Procesarea semnalelor

Filtre FIR

Paul Irofti

Universitatea din București

Facultatea de Matematică și Informatică

Departmentul de Informatică

Email: `paul.irofti@fmi.unibuc.ro`

Discretizare și eșantionare

Continuu:

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \tag{1}$$

Discret:

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin(2\pi(f_0 + kf_s)nt_s) \tag{2}$$

unde

- f_0 – frecvența (Hz) măsoară numărul de oscilații într-o secundă
- n – eșantionul, indexul în șirul de timpi $0, 1, 2 \ldots$
- t_s – perioada de eșantionare; constantă (ex. la fiecare secundă)
- nt_s – orizontul de timp (s)
- $f_0 nt_s$ – numărul de oscilații măsurat
- $2\pi f_0 nt$ – unghiul măsurat în radiani (vezi note de curs)
- f_s – frecvența de eșantionare (Hz)
- $f_0 + kf_s$ – frecvența de aliere, $\forall k \in \mathbb{N}$

Transformata Fourier Discretă (DFT)

Definiție

Transformata Fourier a unui semnal discret (aperiodic):

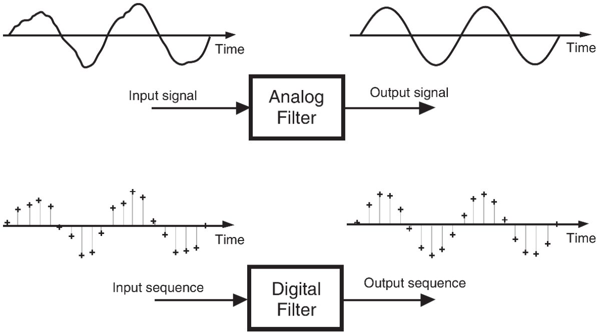
$$\begin{aligned} X(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi mn/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[\cos(2\pi mn/N) - j\sin(2\pi mn/N)\right] \end{aligned} \tag{3}$$

- $X(m)$ – componenta m DFT (ex. $X(0), X(1), X(2), \dots$)
- m – indicele componentei DFT în domeniul frecvenței ($m = 0, 1, \dots, N-1$)
- $x(n)$ – eșantioanele în timp (ex. $x(0), x(1), x(2), \dots$)
- n – indicele eșantioanelor în domeniul timpului ($n = 0, 1, \dots, N-1$)
- N – numărul eșantioanelor în timp la intrare și numărul componentelor în frecvență la ieșire

Filtrare

Definiție

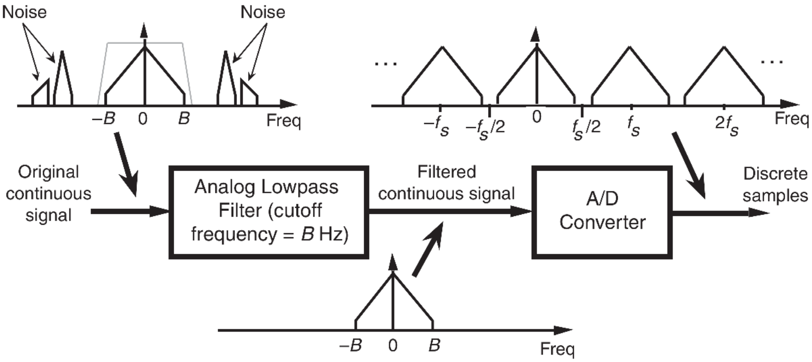
Filtrarea reprezintă prelucrarea unui semnal în domeniul timpului ce induce o schimbare în componența spectrală. Schimbarea constă în reducerea sau eliminare anumitor componente: filtrele permit anumitor frecvențe să treacă și le atenuează pe restul.



Exemplu filtrare

Definiție

Filtru trece-jos este un filtru care acceptă componentele în frecvență mai mică de o bandă B și le elimină sau atenuează pe cele mai mari decât B.



Tipuri de filtre

Filtrele digitale sunt în esență tot semnale discretizate și sunt notate cu $h(n)$.

Există două tipuri de filtre diferențiate prin modul în care răspund la semnalul de la intrare $x(n)$:

- *finite impulse response* (FIR)
  - considerară valorile precedente din $x(n)$
  - se stabilizează rapid la zero după încheierea intrării
  - folosesc operații simple de calcul
- *infinite impulse response* (IIR)
  - considerară valorile precedente din $x(n)$
  - iau în considerare **ieșirile precedente**
  - reprezintă relații de recurență
  - alcătuiesc bucle de *feedback*

Filtrele FIR sunt mai simplu de analizat și implementat, motiv pentru care sunt cel mai des întâlnite în practică.

Filtre FIR

Definiție

Dat un număr finit de intrări nenule $x(n)$, aplicarea unui filtru FIR $h(n)$ va duce tot timpul la o ieșire $y(n)$ ce conține un număr finit de eșantioane nenule.

Calculul mediei este un exemplu bun de filtru FIR.

Exemplu

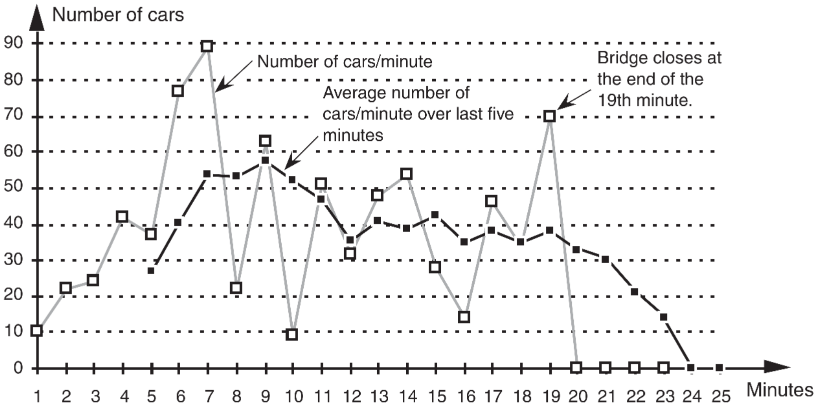
Fie o aplicație ce contorizează traficul pe un pod. În fiecare minut primim numărul de mașini ce au traversat podul. Vrem să calculăm media mobilă într-un interval de timp (fereastră) de 5 minute.

Exemplu: medie mobilă

Minut	Nr. mașini	Media per 5 min.
1	10	-
2	22	-
3	24	-
4	42	-
5	37	27
6	77	40,4
7	89	53,8
8	22	53,4
9	63	57,6
10	9	52

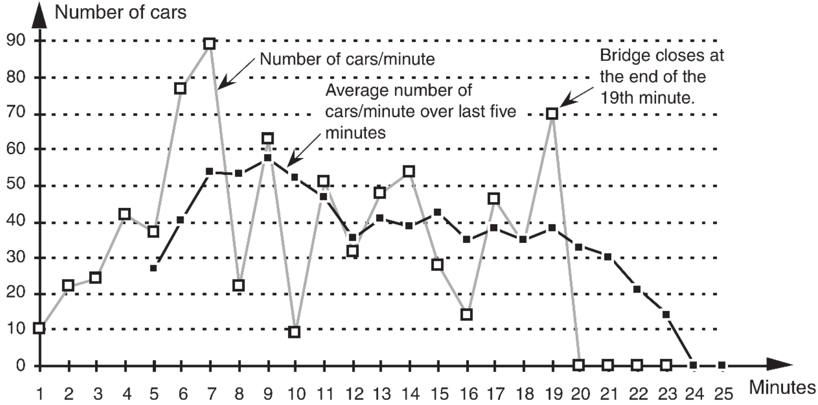
$$\frac{10}{5} = 2$$
$$\frac{10+22}{5} = 6,4$$
$$\frac{10+22+24}{5} = 11,2$$
$$\frac{10+22+24+42}{5} = 19,6$$
$$\frac{10+22+24+42+37}{5} = 27$$
$$\frac{22+24+42+37+77}{5} = 40,4$$
$$\vdots$$
$$\frac{77+89+22+63+9}{5} = 52$$

Exemplu: medie mobilă



Observații medie mobilă

Variațiile mari în timp reprezintă componente de înaltă frecvență.



