Note del Corso di
Metodi del Calcolo Scientifico

versione del 11 maggio 2018 ore 10:00

Alessandro Russo

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano-Bicocca
E-mail address: alessandro.russo@unimib.it

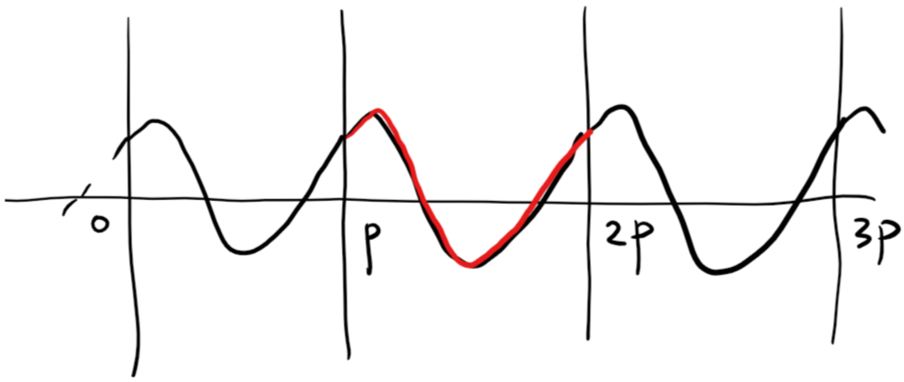
Indice

Serie di Fourier

Sia f una funzione periodica di periodo p, cioè

$$f(t+p) = f(t) \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

La funzione f quindi *si ripete* ogni p. Per esempio, $\sin x$ e $\cos x$ sono periodiche di periodo 2π.



Iniziamo a dimostrare che *integrale di f su un intervallo di ampiezza p è costante, ovvero non dipende dagli estremi:*

$$\int_a^{a+p} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_b^{b+p} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Basta ovviamente dimostrare che

$$\int_a^{a+p} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{p} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Spezziamo l'integrale intercalando p:

$$\int_a^{a+p} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{p} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_p^{a+p} f(t)\,\mathrm{d}t$$

e spezziamo ancora intercalando lo zero nel primo integrale:

$$\int_a^{a+p} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{p} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_p^{a+p} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Nel terzo integrale operiamo il cambio di variabile $s = t - p$ e otteniamo

$$\int_p^{a+p} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{a} f(s+p)\,\mathrm{d}s.$$

versione del 11 maggio 2018 ore 10:00

Ma dato che f è periodica di periodo p:

$$\int_0^a f(s+p)\,\mathrm{d}s = \int_0^a f(s)\,\mathrm{d}s = -\int_a^0 f(s)\,\mathrm{d}s$$

e quindi

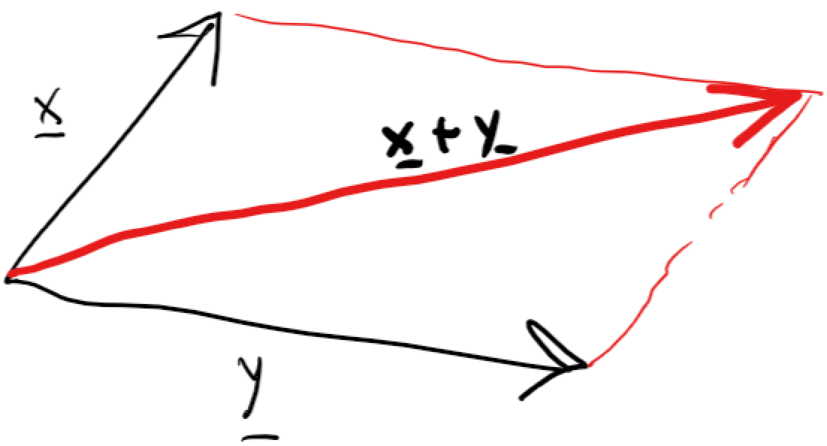
$$\int_a^{a+p} f(t)\,\mathrm{d}t = \cancel{\int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t} + \int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t - \cancel{\int_a^0 f(s)\,\mathrm{d}s} = \int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Abbiamo quindi dimostrato che l'integrale preso su un intervallo di ampiezza uguale al periodo p è costante. Questo fatto ci sarà utile nel seguito.

1.1. Spazi vettoriali, basi e ortogonalità

Sappiamo che $\mathbb{R}^n$ è uno *spazio vettoriale* (o lineare): dati due vettori $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, con $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, possiamo definire la loro somma $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ come il vettore di componenti $z_i = x_i + y_i$, e possiamo definire il prodotto di $\boldsymbol{x}$ per un numero α moltiplicando componente per componente.

La somma di vettori e il prodotto per uno scalare godono delle usuali proprietà associative, commutative eccetera. Nel caso di $n = 2$ oppure $n = 3$ abbiamo ovviamente una interpretazione geometrica dei vettori come "frecce".



Di fondamentale importanza è il concetto di *base* di uno spazio vettoriale: si tratta di un insieme di n vettori $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ tale che ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ può essere scritto (in un solo modo) come *combinazione lineare* dei vettori $\mathcal{B}$:

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{b}_n \tag{1.1}$$

Il numero α_i viene detto *coefficiente* di $\boldsymbol{x}$ rispetto all'elemento della base $\boldsymbol{b}_i$ e rappresenta "di quanto contribuisce" l'elemento della base $\boldsymbol{b}_i$ al vettore dato $\boldsymbol{x}$. L'operazione che ad $\boldsymbol{x}$ associa i coefficienti di $\boldsymbol{x}$ nella base $\mathcal{B}$:

$$\boldsymbol{x} \longrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

non è altro che *la soluzione di un sistema di equazioni lineari*. Infatti possiamo scrivere la relazione (1.1) che lega gli α_i a $\boldsymbol{x}$ come

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} (\boldsymbol{b}_1)_1 \\ (\boldsymbol{b}_1)_2 \\ \vdots \\ (\boldsymbol{b}_1)_n \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} (\boldsymbol{b}_2)_1 \\ (\boldsymbol{b}_2)_2 \\ \vdots \\ (\boldsymbol{b}_2)_n \end{bmatrix} + \ldots \alpha_n \begin{bmatrix} (\boldsymbol{b}_n)_1 \\ (\boldsymbol{b}_n)_2 \\ \vdots \\ (\boldsymbol{b}_n)_n \end{bmatrix}$$

avendo indicato con $(\boldsymbol{b}_i)_j$ la j−esima componente del vettore $\boldsymbol{b}_i$. Per semplicità di scrittura poniamo $b_{ij} = (\boldsymbol{b}_i)_j$ e quindi riscriviamo la (1.1) come segue:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{2n} \end{bmatrix} + \dots \alpha_n \begin{bmatrix} b_{n1} \\ b_{n2} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{bmatrix}$$

che equivale al sistema di equazioni lineari

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n. \end{bmatrix}$$

La *base canonica* $\mathcal{C}$ è la base costituita dai vettori $\boldsymbol{e}_i$ aventi componenti tutte zero salvo 1 in posizione i−esima:

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0), \quad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0), \quad \dots \quad \boldsymbol{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1).$$

E' chiaro che i coefficienti di $\boldsymbol{x}$ nella base canonica $\mathcal{C}$ sono le componenti di $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \dots x_n\boldsymbol{e}_n.$$

nel caso della base canonica, la matrice del sistema di equazioni lineari del punto precedente è la matrice identità la cui soluzione è $\alpha_i = x_i$.

La base canonica $\mathcal{C}$ è una base particolare perché è *ortonormale*, ovvero i vettori $\boldsymbol{e}_i$ sono *ortogonali* tra loro e inoltre hanno *lunghezza unitaria*. Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ si può infatti inserire una nuova operazione chiamata *prodotto scalare* che a partire da due vettori tira fuori un numero. L'operazione viene indicata di solito con $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ ed è definita nel modo seguente:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

In parole, bisogna fare il prodotto termine a termine delle componenti e sommarli tra loro. Il prodotto scalare si comporta educatamente rispetto alle altre operazioni tra vettori, nel senso che valgono le seguenti proprietà che sono di verifica immediata:

- $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$ (commutatività);
- $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$ (associatività);
- $(\alpha\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \alpha\,(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$ (linearità rispetto alla moltiplicazione per i numeri).

La *lunghezza* di un vettore è la radice quadrata del prodotto scalare del vettore con sé stesso e viene indicata di solito con $\|\boldsymbol{x}\|$:

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Il prodotto scalare e la lunghezza hanno una importante interpretazione geometrica per $n = 2$ e $n = 3$. La lunghezza così definita corrisponde proprio alla lunghezza euclidea (infatti il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ viene spesso chiamato prodotto scalare euclideo) mentre il prodotto scalare di $\boldsymbol{x}$ con $\boldsymbol{y}$ è la proiezione di $\boldsymbol{x}$ su $\boldsymbol{y}$ moltiplicata per la lunghezza di $\boldsymbol{y}$ (oppure con $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ scambiati, tanto viene la stessa cosa).

La proprietà fondamentale del prodotto scalare è che il suo annullarsi significa che i vettori $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ sono ortogonali, ovvero fanno un angolo di 90°:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0 \implies \boldsymbol{x} \text{ e } \boldsymbol{y} \text{ sono ortogonali.}$$

Una base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ è detta **ortogonale** quando i vettori che la compongono sono tutti ortogonali tra loro:

$$\mathcal{B} \text{ ortogonale:} \quad \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = 0 \quad \text{se } i \neq j.$$

Una base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ è detta **ortonormale** quando i vettori che la compongono sono tutti ortogonali tra loro e in più hanno lunghezza unitaria:

$$\mathcal{B} \text{ ortonormale:} \quad \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = 0 \quad \text{se } i \neq j, \quad \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_i = \|\boldsymbol{b}_i\|^2 = 1.$$

L'ortonormalità viene espressa scrivendo $\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = \delta_{ij}$ dove δ_{ij} è il delta di Kronecker, ovvero 0 se $i \neq j$ e 1 se $i = j$.

1.1.1. Relazione tra ortogonalità e basi. Se una base è ortonormale, risulta immediato ricavare i coefficienti di un vettore $\boldsymbol{x}$ rispetto a questa base. Partiamo infatti dall'uguaglianza (1.1) che definisce i coefficienti di $\boldsymbol{x}$ nella base $\mathcal{B}$:

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{b}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{b}_n. \tag{1.2}$$

Facciamo il prodotto scalare per l'elemento $\boldsymbol{b}_1$ della base:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_1 = \alpha_1 (\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1) + \alpha_2 (\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1) + \ldots + \alpha_n (\boldsymbol{b}_n \cdot \boldsymbol{b}_1)$$

Se la base $\mathcal{B}$ è ortogonale, abbiamo $\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 = 1$ e $\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_1 = 0$ se $i \neq 1$. Ci rimane quindi $\alpha_1 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_1$ e in generale

$$\alpha_i = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_i.$$

Quindi per ottenere i coefficienti di un vettore $\boldsymbol{x}$ rispetto a una base ortonormale basta moltiplicare scalarmente $\boldsymbol{x}$ per gli elementi della base:

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_1)\, \boldsymbol{b}_1 + \ldots + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_n)\, \boldsymbol{b}_n.$$

Se abbiamo quindi una base ortonormale, moltiplicare $\boldsymbol{x}$ per $\boldsymbol{b}_i$ "estrae" il coefficiente di $\boldsymbol{x}$ relativo a $\boldsymbol{b}_i$. Nel caso della base canonica $\mathcal{C}$, abbiamo:

$$\text{coefficiente di } \boldsymbol{x} \text{ relativo a } \boldsymbol{e}_i \quad = \quad \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_i \quad = \quad x_i \quad = \quad \text{componente } i\text{−esimo di } \boldsymbol{x}$$

Se la base è solo ortogonale (cioè i sui elementi sono ortogonali ma non hanno lunghezza unitaria) abbiamo

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_1 = \alpha_1 (\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1) = \alpha_1 \|\boldsymbol{b}_1\|^2$$

e quindi

$$\alpha_i = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}_i\|^2} (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_i).$$

e di conseguenza

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}_i\|^2} (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_1)\, \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \frac{1}{\|\boldsymbol{b}_n\|^2} (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_n)\, \boldsymbol{b}_n. \tag{1.3}$$

C'è quindi un *fattore di scala* di cui tenere conto e cha dà un po' fastidio. E' sempre meglio quindi riferirsi a basi ortonormali, visto anche che passare da una base ortogonale a una base ortonormale è molto facile: basta dividere i vettori per la loro lunghezza.

$$\text{nuovi } \boldsymbol{b}_i \longrightarrow \frac{1}{\|\boldsymbol{b}_i\|} \boldsymbol{b}_i$$

1.2. Spazi vettoriali di funzioni

$\mathbb{R}^n$ non è l'unico esempio di spazio vettoriale. In generale, uno spazio vettoriale (o lineare) è un insieme di "oggetti matematici" che possono essere sommati tra di loro e moltiplicati per un numero, restituendo sempre un oggetto dello stesso genere. Tra gli spazi vettoriali più interessanti ci sono quelli di *funzioni*. Per esempio, le funzioni definite su un intervallo $[a, b]$ formano uno spazio vettoriale, così come le funzioni periodiche.

E' utile pensare a una funzione come un vettore in cui l'indice delle componenti diventa un numero reale: se $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ allora la componente x_i si può pensare come "il valore del vettore $\boldsymbol{x}$ nell'indice i", mentre se f è una funzione $f(t)$ è il "valore della funzione nel punto t":

$$i \mapsto (\boldsymbol{x})_i = x_i \quad \text{diventa} \quad t \mapsto f(t)$$

Con questa analogia, è naturale che il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ diventi l'integrale del prodotto di funzioni:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{diventa} \quad f \cdot g = \int_a^b f(t) g(t)\, \mathrm{d}t$$

e due funzioni si diranno ortogonali quando il loro prodotto scalare è uguale a 0.

1.3. Basi ortogonali negli spazi di funzioni

Quello che vogliamo fare ora è estrarre da una funzione periodica i coefficienti delle frequenze. Per fare questo, ci procuriamo una base ortonormale di funzioni di funzioni periodiche di periodo p di frequenza via via crescente. Le funzioni che scegliamo sono seni e coseni, che sono periodiche di periodo 2π. Per avere un periodo p qualunque basta moltiplicare il loro argomento per $\dfrac{2\pi}{p}$:

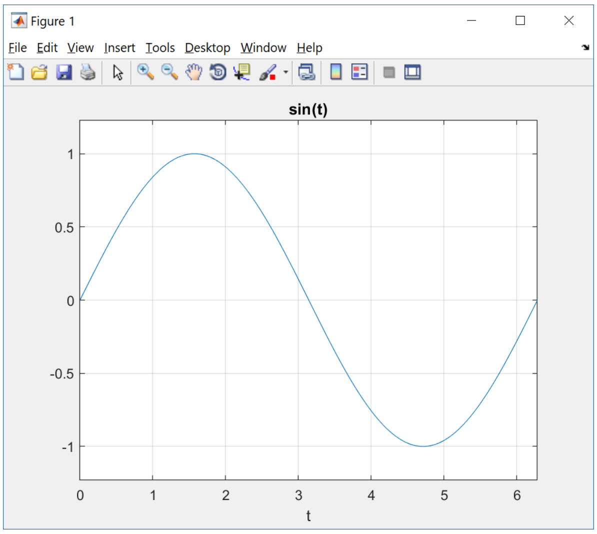
$$\sin t \quad \text{diventa} \quad \sin\left(\frac{2\pi}{p} t\right)$$

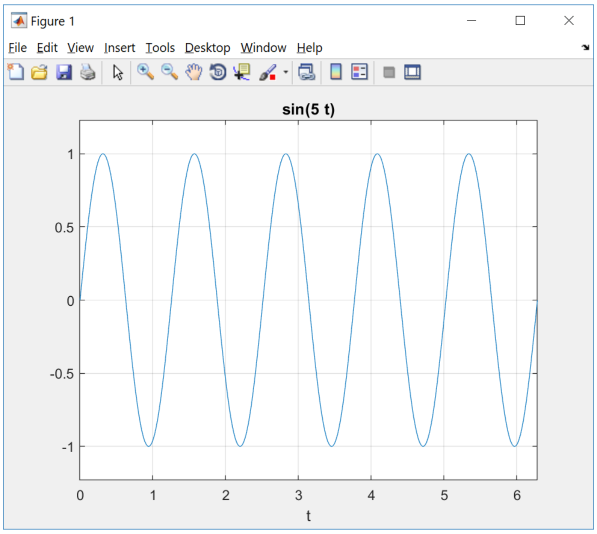
Risulta infatti

$$\sin\left(\frac{2\pi}{p}(t+p)\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{p} t + \frac{2\pi}{\cancel{p}} \cancel{p}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{p} t + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{p} t\right)$$

Per aumentarne la frequenza (ovvero farle oscillare più volte in $[0, 2\pi]$) bisogna moltiplicare il loro argomento per un numero intero k:

$$\sin t \quad \text{diventa} \quad \sin kt$$





Combinando le due cose, otteniamo la base:

$$\left\{1,\ \cos\left(\frac{2\pi}{p}kt\right), k=1,2,\dots,\ \sin\left(\frac{2\pi}{p}kt\right), k=1,2,\dots,\right\}.$$

Iniziamo a vedere che queste funzioni sono ortogonali.

