Procesarea semnalelor

Semnale trece-jos și trece bandă.

Paul Irofti

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
Departmentul de Informatică
Email: paul.irofti@fmi.unibuc.ro

Discretizare și eșantionare

Continuu:

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \tag{1}$$

Discret:

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) \tag{2}$$

unde

- f_0 – frecvența (Hz) măsoară numărul de oscilații într-o secundă
- n – eșantionul, indexul în șirul de timpi $0, 1, 2 \ldots$
- t_s – perioada de eșantionare; constantă (ex. la fiecare secundă)
- nt_s – orizontul de timp (s)
- $f_0 n t_s$ – numărul de oscilații măsurat
- $2\pi f_0 n t$ – unghiul măsurat în radiani (vezi note de curs)

Aliasing

Fenomenul de aliere (aliasing) apare când:

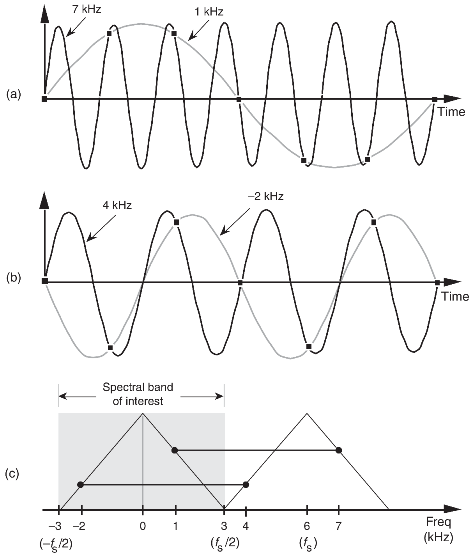
$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin(2\pi (f_0 + k f_s) n t_s) \tag{3}$$

Teoremă

Fie frecvența de eșantionare f_s (eșantioane / secundă) și k un număr întreg nenul. Atunci nu putem distinge eșantioanele unei sinusoide de frecvență $f_0 Hz$ de eșantioanele unei siunsoide de $f_0 + kf_s Hz$.

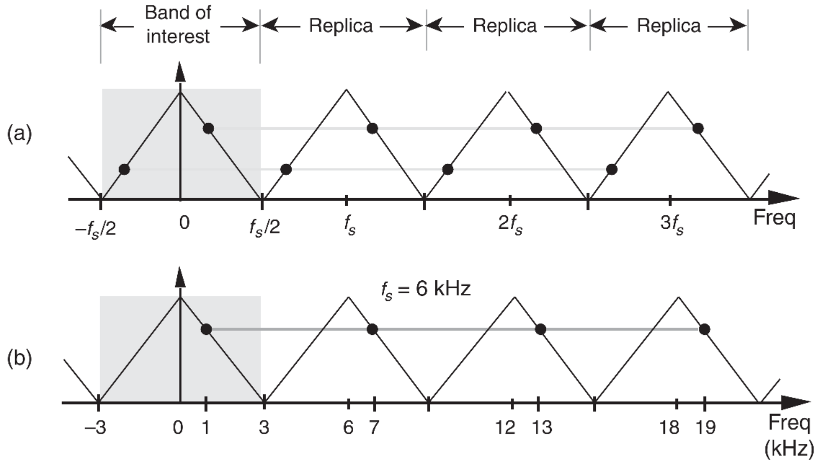
Cum putem fi siguri că ce am măsurat reprezintă realitatea?

Ambiguitate în domeniul frecvenței



Sursă: (Lyons 2004)

Duplicare (replici) în domeniul frecvenței



Sursă: (Lyons 2004)

Semnalul $f_0 = 7kHz$ eșantionat cu $f_s = 6kHz$ produce o secvență a cărui spectru reprezintă simultan semnalele (tonurile): $1kHz, 7kHz, 13kHz, 19kHz, \ldots$.

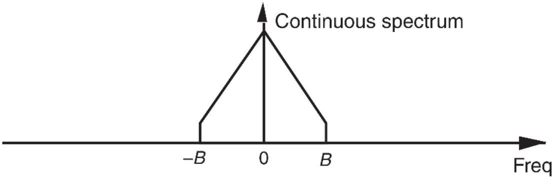
Semnale trece-jos (lowpass)

Definiție

Semnalele limitate în bandă sunt semnalele a căror amplitudine spectrală este nulă în afara intervalului $[-B Hz, +B Hz]$. Altfel spus, semnalul are o frecvență maximă.

Definiție

Un semnal trece-jos este un semal limitat în bandă și centrat în jurul frecvenței zero.

