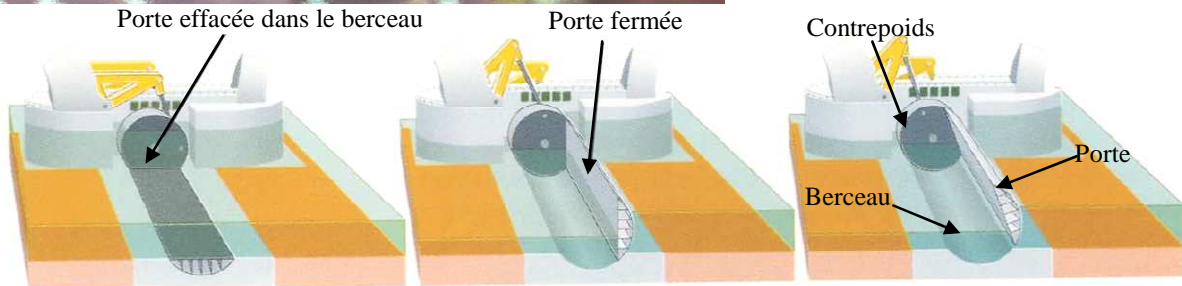
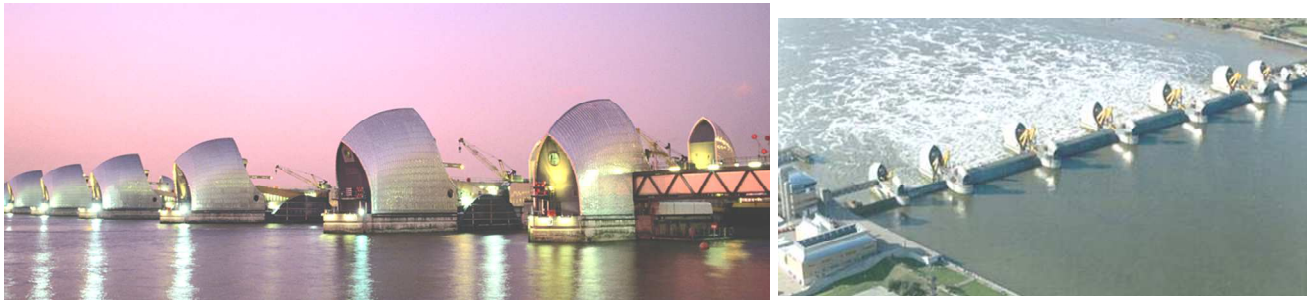


Géométrie des masses



Le Thames Barrier est un barrage spectaculaire conçu pour protéger la ville de Londres des marées exceptionnellement élevées qui peuvent remonter de la mer. Sa construction terminée en 1982 a nécessité 51000 tonnes d'acier et 210000m³ de béton, ce qui en fait le 2^{ème} barrage mobile le plus grand du monde. La structure s'étend sur 520 mètres de large et est constituée de 10 portes en forme de secteur angulaire de 20 mètres de haut. Chaque porte est totalement effacée dans un berceau en béton coulé au fond de la rivière. En cas de montée des eaux, les portes pivotent en position verticale actionnées par une machinerie hydraulique.

Exemple de système mécanique

Times Barrier

1. Masse d'un système

1.1. Système à masse conservative

Un système matériel Σ est constitué d'un ensemble de points P de masse élémentaire $dm(P)$. La masse du système matériel $m(\Sigma)$ est alors donnée par : $m(\Sigma) = \int_{P \in \Sigma} dm(P)$ (unité kg).

La masse élémentaire $dm(P)$ est définie en fonction de la nature de la modélisation du système matériel étudié :

- Modélisation volumique (cas général) : $dm(P) = \rho_V(P).dV$ où $\rho_V(P)$ est la masse volumique et dV un élément de volume élémentaire.
- Modélisation surfacique (2D) : $dm(P) = \rho_S(P).dS$ où $\rho_S(P)$ est une masse surfacique et dS un élément de surface élémentaire.
- Modélisation linéique (1D) : $dm(P) = \rho_L(P).dl$ où $\rho_L(P)$ est une masse linéique et dl un élément de longueur élémentaire.



La masse est positive et additive : $m(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = m(\Sigma_1) + m(\Sigma_2)$



Un système matériel est à masse conservative si sa masse est constante au cours du temps. La plupart des systèmes étudiés en mécanique du solide en SII MP seront toujours à masse conservative.