1.3.1. La funzione costante 1 è ortogonale a seni e coseni. Consideriamo

$$\int_0^p 1\times\cos\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\,\mathrm{d}t=\int_0^p \cos\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\,\mathrm{d}t,\quad \text{con } k\geq 1.$$

Facciamo un cambiamento di variabili $s=\dfrac{2\pi}{p}t$; gli estremi diventano 0 e 2π e $\mathrm{d}t=\dfrac{p}{2\pi}\,\mathrm{d}s$ per cui

$$\int_0^p \cos\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\,\mathrm{d}t=\frac{p}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos ks\,\mathrm{d}s=\frac{p}{2\pi}\frac{1}{k}\sin ks\Big|_0^{2\pi}=\frac{p}{2\pi}\frac{1}{k}(\sin 2k\pi-\sin 0)=0$$

Procediamo analogamente con il seno:

$$\int_0^p \sin\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\,\mathrm{d}t=\frac{p}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin ks\,\mathrm{d}s=-\frac{p}{2\pi}\frac{1}{k}\cos ks\Big|_0^{2\pi}=-\frac{p}{2\pi}\frac{1}{k}(\cos 2k\pi-\cos 0)=0$$

Quindi la funzione 1 è ortogonale ai seni e coseni di qualunque frequenza $k\geq 1$. La "lunghezza" (al quadrato) della funzione 1 è data da

$$\int_0^p 1\times 1\,\mathrm{d}t=\int_0^p \mathrm{d}t=p.$$

1.3.2. Seni e coseni sono ortogonali. Facciamo vedere che seni e coseni sono sempre ortogonali mostrando che il prodotto scalare

$$\int_0^p \cos\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\sin\left(\frac{2\pi}{p}\ell t\right)\,\mathrm{d}t$$

è zero per ogni scelta di $k,\ell\geq 1$. Con lo stesso cambiamento di variabili del punto precedente otteniamo

$$\int_0^p \cos\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\sin\left(\frac{2\pi}{p}\ell t\right)\,\mathrm{d}t=\frac{p}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos ks\,\sin\ell s\,\mathrm{d}s.$$

Ricordando le formula di addizione per il seno:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

e

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

sommando otteniamo la prima formula di Werner:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

da cui

$$\cos ks\,\sin\ell s=\frac{1}{2}\left[\sin\left((k+\ell)s\right)+\sin\left((k-\ell)s\right)\right]$$

e dai conti precedenti sappiamo già che

$$\int_0^{2\pi}\sin\left((k+\ell)s\right)\,\mathrm{d}s=0\quad \text{per ogni } k,\ell\geq 1$$

e inoltre

$$\int_0^{2\pi}\sin\left((k-\ell)s\right)\,\mathrm{d}s=0\quad \text{se } k\neq\ell.$$

Dato che evidentemente l'integrale precedente è zero anche se $k=\ell$ (infatti in questo caso l'integrando è identicamente zero), risulta che seni e coseni sono sempre ortogonali per ogni scelta di $k,\ell\geq 1$..

1.3.3. I coseni sono ortogonali se hanno frequenze diverse. Facciamo vedere che i seni sono sempre ortogonali se hanno frequenze diverse mostrando che il prodotto scalare

$$\int_0^p \cos\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}\ell t\right)\,\mathrm{d}t$$

è zero se $k \neq \ell$. Con lo stesso cambiamento di variabili del punto precedente otteniamo

$$\int_0^p \cos\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}\ell t\right)\,\mathrm{d}t = \frac{p}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos ks\,\cos \ell s\,\mathrm{d}s.$$

Ricordando le formula di addizione per il coseno:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

e

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

sommando otteniamo la seconda formula di Werner:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

da cui

$$\cos ks\,\cos \ell s = \frac{1}{2}\left[\cos\left((k+\ell)s\right)+\cos\left((k-\ell)s\right)\right]$$

e dai conti precedenti sappiamo già che

$$\int_0^{2\pi} \cos\left((k+\ell)s\right)\mathrm{d}s = 0 \quad \text{per ogni } k,\ell \geq 1.$$

Inoltre

$$\int_0^{2\pi} \cos\left((k-\ell)s\right)\mathrm{d}s = 0 \quad \text{quando } k \neq \ell.$$

Se invece $k = \ell$, risulta che la "lunghezza" (al quadrato) dei coseni (cioè la loro norma al quadrato) non dipende dalla frequenza:

$$\int_0^p \left[\cos\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\right]^2\,\mathrm{d}t = \frac{p}{2\pi}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = \frac{p}{2}.$$

1.3.4. I seni sono ortogonali se hanno frequenze diverse. Facciamo vedere che i coseni sono sempre ortogonali se hanno frequenze diverse mostrando che il prodotto scalare

$$\int_0^p \sin\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\sin\left(\frac{2\pi}{p}\ell t\right)\,\mathrm{d}t$$

è zero se $k \neq \ell$. Con lo stesso cambiamento di variabili del punto precedente otteniamo

$$\int_0^p \sin\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\sin\left(\frac{2\pi}{p}\ell t\right)\,\mathrm{d}t = \frac{p}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin ks\,\sin \ell s\,\mathrm{d}s.$$

Ricordando le formula di addizione per il coseno:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

e

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

sottraendo la prima dalla seconda otteniamo la terza formula di Werner:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

da cui

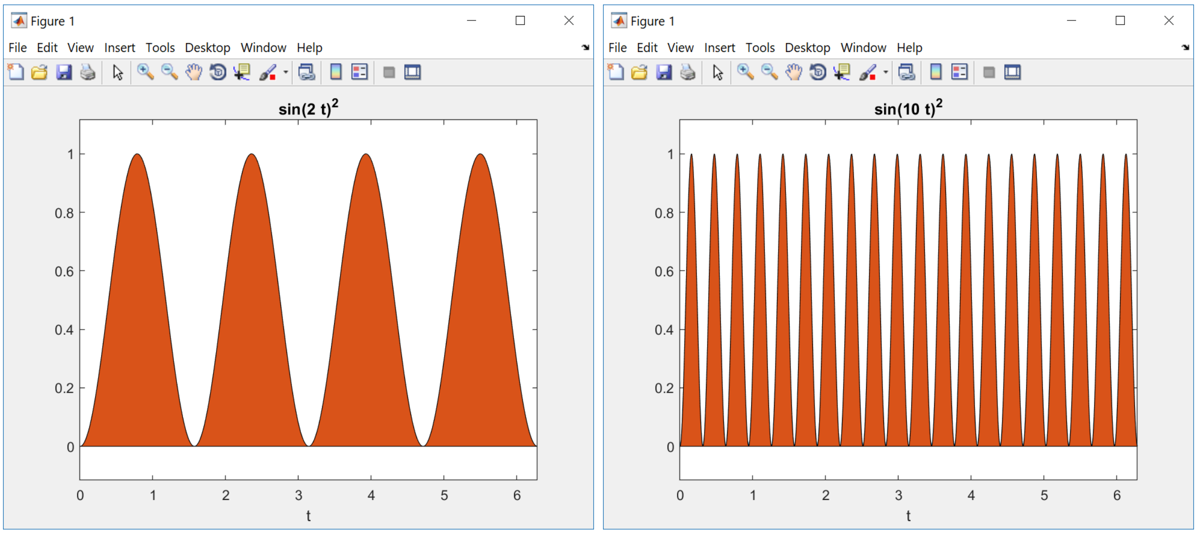
$$\sin ks\,\sin \ell s = \frac{1}{2}\left[\cos\left((k-\ell)s\right)-\cos\left((k+\ell)s\right)\right].$$

Possiamo quindi procedere come al punto precedente, ottenendo che i coseni sono ortogonali se le frequenze sono diverse e che la “lunghezza” (al quadrato) dei coseni non dipende dalla frequenza ed è uguale a quella dei seni:

$$\int_0^p \left[\sin\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\right]^2 \, \mathrm{d}t = \frac{p}{2}.$$

In particolare, per $p = 2\pi$, abbiamo

$$\int_0^{2\pi} (\sin kt)^2 \, \mathrm{d}t = \pi \quad \text{indipendente da } k.$$



Le due aree sono uguali e valgono π.

1.4. Serie di Fourier di funzioni periodiche

Le serie di Fourier sono lo studio della rappresentazione delle funzioni nella base ortogonale

$$\left\{1,\ \cos\left(\frac{2\pi}{p}kt\right), k = 1, 2, \ldots,\ \sin\left(\frac{2\pi}{p}kt\right), k = 1, 2, \ldots, \right\}.$$

Abbiamo visto che è una base ortogonale e non ortornormale, ma dato che la norma degli elementi della base non dipende dalla frequenza k, tradizionalmente non vengono normalizzati:

$$\|1\| = \sqrt{p}, \quad \left\|\cos\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\right\| = \left\|\sin\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\right\| = \sqrt{\frac{p}{2}}.$$

Data una funzione f periodica di periodo p, cerchiamo quindi dei coefficienti

$$A_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$$

tali che

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi}{p}kt\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\right).$$

Dato che la base è ortogonale, possiamo applicare la formula (1.3), e quindi risulta:

$$A_0 = \frac{1}{\|1\|^2} \underbrace{1 \cdot f}_{\text{prod.scal.}} = \frac{1}{p}\int_0^p f(t) \, \mathrm{d}t = \text{media integrale di } f \text{ su un periodo},$$

$$a_k = \frac{1}{\left\|\cos\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\right\|^2} \underbrace{\left[\cos\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\right] \cdot f}_{\text{prodotto scalare}} = \frac{2}{p}\int_0^p f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{p}kt\right) \, \mathrm{d}t$$

$$b_k = \frac{1}{\left\|\sin\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\right\|^2} \underbrace{\left[\sin\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\right] \cdot f}_{\text{prodotto scalare}} = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\,\mathrm{d}t.$$

Le operazioni

$$f, k \quad \longrightarrow \quad A_0,\ \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\,\mathrm{d}t,\ \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\,\mathrm{d}t$$

estraggono dalla funzione f i coefficienti della frequenza k. In questo caso i coefficienti sono detti ampiezze. L'idea di base è che se una funzione è "liscia", gli a_k e b_k saranno significativi solo per k piccoli (frequenze basse). A partire dai coefficienti A_0 a_k e b_k posso ricostruire la funzione f sommando la serie:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(\frac{2\pi}{p}kt\right) + b_k\sin\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\right)$$

Se mi fermo a una frequenza N, avrò *filtrato* dalla f le frequenze più alte di N:

$$f(t) \text{ senza le frequenze maggiori di } N = A_0 + \sum_{k=1}^{N}\left(a_k\cos\left(\frac{2\pi}{p}kt\right) + b_k\sin\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\right)$$

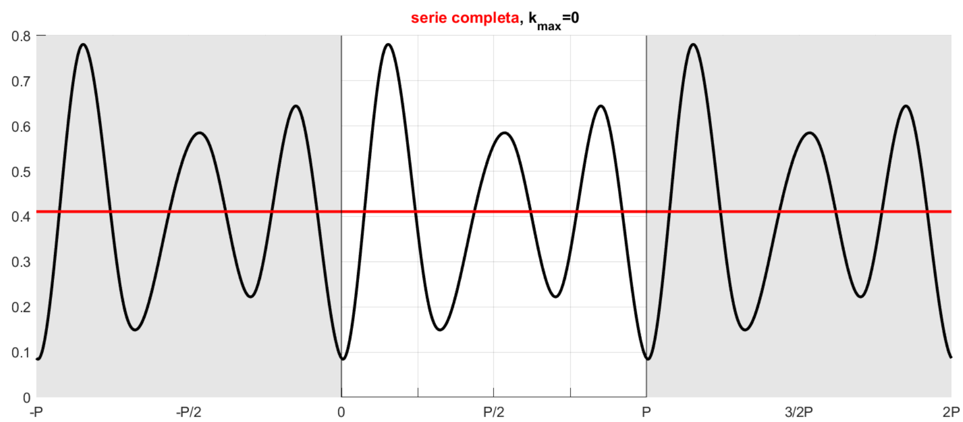
1.4.1. Esperimenti numerici. La teoria matematica della convergenza delle serie di Fourier è molto complessa e possiamo solo fare alcune considerazioni qualitative.

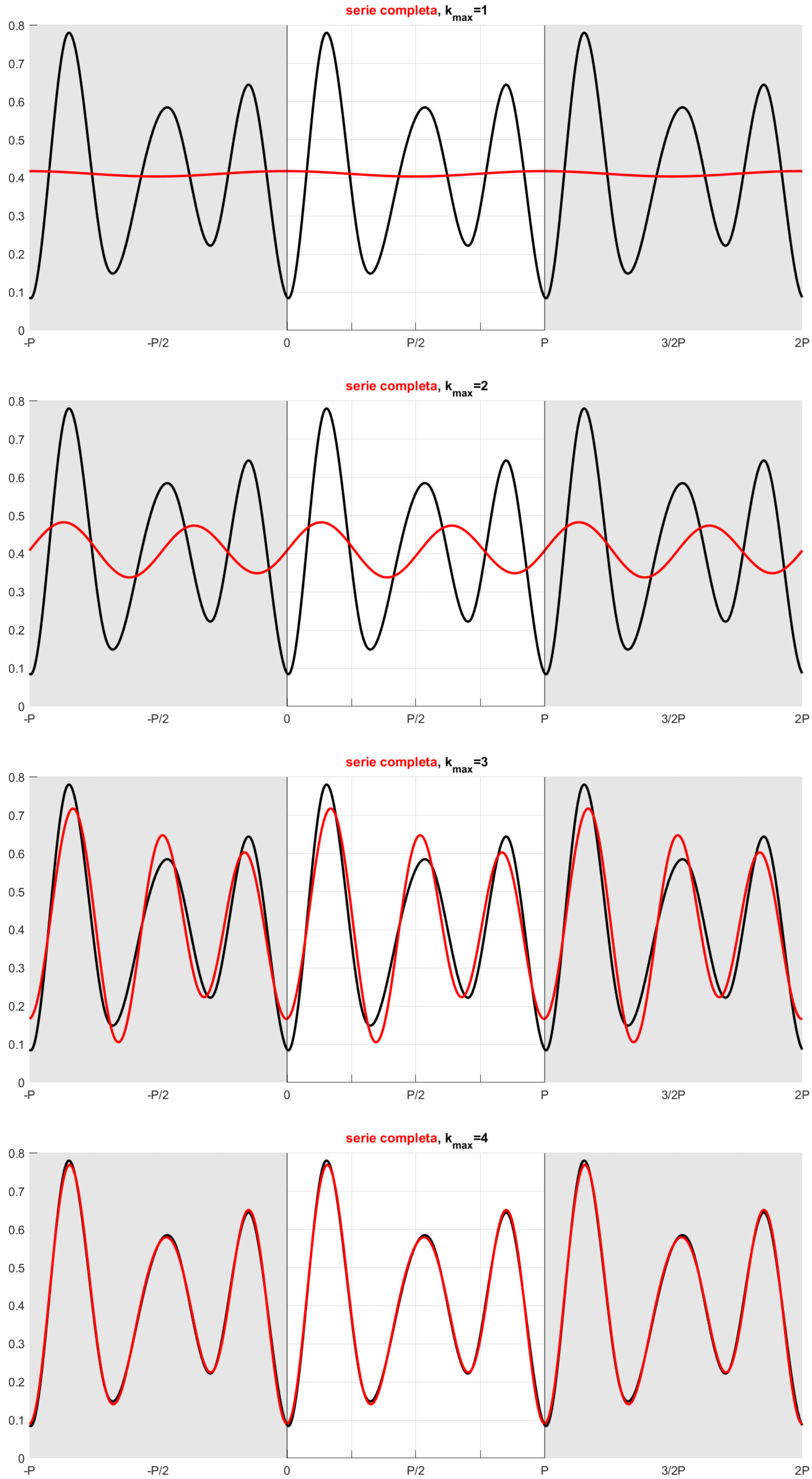
Osserviamo innanzitutto che i coefficienti A_0, a_k e b_k hanno senso per funzioni f molto generali, anche discontinue; questo va confrontato con la serie di Taylor che è definita solo per funzioni infinitamente derivabili.

Il principio generale è che più la funzione è "liscia", ovvero ha tante derivate, più i coefficienti a_k e b_k diventano piccoli quando k cresce; in altre parole, per descrivere efficacemente la funzione mi bastano poche frequenze.

Il caso limite è quello di una funzione con una discontinuità; in questo caso si creano delle oscillazioni fenomeno di Gibbs che non vanno via quando aumentiamo k. La discontinuità può essere vista come una "frequenza infinita" e quindi non abbiamo speranze di approssimarla bene con delle frequenze finite.

Iniziamo con una funzione periodica liscia e vediamo come si comporta lo sviluppo in frequenza. Nei grafici seguenti è disegnata in nero la funzione f e in rosso la somma di Fourier arrestata alla frequenza massima k_{max} che indicata nel titolo della figura. Per comodità di lettura sono visualizzati 3 periodi.

