

# Procesarea Semnalelor

## Laboratorul 6

### Transformata Fourier — Teorie

## 1 Noțiuni introductive

Un semnal este adesea alcătuit din mai multe **componente de frecvență**. Unele pot fi caracteristice pentru fenomenul care stă la baza semnalului, altele se pot datora prezenței zgomotului. Transformata Fourier oferă o măsură a energiei unei anume frecvențe într-un semnal. Din acest motiv este utilă în identificarea componentelor de frecvență.

Identificarea presupune întâi calculul transformatei Fourier pentru o plajă de frecvențe, apoi inspectarea modulului transformatei pentru fiecare dintre acestea: dacă modulul transformatei e semnificativ mai mare decât 0 înseamnă că respectiva frecvență este prezentă în semnal.

Reamintim, transformata Fourier a unui semnal discret  $x[n]$  se definește ca o funcție  $X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-2\pi i \omega \frac{n}{N}} \quad (1)$$

Scopul acestui laborator este să **vizualizați** mărimea calculată de transformata Fourier. Vom lucra cu un semnal sinusoidal ce are o singură frecvență caracteristică, scopul fiind identificarea acesteia. Vom începe prin a analiza pe rând componentele expresiei 1.

## Cercul unitate în planul complex

Componenta exponențială,  $e^{-2\pi in}$ , corespunde unui cerc de rază unitară în planul complex, ce este parcurs într-o unitate de timp ( $n = 1$ ). Adăugând semnalul  $x[n]$ , deci obținând  $x[n] \cdot e^{-2\pi in}$ , înfășurarea pe cercul unitate de mai sus este **deformată** de amplitudinea semnalului.

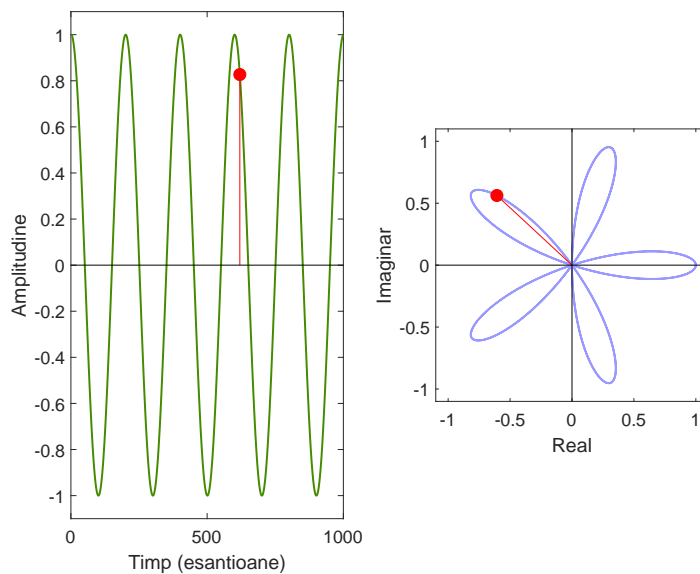


Figura 1: Reprezentarea unui semnal în planul complex

Figura 1 reprezintă un semnal sinusoidal de frecvență  $f = 5$  Hz, eșantionat la  $f_s = 10$  Hz (imaginea din stânga), împreună cu reprezentarea  $y[n] = x[n] \cdot e^{-2\pi in}$  pe cercul unitate (imaginea din dreapta).

Cu **roșu** este marcată corespondența dintre amplitudinea semnalului la un anumit moment de timp (aici eșantionul  $n = 620$ ) și distanța de la originea cercului unitate la punctul  $[n, y[n]]$ .

## Frecvența de înfășurare

Transformata Fourier depinde de frecvența  $\omega$ . Aceasta (care apare în expresia  $e^{-2\pi i \omega n}$ ) determină viteza cu care cercul unitate este parcurs și se numește și **frecvență de înfășurare**.

O frecvență  $\omega = 10$  Hz corespunde unui număr de 10 înfășurări ale cercului unitate într-o secundă. Relația dintre această frecvență și

