# Topici speciale în logică și securitate I

## Analiza fluxului de date

Paul Irofti și Ioana Leuștean

Master anul II, Sem. I, 2019-2020

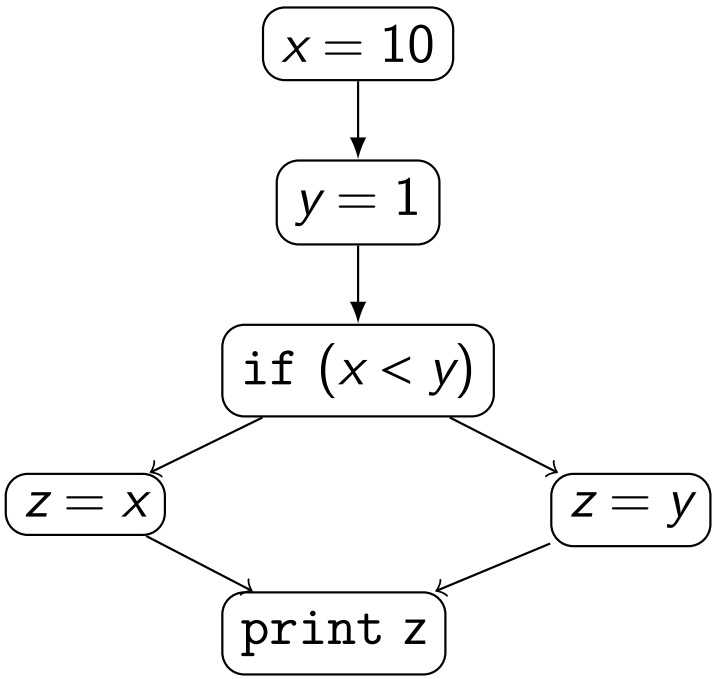
# Ce este analiza statică?

Analiza statică presupue analiza proprietăților programelor fără a le rula.

Exemple de proprietăți: analiza tipurilor, pointeri nuli, atribuiri nefolosite, vulnerabilitäti de cod (de exemplu depășiri de indici), etc.

# Control Flow Graphs (CFG)

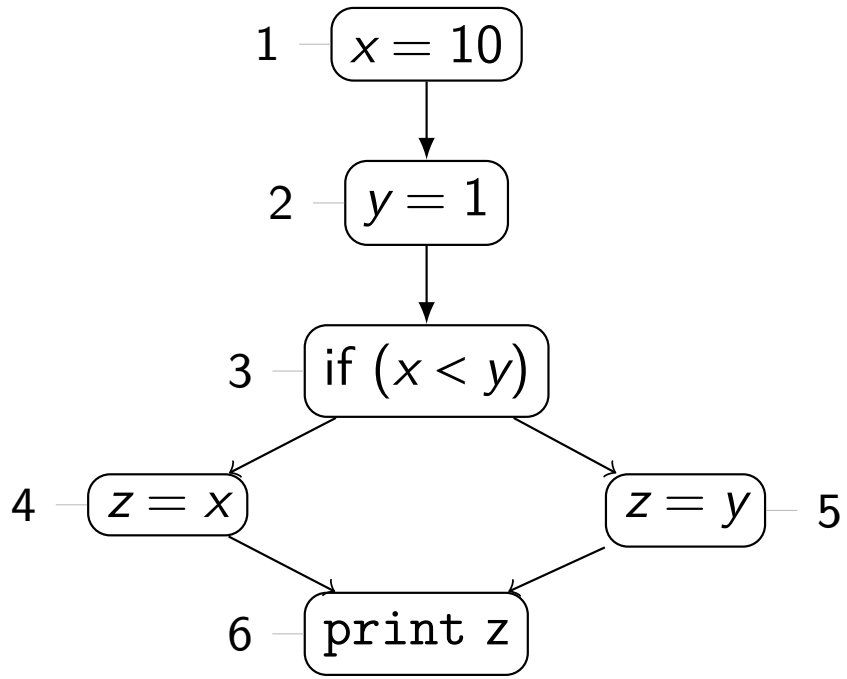
```
x = 10;
y = 1;
if  (x < y) z = x;
     else   z = y;
print z
```



# Control Flow Graphs (CFG)

```
x = 10;
y = 1;
if  (x < y) z = x;
     else   z=y;
print z
```

Adăugăm etichete pentru nodurile grafului.



