

Análisis de riesgos y decisiones en minería

presenta metodologías de medición de riesgos de mercado para la toma de decisiones en la administración financiera y en la gestión de riesgos en operaciones y proyectos mineros. Aborda temas sobre pronósticos de series de tiempo, riesgo financiero sobre pruebas de normalidad con Jarque - Bera, Kolmogórov - Smirnov y Shapiro - Wilk, series temporales estacionarias y no estacionarias, modelos de volatilidad, metodologías para la evaluación de riesgos, análisis de escenarios, modelos basados en simulación, riesgo operacional y riesgo geológico.

ISBN: 978-612-00-8472-4



Análisis de riesgos y decisiones en minería Marco A. Cotrina Teatino

ANÁLISIS DE RIESGOS Y DECISIONES EN MINERÍA

Marco A. Cotrina Teatino



ANÁLISIS DE RIESGOS Y DECISIONES EN MINERÍA

Marco A. Cotrina Teatino

Título: Análisis de riesgos y decisiones en minería

Autor: **Marco Antonio Cotrina Teatino**

Editor:

Marco Antonio Cotrina Teatino

Jr. Marco del Pont 1754 – La Esperanza – Trujillo – La Libertad – Perú.

Primera edición digital, marzo 2023

ISBN 9786120084724

Depósito Legal N° 2023 - 01628

Publicación digital disponible en: <https://github.com/Cotrina1/Analisis-de-riesgos-y-decisiones-en-mineria>

Resumen

Este libro se enfoca en los riesgos presentes en la minería y como se pueden controlar. Los riesgos se clasifican en tres categorías: financieros, operativos y geológicos. Además, se destaca la importancia de tener una comprensión básica de estadística para entender las probabilidades involucradas en la minería.

Este libro se estructura en 4 capítulos. El capítulo 1 presenta un repaso de estadística, que incluye definiciones de variables aleatorias, valor esperado, varianza, pruebas de hipótesis, valores críticos, valores P y pronósticos de series de tiempo. También se presentan casos prácticos para ilustrar los conceptos. El capítulo 2 se centra en el riesgo financiero, incluyendo su definición, proceso de análisis de riesgo, pruebas de normalidad, series temporales estacionarias y no estacionarias, modelo de volatilidad, metodologías para la evaluación de riesgos, análisis de escenarios, árbol de decisiones, simulación Monte-Carlo y Value at Risk. El capítulo 3 se enfoca en el riesgo operacional, presentando su definición, modelización, pronóstico de riesgo operativo en minas subterráneas, metodología para el análisis de flujos de efectivo y evaluación de impacto de riesgo operativo. Finalmente, el capítulo 4 trata el riesgo geológico, discutiendo los principales tipos de incertidumbre en geología, la reducción del riesgo mediante el aumento de ensayos, modificación de la probabilidad de fracaso, riesgo dentro de los tipos de yacimiento y riesgo de origen económico. También se incluyen las referencias bibliográficas utilizadas en el libro.

ÍNDICE DE CONTENIDO

1. Repaso Estadístico	2
1.1. Variables aleatorias	3
1.1.1. Probabilidades	3
1.1.2. Valor esperado y varianza	7
1.1.3. Modelos continuos de las variables aleatorias	9
1.2. Prueba de hipótesis	16
1.2.1. Hipótesis nula y alternativa	16
1.2.2. Errores tipo I y tipo II	16
1.2.3. Reglas de decisión de una prueba de hipótesis	16
1.2.4. Prueba T	17
1.2.5. La estadística T	18
1.2.6. El valor crítico y la prueba T (regla de decisión)	18
1.2.7. Valores P	20
1.2.8. Prueba T unilateral	21
1.2.9. Prueba T 2 caras	21
1.2.10. Limitaciones de la prueba T	22
1.3. Pronóstico de series de tiempo	22
1.3.1. Series temporales y series temporales	22
1.3.2. Componentes de serie de tiempo	23
1.3.3. Métodos de series temporales	25
1.3.4. Métodos de Promedio	26
1.3.5. Métodos de suavizado exponencial	27
1.3.6. Casos prácticos	31
2. Riesgo financiero	52
2.1. ¿Qué es el riesgo?	52
2.2. Proceso de análisis de riesgo y toma de decisiones.	52
2.3. Pruebas de normalidad	53
2.3.1. Prueba de normalidad de Jarque-Bera	54
2.3.2. Prueba de normalidad de Kolmogórov-Smirnov	56
2.3.3. Prueba de normalidad de Lilliefors	56
2.3.4. Prueba de Shapiro-Wilk	56
2.4. Series temporales estacionarias y no estacionarias	56
2.4.1. Escala de tiempo utilizada	57
2.5. Modelo de volatilidad	60
2.5.1. Modelo muy básico de volatilidad	60
2.5.2. Modelo suavizado exponencial	61
2.5.3. Modelo de la volatilidad	62
2.5.4. Modelo de ARCH	62

2.6. Metodologías para la evaluación de riesgos	63
2.6.1. Análisis de sensibilidad	63
2.6.2. Caso aplicativo en minería de análisis de sensibilidad	65
2.7. Análisis de escenarios	72
2.7.1. Partes de un árbol de decisiones	72
2.7.2. Como realizar un análisis de un árbol de decisión	72
2.7.3. Ventajas y desventajas del árbol de decisiones	73
2.7.4. Ejercicio de análisis de escenarios (árbol de decisiones)	74
2.8. Métodos basados en simulación	77
2.8.1. Método de simulación Monte-Carlo	79
2.8.2. Método VaR “Valué at Risk”	84
3. Riesgo Operacional	86
3.1. Introducción	86
3.2. Definición de riesgo operativo	86
3.2.1. Riesgo operativo para estudios de factibilidad y operaciones	86
3.3. Identificación de riesgos y peligros	89
3.4. Modelización de riesgo operativo	91
3.5. Evaluación y optimización del impacto del riesgo	92
3.6. Pronostico del riesgo operativo de la mina	94
3.6.1. Clasificación del riesgo de las minas metalizad subterráneas	94
3.7. Aplicación de probabilidades subjetivas para la evaluación de riesgos	96
3.7.1. Porque usar probabilidades subjetivas	96
3.7.2. Evaluación de probabilidades subjetivas	97
3.8. Metodología para el análisis de flujos de efectivo por riesgo operativo	99
3.8.1. Proceso de evaluación del riesgo operativo	99
3.9. Evaluación de impacto del riesgo operativo	99
4. Riesgo Geológico	101
4.1. Examen del riesgo en la exploración minera	101
4.2. Reducción del riesgo mediante el aumento del número de ensayos	104
4.3. Principales tipos de incertidumbre en geología	105
4.3.1. Variabilidad natural inherente a los objetos y procesos geológicos	105
4.3.2. El error de muestreo	105
4.3.3. Error de observación	106
4.3.4. El error de medición	106
4.3.5. Errores de la evaluación matemática de los datos geológicos	107
4.3.6. La propagación de errores	107
4.3.7. Incertidumbre conceptual y del modelo	107
4.4. Reducción del riesgo mediante el aumento del número de ensayos	108
4.5. Reducción del riesgo mediante la modificación de la probabilidad de fracaso	109

4.6. reducción del riesgo dentro de los tipos de yacimientos	110
4.7. Reducción del riesgo de origen económico	111
Bibliografía	113

1. Repaso estadístico

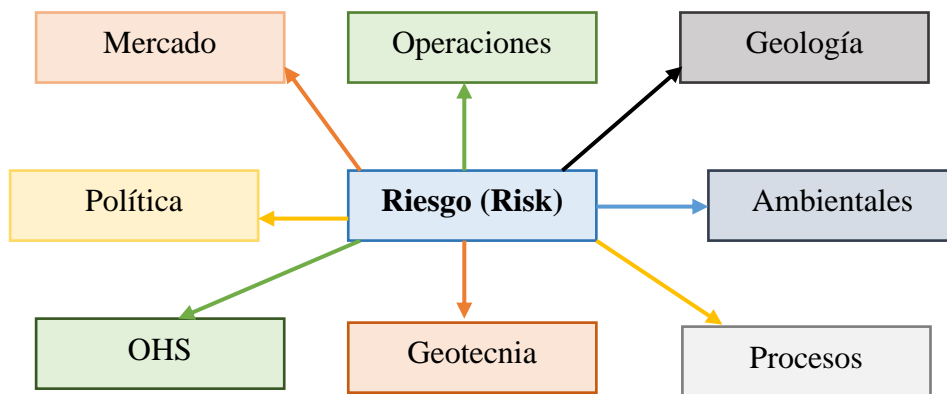
En este capítulo del repaso estadístico se desarrollarán diferentes temas relacionados a antecedentes estadísticos:

- Variables aleatorias
- Prueba de hipótesis
- Pronóstico de series de tiempo

En minería existen diferentes fuentes de riesgo (Risk), se puede observar en la **Figura 1**.

Figura 1

Fuentes de Riesgo en minería



Nota: son 8 fuentes de riesgos que existen en minería, OHS = Seguridad y Salud Ocupacional. (Saavedra Rosas, 2014).

En esta ocasión se trabajará con riesgo en mercado, operaciones y geología, en la cual se desarrollarán modelos matemáticos frente a la incertidumbre y caracterizar el riesgo.

1.1. Variables aleatorias

Una variable aleatoria “x” toma un conjunto de valores con diferentes probabilidades. Por ejemplo: si se lanza un dado el resultado es aleatorio (no fijo) y hay 6 resultados posibles, cada uno ocurre con probabilidad de un sexto ($1/6$).

Una variable aleatoria puede ser:

- Variable aleatoria discreta: son las variables aleatorias que tienen un número de resultados. Por ejemplo: los dados y los conteos.
- Variable aleatoria continua: son las variables aleatorias que tienen un infinito continuo de valores posibles. Por ejemplo: peso, la velocidad.

1.1.1. Probabilidades

La probabilidad es la frecuencia con la que esperamos diferentes resultados que ocurrirán si repetimos el experimentar una y otra vez (visión – frecuentista).

1.1.1.1. Funciones de probabilidad

- Una función de probabilidad mapea los posibles valores de “x” contra sus respectivas probabilidades de ocurrencia $P(x)$.
- $P(x)$ es un número de 0 a 1.
- El área bajo una función probabilidad es siempre 1.

Ejemplo: Se realiza el lanzamiento de un dado, en la cual la probabilidad de que me salga un número del 1 al 6 es de 1/6, expresar en función de probabilidad y en una distribución acumulativa.

Función de probabilidad normal

$$\sum_{\forall x} \Pr(x) = 1 \quad (1)$$

Tabla 1

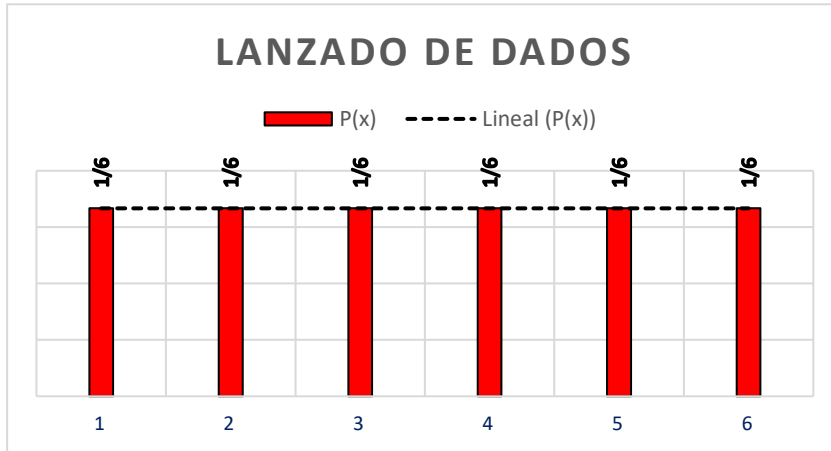
Probabilidades normales del lanzamiento del dado

	N°	P(x)
P(x=1)	1	1/6
P(x=2)	2	1/6
P(x=3)	3	1/6
P(x=4)	4	1/6
P(x=5)	5	1/6
P(x=6)	6	1/6
TOTAL		1

Nota: N° = número de la cara del dado, P(x) = probabilidad correspondiente.

Figura 2

Gráfico de probabilidad de lanzamiento de dados



Nota: la línea de probabilidad P(x) indica que existe una probabilidad lineal de 1/6.

Función de Distribución Acumulativa (CDF)

Tabla 2

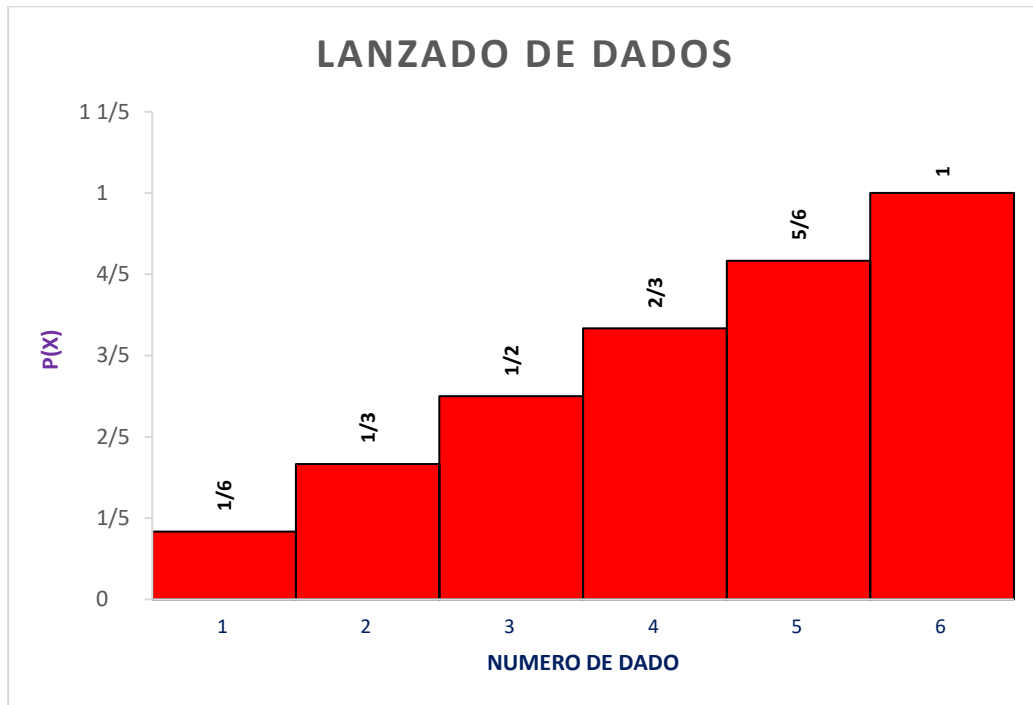
Probabilidad de distribución acumulativa

	Nº	P(x)	CDF
P(x≤1)	1	1/6	1/6
P(x≤2)	2	1/6	1/3
P(x≤3)	3	1/6	1/2
P(x≤4)	4	1/6	2/3
P(x≤5)	5	1/6	5/6
P(x≤6)	6	1/6	1
TOTAL		1	

Nota: P(x) = Probabilidades al lanzar el dado, CDF = Función de Distribución Acumulativa.

Figura 3

Gráfico de CDF



Nota: Es una gráfica de distribución acumulada, donde se suman las probabilidades hasta llegar a la unidad correspondiente (1).

1.1.2. Valor esperado y varianza

Todas las distribuciones de probabilidades se caracterizan por un valor esperado (Media) y una varianza (desviación estándar al cuadrado).

1.1.2.1. Valor esperado (media) variable aleatoria

- El valor esperado es el promedio o la media (μ) de la variable aleatoria “x”.
- A veces se le llama “promedio ponderado” por qué los valores más frecuentes de “x” tienen mayor peso en la media.
- Es como esperamos que “x” se comporte en promedio al largo plazo (frecuentista).

Ecuación matemática de valor esperado caso discreto:

$$E(x) = \sum_{all\ x} X_i P(x_i) \quad (2)$$

Ecuación matemática de valor esperado caso continuo:

$$E(x) = \int_{all\ x} x * f(x) dx \quad (3)$$

$E(x)=\mu$ estos símbolos se usan indistintamente.

Ejemplo de valor esperado:

Si tenemos la siguiente distribución de probabilidades para una variable aleatoria

(discreta):

x	10	11	12	13	14
P(x)	0.4	0.2	0.2	0.1	0.1

Para resolver se hace uso de la ecuación (2)

$$E(x) = \sum_{i=1}^5 XiP(xi) = 10(0.4) + 11(0.2) + 12(0.2) + 13(0.1) + 14(0.1) = 11.3$$

1.1.2.2. Media muestral

La media muestral es un caso de valor esperado

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n xi}{n} = \sum_{i=1}^n xi\left(\frac{1}{n}\right) \quad (4)$$

La probabilidad (frecuencia) de cada persona en la muestra es 1/n.

1.1.2.3. Varianza y desviación estándar

“La distancia esperada (promedio) al cuadrado (o desviación) de la media”

$$\sigma^2 = Var(x) = E(x - \mu)^2 = \sum_{all\ x} (x_i - \mu)^2 P(x_i) \quad (5)$$

Existe varianza para casos discretos y casos continuos.

1.1.2.3.1. Varianza caso discreto

$$Var(x) = \sum_{all\ x} (x_i - \mu)^2 P(x_i) \quad (6)$$

1.1.2.3.2. Varianza caso continuo

$$Var(x) = \int_{all\ x} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad (7)$$

$Var(x) = \sigma^2$; $SD(x) = \sigma$; estos símbolos se usan indistintamente.

1.1.2.3.3. Similitud de la varianza empírica

La varianza de una muestra es igual a s^2

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \left(\frac{1}{n - 1} \right) \quad (8)$$

La división por $n-1$ refleja que hemos perdido un grado de libertad (dato) teníamos que estimar la media muestral antes de la varianza.

1.1.3. Modelos continuos de las variables aleatorias

1.1.3.1. Distribución uniforme

- Usado para modelar variables aleatorias que tienden a ocurrir “manera uniforme” en un rango de valores.
- Probabilidad de cualquier intervalo de valores proporcional a su ancho.
- Se usa para (simular) variables aleatorias a partir de cualquier distribución.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b - a} & a \leq y \leq b \\ 0 & \end{cases} \quad (9)$$

Figura 4

Gráfico de función de densidad

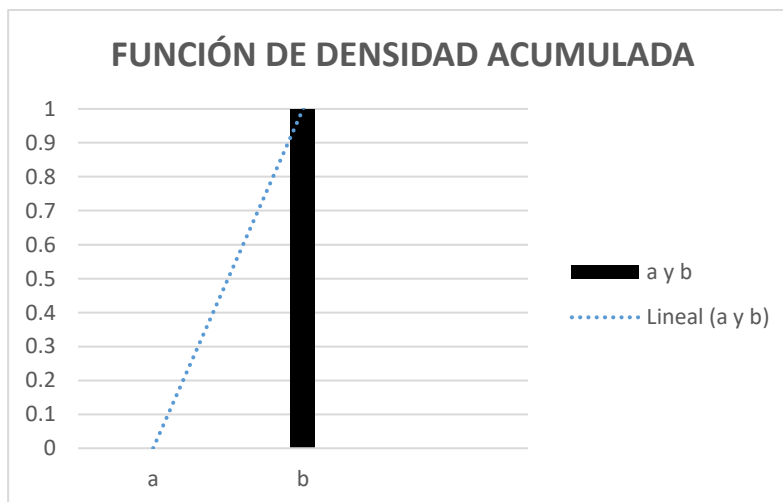


Nota: $f(x)$ = probabilidades, en este caso existe una igualdad en la función teniendo como $f(x)=1$ para los casos “a” y “b”.

$$F(y) = \begin{cases} 0 & y < a \\ \frac{y - a}{b - a} & a \leq y \leq b \\ 1 & y > b \end{cases} \quad (10)$$

Figura 5

Gráfico de función de densidad acumulada



Nota: la línea indica la variación que existe desde “a” hasta “b”, siendo una densidad acumulada.

Distribución uniforme expectativas

$$E(y) = \int_a^b y \left(\frac{1}{b-a} \right) dy = \frac{b+a}{2} \quad (11)$$

$$E(y^2) = \int_a^b y^2 \left(\frac{1}{b-a} \right) dy = \frac{a^2 + b^2 + ab}{3} \quad (12)$$

$$V(y) = E(y^2) - [E(y)]^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (13)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} \quad (14)$$

1.1.3.2. Distribución exponencial

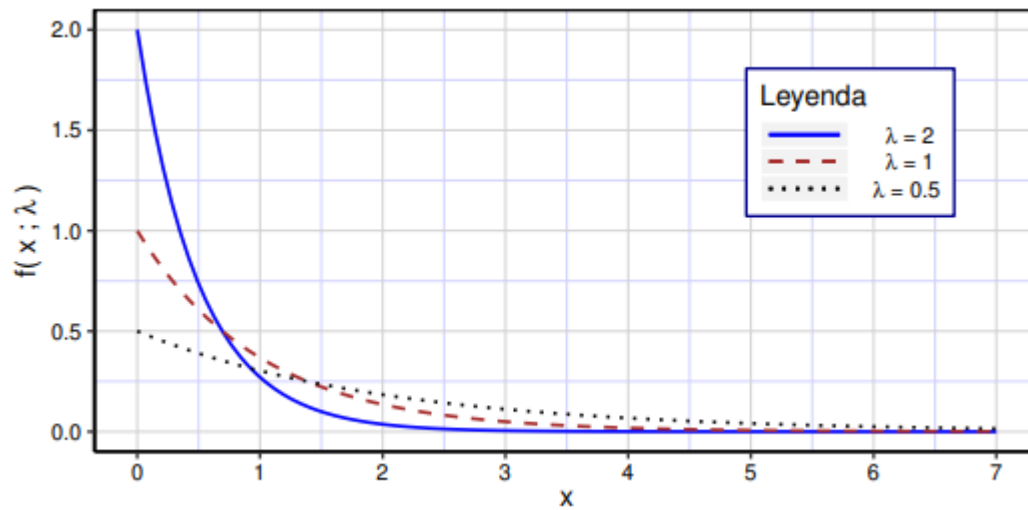
- Es una distribución asimétrica a la derecha con máximo en $y=0$.
- Las variables aleatorias solo pueden tomar datos positivos.
- Se usa para modelar tiempos/distancias.

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{y}{\theta}} & y > 0 \\ 0 & elsewhere \end{cases} \quad (15)$$

$$F(y) = \int_0^y \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}} dt = 1 - e^{-\frac{y}{\theta}} \quad y > 0 \quad (16)$$

Figura 6

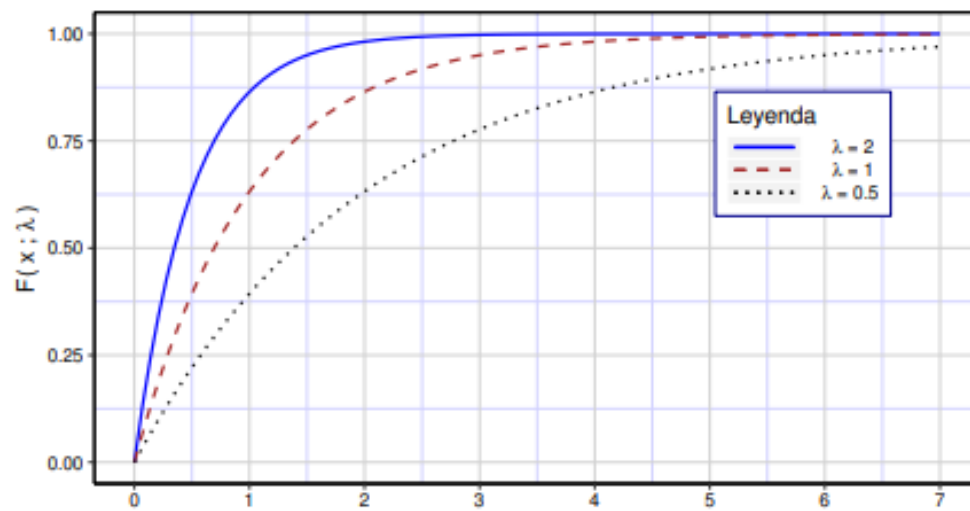
Distribución exponencial normal



Nota: la distribución exponencial está estrechamente relacionada con el proceso de Poisson (Devore & Berk, 2012).

Figura 7

Distribución exponencial acumulada



Nota: la distribución exponencial se utiliza para modelo de distribución de tiempos en la ocurrencia de eventos sucesivos (Devore & Berk, 2012).

