

Equilibrage des rotors

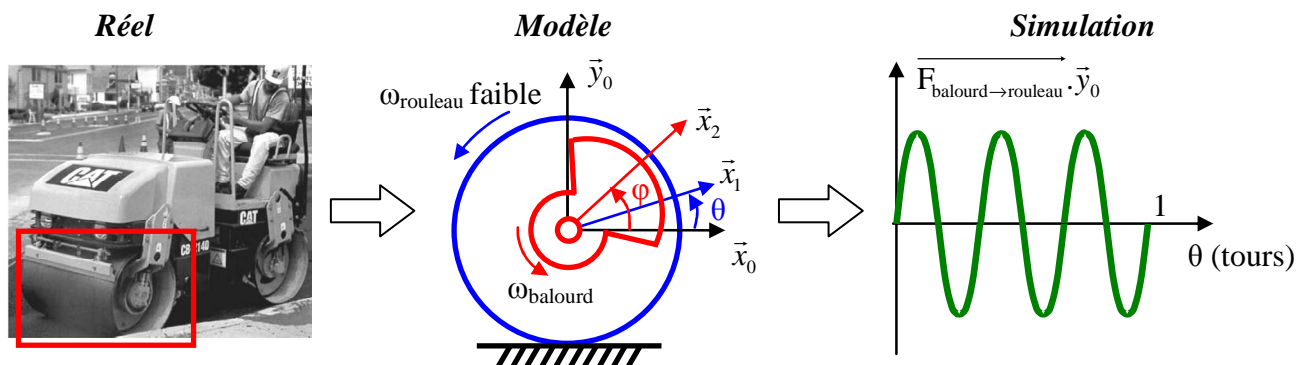


Exemples de systèmes mécaniques

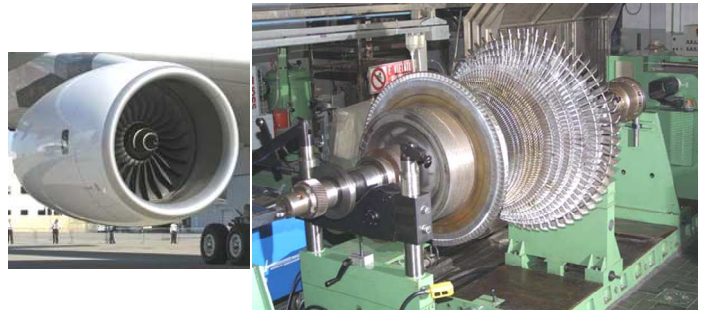
Rouleau de compacteur, rotor de turbine, roue de voiture ...

Lorsqu'un solide est entraîné en rotation autour d'un axe fixe et qu'il possède une mauvaise répartition de matière autour de l'axe de rotation, l'application du Principe Fondamental de la Dynamique permet de montrer que des forces centrifuges tournantes s'exercent sur ce solide.

Sur certains systèmes cette « mauvaise répartition » peut être volontairement recherchée afin de générer des vibrations. Par exemple dans le cas d'un rouleau de compacteur, les vibrations provoquées par le balourd tournant sont dans ce cas utiles au compactage du sol.



Par contre, dans la plupart des applications où des solides sont entraînés en rotation, ces forces tournantes sont indésirables car elles provoquent des vibrations nuisibles, celles-ci peuvent engendrer une détérioration rapide des liaisons ainsi qu'une gêne pour l'utilisateur du matériel. Pour supprimer ces vibrations dues aux masses mal réparties, on réalise un **équilibrage**. Cet équilibrage est d'autant plus nécessaire que la vitesse de rotation est grande.



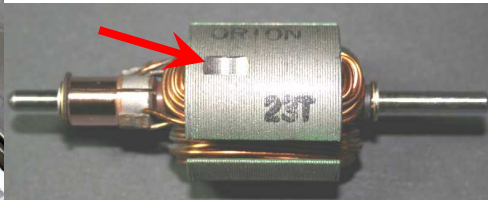
Equilibrage du rotor turbine

Les solutions correctives d'équilibrage des rotors sont réalisées par ajout de matière (masses d'équilibrage) ou enlèvement de matière par perçages ou meulages. Les conditions d'équilibrage sont en général déterminées à l'aide de « **machines d'équilibrage** » qui mesurent les déformations ou les efforts variables générés par le rotor lors de sa rotation sur le support.