# Exemplu: determinarea variabilelor *live*

https://cs420.epfl.ch/c/06_dataflow-analysis.html

O variabilă este activă (live) într-un punct al programului dacă este posibil ca valoarea curentă variabilei să fie citită înainte de a fi rescrisă.

Pentru un nod $n$ din CFG vom nota cu $v_n$ mulțimea variabilelor care sunt *live* înaintea lui.

Observăm că

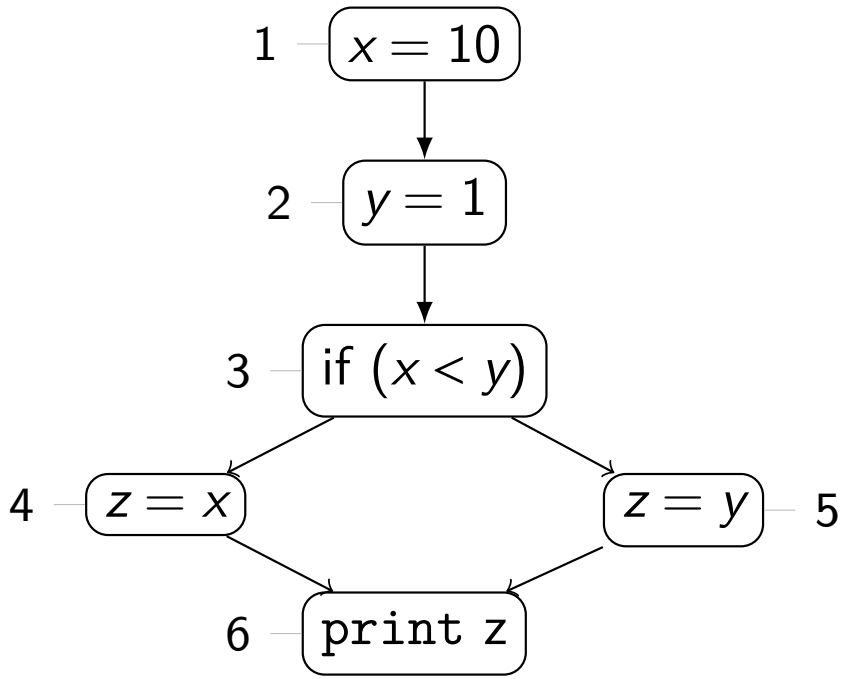
$$v_n = \left(\bigcup \{v_i \mid i \text{ succesor al lui } n\} \setminus \mathit{Written}(n)\right) \cup \mathit{Read}(n)$$

$\mathit{Written}(n)$ este mulțimea variabilelor care primesc valori în nodul $n$,
$\mathit{Read}(n)$ este mulțimea variabilelor care sunt citite în nodul $n$.

# Exemplu: determinarea variabilelor *live*

Ținând cont de condiția găsită obținem un sistem de constrângeri:

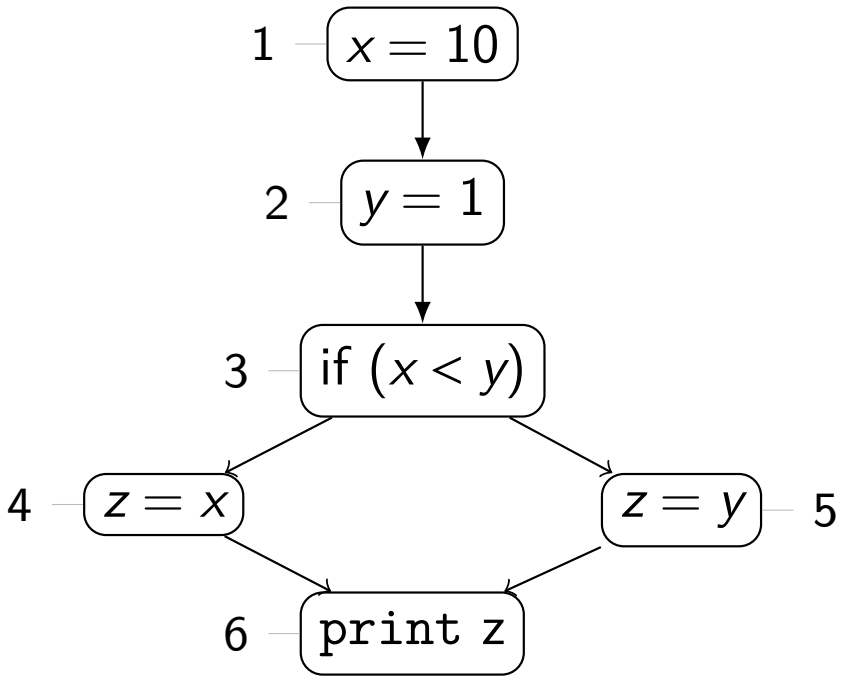
$$
\begin{aligned}
v_1 &= v_2 \setminus \{x\} \\
v_2 &= v_3 \setminus \{y\} \\
v_3 &= v_4 \cup v_5 \cup \{x, y\} \\
v_4 &= (v_6 \setminus \{z\}) \cup \{x\} \\
v_5 &= (v_6 \setminus \{z\}) \cup \{y\} \\
v_6 &= \{z\}
\end{aligned}
$$



