Описание имплементации трех алгоритмов свертки

1 Общие выкладки

В дискреном случае, свёртка или конволюция — операция в функциональном анализе, возвращающая функцию при применении к двум функциям f и g, сформированную по следующему правилу: свёртка соответствует сумме значений $f(x)$ с коэффициентами, соответствующими смещённым значениям g, то есть $(f * g)(x) = f(1)g(x-1) + f(2)g(x-2) + \dots$.

Существует понятие гауссовой свертки. Это свертка с гауссовым фильтром вида $\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, зависящая от параметра $\sigma > 0$

2 Алгоритм дискретной свертки

2.1 Описание имплементации алгоритма

- Подготовим массив нечетной длины размера, близкого к $max(10\sigma, 1)$ и заполним его числами по следующей формуле: $k_i = \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(i-(k+1))^2}{2\sigma^2}}$, где $k = \lfloor \frac{l}{2} \rfloor$, а l – длина массива. Данный массив назовем ядром свертки
- Проитерируемся по последовательности x_i длины n и вычислим выходную последовательность y_i по следующей форуле:

$$y_i = \sum_{j=-k}^{k} I[1 \le i + j \le n] x_{i+j} k_j \tag{1}$$

Где $I[\dots]$ – индикатор-функция, использование которой необходимо для задания так называемого отступа, позволяющего сохранить размер последовательности при преобразовании.

2.2 Асимптотическая сложность времени вычисления результата

Сложность: $O(nk)$

3 Алгоритм свертки по Деришу

3.1 Описание имплементации алгоритма

- Примем на вход параметры свертки по Деришу: последовательности вещественных чисел n_i и d_i одинаковый длины d, называемой в дальнейшем глубиной свертки. Сформируем последовательность m_i по следующему правилу: $m_i = I[i < d]n_{i+1} - d_i n_1$.
- Сформируем последовательность y^1 по следующему правилу (итерируясь слева-направо):

$$y_i^1 = \sum_{j=1}^{d} I[i \ge j] n_j x_{i+1-j} - \sum_{j=1}^{d} I[i \ge j+1] d_j y_{i-j}^1 \tag{2}$$

- Сформируем последовательность y^2 по следующему правилу (итерируясь справа-налево):

$$y_i^2 = \sum_{j=1}^{d} I[i \le n-j] m_j x_{i+j} - \sum_{j=1}^{d} I[i \le n-j] d_j y_{i+j}^1 \tag{3}$$

- Наконец, сформируем выходную последовательность по следующему правилу:

$$y_i = c(y_i^1 + y_i^2) \tag{4}$$

3.2 Асимптотическая сложность времени вычисления результата

Сложность: $O(nd)$

3.3 Частный случай при $d = 2$

Пусть $\alpha = \frac{5}{2\sqrt{\pi}\sigma}$, $k = \frac{(1-e^{-\alpha})^2}{1+2\alpha e^{-\alpha}-e^{-2\alpha}}$

- Массив n_i задается следующим образом:

$$n_1 = k$$
$$n_2 = ke^{-\alpha}(\alpha - 1)$$

- Массив d_i задается следующим образом:

$$d_1 = -2e^{-\alpha}$$
$$d_2 = e^{-2\alpha}$$

- Константа c равна 1

3.4 Частный случай при $d = 4$

Пусть

$$a_1 = 1.680$$
$$a_2 = -0.6803$$
$$b_1 = 3.735$$
$$b_2 = -0.2598$$
$$w_1 = 0.6318$$
$$w_2 = 1.997$$
$$c_1 = -1.783$$
$$c_2 = -1.723$$

- Массив n_i задается следующим образом:

$$n_1 = a_0 + c_0$$
$$n_2 = e^{-\frac{b_1}{\sigma}}(c_1 \sin\frac{w_1}{\sigma} - (c_0 + 2a_0)\cos\frac{w_1}{\sigma}) + e^{-\frac{b_0}{\sigma}}(a_1 \sin\frac{w_0}{\sigma} - (2c_0 + a_0)\cos\frac{w_0}{\sigma})$$
$$n_3 = 2e^{-\frac{b_0+b_1}{\sigma}}((a_0 + c_0)\cos\frac{w_1}{\sigma}\cos\frac{w_0}{\sigma} - a_1 cos\frac{w_1}{\sigma} sin\frac{w_0}{\sigma} - c_1 cos\frac{w_0}{\sigma} sin\frac{w_1}{\sigma}) + c_0 e^{-2\frac{b_0}{\sigma}} + a_0 e^{-2\frac{b_1}{\sigma}}$$
$$n_4 = e^{-\frac{b_1+2b_0}{\sigma}}(c_1 \sin\frac{w_1}{\sigma} - c_0\cos\frac{w_1}{\sigma}) + e^{-\frac{b_0+2b_1}{\sigma}}(a_1 \sin\frac{w_0}{\sigma} - a_0\cos\frac{w_0}{\sigma})$$

- Массив d_i задается следующим образом:

$$d_1 = -2e^{-\frac{b_1}{\sigma}}\cos\frac{w_1}{\sigma} - 2e^{-\frac{b_0}{\sigma}}\cos\frac{w_0}{\sigma}$$
$$d_2 = 4\cos\frac{w_1}{\sigma}\cos\frac{w_0}{\sigma}e^{-\frac{b_1+b_0}{\sigma}} + e^{-2\frac{b_0}{\sigma}} + e^{-2\frac{b_1}{\sigma}}$$
$$d_3 = -2\cos\frac{w_0}{\sigma}e^{-\frac{b_0+2b_1}{\sigma}} - 2\cos\frac{w_1}{\sigma}e^{-\frac{2b_0+b_1}{\sigma}}$$
$$d_4 = e^{-2\frac{b_1+b_0}{\sigma}}$$

- Константа c равна $\frac{1}{2\frac{n_0+n_1+n_2+n_3}{1+d_1+d_2+d_3+d_4} - n_0}$