Distribución exponencial expectativas

$$E(Y) = \int_0^{\infty} y \left(\frac{1}{\theta} e^{-\frac{y}{\theta}} \right) dy = \theta \quad (17)$$

$$E(Y^2) = \int_0^{\infty} y^2 \left(\frac{1}{\theta} e^{-\frac{y}{\theta}} \right) dy = 2\theta^2 \quad (18)$$

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \theta^2 \quad (19)$$

$$\sigma = \theta \quad (20)$$

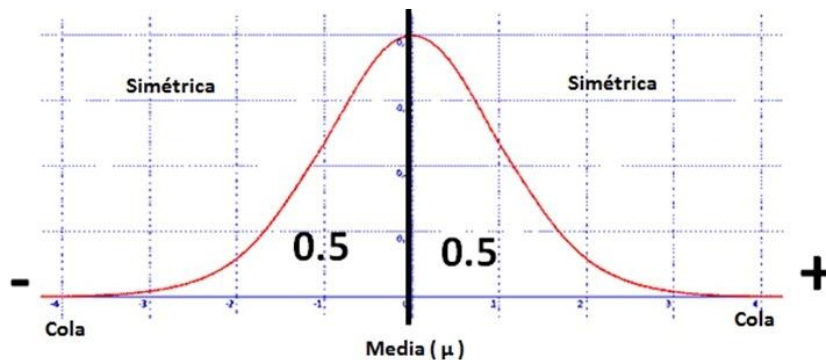
1.1.3.3. Distribución normal (Gaussiana)

- Es la distribución en forma de campana con tendencia a que los individuos se amontonen alrededor de un grupo mediana/media.
- Se utiliza para modelar los fenómenos biológicos.
- Muchos estimadores tienen un muestreo normal aproximado.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < y < \infty; -\infty < \mu < \infty; \sigma > 0 \quad (21)$$

Figura 8

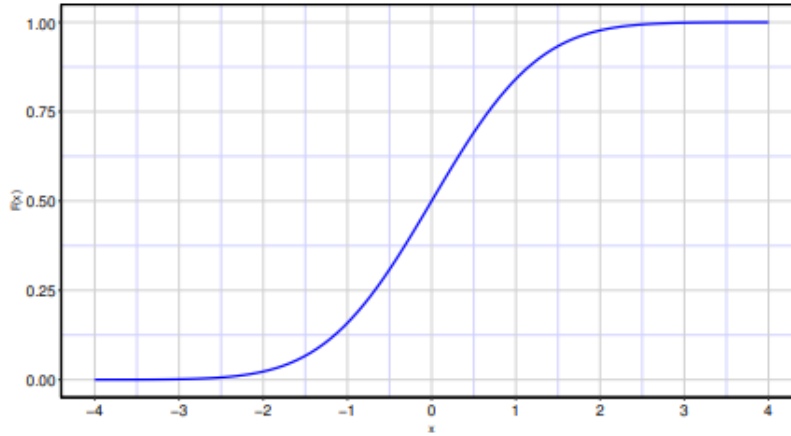
Función de densidad de probabilidad normal estándar



Nota: μ = media, se tiene una cola negativa (-) y una cola positiva (+) la cual desde la media divide a ambos lados a números negativos (-) y números positivos (+) (Matepedia, 2016).

Figura 9

Función de distribución acumulada normal estándar



Nota: la variable aleatoria normal estándar es “Z” se denota mediante Z N (0,1) (Vilca Huayta, 2019)

Distribución normal expectativas

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} Z \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} \right) dz = 0 \quad (22)$$

$$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \right) dz = 1 \quad (23)$$

$$V(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = \sigma = 1 \quad (24)$$

1.1.3.4. Distribución logarítmica

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y^2 \sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\log y - \mu}{\sigma} \right)^2} & y > 0; -\infty < \mu < \infty; \sigma > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (25)$$

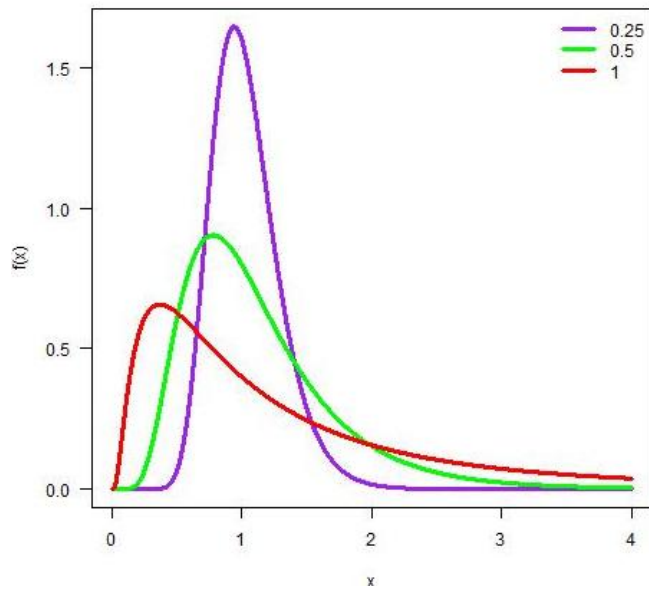
$$E(Y) = E(e^{Y^*}) = e^{\mu + (\sigma^2/2)} \quad (26)$$

$$E(Y^2) = e^{2(\mu + \sigma^2)} \quad (27)$$

$$V(Y) = e^{2(\mu + \sigma^2)} - e^{2\mu + \sigma^2} \quad (28)$$

Figura 10

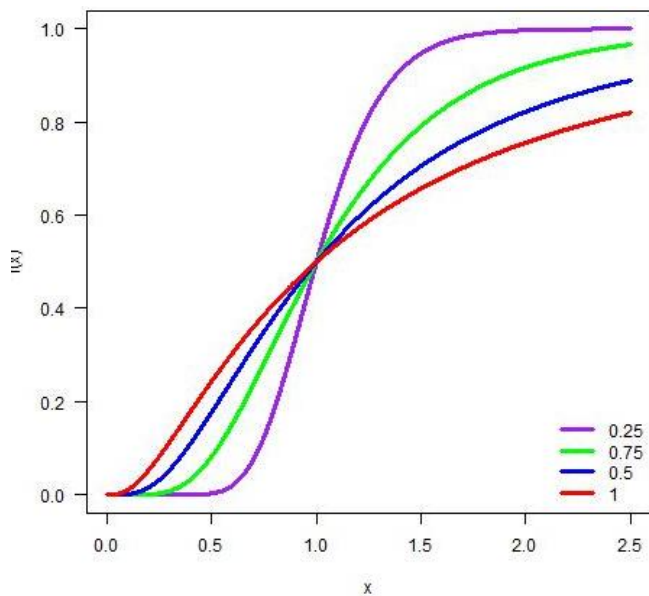
Distribución log normal



Nota: $f(x)$ = probabilidad de la gráfica (Saavedra Rosas, 2014).

Figura 11

Distribución log normal acumulada



Nota: se trabaja con más probabilidades logarítmicas (0.25;0.75;0.5;1) (Saavedra Rosas, 2014).

1.2. Prueba de hipótesis

La prueba de hipótesis se utiliza en una variedad de entornos.

1.2.1. Hipótesis nula y alternativa

- El investigador establece la hipótesis a probar.
- Distinguimos entre la hipótesis nula y la hipótesis alterna.

1.2.1.1. Hipótesis nula (H_0)

Es el resultado que el investigador no espera (siempre incluye signos de igualdad).

1.2.1.2. Hipótesis alterna (H_a)

Es el resultado que el investigador espera.

1.2.2. Errores tipo I y tipo II

Existe dos tipos de errores en la prueba de hipótesis.

1.2.2.1. Error tipo I

Rechazo de una hipótesis nula verdadera.

1.2.2.2. Error tipo II

No rechazar una hipótesis nula falsa.

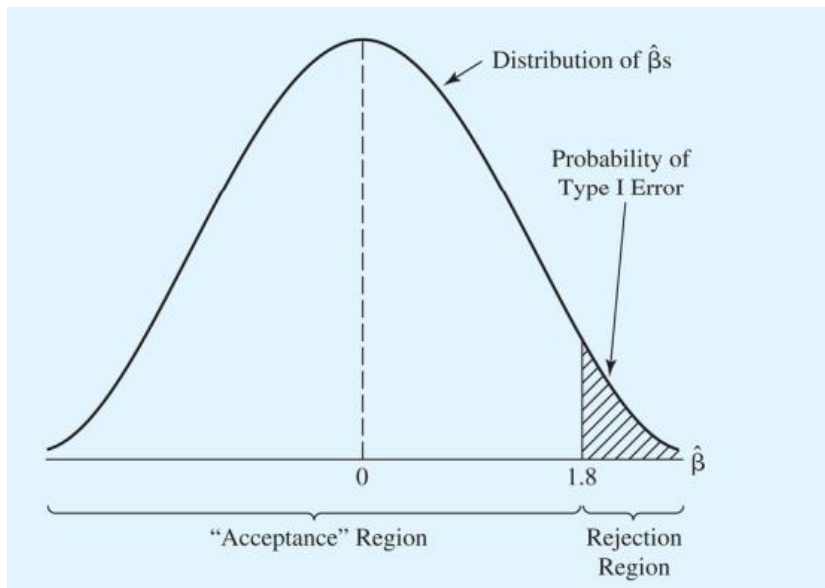
1.2.3. Reglas de decisión de una prueba de hipótesis

- Para calcular una hipótesis calculamos un estadístico muestral que determina cuando se puede rechazar la H_0 dependiendo de la magnitud de la muestra estadística relativa a un valor crítico.
- Se conoce como regla de decisión.

- La regla de decisión se forma antes de que se realicen las estimaciones de regresión.
- El rango de valores posibles de las estimaciones se divide en dos regiones (aceptación) y (región de rechazo).
- El valor crítico separa efectivamente la región aceptación/no rechazo de la región de rechazo cuando se prueba H_0 .

Figura 12

Aceptación y rechazo para un análisis de B



Nota: se observa que la región marcada es en la cola (+) lo que indica que es una Hipótesis alterna que parte desde 1.8 hacia adelante y se cumple el tipo de error I (Saavedra Rosas, 2014).

1.2.4. Prueba T

- Es la prueba que se usa para probar hipótesis sobre coeficiente de pendientes de regresión individuales.

- Son pruebas de más de un coeficiente a la vez (conjunto de hipótesis) se realizan típicamente con la prueba F.
- la prueba apropiada para usar en error estocástico es distribuida normalmente y cuando la varianza de esa distribución debe ser estimada.
- La prueba T para la prueba de hipótesis es una práctica estándar en econometría.

1.2.5. *La estadística T*

- ✓ Para una prueba típica de regresión múltiple se usa:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + E_i \quad (29)$$

Podemos calcular los valores “t” para cada uno de los estimados coeficientes.

Por lo general estos solo se calculan para coeficientes de pendiente.

- ✓ El estadístico “t” para el k-esimo coeficiente es:

$$t_k = \frac{(\hat{\beta}_k - B_{H0})}{SE(\hat{\beta}_k)} \quad (k = 1, 2, \dots, k) \quad (30)$$

1.2.6. *El valor crítico y la prueba T (regla de decisión)*

- ✓ Para decidir si rechazar o no rechazar un valor nulo hipótesis basado en un valor “t” calculado usamos un valor crítico “t”.
- ✓ Es el valor que distingue la región de aceptación de la región de rechazo.
- ✓ El valor crítico “t” se selecciona de una tabla dependiendo de:
 - Si la prueba es unilateral o bilateral.
 - Error típico I y especificado.

- Los grados de libertad (N-K-1)

La regla que se aplica cuando se prueba una regresión simple el coeficiente termina siendo que rechaza a H_0 .

$$H_0 \text{ si } |T_k| > T_c \text{ y } T_k \text{ tambien tiene el signo } H_A \quad (31)$$

Esta regla de decisión funciona tanto para cálculos de valores “t” y valores “t” críticos para hipótesis unilaterales alrededor de cero.

$$\begin{aligned} H_0 &= \beta_k \leq 0 \\ H_A &= \beta_k > 0 \\ H_0 &= \beta_k \geq 0 \\ H_A &= \beta_k < 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Así también para hipótesis bilaterales alrededor de cero (hipotético s).

$$\begin{aligned} H_0 &= \beta_k = 0 \\ H_A &= \beta_k \neq 0 \end{aligned} \quad (33)$$

1.2.6.1. Elegir nivel de importancia

- Elegir un nivel de significancia debe elegirse antes del valor crítico.
- El nivel de significancia indica la probabilidad de un valor “t” estimado mayor que el crítico valor “t” de la H_0 correcta.
- También mide la cantidad de error tipo I implícita por un valor “t” crítico particular.
- Se recomienda un 5% de nivel de significancia a menos que sepa algo inusual sobre costos relativos de errores tipo I y II.

- En un rango que contiene el verdadero valor de un artículo un % específico de tiempo.
- Se calcula usando la regresión estimada, el valor “t” crítico bilateral y el error estándar del coeficiente.

$$\text{Intervalo confidence} = \hat{\beta} \pm T_c * SE(\hat{\beta}) \quad (34)$$

- La relación que existe entre los intervalos de confianza y la hipótesis de prueba bilateral es que, si un valor hipotético cae dentro del intervalo de confianza, entonces no podemos rechazar la hipótesis nula.

1.2.7. Valores P

- Es una alternativa a la prueba T.
- Un valor P o nivel de significación marginal es la probabilidad de observar una puntuación T de esa tamaño o mayor, si la H_0 fuera verdadera.
- Gráficamente es dos veces el área bajo la curva de la distribución “t” entre el valor absoluto de la puntuación “t” real e infinito.
- Los softwares son Eviews y Stata los valores P.

La regla de decisión del valor P es:

- Rechazar H_0 si P-evaluado $K <$ el nivel de significancia y si tiene el signo implicado por H_A .

1.2.8. Prueba T unilateral

- El uso es determinar si un coeficiente de regresión es significativamente diferente de cero.
- Implica 4 pasos:
 - ✓ Establecer la H_0 y H_1 .
 - ✓ Elija un nivel de significancia y un valor T crítico.
 - ✓ Ejecute la regresión y obtenga un valor T estimado (punto “t”)
 - ✓ Aplique la regla de decisión comparando el valor T calculado con el valor T crítico para rechazar o no la H_0 .

1.2.9. Prueba T 2 caras

Se utiliza cuando la hipótesis debe rechazarse si los coeficientes estimados son significativamente diferentes de cero o un valor específico distinto de cero en cualquier dirección.

- Hay 2 casos:
 - ✓ Pruebas bilaterales de si un coeficiente de estimación es significativamente diferente de cero.
 - ✓ Pruebas bilaterales de si un coeficiente de estimación es significativamente diferente de un específico valor distinto de cero.

1.2.10. Limitaciones de la prueba T

La prueba T no prueba la validez teórica.

- Si realizas una regresión del índice de precios al consumidor sobre la lluvia en una serie de tiempo y encontrar una fuerte significación estadística ¿eso significa que la teoría subyacente es válida? por supuesto que NO.

La prueba “t” no evalúa la importancia.

- Si tenemos un coeficiente más estadístico que otro no significa que sea más importante para explicar el variable dependiente.

La prueba T no está diseñada para pruebas de toda población.

- El tamaño de la muestra se acerca a la población (el error se aproxima a cero, ya que el error estándar disminuye a medida que N aumenta) el puntaje T se aproximara al infinito.

1.3. Pronóstico de series de tiempo

1.3.1. Series temporales

Una serie de tiempo es un conjunto de observaciones en una variable medida en puntos sucesivos en el tiempo o en periodos sucesivos de tiempo.

El objetivo es descubrir un patrón en los datos históricos y luego usar este patrón para extrapolar el comportamiento en el futuro.

1.3.2. Componentes de serie de tiempo

1.3.2.1. Componentes de tendencia

Representa un cambio gradual de serie de tiempo a valores más altos o bajos a lo largo del tiempo.

La tendencia suele ser el resultado de cambios en la población tecnológica y preferencias del consumidor.

1.3.2.2. Componente cíclico

Representa cualquier secuencia recurrente de puntos arriba y por debajo de la línea de tendencia que dura más de un año.

1.3.2.3. Componente estacional

- Representa cualquier patrón repetitivo menos de un año de duración.
- La duración del patrón puede ser tan corta como una hora o menos.

1.3.2.4. Componente irregular

- Es el factor “cajón de sastre” el que explica la desviación del valor real de la serie de tiempo.
- Es causado por el corto plazo, imprevisto y factores no recurrentes que afectan la serie de tiempo.

1.3.2.5. Precisión de pronóstico

- Consiste en ajustar un modelo a los datos y luego utilizar ese modelo para extrapolar.
- El modelo necesita ser evaluado en términos de calidad.

- Lo que es un buen modelo para una medida de precisión no lo es para otro, por lo que las medidas son complementarias y deben usarse con juicio.

1.3.2.5.1. Error cuadrático medio (MSE)

Es el promedio de la suma de todos los errores cuadrados del pronóstico

$$MSE = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i^2 \quad (35)$$

1.3.2.5.2. Error cuadrático medio raíz (RMSE)

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i^2} \quad (36)$$

1.3.2.5.3. Desviación absoluta media (MAD)

Es la media de los valores absolutos de todos los errores de pronóstico

$$MAD = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |e_i| \quad (37)$$

Claramente MAD es positiva.

1.3.2.5.4. Error porcentual medio (MPE)

Es la media de los valores porcentuales de todos los errores de pronóstico.

$$MPE = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{x_i} \quad (38)$$

MPE puede ser positivo o negativo.

1.3.2.5.5. Error porcentual absoluto medio (MAPE)

Es la media de los valores porcentuales de todos los errores de pronóstico.

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{e_i}{x_i} \right| \quad (39)$$

Siempre MAPE tiene que ser positivo

1.3.3. Métodos de series temporales

Los métodos de series de tiempo pueden ser clasificados como:

Métodos de promediación: observaciones igualmente ponderadas.

Métodos de suavizado exponencial: conjunto desigual de pesos a datos pasados, donde los pesos decaen exponencialmente de los datos más recientes a los más lejanos puntos.

Todos los métodos de este grupo requieren que ciertos parámetros sean definidos, estos parámetros (con valores entre 0 y 1) determinaran los pesos desiguales que se aplicaran a los datos pasados.

1.3.3.1. Métodos de premediación

Si una serie de tiempo es generada por un proceso contante sujeto a error aleatorio, entonces la media es una estadística útil y se puede usar como pronóstico para el próximo periodo.

1.3.3.2. Método de suavizado exponencial

El método de suavizado exponencial más simple es el simple método de suavizado (SES) donde solo un parámetro necesita ser estimado.

El método de Holt hace uso de dos parámetros diferentes y permite pronosticar para series con tendencia.

El método de Holt Winter implica tres parámetros de suavizado para suavizar los datos, la tendencia y el índice estacional.

1.3.4. Métodos de promedio

1.3.4.1. La media

- ✓ Usa el promedio de todos los datos históricos como el pronóstico.

$$F_{t+1} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t y_i \quad (40)$$

- ✓ cuando hay nuevos datos disponibles, el pronóstico de tiempo $t+2$ es la nueva media incluyendo los datos observados previamente además de esta nueva observación.

$$F_{t+2} = \frac{1}{t+1} \sum_{i=1}^t y_i \quad (41)$$

- ✓ Este método es apropiado cuando no se nota tendencia o estacionalidad.
- ✓ El promedio móvil para el periodo de tiempo “ t ” es la media de las “ k ” observaciones más recientes.
- ✓ El número constante “ k ” se especifica desde el principio.
- ✓ Cuanto más pequeño es el número “ k ” más peso se les da a periodos recientes.
- ✓ Cuanto mayor es el número “ k ” menos peso se les da a periodos más recientes.

1.3.4.2. Promedios móviles

- Una “ k ” grande es deseable cuando hay anchos, fluctuaciones poco frecuentes en la serie.
- Una “ k ” pequeña es más deseable cuando hay cambios repentinos, cambios en el nivel de la serie.

- Para datos trimestrales, un promedio móvil de cuatro trimestres MA (4) elimina o promedia efectos estacionales.
- Para datos mensuales, un promedio móvil de 12 meses MA (12), elimina o promedia el efecto estacional.
- Se asignan pesos iguales a cada observación utilizado en el promedio.
- Cada nuevo punto de datos se incluye en el promedio a medida que vuelve a estar disponible y el punto de datos más antiguo sea descartado.
- Una media móvil de orden “k”, MA(k) es el valor de “k” observaciones consecutivas.

$$F_{t+1} = \hat{y}_{t+1} = \frac{(y_t + y_{t-1} + y_{t-2} + \dots + y_{t-k+1})}{k} \quad (42)$$

$$F_{t+1} = \frac{1}{k} \sum_{i=t-k+1}^t y_i \quad (43)$$

“k” es el número de términos en la media móvil.

El modelo de promedio móvil no maneja tendencia o estacionalidad muy bien, aunque puede hacerlo mejor que la media total.

1.3.5. Métodos de suavizado exponencial

- Estos métodos proporcionan una ponderación exponencial media móvil de todos los valores observados anteriormente.
- Apropiado para datos sin aumento, predecible o tendencia baja.
- El objetivo es estimar el nivel actual y usarlo como pronóstico del valor futuro.

1.3.5.1. Suavizado exponencial simple.

La ecuación de suavizado exponencial es

$$F_{t+1} = \alpha y_t + (1 - \alpha)F_t \quad (44)$$

Donde:

F_{t+1} = Pronostico para el próximo periodo

α = Constante de suavizado

y_t = Valor observado de la serie en el periodo “t”

F_t = Pronostico anterior para el periodo “t”

El pronostico F_{t+1} se basa en ponderar la más reciente observación, y_t con un peso α y ponderando mas pronostico reciente F_t con un peso de $1 - \alpha$.

La implicación del suavizado exponencial puede ser: se ve mejor si la ecuación anterior se expande por reemplazando F_t con sus componentes de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} F_{t+1} &= \alpha y_t + (1 - \alpha)F_t \\ F_{t+1} &= \alpha y_t + \alpha(1 - \alpha)y_{t-1} + (1 - \alpha)^2 F_{t-1} \end{aligned} \quad (45)$$

Si este proceso de sustitución se repite reemplazando F_{t-1} por sus componentes; F_{t-2} por sus componentes y así sobre el resultado.

$$F_{t+1} = \alpha y_t + \alpha(1 - \alpha)y_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 y_{t-2} + \alpha(1 - \alpha)^3 y_{t-3} \quad (46)$$

Por lo tanto F_{t+1} es la media móvil ponderado de toda observación pasada.

Ejemplo: los pesos asignados a observaciones pasadas para “ α ”. $\alpha=0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 0.9$, aplicando la **ecuación (46)**.

Tabla 3

Datos de la media ponderadas de observaciones

y_t	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9
y _{t-1}	0.2(1-0.2) ¹	0.4(1-0.4) ¹	0.6(1-0.6) ¹	0.8(1-0.8) ¹	0.9(1-0.9) ¹
y _{t-2}	0.2(1-0.2) ²	0.4(1-0.4) ²	0.6(1-0.6) ²	0.8(1-0.8) ²	0.9(1-0.9) ²
y _{t-3}	0.2(1-0.2) ³	0.4(1-0.4) ³	0.6(1-0.6) ³	0.8(1-0.8) ³	0.9(1-0.9) ³
y _{t-4}	0.2(1-0.2) ⁴	0.4(1-0.4) ⁴	0.6(1-0.6) ⁴	0.8(1-0.8) ⁴	0.9(1-0.9) ⁴
y _{t-5}	0.2(1-0.2) ⁵	0.4(1-0.4) ⁵	0.6(1-0.6) ⁵	0.8(1-0.8) ⁵	0.9(1-0.9) ⁵

Nota: y_t = valor observado en la serie del periodo (t)

La ecuación de suavizado exponencial escrita en el siguiente formulario aclara el papel del factor de ponderación α .

$$F_{t+1} = F_t + \alpha(y_t - F_t) \quad (47)$$

El pronóstico de suavizado exponencial es el pronóstico anterior más un ajuste por el error que ocurrió en el último pronóstico.

- El valor de la constante de suavizado α debe estar entre 0 y 1.
- α no puede ser igual a 0 ni a 1.

- Si predicciones estables con variación aleatoria suavizada se desea, entonces un valor pequeño de α .
- Si una respuesta rápida a un cambio real en el patrón se desea observaciones un valor grande de α es adecuado.
- Para estimar α , los pronósticos se calculan para α igual a 1,2,3...,9 y la suma de pronósticos al cuadrado se calcula el error para cada uno.
- Se elige el valor de α con el RMSE más pequeño para uso en la producción de pronósticos futuros.

