

# Procesarea semnalelor

## Transformata Fourier.

Paul Irofti

Universitatea din București

Facultatea de Matematică și Informatică

Departmentul de Informatică

Email: [paul.irofti@fmi.unibuc.ro](mailto:paul.irofti@fmi.unibuc.ro)

# Discretizare și eșantionare

Continuu:

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \quad (1)$$

Discret:

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin(2\pi (f_0 + k f_s) n t_s) \quad (2)$$

unde

- ▶  $f_0$  – frecvența (Hz) măsoară numărul de oscilații într-o secundă
- ▶  $n$  – eșantionul, indexul în șirul de timpi  $0, 1, 2 \dots$
- ▶  $t_s$  – perioada de eșantionare; constantă (ex. la fiecare secundă)
- ▶  $n t_s$  – orizontul de timp (s)
- ▶  $f_0 n t_s$  – numărul de oscilații măsurat
- ▶  $2\pi f_0 n t$  – unghiul măsurat în radiani (vezi note de curs)
- ▶  $f_s$  – frecvența de eșantionare (Hz)
- ▶  $f_0 + k f_s$  – frecvența de aliare,  $\forall k \in \mathbb{N}$

# Cum trecem în frecvență și înapoi în timp?

Transformata Fourier și Transformata Fourier Inversă ne ajută să trecem din domeniul timpului în domeniul frecvenței și vice-versa.

# Transformata Fourier Continuă (TF)

## Definiție

*Transformata Fourier a unui semnal continuu:*

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} \quad (3)$$

*transformă semnalul continuu din domeniul timpului  $x(t)$  în semnalul continuu  $X(f)$  din domeniul frecvenței.*

Aici  $e$  este numărul lui Euler, baza logaritmului natural, și  $j$  reprezintă numărul complex  $j = \sqrt{-1}$ .

## Definiție

### *Relația lui Euler*

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha \quad (4)$$

*pune în legătură numerele complexe, funcțiile trigonometrice și funcțiile exponențiale.*

Pentru un număr complex  $z \in \mathbb{C}$ :

$$z = a + jb = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi) = re^{j\varphi} \quad (5)$$

unde  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  este mărimea și  $\varphi = \arctan \frac{b}{a}$

Pentru Transformata Fourier Continuă:

$$e^{-j\alpha} = \cos(-\alpha) + j \sin(-\alpha) = \cos \alpha - j \sin \alpha \quad (6)$$

# Radiani

## Definiție

*Radianii descriu unghiul unui arc de cerc drept raportul dintre lungimea arcului împărțită la rază.*

## Exemplu

$$1 \text{ rad} = 180^\circ / \pi$$

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

# Frecvența unghiulară și frecvența de eșantionare

## Definiție

*Frecvența unghiulară este frecvența exprimată în radiani pe secundă:*

$$\Omega = \frac{\omega}{T} = \frac{[rad]}{[s]} = \omega f \quad (7)$$

## Definiție

*Frecvența de eșantionare în radiani este:*

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_s \quad (8)$$

Dacă un semnal este periodic, iar eşantioanele  $x[n]$  se repetă o dată la fiecare  $N$  măsurători atunci discretizarea timp-frecvență devine:

- ▶ discretizarea timpului  $t \rightarrow nt_s$  și
- ▶ frecvența  $f \rightarrow \frac{1}{N}$
- ▶ frecvența unghiulară  $\Omega \rightarrow \frac{\omega}{N}$
- ▶ frecvența unghiulară de eşantionare  $\Omega \rightarrow \frac{2\pi}{N}$
- ▶  $e^{-j\Omega t} = e^{-j2\pi f t} \rightarrow e^{-j2\pi f_s n t_s} = e^{-j\frac{2\pi}{N} n t_s}$



# Transformata Fourier Discretizată în Timp (DTFT)

## Definiție

*Transformata Fourier Continuă a unui semnal discretizat în timp:*

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \quad (9)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nt_s) e^{-j2\pi fnt_s} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nt_s) e^{-j\Omega nt_s} \quad (10)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi fnt_s} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega nt_s} \quad (11)$$

*numită în literatură Discrete-Time Fourier Transform (DTFT).*

# Transformata Fourier Discretizată în Timp (DFS)

Fie un șir  $x[n]$  cu perioadă  $N$  a.î.  $x[n] = x[n + kN]$ ,  $\forall n, k \in \mathbb{N}$ .

## Definiție

*Transformata Fourier a semnalului  $x[n]$  cu perioadă  $N$  este:*

$$X(m) = \sum_n x(n) e^{-j2\pi mn/N} \quad (12)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_m X(m) e^{j2\pi mn/N} \quad (13)$$

*numită în literatură Discrete Fourier Sequence (DFS).*

## Remarcă

*Dacă semnalul este periodic, observăm că informația se repetă o dată la  $N$  eșantioane a.î. putem limita capetele sumei la intervalul  $0 \dots N - 1$ .*

# Transformata Fourier Discretă (DFT)

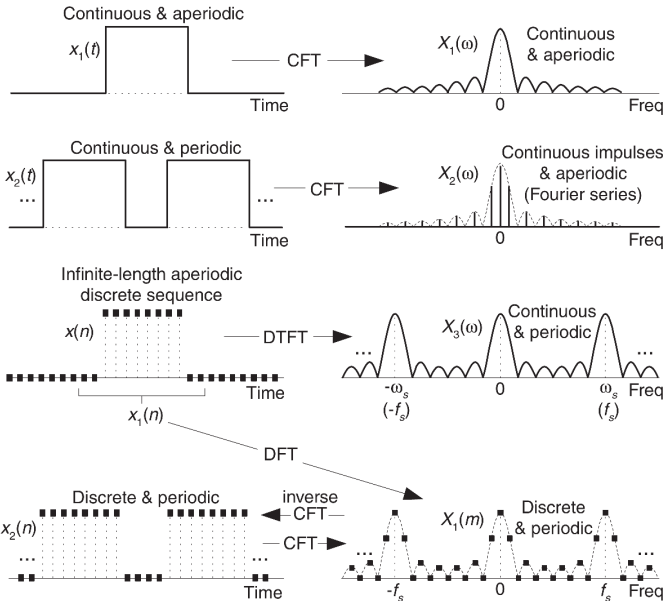
## Definiție

*Transformata Fourier a unui semnal discret (aperiodic):*

$$\begin{aligned} X(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi mn/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) [\cos(2\pi mn/N) - j \sin(2\pi mn/N)] \end{aligned} \tag{14}$$

