Procesarea semnalelor

Transformata Fourier.

Paul Irofti

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
Departmentul de Informatică
Email: paul.irofti@fmi.unibuc.ro

Discretizare și eșantionare

Continuu:

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \tag{1}$$

Discret:

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin(2\pi(f_0 + k f_s) n t_s) \tag{2}$$

unde

- f_0 – frecvența (Hz) măsoară numărul de oscilații într-o secundă
- n – eșantionul, indexul în șirul de timpi $0, 1, 2 \ldots$
- t_s – perioada de eșantionare; constantă (ex. la fiecare secundă)
- $n t_s$ – orizontul de timp (s)
- $f_0 n t_s$ – numărul de oscilații măsurat
- $2\pi f_0 n t$ – unghiul măsurat în radiani (vezi note de curs)
- f_s – frecvența de eșantionare (Hz)
- $f_0 + k f_s$ – frecvența de aliere, $\forall k \in \mathbb{N}$

Cum trecem în frecvență și înapoi în timp?

Transformata Fourier și Transformata Fourier Inversă ne ajută să trecem din domeniul timpului în domeniul frecvenței și vice-versa.

Transformata Fourier Continuă (TF)

Definiție

Transformata Fourier a unui semnal continuu:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} \qquad (3)$$

transformă semnalul continuu din domeniul timpului $x(t)$ *în semnalul continuu* $X(f)$ *din domeniul frecvenței.*

Aici e este numărul lui Euler, baza logaritmului natural, și j reprezintă numărul complex $j = \sqrt{-1}$.

Relația lui Euler

Definiție

Relația lui Euler

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha \tag{4}$$

pune în legătură numerele complexe, funcțiile trigonometrice și funcțiile exponențiale.

Pentru un număr complex $z \in \mathbb{C}$:

$$z = a + jb = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi) = re^{j\varphi} \tag{5}$$

unde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ este magnitudinea și $\varphi = \arctan\frac{b}{a}$

Pentru Transformata Fourier Continuă:

$$e^{-j\alpha} = \cos(-\alpha) + j\sin(-\alpha) = \cos\alpha - j\sin\alpha \tag{6}$$

Radiani

Definiție

Radianii descriu unghiul unui arc de cerc drept raportul dintre lungimea arcului împărțită la rază.

Exemplu

$1\ rad = 180^\circ/\pi$

$2\pi\ rad = 360^\circ$

Frecvența unghiulară și frecvența de eșantionare

Definiție

Frecvența unghiulară este frecvența exprimată în radiani pe secundă:

$$\Omega = \frac{\omega}{T} = \frac{[rad]}{[s]} = \omega f \tag{7}$$

Definiție

Frecvența de eșantionare în frecvență este:

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_s \tag{8}$$

Discretizare

Dacă un semnal este periodic, iar eșantioanele $x[n]$ se repetă o dată la fiecare N măsurători atunci discretizarea timp-frecvență devine:

- discretizarea timpului $t \rightarrow nt_s$ și
- frecvența $f \rightarrow \frac{1}{N}$
- frecvența unghiulară $\Omega \rightarrow \frac{\omega}{N}$
- frecvența unghiulară de eșantionare $\Omega \rightarrow \frac{2\pi}{N}$
- $e^{-j\Omega t} = e^{-j2\pi ft} \rightarrow e^{-j2\pi f_s nt_s} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nt_s}$

Transformata Fourier Discretizată în Timp (DTFT)

Definiție

Transformata Fourier Continuă a unui semnal discretizat în timp:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} = \tag{9}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nt_s) e^{-j2\pi fnt_s} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nt_s) e^{-j\Omega nt_s} \tag{10}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi fnt_s} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega nt_s} \tag{11}$$

numită în literatură Discrete-Time Fourier Transform (DTFT).

Transformata Fourier Discretizată în Timp (DFS)

Fie un șir $x[n]$ cu perioadă N a.î. $x[n] = x[n + kN]$, $\forall n, k \in \mathbb{N}$.

Definiție

Transformata Fourier a semnalului $x[n]$ cu perioadă N este:

$$X(m) = \sum_{n} x(n) e^{-j2\pi mn/N} \tag{12}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m} X(m) e^{j2\pi mn/N} \tag{13}$$

numită în literatură Discrete Fourier Sequence (DFS).

Remarcă

Dacă semnalul este periodic, observăm că informația se repetă o dată la N eșantioane a.î. putem limita capetele sumei la intervalul $0 \ldots N - 1$.

