



# Mécanique 2



Renaud Costadoat  
Conservatoire National des Arts  
et Métiers



le cnam



Résistance des matériaux

Dynamique

Torseur cinétique

Torseur dynamique

Application au ferroviaire

## Résistance des matériaux

Une poutre (pièce dont la section est faible en regard de la longueur) est sollicitée en traction chaque fois qu'une action s'exerce à son extrémité A ou B suivant son axe comme représenté sur la figure ci-dessous. La direction (ou droite d'action) de cette force est perpendiculaire (on dira également normale) à la section de la poutre.



La **Contrainte normale**  $\sigma$  est le rapport de l'effort normal  $N$  et de la section de la poutre  $\sigma = \frac{F}{S}$

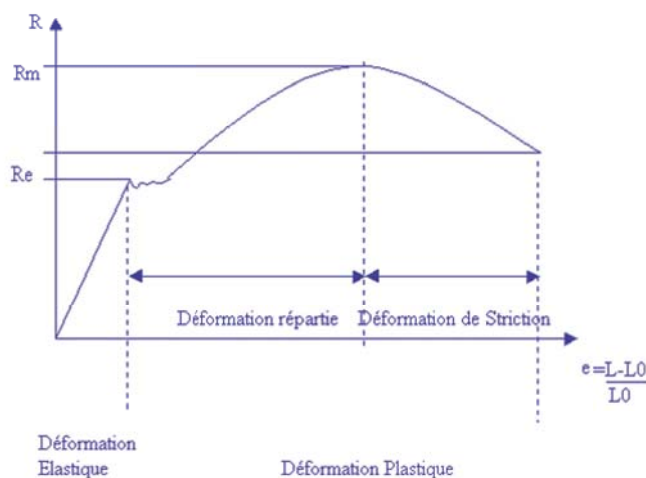
Le **pourcentage d'allongement après rupture** est le rapport de la longueur finale de la pièce à laquelle on déduit la longueur initiale et de la longueur initiale de la pièce.

$$\varepsilon = \frac{L_{\text{finale}} - L}{L} = \frac{\Delta L}{L}$$

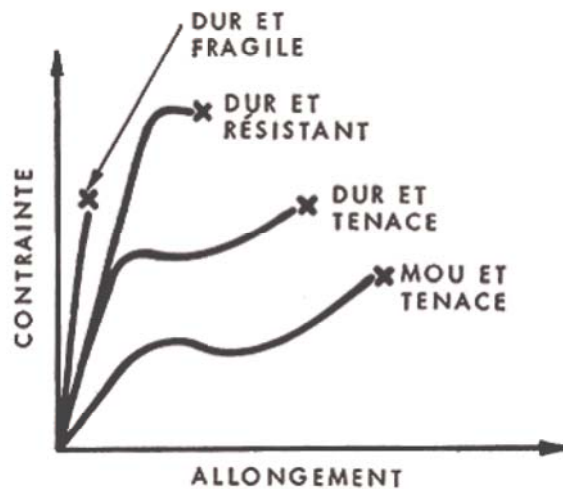
## Condition de résistance

- Une pièce **résiste** aux efforts de traction sans subir de déformations permanentes si la contrainte normale  $\sigma$  est **inférieure à la limite d'élasticité**  $R_e$  du matériau,
- Cette limite marque le début de la **phase** de déformation **plastique** du matériau,
- Pour prévenir les phénomènes pouvant réduire cette limite d'élasticité, on lui affecte un **coefficient de sécurité**  $k$  (entre 2 et 15),
- On détermine de cette manière une **résistance pratique** à la traction (extension)  $R_{pe} = \frac{R_e}{k}$ ,
- La pièce résistera aux efforts sans subir de déformations permanentes si :  $\sigma \leq R_{pe}$ ,
- Il existe aussi une limite  $R_m$  dite de contrainte maximale qui marque la fin de la phase de déformation plastique du matériau et le début de la phase de rupture.

