Procesarea semnalelor

Filtre FIR

Paul Irofti

Universitatea din București

Facultatea de Matematică și Informatică

Departmentul de Informatică

Email: paul.irofti@fmi.unibuc.ro

Discretizare și eșantionare

Continuu:

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \tag{1}$$

Discret:

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin(2\pi(f_0 + kf_s)nt_s) \tag{2}$$

unde

- f_0 – frecvența (Hz) măsoară numărul de oscilații într-o secundă
- n – eșantionul, indexul în șirul de timpi $0, 1, 2 \ldots$
- t_s – perioada de eșantionare; constantă (ex. la fiecare secundă)
- nt_s – orizontul de timp (s)
- $f_0 n t_s$ – numărul de oscilații măsurat
- $2\pi f_0 nt$ – unghiul măsurat în radiani (vezi note de curs)
- f_s – frecvența de eșantionare (Hz)
- $f_0 + kf_s$ – frecvența de aliere, $\forall k \in \mathbb{N}$

Transformata Fourier Discretă (DFT)

Definiție

Transformata Fourier a unui semnal discret (aperiodic):

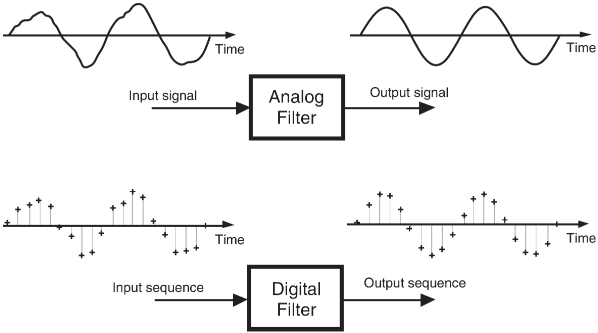
$$\begin{aligned} X(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi mn/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[\cos(2\pi mn/N) - j \sin(2\pi mn/N)\right] \end{aligned} \tag{3}$$

- $X(m)$ – componenta m DFT (ex. $X(0), X(1), X(2), \dots$)
- m – indicele componentei DFT în domeniul frecvenței ($m = 0, 1, \dots, N-1$)
- $x(n)$ – eșantioanele în timp (ex. $x(0), x(1), x(2), \dots$)
- n – indicele eșantioanelor în domeniul timpului ($n = 0, 1, \dots, N-1$)
- N – numărul eșantioanelor în timp la intrare și numărul componentelor în frecvență la ieșire

Filtrare

Definiție

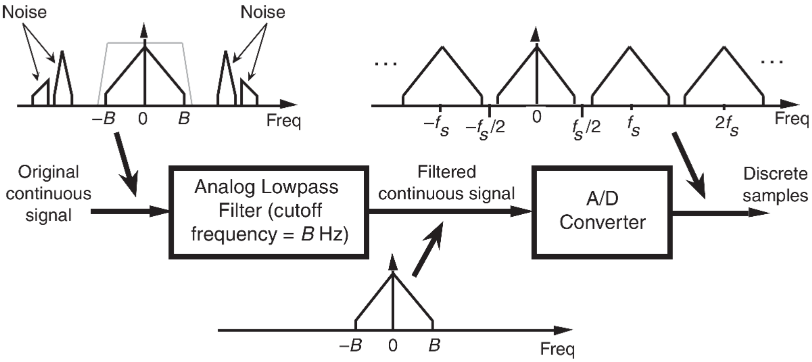
Filtrarea reprezintă prelucrarea unui semnal în domeniul timpului ce induce o schimbare în componența spectrală. Schimbarea constă în reducerea sau eliminare anumitor componente: filtrele permit anumitor frecvențe să treacă și le atenuează pe restul.



Exemplu filtrare

Definiție

Filtru trece-jos este un filtru care acceptă componentele în frecvență mai mică de o bandă B și le elimină sau atenuează pe cele mai mari decât B.



Tipuri de filtre

Filtrele digitale sunt în esență tot semnale discretizate și sunt notate cu $h(n)$.