# Exemplu: determinarea variabilelor *live*

Rezolvând sistemul, găsim o soluție:

$$
\begin{array}{lcl}
v_1 & = & \emptyset \\
v_2 & = & \{x\} \\
v_3 & = & \{x, y\} \\
v_4 & = & \{x\} \\
v_5 & = & \{y\} \\
v_6 & = & \{z\}
\end{array}
$$



# CFG - observații

- În analiza problemei anterioare, fiecărui nod din graful de control al fluxului i-am asociat o mulțime de variabile, ce reprezintă soluția unui sistem de ecuații in $\mathcal{P}(Var)$, unde $Var$ este mulțimea variabilelor din program.

- În general, analiza unei probleme poate conduce la un sistem de ecuații într-o latice oarecare $L$. Există o metodă generală de rezolvare a unui astfel de sistem?

# Laticea produs

Fie $L$ o latice și $n \geq 1$.

### Laticea produs $L^n$

Pe $L^n$ definim relația de ordine pe componente:

$$(x_1, \ldots, x_n) \leq (y_1, \ldots, y_n) \text{ ddacă } x_i \leq y_i \text{ pt. orice } i \in \{1, \ldots, n\}$$

Observăm că $(L^n, \leq)$ este latice. În plus, dacă $L$ este latice completă atunci și $L^n$ este latice completă.

# Sisteme de ecuații în latici complete

Fie $L$ o latice completă, $n \geq 1$ și
$F_1, \ldots, F_n : L^n \to L$ funcții monotone.
Vrem să rezolvăm sistemul

$$\begin{aligned} x_1 &= F_1(x_1, \ldots, x_n) \\ x_2 &= F_2(x_1, \ldots, x_n) \\ &\ldots \\ x_n &= F_n(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

cu $x_1, \ldots, x_n \in L$.

Definim funcția $F : L^n \to L^n$ prin

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_1(x_1, \ldots, x_n))$$

și observăm că sistemul se poate scrie

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$$

*Sistemul de ecuații poate fi rezolvat folosind Teorema de punct fix!*

# Determinarea variabilelor *live*

În consecință, a rezolva sistemul:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2 \setminus \{x\} \\ v_2 &= v_3 \setminus \{y\} \\ v_3 &= v_4 \cup v_5 \cup \{x, y\} \\ v_4 &= (v_6 \setminus \{z\}) \cup \{x\} \\ v_5 &= (v_6 \setminus \{z\}) \cup \{y\} \\ v_6 &= \{z\} \end{aligned}$$

revine la a găsi o soluție a ecuației:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \\ (x_2 \setminus \{x\}, x_3 \setminus \{y\}, x_4 \cup x_5 \cup \{x, y\}, (x_6 \setminus \{z\}) \cup \{x\}, (x_6 \setminus \{z\}) \cup \{y\}, \{z\})$$

în laticea completă $(\mathcal{P}(Var), \subseteq, \emptyset, Var)$.