- schimbările bruște sunt atenuate de către medie
- FIR: ieșirea curentă nu depinde de valori precedente ale ieșirii
- comportament de filtru trece-jos
- ultima intrare este 19; filtrul ajunge rapid la zero după aceasta

Calcul medie mobilă

Ieșirea 5 este calculată în funcție de ultimele 5 intrări:

$$y(5) = \frac{1}{5}[x(1) + x(2) + x(3) + x(4) + x(5)] \tag{4}$$

În cazul general pentru ieșirea n notăm eșantionul k cu $x(k)$ iar formula rezultată este:

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{5}[x(n-4) + x(n-3) + x(n-2) + x(n-1) + x(n)] && (5) \\ &= \frac{1}{5}\sum_{k=n-4}^{n} x(k) && (6) \end{aligned}$$

A ce miroase (6)?

Calcul medie mobilă

Ieșirea 5 este calculată în funcție de ultimele 5 intrări:

$$y(5) = \frac{1}{5}[x(1) + x(2) + x(3) + x(4) + x(5)] \quad (4)$$

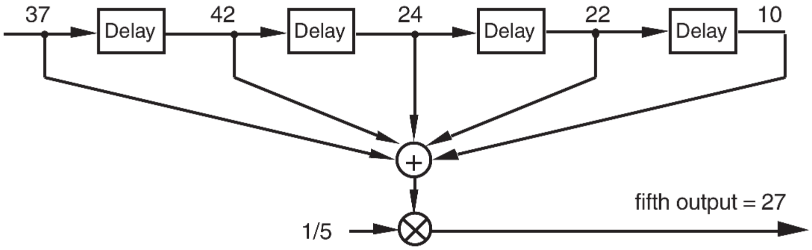
În cazul general pentru ieșirea n notăm eșantionul k cu $x(k)$ iar formula rezultată este:

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{5}[x(n-4) + x(n-3) + x(n-2) + x(n-1) + x(n)] \quad (5) \\ &= \frac{1}{5}\sum_{k=n-4}^{n} x(k) \quad (6) \end{aligned}$$

A ce miroase (6)? Răspuns: DFT!

Structura filtrului

Structura filtrului este reprezentată printr-o diagramă hardware (vezi primele cursuri).



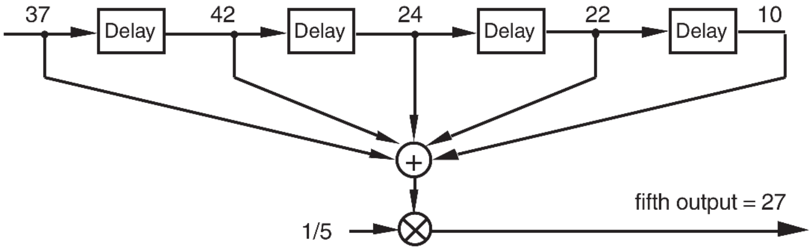
Putem la fel de bine să înmulțim cu $\frac{1}{5}$ și pe urmă să adunăm

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{5}x(n-4) + \frac{1}{5}x(n-3) + \frac{1}{5}x(n-2) + \frac{1}{5}x(n-1) + \frac{1}{5}x(n) \\ &= \sum_{k=n-4}^{n} \frac{1}{5}x(k) \end{aligned} \tag{7}$$

A ce miroase (7)?

Structura filtrului

Structura filtrului este reprezentată printr-o diagramă hardware (vezi primele cursuri).



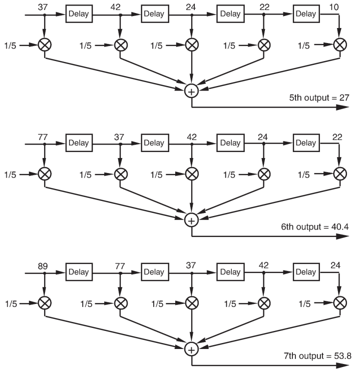
Putem la fel de bine să înmulțim cu $\frac{1}{5}$ și pe urmă să adunăm

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{5}x(n-4) + \frac{1}{5}x(n-3) + \frac{1}{5}x(n-2) + \frac{1}{5}x(n-1) + \frac{1}{5}x(n) \\ &= \sum_{k=n-4}^{n} \frac{1}{5}x(k) \end{aligned} \tag{7}$$

A ce miroase (7)? Răspuns: convoluție!

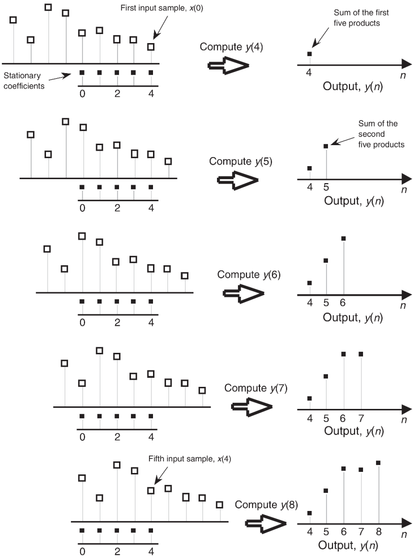
Calcul prin deplasare la dreapta

Observați efectul de deplasare de la stânga la dreapta:



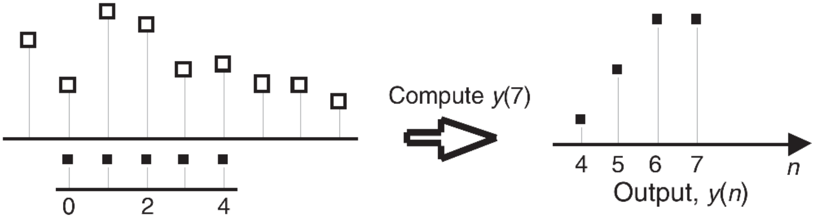
- *right shift*: filtrul aruncă cea mai veche intrare $x(n-5)$
- procesul continuu de deplasare la dreapta $\rightarrow$ *filtru transversal*
- intrările active $x(k)$ se mai numesc și **taps**
- valorile folosite la înmulțire se numesc **coeficienții** filtrului
- răspunsul în frecvență este determinat de *taps* și coeficienți

Filtrarea este convoluție



Filtrarea este convoluție

Fie $x(0), x(1), \dots, x(n)$ eșantioanele semnalului $x(n)$ **reprezentate de la dreapta la stânga** ca în figură.



Notăm $h(0), h(1), h(2), h(3), h(4)$ semnalul a cărui eșantioane sunt coeficienții filtrului **reprezentați de la stânga la dreapta**.

