



# Mécanique 1

Renaud Costadoat  
Conservatoire National des Arts et Métiers



le cnam

## Introduction mathématique

La mécanique a pour objet l'étude du **mouvement**, des déformations ou des états d'équilibre des systèmes physiques.

Afin d'appréhender la **modélisation** et la **Résolution** de ces problèmes il est nécessaire de revoir les notions de mathématique suivantes:

- le vecteur,
- le produit scalaire,
- le produit vectoriel,
- le champ de vecteurs,
- le torseur,
- les repères et axes de coordonnées.

## Vecteur

### Definition

Un vecteur non nul  $\vec{AB}$  est caractérisé par :

- sa **direction** : la droite ( $D$ ) passant par  $A$  et  $B$ ,
- son **sens** : de  $A$  vers  $B$ ,
- sa **norme** : la distance  $d$  entre les points  $A$  et  $B$ .



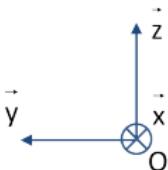
- **Vecteur glissant:** Un vecteur glissant (ou glisseur) est défini par une droite ( $D$ ) et un vecteur  $\vec{V}$ . Deux vecteurs glissants sont équivalents s'ils ont même support et même vecteur représentant.
- **Vecteur lié:** Un vecteur lié est défini par une origine  $A$  et un vecteur  $\vec{V}$ .

## Composantes d'un vecteur

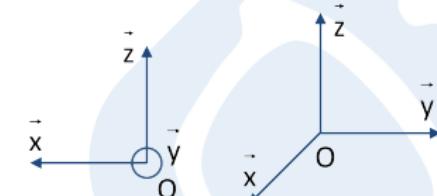
- **Repère orthonormé direct:** Un repère orthonormé direct de dimension 3, ( $R$ ), est constitué d'une base orthonormée directe de dimension 3.

Elle est définie par trois vecteurs unitaires (de norme 1)  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$  tels que  $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$  et  $\vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{y}$ , soit son origine  $O$ , on le note :  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

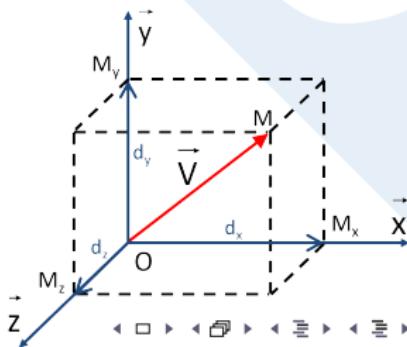
Plan



Spatial



- Soit un point  $M$ , sa position dans  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est le vecteur  $\overrightarrow{OM}$ ,
- $\overrightarrow{OM} = dx \cdot \vec{x} + dy \cdot \vec{y} + dz \cdot \vec{z}$ .
- Écriture en colonne:  $\overrightarrow{OM} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$
- Norme:  $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$



## Produit d'un vecteur par un scalaire

Le terme **scalaire** désigne ici un nombre réel. Le produit d'un vecteur  $\vec{u}$  par un scalaire  $a$  est un vecteur noté :  $a \cdot \vec{u}$ .

- de même direction et sens que  $\vec{u}$ , dont la longueur vaut:  $a \cdot \|\vec{u}\|$ , si  $a > 0$ ,
- de même direction mais de sens contraire que  $\vec{u}$ , dont la longueur vaut :  $-a \cdot \|\vec{u}\|$ , si  $a < 0$ ,
- il s'agit d'un vecteur nul si  $a = 0$ .



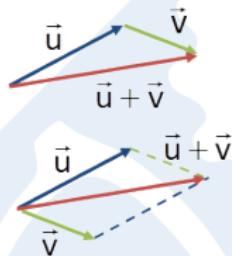
Le produit d'un vecteur par un scalaire est **distributif** sur l'addition des scalaires :  
 $(a+b) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}$  mais il n'est pas commutatif : la notation  $\vec{u} \cdot a$  n'a pas de sens.

Remarque : deux vecteurs sont colinéaires (parallèles) si et seulement s'ils sont proportionnels, c'est-à-dire s'il existe un nombre  $a$  tel que  $\vec{u} = a \cdot \vec{v}$ .

## Somme de deux vecteurs

La somme de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est un vecteur, noté  $\vec{u} + \vec{v}$ , qui est construit de la manière suivante :

- on amène l'origine du deuxième vecteur à l'extrémité du premier
- la somme est le vecteur qui joint l'origine du premier vecteur à l'extrémité de second
- il s'agit du troisième côté d'un triangle formé par les deux premiers vecteurs



### Définition

A partir de trois points A, B et C existe la relation de **Chasles**:  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$   
Cela permet d'introduire les vecteurs opposés:  $-\vec{AB} = \vec{BA}$

En effet,  $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$ , donc  $-\vec{AB} = \vec{BA}$ .

Le produit d'un scalaire par un vecteur est distributif sur l'addition des vecteurs :  
 $a.(\vec{u} + \vec{v}) = a.\vec{u} + a.\vec{v}$

## Produit scalaire de deux vecteurs

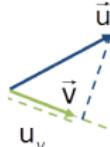
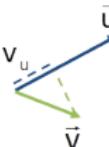
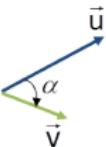
### Definition

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs faisant un angle géométrique  $\alpha$ , le produit scalaire noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , le nombre réel valant:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)$ .

Le produit scalaire est nul

- Si l'un des vecteurs est nul
- Si l'angle entre eux est droit (c'est-à-dire si et  $\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90^\circ$ ),
- Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont dans ce cas orthogonaux.

Le produit scalaire strictement positif si l'angle est aigu et strictement négatif si l'angle est obtus. Dans les cas suivants,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = v_u \cdot \|\vec{u}\| = u_v \cdot \|\vec{v}\|$ .



## Propriétés du produit scalaire de deux vecteurs

- Le produit scalaire est commutatif  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ ,
- Il est distributif sur l'addition des vecteurs  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ ,
- Le vecteur nul est l'élément absorbant du produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = \vec{0}$ ,
- $\vec{u} \cdot \vec{u}$  s'appelle le carré scalaire du vecteur  $\vec{u}$  et se note  $\vec{u}^2$ , ainsi  $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$ ,
- Le carré scalaire d'un vecteur est égal au carré de sa norme  $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$  et donc  $\sqrt{\vec{u}^2} = \|\vec{u}\|$ ,
- Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul,  $\vec{u}$  est perpendiculaire à  $\vec{v}$  si et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ,
- Dans le plan rapporté à une base orthonormale  $(\vec{i}, \vec{j})$ ,  
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$$
- Dans le plan rapporté à une base orthonormale  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ,  
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$$

## Produit vectoriel de deux vecteurs

Definition

Le produit vectoriel des deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , noté  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ , est un vecteur:

- normal au plan vectoriel de base ( $\vec{u}, \vec{v}$ ),
- dont la norme vaut  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$ ,
- tel que  $(\vec{u}, \vec{v}, (\vec{u} \wedge \vec{v}))$  forme une base directe.

Ainsi, si ( $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ) sont colinéaires :  $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$

Dans un repère orthonormé direct:

$$\begin{array}{ll} \vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{z} & \vec{y} \wedge \vec{x} = -\vec{z} \\ \vec{y} \wedge \vec{z} = \vec{x} & \vec{z} \wedge \vec{y} = -\vec{x} \\ \vec{z} \wedge \vec{x} = \vec{y} & \vec{x} \wedge \vec{z} = -\vec{y} \end{array}$$

*Remarque:* Pour retrouver efficacement ces relations, on peut écrire (sur un coin de feuille) : "x y z x y", en parcourant cette liste de gauche à droite, on obtient un signe positif et inversement.

## Calcul en composantes du produit vectoriel

Soient les coordonnées  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  et  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , ce qui permet de calculer leur produit vectoriel de la façon suivante:  $\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_1 \cdot \vec{x} + u_2 \cdot \vec{y} + u_3 \cdot \vec{z}) \wedge (v_1 \cdot \vec{x} + v_2 \cdot \vec{y} + v_3 \cdot \vec{z})$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = u_1 \cdot \vec{x} \wedge v_1 \cdot \vec{x} + u_1 \cdot \vec{x} \wedge v_2 \cdot \vec{y} + u_1 \cdot \vec{x} \wedge v_3 \cdot \vec{z} + u_2 \cdot \vec{y} \wedge v_1 \cdot \vec{x} + u_2 \cdot \vec{y} \wedge v_2 \cdot \vec{y} + u_2 \cdot \vec{y} \wedge v_3 \cdot \vec{z} + u_3 \cdot \vec{z} \wedge v_1 \cdot \vec{x} + u_3 \cdot \vec{z} \wedge v_2 \cdot \vec{y} + u_3 \cdot \vec{z} \wedge v_3 \cdot \vec{z}$$

$$\text{Donc, } \vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2) \cdot \vec{x} + (u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3) \cdot \vec{y} + (u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1) \cdot \vec{z}$$

Ce qui s'écrit en colonne:  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2 \\ u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3 \\ u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 \end{bmatrix}$

### Remarque

Un moyen mnémotechnique pour se rappeler de ce résultat revient à placer les deux premières composantes de chaque vecteur sous les autres et à faire 3 **produits en croix** (un pour chaque composante du résultant) à partir de la deuxième ligne.

$u_1$	$v_1$
$u_2$	$v_2$
$u_3$	$v_3$
$u_1$	$v_1$
$u_2$	$v_2$

## Produit mixte

Definition

Soient trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$ , le produit mixte revient à calculer:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Ainsi:

- $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$ ,
- $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] = [\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ ,
- $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix}$
- $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (u_x v_y w_z + v_x w_y u_z + w_x u_y v_z) - (w_x v_y u_z + v_x u_y w_z + u_x w_y v_z)$

Si deux des trois vecteurs sont égaux ou colinéaires, le produit mixte est nul.

Si les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  ont même origine, la valeur absolue du produit mixte  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ , est égale au volume du parallélépipède construit sur  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ .

## Double produit vectoriel

- Combiner trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  par deux produits vectoriels successifs permet d'obtenir un double produit vectoriel,
- Exemple:  $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ ,
- Attention: comme le produit vectoriel n'est ni associatif, ni commutatif, il est nécessaire d'utiliser comme ici des parenthèses et le résultat va dépendre à la fois de l'ordre dans lequel les opérations sont effectuées et de l'ordre de présentation des 3 vecteurs,
- Les 2 formules suivantes peuvent être démontrées:

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}$$

## Champ de vecteurs

Un champ de vecteurs est une application qui définit un vecteur  $\overrightarrow{V_M}$  en tout point de l'espace (champ de vecteurs vitesse, champ magnétique, champ de pesanteur,...),

Un champ de vecteurs  $\overrightarrow{M_P}$  équiprojectif est un champ de vecteurs qui répond au théorème de Varignon (parfois appelé théorème de BABAR « entre nous »).

$$\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}$$

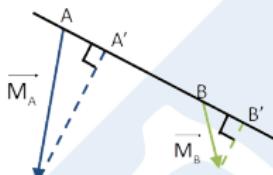
### Definition

- $\overrightarrow{R}$  est un vecteur caractéristique du champ de vecteurs appelé « résultante »
- $\overrightarrow{M_P}$  sont les moments en chaque point P du champ de vecteurs.

## L'équiprojectivité

### Definition

La propriété d'équiprojectivité d'un tel champ de vecteurs est exprimée par le fait que deux moments  $\vec{M}_A$  et  $\vec{M}_B$  du champ de vecteurs ont la même projection sur la droite passant par les deux points A et B :  $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$



*Démonstration:* En partant du théorème de Varignon et en multipliant par  $\overrightarrow{AB}$ , on obtient

$$\vec{M}_B \cdot \vec{AB} = \vec{M}_A \cdot \vec{AB} + \vec{BA} \wedge \vec{R} \cdot \vec{AB} \text{ or } \vec{BA} \wedge \vec{R} \cdot \vec{AB} \text{ donc } \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}.$$

Remarques:

- La distribution des vecteurs vitesse dans un solide indéformable est un champ de vecteurs équiprojectif puisque il respecte le théorème de Varignon,
- L'équiprojectivité entre les vecteurs vitesse peut, donc, être utilisée pour les constructions graphiques.