## Essai de traction



## Essai de traction

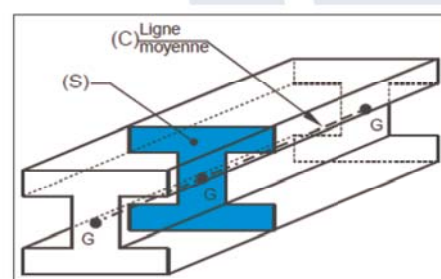


## Hypothèses sur la disposition de la matière

Comme précédemment, les seuls solides étudiés ont des formes relativement simples. Si cela est nécessaire, elles sont schématisées dans un but de simplification.

Une poutre est un solide engendré par une surface plane (S) dont le centre de surface G décrit une courbe plane (C) appelée ligne moyenne. Les caractéristiques de la poutre sont :

- ligne moyenne droite ou à grand rayon de courbure,
- section droite (S) constante ou variant progressivement,
- le plan de (S) reste perpendiculaire à (C),
- grande longueur par rapport aux dimensions transversales,
- existence d'un plan de symétrie...



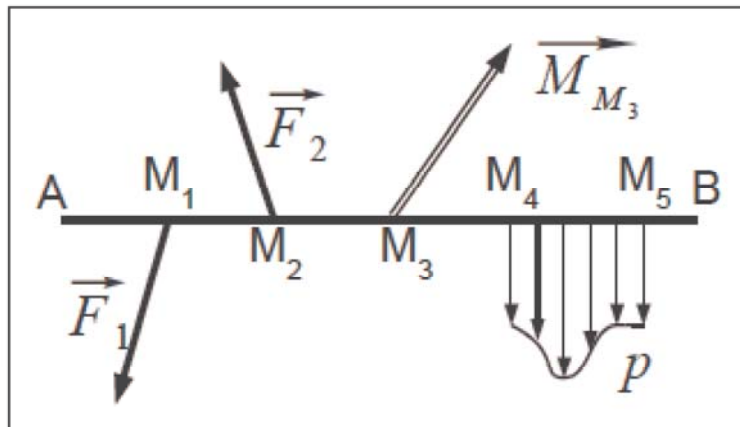


## Hypothèses sur les forces extérieures

Les forces extérieures sont situées dans le **plan de symétrie** de la poutre ou alors disposées symétriquement par rapport à ce plan.

Deux types d'actions mécaniques peuvent s'exercer sur la poutre :

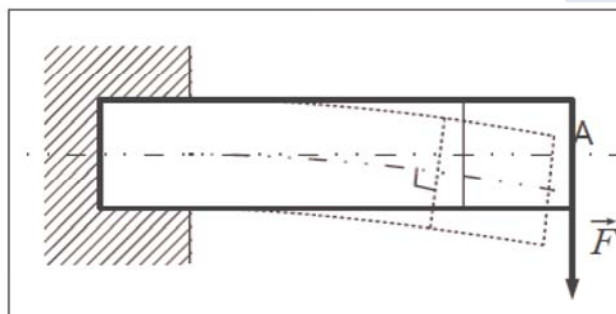
- charges concentrées :  $(M_1, F_1)$ ,  $(M_2, F_2)$  ou moments  $(M_3, M_4)$ ,
- charges réparties sur  $M_4M_5$ .



## Hypothèses sur les déformations

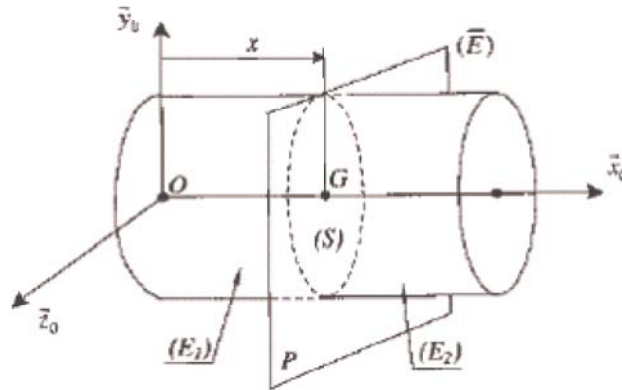
**Hypothèse de Navier et Bernoulli:** Les sections planes normales aux fibres avant déformation demeurent planes et normales aux fibres après.