Para iniciar el algoritmo necesitamos F_1 porque:

$$F_2 = \alpha y_1 + (1 - \alpha)F_1 \quad (48)$$

Desde F_1 , podemos:

- Establecer la primera estimación igual a la primera observación.
- Usar el promedio de las primeras cinco o seis observaciones para el valor suavizado inicial.

1.3.6. Casos prácticos

1.3.6.1. Error cuadrático medio raíz (RMSE)

El precio mensual del cobre en (\$/Lb) se presenta a continuación.

Tabla 4

Precios mensuales de Cu (\$/Lb)

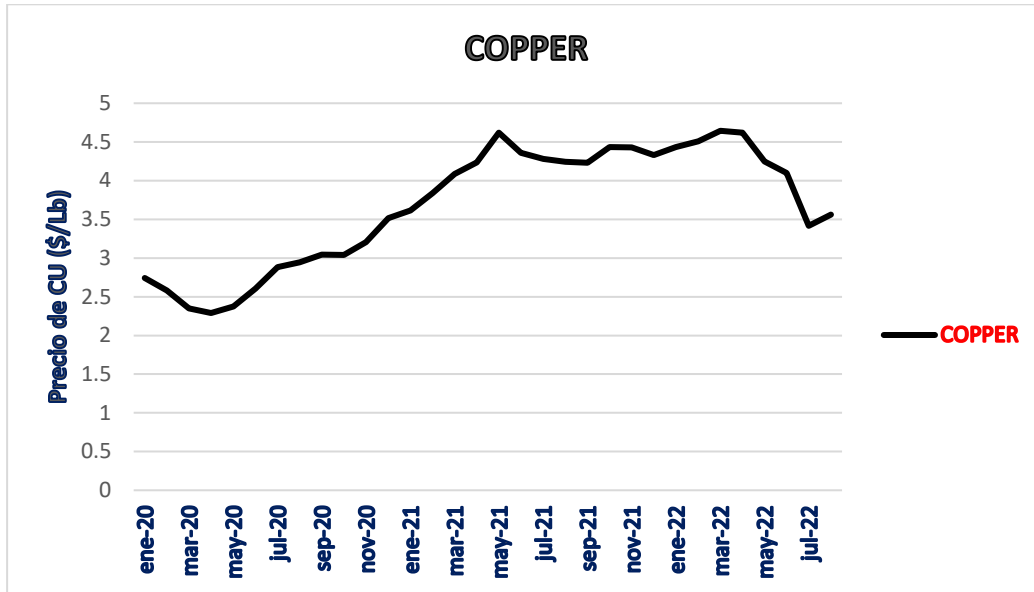
Fecha	Cu (\$/Lb)
Ene-20	2.7439
Feb-20	2.5793
Mar-20	2.349
Abr-20	2.2898
May-20	2.374
Jun-20	2.6047
Jul-20	2.882
Ago-20	2.9469
Set-20	3.0447
Oct-20	3.0403
Nov-20	3.2039
Dic-20	3.5177
Ene-21	3.6154
Feb-21	3.8375
Mar-21	4.0846

Abr-21	4.2345
May-21	4.6194
Jun-21	4.3601
Jul-21	4.279
Ago-21	4.2444
Set-21	4.2293
Oct-21	4.4355
Nov-21	4.4295
Dic-21	4.3319
Ene-22	4.4343
Feb-22	4.5093
Mar-22	4.6437
Abr-22	4.619
May-22	4.2469
Jun-22	4.0974
Jul-22	3.4155
Ago-22	3.5595
Set-22	

Nota: se detalla los precios de Cu en (\$/Lb) desde enero 2020 hasta agosto de 2022 (Cochilco, 2022).

Figura 13

Gráfico de dispersión de precios mensuales de Cu (\$/Lb)



Nota: en el gráfico se logra verificar que en el mes de mayo de 2021 el precio de cobre “Cu” fue mucho mayor en comparación a los demás meses.

Se va a usar un promedio móvil de tres meses ($k=3$) para pronosticar el precio del cobre en los meses de abril 2020 y setiembre 2022.

Para calcular \hat{y} se usa la ecuación (49).

$$\hat{y}_4 = \frac{(y_3 + y_2 + y_1)}{3} \quad (49)$$

$$\hat{y}_4 = \frac{(y_3 + y_2 + y_1)}{3} = \frac{(2.349 + 2.5793 + 2.7439)}{3} = 2.5574 \text{ $/lb}$$

El error de pronóstico se calcula con la ecuación (50).

$$e_4 = y_4 - \hat{y}_4 \quad (50)$$

$$e_4 = y_4 - \hat{y}_4 = 2.2898 - 2.5574 = -0.2676 \text{ $/lb}$$

Luego se realiza el pronóstico para todos los meses, y es importante encontrar el pronóstico del mes 33 que es setiembre de 2022.

Tabla 5

Pronósticos de precios mensuales de Cu (\$/lb)

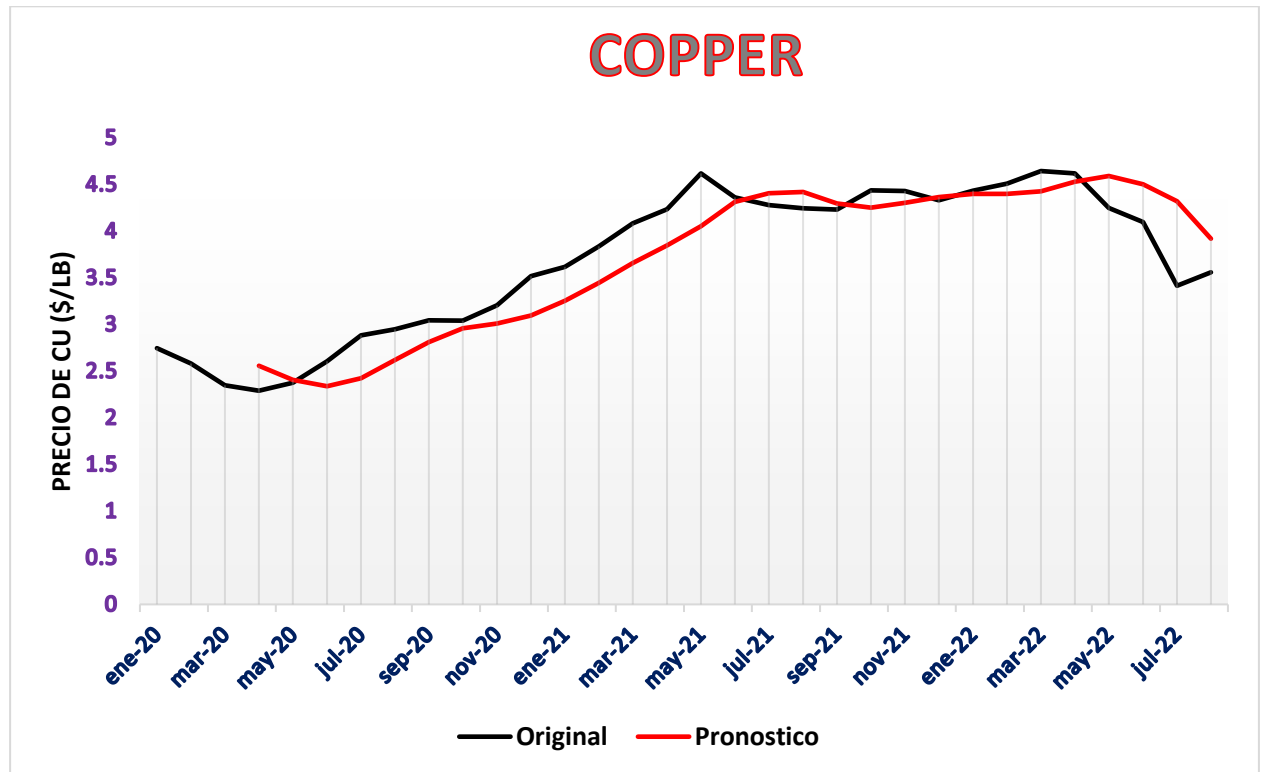
Fecha	Cu (\$/Lb)	Pronostico (\$/Lb)
Ene-20	2.7439	
Feb-20	2.5793	
Mar-20	2.349	
Abr-20	2.2898	2.5574
May-20	2.374	2.40603333
Jun-20	2.6047	2.3376
Jul-20	2.882	2.42283333
Ago-20	2.9469	2.62023333
Set-20	3.0447	2.8112
Oct-20	3.0403	2.95786667
Nov-20	3.2039	3.01063333
Dic-20	3.5177	3.0963
Ene-21	3.6154	3.25396667
Feb-21	3.8375	3.44566667
Mar-21	4.0846	3.65686667

Abr-21	4.2345	3.84583333
May-21	4.6194	4.0522
Jun-21	4.3601	4.31283333
Jul-21	4.279	4.40466667
Ago-21	4.2444	4.4195
Set-21	4.2293	4.2945
Oct-21	4.4355	4.2509
Nov-21	4.4295	4.30306667
Dic-21	4.3319	4.36476667
Ene-22	4.4343	4.39896667
Feb-22	4.5093	4.39856667
Mar-22	4.6437	4.42516667
Abr-22	4.619	4.5291
May-22	4.2469	4.59066667
Jun-22	4.0974	4.5032
Jul-22	3.4155	4.3211
Ago-22	3.5595	3.91993333
Set-22		3.6908

Nota: el precio de cobre “Cu” pronosticado para el mes de setiembre 2022 de acuerdo con los cálculos realizados es 3.69 \$/Lb.

Figura 14

Gráfico de dispersión de precios de Cu (\$/lb) Vs pronóstico de precios de Cu (\$/lb)



Nota: la línea de color rojo son las leyes de cobre pronosticadas para el cada mes de acuerdo a cálculos realizados cada trimestre (3 meses).

Para encontrar el error cuadrático medio de la raíz (RMSE) se usa la ecuación (36).

$$RMSE = 0.305702$$

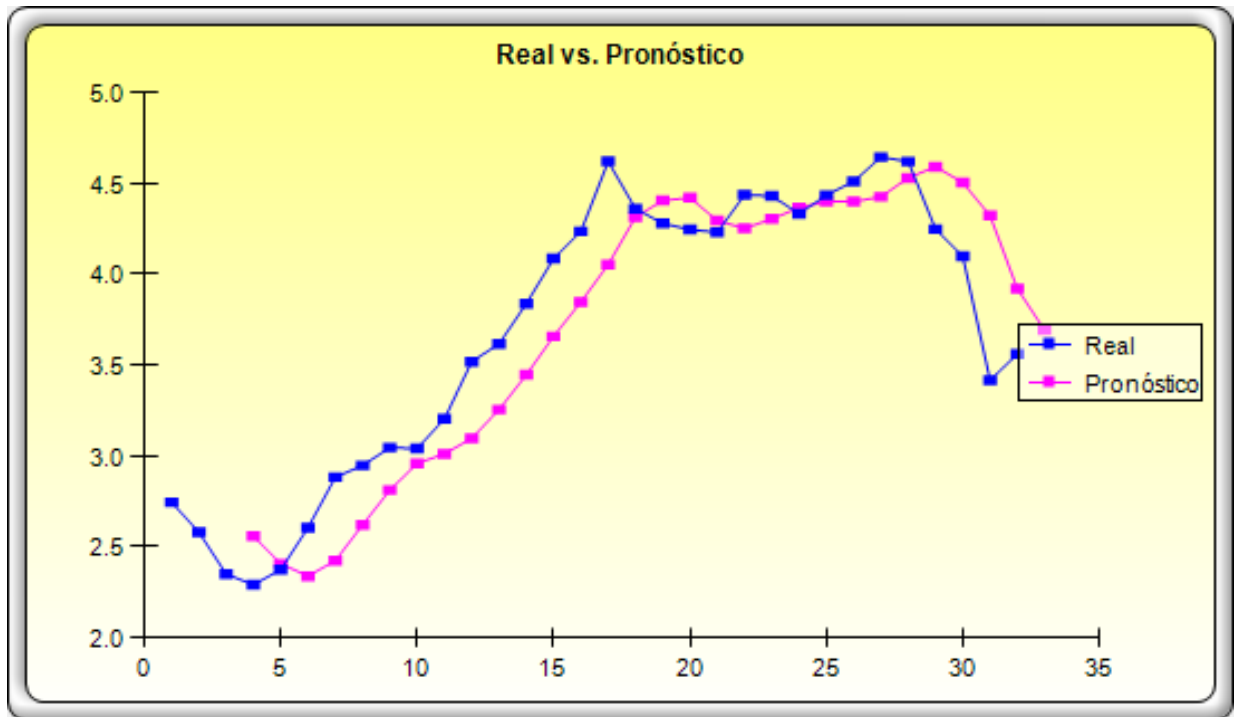
Como se puede observar en la **Figura 14**, el pronóstico de los precios de Cu (\$/lb) se asemeja a la realidad. Así mismo el RMSE dio como resultado 0.305702 lo que indica que estos precios de pronóstico se pueden ajustar fácilmente a los precios reales de Cu (\$/lb).

Así mismo se realizó el análisis de pronóstico del precio de Cu (\$/lb) del mes de setiembre de 2022 mediante el simulador de riesgos.

Nos da como resultado la siguiente gráfica:

Figura 15

Gráfico de Valor Real vs Pronostico en Risk Simulator de Excel



Nota: la gráfica fue realizada en el simulador de riesgos de Excel (Risk Simulator), indica lo similar a la

Figura 14.

1.3.6.2. Pronostico mediante el promedio móvil

Se presenta información sobre la compañía minera Minsur, los cuales son sobre producción de Sn (Ton), Au (Oz).

Tabla 6

Información de finos de la compañía minera Minsur

Trimestre	Finos de Au (Oz)	Finos de Sn (ton)	Finos de Sn (ton) Pisco
	Pucamarca	San Rafael	
Enero-marzo 2019	33517	4274	4354
Abril-junio 2019	27634	4573	5014
Julio-Setiembre 2019	24956	5114	5182
Octubre-diciembre 2019	19551	4828	5023
Enero-marzo 2020	29009	4017	3580
Abril-junio 2020	23295	4794	4727
Julio-Setiembre 2020	23123	4844	4991
Octubre-diciembre 2020	24583	4136	4735
Enero-marzo 2021	24159	4062	3483
Abril-junio 2021	25484	4818	5170
Julio-Setiembre 2021	24405	4877	4801
Octubre-diciembre 2021	29251	4843	4886
Enero-marzo 2022	23333	4157	3680
Abril-junio 2022	27540	4520	4570
Julio-Setiembre 2022			
Promedio	25703	4561	4585

Nota: Au (Oz)= Onzas de oro; Sn (Ton) = Toneladas de Estaño

Finos de Estaño de la planta de Refinación de Pisco de enero del 2019 a setiembre del 2022.

Tabla 7

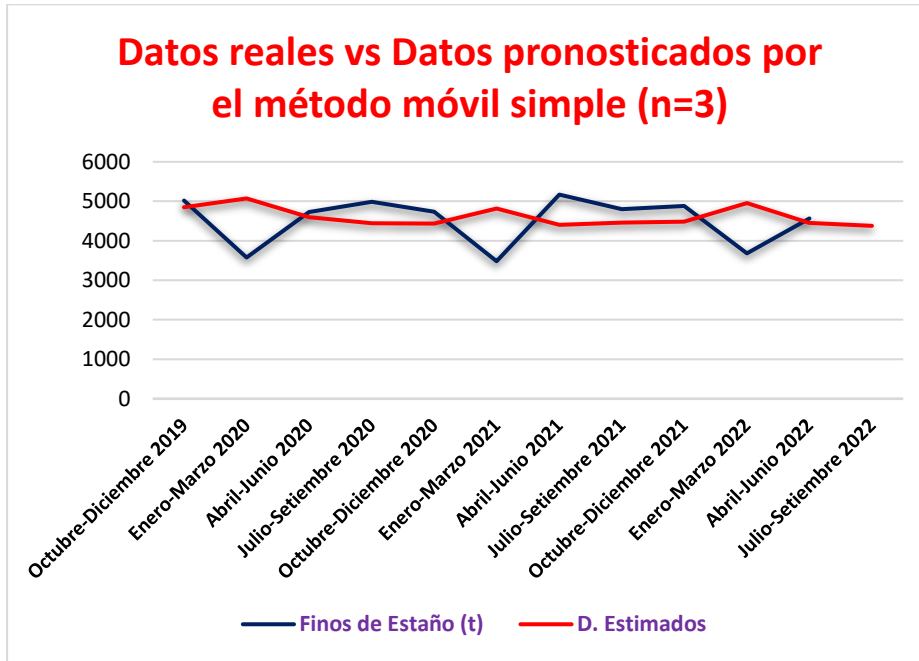
Finos de Sn (ton) Pisco

Trimestre	Finos de Sn(ton) Pisco	Tres Trimestres			Seis Trimestres			Nueve Trimestres		
		D. estimados	Error	Error Abs.	D. Estimados	Error	Error Abs.	D. estimados	Error	Error Abs.
Enero-marzo 2019	4354									
Abril-junio 2019	5014									
Julio-Setiembre 2019	5182									
Octubre-diciembre 2019	5023	4850	173	173						
Enero-marzo 2020	3580	5073	-1493	1493						
Abril-junio 2020	4727	4595	132	132						
Julio-Setiembre 2020	4991	4443	548	548	4647	344	344			
Octubre-diciembre 2020	4735	4433	302	302	4753	-18	18			
Enero-marzo 2021	3483	4818	-1335	1335	4706	-1223	1223			
Abril-junio 2021	5170	4403	767	767	4423	747	747	4565	605	605
Julio-Setiembre 2021	4801	4463	338	338	4448	353	353	4656	145	145
Octubre-diciembre 2021	4886	4485	401	401	4651	235	235	4632	254	254
Enero-marzo 2022	3680	4952	-1272	1272	4678	-998	998	4600	-920	920
Abril-junio 2022	4570	4456	114	114	4459	111	111	4450	120	120
Julio-Setiembre 2022		4379			4432			4560		
RMSE				680			473			296

Nota: D. estimados = Datos estimados; Error Abs. = Error Absoluto; RMSE= Error Cuadrático Medio de Raíz.

Figura 16

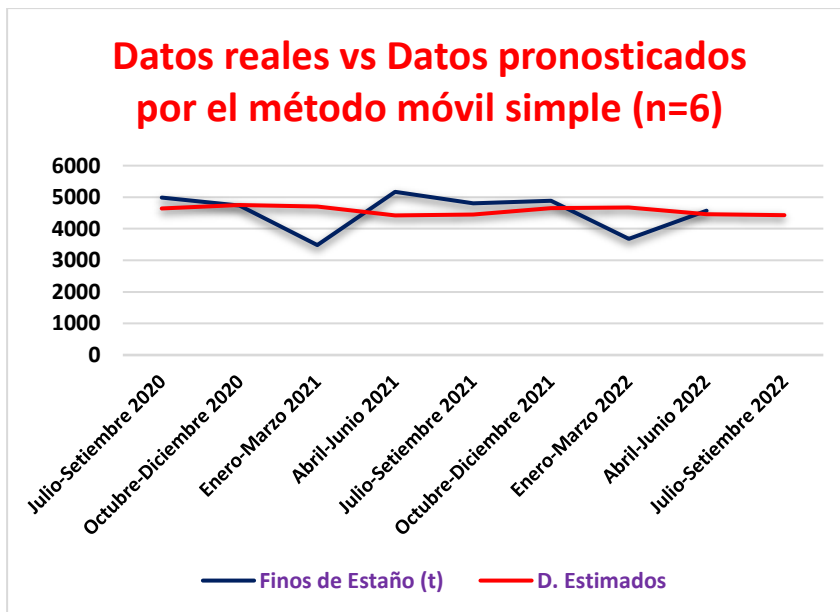
Gráfico de dispersión de datos reales vs datos pronosticados (n=3)



Nota: n=3 indica que se realizó un pronóstico de finos de Sn(ton) de Pisco en forma de 3 trimestres.

Figura 17

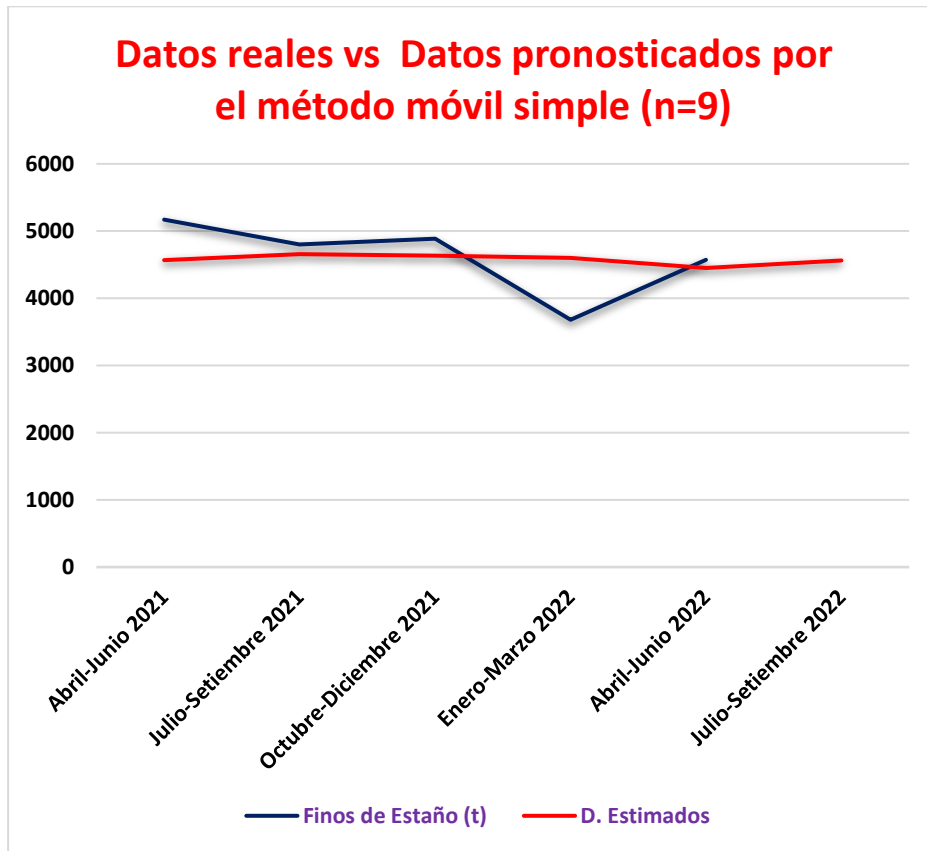
Gráfico de dispersión de datos reales vs datos pronosticados (n=6)



Nota: n=6 indica que se realizó un pronóstico de finos de Sn(ton) de Pisco en forma de 6 trimestres.

Figura 18

Gráfico de dispersión de datos reales vs datos pronosticados (n=9)



Nota: n=9 indica que se realizó un pronóstico de finos de Sn(ton) de Pisco en forma de 9 trimestres.

Finos de Oro de la planta de Refinación de Pucamarca de enero del 2019 a setiembre del 2022.