Transformata Fourier Discretă (DFT)

Definiție

Transformata Fourier a unui semnal discret (aperiodic):

$$\begin{aligned} X(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi mn/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[\cos(2\pi mn/N) - j \sin(2\pi mn/N)\right] \end{aligned} \tag{14}$$

- $X(m)$ – componenta m DFT (ex. $X(0), X(1), X(2), \ldots$)
- m – indicele componentei DFT în domeniul frecvenței ($m = 0, 1, \ldots, N-1$)
- $x(n)$ – eșantioanele în timp (ex. $x(0), x(1), x(2), \ldots$)
- n – indicele eșantioanelor în domeniul timpului ($n = 0, 1, \ldots, N-1$)
- N – numărul eșantioanelor în timp la intrare și numărul componentelor în frecvență la ieșire

Exemplu DFT $N = 4$

Pentru $N = 4$ eșantioane, vom avea $n, m = \{0, 1, 2, 3\}$:

$$X(m) = \sum_{n=0}^{3} x(n) \left[\cos(2\pi mn/4) - j \sin(2\pi mn/4)\right] \tag{15}$$

Pentru $m = 0$:

$$\begin{aligned}
X(0) = x(0) &\left[\cos(2\pi \underbrace{0 \cdot 0}_{m \cdot n}/4) - j \sin(2\pi \underbrace{0 \cdot 0}_{m \cdot n}/4)\right] \\
&+ x(1) \left[\cos(2\pi 0 \cdot 1/4) - j \sin(2\pi 0 \cdot 1/4)\right] \\
&+ x(2) \left[\cos(2\pi 0 \cdot 2/4) - j \sin(2\pi 0 \cdot 2/4)\right] \\
&+ x(3) \left[\cos(2\pi 0 \cdot 3/4) - j \sin(2\pi 0 \cdot 3/4)\right]
\end{aligned}$$

Exemplu DFT $N = 4$

$$
\begin{aligned}
X(1) = {} & x(0)[\cos(2\pi \overbrace{1 \cdot 0}^{m \cdot n}/4) - j\sin(2\pi \overbrace{1 \cdot 0}^{m \cdot n}/4)] \\
& + x(1)\,[\cos(2\pi 1 \cdot 1/4) - j\sin(2\pi 1 \cdot 1/4)] \\
& + x(2)\,[\cos(2\pi 1 \cdot 2/4) - j\sin(2\pi 1 \cdot 2/4)] \\
& + x(3)\,[\cos(2\pi 1 \cdot 3/4) - j\sin(2\pi 1 \cdot 3/4)] \\
X(2) = {} & x(0)[\cos(2\pi 2 \cdot 0/4) - j\sin(2\pi 2 \cdot 0/4)] \\
& + x(1)\,[\cos(2\pi 2 \cdot 1/4) - j\sin(2\pi 2 \cdot 1/4)] \\
& + x(2)\,[\cos(2\pi 2 \cdot 2/4) - j\sin(2\pi 2 \cdot 2/4)] \\
& + x(3)\,[\cos(2\pi 2 \cdot 3/4) - j\sin(2\pi 2 \cdot 3/4)] \\
X(3) = {} & x(0)[\cos(2\pi 3 \cdot 0/4) - j\sin(2\pi 3 \cdot 0/4)] \\
& + x(1)\,[\cos(2\pi 3 \cdot 1/4) - j\sin(2\pi 3 \cdot 1/4)] \\
& + x(2)\,[\cos(2\pi 3 \cdot 2/4) - j\sin(2\pi 3 \cdot 2/4)] \\
& + x(3)\,[\cos(2\pi 3 \cdot 3/4) - j\sin(2\pi 3 \cdot 3/4)]
\end{aligned}
$$

Transformata Fourier inversă

Transformata Fourier a unui semnal discret:

$$
\begin{aligned}
X(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi mn/N} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[cos(2\pi mn/N) - j \sin(2\pi mn/N) \right]
\end{aligned}
$$

Definiție

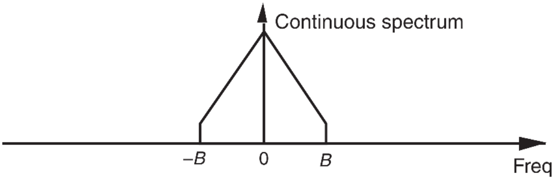
Transformata Fourier inversă a unui semnal discret (IDFT):

$$
\begin{aligned}
x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) e^{j2\pi mn/N} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) \left[cos(2\pi mn/N) + j \sin(2\pi mn/N) \right]
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Recapitulare: Semnale trece-jos (lowpass)

Definiție

Un semnal trece-jos este un semnal limitat în bandă și centrat în jurul frecvenței zero.



