Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

$4^{η}$ Εργασία

Κωστόπουλος Κωνσταντίνος

03117043

Άσκηση 1

(α)

Πρέπει να βρούμε έναν κόμβο $u \in C$ έτσι ώστε το άθροισμα $d(s,u) + d(u,t)$ να ελαχιστοποιηθεί. Για να το πετύχουμε αυτό αρκεί να βρούμε το δέντρο ελάχιστων διαδρομών που ξεκινούν από το s και το δέντρο ελάχιστων διαδρομών που καταλήγουν στο t. Άρα

- $Dijkstra$ από την κορυφή s για τον υπολογισμό των $d(s,u)$
- $Dijkstra$ από την κορυφή t αφού αλλάξουμε την κατεύθυνση όλων των κορυφών του γράφου για υπολογισμό του $d'(t,u)$
- Πέρασμα στις κορυφές του C ώστε να βρεθεί αυτή που ελαχιστοποιεί το άθροισμα

$$d(s,u) + d(u,t) = d(s,u) + d'(t,u)$$

Ορθότητα: Ισχύει πως στον γράφο με ανάποδες κατευθύνσεις οι αποστάσεις ανάμεσα στις κορυφές παραμένουν ίδιες, το μόνο που αλλάζει είναι το ποια είναι η αρχική και ποια η τελική κορυφή.

Πολυπλοκότητα: $O(|C| + |E| + |V|log|V|)$

(β)

Τελικά η διαδρομή που θα ακολουθήσουμε θα χαρακτηρίζεται από τη σειρά με την οποία επισκεφθήκαμε κάποιους σταθμούς. Άρα

- Αλγόριθμος $Johnson$ για εύρεση ελάχιστων διαδρομών ανάμεσα σε όλους τους κόμβους, με στόχο την εύρεση των αποστάσεων ανάμεσα στους σταθμούς φόρτισης
- Μετασχηματισμός του γράφου ώστε να αφαιρεθούν οι κορυφές που δεν είναι σταθμοί φόρτισης και να προστεθούν ακμές ανάμεσα στους σταθμούς φόρτισης βάρους ίσου με τις μεταξύ τους αποστάσεις, μόνο αν αυτές είναι μικρότερες από a
- $Dijkstra$ στον νέο γράφο ώστε να βρεθεί το ελάχιστο μονοπάτι σταθμών από τον s στον t

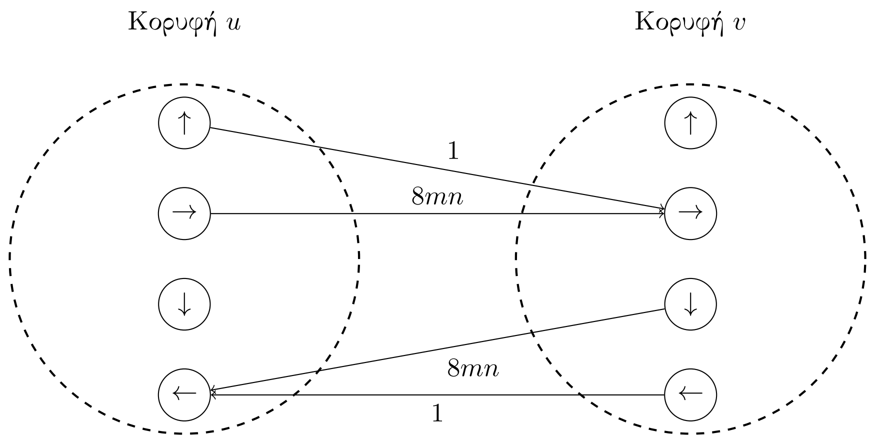
Ορθότητα: Οποιοδήποτε μονοπάτι $s-t$ στον νέο γράφο δεν θα περιέχει μετάβαση από σταθμό σε σταθμό με απόσταση μεγαλύτερη της αυτονομίας του αυτοκινήτου, άρα αρκεί η εύρεση της ελάχιστης από αυτές.