Conséquence pratique de la modélisation système à masse conservative : Soit $\vec{\varphi}(P,t)$ une fonction vectorielle définie sur Σ et dérivable par rapport au temps. Pour tout repère R , on a :

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{P \in \Sigma} \vec{\varphi}(P,t).dm(P) \right]_R = \int_{P \in \Sigma} \left[\frac{d}{dt} \vec{\varphi}(P,t) \right]_R dm(P)$$

1.2. Centre d'inertie – centre de gravité

On appelle centre d'inertie le point G_Σ qui vérifie la relation $\int_{P \in \Sigma} \overrightarrow{G_\Sigma P} \cdot dm(P) = \vec{0}$. On peut alors écrire

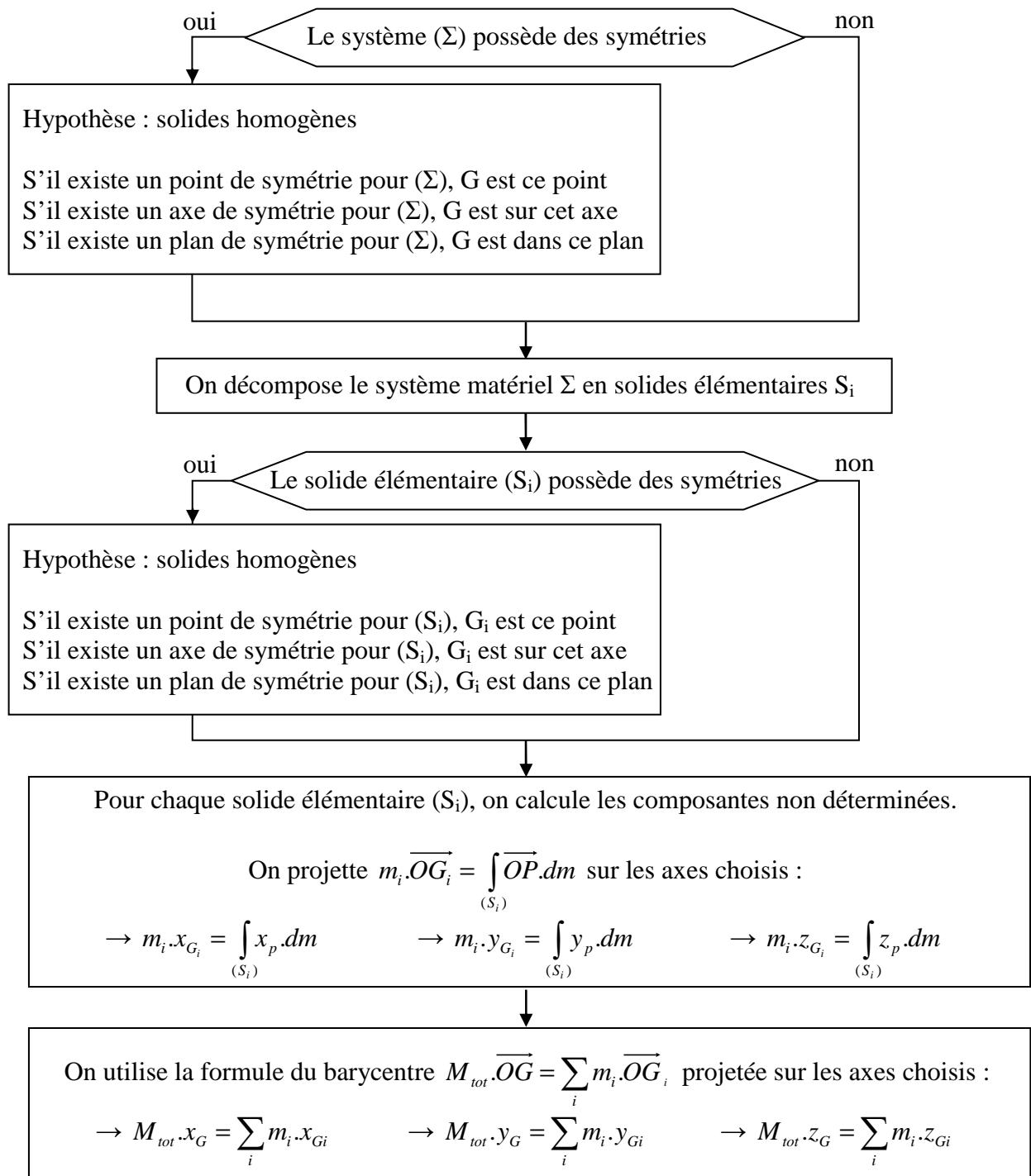
$$\int_{P \in \Sigma} \overrightarrow{G_\Sigma O} + \overrightarrow{OP} \cdot dm(P) = \vec{0} \rightarrow m_\Sigma \cdot \overrightarrow{OG_\Sigma} = \int_{P \in \Sigma} \overrightarrow{OP} \cdot dm(P)$$

(Cette relation est utilisée dans la pratique pour rechercher G_Σ).



