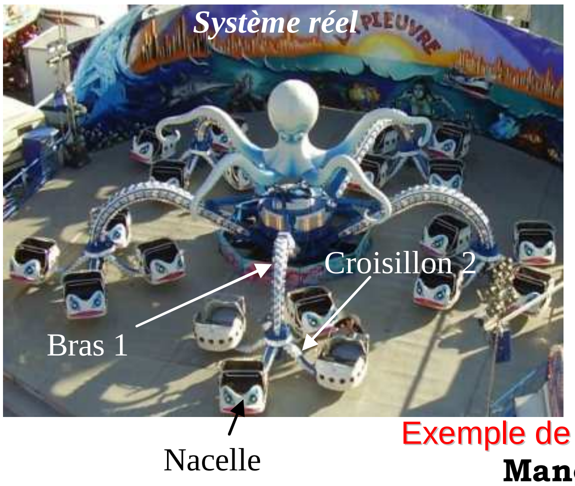
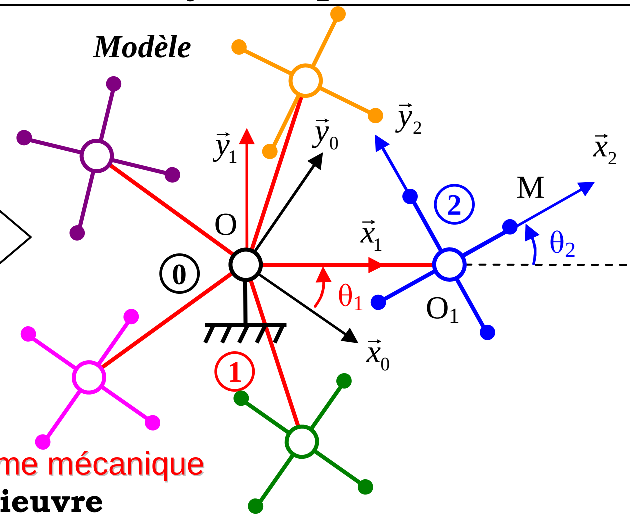
Torseur cinétique et torseur dynamique





Exemple de système mécanique
Manège pieuvre

1. Torseur cinétique d'un solide

1.1. Définitions

Les éléments de réduction du torseur cinétique correspondent à la somme de toutes les quantités de mouvement des points d'un solide

Résultante cinétique
(Quantité de mouvement de translation)

Par définition on a : $\left\{\mathscr{C}_{S/R}\right\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{C\ S/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A,\ S/R}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{C\ S/R}} = \int_S \overrightarrow{V_{P,S/R}}.dm \\ \overrightarrow{\sigma_{A,\ S/R}} = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P,S/R}}.dm \end{Bmatrix}$

Moment cinétique en A
(Quantité de mouvement de rotation)

On démontre que :

$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{R_{C\ S/R}} &= m.\overrightarrow{V_{G,S/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A,\ S/R}} &= m.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A,S/R}} + I_A(S).\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \end{aligned}}$$

Cas pour 2 points particuliers :

- Si A = G, centre de gravité de S : $\overrightarrow{\sigma_{G,\ S/R}} = I_G(S).\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$
- Si A = O, point fixe de R : $\overrightarrow{\sigma_{O,\ S/R}} = I_O(S).\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$

$I_A(S).\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ est un vecteur obtenu par multiplication de la matrice d'inertie du solide S en A et du vecteur rotation → Ces deux grandeurs doivent donc être exprimées dans la **même base**.

Notion de torseur : $\overrightarrow{\sigma_{A,\ S/R}} = \overrightarrow{\sigma_{B,\ S/R}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_{C\ S/R}}$

Théorème de Koenig : $\overrightarrow{\sigma_{A,\ S/R}} = \overrightarrow{\sigma_{G,\ S/R}} + m.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{G,S/R}}$

Rotation de S autour de G
Translation de toute la masse concentrée en G

1.2. Démarche de calcul pour déterminer le moment cinétique en un point A pour un système de solides Σ

On décompose le système de solides Σ en solides élémentaires S_i

$$\{\mathscr{C}_{\Sigma/R}\} = \sum_i \{\mathscr{C}_{Si/R}\}$$

Quelle est la nature du mouvement considéré ?

