Κωστόπουλος
Κωνσταντίνος
ΑΜ: 03117043

Πρώτο Σέτ ασκήσεων

Άσκηση 1

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= bu \end{aligned}$$

$x(0) = [-1 \ 0]^T \quad x(t_f) = x(T) = [0 \ 0]^T$

$|u| \leq 1.$

i) $b=1$ $\quad \dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$ $\quad H = 1 + p_1 x_2 + p_2 u$

Θέλω min H άρα: $u = \begin{cases} -\mathrm{sgn}(p_2), & p_2 \neq 0 \\ ?, & p_2 = 0 \end{cases}$

costate $\quad \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{p}_1 &= 0 \\ \dot{p}_2 &= -p_1 \end{aligned} \Rightarrow$

$$\begin{cases} p_1 = p_{10} \\ p_2 = p_{20} - p_{10} t \end{cases}$$

Δεν γίνεται να έχω $p_2(t) = 0$ σε διάστημα γιατί τότε $p_{10} = p_{20} = 0 \Rightarrow H = 1$ άτοπο!

Άρα $p_2(t) \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2 \\ &\dot{x}_2 = u \\ &u = \Delta = \pm 1 \\ &\text{(όσο εξετάζω είναι σταθερό)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \Delta \Rightarrow x_2 = \Delta t + c \xRightarrow[x_2(0) = z_2 = 0]{t_0 = 0} \end{cases} \quad x_2 = \Delta t + z_2 \Rightarrow x_2 = \Delta t$$

και αφού $\dot{x}_1 = x_2 \Rightarrow x_1 = z_1 + z_2 t + \dfrac{\Delta}{2} t^2$

$$\Rightarrow x_1 = z_1 + \frac{\Delta}{2} t^2$$

κι αφού $t = \Delta(x_2 - \xi_2) = \Delta x_2$ προκύπτει

$$\boxed{x_1 = \xi_1 + \frac{\Delta}{2} x_2^2 - \frac{\Delta}{2} \xi_2^2} \quad (1)$$

Θέλω να οδηγήσω το (Σ) στο $(-1,0)$ άρα

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \text{Η (1) γίνεται } -1 = \xi_1 - \frac{\Delta}{2}\xi_2^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\xi_1 = \frac{\Delta}{2}\xi_2^2 - 1}$$

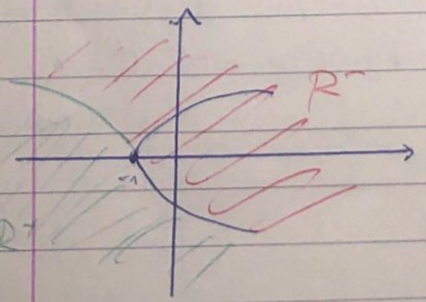
$\gamma_+ = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = \frac{1}{2} x_2^2 - 1,\ x_2 \leq 0\}$

$\gamma_- = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2 - 1,\ x_2 \geq 0\}$

$\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_- = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = -\frac{1}{2} x_2 |x_2| - 1\}$

$R_- = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > -\frac{1}{2} x_2 |x_2| - 1\}$ u από -1 σε 1

$R_+ = \{(x_1, x_2) \mid x_1 < -\frac{1}{2} x_2 |x_2| - 1\}$ u από 1 σε -1



Άρα

$$u^*(x_1, x_2) = \begin{cases} -\text{sgn}\left(x_1 + \frac{1}{2} x_2 |x_2| + 1\right), & (x_1, x_2) \notin \gamma \\ -\text{sgn}(x_2), & (x_1, x_2) \in \gamma \end{cases}$$

ii) $b = 1{,}02$

Οποίως $u^* = \begin{cases} -\frac{1{,}02}{2}\,\mathrm{sgn}(p_2), & p_2 \neq 0 \\ ;, & \text{αλλού} \end{cases}$

και $\boxed{\gamma_1 = \frac{1.02}{2} \Delta\, f_2^2 - 1}$

$$u^*(x_1, x_2) = \begin{cases} -\mathrm{sgn}\left(x_1 + \frac{1.02}{2} x_2 |x_2| + 1\right), & (x_1, x_2) \in R^- \cup R^+ \\ -\mathrm{sgn}(x_2), & (x_1, x_2) \in \gamma. \end{cases}$$