Dans la pratique comme on fait l'hypothèse d'un champ de pesanteur constant en tout point, le centre d'inertie G_Σ est confondu avec le centre de gravité G .

Algorithme de calcul pour la détermination du centre de gravité G d'un système matériel Σ



Application : Recherche du centre de gravité sur une porte du Times Barrier

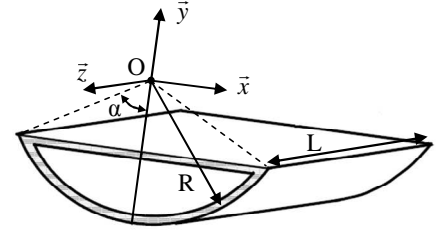
Longueur porte : $L = 58m$

Rayon : $R = 12,4m$

Epaisseur tôle : $e = 0,05m$ (considéré négligeable devant R)

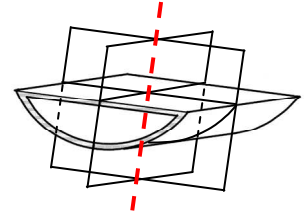
Masse volumique porte : $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

$\alpha = \pi/3$



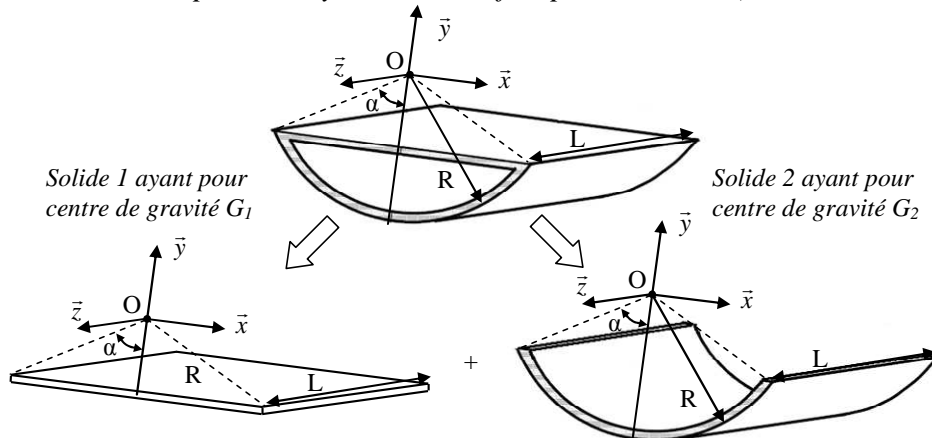
On cherche les coordonnées du centre de gravité G du système Σ par rapport au point O tel que $\vec{OG} = x_G \cdot \vec{x} + y_G \cdot \vec{y} + z_G \cdot \vec{z}$.

Le système possède 2 plans de symétrie perpendiculaires, le centre de gravité est sur la droite intersection des 2 plans de symétrie.



$$\rightarrow z_G = -\frac{L}{2} \text{ et } x_G = 0$$

On décompose le système en solides élémentaires (les solides élémentaires possèdent les deux mêmes plans de symétrie identifiés précédemment).



Il y a un plan de symétrie supplémentaire sur le solide 1.

\rightarrow Il y a 3 plans de symétrie perpendiculaires le centre de gravité de S_1 est à :

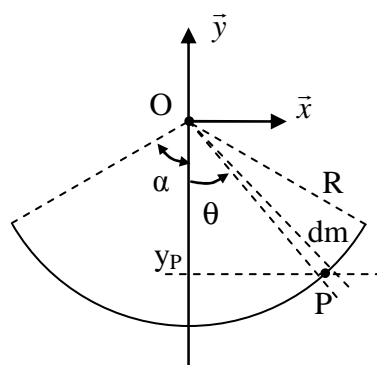
$$y_{G1} = -R \cdot \cos \alpha$$

(si e est considéré comme négligeable et on connaît déjà les coordonnées de G_1 sur \vec{x} et \vec{z}).

