandeur des défauts mesurés est le micron. Cette mesure des états de surfaces est aussi répandue et indispensable que la mesure des caractéristiques dimensionnelles et géométriques des pièces mécaniques. La mesure de rugosimétrie repose traditionnellement sur deux éléments distincts : le capteur, qui peut être mécanique (palpeur) ou optique, et le traitement du signal (algorithmes informatiques), qui permet de traduire les mesures physiques de base, produites par le capteur, en données numériques exploitables, représentatives des caractéristiques physiques de la surface analysée.

Exemple de système mécanique

Rugosimètre

Le Théorème de l'Energie Cinétique (TEC) appliqué à un solide (ou un système de solides) permet d'obtenir une relation scalaire entre les paramètres cinématiques du mouvement, les caractéristiques d'inertie du solide (ou des solides) et les actions mécaniques appliquées sur le solide (ou les solides). Le TEC peut être utilisé seul où avec le PFD. Dans certain cas, le Théorème de l'Energie Cinétique seul peut permettre de déterminer beaucoup plus rapidement les relations d'entrée-sortie entre les efforts (ou les lois de mouvement) d'un système que le PFD. Dans d'autres cas, le PFD restera plus efficace.

1. Théorème de l'énergie cinétique – Enoncés

1.1. Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

Il existe un repère galiléen R_g tel que pour un solide (S) : $\mathcal{P}_{ext\to S/R_g} = \left.\dfrac{d}{dt}E_c(S/R_g)\right|_{R_g}$

Puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures appliquées sur le solide S

Variation par rapport au temps de l'énergie cinétique du solide S par rapport au repère galiléen

1.2. Théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides Σ

Il existe un repère galiléen R_g tel que pour un système (Σ) : $\boxed{\mathcal{P}_{ext\to\Sigma/R_g} + \mathcal{P}_{\text{int}} = \left.\dfrac{d}{dt}E_c(\Sigma/R_g)\right|_{R_g}}$

Puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures appliquées sur le système de solides Σ

Puissance des efforts intérieurs au système de solide Σ

Variation par rapport au temps de l'énergie cinétique du système de solide Σ par rapport au repère galiléen

1.3. Remarques pratiques concernant la mise en œuvre du TEC

Lorsque l'on souhaite obtenir une seule équation couplant les efforts extérieurs et les paramètres cinétiques ou une seule équation de mouvement (uniquement pour les problèmes à une seule mobilité utile). Le TEC est donc plus rapide que le PFD avec lequel il faut souvent isoler plusieurs solides et combiner les équations retenues pour n'en obtenir qu'une au final.

L'équation scalaire obtenue par le TEC est une relation unique combinaison des équations fournies par le PFD. Ce n'est pas une relation scalaire supplémentaire par rapport au PFD.

Dans le cas où il y a plusieurs mobilités utiles, il est possible de combiner le TEC le PFD. On utilise donc l'équation issue du TEC et 1 ou plusieurs équations issues du PFD.

Pour utiliser le TEC, on constate donc qu'il est nécessaire :

- de déterminer l'énergie cinétique d'un solide et/ou d'un ensemble de solides,
- de déterminer les puissances développées par les actions mécaniques appliquées sur le solide ou le système.

2. Energie cinétique

2.1. Energie cinétique d'un point matériel

Par définition, l'énergie cinétique d'un point par rapport à un référentiel galiléen R_g s'exprime

$$E_{C\ S/Rg}=\frac{1}{2}.\int_S \left\|\overrightarrow{V_{P,S/Rg}}\right\|^2.dm$$

$$\boxed{\text{Dans le cas d'un point matériel de masse } m_P \text{ on a : } E_{C\ S/Rg}=\frac{1}{2}.m_P.\left\|\overrightarrow{V_{P,S/Rg}}\right\|^2}$$