Πολυπλοκότητα: $O(|V|^2log|V| + |V||E| + |E| + |C|log|C|) = O(|V|^2log|V| + |V||E|)$

Άσκηση 2

(α)

Θα χρειαστεί να μετασχηματίσουμε το γράφο έτσι ώστε να επιτρέπεται μόνο η ευθεία κίνηση ή η δεξιά στροφή στο πλέγμα. Για να το πετύχουμε αυτό πρέπει να σπάσουμε κάθε κορυφή (διασταύρωση) σε τέσσερις ανάλογα με την κατεύθυνση στην οποία οδηγούσαμε όταν φτάσαμε σε αυτήν και να συνδέσουμε κάθε μία από αυτές τις τέσσερις μόνο με τις αντίστοιχες κορυφές που μπορούσαμε να βρεθούμε αν συνεχίζαμε ευθεία ή στρίβαμε δεξιά. Ο νέος γράφος θα είναι κατευθυνόμενος και τα βάρη στις ακμές θα είναι 1 όταν προχωράμε ευθεία και $8mn$ όταν στρίβουμε δεξιά. Δίνεται ως παράδειγμα ο μετασχηματισμός μιας ακμής $u - v$ όπου η v είναι δεξιά της u



Σε αυτόν τον γράφο θα τρέξουμε τον αλγόριθμο $Dijkstra$ με τον οποίο θα βρούμε το μονοπάτι με τις ελάχιστες δεξιά στροφές ανάμεσα στην αρχική και τελική κορυφή.

Ορθότητα:

- Οι ακμές στην αρχή είναι λιγότερες από $\frac{4mn}{2} = 2mn$. Άρα μετά το μετασχηματισμό θα έχουμε λιγότερες από $2mn \cdot 4 = 8mn$ εφόσον κάθε ακμή σπάει σε τέσσερις
- Το μονοπάτι που θα βρούμε με $Dijkstra$ θα έχει s ευθείες κινήσεις και k δεξιά στροφές άρα μήκος $s + 8mn \cdot k$
- Έστω ότι υπάρχει μονοπάτι με λιγότερες δεξιά στροφές έστω $s' + 8mn \cdot k'$ όπου $k' < k$
- Εφόσον $s, s' < 8mn$, το νέο μονοπάτι θα είναι σίγουρα συντομότερο, κάτι που είναι άτοπο
- Ανάμεσα σε μονοπάτια με ίσες δεξιά στροφές το ελάχιστο θα προκύψει με βάση τις ελάχιστες ευθείες κινήσεις άρα την ελάχιστη συνολική απόσταση

Πολυπλοκότητα: Ο μετασχηματισμός γίνεται σε γραμμικό χρόνο, άρα $O(mn \cdot \log mn)$

(β)

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό του (α). Στο νέο γράφο αντικαθιστούμε κάθε δύο διαδοχικές δεξιά ακμές με μία που συνδέει την αρχική με την τελική κορυφή με βάρος ίσο με το άθροισμα των δύο που αφαιρούνται άρα $16mn$. Έπειτα εφαρμόζουμε $Dijkstra$ όπως και πριν. Η ορθότητα προκύπτει ομοίως, ενώ η πολυπλοκότητα είναι ίδια εφόσον ο μετασχηματισμός είναι γραμμικός.

Άσκηση 3

1.

Θα εφαρμόσουμε τον παρακάτω μετασχηματισμό στο γράφο

- Το βάρος κάθε κορυφής γίνεται βάρος των εισερχόμενων ακμών της
- Προσθέτουμε μία κορυφή που συνδέεται μόνο με την s με ακμή βάρους r
- Πολλαπλασιάζουμε επί -1 όλα τα βάρη

Στον γράφο που προκύπτει τρέχουμε τον αλγόριθμο $Bellman{-}Ford$ με την τροποποίηση ότι κάνει $update$ μια απόσταση μόνο αν είναι αρνητική, αλλιώς την αφήνει ∞.