Simple

Complexe

Mouvement de rotation autour d'un axe fixe (O, $\vec{x}$)

$$\{\mathscr{C}_{S/R}\} = {}_O\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{C\ S/R}} = m.\overrightarrow{V_{G,S/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{O,\ S/R}} = I_O(S).\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \end{Bmatrix}$$

- Si G ϵ (O, $\vec{x}$) : Equilibrage statique
  → $\overrightarrow{R_{C\ S/R}} = \vec{0}$

$$\boxed{\{\mathscr{C}_{S/R}\} = {}_{\forall P \in (O,\vec{x})}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ I_G(S)..\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \end{Bmatrix}}$$

→ le torseur cinétique est un torseur couple

- Si en plus (O, $\vec{x}$) est axe principal d'inertie :
  Equilibrage dynamique → $\overrightarrow{\sigma_{O,\ S/R}} = J_{O,\vec{x}}.\dot{\theta}.\vec{x}$

$$\boxed{\{\mathscr{C}_{S/R}\} = {}_{\forall P \in (O,\vec{x})}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ J_{O,\vec{x}}.\dot{\theta}.\vec{x} \end{Bmatrix}}$$

Mouvement de translation

$$\{\mathscr{C}_{S/R}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{C\ S/R}} = m.\overrightarrow{V_{G,S/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A,\ S/R}} = m.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A,S/R}} \end{Bmatrix}$$

Le torseur cinétique est un glisseur :
au centre de gravité le moment est nul

$$\boxed{\{\mathscr{C}_{S/R}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{C\ S/R}} = m.\overrightarrow{V_{G,S/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{G,\ S/R}} = \vec{0} \end{Bmatrix}}$$

Attention il n'est pas nul
en tout point

Où est donnée la matrice d'inertie ?

En A

En G

Ce choix dépend également d'autres données :

Cas de points particuliers | A est un point fixe
A est confondu avec G

La résultante cinétique est connue

La matrice peut se transporter facilement en A

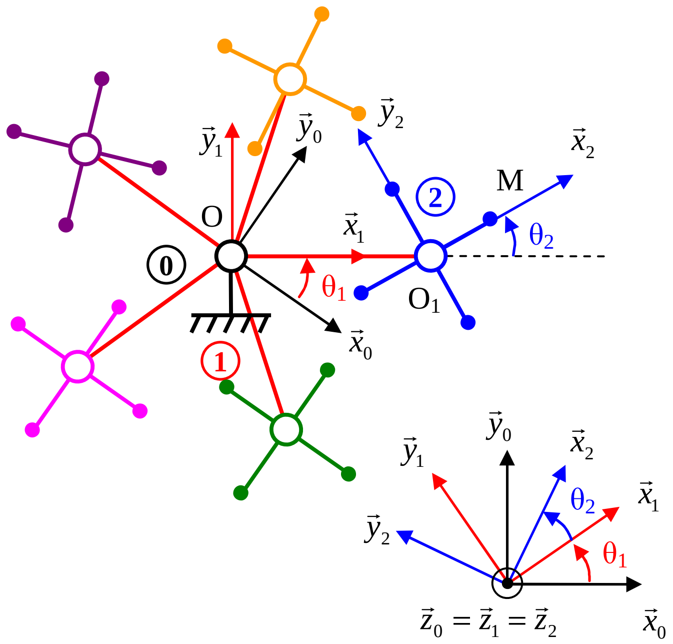
Le calcul direct peut être privilégié

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_{A,\ S/R}} = m.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A,S/R}} + I_A(S).\overrightarrow{\Omega_{S/R}}}$$

Le transport peut être privilégié

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_{A,\ S/R}} = \overrightarrow{\sigma_{G,\ S/R}} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R_{C\ S/R}}}$$

Application au manège pieuvre – Objectif : Calculer $\left\{\mathscr{C}_{\Sigma/0}\right\}$ *en O avec* $\Sigma = 1 + 2$



Hypothèses et données :
8 passagers sont embarqués dans les 4 nacelles du solide 2 (ayant pour masse m_2 et centre de gravité $G_2 \equiv O_1$). Le solide 1 a pour masse m_1 et pour centre de gravité $G_1 \equiv O$.

$$\overrightarrow{\Omega_{10}} = \dot{\theta}_1.\vec{z}_0$$

$$\overrightarrow{\Omega_{20}} = \overrightarrow{\Omega_{21}} + \overrightarrow{\Omega_{10}} = \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right).\vec{z}_0$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} = L_1.\vec{x}_1 + L_2.\vec{x}_2$$

$$I_{G_1}(S_1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & 0 \\ -F_1 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(b_1)}$$

$$I_{G_2}(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(b_2)}$$

$$\left\{\mathscr{C}_{\Sigma/0}\right\} = \left\{\mathscr{C}_{1/0}\right\} + \left\{\mathscr{C}_{2/0}\right\}$$