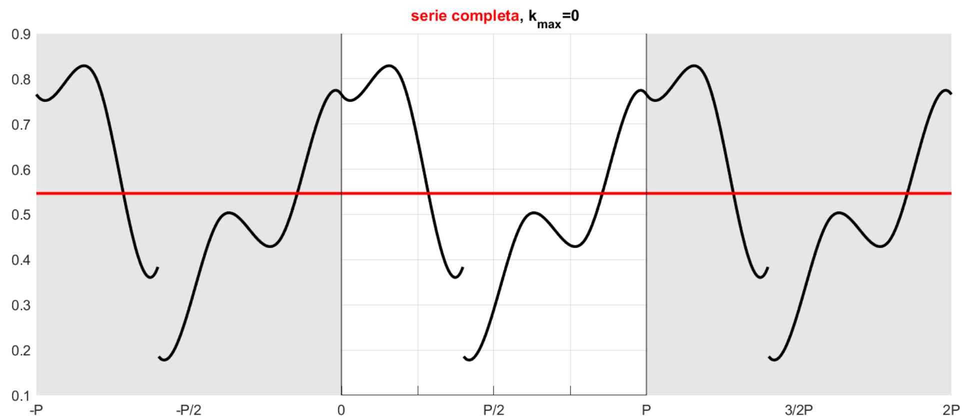


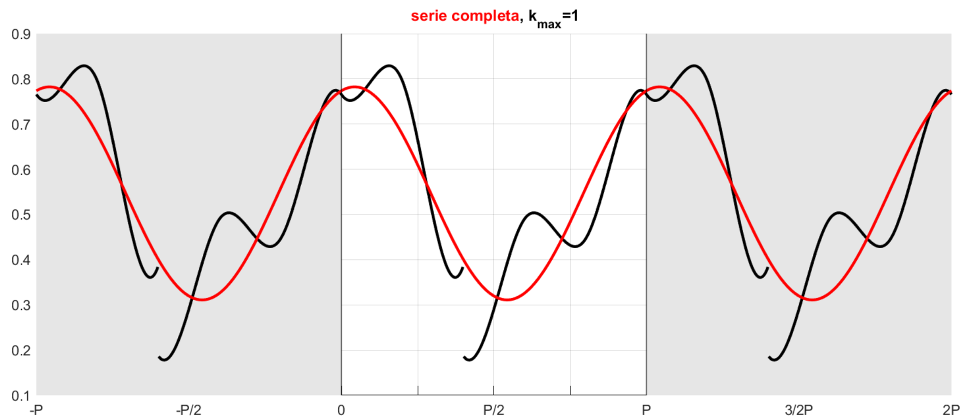

serie completa, k_max=1
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P
serie completa, k_max=2
serie completa, k_max=3
serie completa, k_max=4

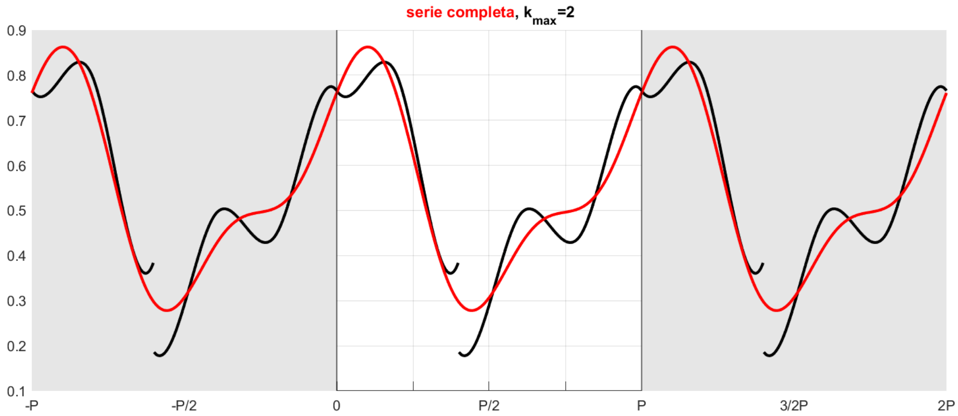
Come si può vedere, già con le prime 4 frequenze la funzione f è ricostruita efficacemente; i valori numerici sono:

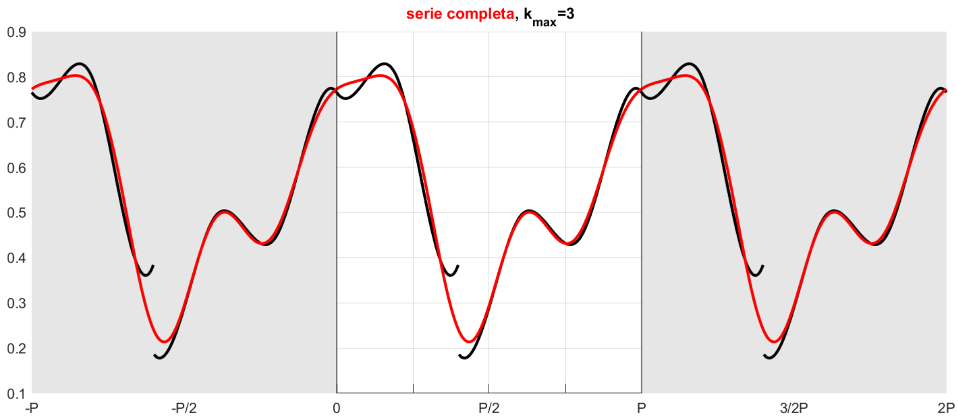
```
k        a_k           b_k
-----------------------------
1     7.0019e-03  -3.3247e-04
2    -9.2777e-03   6.6596e-02
3    -2.4129e-01  -3.1851e-02
4    -7.6346e-02  -7.9359e-03
5    -2.3751e-04  -9.0833e-03
6     5.4027e-06  -3.5580e-03
7     5.4427e-17  -1.9207e-03
8     1.7094e-06  -1.1259e-03
9    -2.2625e-05  -5.4046e-04
10   -1.9545e-03  -7.1915e-04
```

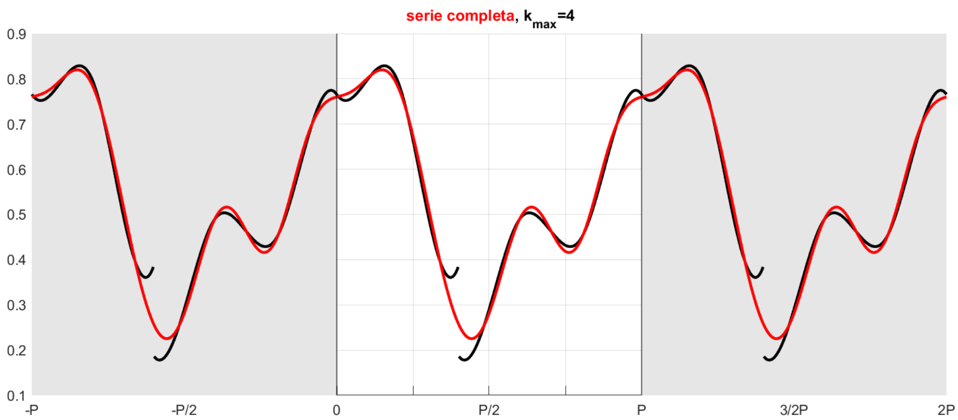
Introduciamo ora una discontinuità nella funzione f e vediamo cosa succede.

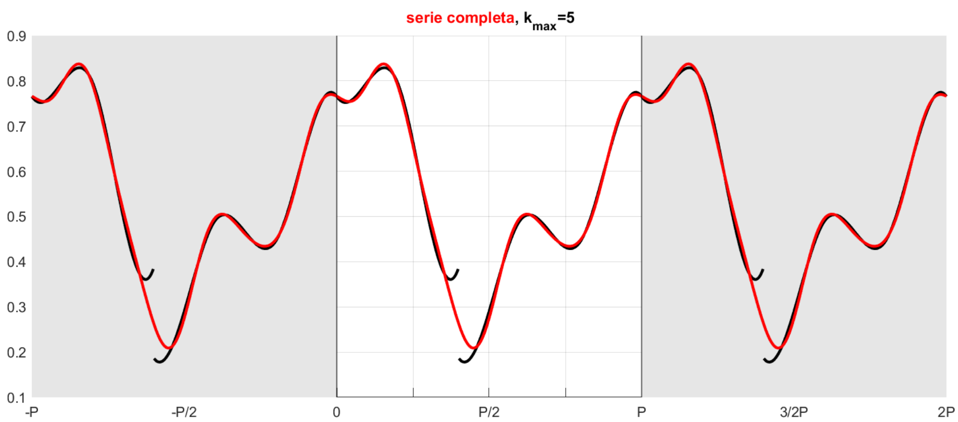


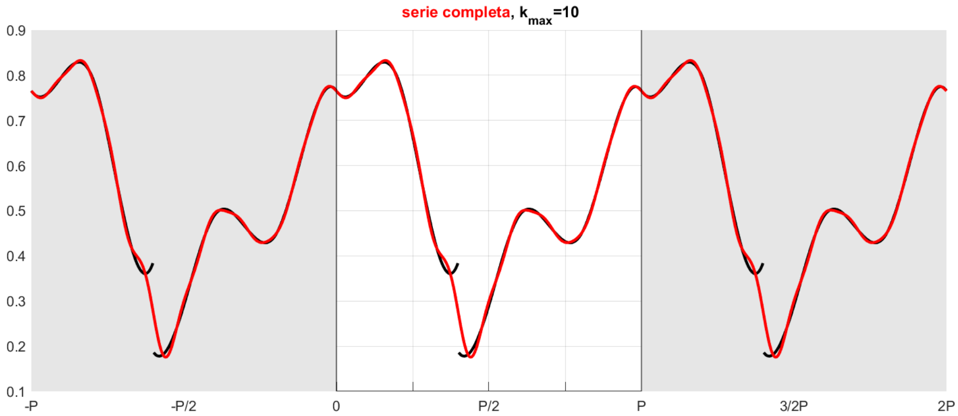


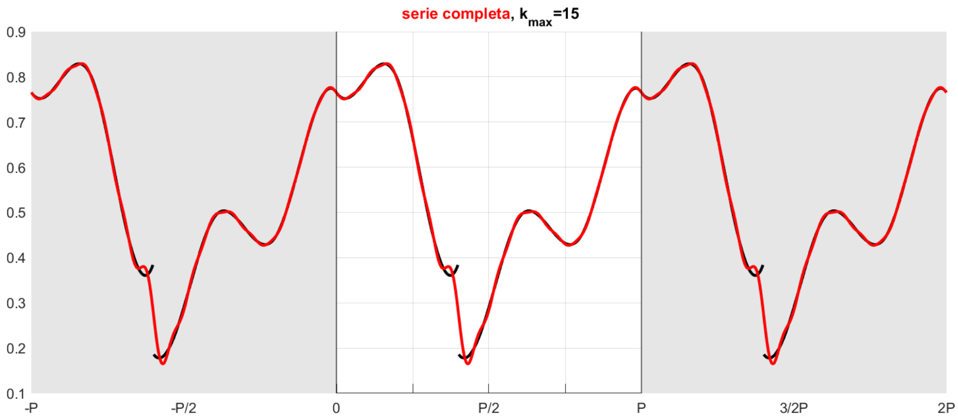

serie completa, k_max=2
0.9 0.8 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1
-P -P/2 0 P/2 P 3/2P 2P

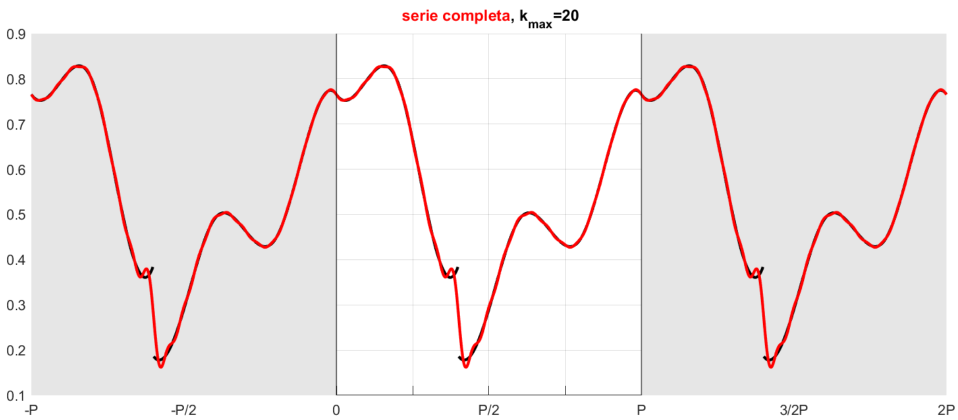

serie completa, k_max=3
0.9 0.8 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1
-P -P/2 0 P/2 P 3/2P 2P

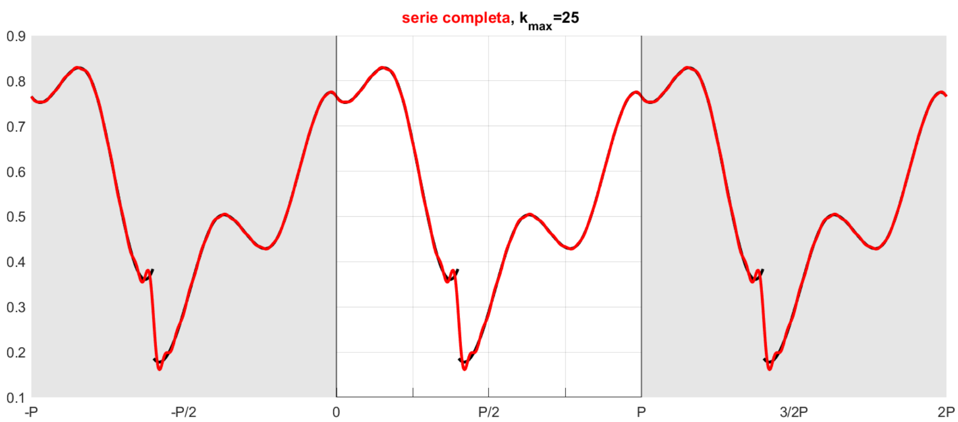

serie completa, k_max=4
0.9 0.8 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1
-P -P/2 0 P/2 P 3/2P 2P

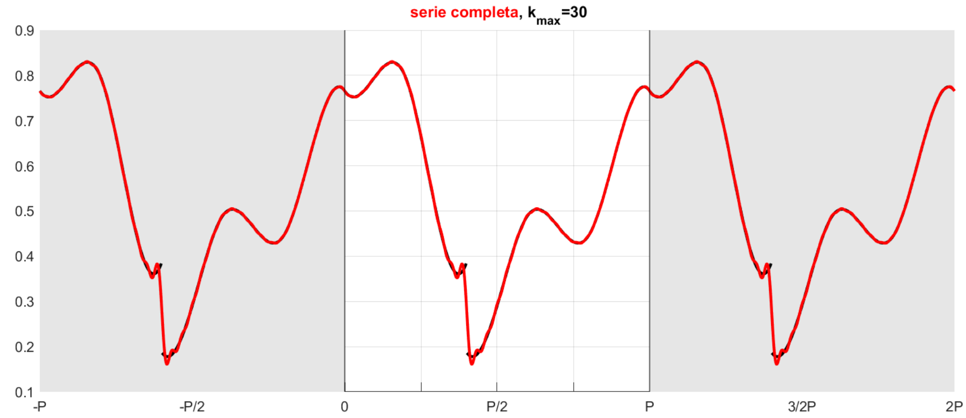

serie completa, k_max=5
0.9 0.8 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1
-P -P/2 0 P/2 P 3/2P 2P


serie completa, k_max=10
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P

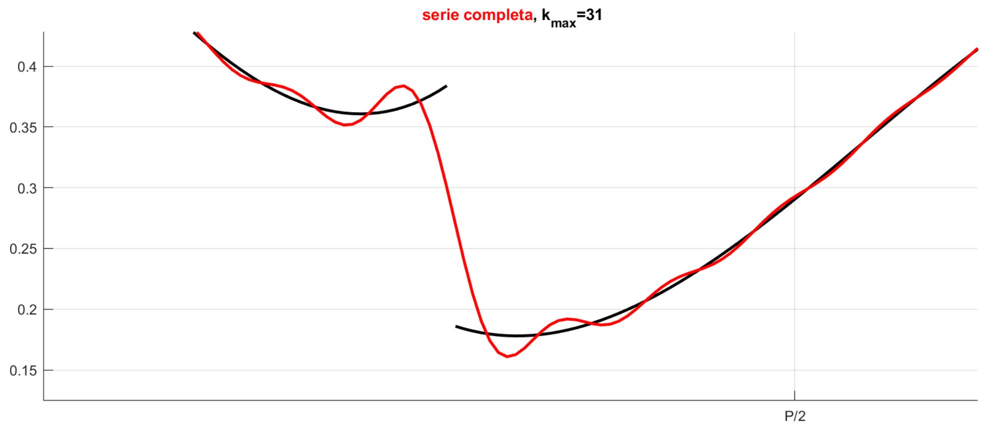

serie completa, k_max=15
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P


serie completa, k_max=20
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P

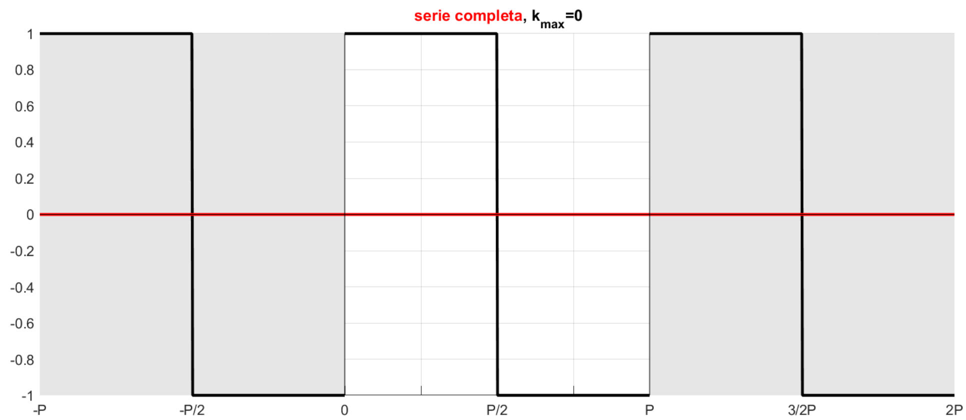

serie completa, k_max=25
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P

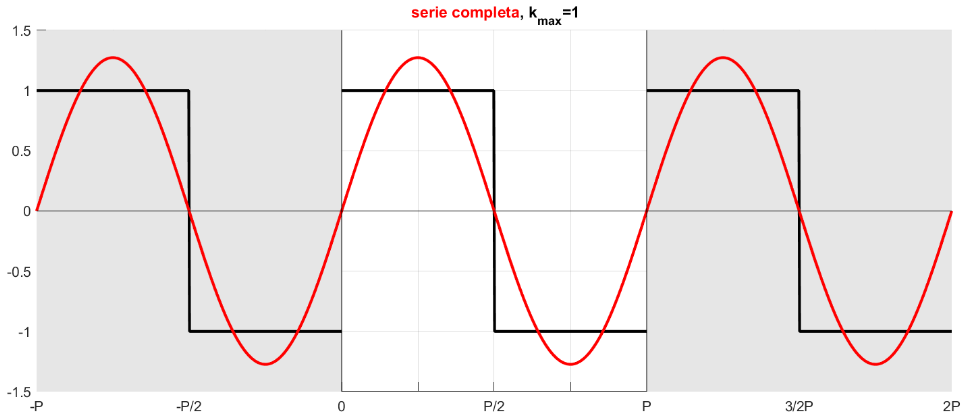


Con un ingrandimento vicino alla discontinuità si vede bene il fenomeno di Gibbs:



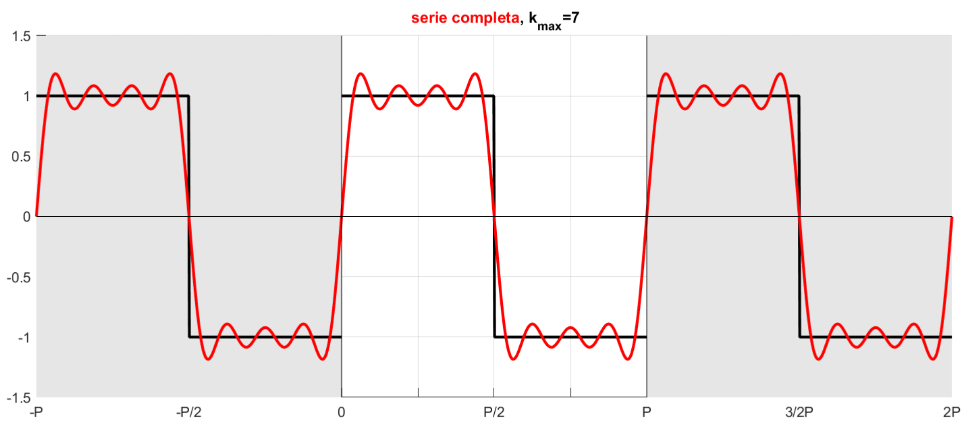
Un classico esempio è l'onda quadra che ha due discontinuità:

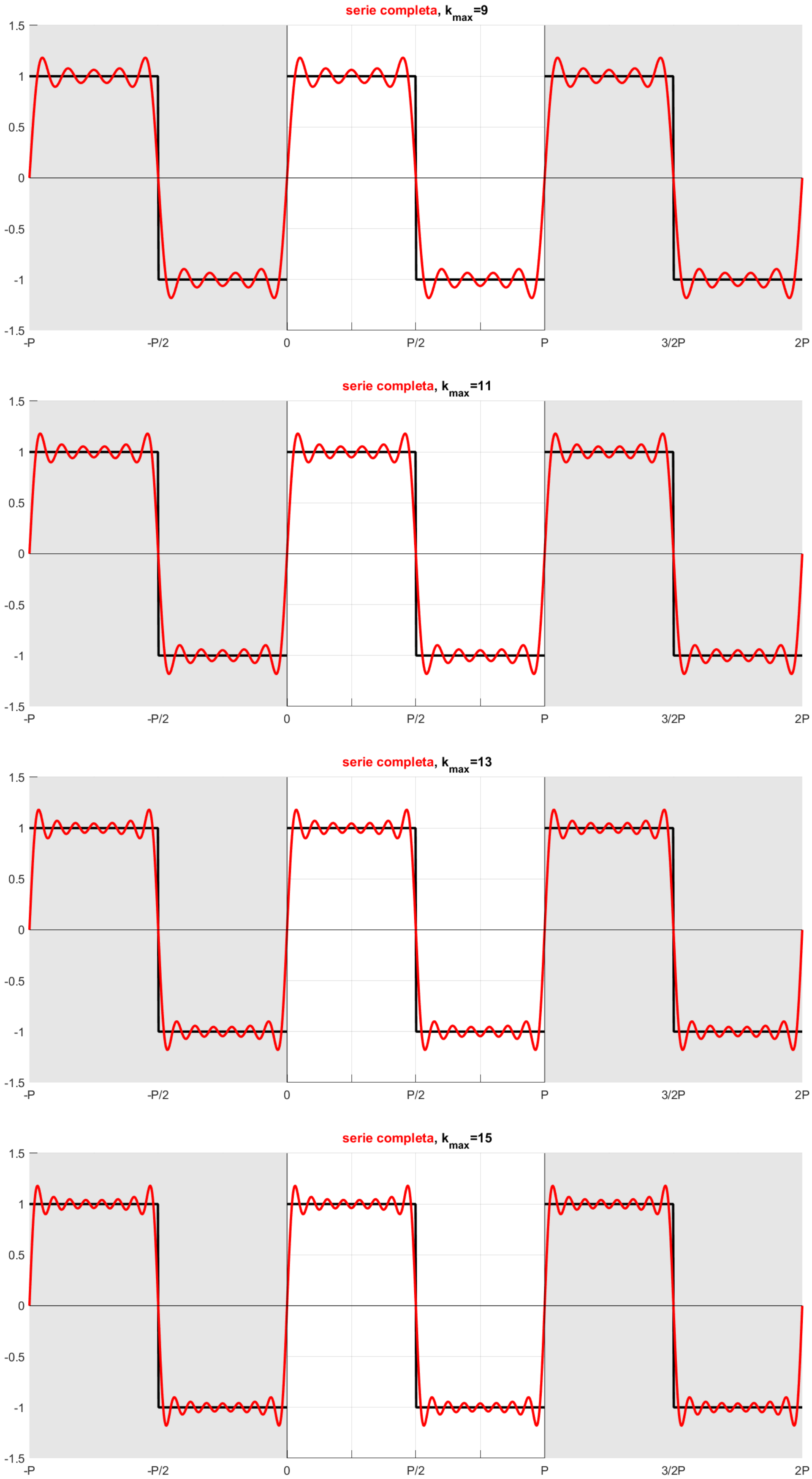



serie completa, k_{max}=1
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P


serie completa, k_{max}=3
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P


serie completa, k_{max}=5
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P

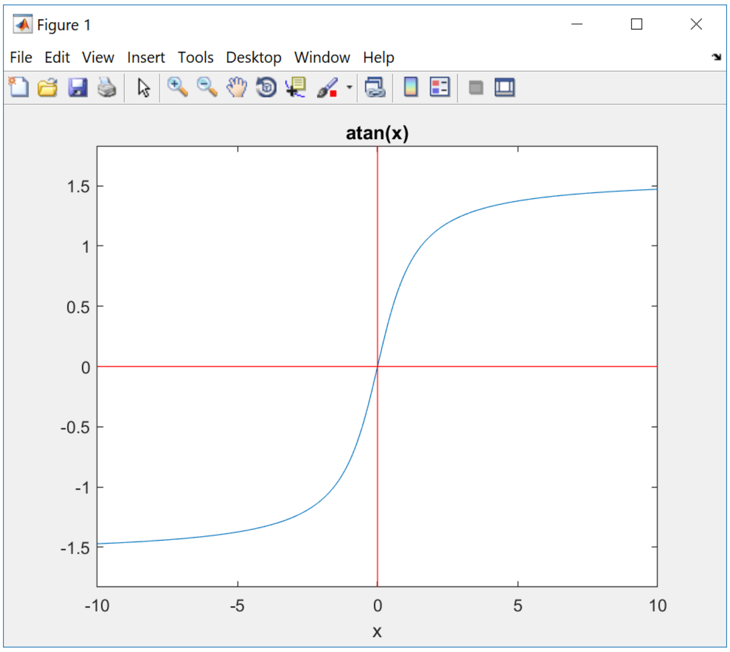

serie completa, k_{max}=7
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P


serie completa, k_max=9
serie completa, k_max=11
serie completa, k_max=13
serie completa, k_max=15
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P

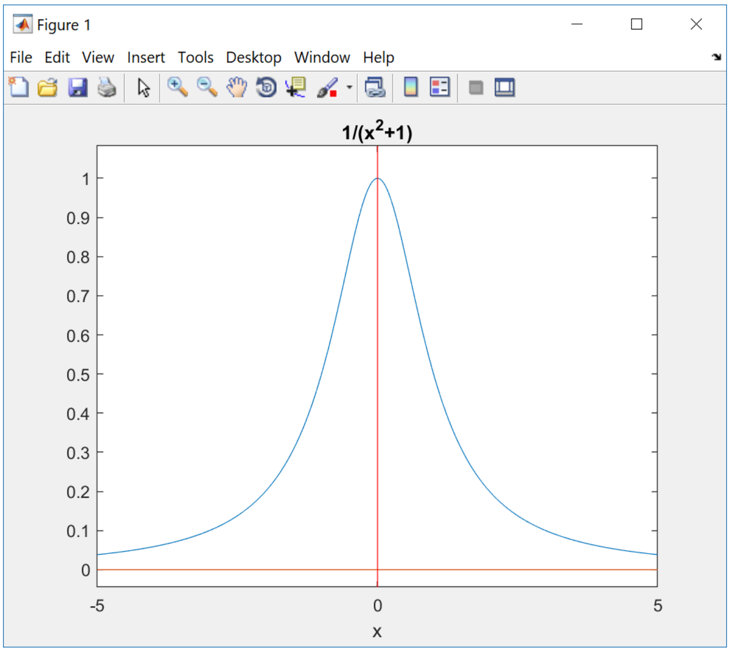
Come si vede chiaramente, il picco vicino alle discontinuità si sposta verso la discontinuità ma non diminuisce di altezza; in accordo con la teoria, è circa il 9% del salto.

1.4.2. Simmetrie della f e coefficienti di Fourier. Ricordiamo la seguente definizione:

- f *dispari* significa $f(-t) = -f(t)$, ovvero f è simmetrica rispetto all'origine:



- f *pari* significa $f(-t) = f(t)$, ovvero f è simmetrica rispetto all'asse y:



Abbiamo il seguente risultato:

- Se f è dispari, allora A_0 e i coefficienti del coseno a_k sono zero. Sappiamo infatti che possiamo integrare su un qualunque periodo, e scegliamo $[-p/2, p/2]$:

$$a_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\,\mathrm{d}t$$

e dato che il prodotto di una funzione pari (il coseno) per una funzione dispari (la f) è dispari, l'integrale su un intervallo simmetrico rispetto all'origine è zero.

- Se f è pari, allora i coefficienti del seno b_k sono zero. Sappiamo infatti che possiamo integrare su un qualunque periodo, e scegliamo $[-p/2, p/2]$:

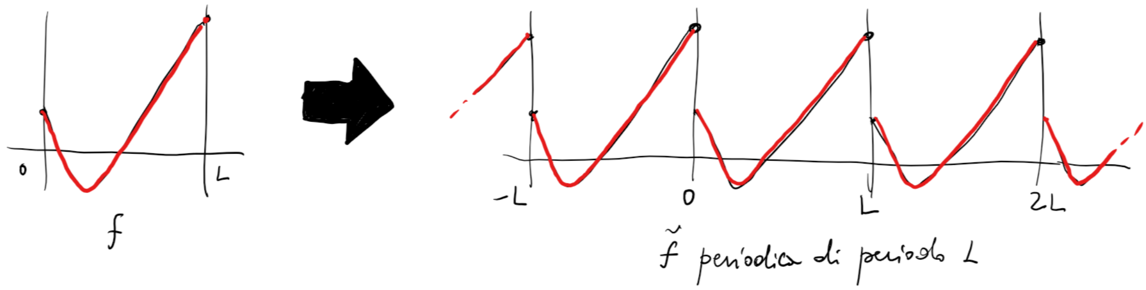
$$b_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{p}kt\right)\,\mathrm{d}t$$

e dato che il prodotto di una funzione dispari (il seno) per una funzione pari (la f) è dispari, l'integrale su un intervallo simmetrico rispetto all'origine è zero.

1.5. Serie di Fourier di funzioni non periodiche

Se f non è periodica, ma è definita semplicemente sull'intervallo $[0, L]$, prima di applicare l'analisi di Fourier dobbiamo *renderla periodica*, ovvero trovare una estensione $\widetilde{f}$ di f periodica (non necessariamente di periodo L), tale che $\widetilde{f}(t) = f(t)$ quando $t \in [0, L]$.

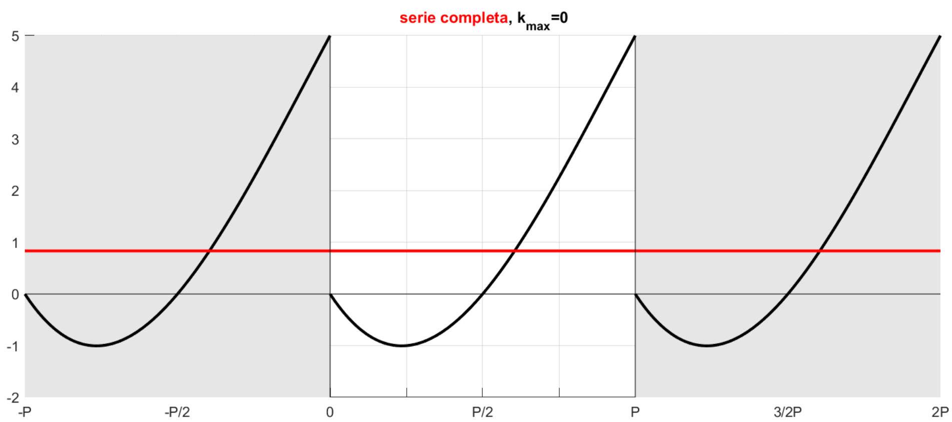
1.5.1. Periodicizzazione per ripetizione. Il modo più semplice è quello di ripeterla uguale sugli intervalli $[L, 2L]$, $[2L, 3L]$ e così via:

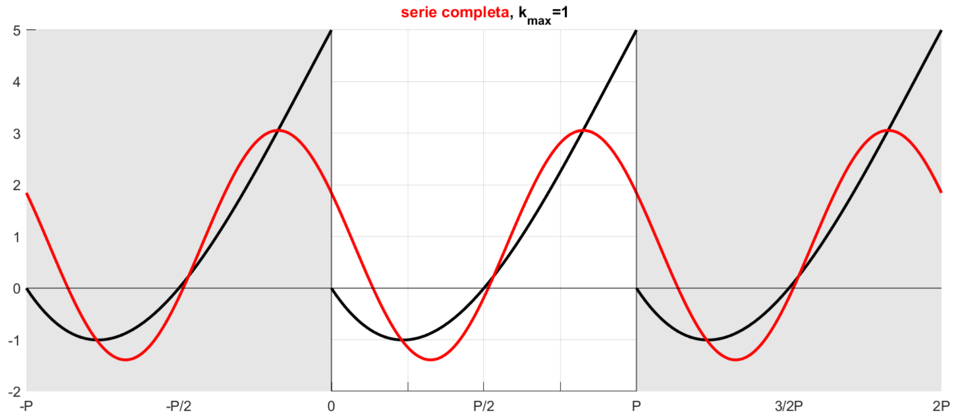


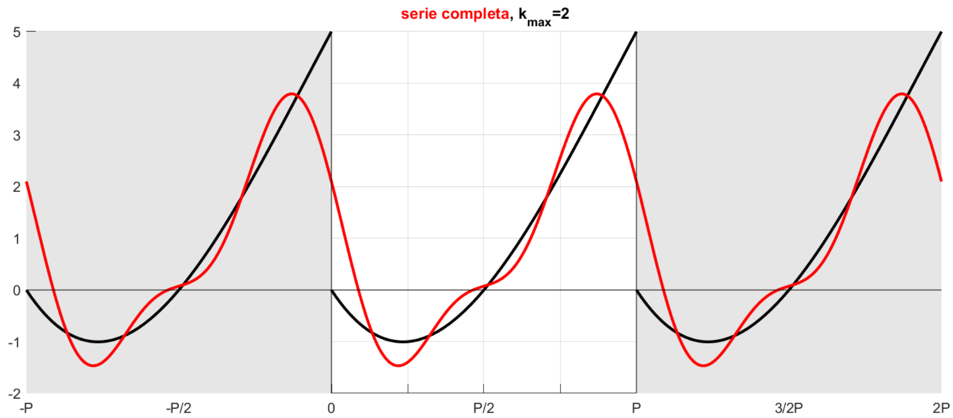
In questo modo, abbiamo ovviamente

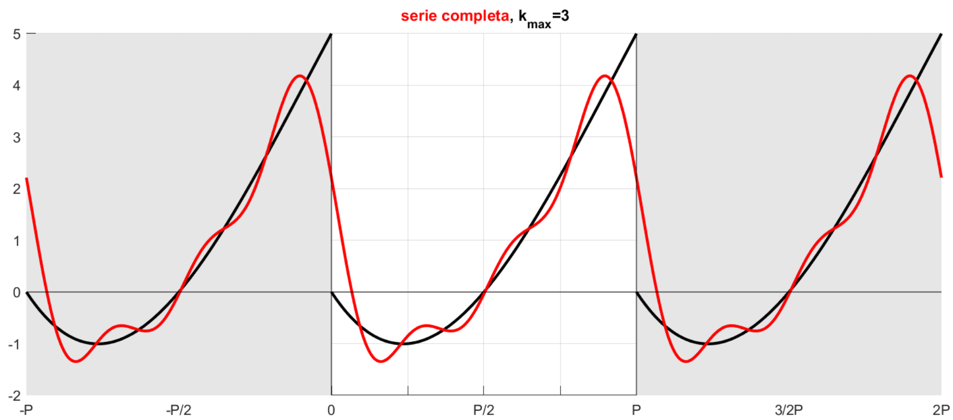
$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)\,\mathrm{d}t, \quad a_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{L}kt\right)\,\mathrm{d}t, \quad b_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{L}kt\right)\,\mathrm{d}t.$$