## Le torseur

Un torseur est la représentation d'un champ de vecteurs équiprojectif, dont les vecteurs  $\overrightarrow{M_P}$  en chaque point P s'appellent « moments » du torseur. De par les propriétés d'un tel champ, les moments en deux points P et O vérifient la relation de Varignon.

Définition

### *Éléments de réduction d'un torseur*

Un torseur est donc déterminé par deux vecteurs, constituant sa « réduction » en un point quelconque P de l'espace, à savoir :

- La résultante  $\overrightarrow{R}$ , ce vecteur est unique et indépendant du point de réduction,
- Le moment en P du torseur  $\overrightarrow{M_P}$ .

*Remarque:* La résultante est donc un vecteur caractéristique du champ qui permet, à partir du moment en un point particulier, de retrouver les autres moments

$$\{T\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{M_P} \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{ccc} \theta_x & x \\ \theta_y & y \\ \theta_z & z \end{array} \right\}_{P,R(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

## Invariants d'un torseur

Un torseur possède deux grandeurs indépendantes du point où on l'écrit:

- l'invariant vectoriel : la résultante  $\vec{R}$ ,
- l'invariant scalaire appelé aussi l'automoment:  $A = \vec{R} \cdot \vec{M}_A = \vec{R} \cdot \vec{M}_B$

### Torseurs particuliers

- Le torseur à résultante ou glisseur est un torseur dont:
  - ▶ l'automoment est nul, c'est à dire que la résultante et le moment sont orthogonaux en tout points
  - ▶ le moment est nul en tout point de son axe.
- Le torseur couple est un torseur dont la résultante est nulle.

## Opérations sur les torseurs

- Égalité de deux torseurs

$$\{T_1\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1 \end{array} \right\}_O = \{T_2\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2 \end{array} \right\}_O \rightarrow \vec{R}_1 = \vec{R}_2, \vec{M}_1 = \vec{M}_2$$

- Somme de deux torseurs

$$\{T_1\}_O + \{T_2\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1 \end{array} \right\}_O + \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2 \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \end{array} \right\}_O$$

- Multiplication d'un torseur par un scalaire

$$\lambda \cdot \{T_1\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \cdot \vec{R}_1 \\ \lambda \cdot \vec{M}_1 \end{array} \right\}_O$$

## Éléments centraux d'un torseur

- Point central

Un point central d'un torseur est un point pour lequel la résultante et le moment sont colinéaires :

Si  $\vec{M}_P = \lambda \cdot \vec{R}$  alors P est un point central, en P, le moment du torseur est minimum.

- Détermination de l'axe central

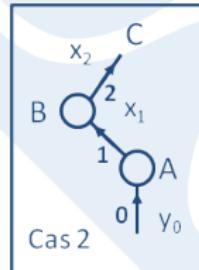
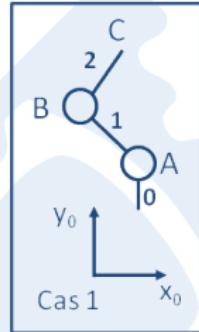
$$\text{Soit un torseur } \{T\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \lambda \cdot \vec{R} \\ \lambda \cdot \vec{M} \end{array} \right\}_O$$

L'axe central du torseur est la droite parallèle à  $\vec{R}$  et passant par le point P tel que :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{\vec{R}^2}$$

## Les repères de projection

- Les opérations sur les torseurs et les vecteurs présentées ci-dessus ne sont valables que si ces éléments sont présentés sur le même repère.
- Il sera souvent utile dans le cas d'une résolution de cinématique d'introduire plusieurs repères.
- Ainsi, la suite montre les méthodes pour ramener les torseurs et les vecteurs dans le même repère de description.
- Cas 1: Un repère global
  - ▶  $R_0$ : Lié à la pièce 0:  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = a_1 \cdot \vec{x}_0 + a_2 \cdot \vec{y}_0 + b_1 \cdot \vec{x}_0 + b_2 \cdot \vec{y}_0$ ,
  - ▶  $a_i$  et  $b_i$  sont des variables en fonction du déplacement des pièces.
- Cas 2: Un repère associé à chaque pièce
  - ▶  $R_0$ : Lié à la pièce 0,  $R_1$ : Lié à la pièce 1,  $R_2$ : Lié à la pièce 2.  
 $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = a_1 \cdot \vec{x}_1 + b_1 \cdot \vec{x}_2$
  - ▶  $a_i$  et  $b_i$  sont des constantes liées aux dimensions des pièces.



## Changement de repère dans les espaces affines

- Soient  $R = (O, e)$  et  $R' = (O', e')$  deux repères différents, alors les coordonnées.

$\overrightarrow{M_R} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  s'obtiennent à partir des coordonnées  $\overrightarrow{M_R} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  du même point  $M$   
mais dans le repère  $R$ , à l'aide de 3 équations:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = a_{11}.x + a_{12}.y + a_{13}.z \\ y' = a_{21}.x + a_{22}.y + a_{23}.z \\ z' = a_{31}.x + a_{32}.y + a_{33}.z \end{array} \right.$$

- Matriciellement ces équations s'écrivent:  $M_{R'} = A.M_R + B$  où  $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$  est la matrice de passage dans V.

## Changement d'axes de coordonnées

- Les formules qui suivent permettent d'exprimer les coordonnées d'un point M dans l'un des repères en fonction des coordonnées dans l'autre repère,
- Soit un repère cartésien  $O(\vec{x}, \vec{y})$  dans lequel les coordonnées  $(x, y)$  d'un point M s'expriment en fonction des coordonnées polaires  $(r, \phi)$  par les formules élémentaires

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\phi) \\ y = r \cdot \sin(\phi) \end{cases}$$

- Dans le nouveau repère  $O(\vec{x}', \vec{y}')$  déduit du précédent par une rotation d'angle  $\theta$  les nouvelles coordonnées polaires sont  $r$  et  $(\phi - \theta)$  et les coordonnées cartésiennes deviennent:

$$\begin{cases} x' = r \cdot \cos(\phi - \theta) \\ y' = r \cdot \sin(\phi - \theta) \end{cases}$$

## Changement d'axes de coordonnées

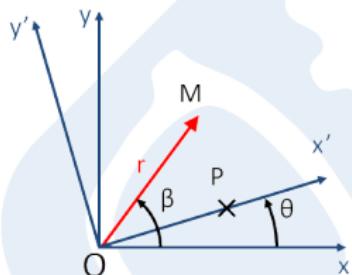
### Definition

- Les formules suivantes permettant de passer d'un repère à l'autre.

$$\begin{cases} \vec{x}' = \cos(\theta) \cdot \vec{x} + \sin(\theta) \cdot \vec{y} \\ \vec{y}' = -\sin(\theta) \cdot \vec{x} + \cos(\theta) \cdot \vec{y} \end{cases}$$

- En sens inverse,

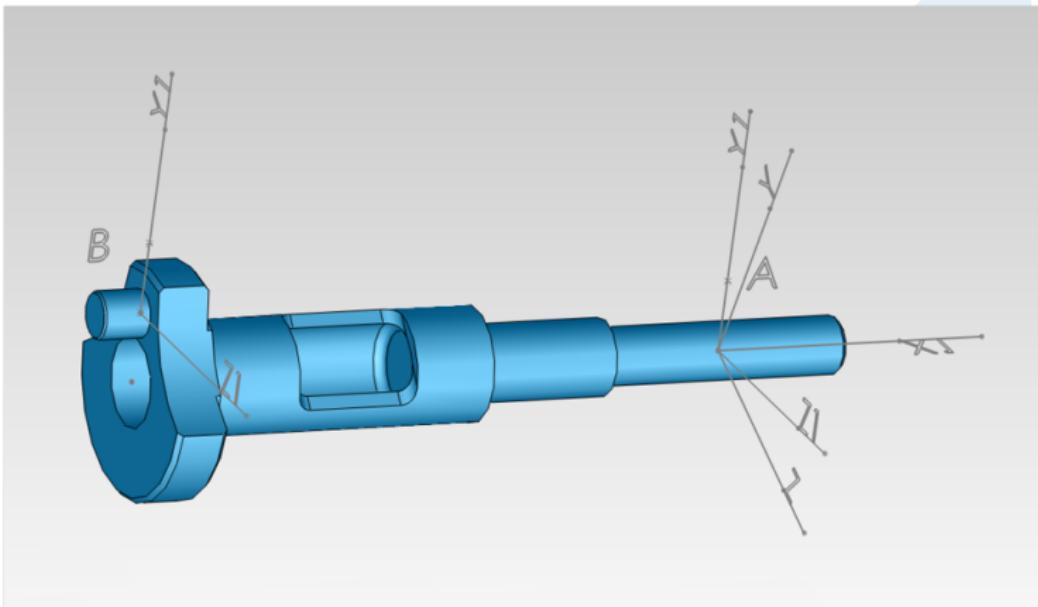
$$\begin{cases} \vec{x} = \cos(\theta) \cdot \vec{x}' - \sin(\theta) \cdot \vec{y}' \\ \vec{y} = \sin(\theta) \cdot \vec{x}' + \cos(\theta) \cdot \vec{y}' \end{cases}$$



Remarque : s'il peut s'avérer difficile de mémoriser le signe à mettre devant  $\sin(\theta)$  (+ dans une ligne et – dans l'autre) l'astuce consiste à considérer un point particulier (tel que P sur la figure) avec  $y = 0$  ou  $y' = 0$  selon les besoins et de vérifier alors sur la figure le signe de la coordonnée voulue.

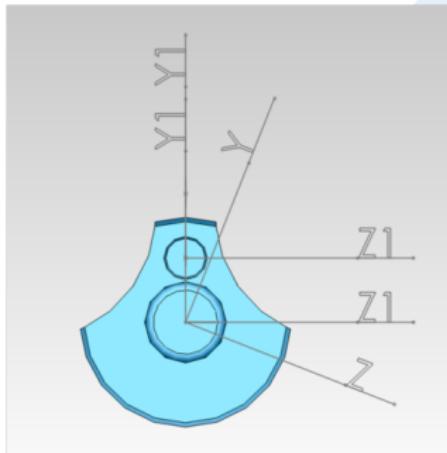
## Application

Exemple de pièce munie de deux repères  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

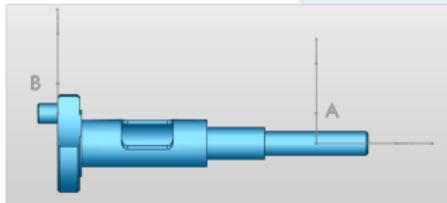


## Projection de vecteurs dans une base

Soit  $\theta$ , l'angle entre  $Z$  et  $Z_1$ , écrire les coordonnées du vecteur  $\vec{AB}$ , dans les deux repères (choisir les inconnues nécessaires).



Ainsi, les coordonnées d'un vecteur varient selon qu'elles sont écrites dans le repère local ou le repère global.



## Les liaisons mécaniques

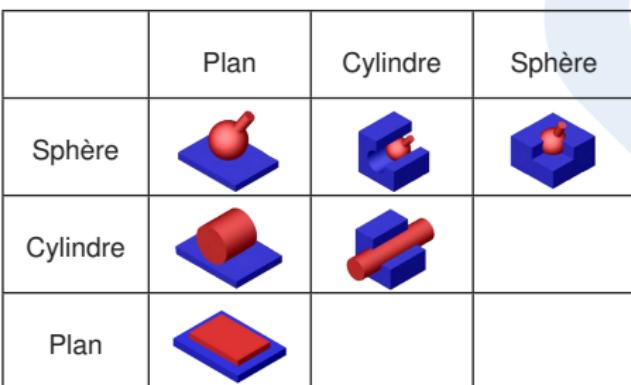
Objectif

- Le principal outil utilisé afin de modéliser le comportement d'un mécanisme est le torseur car il permet d'exprimer n'importe quel **champ de vecteurs**.
- La mécanique appliquée au Sciences Industrielles a décomposé le mouvement général d'un solide afin de proposer des mouvements de base pour lesquels il est possible de spécifier la forme d'un torseur.

