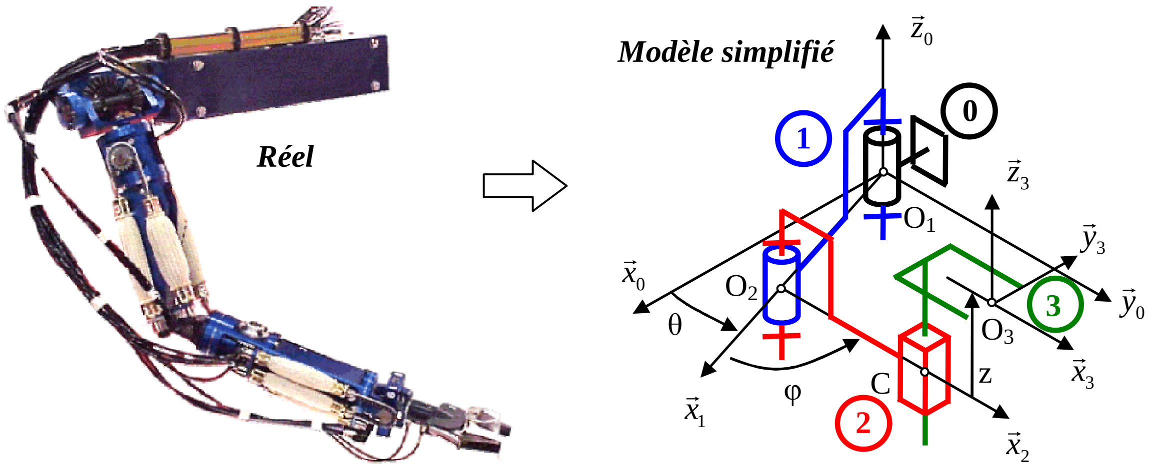
Recherche des caractéristiques des actionneurs et/ou des actions mécaniques dans les liaisons à l'aide du PFD



Le manipulateur déjà abordé TD 14 est conçue à partir d'une structure anthropomorphique à 7 degrés de liberté activés par des paires de muscles artificiels montés en opposition et utilisant l'énergie pneumatique.

Exemple de système mécanique

BRAS DE ROBOT ANTROPORMOPHIQUE

1. Recherche des caractéristiques d'un actionneur

1.1. Méthode générale

Pour déterminer les caractéristiques d'un actionneur (moteur, vérin, …) dans les problèmes de type 2, il faut rechercher les lois d'entrée-sortie d'actions mécaniques (autant d'équations que de caractéristiques d'actionneur à déterminer). Pour cela il faut rechercher les équations particulières qui n'introduisent pas d'inconnues de liaison tout en écrivant le moins d'équations possibles.

Problème de type 2

On connait :
- Les lois du mouvement
- Les inerties

⇩

On cherche à déterminer
- Les caractéristiques des actionneurs
- Les actions mécaniques des liaisons

Il faut limiter au maximum le nombre d'équation à écrire !! Pour cela il faut utiliser en priorité les équations associées à des mouvements de solides ou d'ensemble de solides.

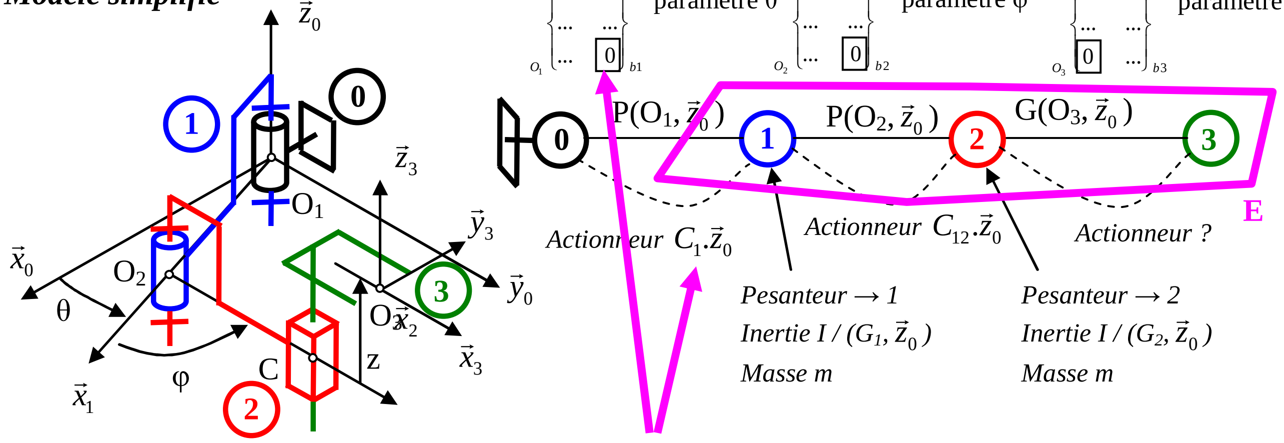
Dans le cas d'un système (un solide ou un ensemble de solides) mis en mouvement de rotation autour d'un axe par un actionneur, l'utilisation du théorème du moment dynamique écrit en un point appartenant à l'axe de rotation projeté sur l'axe de rotation permet de déterminer le couple moteur qui anime le système.