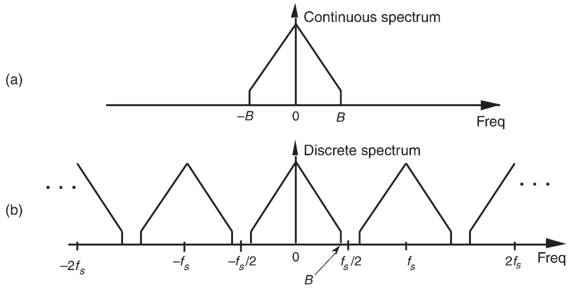


Sursă: (Lyons 2004)

Semnale trece-jos: de la analog la digital

Semnalul continuu este discretizat apărând duplicatele în spectrul fercvenței.

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin\left(2\pi\left(f_0 + k f_s\right) n t_s\right).$$



Sursă: (Lyons 2004)

Se observă că $f_s \geq 2B$ a.î. duplicatele sunt separate la $\pm\frac{f_s}{2}$.

Semnale trece-jos (lowpass): frecvența Nyquist

Definiție

Frecvența de eșantionare $f_s \geq 2B$ *este criteriul Nyquist de eșantionare, rezultat din teorema Nyquist-Shannon, ce asigură separarea duplicatelor în domeniul frecvenței.*

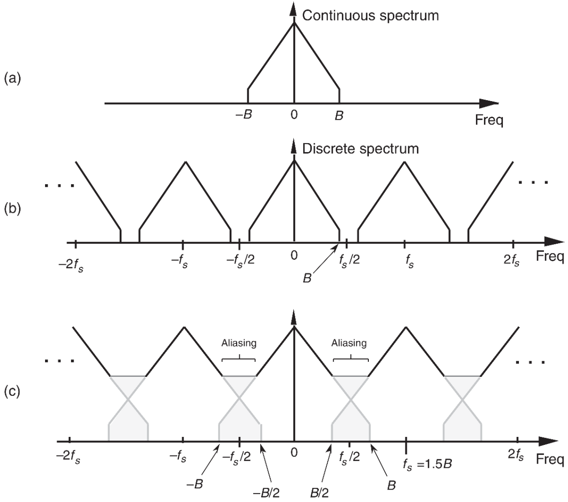
Definiție

Frecvențele $\pm\frac{f_s}{2}$ *se numesc frecvențe de pliere (folding frequencies) sau frecvențe Nyquist.*

Ce se întâmplă când eșantionăm sub frecvența Nyquist?

Semnale trece-jos (lowpass): eșantionare sub Nyquist

Ce se întâmplă când eșantionăm sub frecvența Nyquist?



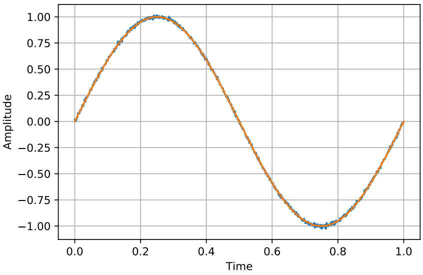
Sursă: (Lyons 2004)

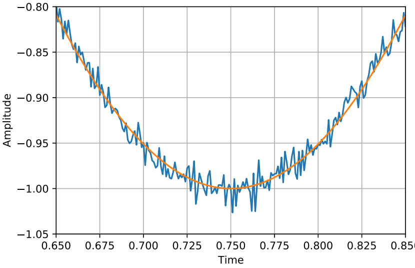
Semnale trece-jos (lowpass): observații

- informația în interavul $[-B, -\frac{B}{2}] \cup [\frac{B}{2}, B]$ este coruptă
- valorile amplitudinilor în cazul suprapunerii sunt nedefinite
- informația spectrală a semnalului original continuu este conținută complet în banda $[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}]$
- ultima observație este foarte importantă în practică

Zgomot

Ce se întâmplă dacă semnalul continuu este însoțit de zgomot?