## Les liaisons élémentaires

### Definition

Une liaison élémentaire entre deux solides  $S_1$  et  $S_2$  est obtenue à partir du contact d'une surface géométrique élémentaire liée à  $S_1$  sur une surface géométrique élémentaire liée à  $S_2$ .

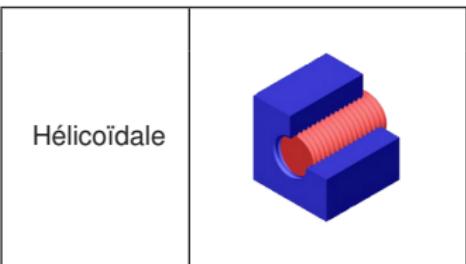


## Les liaisons composées

Une liaison composée est obtenue par association cohérente de liaisons élémentaires.

Glissière			Pivot
Encastrement			Sphérique à doigt

Liaison avec surface hélicoïdale



## Degrés de liberté ou de mobilité d'une liaison

- Les **degrés de liberté** d'une liaison entre deux solides  $S_1$  et  $S_2$  correspondent aux mouvements relatifs indépendants autorisés au sein de cette liaison entre  $S_1$  et  $S_2$ .
- Il existe 6 mouvements élémentaires possibles d'un solide dans l'espace rapporté à un repère  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ 
  - ▶ 3 translations :  $T_x, T_y, T_z$ ,
  - ▶ 3 rotations :  $R_x, R_y, R_z$ .
- **m** est le nombre de degrés de liberté d'une liaison
- Le degré de liaison d'une liaison vaut, dans l'espace, **6-m**, c'est le **complémentaire** du degré de liberté.
- Dans le plan  $(A, \vec{x}, \vec{y})$ , les 3 mouvements possibles d'un solide sont :
  - ▶ 2 translations :  $T_x, T_y$ ,
  - ▶ 1 rotation :  $R_z$ .

Le degré de liaison d'une liaison vaut, dans le plan, **3-m**.

## Les liaisons mécaniques

1. Liaison pivot,
2. Liaison glissière,
3. Liaison hélicoïdale,
4. Liaison pivot glissant,
5. Liaison sphérique ou rotule,
6. Liaison sphérique à doigt,
7. Liaison appui plan,
8. Liaison linéaire annulaire,
9. Liaison linéaire rectiligne,
10. Liaison ponctuelle,
11. Liaison encastrement.

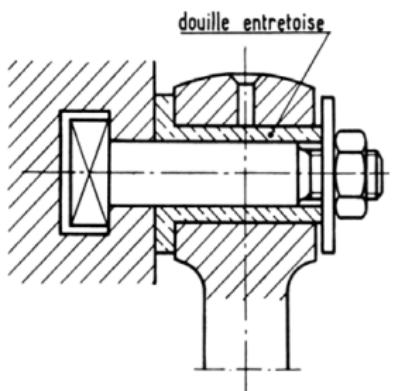
*Definition*

Caractéristiques des liaisons parfaites:

- des contacts sans frottement entre les surfaces,
- des surfaces de contact géométriquement parfaites,
- aucun jeu.

## Liaison pivot

- Deux solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison pivot si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible est une rotation autour d'un axe,
- Degré de liberté:  $R_1 = 1$ , degré de liberté égal à 1.



Vue plane de face



Vue plane de côté

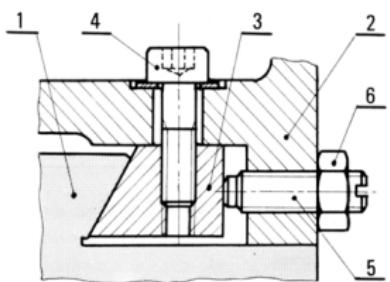


Perspective



## Liaison glissière

- Deux solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison glissière si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible est une translation le long d'un axe,
- Degré de liberté:  $T_1 = 1$ , degré de liberté égal à 1



Vue plane de face



Vue plane de côté

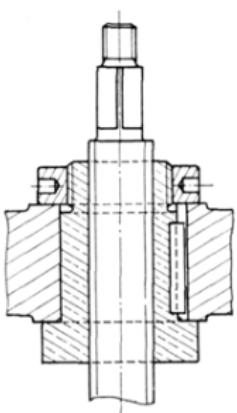


Perspective



## Liaison hélicoïdale

- Deux solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison hélicoïdale si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible résulte d'une rotation et d'une translation proportionnelles par rapport à un axe,
- Degré de liberté:  $T_1$  et  $R_1$  sont dépendants. Si  $k$  est le pas, on a  $k \times \theta_1 = 2\pi \times \Delta_1$ , degré de liberté égal à 1.



Vue plane de face



Vue plane de côté

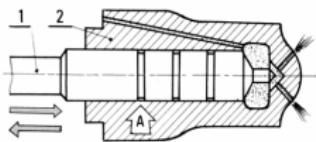


Perspective



## Liaison pivot glissant

- Deux solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison pivot glissant si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible résulte d'une rotation et d'une translation par rapport à un axe,
- Degré de liberté:  $T_1 = 1$  et  $R_1 = 1$ , degré de liberté égal à 2.



Vue plane de face



Vue plane de côté

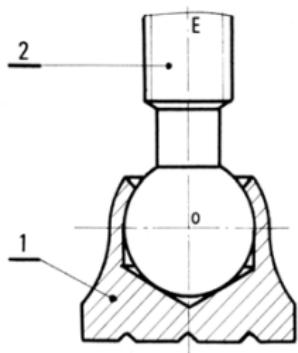


Perspective



## Liaison rotule

- Deux solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison sphérique ou rotule si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible est une rotation autour d'un point,
- Degré de liberté:  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 1$  et  $R_3 = 1$ , degré de liberté égal à 3.



Vue plane de face

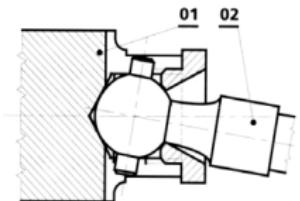
Vue plane de côté

Perspective



## Liaison sphérique à doigt

- Deux solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison sphérique à doigt si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible résulte de la rotation par rapport à deux axes concourants,
- Degré de liberté:  $R_1 = 1$  et  $R_2 = 1$ , degré de liberté égal à 2.



Vue plane de face

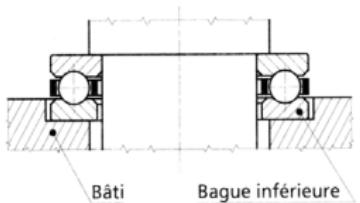
Vue plane de côté

Perspective

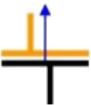


## Liaison appui plan

- Deux solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison appui plan si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible résulte d'une rotation autour d'un axe et de la translation le long de deux axes perpendiculaires au premier,
- Degré de liberté:  $R_1 = 1$ ,  $T_2 = 1$  et  $T_3 = 1$ , degré de liberté égal à 3.



Vue plane de face



Vue plane de côté

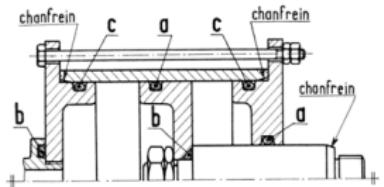


Perspective



## Liaison linéaire annulaire

- Deux solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison linéaire annulaire si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible résulte d'une rotation autour d'un point et d'une translation suivant un axe passant par ce point,
- Degré de liberté:  $T_1 = 1$ ,  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 1$  et  $R_3 = 1$ , degré de liberté égal à 4.



Vue plane de face



Vue plane de côté

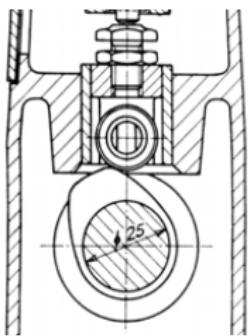


Perspective

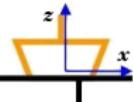


## Liaison linéaire rectiligne

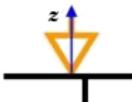
- Deux solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison linéaire rectiligne si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible résulte d'une rotation autour de deux axes et de la translation le long de deux autres axes, l'une des rotations et l'une des translations étant relatives au même axe,
- Degré de liberté:  $T_2 = 1$ ,  $T_3 = 1$ ,  $R_1 = 1$  et  $R_2 = 1$ , degré de liberté égal à 4.



Vue plane de face



Vue plane de côté

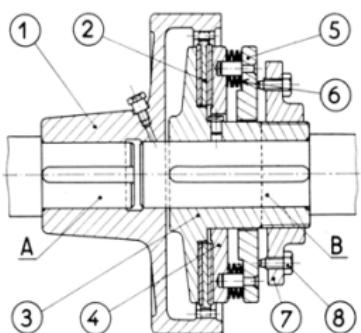


Perspective



## Liaison ponctuelle

- Deux solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison ponctuelle si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible résulte de la rotation autour d'un point et de la translation le long de deux axes concourants en ce point
- Degré de liberté:  $T_2 = T_3 = 1$  et  $R_1 = R_2 = R_3 = 1$ , degré de liberté égal à 5.



Vue plane de face



Vue plane de côté

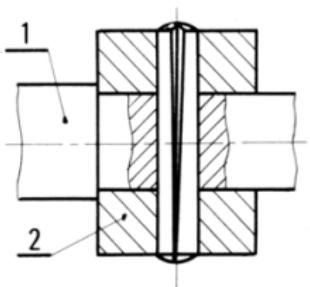


Perspective



## Liaison encastrement

- Deux solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison encastrement s'il n'existe aucun degré de liberté entre les solides,
- Degré de liberté:  $T_x = T_y = T_z = R_x = R_y = R_z = 0$ , degré de liberté nul.



Vue plane de face

Vue plane de côté

Perspective



## Torseur cinématique

- Le torseur cinématique est le torseur représentant le champ de vecteurs vitesse d'un solide S dans le repère R.
  - Sa résultante est le vecteur vitesse de rotation du solide :  $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ ,
  - Son moment en un point P est le vecteur vitesse linéaire du point P :  $\overrightarrow{V_{P \in S/R}}$ ,

Le Torseur cinématique du solide S par rapport à R s'écrit:

$$\{V_{S/R}\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{P \in S/R}} \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{cc} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{array} \right\}_P$$

- Et on peut écrire ce torseur en un point quelconque du solide pour en obtenir sa vitesse en utilisant le théorème de Varignon.

## Exemples de torseurs cinématiques

- Dans un mouvement de translation,  $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$  est nul, donc le torseur devient un torseur couple :

$$\{V_{S/R}\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{P \in S/R}} \end{array} \right\}_P$$

- $\overrightarrow{V_{P \in S/R}} = \vec{0}$  si le point P appartient à l'axe de rotation du solide. Si on exprime le torseur au point P :

$$\{V_{S/R}\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_P$$

*Attention:* Ce torseur à un moment non-nul si on l'exprime en un point qui n'appartient pas à l'axe de rotation du solide

## Exemples de torseurs cinématiques

- Un mouvement hélicoïdal est caractérisé par une rotation combinée à une translation, l'axe de rotation étant confondu avec la direction de la translation. Cela entraîne que pour tout point A de l'axe de rotation,  $\overrightarrow{V_{A \in S/R}}$  est colinéaire à  $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ . Le torseur cinématique de S en A appartenant à l'axe de rotation s'écrit de la façon suivante :

$$\{V_{S/R}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{A \in S/R}} \end{array} \right\}_A, \text{ avec } \overrightarrow{V_{A \in S/R}} = \lambda \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

- Pour tous autres points P du solide, le vecteur vitesse est une combinaison de  $\overrightarrow{V_{A \in S/R}}$  et du terme  $\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}$

## Torseurs cinématiques classiques

Les torseurs classiques sont définis en connaissant les mouvements autorisés et les degrés de liberté de la liaison.