2.2. Energie cinétique d'un solide

Par définition, l'énergie cinétique d'un système solide en mouvement par rapport à un référentiel galiléen R_g s'exprime : $E_{C\ S/Rg}=\frac{1}{2}.\int_S \left\|\overrightarrow{V_{P,S/Rg}}\right\|^2.dm$

On démontre que l'énergie cinétique est le commoment du torseur cinétique et du torseur cinématique : $\boxed{E_{C\ S/Rg}=\frac{1}{2}.\left\{\mathscr{C}_{S/Rg}\right\}.\left\{C_{S/Rg}\right\}}$

(→ l'énergie cinétique est indépendante du point choisi sur les torseurs)

Cas particuliers très fréquemment utilisés :

- Si O est un point fixe dans le mouvement de S/R :

$$Ec_{S/Rg}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/R}}.I_O(S).\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

- Si G centre de gravité de S :

$$Ec_{S/Rg}=\frac{1}{2}.m.\left\|\overrightarrow{V_{G,S/Rg}}\right\|^2+\frac{1}{2}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}.I_G(S).\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

2.3. Energie cinétique d'un système de solides

L'énergie cinétique d'un système de solides Σ par rapport à un référentiel galiléen R_g est la somme des énergies cinétiques par rapport à un référentiel galiléen R_g des S_i solides : $Ec_{\Sigma/Rg} = \sum_i Ec_{Si/Rg}$

2.4. Démarche de calcul pour déterminer une énergie cinétique

S'agit-il d'un solide où toute la masse est concentrée en un point P ?

Oui :

On en revient à la définition : $E_{C\ S/Rg} = \frac{1}{2}.\int_S \left\|\overrightarrow{V_{P,S/Rg}}\right\|^2.dm = \frac{1}{2}.m_P.\left\|\overrightarrow{V_{P,S/Rg}}\right\|^2$

Non :

On décompose le système de solides Σ en solides élémentaires S_i

$$Ec_{\Sigma/Rg} = \sum_i Ec_{Si/Rg}$$

Quelle est la nature du mouvement considéré ?

Simple :

Mouvement de rotation autour d'un axe fixe $(O, \vec{x})$

En quels points sont données les inerties ?

En O :

$$Ec_{S/Rg} = \frac{1}{2}.I_{Ox}.\dot{\theta}^2$$

En G :

$$Ec_{S/Rg} = \frac{1}{2}.m.\left\|\overrightarrow{V_{G,S/Rg}}\right\|^2 + \frac{1}{2}.I_{Gx}.\dot{\theta}^2$$

Mouvement de translation

$$Ec_{S/Rg} = \frac{1}{2}.m.\left\|\overrightarrow{V_{G,S/Rg}}\right\|^2$$

Complexe :

Où est donnée la matrice d'inertie ?

En O un point fixe de S/R_g
(s'il en existe un)

$$Ec_{S/Rg} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/R}}.I_O(S).\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

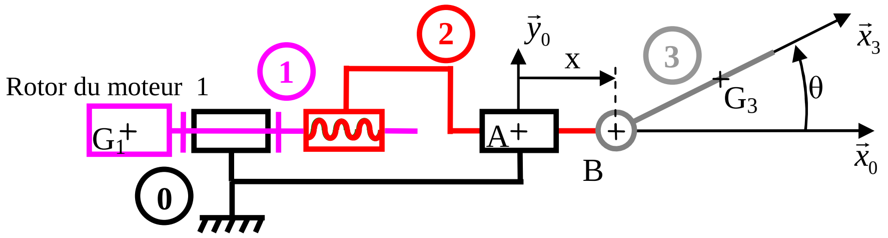
Au point G centre de gravité de S

$$Ec_{S/Rg} = \frac{1}{2}.m.\left\|\overrightarrow{V_{G,S/Rg}}\right\|^2 + \frac{1}{2}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}.I_G(S).\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