Άσκηση 2

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} u \qquad \begin{array}{l} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = -1 \end{array}$$

T fixed, x_f όχι.

$$J = \underbrace{5\,(x_1(10) - 10)^2 + 8x_2^2(10)}_{\phi} + \int_0^{10} \underbrace{u^2}_{L}\, dt$$

$$H = u^2 + p^T (Ax + Bu)$$

state $\quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = Ax + Bu$

costate $\quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -p^T A \quad (\acute{\eta}\ -A^T p)$

$$\Rightarrow p(t) = c_1 e^{\frac{-3+\sqrt{17}}{2} t} \begin{bmatrix} -3-\sqrt{17} \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-\frac{3-\sqrt{17}}{2} t} \begin{bmatrix} -3+\sqrt{17} \\ 2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Επίσης, x_f δεν είναι fixed, συνεπώς:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}\bigg|_{t=T\equiv 10} - p(T) = -p\,\cancel{\frac{\partial \psi}{\partial x}\bigg|_{t=T}}^{\,=0}$$

$$\Rightarrow p(T) \equiv p(10) = \frac{\partial \phi}{\partial x}\bigg|_{t=10\equiv T}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} p_1(10) \\ p_2(10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10x_1(10) - 100 \\ 16x_2(10) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$(1) \overset{(2)}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} p_1(T) \\ p_2(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-\frac{3+\sqrt{17}}{2}T}(-3-\sqrt{17}) + c_2 e^{-\frac{3-\sqrt{17}}{2}T}(-3+\sqrt{17}) \\ 2c_1 e^{-\frac{3+\sqrt{17}}{2}T} \quad 2c_2 e^{-\frac{3-\sqrt{17}}{2}T}(-3+\sqrt{17}) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-3-\sqrt{17})c_1 + (-3+\sqrt{17})c_2 = p_1(T) & \xrightarrow{\cdot 2} \\ 2c_1 + 2c_2 = p_2(T) & \cdot(3+\sqrt{17}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(-3-\sqrt{17})c_1 + 2(-3+\sqrt{17})c_2 = 2p_1(T) & \xrightarrow{(+)} \\ 2(3+\sqrt{17})c_1 + 2(3+\sqrt{17})c_2 = (3+\sqrt{17})p_2(T) \end{cases}$$

$$4\sqrt{17}\,c_2 = 2p_1(T) + (3+\sqrt{17})p_2(T) \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{1}{2\sqrt{17}}p_1(T) + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4\sqrt{17}}\right)p_2(T)} \quad (4a)$$

Ομοίως,

$$-4\sqrt{17}\,c_1 = 2p_1(T) + (3-\sqrt{17})p_2(T) \Rightarrow \boxed{c_1 = -\frac{1}{2\sqrt{17}}p_1(T) + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4\sqrt{17}}\right)p_2(T)} \quad (4b) \quad (4)$$

Η (1) με τη βοήθεια των (4) μου δίνει $p(t)$ συναρτήσει $p(T) \equiv p(10)$. Έτσι, υπολογίζω από την παρακάτω σχέση το $u(t)$.

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} \Rightarrow 2u + \underbrace{p^T B}_{(=B^T p)} = 0 \Rightarrow \boxed{u = -\frac{1}{2}B^T p}$$

$$\Rightarrow u(t) = -2p_1(t) - \frac{5}{2}p_2(t)$$

Μετά, αφού αντικαταστήσω στην state εξίσωση $(\dot{x}=Ax+Bu)$ το u που βρήκα πριν, με f και f^{-1} και λαμβάνοντας υπόψη τις ΑΣ $x_1(0)=0$, $x_2(0)=-1$, βρίσκω τις $x(t)$ συναρτήσει των $p(T)$.
Ύστερα, από τις ② βρίσκω $p_1(10)$, $p_2(10)$ (αντικαθιστώντας στις $x_1(t)$, $x_2(t)$ για $t=T=10$).
Άρα, τελικά, βρίσκω το u^*.