L'équilibrage est aussi parfois réalisé sur site avec des analyseurs portatifs. Ces appareils permettent de déterminer rapidement l'état de déséquilibre des machines et installations. Ils permettent ainsi de procéder à l'équilibrage de rotors sans avoir à les déposer, ce qui permet d'obtenir un coût d'équilibrage particulièrement attractif. Ces appareils utilisent en général les informations fournies par des accéléromètres et un capteur de vitesse angulaire.



Masselotte de roue de voiture



Meulage sur rotor de moteur électrique



Perçages sur vilebrequin



Equilibreuse de roue de voiture



Equilibrage d'un essieu de train



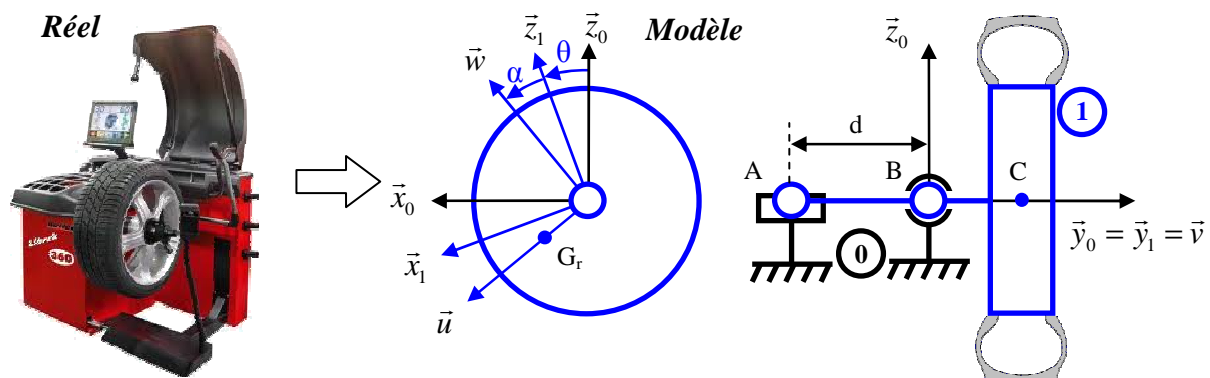
Equilibreuse portative

L'objectif de ce cours est :

- de définir les hypothèses permettant de poser un modèle lié à un problème d'équilibrage
- d'exprimer de façon pratique les conditions d'équilibrage d'un rotor
- de mettre en place les démarches de calcul permettant de résoudre un problème d'équilibrage par ajout de masselottes.

1. Hypothèses et modélisation retenue

D'un point de vue cinématique l'équilibreuse est constitué de deux sous ensemble : le bâti et un arbre (axe de l'équilibreuse) mis en mouvement de rotation suivant l'axe (A, \vec{y}_0) par l'intermédiaire d'un motoréducteur. La roue à équilibrer est fixée en liaison complète démontable sur l'axe de l'équilibreuse.



On note 0 la classe d'équivalence correspondant au bâti et 1 l'ensemble arbre + roue. Structuellement la liaison entre l'arbre de l'équilibreuse 1 et le bâti 0 est réalisée à l'aide de roulements à billes aux point A et B. On considère donc dans le modèle que l'arbre 1 de l'équilibreuse est en liaison rotule en B avec le bâti 0 et en liaison linéaire annulaire d'axe (A, \vec{y}_0) avec le bâti 0.

On définit le repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti 0 et le repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_0 = \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié à l'arbre de l'équilibreuse 1. On pose $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ tel que $\dot{\theta} = \omega t$ avec $\omega = \text{constante}$. On ajoute un repère supplémentaire $(O, \vec{u}, \vec{v} = \vec{y}_0, \vec{w})$ tel que $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{u}) = \text{constante}$ pour définir la position du centre de gravité de la roue non équilibrée.

L'arbre de l'équilibreuse, de masse m_a , a pour centre de gravité $G_a = B$ et son moment d'inertie par rapport à l'axe d'inertie est J_a .