Liaison pivot	Torseur cinématique $\left\{ \begin{array}{cc} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_O$	Axes nécessaires 1 axe $\vec{x}$
Liaison glissière	Torseur cinématique $\left\{ \begin{array}{cc} 0 & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_O$	Axes nécessaires 1 axe $\vec{x}$
Liaison hélicoïdale	Torseur cinématique $\left\{ \begin{array}{cc} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_O$	Axes nécessaires 1 axe $\vec{x}$ $V_x = \frac{\rho \cdot \omega_x}{2\pi}$

## Torseurs cinématiques classiques

Liaison pivot glissant	Torseur cinématique $\left\{ \begin{array}{cc} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_O$	Axes nécessaires 1 axe $\vec{x}$
Liaison sphérique à doigts	Torseur cinématique $\left\{ \begin{array}{cc} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_O$	Axes nécessaires 2 axes, $\vec{x}, \vec{y}$
Liaison sphérique ou rotule	Torseur cinématique $\left\{ \begin{array}{cc} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{array} \right\}_O$	Axes nécessaires 0 axe
Liaison appui plan	Torseur cinématique $\left\{ \begin{array}{cc} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{array} \right\}_O$	Axes nécessaires 1 axe $\vec{z}$ normale au plan

## Torseurs cinématiques classiques

Liaison linéaire annulaire	Torseur cinématique $\left\{ \begin{array}{ll} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{array} \right\}_O$	Axes nécessaires 1 axe $\vec{x}$
Liaison linéaire rectiligne	Torseur cinématique $\left\{ \begin{array}{ll} \omega_x & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{array} \right\}_O$	Axes nécessaires 2 axes $\vec{x}$ , $\vec{z}$ direction de la ligne $\vec{x}$ normale au plan $\vec{z}$
Liaison ponctuelle	Torseur cinématique $\left\{ \begin{array}{ll} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & 0 \end{array} \right\}_O$	Axes nécessaires 1 axe $\vec{z}$ normale au plan
Liaison encastrement	Torseur cinématique $\left\{ \begin{array}{ll} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_O$	Axes nécessaires 0 axe

## Torseur d'actions mécaniques transmissibles

L'action mécanique du solide ( $S_1$ ) sur ( $S_2$ ) au niveau de la liaison  $i$  peut être définie par un torseur :

$$\{T_{i(S_2 \rightarrow S_1)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{(S_2 \rightarrow S_1)}} \\ \overrightarrow{M_{O,(S_2 \rightarrow S_1)}} \end{array} \right\}_O$$

avec :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R_{(S_2 \rightarrow S_1)}} &= X_i \cdot \vec{x} + Y_i \cdot \vec{y} + Z_i \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{M_{O,(S_2 \rightarrow S_1)}} &= L_i \cdot \vec{x} + M_i \cdot \vec{y} + N_i \cdot \vec{z} \end{aligned}$$

Le torseur d'actions mécaniques peut s'écrire ainsi :

$$\{T_{i(S_2 \rightarrow S_1)}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_i & L_i \\ Y_i & M_i \\ Z_i & N_i \end{array} \right\}_O$$

Les composantes  $X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i$  non nulles sont les **inconnues statiques** de la liaison  $i$ .

$n_{si}$  est le nombre d'inconnues statiques indépendantes.

## Torseurs d'actions transmissibles classiques

Les torseurs classiques sont définis en connaissant les mouvements autorisés et les degrés de liberté de la liaison.

Liaison pivot	Torseur d'actions transmissibles $\left\{ \begin{array}{cc} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_O$	Axes nécessaires 1 axe $\vec{x}$
Liaison glissière	Torseur d'actions transmissibles $\left\{ \begin{array}{cc} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_O$	Axes nécessaires 1 axe $\vec{x}$
Liaison hélicoïdale	Torseur d'actions transmissibles $\left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_O$	Axes nécessaires 1 axe $\vec{x}$ $L = \frac{p.X}{2\pi}$

## Torseurs d'actions transmissibles classiques

Liaison pivot glissant	Torseur d'actions transmissibles $\left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_O$	Axes nécessaires 1 axe $\vec{x}$
Liaison sphérique à doigts	Torseur d'actions transmissibles $\left\{ \begin{array}{cc} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & N \end{array} \right\}_O$	Axes nécessaires 2 axes, $\vec{x}, \vec{y}$
Liaison sphérique ou rotule	Torseur d'actions transmissibles $\left\{ \begin{array}{cc} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{array} \right\}_O$	Axes nécessaires 0 axe

## Torseurs d'actions transmissibles classiques

Liaison appui plan	Torseur d'actions transmissibles $\left\{ \begin{array}{cc} 0 & L \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{array} \right\}_O$	Axes nécessaires 1 axe $\vec{z}$ normale au plan
Liaison linéaire annulaire	Torseur d'actions transmissibles $\left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{array} \right\}_O$	Axes nécessaires 1 axe $\vec{x}$
Liaison linéaire rectiligne	Torseur d'actions transmissibles $\left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{array} \right\}_O$	Axes nécessaires 2 axes $\vec{x}, \vec{z}$ direction de la ligne $\vec{x}$ normale au plan $\vec{z}$

## Torseurs d'actions transmissibles classiques

Liaison ponctuelle	Torseur d'actions transmissibles $\left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{array} \right\}_O$	Axes nécessaires 1 axe $\vec{z}$ normale au plan
Liaison encastrement	Torseur d'actions transmissibles $\left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_O$	Axes nécessaires 0 axe

## Liaison parfaite

Une liaison parfaite lorsque le produit de ses torseurs cinématique et statique est nul. Ces torseurs sont dit **réciproques**.

Soit:  $\{T_{i(S_2 \rightarrow S_1)}\} \times \{V_{i(S_2/S_1)}\} = 0$

D'où,  $\overrightarrow{M_{O,(S_2 \rightarrow S_1)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{i(S_2/S_1)}} + \overrightarrow{R_{(S_2 \rightarrow S_1)}} \cdot \overrightarrow{V_{i(O \in S_2/S_1)}} = 0$

Donc,  $L_i \cdot \alpha_i + M_i \cdot \beta_i + N_i \cdot \gamma_i + X_i \cdot u_i + Y_i \cdot v_i + Z_i \cdot w_i = 0$

Ainsi,  $n_{ci} + n_{si} = 6$

Pour une liaison pivot:  $n_{si} = 5$

$$\{T_{i(S_2 \rightarrow S_1)}\} = \begin{Bmatrix} X_i & 0 \\ Y_i & M_i \\ Z_i & N_i \end{Bmatrix}_O \quad \{V_{i(S_2/S_1)}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

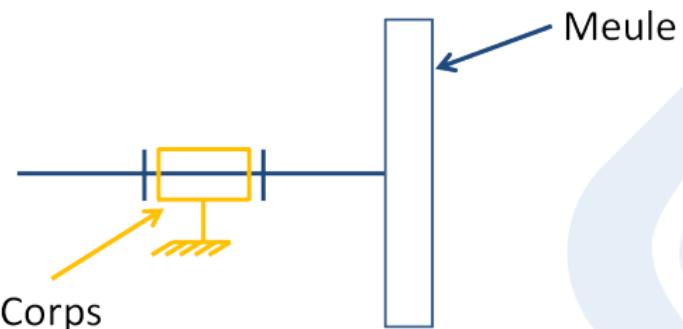
## La schématisation

- La **représentation** des liaisons vue précédemment permet de définir des **schémas** qui permettent de représenter **une partie de la géométrie** du mécanisme.
- La géométrie représentée constitue le strict minimum nécessaire à la modélisation du mécanisme pour une application donnée.

Exemple

- Pour une étude cinématique, l'épaisseur d'une pièce n'a aucune importance, pas plus que le moyen technologique utilisé pour réaliser un encastrement,
- Ces informations ne doivent, par conséquent, pas être représentées.

## Schéma cinématique



- Il représente les mouvements relatifs entre sous-ensembles cinématiques.
- Il fait l'objet de la norme NF EN 23-952.
- Seules les mobilités sont modélisées (pas la réalisation des liaisons)

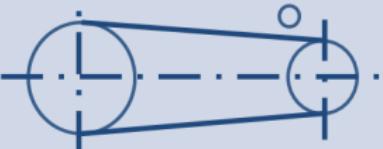
## Les éléments du schéma cinématique

Les liaisons normalisées et les engrenages...

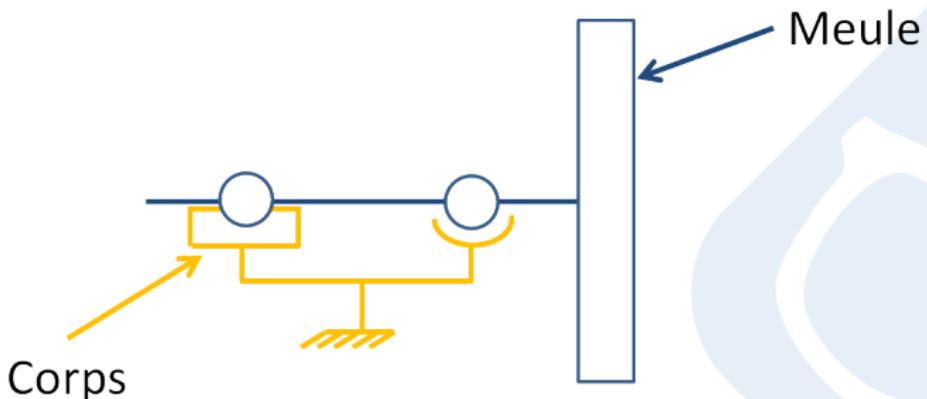
Les engrenages					
Roue à denture extérieure	Types de denture*				
	Droite	Hélicoïdale	Chevron	Spirale	
Roue à denture intérieure					
Roue conique					
Secteur denté					
Vis sans fin					
Crémaillère					
Exemples d'applications					

## Les éléments du schéma cinématique

... les engrenages et les liens flexibles

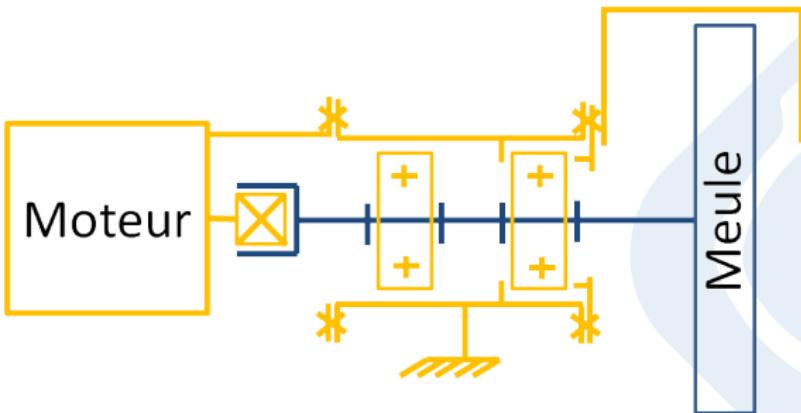
Poulies-Courroie	Pignons chaîne
	
	
Indications	Indications
Plate - Ronde - Trapézoïdale- Crantée — ○ ▽ ~	Maillons - Rouleaux - Dents ○ ≡ ≈

## Schéma architectural



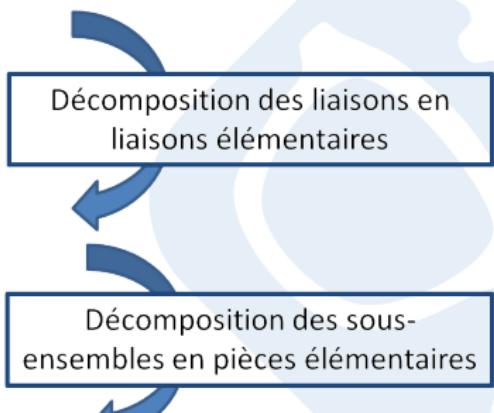
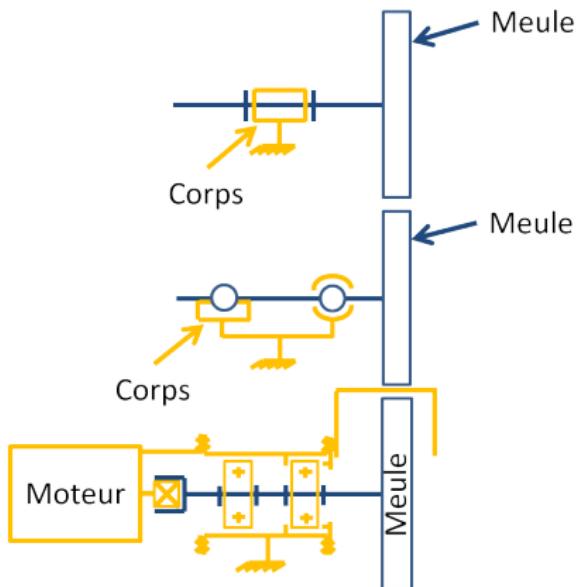
- Il met en évidence la **nature** et les **positions** relatives des différentes **liaisons élémentaires**
- Les **pièces sans mouvement relatif** ne sont pas **distinguées** les unes des autres
- Ses **composants** sont les **constituants** du schéma cinématique

