**Curs 1, Analiz˘a Matematic˘a**

Prof. dr. Gheorghe Moza

# S¸iruri ¸si serii de numere reale

**1.1 S¸iruri de numere reale**

**Def. 1.** Un ¸sir de numere reale este de forma

a0,a1,...,an,...

unde an ∈ R, n ≥ 0. Un ¸sir este o func¸tie a : N → R, a(n) = an. Un ¸sir se noteaz˘a prin (an)n∈N, (an)n≥0, sau simplu an. Termenul an se nume¸ste termenul general al ¸sirului.

**Ex. 2.** , unde n ≥ 3; bn = n − 1, unde, unde n ≥ 1.

**Def. 3.** Un ¸sir an, n ≥ n0, se nume¸ste m˘arginit, dac˘a exist˘a dou˘a numere reale finite m ¸si M, astfel

ˆıncˆat

m ≤ an ≤ M,

∀n ≥ n0. Un ¸sir care nu este ma˘rginit se nume¸ste nem˘arginit.

**Ex. 4.** S¸irul , este m˘arginit deoarece 0 < an ≤ 1, ∀n ≥ 1. Dar ¸sirul bn = n4,n ≥ 1, este nem˘arginit deoarece bn → ∞.

**Def. 5.** Un ¸sir (an)n≥n0 se nume¸ste cresc˘ator dac˘a

an+1 ≥ an,

∀n ≥ n0, respectiv, descresc˘ator dac˘a

an+1 ≤ an,

∀n ≥ n0. Un ¸sir (an) se nume¸ste monoton dac˘a este cresc˘ator sau descresca˘tor.

**Ex. 6.** S¸irul, este descresc˘ator deoarece, iar ¸sirul an = n4,n ≥ 1, este cresc˘ator deoarece an = n4 < (n + 1)4 = an+1, ∀n ≥ 1.

**Def. 7.** Un ¸sir (an)n≥n0 se nume¸ste convergent dac˘a exist˘a un num˘ar real finit a ∈ R, astfel ˆıncˆat ∀ε > 0, exist˘a un rang (num˘ar) n1 ∈ N cu proprietatea

|an − a| < ε,

∀ n ∈ N,n ≥ n1. In acest caz, num˘arulˆ a ∈ R se nume¸ste limita ¸sirului (an) ¸si not˘am

lim an = a, n→∞

sau, simplu an → a. Dac˘a un ¸sir nu are limit˘a sau este ±∞, ¸sirul (an) se nume¸ste divergent. Uneori, dac˘a limita, spunem c˘a ¸sirul este convergent la ±∞.

**Obs. 8.** a) Aceast˘a defini¸tie ne spune c˘a, dac˘a ¸sirul (an)n≥0 este convergent la a, atunci to¸ti termenii

¸sirului se ga˘sesc ˆıntr-o vecin˘atate a limitei a, cu excep¸tie poate a unui num˘ar finit dintre ace¸stia (termenii de la an0 la an1−1). Mai exact, pentru ∀ε > 0 avem an ∈ (a − ε,a + ε), ∀n ∈ N,n ≥ n1.

Rangul n1 ∈ N depinde de ε, n1 = n1 (ε).

b) Limita unui ¸sir dac˘a exista˘, este unic˘a.

**Propriet˘a¸ti**

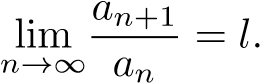
P1) Fie (an)n≥n0 un ¸sir monoton pentru orice n ≥ n1, unde n1 ∈ N este un rang fixat. Dac˘a (an)n≥n0 este ¸si m˘arginit, atunci el este convergent. Reciproca este ˆın general fals˘a.

**Obs. 9.** Observ˘am ca˘ ¸sirul pan˘a la termenul an1 nu trebuie neap˘arat s˘a fie monoton. Primii n1 termeni nu influen¸teaz˘a convergen¸ta ¸sirului.

P2) Orice ¸sir convergent este m˘arginit. Dar nu orice ¸sir m˘arginit este convergent.

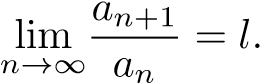
P3) **Teorema cle¸stelui.** Fie trei ¸siruri cu proprietatea an ≤ bn ≤ cn, pentru orice n ≥ n1 ¸si an → a, cn → a, atunci bn → a.