La roue, de masse m_{roue} , a pour centre de gravité G_r tel que $\overrightarrow{BG_r} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG_r} = l \cdot \vec{y}_0 + a \cdot \vec{u}$ et pour

$$\text{matrice d'inertie } I_C(\text{roue}) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}.$$

Le motoréducteur exerce sur l'arbre 1 un couple noté $C_m \cdot \vec{y}_0$.

2. Conditions d'équilibrage

2.1. Définition de l'équilibrage dynamique d'un rotor

Un rotor est équilibré dynamiquement si les actions mécaniques dans les liaisons entre le rotor 1 et le bâti 0 sont indépendantes de la position angulaire du rotor quel que soit le mouvement de rotation du rotor.

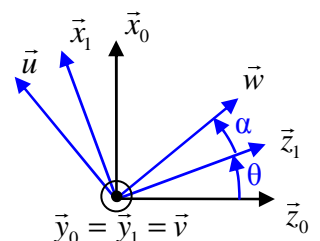
2.2. Conséquences pratiques

Pour déterminer les inconnues de la liaison, il faut isoler l'ensemble 1 et appliquer le PFD à l'ensemble

$$1 \text{ au point B} \rightarrow \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{d \ 1/0}} \\ \overrightarrow{\delta_{B, \ 1/0}} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{\bar{1} \rightarrow 1}} \\ \overrightarrow{M_{B(\bar{1} \rightarrow 1)}} \end{Bmatrix}_B$$

Calcul du torseur des actions mécaniques extérieures :

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{\bar{1} \rightarrow 1}} \\ \overrightarrow{M_{B(\bar{1} \rightarrow 1)}} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} X_{A01} \cdot \vec{x}_0 + Z_{A01} \cdot \vec{z}_0 + X_{B01} \cdot \vec{x}_0 + Y_{B01} \cdot \vec{y}_0 + Z_{B01} \cdot \vec{z}_0 - (m_a + m_{\text{roue}}) \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{BA} \wedge (X_{A01} \cdot \vec{x}_0 + Z_{A01} \cdot \vec{z}_0) + \overrightarrow{BG_r} \wedge (-m_{\text{roue}} \cdot g \cdot \vec{z}_0) + C_m \cdot \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_B$$



$$\overrightarrow{BA} \wedge (X_{A01} \cdot \vec{x}_0 + Z_{A01} \cdot \vec{z}_0) = -d \cdot \vec{y}_0 \wedge (X_{A01} \cdot \vec{x}_0 + Z_{A01} \cdot \vec{z}_0) = d \cdot X_{A01} \cdot \vec{z}_0 - d \cdot Z_{A01} \cdot \vec{x}_0$$

$$\overrightarrow{BG_r} \wedge (-m_{\text{roue}} \cdot g \cdot \vec{z}_0) = (l \cdot \vec{y}_0 + a \cdot \vec{u}) \wedge (-m_{\text{roue}} \cdot g \cdot \vec{z}_0) = -m_{\text{roue}} \cdot g \cdot l \cdot \vec{x}_0 + m_{\text{roue}} \cdot g \cdot a \cdot \cos(\alpha + \theta) \cdot \vec{y}_0$$

Calcul de la résultante dynamique :

$$\rightarrow \overrightarrow{R_{C \ 1/0}} = m_a \cdot \overrightarrow{V_{B \ \text{rotor} / 0}} + m_{\text{roue}} \cdot \overrightarrow{V_{G_r \ \text{roue} / 0}} = -m_{\text{roue}} \cdot a \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{w}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{R_{d \ 1/0}} = \left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{R_{C \ 1/0}} \right|_0 = -m_{\text{roue}} \cdot a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{u}$$

Calcul du moment dynamique :

$$\rightarrow \overrightarrow{\sigma_{C, 1/0}} = \overrightarrow{\sigma_{C, arbre/0}} + \overrightarrow{\sigma_{C, roue/0}} = J_a \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_0 + \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})} \cdot \overrightarrow{\Omega_{roue/0}}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{\sigma_{C, 1/0}} = J_a \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_0 - F \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u} + B \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_0 - D \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{w}$$