## Schéma technologique

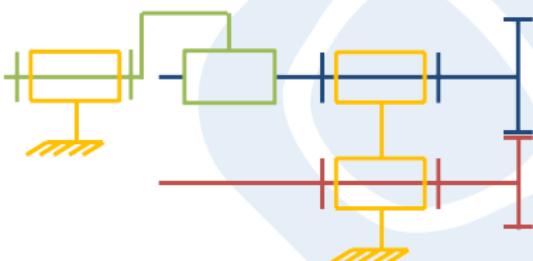
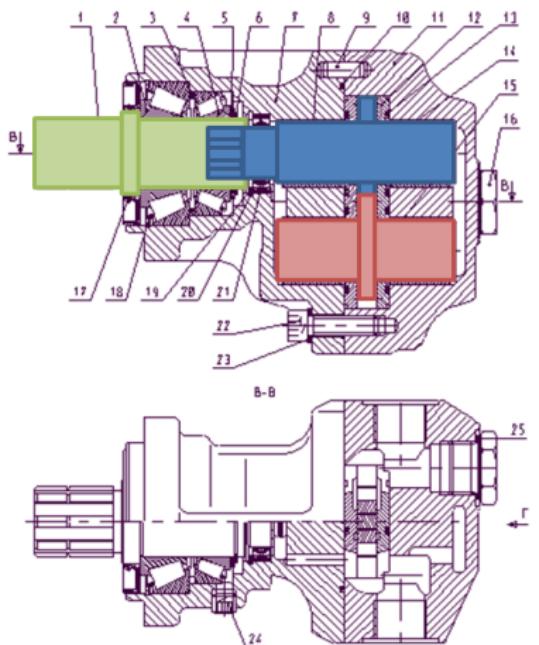


- Il permet la description de la nature et de l'**agencement** des principaux **composants** d'un produit, généralement représentés par des symboles normalisés.

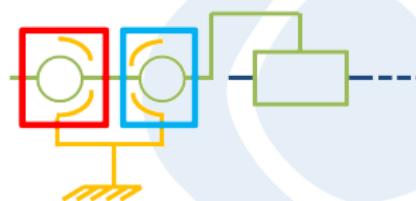
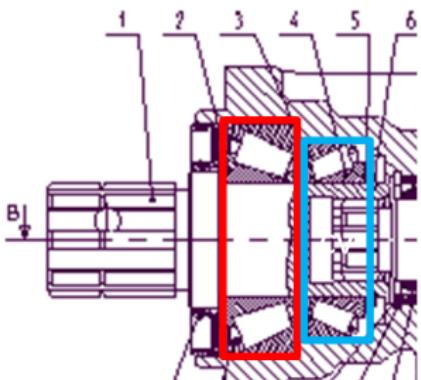
## Les trois types de schémas



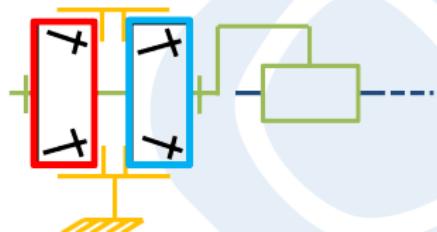
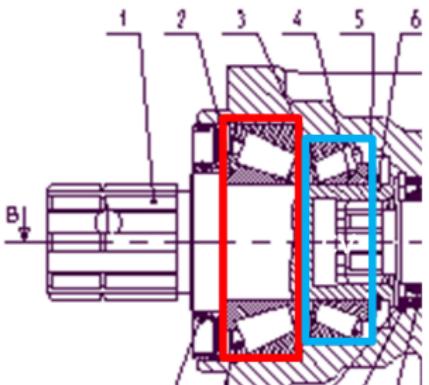
## Pompe à engrenage (Cinématique)



## Pompe à engrenage (Architecture)



## Pompe à engrenage (Technologique)



## Liaisons équivalentes

- Les liaisons équivalentes sont constituées à partir d'un groupe de liaisons élémentaires.
- Elles apparaissent entre deux solides dont les mouvements relatifs sont déterminés par au moins deux liaisons.
- Ainsi, les mobilités de la liaison globale sont déterminées grâce à la combinaison de ces liaisons élémentaires.

Exemple

Ex: La liaison globale entre une table et le sol constituée de 4 liaisons ponctuelles et une liaison appui plan. Vrai si le nombre de pieds est supérieur ou égal à 3.



## Méthode d'étude des mécanismes

### Remarque

- L'étude d'un mécanisme ne peut s'effectuer qu'après avoir réussi sa modélisation.
- Afin de le modéliser il faut avoir compris le fonctionnement d'un mécanisme, ce qui n'est pas simple surtout si ce dernier est complexe (beaucoup de pièces...)
- L'utilisation de la méthode suivante permet de simplifier cette étude.

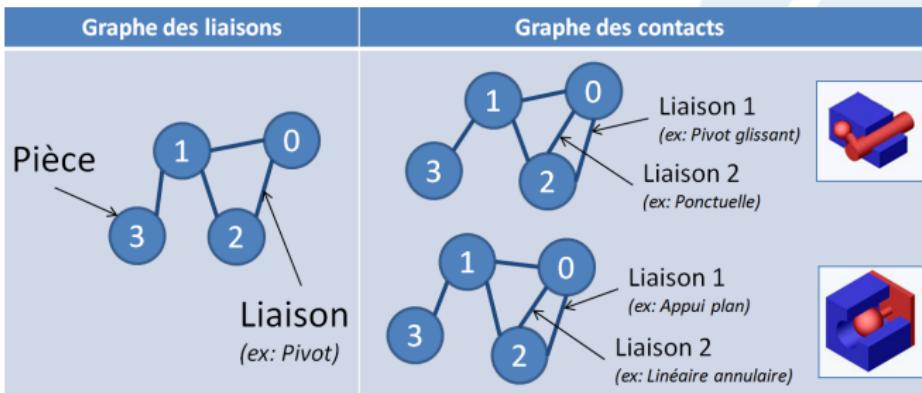
1. À partir du dessin d'ensemble ou du système réel, regrouper les pièces liées par des liaisons encastrement (liaisons à mobilité nulle).
2. En examinant les surfaces de contact, et *en enlevant les éléments intermédiaires* comme les roulements, les ressorts,... définir les liaisons entre ces solides, *deux à deux*, en déterminant les **mouvements relatifs possibles**.
3. **Numéroter** les solides en attribuant conventionnellement le numéro 0 au bâti ou au solide de référence.

## Modélisation d'un mécanisme, méthode d'analyse

- Un mécanisme étant un ensemble de **solides et de liaisons** organisé, il est indispensable d'en faire une **analyse** et une **représentation** logique, conforme à sa représentation.
  
- Outils appropriés disponibles par type d'étude:
  - ▶ Étude **géométrique** et/ou **cinématique**: *Le graphe de structure (ou des liaisons) et le schéma cinématique*
    - ▶ Les solides sont les **classes d'équivalence** (pièces liées par encastrement)
    - ▶ Les liaisons représentées sont des **liaisons globales** (1 liaison entre 2 solides)
  - ▶ Étude des efforts dans les liaisons, en **statique** ou **dynamique**: *Le graphe des contacts et le schéma d'architecture*
    - ▶ Les solides sont les **classes d'équivalence**,
    - ▶ Les liaisons représentées sont des **liaisons élémentaires** (1 ou plusieurs liaison(s) entre 2 solides)

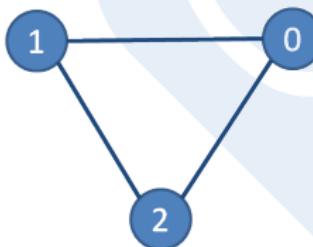
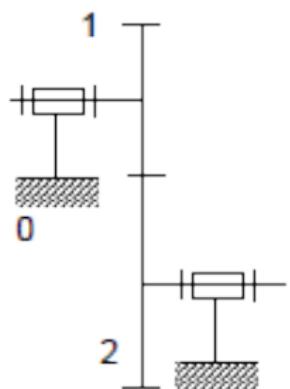
## Graphes associés au mécanisme

Le **graphe associé au mécanisme** est construit en associant à chacun des solides un sommet et à chacune des liaisons mécaniques un arc matérialisé par un segment de droite. Les sommets sont numérotés en correspondance avec le schéma cinématique.



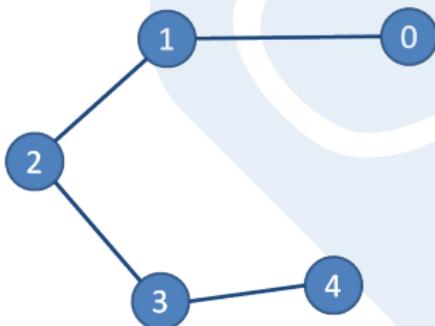
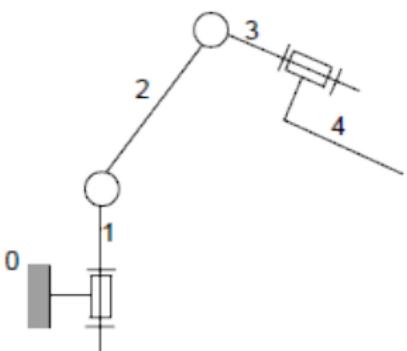
## Chaîne fermée simple ou cycle

- Un cycle est un chemin du graphe qui part d'un sommet et y revient sans passer plus d'une fois par un sommet
- $\gamma$  est le nombre de boucles indépendantes d'un graphe



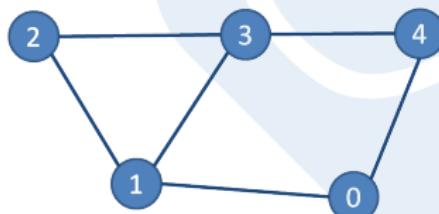
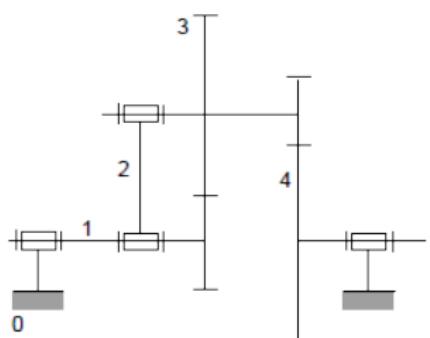
## Chaîne ouverte

- Un mécanisme est dit à chaîne ouverte s'il n'existe pas de cycle. En partant du bâti, on va de solide en solide vers un solide terminal.



## Chaîne fermée complexe

- Un mécanisme est dit à chaîne fermée complexe, s'il existe des cycles ayant un ou plusieurs arcs communs.