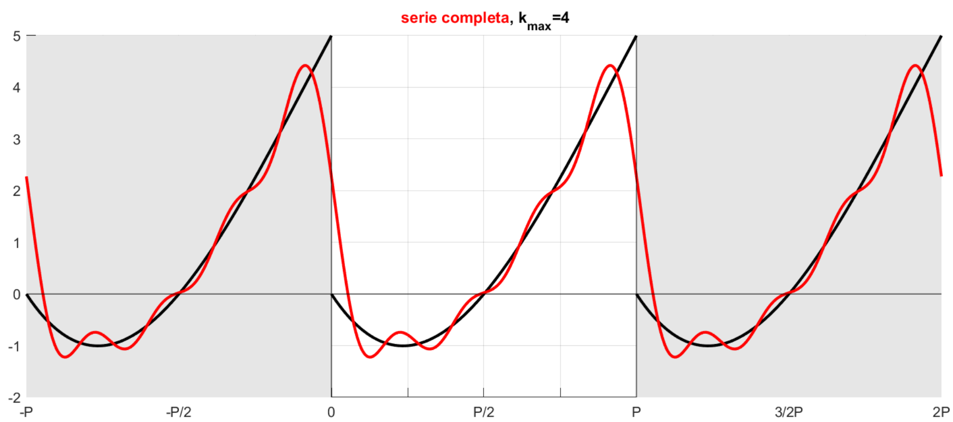
che sono le formule di prima con $P = L$. Così facendo però introduciamo una discontinuità "artificiale" in 0 e in L e questa genera delle frequenze spurie molto alte ("infinite") che rovinano l'approssimazione:

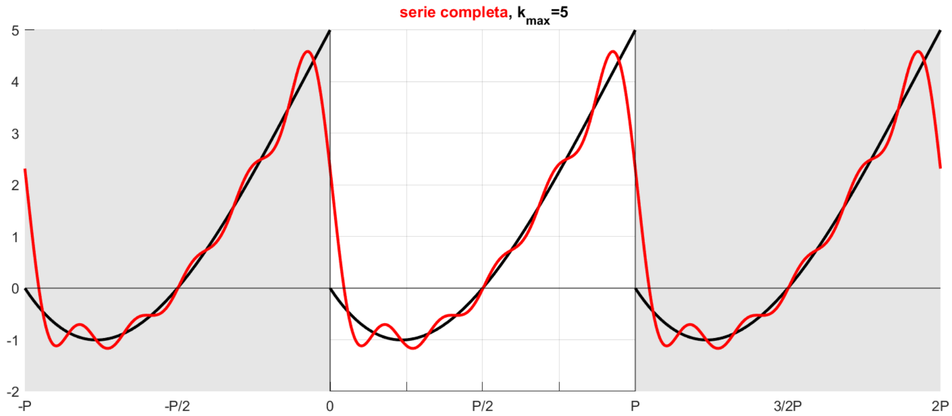


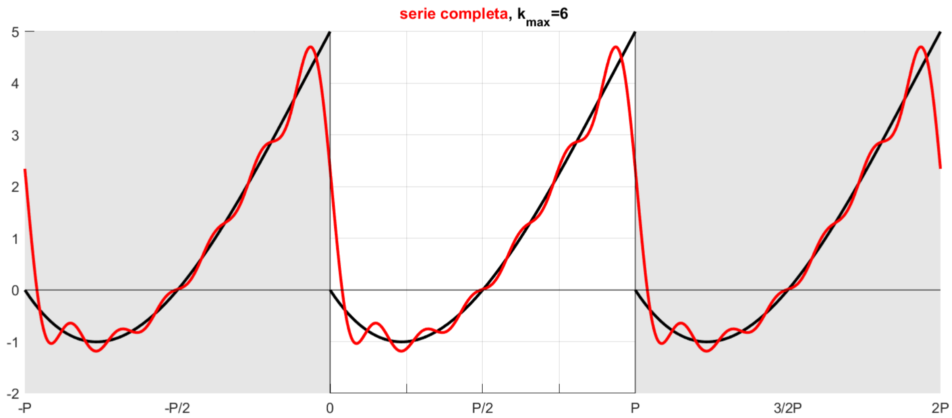

serie completa, k max =1
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P

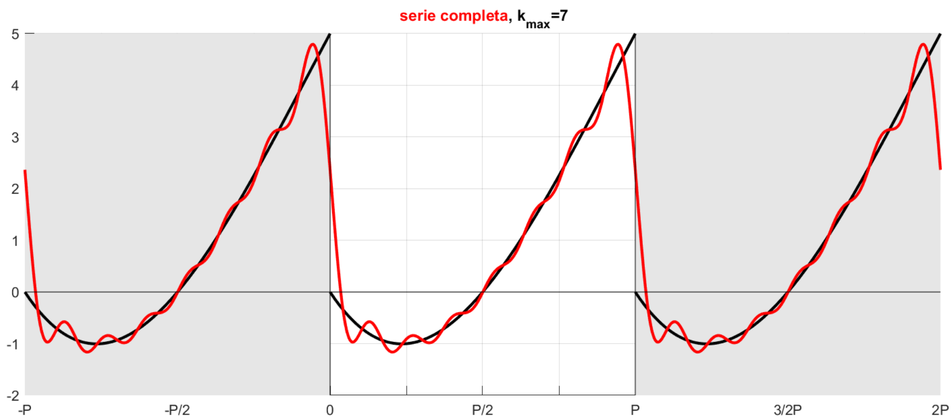

serie completa, k max =2
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P

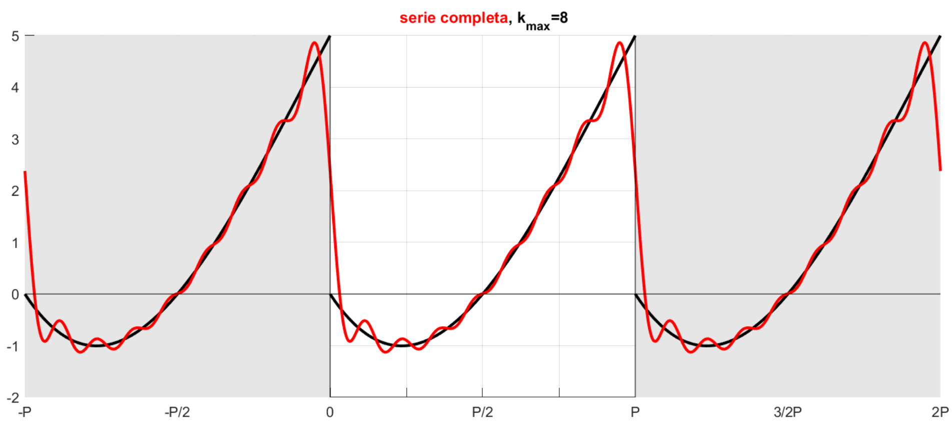

serie completa, k max =3
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P

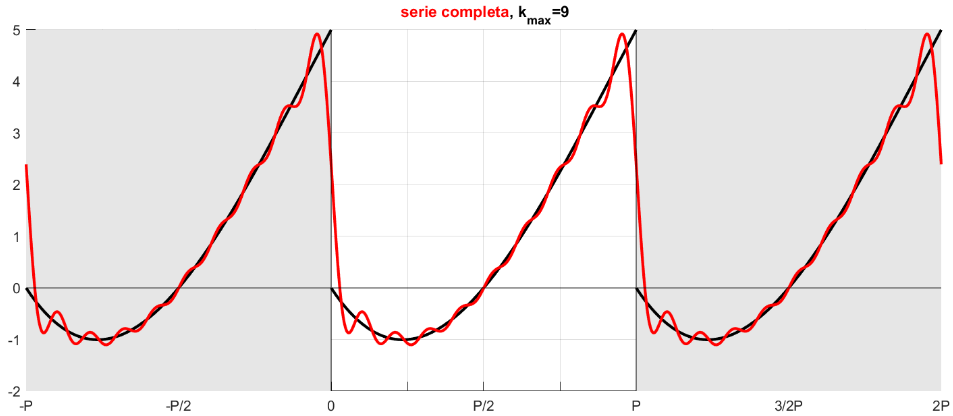

serie completa, k max =4
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P

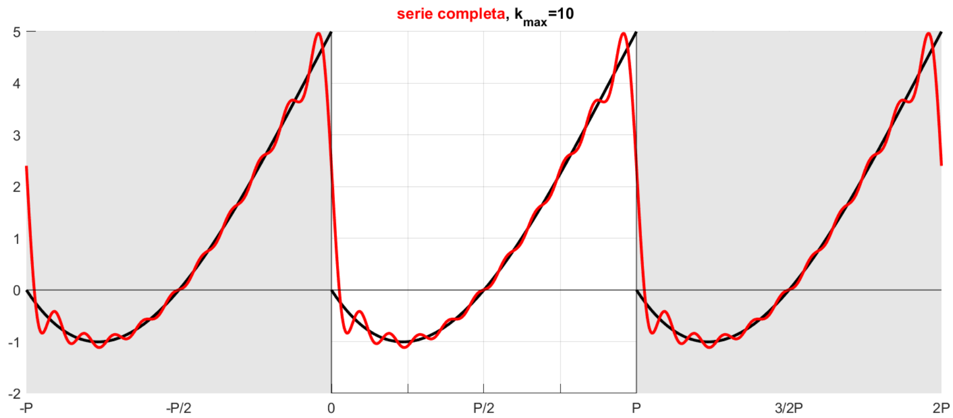

serie completa, k max =5
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P

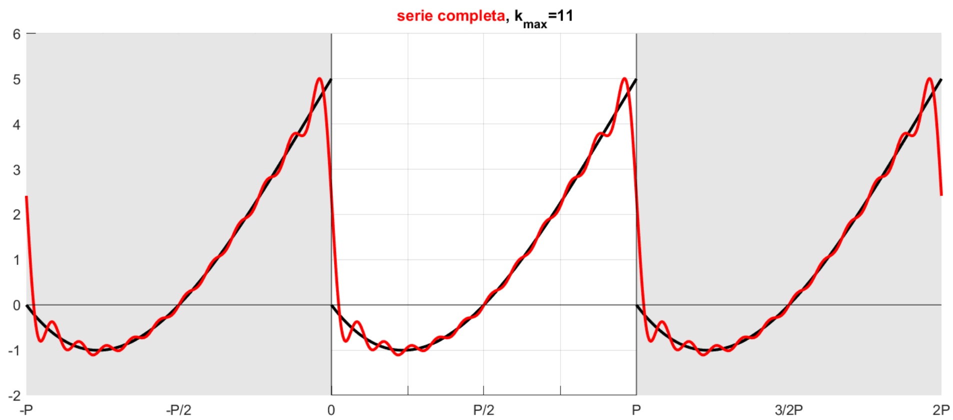

serie completa, k max =6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P

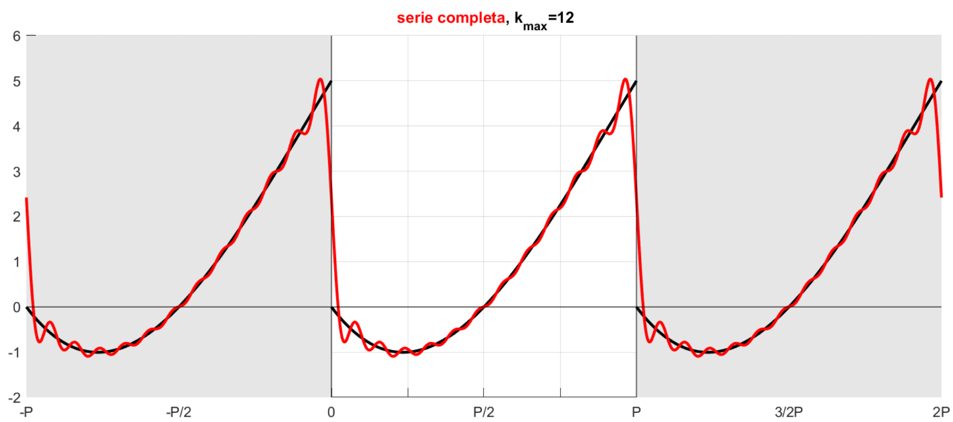

serie completa, k max =7
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P

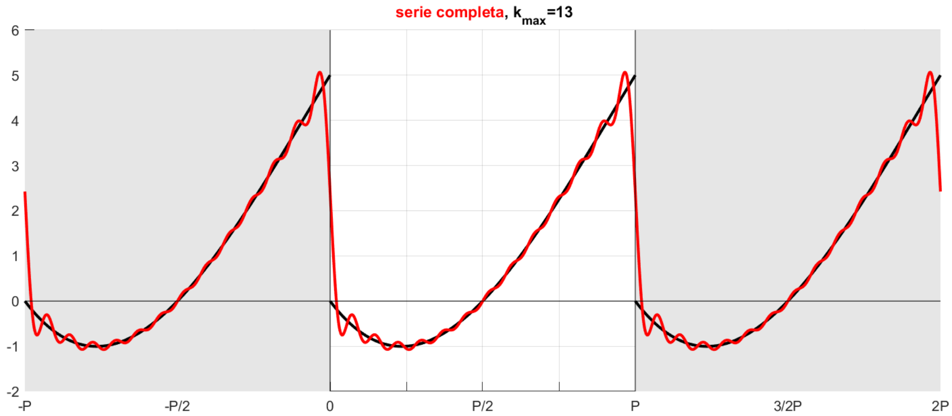

serie completa, k max =8
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P

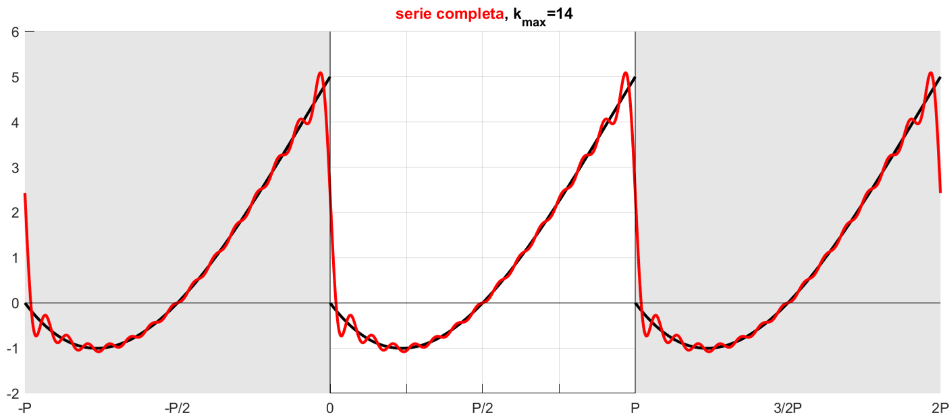

serie completa, k_{max}=9
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P

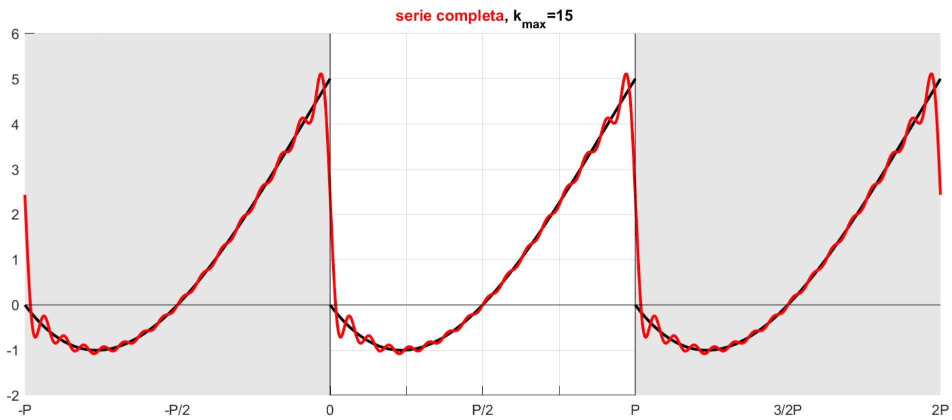

serie completa, k_{max}=10
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P

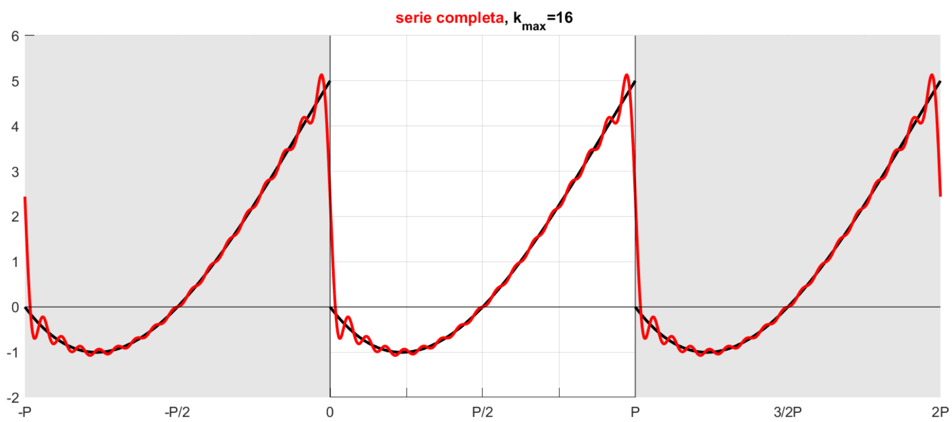

serie completa, k_{max}=11
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P