$\rightarrow \overrightarrow{\delta_{C, 1/0}} = F \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{w} - D \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{u}$ pour $\dot{\theta} = \omega t$ avec $\omega = \text{constante}$, expression que l'on transporte ensuite à l'aide du théorème de Koenig au point B :

$$\rightarrow \overrightarrow{\delta_{B, 1/0}} = \overrightarrow{\delta_{C, 1/0}} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{R_{d 1/0}} = F \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{w} - D \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{u} + l \cdot \vec{y}_0 \wedge -m_{roue} \cdot a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{u}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{\delta_{B, 1/0}} = F \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{w} - D \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{u} + m_{roue} \cdot a \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{w}$$

D'où les 2 équations vectorielles issues du PFD :

$$-m_{roue} \cdot a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{u} = X_{A01} \cdot \vec{x}_0 + Z_{A01} \cdot \vec{z}_0 + X_{B01} \cdot \vec{x}_0 + Y_{B01} \cdot \vec{y}_0 + Z_{B01} \cdot \vec{z}_0 - (m_a + m_{roue}) \cdot g \cdot \vec{z}_0$$

$$F \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{w} - D \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{u} + m_{roue} \cdot a \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{w} = C_m \cdot \vec{y}_0 + d \cdot X_{A01} \cdot \vec{z}_0 - d \cdot Z_{A01} \cdot \vec{x}_0 - m_{roue} \cdot g \cdot l \cdot \vec{x}_0 + m_{roue} \cdot g \cdot a \cdot \cos(\alpha + \theta) \cdot \vec{y}_0$$

Ce qui permet d'écrire les 5 équations scalaires (projection dans la base 0 de ces 2 équations vectorielles) permettant d'exprimer les 5 inconnues de liaisons:

$$X_{A01} + X_{B01} = -m_{roue} \cdot a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\alpha + \theta) \quad (1)$$

$$Y_{B01} = 0 \quad (2)$$

$$Z_{A01} + Z_{B01} = (m_a + m_{roue}) \cdot g + m_{roue} \cdot a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\alpha + \theta) \quad (3)$$

$$(F \cdot \dot{\theta}^2 + m_{roue} \cdot a \cdot l \cdot \dot{\theta}^2) \cdot \cos(\alpha + \theta) + D \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\alpha + \theta) + m_{roue} \cdot g \cdot l = d \cdot Z_{A01} \quad (4)$$

$$(F \cdot \dot{\theta}^2 + m_{roue} \cdot a \cdot l \cdot \dot{\theta}^2) \cdot \sin(\alpha + \theta) - D \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\alpha + \theta) = d \cdot X_{A01} \quad (5)$$

On constate donc que :

- pour que les équations scalaires issues du théorème de la résultante dynamique soient indépendantes de θ , il faut prendre $a = 0$:

Conséquence pratique 1 : Un rotor est équilibré statiquement si son centre de gravité est positionné sur son axe de rotation

- pour que les équations scalaires issues du théorème du moment dynamiques soient indépendantes de la position de θ , il faut prendre $F = D = 0$ et $a = 0$.

Conséquence pratique 2 : Un rotor est équilibré dynamiquement si son centre de gravité est positionné sur son axe de rotation et si son axe de rotation est axe principal d'inertie.



- Dans un équilibrage statique, seule la résultante des actions de 0 sur 1 est indépendante du mouvement du rotor par rapport au bâti.
- Si les calculs sont fait avec un mouvement de rotation accéléré, les conditions pratiques 1 et 2 restent les mêmes.
- La matrice d'inertie n'est pas obligatoirement diagonale pour avoir l'équilibrage dynamique, seuls les éléments d'inertie de l'axe de rotation importent.

3. Réalisation d'un d'équilibrage par ajout de masselottes

3.1. Principe

Pour que le centre de gravité du rotor soit sur l'axe de rotation il est nécessaire de rajouter une première masse complémentaire sur le rotor. Pour que l'axe de rotation soit un axe principal d'inertie il est nécessaire de rajouter une deuxième masse complémentaire sur le rotor. Ces deux masses sont fixées aux points M_1 et M_2 , sur deux cercles de rayons r_1 et r_2 centrés autour de l'axe de rotation et dans deux plans de position (y_1 et y_2).



On pourrait aussi enlever les mêmes masses aux points N_1 et N_2 symétriques des points M_1 et M_2 par rapport à l'axe de rotation.

