

Analyza funkce více proměnných

→ myšlenka: všechny proměnné (až na jednu) zafixujeme → jako parametry

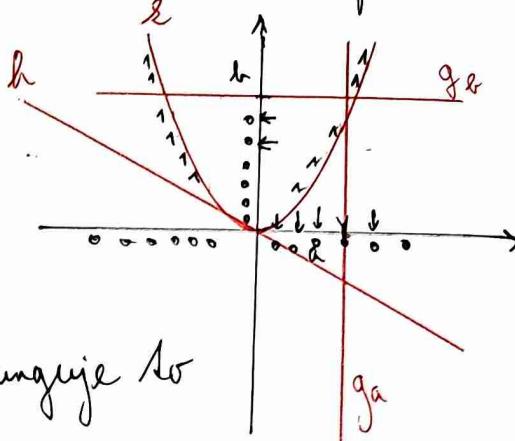
$$f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}, \quad f(0, 0) = ? \Rightarrow \text{chceme spojitě dodefinovat}$$

$$g_a(y) := f(a, y) = \frac{2a^2y}{a^4 + y^2} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$$

$$g_b(x) := f(x, b) = \frac{2x^2b}{x^4 + b^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$h(x) := f(x, ax) = \frac{2ax^3}{x^4 + a^2x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\ell(x) := f(x, x^2) = \frac{2x^4}{x^4 + x^4} = 1 \Rightarrow \text{nefunguje!}$$



Metrické prostory

Def: Metrický prostor (X, d) je množina bodů X a metrika $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

$\forall x, y \in X: d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$\forall x, y, z \in X: d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

$\forall x, y \in X: d(x, y) = d(y, x)$

Příklady:

a) reálná prímka $(\mathbb{R}, |x-y|)$ a komplexní rovina $(\mathbb{C}, |x-y|)$

b) Eukleidovský prostor $\mathbb{E}_n: (\mathbb{R}^n, d)$, $d(x, y) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$

↳ je to t. f. \mathbb{R}^n se standardním A.S. a normou $\Rightarrow d(u, v) = \|u - v\|$

c) diskrétní prostor (X, d) , $d(x, y) = 1$ pro $x \neq y$

d) prostory funkcí $\rightarrow F(a, b)$ množina všech omezených funkcí na $[a, b]$

$$d(f, g) = \sup_{[a, b]} \{ |f(x) - g(x)| \mid a \leq x \leq b \} \leftarrow \text{velikost rozdílu v každém bodě}$$

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \leftarrow \text{jde se lidí globálně}$$

$\forall x, y \in Y$

Def: Podprostor m. p. (X, d) má množinu $Y \subseteq X$ je (Y, d') , kde $d'(x, y) := d(x, y)$.

Def: Zobrazení $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ je spojitě ~ funkcií hodnoty blízkých bodů jsou blízko

$$\equiv \forall x, y \in X, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

⊗: Sčítání spojitéch zobrazení je spojité!

$$\because \forall x, y \in X, \forall \varepsilon \exists \gamma (\forall \gamma \exists \delta): d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \gamma \Rightarrow d''(g(f(x)), g(f(y))) < \varepsilon$$

Def (konvergence): Pro posloupnost bodů $(x_n)_n$ definujeme limitu následovně

$$\lim_n(x_n) = x \equiv \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 (n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon) \sim \lim_{n \rightarrow \infty} (d(x_n, x)) = 0$$

Počet $\lim_n(x_n)$ existuje, když $(x_n)_n$ je konvergentní.

Věta: Zobrazení $f: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ je spojité \Leftrightarrow pro každou konvergentní $(x_n)_n$

v (X_1, d_1) konverguje i $(f(x_n))_n$ v (X_2, d_2) a $\lim_n(f(x_n)) = f(\lim_n(x_n))$

Důkaz: \Rightarrow : Nechť f je spojita a $\lim_n(x_n) = x$. Chceme ulákat, že

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : d_1(f(x_n), f(x)) < \varepsilon \dots \Rightarrow \lim_n f(x_n) = f(x) = f(\lim_n x_n).$$

\hookrightarrow pro dané ε se spojitoshi f $\exists \delta : d_1(x_n, x) < \delta \Rightarrow d_2(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$.

\hookrightarrow konvergence (x_n) pro libovolný $\delta \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : d_1(x_n, x) < \delta$.

\Leftarrow : Pro spor nechť f nemá spojitu. Potom $\exists x \in X_1$ a $\exists \varepsilon_0$ že $\forall \delta \exists x(\delta)$ t. e.

$$d_1(x, x(\delta)) < \delta, \text{ ale } d_2(f(x), f(x(\delta))) \geq \varepsilon_0.$$

Postavíme $x_m := X(\frac{1}{m})$. Potom

$$\bullet \lim_n(x_m) = x \quad \because d_1(x, x_m) < \frac{1}{m}$$

$$\bullet f(x_m) nemá konvergenciu \varepsilon_0 f(x) \quad \because d_2(f(x), f(x_m)) \geq \varepsilon_0.$$

Def: Nechť (X, d) je metrický prostor, $x \in X$ a $\delta \in \mathbb{R}$. Definujeme

$$1) \text{ otevřené okolí } U(x, \delta) := \{y \in X \mid d(x, y) < \delta\}$$

$$2) \text{ prstencové okolí } P(x, \delta) := \{y \in X \mid 0 < d(x, y) < \delta\} = U(x, \delta) \setminus \{x\}$$

Def: Nechť (X, d_1) , (Y, d_2) jsou m.p. a $f: X \rightarrow Y$ funkce. Říkáme, že

$b \in Y$ je limita funkce f v bodě x_0 a píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \equiv \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(b, \varepsilon).$$

Def: Množina $A \subseteq (X, d)$ je otevřená $\equiv \forall x \in A \exists \delta > 0 : U(x, \delta) \subseteq A$.

\circlearrowleft X a \emptyset jsou otevřené

\circlearrowleft Sjeďnocení a průnik otevřených množin jsou také otevřené

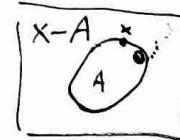
Def: Množina $A \subseteq (X, d)$ je uzavřená $\equiv \forall (x_n)_n \subseteq A$ konvergentní v X je $\lim_n(x_n) \in A$.

Tvrzení: $A \subseteq X$ je uzavřená v (X, d) $\Leftrightarrow X \setminus A$ je otevřená.

Důkaz: \Rightarrow : Pro spor nechť $X \setminus A$ nemá otevřené, t. e. $\exists x \in X \setminus A$ t. e.

$$\forall n \in \mathbb{N} : U(x, \frac{1}{n}) \not\subseteq X \setminus A. \text{ Vyrobníme posl. } x_n \in U(x, \frac{1}{n}) \cap A$$

$$\Rightarrow \lim_n(x_n) = x, \text{ ale } x \notin A \Rightarrow A \text{ nemá uzavřená}$$



\Leftarrow : Pro spor nechť $(x_n)_n \subseteq A$ konverguje k $x \in X \setminus A$. Potom z otevřenosnosti $X \setminus A$

$$\exists \varepsilon > 0 : U(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A \text{ a pro nejale všechny } n : x_n \in U(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A, \text{ ale } x_n \in A$$

\odot $X \neq \emptyset$ jen mazáne

\odot Průnik a sjednocení mazánek množin jsou také mazáne.

Def: Vzdálenost bodu x od množiny A je $d(x, A) := \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$

Def: Uzávěr množiny $A \subseteq (X, d)$ je $\bar{A} := \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$

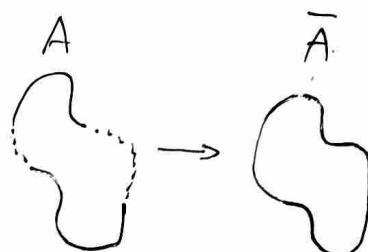
Tvrdění: 1, $\emptyset = \emptyset$

2, $A \subseteq \bar{A}$

3, $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$

4, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

5, $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$



Tvrdění: \bar{A} je mazina všech limit konvergentních posloupností $(x_n)_n \subseteq A$.

Tvrdění: \bar{A} je nejmenší mazána mazina obsahující A , tedy

$$\bar{A} = \bigcap \{B \text{ mazáne} \mid A \subseteq B\}$$

Dle: 1, \bar{A} je mazáne: pokud $(x_n)_n \subseteq \bar{A}$ konverguje k x , pak seskrýváme $y_m \in A$ t.č. $d(x_n, y_m) < \frac{1}{m}$. Potom $\lim_n (y_m) = x$ a $x \in \bar{A}$.

2, \bar{B} mazáne: $\bar{A} \subseteq B$: pro $x \in \bar{A}$ zvolíme konvergentní $(x_n)_n \subseteq A \subseteq B$, tak aby $\lim_n (x_n) = x \rightarrow B$ je mazána $\Rightarrow x \in B$. \blacksquare

• Vzory a obrazy

- řeď řeď mechtí $f: X \rightarrow Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.

Def: Obraz podmnožiny $A \subseteq X$ v Y je $f[A] := \{f(x) \mid x \in A\}$.

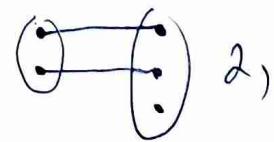
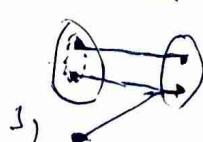
Def: Vzor podmnožiny $B \subseteq Y$ v X je $f^{-1}[B] := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

Tvrdění: Přibližně

1, $f[A] \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq f^{-1}[B]$

2, $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$

3, $f^{-1}[f[A]] \supseteq A$



Věta: (Vlastnosti zobrazení): Nechť $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ jsou metrické prostorů a nechť $f: X_1 \rightarrow X_2$. Následující tvrzení je ekvivalentní

\hookrightarrow formálně $f: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$

1, f je spojitá

2, $\forall x \in X_1$ a $\forall \text{ otevř. } V$ bodu $f(x)$ \exists otevř. U bodu x t.ž. $f[U] \subseteq V$.

3) \forall otevřenou $U \subseteq X_2$ je $\forall x \in f^{-1}[U]$ otevření U v X_1 ,

4) \forall uzavřenou $A \subseteq X_2$ je $\forall x \in f^{-1}[A]$ uzavření A v X_1 ,

5) $\forall A \subseteq X_1$ je $f[A] \subseteq \overline{f[A]}$.

↳ Ty důkazy jsou technicky

a hrušky, ale principiálně zají

Dle: Klíčná funkce $1 \Leftrightarrow 2$. f je spojitá \Leftrightarrow

$\forall x, y \in X_1 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$. \Leftrightarrow

$\forall x \in X_1 \quad \forall \varepsilon \quad \exists \delta : y \in U(x, \delta) \Rightarrow f(y) \in U(f(x), \varepsilon)$ \Leftrightarrow

$\forall x \in X_1 \quad \forall U(f(x), \varepsilon) \quad \exists U(x, \delta) : f[U(x, \delta)] \subseteq U(f(x), \varepsilon)$.

■

• Ekvivalence metrik

Def: Zobrazení $f: X_1 \rightarrow X_2$ je homeomorfismus =

je bijektivní, spojité a $f^{-1}: X_2 \rightarrow X_1$ je také spojité.

\rightarrow pokud \exists homeomorfismus $(X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$, tak jsou tyto prostorů homeomorfní ... basically isomorphic.

Def: Vlastnost je topologická = je zachována homeomorfismy.

Příklady:

- konvergence - pokud x_n konverguje v X_1 , tak $f(x_n)$ konverguje v X_2 .
- otevřenosť, uzavřenosť, očekávané
- spojitosť (ale ne stejnometerně spojitosť!)

Def: Metriky d_1, d_2 na stejné množině jsou ekvivalentní \Leftrightarrow

$$id: (X, d_1) \rightarrow (X, d_2), x \mapsto x$$

je homeomorfismus. Získáme tím prostor, kde všechny topologické vlastnosti fungují stejně.

Def: Metriky d_1, d_2 na stejné množině jsou silně ekvivalentní \Leftrightarrow

$$\exists \alpha, \beta > 0: \alpha \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta \cdot d_1(x, y).$$

Tomu si tedy rovněž říkáme, že máme mezi nimi omezený násobek. $\sim d_1 \in \mathbb{H}(d_2)$

Tvrdění: Silně ekvivalentní metriky d_1, d_2 jsou ekvivalentní.

Dk: Zobrazení $id: (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$ je určitě bijekce. Musíme ještě ukázat, že je spojitá, a že i její inverse je spojitá. Víme

$$\alpha \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta \cdot d_1(x, y).$$

Spojitost id :

$$\forall \epsilon \exists \delta: d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(x, y) < \epsilon$$

$$\Rightarrow \text{zvolme } \delta := \epsilon / \beta: d_2(x, y) \leq \beta \cdot d_1(x, y) < \beta \cdot \delta = \beta \cdot \frac{\epsilon}{\beta} = \epsilon.$$

Spojitost id^{-1} :

$$\forall \epsilon \exists \delta: d_2(x, y) < \delta \Rightarrow d_1(x, y) < \epsilon$$

$$\Rightarrow \text{zvolme } \delta := \epsilon / \alpha: d_1(x, y) \leq \frac{1}{\alpha} d_2(x, y) < \frac{1}{\alpha} \delta = \frac{1}{\alpha} \epsilon = \epsilon.$$

• Vzájemně ekvivalentní metriky

- Euklidovská metrika $d_e(x, y) := \sqrt{\sum_i |x_i - y_i|^2}$
 - Součítová metrika $d_s(x, y) := \sum_i |x_i - y_i|$
 - Maximová metrika $d_m(x, y) := \max_i |x_i - y_i|$
- } můžeme si vždy vybrat tu metriku, se kterou bude prace snazší

Tvrdění: Tyto metriky jsou silně ekvivalentní.