Nature du mouvement de 1/0 ? :
Rotation autour de l'axe $(O, \vec{z}_0)$ et G_1 est sur l'axe de rotation

$$\left\{\mathscr{C}_{1/0}\right\} = {}_{G_1}\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{C\ 1/0}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\sigma_{G_1,1/0}} = I_{G_1}(S_1).\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \end{Bmatrix} \text{ avec :}$$

$$\overrightarrow{\sigma_{G_1,1/0}} = I_{G_1}(S_1).\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & 0 \\ -F_1 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(b_1)} .\dot{\theta}_1.\vec{z}_1$$

$$\overrightarrow{\sigma_{G_1,1/0}} = C_1.\dot{\theta}_1.\vec{z}_1$$

Nature du mouvement de 2/0 ? :
Mouvement quelconque

$$\left\{\mathscr{C}_{2/0}\right\} = {}_{G_2}\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{C\ 2/0}} = m_2.\overrightarrow{V_{G_2,2/0}} \\ \overrightarrow{\sigma_{G_2,2/0}} = I_{G_2}(S_2).\overrightarrow{\Omega_{2/0}} \end{Bmatrix} \text{ avec :}$$

$$\overrightarrow{R_{C\ 2/0}} = m_2.\overrightarrow{V_{G_2,2/0}} = m_2.L_1.\dot{\theta}_1.\vec{y}_1$$

$$\overrightarrow{\sigma_{G_2,2/0}} = I_{G_2}(S_2).\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(b_2)} .(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2).\vec{z}_2$$

$$\overrightarrow{\sigma_{G_2,2/0}} = C_2.(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2).\vec{z}_2$$

On déplace le torseur cinétique en O :

$$\overrightarrow{\sigma_{O,2/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G_2,2/0}} + \overrightarrow{OG_2} \wedge \overrightarrow{R_{C\ 2/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G_2,2/0}} + L_1.\vec{x}_1 \wedge \overrightarrow{R_{C\ 2/0}}$$

$$\overrightarrow{\sigma_{O,2/0}} = C_2.(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2).\vec{z}_2 + m_2.L_1^{\ 2}.\dot{\theta}_1.\vec{z}_1$$

D'où : $\left\{\mathscr{C}_{\Sigma/0}\right\} = \left\{\mathscr{C}_{1/0}\right\} + \left\{\mathscr{C}_{2/0}\right\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} m_2.L_1.\dot{\theta}_1.\vec{y}_1 \\ C_1.\dot{\theta}_1.\vec{z}_1 + C_2.(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2).\vec{z}_1 + m_2.L_1^{\ 2}.\dot{\theta}_1.\vec{z}_1 \end{Bmatrix}$

2. Torseur dynamique d'un solide

2.1. Définition

Les éléments de réduction du torseur dynamique correspondent à la somme de toutes les quantités d'accélération des points d'un solide

Résultante dynamique

Par définition on a : $\left\{\mathscr{D}_{S/R}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R_{d\ S/R}} \\ \overrightarrow{\delta_{A,\ S/R}}\end{array}\right\}_A = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_{d\ S/R}} = \int_S \overrightarrow{\Gamma_{P,S/R}}.dm \\ \overrightarrow{\delta_{A,\ S/R}} = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{P,S/R}}.dm\end{array}\right\}_A$

Moment dynamique en A

On démontre que :

$$\boxed{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_{d\ S/R}} = m.\overrightarrow{\Gamma_{G,S/R}} \\ \overrightarrow{\delta_{A,\ S/R}} = m.\overrightarrow{V_{A/R}} \wedge \overrightarrow{V_{G,S/R}} + \left.\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}\right|_R\end{array}}$$

Cas pour 2 points particuliers :

- Si A = G, centre de gravité de S : $\overrightarrow{\delta_{G,\ S/R}} = \left.\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{G,S/R}}\right|_R$
- Si A = O, point fixe de R : $\overrightarrow{\delta_{O,\ S/R}} = \left.\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{O,S/R}}\right|_R$

Le calcul du moment dynamique fait intervenir le vecteur vitesse du point A par rapport à R $\overrightarrow{V_{A/R}}$ et non le vecteur vitesse du point A ϵ S par rapport à R $\overrightarrow{V_{A\in S/R}}$ (voir la notion de point coïncident)