3.2. Modèle

Aux éléments préalablement définis dans le modèle de la partie 1. Hypothèses et modélisation retenue, on ajoute les éléments suivants :

La masse m_1 est fixée au point M_1 positionné dans le plan y_1 à la distance r_1 de l'axe de rotation suivant l'axe \vec{u}_1 décalé de $\alpha_1 = \text{cte}$ par rapport à \vec{u} :

$$\overrightarrow{BM_1} = r_1 \vec{u}_1 + y_1 \vec{v}$$

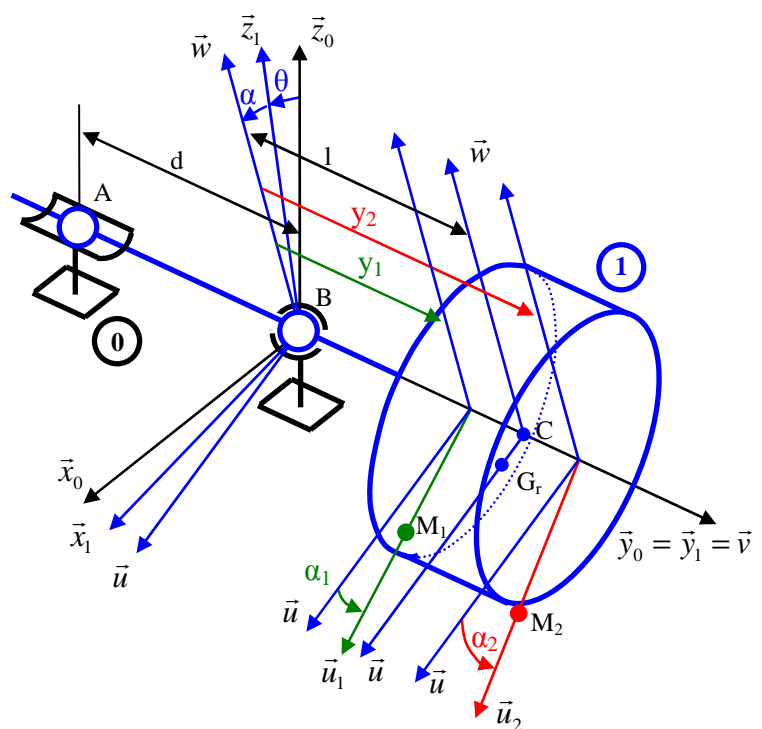
$$\overrightarrow{BM_1} = r_1 \cos \alpha_1 \vec{u} + y_1 \vec{v} - r_1 \sin \alpha_1 \vec{w}$$

La masse m_2 est fixée au point M_2 positionné dans le plan y_2 à la distance r_2 de l'axe de rotation suivant l'axe \vec{u}_2 décalé de $\alpha_2 = \text{cte}$ par rapport à \vec{u} :

$$\overrightarrow{BM_2} = r_2 \vec{u}_2 + y_2 \vec{v}$$

$$\overrightarrow{BM_2} = r_2 \cos \alpha_2 \vec{u} + y_2 \vec{v} - r_2 \sin \alpha_2 \vec{w}$$

Les masses m_1 et m_2 sont supposées ponctuelles.



3.3. Inconnues du problème d'équilibrage

La réalisation de l'équilibrage à l'aide des masselottes m_1 et m_2 consiste à définir les 8 paramètres inconnus associés aux masselottes qui sont :

- les 3 paramètres de position (r_1, y_1, α_1) plus la valeur de m_1 pour la masselotte 1,
- les 3 paramètres de position (r_2, y_2, α_2) plus la valeur de m_2 pour la masselotte 2.

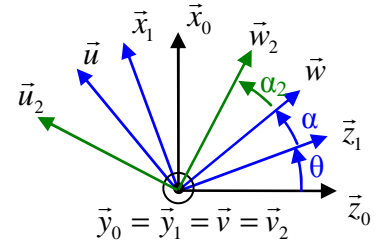
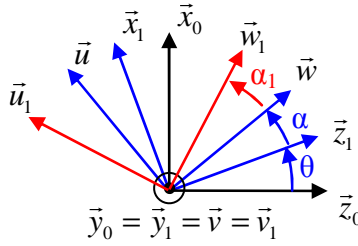
Les paramètres r_1, r_2, y_1 et y_2 sont dans la pratique imposés par les dimensions de la jante, ils sont donc déterminés par mesure sur la jante.

