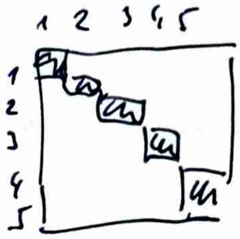
• Relace

→ podmnožina k. s. splňující danou vlastnost

Def: relace mezi množinami X, Y je libovolná podmnožina $X \times Y$

Relace na množině X = relace mezi X, X

→ pro $X = \{1,2,3,4,5\}$ → $(x,y) \in R \equiv xRy$

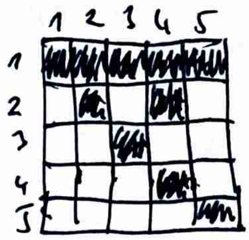


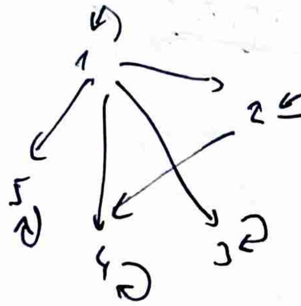
① **Rovnost:** $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$

↳ **Diagonální relace**

$$\Delta_X := \{(x,x) \mid x \in X\}$$ → vždy existuje

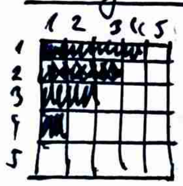
② **Dělitelnost:** $x \setminus y$





→ $2R2$
$1R4$

③ $x + y \leq 5$



④ $\emptyset$ prázdná relace
⑤ $X \times Y$ univerzální relace

} vždy existují

• Potenční množina

Def: Potenční množina množiny X obsahuje všechny $A \subseteq X$:

$$P(X) = 2^X = \{A \mid A \subseteq X\}$$

$$|P(X)| = 2^{|X|}$$

• **Inverzní relace**

Def: Pro relaci $R \subseteq X \times Y$ definujeme inverzní relaci $R^{-1} \subseteq X \times Y$:

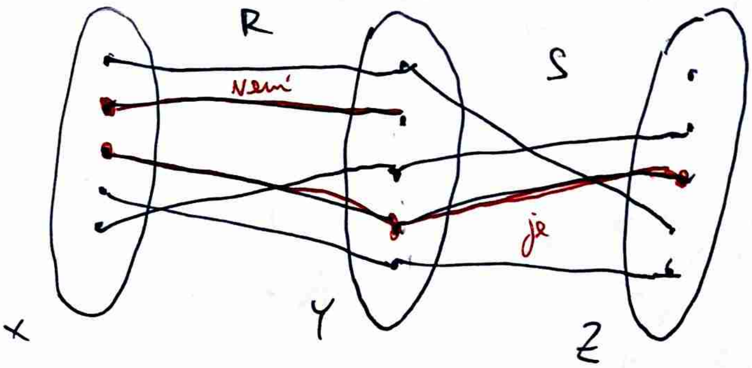
$$\forall x \in X, \forall y \in Y: y R^{-1} x \equiv x R y$$

→ obrázek se překlopí podle diagonály, u orientovaného grafa se otočí šipky

• **Složení relací**

Def: Pro relaci $R \subseteq X \times Y$ a $S \subseteq Y \times Z$ definujeme jejich složení $R \circ S \subseteq X \times Z$

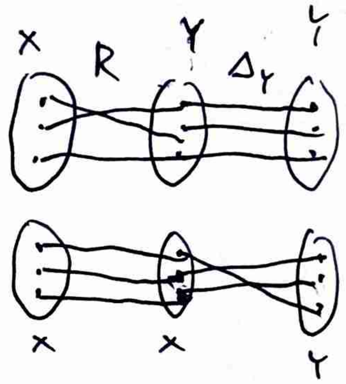
$$\forall x \in X, \forall z \in Z: x(R \circ S)z \Leftrightarrow (\exists y \in Y: xRy \wedge ySz)$$



$R \circ S = \{(x,z) \mid x \in X, z \in Z$, takových že $\exists y \in Y: (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$

př: $R \subseteq X \times Y$, Δ_Y $R \circ \Delta_Y = R$

$\Delta_X \circ R = R$

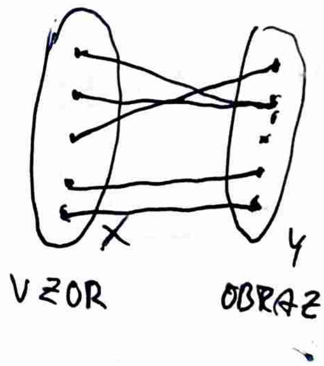


• **Zobrazení**

Def: Zobrazení z X do Y je relace f mezi X, Y t.ž.

$$\forall x \in X \ \exists! y \in Y: xRy$$

↳ existuje právě jeden $y \in Y$



→ značení $f: X \to Y$

pro $x \in X$ $f(x) = y \Leftrightarrow xfy$

pro $A \subseteq X$ $f[A] := \{f(a) \mid a \in A\}$ $f[A]$ = množina obrazů pro vzory A

① $\sin : \mathbb{R} \to \langle -1; 1 \rangle$

② $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ → přiřazení $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ -1 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$

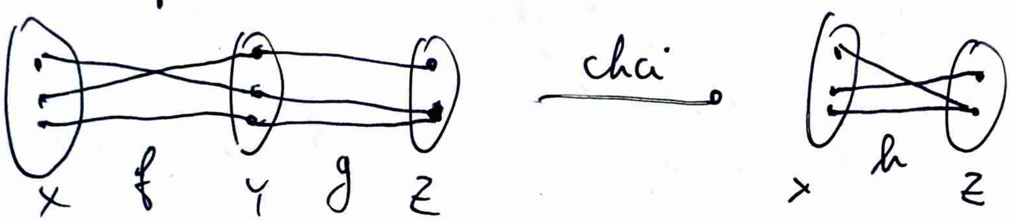
③ $\Delta_X : x \mapsto x$ ← identita / diagonální relace

④ <u>mohutnost množiny</u>

$$|\_| : P(\mathbb{N}) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

⑤ $f(a, b) = a + b : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- <u>Skládání funkcí</u>



→ to je $(f \circ g)(x)$

$\sin x$ x^2 : $x \to \sin x \to (\sin x)^2$! ne $\sin(x^2)$

⇒ <u>problém</u>: $(f \circ g)(x) = g(f(x))$: $g(f(x)) = y \Leftrightarrow f(x)\, g\, y$

$f(x) = z \Leftrightarrow x\, f\, z$

$\Rightarrow x\, f\, z \wedge z\, g\, y \equiv x (f \circ g) y$

$\Rightarrow y = (f \circ g)(x)$

- <u>Vlastnosti funkcí</u>

<u>Def</u>: Funkce $f : X \to Y$ je:

① <u>prostá (injektivní)</u> $\equiv \forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

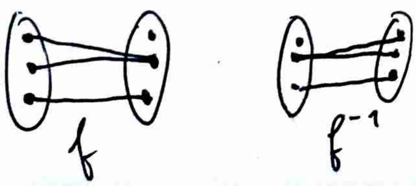
② <u>"na" Y (surjektivní)</u> $\equiv \forall y \in Y\ \exists x \in X : f(x) = y$ → vyčerpá celou Y

③ <u>1-1 (bijektivní)</u> $\equiv \forall y \in Y\ \exists! x \in X : f(x) = y$ → je prostá ∧ "na"

- <u>Inverzní funkce</u>

- pro funkci f je f^{-1} funkce ⇔ f je bijektivní

není velký problém ⇒ stačí omezit def. obor



→ 1 vzor → 2 obrazy ⇒ není fce

↘ 1 vzor → žádný obraz ⇒ není fce

• pro f prostou: f^{-1} je funkce z $Y' = f[X]$ do X

↳ všechny obrazy

• Vlastnosti relací

Def: Relace R na X je

① Reflexivní $\equiv \forall x \in X: xRx \equiv \Delta_X \subseteq R$

② Symetrická $\equiv \forall x,y \in X: xRy \Leftrightarrow yRx \equiv R = R^{-1}$ — nestane se

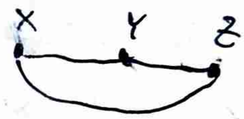
③ Antisymetrická $\equiv \forall x,y \in X;\ x \neq y: (xRy \Rightarrow \neg yRx) \equiv R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_X$

$x<y \Rightarrow \neg\, y<x$

④ Tranzitivní $\equiv \forall x,y,z \in X: xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz \equiv R \circ R \subseteq R$

$x<y \wedge y<z \Rightarrow x<z$

$x=y \wedge y=z \Rightarrow x=z$



Def: Relace R je ekvivalence $\equiv$

R je reflexivní $\wedge$ symetrická $\wedge$ tranzitivní

$=$ na $\mathbb{R}$ — geometrická shodnost a podobnost

$=$ na $\mathbb{Z}$

$\equiv$ mod k na $\mathbb{Z}$

↳ $x \equiv y \Leftrightarrow k \mid (x-y)$

• Ekvivalenční třída

Def: Pro R ekvivalence na X definuji ekvivalenční třídu prvku $x \in X$

$$R[x] := \{y \in X \mid xRy\}$$

Věta:

① $\forall x \in X: R[x] \neq \emptyset$

② $\forall x,y \in X: R[x] = R[y] \vee R[x] \cap R[y] = \emptyset$

③ $\{R[x] \mid x \in X\}$ jednoznačně určuje R

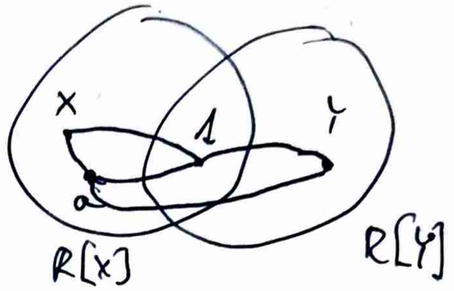
Důkaz:

① R je reflexivní $\Rightarrow xRx \Rightarrow R[x] \neq \emptyset$

② chceme ukázat, že $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset \Rightarrow R[x] = R[y]$

víme: $\exists t \in R[x] \cap R[y]$

chceme: $\forall a \in R[x]: a \in R[y]$



Ekv. t. $\Rightarrow$ víme $xRt \Rightarrow tRx \Leftarrow$ symetrie

$yRt \Rightarrow tRy$

$aRx \Rightarrow xRa$

tranzitivita: $aRx,\ xRt \Rightarrow aRt$

$aRt,\ tRy \Rightarrow aRy$

③ Ekv. třídy rozloží X na disjunktní neprázdné množiny, takové že uvnitř nich jsou všechny ekvivalentní se všemi a mezi množinami nejsou žádné ekvivalentní

• Rozklad

→ množina množin

Def.: Rozklad množiny X je množinový systém $\mathcal{S} \subseteq P(X)$ t.ž.:

① $\forall S \in \mathcal{S}: S \neq \emptyset$

② $\forall S, T \in \mathcal{S};\ S \neq T: S \cap T = \emptyset$

③ $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$

→ rozklady a ekvivalence jsou dva tentýž pohledy na stejný jev

• Symetrická diference množin

Def: Symetrická diference množin A a B je množina obsahující všechny jejich prvky, kromě těch společných

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

- Uspořádání

Def: Uspořádání na množině X je relace R na X, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

xRx — nenastane $xRy \wedge yRx$ pro $x \neq y$ — $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

- Uspořádaná množina

Def: Uspořádaná množina je usp. dvojice (X, R), kde X je množina a R je nějaké uspořádání na X.

Def: $x, y \in X$ jsou porovnatelné $\equiv xRy \vee yRx$

Def: Uspořádání je lineární (úplné) $\equiv$ každé dva prvky jsou porovnatelné

Def: Částečné uspořádání může a nemusí být úplné $\rightarrow$ ČUM

→ Každému uspořádání $\leq$ na X přiřadíme relaci $<$ na X:

$$a < b \equiv a \leq b \wedge a \neq b.$$

$<$ je tzv. ostré uspořádání.