Dans le cas d'un système (un solide ou un ensemble de solides) mis en mouvement de translation suivant un axe par un actionneur, l'utilisation du théorème de la résultante dynamique projeté sur l'axe de translation permet de déterminer l'effort moteur qui anime le système.

1.2. Applications sur le robot

Application 1 : Déterminer le couple moteur C_1.

Modèle simplifié



Pour déterminer le couple moteur C_1, il faut isoler l'ensemble E = 1+2+3 et utiliser le théorème du moment dynamique écrit au point O_1 projeté sur l'axe $\vec{z}_0$. Ce choix permet d'obtenir une équation scalaire où aucune inconnue de liaison n'intervient puisqu'elle correspond au 0 du torseur d'action mécanique transmissible.

On a donc : $\overrightarrow{\delta_{O_1,\,E/0}}.\vec{z}_0 = \overrightarrow{M_{O_1(\bar{E}\to E)}}.\vec{z}_0$ *avec* $\overrightarrow{M_{O_1(\bar{E}\to E)}}.\vec{z}_0 = C_1$. *Il faut ensuite réfléchir au calcul de* $\overrightarrow{\delta_{O_1,\,E/0}}.\vec{z}_0$. *On décompose le calcul du moment dynamique en passant par les solides élémentaires :*

$$\overrightarrow{\delta_{O_1,\,E/0}} = \overrightarrow{\delta_{O_1,\,1/0}} + \overrightarrow{\delta_{O_1,\,2/0}} + \overrightarrow{\delta_{O_1,\,3/0}}$$

Inertie et masse négligées

Nature du mouvement de 1/0 ? :
Rotation autour de l'axe $(O_1, \vec{z}_0)$

⇩

On connait les éléments d'inertie du solide 1 au centre de gravité G_1

→ le plus simple pour calculer $\overrightarrow{\delta_{O_1,1/0}}$ *est de calculer* $\overrightarrow{\sigma_{G_1,\,1/0}} = I_{G_1}(S_1).\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$

puis O_1 étant un point fixe dans 0 d'utiliser le théorème du transport :
$\overrightarrow{\sigma_{O_1,\,1/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G_1,\,1/0}} + \overrightarrow{O_1G_1} \wedge \overrightarrow{R_{C\,1/0}}$

puis la définition : $\overrightarrow{\delta_{O_1,\,1/0}} = \dfrac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{O_1,\,1/0}}\Big|_0$

Nature du mouvement de 2/0 ? :
Mouvement quelconque

⇩

On connait les éléments d'inertie du solide 2 au centre de gravité G_2

→ le plus simple pour calculer $\overrightarrow{\delta_{O_1,\,2/0}}$ *est de calculer* $\overrightarrow{\sigma_{G_2,\,2/0}} = I_{G_2}(S_2).\overrightarrow{\Omega_{2/0}}$

puis O_1 étant un point fixe dans 0 d'utiliser le théorème du transport : $\overrightarrow{\sigma_{O_1,\,2/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G_2,\,2/0}} + \overrightarrow{O_1G_2} \wedge \overrightarrow{R_{C\,2/0}}$

puis la définition : $\overrightarrow{\delta_{O_1,\,2/0}} = \dfrac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{O_1,\,2/0}}\Big|_0$