Tabla 8

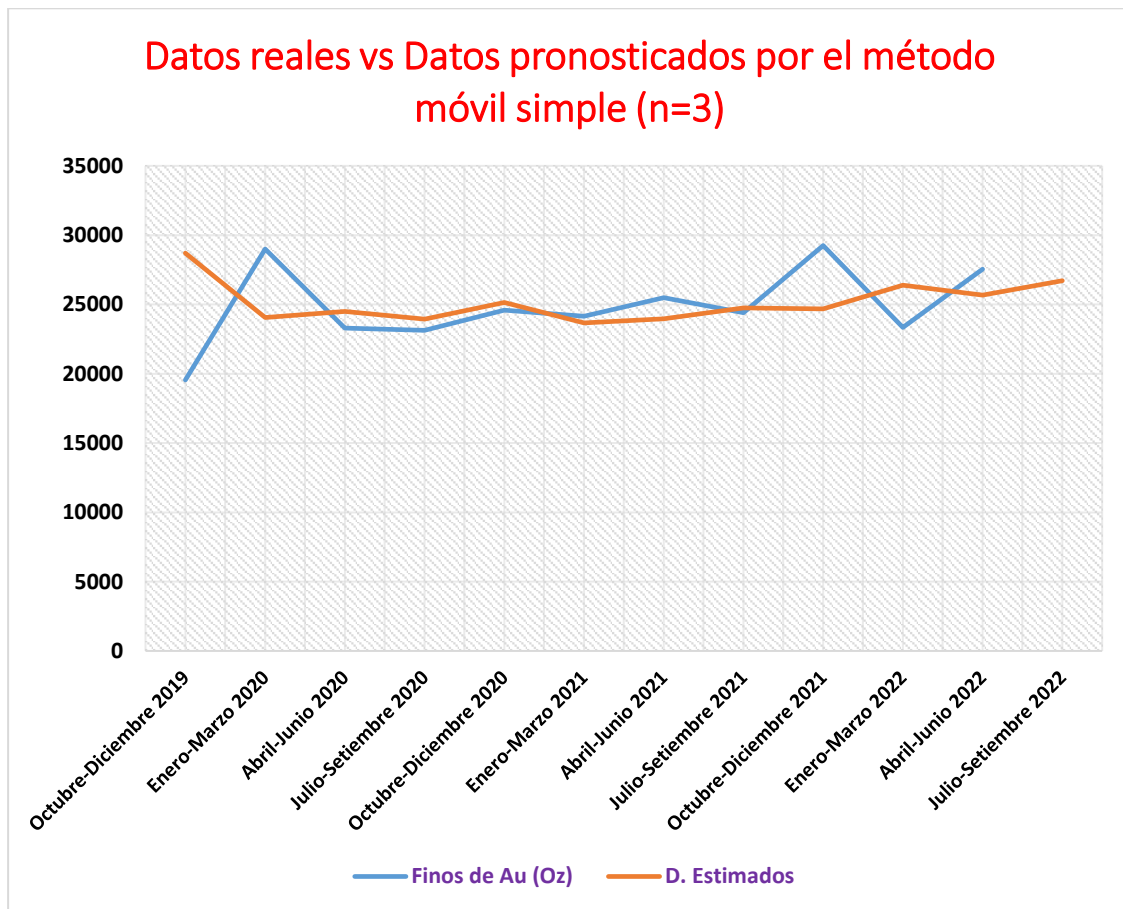
Finos de Au (Oz) de Pucamarca

Trimestre	Finos de Au (Oz) Pucamarca	tres Trimestres			Seis Trimestres			Nueve Trimestres		
		D. estimado	Error	Error Abs.	D. Estimado	Error	Error Abs.	D. estimados	Error	Error abs.
Enero-marzo 2019	33517									
Abril-junio 2019	27634									
Julio-Setiembre 2019	24956									
Octubre-diciembre 2019	19551	28702	-9151	9151						
Enero-marzo 2020	29009	24047	4962	4962						
Abril-junio 2020	23295	24505	-1210	1210						
Julio-Setiembre 2020	23123	23952	-829	829	26327	-3204	3204			
Octubre-diciembre 2020	24583	25142	-559	559	24595	-12	12			
Enero-marzo 2021	24159	23667	492	492	24086	73	73			
Abril-junio 2021	25484	23955	1529	1529	23953	1531	1531	25536	-52	52
Julio-Setiembre 2021	24405	24742	-337	337	24942	-537	537	24644	-239	239
Octubre-diciembre 2021	29251	24683	4568	4568	24175	5076	5076	24285	4966	4966
Enero-marzo 2022	23333	26380	-3047	3047	25168	-1835	1835	24762	-1429	1429
Abril-junio 2022	27540	25663	1877	1877	25203	2338	2338	25182	2358	2358
Julio-Setiembre 2022		26708			25695			25019		
RMSE				3133			1780			1468

Nota: Au (Oz) = Onzas de oro; RMSE= Error Cuadrático Medio de Raíz.

Figura 19

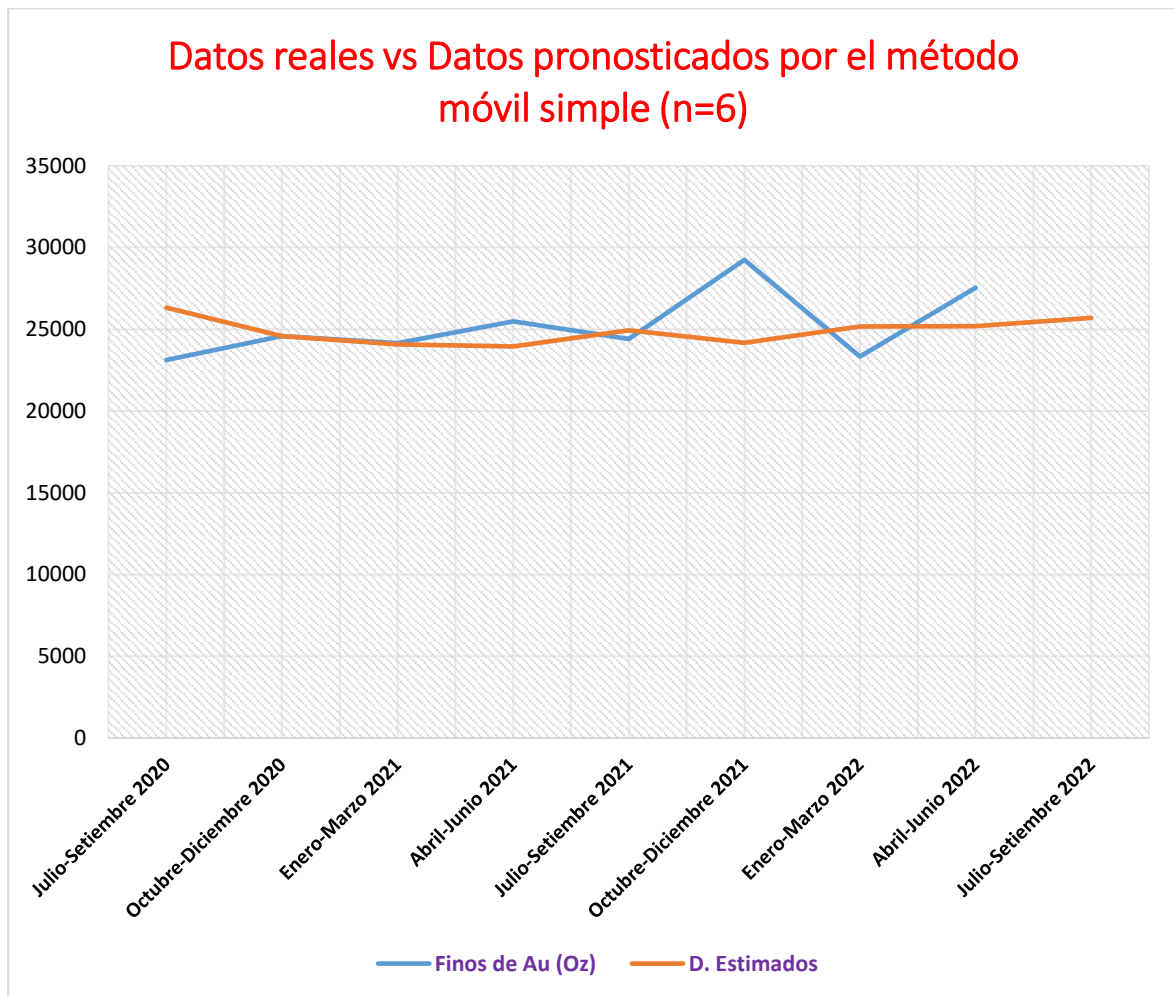
Gráfico de dispersión datos reales vs datos pronosticados de Au(oz) (n=3)



Nota: n=3 indica que se realizó un pronóstico de finos de Au(oz) de Pucamarca en forma de 3 trimestres.

Figura 20

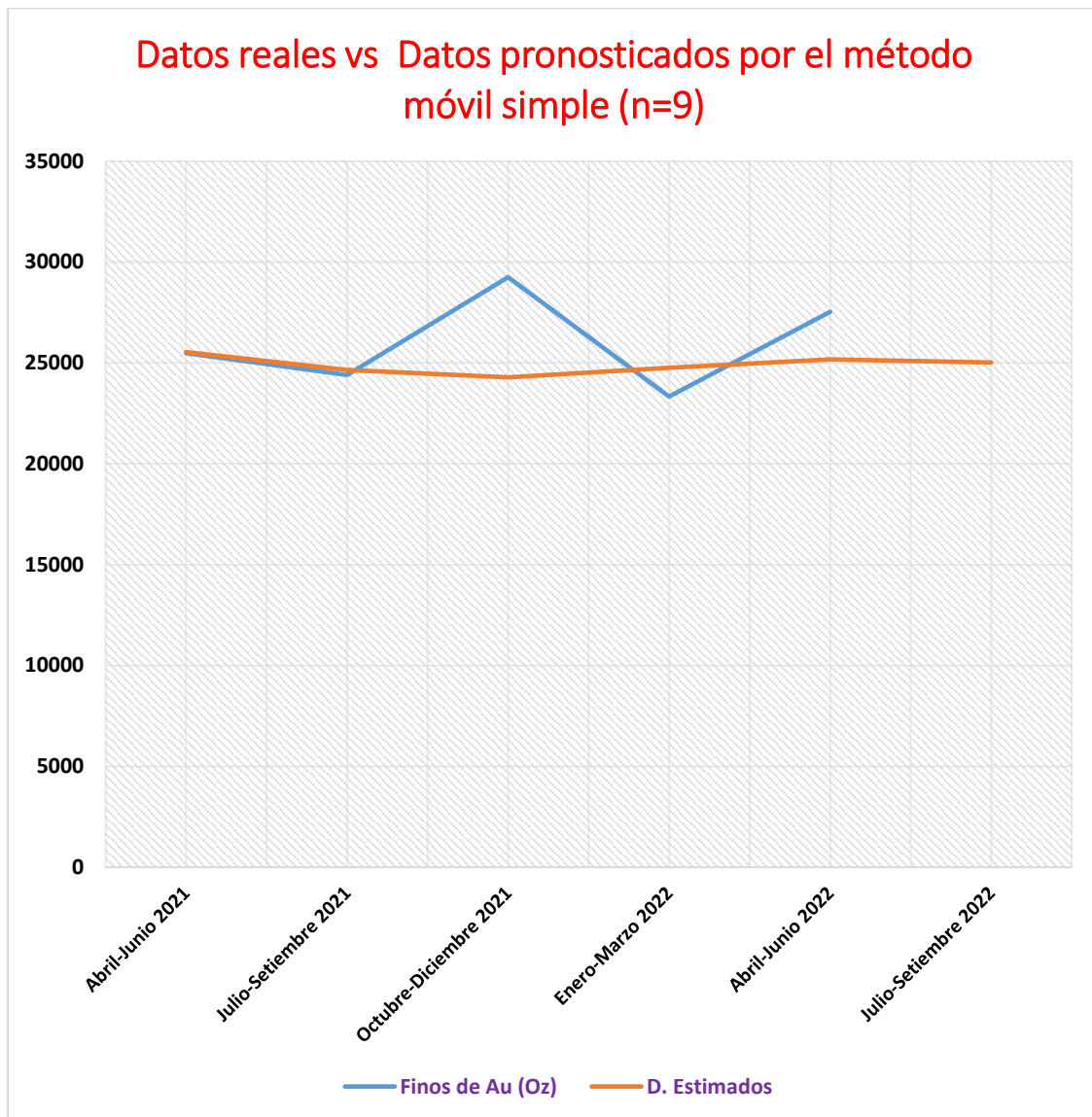
Gráfico de datos reales vs datos pronosticados de Au(oz) (n=6)



Nota: n=6 indica que se realizó un pronóstico de finos de Au(oz) de Pucamarca en forma de 6 trimestres.

Figura 21

Gráfico de datos reales vs datos pronosticados de Au(oz) (n=9)



Nota: n=9 indica que se realizó un pronóstico de finos de Au(oz) de Pucamarca en forma de 9 trimestres.

Finos de Estaño de la planta de Refinación de San Rafael de enero del 2019 a setiembre del 2022.

Tabla 9

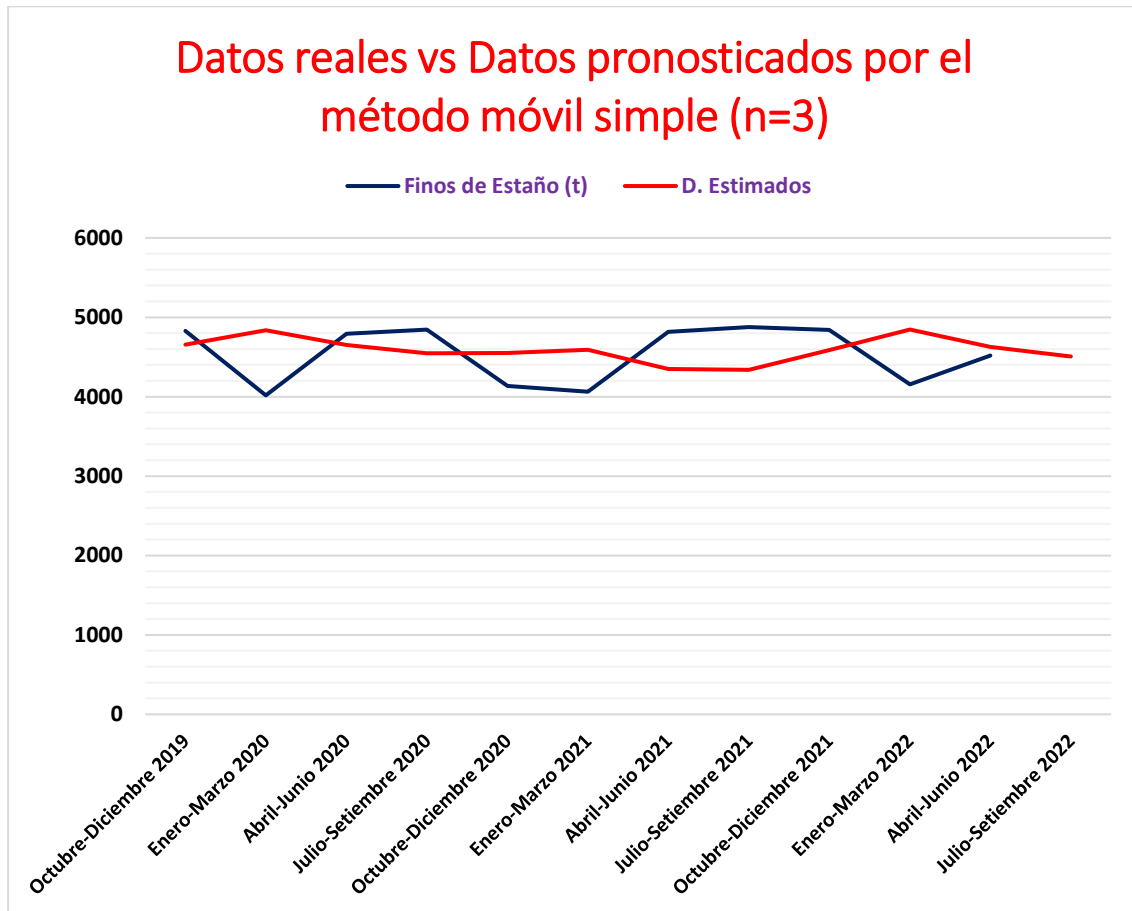
Finos de Sn (ton) San Rafael

Trimestre	Finos de Estaño (Sn) (ton)	Tres Trimestres			Seis Trimestres			Nueve Trimestres		
		D. estimado	Error	Error Abs.	D. Estimado	Error	Error Abs.	D. estimado	Error	Error Abs.
Enero-Marzo 2019	4274									
Abril-Junio 2019	4573									
Julio-Setiembre 2019	5114									
Octubre-Diciembre 2019	4828	4654	174	174						
Enero-Marzo 2020	4017	4838	-821	821						
Abril-Junio 2020	4794	4653	141	141						
Julio-Setiembre 2020	4844	4546	298	298	4600	244	244			
Octubre-Diciembre 2020	4136	4552	-416	416	4695	-559	559			
Enero-Marzo 2021	4062	4591	-529	529	4622	-560	560			
Abril-Junio 2021	4818	4347	471	471	4447	371	371	4516	302	302
Julio-Setiembre 2021	4877	4339	538	538	4445	432	432	4576	301	301
Octubre-Diciembre 2021	4843	4586	257	257	4589	255	255	4610	233	233
Enero-Marzo 2022	4157	4846	-689	689	4597	-440	440	4580	-423	423
Abril-Junio 2022	4520	4626	-106	106	4482	38	38	4505	15	15
Julio-Setiembre 2022		4507			4546			4561		
RMSE				394			291			166

Nota: Sn (Ton)= fino de estaño en toneladas; RMSE= Error Cuadrático Medio de Raíz.

Figura 22

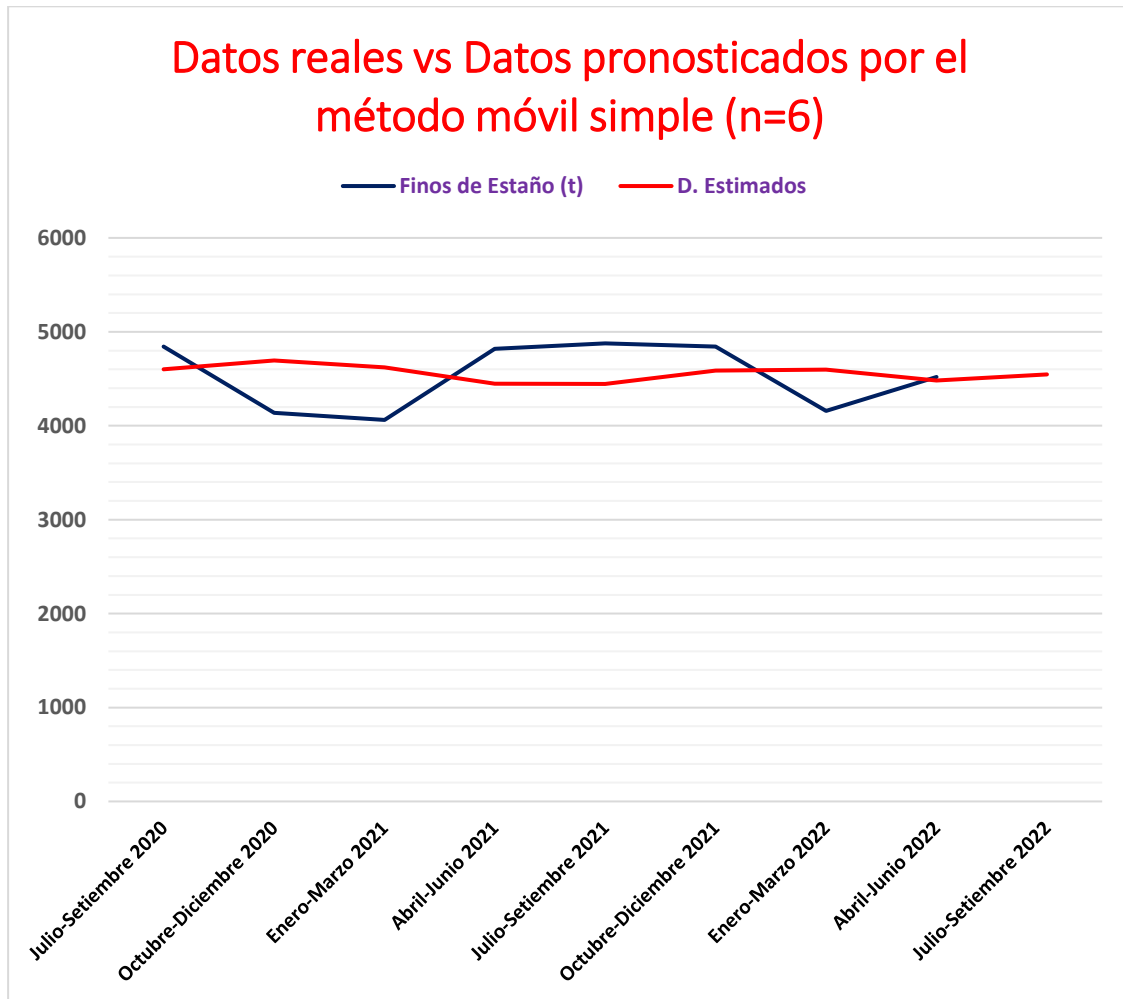
Gráfico de dispersión datos reales vs datos pronosticados Sn (Ton) (n=3)



Nota: n=3 indica que se realizó un pronóstico de finos de Sn(ton) de San Rafael en forma de 3 trimestres.

Figura 23

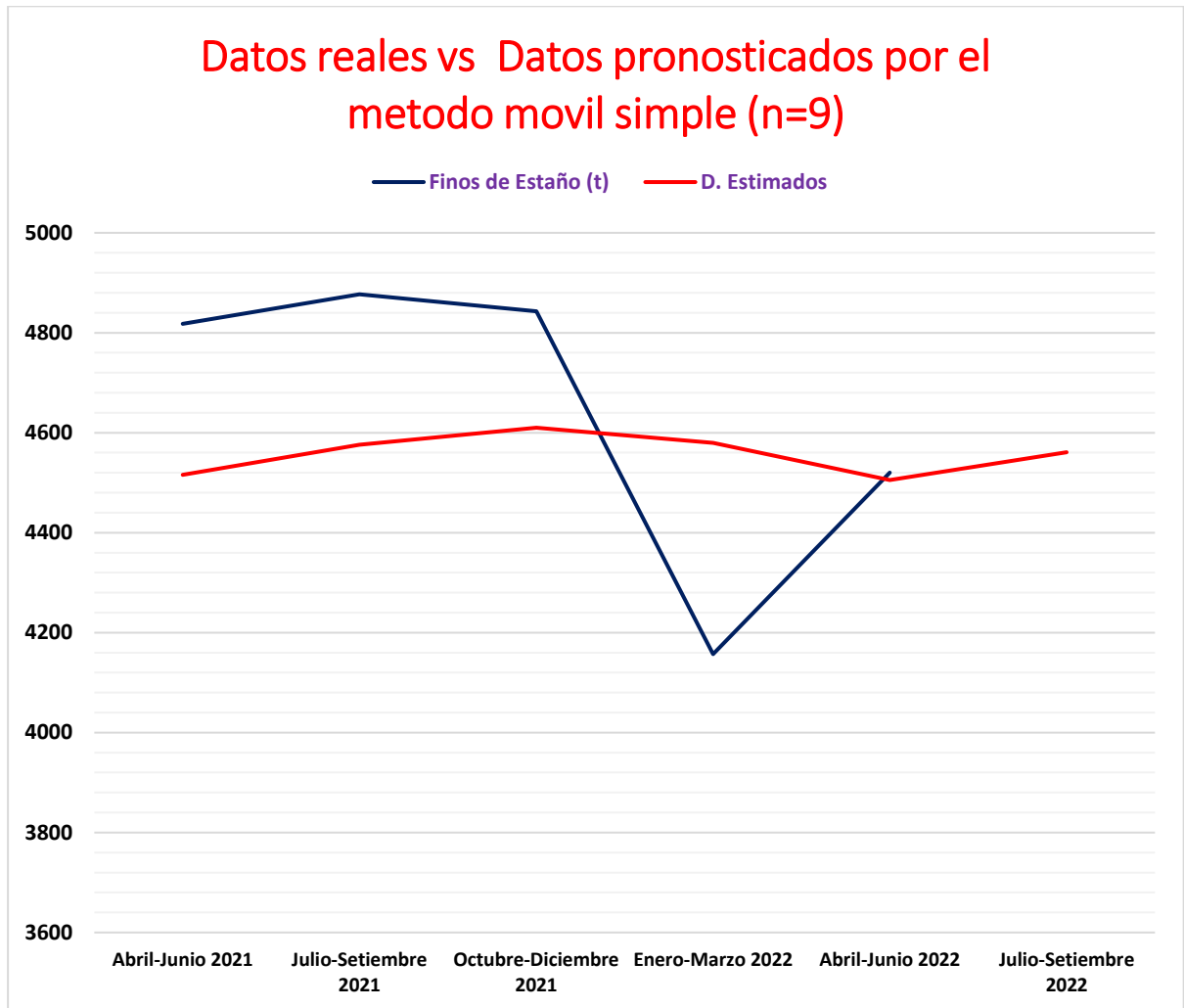
Gráfico de dispersión datos reales vs datos pronosticados Sn (Ton) (n=6)



Nota: n=6 indica que se realizó un pronóstico de finos de Sn(ton) de San Rafael en forma de 6 trimestres.