Atunci (7) devine convoluția filtrului cu taps-urile unde $h(k) = \frac{1}{5}$:

$$y(n) = h(4)x(n-4) + h(3)x(n-3) + h(2)x(n-2) + \\ + h(1)x(n-1) + h(0)x(n) = \sum_{k=n-4}^{n} h(k)x(n-k) \quad (8)$$

Cazul general

Pentru un filtru FIR cu M-tap-uri ieșirea n este:

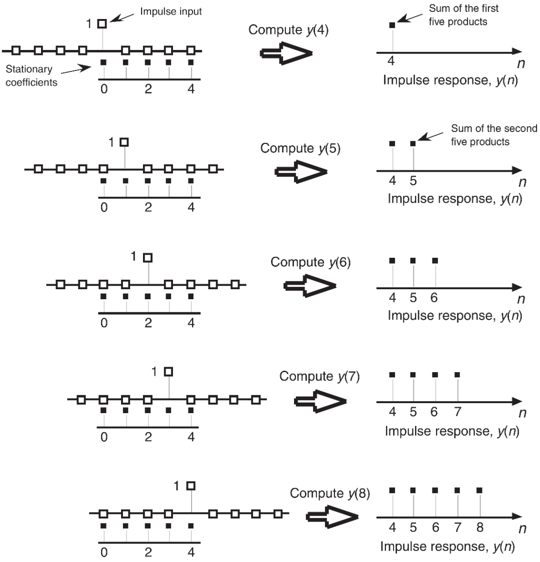
$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \tag{9}$$

Formula de calcul a convoluției pentru filtrele FIR discrete:

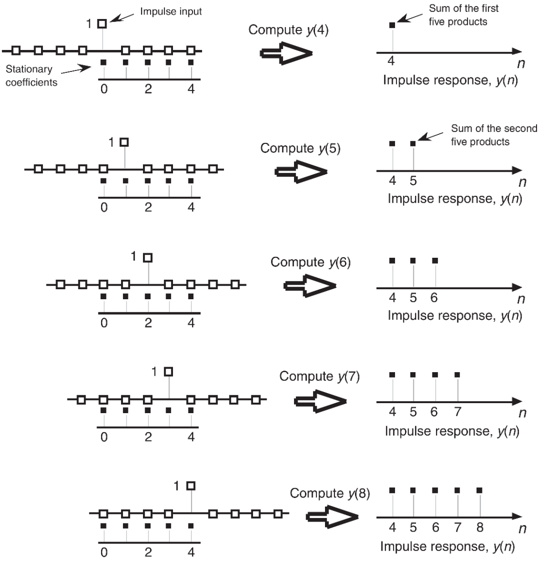
- inversarea ordinii axei timpului pentru $x(n)$
- iterația deplasează de la dreapta la stânga coeficienții filtrului
- pentru fiecare intrare nouă din $x(n)$ efectuăm suma produselor pentru a produce o ieșire $y(n)$
- similar cu operația DOT la înmulțirea matricelor

$$y(n) = h(k) * x(n) \tag{10}$$

Răspunsul la impuls dirac



Răspunsul la impuls dirac



Răspunsul la implus este identic cu coeficienții filtrului!

Teorema convoluției

Teoremă

Transformata Fourier Discretă (DFT) a convoluției dintre răspunsului la impuls a unui filtru (a coeficienților) și o secvență de M intrări (taps) este egală cu produsul dintre DFT-ul intrării și DFT-ul răspunsului la impuls a filtrului.

$$y(n) = h(k) * x(n) \underset{IDFT}{\overset{DFT}{\Longleftrightarrow}} H(m)X(m) = Y(m) \tag{11}$$

Convoluția în domeniul timpului este produs în domeniul frecvenței!

Componenta spectrală $Y(m)$ este DFT-ul semnalului $h(k) * x(n)$.

Semnalul $h(k) * x(n)$ este obținut din IDFT-ul bin-ului $Y(m)$.

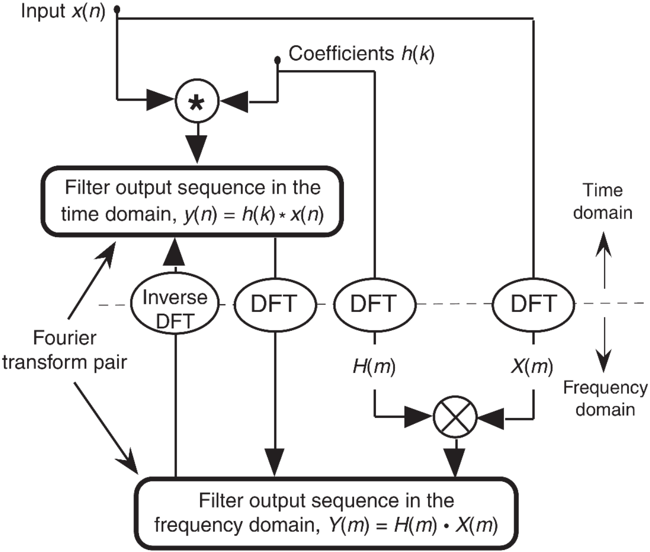
Demonstrație: Teorema convoluției

$$y(n) = h(k) * x(n) \underset{IDFT}{\overset{DFT}{\Longleftrightarrow}} H(m)X(m) = Y(m)$$

Demonstrație:

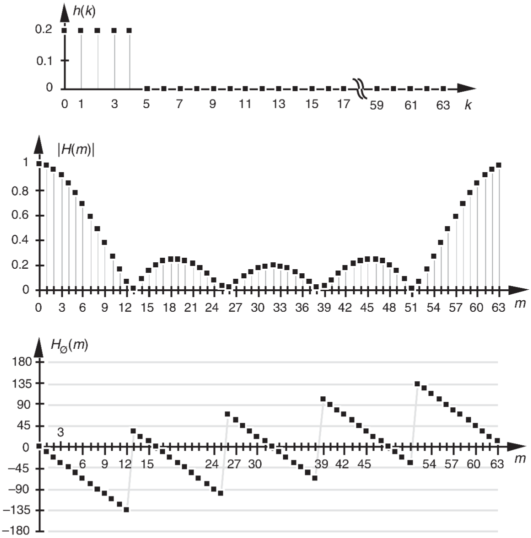
$$\begin{aligned}
Y(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} y(n) e^{-j2\pi mn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi mn/N} \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) = \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)e^{-j2\pi mn/N} = \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)e^{-j2\pi mn/N} = \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} h(k) \sum_{n=0}^{N-1} x(n-k)e^{-j2\pi mn/N} = \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} h(k)e^{-j2\pi mk/N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi mn/N} = H(m)Y(m)
\end{aligned}$$

Teorema convoluției



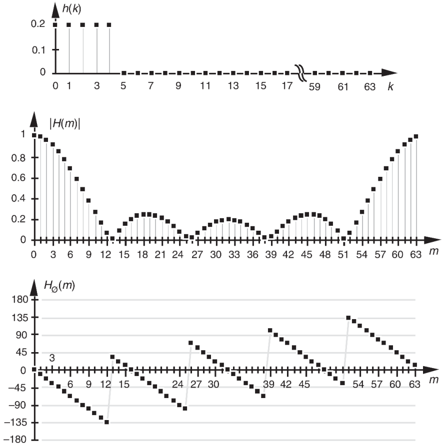
DFT a filtrului medie cu extensie la $N = 64$ puncte

Sunt adăugate 59 de zerouri, iar magnitudinea este normalizată.



DFT a filtrului medie cu extensie la $N = 64$ puncte

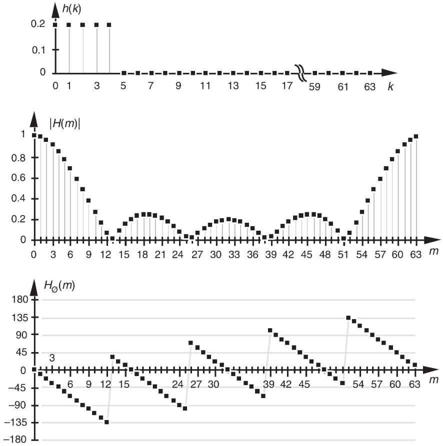
Trecerea bruscă a coeficienților de la 0,2 la 0 creează *sidelobes*.



- ce funcție este $H(m)$?
- care este frecvența de pliere (folding)?
- care este perioada în domeniul frecvenței?