P4) Fie (an) un ¸sir pozitiv de numere reale nenule astfel ˆıncˆat



Atunci, dac˘a l < 1 ⇒ lim an = 0 ¸si dac˘a l > 1 ⇒ lim an = +∞. n→∞ n→∞

P5) Fie (an) un ¸sir pozitiv de numere reale nenule astfel ˆıncˆat



√

Atunci exist˘a limita lim n an ¸si

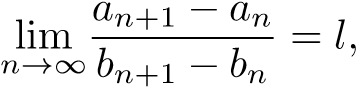
n→∞ √

lim n an = l.

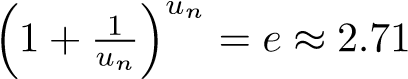
n→∞

P6) **(Lema lui Stolz).** Fie (an),(bn) dou˘a ¸siruri de numere reale. Dac˘a (bn) este cresc˘ator cu limita

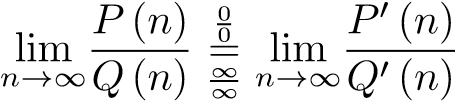
+∞, ¸si dac˘a exist˘a limita



atunci lim

P7) Dac˘a lim , atunci lim. n→∞

P8) (**L‘Hospital**)

.

**Def. 10.** Un ¸sir (an) de numere reale se nume¸ste ¸sir Cauchy (sau ¸sir fundamental), dac˘a ∀ε > 0, exist˘a un rang n1 = n1 (ε) ∈ N astfel ˆıncˆat

|an+p − an| < ε,

∀n ∈ N,n ≥ n1 ¸si ∀p ∈ N.

**Obs. 11.** Not˘am m = n + p. Atunci defini¸tia devine: un ¸sir (an) este Cauchy dac˘a ∀ε > 0, exist˘a un rang n1 = n1 (ε) ∈ N astfel ˆıncat, ∀m,n ∈ N cu m,n ≥ n1,

|am − an| < ε.

**Def. 12.** Spunem c˘a (bn)n≥n0 este un sub¸sir al ¸sirului (an)n≥n0 , dac˘a to¸ti termenii ¸sirului (bn) sunt extra¸si dintre termenii ¸sirului (an).

De exemplu, ¸sirurile bn = 2n ¸si cn = 2n + 1, n ≥ 0, sunt sub¸siruri ale ¸sirului an = n, n ≥ 0.

**Obs. 13.** a) Dac˘a un ¸sir (an) este convergent ¸si are limita a, atunci toate sub¸sirurile sale sunt convergente la a.

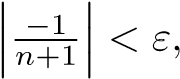
b) Dac˘a un ¸sir (an) con¸tine dou˘a sub¸siruri convergente la dou˘a limite diferite, atunci ¸sirul dat an este divergent.

**Lema 14.** (Bolzano-Weierstrass). Orice ¸sir m˘arginit con¸tine cel pu¸tin un sub¸sir convergent.

**Teorema 15.** (Criteriul general Cauchy pentru convergen¸ta ¸sirurilor). Un ¸sir (an) de numere reale este convergent, dac˘a ¸si numai daca˘ (an) este un ¸sir Cauchy.

**Exerci¸tii**

1. Folosind defini¸tia, ar˘ata¸ti c˘a ¸sirul, este convergent la a = 1.

**R.** Fie ε > 0. Atunci |an − 1| < ε este echivalent cu  sau  adic˘a. Fie

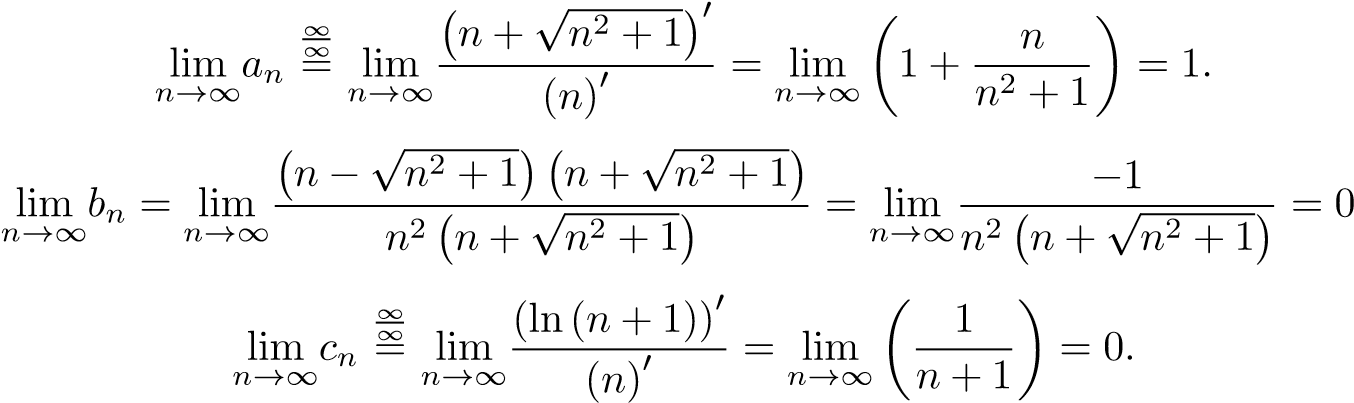
, unde [x] este partea ˆıntreag˘a a lui x (ex. [4.2] = 4); n1 este rangul