**Hypothèse de Barré de Saint-Venant:** Les résultats obtenus en résistance des matériaux ne s'appliquent valablement qu'à une distance suffisamment éloignée de la région d'application des efforts concentrés.



## Torseur de cohésion

**Définition de la coupure fictive:** Un repère est défini tel que l'axe  $x$  est confondu avec la ligne moyenne de la poutre. (E1) est le tronçon dont le volume augmente lorsque  $x$  augmente.



## Définition du torseur de cohésion

Le **torseur de cohésion** modélise les actions mécaniques de (E2) sur à travers la section droite S. Il s'écrit, réduit au point G :

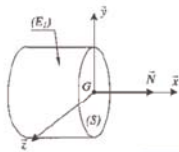
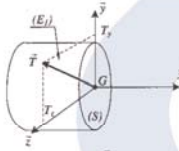
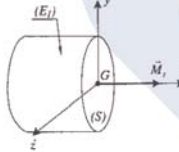
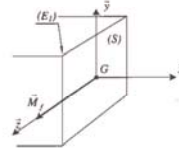
$$\{T_{coh}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{cc} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{array} \right\}_G$$

Avec:

- $N$ : Effort normal (induit la traction),
- $T_y$ : Effort tranchant sur  $y$  (induit le cisaillement),
- $T_z$ : Effort tranchant sur  $z$  (induit le cisaillement),
- $M_t$ : Moment de torsion,
- $M_{fy}$ : Moment de flexion sur  $y$ ,
- $M_{fz}$ : Moment de flexion sur  $z$ .



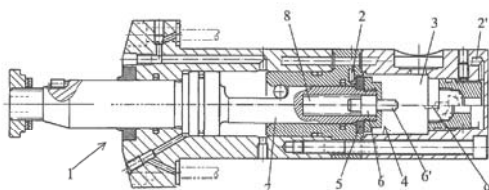
## Définition des sollicitations simples

Traction/Compression	$\{T_{coh}\} = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$	
Cisaillement	$\{T_{coh}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$	
Torsion simple	$\{T_{coh}\} = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$	
Flexion simple	$\{T_{coh}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_G$	



## Application 1

- Sur un centre d'usinage, un vérin pneumatique permet d'assurer le bridage d'une pièce lors de la rentrée de sa tige. Celle-ci est donc sollicitée à la traction. La force ainsi développée a une intensité  $F = 500\text{N}$ ,
- La tige a un diamètre  $d = 20\text{mm}$ , et a été réalisé en acier X 2 Cr Ni 19-11.



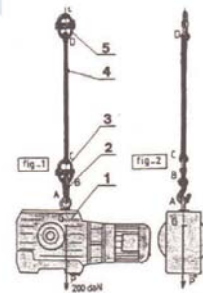
- Calculer la valeur de la section  $S$  de la tige,
- Calculer la valeur de la contrainte normale  $\sigma$  dans une section de la tige.





## Application 2

- Le levage d'un motoréducteur est effectué à l'aide du crochet (2), des maillons (3) et (5) et du câble (4),
  - Le poids du motoréducteur a son point d'application en G, son intensité est  $P = 200daN$ ,
  - Dans la partie statique des solides de la résolution mécanique, on fait apparaître que la tension dans le câble a une intensité  $T = 200daN$ ,
  - Le câble est constitué de brins en acier 30 Cr Ni Mo 8 ( $Re = 850Mpa$ ). Son diamètre est de 16mm.
- Calculer la valeur de la contrainte normale dans le câble,
  - Sachant que le coefficient de sécurité adopté dans le cas du levage d'une charge par un câble est  $k = 9$ , calculer la valeur de la résistance pratique à l'extension,
  - Le levage du motoréducteur est-il réalisé dans des conditions



## Application 3

- Une hélice de navire est mue par un gros moteur diesel. L'arbre entre celui-ci et l'hélice mesure 3m de long,
- Vous devez déterminer ses dimensions sachant que la puissance transmise est de 9200kW à  $80tr.min^{-1}$ ,
- Le matériau est de l'acier dont les caractéristiques sont :

- Formule de la déformée:  $\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_3}$
- $Reg = 0,5.Re$ ,
- $Re = 200Mpa$ ,
- Calcul de la contrainte:  $\tau = \frac{M_t \cdot R}{I_3}$ ,
- $G = 8000daN \cdot mm^{-2}$
- Moment quadratique (section cylindrique):  $I_3 = \frac{\pi \cdot r^4}{2}$ .