Dk: • max. a součítová

$$\alpha \cdot \max_i |x_i - y_i| \leq \sum_{i=0}^m |x_i - y_i| \leq \beta \cdot \max_i |x_i - y_i| \Rightarrow \alpha = 1, \beta = m$$

• max. a euklidovská

$$\alpha \cdot \max_i |x_i - y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=0}^m |x_i - y_i|^2} \leq \beta \cdot \max_i |x_i - y_i| \Rightarrow \alpha = 1, \beta = \sqrt{m}$$

$$\sqrt{\sum_{i=0}^m |x_i - y_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=0}^m (\max_i |x_i - y_i|)^2} = \sqrt{m \cdot (\max_i |x_i - y_i|)^2} = \sqrt{m} \cdot \max_i |x_i - y_i|$$

Jaká je súčinom vektorov?

Def: Pro $(x_1, d_1), \dots, (x_n, d_n)$ definujeme na kartéském súčine $\prod_{i=1}^n X_i$ metriku $d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) := \max_i d_i(x_i, y_i)$.

Tím získáme súčin prostoru (X_i, d_i) , kdežto každý súčin máme

$$\left(\prod_{i=1}^n X_i, d \right) =: \prod_{i=1}^n (X_i, d_i) = (X_1, d_1) \times (X_2, d_2) \times \dots \times (X_n, d_n).$$

Bráťo: Pro reálná čísla s absolutnou hodnotou $d(x, y) = |x - y|$ máme

$$(\mathbb{R}, d)^n = (\mathbb{R}^n, \max_i d(x_i, y_i)) = (\mathbb{R}^n, d_{\max}(x, y)). \dots \text{ale } d_{\max} \sim \text{ent. m.}$$

Lemma: Projekce $p_j: \prod_{i=1}^n (X_i, d_i) \rightarrow (X_j, d_j)$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_j$ je spojiteľná.

Riešenie: Chceme aby

$$\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \prod_{i=1}^n X_i \quad \forall \varepsilon \exists \delta: d(\vec{x}, \vec{y}) < \delta \Rightarrow d_j(p_j(\vec{x}), p_j(\vec{y})) < \varepsilon.$$

$$\max_i d_i(x_i, y_i) < \delta \Rightarrow d_j(x_j, y_j) < \varepsilon$$

\Rightarrow stačí zvoliť $\delta := \varepsilon$, pretože

$$d_j(x_j, y_j) \leq \max_i d_i(x_i, y_i) < \delta = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Věta: Nechť $f_i: (Y, d) \rightarrow (X_i, d_i)$ kde $i = 1, \dots, n$ je liborolná spojiteľná zobrazení.

Potom definuje zobrazení $f: (Y, d) \rightarrow \prod_{i=1}^n (X_i, d_i)$, kdežto splňuje

$$p_i \circ f = f_i, \text{ neboli } f(y) = (f_1(y), f_2(y), \dots, f_n(y)).$$

Tvrz: Řešíme, že f je spojiteľné.

Riešenie: Chceme aby

$$\forall y_1, y_2 \in Y \quad \forall \varepsilon \exists \delta: d(y_1, y_2) < \delta \Rightarrow d'(f(y_1), f(y_2)) < \varepsilon.$$

Za spojitosky f_i náme

$$\max_i d_i(f_i(y_1), f_i(y_2))$$

pro všechna f_i

$$\forall y_1, y_2 \in Y \quad \forall \varepsilon \exists \delta: d(y_1, y_2) < \delta \Rightarrow d_i(f_i(y_1), f_i(y_2)) < \varepsilon$$

\blacksquare

\Leftrightarrow Súčin a súčin spojiteľných zobrazení je spojiteľný.

\Leftrightarrow tisík funkcií do tétoho, že súčin spojiteľných zobrazení je spojiteľný.

Důkaz: Polynomy jsou spojiteľné.

Riešenie: Například pro 2 proměnné máme $P^2(x, y) = \sum_{0 \leq i, j \leq m} a_{ij} x^i y^j$.

Ale $x = p_1(x, y)$ a $y = p_2(x, y)$, tedy sčítáme a máme spojiteľné vše

\blacksquare

• Příklad: Je když funkce spojitě dodefinovat?

$$1) f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} \quad \dots \text{definované všude kromě } (0,0)$$

\Leftrightarrow n $\approx (0,0)$?

\hookrightarrow je toto funkční polynom \Rightarrow spojite na celém D_f

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f(x,0) = \frac{0}{x^2} = 0 \\ \bullet f(x,x) = \frac{2x^2}{x^2+x^2} = 1 \end{array} \right\} \text{takže neplatí, měli bychom } f(0,0)=0=1$$

$$2) f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

$$\bullet f(x,0) = \frac{0}{x^2} = 0$$

$$\bullet f(x,x) = \frac{x^3}{2x^2} = \frac{x}{2}, \lim_{x \rightarrow 0} f(x,x) = 0 \quad \left. \right\} \text{možná platí dodefinovat } f(0,0) := 0.$$

\Rightarrow ověřime ϵ -definice spojitosti, tedy $f_1(x,y) := \begin{cases} 0, & (x,y) = (0,0) \\ f(x,y), & jinak \end{cases}$ je spojita.

Protože f je spojita na celém svém D_f , tak stačí ověřit bod $(0,0)$.

$$\forall (x,y) \neq (0,0) : d((x,y), (0,0)) < \delta \Rightarrow d(f(x,y), f(0,0)) < \epsilon.$$

$\rightarrow d'$ je absolutní hodnota, d Euklidovská metrika

$$\sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| < \epsilon$$

$$\left| \frac{x^2y}{x^2+y^2} \right| = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot |y| \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} |y| = |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \text{zvolme } \delta := \epsilon$$

\rightarrow protože Euklidovská metrika je ekvivalentní soudruží, tak je možné použít soudruží a dokázat to pro $|x|+|y| < \delta$.

$$\left| \frac{x^2y}{x^2+y^2} \right| \leq |y| \leq |y| + |x| \Rightarrow \text{zvolme } \delta := \epsilon.$$

• Stejnometerní spojitosť

Def: Zobrazení $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ je stejnometerně spojite \equiv

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X : d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

\rightarrow normální spojitosť:

$$\forall x, y \in X \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

stejnometerní spojitosť je mnohem silnější formou než normální spojitosť.

\rightarrow budeme ji používat v následujících integrálních

Parciální derivace

\mathbb{R} je absolutní

→ Eulerův zákon

Def: Reálná funkce o n proměnných je $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, kde $U \subseteq \mathbb{E}_n$.

→ v případě fú jedné jedné proměnné byla U měsícnou nějaký interval, pro více proměnných je definiční obor spravidla složitější.

Def: Pro funkci $f: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, U je otevřená, a bod $a \in U$ definujeme funkci

$$\phi_x(a) := f(a_1, a_2, \dots, a_{x-1}, 1, a_{x+1}, \dots, a_n).$$

Parciální derivace funkce f podle proměnné x_k v bodě a je obyčejná derivace funkce ϕ_x v bodě a_x .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) &:= \frac{d \phi_x}{dx}(a_x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi_x(a_x + h) - \phi_x(a_x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{x-1}, a_x + h, a_{x+1}, \dots, a_n) - f(a)}{h}. \end{aligned}$$

→ basically řešenou, že ty ostatní proměnné jsou proměnné.

Když $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ existuje pro všechna a v nějaké oblasti U , pak dosazeme funkci $\frac{\partial f}{\partial x_k}: U \rightarrow \mathbb{R}$.

Intuice: Geometricky to je směrnice řešení funkce f v daném bodě a ve směru příslušné osy

Jak je to se spojitostí?

- pro funkci 1 proměnné platí: derivace v bodě $a \Rightarrow$ spojitost v a .
- platí to pro parciální derivace funkce více proměnných?

→ funkce $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ není v $(0, 0)$ spojita (viz. příklad)

↳ ale má tam obě parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{0}{h^2+0} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h+0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h)}{h} = 0.$$

metr ještě hoví

⇒ EXISTENCE PARCIÁLNÍCH DERIVACÍ
NEIMPLIKUJE SPOJITOST

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \cdot y = 0 \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cc} & 0 & 0 \\ \hline 0 & & 0 \end{array} \quad \text{f. derivace je nula}$$

Totální diferencial

→ protože parciální derivace neimplicují spojitost, tak budeme potřebovat něco silnějšího.

Ekvivalentní definice derivace

$$\frac{df}{dx}(a) = A \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A \quad \Rightarrow f(a+h) \approx f(a) + Ah$$

\Leftrightarrow pro $h \rightarrow 0$ máme $f(a+h) - f(a) \rightarrow Ah$

$\Leftrightarrow f(a+h) - f(a) = Ah + \text{něco malého}$

$\Leftrightarrow \exists$ spojité μ t.ž. $\lim_{h \rightarrow 0} \mu(h) = 0$ a pak

$$f(a+h) - f(a) = Ah + |h| \cdot \mu(h)$$

\Rightarrow pokud existuje máme

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A + \left(\frac{|h|}{h} \cdot \mu(h) \right) \rightarrow 0$$

Def: Pro $x \in \mathbb{E}_m$ definujeme $\|x\| := \max_i |x_i|$.

\hookrightarrow potřebujeme najít rovnit absolutní hodnotu

\hookrightarrow tohle je $\|x\| = d_{\max}(x, 0)$, tedy ekvivalentní můžeme

použít i Euklidovskou metriku a $\|x\|$ vznimot jako $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}$.

Def: Funkce f má totální diferencial v bodě $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m) \in$

\exists funkce μ , spojita na nejedém okolí nuly $\underline{0} \in \mathbb{R}^m$ t.ž. $\mu(\underline{0}) = 0$ a \exists čísla A_1, \dots, A_m , pro která

$$f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) = \sum_{i=1}^m A_i h_i + \|h\| \cdot \mu(\underline{h}). \quad \dots \underline{h} = (h_1, h_2, \dots, h_m)$$

Neboli pomocí skalárního součinného

$$f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) = A \cdot \underline{h} + \underbrace{\|h\| \cdot \mu(\underline{h})}_{\ell(\underline{h})} \quad \text{-- ekvivalentní } \ell(\underline{h}) = \sigma(\|h\|)$$

Intuice: Pro funkci 1 proměnné je

$f(a+h) \approx f(a) + Ah$ lineární approximace pomocí přímky

Pro 2 proměnné máme

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) \approx f(a_1, a_2) + A_1 h_1 + A_2 h_2,$$

což je lineární approximace pomocí kolineár roviny.

nebo soudíme
metriku
 $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2}$

Příklad: $f(x,y) = x^2 + y^2$. Ukaž, že v bodě $(1,1)$ je $A = (2,2)$.

$$f(1+h_1, 1+h_2) - f(1,1) = 2h_1 + 2h_2 + \|h\| \mu(h)$$

$$(1+h_1)^2 + (1+h_2)^2 - 2 = 2h_1 + 2h_2 + \|h\| \mu(h)$$

$$\Rightarrow \mu(h) = \frac{h_1^2 + h_2^2}{\|h\|} = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \Rightarrow \mu(0,0) = 0 \quad \checkmark$$

Znacení: Totální diferenciál funkce f v bodě \underline{a} znacíme jako

$$D_f^{\underline{a}}(\underline{h}) := \sum_{i=1}^m A_i h_i, \text{ čili } f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) = D_f^{\underline{a}}(\underline{h}) + \|h\| \mu(h).$$

\downarrow je to nejlepší lineární zblízecí

Technická rovina: Technická rovina je funkci $f(x,y)$ v bodě $a = (a_1, a_2)$ je

$$T_f^{\underline{a}}(x,y) = f(a_1, a_2) + D_f^{\underline{a}}(x-a_1, y-a_2) = f(a_1, a_2) + A_1(x-a_1) + A_2(y-a_2).$$

Def: Gradient je operátor definovaný pro funkci $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jako

$$\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Věta: Nechť má funkce f totální diferenciál v bodě \underline{a} . Potom platí

1) f je afinizační v \underline{a}

2) f má všechny parciální derivace v \underline{a} , a sice $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) = A_i$

Dk: 1) Chceme aby

$$\forall x \exists \delta : d(x, \underline{a}) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\underline{a})| < \varepsilon.$$

→ dosadíme do definice TD $x = \underline{a} + \underline{h} \Rightarrow \underline{h} = x - \underline{a}$

$$f(x) - f(\underline{a}) = \underline{A} \cdot (\underline{x} - \underline{a}) + \|x - \underline{a}\| \mu(x - \underline{a}), \text{ čili}$$

$$|f(x) - f(\underline{a})| \leq |\underline{A} \cdot (\underline{x} - \underline{a})| + \|x - \underline{a}\| |\mu(x - \underline{a})|$$

→ když udeláme δ dostatečně malé ($\delta \rightarrow 0$), tak pravá strana $\rightarrow 0$ ■

$$2) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(\underline{a})}{h} \quad \dots \text{ do TD dodařme } \overline{h} := (0, \dots, 0, \overset{i}{h}, 0, \dots, 0)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\underline{A} \cdot \overline{h} + \|h\| \mu(h) \right) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(A_i h + \|h\| \mu(h) \right) = A_i + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mu(h) = A_i \quad \checkmark$$

→ když je ε je libovolně malé, tedy minimální rozdíl δ , aby pravá strana byla $< \varepsilon$.

Důsledek: TD musíme psát jako $f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) = \nabla f(\underline{a}) \cdot \underline{h} + \sigma(\|\underline{h}\|)$

Příklad: $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \ln(1+xy)$. Urči TD v řádu, kde existuje,

... mimo $(0,0)$ existuje (protože spojite PD)

$\rightarrow c\circ r(0,0) ?$

\rightarrow zkusme dodefinovat $f(0,0) := 0$. Protože TD \Rightarrow spojitosl, tak musíme najprve ověřit spojitosl f v $(0,0)$.