# Rezolvarea folosind teorema de punct fix

$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) =$
$(x_2 \setminus \{x\}\,,\ x_3 \setminus \{y\}\,,\ x_3 \setminus \{y\}\,,\ (x_6 \setminus \{z\}) \cup \{x\}\,,\ (x_6 \setminus \{z\}) \cup \{y\}\,,\ \{z\})$

Determinarea celui mai mic punct fix:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bot$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| $F(\bot)$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\{x, y\}$ | $\{x\}$ | $\{y\}$ | $\{z\}$ |
| $F^2(\bot)$ | $\emptyset$ | $\{x\}$ | $\{x, y\}$ | $\{x\}$ | $\{y\}$ | $\{z\}$ |
| $F^3(\bot)$ | $\emptyset$ | $\{x\}$ | $\{x, y\}$ | $\{x\}$ | $\{y\}$ | $\{z\}$ |

unde $\bot = (\emptyset, \ldots, \emptyset)$

# IMP și variabile *live*

Fie setul variabilelor succesoare nodului $n$

$$Join(v_n) = \bigcup \{v_i \mid i \text{ succesor al lui } n\}$$

Formula generală pentru variabilele *live* în nodul $k$ este:

$$v_n = Join(v_n) \setminus Written(n) \cup Read(n)$$

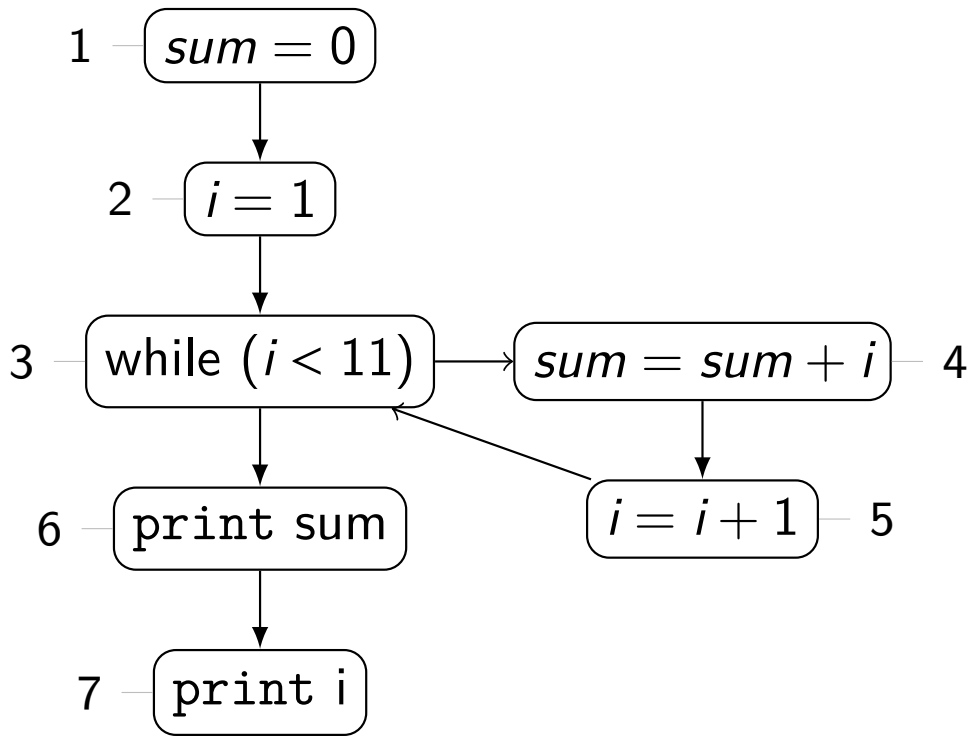
Formele particulare instrucțiunilor IMP:

- Expresii (E) — E — `x + 3, (x > 7)`
- Blocuri de instrucțiuni
  - De atribuire — `x = E;` — $v_n = Join(v_n) \setminus \{x\} \cup Var(E)$
  - Condiționale — `if (E)` — $v_n = Join(v_n) \cup Var(E)$
  - De ciclare — `while (E)` — $v_n = Join(v_n) \cup Var(E)$
  - De tipărire — `print E;` — $v_n = Join(v_n) \cup Var(E)$

unde $Var(E)$ reprezintă setul variabilelor prezente în expresia $E$.