Ορθότητα: Εφόσον δεν υπάρχουν θετικοί κύκλοι, μετά τον πολλαπλασιασμό επί -1 δεν θα υπάρχουν αρνητικοί κύκλοι. Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε $Bellman - Ford$ για να βρούμε το ελάχιστο μονοπάτι που στον αρχικό γράφο θα είναι το μέγιστο και άρα να αποφασίσουμε ότι είναι r-ασφαλής ο λαβύρινθος, αλλιώς αν βγει ∞ τότε δεν είναι.

Πολυπλοκότητα: $O(nm)$

2.

Αν υπάρχει διαδρομή προς θετικό κύκλο και κάποια κορυφή του έχει διαδρομή προς το t τότε σίγουρα είναι r-ασφαλής ο λαβύρινθος. Άρα μπορούμε να συμπτήξουμε τους θετικούς κύκλους με DFS και να τους δώσουμε βάρος ίσο με το απόλυτο του αθροίσματος των αρνητικών βαρών, w, ώστε να μην περιορίζεται στο πόσο μακριά μπορεί να φτάσει. Έπειτα εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο του (1). Η πολυπλοκότητα και η ορθότητα προκύπτουν ομοίως.

3.

Χρησιμοποιώντας *binary search* στον αλγόριθμο (2) μπορούμε να βρούμε το ελάχιστο r, το οποίο θα είναι το πολύ ίσο με το w του (2).

Ορθότητα: Αν για κάποιο r βρούμε ότι είναι r-ασφαλής, το ίδιο θα ισχύει και για κάθε $r' > r$. Άρα με *binary search* μπορούμε να βρούμε το ελάχιστο.

Πολυπλοκότητα: $O(nm \log w)$

Άσκηση 4

Έστω ότι οι θέσεις των δυνάμεων του Στρατού είναι ταξινομημένες σε αύξουσα σειρά. Μπορούμε τότε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε θέση a_i ένα διάστημα της ευθείας

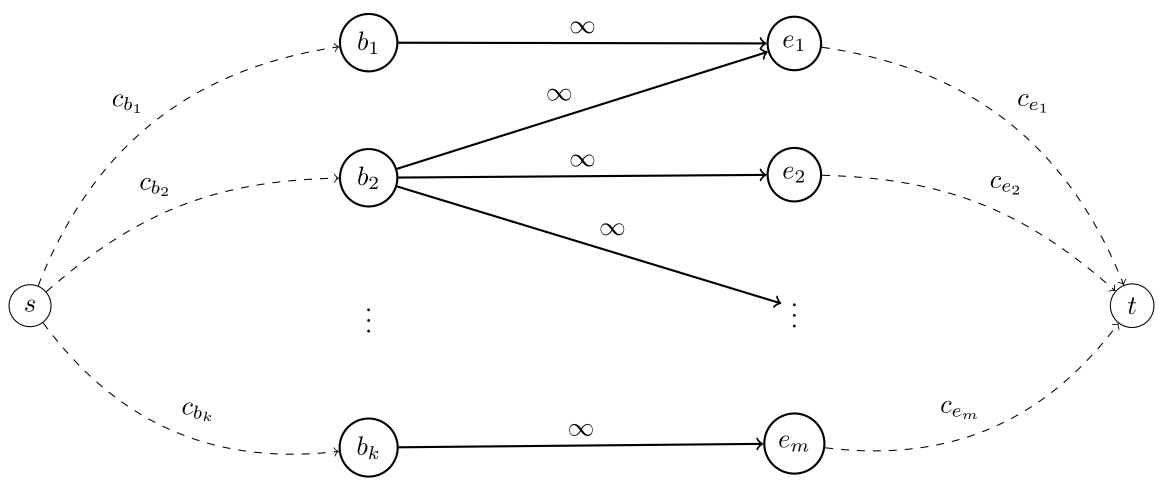
$$\left(\frac{a_{i-1}+a_i}{2},\ \frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right)$$

εντός του οποίου μόνο αυτό αξίζει να κάνει επιθέσεις σε αντιπάλους, επειδή απέχει την ελάχιστη απόσταση από κάθε σημείο του. Άρα μπορούμε σε γραμμικό χρόνο να αναθέσουμε σε κάθε $b_i,\ e_j$ ένα βάρος $c_{b_i},\ c_{e_j}$ ίσο με την απόστασή του από την κοντινότερη θέση Στρατού.