- Déterminer le diamètre minimum de l'arbre,
- Si le diamètre est de 400mm, déterminer la déformation angulaire en degré,
- Pour limiter le retard entre la consigne et la réalité de l'action, on limite la déformation à  $0,1^\circ \cdot m^{-1}$ . Déterminer alors le diamètre dont on a besoin.



## Introduction à la dynamique des solides

La dynamique est une discipline de la **mécanique** classique qui étudie les corps en **mouvement** sous l'influence des **actions mécaniques** qui leur sont appliquées. Elle combine la **statique** qui étudie l'équilibre des corps au repos, et la **cinématique** qui étudie le mouvement.



## Cas d'un solide en translation



Le train a une masse  $M = 485\text{ tonnes}$ , il est mis en mouvement par 8 moteurs synchrones, qui exercent un effort de traction à la jante au démarrage  $F_t = 212\text{ kN}$ .

Definition

Le PFD peut s'écrire  $M \cdot \ddot{x} = F_t$ .

Calcul de l'accélération du train :  $\ddot{x} = \frac{F_t}{M} = \frac{212000}{485000} = 0.43\text{ m.s}^{-2}$ .

Durée nécessaire pour arriver à sa vitesse nominale  $V_{nom} = 300\text{ km.h}^{-1}$  :

$$t = \frac{300 \times 10^3}{3600 \times 0.43} = 193\text{ s} = 3\text{ min } 13\text{ s}.$$



## Cas d'un solide en rotation



Le rotor d'un hélicoptère a une inertie  $J = 300 \text{ kg.m}^2$ , il est mis en mouvement par un rotor qui génère un couple sur l'axe des pâles de  $C_m = 5 \text{ kN.m}$ , les frottements de l'air génèrent un couple résistant  $C_r = 1.4 \text{ kN.m}$ .

Definition

Le PFD peut s'écrire  $J.\dot{\omega} = C_m - C_r$ .

Calcul de l'accélération du train :  $\dot{\omega} = \frac{C_m - C_r}{J} = \frac{3600}{300} = 12 \text{ rad.s}^{-2}$ .

Durée nécessaire pour arriver à sa vitesse nominale  $\omega_{nom} = 350 \text{ tr.min}^{-1}$  :  $t = \frac{350 \times 2\pi}{60 \times 12} = 3.05 \text{ s}$ .

Remarque: Le calcul de l'inertie d'un solide en rotation ne sera pas présenté dans ce cours.



## La quantité de mouvement

En physique, la quantité de mouvement est le produit de la masse par le vecteur vitesse d'un corps matériel supposé ponctuel. C'est une grandeur vectorielle, définie par  $\vec{p} = m\vec{v}$ , qui dépend du référentiel d'étude.



La quantité de mouvement d'un solide est égale à la quantité de mouvement de son centre d'inertie affecté de la masse totale du système, soit  $\vec{P} = M\vec{V}_C$  (C étant le centre de gravité). Son unité est le  $\text{kg.m.s}^{-1}$ .

## La quantité de mouvement

*Exemple:* Une boule de billard de masse  $m$  heurte de plein fouet (centres alignés) à la vitesse  $\vec{V}_i$  une autre boule de billard de masse  $m'$ , initialement immobile.



La conservation de la quantité de mouvement globale du système boule 1 + boule 2 pendant la durée très brève du choc implique:

$$m\vec{V}_i = m\vec{V}_f + m'\vec{V}'_f, \text{ soit } m'\vec{V}'_f = -m(\vec{V}_f - \vec{V}_i) = -m\Delta\vec{V}_i.$$

où  $\Delta\vec{V}_i$  est la variation de la vitesse de la première boule pendant le choc. Si le choc est de plein fouet alors  $\Delta\vec{V}_i$  et  $\vec{V}'_f$  sont colinéaires et alors la deuxième boule part à la vitesse de valeur  $V'_f = \frac{m}{m'} |\Delta V_i|$ .