En un point A quelconque
(cas très rare)

$$Ec_{S/Rg} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{V_{A,S/Rg}}.\overrightarrow{R_{C,S/Rg}} + \frac{1}{2}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}.\overrightarrow{\sigma_{A,1/0}}$$

Application au rugosimètre – Objectif : Calculer l'énergie cinétique de l'ensemble $\Sigma = 1+2+3$



Hypothèses et données :

Le rotor (1), de centre de gravité G_1 tel que $\overrightarrow{OG_1} = -a.\vec{x}_0$, *a pour moment d'inertie selon l'axe* $(A, \vec{x}_0)$ *J_1. On note φ le paramètre angulaire de la liaison pivot de (1) par rapport à (0) tel que* $\varphi = (\vec{y}_0 ; \vec{y}_1)$. *Le moteur 1 génère le mouvement de rotation de (1) par rapport à (0). Le couple moteur appliqué sur (1) est noté* $\overrightarrow{C_{moteur\,1\to 1}} = C_1.\vec{x}_0$.

Le coulisseau (2), de centre de gravité G_2, a pour masse m_2. La liaison glissière entre les solides (2) et (0) a pour paramètre de position x tel que $\overrightarrow{AB} = x.\vec{x}_0$.

La liaison hélicoïdale entre les solides (1) et (2) possède un pas à droite noté pas tel que pas=0,5 mm/tour.

L'ensemble (3), de centre de gravité G_3 tel que $\overrightarrow{BG_3} = r.\vec{x}_3$, *a pour masse m_3. On donne la matrice d'inertie de cet ensemble :* $I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & -E_3 \\ -F_3 & B_3 & -D_3 \\ -E_3 & -D_3 & C_3 \end{pmatrix}_{(b_3)}$.

On note θ le paramètre angulaire de la liaison pivot de (3) par rapport à (2) tel que $\theta = (\vec{x}_0 ; \vec{x}_3)$. *Le moteur 23 génère le mouvement de rotation de (3) par rapport à (2). Le couple moteur appliqué sur (3) est noté* $\overrightarrow{C_{moteur\,23\to 3}} = C_3.\vec{z}_0$.

Un système d'équilibrage (ressort de torsion) permet à la tête optique d'être horizontale (θ = 0°) en position de repos, c'est-à-dire lorsque le moteur 23 n'est pas alimenté. Ce système exerce sur l'ensemble (3) un couple de rappel noté $\overrightarrow{C_{2\to 3}} = C_r.\vec{z}_0$.

On considère que toutes les liaisons sont parfaites. L'action mécanique de la pesanteur est telle que $\vec{g} = -g.\vec{y}_0$.

$$Ec_{\Sigma/0} = Ec_{1/0} + Ec_{2/0} + Ec_{3/0}$$

Nature du mouvement de 1/0 ? : *Rotation autour de l'axe* $(G_1, \vec{z}_0)$*, le moment d'inertie suivant l'axe de rotation* $(A, \vec{x}_0)$ *est connu* ⇩	*Nature du mouvement de 2/0 ? :* *Mouvement de translation suivant* $(A, \vec{x}_0)$ ⇩ $Ec_{2/0} = \frac{1}{2}.m_2.\left\Vert\overrightarrow{V_{G_2,2/0}}\right\Vert^2$ *avec :* $\overrightarrow{V_{G_2,2/0}} = \dot{x}.\vec{x}_0$	*Nature du mouvement de 3/0 ? :* *Mouvement quelconque, la matrice d'inertie est donnée en G_3* ⇩ $Ec_{3/0} = \frac{1}{2}.m_3.\left\Vert\overrightarrow{V_{G_3,3/0}}\right\Vert^2 + \frac{1}{2}.\overrightarrow{\Omega_{3/0}}.I_{G_3}(3).\overrightarrow{\Omega_{3/0}}$ *avec :* $\overrightarrow{V_{G_3,3/0}} = \dot{x}.\vec{x}_0 + r.\dot{\theta}.\vec{y}_3$ $\rightarrow \left\Vert\overrightarrow{V_{G_2,2/0}}\right\Vert^2 = \dot{x}^2 + r^2.\dot{\theta}^2 - 2.\dot{x}.r.\dot{\theta}.\sin\theta$