c˘autat. Fie acum orice, deoarece [x] + 1 > x. Deci, n ≥ n1, care este echivalent cu |an − 1| < ε, deci ¸sirul (an) este convergent ¸si lim an = 1. n→∞

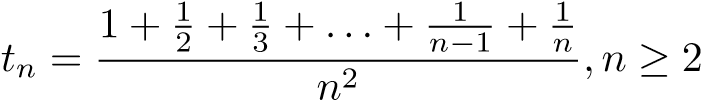
Calcula¸ti limitele urm˘atoarelor ¸siruri.

2..

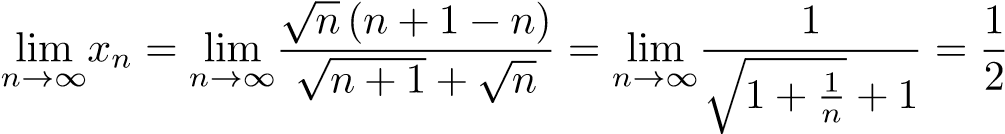
**R.** Avem

.

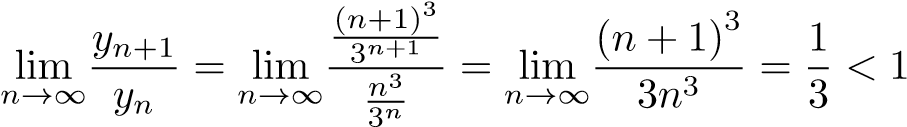
3., ¸si

.

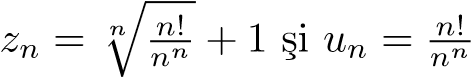
**R.** Avem

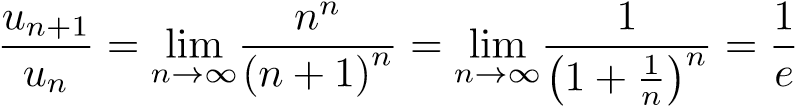
.

Apoi

.

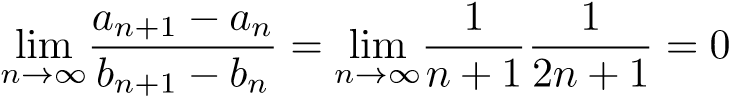
Din P4), rezult˘a lim .

Fie. Atunci



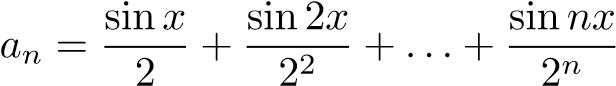
deci lim .

ˆIn final, fie. Dar (bn) cresc˘ator la +∞ ¸si

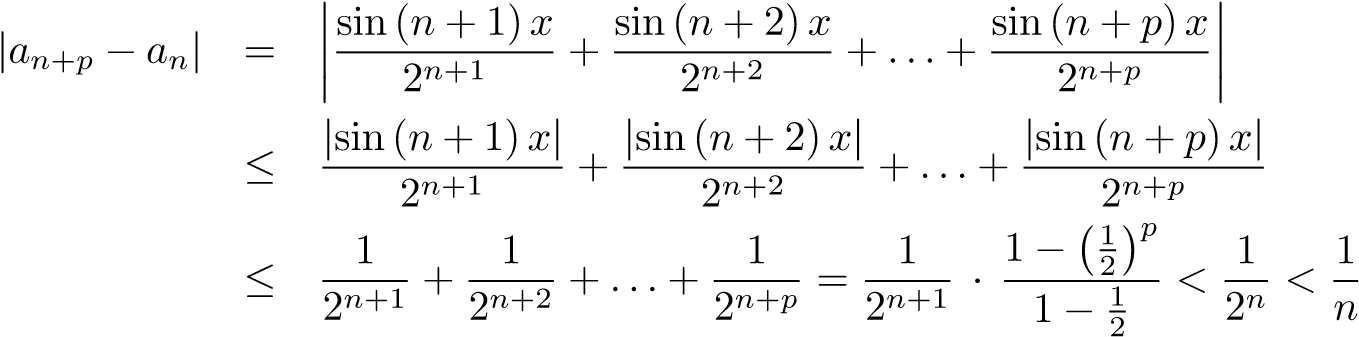
.