A la limite il peut y avoir transfert de la totalité de la quantité de mouvement de la première boule sur la deuxième et alors  $V'_f = \frac{m}{m'} V_i$ .

## Calcul et manipulation du torseur cinétique

Les éléments de réduction du torseur cinétique correspondent à la somme de toutes les quantités de mouvement des points d'un solide.

$$\{C_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{Rc_{S/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} \end{array} \right\}$$

Avec :

- $\overrightarrow{Rc_{S/R}} = \int_S \overrightarrow{V_{P,S,R}} \cdot dm$
- $\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P,S,R}} \cdot dm$

Dans le cas d'un solide, il est possible de calculer le torseur cinétique de la façon suivante:

- $\overrightarrow{Rc_{S/R}} = m \cdot \overrightarrow{V_{G,S,R}}$
- $\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A,S,R}} + I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$

## Calcul et manipulation du torseur cinétique

Cas particuliers:

- Si A est le centre G de gravité de S:  $\overrightarrow{\sigma}_{G,S/R} = I_G(S) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{S/R}$ ,
- Si A est un point O fixe de R:  $\overrightarrow{\sigma}_{O,S/R} = I_O(S) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{S/R}$ .

$I_A$  est la matrice d'inertie du solide projetée sur l'axe de rotation du solide.

Comme pour les torseurs cinématique et statique la relation de Varignon fonctionne avec le torseur cinétique.

$$\overrightarrow{\sigma}_{A,S/R} = \overrightarrow{\sigma}_{B,S/R} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{Rc}_{S/R}$$

Le théorème de Koenig permet aussi de déplacer le moment dynamique.

$$\overrightarrow{\sigma}_{A,S/R} = \overrightarrow{\sigma}_{G,S/R} + m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V}_{G,S/R}$$



## Matrice d'inertie et géométrie des masses

*Exemple:* En serrant ses bras le long du corps, cette patineuse modifie son moment d'inertie. Son moment cinétique étant conservé, elle augmente sa vitesse de rotation.



La **matrice d'inertie** permet de représenter la répartition des masses d'un solide.

$$I_O(S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \quad \text{Avec:} \quad \begin{aligned} A &= \int_S (y_p^2 + z_p^2) \cdot dm & D &= \int_S y_p \cdot z_p \cdot dm \\ B &= \int_S (x_p^2 + z_p^2) \cdot dm & E &= \int_S x_p \cdot z_p \cdot dm \\ C &= \int_S (x_p^2 + y_p^2) \cdot dm & F &= \int_S x_p \cdot y_p \cdot dm \end{aligned}$$



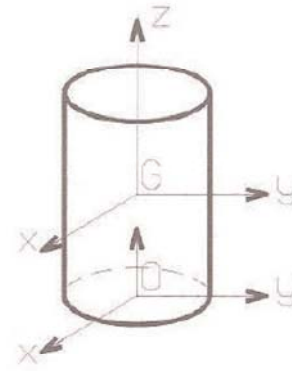


## Matrice d'inertie et géométrie des masses

*Exemple:* Calcul de la matrice d'inertie d'un cylindre.

Le repère  $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est bien le repère central d'inertie du cylindre.