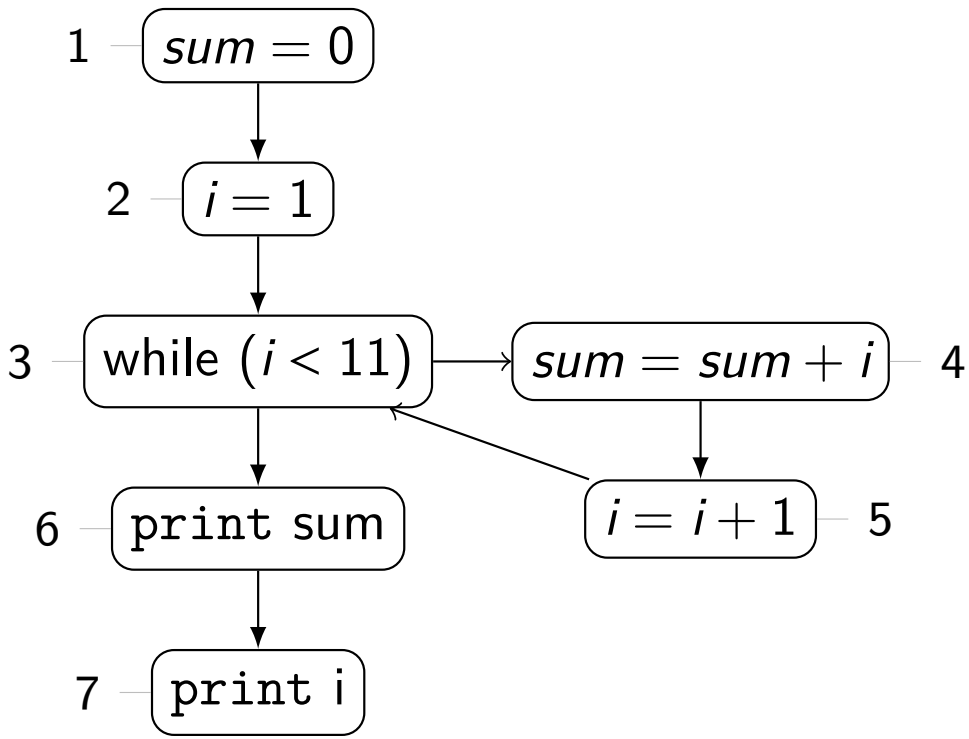
# Control Flow Graphs (CFG)

```
sum = 0;
i = 1;
while (i < 11) {
    sum = sum + i;
    i = i + 1;
}
print sum
print i
```



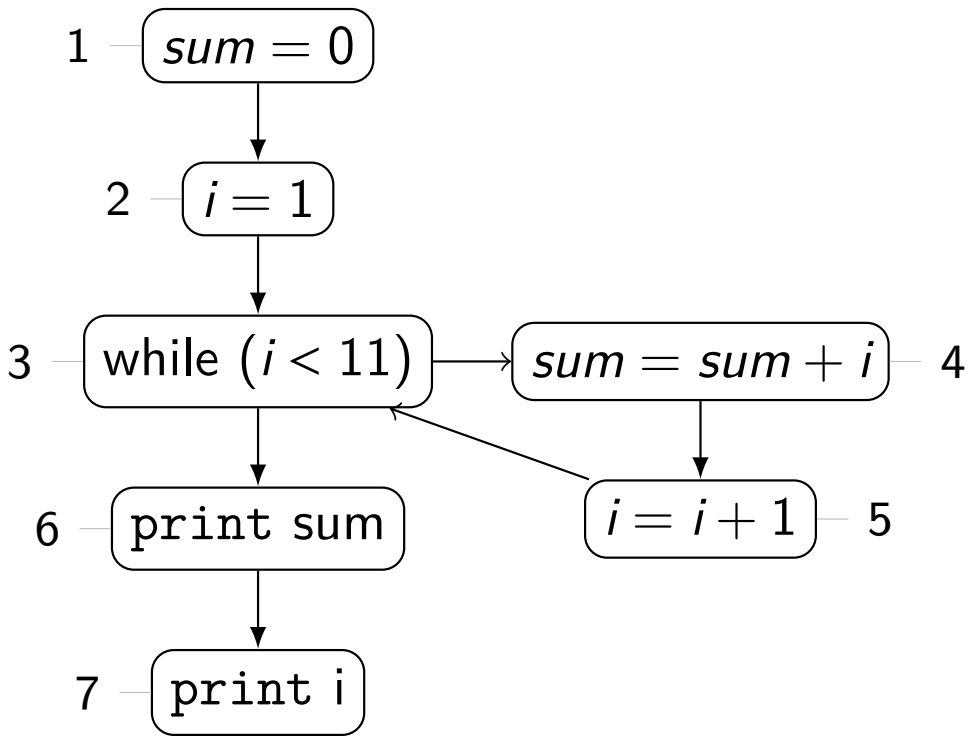
# Control Flow Graphs (CFG)

$$
\begin{aligned}
v_1 &= v_2 \setminus \{sum\} \\
v_2 &= v_3 \setminus \{i\} \\
v_3 &= v_4 \cup v_6 \cup \{i\} \\
v_4 &= (v_5 \setminus \{sum\}) \cup \{i, sum\} \\
v_5 &= (v_3 \setminus \{i\}) \cup \{i\} \\
v_6 &= v_7 \cup \{sum\} \\
v_7 &= \{i\}
\end{aligned}
$$