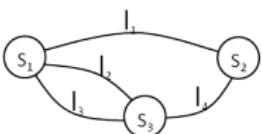


## Théorie des graphes

- La théorie des graphes montre que le nombre de cycles indépendants d'une chaîne fermée complexe se calcule par la relation :  $\gamma = l - n + 1$ ,
- Dans laquelle :
  - ▶  $\gamma$ : nombre de cycles indépendants,
  - ▶  $l$ : nombre de liaisons,
  - ▶  $n$ : nombre de solides (y compris le bâti).
- Le nombre  $\gamma$  permettra de déterminer le degré de mobilité et le degré d'hyperstatisme d'une chaîne complexe fermée,
- Un mécanisme est dit à chaîne fermée complexe, s'il existe des cycles ayant un ou plusieurs arcs communs
- **L'hyperstatisme** apparaît lorsque les pièces subissent plus de contraintes que ce qui est strictement nécessaire pour les maintenir ; au moins un degré de mobilité d'une pièce est supprimé plusieurs fois

## Liaison équivalente

La **liaison équivalente**  $l_{e1.2}$  à l'ensemble des liaisons situées entre  $S_1$  et  $S_2$  est une liaison théorique qui aurait le même comportement, c'est à dire transmission de la même action mécanique et autorisation du même mouvement.



Le torseur d'actions mécaniques de la liaison équivalente est noté à  $\{T_{e1.2}\}$ .



Le torseur cinématique de la liaison équivalente est noté  $\{V_{e1.2}\}$ .

## Liaisons en parallèle

Des liaisons sont en parallèles si il existe au moins deux liaisons entre deux pièces.

$\{T_0\}$  représente le torseur des autres **actions mécaniques extérieures** s'exerçant sur  $S_2$ .

Le P.F.S. sur  $S_2$  avec les  $n$  liaisons en parallèles s'écrit:  $\sum_{i=1}^n \{T_{i(S_2 \rightarrow S_1)}\} + \{T_0\} = \{0\}$

Le P.F.S. sur  $S_2$  avec la liaison équivalente s'écrit:  $\{T_{e1.2}\} + \{T_0\} = \{0\}$

D'où  $\{T_{e1.2}\} = \sum_{i=1}^n \{T_{i(S_2 \rightarrow S_1)}\}$

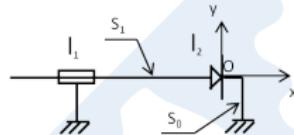
Si un mouvement élémentaire est empêché par une liaison, il est aussi impossible sur les autres liaisons et par suite sur la liaison équivalente.

D'où :

$$\{V_{e1.2}\} = \{V_{1(S_1/S_2)}\} = \{V_{2(S_1/S_2)}\} = \dots = \{V_{n(S_1/S_2)}\}$$

## Liaisons en parallèle: Exemple de résolution

1. Chercher le torseur cinématique de la liaison  $\{V_{e0.1}\}$ .
2. Chercher le torseur statique de la liaison  $\{T_{e0.1}\}$ .
3. Donner le nom de la liaison équivalente.



## Liaisons en parallèle: Hyperstatisme et mobilités

Le nombre total d'inconnues statiques dans les  $n$  liaisons en parallèle est:

$$N_S = \sum_{i=1}^n n_{si}$$

$r$  est le nombre d'équations scalaires indépendantes obtenues par le P.F.S. ( $r_s \leq 6$ ).

Le **degré d'hyperstatisme**  $h$  de la liaison équivalente aux  $n$  liaisons en parallèle est égal au nombre total  $N_S$  d'inconnues statiques moins le nombre  $r_S$  de relations indépendantes entre ces inconnues.

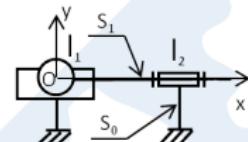
$$h = N_S - r_S$$

Le **degré de mobilité**  $m$  de la liaison équivalente aux  $n$  liaisons en parallèle est égal à 6 moins le nombre  $r_S$  de relations indépendantes entre ces inconnues.

$$m = 6 - r_S$$

## Liaisons en parallèle: Exemple de résolution

1. Déterminer le torseur d'actions mécaniques de la liaison. En déduire le nom de cette liaison.
2. Déterminer le degré hyperstatisme et de mobilité de la liaison.
3. Localiser les inconnues hyperstatiques. En déduire les contraintes géométriques de position relative des deux liaisons.



## Liaisons en série

$n$  liaisons sont en série entre deux solides  $S_0$  et  $S_n$ , si elles sont disposées à la suite l'une de l'autre par l'intermédiaire de  $(n - 1)$  solides. Le solide  $S_i$  ( $i$  variant de 1 à  $n - 1$ ) n'est soumis qu'à l'action mécanique des solides  $S_{i-1}$  et  $S_{i+1}$ .



Il s'agit d'une chaîne ouverte.

## Liaisons en série

Des liaisons sont en série s'il n'existe qu'un seul chemin entre deux pièces.

$\{T_0\}$ : torseur des autres **actions mécaniques extérieures** s'exerçant sur  $S_2$ .

$\{T_i\}$ : torseur d'actions mécaniques de la liaison  $l_i$  (action mécanique de  $S_{i-1}$  sur  $S_i$ ).

- PFS à  $S_0$ :  $\{T_0\} - \{T_1\} = \{0\} \rightarrow \{T_0\} = \{T_1\}$
- PFS à  $S_0$  et  $S_1$ :  $\{T_0\} - \{T_2\} = \{0\} \rightarrow \{T_0\} = \{T_2\}$
- PFS à  $S_0, \dots, S_n$ :  $\{T_0\} - \{T_n\} = \{0\} \rightarrow \{T_0\} = \{T_n\}$  soit,  $\{T_{e0..n}\} = \{T_1\} = \{T_2\} = \dots = \{T_n\}$

$\{V_{i(S_i \rightarrow S_{i-1})}\}$ : torseur cinématique de la liaison  $l_i$  de  $S_i$  par rapport à  $S_{i-1}$ .

$\{V_{e(S_n \S_0)}\}$ : torseur cinématique de la liaison équivalente  $l_{0..n}$  de  $S_n$  par rapport à  $S_0$

En utilisant la composition des torseurs cinématiques, on écrit :

$$\{V_{S_n/S_0}\} = \{V_{S_n/S_{n-1}}\} + \{V_{S_{n-1}/S_{n-2}}\} + \dots + \{V_{S_1/S_0}\}, \text{ soit } \{V_{e(S_n \S_0)}\} = \sum_{i=1}^n \{V_i\}$$

## Liaisons en série: Hyperstatisme et mobilité

### Hyperstatisme

La relation précédente permet de calculer toutes les composantes des torseurs d'actions mécaniques  $\{T_i\}$  en fonction de celle de  $\{T_{e0..n}\}$

D'où la liaison équivalente  $l_{e0..n}$  est toujours isostatique :  $h = 0$ .

### Mobilité

Le **degré de mobilité**  $m_u$  de la liaison équivalente est égal au nombre d'inconnues cinématiques indépendantes du torseur cinématique de la liaison équivalente.

$m_u$  est aussi le degré de mobilité utile de la chaîne continue ouverte, soit  $N_C = \sum_{i=1}^n n_{Ci}$

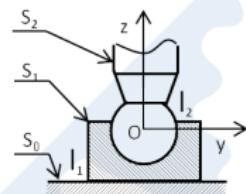
Aucun mouvement élémentaire de la liaison  $l_i$  est interdit par une autre liaison entre  $S_0$  et  $S_n$ , donc le degré de mobilité  $m$  de la chaîne continue ouverte est égal à  $N_C$ .

On pose :  $m = m_u + m_i$ ,  $m_i$  est le degré de mobilité interne de la chaîne continue ouverte.

Exemple : rotation sur lui même de l'axe d'un vérin.

## Liaisons en série: Exemple

1. Déterminer le torseur statique de la liaison entre  $S_0$  et  $S_2$ .
2. Déterminer le torseur cinématique de la liaison entre  $S_0$  et  $S_2$ .  
Quel est le nom de cette liaison équivalente.
3. Déterminer  $m_i$ .



## Dérivation directe ou en coordonnées cartésiennes

Soit un vecteur  $\vec{V}$  repéré dans le repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  par  $\vec{V} = x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}$ . La dérivée temporelle de ce vecteur par rapport au repère  $R$  s'écrit :

$$\left[ \frac{d\vec{V}}{dt} \right]_R = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{x} + x \cdot \left[ \frac{d\vec{x}}{dt} \right]_R + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{y} + y \cdot \left[ \frac{d\vec{y}}{dt} \right]_R + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{z} + z \cdot \left[ \frac{d\vec{z}}{dt} \right]_R$$

Les vecteurs  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  étant constants au cours du temps dans le repère  $R$ , leurs dérivées sont nulles, donc :

$$\left[ \frac{d\vec{V}}{dt} \right]_R = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{x} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{y} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{z}$$

Pour simplifier l'écriture, on note  $\frac{du}{dt} = \dot{u}$  donc :

$$\left[ \frac{d\vec{V}}{dt} \right]_R = \dot{x} \cdot \vec{x} + \dot{y} \cdot \vec{y} + \dot{z} \cdot \vec{z}$$

## Dérivation composée - Formule de Bour

Soit  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  la base d'un repère  $R_1$  mobile par rapport à  $R$ .

On montre mathématiquement qu'il existe un vecteur  $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}$  unique tel que :

$$\left[ \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_R = \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \vec{x}_1, \quad \left[ \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_R = \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \vec{y}_1, \quad \left[ \frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_R = \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \vec{z}_1,$$

Pour le cas particulier d'une seule rotation, lorsque  $R_1$  est orienté par une seule rotation autour d'un axe de  $R$ , par exemple une rotation d'angle  $\Psi$  autour de  $\vec{z}$  alors :

$$\vec{x}_1 = \cos\Psi \cdot \vec{x} + \sin\Psi \cdot \vec{y}, \quad \vec{y}_1 = -\sin\Psi \cdot \vec{x} + \cos\Psi \cdot \vec{y}$$

$$\left[ \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_R = -\dot{\Psi} \cdot \sin\Psi \cdot \vec{x} + \dot{\Psi} \cdot \cos\Psi \cdot \vec{y} = \dot{\Psi} \cdot \vec{y}_1 = \dot{\Psi} \cdot \vec{z} \wedge \vec{x}_1$$

$$\left[ \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_R = -\dot{\Psi} \cdot \cos\Psi \cdot \vec{x} - \dot{\Psi} \cdot \sin\Psi \cdot \vec{y} = -\dot{\Psi} \cdot \vec{x}_1 = \dot{\Psi} \cdot \vec{z} \wedge \vec{y}_1$$

Comme  $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} = \dot{\Psi} \cdot \vec{z}$ ,

$$\left[ \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_R = \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \vec{x}_1, \quad \left[ \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_R = \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \vec{y}_1$$

## Dérivée temporelle d'un vecteur quelconque

Soit un vecteur  $\vec{V}$  repéré dans le repère  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  par  $\vec{V} = x \cdot \vec{x}_1 + y \cdot \vec{y}_1 + z \cdot \vec{z}_1$ .

Le repère  $R_1$  est défini par rapport au repère  $R$  par son vecteur vitesse de rotation quelconque. La dérivée temporelle de  $\vec{V}$  dans  $R_1$  s'écrit :  $\left[ \frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_1} = \dot{x} \cdot \vec{x}_1 + \dot{y} \cdot \vec{y}_1 + \dot{z} \cdot \vec{z}_1$

Si on cherche sa dérivée temporelle par rapport à  $R$  :

$$\left[ \frac{d\vec{V}}{dt} \right]_R = \dot{x} \cdot \vec{x}_1 + \dot{y} \cdot \vec{y}_1 + \dot{z} \cdot \vec{z}_1 + x \cdot \left[ \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_R + y \cdot \left[ \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_R + z \cdot \left[ \frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_R$$

$$\left[ \frac{d\vec{V}}{dt} \right]_R = \dot{x} \cdot \vec{x}_1 + \dot{y} \cdot \vec{y}_1 + \dot{z} \cdot \vec{z}_1 + x \cdot \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \vec{x}_1 + y \cdot \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \vec{y}_1 + z \cdot \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \vec{z}_1$$

$$\left[ \frac{d\vec{V}}{dt} \right]_R = \dot{x} \cdot \vec{x}_1 + \dot{y} \cdot \vec{y}_1 + \dot{z} \cdot \vec{z}_1 + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge (x \cdot \vec{x}_1 + y \cdot \vec{y}_1 + z \cdot \vec{z}_1)$$

Ce qui permet d'arriver à la Formule de Bour :

$$\left[ \frac{d\vec{V}}{dt} \right]_R = \left[ \frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \vec{V}$$

## Accélération d'un point

L'**accélération** d'un point se calcule en dérivant le vecteur vitesse. Ainsi, pour un solide 2 en mouvement par rapport à un solide 1 et P et Q deux points fixes dans 2.

