Autori: Andra Băltoiu, Silviu Gheorghe, Gabriel Majeri, Rebeca Oprea

Procesarea Semnalelor
Laboratorul 6

Transformata Fourier — Teorie

1 Noțiuni introductive

Un semnal este adesea alcătuit din mai multe **componente de frecvență**. Unele pot fi caracteristice pentru fenomenul care stă la baza semnalului, altele se pot datora prezenței zgomotului. Transformata Fourier oferă o măsură a energiei unei anume frecvențe într-un semnal. Din acest motiv este utilă în identificarea componentelor de frecvență.

Identificarea presupune întâi calculul transformatei Fourier pentru o plajă de frecvențe, apoi inspectarea modulului transformatei pentru fiecare dintre acestea: dacă modulul transformatei e semnificativ mai mare decât 0 înseamnă că respectiva frecvență este prezentă în semnal.

Reamintim, transformata Fourier a unui semnal discret $x[n]$ se definește ca o funcție $X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-2\pi i \omega \frac{n}{N}} \tag{1}$$

Scopul acestui laborator este să **vizualizați** mărimea calculată de transformata Fourier. Vom lucra cu un semnal sinusoidal ce are o singură frecvență caracteristică, scopul fiind identificarea acesteia. Vom începe prin a analiza pe rând componentele expresiei 1.

Cercul unitate în planul complex

Componenta exponențială, $e^{-2\pi in}$, corespunde unui cerc de rază unitară în planul complex, ce este parcurs într-o unitate de timp ($n = 1$). Adăugând semnalul $x[n]$, deci obținând $x[n] \cdot e^{-2\pi in}$, înfășurarea pe cercul unitate de mai sus este **deformată** de amplitudinea semnalului.

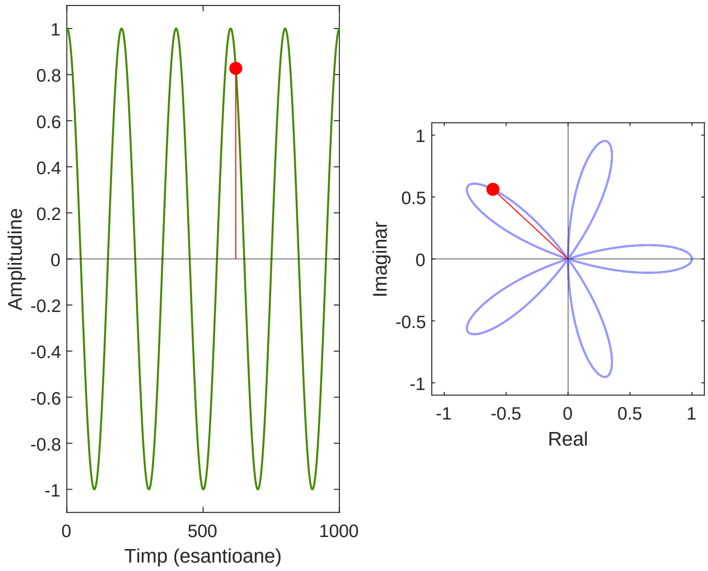

Figura 1: Reprezentarea unui semnal în planul complex

Figura 1 reprezentă un semnal sinusoidal de frecvență $f = 5\,\text{Hz}$, eșantionat la $f_s = 10\,\text{Hz}$ (imaginea din *stânga*), împreună cu reprezentarea $y[n] = x[n] \cdot e^{-2\pi in}$ pe cercul unitate (imaginea din *dreapta*).

Cu roșu este marcată corespondența dintre amplitudinea semnalului la un anumit moment de timp (aici eșantionul $n = 620$) și distanța de la originea cercului unitate la punctul $[n, y[n]]$.

Frecvența de înfășurare

Transformata Fourier depinde de frecvența ω. Aceasta (care apare în expresia $e^{-2\pi i\omega n}$) determină viteza cu care cercul unitate este parcurs și se numește și **frecvență de înfășurare**.

O frecvență $\omega = 10\,\text{Hz}$ corespunde unui număr de 10 înfășurări ale cercului unitate într-o secundă. Relația dintre această frecvență și