Din P6) lim .

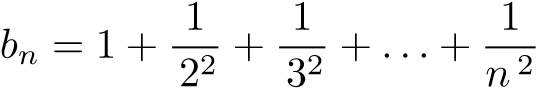
4. Folosi¸ti Criteriul general Cauchy pentru a ar˘ata convergen¸ta ¸sirurilor: a)

.

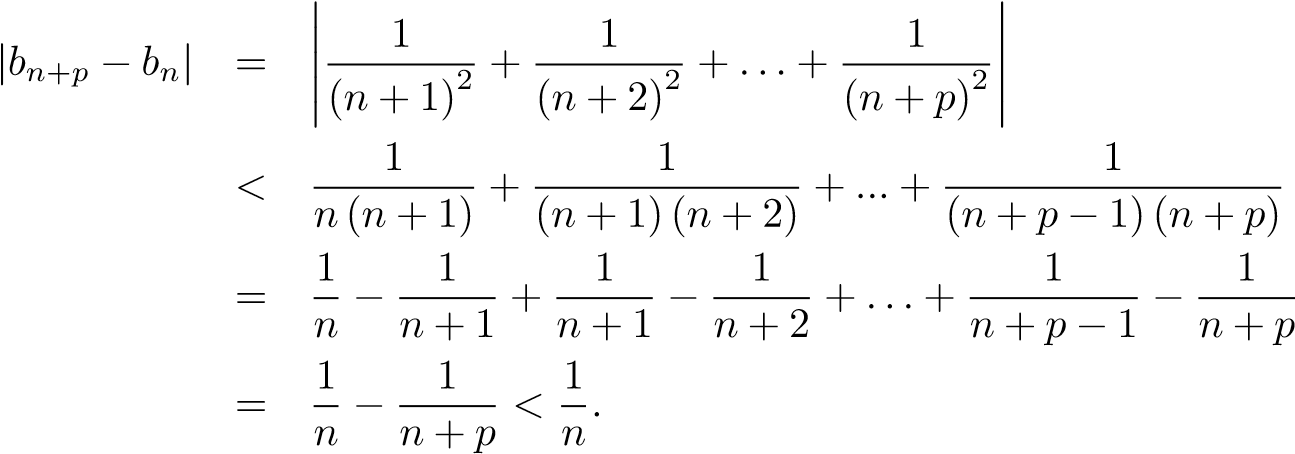
**R.** Avem

.

Dar ∀ε > 0, rezult˘a pentru, deci (an) este un ¸sir Cauchy, deci convergent. b)

.

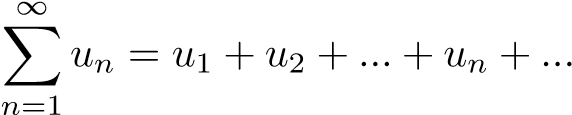
**R.** Fie n,p ∈ N nenule. Atunci



Analog cu a), bn este convergent.

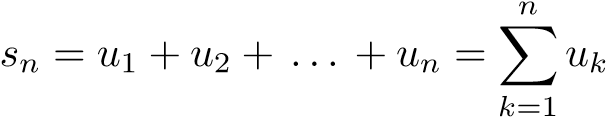
# Serii numerice

**Def. 16.** Fie (un)n≥1 un ¸sir de numere reale. O sum˘a infinit˘a de forma



se nume¸ste serie numeric˘a. Seria  se mai noteaz˘a pe scurt Pn un, Pn≥1 un, sau Pun.

S¸irul (sn) cu termenul general

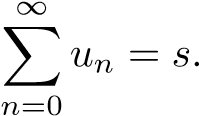


se nume¸ste ¸sirul sumelor par¸tiale.

**Def. 17.** O serie Pn un se nume¸ste convergent˘a dac˘a ¸sirul (sn) este convergent. In acest caz,ˆ limita s a ¸sirului (sn),

s = lim sn, n→∞

se nume¸ste suma seriei ¸si scriem



Dac˘a ¸sirul (sn) nu este convergent sau are limita ±∞, atunci spunem c˘a seria Pn un este divergent˘a.