$$Ec_{1/0} = \frac{1}{2}.J_1.\dot{\varphi}^2$$

$$Ec_{2/0} = \frac{1}{2}.m_2.\dot{x}^2$$

$$I_{G_3}(3).\overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & -E_3 \\ -F_3 & B_3 & -D_3 \\ -E_3 & -D_3 & C_3 \end{pmatrix}_{(b_3)} .\dot{\theta}.\vec{z}_3$$

$$\overrightarrow{\Omega_{3/0}}.I_{G_3}(3).\overrightarrow{\Omega_{3/0}} = C_3.\dot{\theta}^2$$

$$Ec_{3/0} = \frac{1}{2}.m_3.(\dot{x}^2 + r^2.\dot{\theta}^2 - 2.\dot{x}.r.\dot{\theta}.\sin\theta) + \frac{1}{2}.C_3.\dot{\theta}^2$$

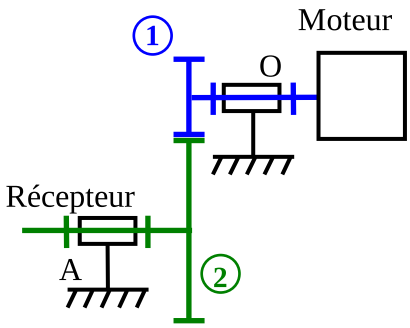
D’où : $Ec_{\Sigma/0} = Ec_{1/0} + Ec_{2/0} + Ec_{3/0} = \frac{1}{2}.J_1.\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}.m_2.\dot{x}^2 + \frac{1}{2}.m_3.(\dot{x}^2 + r^2.\dot{\theta}^2 - 2.\dot{x}.r.\dot{\theta}.\sin\theta) + \frac{1}{2}.C_3.\dot{\theta}^2$

2.5. Inertie équivalente - masse équivalente

Lorsqu’on détermine littéralement l’énergie cinétique d’un ensemble de solides qui appartiennent à une même chaîne cinématique, on peut parfois l’exprimer en fonction d’un seul paramètre cinématique élevé au carré, on fait alors apparaître un terme en facteur de ce paramètre élevé au carré.

Cas de l’inertie équivalente : *Exemple de transmission avec réducteur de vitesse.*

Soit 1 la classe d’équivalence correspondant à l’ensemble des pièces liées en rotation avec l’arbre moteur (en général rotor moteur, accouplement, pignon menant…) ; on note ω_1 la vitesse de rotation de l’ensemble 1 et J_1 son moment d’inertie par rapport à son axe de rotation. Soit 2 la classe d’équivalence correspondant à l’ensemble des pièces liées en rotation avec l’arbre récepteur (en général élément récepteur, pignon mené …) ; on note ω_2 la vitesse de rotation de l’ensemble 2 et J_2 son moment d’inertie par rapport à son axe de rotation.



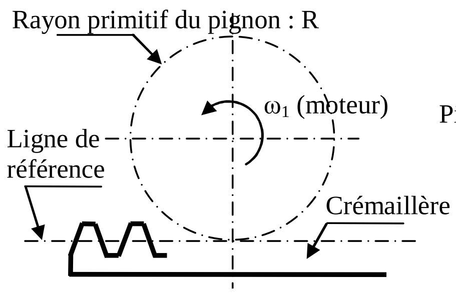
Soit $k = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ *le rapport de transmission (<1 pour un réducteur de vitesse).*

