Autori: Andra Băltoiu, Silviu Gheorghe, Gabriel Majeri, Rebeca Oprea

Procesarea Semnalelor
Laboratorul 3
Domeniul Frecvență

1 Reprezentarea timp-frecvență

Domeniul frecvenței

Până acum ați lucrat cu reprezentarea semnalelor în **timp**: ați afișat grafic variația valorilor acestora la diferite momente de timp. În prelucrarea semnalelor este adesea mai utilă analiza componentelor de **frecvență** prezente într-un semnal.

Majoritatea semnalelor reale conțin mai multe **componente de frecvență**. Gândiți-vă, spre exemplu, la un semnal audio: o melodie. Auziți simultan mai multe instrumente muzicale, cât și vocea interpretului. Fiecare instrument poate emite sunete într-un anumit interval de frecvențe (gândiți-vă la diferențele între sunetul unei tobe și al unei trompete). Prin urmare, în melodie există toate componentele de frecvență pe care le emit instrumentele pe măsură ce sunt cântate.

O reprezentare grafică utilă (nu doar pentru semnale audio!) este **spectrograma**, cum este cea din Figura 1. Spectrograma este o reprezentare timp-frecvență: axa orizontală reprezintă axa timpului, iar cea verticală a frecvențelor. Intensitatea culorilor (sau nuanța de gri) a fiecărui punct de pe spectrogramă sugerează puterea respectivei componente de frecvență la acel moment de timp. Diferite sunete au „pattern-uri” diferite timp-frecvență[1].

[1] Formația Aphex Twin a speculat reprezentarea vizuală a spectrogramei pentru a include un anumit timp de informație într-una din melodiile sale.

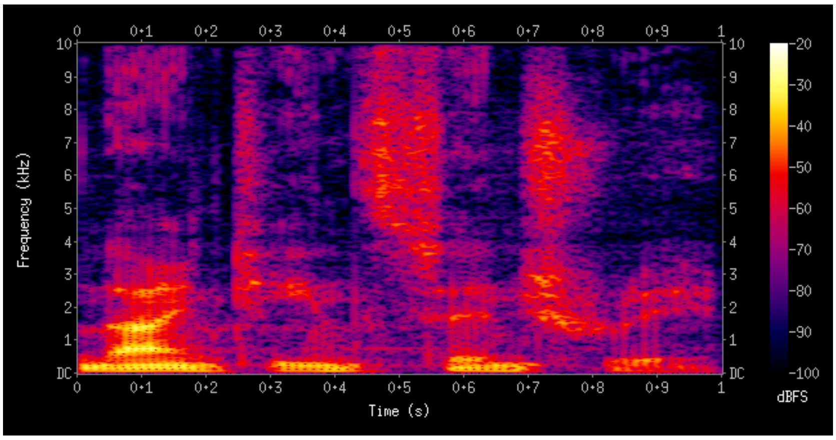

Figura 1: Spectrograma unui semnal audio

Sursa imaginii

Zgomotul

Un alt motiv pentru care semnalele reale conțin mai multe componente de frecvență este faptul că acestea sunt afectate de **zgomot**. În cursurile/laboratoarele următoare veți afla mai multe detalii despre definiția, tipurile de zgomot și sursele acestuia. Pentru moment, uitați-vă la slide-ul 22 din Cursul 3, unde o sinusoidă este afectată de zgomot. Cum este, în acest caz, frecvența sinusoidei față de frecvența zgomotului?

Adunarea semnalelor

În mod evident, o sinusoidă sintetică simplă va avea o singură componentă de frecvență, anume frecvența fundamentală a acesteia. Un semnal obținut din **suma** a două sau mai multe sinusoide de frecvențe diferite va avea două sau mai multe componente de frecvență, fiecare corespunzând termenilor din sumă.

2 Teorema de eșantionare

Semnale limitate în bandă

Semnalele ale căror componente de frecvență sunt egale cu 0 (sau nesemnificative) în afara unui interval $[-B(\text{Hz}), B(\text{Hz})]$ se numesc **semnale trece-bandă** (*band-pass*). Dacă, în plus, frecvențele sunt centrate în jurul lui 0 Hz, se numesc **semnale trece-jos** (*low-pass*). Limitarea la bandă implică existența unei frecvențe maxime, B Hz, între componentele de frecvență ale semnalului.

În practică se face des presupunerea că semnalele utilizate sunt limitate în bandă: fie pentru că sunt într-adevăr așa, fie pentru că anumite componente de frecvență sunt irelevante pentru aplicație, însă principalul motiv este acela că doar pentru astfel de semnale putem stabili o regulă după care acestea să fie eșantionate.

Frecvența Nyquist

Multe din semnalele reale sunt continue, în timp ce pentru a putea fi prelucrate acestea trebuie să fie discretizate. **Teorema de eșantionare Nyquist-Shannon** stabilește frecvența minimă cu care un semnal trebuie eșantionat astfel încât informația conținută în semnalul original (continuu) să poată fi reconstruită întocmai.