**Teorema 18.** (Criteriul general Cauchy pentru convergen¸ta seriilor). Seria Pn un este convergent˘a dac˘a ¸si numai dac˘a ¸sirul (sn) este un ¸sir Cauchy, adic˘a, ∀ε > 0, exist˘a un rang n1 = n1 (ε) ∈ N astfel ˆıncˆat, ∀n ∈ N,n ≥ n1 ¸si ∀p ∈ N avem |sn+p − sn| < ε, sau

|un+1 + un+2 + ... + un+p| < ε.

**Obs. 19.** Dac˘a seria Pun este convergent˘a, atunci ¸sirul (un) este convergent la 0, adic˘a un → 0. Dac˘a un 9 0, atunci seria Pun este divergent˘a.

**Obs. 20.** Dac˘a Pn un ¸si Pn vn sunt convergente, atunci seria Pn (αun + βvn), ∀α,β ∈ R, este convergent˘a.

**Def. 21.** Spunem c˘a seria Pn un este absolut convergent˘a dac˘a seria Pn |un| este convergenta˘.

**Prop. 22.** Orice serie absolut convergent˘a este convergent˘a. Reciproca este ˆın general fals˘a.

**Obs. 23.** O serie convergent˘a care nu este absolut convergenta˘, se nume¸ste semi-convergent˘a.

**Ex. 24.** Seria  este semi-convergent˘a.

**Def. 25.** O serie de forma Pn (−1)n un, un ≥ 0, se nume¸ste serie alternant˘a.

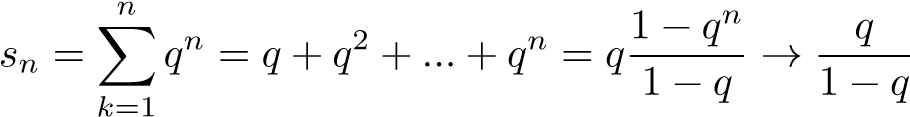
**Prop. 26.** (Dirichlet Test). Fie seria Pn (−1)n an, an > 0, unde (an) este descresc˘ator ¸si convergent la 0. Atunci seria Pn (−1)n an este convergent˘a.

**Exerci¸tii**

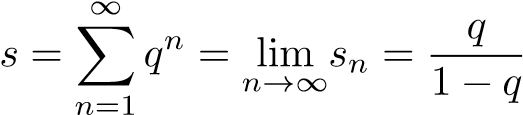
1. Studia¸ti seria geometric˘a = 0 un num˘ar real.

**R.** a) Dac˘a q = 1, suma, deci seria este divergent˘a.

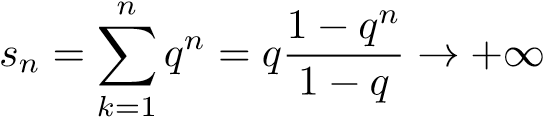
b) Dac˘a q = −1, suma sn = −1+1−1+1−... = 0, dac˘a n este par, respectiv, sn = −1+1−1+... = −1 6= 0, dac˘a n este impar. Deci sn este divergent, adic˘a seria este divergent˘a. c) Dac˘a q ∈ (−1,1), suma

,

deoarece qn → 0. Deci seria converge ¸si

.

1. Dac˘a q > 1, suma

,

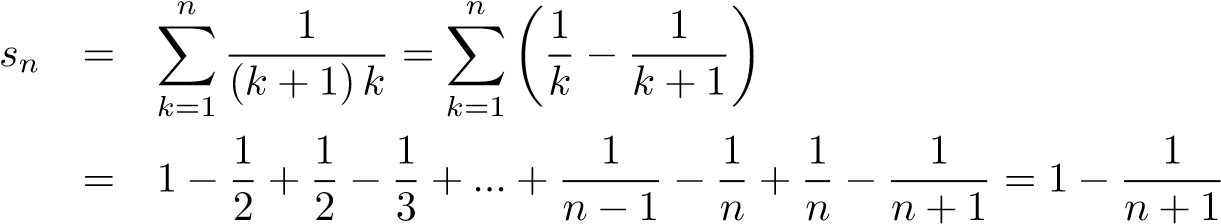
deoarece qn → ∞, deci seria diverge.