Figura 24

Gráfico de dispersión datos reales vs datos pronosticados Sn (Ton) (n=9)



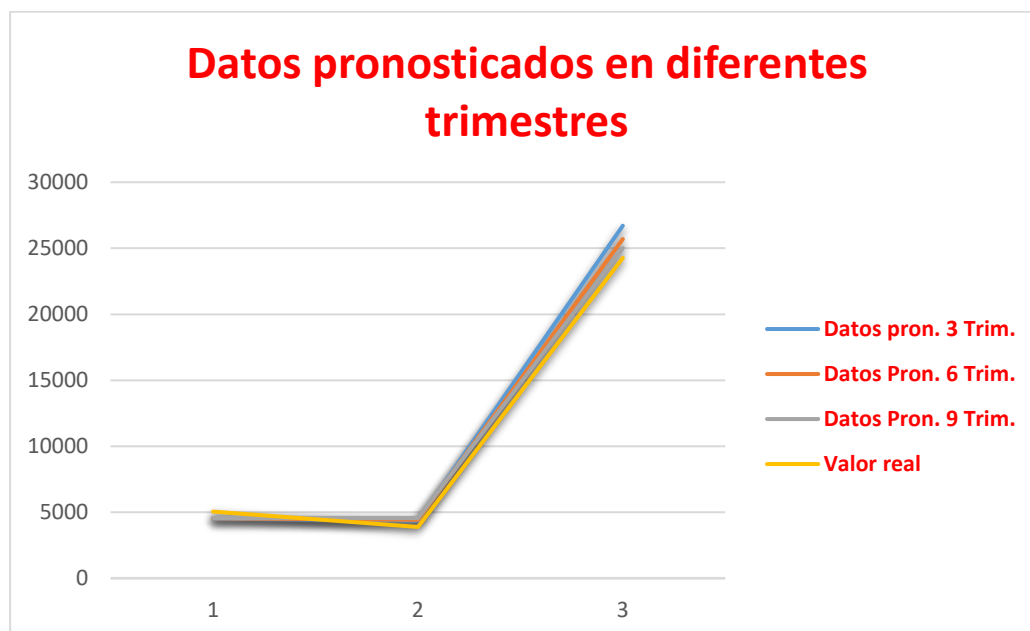
Nota: n=9 indica que se realizó un pronóstico de finos de Sn(ton) de San Rafael en forma de 9 trimestres.

Comparación de los datos pronosticados de las diferentes unidades mineras y a determinados trimestres. Véase en la **Tabla 10**.

Tabla 10*Datos pronosticados de las unidades mineras*

	Valor real	Dato Pron. De 3 Trimestres	Dato Pron. De 6 trimestres	Datos Pron. De 9 trimestres
Finos de Estaño(ton)- San Rafael	5045	4507	4546	4561
Finos de Estaño (ton)- Pisco	3888	4379	4432	4560
Finos de oro (oz)- Pucamarca	24270	26708	25695	25019

Nota: se observan los datos pronosticados de 3 trimestres, 6 trimestres y 9 trimestres de los finos de Estaño (ton) de San Rafael, finos de Estaño (ton) de Pisco y Finos de oro (oz) de Pucamarca.

Figura 25*Gráfico dispersión de datos pronosticados vs valor real de todos los trimestres*

Nota: la línea de azul es de datos pronosticados de 3 trimestres, la naranja de 6 trimestres, la de color plomo es de 9 trimestres y la amarilla es de valor real de los finos de los metales.

1.3.6.2.1. Resultados

Este pronóstico está basado en un promedio móvil simple de un determinado número de datos del pasado y trabaja mejor con mayor número de datos. Para este caso se concluye que trabajar con promedios de 09 trimestres (27 meses) se logra ajustar de manera adecuada.

Se observa que el promedio móvil calculado para 09 trimestres se aproxima más a los valores reales si lo comparamos con el error absoluto del promedio móvil para 03 trimestres. Por tanto, se concluye que mientras se trabaje con promedios móviles que contemplen periodos más pequeños la aproximación será más cercana al valor real.

El presente modelo de pronóstico tiene un potencial pobre para identificar puntos de cambio de tendencia, esto sumado a que trabaja mejor con periodo más cortos y el necesitar mayor cantidad de datos, lo limitan a la posibilidad de tener un buen potencial únicamente en el corto plazo.

2. Riesgo financiero

2.1. ¿Qué es el riesgo?

El riesgo tiene dos componentes:

- Volatilidad, asociado a la probabilidad de que un riesgo cambie variables en un porcentaje dado.
- La sensibilidad o exposición que tiene el proyecto con respecto a esa variable riesgosa.

2.2. Proceso de análisis de riesgo y toma de decisiones.

El análisis de riesgo es una herramienta fundamental para apoyar la toma de decisiones.

El análisis de riesgos es un proceso, por ejemplo, en aplicaciones financieras:

- Definición del problema.
- Identificación de alternativas.
- Desarrollo de un modelo de decisión.
- Cuantificación de la incertidumbre.
- Desarrollo del modelo de valoración.
- Cálculo del VAN y probabilidad de ocurrencia.
- Reformulación del problema.
- Implementación de la mejor alternativa.
- Post-evaluación.

2.3. Pruebas de normalidad

Hay dos enfoques:

- Grafica (vía Q-Q plots o similar)
- Pruebas formales (que siempre se prefieren).

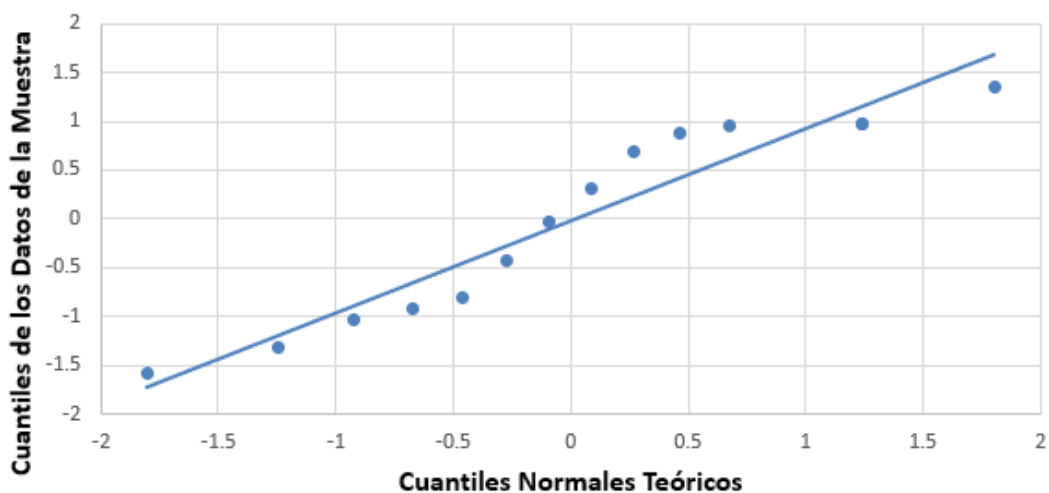
Hay varios métodos:

- Jarque Bera.
- Lilliefors.
- Shappiro-Wilk.
- Kolmogorov-Smirnov.

Para todos ellos la hipótesis nula es que la distribución es normal (esto es importante para interpretar los resultados)

Figura 26

Gráfico Q-Q plot



Nota: el grafico Q-Q plot es un gráfico cuantil-cuantil (Automate Excel.com, 2022)

2.3.1. Prueba de normalidad de Jarque-Bera

Estadístico de Jarque-Bera:

$$JB = \frac{n}{6} \left(S^2 + \frac{1}{4} (K - 3)^2 \right) \quad (51)$$

Donde:

n: El número de observaciones en la muestra.

S: La asimetría de la muestra.

C: La curtosis de muestra.

Hipótesis nula de la prueba:

Articulación: la asimetría es cero, el exceso de curtosis es cero.

2.3.1.1.1. Ejercicio de prueba de normalidad de Jarque-Bera

Tengo los siguientes datos de precio de cobre (\$/lb) desde el 01 de agosto 2022 hasta el 10 de agosto de 2022.

Tabla 11*Datos de precio de Cobre (\$/lb)*

Fechas	CU (\$/lb)
1/08/2022	3.5972
2/08/2022	3.5466
3/08/2022	3.5262
4/08/2022	3.4664
5/08/2022	3.5519
8/08/2022	3.5539
9/08/2022	3.6158
10/08/2022	3.6179

Nota: CU (\$/lb) = precio del cobre en dólares por libra.

Tabla 12*Resultados de prueba de normalidad de Jarque-Bera (JB)*

Observaciones	(n)	8
Asimetría de la muestra	(S)	-0.604
Ejemplo curtosis	(C)	0.269
JB (Prueba de normalidad)	JB	0.511
P de la prueba		0.775

Nota: n = observaciones; S = asimetría de la muestra; JB = prueba de normalidad Jarque-Bera.

El valor “p” de la prueba es 0.775. dado que este valor p no es menor que 0.05, no rechazamos la hipótesis nula. No tenemos evidencia suficiente para decir que el conjunto de datos no se distribuye normalmente.

2.3.2. Prueba de normalidad de Kolmogórov-Smirnov

Compara los valores empíricos contra una distribución específica usando la estadística $D_n = \sup |F_n(x) - F(x)|$. Si son iguales entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 0$.

Usando propiedades teóricas de la estadística se compara de nuevo los valores críticos de una distribución.

2.3.3. Prueba de normalidad de Lilliefors

La hipótesis nula se refiere a los datos que provienen de una distribución normal sin especificar la media y varianza (Varianza de Kolmogórov-Smirnov).

2.3.4. Prueba de Shapiro-Wilk

La hipótesis nula así que la muestra proviene de una población normal.

2.4. Series temporales estacionarias y no estacionarias

Una variable de serie de tiempo, x_t , es estacionario si:

- La media de x_t es constante en el tiempo.
- La varianza de x_t es constante en el tiempo.
- El coeficiente de correlación simple entre x_t y x_{t-1} depende de la longitud de retardo (k) pero de ninguna otra variable (para todo k).

Si una o más de estas propiedades no se cumplen entonces x_t es no estacionario.

Si una serie no es estacionaria, a menudo se hace referencia a ese problema como no estacionariedad.

Para obtener una mejor comprensión de esos temas considere el caso donde y_t es generada por una ecuación que incluye solo valores pasados de si misma (una ecuación autorregresiva):

$$Y_t = \gamma Y_{t-1} + v_t \quad (52)$$

Donde v_t es un término de error clásico.

2.4.1. *Escala de tiempo utilizada*

Otra cosa importante para considerar es la escala estando acostumbrado a las medidas:

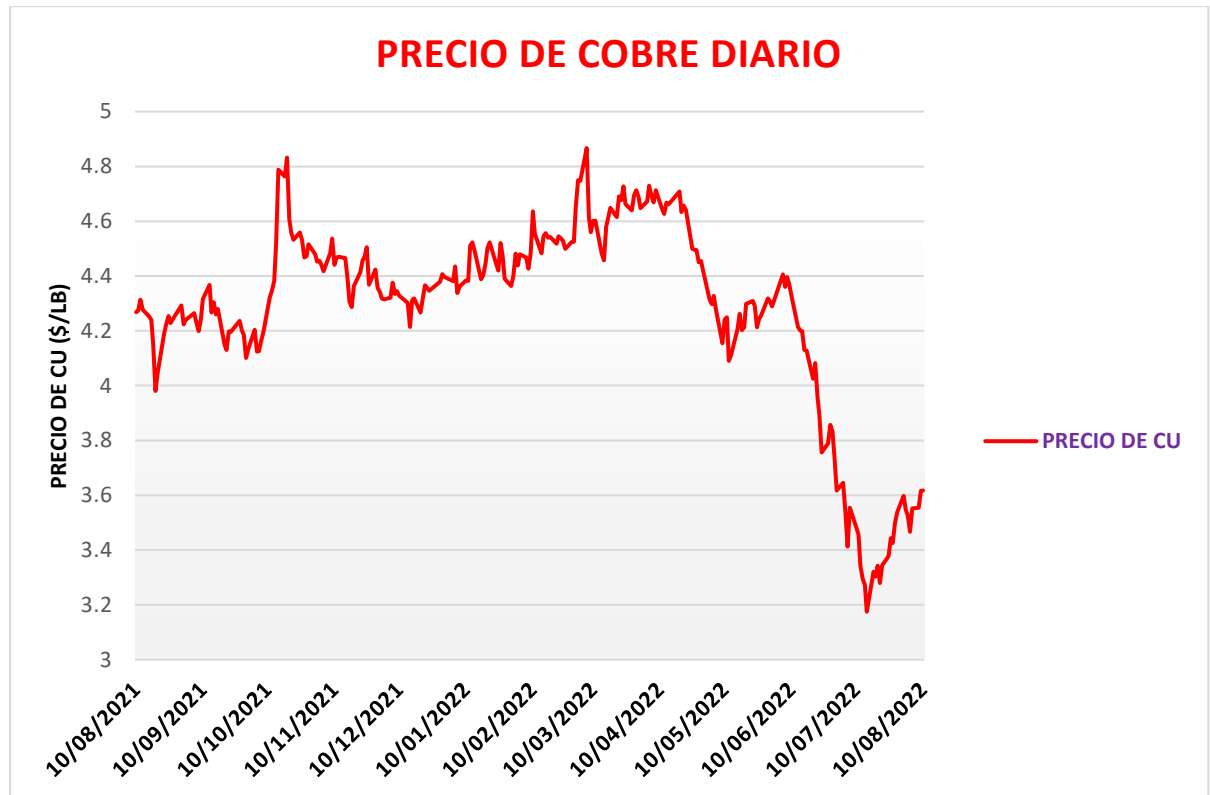
- Diario es más denso que semanal.
- Semanal es más denso que mensual.
- Mensual es más denso que anual.
- La elección de la escala afecta la variabilidad (volatilidad) de la serie.
- Las escalas agregadas sufren menos variabilidad local.

2.4.1.1. Ejemplo de escala de tiempo utilizada

Se muestran las gráficas de los precios de cobre (\$/lb) en los diferentes aspectos (diario, mensuales y anuales).

Figura 27

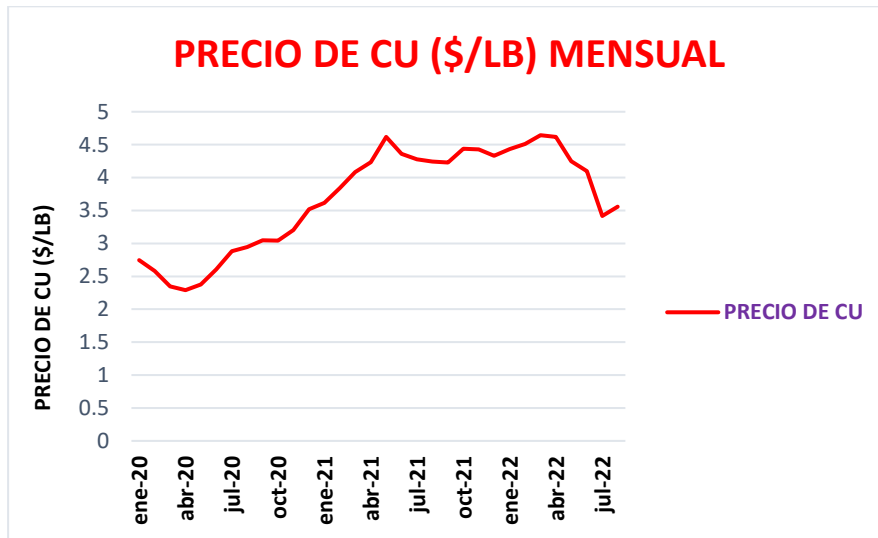
Gráfico de dispersión de precio de Cu (diario)



Nota: el precio del cobre (Cu) está representado en dólares por libra.

Figura 28

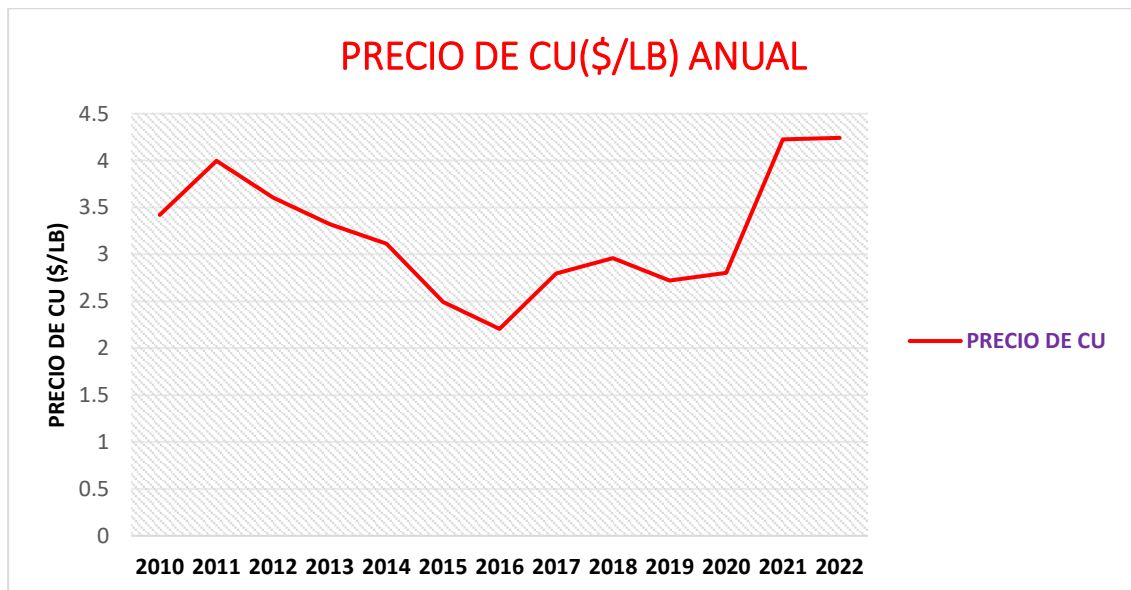
Gráfico de dispersión de precio de Cu (mensual)



Nota: precio del Cu en dólares por libra en un periodo mensual, desde enero de 2020 hasta julio de 2022.

Figura 29

Gráfico de dispersión de precio de Cu (anual)



Nota: precio del Cu en dólares por libra en un periodo anual, desde el año 2010 hasta el año 2022.

2.5. Modelo de volatilidad

- Volatilidad – varianza condicional del proceso.
- No se observa una cantidad directamente (solo una observación en cada momento).
- Características comunes.
- Seriamente no correlacionado, pero es un proceso dependiente.
- Tiende a evolucionar con el tiempo y los saltos son raros.
- Asimétrico en función de los aumentos del mercado o del mercado disminuye.

2.5.1. *Modelo muy básico de volatilidad*

Aunque la volatilidad se considera una desviación estándar, formularemos modelos para la varianza y luego tomaremos raíces cuadradas.

Varianza móvil: r_t es el exceso de retorno:

$$\bar{\sigma}_t^2 = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N r_{t-j}^2 \quad (53)$$

- Todas las observaciones de $t-N$ a t tienen el mismo peso.
- Todas las observaciones antes de $t-N$ no tienen peso.
- La elección de N se deja al comerciante.

2.5.2. *Modelo suavizado exponencial*

Una vez que se conoce y se proporciona una varianza inicial, como la de las primeras observaciones, entonces todas las varianzas pueden calcularse simplemente usando algo como una hoja de cálculo.

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_t^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2 \quad (54)$$

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda) \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} r_{t-j}^2 \quad (55)$$

Un modelo de varianza móvil con pesos decrecientes, sin punto de truncamiento y fijo. Este modelo predice que todas las variaciones futuras serán las mismas que las variaciones actuales.

Considere un proceso $r(t)$ donde:

$$r(t) = \mu(t) + a(t) \quad (56)$$

$$\mu(t) = E(r(t) | F(t-1)) \quad (57)$$

$$\mu(t) = \phi_0 + \sum_{j=1}^p \phi_j r(t-j) + \sum_{k=1}^q \phi_k a(t-k) \quad (58)$$

Donde la media condicional evoluciona como un proceso:

$$\sigma^2(t) = Var(r(t) | F(t-1)) \quad (59)$$

2.5.3. *Modelo de la volatilidad*

La evolución de la varianza condicional sigue al básico conjunto de modelos:

- La evolución viene dada por una ecuación fija (ARCH, GARCH...)
- La evolución está impulsada por una ecuación estocástica (modelos estocásticos de volatilidad).

Notación:

- $a(t)$: es el shock o rendimiento corregido por la media.
- $\alpha(t)$ es la raíz cuadrada positiva de la volatilidad.

2.5.4. *Modelo de ARCH*

La ecuación que define la evolución de la volatilidad (varianza condicional) es un proceso AR(m).

$$a(t) = \sigma(t)\varepsilon(t) \quad (60)$$

$$\sigma^2(t) = \alpha_0 + \alpha_1 a^2(t-1) + \dots + \alpha_m a^2(t-m) \quad (61)$$

2.5.4.1. **Propiedades básicas de ARCH**

La media incondicional es cero:

$$E[a(t)] = E[a(t) | F(t-1)] = 0 \quad (62)$$

Varianza incondicional:

$$\text{Var}[a(t)] = \text{Var}[E(a(t)|F(t-1))] + E[\text{Var}(a(t)|F(t-1))] \quad (63)$$

Los momentos de orden superior conducen a restricciones adicionales en la γ y Los cuartos momentos positivos finitos (siempre es el caso) requieren 0.

$$0 \leq \alpha_1^2 < \frac{1}{3} \quad (64)$$

Las condiciones del momento se vuelven más difíciles a medida que aumenta el orden.

Nota: en general, la curtosis para $a(t)$ es mayor que 3, incluso si el modelo ARCH se construye a partir de variables aleatorias normales.

Por lo tanto, las colas son más pesadas y se esperan más "valores atípicos" que "normal"

Generalizar el modelo ARCH incluyendo un componente MA en el modelo para la volatilidad o la varianza condicional.

$$a(t) = \sigma(t)\varepsilon(t) \quad (65)$$

$$\sigma^2(t) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^m \alpha_j a^2(t-j) + \sum_{k=1}^s \beta_k \sigma^2(t-k) \quad (66)$$

2.6. Metodologías para la evaluación de riesgos

2.6.1. *Análisis de sensibilidad*

El análisis de sensibilidad es una herramienta de gestión que permite a las organizaciones predecir los resultados de un proyecto, ayudando a comprender las incertidumbres, las limitaciones y los alcances de un modelo de decisión. También conocido como análisis hipotético, permite determinar cómo los diferentes valores de una variable independiente pueden afectar a una variable dependiente particular.

Existen dos tipos de análisis de sensibilidad:

- Local es una técnica que estudia el impacto de un solo parámetro a la vez en función al costo, manteniendo las variables de manera fija.
- Global en cambio utiliza una muestra global con el pronóstico de explorar el espacio de diseño.

Pero ¿cuál es su importancia en los proyectos? El análisis de sensibilidad es una de las herramientas más utilizadas por los directores de proyectos para predecir los resultados esperados de un proyecto. Añade más flexibilidad al modelo de valoración durante el proceso de análisis y, finalmente, en la presentación ante posibles clientes, inversores o grupos de interés. Existen múltiples beneficios de aplicarlo en la gestión de proyectos.

2.6.1.1. Facilita la toma de decisiones

El análisis de sensibilidad da como resultados pronósticos respaldados por datos. Cuando se consideran todas las variables y se analizan todos los resultados, le resulta más sencillo a la gerencia tomar decisiones de inversión. Por lo tanto, es una herramienta extremadamente útil para la planificación futura de la empresa.

2.6.1.2. Asegura el control de calidad

Con el análisis de la sensibilidad, las compañías pueden determinar aquellos procesos que no están permitiendo la creación de un producto útil e impiden el alcance de objetivos. Determinar aquellos errores a tiempo ayudará a crear mejores productos y a menor tiempo, lo que puede generar en el futuro una mayor diversificación.

2.6.1.3. Mejor asignación de recursos

El análisis de sensibilidad permite identificar las áreas fuertes y débiles de la planificación de un proyecto, a su vez que mide su posible impacto en los resultados. Esto permite a las organizaciones dirigir los recursos a las variables que más apoyo necesitan.

El análisis de sensibilidad permite a las empresas pronosticar el éxito o fracaso de un proyecto utilizando datos confiables y certeros. Al estudiar todas las variables y los posibles resultados, los directores de proyectos pueden tomar mejores decisiones respecto al proyecto, el negocio o las inversiones.

2.6.2. Caso aplicativo en minería de análisis de sensibilidad

La empresa minera la ARENA tiene en mente realizar un proyecto minero en la cual se denomina proyecto minero (A), el proyecto cuenta con la siguiente información mostrada en la **Tabla 13**, se quiere conocer si el proyecto va a ser factible realizarlo, la cual se quiere calcular el VPN de dicho proyecto.