D'où :

$$\overrightarrow{\delta_{O_1,\,E/0}} = \overrightarrow{\delta_{O_1,\,1/0}} + \overrightarrow{\delta_{O_1,\,2/0}} + \overrightarrow{\delta_{O_1,\,3/0}}$$

Inertie et masse négligées

On a $\overrightarrow{\sigma_{G_1,\,1/0}} = I.\dot{\theta}.\vec{z}_0$

$$\rightarrow \overrightarrow{\sigma_{O_1,\,1/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G_1,\,1/0}} + \overrightarrow{O_1G_1} \wedge \overrightarrow{R_{C\,1/0}}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{\sigma_{O_1,\,1/0}} = I.\dot{\theta}.\vec{z}_0 + \frac{L}{2}.\vec{x}_1 \wedge \overrightarrow{R_{C\,1/0}}$$

Avec $\overrightarrow{R_{C\,1/0}} = m.\overrightarrow{V_{G_1\,1/0}} = m.\frac{L}{2}.\dot{\theta}.\vec{y}_1$

$$\rightarrow \overrightarrow{\sigma_{O_1,\,1/0}} = \left(I + m.\frac{L^2}{4}\right).\dot{\theta}.\vec{z}_0$$

puis par définition : $\overrightarrow{\delta_{O_1,\,1/0}} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{O_1,\,1/0}}\Big|_0$

$$\overrightarrow{\delta_{O_1,\,1/0}} = \left(I + m.\frac{L^2}{4}\right).\ddot{\theta}.\vec{z}_0$$

On a $\overrightarrow{\sigma_{G_2,\,2/0}} = I.(\dot{\theta}+\dot{\varphi}).\vec{z}_0$

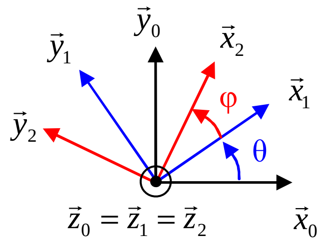
$$\rightarrow \overrightarrow{\sigma_{O_1,\,2/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G_2,\,2/0}} + \overrightarrow{O_1G_2} \wedge \overrightarrow{R_{C\,2/0}}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{\sigma_{O_1,\,2/0}} = I.(\dot{\theta}+\dot{\varphi}).\vec{z}_0 + (L.\vec{x}_1 + \frac{L}{2}.\vec{x}_2) \wedge \overrightarrow{R_{C\,2/0}}$$

Avec $\overrightarrow{R_{C\,2/0}} = m.\overrightarrow{V_{G_2\,2/0}} = m.L.\dot{\theta}.\vec{y}_1 + m.\frac{L}{2}.(\dot{\theta}+\dot{\varphi}).\vec{y}_2$

D'où $(L.\vec{x}_1 + \frac{L}{2}.\vec{x}_2) \wedge (m.L.\dot{\theta}.\vec{y}_1 + m.\frac{L}{2}.(\dot{\theta}+\dot{\varphi}).\vec{y}_2)$

$$= m.L^2.\dot{\theta}.\vec{z}_0 + m.\frac{L^2}{2}.(\dot{\theta}+\dot{\varphi}).\cos\varphi.\vec{z}_0 + m.\frac{L^2}{2}.\dot{\theta}.\cos\varphi.\vec{z}_0 + m.\frac{L^2}{4}.(\dot{\theta}+\dot{\varphi}).\vec{z}_0$$



$$\overrightarrow{\sigma_{O_1,\,2/0}} = I.(\dot{\theta}+\dot{\varphi}).\vec{z}_0 + m.L^2.\dot{\theta}.\vec{z}_0 + m.\frac{L^2}{2}.(\dot{\theta}+\dot{\varphi}).\cos\varphi.\vec{z}_0 + m.\frac{L^2}{2}.\dot{\theta}.\cos\varphi.\vec{z}_0 + m.\frac{L^2}{4}.(\dot{\theta}+\dot{\varphi}).\vec{z}_0$$

puis par définition : $\overrightarrow{\delta_{O_1,\,2/0}} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{O_1,\,2/0}}\Big|_0$