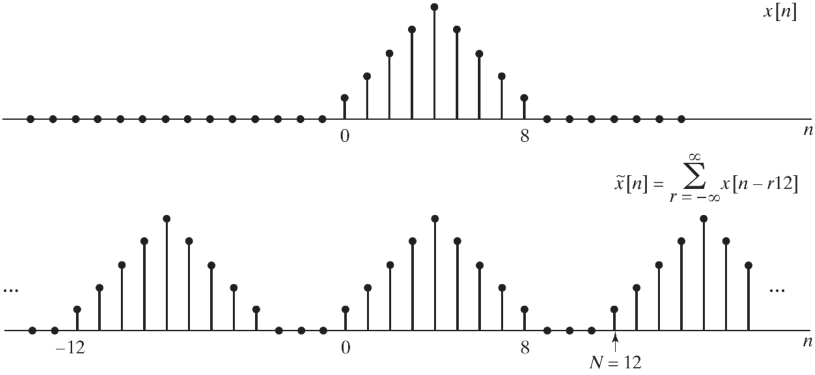
Sursă: (Lyons 2004)

Remarcă

Din considerente didactice, aici am analizat spectrul continuu obținut din Transformata Fourier Continuă. În practică folosim Transformata Fourier Discretă.

Extinderea unui semnal discret

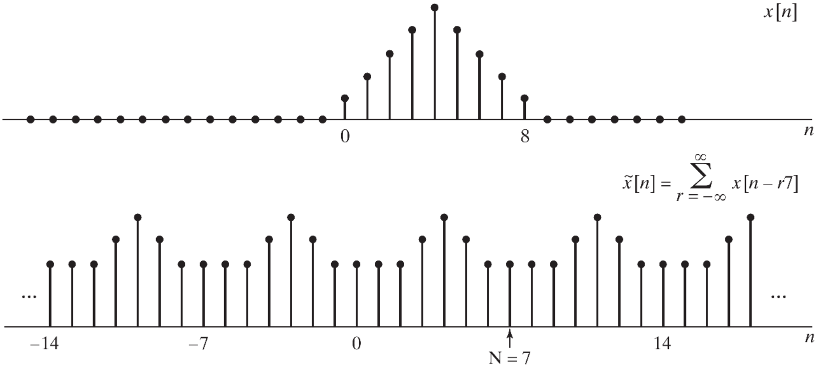
Dacă avem de a face cu un semnal discret aperiodic, îl putem extinde la un semnal periodic pentru a aplica DFT.
Exemplu eșantionare a transformatei Fourier cu $N = 12$:



Sursă: (Oppenheim and Schafer 2014)

Extinderea unui semnal discret

Atenție la fenomenul de aliere când extindem (exemplu $N = 7$).



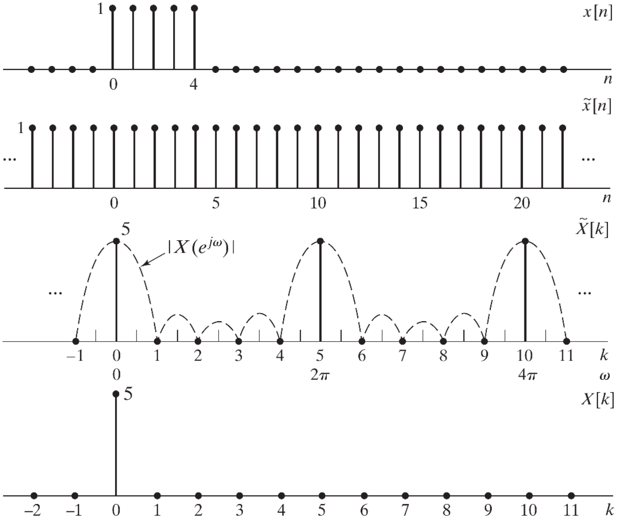
Sursă: (Oppenheim and Schafer 2014)

Remarcă

Problema alierii este aceiași în frecvență ca și în timp. Metoda de discretizare și eșantionare fiind aceiași. Doar domeniul se schimbă.

Exemplu: treaptă

Atenție la efectele secundare extinderii unui semnal aperiodic.