L'équilibreuse est instrumentée pour permettre la mesure des actions mécaniques dans les paliers (i.e. liaisons bâti/axe de l'équilibreuse en A et B), ce qui permet de déterminer expérimentalement les inconnues m_{roue}, D, F, a et α . Le calculateur de l'équilibreuse détermine au final les 4 inconnues m_1, α_1, m_2 et α_2 .

3.4. Mise en équation à l'aide du PFD (pour les plus courageux !)

On isole l'ensemble E = roue + arbre équilibrée + masselotte 1 + masselotte 2 et on applique le PFD à l'ensemble E au point B :

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{d \ E/0}} \\ \overrightarrow{\delta_{B, \ E/0}} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{\bar{E} \rightarrow E}} \\ \overrightarrow{M_{B(\bar{E} \rightarrow E)}} \end{array} \right\}_B$$



Calcul du torseur des actions mécaniques extérieures :

$$\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{\bar{E} \rightarrow E}} \\ \overrightarrow{M_{B(\bar{E} \rightarrow E)}} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} X_{A01} \cdot \vec{x}_0 + Z_{A01} \cdot \vec{z}_0 + X_{B01} \cdot \vec{x}_0 + Y_{B01} \cdot \vec{y}_0 + Z_{B01} \cdot \vec{z}_0 - (m_a + m_{roue} + m_1 + m_2) \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{BA} \wedge (X_{A01} \cdot \vec{x}_0 + Z_{A01} \cdot \vec{z}_0) + \overrightarrow{BG_r} \wedge -m_{roue} \cdot g \cdot \vec{z}_0 + \overrightarrow{BM_1} \wedge -m_1 \cdot g \cdot \vec{z}_0 + \overrightarrow{BM_2} \wedge -m_2 \cdot g \cdot \vec{z}_0 + C_m \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}_B$$

$$\overrightarrow{BA} \wedge (X_{A01} \cdot \vec{x}_0 + Z_{A01} \cdot \vec{z}_0) = -d \cdot \vec{y}_0 \wedge (X_{A01} \cdot \vec{x}_0 + Z_{A01} \cdot \vec{z}_0) = d \cdot X_{A01} \cdot \vec{z}_0 - d \cdot Z_{A01} \cdot \vec{x}_0$$

$$\overrightarrow{BG_r} \wedge -m_{roue} \cdot g \cdot \vec{z}_0 = (l \cdot \vec{y}_0 + a \cdot \vec{u}) \wedge -m_{roue} \cdot g \cdot \vec{z}_0 = -m_{roue} \cdot g \cdot l \cdot \vec{x}_0 + m_{roue} \cdot g \cdot a \cdot \cos(\alpha + \theta) \cdot \vec{y}_0$$

$$\overrightarrow{BM_1} \wedge -m_1 \cdot g \cdot \vec{z}_0 = (r_1 \cdot \vec{u}_1 + y_1 \cdot \vec{v}) \wedge -m_1 \cdot g \cdot \vec{z}_0 = m_1 \cdot g \cdot r_1 \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha + \theta) \cdot \vec{y}_0 - m_1 \cdot g \cdot y_1 \cdot \vec{x}_0$$

$$\overrightarrow{BM_2} \wedge -m_2 \cdot g \cdot \vec{z}_0 = (r_2 \cdot \vec{u}_2 + y_2 \cdot \vec{v}) \wedge -m_2 \cdot g \cdot \vec{z}_0 = m_2 \cdot g \cdot r_2 \cdot \cos(\alpha_2 + \alpha + \theta) \cdot \vec{y}_0 - m_2 \cdot g \cdot y_2 \cdot \vec{x}_0$$