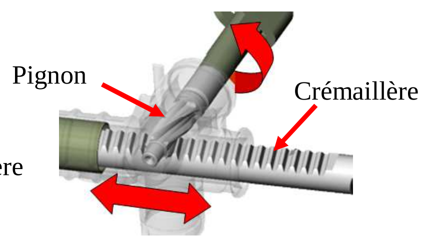
On a : $Ec_{\Sigma/0} = Ec_{1/0} + Ec_{2/0} = \frac{1}{2}.J_1.\omega_1^2 + \frac{1}{2}.J_2.\omega_2^2 = \frac{1}{2}.(J_1 + J_2.k^2).\omega_1^2 \rightarrow$ *Le terme* $J_1 + J_2.k^2$ *est appelé « **Inertie équivalente ramenée à l’arbre moteur** », de cette chaîne cinématique).*

Remarque : Si on exprimait l’énergie cinétique en fonction de ω_2, on trouverait « l’inertie équivalente ramenée à l’arbre récepteur » : $\frac{1}{k^2}.J_1 + J_2$

Cas de la masse équivalente : *Exemple d’un système pignon-crémaillère*

Si le paramètre cinématique en fonction duquel l’énergie cinétique est exprimée, est la vitesse d’un solide qui est en translation, alors on parle de « masse équivalente ».





Soit 1 la classe d'équivalence correspondant à l'ensemble des pièces liées en rotation avec l'arbre moteur, on note ω_1 la vitesse de rotation de l'ensemble 1 et J_1 son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation. Soit 2 la classe d'équivalence correspondant à l'ensemble des pièces liées à la crémaillère de masse totale M_2.

Expression de la vitesse de la crémaillère : $V_2 = R.\omega_1$

D'où : $Ec_{\Sigma/0} = Ec_{1/0} + Ec_{2/0} = \frac{1}{2}.J_1.\omega_1^2 + \frac{1}{2}.M_2.V_2^2 \rightarrow Ec_{\Sigma/0} = \frac{1}{2}.(\frac{J_1}{R^2} + M_2.)V_2^2$

Le terme $\frac{J_1}{R^2} + M_2$ *est appelé « masse équivalente » (ramenée au récepteur), de cette chaîne cinématique.*

3. Puissances

3.1. Puissance galiléenne d'une action mécanique extérieure sur un solide

La puissance galiléenne d'une action mécanique extérieure sur un solide S par rapport à un repère galiléen R_g est le commoment entre le torseur d'action mécanique de cette action mécanique et le torseur cinématique :

$$\boxed{\mathcal{P}_{ext \rightarrow S/Rg} = \{F_{ext \rightarrow S}\}.\{C_{S/Rg}\}}$$

Cas particuliers très fréquemment utilisés :

- Cas d'une force extérieure appliquée en un point A : $\mathcal{P}_{ext \rightarrow S/Rg} = \overrightarrow{F_{ext \rightarrow S}}.\overrightarrow{V_{A,S/Rg}}$

  Cas d'un couple extérieur appliquée en un point A : $\mathcal{P}_{ext \rightarrow S/Rg} = \overrightarrow{C_{A,ext \rightarrow S}}.\overrightarrow{\Omega_{S/Rg}}$

La puissance extérieure est une puissance scalaire, elle dépend du repère de référence R_g.

Dans le cas où le bâti est fixe par rapport à R_g et si les liaisons avec le bâti sont parfaites, la puissance développée par les actions mécaniques de liaison du bâti sur le système isolé est nulle.

Si $\mathcal{P}_{ext \rightarrow S/Rg} > 0$, l'action mécanique est motrice. Si $\mathcal{P}_{ext \rightarrow S/Rg} < 0$, l'action mécanique est réceptrice.