- ▶  $X(m)$  – componenta  $m$  DFT (ex.  $X(0), X(1), X(2), \dots$ )
- ▶  $m$  – indicele componentei DFT în domeniul frecvenței ( $m = 0, 1, \dots, N - 1$ )
- ▶  $x(n)$  – eșantioanele în timp (ex.  $x(0), x(1), x(2), \dots$ )
- ▶  $n$  – indicele eșantioanelor în domeniul timpului ( $n = 0, 1, \dots, N - 1$ )
- ▶  $N$  – numărul eșantioanelor în timp la intrare și numărul componentelor în frecvență la ieșire

# CFT, DTFT, DFT



## Exemplu DFT $N = 4$

Pentru  $N = 4$  eşantioane, vom avea  $n, m = \{0, 1, 2, 3\}$ :

$$X(m) = \sum_{n=0}^3 x(n) [\cos(2\pi mn/4) - j \sin(2\pi mn/4)] \quad (15)$$

Pentru  $m = 0$ :

$$\begin{aligned} X(0) = & x(0) \left[ \cos(2\pi \underbrace{0 \cdot 0}_{m \cdot n} / 4) - j \sin(2\pi \underbrace{0 \cdot 0}_{m \cdot n} / 4) \right] \\ & + x(1) [\cos(2\pi 0 \cdot 1/4) - j \sin(2\pi 0 \cdot 1/4)] \\ & + x(2) [\cos(2\pi 0 \cdot 2/4) - j \sin(2\pi 0 \cdot 2/4)] \\ & + x(3) [\cos(2\pi 0 \cdot 3/4) - j \sin(2\pi 0 \cdot 3/4)] \end{aligned}$$

## Exemplu DFT $N = 4$

$$\begin{aligned} X(1) &= x(0) [\cos(2\pi \overbrace{1 \cdot 0}^{m \cdot n} / 4) - j \sin(2\pi \overbrace{1 \cdot 0}^{m \cdot n} / 4)] \\ &\quad + x(1) [\cos(2\pi 1 \cdot 1 / 4) - j \sin(2\pi 1 \cdot 1 / 4)] \\ &\quad + x(2) [\cos(2\pi 1 \cdot 2 / 4) - j \sin(2\pi 1 \cdot 2 / 4)] \\ &\quad + x(3) [\cos(2\pi 1 \cdot 3 / 4) - j \sin(2\pi 1 \cdot 3 / 4)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(2) &= x(0) [\cos(2\pi 2 \cdot 0 / 4) - j \sin(2\pi 2 \cdot 0 / 4)] \\ &\quad + x(1) [\cos(2\pi 2 \cdot 1 / 4) - j \sin(2\pi 2 \cdot 1 / 4)] \\ &\quad + x(2) [\cos(2\pi 2 \cdot 2 / 4) - j \sin(2\pi 2 \cdot 2 / 4)] \\ &\quad + x(3) [\cos(2\pi 2 \cdot 3 / 4) - j \sin(2\pi 2 \cdot 3 / 4)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(3) &= x(0) [\cos(2\pi 3 \cdot 0 / 4) - j \sin(2\pi 3 \cdot 0 / 4)] \\ &\quad + x(1) [\cos(2\pi 3 \cdot 1 / 4) - j \sin(2\pi 3 \cdot 1 / 4)] \\ &\quad + x(2) [\cos(2\pi 3 \cdot 2 / 4) - j \sin(2\pi 3 \cdot 2 / 4)] \\ &\quad + x(3) [\cos(2\pi 3 \cdot 3 / 4) - j \sin(2\pi 3 \cdot 3 / 4)] \end{aligned}$$

# Transformata Fourier inversă

Transformata Fourier a unui semnal discret:

$$\begin{aligned} X(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi mn/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) [\cos(2\pi mn/N) - j \sin(2\pi mn/N)] \end{aligned}$$

## Definiție

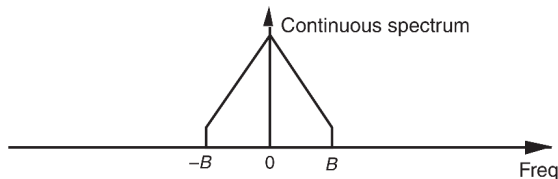
*Transformata Fourier inversă a unui semnal discret (IDFT):*

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) e^{j2\pi mn/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) [\cos(2\pi mn/N) + j \sin(2\pi mn/N)] \end{aligned} \tag{16}$$

# Recapitulare: Semnale trece-jos (lowpass)

## Definiție

*Un semnal trece-jos este un semnal limitat în bandă și centrat în jurul frecvenței zero.*



Sursă: (Lyons 2004)

## Remarcă

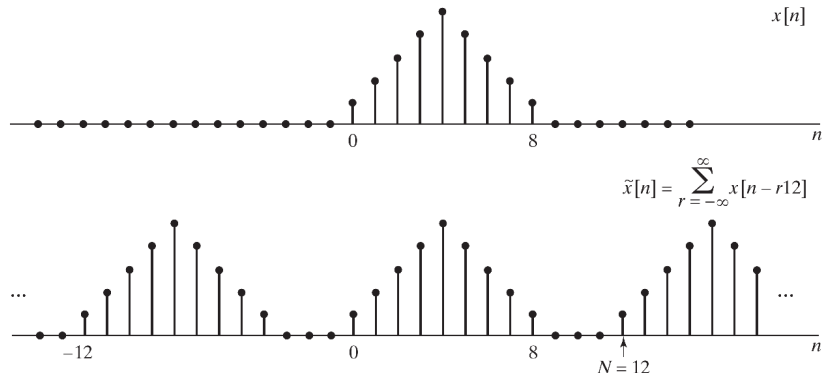
*Din considerente didactice, aici am analizat spectrul continuu obținut din Transformata Fourier Continuă. În practică folosim Transformata Fourier Discretă.*



# Extinderea unui semnal discret

Dacă avem de a face cu un semnal discret aperiodic, îl putem extinde la un semnal periodic pentru a aplica DFT.