$d((x,y), (0,0)) < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$... použijeme $d = \text{družstvo}$

$$\left| \frac{x+y}{x^2+y^2} \ln(1+xy) \right| = \frac{|x+y|}{x^2+y^2} \cdot \left| \frac{\ln(1+xy)}{xy} \right| \cdot |xy|$$

\rightarrow zvolime nějaké malé $\delta \dots \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \dots$ aby $\frac{\ln(1+xy)}{xy} \leq 2$ (lehce)

• Vzájemné nerovnosti:

$$(x+y)^2 \leq 4(x^2+y^2)$$

$$|xy| \leq x^2+y^2$$

$$|x+y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \text{lehce } |x+y| \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow |f(x,y)| \leq \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2} \cdot 2 \cdot (x^2+y^2) \leq 2 \underbrace{(|x|+|y|)}_{d(x,y)} \Rightarrow \delta := \frac{\varepsilon}{2}$$



nebo pro malé δ
když je mnohem

Takže f je v 0 spojita ... má tam TD?

$$f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) = f(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) h_2 + \|h\| \mu(h)$$

$\rightarrow f(x,0) = \frac{x}{x^2} \ln(1) = 0 = f(0,y) \Rightarrow$ na osách je f nulová!

\Rightarrow PD tam jenom nulové

$$\rightarrow f(h_1, h_2) = \|h\| \mu(h) \Rightarrow \mu(h) = \frac{f(h_1, h_2)}{\|h\|}, \text{ chci } \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \mu(h) = 0$$

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \mu(h) = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{h_1+h_2}{h_1^2+h_2^2} \ln(1+h_1, h_2) \cdot \frac{1}{\|h_1+h_2\|} \stackrel{?}{=} 0$$

\hookrightarrow neplatí kvůli, protože pro $h_1=h_2$ máme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{2h^2} \cdot \frac{\ln(1+h^2)}{2|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h^2)}{h^2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{2|h|} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{2|h|}$$

$h > 0 \dots \frac{1}{2}$

neexistuje

$\Rightarrow f$ není možné v $(0,0)$ dodefinovat tak, aby tam měla TD

$h < 0 \dots -\frac{1}{2}$

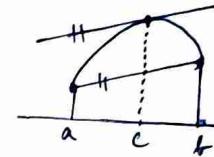
Spojité parciální derivace \Rightarrow TD

Věta: Nechť $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ a nechť f má na nějakém vektoru $\underline{a} \in \mathbb{R}^m$ PD.

- 1) Jeon-li když PD onečné, potom je f v bodě \underline{a} spojitá.
- 2) Jeon-li když PD spojité v \underline{a} , potom má f v bodě \underline{a} TD.

Lemma (Lagrangeova věta): Nechť f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a má na (a, b) derivaci. Potom $\exists c \in (a, b)$ t.ž.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \quad \text{neboli} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$



$$\text{nebo také } \exists 0 < \theta < 1 : f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a))(b-a).$$

Děl: Pro $\underline{h} = (h_1, \dots, h_m)$ označime

$$\underline{h}^0 := (0, 0, \dots, 0) = \underline{0}$$

$$\underline{h}^1 := (h_1, 0, \dots, 0)$$

až naposled $\underline{h}^m := (h_1, \dots, h_m) = \underline{h}$

$$\underline{h}^2 := (h_1, h_2, 0, \dots, 0)$$

BÚNO $\underline{a} = \underline{0}$. Počud $\underline{a} \neq \underline{0}$, tak $g(x_1, \dots, x_m) := f(x_1+a_1, \dots, x_m+a_m)$ je posunutí f tak, aby $g(\underline{0}) = f(\underline{a})$. Tzde pro 2) máme doložit

$$f(\underline{h}) - f(\underline{0}) = \nabla f(\underline{0}) \cdot \underline{h} + o(\|\underline{h}\|).$$

$$\begin{aligned} \rightarrow f(\underline{h}) - f(\underline{0}) &= f(\underline{h}^m) - f(\underline{h}^{m-1}) + f(\underline{h}^{m-1}) - f(\underline{h}^{m-2}) + \dots + f(\underline{h}^1) - f(\underline{h}^0) \\ &= \sum_{k=1}^m f(\underline{h}^k) - f(\underline{h}^{k-1}) \quad \Rightarrow P_k := f(\underline{h}^k) - f(\underline{h}^{k-1}) \end{aligned}$$

Definujme

$$\varphi^k(\underline{h}) := f(h_1, h_2, \dots, h_{k-1}, 1, 0, \dots, 0)$$

DŮKAZ 2)

Takže podle Lagrangeovy věty

$$P_k = \varphi^k(h_k) - \varphi^k(0) = h_k \cdot (\varphi^k)'(\theta_k \cdot h_k), \quad \text{pro } \theta_k \in (0, 1)$$

$$= h_k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}(h_1, h_2, \dots, h_{k-1}, \theta_k \cdot h_k, 0, \dots, 0) \quad \rightarrow \text{k-1. vektor je harmonický vektor}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_k}(\theta_k \cdot h_k) h_k, \quad \text{pro } \theta_k := h^{k-1} + \theta_k h_k \in \underline{h}^k$$

$$\Rightarrow f(\underline{h}) - f(\underline{0}) = \sum_{k=1}^m P_k = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(\theta_k \cdot h_k) h_k = \underbrace{\sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(0) h_k}_{\nabla f(\underline{0}) \cdot \underline{h}} + \underbrace{\sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(\theta_k \cdot h_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(0) \right) h_k}_{\mu(\underline{h})}$$

$$\rightarrow \text{doložit vektor } \lim_{\|\underline{h}\| \rightarrow 0} \frac{\mu(\underline{h})}{\|\underline{h}\|} = 0$$

$$\nabla f(\underline{0}) \cdot \underline{h} \leq 1$$

$$\mu(\underline{h})$$

$$\rightarrow \text{vrijně vektor } \frac{\mu(\underline{h})}{\|\underline{h}\|} \leq \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\theta_k \cdot h_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(0) \right| \cdot \frac{\|h_k\|}{\|\underline{h}\|} \rightarrow 0.$$

$\hookrightarrow 0$ re spojitu s $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ v bodě $\underline{a} = \underline{0}$

* DŮKAZ 1)

Víme.

$$f(\underline{h}) - f(\underline{0}) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{\theta}^k) h_k$$

→ abychom učátkali, že f je v $\underline{x} = \underline{0}$ spojite, tak

$$\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^m \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta: d(\underline{h}, \underline{0}) > \delta \Rightarrow d(f(\underline{h}), f(\underline{0})) < \varepsilon$$

→ cíli chceme aby pro $\underline{h} \rightarrow \underline{0}$ bylo $|f(\underline{h}) - f(\underline{0})| \rightarrow 0$.

$$|f(\underline{h}) - f(\underline{0})| \leq \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{\theta}^k) \right| |h_k|.$$

→ protože PD jsou omezené nejake konstantou C , tak

$$\leq C \cdot \sum_{k=1}^m |h_k| = C \cdot \|\underline{h}\|,$$

Když za $\|\underline{h}\|$ rovníme nějakou metriku.

→ Nyní zřejmě když $\|\underline{h}\| \rightarrow 0$, tak $|f(\underline{h}) - f(\underline{0})| \rightarrow 0$. ■

Důsledek: Svojité PD \Rightarrow TD \Rightarrow PD

Def: Pro $U \subseteq \mathbb{R}^n$ znací $C^k(U)$ řídké funkci, které mají svojité všechny parciaální derivace až po k -tý rád pro $\underline{x} \in U$.
 \Rightarrow Nechť je funkce $f \in C^1(U)$, potom má f na U svojité PD.

• Směrová parciaální derivace

\rightarrow Elatické PD jsou směrnice lečen ve směru dané osy.

Def Derivace funkce $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, U je otevřená, ve směru $\underline{\nu} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
v bodě $\underline{x} \in U$ je číslo

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\nu}}(\underline{x}) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x} + h \cdot \underline{\nu}) - f(\underline{x})}{h} \quad \text{znací se též } f'_{\underline{\nu}}(\underline{x}) \text{ nebo } D_{\underline{\nu}} f(\underline{x}).$$

Oč: Pokud definujeme $g(h) := f(\underline{x} + h \cdot \underline{\nu})$, tak $\frac{\partial f}{\partial \underline{\nu}}(\underline{x}) = g'(0)$.

$$\underline{\text{Dl:}} \quad g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x} + h \cdot \underline{\nu}) - f(\underline{x})}{h} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\nu}}(\underline{x}). \quad \blacksquare$$

Tvrzení: Pokud $f \in C^1$, potom pro směrovou derivaci platí

* $\frac{\partial f}{\partial \underline{\nu}}(\underline{x}) = \nabla f(\underline{x}) \cdot \underline{\nu} \rightarrow$ skalární součin

Intuice: Pokud $f \in C^1$, potom má v bodě \underline{x} TD, kde místo toho, abychom zkoumali chování f ve směru $\underline{\nu}$ od \underline{x} , tak zkoumáme chování lineární approximace f v \underline{x} ve směru $\underline{\nu}$.

• Geometrický význam gradientu

\rightarrow Elatická derivace = míra změny \Rightarrow elodná - roste
záporná - klesá
nulová - stagnuje

\Rightarrow vektor $\nabla f(\underline{x})$ ukazuje ve směru nejrychlejšího růstu funkce f od toho bodu \underline{x} .

\Rightarrow pokud je $\nabla f(\underline{x}) = 0$, tak $\nabla f(\underline{x}) = 0$.

\Rightarrow pokud $\frac{\partial f}{\partial \underline{\nu}}(\underline{x}) = \nabla f(\underline{x}) \cdot \underline{\nu} = 0$, tak $\nabla f(\underline{x}) \perp \underline{\nu}$,
takže ∇ ukazuje ve směru vektorku f

\hookrightarrow vektorku je množina všech bodů, kde f má stejnou hodnotu

\hookrightarrow f se na té vektorku nemění \Rightarrow směrová derivace = 0.

* Důsledek: Pokud má f v bodě \underline{x} derivaci ve směru $\underline{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$, ale

tahle derivace není lineární kombinace složek \underline{h} , tak f v \underline{x} nemá TD.

Počítání parciálních derivací

- aritmetická pravidla (součet, konstantní násobek) fungují stejně jako pro obyčejné derivace ... protože PD vlastně je obyčejná derivace.

PD složené funkce

Věta: Nechť funkce $g_k(x)$ pro $k=1, \dots, m$ mají derivaci v bodě $b \in \mathbb{R}$.

Definujme $\underline{g}(x) := (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))$. Označme $\underline{x} := g(b)$.

Pokud má funkce $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě \underline{x} TD, potom má funkci

$$F(x) := f(g(x)) = f(g_1(x), \dots, g_m(x))$$

derivaci v bodě b , a sice

$$\underline{F}'(b) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{x}) \cdot g'_k(b) = \nabla f(g(b)) \cdot g'(b) \quad \rightarrow \text{skalární součin}$$

$$\frac{1}{\lambda}(F(b+\lambda) - F(b)) = \frac{1}{\lambda}(f(g(b+\lambda)) - f(g(b))) \dots \text{takže pro } \lambda \rightarrow 0 \text{ je } \underline{F}'(b)$$

protože F má v bodě $\underline{x} = g(b)$ TD, tak

$$\begin{aligned} f(g(b+\lambda)) - f(g(b)) &= f(g(b) + g(b+\lambda) - g(b)) - f(g(b)) = f(b+\lambda) - f(b) \\ &= \nabla f(b) \cdot \underline{h} + \mu(\underline{h}) \cdot \|\underline{h}\|, \text{ kde } \lim_{\|\underline{h}\| \rightarrow 0} \mu(\underline{h}) = 0. \end{aligned} \quad \hookrightarrow \underline{h} := g(b+\lambda) - g(b)$$

Vyberieme λ a pro $\|\underline{h}\|$ použijeme maximálnou metriku

$$\frac{1}{\lambda}(F(b+\lambda) - F(b)) = \nabla f(b) \cdot \frac{g(b+\lambda) - g(b)}{\lambda} + \mu(\underline{h}) \cdot \frac{1}{\lambda} \max_k |g_k(b+\lambda) - g_k(b)|$$

Když $\lambda \rightarrow 0$, tak máme

$$\underline{F}'(b) = \underbrace{\nabla f(b) \cdot g'(b)}_{\text{prvek co chceme}} + \underbrace{\mu(\underline{h})}_{*} \underbrace{\max_k |g'_k(b)|}_{\text{omerene}}$$

pouze nejvyšší projekce

* g_k mají v b derivaci, když jsou v b spojité $\Rightarrow g$ je v b také spojita
 \Rightarrow když $\lambda \rightarrow 0$, tak $g(b+\lambda) \rightarrow g(b)$, kde $\underline{h} \rightarrow 0 \Rightarrow \mu(\underline{h}) \rightarrow 0$ ■

Příklad:

$$f(x, y) = \sin(xy), \quad g_1(t) = \ln(t), \quad g_2(t) = t^2$$

$$\Rightarrow \underline{F}(t) := f(g_1(t), g_2(t)) = \sin(\ln(t) \cdot t^2) \Rightarrow \text{uži } \underline{F}'(t)$$

$$\begin{aligned} \underline{F}'(t) &= \nabla f(g(t)) \cdot g'(t) = \left\langle (y \cos(xy), x \cos(xy)) (\ln(t), t^2); \left(\frac{1}{t}, 2t\right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{t} \cdot t^2 \cos(t^2 \ln(t)) + 2t \cdot \ln(t) \cos(t^2 \ln(t)) \end{aligned}$$

$$\text{normálne: } \underline{F}'(t) = \cos(\ln(t) \cdot t^2) \cdot \left(\frac{1}{t} t^2 + \ln(t) \cdot 2t\right) \quad \checkmark$$