Calcul de la résultante dynamique :

$$\overrightarrow{R_{C \ E/0}} = m_a \cdot \overrightarrow{V_{B \ rotor/0}} + m_{roue} \cdot \overrightarrow{V_{G_r \ roue/0}} + m_1 \cdot \overrightarrow{V_{M_1 \ masselotte1/0}} + m_2 \cdot \overrightarrow{V_{M_2 \ masselotte2/0}}$$

$$\overrightarrow{R_{C \ E/0}} = -m_{roue} \cdot a \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{w} - m_1 \cdot r_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{w}_1 - m_2 \cdot r_2 \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{w}_2$$

$$\rightarrow \overrightarrow{R_{d \ E/0}} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{R_{C \ E/0}} \Big|_0 = -m_{roue} \cdot a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{u} - m_1 \cdot r_1 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{u}_1 - m_2 \cdot r_2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{u}_2$$

Calcul du moment dynamique :

→ On garde l'expression $\overrightarrow{\delta_{B, \ 1/0}} = F \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{w} - D \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{u} + m_{roue} \cdot a \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{w}$ calculée précédemment et on y ajoute $\overrightarrow{\delta_{B, \ masselotte1/0}} + \overrightarrow{\delta_{B, \ masselotte2/0}}$

$$\overrightarrow{\delta_{B, \ masselotte1/0}} = \overrightarrow{\delta_{M_1, \ masselotte1/0}} + \overrightarrow{BM_1} \wedge \overrightarrow{R_{d \ masselotte1/0}} = (r_1 \cdot \vec{u}_1 + y_1 \cdot \vec{v}) \wedge -m_1 \cdot r_1 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{u}_1 = m_1 \cdot r_1 \cdot y_1 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{w}_1$$

$$\overrightarrow{\delta_{B, \ masselotte2/0}} = \overrightarrow{\delta_{M_2, \ masselotte2/0}} + \overrightarrow{BM_2} \wedge \overrightarrow{R_{d \ masselotte2/0}} = (r_2 \cdot \vec{u}_2 + y_2 \cdot \vec{v}) \wedge -m_2 \cdot r_2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{u}_2 = m_2 \cdot r_2 \cdot y_2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{w}_2$$

D'où les 2 équations vectorielles issues du PFD :

$$-m_{roue} \cdot a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{u} - m_1 \cdot r_1 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{u}_1 - m_2 \cdot r_2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{u}_2 = X_{A01} \cdot \vec{x}_0 + Z_{A01} \cdot \vec{z}_0 + X_{B01} \cdot \vec{x}_0 + Y_{B01} \cdot \vec{y}_0 + Z_{B01} \cdot \vec{z}_0 - (m_a + m_{roue} + m_1 + m_2) \cdot g \cdot \vec{z}_0$$

$$F \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{w} - D \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{u} + m_{roue} \cdot a \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{w} + m_1 \cdot r_1 \cdot y_1 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{w}_1 + m_2 \cdot r_2 \cdot y_2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{w}_2 = C_m \cdot \vec{y}_0 + d \cdot X_{A01} \cdot \vec{z}_0 - d \cdot Z_{A01} \cdot \vec{x}_0 - m_{roue} \cdot g \cdot l \cdot \vec{x}_0 + m_{roue} \cdot g \cdot a \cdot \cos(\alpha + \theta) \cdot \vec{y}_0 + m_1 \cdot g \cdot r_1 \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha + \theta) \cdot \vec{y}_0 - m_1 \cdot g \cdot y_1 \cdot \vec{x}_0 + m_2 \cdot g \cdot r_2 \cdot \cos(\alpha_2 + \alpha + \theta) \cdot \vec{y}_0 - m_2 \cdot g \cdot y_2 \cdot \vec{x}_0$$

Ce qui permet d'écrire les 4 équations scalaires utiles à la résolution du problème (projection suivant \vec{x}_0 et \vec{z}_0 des 2 équations vectorielles) :

$$X_{A01} + X_{B01} = -m_{roue}.a.\dot{\theta}^2.\cos(\alpha + \theta) - m_1.r_1.\dot{\theta}^2.\cos(\alpha_1 + \alpha + \theta) - m_2.r_2.\dot{\theta}^2.\cos(\alpha_2 + \alpha + \theta) \quad (10)$$