Teorema se aplică pentru semnale limitate în bandă și stabilește o relație între frecvența minimă de eșantionare, f_s și frecvența maximă conținută în semnal, B, anume: pentru a nu avea pierderi de informație, un semnal trebuie eșantionat cu $f_s > 2B$.

Reciproc, dacă un semnal este eșantionat cu f_s oarecare, nu se poate garanta reconstrucția sa exactă decât pentru componentele de frecvență cu $f < f_s/2$.

Pentru a înțelege de ce componentele de frecvență dintr-un semnal (în particular frecvența maximă) influențează frecvența cu care acestea trebuie eșantionate, vom analiza fenomenul de aliere.

Fenomenul de aliere (*aliasing*)

Fie un semnal semnal sinusoidal discret

$$x[n] = A\cos(\omega n + \phi) = a\cos(2\pi f n + \phi),$$

unde ω reprezintă frecvența unghiulară a semnalului, iar ϕ faza acestuia.

Un astfel de semnal se deosebește de unul continuu prin faptul că frecvența unui semnal sinusoidal discret nu este unic determinată, deoarece $\cos(\theta) = \cos(\theta + 2\pi k)$. Această proprietate duce la fenomenul numit **aliere**, care pune probleme în reconstrucția semnalelor pornind de la un set de eșantioane.

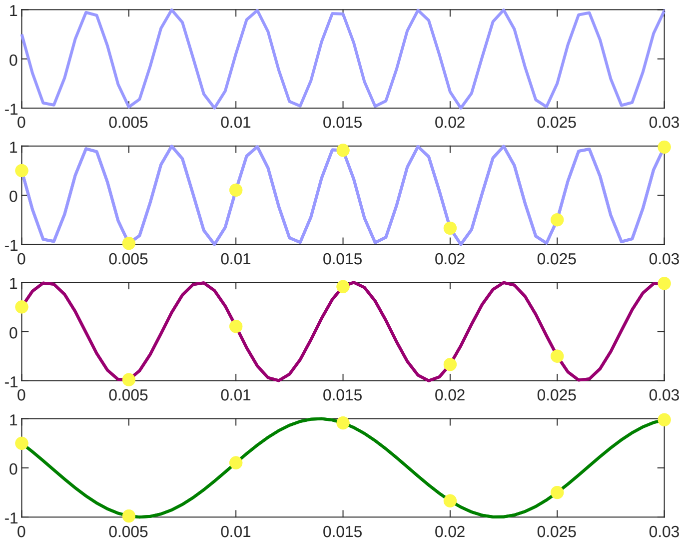

Figura 2: Fenomenul de aliere

Figura 2 ilustrează această situație. Punctele galbene din al doilea rând reprezintă eșantioane obținute prin eșantionare la o frecvență mai mică decât frecvența Nyquist a semnalului continuu original (albastru).

Pornind de la aceste eșantioane, semnalele reprezentate cu roșu și verde reprezintă candidați valizi pentru reconstrucția semnalului inițial. Așadar, având la dispoziție doar aceste eșantioane (punctele galbene), **nu putem ști care a fost semnalul în baza căruia au fost obținute**.

În practică, pentru a contracara efectul de aliere, semnalele sunt de obicei **filtrate** înainte de a fi eșantionate, pentru a elimina frecvențele mai mari decât frecvența Nyquist. Prin urmare un filtru anti-aliere va fi un filtru trece-jos cu frecvența de tăiere egală cu frecvența Nyquist.

3 Exerciții

1. Înregistrați-vă în timp ce spuneți, pe rând, vocalele „a, e, i, o, u" și deschideți fișierul în Audacity pentru a putea vedea spec-

trograma (sau folosiți o aplicație de telefon care vă poate afișa spectrograma în timp real). Puteți distinge diferitele vocale pe baza ei?

Încărcați în Teams o captură de ecran cu spectrograma respectivă (fie din Audacity dacă lucrați pe calculator, fie din aplicația de telefon). 1p

2. Frecvențele emise de un contrabas se încadrează între 40Hz și 200Hz.

   Care este **frecvența minimă** cu care trebuie eșantionat semnalul provenit din înregistrarea instrumentului, astfel încât semnalul discretizat să conțină toate componentele de frecvență pe care instrumentul le poate produce? 2p

3. Construiți un semnal sinusoidal de frecvență aleasă de voi, de amplitudine unitară și fază nulă. Realizați un grafic care să arăte că eșantionarea lui cu o **frecvență sub-Nyquist** (aleasă, de asemenea, de voi) generează fenomenul de aliere.

   În acest scop, generați alte două semnale sinusoidale (cu frecvențe fundamentale *diferite* față de cea a semnalului inițial) care eșantionate cu frecvența aleasă mai sus produc **aceleași eșantioane** ca semnalul inițial. Ar trebui să obțineți o situație similară cu cea din Figura 2. 2p

4. Eșantionați încă o dată semnalele de la exercițiul anterior, de data aceasta alegând o frecvență de eșantionare **mai mare decât frecvența Nyquist**, astfel încât să nu mai obțineți fenomenul de aliere. Reprezentați-le grafic pentru a demonstra că nu mai are loc alierea. 1p