Application au rugosimètre – Objectif : Calculer les puissances extérieures de l'ensemble $\Sigma = 1 + 2 + 3$

Si on isole l'ensemble $\Sigma = 1 + 2 + 3$*, on retrouve deux éléments extérieurs développant une puissance non nulle :* $\mathcal{P}_{moteur\ 1 \rightarrow 1/0}$ et $\mathcal{P}_{g \rightarrow 3/0}$.

$$\mathcal{P}_{moteur\ 1 \rightarrow 1/0} = \left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ C_1.\vec{x}_0 \end{matrix}\right\}_{G_1} . \left\{\begin{matrix} \dot{\varphi}.\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{G_1} = C_1.\dot{\varphi}$$

$$\mathcal{P}_{g \rightarrow 3/0} = \left\{\begin{matrix} -m_3.g.\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{G_3} . \left\{\begin{matrix} \dot{\theta}.\vec{z}_3 \\ \dot{x}.\vec{x}_0 + r.\dot{\theta}.\vec{y}_3 \end{matrix}\right\}_{G_1} = -m_3.g.r.\dot{\theta}.\vec{y}_0.\vec{y}_3 = -m_3.g.r.\dot{\theta}.\cos\theta$$

$\mathcal{P}_{g \rightarrow 1/0}$ *et* $\mathcal{P}_{g \rightarrow 2/0}$ *sont 2 puissances extérieures nulles ici.*

3.2. Puissance des efforts intérieurs

La puissance des efforts intérieurs entre un solide S_i et un solide S_j est le commoment entre le torseur d'action mécanique de S_i sur S_j et le torseur cinématique de S_j par rapport à S_i :

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{int}} = \mathcal{P}_{Si \leftrightarrow Sj} = \{F_{Si \to Sj}\}\{C_{Sj/Si}\}}$$

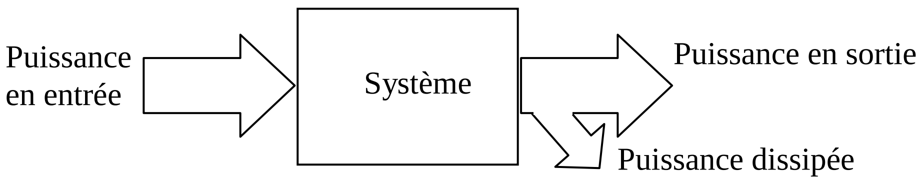
Attention aux indices, ils sont permutés : $S_i \to S_j$ et S_j par rapport à S_i !!

La puissance des efforts intérieurs ne dépend pas du repère de référence R_g.

Dans le cas d'une liaison parfaite $\mathcal{P}_{Si \leftrightarrow Sj} = 0$ pour tout mouvement compatible avec la liaison.

La puissance des efforts intérieurs est une puissance dissipée $\mathcal{P}_{Si \leftrightarrow Sj} < 0$.

Dans certains problèmes, la puissance perdue dans un mécanisme est donnée par le rendement η de ce mécanisme.



On a $\mathcal{P}_{\text{int}} = \mathcal{P}_S - \mathcal{P}_e$ et $\eta = \dfrac{\mathcal{P}_S}{\mathcal{P}_e}$ $\rightarrow$ $\mathcal{P}_{\text{int}} = \mathcal{P}_e.(\eta - 1)$.

Application au rugosimètre – Objectif : Calculer les puissances intérieures de l'ensemble $\Sigma = 1 + 2 + 3$
Si on isole l'ensemble $\Sigma = 1 + 2 + 3$, on retrouve deux éléments intérieurs développant une puissance non nulle : $\mathcal{P}_{(moteur\ 23)\ 3 \leftrightarrow 2}$ et $\mathcal{P}_{(ressort)\ 3 \leftrightarrow 2}$.

$$\mathcal{P}_{(moteur\ 23)\ 3 \leftrightarrow 2} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_3.\vec{z}_0 \end{Bmatrix} . {}_B\begin{Bmatrix} \dot{\theta}.\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = C_3.\dot{\theta}$$

$$\mathcal{P}_{(ressort)\ 3 \leftrightarrow 2} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_r.\vec{z}_0 \end{Bmatrix} . {}_B\begin{Bmatrix} \dot{\theta}.\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = C_r.\dot{\theta}$$