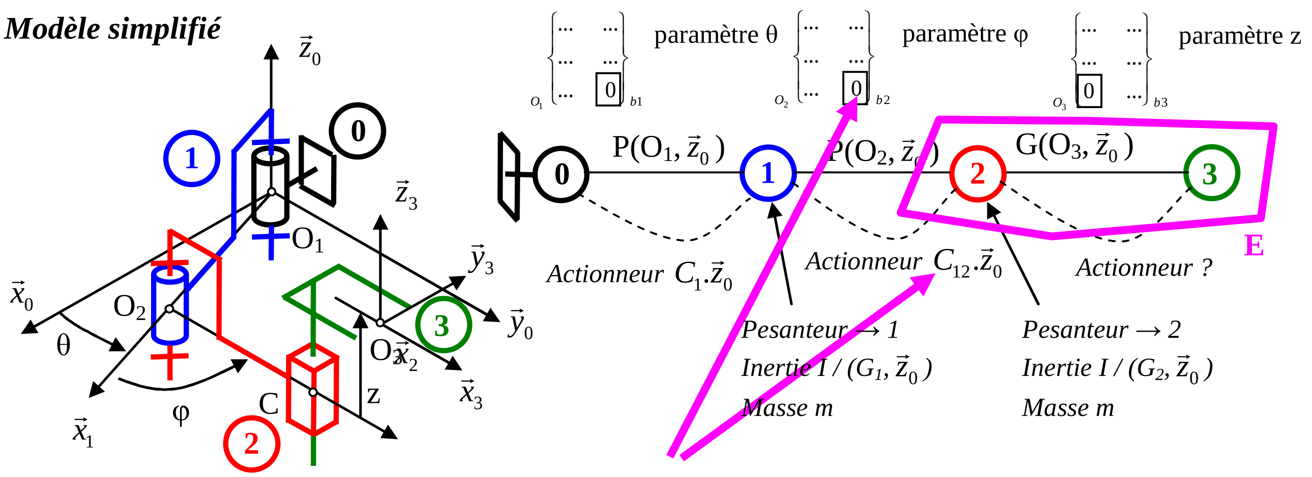
D'où :

$$\overrightarrow{\delta_{O_1,\,E/0}} = \overrightarrow{\delta_{O_1,\,1/0}} + \overrightarrow{\delta_{O_1,\,2/0}} = \left(I + m.\frac{L^2}{4}\right).\ddot{\theta}.\vec{z}_0 + I.(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}).\vec{z}_0 + m.L^2.\ddot{\theta}.\vec{z}_0 + m.\frac{L^2}{2}.(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}).\cos\varphi.\vec{z}_0$$
$$- m.\frac{L^2}{2}.(\dot{\theta}+\dot{\varphi}).\dot{\varphi}.\sin\varphi.\vec{z}_0 + m.\frac{L^2}{2}.\ddot{\theta}.\cos\varphi.\vec{z}_0 - m.\frac{L^2}{2}.\dot{\theta}.\dot{\varphi}.\sin\varphi.\vec{z}_0 + m.\frac{L^2}{4}.(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}).\vec{z}_0$$

Au final l'utilisation du PFD donne :

$$C_1 = \left(I + m.\frac{L^2}{4} + m.L^2 + m.\frac{L^2}{2}.\cos\varphi\right).\ddot{\theta} + \left(I + m.\frac{L^2}{2}.\cos\varphi + m.\frac{L^2}{4}\right).(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}) - m.\frac{L^2}{2}.\dot{\varphi}.\sin\varphi.(2.\dot{\theta}+\dot{\varphi})$$

Application 2 : Déterminer le couple moteur C_{12}.



Pour déterminer le couple moteur C_{12}, il faut isoler l'ensemble E = 2+3 et utiliser le théorème du moment dynamique écrit au point O_2 projeté sur l'axe $\vec{z}_0$. Ce choix permet d'obtenir une équation scalaire où aucune inconnue de liaison n'intervient puisqu'elle correspond au 0 du torseur d'action mécanique transmissible.