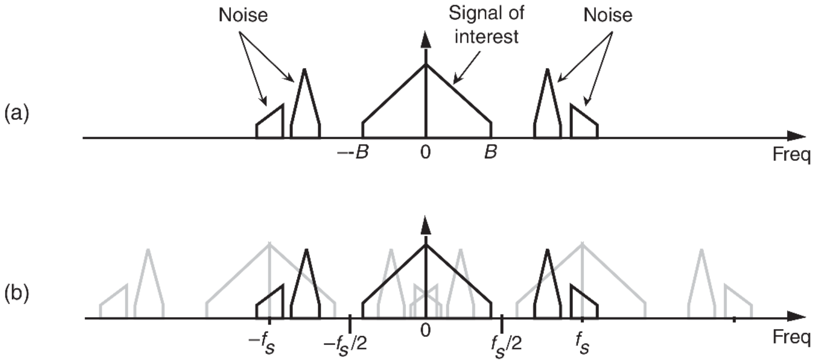




Semnale trece-jos (lowpass): zgomot

Pentru un semnal trece-jos eșantionat corect:

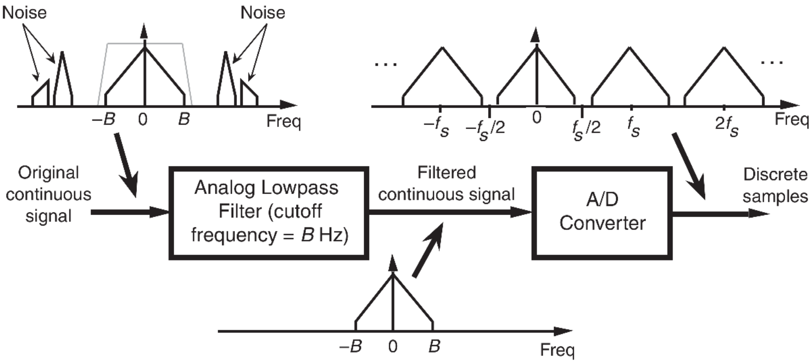
- nu avem suprapuneri are duplicatelor în banda B
- dar duplicate ale zgomotului sfârșesc și ele în banda de interes!



Sursă: (Lyons 2004)

Semnale trece-jos (lowpass): eliminarea zgomotului

Profităm de faptul că avem de a face cu semnal trece-jos și eliminăm cu un filtru trece-jos orice este în afara benzii BHz după care discretizăm.



Sursă: (Lyons 2004)

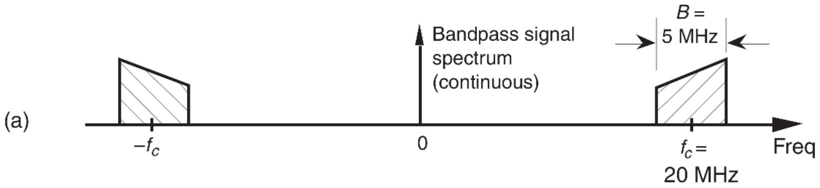
Semnale trece-bandă (bandpass)

Definiție

Semnalele limitate în bandă sunt semnalele a căror amplitudine spectrală este nulă în afara intervalului $[-B\,Hz, +B\,Hz]$*. Altfel spus, semnalul are o frecvență maximă.*

Definiție

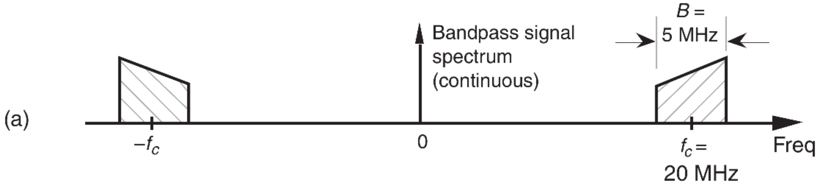
Un semnal trece-bandă este un semal limitat în bandă și centrat în jurul unei frecvențe nenule f_c*. Frecvența* f_c *se mai numește și carrier frequency.*



Sursă: (Lyons 2004)

Exemplu: semnal trece-bandă

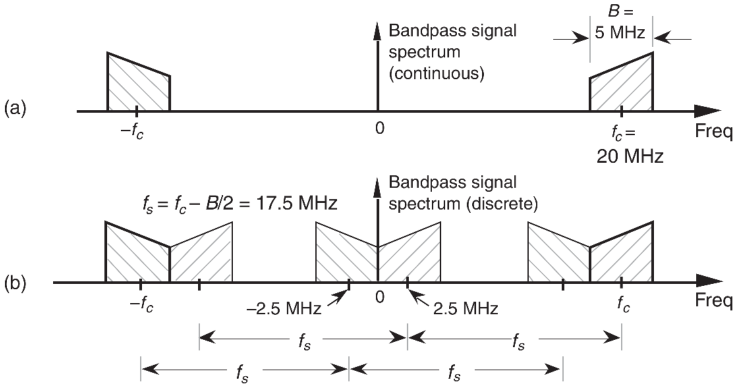
- semnalul este centrat la $f_c = 20\text{MHz}$
- are o bandă de $B = 5\text{MHz}$
- semnalul este limitat în bandă
- care este frecvența maximă?
- care este frecvența de eșantionare necesară conform Nyquist?
- putem eșantiona mai eficient în acest caz? sub-Nyquist?