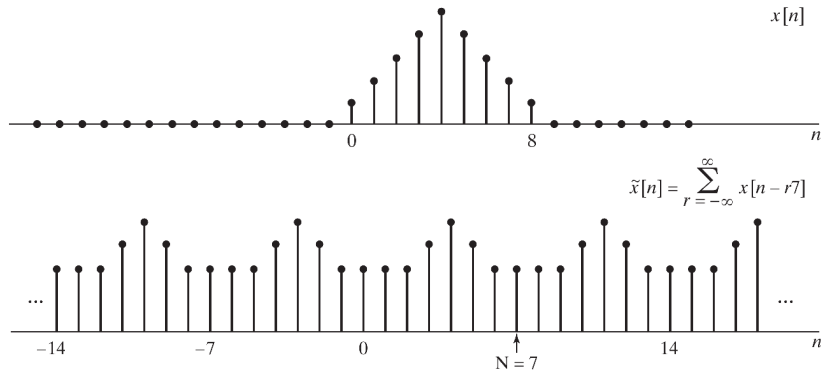
Exemplu eșantionare a transformatei Fourier cu  $N = 12$ :



Sursă: (Oppenheim and Schaffer 2014)

# Extinderea unui semnal discret

Atenție la fenomenul de aliere când extindem (exemplu  $N = 7$ ).



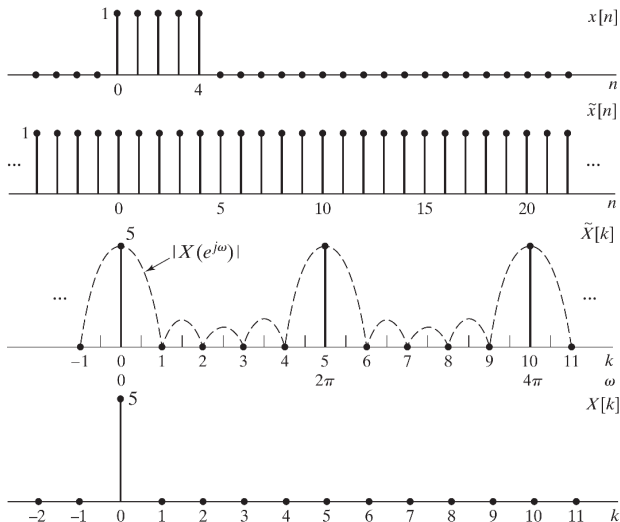
Sursă: (Oppenheim and Schaffer 2014)

## Remarcă

*Problema alierii este aceeași în frecvență ca și în timp. Metoda de discretizare și eșantionare fiind aceeași. Doar domeniul se schimbă.*

# Exemplu: treaptă

Atenție la efectele secundare extinderii unui semnal aperiodic.



Sursă: (Oppenheim and Schaffer 2014)

# Frecvențe importante

Frecvența fundamentală este

$$f = \frac{f_s}{N} \quad (17)$$

Frecvențele analizate sunt:

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} \quad (18)$$

Componenta  $m = 0$  este numită componenta curent continuu (*Direct Current (DC)*)

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)[\cos(0) - j\sin(0)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \quad (19)$$

Magnitudinea și puterea componentelor (*power spectrum (PS)*):

$$X(m) = X_{\text{real}}(m) + jX_{\text{imag}}(m) \quad (20)$$

$$X_{\text{mag}} = |X(m)| \quad X_{\text{PS}}(m) = X_{\text{mag}}(m)^2 \quad (21)$$

## Exemplu: Frecvențe importante

Pentru un semnal continuu eșantionat cu 500 eșantioane pe secundă asupra căruia se aplică DFT în 16 puncte avem:

$$f = \frac{f_s}{N} = \frac{500}{16} = 31,25Hz$$

Frecvențele analizate sunt:

$$X(0) = 0 \cdot 31.25 = 0Hz \quad (\text{prima componentă în frecvență})$$

$$X(1) = 1 \cdot 31.25 = 31,25Hz \quad (\text{a doua componentă în frecvență})$$

$$X(2) = 2 \cdot 31.25 = 62,5Hz \quad (\text{a treia componentă în frecvență})$$

$$X(3) = 3 \cdot 31.25 = 93,75Hz \quad (\text{a patra componentă în frecvență})$$

$\vdots$

$$X(15) = 15 \cdot 31.25 = 468,75Hz \quad (\text{componenta 16 în frecvență})$$

## Exemplu: Calcul DFT

Vom calcula 8 componente DFT pentru semnalul alcătuit din două componente de 1kHz și 2kHz:

$$x(t) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot t) + \frac{1}{2} \sin(2\pi \cdot 2000 \cdot t + \frac{3\pi}{4})$$

pentru asta avem nevoie de  $N = 8$  eșantioane în timp pentru care alegem frecvența de eșantionare  $f_s = 8000$ .

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} =$$

## Exemplu: Calcul DFT

Vom calcula 8 componente DFT pentru semnalul alcătuit din două componente de 1kHz și 2kHz:

$$x(t) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot t) + \frac{1}{2} \sin(2\pi \cdot 2000 \cdot t + \frac{3\pi}{4})$$

pentru asta avem nevoie de  $N = 8$  eșantioane în timp pentru care alegem frecvența de eșantionare  $f_s = 8000$ .

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} = \{0kHz, 1kHz, 2kHz, \dots, 7kHz\} \quad (22)$$

## Exemplu: Calcul DFT

Vom calcula 8 componente DFT pentru semnalul alcătuit din două componente de 1kHz și 2kHz:

$$x(t) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot t) + \frac{1}{2} \sin(2\pi \cdot 2000 \cdot t + \frac{3\pi}{4})$$

pentru asta avem nevoie de  $N = 8$  eșantioane în timp pentru care alegem frecvența de eșantionare  $f_s = 8000$ .

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} = \{0kHz, 1kHz, 2kHz, \dots, 7kHz\} \quad (22)$$

Transformata Fourier devine:

$$X(m) = \sum_{n=0}^7 x(n) [\cos(2\pi mn/8) + j \sin(2\pi mn/8)]$$

$$X(1) = \sum_{n=0}^7 x(n) [\cos(2\pi n/8) + j \sin(2\pi n/8)]$$

$\vdots$



# Exemplu: Calcul DFT

Fie cele 8 eșantioane în timp:

$$x[0] = 0,3535,$$

$$x[1] = 0,3535$$

$$x[2] = 0,6464,$$

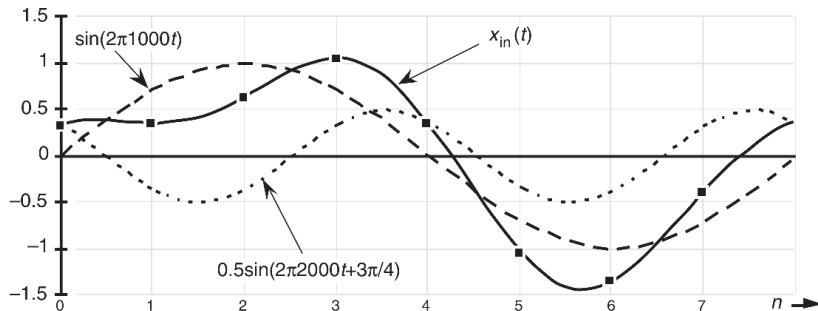
$$x[3] = 1,0607$$

$$x[4] = 0,3535,$$

$$x[5] = -1,0607$$

$$x[6] = -1,3535,$$

$$x[7] = -0,3535$$



Sursă: (Lyons 2004)