On a donc : $\overrightarrow{\delta_{O_2,\,E/0}}.\vec{z}_0 = \overrightarrow{M_{O_2(\bar{E}\to E)}}.\vec{z}_0$ *avec* $\overrightarrow{M_{O_2(\bar{E}\to E)}}.\vec{z}_0 = C_{12}$. *Il faut ensuite réfléchir au calcul de* $\overrightarrow{\delta_{O_2,\,E/0}}.\vec{z}_0$. *On décompose le calcul du moment dynamique en passant par les solides élémentaires :*

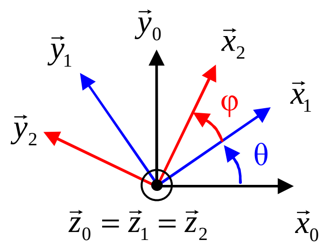
$$\overrightarrow{\delta_{O_2,\,E/0}} = \overrightarrow{\delta_{O_2,\,2/0}} + \overrightarrow{\delta_{O_2,\,3/0}}$$

Inertie et masse négligées

Nature du mouvement de 2/0 ? : Mouvement quelconque
On connait les éléments d'inertie du solide 2 au centre de gravité G_2 → le plus simple pour calculer $\overrightarrow{\delta_{O_2,\,2/0}}$ est de calculer $\overrightarrow{\sigma_{G_2,\,2/0}} = I_{G_2}(S_2).\overrightarrow{\Omega_{2/0}}$ *puis de calculer par la définition* $\overrightarrow{\delta_{G_2,\,2/0}} = \left.\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{G_2,\,2/0}}\right|_0$

et enfin d'utiliser le théorème du transport : $\overrightarrow{\delta_{O_2,\,2/0}} = \overrightarrow{\delta_{G_2,\,2/0}} + \overrightarrow{O_2G_2} \wedge \overrightarrow{R_{d\;2/0}}$

On a $\overrightarrow{\sigma_{G_2,\,2/0}} = I.(\dot\theta + \dot\varphi).\vec{z}_0$



$$\rightarrow \overrightarrow{\delta_{G_2,\,2/0}} = \left.\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{G_2,\,2/0}}\right|_0 = I.(\ddot\theta + \ddot\varphi).\vec{z}_0$$

$$\rightarrow \overrightarrow{\delta_{O_2,\,2/0}} = \overrightarrow{\delta_{G_2,\,2/0}} + \overrightarrow{O_2G_2} \wedge \overrightarrow{R_{d\;2/0}}$$

Avec : $\overrightarrow{R_{C\;2/0}} = m.\overrightarrow{V_{G_2\;2/0}} = m.L.\dot\theta.\vec{y}_1 + m.\dfrac{L}{2}.(\dot\theta + \dot\varphi).\vec{y}_2$

$$\overrightarrow{R_{d\;2/0}} = \left.\frac{d}{dt}\overrightarrow{R_{C\;2/0}}\right|_0 = m.L.\ddot\theta.\vec{y}_1 - m.L.\dot\theta^2.\vec{x}_1 + m.\frac{L}{2}.(\ddot\theta + \ddot\varphi).\vec{y}_2 - m.\frac{L}{2}.(\dot\theta + \dot\varphi)^2.\vec{x}_2$$

$$\frac{L}{2}.\vec{x}_2 \wedge \left(m.L.\ddot\theta.\vec{y}_1 - m.L.\dot\theta^2.\vec{x}_1 + m.\frac{L}{2}.(\ddot\theta + \ddot\varphi).\vec{y}_2 - m.\frac{L}{2}.(\dot\theta + \dot\varphi)^2.\vec{x}_2\right) = m.\frac{L^2}{2}.\ddot\theta.\cos\varphi.\vec{z}_1$$
$$+ m.\frac{L^2}{2}.\dot\theta^2.\sin\varphi.\vec{z}_1 + m.\frac{L^2}{4}.(\ddot\theta + \ddot\varphi).\vec{z}_1$$

Au final l'utilisation du PFD donne :

$$C_{12} = m.\frac{L^2}{2}.\ddot\theta.\cos\varphi.\vec{z}_1 + m.\frac{L^2}{2}.\dot\theta^2.\sin\varphi.\vec{z}_1 + \left(I + m.\frac{L^2}{4}\right).(\ddot\theta + \ddot\varphi).\vec{z}_1$$

2. Recherche des caractéristiques des actions mécaniques dans une liaison

2.1. Méthode générale

La recherche des inconnues dans une liaison peut être conduite dans tous les problèmes de dynamique (type 1 et type 2). Il suffit dans ce cas d'écrire autant d'équations que d'inconnues de liaison à déterminer pour au final obtenir leurs expressions uniquement en fonction de données connues.