DFT a filtrului medie cu extensie la $N = 64$ puncte

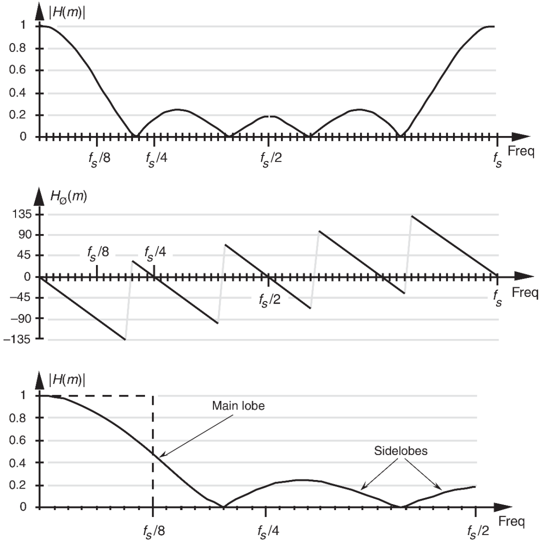
Trecerea bruscă a coeficienților de la 0,2 la 0 creează *sidelobes*.



- ce funcție este $H(m)$? Răspuns: sinc($\cdot$)
- care este frecvența de pliere (folding)? Răspuns: $m = 32$
- care este perioada în domeniul frecvenței? Răspuns: f_s

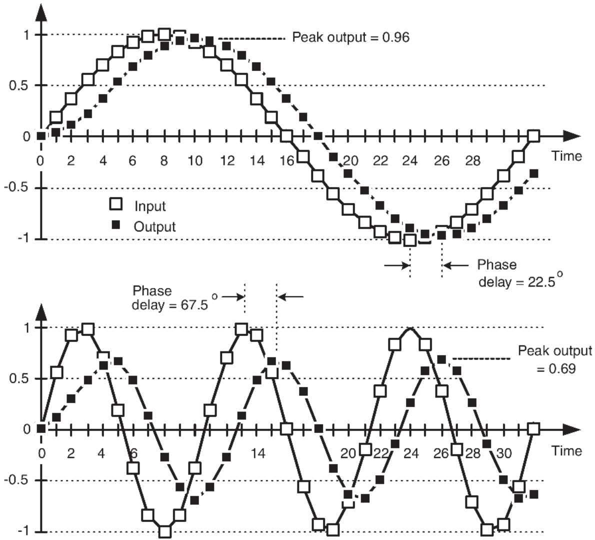
Analiza răspunsului în frecvență a filtrului

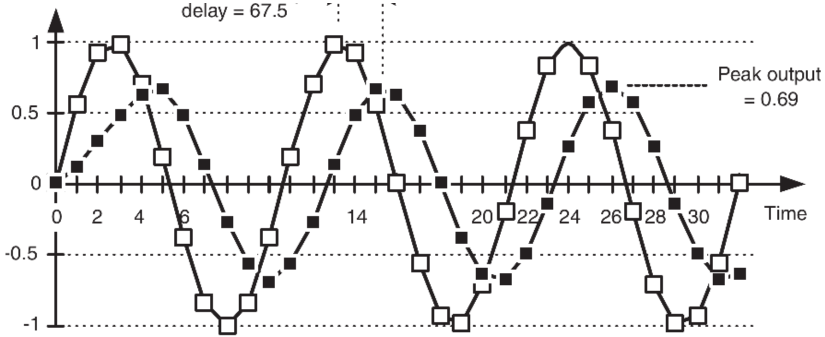
Media se comportă ca un filtru trece-jos



Exemplu sin(·): intrarea sinusoide $f_s/32$ și $3f_s/32$

Atenuează componentele cu frecvență înaltă și păstrează joasele.

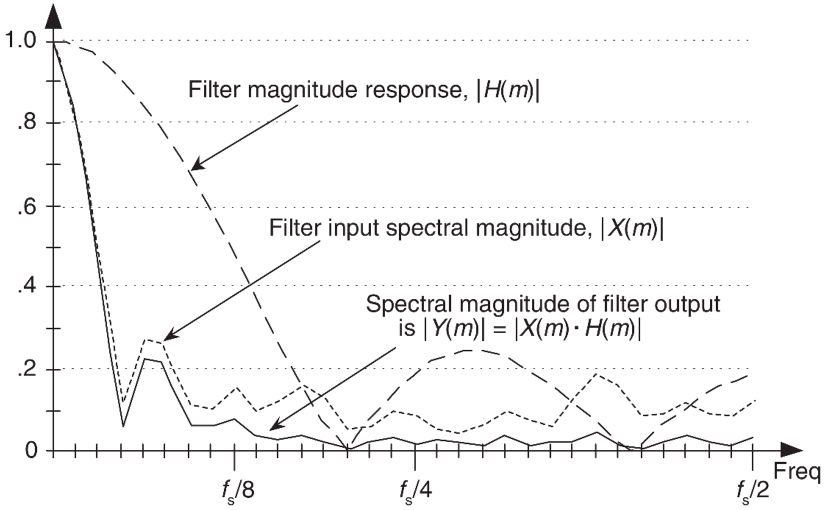




- primele 4 ieșiri nu sunt sinusoidale → *răspuns tranzitoriu*
- numărul de eșantioane de tranziție este egal cu numărul D de unități de întârziere ale filtrului (**nu cu numărul de coeficienți nenuli!**)
- ieșirile nu sunt valide până la $y(D+1)$

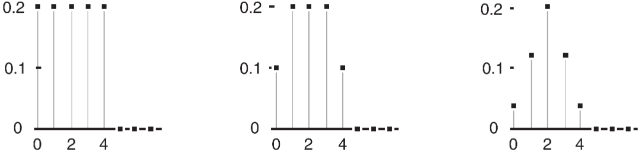
Exemplu pod: răspunsul în frecvență

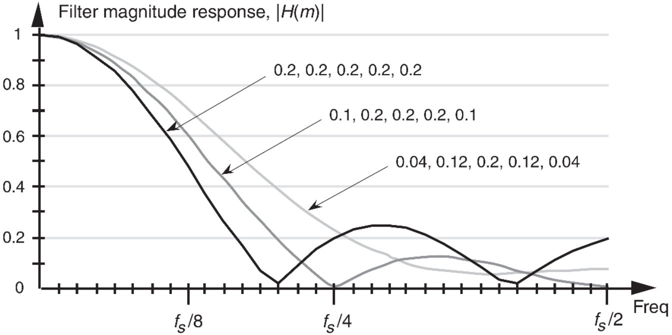
Atenuează componentele cu frecvență înaltă și păstrează joasele.



Efectul coeficienților asupra filtrului

Trecerea bruscă a coeficienților de la 0,2 la 0 creează *sidelobes*.

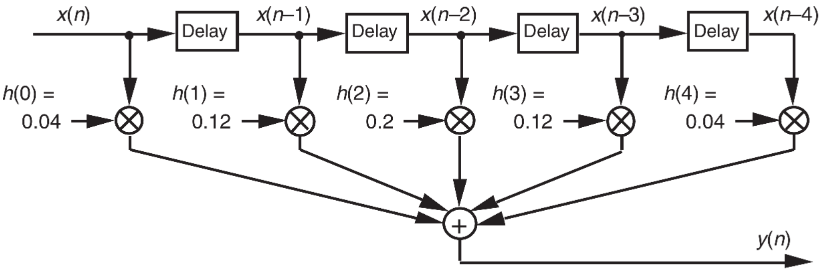




Reducerea *sidelobes* lărgește *mainlobe*.

Generalizare

Construcția filtrelor FIR transversale implică schimbarea coeficienților și a numărului de tap-uri, dar nu schimbă altfel structura filtrului medie studiat.