Notion de torseur : $\overrightarrow{\delta_{A,\ S/R}} = \overrightarrow{\delta_{B,\ S/R}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_{d\ S/R}}$

Rotation de S autour de G

Théorème de Koenig : $\overrightarrow{\delta_{A,\ S/R}} = \overrightarrow{\delta_{G,\ S/R}} + m.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G,S/R}}$

Translation de toute la masse concentrée en G

2.2. Démarche de calcul pour déterminer le moment dynamique en un point A pour un système de solides Σ

On décompose le système de solides Σ en solides élémentaires S_i

$$\{\mathcal{D}_{\Sigma/R}\} = \sum_i \{\mathcal{D}_{Si/R}\}$$

Quelle est la nature du mouvement considéré ?

Simple

Mouvement de rotation autour d'un axe fixe (O, $\vec{x}$)

$$\{\mathcal{D}_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{d\ S/R}} = m.\overrightarrow{\Gamma_{G,S/R}} \\ \overrightarrow{\delta_{O,\ S/R}} = \dfrac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{O,S/R}}\Big|_R \end{array} \right\}_O$$

- Si G ϵ (O, $\vec{x}$) : Equilibrage statique
  → $\overrightarrow{R_{d\ S/R}} = \vec{0}$

$$\boxed{\{\mathcal{D}_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dfrac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{G,S/R}}\Big|_R \end{array} \right\}_{\forall P \in (O,\vec{x})}}$$

→ le torseur dynamique = torseur couple

- Si en plus (O, $\vec{x}$) est axe principal d'inertie :
  Equilibrage dynamique → $\overrightarrow{\delta_{O,\ S/R}} = J_{O,\vec{x}}.\ddot{\theta}.\vec{x}$

$$\boxed{\{\mathcal{D}_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ J_{O,\vec{x}}.\ddot{\theta}.\vec{x} \end{array} \right\}_{\forall P \in (O,\vec{x})}}$$

Mouvement de translation

$$\{\mathcal{D}_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{d\ S/R}} = m.\overrightarrow{\Gamma_{G,S/R}} \\ \overrightarrow{\delta_{A,\ S/R}} = m.\overrightarrow{V_{A/R}} \wedge \overrightarrow{V_{G,S/R}} \end{array} \right\}_A$$

Le torseur dynamique est un glisseur : au centre de gravité le moment est nul

$$\boxed{\{\mathcal{D}_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{d\ S/R}} = m.\overrightarrow{\Gamma_{G,S/R}} \\ \overrightarrow{\delta_{G,\ S/R}} = \vec{0} \end{array} \right\}_G}$$

Attention il n'est pas nul en tout point

Complexe

Où est donnée la matrice d'inertie ?

En A | En G

Ce choix dépend également d'autres données :

Cas de points particuliers
- A est un point fixe
- A est confondu avec G

La résultante dynamique est connue

La matrice peut se transporter facilement en A

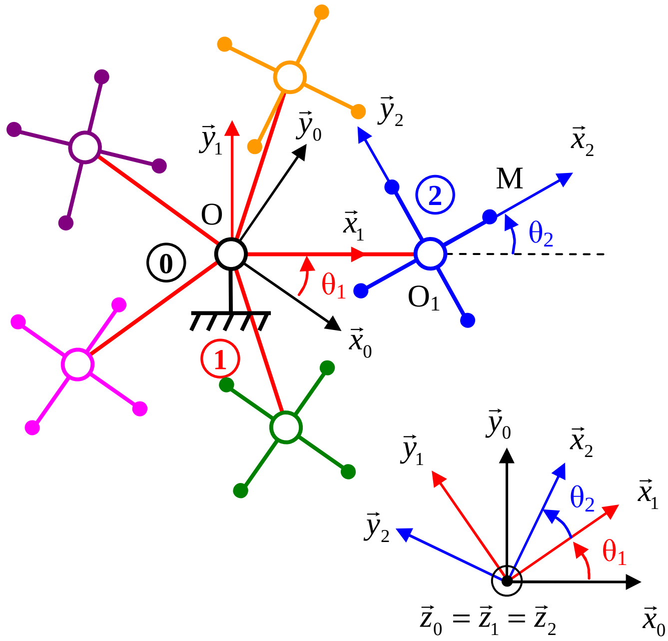
En A : Le calcul direct peut être privilégié

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_{A,\ S/R}} = m.\overrightarrow{V_{A/R}} \wedge \overrightarrow{V_{G,S/R}} + \dfrac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}\Big|_R}$$