Άρα μπορούμε να αναπαραστήσουμε το πρόβλημα με έναν διμερή γράφο, ενώνοντας κάθε b_i με τα e_j που απέχουν το πολύ d από αυτά. Σε αυτόν τον γράφο αρκεί να καλύψουμε όλες τις ακμές επιλέγοντας κορυφές συνολικά ελάχιστου βάρους, γιατί για να καταστρέψουμε κάθε e_j πρέπει είτε να το επιλέξουμε είτε να επιλέξουμε όλα τα b_i που το υποστηρίζουν.

Για να λύσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα

1. Προσθέτουμε δύο κορυφές $s,\ t$
2. Προσθέτουμε ακμές $(s, b_i),\ (e_j, t)$ χωρητικότητας $c_{b_i},\ c_{e_j}$ αντίστοιχα
3. Οι ενδιάμεσες ακμές έχουν ∞ χωρητικότητα



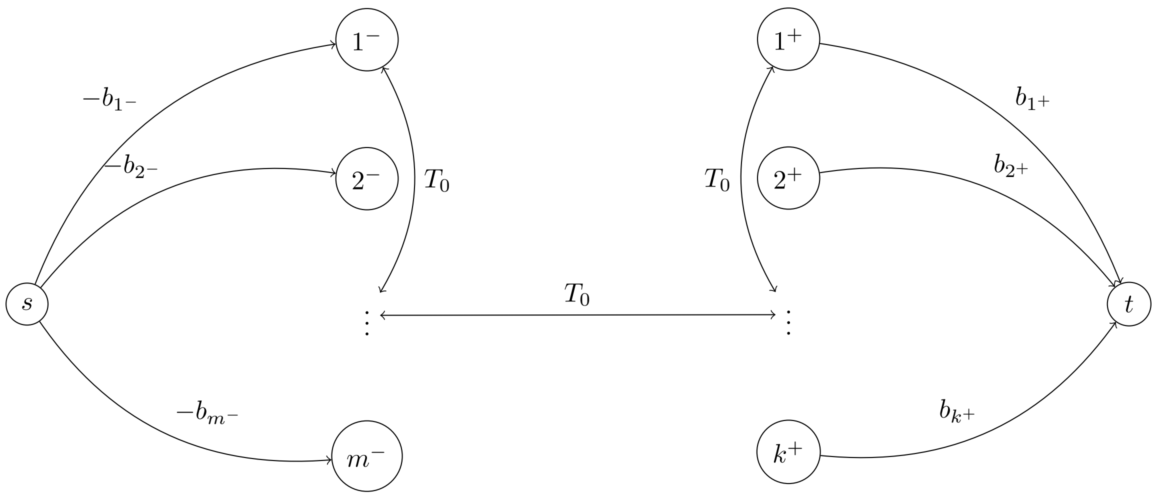
Ορθότητα: Η ελάχιστη τομή $s-t$ του παραπάνω γράφου δεν επιλέγει καμία ενδιάμεση ακμή, εφόσον είναι ∞ χωρητικότητας. Άρα κάθε ακμή που διασχίζει την ελάχιστη τομή ισοδυναμεί με επιλογή της αντίστοιχης κορυφής στο διμερές. Επίσης, η συγκεκριμένη επιλογή κορυφών σίγουρα καλύπτει όλες τις ενδιάμεσες ακμές στο διμερές, αλλιώς θα υπάρχει διαδρομή $s-t$ μετά την αφαίρεση των ακμών της τομής, κάτι που είναι άτοπο. Άρα λύνοντας το πρόβλημα $min\ cut/max\ flow$ στο συγκεκριμένο γράφο βρίσκουμε ελάχιστο κόστος επιθέσεων που καταστρέφουν τα e_j.