Se tiene como hipótesis, si el VPN es negativo el proyecto no será factible, y si el VPN es positivo el VPN será factible realizarlo.

Tabla 13

Parámetros iniciales del proyecto (A)

Proyecto 1: producto "A"	
Inversión Inicial \$	\$50,000
Vida Útil años	4
Producción anual (unidad)	1000

Precio venta \$/Unid (PVU)	\$40.00
con incremento anual	5.0%
Costos variables \$/unidad	\$5.00
con incremento anual	10%
Costos Fijos \$ 1er año	6000
con incremento anual	10%
Impuesto % (final de año)	18%

Nota: PVU = Precio de Venta por Unidad.

Desarrollo:

Se calcula los flujos de caja y el VPN

Tabla 14

Flujos de caja neto de caja

Flujo Neto de Caja					
	año 0	año 1	año 2	año 3	año 4
Inversión Inicial	-\$50,000				
Producción (unidades)		1000	1000	1000	1000
Precio venta (PVU) \$/Unid		\$40	\$42	\$44	\$46
Costo variable \$/unid		\$5	\$5.5	\$6.1	\$6.7
Ingresos por Venta		\$40,000	\$42,000	\$44,100	\$46,305
Costos Variable (-)		\$5,000	\$5,500	\$6,050	\$6,655
Costos Fijos (-)		\$6,000	\$6,600	\$7,260	\$7,986

Depreciación (-)		\$12,500	\$12,500	\$12,500	\$12,500
Utilidad antes Impuestos		\$16,500	\$17,400	\$18,290	\$19,164
Impuestos (-)		\$2,970	\$3,132	\$3,292	\$3,450
Utilidad neta		\$13,530	\$14,268	\$14,998	\$15,714
Depreciación (+)		\$12,500	\$12,500	\$12,500	\$12,500
Flujo neto de caja	-\$50,000	\$26,030	\$26,768	\$27,498	\$28,214

Nota: PVU= Precio de Venta por Unidad; costos variables, costos fijos, depreciación y impuestos son (-) y depreciación es (+).

Tabla 15

Flujo de caja y VAN

Indicadores	
Tasa o coste K_e	20%
TIR ($TIR \geq K_e$)	39%
VAN (≥ 0)	\$19,800

Nota: TIR = Taza Interna de Retorno; VAN = Valor Actual Neto.

Tabla 16

Valores críticos para un VAN (0)

Sensibilidad	Proyecto	Limite	Diferencia
Producción	1000	748	-252
PVU \$/unid	40	31.25	-8.75

Costo V \$/unid	5	13.21	8.21
Costo Fijo	6000	14215.0	8214.97

Nota: PVU = Precio de Venta por Unidad, Costo V = Costo de Venta.

Tabla 17

Análisis unidimensional de las variables

Producción anual (unidad)	VAN
	\$19,800
700	-3731
748	0
850	8035
900	11956
950	15878
1000	19800

Nota: VAN = Valor Actual Neto

Tabla 18*Análisis unidimensional de las variables 1*

Precio venta Unidad (PVU)	VAN
	\$19,800
30	-2822
31.25	0
34	6227
36	10751
38	15276
40	19800
Costo variable \$/unidad	VAN
	\$19,800
5	19800
6	17390
8	12569
10	7749
12	2928
13.21	0
Gastos Fijos \$	VAN

	\$19,800
6000	19800
8000	14980
10000	10159
12000	5339
13000	2928
14215	0

Nota: PVU = Precio de Venta por Unidad; VAN = Valor Actual Neto.

Tabla 19

Análisis bidimensional de las variables (PVU)

PVU	Unidades						
	\$19,800	700	748	850	900	950	1000
	30	-19566	-16911	-11194	-8403	-5613	-2822
	31.25	-17591	-14802	8796	-5864	-2932	0
	34	-13232	-10147	3503	-259	2984	6227
	36	-10065	-6765	343	3813	7282	10751
	38	-6898	-3382	4189	7884	11580	15276
	40	-3731	0	8035	11956	15878	19800

Nota: PVU = Precio de Venta por Unidad (\$).

Tabla 20

Análisis bidimensional de las variables (Costos variables)

	Unidades						
	\$19,800	700	748	850	900	950	1000
costo variable \$/unidad	5	-3731	0	8035	11956	15878	19800
	6	-5418	-1802	5986	9787	13589	17390
	8	-8792	-5405	1888	5449	9009	12569
	10	-12167	-9009	-2209	1110	4430	7749
	12	-15541	-12613	-6306	-3228	-150	2928
	13.21	-17591	-14802	-8796	-5864	-2932	0
	Unidades						
	\$19,800	00	748	850	900	950	1000
gastos Fijos	6000	-3731	0	8035	11956	15878	19800
	8000	-8551	-4821	3214	7136	11058	14980
	10000	-13372	-9641	1606	2315	6237	10159
	12000	-18192	-14462	-6427	-2505	1417	5339
	13000	-20603	-16872	-8837	-4915	-993	2928
	14215.0	-23531	-19800	-11766	-7844	-3922	0

Nota: \$/unidad = dólares la unidad.

2.7. Análisis de escenarios

En análisis de escenarios se tiene como claro modelo el árbol de decisiones, lo cual es un diagrama en forma de árbol que muestra la probabilidad estadística o determina un curso de acción. Muestra a los analistas y, a los que toman las decisiones, que pasos deben tomar y como las diferentes elecciones podrían afectar todo proceso. Todo ello soportado en datos, también nos permite analizar decisiones secuenciales basada en el uso de resultados y probabilidades asociadas.

2.7.1. Partes de un árbol de decisiones

Nodos de decisión:

- Se le representa con un cuadrado y muestra una decisión que se tomara.

Nodos de probabilidad:

- Está representado por un círculo y muestra las probabilidades de ciertos resultados.

Nodos terminales:

- Muestra el resultado definitivo de una ruta de decisión.

2.7.2. Como realizar un análisis de un árbol de decisión

- Diseñar el árbol de decisión es útil sobre todo para plasmar sobre el papel las alternativas y para visualizar todas las opciones que tienen. Sin embargo, no está completa hasta que no realices un análisis como tal.
- Para ello, tienes que realizar el cálculo final esperado de cada decisión. Este cálculo te aportara una minimización del riesgo y una maximización de la probabilidad de obtener el resultado esperado.

- Para sacar ese dato, solo tienes que restar el costo de esa decisión a los beneficios esperados. Se debe tener en cuenta que los beneficios esperados son iguales al valor total de todos los resultados que puedan derivar de esa decisión, y cada valor se multiplica por la probabilidad de que ocurra.

2.7.3. *Ventajas y desventajas del árbol de decisiones*

2.7.3.1. Ventajas

- Son fáciles de construir, interpretar y visualizar.
- Selecciona las variables más importantes y en su creación no siempre se hace uso de todos los predictores.
- Si faltan datos no podremos recorrer el árbol hasta un nodo terminal, pero si podemos hacer predicciones promediando las hojas del subárbol que alcancemos.
- Sirven tanto para variables dependientes cualitativas como cuantitativas, como para variables predictoras o independientes numéricas y categóricas.
- Permiten relaciones no lineales entre las variables explicativas y la variable dependiente.
- No podemos servir de ellos para categorizar variables numéricas.

2.7.3.2. Desventajas

- Tienden al sobreajuste de los datos, por lo que el modelo al predecir nuevos casos no estima con el mismo índice de acierto.
- Son inestables: cualquier pequeño cambio en los datos de entrada puede suponer un árbol de decisión completamente diferente.

- No suelen ser muy eficientes con modelos de regresión.
- Crear arboles demasiado complejos puede conllevar que no se adapten bien a los nuevos datos. La complejidad resta la capacidad de interpretación.
- Se puede crear arboles sesgados si una de las clases es más numerosa que otra.
- Se pierde información cuando se utilizan para categorizar una variable numérica continua.

2.7.4. Ejercicio de análisis de escenarios (árbol de decisiones)

Una empresa minera desea adquirir un terreno por \$500 000. Este monto es bajo en el mercado, debido a que se considera que dicho terreno no posee reservas minerales, la empresa quiere comprarlo y luego revenderlo en \$900 000. La idea para hacer este negocio se basa en las estimaciones de un grupo de expertos que aseguran que hay una probabilidad del 70%, que haya oro. Por consiguiente, existe una probabilidad a priori del 30% de que en el terreno no haya oro, si este fuera el caso, la empresa podría revenderlo por \$350 000. Ante el riesgo, la empresa antes de comprarlo ha considerado subcontratar a una empresa para que haga el estudio con un costo de \$50 000. Un estudio así no tiene una fiabilidad absoluta, en un 90% de los casos si hay oro y un 20% en los que no hay (el coste de excavación es de \$250 000 para su dicho estudio). ¿Cuál es la secuencia de decisiones si el objetivo de la empresa es maximizar el beneficio esperando con la operación

Datos del problema:

Tabla 21

Datos del problema árbol de decisiones

DATOS	
Costo del terreno	\$ 500 000
Venta del terreno con oro	\$ 950 000
Venta del terreno sin oro	\$ 350 000
Costo sin estudio	\$ 50 000
Costo de excavación	\$ 250 000
Probabilidad de que haya oro (SI)	70% - 90% - 10%
Probabilidad de que no haya oro (NO)	30% - 80% - 20%

Nota: los datos de ventas y costos son en unidades de dólares (\$) y las probabilidades son en unidades de porcentajes (%).

Para calcular los porcentajes para comprobar si es favorable o desfavorable, se debe multiplicar $P(SI)=90\%*70\%+P(NO)=80*30$.

Tabla 22

Porcentajes de favorable y desfavorable

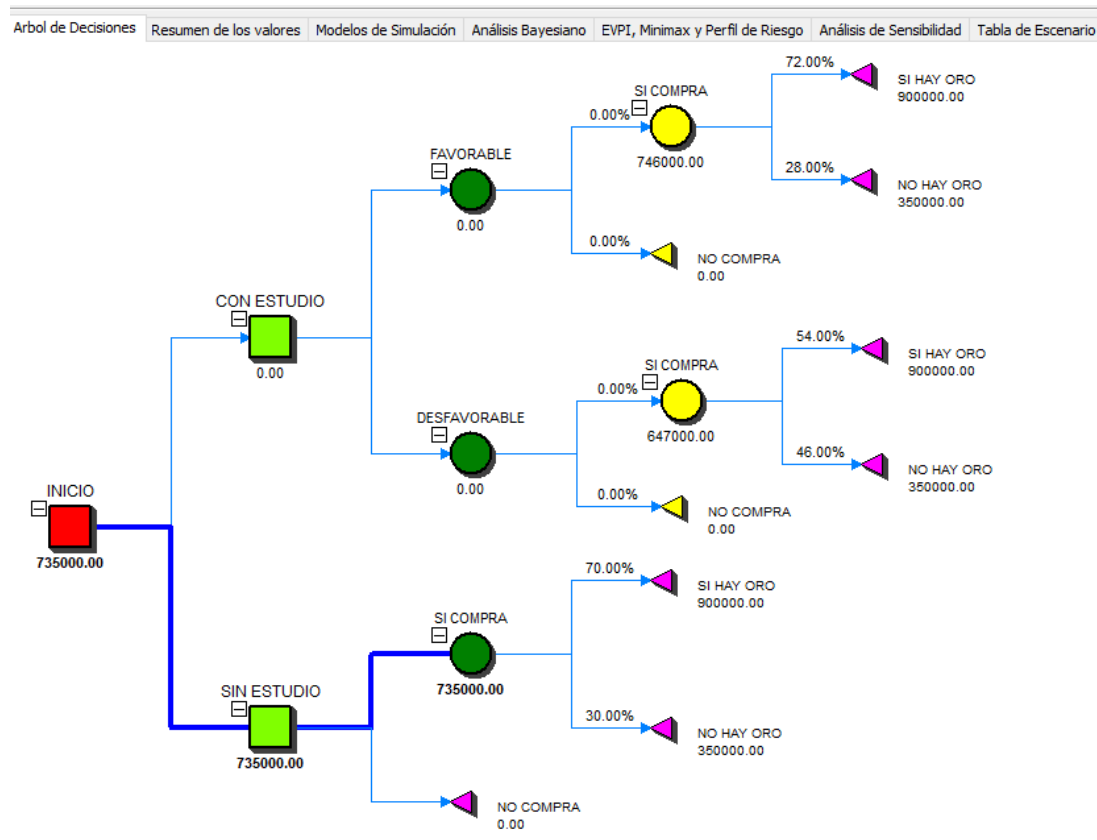
FAVORABLE/DESFAVORABLE	%
P (FAVORABLE)	87%
P (DESFAVORABLE)	13%

P (SI/FAVORABLE)	72%
P (NO/FAVORABLE)	28%
P (SI/DESFAVORABLE)	54%
P (NO/DESFAVORABLE)	46%

Nota: P = Probabilidad.

Figura 30

Árbol de decisiones en software Risk Simulator de Excel



Nota: los nodos terminales están representados en forma de triángulos en el software Risk Simulator de Excel.

Respuesta:

El resultado es que no necesitan contratar a otra empresa para realizar la excavación, el terreno se debe de comprar porque hay una alta probabilidad de oro.

2.8. Métodos basados en simulación

La simulación se justifica especialmente en proyectos complejos que presentan no linealidad en sus flujos de efectivo.

El procedimiento habitual para calcular el VAN simple es:

- Especificar un modelo de flujo de efectivo, por ejemplo: $\text{Ingreso} = P \times Q$.
- Se estima el valor esperado de las variables inciertas: $E(P)$, $E(Q)$

Estas estimaciones se incorporan en el modelo de flujo de efectivo: $E(I) = E(P) \times E(Q)$.

Sin embargo, este método es correcto solo si el flujo de caja es lineal.

En efecto, el método VPN simple asume flujos de efectivo lineales. Este supuesto no se cumple cuando, por ejemplo, existe correlación entre variables. Al calcular los ingresos, si la demanda es baja, la cantidad vendida será baja y probablemente también el precio. Por otro lado, si la demanda es alta, el precio será alto y el proyecto podría ampliar su capacidad de producción para vender más:

$$E(\text{ingreso}) = E(P)E(Q) + \text{Cov}(P, Q) \text{ y } E(P)E(Q) \quad (67)$$

Ejemplos de no linealidad en los flujos de caja:

Un método para trabajar con flujos de caja no lineales es la simulación. Existen:

- Correlación entre demanda y precio.

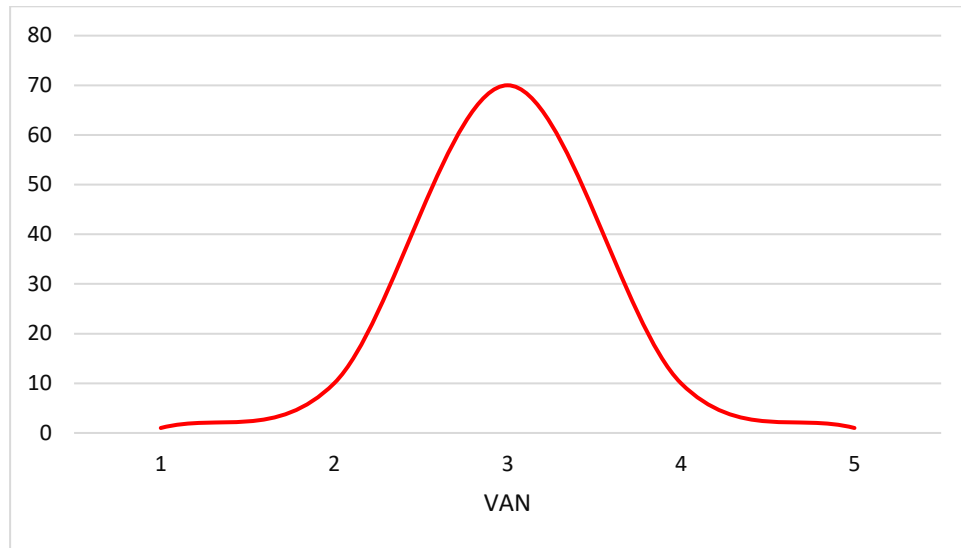
- Derechos Contingentes: impuesto a la renta, opciones sobre activos.
- Flexibilidades operativas: posibilidad de ampliar, cerrar temporalmente, abandonar, diferir la inversión, etc.
- Métodos de simulación estática (Montecarlo) y Métodos de simulación dinámica
- Economías de escala.

Las distribuciones estadísticas de cada variable incierta se modelan junto con sus correlaciones. Con cada conjunto de valores simulados (realización), Los valores generados computacionalmente se generan repetidamente para las variables inciertas, utilizando la distribución de probabilidad correspondiente. Se genera una distribución del VAN, en la que el valor del proyecto es la media, y el riesgo se cuantifica por la dispersión de la distribución “empírica” se calcula el valor del flujo de caja.

$$\begin{bmatrix} p1 \\ p2 \\ pN \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cf \\ cf2 \\ cfN \end{bmatrix} \begin{bmatrix} VAN1 \\ VAN2 \\ VAN \end{bmatrix} \quad (68)$$

Figura 31

Grafico de distribución normal representando el VAN



Nota: VAN = Valor Actual Neto.

2.8.1. Método de simulación Monte-Carlo

A la hora de realizar un análisis de riesgos para la toma de decisiones en la empresa, es importante tener acceso a la mayor cantidad de información posible. En este sentido, la simulación de Monte Carlo permite ver todos los resultados posibles de las decisiones que tomamos y evaluar el impacto del riesgo. Este método de simulación, por tanto, es de gran utilidad para la gerencia de riesgos de cualquier tipo de organización. También resulta de importancia para los Project Managers que tengan que gestionar riesgos en proyectos de envergadura.

Pero ¿qué es la simulación de Monte Carlo (también la encontrarás escrita como simulación Montecarlo)? Se trata de una técnica matemática computarizada, que permite tener en cuenta el riesgo en análisis cuantitativos y tomas de decisiones. Comenzó a utilizarse en la segunda guerra mundial, y debe su nombre a la ciudad de Mónaco, conocida por sus casinos. Actualmente, se usa en muchos sectores, desde los proyectos de Oil & Gas, hasta las finanzas o

la manufactura. En la simulación de Montecarlo se trabaja, habitualmente, con programas informáticos como Excel o R Studio.

2.8.1.1. ¿Cómo funciona la simulación Monte Carlo?

En general, este método de simulación se basa en crear modelos de posibles resultados mediante la sustitución de un rango de valores (una distribución de probabilidad) para cualquier factor con incertidumbre inherente. Después, calcula los resultados una y otra vez, cada vez usando un grupo diferente de valores aleatorios de las funciones de probabilidad. De esta forma, dependiendo del número de riesgos o incertidumbres y de los rangos especificados, pueden ser necesarios miles de recálculos para completar la simulación. Este método es útil para el análisis de riesgos cuantitativos, donde se asignan valores numéricos a los riesgos.

2.8.1.2. Principales ventajas

El simulador monte Carlo tiene muchas ventajas respecto a otro tipo de análisis deterministas o de “estimación de un solo punto”. Entre ellos podemos destacar:

- **Ofrece resultados gráficos.** Gracias a los datos que genera una simulación Monte Carlo, es fácil crear gráficos de diferentes resultados y las posibilidades de que sucedan. Esto es importante para comunicar los resultados a otras personas interesadas.
- **Análisis de sensibilidad.** En este método resulta más fácil ver qué variables introducidas tienen mayor influencia sobre los resultados finales.
- **El análisis de escenario.** Usando la simulación Monte Carlo, los analistas pueden ver exactamente los valores que tienen cada variable cuando se producen ciertos resultados. Esto resulta muy valioso para profundizar en los análisis.

- **Correlación de variables de entrada.** También permite modelar relaciones interdependientes entre diferentes variables de entrada. Esto es importante para averiguar con precisión la razón real por la que, cuando algunos factores suben, otros suben o bajan paralelamente.

2.8.1.3. Caso aplicativo

Cálculo del presupuesto del ciclo de minado con el método de monte-carlo

Parámetros iniciales:

Tabla 23

Parámetros iniciales del proyecto minero

DESCRIPCIÓN	PRESUPUESTO REAL (MAS PROBABLE)
Costo total por la tarea de perforación (USD)	21556.80
Costo total por la tarea de voladura (USD)	52216.80
Costo total en la tarea de ventilación (USD)	6213.60
Costo total en la tarea de saneamiento (USD)	1536.00
Costo total en la tarea de limpieza, cargado y acarreo (USD)	73000.80
Costo total en la tarea auxiliar (USD)	8973.60
Costo por uso de energía eléctrica mensual USD	940.80
Costo por equipo de protección (USD)	1416.00

Nota: USD = United States Dollars “dólar de los Estados Unidos”.

Asumimos los valores de presupuesto mínimos y máximos agregándole y restándole el 10% de la inversión real. Asu vez calculamos la distribución con la extensión de Excel @**RISK**.

Tabla 24

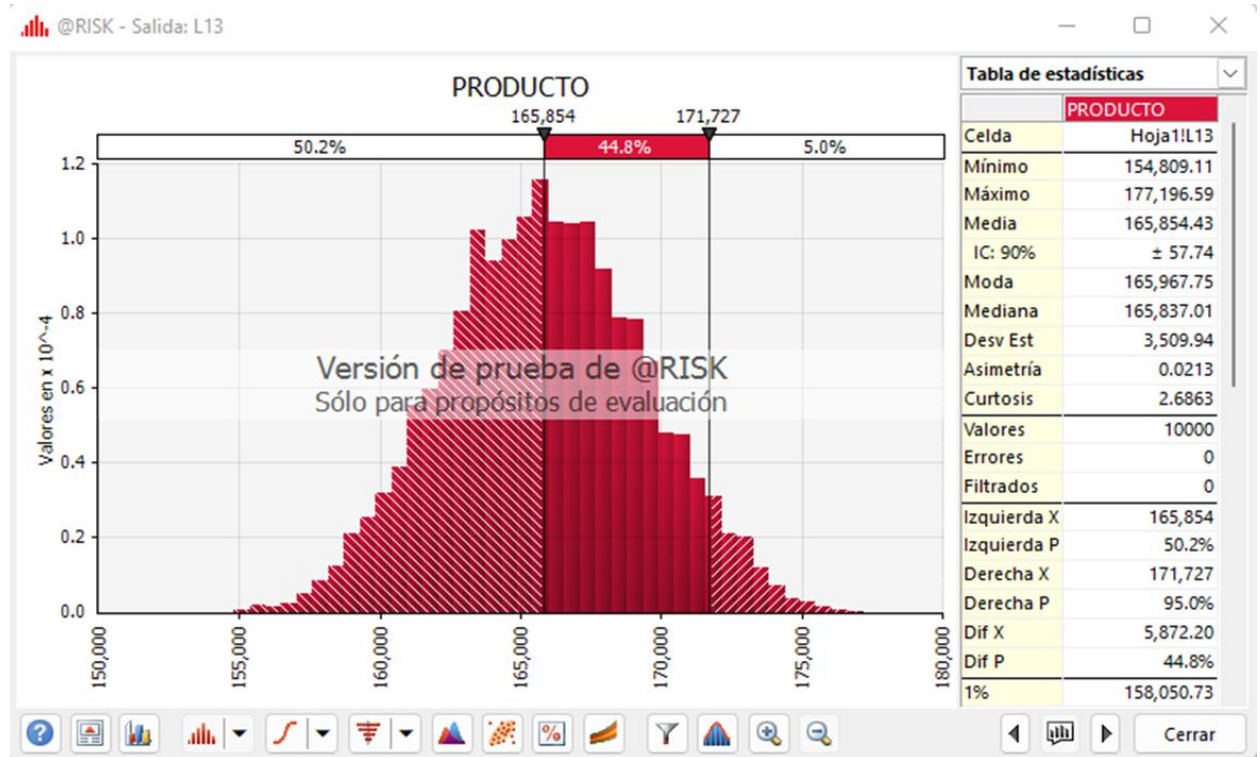
Presupuestos del proyecto minado

PRESUPUESTO MINIMO	PRESUPUESTO REAL (MAS PROBABLE)	PRESUPUESTO MAXIMO	DISTRIBUCION
19401.12	21556.80	23712.48	21556.8
46995.12	52216.80	57438.48	52216.8
5592.24	6213.60	6834.96	6213.6
1382.40	1536.00	1689.60	1536
65700.72	73000.80	80300.88	73000.8
8076.24	8973.60	9870.96	8973.6
846.72	940.80	1034.88	940.8
1274.40	1416.00	1557.60	1416
149268.96	165854.4	182439.84	165854.4

Nota: presupuesto mínimo (\$), presupuesto real (\$), presupuesto máximo (\$) y distribución (\$).