Sursă: (Lyons 2004)

Exemplu: semnal trece-bandă

- centrat la $f_c = 20$MHz cu banda $B = 5$MHz
- care este frecvența maximă? 22.5MHz
- eșantionare conform Nyquist? $f_s = 45MHz$
- putem eșantiona sub-Nyquist? Da. Putem exploata duplicarea centrând semnalul în zero cu $f_{s'} = 17.5$MHz

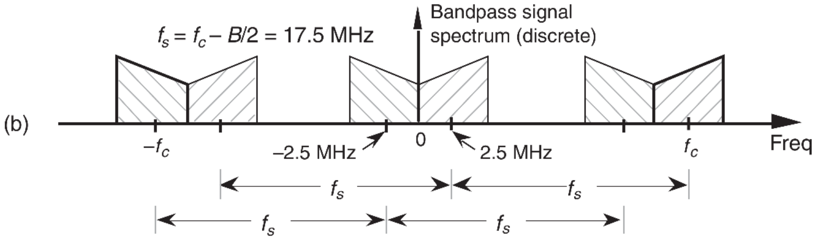


Sursă: (Lyons 2004)

Exemplu: semnal trece-bandă

Observații:

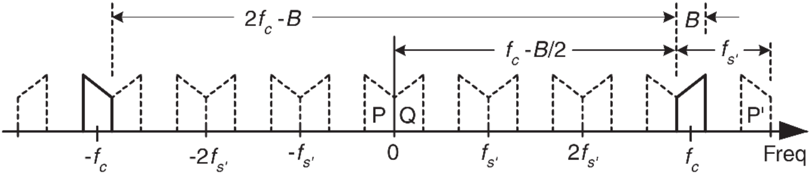
- componentele spectrale originale sunt în continuare centrate f_c
- am exploatat spațiul dintre origine și f_c inserând o dublură cu ajutorul ecuației (3)
- duplicatele sunt centrate exact la origine (*baseband*)
- $k =?$ în (3)
- eșantionare la $f_s = 45 MHz$ nu este necesară pentru a evita efectele de aliere



Sursă: (Lyons 2004)

Semnal trece-bandă: cazul general

Fie un semnal trece-bandă cu centrat în f_c de bandă B eșantionat sub-Nyquist cu $f_{s'}$ astfel încât între $-f_c$Hz și $+f_c$Hz apar m replici.

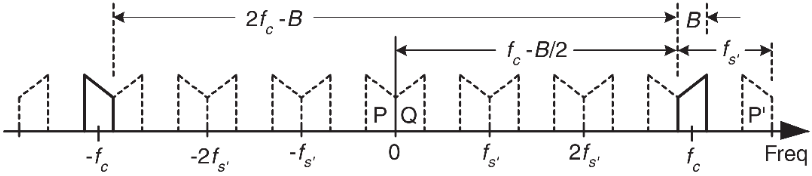


Sursă: (Lyons 2004)

Care este frecvența de eșantionare $f_{s'}$ astfel încât dublura pozitivă P și, respectiv, cea negativă Q să fie centrate în zero?

Semnal trece-bandă: cazul general

Fie un semnal trece-bandă cu centrat în f_c de bandă B eșantionat sub-Nyquist cu $f_{s'}$ astfel încât între $-f_c$Hz și $+f_c$Hz apar m replici.



Sursă: (Lyons 2004)

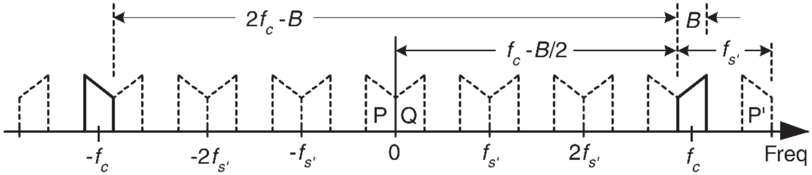
Care este frecvența de eșantionare $f_{s'}$ astfel încât dublura pozitivă P și, respectiv, cea negativă Q să fie centrate în zero?

$$mf_{s'} = 2f_c - B \implies f_{s'} = \frac{2f_c - B}{m} \tag{4}$$

Semnal trece-bandă: cazul general

Ce se întâmplă dacă scad frecvența de eșantionare?