## Exemplu: Calcul DFT

$$\begin{aligned} X(1) &= \sum_{n=0}^7 x(n) [\cos(2\pi n/8) + j \sin(2\pi n/8)] = \\ &= x(0) \cos(0) - jx(0) \sin(0) + \\ &+ x(1) \cos(\pi/4) - jx(1) \sin(\pi/4) + \\ &+ x(2) \cos(\pi/2) - jx(2) \sin(\pi/2) + \\ &+ x(3) \cos(3\pi/4) - jx(3) \sin(3\pi/4) + \\ &+ x(4) \cos(\pi) - jx(4) \sin(\pi) + \\ &+ x(5) \cos(5\pi/4) - jx(5) \sin(5\pi/4) + \\ &+ x(6) \cos(3\pi/2) - jx(6) \sin(3\pi/2) + \\ &+ x(7) \cos(7\pi/4) - jx(7) \sin(7\pi/4) = \\ &= \dots = 0, 0 - j4, 0 \end{aligned}$$

## Exemplu: Calcul DFT

Aplicăm formula pentru calculul celorlalte componente:

$$X(1) = 0,0 - j4,0$$

$$X(2) = 1,414 + j1,414$$

$$X(3) = 0,0 + j0,0$$

$$X(4) = 0,0 + j0,0$$

$$X(5) = 0,0 + j0,0$$

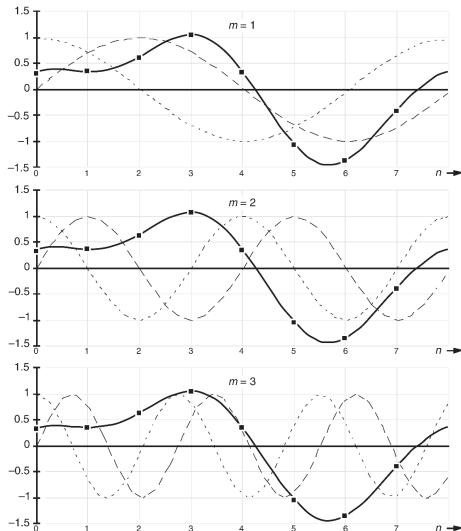
$$X(6) = 1,414 - j1,414$$

$$X(7) = 0,0 + j4,0$$

Cât este  $X(0)$  ?

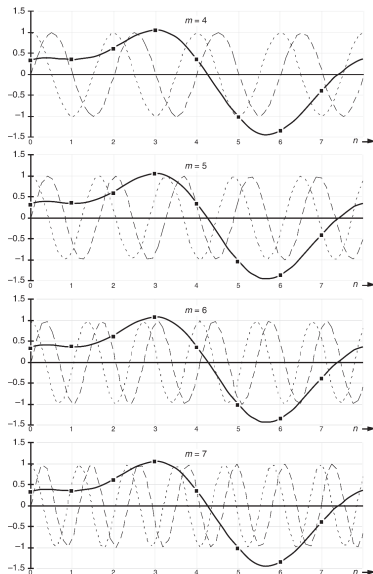
# Exemplu: Componentele DFT

Cum arată componentele cos și sin în funcție de  $m$ ?



Sursă: (Lyons 2004)

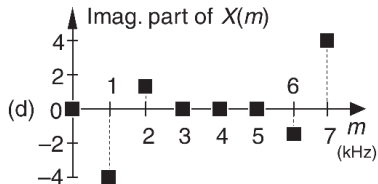
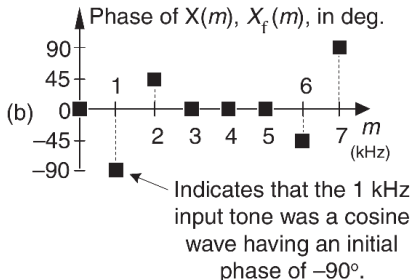
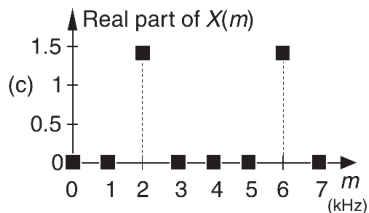
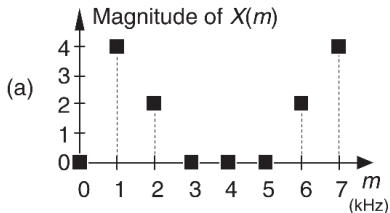
# Exemplu: Componentele DFT



Sursă: (Lyons 2004)

# Exemplu: Rezultate DFT

Simetrie și anti-simetrie în componentele spectrale:



Pentru semnale  $x(n)$  reale, DFT este simetrică în jurul  $N/2$ .

$$X(m) = |X(m)|e^{j\varphi} = |X(N-m)|e^{-j\varphi} = \overline{X}(N-m) \quad (23)$$

Putem arăta ușor această proprietate folosind forma exponențială:

$$\begin{aligned} X(N-m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi n(N-m)/N} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \underbrace{e^{-j2\pi nN/N}}_{\cos(2\pi n) - j\sin(2\pi n)} e^{j2\pi nm/N} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{j2\pi nm/N} = \overline{X}(N-m) \end{aligned}$$

Fie  $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$ , atunci DFT este suma DFT-urilor pe componente:

$$X(m) = X_1(m) + X_2(m) \quad (24)$$

Putem demonstra din nou ușor folosind forma exponențială:

$$\begin{aligned} X(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{[x_1(n) + x_2(n)]}_{x(n)} e^{-j2\pi nm/N} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) e^{-j2\pi nm/N} + \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n) e^{-j2\pi nm/N} \\ &= X_1(m) + X_2(m) \end{aligned}$$



# Magnitudine

De ce nu corespunde amplitudinea în timp cu cea în frecvență?

# Magnitudine

De ce nu corespunde amplitudinea în timp cu cea în frecvență?