Il n'y a pas de plan de symétrie supplémentaires pour le solide 2.

On utilise la définition $m_i \cdot \vec{OG}_i = \int_{(S_i)} \vec{OP} \cdot dm$ que l'on projette sur l'axe \vec{y}

(On connaît déjà les coordonnées de G_2 sur \vec{x} et \vec{z}) :



$$m_2 \cdot y_{G2} = \int_{(S2)} y_P \cdot dm \text{ avec :}$$

$$m_2 = \rho \cdot e \cdot L \cdot (2 \cdot R \cdot \alpha) \text{ et } dm = \rho \cdot e \cdot L \cdot R \cdot d\theta$$

$$2 \cdot R \cdot \alpha \cdot y_{G2} = \int_{-\alpha}^{\alpha} -R \cdot \cos \theta \cdot R \cdot d\theta$$

$$2 \cdot R \cdot \alpha \cdot y_{G2} = -2 \cdot R^2 \cdot \sin \alpha$$

$$y_{G2} = -R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

On utilise enfin la formule du barycentre $M_{tot} \cdot \vec{OG} = \sum_i m_i \cdot \vec{OG}_i$ que l'on projette sur l'axe \vec{y} :

$$M_{tot} \cdot y_G = \sum_i m_i \cdot y_i \rightarrow (m_1 + m_2) \cdot y_G = m_1 \cdot y_{G1} + m_2 \cdot y_{G2} \text{ avec } m_1 = \rho \cdot e \cdot L \cdot (2 \cdot R \cdot \sin \alpha) \text{ et } m_2 = \rho \cdot e \cdot L \cdot (2 \cdot R \cdot \alpha)$$

$$y_G = \frac{m_1 \cdot y_{G1} + m_2 \cdot y_{G2}}{(m_1 + m_2)} = \frac{-\rho \cdot e \cdot L \cdot (2 \cdot R \cdot \sin \alpha) \cdot R \cdot \cos \alpha - \rho \cdot e \cdot L \cdot (2 \cdot R \cdot \alpha) \cdot R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}}{\rho \cdot e \cdot L \cdot (2 \cdot R \cdot \alpha) + \rho \cdot e \cdot L \cdot (2 \cdot R \cdot \sin \alpha)} = \frac{-R \cdot \sin \alpha \cdot (1 + \cos \alpha)}{\alpha + \sin \alpha}$$

2. Opérateur d'inertie et matrice d'inertie d'un solide

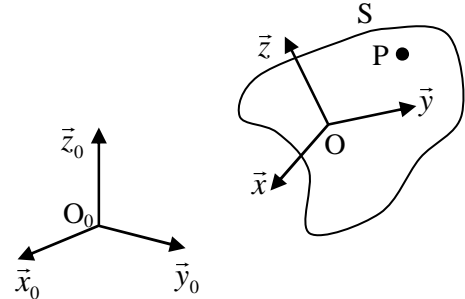
2.1. Opérateur d'inertie

BESOIN : En dynamique les actions mécaniques dépendent de la variation des quantités de mouvement → il est donc nécessaire de quantifier cette quantité de mouvement.

Soit un solide indéformable (S) de masse $m(S)$ en mouvement par rapport à un repère $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

On définit le repère $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié au solide (S), O étant un point fixe de (S).

Soit P un point courant de (S) autour duquel on étudiera l'effet de la répartition de la masse et \vec{u} un vecteur unitaire tels que $\vec{OP} = x_p \cdot \vec{x} + y_p \cdot \vec{y} + z_p \cdot \vec{z}$.



Appel aux compétences du physicien :

La quantité de mouvement d'un point P s'écrit : $\vec{OP} \wedge m \cdot \vec{V}(P/R) = \vec{OP} \wedge m \cdot \frac{d\vec{OP}}{dt} \Big|_R$

$$\xrightarrow{\text{Notion de solide} \rightarrow \text{intégration}} \int_S \vec{OP} \wedge \frac{d\vec{OP}}{dt} \Big|_R \cdot dm$$

Système à masse conservative

Définition d'une application linéaire appelée opérateur d'inertie en O du solide S telle que :

$$\vec{u} \rightarrow \overline{J_{(O,S)}}(\vec{u}) = \int_S \vec{OP} \wedge \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{OP} \cdot dm$$

Appel aux compétences du mathématicien

$$\int_S \vec{OP} \wedge \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{OP} \cdot dm$$

2.2. Matrice d'inertie d'un solide

L'image de cette application linéaire est une matrice appelée matrice d'inertie du solide S en O :

$$\overline{J_{(O,S)}}(\vec{u}) = I_O(S) \cdot \vec{u} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(b)} \cdot \vec{u} \text{ avec } I_O(S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(b)} \text{ matrice d'inertie du}$$

solide S en O dans une base b.