Pozorování: $<$ není reflexivní (je ireflexivní $\forall a: \neg aRa$)
je antisymetrické
je tranzitivní

$\Downarrow$ není to uspořádání

→ Příklady

1. $(\mathbb{N}, \leq)$ lineární
2. $(\mathbb{Q}\ \leq)$ lineární, husté $\rightarrow \forall a < b\ \exists c: a < c < b$.
3. (X, Δ_X) žádné dva různé prvky nejsou porovnatelné $\rightarrow$ ČUM
4. $(\mathbb{N}^+, \backslash)$ $a \backslash a$, $a \backslash b \wedge b \backslash a \Rightarrow a = b \Rightarrow$ je antisym. — částečné
5. $(P(X), \subseteq)$ $A \subseteq A$, $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ — částečné
inkluze — $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

⑥ <u>lexikografické uspořádání</u>: Máme uspořádanou množinu znaků, abecedu $(X, \le)$

<u>Def</u>: $(X^2, \le_{LEX})$ ← chceme porovnávat řetězce znaků

$$(a_1, a_2) \le_{LEX} (b_1, b_2) \equiv a_1 < b_1 \vee (a_1 = b_1 \wedge a_2 \le b_2)$$

<u>Def</u>: $(X^*, \le_{LEX})$: $a_1, \dots a_k \le_{LEX} b_1, \dots b_l$

↳ všechny konečné posloupnosti prvků z X

$a = b$

$\Downarrow$

$a \le_{LEX} b$

$\exists i: a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots a_{i-1} = b_{i-1}, a_i \neq b_i$

- $a_i < b_i \Rightarrow a \le_{LEX} b$
- $a_i > b_i \Rightarrow a \not\le_{LEX} b$

a je prefixem b $\Rightarrow a \le_{LEX} b$

b je prefixem a $\Rightarrow a \not\le_{LEX} b \equiv \neg(a \le_{LEX} b)$

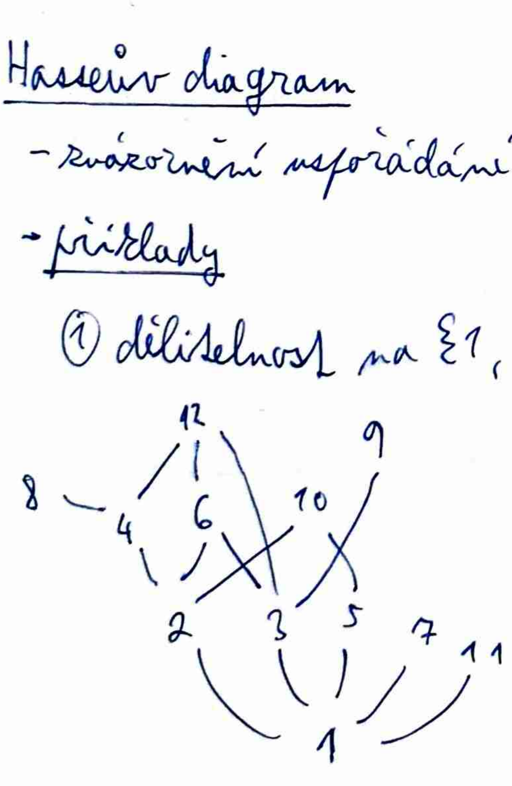
• <u>Relace bez prostředního předchůdce</u>

<u>Def</u>: $a \triangleleft b \equiv a < b \wedge (\nexists c: a < c \wedge c < b)$ ⇒ nekreslíme věci plynoucí z tranzitivity

• <u>Hasseův diagram</u>

- znázornění uspořádání → konečných částečně usp. množin ČUM
- <u>příklady</u>

① dělitelnost na $\{1, \dots 12\}$



(2, 12) není znázorněno, protože plyne z tranzitivity ⇒ $2|4 \wedge 4|12$

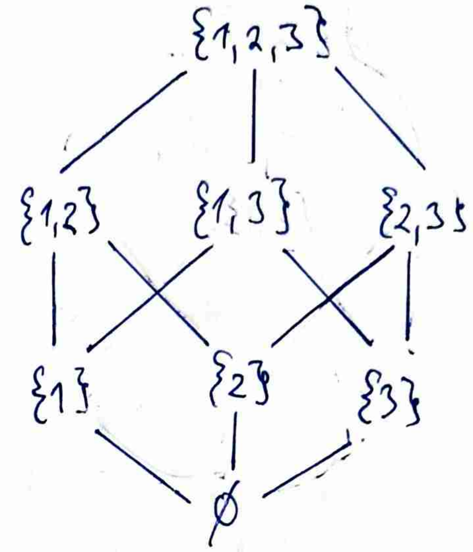
→ 8, 12, 9, 10, 7, 11 jsou max, ale ne největší!

↳ 1 je nejmenší i min

② $(P(\{1,2,3\}, \subseteq)$

→ $\{1,2,3\}$ je maximální i největší prvek

→ $\emptyset$ je minimální i nejmenší prvek



Def: Pro ČUM $(X, \leq)$ je $x \in X$:

V diagonální relaci je každý prvek min a max zároveň

① minimální $\equiv \nexists y \in X : y < x$

② nejmenší $\equiv \forall y \in X : x \leq y$

③ maximální $\equiv \nexists y \in X : y > x$

④ největší $\equiv \forall y \in X : x \geq y$

Věta: Každá konečná, neprázdná ČUM má minimální a maximální prvek.

Důkaz: Zvolíme $x_1 \in X$ libovolně ← důkaz pro minimální

1, buď x_1 je minimální ✓

2, nebo $\exists\, x_2 < x_1$ a s ním pokračuji

$\Rightarrow x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_s$

Tohle nemůže běžet nekonečně dlouho, aniž by se prvek zopakoval

$\Rightarrow$ Pokud $s > |X|$ pak $\exists\, i,j : i \neq j : x_i = x_j$

$x_i > x_{i+1} > \dots > x_j = x_i$

tranz. $\Rightarrow x_i > x_j = x_i \Rightarrow x_i > x_i \Rightarrow$ SPOR

- **Řetězce a antiřetězce**

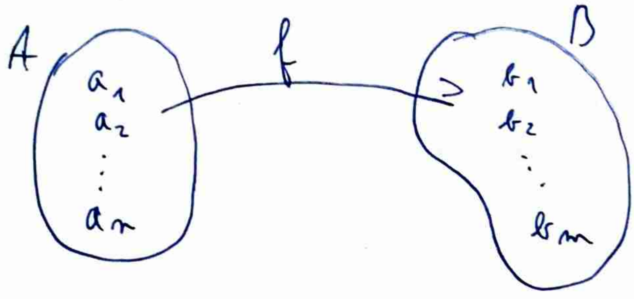
Def: $A \subseteq X$ pro ČUM $(X, \leq)$ je

① řetězec $\equiv (A, \leq)$ je lineární UM $\iff$ všechny prvky jsou porovnatelné

② antiřetězec $\equiv \forall a, b \in A$, $a \neq b$ jsou neporovnatelné prvky

- **Kombinatorika**

① # funkcí: $A \to B$



$|A| = n$ $\qquad$ $|B| = m$

$\left.\begin{array}{l} \to m \text{ možností pro } f(a_1) \\ \to m \text{ možností pro } f(a_2) \\ \quad \vdots \\ \to m \text{ možností pro } f(a_n) \end{array}\right\}$ celkem m^n možností

→ je jedno co je to, za prvky, můžeme je považovat za čísla

Def: $[n] := \{1, 2, \ldots n\}$ $\Rightarrow$ $\# f: [n] \to [m] = m^n$

② $|P([n])|$

Def: Charakteristická funkce podmnožiny $A \subseteq X$ je $C_A : X \to \{0,1\}$

$$C_A(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A \\ 1 & x \in A \end{cases}$$

BIJEKCE $A \mapsto C_A$

$\Rightarrow$ každé podmnožině můžeme jednoznačně přiřadit funkci a každé funkci jdoucí z X do $\{0,1\}$ můžeme přiřadit podmnožinu

→ každé podmnožině $A \subseteq P([n])$ přiřadíme C_A a spočítáme je.

→ funkcí $f: [n] \to [2]$ je 2^n

$\Rightarrow |P([n])| = 2^n$

→ nebo taky máme n voleb jestli prvek je nebo není v $A \subseteq X$.

③ # Sudých vs. # Lichých podmnožin *

$\mathcal{S} := \{A \subseteq [n] \mid |A| \text{ je sudá}\}$
$\mathcal{L} := \{A \subseteq [n] \mid |A| \text{ je lichá}\}$

$\mathcal{S} \dot\cup \mathcal{L} = P([n])$

$\Rightarrow |\mathcal{S}| + |\mathcal{L}| = 2^n$

$\dot\cup \equiv$ sjednocení dvou disjunktních množin.

$\Rightarrow$ ukážeme $|\mathcal{S}| = |\mathcal{L}|$ a z toho
$|\mathcal{S}| = |\mathcal{L}| = 2^{n-1}$

$\Rightarrow$ Sestrojíme bijekci mezi $\mathcal{S}$ a $\mathcal{L}$ $\quad \rightarrow$ nefunguje to pro $\emptyset$

zvolím $a \in [n]$, $A \subseteq [n]$ libovolné, pak $f: 2^{[n]} \to 2^{[n]}$ je

$$f(A) = \begin{cases} A \cup \{a\} & \text{pokud } a \notin A \\ A \setminus \{a\} & \text{pokud } a \in A \end{cases} \equiv A \triangle \{a\}$$

f ze sudé množiny udělá lichou a pro každou sudou najde nějakou lichou a naopak $\Rightarrow$ je to ta hledaná bijekce.

④ # $f: [n] \to [m]$ prosté

pro $f(1)$ máme m možností
pro $f(2)$ ..... $m-1$
$\vdots$
pro $f(n)$ ..... $m-n+1$

n-tá klesající mocnina m

$m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1) = m^{\underline{n}}$

pro $n > m$ ten součin vyjde 0
$\Rightarrow$ není nutné přidávat podmínky

③* $$(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$$

$$\Rightarrow 0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots$$

$$\Rightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots$$

$$\Rightarrow |\mathcal{S}| = |\mathcal{L}|$$

$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$

5 Permutace → existují dva pohledy na věc

a, Permutace jsou bijekce z A do A

$A \xrightarrow{h} A$

→ $|A| = |A|$ ⇒ pokud je zobrazení prosté, tak je i „na"

⇒ # bijekcí = # prostých ⇒ # permutací = $n^{\underline{n}} = n!$

b, Permutace jsou lineární uspořádání na $[n]$

→ v lineárním uspořádání vždy ∃ nejmenší prvek

⇒ postupným odebíráním nejmenších prvků si je můžeme očíslovat $|A| = n$

⇒ # permutací = # způsobů očíslování n prvků → což jsou nějaké bijekce $[n] \to [A]$

⇒ # permutací = $n^{\underline{n}} = n!$

6 # k-tic uspořádaných s opakováním – variace s opakováním

= # prvků kartézké mocniny = $|X^k|$, $|X| = n$.

→ každou takovou k-tici lze popsat pomocí fce $f: [k] \to X$ | $f(i)$ = i-tý prvek k-tice

⇒ takových funkcí je $|X|^k = n^k$ ⇒ $|X^k| = |X|^k$

→ funguje to i pro nekonečné posloupnosti prvků z X ⇒ $f: \mathbb{N} \to X$

k-tic uspořádaných bez opakování – variace bez opakování

→ zase to zavádějeme pomocí funkcí, ale prvky se nesmí opakovat, takže nás zajímají pouze prosté funkce $f: [k] \to X$.

⇒ takových funkcí je $n^{\underline{k}}$

k-tic neuspořádaných bez opakování – kombinace bez opakování

= # k-prvkových podmnožin X, $|X| = n$

→ každou neuspořádanou k-tici lze lineárně uspořádat $k!$ způsoby

⇒ # k-tic neuspořádaných · $k!$ = # k-tic uspořádaných

⇒ # k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny je $\frac{n^{\underline{k}}}{k^{\underline{k}}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$

$n, k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$.

(7) # Relací na X, $|X| = n$

→ relaci zapíšeme do relační matice, kde $A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{když } iRj \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

→ každé políčko může být buď 0 nebo 1

a mám n^2 políček $\Rightarrow \underline{\underline{2^{n^2}}}$

Reflexivních relací na X

$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ → na diagonále budou jedničky ⇒ mám jen $n^2 - n$ voleb

$\Rightarrow \underline{\underline{2^{n^2-n}}}$

Symetrických relací na X

→ volitelná je diagonála (n) a vše co je ostře nad diagonálou $\left(\frac{n^2-n}{2}\right)$, prvky pod diagonálou okopírují $\Rightarrow \underline{\underline{2^{\frac{1}{2}n(n+1)}}}$

Antisymetrických relací na X

→ na diagonále mám 2 možnosti $(0|1)$

→ mimo diagonálu mohou nastat 3 situace: $\begin{bmatrix} \diagdown & 0 \\ 1 & \diagdown \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \diagdown & 1 \\ 0 & \diagdown \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \diagdown & 0 \\ 0 & \diagdown \end{bmatrix}, \cancel{\begin{bmatrix} \diagdown & 1 \\ 1 & \diagdown \end{bmatrix}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{2^n \cdot 3^{\frac{1}{2}n(n-1)}}}$

- **Množina všech k-prvkových podmnožin**

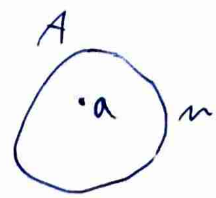
Def: Množina všech k-prvkových podmnožin množiny A se značí

$$\binom{A}{k} := \{B \subseteq A \mid |B| = k\} \quad \text{a} \quad \left|\binom{A}{k}\right| = \binom{|A|}{k}$$

- **Kombinační čísla**

  - $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, protože sčítám všechny podmnožiny a těch je 2^n

  - $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$



→ vezmu si množinu A s prvkem $a \in A$, $|A| = n$

k-prvkové $B \subseteq A$ → $a \notin B \Rightarrow \binom{n-1}{k}$

↘ $a \in B \Rightarrow \binom{n-1}{k-1}$

k-prvkových $B \subseteq A$ je celkem $\binom{n}{k}$ ▨

• **Binomická věta**

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N}: \ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Důkaz:

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$a \cdot a \cdot \ldots \cdot b = a^{n-k} b^k$$ → z k členů si vezmu b

⇒ a si vezmu z $n-k$ členů

⇒ z n členů si vybírám k b-ček

⇒ celkem $\binom{n}{k}$ způsobů jak to udělat ☒

① $\underline{a=b=1}$: $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k \Rightarrow 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

② $\underline{a=1,\ b=-1}$: $(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots = 0$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$$

⇒ sudých podmnožin je stejně jako lichých

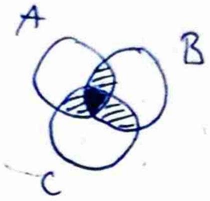
③ **# k-tic neuspořádaných s opakováním**

→ z n prvků vybírám k-tice ⇒ rozdělení k kuliček do n přihrádek

$\bullet\bullet\bullet | \bullet \ | \bullet\bullet \ | \quad | \bullet$ ⇒ $n-1$ čar a k kuliček, celkem $n+k-1$ pozic

(pro $n=5$, $k=7$) ⇒ těch k-tic je $\underline{\underline{\binom{n+k-1}{k}}}$

• Princip inkluze a exkluze



1, pro 2 množiny: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

2, pro 3 množiny: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Věta: Pro konečné množiny $A_1, A_2, \dots A_n$ platí

1) $$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

→ průnik k množin podle I

kolika-tice množin pronikáme

alternace znaménka

→ suma všech možných průniků k množin

k-prvkové seznamy indexů od 1 do n ⇒ I jsou indexsové množiny

2) $$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

1) **Důkaz:** $A := \bigcup_i A_i$. Nechť $a \in A$. Nalevo přispěl jednou. Kolikrát napravo?