En G : Le transport peut être privilégié

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_{A,\ S/R}} = \overrightarrow{\delta_{G,\ S/R}} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R_{d\ S/R}}}$$

Application au manège pieuvre – Objectif : Calculer $\left\{\mathcal{D}_{\Sigma/0}\right\}$ *en O avec* $\Sigma = 1+2$



Hypothèses et données :
8 passagers sont embarqués dans les 4 nacelles du solide 2 (ayant pour masse m_2 et centre de gravité $G_2 \equiv O_1$). Le solide 1 a pour masse m_1 et pour centre de gravité $G_1 \equiv O$.

$$\overrightarrow{\Omega_{10}} = \dot{\theta}_1.\vec{z}_0$$

$$\overrightarrow{\Omega_{20}} = \overrightarrow{\Omega_{21}} + \overrightarrow{\Omega_{10}} = \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\vec{z}_0$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} = L_1.\vec{x}_1 + L_2.\vec{x}_2$$

$$I_{G_1}(S_1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & 0 \\ -F_1 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(b_1)}$$

$$I_{G_2}(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(b_2)}$$

$$\left\{\mathcal{D}_{\Sigma/0}\right\} = \left\{\mathcal{D}_{1/0}\right\} + \left\{\mathcal{D}_{2/0}\right\}$$

Nature du mouvement de 1/0 ? :
Rotation autour de l'axe $(O, \vec{z}_0)$ et G_1 est sur l'axe de rotation

$$\left\{\mathcal{D}_{1/0}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{d\ 1/0}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\delta_{G_1,\,1/0}} = \dfrac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{G_1,\,1/0}}\Big|_0 \end{array} \right\}_{G_1} \text{ avec :}$$

$$\overrightarrow{\delta_{G_1,\,1/0}} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{G_1,\,1/0}}\Big|_0 = \frac{d}{dt}C_1.\dot{\theta}_1.\vec{z}_1\Big|_0 = C_1.\ddot{\theta}_1.\vec{z}_1$$

Nature du mouvement de 2/0 ? :
Mouvement quelconque

$$\left\{\mathcal{D}_{2/0}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{d\ 2/0}} = m_2.\overrightarrow{\Gamma_{G_2,2/0}} \\ \overrightarrow{\delta_{G_2,\,2/0}} = \dfrac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{G_2,\,2/0}}\Big|_0 \end{array} \right\}_{G_2} \text{ avec :}$$

$$\overrightarrow{R_{d\ 2/0}} = m_2.\overrightarrow{\Gamma_{G_2,2/0}} = m_2.L_1.\ddot{\theta}_1.\vec{y}_1 - m_2.L_1.\dot{\theta}_1^{\,2}.\vec{x}_1$$

$$\overrightarrow{\delta_{G_2,\,2/0}} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{G_2,\,2/0}}\Big|_0 = \frac{d}{dt}C_2.(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2).\vec{z}_2\Big|_0$$

$$\overrightarrow{\delta_{G_2,\,2/0}} = C_2.(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2).\vec{z}_2$$

On déplace le torseur dynamique en O :

$$\overrightarrow{\delta_{O,\,2/0}} = \overrightarrow{\delta_{G_2,\,2/0}} + \overrightarrow{OG_2} \wedge \overrightarrow{R_{d\ 2/0}} = \overrightarrow{\delta_{G_2,\,2/0}} + L_1.\vec{x}_1 \wedge \overrightarrow{R_{d\ 2/0}}$$

$$\overrightarrow{\delta_{O,\,2/0}} = C_2.(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2).\vec{z}_2 + m_2.L_1^{\,2}.\ddot{\theta}_1.\vec{z}_1$$

D'où : $$\left\{\mathcal{D}_{\Sigma/0}\right\} = \left\{\mathcal{D}_{1/0}\right\} + \left\{\mathcal{D}_{2/0}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} m_2.L_1.\ddot{\theta}_1.\vec{y}_1 - m_2.L_1.\dot{\theta}_1^{\,2}.\vec{x}_1 \\ C_1.\ddot{\theta}_1.\vec{z}_1 + C_2.(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2).\vec{z}_1 + m_2.L_1^{\,2}.\ddot{\theta}_1.\vec{z}_1 \end{array} \right\}_O$$

Remarque : O étant un point fixe on aurait pu dériver directement $\overrightarrow{\sigma_{O,\,2/0}}$ pour trouver $\overrightarrow{\delta_{O,\,2/0}}$