Dacă avem o sinusoidă cu

- ▶ frecvența  $f < f_s/2$
- ▶ amplitudinea  $A_0$
- ▶ cu număr întreg de perioade de-alungul celor  $N$  eșantioane

atunci amplitudinea în frecvență este:

$$M_r = A_0 N/2 \quad (25)$$

dacă semnalul este complex:

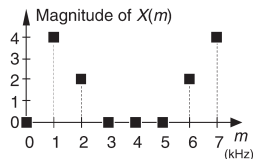
$$M_c = A_0 N \quad (26)$$

Din această cauză întâlnim în practică DFT scalat cu  $\frac{1}{N}$  sau  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ :

$$X(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nm/N} \quad (27)$$

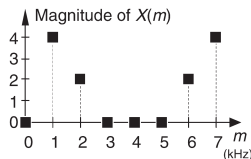
# Axa frecvenței

Care este frecvența cu cea mai mare magnitudine  $|X(m)|$  în Hz din figură? (în figură pe axa frecvenței avem valorile lui  $m$ )



## Axa frecvenței

Care este frecvența cu cea mai mare magnitudine  $|X(m)|$  în Hz din figură? (în figură pe axa frecvenței avem valorile lui  $m$ )



**Răspuns:** Depinde de rata de eșantionare  $f_s$ . În figură ne interesează  $m = 1$  pentru care aplicăm (22) cu  $f_s = 8000\text{Hz}$ :

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} = f_a(1) = \frac{1 \cdot 8000}{8} = 1000\text{Hz} \quad (28)$$

Pentru frecvența de eșantionare  $f_s = 75\text{Hz}$  obținem altă frecvență:

$$f_a(1) = \frac{1 \cdot 75}{8} = 9,375\text{Hz} \quad (29)$$

pentru că rezoluția (spațiul între eșantioanele frecvenței) este  $f_s/N$ .

## Teoremă

*O deplasare  $k$  în timp a semnalului periodic  $x(n)$  rezultă într-o deplasare constantă a fazei în domeniul frecvenței cu  $2\pi km/n$  radiani (sau  $360km/N$  grade).*

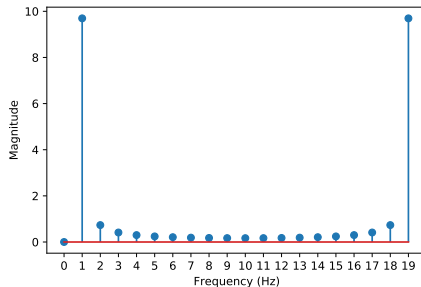
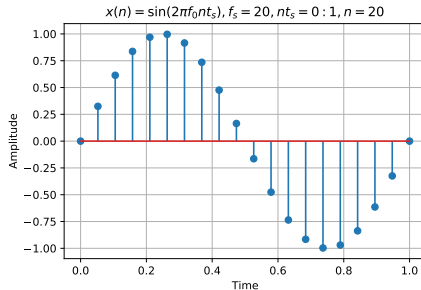
$$X_{\text{shifted}}(m) = e^{j2\pi km/N} X(m) \quad (30)$$

În exemplul nostru, o întârziere cu  $k = 3$  rezultă într-o multiplicare cu  $e^{j2\pi 3 \cdot m/8}$  iar pentru  $m = 1$  avem:

$$X_{\text{shifted}}(1) = e^{j2\pi 3 \cdot 1/8} X(1) = e^{j2\pi 3 \cdot 1/8} 4e^{-j\pi/2} = 4e^{j\pi/4}$$

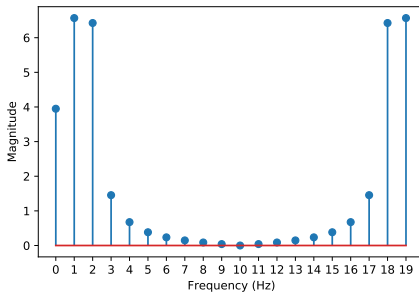
# DFT în practică

Transformata DFT  
pentru sinusoida noastră  
din primul curs. Ce se  
întâmplă în punctul 19?  
Dar în punctele 2 și 3?



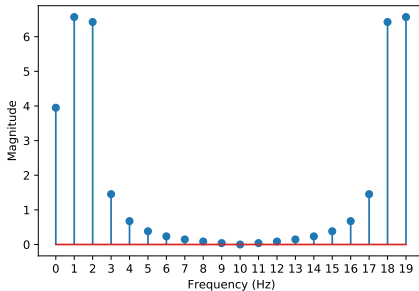
# DFT în practică

Ce semnal reprezintă această spectrogramă?

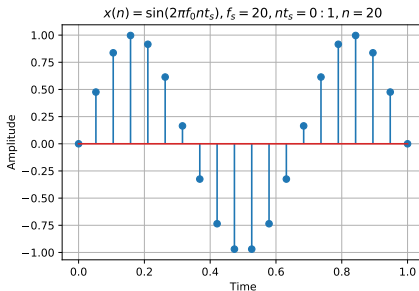


# DFT în practică

Ce semnal reprezintă această spectrogramă?



Tot o sinusoidă!  
Frecvența diferă:  
 $f_0 = 1,5 \text{ Hz}$ .





În practică DFT produce rezultate în domeniul frecvenței ce pot induce în eroare datorită frecvențelor de analiză:

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N}, \quad m = \{0, 1, 2, \dots, N - 1\} \quad (31)$$

DFT reflectă realitatea doar când energia semnalului dat coincide cu frecvențele de analiză din (31).

## Remarcă

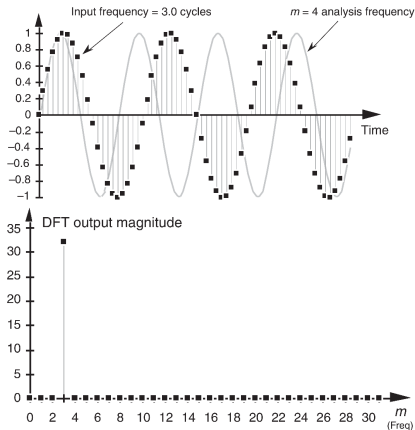
*Dacă semnalul dat conține o componentă în frecvență intermediară frecvențelor de analiză (31), atunci aceasta va apărea parțial în toate cele  $N$  componente: **leakage**.*

## Definiție

*Componentele în frecvență se numesc **output bins** sau simplu **bins**.*

# Exemplu fără leak

Fie un semnal sinusoidal eșantionat în  $N = 64$  de puncte cu 3 perioade complete în orizontul de timp analizat.