⇒ Nechť $(\# i : a \in A_i) = t$ → a leží v t množinách

1 $k > t$ ⇒ v té k-tici je alespoň 1 množina bez a ⇒ přispěje 0-krát

2 $1 \leq k \leq t$ ⇒ těch k-tic s a je $\binom{t}{k}$ ⇒ přispěje $(-1)^{k+1}\binom{t}{k}$-krát

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{t} (-1)^{k+1}\binom{t}{k} = -\sum_{k=1}^{t} (-1)^{k}\binom{t}{k} = -\left(\sum_{k=0}^{t} (-1)^{k}\binom{t}{k} - \binom{t}{0}\right) = -(0-1) = \underline{1}$$

Q.E.D.

2) **Důkaz:** $$\prod_{i=1}^{n} (1+x_i) = \sum_{I \subseteq [n]} \prod_{i \in I} x_i \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} (1-x_i) = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} x_i$$

⇒ Nechť $A := \bigcup_i A_i$. Pro $X \subseteq A$: $C_X : A \to \{0,1\}$, $C_X(a) = \begin{cases} 1 & a \in X \\ 0 & a \notin X. \end{cases}$

⇒ Všimněme si, že platí vztahy. V 3 využijeme $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$:

1 $C_X \cdot C_Y = C_{X \cap Y}$ 3 $1 - C_{X \cup Y} = (1 - C_X)(1 - C_Y)$

2 $C_{\overline{X}} = 1 - C_X$ 4 $\sum_{a \in A} C_X(a) = |X|$

⇒ Posazením $x_i = C_{A_i}$ dostaneme

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - C_{A_i}) = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} C_{A_i}$$

$$1 - C_{\bigcup_i A_i} = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} C_{\bigcap_{i\in I} A_i} + 1$$

↳ nechceme prázdný průnik

prázdný součin byl 1

Vztah ③ platí pro libovolné mnoho množin:

$$\overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} \dots$$

$$1 - C_{A\cup B\cup C} = (1 - C_A)(1 - C_B)(1 - C_C) \dots$$

Podobně i vztah ④ platí pro libovolné mnoho množin

$$C_{\bigcup_i A_i} = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} C_{\bigcap_{i \in I} A_i}$$

→ nyní ty funkce vyhodnotíme a výsledky sečteme

$$\sum_{a\in A} C_{\bigcup_i A_i}(a) = \sum_{a \in A} \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} C_{\bigcap_{i\in I} A_i}(a)$$

→ využijeme vztah ④

$$\Rightarrow \left|\bigcup_i A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

Q.E.D.

- **Problém šatnářky** ⇒ # permutací bez pevného bodu $= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

Po divadla přišlo n pánů s klobouky, které odložili v šatně. Po skončení představení vydala šatnářky pánům klobouky zcela náhodně. Pst. že žádný pán nedostal svůj klobouk = ?

- rozdání klobouků je nějaká bijekce klobouky → páni, takže je to permutace

⇒ Uvažme množinu všech permutací na $[n]$. $S_n := \{\pi \mid \pi \text{ je permutace na } [n]\}$

↳ pokud pán i dostal svůj klobouk, pak $\pi(i) = i$ ← pevný bod

⇒ Stačí najít pst. že nějaká náhodná permutace π nemá žádný pevný bod

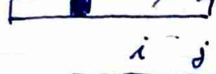
$$\check{S}_n := |\{\pi \in S_n \mid \forall i : \pi(i) \neq i\}| \Rightarrow P_r = \frac{\check{S}_n}{n!}$$ ← přes všech permutací

$$A := \{\pi \in S_n \mid \exists i : \pi(i) = i\} \Rightarrow \check{S}_n = n! - |A| \Rightarrow P_r = 1 - \frac{|A|}{n!}$$

$$A_i := \{\pi \in S_n \mid \pi(i) = i\} \Rightarrow A = \bigcup_i A_i \quad , \ |A_i| = (n-1)!$$

$$|A_i \cap A_j| = (n-2)!$$

i, n-1 prvků



i, j, n-2 prvků

atd.

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}$$

$$\Rightarrow P_r = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}}.$$

Pro $n \to \infty$ $P_r \to e^{-1} = \frac{1}{e}$.

• Odhady faktoriálu

$2\cdot 2\cdot 2 = 8$, $2^4 = 16$ → násobím 2

1) $2^n \le n! \le n^n$ pro $n \ge 4$: $1\cdot 2\cdot 3 = 6$, $4! = 24$ → násobím č. > 2

→ $n(n-1)! \le n\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1} = 2\left(\frac{n}{2}\right)^n$

2) $n^{\frac{n}{2}} \le n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ ⇒ $\frac{n}{2}\log(n) \le \log(n!) \le n\log(n)$ ⇒ $\log(n!) \in \Theta(n\log n)$

Dk: $n! = \sqrt{n!}\cdot\sqrt{n!} = \sqrt{1\cdot n}\sqrt{2\cdot(n-1)}\sqrt{3(n-2)}\cdots\sqrt{n\cdot 1}$ → $(*) = \sqrt{(k+1)(n-k)}$

$0 \le k \le n-1$

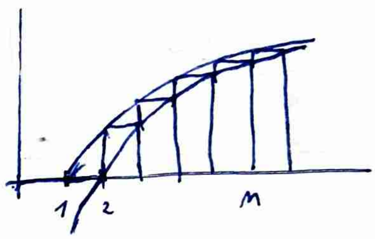
a) $\sqrt{n} \le (*) \Rightarrow n^{\frac{n}{2}} \le n!$

↳ $(k+1)(n-k) = kn + n - k - k^2 = n + k(n-k-1) \ge n$ ∎

b) $\sqrt{xy} \le \frac{1}{2}(x+y) \Rightarrow n! \le \frac{1}{2^n}(1+n)(2+n-1)\dots(n+1) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ ∎

3) $e\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le n\cdot e\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$\ln(n!) = \ln(1) + \ln(2) + \dots + \ln(n)$



$\ln(n!) < \int_1^{n+1} \ln(x)\,dx$

$\ln(n!) > \int_2^{n+1} \ln(x-1)\,dx$

4) $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

• Odhady kombinačních čísel

1) $\left(\frac{n}{k}\right)^k \le \binom{n}{k} \le n^k$

$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$

a) $\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \le n^{\underline{k}} \le n^k$

b) $\frac{n}{k} \ge \frac{n}{k}$, ukážeme $\frac{n-1}{k-1} \ge \frac{n}{k}$ $\xrightarrow{\text{indukcí}}$ by členy rostou ⇒ $\left(\frac{n}{k}\right)^k \le \binom{n}{k}$

↳ $nk - k \ge nk - n \Rightarrow n \ge k$ ∎

2) $\left(\frac{n}{k}\right)^k \le \binom{n}{k} \le \left(\frac{en}{k}\right)^k$

• Odhad prostředního prvku řady P. Δ

max ≥ arit. průměr

1) $\frac{1}{2n+1}4^n \le \binom{2n}{n} \le 4^n$ součet toho ř. je 4^n, $\binom{2n}{n} \ge \frac{4^n}{2n+1}$ ∎

2) $\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \le \binom{2n}{n} \le \frac{4^n}{\sqrt{2n}}$

• <u>Graf</u>

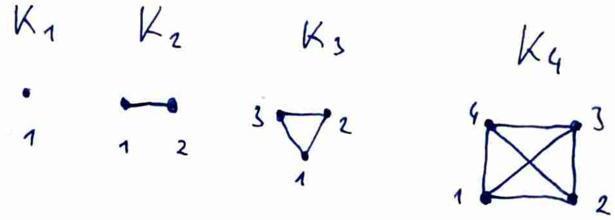
<u>Def</u>: <u>Graf</u> je (V,E), kde V je konečná neprázdná množina vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran.

<u>Značení</u>: Když G je graf, pož jeho vrcholy jsou $V(G)$ a hrany jsou $E(G)$

• <u>Úplný graf</u> - K_n - kompletní

$V(K_n) := [n]$

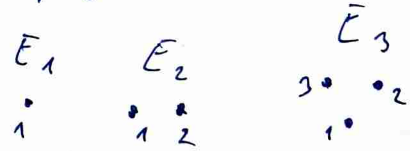
$E(K_n) := \binom{V(K_n)}{2}$



• <u>Prázdný graf</u> - E_n - empty

$V(E_n) := [n]$

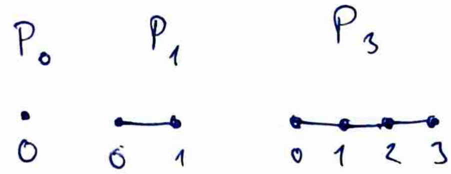
$E(E_n) := \emptyset$



• <u>Cesta</u> - P_n - path → P_n - n hran a $n+1$ vrcholů

$V(P_n) := \{0,1,\dots n\}$

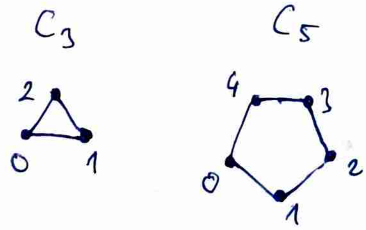
$E(P_n) := \{\{i, i+1\} \mid 0 \le i \le n-1\}$



• <u>Kružnice</u> - C_n - cyklus $n \ge 3$

$V(C_n) := \{0,1,\dots n-1\}$

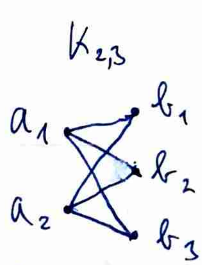
$E(C_n) := \{\{i, (i+1) \bmod n\} \mid 0 \le i \le n-1\}$



• <u>Úplný bipartitní graf</u> $K_{m,n}$

$V(K_{m,n}) = \{a_1,\dots a_m, b_1,\dots b_n\}$

$E(K_{m,n}) = \{\{a_i, b_j\} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$

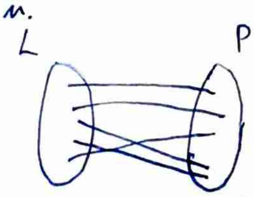


• <u>Bipartitní graf</u> → <u>Def</u>: G je bipartitní, když G je podgraf nějakého $K_{m,n}$.

<u>Def</u>: Graf (V,E) je <u>bipartitní</u>

$\equiv \exists$ partity $L,P \subseteq V$ t.ž. $L \cup P = V$ a $L \cap P = \emptyset$ a

$\forall e \in E: |e \cap L| = 1 \wedge |e \cap P| = 1$



<u>Příklady</u>:

→ $K_3, K_4, \dots$ obsahují Δ

→ K_1, K_2, E_n, P_n → sudé vrcholy $= L$ a liché vrcholy $= P$

C_n → n sudé ↗, n liché nejde

Bipartitní grafy neobsahují liché cykly.

• **Izomorfismus grafů**

Def: Grafy $G=(V,E)$ a $G'=(V',E')$ jsou izomorfní ($G \cong G'$)

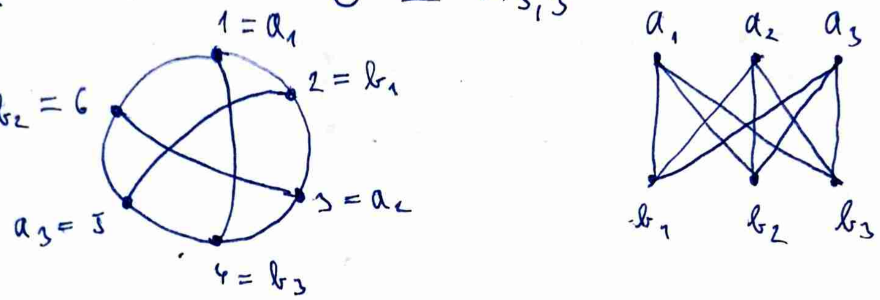
$\equiv \underbrace{\exists f: V \to V'}$ t.ž. $\forall u,v \in V: \{u,v\} \in E \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E'$

↳ izomorfismus grafů G a G'

→ jsou izomorfní, pokud se liší pouze pojmenováním vrcholů

→ jsou izomorfní, pokud mezi V a V' ∃ bijekce zachovávající vlastnost být hranou

Příklad $G \cong K_{3,3}$



$G \ncong K_5 \to |V(G)| \neq |V(K_5)|$

$G \ncong K_6 \to |E(G)| \neq |E(K_6)|$

Pozorování: $\cong$ je ekvivalence na libovolné množině grafů

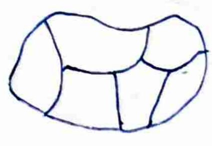
- izomorfní grafy mají stejný počet vrcholů, hran, △, ...