Există două tipuri de filtre diferențiate prin modul în care răspund la semnalul de la intrare $x(n)$:

- *finite impulse response* (FIR)
  - considerară valorile precedente din $x(n)$
  - se stabilizează rapid la zero după încheierea intrării
  - folosesc operații simple de calcul
- *infinite impulse response* (IIR)
  - considerară valorile precedente din $x(n)$
  - iau în considerare **ieșirile precedente**
  - reprezintă relații de recurență
  - alcătuiesc bucle de *feedback*

Filtrele FIR sunt mai simplu de analizat și implementat, motiv pentru care sunt cel mai des întâlnite în practică.

Filtre FIR

Definiție

Dat un număr finit de intrări nenule $x(n)$, aplicarea unui filtru FIR $h(n)$ va duce tot timpul la o ieșire $y(n)$ ce conține un număr finit de eșantioane nenule.

Calculul mediei este un exemplu bun de filtru FIR.

Exemplu

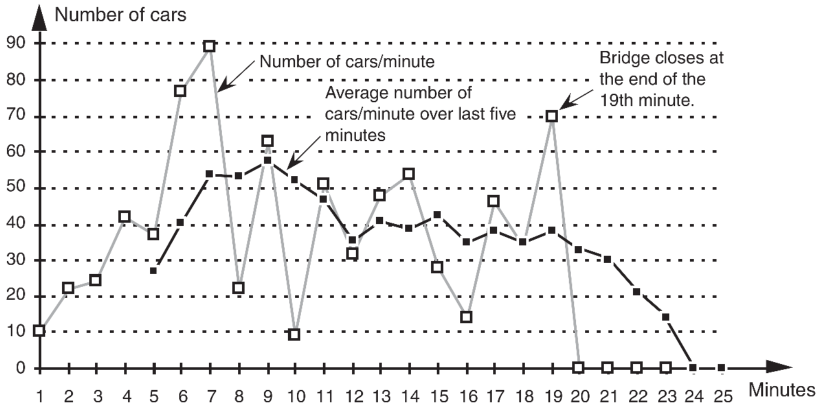
Fie o aplicație ce contorizează traficul pe un pod. În fiecare minut primim numărul de mașini ce au traversat podul. Vrem să calculăm media mobilă într-un interval de timp (fereastră) de 5 minute.

Exemplu: medie mobilă

Minut	Nr. mașini	Media per 5 min.
1	10	-
2	22	-
3	24	-
4	42	-
5	37	27
6	77	40,4
7	89	53,8
8	22	53,4
9	63	57,6
10	9	52

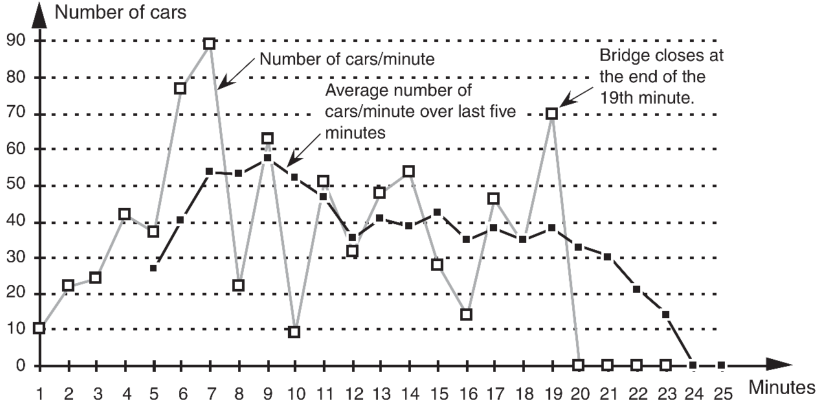
$$\frac{10}{5} = 2$$
$$\frac{10+22}{5} = 6,4$$
$$\frac{10+22+24}{5} = 11,2$$
$$\frac{10+22+24+42}{5} = 19,6$$
$$\frac{10+22+24+42+37}{5} = 27$$
$$\frac{22+24+42+37+77}{5} = 40,4$$
$$\vdots$$
$$\frac{77+89+22+63+9}{5} = 52$$

Exemplu: medie mobilă



Observații medie mobilă

Variațiile mari în timp reprezintă componente de înaltă frecvență.