Proiectarea filtrelor

Proiectarea filtrelor presupune determinarea coeficienților după nevoile proprii, punctuale, aplicației cu care avem de a face.

Determinăm răspunsul în frecvență **dorit** și calculăm coeficienții filtrelor în funcție de acesta!

Algoritmii de calcul prin

- metoda ferestrei
- metoda optimum

Metoda ferestrei

Pornim de la un răspuns în frecvență ideal și analog $H(f)$.

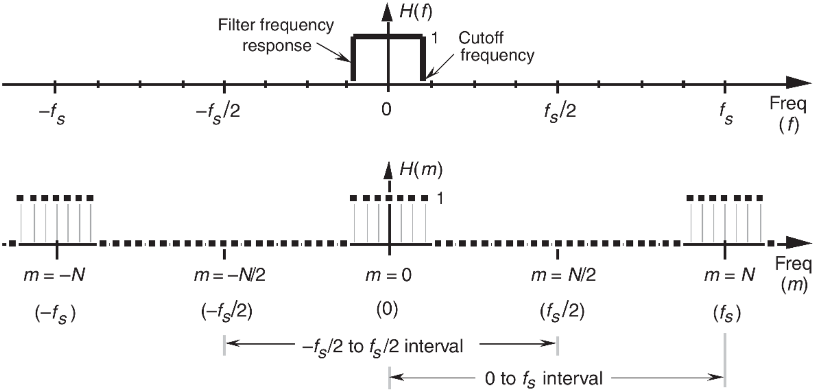
Definiție

Un filtru ideal reprezintă un filtru trece-jos cu gain unitar la frecvențe joase și gain nul (atenuare infinită) după o anumită frecvență de tăiere (cutoff frequency)

Metoda algebrică de calcul al coeficienților în domeniul timpului:

1. construcția unei expresii $H(m)$ ce reprezintă răspunsul dorit în frecvență
2. aplicarea transformatei IDFT pentru a obține $h(k)$
3. evaluarea expresiei $h(k)$ drept o funcție în domeniul timpului de indice k

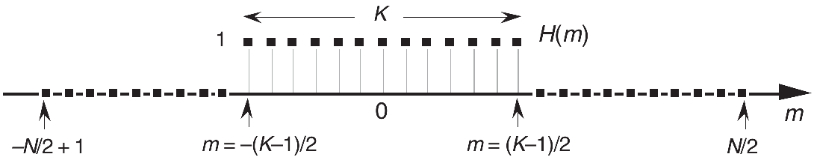
Exemplu: filtru ideal



Metoda algebrică: construcție

Fie răspunsul $H(m)$ cu N eșantioane în intervalul $\pm\frac{f_s}{2}$ și K eșantioane unitare pentru zona de trece-bandă.

$$h(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=-(N/2)+1}^{N/2} H(m) e^{j2\pi mk/N} \tag{13}$$



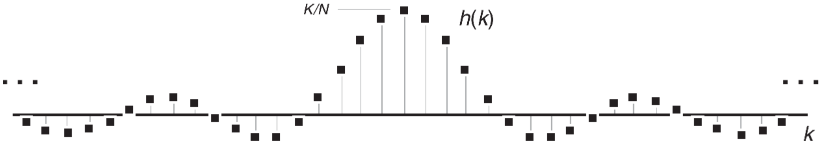
Soluția este cunoscută, și anume funcția sinc:

$$h(k) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\pi kK/N)}{\sin(\pi k/N)} \tag{14}$$

Metoda algebrică: rezultat

Soluția este cunoscută, și anume funcția sinc:

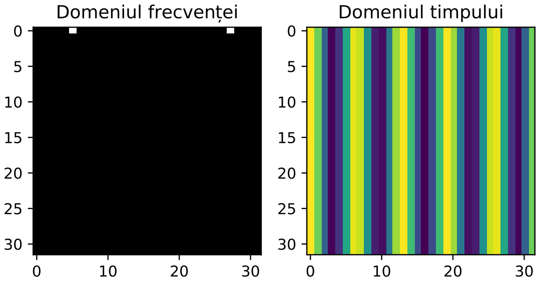
$$h(k) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\pi k K / N)}{\sin(\pi k / N)} \tag{16}$$



Metoda programatică

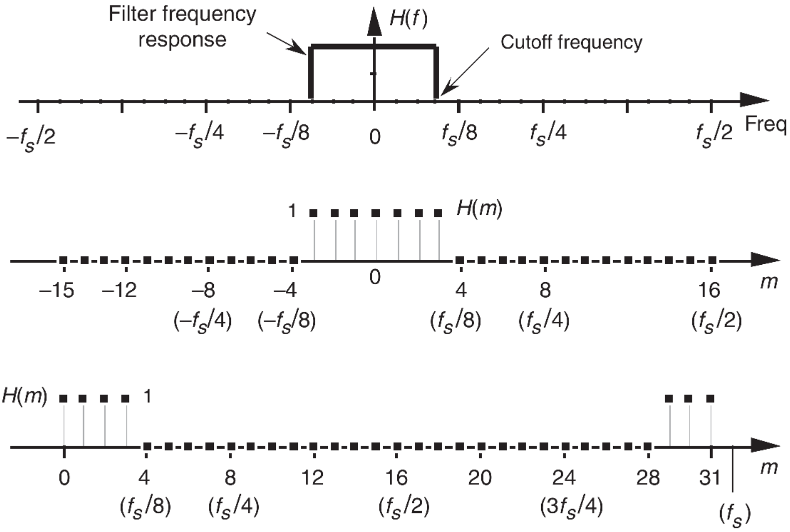
Metoda programatică de calcul al coeficienților în domeniul timpului:

1. definim individual eșantioanele în domeniul frecvenței ce reprezintă $H(m)$
2. folosim un program să calculeze IDFT pentru a obține $h(k)$
3. evaluarea expresiei $h(k)$ drept o funcție în domeniul timpului de indice k



Metoda programatică: indecși negativi

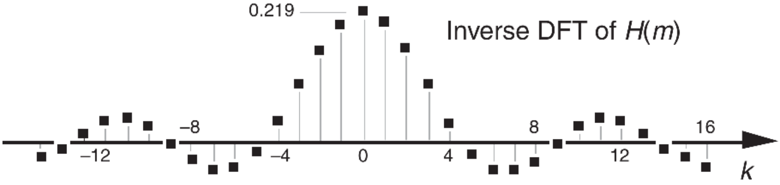
Pentru $N = 32$, dorim evitarea celor 16 eșantioane din dreapta.

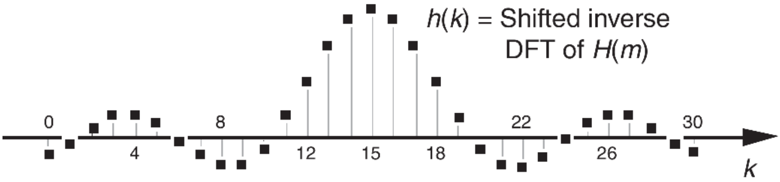


Profităm de simetrie și dorim intervalul $[0, f_s - 1]$ înloc de $\pm f_s/2$.