• **# grafů na n vrcholech**

- pro každou dvojici vrcholů volíme jestli je nebo není hrana $\Rightarrow \underline{2^{\binom{n}{2}} \approx 2^{n^2}}$

• **# neizomorfních grafů na n vrcholech**

- my tu množinu všech grafů na n vrcholech rozdělíme podle ekvivalence



⇒ # ekvivalenčních tříd izomorfismu

↳ ke každému grafu ∃ nejvýše n! izomorfních grafů

↳ každá permutace vrcholů mi dá nějaký izomorfní graf

↳ možná některý graf dostaneme vícekrát: 1—2 •3 = 2—1 •3

$\Rightarrow$ # tříd izomorfismu $\underline{\geq \frac{1}{n!} 2^{\binom{n}{2}}}$

$\Rightarrow \log_2 \#\text{tříd} \geq \binom{n}{2} - \log_2(n!) \in \Theta(n^2 - n\log n) \in \Theta(n^2)$

$\to \log_2 \#\text{všech grafů} = \binom{n}{2} \in \Theta(n^2)$

⇒ to, že nějaké grafy jsou izomorfní je zanedbatelné, protože

$\underline{\log(\#\text{neizomorfních grafů}) \in \Theta(\log(\#\text{všech grafů}))}$

- <u>Stupeň vrcholu</u>

Def: Stupeň vrcholu v v grafu G: $\deg_G(v) := |\{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}|$

= počet hran incidentních s v.

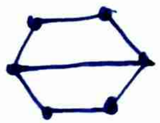
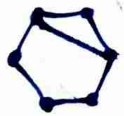
Def: Graf G je k-regulární $\equiv \forall v \in V(G): \deg_G(v) = k$. $\rightarrow K_n, C_n$

$\Rightarrow$ G je regulární $\equiv$ G je k-regulární pro nějaké k.

- <u>Skóre grafu</u>

Def: Skóre grafu je posloupnost stupňů vrcholů, nezáleží nám na pořadí.

$\rightarrow$ grafy se stejným skóre nemusí být izomorfní.

$\rightarrow$ Skóre: 2, 2, 2, 2, 3, 3  $\not\cong$ 

<u>Lemma</u>: V grafu $G = (V, E)$ platí $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2 \cdot |E|$.

$\uparrow$ princip sudosti

$\rightarrow$ Dk.: počítání konců hran dvěma způsoby.

<u>Důsledek</u>: Počet vrcholů lichého stupně je sudý.

• **Věta o skóre**: Posloupnost $D=(d_1\le d_2\le\ldots\le d_n)$ pro $n\ge 2$ je skóre grafu

$\Leftrightarrow 0\le d_n\le n-1$ a

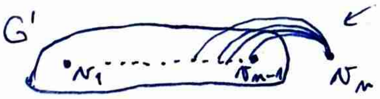
posloupnost $D'=(d_1',d_2',\ldots d_{n-1}')$ je skóre grafu

$$d_i' = \begin{cases} d_i-1, & \text{pro } i\ge n-d_n \\ d_i, & \text{pro } i<n-d_n. \end{cases}$$

Ukázka: 333333 → 22233 → 1122 → 011 → 00 → 0 • ✓
↳ 33222 → ↳ 2112 → ↳ 101 → 000

Důkaz: ⇐: Nechť $\exists$ graf G' na $V'=\{v_1,\ldots v_{n-1}\}$ se skóre D' t.ž. $\forall i: \deg(v_i)=d_i'$.

Chci vyrobit graf G se skóre D.



⇒ přidal jsem v_n, $\deg(v_n)=d_n$ a posledním d_n vrcholům jsem zvýšil skóre o 1.

⇒: Ukážeme, že mezi všemi grafy se skóre D $\exists$ alespoň 1, pro který platí, že v_n je spojený s d_n předchozími ⇒ pak easy.
⇒ v tomto grafu budu moct odebrat poslední vrchol a dostanu G' se skóre D'.

$\mathcal{G}:=\{G \mid G \text{ je graf na } \{v_1,\ldots v_n\} \text{ t.ž. } \forall i: \deg(v_i)=d_i\}$
↳ $\mathcal{G}\neq\emptyset$ z předpokladu, že D je skóre grafu.

Lemma: $\exists G\in\mathcal{G}: \forall i\in\{n-d_n,\ldots n-1\}: v_iv_n\in E(G)$.

↳ z toho: $V(G')=V(G)\setminus\{v_n\}$, $E(G')=E(G)\cap\binom{V(G')}{2}$ ⇒ G' má skóre D'.

Dk: ① Pokud $d_n=n-1$, triviálně platí.

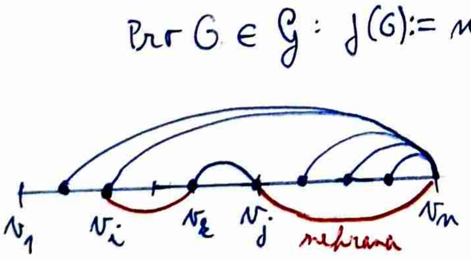
② $d_n<n-1$

Pro $G\in\mathcal{G}$: $j(G):=\max\{j \mid v_jv_n\in E(G)\}$ ⇒ Najdeme $G_*\in\mathcal{G}$, jehož $j(G)$ je nejmenší

⇒ Tvrzení: $\min\{j(G) \mid G\in\mathcal{G}\} = j(G_*) = n-d_n-1$.

↳ pro spor předpokládejme $j(G_*) > n-d_n-1$

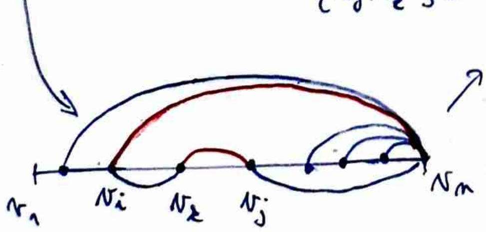
⇒ pak $\exists\, i<j: v_iv_n\in E(G)$



⇒ tedy $\exists k: \{v_iv_k\}\notin E(G)$, $\{v_jv_k\}\in E(G)$ } nevím kde to v_k je, ale $\exists$ protože $d_i\le d_j$

↗ ten graf můžu předělat: $V(G_k)=V(G_*)$

$E(G_k)=E(G_*)\setminus\{v_kv_j, v_iv_n\}\cup\{v_jv_n, v_iv_k\}$

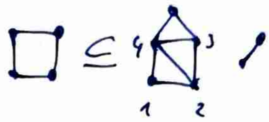


→ $G_k\in\mathcal{G} \wedge j(G_k)<j(G_*)$ ⇒ SPOR ↯

Q.E.D.

- **Podgrafy**

Def: Graf $G' = (V', E')$ je <u>podgrafem</u> grafu $G = (V, E)$ $\nearrow G' \subseteq G$
$\equiv V' \subseteq V \wedge E' \subseteq E \cap \binom{V'}{2}$.



Def: Graf G' je <u>indukovaným podgrafem</u> G
$\equiv V' \subseteq V \wedge E' = E \cap \binom{V'}{2}$.

 je podgraf indukovaný $\{1, 2, 3, 4\}$

$\rightarrow G[V'] = \left(V', E \cap \binom{V'}{2}\right)$ podgraf indukovaný množinou V'.

- **Cesta, kružnice, sled, tah**

Def: <u>Cesta</u> v grafu G: $G' \subseteq G$ t. ž. $G' \cong P_n$ pro nějaké n.
<u>Kružnice</u> v grafu G: $G' \subseteq G$ t. ž. $G' \cong C_n$ —— " ——.

Nebo: Cesta je nějaká posloupnost $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots e_n v_n$, kde
navzájem různé $\rightarrow \forall i: v_i \in V(G)$, $\forall j: e_j \in E(G)$
$\forall k: e_k = \{v_{k-1}, v_k\}$

Kružnice je posloupnost $v_0, e_0, v_1, e_1, \dots v_{n-1}, e_{n-1}$, kde
navzájem různé $\rightarrow \forall i: v_i \in V(G)$, $\forall j: e_j \in E(G)$
$\forall k: e_k = \{v_k, v_{(k+1) \bmod n}\}$

Def: <u>Sled</u> je zase nějaká posloupnost vrcholů a hran, kde se v_i a e_j mohou opakovat.

Def: <u>Tah</u>: hrany se neopakují, vrcholy mohou.

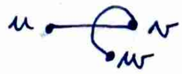
- **Souvislost grafu**

Def: Graf G je <u>souvislý</u> $\equiv \forall u, v \in V(G)$ $\exists$ cesta v G s koncovými vrcholy u, v.

Def: <u>Relace dosažitelnosti</u> $\sim_G$ je relace na $V(G)$ t. ž.
$u \sim v \equiv$ v G $\exists$ cesta mezi u, v. $\Rightarrow$ G je souvislý $\Leftrightarrow \sim_G$ je univerzální relace.

<u>Lemma</u>: Pro každý graf G je $\sim_G$ ekvivalence.

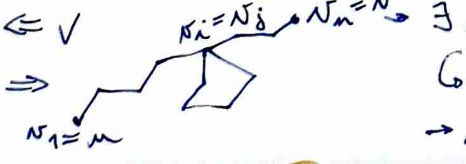
<u>Dk</u>:
- $u \sim u$ ✓
- $u \sim v \Rightarrow v \sim u$ ✓
- $u \sim v \wedge v \sim w \Rightarrow u \sim w$ ↗ když ty dvě cesty dám za sebe, tak dostanu nějaký sled ✓ ↗ ✓



∎

<u>Lemma</u>: Mezi vrcholy u, v vede <u>sled</u> $\Leftrightarrow$ mezi u, v vede <u>cesta</u>. → platí i v orient. grafech

<u>Dk</u>: $\Leftarrow$ ✓
$\Rightarrow$ $\exists$ sled $u = v_0, e_1, v_1, \dots e_n, v_n = v$ a $v_i = v_j$ pro nějaké $i < j$.



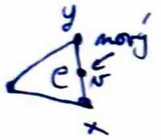
↳ vytvořím sled $v_0, e_1, v_1, \dots e_i, v_i, e_{j+1}, \dots e_n, v_n$.
→ tohle opakujeme dokud $\exists$ duplicitní vrcholy. ∎

• **Komponenty souvislosti**

Def: Komponenty souvislosti grafu G jsou podgrafy indukované ekvivalenčními třídami relace dosažitelnosti $\sim_G$.

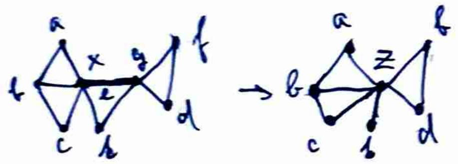
• **Operace s grafy**

- $G+v \to E'=E,\ V'=V\cup\{v\}$
- $G+e \to E'=E\cup\{e\},\ V'=V$
- $G-e \to E'=E\setminus\{e\},\ V'=V$
- $G-v \to E'=E\setminus\{e\in E \mid v\in e\},\ V'=V\setminus\{v\}$ nebo $G-v=G[V\setminus\{v\}]$
- $G\%e$ → dělení hrany $e=xy$



$$G\%e = G+v-e+xv+vy$$

- $G.e$ → kontrakce hrany $e=xy$



- $G(v\to z)$ ← okopírování hran
  $V'=V$
  $E'=E\cup\{uz \mid uv\in E\}$

$$G.e = G+z\ (x\to z)\ (y\to z)-x-y \cong G(x\to y)-x$$

• **Eulerovské grafy**

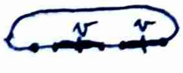
Def: Tah v grafu G je eulerovský ≡ tah obsahuje všechny vrcholy i hrany G.

tah ⟨ uzavřený / otevřený

Def: Graf je eulerovský ≡ má uzavřený eulerovský tah.

Věta: Graf G je eulerovský <=> G je souvislý a má všechny stupně sudé.

Důkaz: ⇒ mezi každými dvěma vrcholy vede nějaký sled ⇒ i cesta ⇒ G je souvislý.

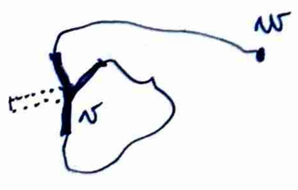
tah: 

→ všechny hrany incidentní s v se dají beze zbytku rozdělit do dvojic ⇒ deg(v) je sudý.

⇐ uvážíme nejdelší tah v G a ukážeme, že obsahuje všechny hrany i vrcholy ⇒ je euler.

→ Nechť T je jeden z nejdelších tahů v G.

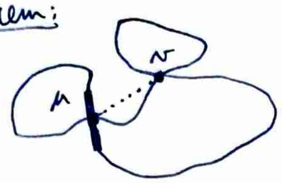
① T je uzavřený: Kdyby nebyl, tak začíná v a končí w.



Tah obsahuje lichý počet hran incidentních s v.
⇒ ∃ nějaká další hrana co inciduje s v a není na T
⇒ já tuhle hranu můžu předřadit T
⇒ dostanu delší tah ⇒ SPOR

② $\forall u$ vrchol na T: Pokud $uv \in E(G)$, pak $uv \in T$.