Figura 32

Histograma evaluado a 10000 iteraciones en @Risk



Nota: se evaluó en 10000 iteraciones en software @Risk del Excel.

Análisis del histograma

- Con respecto a la certeza del 95% podemos afirmar que el valor máximo de inversión es 171727 dólares.
- También se puede observar que la probabilidad para cumplir el presupuesto base es de 50.20%
- A su vez que la contingencia necesaria para cumplir con el presupuesto es de 5872.6 dólares.

2.8.2. Método VaR “Valué at Risk”

El valué at risk es una medida más completa que la duración (no son sustituidas), mide la pérdida potencial en \$, lo que lo hace más comunicable, es comparable con otros riesgos y es un nuevo estándar para medir riesgo de mercado.

El VaR es la máxima pérdida esperada dado un horizonte de tiempo y un intervalo de confianza.

$$P = Prob \{ \Delta V \geq VaR \} \quad (69)$$

Si el VaR de tasas de 1 día es 100 M de \$, podemos asegurar con un 95% de confianza que, si mañana es 1 día como los últimos 100 días, entonces dada nuestra cartera, no perderemos más de 100M\$ por movimiento en las tasas de interés.

2.8.2.1. VaR de un proyecto

Para el cálculo básico del VaR del VAN para un factor de riesgo:

$$VaR_1 = VAN(\bar{F}_1) - VAN(F^*_1) \quad (70)$$

Donde:

\bar{F}_1 es el valor esperado del factor 1

F^*_1 peor valor al 95% del factor 1

2.8.2.2. VaR en factores de Riesgo

En este caso es necesario calcular dos VaR, uno para cada factor de riesgo (F1 y F2)

$$VaR_1 = VAN_0 - VAN^*_1 \quad (71)$$

$$VaR_2 = VAN_0 - VAN_2^* \quad (72)$$

Y el VaR total se calcula como:

$$VaR = \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2 * \rho_{12} * VaR_1 * VaR_2} \quad (73)$$

Y en donde ρ_{12} es el coeficiente de correlación entre ambos factores.

Para encontrar el VaR en la práctica.

- Se identifican factores de riesgo claves de la etapa, incluyendo correlaciones y eventos:

$$F1 \dots Fn \quad (74)$$

- Se modela su impacto sobre el VPN
- Se estima el VPN Seguro (Probabilidad de 95%)
- Calcula el Ratio VPS/VPN y se establece su aceptabilidad
- Define su paso a etapa siguiente, o se determinan acciones para mitigar el riesgo.
- Vuelve a analizar el impacto sobre el VPN

3. Riesgo Operacional

3.1. Introducción

La evaluación y gestión de riesgos son esenciales para el diseño de operaciones mineras subterráneas y para optimizar la planificación en los ciclos de desarrollo y producción.

Los riesgos geológicos y de mercado se pueden evaluar a través de análisis predictivos basados en datos históricos y el cuerpo mineral respectivo, la evaluación del riesgo operativo en la industria minera requiere un enfoque personalizado proyectos que combinan cualitativo y cuantitativo por personal calificado.

Debido a la singularidad de cada mina subterránea, el juicio de los expertos suele ser la única fuente de información disponible para la evaluación de riesgos. además, los conjuntos de datos existentes pueden estar incompletos y, por lo tanto, se requiere el juicio de expertos para llenar los vacíos en el análisis estadístico o para utilizar su experiencia en el análisis y la evaluación técnica. Existe una necesidad creciente de utilizar métodos y técnicas capaces de manejar medidas cualitativas subjetivas y combinarlas con modelos estocásticos cuantitativos para evaluar el impacto de los problemas de las operaciones mineras en las operaciones mineras con el parámetro de desempeño económico del flujo de caja descontado (DCF).

3.2. Definición de riesgo operativo

3.2.1. Riesgo operativo para estudios de factibilidad y operaciones

El riesgo se define mejor como la posibilidad de una pérdida. Los riesgos que pueden afectar los ingresos del proyecto, los costos operativos y los flujos de efectivo, afectan la rentabilidad de los proyectos como parte de una evaluación de factibilidad (Frew, 1990), indican tres tipos de riesgos que pueden afectar el éxito general de una empresa:

- Riesgo para la salud y la seguridad de los trabajadores.

- Riesgo para el medio ambiente.
- Riesgo para la actividad.

En condiciones de minería subterránea, los riesgos de la actividad pueden incluir daños a equipos e infraestructura, pérdida de ton de producción, pérdida de tiempo y mayores costos debido a la recuperación y demoras. Estos riesgos son componentes de un sistema minero completo de carácter aleatorio, donde, a diferencia de la producción, la causalidad es floja. La naturaleza subjetiva de los sistemas de minería subterránea se debe principalmente a la falta de datos digitales, la singularidad del sitio, la complejidad del sistema minero, la correlación de los factores de riesgo y los efectos positivos de su acumulación en la economía del sistema minero.

Todo esto complica la evaluación y gestión del riesgo operacional en las minas subterráneas. La evaluación de riesgos es una parte esencial de los estudios de viabilidad para comprobar la viabilidad. Dicho análisis puede incluir el uso sistemático de la información disponible para determinar la frecuencia de eventos específicos y sus consecuencias.

El riesgo estimado discutido en este documento se considera como el producto de la probabilidad de su ocurrencia (probabilidad – L) e impacto negativo (consecuencia – C) en el tiempo (t), como se muestra en la ecuación (75).

$$R(t) = L(t) \times c(t) \quad (75)$$

Tradicionalmente, la evaluación del riesgo que afecta la estructura de los flujos de efectivo se ha realizado mediante análisis de sensibilidad, que examina la variabilidad de un caso base, o considerando escenarios hipotéticos para priorizar las alternativas a considerar. El modelo estocástico, introducido en la industria minera por (O'Hara, 1982), ha tenido poca aplicación a la factibilidad de la minería debido a la limitada disponibilidad de datos o

conocimiento especializado en el tema. La naturaleza multidisciplinaria de la factibilidad minera brinda la oportunidad de integrar el análisis de los riesgos aplicables utilizando simulaciones Monte Carlo científicas, de ingeniería o de gestión. Sin embargo, los enfoques de riesgo y confiabilidad existentes en otras industrias (por ejemplo, petróleo y gas, geingeniería, geología, manufactura, medio ambiente, comercio, salud y seguridad ocupacional) pueden proporcionar datos para una evaluación aleatoria del riesgo operativo para la evaluación de proyectos en un estudio de factibilidad minera. la formación de niveles similares de riesgo, confiabilidad o riesgo no necesariamente permiten que se incluyan directamente en el análisis de flujo de efectivo. Un desafío adicional es tomar datos de entrada que puedan ayudar a cuantificar la probabilidad y el impacto de los problemas operativos como entrada para el análisis de flujo de caja. Una vez que se ha realizado esta evaluación, los escenarios futuros se pueden probar a través del análisis hipotético. Con el poder de la recomendación de un estudio de factibilidad que depende de los cambios esperados en los supuestos, el análisis de riesgo se convierte en una herramienta para la toma de decisiones basada en el riesgo.

Se consideró la evaluación del riesgo operacional en un proyecto minero para su inclusión en la simulación de procesos y la planificación de la producción para el caso de problemas de suelo en minas subterráneas.

Se establecen estudios de confiabilidad de equipos para evaluar los riesgos asociados con la operación de minería y equipos mineros. La planificación de la mina puede verse influenciada por parámetros de recursos que, a su vez, pueden afectar los supuestos de riesgo operativo realizados en el estudio de factibilidad. Los ingresos y los costos pueden verse influenciados por el riesgo que plantean los problemas operativos a través de las variaciones de rendimiento en relación con el tiempo, los costos y los ingresos. Los retrasos operativos son el resultado de un

rendimiento deficiente de los componentes del sistema durante el desarrollo (preproducción) o el ciclo de producción de la mina.

El impacto de los problemas operativos en las minas subterráneas se demuestra mediante numerosos estudios de casos relacionados con el terreno, el equipo o el programa. Una vez que se ha cuantificado el riesgo operativo, se puede utilizar como entrada para el flujo de caja o la simulación de procesos. Los resultados pueden proporcionar medios para la evaluación de riesgos de la mina, los estudios de factibilidad y la evaluación de las alternativas de planificación y diseño de la mina.

3.3. Identificación de riesgos y peligros

La identificación de riesgos es el primer y más importante paso en un análisis integral de riesgos. Los riesgos a escalas estándar o clasificaciones para escenarios alternativos deben hacerse con base en pronósticos de posibles eventos o el rango de variables del proyecto que afectan la viabilidad del proyecto y su factibilidad económica, el proceso se describe como la identificación de peligros potenciales.

El objetivo de este proceso es identificar todas las posibles fuentes de riesgo que se tendrán en cuenta en los análisis posteriores. La importancia de reconocer las principales incertidumbres que puede encontrar un proyecto se clasifica en aleatorias (relacionadas con la aleatoriedad natural de los datos) y reales (debido a la incertidumbre de los datos). Según el Departamento de Industrias Primarias de Nueva Gales del Sur, hay una serie de técnicas disponibles para la identificación de peligros, pero ninguna de ellas puede capturar todos los componentes de un peligro. Luego se debe permitir un período de tiempo apropiado para determinar el riesgo. Los siguientes métodos de determinación del riesgo son:

- Análisis de errores de acción (AEA).
- Análisis modal de fallas y efectos (FMEA).
- Análisis de Criticidad de Modos y Efectos de Falla (FMECA).
- Análisis de árbol de fallas (FTA) Estudios de Riesgo y Operabilidad (HAZOP).
- Identificación de riesgos de maquinaria (MHI) y la identificación de errores humanos potenciales (PHEI).
- Evaluación y control de riesgos en el lugar de trabajo (WRAC).
- Priorización de la Matriz de Riesgos.

Aunque existen muchos métodos diferentes para identificar riesgos, no existe una técnica única que pueda aplicarse exclusivamente a una situación particular (Faber & Stewart, 2003). Además, la singularidad de cada sitio de mina en términos de condiciones geológicas y locales requiere un diseño especializado y una evaluación de riesgos, además de la identificación de factores de riesgo fuera del proyecto.

Además, debido a la naturaleza multidisciplinaria del riesgo operacional, se requiere un enfoque de equipo con antecedentes y conocimientos diversos. utilizados en la fase de identificación de riesgos. El ejercicio de lluvia de ideas conduce a una matriz de riesgos activa que se utilizará durante la fase de evaluación de riesgos. Estas matrices de riesgo sirven como datos de entrada para el modelo de riesgo.

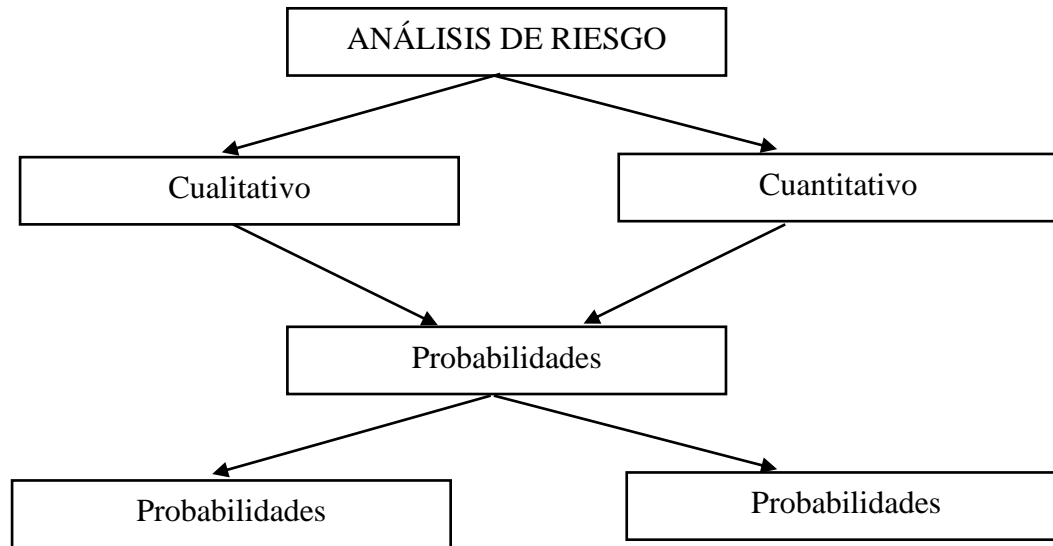
3.4. Modelización de riesgo operativo

Proyectos relacionados con la salud y seguridad del personal, así como aquellos que involucren la probabilidad de eventos catastróficos, el análisis de riesgo que aquí se aborda trata de riesgos monetarios cuantificables relativos a las condiciones de operación. La investigación realizada identificó más de 60 métodos de análisis de riesgos para instalaciones industriales que se pueden aplicar durante la fase de evaluación de riesgos para cuantificar el impacto de los riesgos de manera determinista y probabilística. Una evaluación de riesgo determinista o de punto único consiste en una sola estimación de variables para identificar diferentes escenarios de salida relacionados con el rendimiento del sistema. Este enfoque a menudo se denomina modelado de escenarios "qué pasaría si" para evaluar las consideraciones de tiempo de las contingencias. Este enfoque lleva tiempo cuando se considera una gran cantidad de escenarios posibles. Además, aún se desconoce la probabilidad de que ocurra un escenario.

Por lo tanto, este método tiene la dificultad evitable de predecir valores únicos de rendimiento en lugar de predecir la distribución de la incertidumbre. Las entradas cualitativas o cuantitativas se pueden utilizar como entradas para la simulación de riesgos. Los datos cualitativos se refieren a descripciones que son observables, pero no medibles. Los datos cuantitativos o numéricos se pueden medir y las técnicas de evaluación estadística se pueden aplicar al modelado. ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.. La evaluación de impacto es una parte fundamental en la evaluación de riesgos con fines de valoración y optimización.

Figura 33

Concepto de análisis de riesgos con factores cualitativos y cuantitativos



Nota: riesgo cuantitativo está relacionado a cantidades (unidades).

3.5. Evaluación y optimización del impacto del riesgo

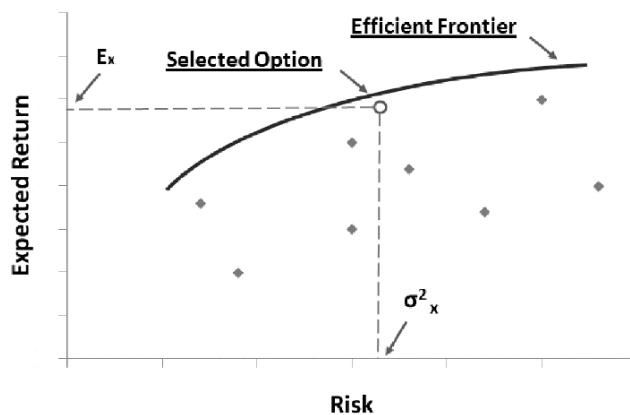
La planificación y el diseño de minas metálicas subterráneas requiere la consideración de los riesgos operativos y las probabilidades de realizar operaciones mineras. El proceso de diseño y planificación de la mina basado en el riesgo implica pasos iterativos de evaluación de ingeniería y es un requisito previo inevitable para que los ingenieros de minas manejen conjuntos de datos incompletos o representaciones inciertas de la geología, la producción de la mina y los pronósticos del mercado. Además, debido al enfoque de varios pasos del proceso de evaluación de proyectos mineros, cada fase anterior del estudio proporciona decisiones importantes al equipo de gestión sobre si continuar con la siguiente fase del estudio o no.

Esto destaca la necesidad de establecer una metodología bien desarrollada que permita la evaluación de las alternativas de diseño y planificación de la mina a través de una evaluación económica integrada de la próxima calidad del mineral (RoM), el tonelaje de producción, los

riesgos y las incertidumbres en las operaciones de la mina. Esto constituye la base para la optimización de toda la cadena de procesos tecnológicos, incluido el acceso, el desarrollo de minas subterráneas, los métodos de extracción, la secuencia de producción, la gestión de la calidad del mineral y la cristalización. Esto vinculará el riesgo operativo subterráneo con el RoM y su impacto en la concentración de metales al considerar factores económicos como el valor actual neto (NPV). El proceso de valoración debe considerar el complejo integrado de mina/planta como parte de la empresa comercial general.

Figura 34

Principio de optimización parametrizado



Nota: Risk = riesgo; el principio de optimización está representado en una gráfica de dispersión (Serguei & Vassilios, 2013).

Esta técnica de optimización se aplica en la ciencia de gestión de proyectos y la industria del petróleo y el gas, pero no en la evaluación de proyectos de explotación. Una de las razones de esto es la dificultad de vincular datos geológicos, mineros y de procesamiento en una evaluación técnico-económica a través de un modelo de riesgo estocástico considerado para una evaluación amplia de posibles escenarios de diseño. Las opciones de precios deben ser realistas y tener en cuenta las limitaciones físicas que puede enfrentar la minería subterránea.

Otra razón es la diferencia significativa entre el tipo de extracción de recursos naturales, al comparar el flujo continuo de petróleo y gas con la actividad metalúrgica de las minas subterráneas de metales. Las principales características de la producción de petróleo y gas son la presión del yacimiento de hidrocarburos y su caudal. Es importante para la futura producción sustentable que haya una buena fuerza impulsora detrás del reservorio que asegure un flujo constante de recursos a lo largo de la vida de la operación.

3.6. Pronostico del riesgo operativo de la mina

3.6.1. Clasificación del riesgo de las minas metalizadas subterráneas

La clasificación se puede organizar teniendo en cuenta las necesidades y limitaciones de planificación/diseño de la mina, así como el impacto económico potencial que los problemas operativos pueden tener en el sistema subterráneo. El riesgo de seguridad no debe considerarse parte de la evaluación económica del riesgo operativo. Los fondos y los cambios en los costos operativos y las demoras se pueden tabular para permitir la clasificación de eventos potencialmente peligrosos no planificados durante la vida del proyecto. El costo de capital inicial para la infraestructura se determina en la etapa de factibilidad de la operación minera en consideración. Estos costos afectarán el riesgo y las medidas disponibles para combatirlo o explotar las condiciones cambiantes durante la vida de la actividad en cuestión.

Los factores se pueden clasificar, con base en la categorización de los factores y su impacto, en tres grupos como se muestra a continuación:

Problemas relacionados con equipos de minería:

- Proyecto OPEX (gastos operativos) y mantenimiento de CAPEX (capital gastos) variabilidad debida al mantenimiento no planificado de equipos y repuestos retrasos en el suministro.
- Variación de la disponibilidad de equipos durante los períodos de preproducción y producción.

Problemas relacionados con el plan de la mina:

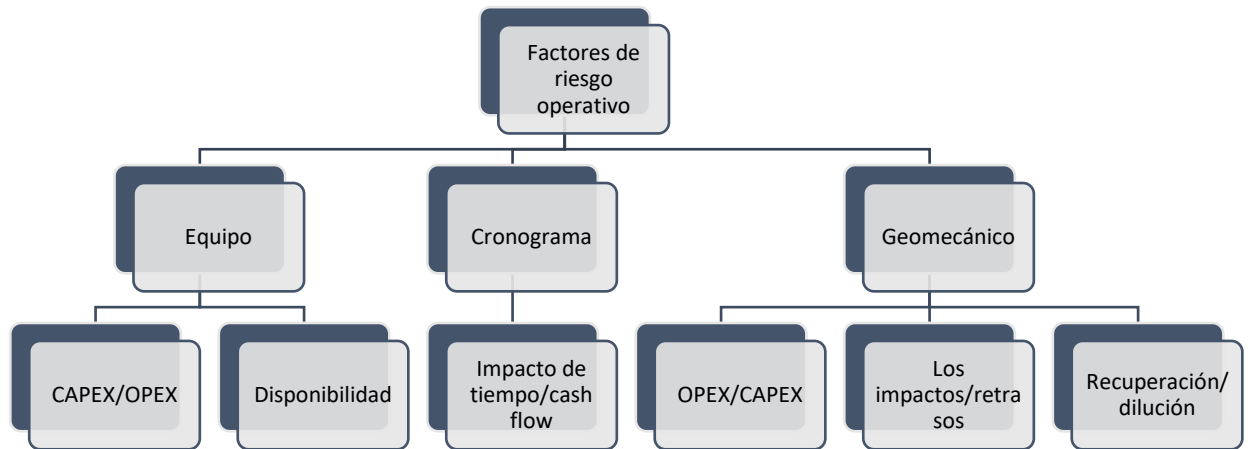
- Desviación de la duración del proyecto durante los períodos de preproducción y producción para razones de riesgo operativo (distintas de las relacionadas con la incertidumbre de los recursos minerales).

Cuestiones relacionadas con la geomecánica:

- Variabilidad del OPEX y CAPEX del proyecto, debido a trabajo extra y pérdida de equipos debido a problemas geomecánicas durante los períodos de preproducción y producción.
- Impacto de tiempo debido a problemas geomecánicas durante la preproducción y producción períodos; recuperación minera y variación de dilución debido a problemas geomecánicas.

Figura 35

Clasificación de los factores de riesgo operativos de la mina con impactos que afectan la economía del proyecto



Nota: OPEX = Gastos de operaciones “Operating Expenses”; CAPEX = Gastos de capital “Capital Expenses”.

3.7. Aplicación de probabilidades subjetivas para la evaluación de riesgos

3.7.1. Porque usar probabilidades subjetivas

Ya sea que se haga un análisis cualitativo o cuantitativo, suele ocurrir que la probabilidad de un determinado valor de parámetro del proyecto debe pronosticarse utilizando probabilidades objetivas o subjetivas, como se muestra en la **Figura 35**. Las probabilidades objetivas se pueden estimar cuando la información real está disponible para el parámetro en cuestión (costos, grado, tonelaje, etc.). Las probabilidades subjetivas se basan en opiniones de personas que poseen experiencia profesional, y pueden ser el base para el análisis cuando se dispone de información

limitada. El experto puede aplicar herramientas analíticas que él o ella elige para expresar su opinión en forma de alto riesgo, baja fuerza, alto impacto, etc. Esto forma la base para expresar el riesgo en términos cuantitativos.

Las razones de la imposibilidad de obtener todos los datos requeridos para la determinación precisa de la incertidumbre de todas las variables son las siguientes:

- Los datos nunca han sido recopilados.
- Los datos son demasiado caros de obtener.
- Los datos anteriores no se consideran relevantes para la aplicación en particular.
- Los datos están incompletos y requieren la participación de expertos para ser finalizados.

Todos casos descritos anteriormente requerirán el uso de expertos internos o externos de la empresa en para evaluar los componentes variables individuales de un modelo de evaluación de riesgos.

3.7.2. Evaluación de probabilidades subjetivas

El proceso de evaluación de riesgos operativos de la mina requiere un análisis de las condiciones cuando se dispone de datos limitados. Una técnica importante para crear un buen modelo de riesgo y evitar soluciones de caja negra es la simplicidad y dividir el problema en suficientes componentes razonables para que el experto pueda concentrarse en estimar algo predecible. Por ejemplo, si el VAN de los flujos de efectivo de un proyecto se considera el criterio principal para la toma de decisiones, generalmente es más beneficioso desglosar los cálculos del VAN del proyecto minero en componentes de flujo de efectivo únicos (p. ej., ingresos, gastos operativos, gastos de capital, impuestos, etc.), en lugar de estimar el VAN total

usando la fórmula global. La distinción permite a expertos y analistas identificar dependencias entre componentes.

Una vez descompuesto completamente el modelo, las distribuciones de probabilidad del impacto del riesgo operacional y la probabilidad de su ocurrencia deben ser asignadas por los expertos después de realizar su análisis. En el modelado de riesgos, existen varias distribuciones de probabilidad utilizadas para el modelado de opinión de expertos, a saber: homogénea, triangular, pert, general, acumulativa, discreta y Bernoulli (el nombre de la distribución se proporciona de acuerdo con la instalación de Crystal Ball software). Los profesionales pueden utilizar el análisis de árbol de eventos (ETA) para determinar las probabilidades subjetivas de los eventos de riesgo operativo, en función de su análisis y juicio.