Moments d'inertie

Moments d'inertie de S par rapport à l'axe (O, \vec{x}) : $A = \int_S (y_p^2 + z_p^2) \cdot dm$

Moments d'inertie de S par rapport à l'axe (O, \vec{y}) : $B = \int_S (x_p^2 + z_p^2) \cdot dm$

Moments d'inertie de S par rapport à l'axe (O, \vec{z}) : $C = \int_S (x_p^2 + y_p^2) \cdot dm$

Produits d'inertie

Produit d'inertie de S par rapport aux axes (O, \vec{y}) et (O, \vec{z}) : $D = \int_S y_p \cdot z_p \cdot dm$

Produit d'inertie de S par rapport aux axes (O, \vec{x}) et (O, \vec{z}) : $E = \int_S x_p \cdot z_p \cdot dm$

Produit d'inertie de S par rapport aux axes (O, \vec{y}) et (O, \vec{x}) : $F = \int_S x_p \cdot y_p \cdot dm$



Au concours les calculs des éléments de la matrice d'inertie par les formules ci-dessus ne donnent pas lieu à évaluation (ils sont donnés en fait). Seule la relation entre la forme de la matrice d'inertie et la géométrie de la pièce est exigible.

2.3. Base principale d'inertie

La matrice d'inertie étant symétrique, il existe un système de trois vecteurs propres orthogonaux deux à deux formant une base. Dans cette base, appelée base principale d'inertie, la matrice est diagonale (les produits d'inertie D, E, F sont nuls).

Dans la base $b (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) : I_O(S) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(b)}$

Dans la base principale d'inertie $b_P (\vec{x}_P, \vec{y}_P, \vec{z}_P) : I_O(S) = \begin{pmatrix} A_P & 0 & 0 \\ 0 & B_P & 0 \\ 0 & 0 & C_P \end{pmatrix}_{(b_P)}$



- (O, \vec{x}_P) , (O, \vec{y}_P) et (O, \vec{z}_P) sont les axes principaux d'inertie de S au point O.
- A_P, B_P, C_P sont les moments principaux d'inertie de (S) au point O.
- Si O est centre de gravité de S, alors (O, \vec{x}_P) , (O, \vec{y}_P) et (O, \vec{z}_P) sont axes centraux d'inertie de (S).

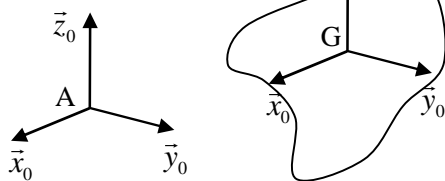
2.4. Transport et changement de base d'une matrice d'inertie

Besoin : exprimer la matrice d'inertie en un autre point $\leftarrow I_O(S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(b)} \rightarrow$ Besoin : exprimer la matrice d'inertie dans une autre base



Théorème de Huygens

$$\vec{AG} = x_G \cdot \vec{x}_0 + y_G \cdot \vec{y}_0 + z_G \cdot \vec{z}_0$$



Méthode globale

$$I_A(S) = I_G(S) + I_A(m \rightarrow G)$$

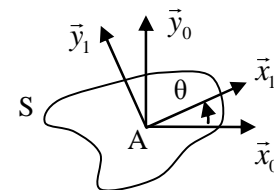
Matrice d'inertie de S en A

Matrice d'inertie de S en G

Matrice d'inertie en A en considérant que toute la masse est concentrée en G

$$I_A(m \rightarrow G) = m \cdot \begin{bmatrix} (y_G^2 + z_G^2) & -x_G \cdot y_G & -x_G \cdot z_G \\ -x_G \cdot y_G & (x_G^2 + z_G^2) & -y_G \cdot z_G \\ -x_G \cdot z_G & -y_G \cdot z_G & (y_G^2 + x_G^2) \end{bmatrix}_{(b)}$$

Changement de base



On définit une matrice de passage de la base b vers la base b_1

$$P_{(b \rightarrow b_1)} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_A(S)_{b_1} = P^{-1}_{(b \rightarrow b_1)} \cdot I_A(S)_b \cdot P_{(b \rightarrow b_1)}$$