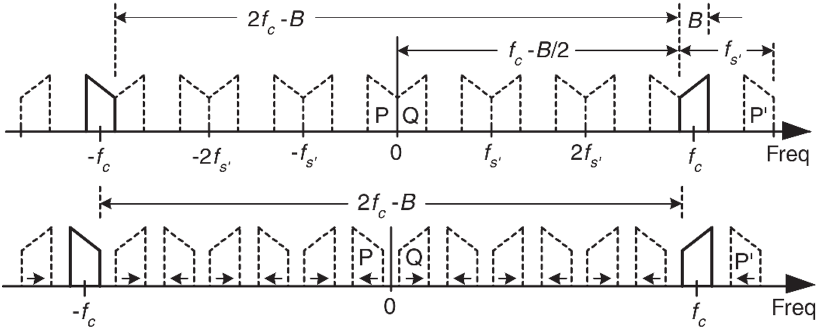
$$f_{s'} \leq \frac{2f_c - B}{m} \tag{5}$$



Semnal trece-bandă: cazul general

Ce se întâmplă dacă scad frecvența de eșantionare?

$$f_{s'} \leq \frac{2f_c - B}{m} \tag{5}$$

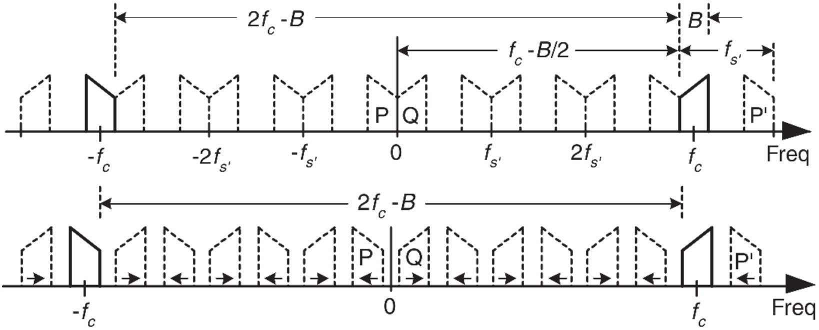


Sursă: (Lyons 2004)

Semnal trece-bandă: cazul general

Ce se întâmplă dacă scad frecvența de eșantionare?

$$f_{s'} \leq \frac{2f_c - B}{m} \tag{5}$$



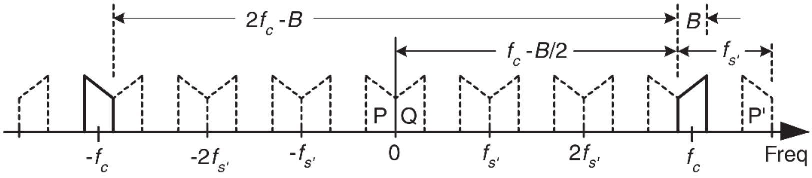
Sursă: (Lyons 2004)

Dar dacă cresc frecvența de eșantionare?

Semnal trece-bandă: cazul general

Până când pot să scad frecvența de eșantionare?

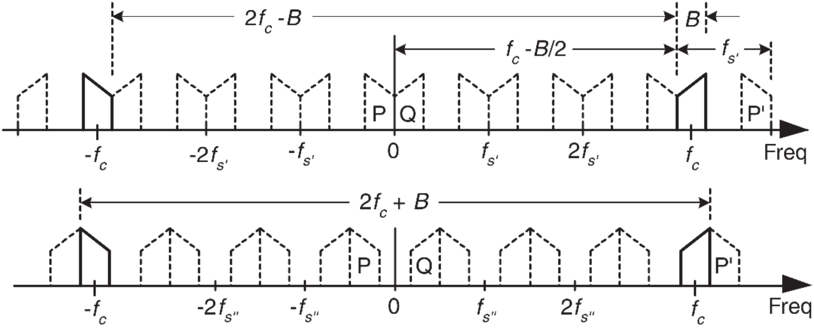
$$f_{s''} = \min(f_{s'}) < \frac{2f_c - B}{m} \tag{6}$$



Semnal trece-bandă: cazul general

Până când pot să scad frecvența de eșantionare?