Metoda programatică: *shift* în domeniul timpului

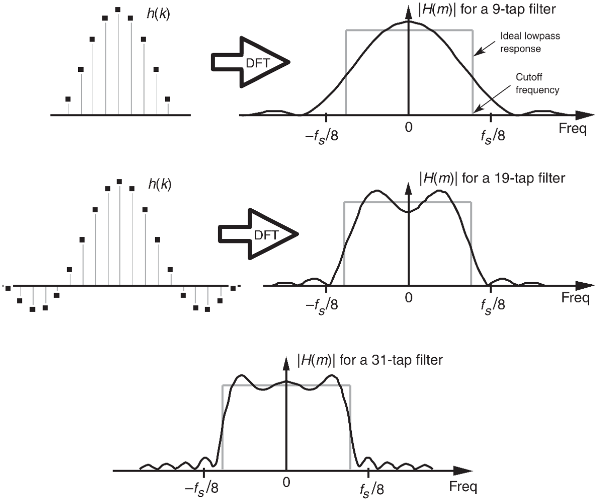
Pentru că ne dorim simetrie în jurul lobului principal, putem aplica o operație de *shift* la stânga care, cf. teoremei de shifting (vezi cursurile anterioare), păstrează magnitudinea eșantioanelor.





Proiectare: numărul de *taps*

Cu cât avem mai mulți termeni $h(k)$ cu atât aproximăm mai bine răspunsul ideal în frecvență.



Apare efectul de **ripples** în banda de trecere (*passband*)!

Teorema convoluției 2

Convoluția în domeniul timpului este multiplicare în frecvență.

$$h(k) * x(n) \underset{IDFT}{\overset{DFT}{\Longleftrightarrow}} H(m)X(m)$$

Remarcă

Precum știm, componentele n și m sunt indexate de la 0 la $N-1$. Deci nu contează domeniile de desubt, teorema convoluției (11) ne spune de fapt că operația de convoluție dintr-un domeniu este echivalentă cu multiplicarea în celălalt domeniu. Astfel putem scrie și relația invers:

$$h(k)x(n) \underset{IDFT}{\overset{DFT}{\Longleftrightarrow}} H(m) * X(m) \tag{17}$$

Metoda ferestrei

Fie h^∞ un filtru ideal trece-jos sinc(x) infinit de lung și $w(k)$ o fereastră cu care trunchiem termenii h^∞.

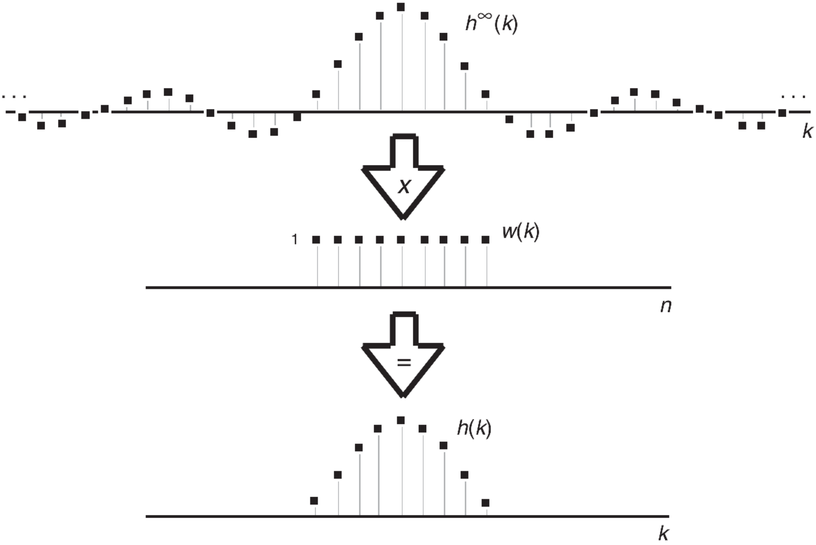
Atunci putem rescrie (17) pentru a obține filtrul discretizat dorit astfel:

$$h^\infty(k)w(k) \underset{IDFT}{\overset{DFT}{\Longleftrightarrow}} H(m)^\infty * W(m) \tag{18}$$

Lungimea lui $w(k)$ reprezintă efectiv numărul de *taps* dorite în filtrul proiectat $H(m)$:

$$H(m) = H^\infty(m) * W(m) \tag{19}$$

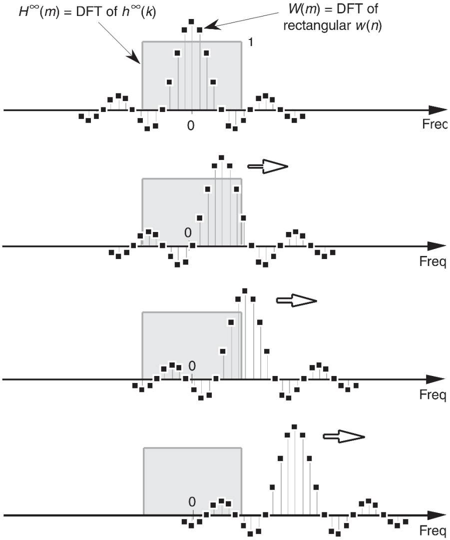
Exemplu: metoda ferestrei



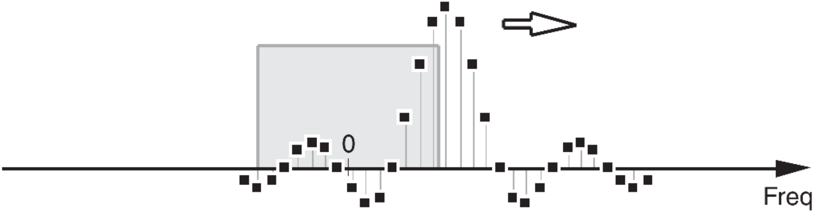
Lungimea lui $w(k)$ reprezintă efectiv numărul de *taps* dorite.

Convoluția în frecvență

Pașii necesari pentru a efectua calcul ecuației (19):



Observații: convoluția în frecvență

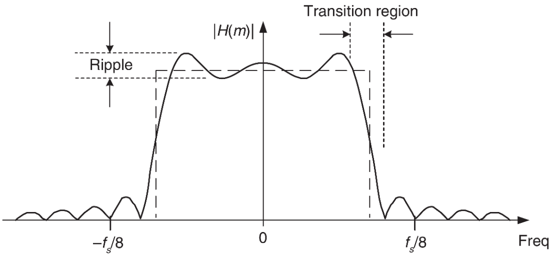


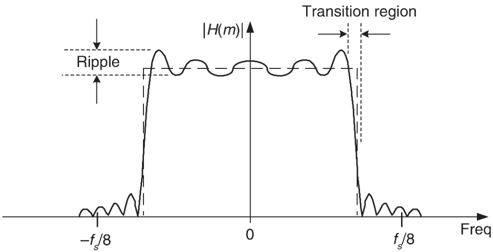
- $H(m)$ este construit din suma produselor H^∞ și $W(m)$ pentru o deplasare dată a lui $W(m)$
- $H(m)$ pentru un m dat reprezintă suma eșantioanelor din $W(m)$ care se suprapun cu H^∞
- când lobul principal părăsește fereastra, începe perioada de atenuare a frecvențelor
- pe măsură ce deplasarea ferestrei continuă peste frecvența de *cutoff*, efectul de *ripple* continuă

Cum putem elimina efectul de ripple?

Ripple în funcție de numărul de *taps*: $N = 32$ vs. $N = 64$

Numărul de taps micșorează perioada de tranziție.





Dar efectul de ripple rămâne neafectat!

Fenomenul lui Gibbs

Deși îngustăm perioada de tranziție, nu putem elimina efectul de ripple în zona trece-bandă datorită fenomenului Gibbs.

Teoremă

Fenomenul lui Gibbs apare de fiecare dată când o funcție cu discontinuități de speța întâi este reprezentată cu ajutorul transformatei Fourier.

Nici o secvență finită de sinusoide nu va putea să acopere această discontinuitate!

$\Longrightarrow$ tot timpul va apărea efectul de ripple.

Atenuarea efectului de ripple

Efectul de ripple apare datorită loburilor secundare ce duc implicit la discontinuitățile de speță întâi din $w(k)$.