Věta (Relativní pravidlo): Nechť mají funkce $g_k: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ pro $k=1, \dots, n$ parciální derivace v $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$. Definujeme $\underline{g}(\underline{z}) := (g_1(\underline{z}), g_2(\underline{z}), \dots, g_n(\underline{z}))$. Označme $\underline{x} := g(\underline{b})$. Potom má funkce $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě \underline{z} TD, pokud funkce

$$F(\underline{z}) := f(g(\underline{z})) = f(g_1(\underline{z}), \dots, g_n(\underline{z}))$$

má v \underline{b} všechny parciální derivace, a sice

$$\frac{\partial F(\underline{b})}{\partial z_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial g_k(\underline{b})}{\partial z_i}$$

Důkaz: Sledujeme

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial F(\underline{b})}{\partial z_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i + h, b_{i+1}, \dots, b_n) - F(\underline{b})}{h} =$$

$$= \underline{\phi}'(b_i), \text{ kde } \underline{\phi}(x) := F(b_1, \dots, b_{i-1}, x, b_{i+1}, \dots, b_n) = F(\underline{b} + \underline{e}_i(x - b_i))$$

$\underline{\phi}'(b_i)$

Abychom mohli použít předchozí větu, tak definujeme

$$\hat{g}_k(x) := g_k(\underline{b} + \underline{e}_i(x - b_i)) \quad \text{a} \quad \hat{g}(x) := (\hat{g}_1(x), \dots, \hat{g}_n(x))$$

Takže $\hat{g}_k(b_i) = g_k(\underline{b})$ a $\hat{g}(b_i) = \underline{z}$. Máme

$$\underline{\phi}(x) = F(\underline{b} + \underline{e}_i(x - b_i)) = f(g(\underline{b} + \underline{e}_i(x - b_i))) = f(\hat{g}(x))$$

$$\Rightarrow \underline{\phi}'(b_i) = \nabla f(\hat{g}(b_i)) \cdot \hat{g}'(b_i) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_k} \cdot \hat{g}'_k(b_i)$$

Definice $\hat{g}'_k(b_i) = \frac{\partial \hat{g}_k}{\partial z_i}(\underline{b}) \dots$ do jí dálka definice PD.

■

Znacení: Relativní pravidlo je možné zapsat jako množením matic, pokud broduzme rozeznáme gradient.

Def: Gradientem funkce $f = (f_1, f_2, \dots, f_m): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, kde $f_k: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ rozumíme matice $m \times m$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i=1, \dots, m}^{j=1, \dots, m} = (\nabla f_1, \nabla f_2, \dots, \nabla f_m)^T \xrightarrow{\text{transformace}} \begin{matrix} \text{eliptický gradient} \\ \therefore \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{transformovaná} \\ \therefore \end{matrix}$$

Ekvivalentně můžeme říct relativní pravidlo zapsat jako

$$\nabla(g \circ f) = (\nabla f)(g) \cdot \nabla g \quad \rightarrow \text{funkcionálně } (g \circ f)(x) = f(g(x))$$

→ pro funkce jedné proměnné to je pravda $\frac{d}{dx}(g \circ f) = f'(g) \cdot g'$

Příklad $f(x, y) = x e^{x+y}$, $g_1(r, \theta) = r \cdot \cos \theta$, $g_2(r, \theta) = r \cdot \sin \theta$

$$\Rightarrow \text{složení } F(r, \theta) := f(g_1(r, \theta), g_2(r, \theta)) = r \cos \theta \cdot e^{r(\cos \theta + \sin \theta)}$$

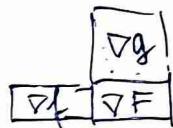
$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g=(g_1, g_2)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ b = (r, \theta) \qquad \qquad a = g(b) \qquad \qquad f(a) = f(g(b)) \end{array}$$

Podmínky:
 f má správné PD \Rightarrow TD
 g_1, g_2 mají PD
 \Rightarrow můžu vypočítat

$$\nabla f(x, y) = (e^{x+y} + x \cdot e^{x+y}, x \cdot e^{x+y})$$

$$\begin{aligned} \nabla g_1(r, \theta) &= (\cos \theta, -r \sin \theta) \\ \nabla g_2(r, \theta) &= (\sin \theta, r \cos \theta) \end{aligned} \quad \left\{ \nabla g = \begin{pmatrix} \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\nabla F = \nabla(g \circ f) = (\nabla f)(g) \cdot \nabla g = (\nabla f)(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \nabla g$$



$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial r} = (1 + r \cos \theta) \cdot e^{r(\cos \theta + \sin \theta)} \cdot \cos \theta + r \cos \theta e^{r(\cos \theta + \sin \theta)} \cdot \sin \theta.$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = (1 + r \cos \theta) \cdot e^{r(\cos \theta + \sin \theta)} \cdot (-r \sin \theta) + r \cos \theta e^{r(\cos \theta + \sin \theta)} \cdot r \cos \theta.$$

Příklad: Dlejte nároce pro obecnou derivaci součinu a podílu funkcií prvního.

- součin: $f(x)$, $g(x) \Rightarrow h(u, v) = u \cdot v$

$$\Rightarrow f \cdot g = h(f, g)$$

$$\Rightarrow (f \cdot g)' = \left(\frac{\partial h}{\partial u}(f, g), \frac{\partial h}{\partial v}(f, g) \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix} = (g, f) \cdot \begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = f'g + fg'$$

- podíl $f(x)$, $g(x) \Rightarrow h(u, v) = \frac{u}{v}$

$$\Rightarrow \frac{f}{g} = h(f, g)$$

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{1}{v}, \quad \frac{\partial h}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{1}{g} \cdot f' - \frac{f}{g^2} g' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Lagrangeova věta pro více proměnných

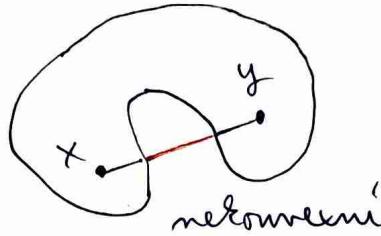
Def: Podmnožina $V \subseteq \mathbb{E}_m$ je konevní =

$$\forall \underline{x}, \underline{y} \in V \quad \forall \lambda \in [0,1] : (1-\lambda) \underline{x} + \lambda \underline{y} = \underline{x} + \lambda(\underline{y} - \underline{x}) \in V.$$

Význam:



konevní



nekonevní

parametrická křivice
mezity $x \rightarrow y$

Opozorování: Lagrangeova věta m řeď proměnné řídí následující.

Nechť f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a má na (a, b) derivaci.

Pak existuje $c \in (a, b)$ splňující | nebo ekviv. $\exists \theta \in (0, 1)$ splňující

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a))(b-a).$$

Věta: Nechť $f: V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, V je konevní a otevřená, $f \in C^1(V)$.

Potom pro libovolné dva body $\underline{a}, \underline{b} \in V$ $\exists \theta \in (0, 1)$ a.č.

$$f(\underline{b}) - f(\underline{a}) = \nabla f(\underline{a} + \theta(\underline{b}-\underline{a}))(\underline{b}-\underline{a}). \quad \rightarrow \underline{a} + \theta(\underline{b}-\underline{a}) = \underline{c} \in \text{mezity } \underline{a} \text{ a } \underline{b}$$

Dle: Definujme $g_\varepsilon(\underline{z}) := \underline{a}_\varepsilon + \lambda(\underline{b}_\varepsilon - \underline{a}_\varepsilon)$ a $g(\underline{z}) := (g_1(\underline{z}), \dots, g_m(\underline{z})) = \underline{a} + \lambda(\underline{b} - \underline{a})$

Dále $F(\underline{z}) := f(g(\underline{z})) = f(\underline{a} + \lambda(\underline{b} - \underline{a}))$. Podle riemannova pravidla

$$F'(\underline{z}) = (\nabla f)(g(\underline{z})) \cdot g'(\underline{z}) \quad \rightarrow g'_\varepsilon(\underline{z}) = \underline{b}_\varepsilon - \underline{a}_\varepsilon \Rightarrow g'(\underline{z}) = \underline{b} - \underline{a},$$

Vidíme si, že $F(\underline{z}) = f(\underline{b})$ a $F(0) = f(\underline{a})$. Není m F pouze jednu proměnnou, ale řeď obyčejné L.v. $\exists \theta \in (0, 1)$ splňující

$$f(\underline{b}) - f(\underline{a}) = F(\underline{z}) - F(0) = F'(\theta) \cdot (1-0) = F'(\theta)$$

$$= (\nabla f)(g(\theta)) \cdot g'(\theta) = \nabla f(\underline{a} + \theta(\underline{b}-\underline{a}))(\underline{b}-\underline{a}). \quad \blacksquare$$

Poznámka: Tato formule se často používá ve tvaru $b = x+h$, $a = x \rightarrow b-a = h$

$$f(x+h) - f(x) = \nabla f(x + \theta h) \cdot h, \quad \text{pro nějaký } \theta \in (0, 1).$$

V porovnání s TD:

$$f(x+h) - f(x) = \nabla f(x) \cdot h + o(\|h\|)$$

\rightarrow když $\|h\| \rightarrow 0$, pak jsou tyto formule stejné.

- Zájemnos počídi parciálnich derivací

Značení: Parciální derivace míjských rádů enacíme jako

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1}$$

Pred vicerík za sebo derivujeme podle té samé proměnné, tak příme

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$$

Víta: Nechť $f(x,y) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a $f \in C^2(U)$. Potom na U platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{nebenli} \quad \forall \underline{a} \in V : \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\underline{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\underline{a})$$

Définition: Pour une variable continue, il est défini que la PD est limitée, si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right)$$

Oblastne so mizeme udibod pre $\partial y \rightarrow \partial x$ a doslaneme mygrac

$$\frac{1}{h^2} \left(f(x+h, y+h) - f(x, y+h) - f(x+h, y) + f(x, y) \right) =: F(h)$$

Není pravda (v obecném případě), že $\lim_{h \rightarrow 0} F(h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, protože v definici PD je limita, takže A je vždy i i když f je vlastně funkce.

Zafixujme h a definujme

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(y) := f(x+h, y) - f(x, y) \\ \psi(x) := f(x, y+h) - f(x, y) \end{array} \right\} \begin{array}{l} F(h) = \frac{1}{h^2} (\varphi(y+h) - \varphi(y)) \\ E(h) = \frac{1}{h^2} (\psi(x+h) - \psi(x)) \end{array} \quad (1)$$

$$f(x) := f(x, y+h) - f(x, y) \quad \left| \quad F(h) = \frac{1}{h^2} (\Psi(x+h) - \Psi(x)) \quad (2) \right.$$

Zkusme upravit (1). Funkce $\Psi \in C^1$, které máme dosadit do obecné Lagrangovy formulace a pro nějaké $\theta_1 \in (0,1)$ máme

$$F(h) = \frac{1}{h^2} (\varphi(y+h) - \varphi(y)) = \frac{1}{h^2} \varphi'(y + \theta_1 h) \cdot h = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x+h, y+\theta_1 h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta_1 h) \right)$$

Protozoa $\frac{\partial h}{\partial y} \in C^1$, hoc opere prode L.N. - Antrochais minimum prominență x

$$F(h) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \left(\underline{x+h}, \underline{y+h} \right) \right) = * \quad \xrightarrow{\text{jed. 10 fies of } \epsilon \text{ gegen } 0 \text{ nimmst } h \text{ & somit}} *$$

pro nějaká f_1, f_2 měří 0 a 1. Rovnice (2) dá podobně

$$F(h) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta_1 h, y + \theta_2 h) \right) - \square$$

Pro $h \rightarrow 0$ máme $(x + \theta_2 h, y + \theta_1 h) \rightarrow (x, y)$. Protože $\frac{\partial f}{\partial y}$ je spojite, tak

$\frac{\partial f}{\partial y}(x+\theta_2 h, y+\theta_1 h)$ $\rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Navíc protože $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$ je spojité, tak

$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x+\theta_2 h, y+\theta_1 h) \right) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$. Obdobně pro (2). Čili $\frac{\partial f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial x \partial y}$

Důsledek: Nechť $f: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^k(U)$. Potom hodnoty parciálních derivací do řádu k na U nezáleží na pořadí derivování.

Takže pro $r \leq k$ jsou všechny PD řádu r rovny

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \cdots \partial x_m^{r_m}}, \text{ kde } r_1 + r_2 + \cdots + r_m = r.$$

• Kompaktní metrické prostory

→ nejprve trochu operativně

Def: Kompaktní interval je uzavřený omezený interval. $[a, b]$ $a, b \in \mathbb{R}$

Věta (Bolzano-Weierstrassova): Z každé posloupnosti na kompaktním intervalu je možno vybrat konvergentní podposloupnost.

Dz:

Lemma: Každá reálná posloupnost má monotonní podposloupnost.

Důsledek: Nechť $(a_n) \subset [a, b]$ a (b_m) je její omezená podposloupnost.

(b_m) je omezená a monotonní \Rightarrow konverguje ke svému supremu / infimu

→ navíc $\because [a, b]$ je kompakt., tak konverguje k nějakému $x \in [a, b]$.

Dz: Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$, najdeme monotonní podposloupnost. Definujme

$$M := \{m \in \mathbb{N} \mid \forall m \geq n: a_m \geq a_n\} \dots 5 \in M \Leftrightarrow a_5 \geq a_6, a_7, a_8, \dots$$

• Pokud je M nekonečná, potom když M lze rozložit $m_1 > m_2 > m_3 > \dots$

$\diamond a_{m_k} \geq a_{m_{k+1}} \Rightarrow (a_{m_k})_k$ je nerostoucí

• Pokud je M konečná, tak nechť $m_1 > \max(M)$. Zajďme $m_1 \notin M$, takže

$\exists m_2 > m_1 : a_{m_2} > a_{m_1}$. Protože $m_2 \notin M$, tak $\exists m_3 > m_2 : a_{m_3} > a_{m_2}$ atd.