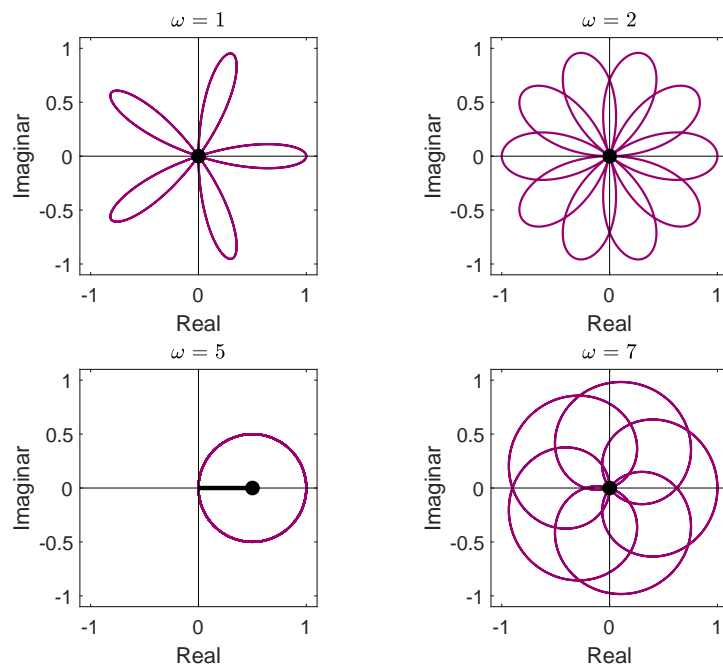


Figura 2: Reprezentarea transformatei Fourier în planul complex

frecvența semnalului determina forma înfășurării. Figura 2 reprezintă funcția  $z[\omega] = x[n] \cdot e^{-2\pi i \omega n}$  pentru  $\omega$  luând valorile 1 Hz, 2 Hz, 5 Hz, respectiv 7 Hz}.

## Energia unei componente de frecvență a unui semnal

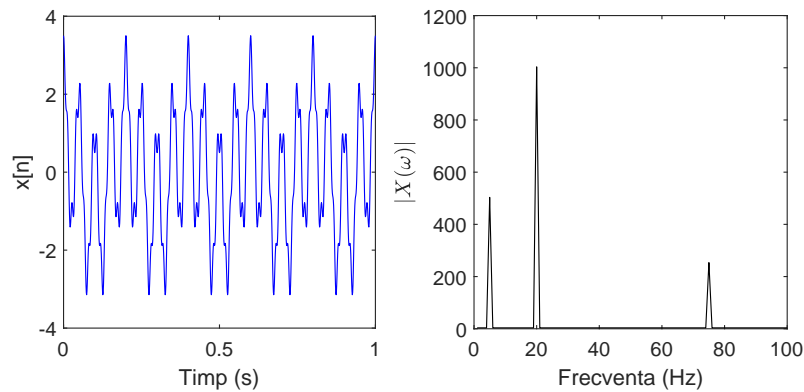


Figura 3: Transformata Fourier pentru un semnal cu 3 componente de frecvență

Coeficienții transformatei Fourier semnaleză **prezența unei anumite componente de frecvență** într-un semnal. Dacă respectiva frecvență este conținută în semnal, modulul transformatei Fourier va fi semnificativ diferit de 0, altfel valoarea sa va fi apropiată de 0.

Fie semnalul

$$x[n] = \cos(2\pi f_1 n t_s) + 2 \cos(2\pi f_2 n t_s) + 0.5 \cos(2\pi f_3 n t_s)$$

unde  $f_1 = 5$  Hz,  $f_2 = 20$  Hz,  $f_3 = 75$  Hz.

Figura 3 arată semnalul  $x[n]$  (imaginea din stânga) și **valorile absolute** ale coeficienților transformatei Fourier aplicate semnalului pentru plaja de frecvențe  $\omega \in [1 \text{ Hz}..100 \text{ Hz}]$  (imaginea din dreapta). Se observă cum modulul transformatei este diferit de 0 doar pentru  $\omega = f_1$ , pentru  $\omega = f_2$  și pentru  $\omega = f_3$ .

## 2 Ghid Python

Pentru acest laborator veți avea nevoie de modulul `math`.

În Python se folosește convenția din fizică; unitatea imaginară este notată cu `j`, nu cu `i`. Un exemplu de sintaxă este `math.e**(1j*5)`, care reprezintă numărul complex  $e^{5i}$ .

Pentru a obține partea reală, respectiv imaginară a unui număr complex stocat într-o variabilă `x`, utilizați metodele de accesare `x.real` și `x.imag`.

## 3 Exerciții

În cadrul exercițiilor de astăzi veți calcula „de mână” transformata Fourier pentru un semnal sinusoidal (**fără** a folosi funcțiile `numpy.fft` sau `scipy.fft`, ci implementând relația 1).

1. Realizați graficele din figurile 1 și 2 din acest îndrumar pentru un semnal sinusoidal cu o frecvență aleasă de voi, *alta* decât cea utilizată aici.

Reamintim că graficul din dreapta din figura 1 reprezintă înfășurarea semnalului pe cercul unitate, anume reprezentarea în planul complex a șirului  $y[n] = x[n] \cdot e^{-2\pi i n}$ .

De asemenea, figura 2 arată influența diferitelor frecvențe de înfășurare asupra formei pe care o are această reprezentare. Afișați grafic  $z[\omega] = x[n] \cdot e^{-2\pi i \omega n}$ , pentru **patru valori diferite** ale  $\omega$ , dintre care una egală cu frecvența semnalului.

2. Afișați **modulul** (valoarea absolută) a transformatei Fourier (folosind relația 1) pentru un semnal compus de voi, având **cel puțin trei componente de frecvență distincte** (obțineți un grafic asemănător figurii 3).

Ajustați frecvențele de înfășurare  $\omega$  utilizate în transformata Fourier în funcție de frecvența caracteristică a sinusoidei.