Una vez que se han determinado las probabilidades subjetivas mediante el análisis ETA, se pueden asociar con distribuciones de probabilidad discretas para el modelado estocástico. Para crear una función de distribución de probabilidad subjetiva realista, consultamos a varios expertos para su evaluación y combinamos los resultados para crear una distribución de probabilidad que represente el rango de opiniones de los expertos. Esto se puede hacer utilizando puntos de referencia dinámicos que combinan distribuciones de probabilidad personalizadas con modelos de riesgo probabilístico. Esta técnica elimina los efectos adversos del teorema del límite central cuando se combinan múltiples distribuciones de probabilidad subjetiva.

3.8. Metodología para el análisis de flujos de efectivo por riesgo operativo

3.8.1. *Proceso de evaluación del riesgo operativo*

El modelado de riesgo probabilístico le permite evaluar el riesgo operativo de los problemas de minería subterránea en términos de su impacto potencial en todo el proyecto minero. Un método de toma de decisiones basado en riesgos permite estudiar posibles actividades mineras y escenarios de inversión de proyectos, teniendo en cuenta la rentabilidad esperada y los riesgos. Esto le permite evaluar las opciones de planificación minera de calidad y el valor de introducir flexibilidad de diseño en el proceso de planificación minera en forma de opciones reales del proyecto. En este proceso de toma de decisiones, la flexibilidad se define como la capacidad del diseño de la mina para adaptarse a las incertidumbres del pronóstico que pueden afectar la planificación de la mina. La calidad es una función de la calidad del mineral ROM y el rendimiento de la operación minera. Este proceso permite una evaluación integrada de escenarios de minería subterránea. Considere las estrategias de mitigación, la flexibilidad del diseño de la mina y el mineral, y la calidad del proceso.

3.9. Evaluación de impacto del riesgo operativo

La evaluación del impacto del riesgo operativo en la economía del proyecto usando la simulación Monte Carlo, permite investigar todos los aspectos posibles de los factores de riesgo y priorizar su criticidad en un entorno minero. Permite separar las tres categorías operativas (equipo, cronograma, problemas relacionados con el suelo) en la simulación e investigar su impacto en el indicador financiero (NPV) (Kenzap & Kazakidis, 2011).

El modelado estocástico permite demostrar el impacto de los problemas operativos en el proyecto flujo de efectivo al indicar las fluctuaciones del flujo de efectivo y la extensión de la preproducción de la mina y períodos de producción.

El enfoque de simulación y evaluación de riesgos descrito permite cuantificar los retrasos que se traducen en riesgo operativo. Las entradas de simulación pueden basarse en una combinación de opiniones subjetivas de expertos en lugar de estimaciones objetivas. Los factores de riesgo relacionados con los retrasos operativos relacionados con el equipo, la programación o los problemas de terreno deben incluirse en el modelo DCF en pie de igualdad con los riesgos relacionados con el mercado (precios de los metales, tipo de cambio, etc.) como variables correlacionadas o independientes para la evaluación. se puede incluir en Impacto sobre las alternativas y los parámetros económicos finales como parte de un proceso de toma de decisiones basado en el riesgo para optimizar los sistemas mineros. Esto proporciona una base para evaluar las alternativas de mitigación de riesgos en el diseño de la mina.

4. Riesgo Geológico

4.1. Examen del riesgo en la exploración minera

El éxito de la estrategia de exploración minera exige identificar algunas de las fuentes de riesgo y tenerlas en cuenta en el proceso de toma de decisiones para poder reducir el riesgo controlable.

El riesgo se define como la posibilidad de fracaso o pérdida.

La exploración es una actividad económica que implica riesgo e incertidumbre, por lo que el riesgo también debe definirse en un contexto económico. La reducción del riesgo puede abordarse de tres maneras fundamentales:

- Aumentando el número de exámenes
- Aumentando las probabilidades de éxito
- Cambiando las probabilidades de éxito por examen mediante el aprendizaje.

Éstas proporcionan el marco para examinar el riesgo de exploración.

- En primer lugar, se incrementa el número de prospectos examinados, por ejemplo, mediante una empresa conjunta, con lo que se reducen las probabilidades de ruina del jugador.
- En segundo lugar, la probabilidad de éxito aumenta si se exploran los tipos de yacimientos con mayor probabilidad de ser económicos, como los que tienen una alta proporción de yacimientos de categoría mundial (Mackenzie, 1994). Por ejemplo, para buscar depósitos de Au de más de 100 toneladas (>3 millones de onzas), pórfidos de Cu-Au o tipos de Au de cuarzo epitermal, es necesario examinar menos depósitos que los de vetas epitermales de Comstock y la mayoría

de los demás tipos de depósitos. Para la exploración de pórfidos de cobre, se puede utilizar una fuerte relación positiva entre el área de los minerales de sulfuro y el Cu contenido en los depósitos para reducir el riesgo de exploración examinando únicamente los grandes sistemas de sulfuro. En algunas situaciones, las probabilidades de éxito pueden incrementarse examinando determinados entornos geológicos. Sólo el 8% de los depósitos de sulfuro masivo de Kuroko son de clase mundial, pero las probabilidades de éxito pueden aumentar hasta un 15% si se buscan en entornos que contengan sedimentos y rocas riolíticas. Es posible reducir el riesgo de pérdidas durante la explotación minera desarrollando y ampliando una mina de forma secuencial, reduciendo así el capital expuesto en las primeras etapas y el valor actual del capital arriesgado.

- En tercer lugar, el riesgo se reduce utilizando información previa y cambiando la hipótesis de independencia de los juicios, es decir, aprendiendo. La fórmula de Bayes se utiliza para cambiar la probabilidad de existencia del yacimiento buscado en función de sucesivas etapas de exploración. Quizá la forma más importante de reducir el riesgo de la exploración sea emplear personal con la experiencia adecuada y que, sin embargo, esté aprendiendo (Mackenzie, 1994).

La exploración puede caracterizarse como un proceso de búsqueda en varias etapas en el que sólo la última, la perforación, suele ser definitiva.

En cada etapa se planea reducir el área a la que se aplica la siguiente etapa de búsqueda que suele ser más cara. Cada etapa puede considerarse como un intento de discriminar entre las zonas que contengan yacimientos valiosos y las que no.

Dado que la detección de yacimientos es probabilística, en cada etapa hay que sopesar los errores de clasificación de ambos tipos (es decir, rechazar yacimientos valiosos y aceptar prospectos no valiosos) y sus costes asociados con las posibles ganancias de descubrir un yacimiento económico.

Para que una estrategia de exploración tenga éxito es necesario identificar las fuentes de riesgo y tenerlas en cuenta en el proceso de toma de decisiones para poder reducir el riesgo controlable.

No es raro ver recomendaciones de que las empresas de exploración deberían aceptar todos los proyectos con valores monetarios esperados positivos; es decir, proyectos que tienen un valor económico positivo después de ser multiplicados por la probabilidad de descubrimiento del yacimiento y de restar los costes de exploración.

Está claro que esta estrategia no sería aconsejable para una empresa con recursos limitados si la probabilidad de fracaso fuera significativa. En el proceso de toma de decisiones deben tenerse en cuenta tanto los valores monetarios previstos como las probabilidades de diversos resultados, como el fracaso económico. Dado que el rendimiento económico, medido por el valor actual neto, está estrechamente relacionado con el tamaño de los yacimientos minerales y que los tamaños de los yacimientos pueden estar representados por distribuciones de frecuencia muy sesgadas, la consecución de valores monetarios esperados o superiores tiende a ser un resultado de baja probabilidad (Mackenzie, 1994).

Esto y la típica rareza de los yacimientos minerales son las razones fundamentales del alto riesgo de la exploración minera. Los riesgos de la exploración pueden reducirse mediante estrategias basadas en la geología, la estadística y la economía.

Entre las posibles fuentes de riesgo en la exploración se encuentran: la variación del tamaño y la ley de los yacimientos dentro de los tipos resultantes de las diferencias locales o regionales en la configuración geológica, la variación de los rendimientos económicos por tipo, los cambios de precios y las posibilidades de descubrimiento, dada la existencia de yacimientos.

4.2. Reducción del riesgo mediante el aumento del número de ensayos

(Slichter, 1960) dijo que la única manera de evitar la ruina del jugador en la exploración minera era tener suficiente capital para hacer muchos ensayos, es decir, tener un n grande. Así, la forma clásica de reducir el riesgo en la exploración es aumentar el número de prospectos examinados (n).

La consideración de este aspecto fue fundamental para el éxito de la exploración y el descubrimiento del yacimiento de zinc de Middle Tennessee en Elmwood (Callahan, 1977).

El número de prospectos que deben ser examinados para una probabilidad fija de al menos un éxito (P_{success}), se puede calcular con la ecuación (76).

$$n = \log(1 - P_{\text{SUCCESS}}) / \log(P_{\text{failure}}) \quad (76)$$

La reducción del riesgo mediante el aumento del número de prospectos examinados ya sea a través de la presentación de empresas más pequeñas o de la generación interna de prospectos, debería dar una ventaja significativa a las grandes empresas porque sólo ellas tendrían los recursos financieros para llevar a cabo esa política. Las empresas conjuntas, en las que se comparten los gastos, las responsabilidades y los beneficios de la exploración se reparten entre las empresas, y es la forma más habitual de aprovechar este método de reducción de riesgos, como en Yanacocha (Perú). Junto con la reducción del riesgo de fracaso económico, se produce una reducción del rendimiento financiero en las empresas conjuntas. Incluso con

grandes recursos para la exploración, en algún momento los gastos de exploración pueden superar el valor del objetivo; por tanto, este método tiene sus límites. Sin embargo, hay otras formas de reducir el riesgo de exploración que tienen algunas ventajas sobre este método de fuerza bruta. (Kouda, 1998).

4.3. Principales tipos de incertidumbre en geología

Cualquier parámetro de un objeto, fenómeno o proceso geológico puede ser fuente de incertidumbre; su número puede ser prácticamente innumerable. Por lo tanto, es mejor distinguir los principales tipos de incertidumbre y error (Mann, 1993).

4.3.1. Variabilidad natural inherente a los objetos y procesos geológicos

- El grado de variabilidad va desde un nivel bajo (homogeneidad relativa) hasta un alto grado de variabilidad del objeto geológico dado.
- La naturaleza de la variabilidad también puede ser diferente.
- Contiene rasgos estructurados y no estructurados.
- Los rasgos estructurados son, por ejemplo, las transiciones regulares de algunos rasgos en el espacio y el tiempo o las estructuras y eventos cíclicos.
- Estas características pueden describirse matemáticamente y, por tanto, puede reducirse su incertidumbre.
- Por otro lado, los rasgos no estructurados se producen de forma imprevista, y su posición y magnitud no pueden predecirse.

4.3.2. El error de muestreo

- Es causado por las limitaciones en la toma de muestras de los objetos geológicos en el espacio y el tiempo, por ejemplo, mediante perforaciones, pozos y galerías.

- Un muestreo perfectamente representativo de una formación geológica mediante investigaciones geológicas es casi imposible.

4.3.3. *Error de observación*

- La mayoría de las características geológicas se observan sobre el terreno.
- Debido a las condiciones desfavorables, como el clima, la densa cubierta vegetal y la prisa, muchas observaciones son incompletas o superficiales.
- Además, incluso las observaciones más minuciosas pueden estar influenciadas por el interés personal o la curiosidad y, por tanto, estar sesgadas.

4.3.4. *El error de medición*

Consta de componentes sistemáticos y aleatorios.

Los errores de medición tienen tres fuentes:

- la imperfección del instrumento.
- la imperfección del método aplicado (incluyendo la calibración y la preparación de la muestra).
- la in- completa habilidad y atención de la persona que mide.
- Estas cuestiones se han discutido en detalle en la química analítica (Day & Underwood, 1991) en la geoquímica, en la mineralogía y en la ciencia medioambiental (Ferson, Root, & Kuhn, 1999).

4.3.5. Errores de la evaluación matemática de los datos geológicos

- La fuente de error más habitual es el número insuficiente de muestras recogidas.
- Según los principales estadísticos, el número mínimo de una evaluación estadística fiable es de unas 30 muestras (Tukey, 1977).
- Otra fuente de error es el descuido de las reglas matemáticas. Por ejemplo, varios cálculos requieren una distribución normal de la variable. Sin embargo, las variables con una distribución sesgada pueden ser evaluadas por estos métodos. Evidentemente, los resultados están sesgados. En esta situación, deben utilizarse métodos no paramétricos.

4.3.6. La propagación de errores

- En la situación de varias variables, los errores de las medidas individuales se propagan de forma diferente dependiendo de las interdependencias de las variables.
- La propagación de los errores a través de los cálculos matemáticos es diferente.
- El descuido de la propagación de errores puede aumentar significativamente la incertidumbre general.

4.3.7. Incertidumbre conceptual y del modelo

- Al identificar y clasificar las estructuras geológicas y otros rasgos específicos, se aplican ideas geológicas conceptuales preexistentes.
- Incluso pueden producirse identificaciones erróneas, lo que aumenta esencialmente la inseguridad conceptual.

- Los análogos naturales ampliamente utilizados en la modelización geológica son generalmente imperfectos, porque no pueden tener en cuenta características locales no detectadas. Las simplificaciones y generalizaciones realizadas en la modelización geológica dan lugar a una incertidumbre adicional. Las predicciones sobre el pasado y el futuro geológico son proporcionalmente inciertas a la duración del tiempo geológico en el que se han realizado. (Bárdossy & Fodor, 2001).

4.4. Reducción del riesgo mediante el aumento del número de ensayos

(Mackenzie, 1994) indico que la única manera de evitar la ruina del jugador en la exploración minera era tener suficiente capital para hacer muchos ensayos, es decir, tener un “n” grande. Así, la forma clásica de reducir el riesgo en la exploración es aumentar el número de prospectos examinados (n). La consideración de este aspecto fue fundamental para el éxito de la exploración y el descubrimiento del yacimiento de zinc de Middle Tennessee en Elmwood.

El número de prospectos que deben ser examinados para una probabilidad fija de al menos un éxito (P_{success}). se puede calcular como:

$$n = \log(1 - P_{\text{SUCCESS}}) / \log(P_{\text{failure}}) \quad (77)$$

La reducción del riesgo mediante el aumento del número de prospectos examinados ya sea a través de la presentación de empresas más pequeñas o de la generación interna de prospectos, debería dar una ventaja significativa a las grandes empresas porque sólo ellas tendrían los recursos financieros para llevar a cabo esa política.

Las empresas conjuntas, en las que se comparten los gastos, las responsabilidades y los beneficios de la exploración se reparten entre las empresas, y es la forma más habitual de aprovechar este método de reducción de riesgos, como en Yanacocha (Perú) (Tovar, 1986).

Junto con la reducción del riesgo de fracaso económico, se produce una reducción del rendimiento financiero en las empresas conjuntas. Este método tiene sus límites ya que en algún momento los gastos de exploración pueden superar el valor del objetivo. Sin embargo, hay otras formas de reducir el riesgo de exploración que tienen algunas ventajas sobre este método de fuerza bruta.

4.5. Reducción del riesgo mediante la modificación de la probabilidad de fracaso

La búsqueda de objetivos más fáciles de encontrar puede reducir la probabilidad de fracaso por ensayo, donde un ensayo se refiere al examen de un prospecto o un yacimiento que podría ser económico.

Reducción del riesgo entre tipos de yacimientos En la exploración minera, es más fácil buscar yacimientos más extendidos y normalmente más pequeños, o en lugares hasta ahora inexplorados.

Existe un problema cuando son tan pequeños los yacimientos que no resulta económico explotarlos. Los yacimientos y ocurrencias pequeñas son tan numerosos que consumirían rápidamente el dinero disponible para la exploración si fueran el objetivo.

La importancia del tamaño del objetivo en el riesgo de exploración se puede demostrar con la ecuación (78), en la que se estima la cantidad esperada de metal a partir de una población de distintos yacimientos:

$$E(metal) = E(n) \cdot 10^{(u_{tons} + u_{grade} + v_{argarde}/2)} \quad (78)$$

Donde:

$E(metal)$ es la cantidad esperada de metal.

$E(n)$ es el número esperado de depósitos.

(u) tons es la media del tonelaje registrado.

(var) tons es la varianza del tonelaje.

(u) grade es la media de la ley registrada.

(var) grade es la varianza de la ley.

Un cambio del 10% en la ley media (cambio de base = 1,1 o 0,9) da lugar a un aumento del 55% (cambio en el metal esperado = 1,55) o a una disminución del 35% en el contenido de metal esperado. El contenido de metal esperado cambia un 10% cuando hay un cambio del 10% en el número esperado de depósitos. Una variación del 10% en el tonelaje medio da como resultado un aumento del 650% (no se muestra) o una disminución del 85% en el contenido de metal esperado.

4.6. Reducción del riesgo dentro de los tipos de yacimientos

La estrategia de centrar la exploración sólo en los yacimientos de categoría mundial tiene la ventaja de que el riesgo de pérdida económica por la explotación de un yacimiento no rentable se reduce considerablemente a costa de tener pocos o ningún yacimiento que examinar; es decir, puede que no quede ningún yacimiento económico de categoría mundial por descubrir en un entorno de exploración específico.

También existe la posible pérdida de depósitos que son económicos pero que no se examinan porque parecen ser más pequeños que algún tamaño predeterminado. Aumentando el riesgo económico, es posible reducir el riesgo de no encontrar un yacimiento mineral. El equilibrio entre los filtros económicos, la teoría geológica y la distribución de los tamaños de los yacimientos que quedan en un entorno de exploración ofrece oportunidades para reducir el riesgo. La experiencia en la exploración petrolera demuestra que los depósitos más grandes tienden a ser descubiertos en las primeras etapas de la exploración.

La localización temprana de los yacimientos más grandes reduce el tamaño y el valor de los yacimientos restantes y afecta a las posibilidades de descubrimiento porque las posibilidades de descubrimiento están en función del tamaño del yacimiento. En un análisis de la exploración petrolífera de la cuenca del río Powder, en Wyoming, Drew (1975) demostró que algunos exploradores podían reducir su riesgo de fracaso en aproximadamente un 43% explorando alrededor del descubrimiento de un gran yacimiento. Esta reducción del riesgo se produjo al precio de encontrar sólo un 36% más de petróleo por pozo.

El único estudio publicado sobre yacimientos metálicos que muestra una pauta de localización de grandes yacimientos al principio en el proceso de exploración fue sobre los depósitos de mercurio en California. Los yacimientos de oro epitermal en Nevada y los de carbonatita en Brasil no muestran ninguna relación entre el tamaño y el orden de orden de los descubrimientos. Sin embargo, en ambos ejemplos, los grandes descubrimientos.

4.7. Reducción del riesgo de origen económico

La mayor parte del riesgo de fracaso por motivos económicos o técnicos se debe a que los precios de los productos básicos son inferiores a los previstos, las reservas de mineral son inferiores a las estimadas, los costes son superiores a los estimados, las dificultades de beneficio,

como la escasa recuperación, los tipos de cambio o el retraso en el desarrollo. Los fenómenos naturales, como las inundaciones, también suponen un riesgo, como demostró la sequía en la mina de Ok Tedi (Papúa Nueva Guinea) en 1997.

Algunos recomiendan ajustar el riesgo aumentando la rentabilidad económica exigida para una inversión. Esta estrategia sólo es adecuada cuando hay múltiples inversiones con factores de riesgo independientes. En la exploración y el desarrollo de minerales hay otras medidas más específicas que pueden adoptarse para reducir el riesgo.

En el caso de los grandes yacimientos de baja ley, los errores en las estimaciones de ley son una fuente importante de riesgo. La fiabilidad de las estimaciones de la ley.

La fiabilidad de las estimaciones de la ley y el tonelaje de las reservas de mineral suele estar en función de la cantidad de información recopilada. Si las leyes o el tonelaje reales están por debajo de ciertos valores, el yacimiento será antieconómico, es decir, habrá pérdidas económicas. La perforación de más pozos disminuye el valor esperado del yacimiento y reduce la incertidumbre del valor del yacimiento. El beneficio marginal de obtener más información para reducir el riesgo de una mala inversión debe sopesarse con los costes en dinero y tiempo de recopilar información adicional (Dirven , y otros, 2018).

La gran variación de los precios de las materias primas es habitual en la industria minera. Los efectos de los distintos precios en la economía de la minería pueden mostrarse moviendo las posiciones de las minas en la gráfica hacia arriba o hacia abajo para reflejar el cambio de precio correspondiente.

Bibliografía

- Automate Excel.com*. (2022). Obtenido de <https://www.automateexcel.com/es/stats/grafico-q-q-excel/>
- Bárdossy, G., & Fodor, J. (2001). Traditional and New Ways to Handle Uncertainty in Geology. *Natural Resources Research, Vol. 10, No. 3*.
- Callahan, W. H. (1977). The history of the discovery of the zinc. *Econ. Geology*, v. 72, págs. 1382-1392.
- Cochilco. (15 de Agosto de 2022). *Cochilco Ministerio de minería Chile*. Obtenido de <https://www.cochilco.cl/Paginas/Estadisticas/Bases%20de%20Datos/Precio-de-los-Metales.aspx>
- Day, R. A., & Underwood, A. L. (1991). Quantitative analysis: Prentice Hall. *Englewood Cliffs, New Jersey*, pág. 768.
- Devore, J., & Berk, K. (2012). *Modern Mathematical Statistics with Applications* (2da ed.). Springer Science+Business Media.
- Dirven , B. B., Pérez, R., Cáceres, R. J., Tito, A. T., Gómez , R. K., & Ticona, A. (2018). *El desarrollo rural establecido en las áreas Vulnerables*. Lima: Colección Racso.
- Faber , M., & Stewart, M. (2003). Risk assessment for civil engineering facilities: critical. En *Reliability Engineering and System Safety* (págs. 80, pp. 173 - 184).
- Ferson, & Kuhn. (1992). Propagating uncertainty in eco- logical risk analysis using interval and fuzzy arithmetic, in Zanetti P., ed.,. *Computer techniques in environmental studies: Elsevier Applied Science, London*,, págs. 387 – 401.
- Ferson, S., Root, W., & Kuhn, R. (1999). RAMAS Risk Calc: Risk assessment with uncertain numbers. *Applied Biomathematics, Setauket, New York*, pág. 184.

- Frew, R. (1990). Proceedings of MINCOST'90. En *Estimating the cost of a feasibility study for a mining project* (págs. p. 4., 5 - 7).
- Garcia Olmos, C. F. (2019). *Hidrologia en la ingeniería forestal*. Obtenido de https://www.researchgate.net/figure/Figura-321-Distribucion-log-normal-en-funcion-de-x_fig5_333881309
- Kenzap, S., & Kazakidis, V. (2011). Assessment of operating risk in mine feasibility. En *Proceedings of 22nd World Mining Congress* (pág. P. 30). Istanbul.
- Kouda, D. A. (1998). Examining Risk in Mineral Exploration. *Natural Resources Research*, Vol. 8, No. 2.
- Mackenzie, B. W. (1994). Evaluating and controlling geological risk, in Managing Risk. *4th Large Open Pit Mining Conf. Proc. Australasian Inst. Mining and Metallurgy (Perth, Australia)*, págs. 47-55.
- Mann, C. J. (1993). Uncertainty in geology, in Davis, J. C., and Herzfeld, U. C., eds. *Computers in geology – 25 years of progress: Oxford Univ. Press, Oxford*, , págs. 241–254.
- Matepedia. (12 de Setiembre de 2016). Obtenido de <http://matepedia-estadistica.blogspot.com/2016/09/caracteristicas-de-una-distribucion.html>
- O'Hara, T. (1982). Analysis of risk in mining projects. En *Canadian Mining and Metallurgical* (págs. N° 843, pp, 84 - 89).
- PNGWING. (s.f.). Obtenido de <https://www.pngwing.com/es/free-png-yhikr>
- Saavedra Rosas, J. (2014). *Análisis de Riesgo y Decisiones en Minería*. Santiago: Universidad de Chile .

- Serguei, K., & Vassilios, K. (2013). Operating risk assessment for underground metal mining systems: overview and discussion. En *Mining and Mineral Engineering* (págs. 175-200). Canada: Inderscience Enterprises Ltd.
- Slichter, L. B. (1960). The need of a new philosophy of prospecting. *Mining Engineering*, v. 12, págs. 570-575.
- Tovar, G. L. (1986). *El asentamiento y la segregación de los Blancos y Mestizos*. Bogotá: Cengage.
- Tukey, J. W. (1977). Exploratory data analysis . *Addisson-Wesley, Reading, Massachusetts*,, pág. 688 .
- Vilca Huayta, O. A. (2019). *La longitud media de propagación por la arista más larga de triangulaciones construidas desde puntos generados con distribuciones probabilísticas*. Puno: Universidad Nacional del Antiplano.