Sursă: (Oppenheim and Schafer 2014)

Frecvențe importante

Frecvența fundamentală este

$$f = \frac{f_s}{N} \tag{17}$$

Frecvențele analizate sunt:

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} \tag{18}$$

Componenta $m = 0$ este numită componenta curent continuu (*Direct Current (DC)*)

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)[cos(0) - jsin(0)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \tag{19}$$

Magnitudine și puterea componentelor (*power spectrum (PS)*):

$$X(m) = X_{\text{real}}(m) + jX_{\text{imag}}(m) \tag{20}$$

$$X_{\text{mag}} = |X(m)| \qquad X_{\text{PS}}(m) = X_{\text{mag}}(m)^2 \tag{21}$$

Exemplu: Frecvențe importante

Pentru un semnal continuu eșantionat cu 500 eșantioane pe secundă asupra căruia se aplică DFT în 16 puncte avem:

$$f = \frac{f_s}{N} = \frac{500}{16} = 31,25Hz$$

Frecvențele analizate sunt:

$$\begin{aligned}
X(0) &= 0 \cdot 31.25 = 0Hz && \text{(prima componentă în frecvență)}\\
X(1) &= 1 \cdot 31.25 = 31,25Hz && \text{(a doua componentă în frecvență)}\\
X(2) &= 2 \cdot 31.25 = 62,5Hz && \text{(a treia componentă în frecvență)}\\
X(3) &= 3 \cdot 31.25 = 93,75Hz && \text{(a patra componentă în frecvență)}\\
&\vdots\\
X(15) &= 15 \cdot 31.25 = 468,75Hz && \text{(componenta 16 în frecvență)}
\end{aligned}$$

Exemplu: Calcul DFT

Vom calcula 8 componente DFT pentru semnalul alcătuit din două componente de 1kHz și 2kHz:

$$x(t) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi \cdot 2000 \cdot t + \frac{3\pi}{4})$$

pentru asta avem nevoie de $N = 8$ eșantioane în timp pentru care alegem frecvența de eșantionare $f_s = 8000$.

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} =$$

Exemplu: Calcul DFT

Vom calcula 8 componente DFT pentru semnalul alcătuit din două componente de 1kHz și 2kHz:

$$x(t) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi \cdot 2000 \cdot t + \frac{3\pi}{4})$$

pentru asta avem nevoie de $N = 8$ eșantioane în timp pentru care alegem frecvența de eșantionare $f_s = 8000$.

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} = \{0kHz, 1kHz, 2kHz, \ldots, 7kHz\}$$

Exemplu: Calcul DFT

Vom calcula 8 componente DFT pentru semnalul alcătuit din două componente de 1kHz și 2kHz:

$$x(t) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi \cdot 2000 \cdot t + \frac{3\pi}{4})$$

pentru asta avem nevoie de $N = 8$ eșantioane în timp pentru care alegem frecvența de eșantionare $f_s = 8000$.

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} = \{0kHz, 1kHz, 2kHz, \ldots, 7kHz\}$$

Transformata Fourier devine:

$$X(m) = \sum_{n=0}^{7} x(n)\left[cos(2\pi mn/8) + j\sin(2\pi mn/8)\right]$$

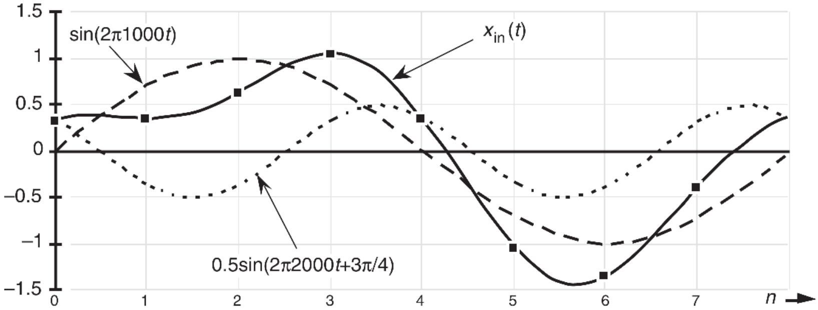
$$X(1) = \sum_{n=0}^{7} x(n)\left[cos(2\pi n/8) + j\sin(2\pi n/8)\right]$$

$$\vdots$$

Exemplu: Calcul DFT

Fie cele 8 eșantioane în timp:

$$x[0] = 0,3535, \quad x[1] = 0,3535$$
$$x[2] = 0,6464, \quad x[3] = 1,0607$$
$$x[4] = 0,3535, \quad x[5] = -1,0607$$
$$x[6] = -1,3535, \quad x[7] = -0,3535$$



Sursă: (Lyons 2004)