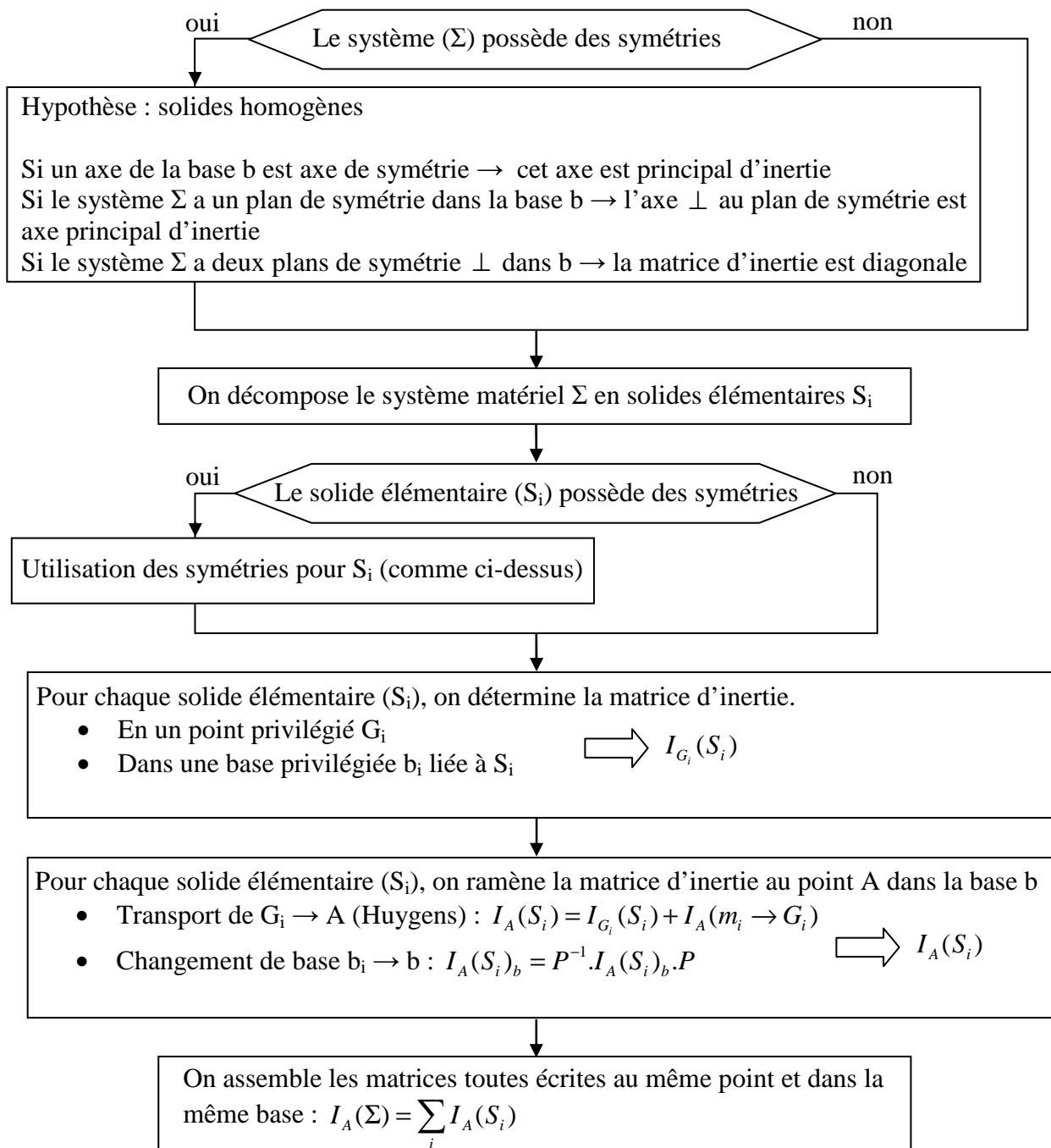
Sur la matrice de passage $\det(P)=1 \rightarrow P^{-1}_{(b \rightarrow b_1)} = P^T_{(b \rightarrow b_1)}$



Quelques règles importantes à respecter pour éviter tout écueil :

- Avant tout calcul, définir la forme simplifiée de la matrice \rightarrow choisir le point et le repère où l'on exprimera la matrice sous sa forme la plus simple.
- Avant de multiplier ou d'additionner 2 matrices, vérifier qu'elles soient exprimées dans un même repère et au même point.
- Pour appliquer le théorème de Huygens, les deux repères doivent être parallèles et il s'écrit entre un point A quelconque et le centre de gravité G ($A \neq G$) et non entre deux points quelconques du solide.
- Le changement de base est une démarche qui prend du temps et elle ne doit être entreprise qu'après mûre réflexion, seulement si elle est vraiment nécessaire.