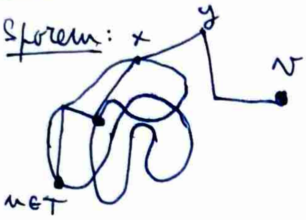
Sporem:



T je nejdelší ⇒ je uzavřený.
Rozpojím ho při libovolném průchodu u
a na konec připojím uv ⇒ dostal jsem delší tah ↯

③ $\forall v \in V(G)$ leží na T

Sporem:



Ze souvislosti plyne, že v G $\exists$ cesta mezi u, v.
→ ta cesta začíná $u \in T$ a končí $v \notin T$.
⇒ musí obsahovat hranu xy: $x \in T$, $y \notin T$.
⇒ podle ② to není nejdelší tah ⇒ SPOR.

⇒ T obsahuje všechny vrcholy ⇒ podle 2 obsahuje i všechny hrany
a podle ① je uzavřený ⇒ T je eulerovský. ■

• Orientované grafy

Def: Orientovaný graf je (V, E), kde $E \subseteq V^2 \setminus \Delta_V$. ↗ nedovolujeme smyčky
↳ jsou to uspořádané dvojice

• Cesty, sledy... – fungují stejně, ale hrany na sebe musí navazovat.

• Stupně: $\deg^{IN}(v) := \# u : (u, v) \in E$
$\deg^{OUT}(v) := \# u : (v, u) \in E$

$$\sum_{v \in V} \deg^{IN}(v) = \sum_{v \in V} \deg^{OUT}(v) = |E|$$

• Symetrizace grafu = podkladový graf

Def: Symetrizace orientovaného grafu $G = (V, E)$ je graf $G^0 = (V, E^0)$, kde
$E^0 = \{\{u, v\} \in \binom{V}{2} \mid (u, v) \in E \vee (v, u) \in E\}$ ← zapomeneme na orientaci

• Souvislost orientovaných grafů

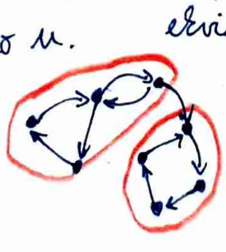
Def: Graf G je

① Slabě souvislý ≡ symetrizace grafu G je souvislá.
⇑
② Polosouvislý ≡ $\forall u, v \in V(G)$ $\exists$ cesta v G z u do v $\vee$ z v do u.
⇑
③ Silně souvislý ≡ $\forall u, v \in V(G)$ $\exists$ cesta v G z u do v.

Def: Relace obousměrné dosažitelnosti $\approx_G$ je relace na $V(G)$ t.ž. ← zase to je ekvivalence

$u \approx_G v \equiv$ v G $\exists$ cesta z u do v $\wedge$ $\exists$ cesta z v do u.

Def: Komponenty silné souvislosti orientovaného grafu G jsou podgrafy indukované ekvivalenčními třídami $\approx_G$.



- Eulerovské orientované grafy

Def: Orientovaný graf G je vyvážený $\equiv \forall v \in V(G): \deg^{IN}_G(v) = \deg^{OUT}_G(v)$.

Věta: Pro orientovaný graf G je ekvivalentní:

① G je vyvážený a slabě souvislý

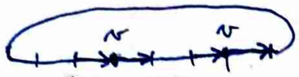
② G je eulerovský

③ G je vyvážený a silně souvislý.

Důkaz:

③ $\Rightarrow$ ① triviálně

② $\Rightarrow$ ③ G obsahuje uzavřený eulerovský tah $\Rightarrow \forall u, v \in G\ \exists$ cesta v G z u do v $\Rightarrow$ G je silně souvislý



↳ do v vstupuje stejně hran jako vystupuje $\Rightarrow$ G je vyvážený.

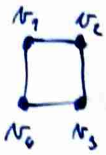
① $\Rightarrow$ ② Důkaz pro neorientované grafy funguje i zde.

- Matice sousednosti

Def: Pro graf G s vrcholy $V(G) = \{v_1, \dots v_n\}$ definujeme matici sousednosti

$$A_G \in \mathbb{R}^{n \times n}: \forall i,j: (A_G)_{ij} = [v_i v_j \in E(G)]$$ $\to$ 1 pokud $v_i v_j$ tvoří hranu

Def: Indikátor výroku φ je $[\varphi] := \begin{cases} 1, & \text{pokud } \varphi \text{ platí;} \\ 0, & \text{pokud } \varphi \text{ neplatí.} \end{cases}$



$$\to \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Pozorování: Pro neorientované grafy je A_G symetrická s nulami na hlavní diagonále.

Věta: Pro $A = A_G$ grafu G na vrcholech $v_1, \dots v_n$ platí:

$$\forall i,j: (A^k)_{ij} = \#\text{ sledů délky } k \text{ z } v_i \text{ do } v_j$$

Dk: Indukcí podle k. Základní případ $k=1$ platí z definice A.

- Indukční krok: $k-1 \to k$: $A^k = A^{k-1}A$

$$(A^k)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} \underbrace{(A^{k-1})_{is}}_{\text{počet sledů délky } k-1 \text{ z } v_i \text{ do } v_s} \underbrace{A_{sj}}_{[v_s v_j \in E(G)]} = \sum_{s: v_s v_j \in E(G)} (A^{k-1})_{is} = \#\text{ sledů délky } k \text{ z } v_i \text{ do } v_j. \blacksquare$$

- **Vzdálenost vrcholů**

Def: Pro souvislý graf $G=(V,E)$ definujeme vzdálenost

$$d_G: V^2 \to \mathbb{R} : \forall u,v \in V: d_G(u,v) := \text{min z délek cest mezi } u, v.$$

Lemma: $\forall u, v, w \in V$:

1. $d_G(u,v) \geq 0$
2. $d_G(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
3. $d_G(u,v) \leq d_G(u,w) + d_G(w,v)$
4. $d_G(u,v) = d_G(v,u)$

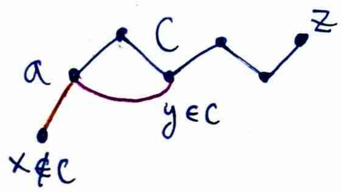
$\Big\}$ d_G je metrika

- **Stromy**

Def: • Strom je souvislý, acyklický graf
• les je acyklický graf
• list je vrchol stupně 1.

Lemma (o listu): Každý strom s alespoň 2 vrcholy má alespoň 1 list.

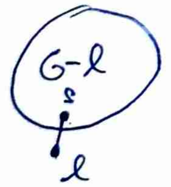
Dk: Nechť C je nejdelší cesta v tom stromě. Ukážeme, že koncové vrcholy té cesty jsou listy.



Kdyby a nebyl list, tak z a vede nějaká další hrana
1. do $x \notin C$ → můžu udělat delší cestu ↯
2. do $y \in C$ → to je spor s acykličností stromu. ↯ ∎

Lemma: Pro graf G s listem l: G je strom $\Leftrightarrow$ $G-l$ je strom.

Dk: $\Rightarrow$



• $G-l$ je souvislý, protože $\forall u,v \in V(G-l)$ $\exists$ cesta C v G mezi u, v a $C \subseteq G-l$.

• $G-l$ je acyklický, protože kdyby v $G-l$ byla kružnice, tak je i v G ↯.

$\Leftarrow$ • G je souvislý, protože přidáním l nerozbiju cesty v $G-l$ a $\forall u \in V(G)$ $\exists$ cesta mezi u a l → jako cesta mezi u a s + hrana sl.

• G je acyklický: kdyby v G byla kružnice bez l tak je i v $G-l$ a l se nemůže účastnit kružnic, protože má stupeň 1. ∎

- <u>Eulerova formule</u>

<u>Věta</u>: Pro každý strom T na n vrcholech je $|E(T)| = n-1$.

<u>Důkaz</u>: Indukcí podle n.

① $n = 1$ ✓

② $n \to n+1$: Nechť T je strom na $n+1$ vrcholech. Pak $\exists l$ list v T.

$\Rightarrow T' := T - l$ je strom na n vrcholech $\Rightarrow |E(T')| = n-1$

$\Rightarrow |E(T)| = |E(T')| + 1 = n - 1 + 1 = n$ ∎

- <u>Alternativní definice stromů</u>

<u>Věta (o charakterizaci stromů)</u>: Pro graf G jsou násl. tvrzení ekvivalentní:

① G je souvislý a acyklický.

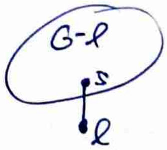
② G je jednoznačně souvislý $\equiv \forall u, v \in V(G)\ \exists!$ cesta v G mezi u, v.

③ G je minimální souvislý $\equiv$ G je souvislý a $\forall e \in E(G)$: $G-e$ není souvislý.

④ G je maximální acyklický $\equiv$ G je acyklický a $\forall e \in \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$: $G+e$ má cyklus.

⑤ G je souvislý a $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

<u>Důkaz</u>:



①⇒②: Indukcí otrháváním listů:

$G-l$ je strom $\Rightarrow$ $G-l$ je 1-značně souvislý $\Rightarrow$ G je 1-značně souvislý.

①⇒③: Indukcí: $G-l$ je strom $\Rightarrow$ $G-l$ je min. souv. $\Rightarrow$ G je min. souv.

①⇒④: Indukcí: G je max. acykl. $\because$ $G-l$ je max. acykl a přidáním hrany s l by vznikla kruž.

①⇒⑤: Stromy jsou souvislé a platí pro ně Eulerova formule.

- Implikace ②⇒①, ③⇒①, ④⇒① dokážeme obměnou.

¬①⇒¬②: G buď není souvislý v obsahuje kružnici $\Rightarrow$ není 1-značně souvislý.

¬①⇒¬③: G buď není souvislý v obsahuje kružnici $\Rightarrow$ není minimální souvislý.

¬①⇒¬④: když není acyklický, tak není max. acykl. a když není souvislý, tak můžu spojit kompon.

⑤⇒①: $|E(T)| = n-1 \Rightarrow \sum_v \deg(v) = 2n-2 < 2n \Rightarrow \exists v: \deg(v) < 2 \Rightarrow$ pro $n \geq 2\ \exists$ list

<u>Indukcí otrháváním listů</u>

① $n = 1$ ✓

② $n \to n+1$: G na $n+1$ vrcholech splňuje ⑤. $\exists l$ list v G.

$G-l$ taky splňuje ⑤ a podle i.p. $G-l$ je strom

$\Rightarrow G$ je taky strom. ∎

• Kostra grafu

Def: Kostra grafu G je $K \subseteq G$ t. ž. K je strom a $V(K) = V(G)$.

Lemma: G má kostru $\Leftrightarrow$ G je souvislý

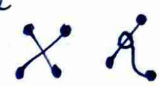
Dk: $\Rightarrow$ triviálně

$\Leftarrow$ dokud v G jsou kružnice, tak mažu hrany na nich → nakonec dostanu strom.

• Rovinné grafy

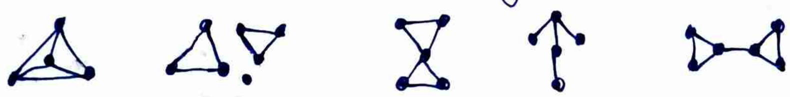
Def: Oblouk (křivka) je podmnožina roviny $\gamma = \{f(t) \mid t \in [0,1]\}$, kde $f: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ je prostá spojitá funkce. Body $f(0)$ a $f(1)$ jsou koncové body oblouku γ.

Def: Rovinné nakreslení grafu G je přiřazení různých bodů v rovině různým vrcholům G spolu s přiřazením oblouků každé hraně G t. ž. žádné dva oblouky nesdílí stejný bod v rovině – jedině ten koncový.



Def: Graf je rovinný, pokud má alespoň jedno rovinné nakreslení.

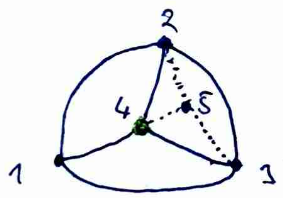
Def: Stěny nakreslení jsou části roviny uzavřené oblouky nakreslení a vnější stěna.



Pozorování: Hranice stěny souvislého grafu je nakreslení uzavřeného sledu.

Věta (Jordanova): Každá uzavřená křivka v rovině dělí rovinu na 2 části – vnějšek a vnitřek.

Příklad: K_5 není rovinná.



→ 4 může být buď uvnitř nebo venku

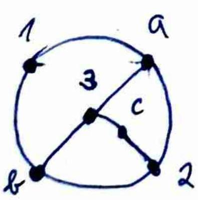
↳ uvnitř, pro venek by to bylo obdobné

↳ kde je 5? Nikam ji dát nemůžeme – musela by překročit nějakou uzavřenou křivku

→ kružnice (4-2-3) → 5 je uvnitř

↳ 1 je venku

$K_{3,3}$ není rovinná



c je uvnitř b 3 a 2

1 je venku

Pokud graf obsahuje K_5 nebo $K_{3,3}$ nebo nějaké jejich dělení, tak není rovinný.