- schimbările bruște sunt atenuate de către medie
- FIR: ieșirea curentă nu depinde de valori precedente ale ieșirii
- comportament de filtru trece-jos
- ultima intrare este 19; filtrul ajunge rapid la zero după aceasta

Calcul medie mobilă

Ieșirea 5 este calculată în funcție de ultimele 5 intrări:

$$y(5) = \frac{1}{5}[x(1) + x(2) + x(3) + x(4) + x(5)] \tag{4}$$

În cazul general pentru ieșirea n notăm eșantionul k cu $x(k)$ iar formula rezultată este:

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{5}[x(n-4) + x(n-3) + x(n-2) + x(n-1) + x(n)] && (5) \\ &= \frac{1}{5}\sum_{k=n-4}^{n} x(k) && (6) \end{aligned}$$

A ce miroase (6)?

Calcul medie mobilă

Ieșirea 5 este calculată în funcție de ultimele 5 intrări:

$$y(5) = \frac{1}{5}[x(1) + x(2) + x(3) + x(4) + x(5)] \tag{4}$$

În cazul general pentru ieșirea n notăm eșantionul k cu $x(k)$ iar formula rezultată este:

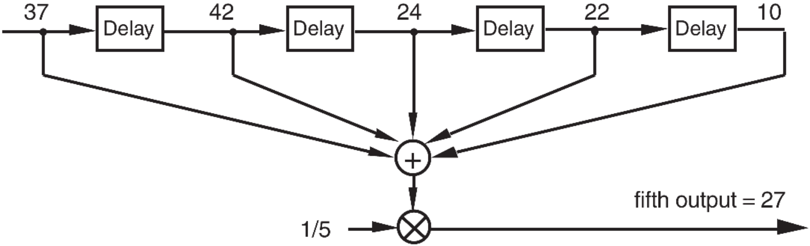
$$y(n) = \frac{1}{5}[x(n-4) + x(n-3) + x(n-2) + x(n-1) + x(n)] \tag{5}$$

$$= \frac{1}{5}\sum_{k=n-4}^{n} x(k) \tag{6}$$

A ce miroase (6)? Răspuns: DFT!

Structura filtrului

Structura filtrului este reprezentată printr-o diagramă hardware (vezi primele cursuri).



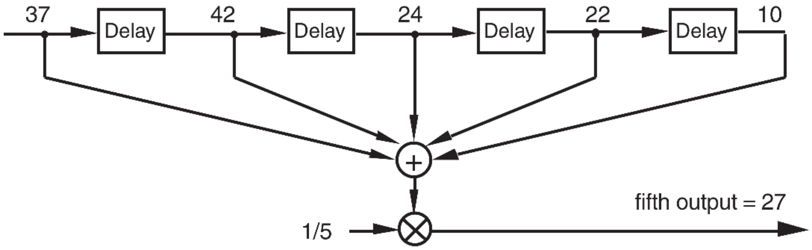
Putem la fel de bine să înmulțim cu $\frac{1}{5}$ și pe urmă să adunăm

$$
\begin{aligned}
y(n) &= \frac{1}{5}x(n-4) + \frac{1}{5}x(n-3) + \frac{1}{5}x(n-2) + \frac{1}{5}x(n-1) + \frac{1}{5}x(n) \\
&= \sum_{k=n-4}^{n} \frac{1}{5}x(k) \qquad (7)
\end{aligned}
$$

A ce miroase (7)?

Structura filtrului

Structura filtrului este reprezentată printr-o diagramă hardware (vezi primele cursuri).



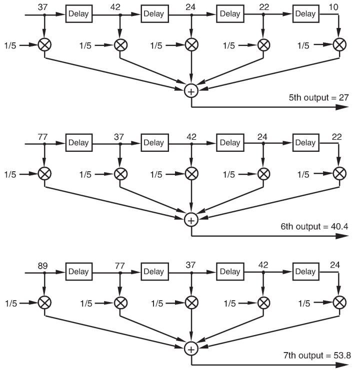
Putem la fel de bine să înmulțim cu $\frac{1}{5}$ și pe urmă să adunăm

$$y(n) = \frac{1}{5}x(n-4) + \frac{1}{5}x(n-3) + \frac{1}{5}x(n-2) + \frac{1}{5}x(n-1) + \frac{1}{5}x(n)$$
$$= \sum_{k=n-4}^{n} \frac{1}{5}x(k) \tag{7}$$

A ce miroase (7)? Răspuns: convoluție!