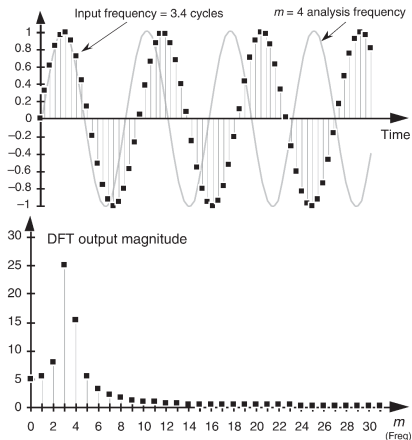


Sursă: (Lyons 2004)

Observăm că toate frecvențele în afară de bin-ul  $m = 3$  sunt nule.

# Exemplu leak

Fie un semnal sinusoidal eșantionat în  $N = 64$  de puncte cu 3,4 perioade complete în orizontul de timp analizat.



Sursă: (Lyons 2004)

Observăm că apare fenomenul de **leak** în celelalte bin-uri.

# Apariția unui leak

## Remarcă

*Fenomenul de leak apare când semnalul nu are un număr întreg de perioade în orizontul de timp eșantionat.*

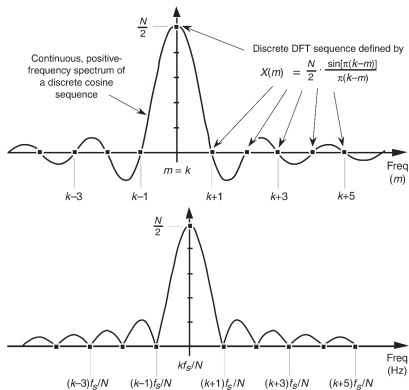
## Teoremă

*Pentru un semnal sinusoidal având  $k \in \mathbb{R}$  perioade în orizontul de timp de  $N$  eșantioane, putem aproxima amplitudinea unui bin DFT în funcție de  $m$  cu ajutorul funcției sinc:*

$$X(m) = \frac{A_0 N}{2} \frac{\sin[\pi(k - m)]}{\pi(k - m)} \quad (32)$$

# Funcția sinc. Lobi.

$N$  eșantioane DFT ce conțin  $k$  perioade a unei sinusoide: sus avem amplitudinea în funcție de bin-ul  $m$ , jos magnitudinea în frecvență.

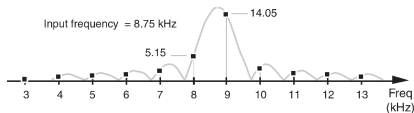
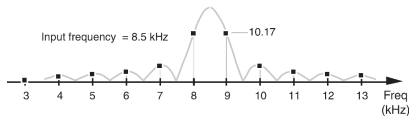
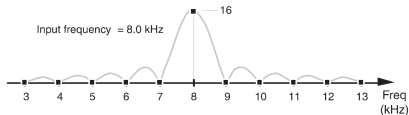


Sursă: (Lyons 2004)

Figură compusă din **lobul principal** și **loburi secundare** mai mici.

# Eșantionarea sinc

Fie o sinusoidă de  $8\text{kHz}$  eșantionată la  $32\text{kHz}$ . În figură avem DFT-ul în  $N = 32$  puncte (bin-uri distanțate la  $f_s/N = 1\text{kHz}$ ).

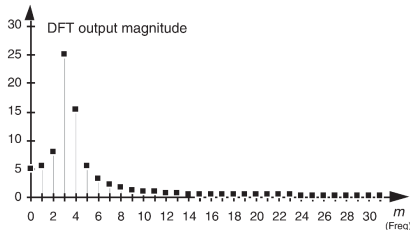


Sursă: (Lyons 2004)

Leak când frecvența sinusoidelor nu este centrată în lobul principal.

# Asimetrie

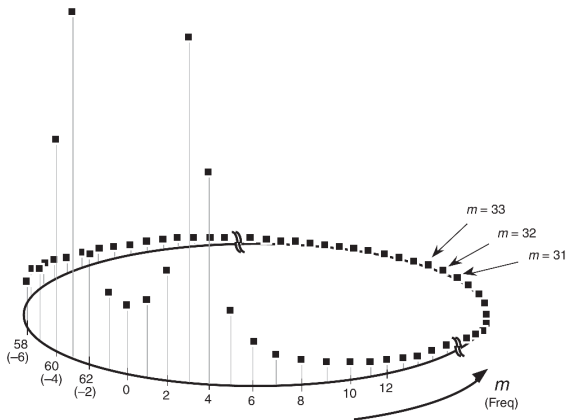
De ce este DFT asimetrică în exemplul de mai devreme? (ex.  $m = 4$ )



Sursă: (Lyons 2004)

Am arătat că DFT este simetrică și se repetă o dată la  $N$  puncte.  
În cazul semnalelor reale chiar  $N/2$ !

DFT se repetă din  $N$  în  $N$  puncte creând un cerc de-alungul căruia eșantioanele DFT se înfășoară.

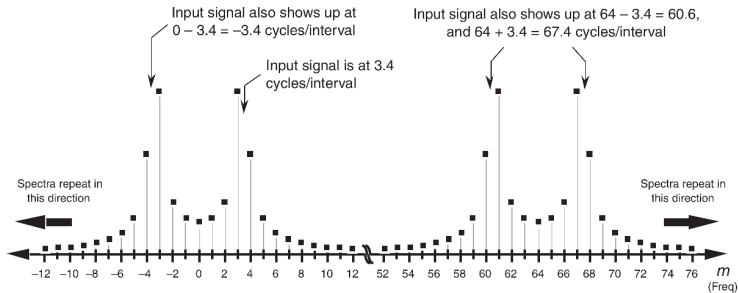


Sursă: (Lyons 2004)



# Înfășurare linarizată

Expus liniar, discul pentru un semnal cu  $k = 3,4$  perioade în fereastra de  $N = 64$  eșantioane devine:

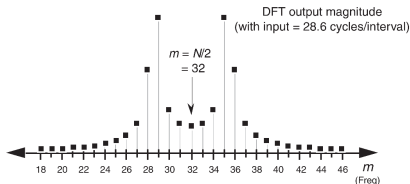
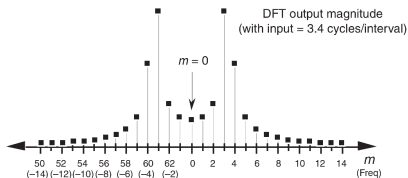


Sursă: (Lyons 2004)

Ce se întâmplă cu semnalele reale?