Άσκηση 3

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & \cos\omega t \\ \sin\omega t & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad u=f(x,t)$$

$$J=\underbrace{x^T(T)\,Q_f\,x(T)}_{\phi}+\int_0^T x^TQx+Ru^2\,dt$$

$$Q_f=\begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}, \quad Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R=1,\ T=100,\ \omega=2\pi$$

Λύση

1) $H=x^TQx+Ru^2+p^T(Ax+Bu)$

$\dot{x}=Ax+Bu$ ①

$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-2Qx-p^TA\ \left(=-2Qx-A^Tp\right)$ ②

$0=\frac{\partial H}{\partial u} \Rightarrow 2Ru+p^TB=0 \Rightarrow u=-\frac{1}{2}R^{-1}B^Tp$ Ⓐ

x_f όχι fixed άρα $\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{t=T}$ $\quad -p(T)=\cancel{\left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{t=T}} \rightarrow 0$

$$\Rightarrow p(T)=\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{t=T}=2Q_f(T)\,x(T)=2Q_f\,x(T)$$

Scanned with CamScanner

Θεωρώ ότι $p(t) = 2S(t)x(t)$ (5) τότε

$$\dot{p} = 2\dot{S}x + 2S\dot{x} \overset{(1)}{=} 2S\left(Ax - \frac{1}{2}BR^{-1}B^T \underbrace{p(t)}_{}\right)$$

$BR^{-1}B^TSx$

$$\overset{(2)}{\underset{(3)}{\Rightarrow}} -2Qx - A^Tp = 2\dot{S}x + 2SAx - 2SBR^{-1}B^TSx$$

$$\overset{(5)}{\Rightarrow} -\dot{S}x = \left(\frac{1}{2}A^TS + SA - SBR^{-1}B^TS + Q\right)x, \quad \forall t \leq T$$

$$\Rightarrow -\dot{S} = \frac{1}{2}A^TS + SA - SBR^{-1}B^TS + Q \quad (4)$$

$$-S(t) = Q_f$$

Λύνω την ARE (4) και αντικαθιστώ στην (3), βρίσκονται έτσι το $p(t)$.

Έτσι, προκύπτει $\boxed{u^* = -\frac{1}{2}\underbrace{R^{-1}B^T 2S}_{\text{Kalman gain}}\, x}$

$\hookrightarrow K = R^{-1}B^TS$

Για ελάχιστο βρόχο:

$\boxed{-\dot{v} = (A-BK)^T v}$

~~λύση~~

(ii) Θεωρώ $S(t) = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix}$

Τότε λύνω την ARE

$$0 = A^TS + SA - SBR^{-1}B^TS + Q$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & s_1 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_2^2 & s_2s_3 \\ s_2s_3 & s_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - s_2^2 & s_1 - s_2s_3 \\ s_1 - s_2s_3 & 2s_2 - s_3^2 + 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow s_2 = 1$ (θέλω θετική λύση)

$s_3^2 = 1 + 2s_2 = 3 \Rightarrow s_3 = \sqrt{3}$ (θέλω θετική λύση)

$s_1 = s_2 s_3 = \sqrt{3}$

Άρα $K(\infty) = R^{-1} B^T S(\infty)$

και $\boxed{u^* = -K(\infty) x}$

Για κλειστό βρόχο: Closed loop plant

είναι $\boxed{A^{cl} = A - BK(\infty)}$

Δεύτερο Μέρος

Άσκηση 4

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -k_1 x_2 - k_2 x_2^2 + k_3 u$$

$$J = c_1 (x_1(T) - x_{1f})^2 + c_2 x_2^2(T) + \int_0^T (k_4 x_2 u + R u^2) dt$$

i) $H = k_4 x_2 u + R u^2 + p_1 x_2 - p_2 k_1 x_2 - p_2 k_2 x_2^2 + p_2 k_3 u$

- $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2$
$\dot{x}_2 = -k_1 x_2 - k_2 x_2^2 + k_3 u$

- $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\dot{p}_1 \\ -\dot{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_4 u + p_1 - p_2 k_1 - p_2 k_2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_1 = 0 \Rightarrow p_1 = p_{10} \\ \dot{p}_2 = (k_1 + k_2) p_2 - (k_4 u + p_{10}) \end{cases}$