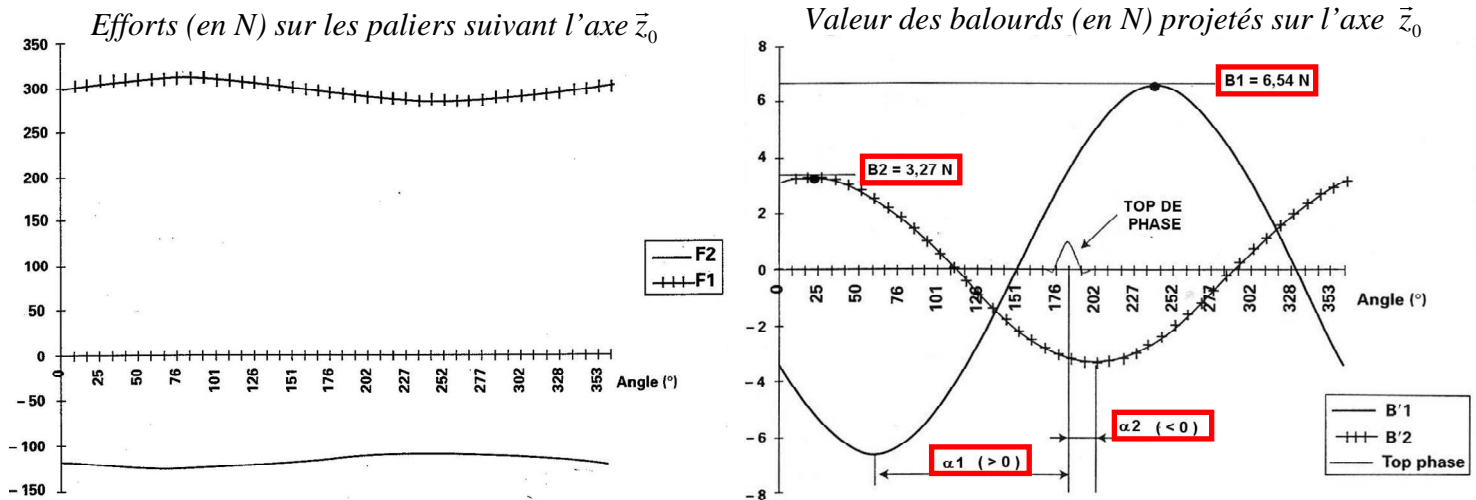
$$Z_{A01} + Z_{B01} = (m_a + m_{roue} + m_1 + m_2).g + m_{roue}.a.\dot{\theta}^2.\sin(\alpha + \theta) + m_1.r_1.\dot{\theta}^2.\sin(\alpha_1 + \alpha + \theta) + m_2.r_2.\dot{\theta}^2.\sin(\alpha_2 + \alpha + \theta) \quad (11)$$

$$(F.\dot{\theta}^2 + m_{roue}.a.l.\dot{\theta}^2).\cos(\alpha + \theta) + D.\dot{\theta}^2.\sin(\alpha + \theta) + m_1.r_1.y_1.\dot{\theta}^2.\cos(\alpha_1 + \alpha + \theta) + m_2.r_2.y_2.\dot{\theta}^2.\cos(\alpha_2 + \alpha + \theta) = d.Z_{A01} - m_1.g.y_1 - m_2.g.y_2 - m_{roue}.g.l \quad (12)$$

$$(F.\dot{\theta}^2 + m_{roue}.a.l.\dot{\theta}^2).\sin(\alpha + \theta) + m_1.r_1.y_1.\dot{\theta}^2.\sin(\alpha_1 + \alpha + \theta) + m_2.r_2.y_2.\dot{\theta}^2.\sin(\alpha_2 + \alpha + \theta) - D.\dot{\theta}^2.\cos(\alpha + \theta) = d.X_{A01} \quad (13)$$

Equations heureusement résolues par le calculateur de l'équilibreuse à partir de la mesure des efforts aux paliers de l'ensemble non équilibré (au final seuls m_1 , m_2 , α_1 et α_2 sont les inconnues dans ces équations).

Exemple :



3.5. Résolution pratique du problème d'équilibrage

Dans la pratique la résolution du problème d'équilibrage ne se fait heureusement pas à partir du P.F.D., on résout ce problème en partant des conséquences pratiques vues paragraphe 2.2, cela revient au final à résoudre un problème de géométrie des masses (voir TD).