- L'axe  $(G, \vec{z})$  est axe de symétrie donc  $E=D=0$ ,
- L'axe  $(G, \vec{x})$  est axe de symétrie donc  $F=E=0$ ,
- De plus, les axes  $(G, \vec{x})$  et  $(G, \vec{y})$  jouent le même rôle dans la répartition des masses, donc  $A=B$ .



$$C = \int_S (x_p^2 + y_p^2) \cdot dm = \rho \cdot \int_0^{2\pi} \cdot \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \cdot \int_0^R \cdot r^3 \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz = \rho \cdot 2\pi \cdot H \cdot \frac{R^4}{4}, \text{ avec } \rho = \frac{M}{\pi \cdot R^2 \cdot H}$$

$$A = \int_S (y_p^2 + z_p^2) \cdot dm = \int_S y_p^2 \cdot dm + \int_S z_p^2 \cdot dm = I_{Gxz} + I_{Gxy} = B' + C'$$

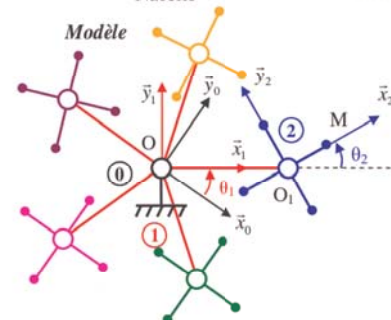
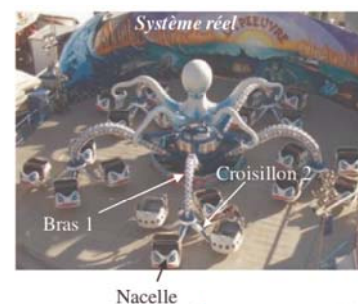
$$B = \int_S (x_p^2 + z_p^2) \cdot dm = \int_S x_p^2 \cdot dm + \int_S z_p^2 \cdot dm = I_{Gyz} + I_{Gxy} = A' + C'$$

$$C = \int_S (x_p^2 + y_p^2) \cdot dm = \int_S x_p^2 \cdot dm + \int_S y_p^2 \cdot dm = I_{Gyz} + I_{Gxz} = A' + B', \text{ d'où } A = \frac{C}{2} + C'$$

$$C' = \rho \cdot \int_0^{2\pi} \cdot \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \cdot \int_0^R \cdot z^2 \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz = \frac{M}{\pi \cdot R^2 \cdot H} \cdot 2\pi \cdot \frac{H^3}{12} \cdot \frac{R^2}{2} = \frac{MH^2}{12}, \text{ d'où } A = \frac{MR^2}{4} + \frac{MH^2}{12}$$

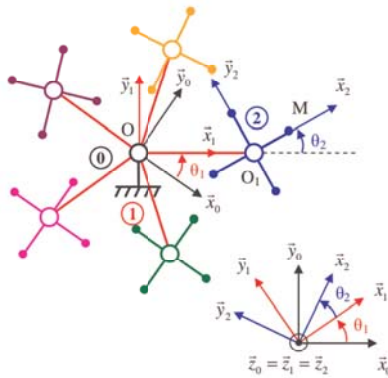


## Application: Le manège pieuvre



## Application: Le manège pieuvre

**Objectif: Calculer  $\{C_{1+2/R}\}$  en O.**



8 passagers sont embarqués dans les 4 nacelles du solide 2 (ayant pour masse  $m_2$  et centre de gravité  $G_2 = O_1$ ). Le solide 1 a pour masse  $m_1$  et pour centre de gravité  $G_1 = O$ .

$$\vec{\Omega}_{10} = \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{\Omega}_{20} = \vec{\Omega}_{21} + \vec{\Omega}_{10} = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{OM} = \vec{OO_1} + \vec{O_1M} = L_1 \cdot \vec{x}_1 + L_2 \cdot \vec{x}_2$$

$$I_{G1}(S_1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & 0 \\ -F_1 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix} \quad I_{G2}(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}$$

$$\{C_{1+2/R}\} = \{C_{1/R}\} + \{C_{2/R}\}$$



## Calcul et manipulation du torseur dynamique

Les éléments de réduction du torseur dynamique correspondent à la somme de toutes les quantités de mouvement d'accélération des points d'un solide.

$$\{D_{S/R}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{Rd_{S/R}} \\ \overrightarrow{\delta_{A,S/R}} \end{matrix} \right\}$$

Avec :

- $\overrightarrow{Rd_{S/R}} = \int_S \overrightarrow{\Gamma_{P,S/R}} \cdot dm,$
- $\overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{P,S/R}} \cdot dm.$