Dostaneme rostoucí posloupnost $(a_{m_k})_k$.

→ tato věta nám dává zároveň alternativní charakterizaci kompaktních intervalů

→ další většinou věty z MAT:

Twrem: Pokud $(a_n) \subset \mathbb{R}$ konverguje k A , třeba

každá podposloupnost (a_{n_k}) také konverguje k A .

Def: Nechť (X, d) je m.p. Množina $A \subseteq X$ je kompaktní \Leftrightarrow Hesloupnost v A obsahuje konvergentní podhesloupnost, jejíž limita leží v A .

\rightarrow pokud m.p. (X, d) můžeme kompaktním, tak tím myslíme, že X je komp.

Twrcení: Nechť (X, d) je kompaktní m.p. Potom pro libovolnou $Y \subseteq X$ platí: Y je kompaktní $\Leftrightarrow Y$ je uzavřená.

Dc: \Rightarrow : Pro spor nechť Y není uzavřená. Potom \exists hesloupnost $(y_n) \subset Y$ t.j.

$y := \lim_n y_n \notin Y$. Takže každá podhesloupnost (y_n) také konverguje k y $\Rightarrow (y_n)$ nemá podpř. konvergentní v $Y \Rightarrow Y$ není kompakt.

\Leftarrow : Nechť $(y_n) \subset Y$. Ale (y_n) je současné i hesloupnost X a X je kompakt, takže (y_n) obsahuje konvergentní podhesloupnost a z uzavřenosnosti Y je takto limita v Y .

Twrcení: Nechť (X, d) je liborolující (ne nutně kompaktní) metrický prostor. Potom každá kompaktní $Y \subseteq X$ je uzavřená

Dc: Nechť hesloupnost $(y_n) \subset Y$ konverguje k $y \in X$. Y je kompakt, takže (y_n) obsahuje konvergentní podhesloupnost, jejíž limita leží v Y . Ale protože (y_n) konverguje, tak tato limita = y , takže ve skutečnosti $y \in Y$.

Věta: Součin konečně mnoha kompaktních prostorů je kompaktní.

Dc:  sloučí tvr. dokázal pro 2 prostory, protože součin prostoru je asociační

$$(X_1, d_1) \times (X_2, d_2) \times (X_3, d_3) = [(X_1, d_1) \times (X_2, d_2)] \times (X_3, d_3)$$

Nechť (X, d_1) a (Y, d_2) jsou kompaktní a nechť $((x_m, y_m))_m \subset X \times Y$.

Chceme najít nějakou konvergentní podhesloupnost.

1) zvolme konvergentní podhesloupnost $(x_{m_\varepsilon})_\varepsilon \subset (X_m)_m$

\hookrightarrow ale odporídající $(y_{m_\varepsilon})_\varepsilon \subset (y_m)_m$ konvergentní byt nemusí

2) zvolme konvergentní podhesloupnost $(y_{m_\varepsilon})_\varepsilon \subset (y_m)_m$

\hookrightarrow odporídající $(x_{m_\varepsilon})_\varepsilon \subset (X_m)_m$ konvergentní je $\because (x_{m_\varepsilon})_\varepsilon$ je konvergentní

$\Rightarrow ((x_{m_\varepsilon}, y_{m_\varepsilon}))_\varepsilon \subset ((x_m, y_m))_m$ je libedaná konvergentní podhesloupnost.

\rightarrow Tady jsem kompaktní prostor charakterizoval jeho uzavřenosť, myslím omezenost.

Def: Nechť (X, d) je m.p. Množinu $A \subseteq X$ je omezená \Leftrightarrow

$$\exists x_0 \in X \ \exists K > 0 : A \subseteq U(x_0, K) = \{y \in X \mid d(x_0, y) < K\}$$

\rightarrow čili A lze zavřít do nejádře koule

A je omezená $\Leftrightarrow \exists K > 0 : \forall x, y \in A : d(x, y) < K$.

\rightarrow pokud o m.p. (X, d) řekneme, že je omezený, tak tím myslíme, že X je omezený

Tvrzení: Nechť (X, d) je m.p. Potom koule kompaktní $A \subseteq X$ je omezená.

Důkaz: Pro spor nechť A není omezená. To znamená, že

$$\forall x_0 \in X \ \forall K > 0 : A \not\subseteq U(x_0, K).$$

Tedy $\exists x \in A$ s.r. $d(x, x_0) > K$. Zvolíme si x_0 libovolně a pro $\forall n \in \mathbb{N}$

vyberu x_n tak, aby $d(x_n, x_0) > n$. Protože A je kompaktní, tak

\exists podposloupnost $(\tilde{x}_n)_n \subset (x_n)_n$ konvergentní k nejádřemu $y \in A$.

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : d(\tilde{x}_n, y) < \varepsilon.$$

Tahle musí platit pro všechny mnoho n . Takže pro $n \rightarrow \infty$ máme podle Δ -vlastnosti

$$d(\tilde{x}_n, x_0) \leq \underbrace{d(\tilde{x}_n, y)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{d(y, x_0)}_{< \varepsilon} \quad \text{při } \varepsilon \in \mathbb{R}$$



Shnutečně: Pokud je $Y \subseteq (X, d)$ kompaktní, tak je zavřená a omezená.

• Euklidovské kompaktní prostory

Věta: Množina $Y \subseteq \mathbb{E}_n$ je kompaktní \Leftrightarrow je zavřená a omezená.

Důkaz: Směr \Rightarrow je výplňme.

\Leftarrow : Je-li Y omezená, tak ji můžeme zavřít do nejádře velké krychly.

Formálně $Y \subseteq J \subseteq \mathbb{E}_n$, kde J je součin n kompaktních intervalů $[a_i, b_i]$.

Protože kompaktní intervaly jsou kompaktní, tak jejich součin je také kompaktní..

Je-li Y zavřená v \mathbb{E}_n , tak je zavřená i v podprostoru $J \subseteq \mathbb{E}_n$.

Protože je J kompaktní a Y zavřená v J .

Tak je Y kompaktní v J . Zajímá je tedy kompaktní i v \mathbb{E}_n .

Vlastnosti kompaktnosti a spojitosti

- význačné, že uvažené množiny ve spojitém rozložení jsou vždy uzavřené
- funkce je definicí obor našeho zobrazení kompaktní, takže plní i pro obraz.

Tvrzení: Nechť $f: (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$ je spojité zobrazení.

Pokud je $A \subseteq X$ kompaktní, tak je $f[A]$ uzavřené kompaktní.

Důkaz: Nechť $A \subseteq X$ je kompaktní a $(y_n)_n \subset f[A]$. Chceme najít nějakou konvergentní podposloupnost $(y_{n_k})_k$ s limitou v $f[A]$.

\Rightarrow Zvolme x_n tak, aby $y_n = f(x_n)$. Potom posloupnost $(x_n)_n \subset A$ má konvergentní podposloupnost $(x_{n_k})_k$ s limitou $a \in A$.

\Rightarrow Protože f je spojita, tak $(f(x_{n_k}))_k \subset f[A]$ také konverguje a její limita je $f(a) \in f[A]$. Je to tedy ta hledaná podposloupnost.

Věta: Nechť $f: (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce a $A \subseteq X$ kompaktní.

Potom f nabývá na A maxima a minima.

Důkaz: $f[A]$ je kompaktní, tedy i uzavřená, takže musí mít supremum $M \in \mathbb{R}$ a infimum $m \in \mathbb{R}$. Zajímá $d(m, f[A]) = d(M, f[A]) = 0$ a jelikož je $f[A]$ uzavřená, tak $m, M \in f[A]$.

rozdílenost
→ bodů od mny



• Cauchyovské posloupnosti

Def: Posloupnost $(x_n)_n$ v metrickém prostoru (X, d) je Cauchyovská $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M_0 \forall m, n \geq M_0 : d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Intuice: pravidlo Cauchyovské posloupnosti se k sobě dostávají libovolně blízko
 \rightarrow pro $\forall \varepsilon$ je jen konečně mnoho pravd. od sebe dál než ε

Každá konvergentní posloupnost je Cauchyovská

Ne každá Cauchyovská posloupnost je konvergentní

\hookrightarrow například $3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, \dots \subseteq \mathbb{Q}$
 chce konvergovat k π , ale $\pi \notin \mathbb{Q}$

Tworem: Pokud má Cauchyovská posloupnost konvergentní podposloupnost,
 pakom konverguje k limitě této podposloupnosti.

Def: Nechť $(x_n)_n$ je Cauchyovská posloupnost a $(\tilde{x}_n)_n$ její konvergentní podposloupnost s limitou x . Chceme ukázat, že $\lim_n (x_n) = x$.
 Nechť $\varepsilon > 0$ je dané. Víme

(1) $\exists M_1 \forall m, n \geq M_1 : d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \dots (x_n)_n$ je Cauchyovská

(2) $\exists M_2 \forall n \geq M_2 : d(\tilde{x}_n, x) < \varepsilon \quad \dots \lim_n (\tilde{x}_n) = x$

Ornačme $M_0 := \max \{M_1, M_2\}$. Z ε -nervnosti máme pro $\forall n \geq M_0$
 $d(x_n, x) \leq d(x_n, \tilde{x}_n) + d(\tilde{x}_n, x) < 2\varepsilon \Rightarrow \lim_n (x_n) = x$ ■

Tworem: Majme pro $i=1, \dots, k$ metrické prostory (X_i, d_i) a v každém
 z nich posloupnost $(x_n^{(i)})_n \subset X_i$. Posloupnost $((x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k)}))_n$
 je Cauchyovská v $\prod_{i=1}^k (X_i, d_i) \Leftrightarrow \forall i$ je $(x_n^{(i)})_n$ Cauchyovská v (X_i, d_i) .
 $\rightarrow ((x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k)}))_n = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(k)}), (x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_2^{(k)}), \dots$

Def: Připomínáme, že metricku součinnu prostoru je $d(u, v) := \max_i d_i(u_i, v_i)$.

\Rightarrow plynne beprostředně z toho, že $d_i(u_i, v_i) \leq d(u, v) < \varepsilon$.

\Leftarrow : Nechť je každá $(x_n^{(i)})_n$ Cauchyovská. Majme dané $\varepsilon > 0$. Pro každé $1 \leq i \leq k$
 je Cauchyovská $(x_n^{(i)})_n$ $\exists M_i \forall m, n \geq M_i : d_i(x_m^{(i)}, x_n^{(i)}) < \varepsilon$

Ornačme $M_0 := \max_i M_i$. Pakom tři máme $\forall m, n \geq M_0 : d_i(x_m^{(i)}, x_n^{(i)}) < \varepsilon$,

aže $\forall m, n \geq M_0 : d((x_m^{(1)}, x_m^{(2)}, \dots, x_m^{(k)}), (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k)})) < \varepsilon$. ■

Úplné metrické prostory

Def: Metrický prostor je úplný \Leftrightarrow je v něm každá Cauchyovská posl. konvergentní.
 \rightarrow MA1 víme, že

Věta (Bolzano-Cauchyova): Reálná čísla spolu s absolutní hodnotou jsou úplna.

Def: Všimněme si, že každá Cauchyovská posloupnost $(x_n) \subset \mathbb{R}$ je omezená
... neememe n_0 takové, že $\forall m, n \geq n_0 : |x_m - x_n| < 1$

\hookrightarrow tich x_k , pro která se nepoloží je jen konečně mnoho

$\Rightarrow (x_n)$ tedy můžeme omezit do nějakého kompaktního intervalu $[a, b]$

\rightarrow podle jednoho z předchozích tvrzení má tedy $(x_n) \subset [a, b]$ konvergentní hodposloupnost a podle tvrzení * tedy také konverguje

\hookrightarrow tady jsme využili axioma infima, protože nefunguje pro \mathbb{Q} ■

\diamond Silná ekvivalence metrik rachová úplnost – nelze již říct že je s obecnou ekvivalence

\hookrightarrow všechno rovnáhne s nějaký konstantou omezený faktor

\diamond Homeomorfismus metrických prostorů merachová úplnost

\hookrightarrow například $(0, 1)$ a \mathbb{R} jsou homeomorfní, ale $(0, 1)$ není úplný

Tvrzení: Každý kompaktní prostor je úplný.

Def: Cauchyovská posloupnost má podle kompaktnosti konvergentní podposloupnost, kdežto také konverguje se stejněm v bodu.

Věta: Součin úplných prostorů je úplný. Speciálně \mathbb{E}^n je úplný.

Def: Mejme nějakou Cauchyovskou posloupnost v libovolném součinu. Podle tvrzení \diamond jsou posloupnosti jednotlivých sloucích libovolných vektorů také Cauchyovské a jejich odpovídajících prostorech. Protože tyto prostory jsou úplné, tak tyto posloupnosti konvergují, kdežto celý ten vektor také konverguje. ■

Tvrzení: Podprostor úplného prostoru je úplný \Leftrightarrow je measurabilní.

Def: Nechť (X, d) je metrický prostor a $Y \subseteq (X, d)$.

\Rightarrow : Nechť Y je úplný a pro spor předpokládejme, že není measurabilní.

Potom existuje posloupnost $(y_n)_n \subset Y$ konvergentní v X a. i. $\lim_n y_n \notin Y$.

Potom je $(y_n)_n$ Cauchyovská v X a plíkou je metrika stejná, tak i v Y .

Protože je Y úplný, tak $\lim_n (y_n) \in Y$, což je spor.