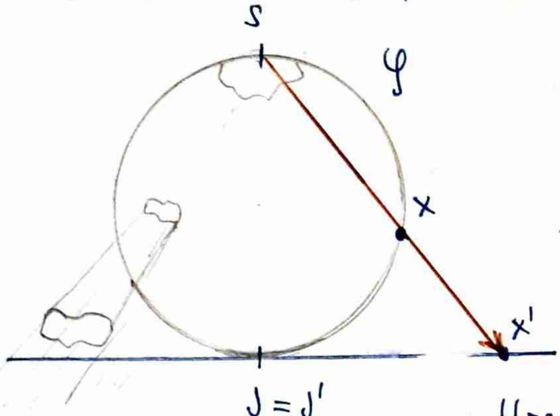
Věta (Kuratowského): Graf G je nerovinný $\Leftrightarrow$ obsahuje podgraf isomorfní s dělením K_5 nebo $K_{3,3}$.

↳ K_5 a $K_{3,3}$ jsou jediné překážky rovinnosti.

→ zda je graf rovinný lze rozhodnout v $O(|V|+|E|)$

• Kreslení na sféru

→ použijeme stereografickou projekci



→ obraz libovolného bodu kromě S najdu pomocí polopřímky vystřelené z S.

→ J se zobrazí sám na sebe

→ S nemá obraz

⇒ Spojitá bijekce mezi $\mathbb{S} \setminus \{S\}$ a $\mathbb{R}^2$

→ Hranice vnější stěny se mi promítne na kružnici na sféře, která obsahuje S.

→ Já tu sféru můžu pootočit tak, aby S byl uvnitř jiné stěny

⇒ dostal jsem nějaké jiné nakreslení téhož grafu

⇒ vnější stěnu lze zvolit

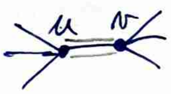
• Operace zachovávající rovinnost

$G-v$, $G-e$, $G+v$ ✓

$G+e$?

$G\%e$ ✓

$G.e$ ✓



→ ∃ nějaké ε okolí toho oblouku uv, kterým mohu protáhnout ty hrany co vedou do v k u.

• Eulerova formule

Věta: Nechť G je souvislý graf nakreslený do roviny,

$v := |V(G)|$, $e := |E(G)|$, $f :=$ #stěn nakreslení. Potom $v + f = e + 2$

Důkaz: Zvolíme v pevné, pak indukcí podle e.

① G má být souvislý → zvolme minimální souvislý graf (strom) $\xrightarrow{e = v-1}$ ⇒ $v + 1 = e + 2$ ✓

② $e-1 \to e$: mějme graf G s $e+1$ hranami → G už není strom

⇒ nechť x je hrana na kružnici v G

⇒ $G' := G - x$ ⇒ $v' = v$, $e' = e - 1$, $f' = f - 1$ ← podle Jordanovy věty ta hrana odděluje 2 stěny

⇒ pro G' věta platí podle indukčního předpokladu

$$\Rightarrow \quad v' + f' = e' + 2 \Rightarrow v + f - 1 = e - 1 + 2 \Rightarrow v + f = e + 2 \quad \blacksquare$$

• Rovinné grafy s lomenými čarami a úsečkami místo oblouků

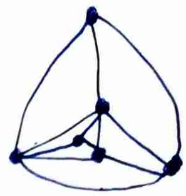
→ zajímavé je, že množina rovinných grafů se nijak nezmění

• Maximální rovinné grafy

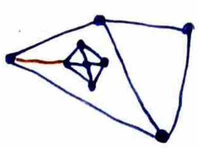
Def: Graf G je maximální rovinný $\equiv$ G je rovinný a
$G+e$ není rovinný pro $\forall e \in \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$

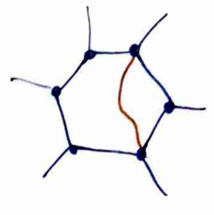
Příklady: K_3, K_4 jsou max. rovinné $\because$ do nich nejde přidat hrany.
$K_{3,3}-e$, K_5-e jsou max. rovinné pro libovolnou hranu e.

Pozorování: Je-li G max. rovinný s alespoň 3 vrcholy, pak ve všech jeho nakresleních jsou všechny stěny trojúhelníkové.

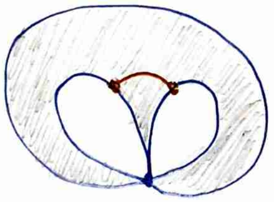


Dk: ① G je souvislý, kdyby nebyl...

a)  b) 

② Je-li hranicí stěny kružnice, pak je to $\triangle$ $\to$  ↯

③ Co kdyby hranicí stěny nebyla kružnice?
→ hranicí stěny obecně je nějaký uzavřený sled



→ vezmu nějaký vrchol v, který se v tom sledu opakuje.
→ kdybych ten v odstranil, tak se mi ten sled rozpadne na alespoň 2 komponenty
↳ můžu si vzít nějaké 2 vrcholy na různých komponentách a spojit je. ↯ ∎

Def: Graf, jehož nakreslení má všechny stěny $\triangle$ se nazývá rovinná triangulace.

Pozorování: Pro triangulaci na v vrcholech platí $e = 3v-6$.

Dk: Budu počítat strany hran dvěma způsoby:

$$2e = 3f \Rightarrow v + \frac{2}{3}e = e + 2 \Rightarrow e = 3v - 6 \quad ∎$$

Důsledky: • V každém rovinném grafu s alespoň 3 vrcholy platí $e \leq 3v-6$.

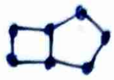
• Průměrný stupeň vrcholu v rovinném grafu < 6
$\because \sum_u \deg(u) = 2e \leq 6v - 12 < 6v$.

$\Rightarrow$ v každém rovinném grafu $\exists u \in V: \deg(u) \leq 5$. → něco podobného jako list
→ vrchol stupně nejvýš 5.

• K_5 není rovinná
$\because v = 5, e = \binom{5}{2} = 10 \Rightarrow 10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$ ↯

! Pozor, to že graf splňuje $e \leq 3v-6 \not\Rightarrow$ že je rovinný – např. $K_{3,3}$.

• **Rovinné grafy bez △**

• Maximální rovinné → jejich stěny budou  nebo 

→ bavíme se o grafech na alespoň 4 vrcholech

① stěny jsou □ a ⬠ → počítám strany hran

→ kdyby jen □: $2e = 4f$

→ když i ⬠: $2e \geq 4f \Rightarrow v + f = e + 2 \Rightarrow e = v + f - 2$

$\Rightarrow f \leq \frac{1}{2}e \Rightarrow e \leq v + \frac{1}{2}e - 2 \Rightarrow \underline{\underline{e \leq 2v - 4}}$

② ten graf je ta hvězdička

→ je to strom $\Rightarrow e = v - 1 \Rightarrow v - 1 \leq 2v - 4 \Rightarrow v \geq 3$ ✓

③ důsledky

• průměrný stupeň < 4 ∵ $\sum_u \deg(u) \leq 4v - 8 < 4v$.

• $\exists u \in V: \deg(u) \leq 3$.

• $K_{3,3}$ není rovinná ∵ $v = 6,\ e = 3 \cdot 3 = 9 \Rightarrow 9 \leq 2 \cdot 6 - 4 = 8$ ↯

• **Barvení map**

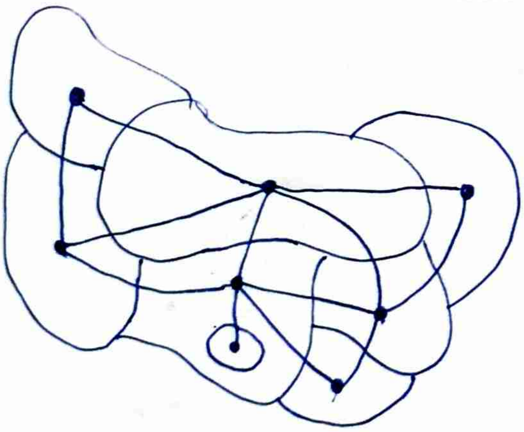
→ sousední státy (státy, které mají více než 1 společný bod) musí mít různé barvy

→ je dokázané, že stačí 4 barvy

• Převod pomocí duality na barvení rovinných grafů

→ mapu převedeme na rovinný graf G, s $V(G) :=$ státy a $uv \in E(G) \equiv u, v$ mají netriviální společnou hranici.

mapa ——→ dualitou ——→ rovinný graf.



→ ten graf je rovinný, protože každá hrana vede z jedné stěny přes hranici do druhé stěny

→ z každého vrcholu povedu oblouky do hranic se sousedními státy, což jsou hvězdičky, které jsou rovinné.

→ teď jen stačí spojit konce těch oblouků na společných hranicích.

→ když vrcholy nahradíme stěnami a stěny vrcholy, tak dostaneme tzv. duální graf

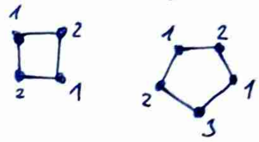
• **Barvení grafů**

Def: Obarvení grafu G k barvami je $c: V(G) \to [k]$ t.ž. $\forall xy \in E(G): c(x) \neq c(y)$.

Def: Barevnost (chromatické číslo) grafu G je $\chi(G) := \min\{k \mid G \text{ má obarvení } k \text{ barvami}\}$

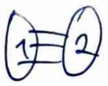
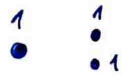
Příklady

$$\chi(E_n) = 1, \quad \chi(K_n) = n, \quad \underset{n \geq 1}{\chi(P_n) = 2}, \quad \chi(K_{m,n}) = 2, \quad \chi(C_n) = \begin{cases} 2 & n\text{-sudé} \\ 3 & n\text{-liché} \end{cases}$$



Pozorování: $\chi(G) \leq 2 \iff G$ je bipartitní.

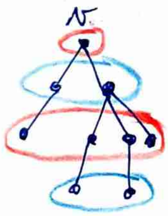
Dk: $\Leftarrow$ obě partity obarvíme dvěma různými barvami

 nebo 

$\Rightarrow$ do partit rozdělíme vrcholy podle barev

Tvrzení: Každý strom je 2-obarvitelný $\Rightarrow$ je bipartitní

Dk #1:



Strom zakořeníme a vrcholy rozdělíme do vrstev → pak je obarvíme podle parity

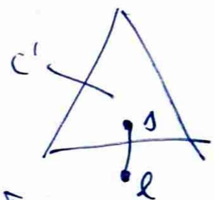
$$c(x) = d(v, x) \bmod 2 + 1 \quad \blacksquare$$

Dk #2: Indukcí podle $n = |V(T)|$

① $n = 1$ ✓

② $n-1 \to n$: Nechť l je list, s jeho soused.

$$G' := G - l \overset{\text{I.P.}}{\Longrightarrow} \exists c' \text{ obarvení } G' \Rightarrow c(v) := \begin{cases} 3 - c'(s), & v = l \\ c'(v), & v \neq l \end{cases}$$



opačná barva

Pozorování: Pokud $H \subseteq G$, pak $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Věta: $\chi(G) \leq 2 \iff G$ nemá lichou kružnici. ($\iff G$ je bipartitní)

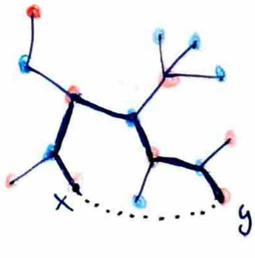
Dk: $\Rightarrow$ obměnou: G má lich. k. $\Rightarrow \chi(G) \geq 3$. ✓

$\Leftarrow$ ① kdyby G byl nesouvislý: obarvíme po komponentách.

② Nechť $K :=$ kostra grafu G, pak $\exists c: V(G) \to \{1,2\}$ obarvení K.

Tohle obarvení je korektní pro celý graf G. Kdyby ne:

$$\exists xy \in E(G) \setminus E(K) \wedge c(x) = c(y)$$



→ K je strom $\Rightarrow$ mezi x, y $\exists!$ cesta C v K

→ na C se barvy střídají a její koncové body mají stejnou barvu

$\Rightarrow C$ má sudou délku $\Rightarrow C + xy$ je lichá kružnice v G ↯

• Barvení rovinných grafů

Def: Pro graf G definujeme:

① $\Delta(G) = \max\{\deg(v) \mid v \in V(G)\}$

② $\delta(G) = \min\{\deg(v) \mid v \in V(G)\}$

Každý podgraf G obsahuje vrchol stupně $\leq k$.

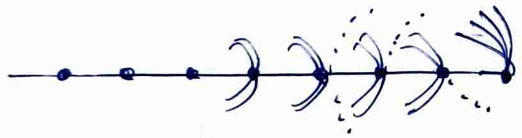
Def: Graf G je <u>k-degenerovaný</u> $\equiv \forall H \subseteq G\ \exists v \in V(H): \deg_H(v) \leq k$

① $\iff \max\{\delta(H) \mid H \subseteq G\} \leq k$.

② $\iff \exists \preceq$ lineární uspořádání na $V(G)$ t.ž.

$\forall v \in V(G): |\{u < v \mid uv \in E(G)\}| \leq k$.

→ v tom grafu vždy $\exists v \in V: \deg(v) \leq k$ ⇒ utrhnu ho a dám ho na přímku doprava ⇒ tohle opakuju a další vrcholy dávám nalevo od něj ⇒ ty vrcholy nalevo jsou < než ty napravo



⇒ možná tam jsou i nějaké hrany doprava, ale ty mě nezajímají

Příklady: Stromy → 1-deg → $\chi \leq 2$
Rovinné → 5-deg → $\chi \leq 6$ → stačí 6 barev
Rovinné bez Δ → 3-deg → $\chi \leq 4$
Libovolný G → $\Delta(G)$-deg → $\chi \leq \Delta(G)+1$

Tvrzení: Nechť G je k-degenerovaný. Pak <u>$\chi(G) \leq k+1$</u>.