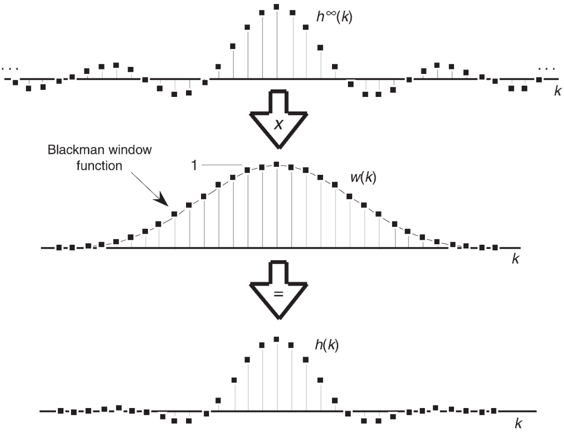
Minimizăm ripples precum am făcut la fenomenul de leakage!

Folosim ferestre particulare ca cele prezentate până acum, dar introducem și altele întâlnite în practică precum:

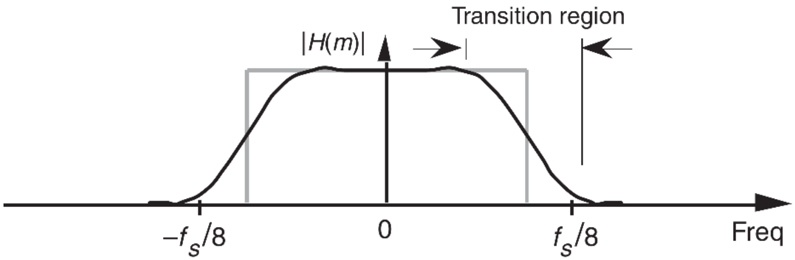
- Blackman
- Cebîșev
- Kaiser

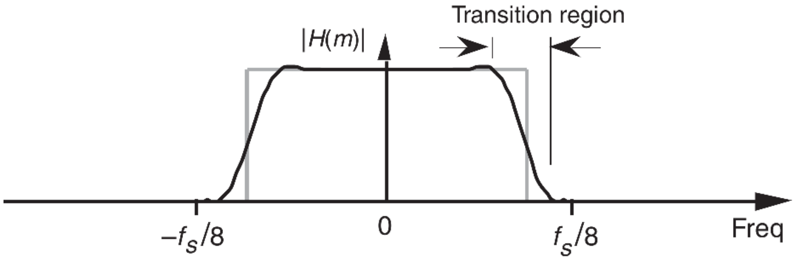
Fereastra Blackman

$$\underset{k\in\{0\ldots N-1\}}{w(k)} = 0,42 - 0,5\cos\left(\frac{2\pi k}{N-1}\right) + 0,08\cos\left(\frac{4\pi k}{N-1}\right) \quad (21)$$



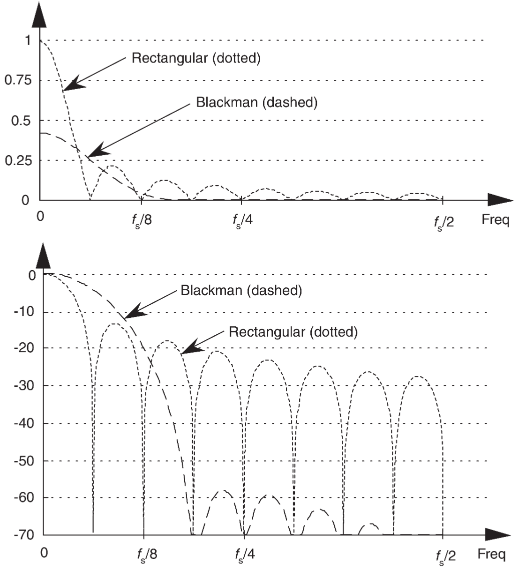
Blackman: răspuns în frecvență pentru $N = 32$ și $N = 64$





Atenuează semnificativ ripples, dar prelungește tranziția.

Blackman versus dreptunghiular



Normalizarea scalei logaritmice: $W_{\mathrm{dB}}(m) = 20\log_{10}\left(\frac{\|W(m)\|}{\|W(0)\|}\right)$

Parametrizare

Blackman face parte tot din categoria de filtre cu coeficienți ficși: nu putem controla răspunsul ferestrei în frecvență, el este dat.

Pentru a putea controla noi compromisul între lobul principal și cei secundari, avem nevoie de ferestre cu parametrizare precum:

Fereastra Cebîșev

$$W(m) = \frac{\cos\left[N\cos^{-1}\left[\alpha\cos(\pi m/N)\right]\right]}{\cosh[N\cosh(\alpha)]} \tag{22}$$

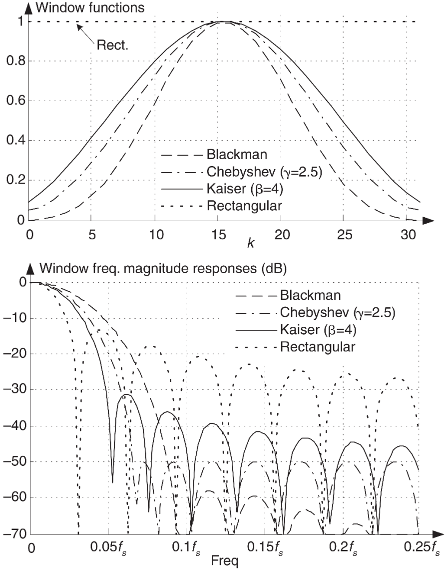
$$\alpha = \cosh\left(\frac{1}{N}\cosh^{-1}(10^{\gamma})\right) \tag{23}$$

Fereastra Kaiser

$$w(k) = \frac{I_0\left[\beta\sqrt{1-\frac{k-p}{p}^2}\right]}{I_0(\beta)},\ p = (N-1)/2 \tag{24}$$

unde I_0 este funcția Bessel de ordin zero.

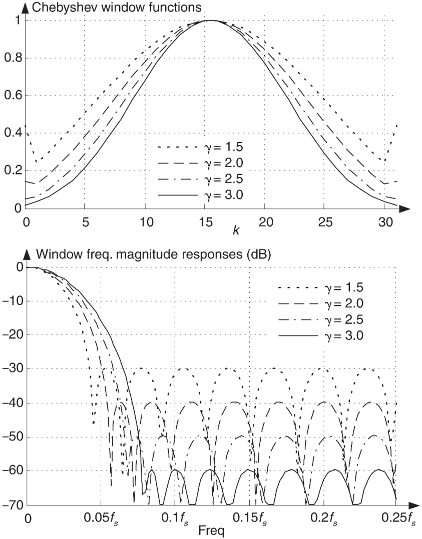
Comparație: răspunsul în frecvență



Cebîșev are lobi secundari constanți, Kaiser îi are mai mari dar scad.