- $\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow k_4 x_2 + 2 R u + p_2 k_3 = 0 \Rightarrow \boxed{u = -\frac{1}{2} R^{-1} (k_4 x_2 + k_3 p_2)}$

ii) Ίδιες εξισώσεις, αλλά αντί για $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$

έχω $I_{min} \le u \le I_{max}$, άρα:

$$H = \underbrace{(k_4 x_2 + k_3 p_2) u}_{\text{όρος } 1} + R u^2 + (p_1 - p_2 k_1 - p_2 k_2 x_2) x_2$$

Θέλω min H άρα το u θα παίρνει ~~τιμή~~ τιμή στο διάστημα $[I_{min}, I_{max}]$ τέτοια, ώστε να ελαχιστοποιείται κάθε φορά ο όρος (1), πράγμα που εξαρτάται από το εκάστοτε πρόβλημα, για τιμές των k_4, k_3, R.

Ερώτημα 5

Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση είναι:

```
clear;
close all;
clc;

syms x1 x2 p1 p2 u;
%state
Dx1 = x2;
Dx2 = -0.5*x2 -0.1*x2^2 + u;
%L
L = 10*x2*u + 0.3*u^2;
%Hamiltonian
syms p1 p2 H;
H = L + p1*Dx1 + p2*Dx2;
%costate
Dp1 = -diff(H, x1);
Dp2 = -diff(H, x2);
%control u
du = diff(H, u);
sol_u = solve(du, u);
%substitute u to Dx2 (state equation)
Dx2 = subs(Dx2, u, sol_u);
eq1 = strcat('Dx1=', char(Dx1));
eq2 = strcat('Dx2=', char(Dx2));
eq3 = strcat('Dp1=', char(Dp1));
eq4 = strcat('Dp2=', char(Dp2));

sol_h = dsolve(eq1,eq2,eq3,eq4);
%conA1 = 'x1(0) = 0';
%conA2 = 'x2(0) = 0';
%p1 = 2c1(x1(T)-x1f), p2 = 2c2x2(T)
myeq1 = char(subs(sol_h.x1, 't', 0));
myeq2 = char(subs(sol_h.x2, 't', 0));
myeq3 = strcat(char(subs(sol_h.p1, 't', 10)),'=', 2000*char(subs(sol_h.x1, 't', 10)), '-10');
myeq4 = strcat(char(subs(sol_h.p2, 't', 10)),'=', 1000*char(subs(sol_h.x2, 't', 10)), '+0');
solution = solve(myeq1, myeq2, myeq3, myeq4);
```

Ερώτημα 6

Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση με αρχικές τιμές x_1, x_2 να είναι οι 0.02, 0.02 αντίστοιχα είναι:

```
clear;
close all;
clc;

syms x1 x2 p1 p2 u;
%state
Dx1 = x2;
Dx2 = -0.5*x2 -0.1*x2^2 + u;
%L
L = 10*x2*u + 0.3*u^2;
%Hamiltonian
syms p1 p2 H;
H = L + p1*Dx1 + p2*Dx2;
%costate
Dp1 = -diff(H, x1);
Dp2 = -diff(H, x2);
%control u
du = diff(H, u);
```

```
sol_u = solve(du, u);
%substitute u to Dx2 (state equation)
Dx2 = subs(Dx2, u, sol_u);
eq1 = strcat('Dx1=', char(Dx1));
eq2 = strcat('Dx2=', char(Dx2));
eq3 = strcat('Dp1=', char(Dp1));
eq4 = strcat('Dp2=', char(Dp2));

sol_h = dsolve(eq1,eq2,eq3,eq4);
%conA1 = 'x1(0) = 0';
%conA2 = 'x2(0) = 0';
%p1 = 2c1(x1(T)-x1f), p2 = 2c2x2(T)
myeq1 = char(subs(sol_h.x1, 't', 0.02));
myeq2 = char(subs(sol_h.x2, 't', 0.02));
myeq3 = strcat(char(subs(sol_h.p1, 't', 10)),'=', 2000*char(subs(sol_h.x1, 't', 10)), '-10');
myeq4 = strcat(char(subs(sol_h.p2, 't', 10)),'=', 1000*char(subs(sol_h.x2, 't', 10)), '+0');
solution = solve(myeq1, myeq2, myeq3, myeq4);
```