Entre ces deux points, la relation génératrice du champ des vecteurs vitesses s'écrit :

$$\overrightarrow{V_{B \in 2/1}} = \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} + \overleftarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Par définition du vecteur accélération, le point B étant fixe à chaque instant dans 2 :

$$\overrightarrow{A_{B \in 2/1}} = \left[ \frac{d\overrightarrow{V_{B \in 2/1}}}{dt} \right]_{R_1}$$

Par substitution, on en déduit :

$$\overrightarrow{A_{A \in 2/1}} = \left[ \frac{d\overrightarrow{V_{A \in 2/1}}}{dt} \right]_{R_1}$$

## Accélération d'un point

Mathématiquement on montre que :  $\left[ \frac{d\overrightarrow{\Omega_{2/1} \wedge AB}}{dt} \right]_{R_1} = \left[ \frac{d\overrightarrow{\Omega_{2/1}}}{dt} \right]_{R_1} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \left[ \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right]_{R_1}$

Au bilan, la relation sur le champ des vecteurs accélérations s'écrit :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right]_{R_1} &= \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{A_{B \in 2/1}} &= \overrightarrow{A_{A \in 2/1}} + \left[ \frac{d\overrightarrow{\Omega_{2/1}}}{dt} \right]_{R_1} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge (\overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{AB}) \end{aligned}$$

En effectuant la multiplication scalaire des deux membres du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ , et en constatant que le terme  $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge (\overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AB}$  est différent de 0, on en déduit:

$$\overrightarrow{A_{A \in 2/1} \cdot AB} \neq \overrightarrow{A_{B \in 2/1} \cdot AB}$$

Le champ des vecteurs accélérations **n'est pas un champ de vecteurs équiprojectif**.

## Mouvement plan sur plan

### Définition

Si un solide  $S_1$  associé au repère  $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est en mouvement par rapport à un solide  $S_0$  associé au repère  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  tel que le plan  $(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$  reste constamment confondu avec le plan  $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ , alors le mouvement de  $S_1$  par rapport à  $S_0$  est un mouvement plan.

La définition précédente implique que :

- les vecteurs vitesses des points du solide  $S_1$  par rapport à  $S_0$  sont dans le plan  $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ :  $\forall M \in S_1, \overrightarrow{V_{M \in S_1/S_0}} \cdot \vec{z}_0 = 0$ ,
- le vecteur instantané de rotation de  $S_1/S_0$  est colinéaire à la normale au plan  $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ :  $\overrightarrow{\Omega_{S_1/S_0}} \wedge \vec{z}_0 = \vec{0}$ .

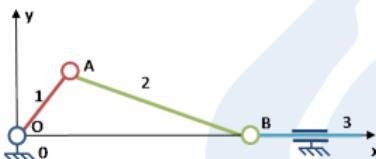
Le torseur cinématique du mouvement de  $S_1$  par rapport à  $S_0$  prend donc la forme simplifiée

$$\{ V_{S_1/S_0} \}_M = \begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_M$$

## Simplification des torseurs cinématiques

Si les mouvements des pièces d'un mécanisme peuvent être ramenés à des mouvements plans par rapport au repère générale (repère lié au bâti), les torseurs cinématiques des mouvements relatifs des solides peuvent être simplifiés comme précédemment.

Le système bielle-manivelle admet une simplification dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ .



En conséquence, le torseur cinématique de la liaison pivot-glissant d'axe  $\vec{x}$  entre les solides 2 et 3 admet la simplification suivante :

$$\{V_{3/0}\}_B = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B \text{ devient dans le plan } (O, \vec{x}, \vec{y}): \{V_{3/0}\}_B = \begin{Bmatrix} \sim & v_x \\ \sim & 0 \\ 0 & \sim \end{Bmatrix}_B$$

Ce type de raisonnement se généralise à tous les torseurs des liaisons et permet ainsi de minimiser le nombre d'inconnues cinématiques. Ainsi, il n'y a que 3 degrés de liberté au maximum par liaison dans **un problème plan**.

## Outils de cinématique graphique

La cinématique graphique consiste à exploiter les **propriétés** des **champs de vecteurs vitesse** par constructions **graphiques** :

- **distribution de vitesse** dans un solide en rotation,
  - ▶ vecteur vitesse perpendiculaire au rayon de la trajectoire,
  - ▶ vecteur vitesse inscrit dans le triangle des vitesses.
- **équiprojectivité** des vecteurs vitesses.

Il est donc nécessaire de pouvoir représenter le mécanisme **dans un plan** qui recevra les constructions graphiques. La cinématique graphique ne peut donc s'appliquer qu'aux **mécanismes admettant une simplification plane**.

## Centre instantané de rotation (CIR)

Soit un solide  $S_1$  en mouvement plan par rapport à  $S_0$  : Le torseur cinématique du mouvement de  $S_1$  par rapport à  $S_0$  en un point quelconque  $M$  est :

$$\{V_{S_1/S_0}\}_M = \left\{ \begin{array}{ccc} \sim & v_x \\ \sim & v_y \\ \omega_z & \sim \end{array} \right\}_M$$

$I$  est centre instantané de rotation du solide  $S_1$  par rapport à  $S_0$  si :  $\overrightarrow{V_{I \in S_1/S_0}} = \overrightarrow{0}$

Remarques :

- $I$  est donc un point central du torseur cinématique de  $S_1$  par rapport à  $S_0$ . Le  $CIR_{(S_1/S_0)}$  correspond donc à l'intersection de l'axe central du torseur cinématique de  $S_1/S_0$  avec le plan d'évolution du solide  $S_1$ ,
- Le CIR est « instantané », c'est à dire que, dans le cas général, sa position est attachée à un instant donnée et à une position particulière du mécanisme,
- Le CIR peut être un point défini en dehors de la limite matérielle du solide  $S_1$ .

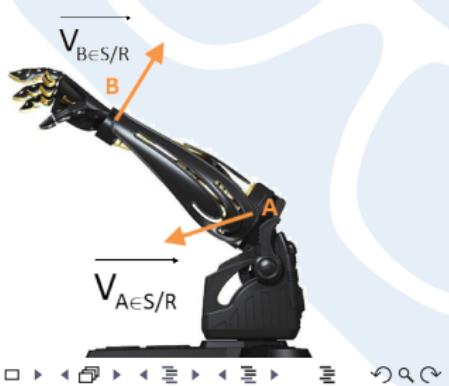
## Opérations sur le CIR

### Répartition des vecteurs vitesse autour du CIR

- A un instant  $t$ , tout se passe comme si le solide est en rotation pure autour du CIR.
  - ▶ les vecteurs vitesses des points du solide  $S_1$  sont donc orthogonaux au rayon de leur trajectoires,
  - ▶ ils sont inscrits dans un triangle de vitesse issu du CIR.
- *Remarque : Si le solide  $S_1$  est en liaison pivot par rapport au bâti du mécanisme, son mouvement est une rotation autour du centre de la liaison. Le CIR est alors confondu avec ce point et est fixe au cours du temps.*

### Détermination graphique du CIR

- Par définition, le vecteur vitesse du point  $M$  quelconque du solide  $S_1$  par rapport à  $S_0$  est orthogonale à la droite passant par le point  $M$  et par le CIR de  $S_1/S_0$ .
- Si on connaît les directions des vitesses de deux points  $M$  et  $M'$  du solide  $S_1$ , le CIR de  $S_1/S_0$  est à l'intersection des deux perpendiculaires à ces directions passant par  $M$  et  $M'$ .

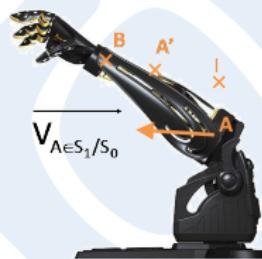


## Opérations sur le CIR

### Détermination graphique des vitesses en utilisant le CIR

En connaissant la position de  $I$ , CIR de  $S/R$  et la vitesse du point  $A$ , on détermine la vitesse d'un point  $B$  quelconque du solide de la manière suivante :

1. Tracer  $A'$ , équidistant de  $A$  ( $IA = IA'$ ) et appartenant à  $(IB)$ ,
2. Tracer  $\overrightarrow{V_{A' \in S_1/S_0}}$  de même norme que  $\overrightarrow{V_{A \in S_1/S_0}}$  et orthogonal à  $(IB)$ ,
3. Tracer la droite passant par  $I$  et par l'extrémité de  $\overrightarrow{V_{A' \in S_1/S_0}}$ , c'est le triangle des vitesses qui inscrit  $\overrightarrow{V_{A \in S_1/S_0}}$ ,
4. Tracer  $\overrightarrow{V_{B \in S_1/S_0}}$ , orthogonal à  $(IB)$  et dont l'extrémité est sur la droite tracée précédemment.



### Base et roulante

- La base du mouvement de  $S/R$  est la trajectoire du CIR de  $S/R$  dans  $R$ ,
- La roulante du mouvement de  $S/R$  est la trajectoire du CIR de  $S/R$  dans le repère lié à  $S$ ,
- La base et la roulante du mouvement de  $S/R$  sont à chaque instant tangentes au CIR de  $S/R$  et roulement sans glisser l'une sur l'autre en ce point.

## Modélisation vectorielle

Une **action mécaniques** peut être considérée comme un ensemble de forces s'exerçant entre des solides. Chacune de ces forces est modélisable par un vecteur.

- La force exercée sur le solide  $S_1$  par  $S_0$  au point A est notée  $\vec{A}_{S_1/S_0}$  :
  - ▶ l'**origine** du vecteur est le point du solide où s'applique la force,
  - ▶ le **sens** et la direction du vecteur correspondent au sens et à la direction de la force,
  - ▶ la **norme** du vecteur correspond à l'intensité, en Newton (N), de la force.



## Modélisation locale

Il existe deux sortes d'actions mécaniques les actions à **distance** et les actions de **contact**.

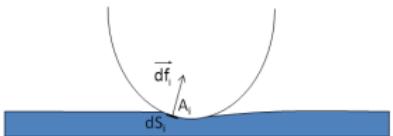
Une action mécanique d'un solide 1 sur un solide 2 est dite à **distance** si elle ne résulte pas d'une liaison mécanique entre 1 et 2. Exemple: actions magnétiques et l'action de la pesanteur.

Ex: Action mécanique de pesanteur

- $\vec{df}_v = \rho \cdot \vec{g} \cdot dv,$
- $\rho$  est la masse volumique de la particule ( $Kg/m^3$ ),
- $\vec{g}$  le vecteur accélération de la pesanteur ( $m/s^2$ ),
- $dV$  un élément de volume élémentaire ( $m^3$ ).



Ex: Pression de contact, un élément de force surfacique est donné par :



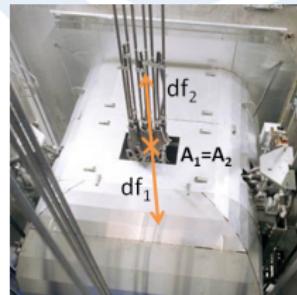
- $\vec{df}_s = P \cdot \vec{n} \cdot ds,$
- $P$  est la pression de contact ( $Pa$ ),
- $ds$  un élément de surface élémentaire ( $m^2$ ),
- $\vec{n}$  la normale extérieure au plan de contact.

## Modélisation globale d'une action mécanique

- Il est possible d'introduire le torseur, noté  $\{T_{\bar{S} \rightarrow S}\}$  qui représente l'action mécanique de  $\bar{S}$  sur  $S$  au point A,
- Le principe est donc de sommer l'ensemble des actions mécaniques élémentaires de contact.

Étude d'un cas simplifié, nécessité du moment:  $S$  subit 2 actions mécaniques élémentaires  $\vec{df}_1$  et  $\vec{df}_2$  aux points  $A_1$  et  $A_2$ . Ces deux actions mécaniques élémentaires sont opposées :  $\vec{df}_1 = -\vec{df}_2$ .