Πολυπλοκότητα: $O(n+(m+k)^3)$

Άσκηση 5

Μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα απόφασης, δηλαδή αν γίνεται με $T \leq T_0$ και να κάνουμε *binary search* στις τιμές του T_0 για να ελαχιστοποιήσουμε τη μέγιστη συναλλαγή. Προφανώς η μέγιστη δυνατή τιμή του T_0 είναι b_{max}.

Με κορυφές τις εταιρείες, μία πηγή s και ένα στόχο t φτιάχνουμε τον εξής γράφο



Οι ακμές προκύπτουν ως εξής

- Αν $b_i < 0$ προσθέτω μια ακμή (s, i) με χωρητικότητα $-b_i$
- Αν $b_i > 0$ προσθέτω μια ακμή (i, t) με χωρητικότητα b_i
- Προσθέτω ακμές από κάθε εταιρεία προς κάθε άλλη με χωρητικότητα T_0

Ορθότητα: Για να ξέρω αν το συγκεκριμένο T_0 αρκεί για να γίνουν οι συναλλαγές, λύνω το *Max Flow* στον παραπάνω γράφο και ελέγχω αν η απάντηση είναι ίση με το άθροισμα όλων των θετικών εταιρειών (ή το απόλυτο του αθροίσματος των αρνητικών). Αν ισχύει αυτό, τότε με συναλλαγές το πολύ αξίας T_0 ανάμεσα στις εταιρείες, θα έχουμε καλύψει όλο το χρέος των αρνητικών προς τις θετικές. Δηλαδή, στις αποδεκτές περιπτώσεις, για κάθε εταιρεία θα ισχύει για τις ενδιάμεσες ροές

$$b_i = f_{i_{in}} - f_{i_{out}}$$

εφόσον οι ακμές από το s και προς το t θα είναι κορεσμένες

Πολυπλοκότητα: Ο αλγόριθμος για *Max Flow* είναι $O(n^3)$ και το *binary search* έχει μέγιστη τιμή το b_{max}, άρα συνολικά $O(n^3 \log b_{max})$.

Άσκηση 6

Άθροισμα Υποσυνόλου κατά Προσέγγιση (ΑΥΠ)

Το πρόβλημα ανήκει στο NP καθώς ένα πιστοποιητικό του είναι απλώς το συγκεκριμένο υποσύνολο και ο έλεγχος γίνεται απλώς αθροίζοντας τα στοιχεία του άρα σε πολυωνυμικό χρόνο.

Αναγωγή από το *Subset Sum* στο ΑΥΠ

- Έστω $A = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\},\ B$ είσοδος του *Subset Sum*
- Φτιάχνουμε το $A' = \{2w_1, 2w_2, \ldots, 2w_n\},\ x = 1,\ B' = 2B$ ως είσοδο για το ΑΥΠ άρα ψάχνουμε

$$S' \subseteq A' : 2B - 1 \leq w(S') \leq 2B$$

- Επειδή τα στοιχεία του A' είναι ζυγοί, κάθε υποσύνολό του θα έχει ζυγό βάρος, άρα ποτέ δεν ισχύει $w(S') = 2B-1$
- Άρα η απάντηση είναι θετική αν και μόνο αν $w(S') = 2B \Leftrightarrow w(S) = B$ όπου S είναι το αντίστοιχο υποσύνολο του A

Τακτοποίηση Ορθογωνίων Παραλληλογράμμων (ΤΟΠ)

Το πρόβλημα ανήκει στο NP καθώς ένα πιστοποιητικό του είναι η θέση στην οποία τοποθετείται κάθε ορθογώνιο. Χωρίζοντας το παραλληλόγραμμο B σε τετράγωνα εμβαδού 1 μπορούμε να ελέγξουμε ότι καλύπτονται όλα και δεν υπάρχουν επικαλύψεις σε πολυωνυμικό χρόνο εφόσον τα x_i είναι πολυωνυμικού μεγέθους στο n.