Dans le cas d'un solide, il est possible de calculer le torseur dynamique de la façon suivante:

- $\overrightarrow{Rd_{S/R}} = m \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G,S/R}},$
- $\overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = m \cdot \overrightarrow{V_{A/R}} \wedge \overrightarrow{V_{G,S/R}} + \frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}.$



## Calcul et manipulation du torseur dynamique

Cas particuliers:

- Si A est le centre G de gravité de S:  $\overrightarrow{\delta_{G,S/R}} = \frac{d}{dt}_R \overrightarrow{\sigma_{G,S/R}}$ ,
- Si A est un point O fixe de R:  $\overrightarrow{\delta_{O,S/R}} = \frac{d}{dt}_R \overrightarrow{\sigma_{O,S/R}}$ .

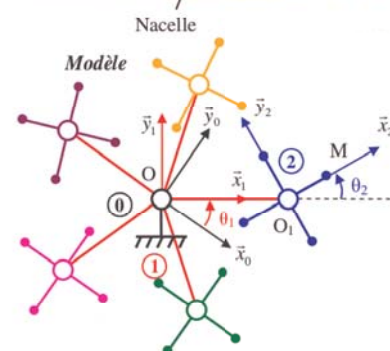
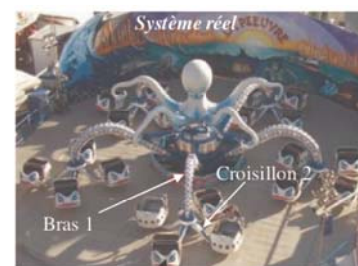
Comme pour les torseurs cinématique et statique la relation de Varignon fonctionne avec le torseur dynamique.

$$\overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \overrightarrow{\delta_{B,S/R}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{Rd_{S/R}}$$

Le théorème de Koenig permet aussi de déplacer le moment dynamique.

$$\overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \overrightarrow{\delta_{G,S/R}} + m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G,S/R}}$$

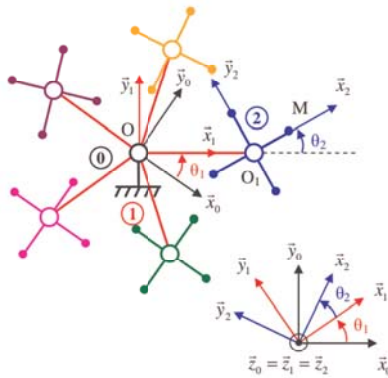
## Application: Le manège pieuvre





## Application: Le manège pieuvre

**Objectif: Calculer  $\{D_{1+2/R}\}$  en O.**



8 passagers sont embarqués dans les 4 nacelles du solide 2 (ayant pour masse  $m_2$  et centre de gravité  $G_2 = O_1$ ). Le solide 1 a pour masse  $m_1$  et pour centre de gravité  $G_1 = O$ .

$$\vec{\Omega}_{10} = \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{\Omega}_{20} = \vec{\Omega}_{21} + \vec{\Omega}_{10} = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{OM} = \vec{OO_1} + \vec{O_1M} = L_1 \cdot \vec{x}_1 + L_2 \cdot \vec{x}_2$$

$$I_{G1}(S_1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & 0 \\ -F_1 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix} \quad I_{G2}(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}$$

$$\{D_{1+2/R}\} = \{D_{1/R}\} + \{D_{2/R}\}$$



## Objectif: Calcul du dévers théorique optimal

Definition

Le dévers est la valeur de la pente transversale d'un des deux versants d'une chaussée ou d'un trottoir. C'est également la valeur de l'inclinaison transversale d'une voie ferrée.



Remarque

Lors d'un virage à grande vitesse, les passagers d'un train seraient emportés vers l'extérieur du virage s'il n'y avait pas de dévers sur la voie.

**Objectifs:** Calculer la valeur du dévers nécessaire à compenser l'accélération radiale d'un train pour garantir le confort des passagers.

- Vitesse du train:  $V = 300 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ,
- Rayon de courbure  $R = 150 \text{ m}$ ,
- Masse d'une rame,  $M_r = 40 \text{ tonnes}$ .