# Control Flow Graphs (CFG)

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \emptyset \\
v_2 &= \{sum\} \\
v_3 &= \{i, sum\} \\
v_4 &= \{i, sum\} \\
v_5 &= \{i, sum\} \\
v_6 &= \{i, sum\} \\
v_7 &= \{i\}
\end{aligned}
$$



# Rezolvarea folosind teorema de punct fix

$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) =$
$(x_2 \setminus \{sum\}, x_3 \setminus \{i\}, x_4 \cup x_6 \cup \{i\}, (x_5 \setminus \{sum\}) \cup \{i, sum\}, x_3 \setminus \{i\}) \cup \{i\}, x_7 \cup \{sum\}, \{i\})$

Determinarea celui mai mic punct fix:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bot$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| $F(\bot)$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\{sum\}$ | $\{i\}$ |
| $F^2(\bot)$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\{sum, i\}$ | $\{sum, i\}$ | $\emptyset$ | $\{sum\}$ | $\{i\}$ |
| $F^3(\bot)$ | $\emptyset$ | $\{sum\}$ | $\{sum, i\}$ | $\{sum, i\}$ | $\{sum, i\}$ | $\{sum\}$ | $\{i\}$ |

unde $\bot = (\emptyset, \ldots, \emptyset)$

# Exercițiu

```
x = 42;
while (x > 1) {
    y = x / 2;
    if (y > 3)
        x = x - y;
    z = x - 4;
    if (z > 0)
        x = x / 2;
    z = z - 1;
}
print x
```

# Algoritmi pentru determinarea *lfp*

Pentru a obține cel mai mic punct fix (*lfp*) folosim lanțul până obținem convergența

$$\mathbf{F}^0(\bot) = \bot \leq \mathbf{F}(\bot) \leq \mathbf{F}^2(\bot) \leq \cdots \leq \mathbf{F}^n(\bot) \leq \cdots$$

Ceea ce poate fi pus în pseudo-cod în forma:

**Algorithm 1:** NaiveLFP

```
1 x = (⊥, ⊥, ..., ⊥);
2 while x ≠ F(x) do
3     x = F(x);
4 return x;
```

**Complexitate:** depinde de înălțimea laticei $L^n$ și evaluarea lui $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$.

**Convergență:** sunt necesare $n$ iterații.

# Algoritmi pentru determinarea *lfp*

Algoritmul 1 nu profită de structura laticei:

- recalculează intrări neschimbate de la ultima iterație
- nu ia în considerare intrările deja calculate la iterația curentă

Pentru primul exemplu

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) =$$
$$(x_2 \setminus \{x\}\,,\ x_3 \setminus \{y\}\,,\ x_4 \cup x_5 \cup \{x, y\}\,,\ (x_6 \setminus \{z\}) \cup \{x\}\,,\ (x_6 \setminus \{z\}) \cup \{y\}\,,\ \{z\})$$

punctul fix ar fi calculat în 6 iterații

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bot$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| $F(\bot)$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\{z\}$ |
| $F^2(\bot)$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\{x\}$ | $\{y\}$ | $\{z\}$ |
| $F^3(\bot)$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\{x, y\}$ | $\{x\}$ | $\{y\}$ | $\{z\}$ |
| $F^4(\bot)$ | $\emptyset$ | $\{x\}$ | $\{x, y\}$ | $\{x\}$ | $\{y\}$ | $\{z\}$ |
| $F^5(\bot)$ | $\emptyset$ | $\{x\}$ | $\{x, y\}$ | $\{x\}$ | $\{y\}$ | $\{z\}$ |