2.5. Algorithme de calcul d'une matrice d'inertie d'un solide S en une point A dans une base b (souvent base locale)



Application : Détermination de la matrice d'inertie en A de la porte du barrage Times Barrier

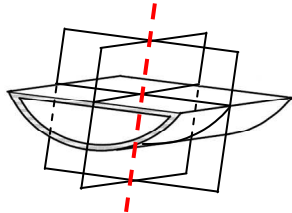
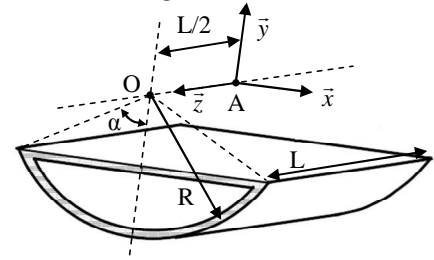
Longueur porte : $L = 58m$

Rayon : $R = 12,4m$

Epaisseur tôle : $e = 0,05m$ (considéré négligeable devant R)

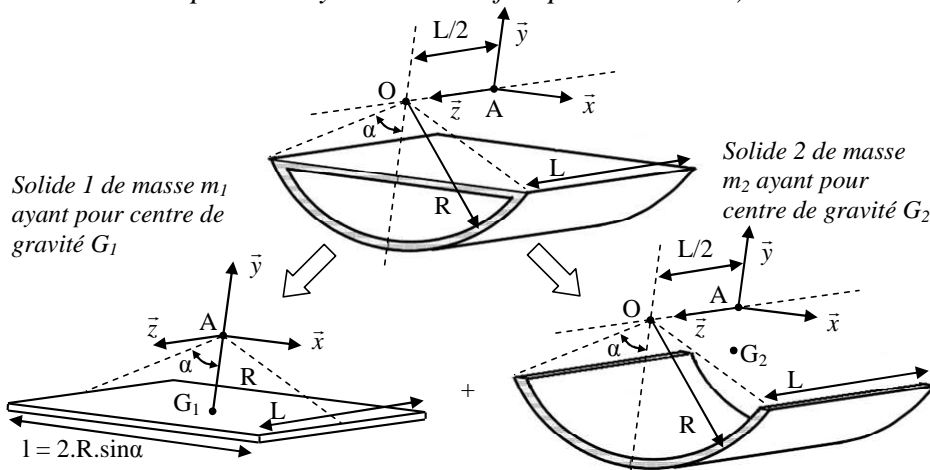
Masse volumique porte : $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

$\alpha = \pi/3$



Le système Σ possède 2 plans de symétrie perpendiculaires \rightarrow la matrice est diagonale.

On décompose le système en solides élémentaires (les solides élémentaires possèdent les deux mêmes plans de symétrie identifiés précédemment).



La matrice d'inertie de la plaque S_1 en G_1 est une matrice élémentaire simple bien connue :

$$I_{G_1}(S_1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(b)} \quad \text{avec :}$$

$$A_1 = \frac{m_1 \cdot L^2}{12} ; B_1 = \frac{m_1 \cdot (L^2 + l^2)}{12} \text{ et } C_1 = \frac{m_1 \cdot l^2}{12}$$

La matrice d'inertie du solide S_2 en G_2 est :

$$I_{G_2}(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(b)}$$

Où les termes A_2 , B_2 et C_2 sont des termes à calculer à partir des définitions données paragraphe 2.2.

On doit ensuite transporter à l'aide du théorème de Huygens les 2 matrices en A pour les assembler.

$I_A(S_1) = I_{G_1}(S_1) + I_A(m_1 \rightarrow G_1)$ avec :

$$I_A(m_1 \rightarrow G_1) = \begin{bmatrix} m_1 \cdot y_{G_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \cdot y_{G_1}^2 \end{bmatrix}_{(b)}$$

$$I_A(S_1) = \begin{pmatrix} A_1 + m_1 \cdot y_{G_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 + m_1 \cdot y_{G_1}^2 \end{pmatrix}_{(b)}$$