$$f_{s''} = \min(f_{s'}) < \frac{2f_c - B}{m} \tag{6}$$

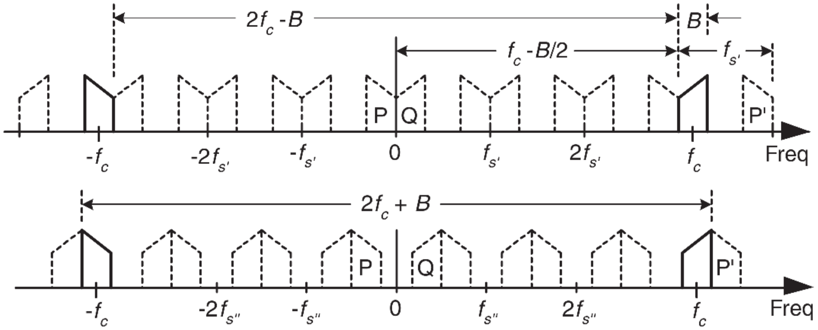


Sursă: (Lyons 2004)

Semnal trece-bandă: cazul general

Până când pot să scad frecvența de eșantionare?

$$f_{s''} = \min(f_{s'}) < \frac{2f_c - B}{m} \tag{6}$$



Sursă: (Lyons 2004)

$$(m+1)f_{s''} = 2f_c + B \implies f_{s''} = \frac{2f_c + B}{m+1} \tag{7}$$

Semnal trece-bandă: constrângeri

Fie un semnal trece-bandă cu centrat în f_c de bandă B eșantionat sub-Nyquist cu $f_{s'}$ astfel încât între $-f_c$Hz și $+f_c$Hz apar m replici.

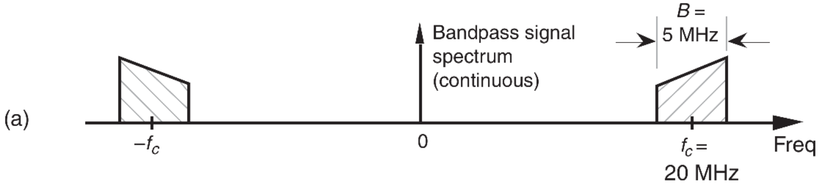
Atunci frecvența de eșantionare sub-Nyquist trebuie să îndeplinească următoarele condiții pentru a evita alierea:

$$\frac{2f_c - B}{m} \geq f_s \geq \frac{2f_c + B}{m+1} \tag{8}$$

$$f_s > 2B \tag{9}$$

Considerăm frecvența de eșantionare optimă cea în care dublurile sunt centrate în zero.

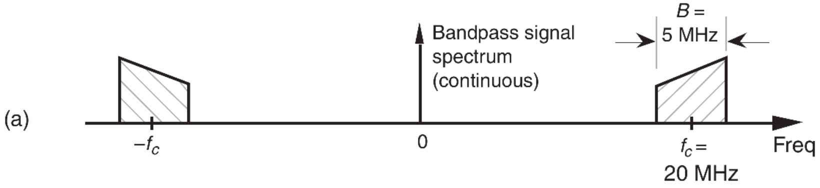
Exemplu: semnal trece-bandă



Sursă: (Lyons 2004)

m	$(2f_c - B)/(m)$	$(2f_c + B)/(m+1)$	Optimum

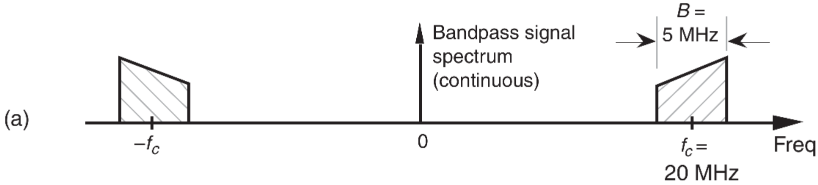
Exemplu: semnal trece-bandă



Sursă: (Lyons 2004)

m	$(2f_c - B)/(m)$	$(2f_c + B)/(m+1)$	Optimum
1	35,00 MHz	22,50 MHz	22,50 MHz

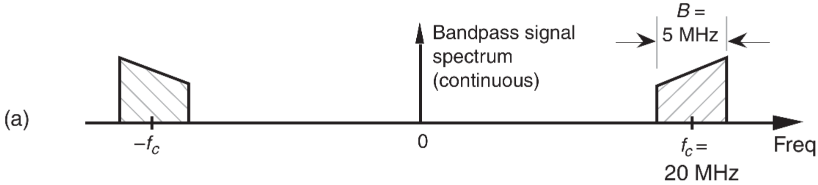
Exemplu: semnal trece-bandă



Sursă: (Lyons 2004)

m	$(2f_c - B)/(m)$	$(2f_c + B)/(m+1)$	Optimum
1	35,00 MHz	22,50 MHz	22,50 MHz
2	17,50 MHz	15,00 MHz	17,50 MHz