Αναγωγή από το *Partition* στο ΤΟΠ

- Έστω $A = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ είσοδος του *Partition*
- Φτιάχνουμε τα n ορθογώνια $1 \times w_1, 1 \times w_2, \ldots, 1 \times w_n$ και το ορθογώνιο B διαστάσεων $2 \times \frac{w(A)}{2}$ ως είσοδο του ΤΟΠ
- Το B είναι προφανώς εμβαδού ίσου με το άθροισμα των w_i
- Αν το ΤΟΠ απαντήσει θετικά, τότε έχει χωρίσει τα ορθογώνια σε δύο γραμμές με ίσο συνολικό μήκος χωρίς επικαλύψεις. Άρα αυτές οι δύο γραμμές αποτελούν τα συμπληρωματικά υποσύνολα του A
- Αν υπάρχει *Partition* προφανώς απαντάει θετικά το ΤΟΠ

Μέγιστη Τομή με Βάρη στις Κορυφές (MTBK)

Το πρόβλημα ανήκει στο NP καθώς ένα πιστοποιητικό του είναι οι κορυφές που ανήκουν στο S και μπορούμε σε τετραγωνικό χρόνο να ελέγξουμε ότι το άθροισμα βαρών των ακμών που διασχίζουν την τομή είναι μεγαλύτερο του B.

Αναγωγή από το $Partition$ στο MTBK

- Έστω $A = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ είσοδος του $Partition$
- Φτιάχνουμε τον πλήρη γράφο με n κορυφές βάρους $w_1, w_2, \ldots, w_n$ και $B = \frac{w^2(A)}{4}$
- Για μια οποιαδήποτε τομή του γράφου $(S, A \setminus S)$ με κορυφές $w_{k_i} \in S$ και $w_{z_j} \in A \setminus S$ το βάρος W των ακμών που τη διασχίζουν θα είναι

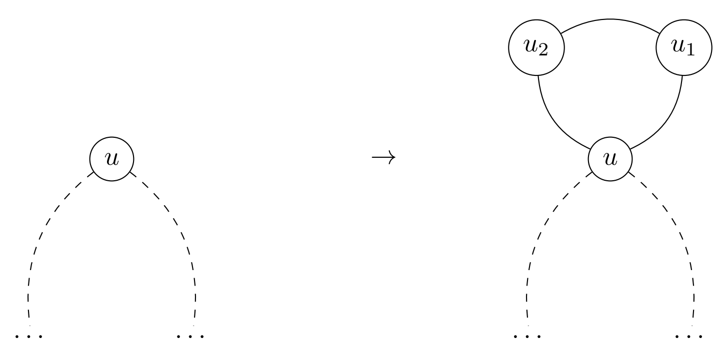
$$W = \sum_i \left(w_{k_i} \cdot \sum_j w_{z_j} \right) = w(S) \cdot (w(A) - w(S))$$

- Το W μεγιστοποιείται για $w(S) = \frac{w(A)}{2}$ και γίνεται ίσο με $\frac{w^2(A)}{4}$
- Άρα $W \geq \frac{w^2(A)}{4} \Leftrightarrow W = \frac{w^2(A)}{4}$ και η τομή αποτελεί $Partition$ του A

Κύκλος Hamilton κατά Προσέγγιση (ΚΗΠ)

Το πρόβλημα ανήκει στο NP καθώς ένα πιστοποιητικό του είναι η σειρά των κορυφών στον κύκλο, η οποία έχει μήκος το πολύ διπλάσιο του πλήθους των κορυφών και από τις οποίες μπορούμε να ελέγξουμε σε γραμμικό χρόνο αν όντως είναι κύκλος και αν η κάθε κορυφή εμφανίζεται μία ή δύο φορές.