- Cas 1:  $A_1$  est confondu avec  $A_2$ ,  $\sum \vec{df}_i = 0$  L'action mécanique résultante de  $S_0$  sur  $S_0$  est nulle.



## Modélisation globale d'une action mécanique

Étude d'un cas simplifié, nécessité du moment:  $S$  subit 2 actions mécaniques élémentaires  $\vec{df}_1$  et  $\vec{df}_2$  aux points  $A_1$  et  $A_2$ . Ces deux actions mécaniques élémentaires sont opposées :  $\vec{df}_1 = -\vec{df}_2$ .

- Cas 2:  $A_1$  n'est pas confondu avec  $A_2$ ,  $\sum \vec{df}_i = 0$ . L'action mécanique résultante de  $\bar{S}$  sur  $S$  n'est pas nulle puisque le solide  $S$  est susceptible de subir une rotation sous l'effet de ces deux actions mécaniques élémentaires, donc: il faut tenir compte de la position des  $A_i$  pour élaborer une action mécanique globale représentant les actions élémentaires.



## Généralisation

Si les actions mécaniques locales  $\overrightarrow{df_{S_{Ai}}}$  (surficiques) et  $\overrightarrow{df_{V_{Ai}}}$  (volumiques) de  $\bar{S}$  sur  $S$  sont réparties sur les points  $A_i$ , on peut définir les éléments de réduction du torseur d'action mécanique de  $\bar{S}$  sur  $S$  de la façon suivante :

$$\{T_{\bar{S} \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{\bar{S} \rightarrow S}} = \iiint \overrightarrow{df_{V_{Ai}}} + \iint \overrightarrow{df_{S_{Ai}}} \\ \overrightarrow{M_{O, \bar{S} \rightarrow S}} = \iiint \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{df_{V_{Ai}}} + \iint \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{df_{S_{Ai}}} \end{array} \right\}_O$$

Remarque: Même si ce calcul intégral est rarement entrepris, il est important de comprendre ce que représente un torseur d'efforts. Ce torseur peut être écrit en faisant apparaître ses composantes en projection dans un repère  $R$  :

$$\{T_{\bar{S} \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{ll} X_{\bar{S} \rightarrow S} & L_{O, \bar{S} \rightarrow S} \\ Y_{\bar{S} \rightarrow S} & M_{O, \bar{S} \rightarrow S} \\ Z_{\bar{S} \rightarrow S} & N_{O, \bar{S} \rightarrow S} \end{array} \right\}_O$$

## Résolution analytique

Définition

Un objet est à l'équilibre lorsqu'il a un mouvement rectiligne uniforme (son accélération linéaire et son accélération angulaire sont nulles).

De plus, la somme des forces et la somme des moments des forces au même point exercées sur lui sont nulles :

- théorème de la résultante statique :  $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}$ ,
- théorème du moment statique :  $\sum_{i=1}^n \vec{M}_A(\vec{F}_i) + \sum_{i=1}^n \vec{C}_i = \vec{0}$ .

La résolution analytique avec le Principe Fondamental de la Statique se déroule en suivant la séquence suivant:

1. Isoler un solide,
2. Faire le bilan des actions mécaniques associées (de contact et à distance),
3. Modéliser ces actions mécaniques sous la forme de torseurs,
4. Déplacer tous ces torseurs au même point,
5. Écrire le système d'équations issu du P.F.S.

## Résolution graphique

Dans le cas d'un problème plan ou tous les efforts sont modélisables par des glisseurs (moment nul), on peut utiliser une méthode graphique de résolution.

Système soumis à 2 glisseurs coplanaires.

Soit un solide  $S$  soumis en A et B à 2 glisseurs  $\overrightarrow{A_{S_1 \rightarrow S}}$  et  $\overrightarrow{B_{S_1 \rightarrow S}}$ , par application du théorème de la résultante statique:

$$\overrightarrow{A_{S_1 \rightarrow S}} + \overrightarrow{B_{S_1 \rightarrow S}} = \vec{0}, \text{ donc } \overrightarrow{A_{S_1 \rightarrow S}} = -\overrightarrow{B_{S_1 \rightarrow S}}$$

Ces 2 vecteurs sont donc égaux en norme et de sens opposés, par application du théorème du moment statique en A, on a :

$$\overrightarrow{AA} \wedge \overrightarrow{A_{S_1 \rightarrow S}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{B_{S_1 \rightarrow S}} = \vec{0}, \text{ donc } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{B_{S_1 \rightarrow S}} = \vec{0}$$

$\overrightarrow{B_{S_1 \rightarrow S}}$  est donc colinéaire à  $\overrightarrow{AB}$ . Donc  $\overrightarrow{A_{S_1 \rightarrow S}}$  aussi.

Les 2 glisseurs ont le même support, **la droite passant par les 2 points d'application**, ils sont de même norme et de sens opposés.



## Résolution graphique

Système soumis à 2 glisseurs coplanaires.

Soit un solide  $S$  soumis en A, B et C à 3 glisseurs  $\overrightarrow{A_{S_1 \rightarrow S}}$ ,  $\overrightarrow{B_{S_1 \rightarrow S}}$  et  $\overrightarrow{C_{S_1 \rightarrow S}}$ , par application du théorème de la résultante statique, on a :  
 $\overrightarrow{A_{S_1 \rightarrow S}} + \overrightarrow{B_{S_1 \rightarrow S}} + \overrightarrow{C_{S_1 \rightarrow S}} = \overrightarrow{0}$

Cette somme vectorielle nulle peut être traitée de façon graphique en construisant un triangle appelé le triangle le dynamique fermé.

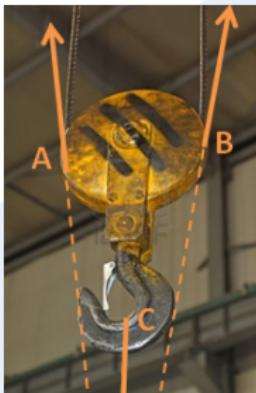
Par application du théorème du moment statique en I, on a :

$$\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{A_{S_1 \rightarrow S}} + \overrightarrow{IB} \wedge \overrightarrow{B_{S_1 \rightarrow S}} + \overrightarrow{IC} \wedge \overrightarrow{C_{S_1 \rightarrow S}} = \overrightarrow{0}$$

Soit I à l'intersection des supports de  $\overrightarrow{A_{S_1 \rightarrow S}}$  et  $\overrightarrow{B_{S_1 \rightarrow S}}$ ,  
 $\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{A_{S_1 \rightarrow S}} = \overrightarrow{IB} \wedge \overrightarrow{B_{S_1 \rightarrow S}} = \overrightarrow{0}$ .

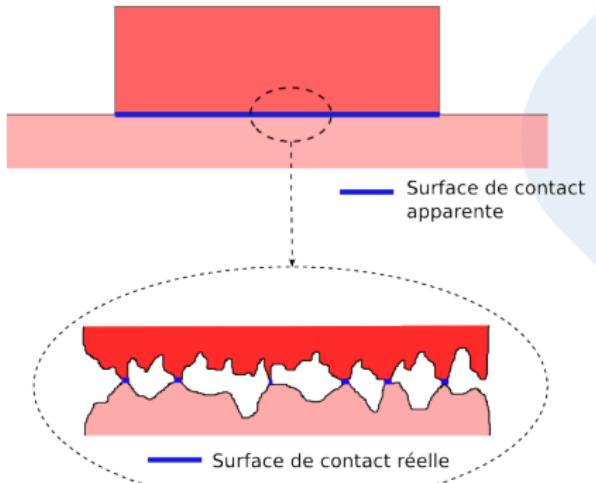
Ainsi,  $\overrightarrow{IC} \wedge \overrightarrow{C_{S_1 \rightarrow S}} = \overrightarrow{0}$ , donc I appartient également à la direction de  $\overrightarrow{C_{S_1 \rightarrow S}}$ .

Les trois glisseurs sont donc concourants en I, leur somme vectorielle est nulle.



## Lois de Coulomb

Les lois de Charles de **Coulomb** permettent de modéliser une action mécanique locale de contact entre deux solides en tenant compte du frottement entre les matériaux en contact.

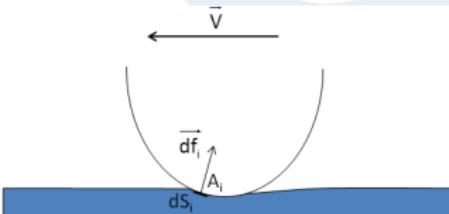


## Inclinaison de la résultante des efforts de contact

- Le phénomène de frottement apparaît lorsque l'on essaye d'induire un glissement relatif entre les deux solides parallèlement au plan de contact,
- En considérant la déformation des solides au niveau de leur zone de contact, on constate que la déformation et la répartition des actions élémentaires de contact sont dissymétriques,
- Il en résulte que la résultante des actions mécaniques de contact est inclinée par rapport à la normale au plan de contact théorique.

Remarques :

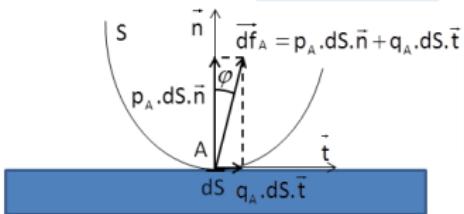
- La résultante s'incline dans le sens opposé au mouvement relatif des deux solides. Le frottement s'oppose au mouvement relatif des solides en contact,
- Il n'est pas nécessaire qu'il y ait une vitesse relative pour que la résultante s'incline.



## Modèle de Coulomb

### Coefficient de frottement

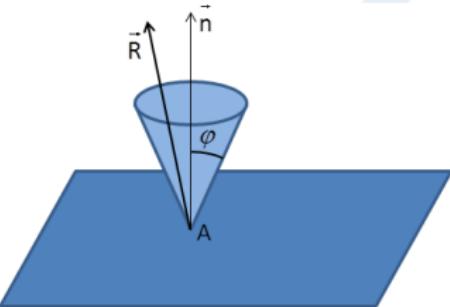
Dans le modèle proposé par Coulomb, on décompose les actions mécaniques de contact en:



- une composante normale  $p.ds.\vec{n}$  où  $p$  est la pression de contact qui règne sur l'élément de surface  $ds$  et  $\vec{n}$  la normale à  $ds$ ,
- une composante tangentielle  $q.ds.\vec{t}$  où  $q$  est la densité tangentielle surfacique d'effort, proportionnelle à  $p$ ,
- $p$  et  $q$  sont reliés par :  $q = f.p$  où  $f$  est le coefficient de frottement.

## Cône de frottement

On définit également l'angle  $\varphi$  tel que  $\tan\varphi = \frac{q}{p}$ . Le **cône de frottement**, dans un contact ponctuel, est alors le cône de demi-angle  $\varphi$  dont le sommet est au point de contact et dont l'axe est la normale au contact.



- **Cas du glissement:** Dans le cas où  $\overrightarrow{V_{S/\bar{S}}} \neq \vec{0}$  (cas du glissement), la résultante des actions mécaniques de contact  $\overrightarrow{R_{\bar{S}}} \rightarrow \bar{S}$  se situe alors sur le cône de frottement et est inclinée dans la direction opposée à  $\overrightarrow{V_{S/\bar{S}}}$ ,
- **Cas du non-glissement (adhérence)** Dans ce cas  $\overrightarrow{V_{S/\bar{S}}} = \vec{0}$ .  $\overrightarrow{R_{\bar{S}}} \rightarrow \bar{S}$  est alors à l'intérieur du cône d'adhérence dont le demi-angle est  $\varphi'$ , légèrement supérieur à  $\varphi$ . Sa position exacte dans le cône est déterminée en fonction des conditions d'équilibre du solide.

## Données numériques

Matériaux en contact	Coefficient de frottement $f$	Coefficient d'adhérence $f'$
Acier/Acier	0,1-0,2	0,15-0,25
Acier/Bronze	0,12-0,2	0,15-0,2
Acier/Ferrodo	0,2-0,35	0,3-0,4
Acier/PTFE	0,02-0,08	0,1-0,15
Pneu/Route	0,3-0,6	0,6-1,2