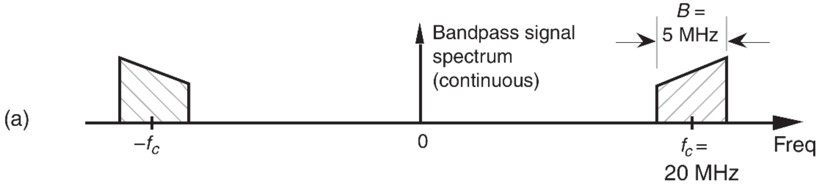
Exemplu: semnal trece-bandă



Sursă: (Lyons 2004)

m	$(2f_c - B)/(m)$	$(2f_c + B)/(m+1)$	Optimum
1	35,00 MHz	22,50 MHz	22,50 MHz
2	17,50 MHz	15,00 MHz	17,50 MHz
3	11,66 MHz	11,25 MHz	11,25 MHz

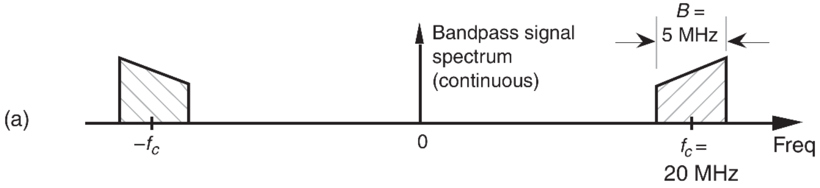
Exemplu: semnal trece-bandă



Sursă: (Lyons 2004)

m	$(2f_c - B)/(m)$	$(2f_c + B)/(m+1)$	Optimum
1	35,00 MHz	22,50 MHz	22,50 MHz
2	17,50 MHz	15,00 MHz	17,50 MHz
3	11,66 MHz	11,25 MHz	11,25 MHz
4	8,75 MHz	9,00 MHz	- MHz

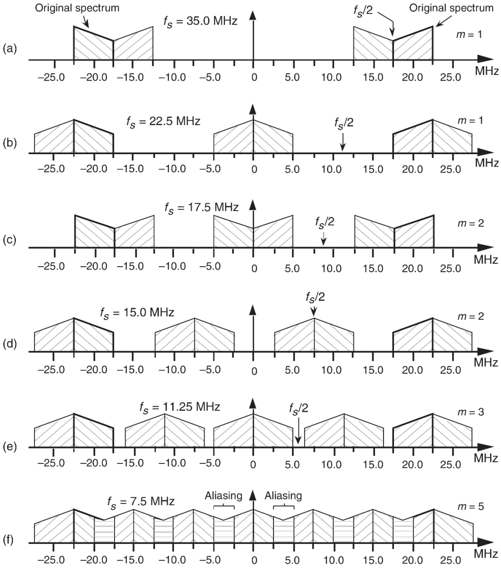
Exemplu: semnal trece-bandă



Sursă: (Lyons 2004)

m	$(2f_c - B)/(m)$	$(2f_c + B)/(m+1)$	Optimum
1	35,00 MHz	22,50 MHz	22,50 MHz
2	17,50 MHz	15,00 MHz	17,50 MHz
3	11,66 MHz	11,25 MHz	11,25 MHz
4	8,75 MHz	9,00 MHz	- MHz
5	7,00 MHz	7,50 MHz	- MHz

Semnal trece-bandă: cazul general

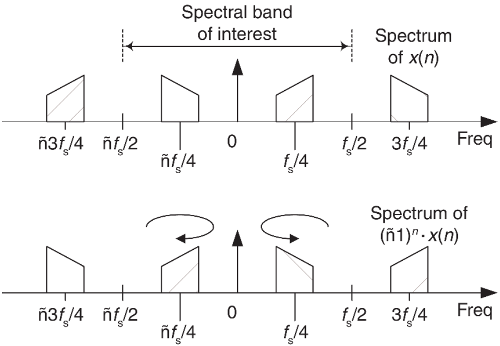


Sursă: (Lyons 2004)

Semnal trece-bandă: inversare

Definiție

Spectrul discretizat al oricărui semnal este inversat prin înmulțirea fiecărui eșantion cu $(-1)^n$.

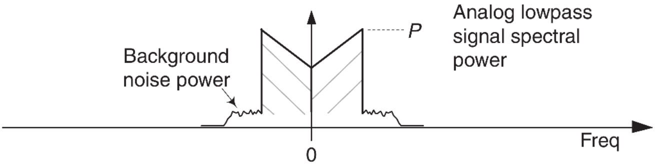


Sursă: (Lyons 2004)

Înmulțirea cu $(-1)^n$ rotește banda în intervalul $0 - f_c/2$Hz în jurul axei de la $f_s/4$Hz.