Dk: Ty vrcholy si uspořádám podle $\preceq$ a budu je barvit zleva.
Pro $\forall$ další vrchol je zakázáno nejvýše k barev ⇒ stačí mi jich $k+1$.

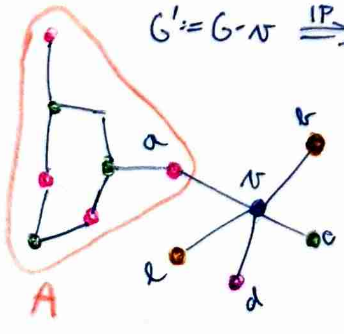
• Věta (o 5 barvách): Pro G rovinný je $\chi(G) \leq 5$.

Dk#1: Indukcí podle $n := |V(G)|$.

① Pro $n \leq 5$ triviální.

② $n-1 \to n$. Nechť v je vrchol s min $\deg(v) \to \deg(v) \leq 5$.

$G' := G - v \overset{IP}{\Longrightarrow} \exists c'$ 5-obarvení G' → v tam vrátíme zpět a chceme najít obarvení c.

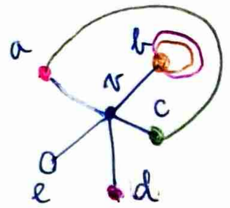


a, Pokud sousedé v mají v c' max 4 různé barvy ⇒ dobarvíme v ✓

b, v má 5 sousedů a všichni mají různé barvy v c'.

$A :=$ podgraf indukovaný vrcholy, do kterých vede cesta z a přes vrcholy s $c(a)$ • nebo $c(c)$ •.

- <u>pokud $c \notin A$</u>: v A prohodíme barvy $\Rightarrow c(a) = c'(c)$, $c(v) = c'(a)$
- <u>pokud $c \in A$</u>: Prohození barev by mi nepomohlo $\Rightarrow$ udělám stejný trik s b, d.



↳ udělám podobný podgraf z b přes vrcholy s $c(b)$ a $c(d)$.

$\Rightarrow$ získáme podgraf B, $d \notin B$ z Jordanovy věty o kružnici.

$\Rightarrow$ prohodíme barvy v B $\Rightarrow c(b) = c'(d)$, $c(v) = c'(b)$. ■

<u>Dk#2</u>: Zase indukcí podle n. ① stejně.

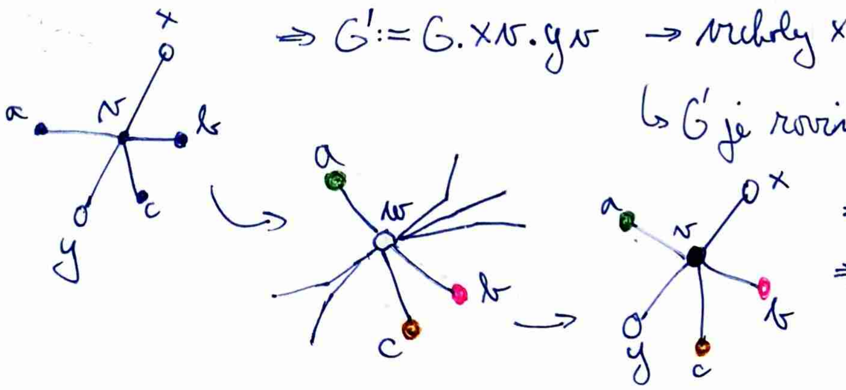
② Pokud $\exists$ vrchol v s $\deg(v) \leq 4$ $\rightarrow$ dáme mu zbývající barvu.

Jinak: Zvolíme vrchol v stupně 5. G je rovinný $\Rightarrow K_5 \not\subseteq G \Rightarrow$

$\exists x, y$ sousedi v t.ž. $xy \notin E(G)$.

$\Rightarrow G' := G.xv.yv$ $\rightarrow$ vrcholy x, y, v jsou nahrazeny w.

↳ G' je rovinný $\xrightarrow{IP} \exists\, c'$ obarvení G'.



$\Rightarrow c(x) = c(y) = c'(w)$

$\Rightarrow c(v) = i \in [5] \setminus \{c'(w), c'(a), c'(b), c'(c)\}$

↳ zbývající barva ■

- <u>Klikovost grafu</u>

<u>Def</u>: <u>Klikovost grafu</u> G je $\mathcal{H}(G) := \max. k : \exists H \subseteq G : H \cong K_k$.

<u>Pozorování</u>: Pro graf G platí: $\chi(G) \geq \mathcal{H}(G)$.

↳ protože $\chi(K_k) = k$.

- **Pravděpodobnostní prostor**

→ skládá se ze 3 objektů → Ω = množina el. jevů

↳ $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ = množina jevů

↳ $P: \mathcal{F} \to [0,1]$ = pravděpodobnost

- **Diskrétní pp. prostor**

Def: Diskrétní pp. p. je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kde

- Ω je konečná nebo spočetná množina el. jevů → všechny možné výsledky nějakého náhodného pokusu.
- $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ → jev je dále možné popsat logickou formulí $\Big\}$ $J = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) \text{ platí}\}$
- $P: \mathcal{F} \to [0,1]$ je pravděpodobnostní funkce. → $P(A)$ → množina; → $P[\varphi]$ → logická formule

⇒ Pst. každého jevu navíc splňuje:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) \Rightarrow P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1.$$

→ pp. p. je konečný $\equiv$ Ω je konečná

→ konečný pp. p. je klasický $\equiv \forall \omega \in \Omega: P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} \Rightarrow P(J) = \frac{|J|}{|\Omega|}$.

Příklady

- n hodů mincí: $\Omega = \{0,1\}^n$ (z.m.), $P(\{\omega\}) = 2^{-n}$.
- Bertrandův paradox: kartičky 11, 00, 01.
  - → vybereme náh. kartičku a položíme ji náhodnou stranou na stůl.
  - → horní strana je 1.
  - → P[dolní strana je 1] = ?

$\Omega = \{\underline{1}1, 1\underline{1}, \cancel{\underline{0}0}, \cancel{0\underline{0}}, \underline{0}1, \cancel{0\underline{1}}\}$ $\quad \underline{1}$ = dole je 1

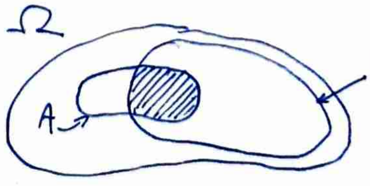
$\Rightarrow P = \frac{2}{3}$ $\quad J = \{\underline{1}1, 1\underline{1}\}$ $\quad$ ↳ $\Omega' = \{\underline{1}1, 1\underline{1}, \underline{0}1\}$

→ $P[A|B] = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$

- **Podmíněná pravděpodobnost**

Def: Podmíněná pst. jevu A za předpokladu, že nastal jev B, $P(B) \neq 0$ je

$$P[A|B] := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



B → podprostor

⇒ chceme $P[B|B] = 1$.

- Pravděpodobnost sjednocení

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{pro } A\cap B = \emptyset$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$ princip inkluze a exkluze

$$P(A\cup B) \le P(A) + P(B) \qquad A\subseteq B \Rightarrow P(A)\le P(B)$$

- Věta (o úplné pravděpodobnosti):

Nechť A je jev a $B_1, \dots B_m$ rozklad Ω na jevy t. ž. $\forall i\ P(B_i) \neq 0$. Potom:

$$P(A) = \sum_i P[A|B_i]\cdot P(B_i).$$

Dk: Víme, že $\{A\cap B_i\}$ jsou po dvou disjunktní množiny $\Rightarrow \bigcup_i A\cap B_i = A$ každý prvek z A tam někde je ! jednou.

$$\Rightarrow P(A) = P\left(\bigcup_i A\cap B_i\right) = \sum_i P(A\cap B_i) = \sum_i P[A|B_i]P(B_i) \quad \blacksquare$$

Speciálně: $$P(A) = P[A|B]P(B) + P[A|\overline{B}]P(\overline{B}).$$

Řetězové pravidlo: $P(A\cap B\cap C) = P[A|B\cap C]\cdot P(B\cap C) = P[A|B\cap C]\cdot P[B|C]\cdot P(C).$

Příklad: Test na nemoc, známe: $P[T|N]$, $P[T|\overline{N}]$, $P(N)$ $\to P[N|T] = ?$

$$P[N|T] = \frac{P(N\cap T)}{P(T)} = \frac{P(T\cap N)}{P(T)} = \frac{P[T|N]\cdot P(N)}{P(T)} = \frac{P[T|N]\cdot P(N)}{P[T|N]\cdot P(N) + P[T|\overline{N}]\cdot P(\overline{N})}$$

- Věta (Bayesova): Nechť A je s $P(A)\neq 0$ a $B_1, \dots B_m$ rozklad Ω na jevy t. ž. $\forall i\ P(B_i)\neq 0$:

$$P[B_i|A] = P[A|B_i]\cdot \frac{P(B_i)}{\sum_j P[A|B_j]\cdot P(B_j)} = \frac{P[A|B_i]P(B_i)}{P(A)}.$$

- Nezávislost jevů

Def: Jevy A, B jsou nezávislé $\equiv P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) \equiv P(B) = 0 \vee P[A|B] = P(A).$

($P(A\cap B) = P[A|B]\cdot P(B)$)

Def: Jevy $A_1, \dots A_m$ jsou

- po 2 nezávislé $\equiv \forall i,j : P(A_i\cap A_j) = P(A_i)\cdot P(A_j)$
- po k nezávislé $\equiv \forall I \in \binom{[m]}{k} : P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} P(A_i).$
- vzájemně nezávislé $\equiv \forall k\ge 2$ jsou po k nezávislé.

Příklad: Jevy, které jsou po 2 nezávislé, ale po 3 už ne.

$\Omega = \{00, 01, 10, 11\}$, P klasická

$A = \{10, 11\}$ první 1
$B = \{01, 11\}$ druhá 1
$C = \{00, 11\}$ sudý #1

$\left.\right\} P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$

$P(A\cap B) = P(A\cap C) = P(B\cap C) = \frac{1}{4}$ ✓

$P(A\cap B\cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$ ✗

Příklad: míchání karet $\Omega = \{\pi \mid \pi \text{ je permutace na } [32]\}$

$P(\{\pi\}) = \frac{1}{32!}$

$A = \{\pi \mid \pi(1) = 1\}$ $\quad P(A) = \frac{31!}{32!} = \frac{1}{32}$

$B = \{\pi \mid \pi(2) = 2\}$ $\quad P(B) = \frac{1}{32}$

$\Big\} \; P(A \cap B) = \frac{30!}{32!} = \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{31} \neq \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{32}$.

- Součin pp. prostorů

Def: Součin ppp $(\Omega_1, 2^{\Omega_1}, P_1)$ a $(\Omega_2, 2^{\Omega_2}, P_2)$ je $(\Omega_1 \times \Omega_2, 2^{\Omega_1 \times \Omega_2}, P)$, kde

$\forall A \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2 : P(A) := \sum_{(\omega_1, \omega_2) \in A} P_1(\{\omega_1\}) \cdot P_2(\{\omega_2\})$.

ověření: $P(\Omega_1 \times \Omega_2) = 1$.

$$P(\underbrace{\Omega_1 \times \Omega_2}_{\Omega}) = \sum_{(a_1, a_2) \in \Omega} P(\{a_1\}) P(\{a_2\}) = \sum_{a_1 \in \Omega_1} P(\{a_1\}) \cdot \overbrace{\sum_{a_2 \in \Omega_2} P(\{a_2\})}^{P(\Omega_2) = 1} = \overbrace{\sum_{a_1 \in \Omega_1} P(\{a_1\})}^{P(\Omega_1)} = 1$$

$\forall \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2 : P(\omega) = P_1(\{\omega_1\}) \cdot P_2(\{\omega_2\})$

→ el. jevy lze vnímat jako body v rovině, jejich projekcí na souř. osy můžeme separovat jejich složky. → hod mincí a hod kostkou.

→ Pokud jev A_1 v součinu ppp závisí jen na první složce (padla 1 na minci) a jev A_2 závisí jen na druhé složce (padla 3 na kostce), pak jsou A_1, A_2 nezávislé.

Příklad: $\Omega = \{0, 1\}$, $P(\{1\}) = p$ → pokus s pstí úspěchu p

→ součinem n těchto ppp získáme posloupnost n nezávislých pokusů.

Je-li $\omega \in \{0, 1\}^n$ s k jedničkami, máme $P(\{\omega\}) = p^k (1-p)^{n-k}$.

- Náhodné veličiny

Def: Náhodná veličina je funkce, která číselně ohodnocuje el. jevy $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Př: hodíme n-krát mincí, $X := \#1 \Rightarrow P[X < 3]$ → $[X < 3]$ mi určuje nějaký jev.

Def: Střední hodnota n. v. X je $\mathbb{E}[X] := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$.

↳ v klasickém ppp je $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)$ ← A.P.

↳ v nekonečném ppp nemusí existovat

Věta (o linearitě s. h.): Nechť X, Y jsou n. v. a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom:

$\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ a $\mathbb{E}[\alpha X] = \alpha \mathbb{E}[X]$.