Exemplu: Calcul DFT

$$
\begin{aligned}
X(1) = \sum_{n=0}^{7} x(n)\left[cos(2\pi n/8) + j\sin(2\pi n/8)\right] = \\
&= x(0)\cos(0) - jx(0)\sin(0) + \\
&+ x(1)\cos(\pi/4) - jx(1)\sin(\pi/4) + \\
&+ x(2)\cos(\pi/2) - jx(2)\sin(\pi/2) + \\
&+ x(3)\cos(3\pi/4) - jx(3)\sin(3\pi/4) + \\
&+ x(4)\cos(\pi) - jx(4)\sin(\pi) + \\
&+ x(5)\cos(5\pi/4) - jx(5)\sin(5\pi/4) + \\
&+ x(6)\cos(3\pi/2) - jx(6)\sin(3\pi/2) + \\
&+ x(7)\cos(7\pi/4) - jx(7)\sin(7\pi/4) = \\
&= \cdots = 0,0 - j4,0
\end{aligned}
$$

Exemplu: Calcul DFT

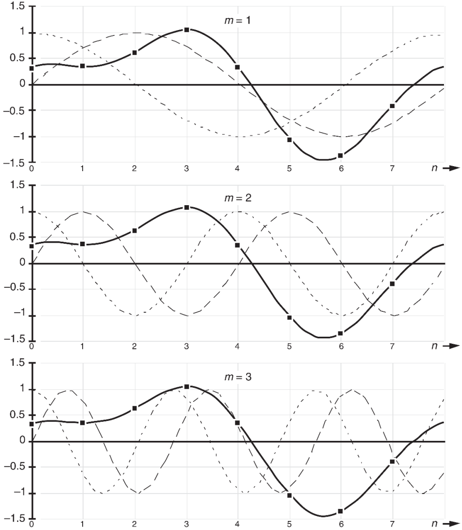
Aplicăm formula pentru calculul celorlalte componente:

$$\begin{aligned}
X(1) &= 0,0 - j4,0 \\
X(2) &= 1,414 + j1,414 \\
X(3) &= 0,0 + j0,0 \\
X(4) &= 0,0 + j0,0 \\
X(5) &= 0,0 + j0,0 \\
X(6) &= 1,414 - j1,414 \\
X(7) &= 0,0 + j4,0
\end{aligned}$$

Cât este $X(0)$?

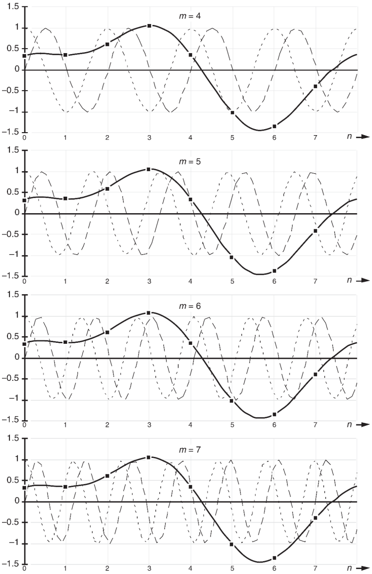
Exemplu: Componentele DFT

Cum arată componentele cos și sin în funcție de m?



Sursă: (Lyons 2004)

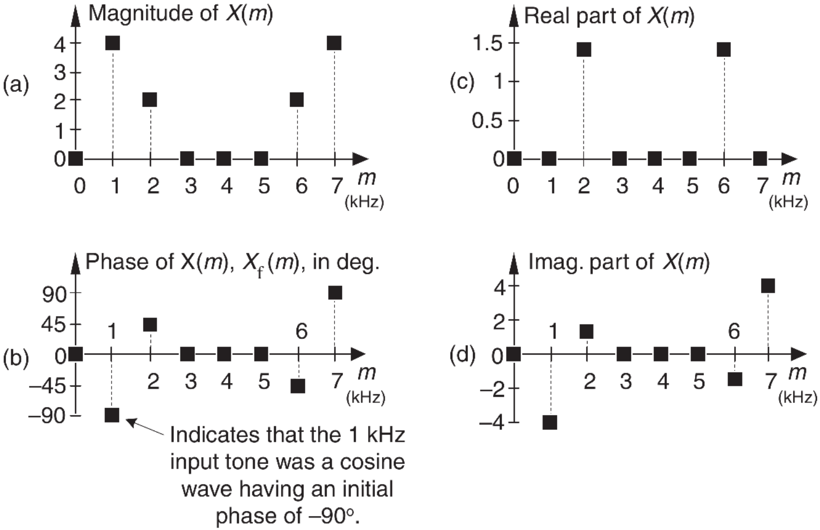
Exemplu: Componentele DFT



Sursă: (Lyons 2004)

Exemplu: Rezultate DFT

Simetrie și anti-simetrie în componentele spectrale:



Sursă: (Lyons 2004)