\Leftarrow : Nechť Y je measurabilní a $(y_n)_n \subset Y$ Cauchyovská. Potom je Cauchyovská i v X , kdežto konverguje v X a z measurabilnosti Y je $\lim_n y_n \in Y$. ■

Důsledek: Podprostor \mathbb{E}^n je úplný \Leftrightarrow je measurabilní. (nenení byl kompaktní)

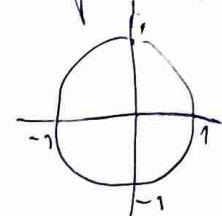
- Výky & implicitních funkcí

Příklad: Mějme rovnici $x^2 + y^2 = 1$ nebo ekvivalentně funkci

$F(x,y) := x^2 + y^2 - 1$ a cheme najít x,y aby $F(x,y) = 0$.

→ jak to rozwiązać? mówiąc y rysując jako makro funkcji

$y = f(x) = \pm\sqrt{1-x^2}$... ab Ir mení funkcia



\Rightarrow reusme for $y \in (0.5, 1.5)$. from $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

\Rightarrow Laike minime saat $F(x, y(x)) = 0$ pro $\forall x$ A.i. $y(x) \in (0.5, 1.5)$.

→ problem

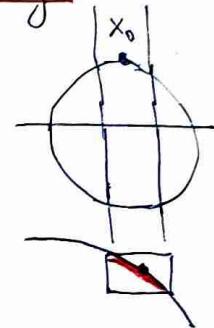
1) po miskera' x (najr. x < -1) rišení neziskují

2) pokud najdeme nějaké řešení x_0 , má jehož

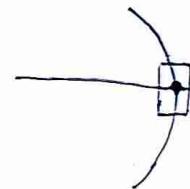
oboh' řešení také existuje, tak to ještě

nemusi byť funkce! Maxime evolút

i nějaké vhodné obohat očko očko yo, cili udešel
nějaký obdelník, ede to funguje



3, existují body, kde je řešení - například $(1,0)$, ale neexistuje žádne číslo obsahující to řešení, kde by to byla funkce



\circlearrowleft naše $F(x,y)$ má dva korene body a v obou plochách

$$\frac{\partial F}{\partial g} = 2g = 0 \Rightarrow (1, 0) \text{ and } (0, 1)$$

Vera: Nehlt $F(x,y) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ a necht für $x \in \mathbb{R}^m$ a $b \in \mathbb{R}$ plati

i, $F(a, b) = 0 \dots (a, b)$ resz' ronin' $F(x, y) = 0$

ii) $F \in C^k$ na nejakém okolí (x_0, y_0) ... $k \geq 1$

iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$... sliečkový prípad/predpoklad

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$$

poisom $\exists \delta, \varepsilon > 0$: $\forall x \in U(a, \delta)$ $\exists y \in U(b, \varepsilon)$: $F(x, y) = 0$.

Ornacíme-li totto y jalo funkci $f(x)$, tak plotí, že f je hrdý C.

Dek: 1) existence funkce f \rightarrow pro $\delta < 0$ byť funkce byl stejný

\rightarrow některé $\frac{\partial F}{\partial y}(\underline{a}, b) = 0$, kdežto BVNO $\frac{\partial F}{\partial y}(\underline{a}, b) > 0$

\rightarrow vzhledem ke spojitosti $\frac{\partial F}{\partial y}$ existují $\Delta, \varepsilon > 0$, že v obdélníku $U(\underline{a}, \Delta) \times U(b, \varepsilon)$ je $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$.

\rightarrow pro které $\underline{x} \in U(\underline{a}, \Delta)$ definuje funkci $\varphi_{\underline{x}}(y) := F(\underline{x}, y)$.

Vizuálně si řeď pro $y \in U(b, \varepsilon)$ platí $\varphi'_{\underline{x}}(y) = \frac{\partial F}{\partial y}(\underline{x}, y) > 0$. ↪

\rightarrow zadíme se na $\varphi_{\underline{a}}$. Zajímá $\varphi_{\underline{a}}(b) = F(\underline{a}, b) = 0$ a protože je $\varphi_{\underline{a}}$ rostoucí, tak $\varphi_{\underline{a}}(b-\varepsilon) < \varphi_{\underline{a}}(b) = 0 < \varphi_{\underline{a}}(b+\varepsilon)$

\rightarrow funkce F je spojita, tzn $\exists \delta : 0 < \delta \leq \Delta$, že $\forall \underline{x} \in U(\underline{a}, \delta)$:

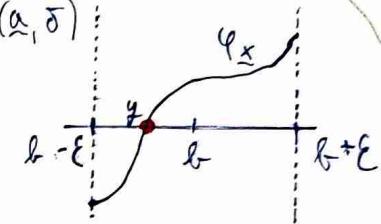
$$\varphi_{\underline{x}}(b-\varepsilon) < 0 < \varphi_{\underline{x}}(b+\varepsilon).$$

Spojitosť určí řeď, že Edgár broch směrem

vstup (tady \underline{x}), kdež se vystup kdež směrem

jenom broch, kdež řeď $F(\underline{a}, b-\varepsilon) < 0$, kdež $F(\underline{x}, b-\varepsilon) < 0$ pro nějaké \underline{x} hodně blízko \underline{a} . Protože $\varphi_{\underline{x}}$ je rostoucí \Rightarrow prostá, a spojita, tak

$\exists! y \in U(b, \varepsilon) : \varphi_{\underline{x}}(y) = F(\underline{x}, y) = 0$. Označme toto y jako $y =: f(\underline{x})$. ↪



2. Výpočet a spojitosť f

\rightarrow chceme mít $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x})$ pro nějaké $\underline{x} \in U(\underline{a}, \delta)$.

$$F(\underline{x}, f(\underline{x})) = 0$$

\rightarrow připomínáme Lagrangeova věta

$$F(\underline{A}) - F(\underline{B}) = \nabla F(\underline{C}) \cdot (\underline{A} - \underline{B}), \text{ kde } \underline{C} = \underline{A} + \theta(\underline{B} - \underline{A}) \text{ pro } \theta \in (0, 1)$$

\rightarrow uvažujme male 't, aby $\underline{x} + t \cdot \underline{e}_i$ stále leželo v $U(\underline{x}_0, \delta)$

$$0 = F(\underbrace{\underline{x} + t \cdot \underline{e}_i}_{\underline{A}_t}, f(\underline{x} + t \cdot \underline{e}_i)) - \underbrace{F(\underline{x}, f(\underline{x}))}_{\text{vstup k. funkce } \underline{B}} = \nabla F(\underline{C}_t) \cdot (\underline{A}_t - \underline{B})$$

$$\rightarrow \text{průměr } \underline{A}_t - \underline{B} = (1 \cdot \underline{e}_i, f(\underline{x} + t \cdot \underline{e}_i) - f(\underline{x})) = (0, 0, \dots, \cancel{1}, 0, \dots, \cancel{f(\underline{x} + t \cdot \underline{e}_i)} - f(\underline{x}))$$

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}, \frac{\partial F}{\partial y} \right)$$

$$\rightarrow \text{celkem } 0 = \frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{C}_t) \cdot \cancel{1} + \frac{\partial F}{\partial y}(\underline{C}_t) \cdot (f(\underline{x} + t \cdot \underline{e}_i) - f(\underline{x}))$$

slicový
předpoklad

$$\Rightarrow (*) \frac{1}{t}(f(\underline{x} + t \cdot \underline{e}_i) - f(\underline{x})) = - \frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{C}_t) / \frac{\partial F}{\partial y}(\underline{C}_t) \dots \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$$

\rightarrow pravá strana je omezená, protože jsme předpokládali spojite PD

\hookrightarrow když udeláme uvažovat $U(\underline{a}, \delta) \times U(b, \varepsilon)$, kdež dostaneme

kompaktnost, kdež sam PD nabývají extrému, cili jsou omezené

\Rightarrow levá strana je když omezena nějakou konstantou k, nebož

$$\left| \frac{1}{t}(f(\underline{x} + t \cdot \underline{e}_i) - f(\underline{x})) \right| \leq K \Rightarrow |f(\underline{x} + t \cdot \underline{e}_i) - f(\underline{x})| \leq K \cdot |t|$$

POKRAČOVÁNÍ DŮKAZU

→ Vážíme pro $\lambda \rightarrow 0$ máme $f(\underline{x} + \lambda \underline{e}^i) \rightarrow f(\underline{x})$ (takže by pro $x \in \mathbb{R}^n$)
 (knamenalo spojitost)

→ z toho platí

$A_1 \rightarrow (\underline{x}, f(\underline{x})) = B \Rightarrow C_1 \rightarrow (\underline{x}, f(\underline{x})) \dots$ protože C_1 je množina A_1 a B

→ Vážíme limitu pro $\lambda \rightarrow 0$ v $(*)$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}, f(\underline{x}))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\underline{x}, f(\underline{x}))} \quad (**)$$

→ myní zájímá nás, že $f \in C^1$.

• f je spojitá v \underline{x} ... protože tam má omezené PD dle $(**)$

• $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ je spojitá v \underline{x} ... předpokládáme $F \in C^1$, takže podle $(**)$
 je $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ složení (fodík) spojitých funkcí

→ co když $F \in C^k$?

→ pokud F navíc je C^2 , tak pravá strana $(**)$ je C^1

$\Rightarrow \forall i \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^1$ neboli $f \in C^2$

\Rightarrow pro obecné C^k indukci

(takže by pro $x \in \mathbb{R}^n$)
 (knamenalo spojitost)

na takže byla reálna
 v spojitě PD \Rightarrow TD



Implicitní funkce pro dvě rovnice

$$F_1(\underline{x}, y, z) = 0$$

$$F_2(\underline{x}, y, z) = 0$$

→ majme ně nalezené nejake řešení (x_0, y_0, z_0) a pokusme se najít funkci $y = f(\underline{x})$ a $z = g(\underline{x})$ v nejakej zeho oboh

→ takto ignorujeme první rovnici a uvažujme o té druhé jako o rovnici pro z , abychom mohli aplikovat větu o jedné rovnici.

⇒ tím jeme v nejakej zeho (x_0, y_0, z_0) řešili $z = \varphi(\underline{x}, y)$

→ substituci do první rovnice máme

$$G(\underline{x}, y) := F_1(\underline{x}, y, \varphi(\underline{x}, y)) = 0$$

⇒ opět můžeme použít větu o jedné rovnici, kde máme $y = f(\underline{x})$ v nejakej zeho (x_0, y_0)

⇒ substituujeme ho do φ a řešíme

$$z = g(\underline{x}) := \varphi(\underline{x}, f(\underline{x}))$$

Co jeme vlastně předstádali

i) spojite PD funkcí F_1 a F_2

ii) abychom řešili φ , tak $\frac{\partial F_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

iii) abychom řešili G řešili f , $\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

↳ ale G je složená fce $F_1(x_1, x_2, \dots, x_m, y, \varphi(\underline{x}, y))$

⇒ řešitkové pravidlo:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \sum_x \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial h_k}{\partial y} = 0 + 0 + \dots + 0 + \frac{\partial F_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$$

→ navíc víme, že $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F_2}{\partial y}}{\frac{\partial F_2}{\partial z}}$... následuje z důvodu předešlé věty

$$\Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y} / \frac{\partial F_2}{\partial z} \neq 0 \rightarrow \text{vyjádřili jsme } z = \varphi(\underline{x}, y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y} \neq 0 \dots \text{ale stahle věc je prostě } \underline{\text{determinant}}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$$

- Intuice: To, že se lze objevit determinant, by nemělo být překvapivé.
 → řešíme soustavu rovnic a předpokládáme, že tyto jsou z C^1 ,
 tedy mají TD
 → to znamená, že je lze lokálně lineárně approximovat, tedy lokálně
 (na nějakém okolí (x_0, y_0, z)) vlastně řešíme soustavu lineárních
 rovnic, která má jednoznačné řešení \Leftrightarrow je její matice regulařní
 → tento speciální determinant, co jeme dostali je presně
 determinantem příslušející této soustavě

Def (Jacobián): Pro nelineární funkci $\mathbf{F}(x, y): \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$, podrobnejší

$$\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y_1, \dots, y_m), \dots, F_m(x, y_1, \dots, y_m))$$

definujeme Jacobiho determinant jako

$$\frac{D(\mathbf{F})}{D(y)} := \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

Nehle je jde o funkci,
 tedy do m násobku
 dostane se reči

FINALNÍ
PRODUKT

Věta: Nechť $\mathbf{F}(x, y): \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$, podrobnejší je o funkce
 $F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, $i=1, \dots, m$.

Nechť pro $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a $y_0 \in \mathbb{R}^m$ platí

- $\mathbf{F}(x_0, y_0) = 0$... (x_0, y_0) je řešením soustavy $\mathbf{F}(x, y) = 0$
- F_i jsou C^k na nějakém okolí (x_0, y_0) ... $k \geq 1$
- $\frac{D(\mathbf{F})}{D(y)}(x_0, y_0) = \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x_0, y_0)\right) \neq 0$... Eliminuj předpoklad

Potom existují $\delta, \varepsilon > 0$: $\forall x \in U(x_0, \delta) \exists! y \in U(y_0, \varepsilon): \mathbf{F}(x, y) = 0$.

Píšeme-li následující funkci $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$,
 tedy jsou funkce $f_i: U(x_0, \delta) \rightarrow U(y_0, \varepsilon)$ řidily C^k .

Důkaz: Protože jsou to funkce řidily C^k , tedy je můžeme lineárně
 approximovat pomocí TD. Nebo ještě lepší, pomocí Taylova
 rozvoje až do rádu k .