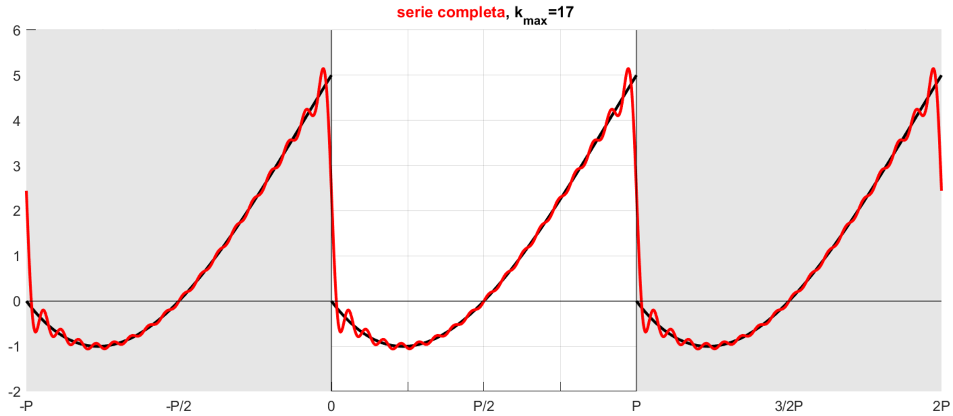

serie completa, k_{max}=12
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P

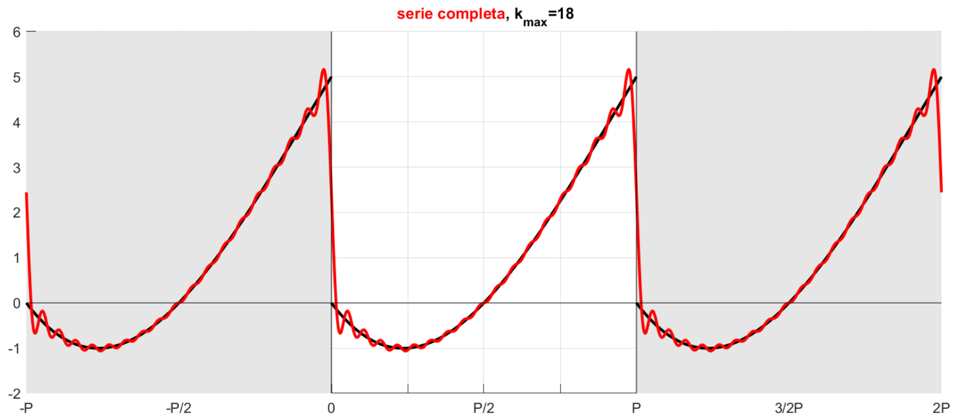

serie completa, k_{max}=13
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P

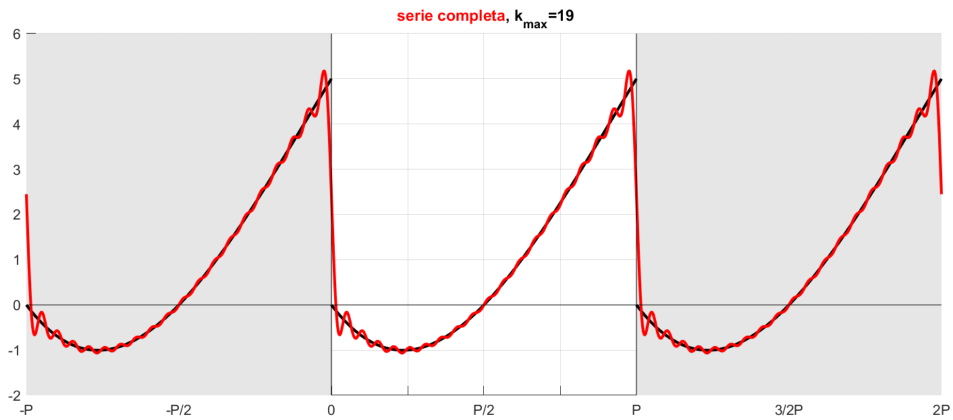

serie completa, k_{max}=14
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P

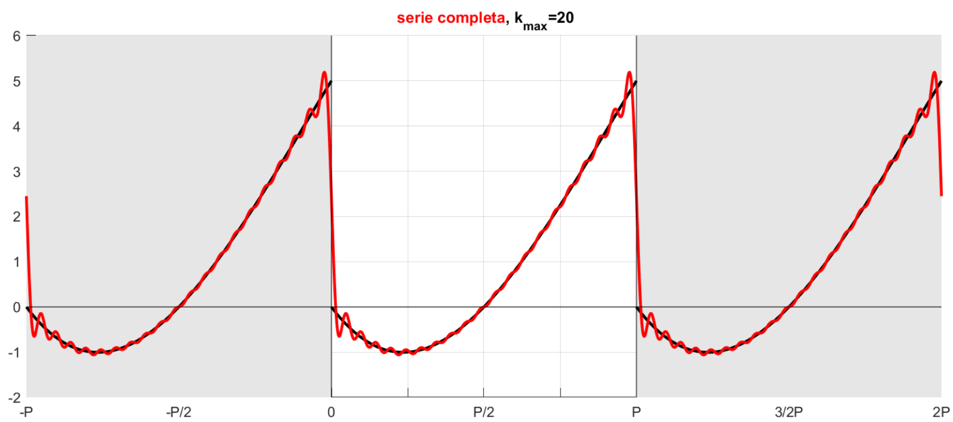

serie completa, k_{max}=15
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P


serie completa, k_{max}=16
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P


serie completa, k_max=17
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P

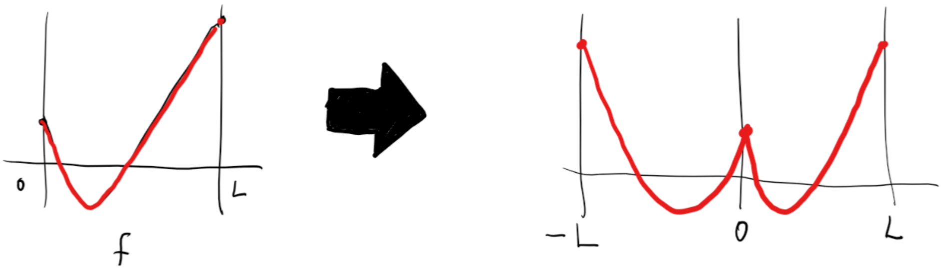

serie completa, k_max=18
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P


serie completa, k_max=19
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P

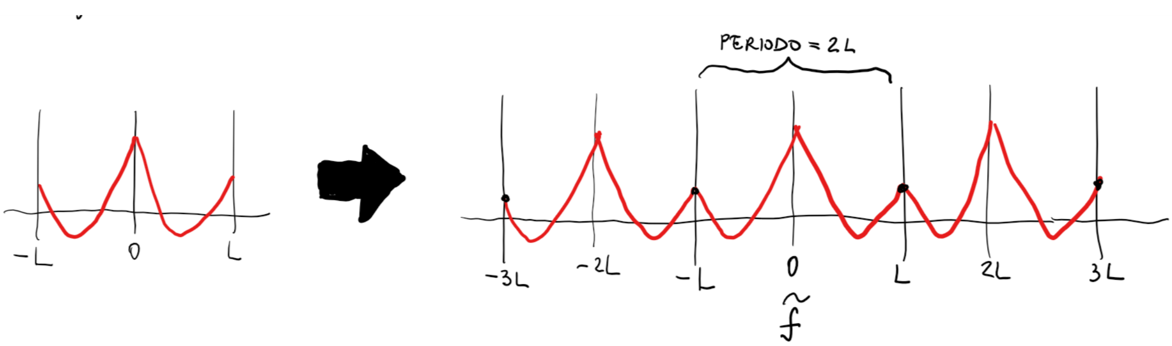

serie completa, k_max=20
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-P
-P/2
0
P/2
P
3/2P
2P

1.5.2. Periodicizzazione per riflessione e ripetizione. Un modo alternativo per periodicizzare la funzione f senza introdurre discontinuità "artificiali" è quello di eseguire due operazioni:

(1) riflettere rispetto all'asse y la funzione in $[-L, 0]$ ottenendo una funzione definita su $[-L, L]$;



(2) ripetere la funzione così ottenuta sugli intervalli $[-3L, -2L]$, $[L, 3L]$, $[3L, 5L]$ ottenendo una funzione di periodo $2L$:



In questo modo, la funzione $\widetilde{f}$ ottenuta non ha discontinuità aggiuntive anche se nei punti $\ldots, -2L, -L, 0, L, 2L, \ldots$ in generale non abbiamo derivabilità. La funzione $\widetilde{f}$ ha periodo $2L$ e quindi i suoi coefficienti di Fourier sono dati da:

$$A_0 = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} \widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$a_k = \frac{2}{2L} \int_0^{2L} \widetilde{f}(t) \cos\left(\frac{2\pi}{2L} kt\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{L} \int_0^{2L} \widetilde{f}(t) \cos\left(\frac{\pi}{L} kt\right)\,\mathrm{d}t,$$

$$b_k = \frac{2}{2L} \int_0^{2L} \widetilde{f}(t) \sin\left(\frac{2\pi}{2L} kt\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{L} \int_0^{2L} \widetilde{f}(t) \sin\left(\frac{\pi}{L} kt\right)\,\mathrm{d}t.$$

Però la funzione $\widetilde{f}$ è pari e quindi $b_k = 0$. Inoltre:

$$A_0 = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} \widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} \widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2L} 2 \int_0^{L} \widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{L} \int_0^{L} f(t)\,\mathrm{d}t$$

e

$$\begin{aligned} a_k = \frac{2}{2L} \int_0^{2L} \widetilde{f}(t) \cos\left(\frac{\pi}{L} kt\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \widetilde{f}(t) \cos\left(\frac{\pi}{L} kt\right)\,\mathrm{d}t = \\ = \frac{1}{L} 2 \int_0^{L} \widetilde{f}(t) \cos\left(\frac{\pi}{L} kt\right)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{L} \int_0^{L} f(t) \cos\left(\frac{\pi}{L} kt\right)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

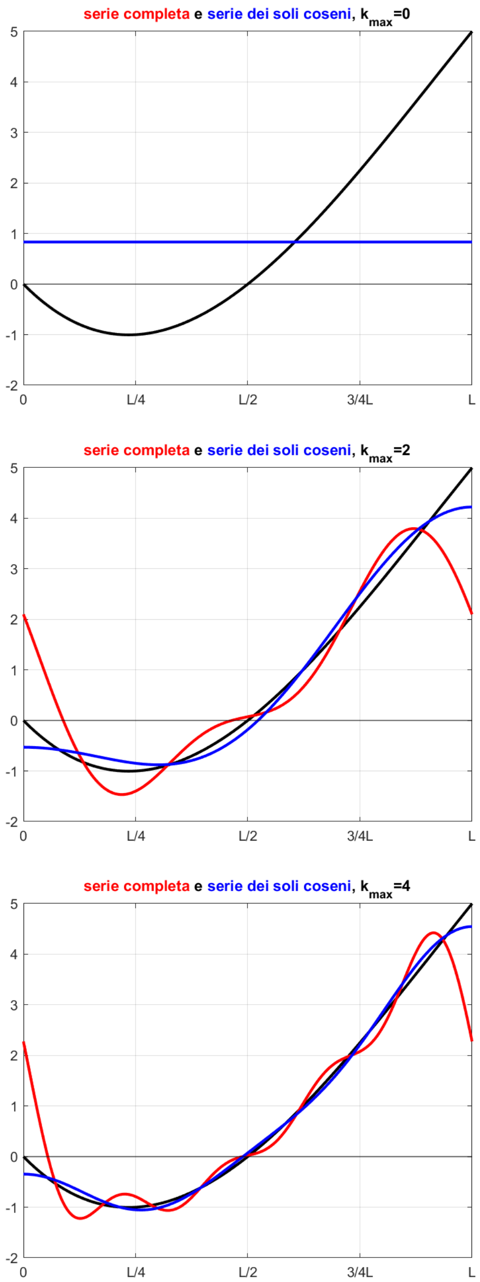
Lo sviluppo di Fourier risultante è quindi costituito dai soli coseni:

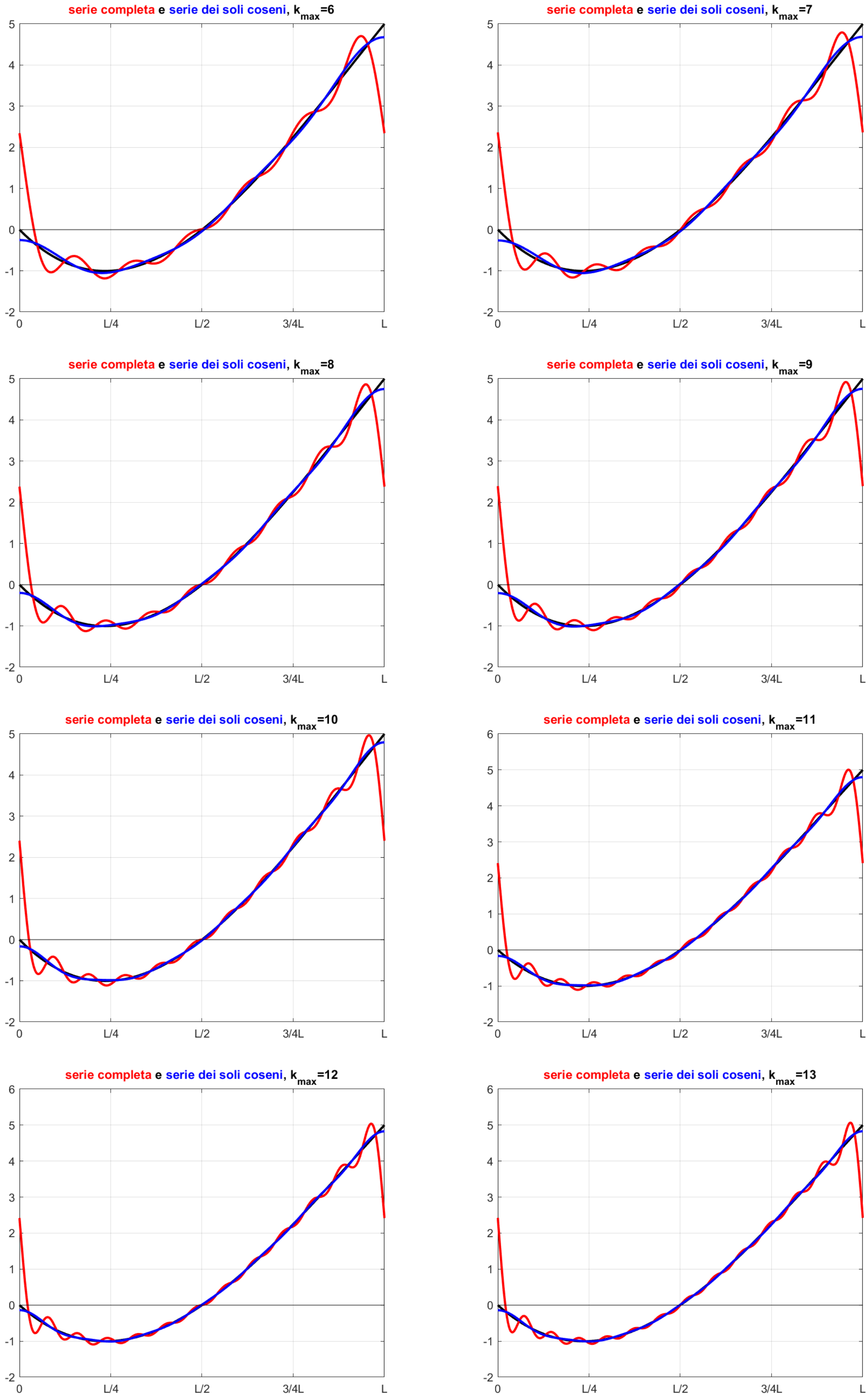
$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{\pi}{L} kt\right)$$