# Înfășurare semnale reale

Semnalele reale se repetă la  $N/2$  a.î.  $|X(m)| = |X(N - m)|$  cf. (23)  
Magnitudinea DFT pentru  $k = 32 - 3, 4$  și  $k = 3, 4$  este similară.

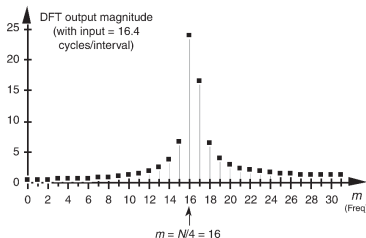
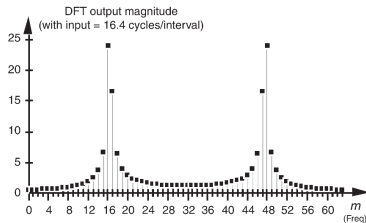


Sursă: (Lyons 2004)

Pentru semnale reale avem înfășurare și în jurul  $m = N/2$ .

# Înfășurare semnale reale

Alt exemplu pentru  $k = 16,4$  și  $N = 64$ .



Sursă: (Lyons 2004)

Leak minim la  $N/4$  ce crește când ne îndepărtăm de lobul principal.

## Definiție

*Ferestrele sunt folosite pentru a atenua amplitudinea semnalului la începutul și la capătul orizontului de eșantionare astfel încât să reducă fenomenul de leak.*

## Remarcă

*De fiecare dată când aplicăm DFT folosim o fereastră dreptunghiulară în care înmulțim fiecare eșantion cu o secvență, sau fereastră, de eșantioane de valoare unu.*



*În afara ferestrei secvența este nulă.*

## Propoziție

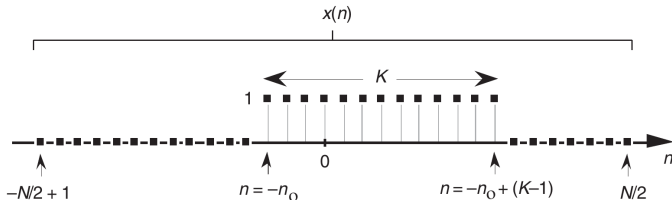
*DFT a ferestrei dreptunghiulare este funcția sinc.*

# Demonstrație DFT treaptă-sinc

## Propoziție

*DFT a ferestrei dreptunghiulare este funcția sinc.*

Demonstrație:



$$X(m) = \sum_{n=-(N/2)+1}^{N/2} x(n) e^{-j2\pi nm/N} = \sum_{n=-n_0}^{-n_0+(K-1)} x(n) e^{-j2\pi nm/N}$$

# Demonstrație DFT treaptă-sinc

Notăm  $q = 2\pi m/N$ , atunci:

$$\begin{aligned} X(q) &= \sum_{n=-n_0}^{-n_0+(K-1)} x(n)e^{-jqn} = \\ &= e^{-jq(-n_0)} + e^{-jq(-n_0+1)} + e^{-jq(-n_0+2)} + \dots + e^{-jq(-n_0+(K+1))} = \\ &= e^{-jq(-n_0)}e^{-j0q} + e^{-jq(-n_0)}e^{-j1q} + e^{-jq(-n_0)}e^{-j2q} + \dots + \\ &+ e^{-jq(-n_0)}e^{-j(K-1)q} = e^{jqn_0} \left[ e^{-j0q} + \dots + e^{-j(K-1)q} \right] = \\ &= e^{jqn_0} \sum_{p=0}^{K-1} e^{-jpq} = e^{jqn_0} \frac{1 - e^{-jqK}}{1 - e^{-jq}} \\ &= e^{jqn_0} \frac{e^{-jqK/2}(e^{jqK/2} - e^{-jqK/2})}{e^{-jq/2}(e^{jq/2} - e^{-jq/2})} = \\ &= e^{jqn_0} e^{-jq(K-1)/2} \frac{e^{jqK/2} - e^{-jqK/2}}{e^{jq/2} - e^{-jq/2}} \end{aligned}$$

# Demonstrație DFT treaptă-sinc

Folosind  $\sin(\phi) = (e^{j\phi} - e^{-j\phi})/2j$ , avem:

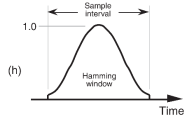
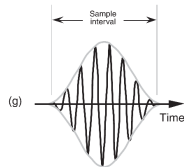
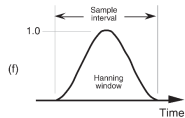
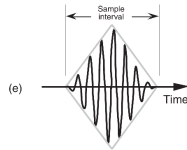
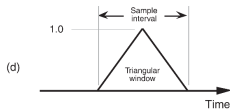
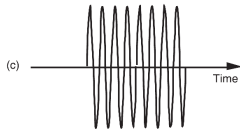
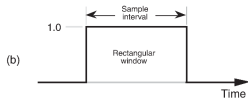
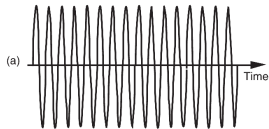
$$\begin{aligned} X(q) &= e^{jq(n_0-(K-1)/2)} \frac{e^{jqK/2} - e^{-jqK/2}}{e^{jq/2} - e^{-jq/2}} \\ &= e^{jq(n_0-(K-1)/2)} \frac{2j \sin(qK/2)}{2j \sin(q/2)} \end{aligned}$$

Renunțând la notația  $q = 2\pi m/N$ , obținem:

$$\begin{aligned} X(m) &= e^{j(2\pi m/N)(n_0-(K-1)/2)} \frac{\sin(2\pi mK/2N)}{\sin(2\pi m/2N)} \\ &= e^{j(2\pi m/N)(n_0-(K-1)/2)} \frac{\sin(\pi mK/N)}{\sin(\pi m/N)} \\ &= e^{j(2\pi m/N)(n_0-(K-1)/2)} \frac{\sin(\pi mK/N)}{\sin(\pi m/N)} \end{aligned}$$

Aceasta funcție se numește aliased sinc sau kernel Dirichlet ■

# Exemple de fenestre (Lyons 2004)





## Aplicarea unei ferestre

Înainte de a aplica DFT, eşantioanele semnalului  $x(n)$  sunt înmulţit cu coeficienţii corespunzători din fereastra  $w(n)$ :

$$X_w(m) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)x(n)e^{-j2\pi nm/N} \quad (33)$$

unde  $w(n)$  este o fereastră:

Dreptunghilară

$$w(n) = 1$$

Trianghiulară

$$w(n) = \begin{cases} \frac{n}{N/2}, & n = 2k \\ 2 - \frac{n}{N/2}, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

Hanning

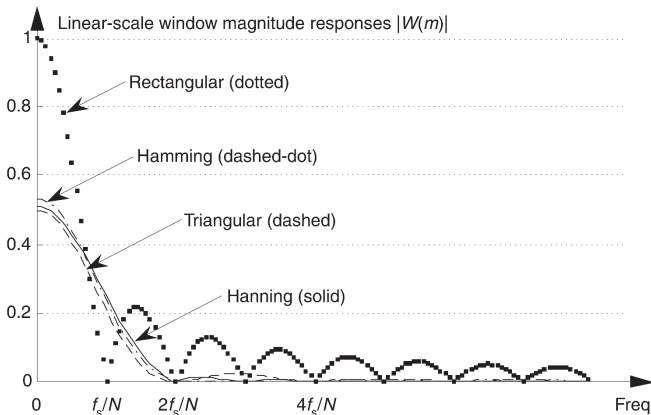
$$w(n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$$

Hamming

$$w(n) = 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$$

# Magnitudinea răspunsului în frecvență

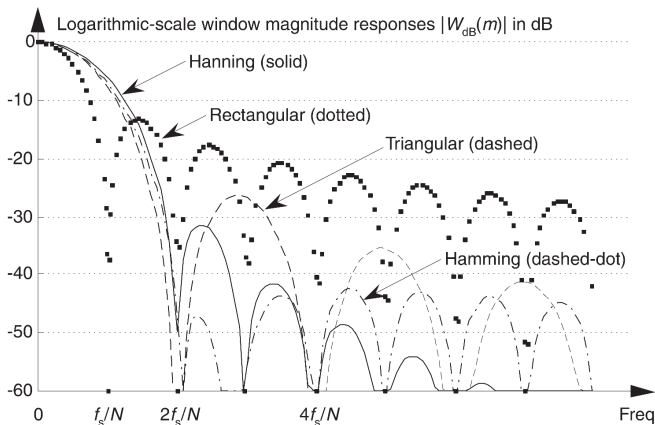
Ferestrele alternative reduc lobii secundari (vs. dreptunghiular).



Observăm că lobul principal scade în magnitudine: **processing gain** sau **loss** al ferestrei.

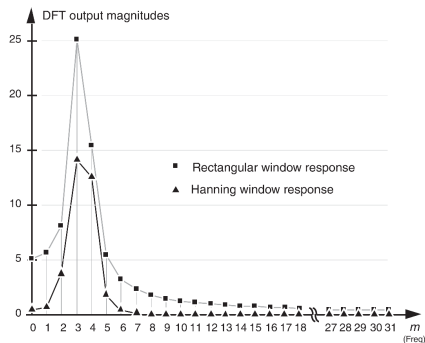
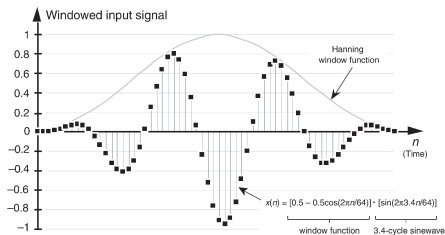
# Magnitudinea(dB) răspunsului în frecvență

$$|W_{dB}(m)| = 20 \log_{10} \left( \frac{|W(m)|}{|W(0)|} \right) \quad (34)$$

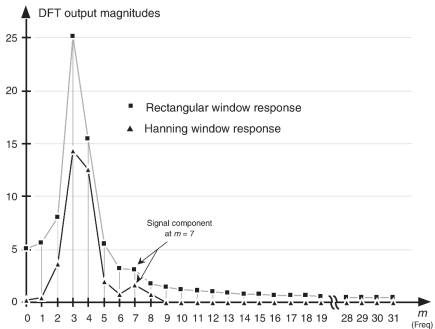
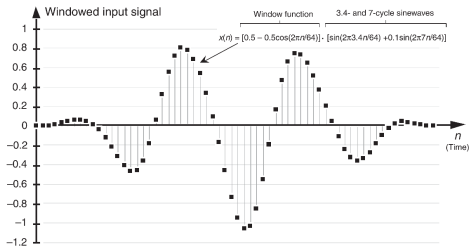


Obs: Scad lobii secundari, dar scade și rezoluția frecvenței.

# Exemplu: Hanning pentru $k = 3, 4$



# Exemplu: Hanning pentru detecție semnal de nivel scăzut



# Alegerea ferestrei

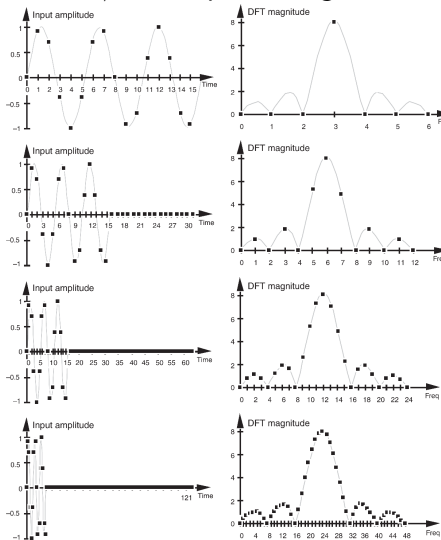
Alegerea ferestrei potrivite este un compromis între:

- ▶ lățirea lobului principal
- ▶ nivelele primelor loburi secundare (ex. Hanning vs. Hamming)
- ▶ viteza de descreștere a loburilor secundare

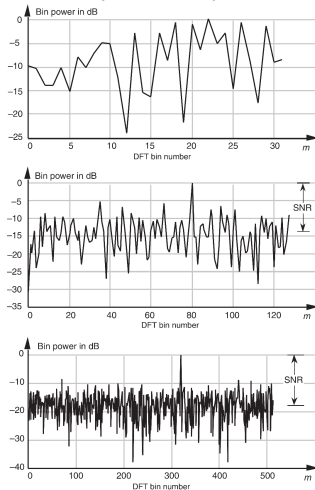
Dimensiunea și forma ferestrei afectează direct rezoluția și sensibilitatea semnalului.

# Rezoluție. Zero padding.

Creștem artificial rezoluția DFT prin adăugarea de eșantioane nule.



Creștem puterea semnalului (sau **gain**) prin creșterea lui  $N$ .



$$\text{SNR}_N = \text{SNR}_{N'} + 10 \log_{10} \left( \frac{N}{N'} \right) \quad (36)$$