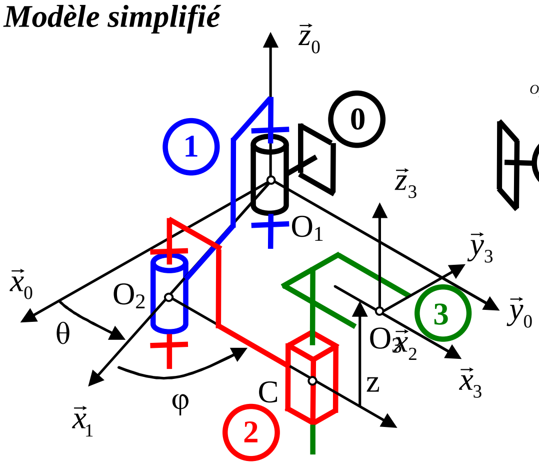
Problème de type 1	**Problème de type 2**
On connait : • Les actionneurs • Les inerties	On connait : • Les lois du mouvement • Les inerties
⇩	⇩
On cherche à déterminer • Les lois du mouvement • Les actions mécaniques des liaisons	On cherche à déterminer • Les caractéristiques des actionneurs • Les actions mécaniques des liaisons

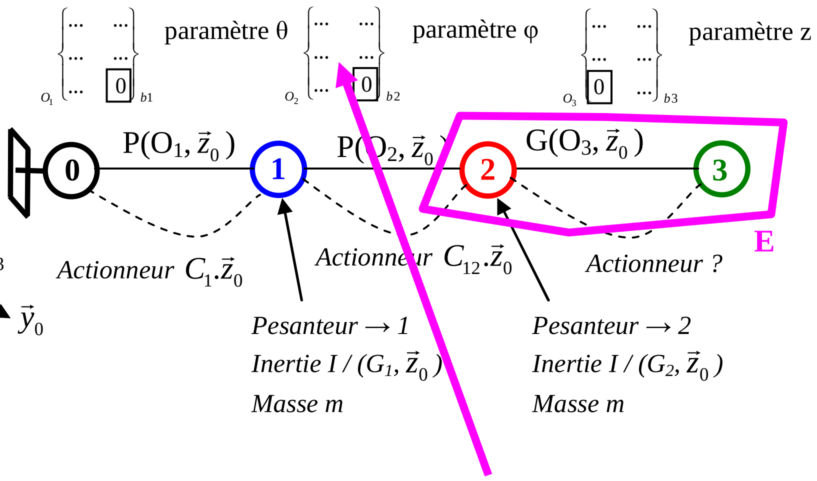
Les calculs dans ce genre de problème sont en général très longs et fastidieux …

2.2. Application sur le robot

<u>Application 1 :</u> Déterminer les actions de liaisons dans la liaison pivot entre 1 et 2.

Modèle simplifié





Pour déterminer les inconnues de la liaison, il faut isoler l'ensemble E = 2+3 et donc obtenir 5 équations scalaires pour lier les 5 inconnues de liaisons aux données connues du problème. Ces 5 équations scalaires sont issues du théorème de la résultante dynamique projeté sur les 3 axes de la base 2 et du théorème du moment dynamique écrit en O_2 et projeté sur les axes $\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$.