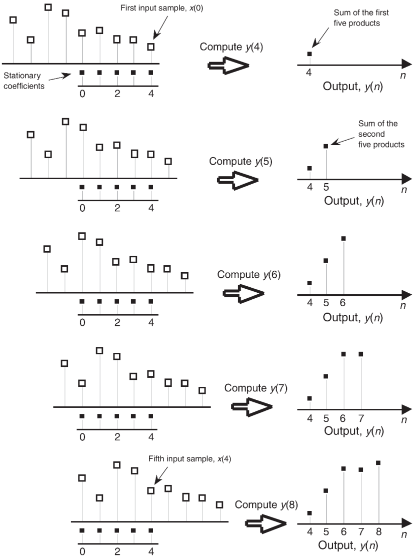
Calcul prin deplasare la dreapta

Observați efectul de deplasare de la stânga la dreapta:



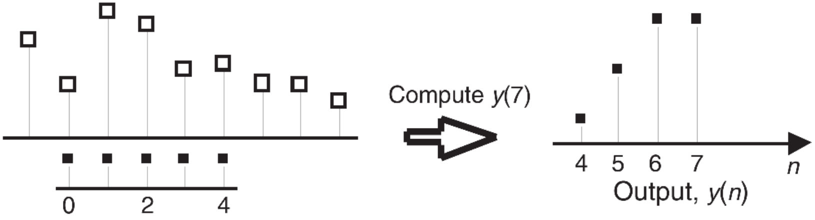
- *right shift*: filtrul aruncă cea mai veche intrare $x(n-5)$
- procesul continuu de deplasare la dreapta $\rightarrow$ *filtru transversal*
- intrările active $x(k)$ se mai numesc și **taps**
- valorile folosite la înmulțire se numesc **coeficienții** filtrului
- răspunsul în frecvență este determinat de *taps* și coeficienți

Filtrarea este convoluție



Filtrarea este convoluție

Fie $x(0), x(1), \ldots, x(n)$ eșantioanele semnalului $x(n)$ **reprezentate de la dreapta la stânga** ca în figură.



Notăm $h(0), h(1), h(2), h(3), h(4)$ semnalul a cărui eșantioane sunt coeficienții filtrului **reprezentați de la stânga la dreapta**.

Atunci (7) devine convoluția filtrului cu taps-urile unde $h(k) = \frac{1}{5}$:

$$y(n) = h(4)x(n-4) + h(3)x(n-3) + h(2)x(n-2) + \\ + h(1)x(n-1) + h(0)x(n) = \sum_{k=n-4}^{n} h(k)x(n-k) \quad (8)$$

Cazul general

Pentru un filtru FIR cu M-tap-uri ieșirea n este:

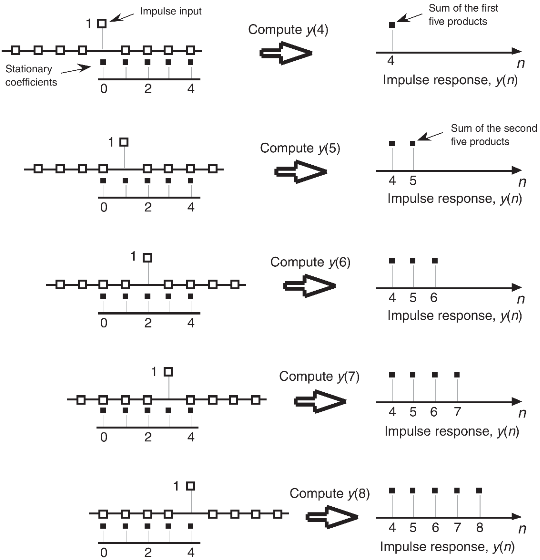
$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \tag{9}$$

Formula de calcul a convoluției pentru filtrele FIR discrete:

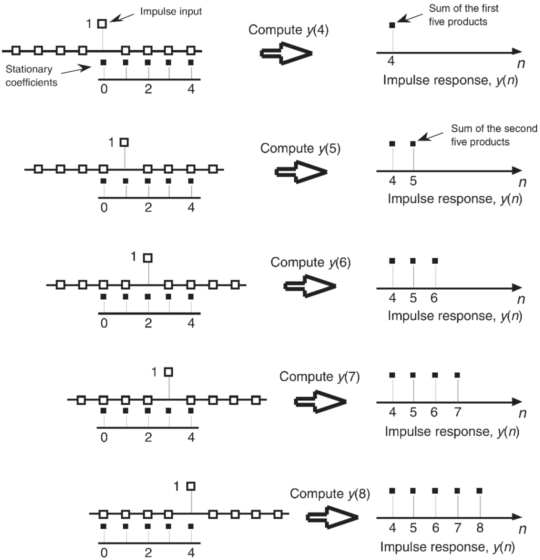
- inversarea ordinii axei timpului pentru $x(n)$
- iterația deplasează de la dreapta la stânga coeficienții filtrului
- pentru fiecare intrare nouă din $x(n)$ efectuăm suma produselor pentru a produce o ieșire $y(n)$
- similar cu operația DOT la înmulțirea matricelor

$$y(n) = h(k) * x(n) \tag{10}$$

Răspunsul la impuls dirac



Răspunsul la impuls dirac



Răspunsul la implus este identic cu coeficienții filtrului!

Teorema convoluției

Teoremă

Transformata Fourier Discretă (DFT) a convoluției dintre răspunsului la impuls a unui filtru (a coeficienților) și o secvență de M intrări (taps) este egală cu produsul dintre DFT-ul intrării și DFT-ul răspunsului la impuls a filtrului.

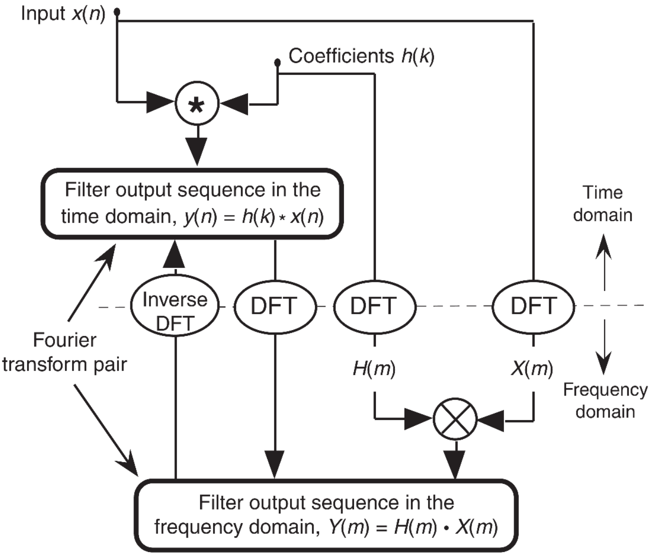
$$y(n) = h(k) * (n) \underset{IDFT}{\overset{DFT}{\Longleftrightarrow}} H(m)X(m) = Y(m) \tag{11}$$

Convoluția în domeniul timpului este produs în domeniul frecvenței!

Componenta spectrală $Y(m)$ este DFT-ul semnalului $h(k) * x(n)$.

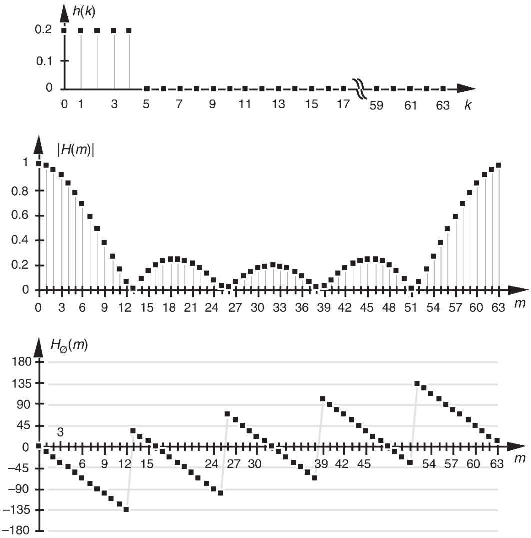
Semnalul $h(k) * x(n)$ este obținut din IDFT-ul bin-ului $Y(m)$.

Teorema convoluției



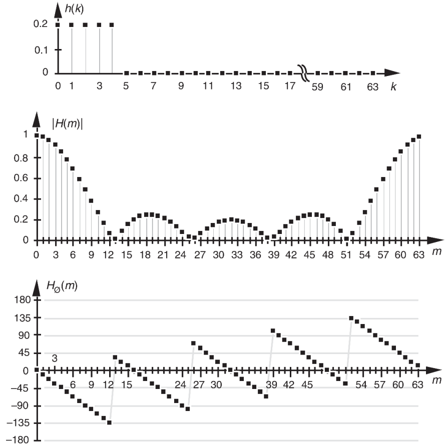
DFT a filtrului medie cu extensie la $N = 64$ puncte

Sunt adăugate 59 de zerouri, iar magnitudinea este normalizată.