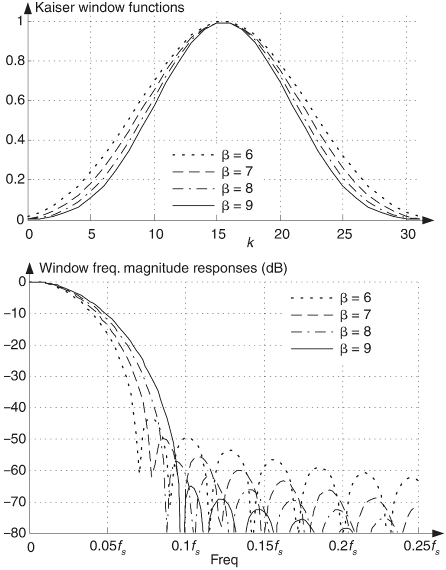
Parametrizare Cebîșev

Frecvența de atenuare (*stopband*): $Atten_{\mathsf{Cheb}} = -20\gamma\,\mathrm{dB}$



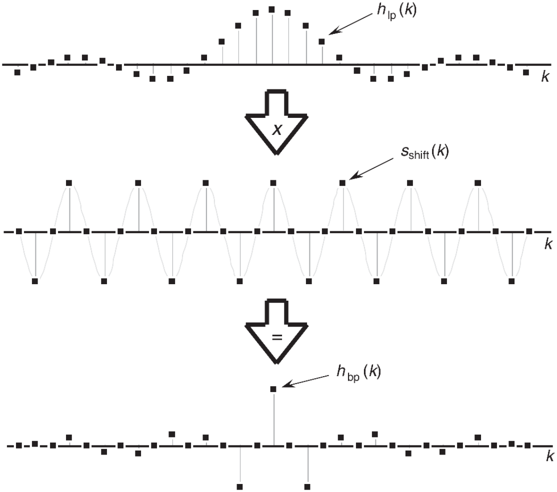
Exemplu: pentru lobi secundari mai mici de $-60\,\mathrm{dB}$ avem $\gamma = 3$.

Parametrizare Kaiser



Proiectare filtru trece-bandă

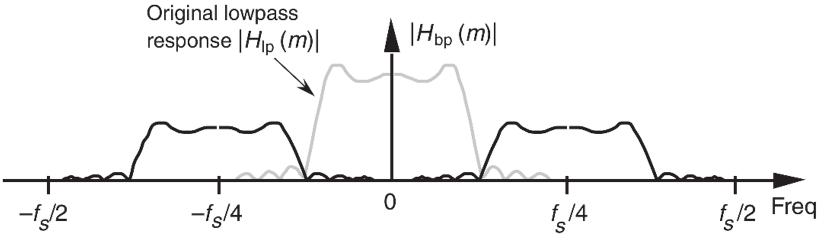
Pornim de la un filtru trece-jos și deplasăm cu o sinusoidă de $f_s/4$



$$h_{bp}(k) = h_{lp}(k) s_{shift}(k) \tag{25}$$

Trece-bandă: răspunsul în frecvență cu $\sin(f_s/4)$

$$h_{\mathrm{bp}}(k) = h_{\mathrm{lp}}(k) s_{\mathrm{shift}}(k)$$

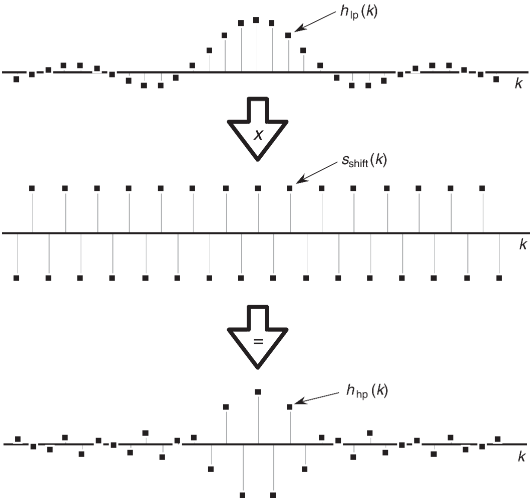


Magnitudinea $\|H_{\mathrm{bp}}(m)\|$ este jumătate din cea a lui $\|H_{\mathrm{lp}}(m)\|$ pentru că jumătate din valorile lui $h_{\mathrm{bp}}(k)$ sunt nule.

Pentru a centra în altă frecvență decât $f_s/4$, pur și simplu înmulțim cu o sinusoidă de frecvența dorită.

Proiectare filtru trece-sus

Pur și simplu înmulțim cu o sinusoidă de frecvență $f_s/2$

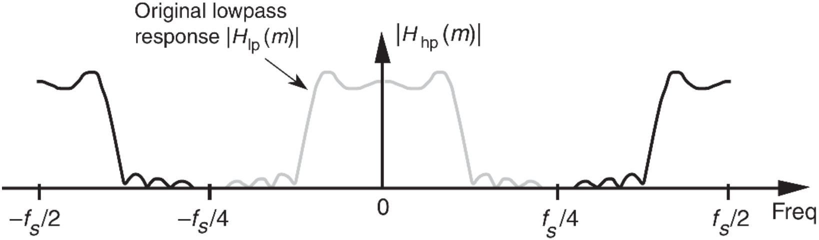


$$h_{\text{hp}}(k) = h_{\text{lp}}(k) s_{\text{shift}}(k) \tag{26}$$

Trece-sus: răspunsul în frecvență cu $\sin(f_s/2)$

Produsul cu sinusoida este echivalentul schimbării de semn din două în două eșantioane.

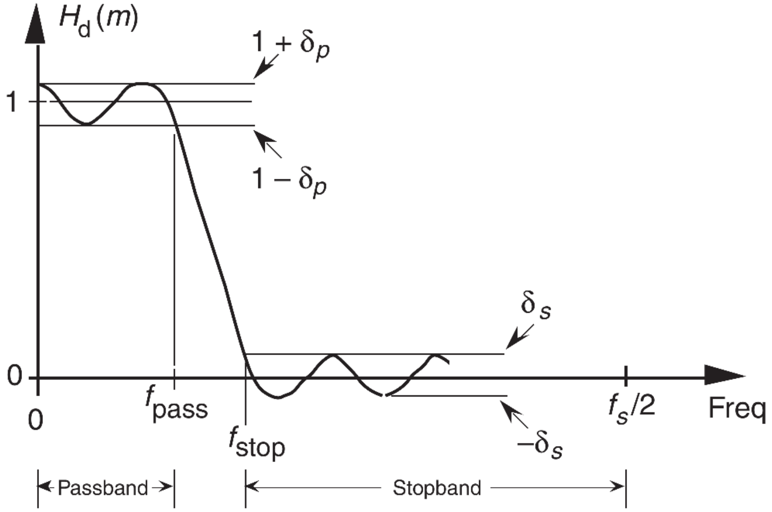
$$h_{\text{hp}}(k) = h_{\text{lp}}(k) s_{\text{shift}}(k)$$



Magnitudinea $\|H_{\text{hp}}(m)\|$ este egală cu cea a lui $\|H_{\text{lp}}(m)\|$.

Metoda optimă sau Parks-McClellan Exchange

Produce frecvența dorită $H_d(m)$ date f_{pass} și f_{stop}. Foarte populară în practică.

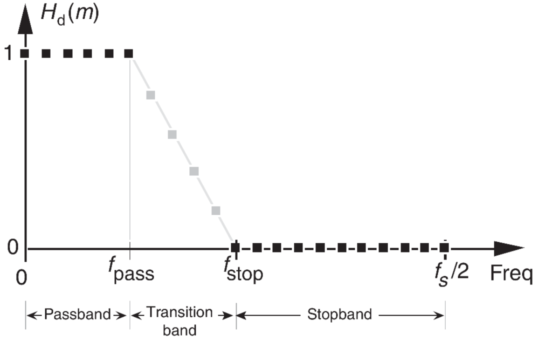


Opțional se pot definii și parametrii de ripple δ_p și δ_s.

Metoda optimă cu parametrii δ_p și δ_s calculați automat

$$\text{Passband ripple} = 20\log_{10}(1+\delta_p) \tag{27}$$

$$\text{Stopband ripple} = -20\log_{10}(-\delta_s) \tag{28}$$



Presupunem că dorim un efect de ripple minim: lăsăm o metodă de optimizare să minimizeze δ_p și δ_s pentru noi.

Proiectare

Metoda optimă produce un filtru de tip Cebîșev dar mai apropiat de frecvența dorită $H_d(m)$.