Příklad

$$F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 = 0$$

$$F_2(x, y, z) = x + y + z - 2 = 0$$

→ chceme $x = x(z)$

$$y = y(z)$$

→ dostali jsme řešení $a = (1, -1, 2)$

i, $F_1(a) = 1 + 1 - 1 = 0 \checkmark$

$$F_2(a) = 1 - 1 + 2 - 2 = 0 \checkmark$$

ii, F_1, F_2 jsou polynomy \Rightarrow srovnatelné PD \checkmark

iii) $\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}(a) = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}(a) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 \neq 0 \checkmark$

$$\Rightarrow \exists U(2) \exists V(1, -1) : \forall z \in U \exists !(x, y) \in V : \mathbf{F}(x, y, z) = 0$$

↳ označme takto x jako $x(z)$ a y jako $y(z)$

$$\rightarrow \text{definujme } G_1(z) := F_1(x(z), y(z), z)$$

$$G_2(z) := F_2(x(z), y(z), z)$$

→ protože G_1 a G_2 jsou na U konstantní 0, tak jejich derivace je taky 0. Tedy

$$G'_1(z) = 2x(z) \cdot x'(z) + 2y(z)y'(z) - 2z = 0$$

$$G'_2(z) = x'(z) + y'(z) + 1 = 0$$

→ speciálně v bodě $a = (1, -1, 2)$ máme $x(2) = 1, y(2) = -1$, tedy

$$G'_1: 2 \cdot x'(2) - 2 \cdot y'(2) - 4 = 0$$

$$x'(2) - y'(2) - 2 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \oplus 2x'(2) - 4 = 0 \Rightarrow x'(2) = \frac{1}{2} \Rightarrow y'(2) = -\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

$$G'_2: x'(2) + y'(2) + 1 = 0$$

→ funkce $x(z)$ a $y(z)$ jsou C¹, tak mají TD, tedy

$$x(z) \approx x(2) + x'(2)(z-2) = 1 + \frac{1}{2}(z-2) = \frac{1}{2}z$$

$$y(z) \approx y(2) + y'(2)(z-2) = -1 - \frac{3}{2}(z-2) = 2 - \frac{3}{2}z$$

→ pomocí Taylova rozvoje bychom mohli dělat lepší approximace

Taylorov rozvoj v jedné proměnné

Def: Taylorov rozvoj funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivovatelné alespoň do rádu k v bodě $a \in \mathbb{R}$, rádu k je

$$T_k^{f,a} := f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{i=1}^k \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

→ tímto je dobrá approximace některých normálních funkcí

Taylorův rozvoj ve více proměnných

Def: Nechť $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ je alespoň C^k . Taylorův rozvoj řádu k funkce f v bodě $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ je

$$T_k^{f, \alpha} := f(\alpha) + \underbrace{\frac{1}{1!} \sum_{i=1}^m \frac{\partial f(\alpha)}{\partial x_i} \cdot (x_i - \alpha_i)}_{\text{TD}} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f(\alpha)}{\partial x_i \partial x_j} \cdot (x_i - \alpha_i)(x_j - \alpha_j) + \dots$$

Tecná rovina

$$\dots + \frac{1}{k!} \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq m} \frac{\partial^k f(\alpha)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \cdot (x_{i_1} - \alpha_{i_1})(x_{i_2} - \alpha_{i_2}) \dots (x_{i_k} - \alpha_{i_k})$$

↑ suma přes všechny možné
družice i_1, i_2, \dots, i_k

protože $f \in C^k$, tak málo leží na pořadí derivací, takže by
sumy vlastně nejsou až tak obtí

Vzácná: Taylorův rozvoj 2. řádu funkce $f(x, y) = xe^{x+y}$ v bodě $(0, 0)$ je

$$xe^{x+y} \approx f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \cdot y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \cdot x^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \cdot xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \cdot y^2 \right)$$

$$= x + x^2 + xy$$

Hledání extrémů

Ovolutám: Pro funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ platí následující:

- 1, nutná podmínka toho, že a je extrém, je $f'(a) = 0$. Navíc pak
- 2, $f''(a) > 0$, tak a je minimum
 $f''(a) < 0$, tak a je maximum

→ všechno okolo a se roste
→ všechno okolo a se slevuje

Def: Pro $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ a bod $\alpha \in \mathbb{R}^m$ definujeme Hasseho matice

$$H_f(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\alpha)}{\partial x_i \partial x_j} \end{pmatrix}_{i,j=1,\dots,m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\alpha)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\alpha)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\alpha)}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \vdots & \ddots & & \\ \frac{\partial^2 f(\alpha)}{\partial x_m \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\alpha)}{\partial x_m \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\alpha)}{\partial x_m \partial x_m} \end{pmatrix}$$

Fakt: Platí

- 1, nutná podmínka toho, že α je extrém, je $\nabla f(\alpha) = 0$. Navíc pak
- 2, $H_f(\alpha)$ je pozitivně definitní, tak α je maximum → všechna vlastní č. > 0
 $H_f(\alpha)$ je negativně definitní, tak α je minimum → všechna vlastní č. < 0

Shrnutí: Podezřelé body jsou

- 1, $\nabla f = 0$
- 2, ∇f není definován ... PD neexistuje
- 3, krajiny definičního oboru

• Vázané extrema

- problém je následující: chceme mít extremum funkce f , ale jenom na nějaké množině $\{x \mid g(x) = 0\}$
- například $f(x, y) = 2x + y$ na hranici $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
- tedy zapomeneme pak f vypadá mimo a budeme se soustředit jen na

Věta: Nechť $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $g_1, g_2, \dots, g_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pro $k < n$.

Nechť $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ splňuje $\underline{a} \in \Gamma$, kde

$$\Gamma := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \forall i: g_i(\underline{x}) = 0\} \quad \dots \text{množina dana vazbami}$$

Dále předpokládajme, že

- f a g_i jsou sidly C^1 na obhl' bodu \underline{a}
- že matice

$$M := \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\underline{a}) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\underline{a}) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\underline{a}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\underline{a}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(\underline{a}) & \frac{\partial g_k}{\partial x_2}(\underline{a}) & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n}(\underline{a}) \end{pmatrix} \quad \overbrace{\quad \quad \quad}^n \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_k$$

má maximální hodnotu, tedy $k < n$.

Potom nutnou podmínku toho, že \underline{a} je lokální extremum f na Γ , je existence čísel $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ takových, že

$$\frac{\partial f(\underline{a})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(\underline{a})}{\partial x_i} = 0 \quad \text{pro } i = 1, \dots, n$$

neboli funkce $L := f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_k g_k$ splňuje

$$\nabla L(\underline{a}) = \underline{0}.$$

Poznámka: Čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ se říkají Lagrangeovy množství

Příklad: $f(x, y) = 2x + y$, $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \Rightarrow \Gamma = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

→ f a g jsou C^1 a $\frac{\partial f}{\partial x} = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$, takže $(2x, 2y)$ má hodnotu $1 \Leftrightarrow (x, y) \neq (0, 0)$, ale $(0, 0) \in \Gamma$.

⇒ chceme

$$0 = 2 + \lambda 2x \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{všechny extrema} \\ \text{má řešení} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \begin{cases} \text{rovnice s 3 neznámými} \\ \Rightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right), \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}} \right) \end{cases} \quad \dots \text{jen 2 fyzické body}$$

$0 = 1 + \lambda 2y \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{má řešení} \\ \text{splňoval} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \Gamma \text{ je kompaktní} \Rightarrow \text{takto je extrema f}$

Dr: Z hlediska: M má hodnotu $\geq \ell \Leftrightarrow$ je alespoň jedna její $\ell \times \ell$ podmatrix regulární (tedy má menšího determinant). Takhle máme

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_\ell} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_\ell}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_\ell}{\partial x_\ell} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_{\ell+1}} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_\ell}{\partial x_{\ell+1}} & \dots & \frac{\partial g_\ell}{\partial x_m} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\square} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_\ell} \end{pmatrix}$$

\rightarrow DÚNO mechtálo plati pro λ první, tedy \square je regulární, potom soustava ℓ lineárních rovnic o ℓ neznámých má jednoznačné řešení $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_\ell)$

\Rightarrow při této volbě \tilde{x} plati řešení k výsily pro $i = 1, \dots, \ell$. Konkrétně

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = - \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (*) \quad \text{pro } i = 1, \dots, \ell. \quad \begin{matrix} \rightarrow \text{ale } i > \ell? \\ y \\ x \end{matrix}$$

\rightarrow protože je $\det(\square) \neq 0$, tak soustava rovnic $g_j(x_1, \dots, x_\ell, x_{\ell+1}, \dots, x_m) = 0$ splňuje podmínky výsily o implicitních funkciích \Rightarrow lze vyjádřit proměnné x_1, \dots, x_ℓ jako nejake C^1 funkce $x_i = \phi_i(\tilde{x})$, kde $\tilde{x} := (x_{\ell+1}, \dots, x_m)$. Potom

$$g_j(\phi_1(\tilde{x}), \phi_2(\tilde{x}), \dots, \phi_\ell(\tilde{x}), \tilde{x}) = 0 \quad \text{pro } j = 1, \dots, k.$$

\rightarrow tedy $\forall \tilde{x} \in$ nejakeho oboru bodu $\tilde{a} := (a_{\ell+1}, \dots, a_m)$ je

$$\varphi(\tilde{x}) := (\phi_1(\tilde{x}), \phi_2(\tilde{x}), \dots, \phi_\ell(\tilde{x}), \tilde{x}) \in \Gamma$$

\rightarrow to znamená, že obor hodnot (nemáteřík ně zahraničí) funkce

$$F(\tilde{x}) := f(\varphi(\tilde{x})) \text{ je stejný, jako obor hodnot funkce } f \text{ na } \Gamma.$$

\rightarrow protože \tilde{a} je extrém f vůči Γ , tak \tilde{a} je extrém F , tedy

$$\nabla F(\tilde{a}) = 0. \quad \text{Navíc protože je } G_j(\tilde{x}) := g_j(\varphi(\tilde{x})) \text{ konstantní, tak} \\ \nabla G_j(\tilde{a}) = 0. \quad \text{Cíli k výpočtu gradienta máme} \quad \begin{matrix} \text{rovnou} \\ \text{rovnou} \end{matrix}$$

$$0 = \nabla F(\tilde{a}) = \nabla(f(\varphi))(\tilde{a}) = (\nabla f)(\varphi(\tilde{a})) \cdot \nabla \varphi(\tilde{a}) = \nabla f(\tilde{a}) \cdot \nabla \varphi(\tilde{a}).$$

$$0 = \nabla G_j(\tilde{a}) = \nabla(g_j(\varphi))(\tilde{a}) = (\nabla g_j)(\varphi(\tilde{a})) \cdot \nabla \varphi(\tilde{a}) = \nabla g_j(\tilde{a}) \cdot \nabla \varphi(\tilde{a}).$$

\rightarrow mynì zkoumajme tento vztah:

$$0 = \nabla F + \lambda_1 \nabla G_1 + \lambda_2 \nabla G_2 + \dots + \lambda_\ell \nabla G_\ell = \nabla F + \sum_{j=1}^\ell \lambda_j \nabla G_j$$

$$0 = \left(\nabla f + \sum_{j=1}^\ell \lambda_j \nabla g_j \right) \cdot \nabla \varphi \quad \rightarrow \text{pro jednoduchost napsím } \tilde{a}, \text{ a}$$

\rightarrow podívejme se mynì na i -ton složku tohoto vztahu pro $i = \ell+1, \dots, m$:

$$0 = \sum_{r=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_r} + \sum_{j=1}^\ell \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_r} \right) \cdot \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i} \quad \text{pro } i = \ell+1, \dots, m.$$

\rightarrow znamená se na jednotlivé členy této sumy. Když $r = 1, \dots, \ell$, tak ten, červený výraz, je podle $(*)$ roven 0. Navíc, když $r = \ell+1, \dots, m$, tak $\varphi_r = x_r$, takže $\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i} = \frac{\partial x_r}{\partial x_i}$, což je 1 podud i = i a jinak 0. Protože $0 = \sum$, tak i člen pro $r = i$: $\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^\ell \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}$ musí být roven 0.

Regulární zobrazení

- regulární zobrazení je zobrazením fyzické funkce pro něž proměnných
- funkce τ posílá \Leftrightarrow je ryze monotónní (rostoucí/klesající)
- ⇒ má všechny lodi \oplus nebo \ominus derivaci

Def: Nechť $f_i: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, U otevřená, $f_i \in C^1$, pro $i = 1, \dots, n$.

Vektovovou funkci $f := (f_1, \dots, f_n): U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazveme regulární =

$$\forall \underline{x} \in U: \frac{D(f)}{D(x)}(\underline{x}) = \det(\nabla f(\underline{x})) \neq 0$$

→ v tomto případě je Jacobian stejný jako zobrazený gradient, protože určují jeho hodnoty všechny derivace podle všech proměnných.

Intuice: Jacobian (tentokrát myslíme matici) vektorové funkce v nějakém bodě \underline{x} se na n funkci dívá jako na její lineární approximaci, tedy TD v \underline{x} . Funkci f se tedy lokálně chová jako lineární zobrazení a proto má nějakou matici. Zamysleme se, jak by mohla vypadat. Z hlediska výpočtu, když i -tý sloupec matice l.r. je obraz i -tibо lokálního vektoru v tomto zobrazení.

→ Vrážíme i -tý vektor kanonické báze a k němu se zobrazi.

→ protože ho delšíme lokálně, vůči nějakému \underline{x} , tak má srajíma

$$f(\underline{x} + \underline{\xi}^i) = (f_1(\underline{x} + \underline{\xi}^i), f_2(\underline{x} + \underline{\xi}^i), \dots, f_n(\underline{x} + \underline{\xi}^i))$$

$$TD: f_{\underline{x}}(\underline{x} + \underline{\xi}^i) \approx f_{\underline{x}}(\underline{x}) + \nabla f_{\underline{x}}(\underline{x}) \cdot \underline{\xi}^i = f_{\underline{x}}(\underline{x}) + \frac{\partial f_{\underline{x}}}{\partial x_i}(\underline{x})$$

$$\Rightarrow f(\underline{x} + \underline{\xi}^i) \approx f(\underline{x}) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\underline{x}), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(\underline{x}), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(\underline{x}) \right)$$

→ což je presně (až na to posunutí) i -tý sloupec $\nabla f(\underline{x})$.