DFT a filtrului medie cu extensie la $N = 64$ puncte

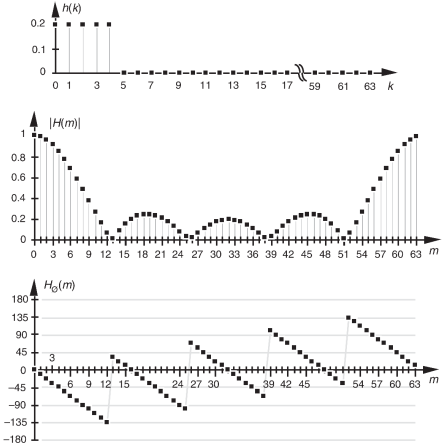
Trecerea bruscă a coeficienților de la 0,2 la 0 creează *sidelobes*.



- ce funcție este $H(m)$?
- care este frecvența de pliere (folding)?
- care este perioada în domeniul frecvenței?

DFT a filtrului medie cu extensie la $N = 64$ puncte

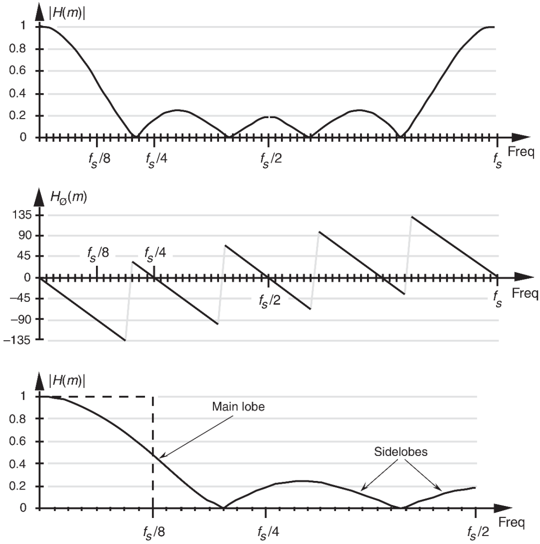
Trecerea bruscă a coeficienților de la 0,2 la 0 creează *sidelobes*.



- ce funcție este $H(m)$? Răspuns: $\mathrm{sinc}(\cdot)$
- care este frecvența de pliere (folding)? Răspuns: $m = 32$
- care este perioada în domeniul frecvenței? Răspuns: f_s

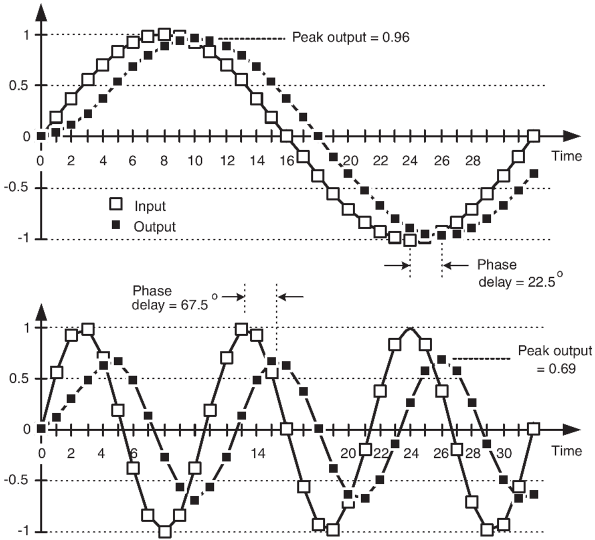
Analiza răspunsului în frecvență a filtrului