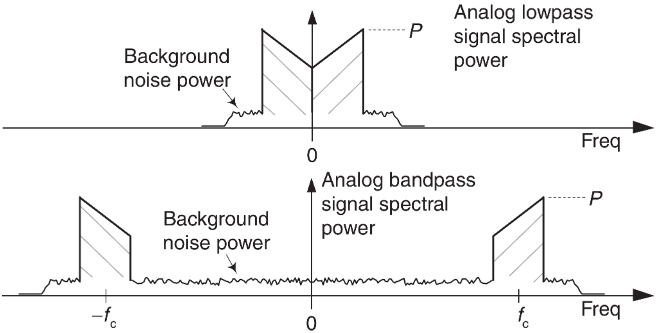
Semnal trece-bandă: zgomot

Ce se întâmplă cu trucul nostru sub-Nyquist când apare zgomot?



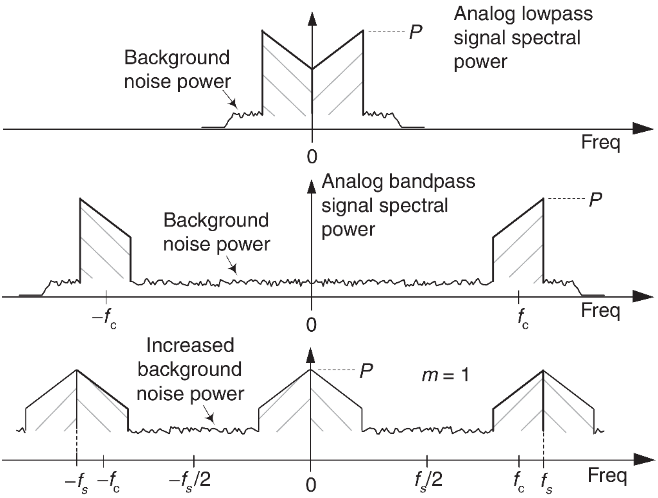
Semnal trece-bandă: zgomot

Ce se întâmplă cu trucul nostru sub-Nyquist când apare zgomot?



Semnal trece-bandă: zgomot

Ce se întâmplă cu trucul nostru sub-Nyquist când apare zgomot?



Sursă: (Lyons 2004)

Signal-to-Noise Ratio (SNR)

Definiție

SNR reprezintă raportul dintre puterea semnalului pe care dorim să-l măsurăm și puterea zgomotului de fundal nedorit.

$$SNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}} \tag{10}$$

$$P_{dB} = 10\log(P) = 20\log(M) \tag{11}$$

$$SNR_{dB} = 10\log(SNR) \tag{12}$$

În cazul semnalelor trece-bandă puterea zgomotului crește de $(m+1)$-ori când folosim eșantionarea sub-Nyquist. Deci SNR-ul scade cu D_{SNR} decibeli:

$$D_{SNR} = 10\log(m+1)\text{dB} \tag{13}$$

Exemplu: pentru $m = 1$ scade cu 3dB (reducere semnificativă).

Cum trecem în frecvență și înapoi în timp?

Transformata Fourier și Transformata Fourier Inversă ne ajută să trecem din domeniul timpului în domeniul frecvenței și vice-versa.

Transformata Fourier

Definiție

Transformata Fourier a unui semnal discret:

$$\begin{aligned} X(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nm/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[cos(2\pi mn/N) - j \sin(2\pi mn/N) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

- $X(m)$ – componenta m DFT (ex. $X(0), X(1), X(2), \ldots$)
- m – indicele componentei DFT în domeniul frecvenței ($m = 0, 1, \ldots, N-1$)
- $x(n)$ – eșantioanele în timp (ex. $x(0), x(1), x(2), \ldots$)
- n – indicele eșantioanelor în domeniul timpului
- N – numărul eșantioanelor în timp la intrare și numărul componentelor în frecvență la ieșire

Transformata Fourier inversă

Transformata Fourier a unui semnal discret:

$$\begin{aligned} X(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nm/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[cos(2\pi mn/N) - j \sin(2\pi mn/N) \right] \end{aligned}$$

Definiție

Transformata Fourier inversă a unui semnal discret (IDFT):

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) e^{j2\pi nm/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) \left[cos(2\pi mn/N) + j \sin(2\pi mn/N) \right] \end{aligned} \tag{15}$$