Αναγωγή από $Hamilton$ σε ΚΗΠ



- Για κάθε κορυφή u κάνουμε τον παραπάνω μετασχηματισμό
- Άρα για κάθε θετική απάντηση του ΚΗΠ έχουμε περάσει ακριβώς δύο φορές από τις κορυφές του αρχικού γράφου, μία από τις ακμές που ήδη υπήρχαν και άλλη μία επειδή πρέπει να περάσουμε μία φορά από τις u_1, u_2. Άρα θα υπάρχει κύκλος $Hamilton$ στον αρχικό γράφο
- Προφανώς αν υπάρχει τέτοιος κύκλος στον αρχικό γράφο θα λύνεται και το ΚΗΠ στον μετασχηματισμό

Ικανοποιησιμότητα με Περιορισμούς (ΙΠ)

Το πρόβλημα ανήκει στο NP αφού ένα πιστοποιητικό της λύσης είναι η αποτίμηση των μεταβλητών, με βάση την οποία ελέγχεται σε γραμμικό χρόνο αν κάθε όρος έχει ένα αληθές και ένα ψευδές $literal$.

Αναγωγή από $3 - SAT$ σε ΙΠ

- Έστω πρόταση ϕ είσοδος του $3 - SAT$ με όρους της μορφής $l_1 \vee l_2 \vee l_3$
- Προσθέτουμε μία νέα μεταβλητή z, ίδια για όλους τους όρους και φτιάχνουμε νέα πρόταση ϕ' με όρους της μορφής $l_1 \vee l_2 \vee l_3 \vee z$
- Στην περίπτωση που υπάρχει αποτίμηση που ικανοποιεί το ΙΠ, έχουμε δύο περιπτώσεις για την τιμή της μεταβλητής z
    1. Αν είναι F τότε υπάρχει σίγουρα σε κάθε όρο κάποιο $literal$ που είναι T, οπότε η ϕ ικανοποιείται
    2. Αν είναι T τότε η συμπληρωματική αποτίμηση πάλι ικανοποιεί το ΙΠ, αφού το z θα γίνει F και το $literal$ που ήταν F θα γίνει T, άρα η συμπληρωματική αποτίμηση ικανοποιεί την ϕ.
- Αν η ϕ είναι ικανοποιήσιμη τότε και το ΙΠ απαντάει θετικά, για $z = F$

Επιλογή Ανεξάρτητων Υποσυνόλων (ΕΑΥ)

Το πρόβλημα ανήκει στο NP γιατί ένα πιστοποιητικό του είναι τα υποσύνολα, τα οποία μπορούν να ελεγχθούν για το αν είναι ανεξάρτητα ανά δύο σε πολυωνυμικό χρόνο.

Αναγωγή από $Independent\ Set$ σε ΕΑΥ

- Έστω $Independent\ Set$ με είσοδο (G, k)
- Για κάθε κόμβο u του G φτιάχνουμε το σύνολο των ακμών στις οποίες είναι άκρο

$$S_u = \{\{u, v\} \in E \mid v \in adj(u)\}$$

- Ως είσοδο στο ΕΑΥ δίνουμε το k και το σύνολο που περιέχει όλα αυτά τα σύνολα

$$S = \{S_u \mid u \in V\}$$

- Αν η απάντηση είναι θετική τότε υπάρχουν k ξένα ανά δύο σύνολα, άρα k κόμβοι που ανά δύο δεν είναι άκρα της ίδιας ακμής, δηλαδή ανεξάρτητο σύνολο
- Αν η απάντηση είναι αρνητική τότε για κάθε k σύνολα υπάρχουν δύο με κοινό στοιχείο. Άρα για κάθε k κόμβους υπάρχουν δύο που είναι άκρα της ίδιας ακμής, δηλαδή δεν υπάρχει ανεξάρτητο σύνολο k κόμβων