Media se comportă ca un filtru trece-jos

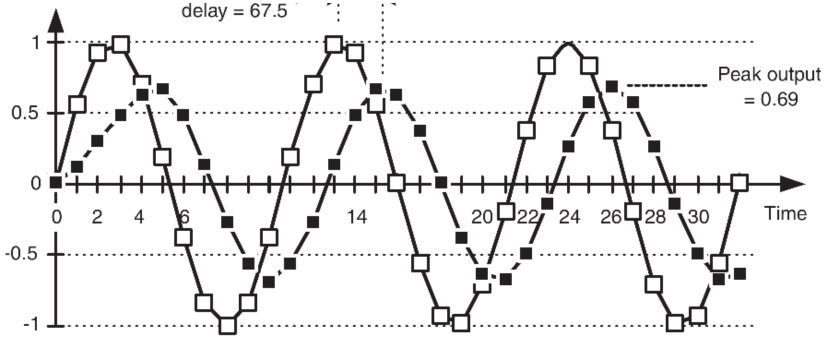


Exemplu sin(·): intrarea sinusoide $f_s/32$ și $3f_s/32$

Atenuează componentele cu frecvență înaltă și păstrează joasele.



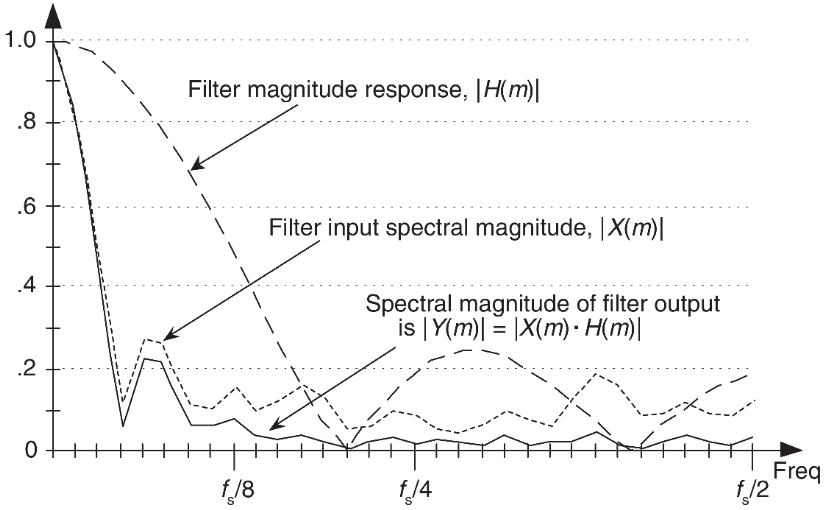
Observații exemplu sinusoidă



- primele 4 ieșiri nu sunt sinusoidale $\rightarrow$ *răspuns tranzitoriu*
- numărul de eșantioane de tranziție este egal cu numărul D de unități de întârziere ale filtrului (**nu cu numărul de coeficienți nenuli!**)
- ieșirile nu sunt valide până la $y(D+1)$

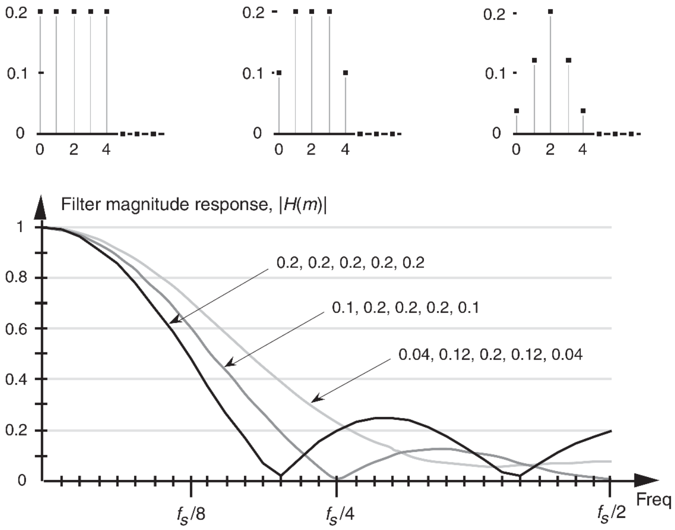
Exemplu pod: răspunsul în frecvență

Atenuează componentele cu frecvență înaltă și păstrează joasele.



Efectul coeficienților asupra filtrului

Trecerea bruscă a coeficienților de la 0,2 la 0 creează *sidelobes*.



Reducerea *sidelobes* lărgește *mainlobe*.

Generalizare

Construcția filtrelor FIR transversale implică schimbarea coeficienților și a numărului de tap-uri, dar nu schimbă altfel structura filtrului medie studiat.