# Comparație algoritmi *lfp*

Ideal un algoritm eficient ar reduce numărul de iterații:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bot$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| $F(\bot)$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\{z\}$ |
| $F^2(\bot)$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\{x\}$ | $\{y\}$ | $\{z\}$ |
| $F^3(\bot)$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\{x, y\}$ | $\{x\}$ | $\{y\}$ | $\{z\}$ |
| $F^4(\bot)$ | $\emptyset$ | $\{x\}$ | $\{x, y\}$ | $\{x\}$ | $\{y\}$ | $\{z\}$ |
| $F^5(\bot)$ | $\emptyset$ | $\{x\}$ | $\{x, y\}$ | $\{x\}$ | $\{y\}$ | $\{z\}$ |

versus

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bot$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| $F(\bot)$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\{x, y\}$ | $\{x\}$ | $\{y\}$ | $\{z\}$ |
| $F^2(\bot)$ | $\emptyset$ | $\{x\}$ | $\{x, y\}$ | $\{x\}$ | $\{y\}$ | $\{z\}$ |
| $F^3(\bot)$ | $\emptyset$ | $\{x\}$ | $\{x, y\}$ | $\{x\}$ | $\{y\}$ | $\{z\}$ |

# Round Robin *lfp*

Actualizare pe componente tip Gauss-Seidel

- calculează $x_i$ în funcție de $x_{j<i}$ de la iterația curentă
- *lfp* este atins deși o iterație mare produce rezultate diferite față de Alg. 1

**Algorithm 2:** RoundRobinLFP

```
1 (x_1, x_2, ..., x_n) = (⊥, ⊥, ..., ⊥);
2 while (x_1, x_2, ..., x_n) ≠ F(x_1, x_2, ..., x_n) do
3     for i ∈ 1 → n do
4         x_i = F_i(x_1, x_2, ..., x_n);
5 return (x_1, x_2, ..., x_n);
```

**Complexitate:** depinde de înălțimea laticei $L^n$ și evaluarea lui $\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x})$.

**Convergență:** sunt necesare cel mult $n$ iterații.

# Chaotic *lfp*

Actualizare pe componente în ordine aleatoare

- ordinea operațiilor nu contează în Alg. 2
- calculează $x_i$ în funcție de $x_j$ calculați la iterația curentă; fără o ordine anume
- Alg. 2 recalculează în continuare intrările neschimbate de la ultima iterație
- constrângerile trebuie aplicate până la convergență

**Algorithm 3:** ChaoticLFP

1 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\bot, \bot, \ldots, \bot)$;
2 **while** $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq \boldsymbol{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **do**
3 $\quad i = random(1 \to n)$ $x_i = \boldsymbol{F}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
4 return $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

**Complexitate:** depinde de în primul rând de cum este ales $i$ la fiecare iterație, apoi de înălțimea laticei $L^n$ și evaluarea lui $\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x})$.

**Convergență:** algoritmul nu este garantat că se oprește, dar dacă se oprește rezultatul este corect

# SimpleWorkList *lfp*

Fie $dep(v)$ setul de noduri a căror informație depinde de informația din nodul $v$.

**Algorithm 4:** SimpleWorkListLFP

```
1  (x_1, x_2, ..., x_n) = (⊥, ⊥, ..., ⊥);
2  W = {v_1, v_2, ..., v_n};
3  while W ≠ ∅ do
4      v_i = W.removeNext();
5      y = F_i(x_1, x_2, ..., x_n);
6      if y ≠ x_i then
7          x_i = y;
8          for v_j ∈ dep(v_i) do
9              W.add(v_j);
10 return (x_1, x_2, ..., x_n);
```

Funcțiile *removeNext*() și *add*() aleg un nod aleator din $W$ și, respectiv, adaugă un nod în $W$.

# SimpleWorkList *lfp*

Proprietăți

- calculează doar constrângerile necesare nodului curent
- nu recaclulează intrărirle neschimbate de la ultima iterație
- calculează $x_i$ în funcție de $x_j$ calculați la iterația curentă; fără o ordine anume
- constrângerile sunt aplicate până la convergență
- fiecare iterație are același efect ca o iterație a Alg. 3

**Complexitate:** depinde de numărul de noduri $n$, de înălțimea laticei $h$, și evaluarea lui $\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x})$.

**Convergență:** o iterație fie scade volumul de muncă din $W$ fie urcă pe latice; algoritmul se încheie pentru că înălțimea laticei este finită iar iterațiile se opresc când $W$ este vid.