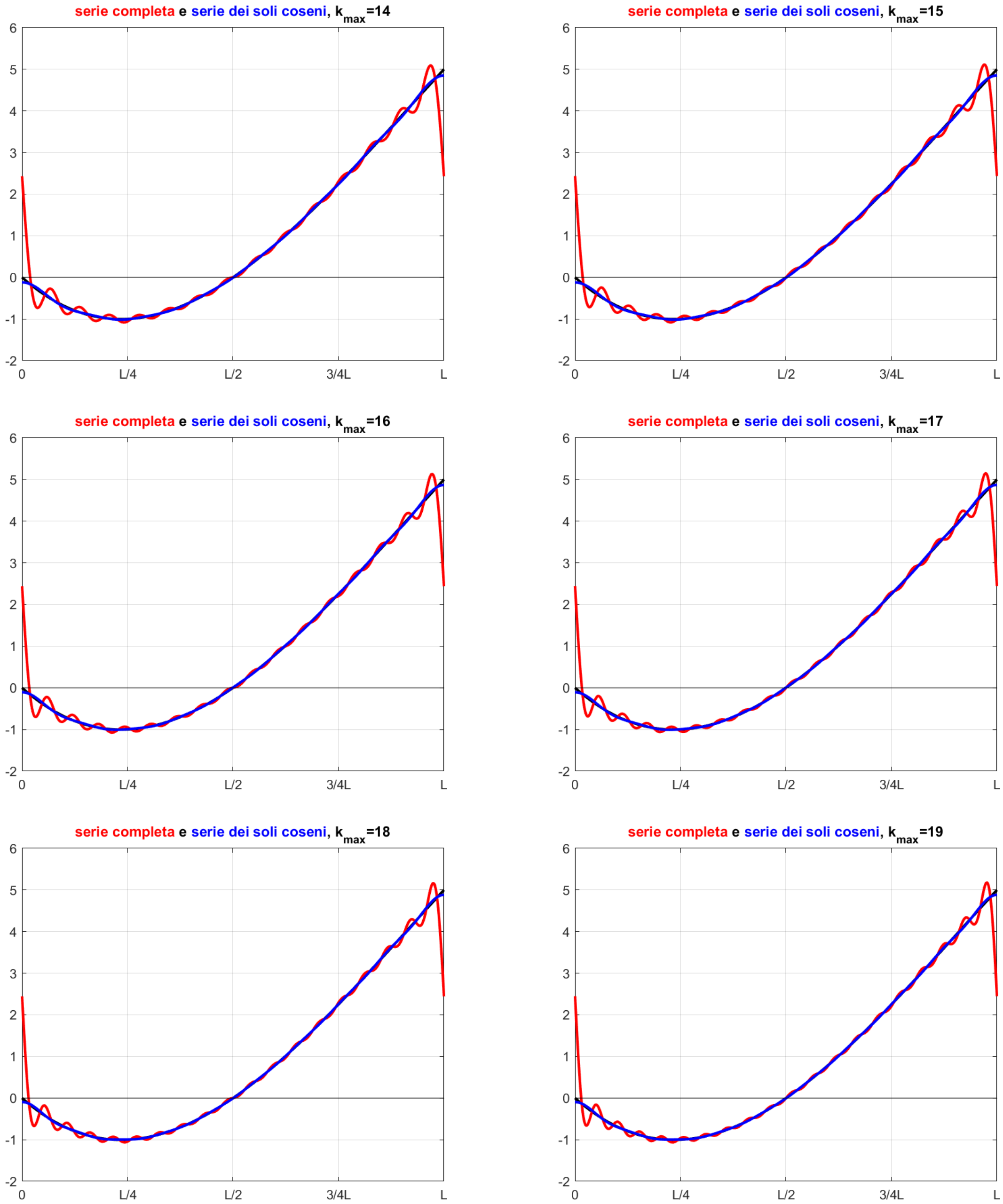
con

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)\,\mathrm{d}t, \quad a_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\left(\frac{\pi}{L}kt\right)\,\mathrm{d}t.$$

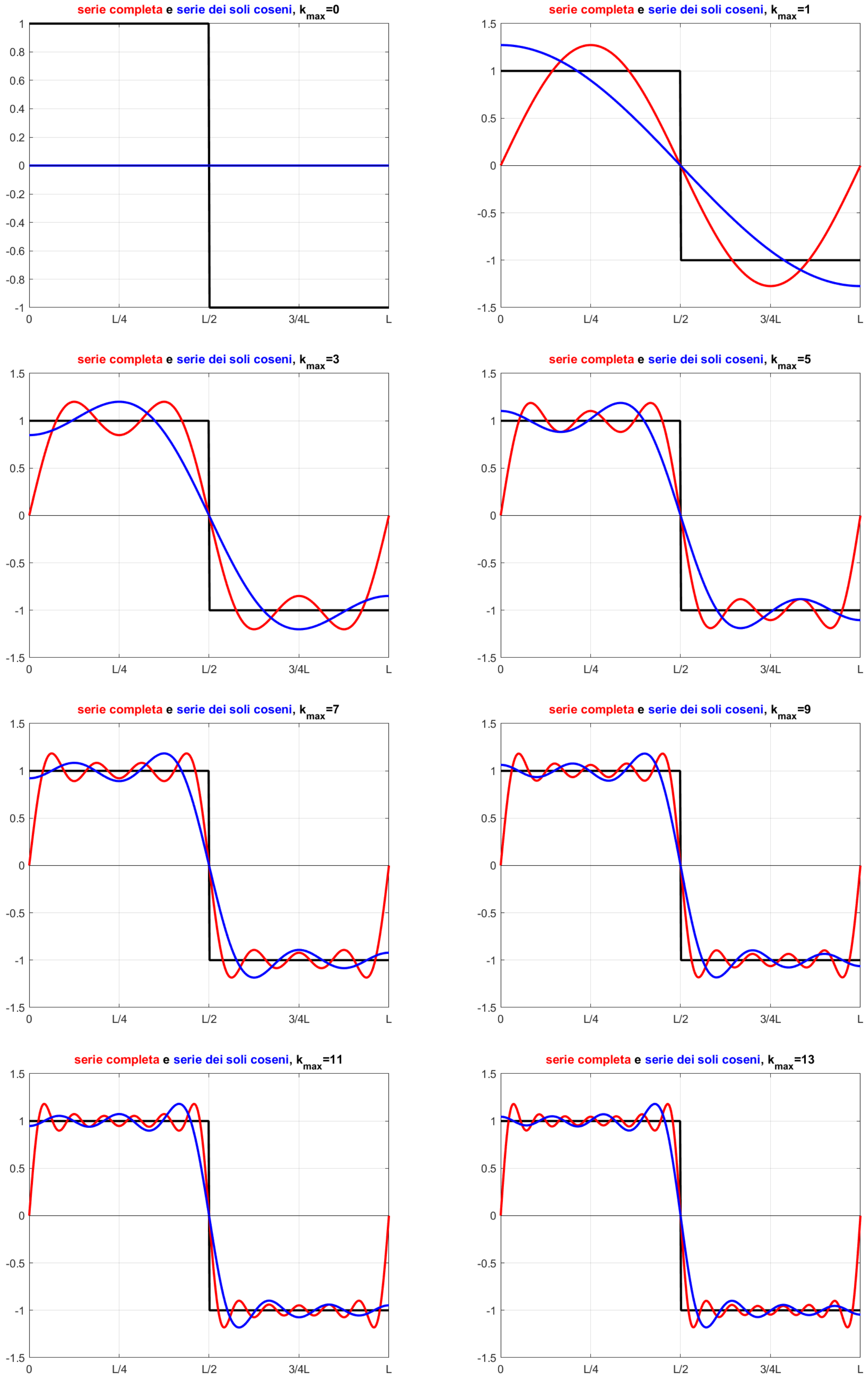
Facciamo lo stesso esempio di prima mostrando la serie completa (seni e coseni) sempre in rosso e quella dei soli coseni in blu. Questa volta mostriamo l'intervallo $[0, L]$:

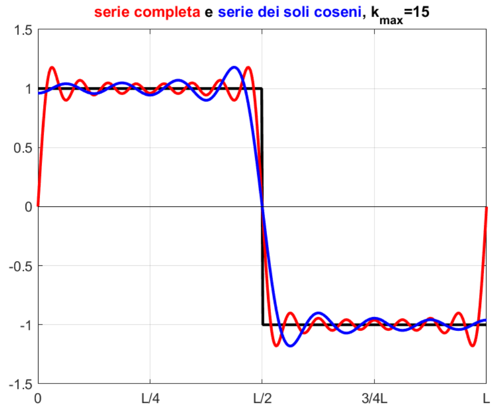


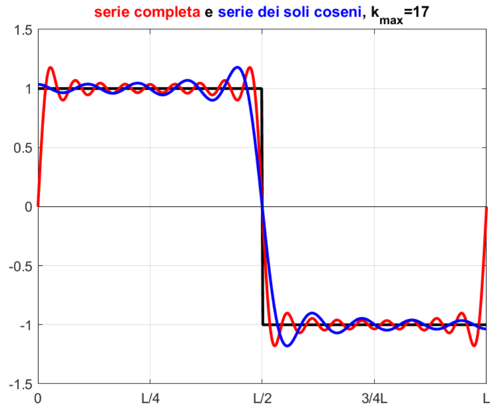

serie completa e serie dei soli coseni, k max =6
serie completa e serie dei soli coseni, k max =7
serie completa e serie dei soli coseni, k max =8
serie completa e serie dei soli coseni, k max =9
serie completa e serie dei soli coseni, k max =10
serie completa e serie dei soli coseni, k max =11
serie completa e serie dei soli coseni, k max =12
serie completa e serie dei soli coseni, k max =13
0
L/4
L/2
3/4L
L



Vediamo molto chiaramente che la serie dei soli coseni non "vede" nessuna discontinuità in 0 ed L. Ovviamente se la f ha una discontinuità interna all'intervallo $[0, L]$ questa si fa sentire anche per la serie dei soli coseni. Vediamo cosa succede con l'onda quadra che ha una discontinuità interna in $L/2$:


serie completa e serie dei soli coseni, k max =0
serie completa e serie dei soli coseni, k max =1
serie completa e serie dei soli coseni, k max =3
serie completa e serie dei soli coseni, k max =5
serie completa e serie dei soli coseni, k max =7
serie completa e serie dei soli coseni, k max =9
serie completa e serie dei soli coseni, k max =11
serie completa e serie dei soli coseni, k max =13
0
L/4
L/2
3/4L
L

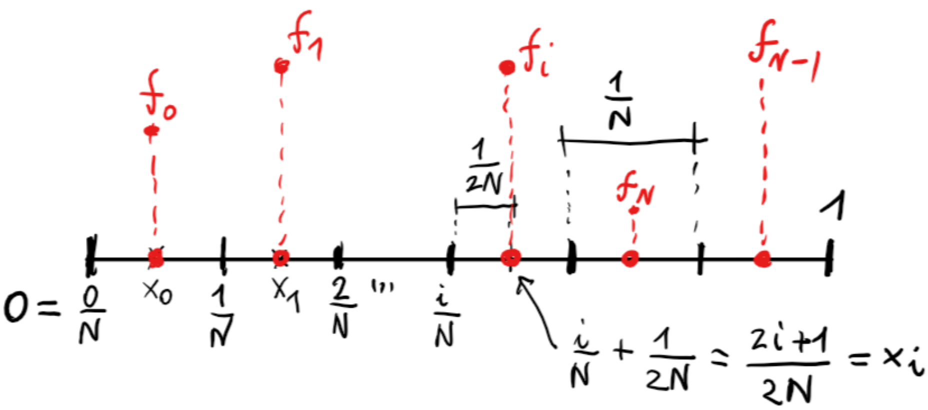




La discontinuità in $L/2$ c'è ma almeno non abbiamo introdotto discontinuità aggiuntive ai bordi 0 ed L.

1.6. Caso discreto

Ritorniamo ora indietro e supponiamo di avere non più una funzione ma un array $\boldsymbol{f} = (f_0, \ldots, f_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$. Ci costruiamo delle ascisse $t_i \in [0,1]$ rinormalizzando l'indice i, ovvero suddividendo l'intervallo $[0,1]$ in N parti uguali di ampiezza $\dfrac{1}{N}$ e prendendo il punto medio di ciascun intervallino:



$$t_i = \frac{\dfrac{i}{N} + \dfrac{i+1}{N}}{2} = \frac{2i+1}{2N}, \quad i = 0, \ldots, N-1.$$

Pensiamo a f_i come il valore del nostro array in t_i.

1.6.1. Base. Definiamo adesso una base $\boldsymbol{w} = \{\boldsymbol{w}_0, \ldots, \boldsymbol{w}_{N-1}\} \in \mathbb{R}^N$ prendendo il campionamento delle funzioni $\cos\left(\dfrac{\pi}{L}kt\right)$ nei punti t_i, con $L = 1$:

$$\text{componente } i\text{-esima di } \boldsymbol{w}_k = (\boldsymbol{w}_k)_i = \cos(\pi k t_i) = \cos\left(\pi k \frac{2i+1}{2N}\right).$$

Quindi $\boldsymbol{w}_0$ è il vettore "costante" fatto da tutti 1 ("frequenza zero"):

$$\boldsymbol{w}_0 = (\cos 0, \cos 0, \ldots, \cos 0) = (1, 1, \ldots, 1)$$

e invece i $\boldsymbol{w}_k$ man mano che la frequenza k cresce "oscillano" sempre di più. (figura).

1.6.2. Ortogonalità nel caso discreto. Il risultato fondamentale è che i $\boldsymbol{w}_k$ sono ortogonali nel senso del prodotto scalare euclideo:

$$\int_0^1 \cos(\pi k t)\cos(\pi \ell t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{cioè} \quad \boldsymbol{w}_k \cdot \boldsymbol{w}_\ell = \sum_{i=0}^{N-1} (\boldsymbol{w}_k)_i (\boldsymbol{w}_\ell)_i = 0$$

che in definitiva significa semplicemente che per ogni N vale la seguente identità trigonometrica:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \cos\left(\pi k \frac{2i+1}{2N}\right)\cos\left(\pi \ell \frac{2i+1}{2N}\right) = 0 \quad \text{per ogni } k,\ell = 0,\dots,N-1, \quad k \neq \ell.$$

Possiamo verificarla con questo script MATLAB:

```
clear all
close all
%
% choose N
%
N = 100000;
%
% choose k and l between 0 and N-1
%
k = 59198;
l = 77245;
%
% build wk and wl
%
wk = zeros(N,1);
wl = zeros(N,1);
%
for i=0:N-1
    %
    ti = (2*i+1)/(2*N);
    %
    wk(i+1) = cos(pi*k*ti);
    %
    wl(i+1) = cos(pi*l*ti);
    %
end
%
% prodotto scalare tra wk e wl
%
dot(wk,wl)
%
```

Dimostrazione. La dimostrazione di questa identità è un po' complicata. Utilizzando la seconda formula di Werner dimostrata sopra, possiamo scrivere

$$\sum_{i=0}^{N-1} \cos\left(\pi k \frac{2i+1}{2N}\right)\cos\left(\pi \ell \frac{2i+1}{2N}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\left[\cos\left(\pi(k+\ell)\frac{2i+1}{2N}\right) + \cos\left(\pi(k-\ell)\frac{2i+1}{2N}\right)\right]$$

e basta quindi dimostrare che

$$\sum_{i=0}^{N-1} \cos\left(\pi m \frac{2i+1}{2N}\right) = 0 \quad \text{per ogni intero } m \neq 0 \text{ compreso tra } -(N-1) \text{ e } +2(N-1).$$

Sviluppando il coseno abbiamo:

$$\cos\left(\pi m \frac{2i+1}{2N}\right) = \cos\left(\pi m \frac{2i+1}{2N}\right) = \cos\left(\frac{\pi m i}{N} + \frac{\pi m}{2N}\right) = \\ = \cos\left(\frac{\pi m i}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi m}{2N}\right) - \sin\left(\frac{\pi m i}{N}\right)\sin\left(\frac{\pi m}{2N}\right).$$

Ora utilizzamo la formula di De Moivre che dice

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^N = \cos N\theta + \mathrm{i}\sin N\theta$$

e quindi

$$\cos\left(\frac{\pi m i}{N}\right) = \Re\left[\cos\left(\frac{\pi m i}{N}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi m i}{N}\right)\right] = \Re\left[\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)\right]^i$$

$$\sin\left(\frac{\pi m i}{N}\right) = \Im\left[\cos\left(\frac{\pi m i}{N}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi m i}{N}\right)\right] = \Im\left[\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)\right]^i.$$

Sostituendo

$$\sum_{i=0}^{N-1} \cos\left(\pi m \frac{2i+1}{2N}\right) = \sum_{i=0}^{N-1}\left\{\cos\left(\frac{\pi m i}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi m}{2N}\right) - \sin\left(\frac{\pi m i}{N}\right)\sin\left(\frac{\pi m}{2N}\right)\right\} = \\ = \sum_{i=0}^{N-1}\left\{\Re\left[\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)\right]^i \cos\left(\frac{\pi m}{2N}\right) - \Im\left[\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)\right]^i \sin\left(\frac{\pi m}{2N}\right)\right\} = \\ \Re\left\{\sum_{i=0}^{N-1}\left[\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)\right]^i\right\}\cos\left(\frac{\pi m}{2N}\right) - \Im\left\{\sum_{i=0}^{N-1}\left[\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)\right]^i\right\}\sin\left(\frac{\pi m}{2N}\right).$$

Usiamo adesso la formula per la serie geometrica:

$$S = \sum_{i=0}^{N-1} s^i = 1 + s + s^2 + \ldots + s^{N-1}$$

da cui

$$sS = s + s^2 + \ldots + s^N = S - 1 + s^N$$

e quindi

$$S = \frac{s^N - 1}{s - 1} \quad \text{se } s \neq 1.$$

Pertanto, visto che $-2N < m < +2N$ e $m \neq 0$ l'argomento non è mai 1 e quindi

$$\sum_{i=0}^{N-1}\left[\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)\right]^i = \frac{\left[\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)\right]^N-1}{\left[\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)\right]-1} =$$

$$= \frac{[\cos(\pi m)+\mathrm{i}\sin(\pi m)]-1}{\left[\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)\right]-1} = \frac{\cos(\pi m)-1}{\left[\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)\right]-1} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } m \text{ è pari } (\cos(\pi m)=1) \\ \dfrac{-2}{\left[\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)\right]-1} & \text{se } m \text{ è dispari } (\cos(\pi m)=-1) \end{cases}$$

Rimane quindi solo da considerare il caso m dispari (e poi il caso $m = 0$). Abbiamo quindi

$$\sum_{i=0}^{N-1}\left[\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)\right]^i =$$

$$= \frac{-2}{\left[\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)\right]-1} = \frac{2}{\left[1-\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)\right]-\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)} =$$

$$2\,\frac{\left[1-\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)\right]+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)}{\left[1-\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)\right]^2+\left[\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)\right]^2} = 2\,\frac{\left[1-\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)\right]+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)}{2-2\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)} =$$

$$= \frac{\left[1-\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)\right]+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)} = 1+\mathrm{i}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)}\right].$$

Quindi se m è dispari

$$\Re\left\{\sum_{i=0}^{N-1}\left[\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)\right]^i\right\} = 1$$

e

$$\Im\left\{\sum_{i=0}^{N-1}\left[\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)\right]^i\right\} = \frac{\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)}$$

e in definitiva sostituendo

$$\sum_{i=0}^{N-1} \cos\left(\pi m \frac{2i+1}{2N}\right) = 1 \times \cos\left(\frac{\pi m}{2N}\right) - \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)}\right] \sin\left(\frac{\pi m}{2N}\right) =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi m}{2N}\right) - \left[\cos\left(\frac{\pi m}{2N}\right)\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right) + \sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)\sin\left(\frac{\pi m}{2N}\right)\right]}{1-\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi m}{2N}\right) - \left[\cos\left(\frac{\pi m}{2N} - \frac{\pi m}{N}\right)\right]}{1-\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi m}{2N}\right) - \cos\left(-\frac{\pi m}{2N}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)} = 0.$$

Quando $m = 0$, ovvero $k = \ell$, dobbiamo distinguere due casi:

- $k = \ell = 0$: direttamente dalla definizione abbiamo

$$\|\boldsymbol{w}_0\|^2 = \boldsymbol{w}_0 \cdot \boldsymbol{w}_0 = \sum_{i=0}^{N-1} 1 \times 1 = N;$$

- $k = \ell \geq 1$:

$$\|\boldsymbol{w}_k\|^2 = \boldsymbol{w}_k \cdot \boldsymbol{w}_k = \sum_{i=0}^{N-1} \cos\left(\pi k \frac{2i+1}{2N}\right) \cos\left(\pi k \frac{2i+1}{2N}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} \left[\cos\left(\pi(k+k)\frac{2i+1}{2N}\right) + \cos\left(\pi(k-k)\frac{2i+1}{2N}\right)\right].$$

Abbiamo gia' dimostrato che

$$\sum_{i=0}^{N-1} \cos\left(\pi m \frac{2i+1}{2N}\right) = 0 \quad \text{se } m \neq 0,$$

e poi ovviamente abbiamo

$$\cos\left(\pi(k-k)\frac{2i+1}{2N}\right) = \cos\left(\pi \cdot 0 \cdot \frac{2i+1}{2N}\right) = 1.$$

Quindi

$$\|\boldsymbol{w}_k\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}[0+1] = \frac{N}{2} \quad \text{per } k = 1, \ldots, N-1.$$

Definiamo quindi un *fattore di normalizzazione* $\alpha_k^N = 1/\|w_k\|$:

$$\alpha_0^N = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad \alpha_k^N = \sqrt{\frac{2}{N}}, \quad k = 1, \ldots, N-1$$

in modo che la nuova base definita da:

$$\widetilde{\boldsymbol{w}}_k = \alpha_k \boldsymbol{w}_k$$

sia ortonormale.