Dk: $\mathbb{E}[X+Y] = \sum_{\omega \in \Omega} (X+Y)(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) P(\{\omega\}) + Y(\omega) \cdot P(\{\omega\})) = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$. ∎

Příklad: hodíme n-krát mincí, $X = \#1$ ... $\mathbb{E}[X] = ?$

$X_i := [\text{na } i\text{-té pozici je } 1]$ → indikátor výroku (jevu) $\quad X_i = \#1$ na i-té pozici

$$X = \sum_i X_i \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_i X_i\right] \overset{lin}{=} \sum_i \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} n}}$$

$$\forall i: \mathbb{E}[X_i] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

- Použití indikátorů k výpočtu střední hodnoty

Def: Indikátorem jevu J je n.v. $X := \begin{cases} 0 \\ 1, & \text{nastal-li jev } J. \end{cases}$

Obecně: Mějme jevy $J_1, \dots J_n$, jejich indikátory $X_1, \dots X_n$ a n.v. $X := \#$ jevů, které nastaly.

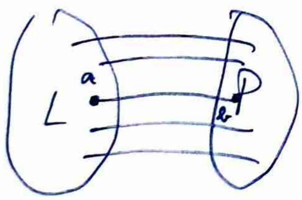
$$\forall i: \mathbb{E}[X_i] = 0 \cdot P(J_i) + 1 \cdot P(J_i) = P(J_i)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \sum_i \mathbb{E}[X_i] = \sum_i P(J_i)$$

⇒ kdykoli máme nějakou n.v $X = \#$ jevů nějakého druhu, které nastaly, pak umíme určit $\mathbb{E}[X]$ pomocí indikátorů

Př: Dokaž, že každý graf $G=(V,E)$ má bipartitní podgraf s alespoň $\frac{1}{2}|E|$ hranami.

→ Náhodně rozdělíme vrcholy na dvě části → $X := \#$ hran jdoucí napříč



$X_e := \begin{cases} 0 \\ 1, & \text{pokud } e \text{ vede napříč} \end{cases}$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_e \mathbb{E}[X_e] = \sum_e \frac{1}{2} = \frac{1}{2}|E|$$

↳ průměr ≤ max

$L \cap P = \emptyset$, $L \cup P = V$

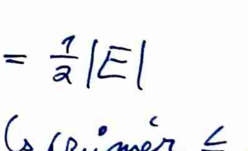
$P[e \text{ vede napříč}] = \frac{1}{2}$

↳ $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

Př: Náhodná perm. π na $[n]$. i je levé max $\equiv \forall j < i: \pi(j) < \pi(i)$. $X := \#$ levých maxim

⇒ $\mathbb{E}[X] = ?$ $\quad X_i := \begin{cases} 0 \\ 1, & i \text{ je levé max} \end{cases}$

→ $P[X_i = 1] = \frac{1}{i}$ ←



z 5 čísel má být $\pi(i)$ největší

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \sum_i \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \approx \underline{\underline{\ln(n)}}$$

- **Rozdělení náhodné veličiny**

Def: Rozdělení n. v. X je funkce $Q: \mathbb{R} \to [0,1]$ t. ž.

$$Q(a) := P[X=a] = \sum_{\substack{\omega\in\Omega,\\ X(\omega)=a}} P(\{\omega\})$$

Pozorování: $\mathbb{E}[X] = \sum_{a\in\mathbb{R}} a\cdot Q(a)$.

Dk: $\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\cdot P(\{\omega\}) = \sum_{a\in\mathbb{R}} \sum_{\substack{\omega\in\Omega,\\ X(\omega)=a}} a\cdot P(\{\omega\}) = \sum_{a\in\mathbb{R}} a \underbrace{\sum_{\substack{\omega\in\mathbb{R},\\ X(\omega)=a}} P(\{\omega\})}_{Q(a)}$ $\blacksquare$

- **Věta (Markovova nerovnost):** Je-li $X \geq 0$ n. v. a $k>0$, potom

$$P[X \geq k\cdot\mathbb{E}[X]] \leq \frac{1}{k}$$ ← pst. že X bude násobně větší než $\mathbb{E}[X]$ je malá.

Důkaz: $P[X \geq k\cdot\mathbb{E}[X]] = \sum_{\substack{\omega\in\Omega,\\ X(\omega)\geq k\cdot\mathbb{E}[X]}} P(\omega) \leq \sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)\geq k\mathbb{E}[X]}} P(\omega)\cdot\frac{X(\omega)}{k\cdot\mathbb{E}[X]} \leq \sum_{\omega\in\Omega} \frac{\overbrace{P(\omega)\cdot X(\omega)}}{k\cdot\mathbb{E}[X]} = \frac{1}{k}$

Příklad: Zase rozdělujeme grafy → chceme najít bip. podgraf s alespoň $\frac{49}{100}$ hranami.

↳ Provádíme náhodné řezy ... $P[\text{úspěchu}] = ?$

$P[\text{neúspěch}] = [\#\text{hran uvnitř} \geq \frac{51}{100}|E|] = [\#\text{hran uvnitř} \geq \frac{51}{50}\mathbb{E}] \leq \frac{50}{51}$

$\mathbb{E}[\downarrow] = \frac{1}{2}|E|$

$P[\text{úspěch}] = 1 - P[\text{neúspěch}] \geq 1 - \frac{50}{51} = \frac{1}{51}$ ⇒ průměrně stačí 51 pokusů

- **Erdősovo-Szekeresovo lemma o monotónních posloupnostech**

Věta: V každé posloupnosti n^2+1 různých čísel existuje monotónní podposloupnost délky $n+1$.

Def: Posloupnost je uspořádaná k-tice $(x_1, x_2, \dots x_k)$. Podposloupnost délky m je určena indexy $i(1), i(2), \dots i(m)$, kde $i(1) < i(2) < \dots < i(m)$ a je tvořena prvky $x_{i(1)}, x_{i(2)}, \dots x_{i(m)}$.

Dk: Máme posloupnost $(x_1, x_2, \dots x_{n^2+1})$. Definujeme relaci $\preceq$ na $\{1, 2, \dots n^2+1\}$:

$i \preceq j \equiv i \leq j \wedge x_i \leq x_j$. Všimneme si, že $\preceq$ je uspořádání.

→ řetězce tohoto uspořádání jsou rostoucí podposloupnosti

→ antiřetězce jsou klesající

Z věty o dlouhém a širokém: $\alpha\omega \geq n^2+1 \Rightarrow \alpha \geq n+1$ nebo $\omega \geq n+1$

jinak $\alpha\omega \leq n^2$ $\blacksquare$

- **De Bruijnovy posloupnosti**

$\{0,1\}$

Chceme sestrojit cyklickou posloupnost čísel $(x_1, x_2, \dots x_m)$ t.ž.
se v ní vyskytuje každá k-prvková posloupnost nul a jedniček – po sobě jdoucích.

$\Rightarrow \forall a \in \{0,1\}^k$ se vyskytuje jako podřetězec.

Zjevně $m \geq 2^k$ (2^k začátků řetězců) $\to$ překvapivě $\underbrace{2^k}_{\text{de Bruijnova posl.}}$ stačí.

Tvrzení: Pro každé $k \geq 1$ $\exists$ de Bruijnova posl.

Dk: Konstrukce pomocí eulerovských tahů.

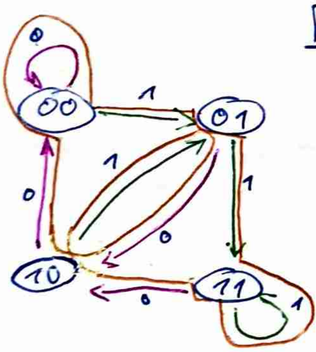
$\Rightarrow$ Sestrojíme orientovaný graf $G=(V,E)$, kde

$V := \{0,1\}^{k-1} \to |V| = 2^{k-1}$

vrcholy

$E :=$ množina všech dvojic tvaru $((a_1, a_2, \dots a_{k-1}), (a_2, a_3, \dots a_{k-1}, 0))$,
$((a_1, a_2, \dots a_{k-1}), (a_2, a_3, \dots a_{k-1}, 1))$.

$\to$ pro $k=3$:



Pozorování: G je eulerovský

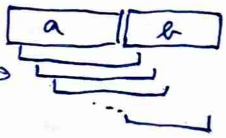
z def.

$\because$ $\forall v \in V: \deg^{out}_G(v) = 2$ 0,0011, 1,0011

$\forall v \in V: \deg^{in}_G(v) = 2 \leftarrow v$: 0011,0

G je silně souvislý

$k-1$ prvkové okénko



$\Rightarrow$ z a do b $\exists$ sled

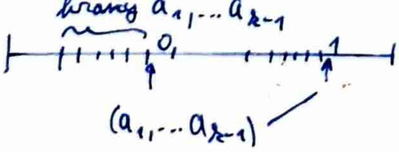
$\Rightarrow$ z a do b $\exists$ cesta

$\Downarrow$ v G $\exists$ eulerovský tah

$\Rightarrow$ Za každou hranu v tom eulerovském tahu započítám 0 nebo 1 podle toho, co připisuji $\to$ tato posl. je de Bruijnova

00111010 Dk: Chceme najít nějakou k-tici v tom tahu $(a_1, a_2, \dots a_k) \to$ koukneme se na $(a_1, a_2, \dots a_{k-1})$

$\Rightarrow$ to je vrchol v G $\Rightarrow$ na tom tahu je právě dvakrát.



$\to$ do toho vrcholu jsme se dostali postupným připisováním jeho bitů na konec

$\to$ ten vrchol je tam 2x, za ním je 0 a 1 $\to$ doplním na k-tici.

• **Platónská tělesa**

Def: Platónské těleso je pravidelný mnohostěn, což je trojrozměrné konvexní těleso, ohraničené konečným počtem stěn – shodných pravidelných n-úhelníků, jichž se v každém vrcholu stýká stejný počet.

Věta: Platónských těles je právě 5 a sice: pravidelné 4, 6, 8, 12, 20 - stěny.
△ □ △ ⬠ △

Dk: Ukážeme, že jiná platónská tělesa nemohou existovat.

↳ nejprve zkoumanému mnohostěnu opíšeme sféru a poté jej pomocí stereografické projekce převedeme na rovinný graf. Např.:

$d=3$, $k=3$

$d=3$, $k=4$

$d=4$, $k=3$

$d :=$ stupeň každého vrcholu $=$ # n-úhelníků co se v něm stýká

$k :=$ # vrcholů na každé stěně

12-stěn: $d=3$, $k=5$

20-stěn: $d=5$, $k=3$

Pozorování: $d \geq 3$, $k \geq 3$.

$f :=$ # stěn, $e := |E|$ $\Rightarrow$ počítáme strany hran dvěma způsoby:

$v := |V|$

$$2e = f \cdot k \,, \quad 2e = \sum_{v \in V} \deg(v) = v \cdot d$$

$$\Rightarrow f = \frac{2e}{k} \qquad v = \frac{2e}{d}$$

$$\Rightarrow v + f = e + 2 \Rightarrow \frac{2e}{d} + \frac{2e}{k} = e + 2 \Rightarrow \frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}$$

$\Rightarrow d = 3$ nebo $k = 3$, jinak $\frac{1}{d} + \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}$ ↯

① $d=3$: $\frac{1}{k} - \frac{1}{6} = \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow k \in \{3, 4, 5\}$

② $k=3$: $\frac{1}{d} - \frac{1}{6} = \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow d \in \{3, 4, 5\}$

$\Rightarrow$ máme 6 možností, ale $d=3 \to k=3$ a $k=3 \to d=3$ je to stejné

$\Rightarrow$ 5 možností pro 5 platónských těles. ∎

• Řetězce a antiřetězce

$\omega(X,\leq) :=$ max. z délek řetězců ("výška" usp.)
$\alpha(X,\leq) :=$ max. z délek antiřetězců ("šířka" usp.)

• Věta (o dlouhém a širokém): $\forall (X,\leq)$ ČUM platí $\alpha(X,\leq)\cdot\omega(X,\leq) \geq |X|$.

↳ pozn: pokud $|X| = n$, pak $\alpha \geq \sqrt{n}$ nebo $\beta \geq \sqrt{n}$.

Důkaz: Tu množinu X rozdělíme na vrstvy $X_1, \dots X_k$:

$X_1 := \{x \in X \mid x \text{ je minimální}\}$.

→ Když máme $X_1, \dots X_i$: $Z_i := X \setminus \bigcup_{j=1}^{i} X_j$ ⟶ pokud $Z_i = \emptyset$ hotovo

↳ $Z_i \neq \emptyset$: $X_{i+1} := \{x \in Z_i \mid x \text{ je min. v } Z_i\}$.

→ nakonec získáme nějaký rozklad X: $\{X_1, \dots X_k\}$ ⇒ $\sum_i |X_i| = |X|$

→ $\forall i$: X_i je antiřetězec ⇒ $|X_i| \leq \alpha$

→ $\exists r_1 \in X_1, \dots r_k \in X_k$: $\{r_1, \dots r_k\}$ je řetězec ⇒ $k = \omega$

↳ $r_k \in X_k$ zvolíme libovolně → $r_k \notin X_{k-1}$ ⇒ $\exists r_{k-1} \in X_{k-1}$: $r_{k-1} < r_k$ .....

↳ delší řetězec $\nexists$ → v nějaké vrstvě by měl dva prvky ↯ s porovnatelností.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} |X_i| \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha = k\alpha = \omega\alpha \Rightarrow \underline{\underline{\omega\alpha \geq |X|}} \quad \blacksquare$$