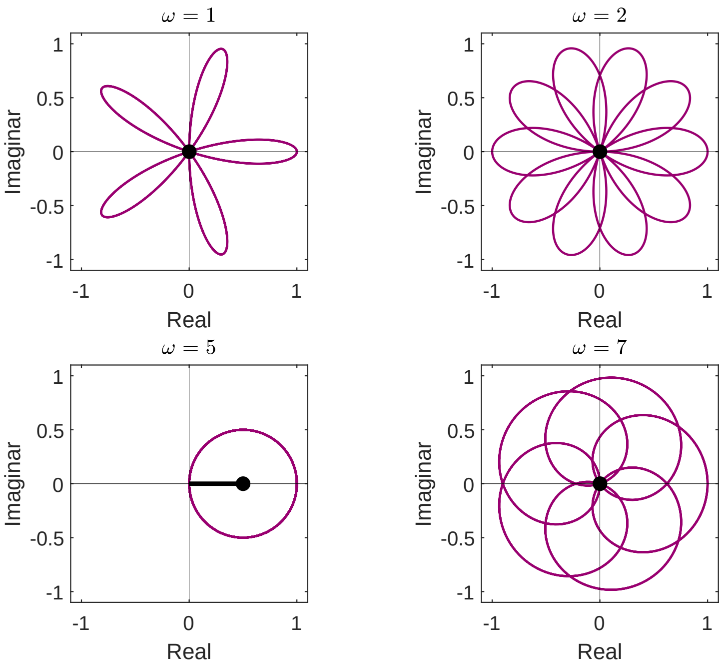

Figura 2: Reprezentarea transformatei Fourier în planul complex

frecvența semnalului determina forma înfășurării. Figura 2 reprezintă funcția $z[\omega] = x[n] \cdot e^{-2\pi i \omega n}$ pentru ω luând valorile 1 Hz, 2 Hz, 5 Hz, respectiv 7 Hz}.

Energia unei componente de frecvență a unui semnal

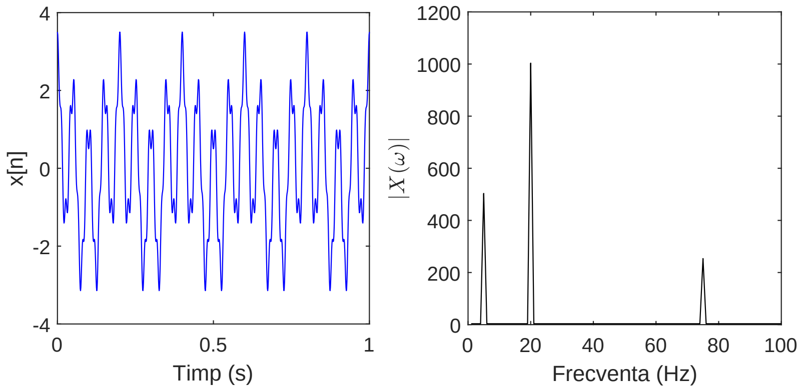

Figura 3: Transformata Fourier pentru un semnal cu 3 componente de frecvență

Coeficienții transformatei Fourier semnalează **prezența unei anumite componente de frecvență** într-un semnal. Dacă respectiva frecvență este conținută în semnal, modulul transformatei Fourier va fi semnificativ diferit de 0, altfel valoarea sa va fi apropiată de 0.

Fie semnalul

$$x[n] = \cos(2\pi f_1 n t_s) + 2\cos(2\pi f_2 n t_s) + 0.5\cos(2\pi f_3 n t_s)$$

unde $f_1 = 5\,\mathrm{Hz}$, $f_2 = 20\,\mathrm{Hz}$, $f_3 = 75\,\mathrm{Hz}$.

Figura 3 arată semnalul $x[n]$ (imaginea din *stânga*) și **valorile absolute** ale coeficienților transformatei Fourier aplicate semnalului pentru plaja de frecvențe $\omega \in [1\,\mathrm{Hz}..100\,\mathrm{Hz}]$ (imaginea din *dreapta*). Se observă cum modulul transformatei este diferit de 0 doar pentru $\omega = f_1$, pentru $\omega = f_2$ și pentru $\omega = f_3$.

2 Ghid Python

Pentru acest laborator veți avea nevoie de modulul `math`.

În Python se folosește convenția din fizică; unitatea imaginară este notată cu `j`, nu cu `i`. Un exemplu de sintaxă este `math.e**(1j*5)`, care reprezintă numărul complex e^{5i}.

Pentru a obține partea reală, respectiv imaginară a unui număr complex stocat într-o variabilă `x`, utilizați metodele de accesare `x.real` și `x.imag`.

3 Exerciții

În cadrul exercițiilor de astăzi veți calcula „de mână" transformata Fourier pentru un semnal sinusoidal (**fără** a folosi funcțiile *numpy.fft* sau *scipy.fft*, ci implementând relația 1).

1. Realizați graficele din figurile 1 și 2 din acest îndrumar pentru un semnal sinusoidal cu o frecvență aleasă de voi, *alta* decât cea utilizată aici. 3p

   Reamintim că graficul din dreapta din figura 1 reprezintă înfășurarea semnalului pe cercul unitate, anume reprezentarea în planul complex a șirului $y[n] = x[n] \cdot e^{-2\pi in}$.

   De asemenea, figura 2 arată influența diferitelor frecvențe de înfășurare asupra formei pe care o are această reprezentare. Afișați grafic $z[\omega] = x[n] \cdot e^{-2\pi i\omega n}$, pentru **patru valori diferite** ale ω, dintre care una egală cu frecvența semnalului.

2. Afișați **modulul** (valoarea absolută) a transformatei Fourier (folosind relația 1) pentru un semnal compus de voi, având **cel puțin trei componente de frecvență distincte** (obțineți un grafic asemănător figurii 3). 3p

   Ajustați frecvențele de înfășurare ω utilizate în transformata Fourier în funcție de frecvența caracteristică a sinusoidei.