1. Fie q < −1. Cum q2n → +∞ ¸si q2n−1 → −∞, ¸sirul sn este divergent, deci seria este divergent˘a. C**oncluzie.** Seria este convergent˘a dac˘a ¸si numai dac˘a ra¸tia sa q ∈ (−1,1).

2. Studia¸ti convergen¸ta seriilor: a),

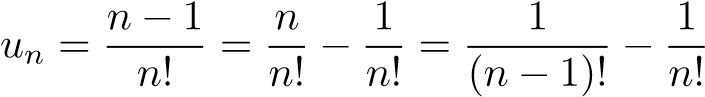
c).

**R.** a)

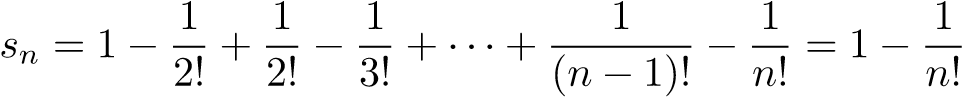
.

Cum sn → 1, seria, este convergent˘a.

1. Avem

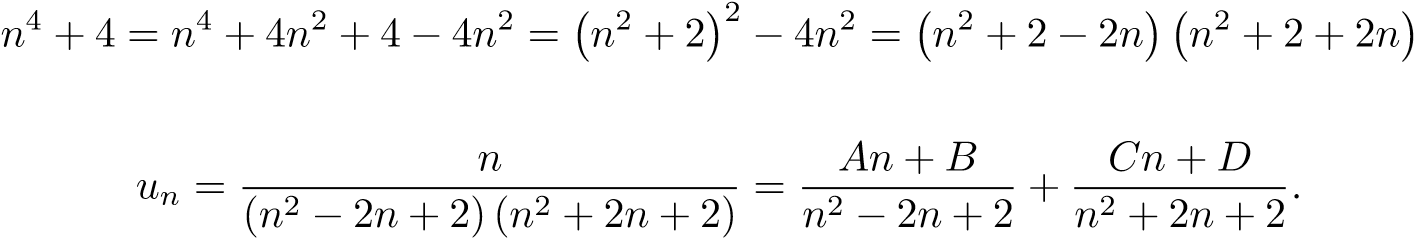
.

Deci

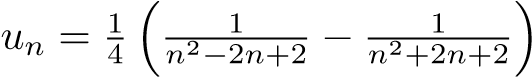
.

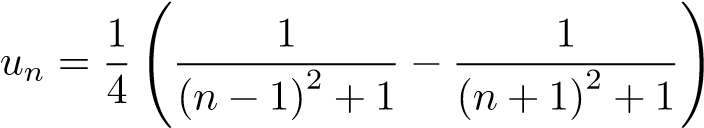
Cum sn → 1, seria este convergent˘a.

1. Din

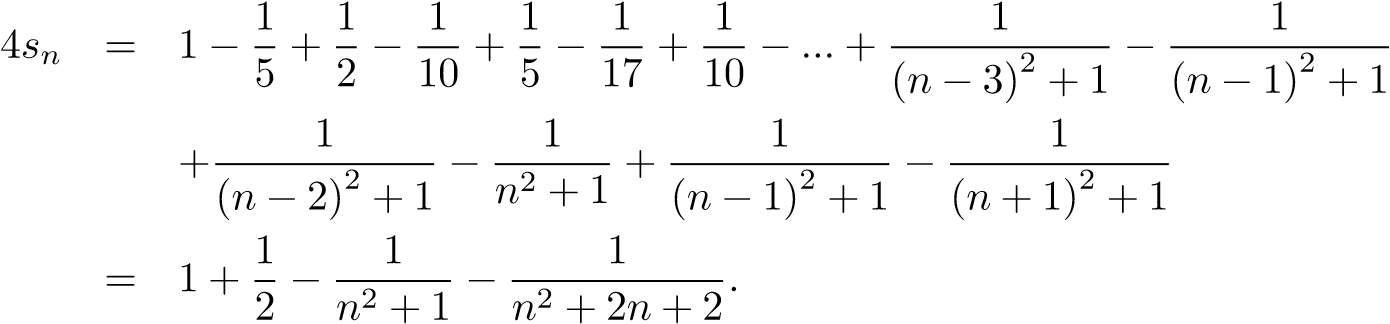
,

avem

¸si, sau

 .

Deci sn devine



Cum sn → 3/8, seria este convergent˘a la 3/8.

3. Seria este convergent˘a deoarece este descresc˘ator ¸si convergent la 0.