$I_A(S_2) = I_{G_2}(S_2) + I_A(m_2 \rightarrow G_2)$ avec :

$$I_A(m_2 \rightarrow G_2) = \begin{bmatrix} m_2 \cdot y_{G_2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \cdot y_{G_2}^2 \end{bmatrix}_{(b)}$$

$$I_A(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 + m_2 \cdot y_{G_2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 + m_2 \cdot y_{G_2}^2 \end{pmatrix}_{(b)}$$

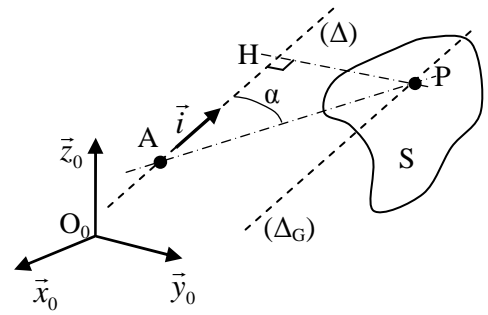
\rightarrow Au final on obtient : $I_A(\Sigma) = I_A(S_1) + I_A(S_2)$

3. Moments d'inertie d'un solide par rapport à un axe quelconque

Soit un solide S de masse m en mouvement par rapport à un repère $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Soit un axe (Δ) défini par le point A et le vecteur unitaire \vec{i} . Un point P de S se projette en H sur (Δ) .

Le moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe (Δ) est le scalaire positif $I(S)/\Delta = \int_S PH^2 \cdot dm$.

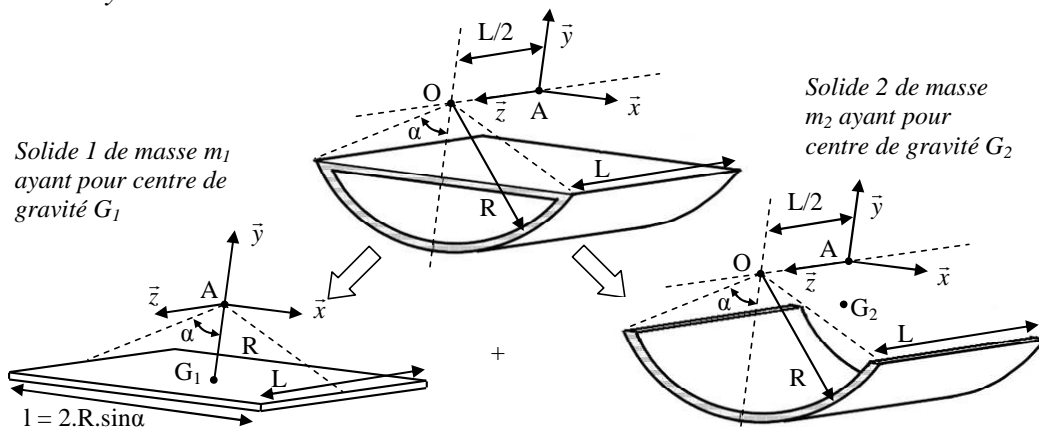


Si on connaît la matrice d'inertie du solide S au point A dans la base R_0 on peut calculer $I(S)/\Delta$ en utilisant la relation $I(S)/\Delta = \vec{i} \cdot I_A(S) \cdot \vec{i}$



Dans le cas d'un moment d'inertie par rapport à un axe quelconque, le théorème de Huygens devient $I(S)/\Delta = I(S)/\Delta_G + m \cdot PH^2$

Application : Calcul du moment d'inertie par rapport à son axe de révolution de la porte du barrage. On décompose le système en solides élémentaires.



$$I(S_1)/(G_1, \vec{z}) = C_1 = \frac{m_1 L^2}{12}$$

On doit ensuite utiliser le théorème de Huygens

$$I(S_1)/(A, \vec{z}) = I(S_1)/(G_1, \vec{z}) + m_1 \cdot y_{G1}^2$$

$$\rightarrow I(S_1)/(A, \vec{z}) = C_1 + m_1 \cdot y_{G1}^2$$

$$I(S_2)/(A, \vec{z}) = \int_S PA^2 \cdot dm$$

on remarque que tous les points du solide 2 sont à une même distance de l'axe (A, \vec{z})

$$\rightarrow I(S_2)/(A, \vec{z}) = m_2 \cdot R^2 \text{ (avec } m_2 = \rho \cdot e \cdot L \cdot (2 \cdot R \cdot \alpha) \text{)}$$

$$\rightarrow \text{Au final on obtient : } I(\Sigma)/(A, \vec{z}) = C_1 + m_1 \cdot y_{G1}^2 + m_2 \cdot R^2$$