1.6.3. La Discrete Cosine Transform (DCT). L'idea è adesso di cambiare base. Il nostro vettore $\boldsymbol{f} = (f_0, \dots, f_{N-1})$ è dato in componenti, che sono i coefficienti rispetto alla base canonica $\{\boldsymbol{e}_0, \dots, \boldsymbol{e}_{N-1}\}$, ovvero la rappresentazione spaziale: la componente i-esima è il valore $\boldsymbol{f}$ ha alla posizione i-esima:

$$\boldsymbol{f} = \sum_{i=0}^{N-1} f_i \boldsymbol{e}_i.$$

Vogliamo rappresentarlo nella base ortonormale $\{\widetilde{\boldsymbol{w}}_0, \dots, \widetilde{\boldsymbol{w}}_{N-1}\}$, e i coefficienti $(c_0, \dots, c_{N-1})$ in questa base saranno *le ampiezze delle frequenze:*, ovvero la Discrete Cosine Transform degli $(f_0, \dots, f_{N-1})$:

$$\boldsymbol{f} = \sum_{i=0}^{N-1} f_i\, \boldsymbol{e}_i = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \widetilde{\boldsymbol{w}}_k.$$

Dato che entrambe le basi sono ortonormali, la trasformazione dagli f_i ai c_k è immediata. Moltiplichiamo scalarmente per $\widetilde{\boldsymbol{w}}_\ell$:

$$\sum_{i=0}^{N-1} f_i\, (\boldsymbol{e}_i \cdot \widetilde{\boldsymbol{w}}_\ell) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k\, (\widetilde{\boldsymbol{w}}_k \cdot \widetilde{\boldsymbol{w}}_\ell).$$

Ora:

- $\boldsymbol{e}_i \cdot \widetilde{\boldsymbol{w}}_\ell = \text{componente } i\text{-esima di } \widetilde{\boldsymbol{w}}_\ell = \alpha_\ell^N \cos(\pi \ell t_i) = \alpha_\ell^N \cos\left(\pi \ell\, \frac{2i+1}{2N}\right)$
- $\widetilde{\boldsymbol{w}}_k \cdot \widetilde{\boldsymbol{w}}_\ell = \delta_{k\ell} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = \ell \\ 0 & \text{se } k \neq \ell \end{cases}$

quindi otteniamo:

$$\sum_{i=0}^{N-1} f_i\, \alpha_\ell^N \cos\left(\pi \ell\, \frac{2i+1}{2N}\right) = c_\ell, \qquad \ell = 0, \dots, N-1$$

che possiamo scrivere come

$$\boxed{c_k = \alpha_k^N \sum_{i=0}^{N-1} f_i \cos\left(\pi k\, \frac{2i+1}{2N}\right), \qquad k = 0, \dots, N-1} \qquad \text{(DCT)}$$

La trasformazione lineare che ci fa passare dai coefficienti "spaziali" f_i ai coefficienti in frequenza c_k prende il nome di Discrete Cosine Transform (DCT):

$$\mathrm{DCT} : \{f_i\} \mapsto \{c_k\}.$$

Per essere precisi, si tratta della DCT di tipo II (ce ne sono altre 3 ma sono poco utilizzate). Se moltiplichiamo scalarmente per $\boldsymbol{e}_j$ troviamo la trasformazione inversa:

$$\sum_{i=0}^{N-1} f_i\, (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k\, (\widetilde{\boldsymbol{w}}_k \cdot \boldsymbol{e}_j).$$

Abbiamo:

- $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$
- $\widetilde{\boldsymbol{w}}_k \cdot \boldsymbol{e}_j = \text{componente } j\text{-esima di } \widetilde{\boldsymbol{w}}_k = \alpha_k^N \cos(\pi k t_j) = \alpha_k^N \cos\left(\pi k \frac{2j+1}{2N}\right)$

e otteniamo

$$\boxed{f_j = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \alpha_k^N \cos\left(\pi k \frac{2j+1}{2N}\right), \qquad j = 0, \dots, N-1} \qquad \text{(IDCT)}$$

La trasformazione lineare che ci fa passare dai c_k agli f_i prende il nome di Inverse Discrete Cosine Transform (IDCT):

$$\mathrm{IDCT} : \{c_k\} \mapsto \{f_i\}$$

Queste trasformazioni sono una l'inversa dell'altra, ovvero se applicate in sequenza restituiscono l'array di partenza. In termini di matrici, se definiamo

$$\vec{\boldsymbol{c}} = \text{array dei coefficienti } (c_0, \ldots, c_{N-1})$$

e

$$\vec{\boldsymbol{f}} = \text{array dei coefficienti } (f_0, \ldots, f_{N-1})$$

possiamo scrivere

$$\vec{\boldsymbol{c}} = D\vec{\boldsymbol{f}} \quad \text{cioè} \quad c_k = \sum_{i=0}^{N-1} D_{ki} f_i \quad \text{e quindi} \quad D_{ki} = \alpha_k^N \cos\left(\pi k \frac{2i+1}{2N}\right)$$

e

$$\vec{\boldsymbol{f}} = D^{-1}\vec{\boldsymbol{c}} \quad \text{cioe'} \quad f_i = \sum_{k=0}^{N-1} (D^{-1})_{ik} c_k \quad \text{e quindi} \quad (D^{-1})_{ik} = \alpha_k^N \cos\left(\pi k \frac{2i+1}{2N}\right).$$

Vediamo quindi che D^{-1} (cioè l'inversa di D) non è altro che la trasposta di D:

$$(D^{-1})_{ik} = D_{ki} \implies D^{-1} = D^{\mathrm{T}}$$

ovvero D è una matrice ortonormale.

1.6.4. Estensione al caso bidimensionale. Possiamo estendere questa teoria facilmente a due (o tre, o quattro) dimenesioni. Adesso abbiamo un vettore il cui indice è bidimensionale (da non confondersi con una matrice!)

$$\boldsymbol{f} = (f_{ij}), \quad i = 0, \ldots, N-1, \quad j = 0, \ldots, M-1.$$

Le componenti di questo vettore sono i coefficienti rispetto alla base canonica che adesso però ha anche lei un indice bidimensionale:

$$(\boldsymbol{e}_{ij})_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) = (n,m), \text{ cioè } i = n \text{ e } j = m \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il vettore $\boldsymbol{e}_{ij}$ così ottenuto si chiama *prodotto tensoriale* dei due vettori della base canonica $\boldsymbol{e}_i^N$ e $\boldsymbol{e}_j^M$ (ho messo N o M in alto per ricordare che le dimensioni sono diverse: $\boldsymbol{e}_i^N \in \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{e}_i^M \in \mathbb{R}^M$):

$$\boldsymbol{e}_{ij} = \boldsymbol{e}_i^N \otimes \boldsymbol{e}_j^M$$

ed è definito dalla proprietà

$$\text{componente } nm \text{ di } \boldsymbol{e}_{ij} = (\boldsymbol{e}_{ij})_{nm} = (\boldsymbol{e}_i)_n (\boldsymbol{e}_j)_m.$$

Risulta quindi

$$\boldsymbol{f} = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} f_{ij} \boldsymbol{e}_{ij}.$$

In modo analogo definiamo la base in frequenza:

$$\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{w}}_{k\ell} = \widetilde{\boldsymbol{w}}_k^N \otimes \widetilde{\boldsymbol{w}}_\ell^M \implies (\widetilde{\boldsymbol{w}}_{k\ell})_{ij} = (\widetilde{\boldsymbol{w}}_k^N)_i (\widetilde{\boldsymbol{w}}_\ell^M)_j = \\ = \alpha_k^N \cos\left(\pi k \frac{2i+1}{2N}\right) \alpha_\ell^M \cos\left(\pi \ell \frac{2j+1}{2M}\right) = \alpha_{k\ell} \cos\left(\pi k \frac{2i+1}{2N}\right) \cos\left(\pi \ell \frac{2j+1}{2M}\right) \end{aligned}$$

dove $\alpha_{kl} = \alpha_k^N \alpha_\ell^M$:

$$\alpha_{00} = \frac{1}{\sqrt{NM}}, \quad \text{e} \quad \alpha_{k0} = \alpha_{0\ell} = \sqrt{\frac{2}{NM}}, \quad \alpha_{k\ell} = \frac{2}{\sqrt{NM}}, \quad k, \ell \geq 1.$$

Anche le basi $\{\boldsymbol{e}_{ij}\}$ e $\{\widetilde{\boldsymbol{w}}_{k\ell}\}$ sono ortonormali, perché risulta in generale

$$(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{z}\otimes\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z})(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{w}).$$

Infatti

$$(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{z}\otimes\boldsymbol{w}) = \sum_i\sum_j(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y})_{ij}(\boldsymbol{z}\otimes\boldsymbol{w})_{ij} =$$

$$= \sum_i\sum_j x_i y_j z_i w_j = \left(\sum_i x_i z_i\right)\left(\sum_j y_j w_j\right) = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z})(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{w}).$$

Quindi

$$\boldsymbol{e}_{ij}\cdot\boldsymbol{e}_{i'j'} = (\boldsymbol{e}_i^N\cdot\boldsymbol{e}_{i'}^M)(\boldsymbol{e}_j^N\cdot\boldsymbol{e}_{j'}^M) = \delta_{ii'}\delta_{jj'} = \begin{cases}1 & \text{se } i=i' \text{ e } j=j' \text{ ovvero } (i,i')=(j,j')\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

e analogamente

$$\widetilde{\boldsymbol{w}}_{k\ell}\cdot\widetilde{\boldsymbol{w}}_{k'\ell'} = (\widetilde{\boldsymbol{w}}_k^N\cdot\widetilde{\boldsymbol{w}}_{k'}^M)(\widetilde{\boldsymbol{w}}_\ell^N\cdot\widetilde{\boldsymbol{w}}_{\ell'}^M) = \delta_{kk'}\delta_{\ell\ell'} = \begin{cases}1 & \text{se } k=k' \text{ e } \ell=\ell' \text{ ovvero } (k,k')=(\ell,\ell')\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Dato un vettore $\boldsymbol{f}$ con un indice bidimensionale, ovvero una superficie discreta, la Discrete Cosine Transform bidimensionale (DCT2) consiste nello scriverlo nella base $\{\widetilde{\boldsymbol{w}}_{k\ell}\}$, ovvero cercare i coefficienti $c_{k\ell}$ tali che

$$\boldsymbol{f} = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{M-1} c_{k\ell}\,\widetilde{\boldsymbol{w}}_{k\ell}.$$

Come prima, partiamo dall'uguaglianza

$$\boldsymbol{f} = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} f_{ij}\,\boldsymbol{e}_{ij} = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{M-1} c_{k\ell}\,\widetilde{\boldsymbol{w}}_{k\ell} \tag{1.4}$$

e moltiplichiamo scalarmente per $\widetilde{\boldsymbol{w}}_{rs}$:

$$\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} f_{ij}\,(\boldsymbol{e}_{ij}\cdot\widetilde{\boldsymbol{w}}_{rs}) = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{M-1} c_{k\ell}\,(\widetilde{\boldsymbol{w}}_{k\ell}\cdot\widetilde{\boldsymbol{w}}_{rs})$$

cioè

$$\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} f_{ij}\,(\widetilde{\boldsymbol{w}}_{rs})_{ij} = c_{rs}$$

quindi

$$c_{rs} = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} f_{ij}\alpha_{rs}\cos\left(\pi r\frac{2i+1}{2N}\right)\cos\left(\pi s\frac{2j+1}{2M}\right)$$

che possiamo scrivere come

$$\boxed{c_{k\ell} = \alpha_{k\ell}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} f_{ij}\cos\left(\pi k\frac{2i+1}{2N}\right)\cos\left(\pi \ell\frac{2j+1}{2M}\right)\quad \text{(DCT2).}} \tag{1.5}$$

Per calcolare la transfomazione inversa, partiamo ancora dall'uguaglianza (1.4) e questa volta moltiplichiamo scalarmente per $\boldsymbol{e}_{nm}$:

$$\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} f_{ij}\,(\boldsymbol{e}_{ij}\cdot\boldsymbol{e}_{nm}) = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{M-1} c_{k\ell}\,(\widetilde{\boldsymbol{w}}_{k\ell}\cdot\boldsymbol{e}_{nm})$$

ottenendo quindi

$$f_{nm} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{M-1} c_{k\ell} \, (\widetilde{\boldsymbol{w}}_{k\ell} \cdot \boldsymbol{e}_{nm}) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{M-1} c_{k\ell} \, (\widetilde{\boldsymbol{w}}_{k\ell})_{nm}$$

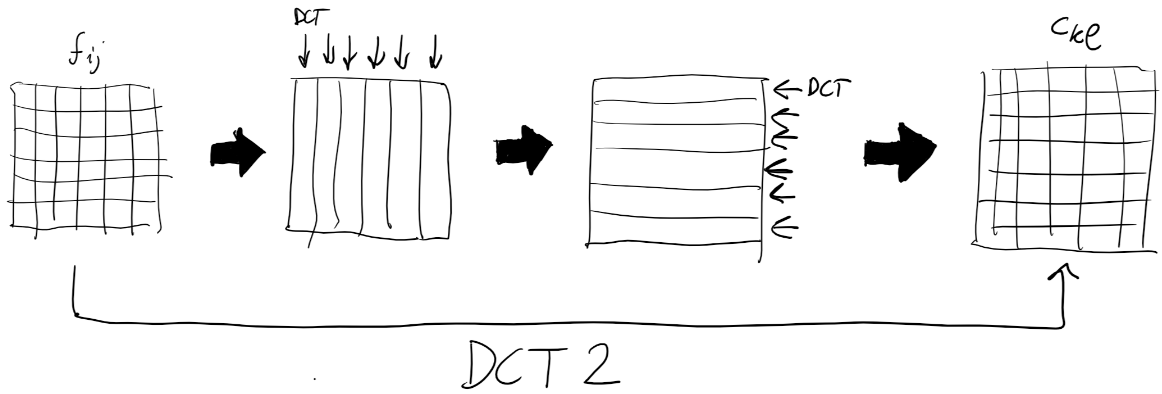
che possiamo scrivere come

$$\boxed{f_{ij} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{M-1} c_{k\ell} \, \alpha_{k\ell} \cos\left(\pi k \frac{2i+1}{2N}\right) \cos\left(\pi \ell \frac{2j+1}{2M}\right)} \quad \text{(IDCT2).} \tag{1.6}$$

Raggruppando in modo diverso, ed espandendo i coefficienti di normalizzazione α_{kl}, possiamo riscrivere la (1.5) come

$$c_{k\ell} = \alpha_k^N \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \alpha_\ell^M \sum_{j=0}^{M-1} f_{ij} \cos\left(\pi \ell \frac{2j+1}{2M}\right) \right\} \cos\left(\pi k \frac{2i+1}{2N}\right)$$

Se quindi immaginiamo f_{ij} disposta su una tabella, possiamo ottenere i c_{kl} facendo prima la DCT per colonne e poi la DCT per righe del risultato:



E' facile vedere che lo stesso vale se si parte dalla DCT delle righe, e inoltre tutto funziona allo stesso modo per la DCT2 inversa.