Pour la phase de vie étudiée, le PFD donne : $\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{d\ 2/0}} \\ \overrightarrow{\delta_{O_2,\ 2/0}}\end{matrix}\right\}_{O_2} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{\bar{E}\to E}} \\ \overrightarrow{M_{O_2(\bar{E}\to E)}}\end{matrix}\right\}_{O_2}$

Avec : $\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{\bar{E}\to E}} \\ \overrightarrow{M_{O_2(\bar{E}\to E)}}\end{matrix}\right\}_{O_2} = \left\{\begin{matrix}X_{12}.\vec{x}_2 + Y_{12}.\vec{y}_2 + Z_{12}.\vec{z}_2 - m_2.g.\vec{z}_0 \\ L_{12}.\vec{x}_2 + M_{12}.\vec{y}_2 + \overrightarrow{O_2G_2} \wedge -m_2.g.\vec{z}_0 + C_{12}.\vec{z}_0\end{matrix}\right\}_{O_2}$

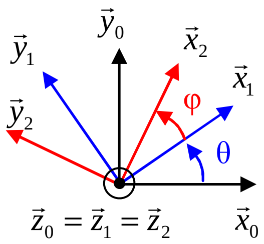
Et par définition : $\overrightarrow{R_{C\ 2/0}} = m\overrightarrow{V_{G_2\ 2/0}} = m.L.\dot{\theta}.\vec{y}_1 + m.\dfrac{L}{2}.(\dot{\theta}+\dot{\varphi}).\vec{y}_2$

$$\rightarrow \overrightarrow{R_{d\ 2/0}} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{R_{C\ 2/0}}\Big|_0 = m.L.\ddot{\theta}.\vec{y}_1 - m.L.\dot{\theta}^2.\vec{x}_1 + m.\frac{L}{2}.(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}).\vec{y}_2 - m.\frac{L}{2}.(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2.\vec{x}_2$$

$\rightarrow \overrightarrow{\sigma_{G_2,\ 2/0}} = I.(\dot{\theta}+\dot{\varphi}).\vec{z}_0 \rightarrow \overrightarrow{\delta_{G_2,\ 2/0}} = I.(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}).\vec{z}_0$ *que l'on transporte ensuite à l'aide du théorème de Koening :* $\overrightarrow{\delta_{O_2,\ 2/0}} = \overrightarrow{\delta_{G_2,\ 2/0}} + \overrightarrow{O_2G_2} \wedge \overrightarrow{R_{d\ 2/0}}$ avec :

$$\overrightarrow{O_2G_2} \wedge \overrightarrow{R_{d\ 2/0}} = \frac{L}{2}.\vec{x}_2 \wedge \left(m.L.\ddot{\theta}.\vec{y}_1 - m.L.\dot{\theta}^2.\vec{x}_1 + m.\frac{L}{2}.(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}).\vec{y}_2 - m.\frac{L}{2}.(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2.\vec{x}_2 \right)$$

$$\overrightarrow{O_2G_2} \wedge \overrightarrow{R_{d\ 2/0}} = m.\frac{L^2}{2}.\ddot{\theta}.\cos\varphi.\vec{z}_0 + m.\frac{L^2}{2}.\dot{\theta}^2.\sin\varphi.\vec{z}_0 + m.\frac{L^2}{4}.(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}).\vec{z}_0$$



$$\rightarrow \overrightarrow{\delta_{O_2,\ 2/0}} = I.(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}).\vec{z}_0 + m.\frac{L^2}{2}.\ddot{\theta}.\cos\varphi.\vec{z}_0 + m.\frac{L^2}{2}.\dot{\theta}^2.\sin\varphi.\vec{z}_0 + m.\frac{L^2}{4}.(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}).\vec{z}_0$$

Calcul de $\overrightarrow{O_2G_2} \wedge -m_2.g.\vec{z}_0 = \dfrac{L}{2}.\vec{x}_2 \wedge -m_2.g.\vec{z}_0 = m_2.\dfrac{L}{2}.g.\vec{y}_2$

$$D'o\grave{u} : \begin{cases} X_{12} = m.L.\ddot{\theta}.\sin\varphi - m.L.\dot{\theta}^2.\cos\varphi - m.\dfrac{L}{2}.(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2 \\ Y_{12} = m.L.\ddot{\theta}.\cos\varphi + m.L.\dot{\theta}^2\sin\varphi + m.\dfrac{L}{2}.(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}) \\ Z_{12} = m_2.g \\ L_{12} = 0 \\ M_{12} = -m_2.\dfrac{L}{2}.g \end{cases} .$$

<u>Application 2 :</u> Déterminer les actions de liaisons dans la liaison pivot entre 1 et 0.