Intuice: Pokud ne tedy na Jacobian díváme jako na možné lokálního lineárního zobrazení, tak jeho determinant určuje, jak moc se hýbem roztahují. Pokud $\det = 0$, tak matice není regulární, objem se sníží na nulu a vektorový prostor obrazu má menší dimenzi, než prostor vzetou. To znamená, že se na některé obory muselo zobrazení něco rozšířit, takže to zobrazení není „prosté“.

Důsledek tvrzení (*): Prosté regulární zobrazení $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ má regulární invizi $g: f[U] \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Tvrzení: Je-li $f: V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ regulární a $V \subseteq U$ otevřená, potom je obraz $f[V]$ také otevřený.

Poznámka: Takhle říkáme, že naopak, platí pro libovolnou spojistou funkci.
Platí také: obraz otevření \Rightarrow rozsah otevřený.

Dоказat: Nechť $V \subseteq U$ je otevřená, $a \in V$. Označme $b := f(a)$. Chceme ukázat $\exists \delta > 0: U(b, \delta) \subseteq f[V]$.

Jako další definujme $F: V \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ podle $F(x, y) := f(x) - y$.

Máme $F(a, b) = f(a) - b = 0$. Protože $\frac{D(F)}{D(x)}(a) = \frac{D(f)}{D(x)}(a) \neq 0$ a $F \in C^1$, tak musíme použít větu o impl. funkci a na nějakém okolí (a, b) najdout proměnné x_1, \dots, x_n jako funkce proměnných y_1, \dots, y_m . Máme

$$\exists \delta, \varepsilon > 0: \forall y \in U(b, \delta) \exists! x \in U(a, \varepsilon): F(x, y) = f(x) - y = 0$$

Ale když znamená, že $y = f(x)$, znamená.

$$U(a, \varepsilon) \subseteq V \Rightarrow U(b, \delta) = \{f(x) \mid x \in U(a, \varepsilon)\} \subseteq f[V].$$

\rightarrow Otevřenosť V jsme použili všude $\frac{D(F)}{D(x)}(a)$, protože derivace v a je definovaná funkce, tudíž má a nějaké okolí. ■

Tvrzení: Je-li $f: V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je regulární a $a \in V$, potom \exists okolí $V(a)$ L.ž..

* 1, restrikce $f|_V: V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je prostá (dorovně bijekce)

2, rozvojení $g: f[V] \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ inverzi $\& f|_V$ je regulární

Dоказat: Znovu použijeme stejný argument jako minule. Tedy máme rozvojení $F: V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) := f(x) - y$. Z věty o impl. funkci opět máme

$$\exists \delta, \varepsilon > 0: \forall y \in U(f(a), \delta) \exists! x \in U(a, \varepsilon): F(x, y) = 0$$

Označme toto jednoznačné x jako $x := g(y)$.

$$\text{Dále máme } F(x, y) = f(x) - y = 0 \Rightarrow y = f(x).$$

Víme, že f je funkce, t. j. $\forall x \in U(a, \varepsilon) \exists! y \in U(f(a), \delta): y = f(x)$

\rightarrow Když to kombinujeme, tak zjistíme, že na $V := U(a, \varepsilon)$ je f bijekce a podobně, má $f[V]$ je g bijekce a zřejmě je g inverzi $\& f$. $\Rightarrow 1)$

\rightarrow Ještě zbyvá dokázat, že g je regulární. Kdo o IF nám garantuje $g \in C^1$, ještě potřebujeme aby $\det(\nabla g(b)) \neq 0$ pro $\forall b \in f[V]$. Relativně p:

$$\nabla(\text{id})(b) = \nabla(g \circ f)(b) = (\nabla f)(g(b)) \cdot \nabla g(b) \quad \Rightarrow \quad 1 = \underbrace{\det((\nabla f)(g(b)))}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\det(\nabla g(b))}_{\neq 0}$$

$$\Rightarrow \det(\nabla(\text{id})(b)) = \det((\nabla f)(g(b)) \cdot \nabla g(b)) \quad \Rightarrow \neq 0$$

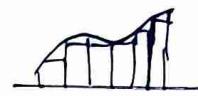
Opravdování Riemannova integrální jedné proměnné

Def: Dělení intervalu $[a, b]$ je $(n+1)$ -tice $D = (t_0, t_1, \dots, t_n)$, kde $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$

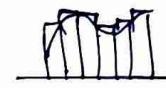
Def: Zjemnění dělení $D = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ je dělení $D' = (t'_0, t'_1, \dots, t'_m)$ splňující $\{t_0, t_1, \dots, t_n\} \subseteq \{t'_0, t'_1, \dots, t'_m\}$.

Def: Lemnost (norma) dělení $D = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ je $\lambda(D) := \max_i (t_i - t_{i-1})$.

Def: Pro omezenou funkci $f: J = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ a dělení D intervalu J definujeme
 1, dolní součet pro $m_i := \inf \{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$

$$S(f, D) := \sum_{i=1}^m m_i (t_i - t_{i-1})$$


2, horní součet pro $M_i := \sup \{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$

$$S(f, D) := \sum_{i=1}^m M_i (t_i - t_{i-1})$$


⊗ Jde o obsahy approximací plochy pod křivkou kladné funkce f

$$S(f, D) \leq \text{vol } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ a } 0 \leq y \leq f(x)\} \leq S(f, D')$$

⊗ Počud D' zjemníuje D , tak

$$S(f, D) \leq S(f, D') \leq S(f, D) \leq S(f, D)$$

Def: Pro omezenou funkci $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ definujeme

1, dolní Riemannův integrál $\underline{\int}_a^b f(x) dx := \sup \{S(f, D) \mid D \text{ je dělení } [a, b]\}$

2, horní Riemannův integrál $\overline{\int}_a^b f(x) dx := \inf \{S(f, D) \mid D \text{ je dělení } [a, b]\}$

3, Riemannův integrál $\int_a^b f(x) dx$, počud $\underline{\int}_a^b f(x) dx = \overline{\int}_a^b f(x) dx$.

⊗ Počud Riemannův integrál $\int_a^b f(x) dx$ existuje, tak je to jeho hodnota, kterou dává smysl přiřadit jako obsah množiny

$$\text{vol } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ a } y \in [0, f(x)]\}$$

Existence Riemannova integrálu

Věta: Riemannův integrál $\int_a^b f(x) dx$ existuje $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists D$ dělení $[a, b]$ t.č.

Dоказat: Nejdříve nám dal nejakej $\varepsilon > 0$.

$$S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

Protože $\int_a^b f(x) dx$ existuje, tak existují dělení D_1 a D_2 taková, že

$$\int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} > S(f, D_1) \quad \text{a} \quad \int_a^b f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, D_2)$$

Nechť D je společné sjemenné D_1 a D_2 . Dosadíme do nich
druh nerovnosti a od této první odčteme druhou (takže se stojí \Rightarrow)

$$\int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon > S(f, D) - s(f, D).$$

\Leftarrow : Pro nejakej $\varepsilon > 0$ volme D , aby $S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$. Potom

$$\int_a^b f(x) dx \leq S(f, D) < s(f, D) + \varepsilon \leq \int_a^b f(x) dx + \varepsilon.$$

Protože vždy $\int_a^b f(x) dx \geq \underline{\int_a^b f(x) dx}$ a ε může být libovolně malé, tak musí platit $\int_a^b f(x) dx = \underline{\int_a^b f(x) dx}$. ■

Věta: Pro každon správitoru $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemannův integrál $\int_a^b f(x) dx$ existuje.

Dоказat: Musíme ukázat, že $\forall \varepsilon > 0 \exists D$ dělení $[a, b]$: $S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$.

$$S(f, D) - s(f, D) = \sum_{i=1}^m (M_i - m_i)(\lambda_i - \lambda_{i-1}).$$

Pořad se nám podaří $M_i - m_i$ omezit pomocí ε , tak máme

$$\leq \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^m (\lambda_i - \lambda_{i-1}) = K(\lambda_1 - \lambda_0 + \lambda_2 - \lambda_1 + \dots + \lambda_m - \lambda_{m-1}) = \varepsilon(b-a).$$

Protože $b-a$ je konstanta, tak by tohle dokázalo naší větu.

Nyní máme správitoru f . Máme

$$\forall x, y \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

A rukoume omezit $M_i - m_i$:

$$M_i - m_i = \sup \{f(x) \mid \lambda_{i-1} \leq x \leq \lambda_i\} - \inf \{f(x) \mid \lambda_{i-1} \leq x \leq \lambda_i\}$$

\hookrightarrow nejvyšší hodnota \hookrightarrow nejmíni hodnota

$$= \sup \{|f(x) - f(y)| \mid \lambda_{i-1} \leq x, y \leq \lambda_i\} < \varepsilon$$

\hookrightarrow největší rozdíl hodnot

• Integrální věta o střední hodnotě

Věta: Nechť $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojita. Potom existuje $c \in [a, b]$ t.ž.

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

Důkaz: Protože $[a, b]$ je kompaktní a f spojita, tak mám nabývající extrémum. Nechť

- $m := \min \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$... minimum
- $M := \max \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$... maximum

Zajímá

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b-a).$$

Všechno to jsou čísla, cili existuje $K \in [m, M]$: $\int_a^b f(x) dx = K \cdot (b-a)$.

Protože K je někde mezi min. a max. a f je spojita, tak

existuje nějaké $c \in [a, b]$, ve kterém f nabývá K , tedy $f(c) = K$. ■

• Základní věta analyzky

Věta: Nechť $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojita. Definujme $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ danou předpisem

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt. \text{ Potom je } F'(x) = f(x).$$

Důkaz: Pro $h \neq 0$ máme

$$\frac{1}{h} (F(x+h) - F(x)) = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Zde jsme použili poučení $\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$. Nyní použijeme větu o střední hodnotě.

Pro nějaké $\theta \in (0, 1)$ máme

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \frac{1}{h} f(x+\theta h) \cdot (x+h-x) = f(x+\theta h) \rightarrow f(x) \text{ pro } h \rightarrow 0. ■$$

Důsledek: Spojitá $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ má na $[a, b]$ primitivní funkci F .

Navíc, protože (derivace \Rightarrow spojitosť) je F spojita.

Věta: Nechť $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojita. Potom pro sestrojenou $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, primitivní $\& f$ platí

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Důkaz: Protože pro $G(x) := \int_a^x f(t) dt$ platí $G'(x) = f(x)$ & víme $F'(x) = f(x)$,

tak máme $F(x) = G(x) + C$, pro nějaké $C \in \mathbb{R}$. Také

$$F(b) - F(a) = G(b) + C - G(a) - C = \int_a^b f(t) dt - \int_a^a f(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

Integrální věta o střední hodnotě je variace složité věty o st. H.

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a) = F'(c)(b-a).$$

"
Lagrangeova
věta

Riemannův integrál ve více proměnných

Def: (n-rozměrný) kompaktní interval v \mathbb{E}^n je kružnice

$$J = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n].$$

Def: Dílení kompaktního intervalu v \mathbb{E}^n je n-tice dílení $D = (D_1, D_2, \dots, D_n)$, kde D_i je dílení intervalu $[a_i, b_i]$. Čísla v D_i indexujeme jako

$$a_i = \lambda_{i,0} < \lambda_{i,1} < \dots < \lambda_{i,n_i-1} < \lambda_{i,n_i} = b_i,$$

tedy jednotlivá dílení D_i mohou mít různou délku n_i .

Def: Dílení $D = (D_1, \dots, D_n)$ rozdělá prostor na malé cihelky. Každá taková cihla dílení D je kompaktní interval ve tvaru

$$[\lambda_{1,i_1}, \lambda_{1,i_1+1}] \times [\lambda_{2,i_2}, \lambda_{2,i_2+1}] \times \dots \times [\lambda_{n,i_n}, \lambda_{n,i_n+1}].$$

Množina $B(D)$ (bricks) znací množinu všech cihel dílení D .

Protože jednotlivé cihly se dotýkají pouze společnou plochou jedné strany, totéž pro kompaktní interval J s množinou cihel B platí

$$\text{vol}(J) = \sum_i \{\text{vol}(B) \mid B \in B\}$$

Def: Broumer (diameter) intervalu $J = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ je

$$\text{diam}(J) := \max_i (b_i - a_i).$$

Def: Jemnost (norma) dílení D je $\lambda(D) := \max \{\text{diam}(B) \mid B \in B(D)\}$.

Def: Dílení $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_m)$ rjemnije dílení $D = (D_1, D_2, \dots, D_n) \equiv$
 $\forall i : Q_i \text{ rjemnije } D_i$.

Pro cihlu $B \in B(D)$ máme Q dílení stejné cihly, které označíme Q_B .

Rjemně plati, že cihly jednotlivých cihel dají všechny cihly dílení Q , tedy

$$B(Q) = \bigcup \{B(Q_B) \mid B \in B(D)\}.$$

Každá dve dílení D, Q kompaktního intervalu J mají společně rjemnini.

Def: Pro omezenou $f: J \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ a delený R kompaktního intervalu J definujeme

1) pro všechny $B \in \mathcal{B}(D)$: $m(f, B) := \inf \{f(x) \mid x \in B\}$.

$$\Rightarrow \text{dolní součet } S(f, D) := \sum_{B \in \mathcal{B}(D)} m(f, B) \cdot \text{vol}(B)$$

2) pro všechny $B \in \mathcal{B}(D)$: $M(f, B) := \sup \{f(x) \mid x \in B\}$.

$$\Rightarrow \text{horní součet } S(f, D) := \sum_{B \in \mathcal{B}(D)} M(f, B) \cdot \text{vol}(B)$$

⊗ pokud $C \subseteq B$, tak

$$m(f, B) \leq m(f, C) \leq M(f, C) \leq M(f, B)$$

⊗ pokud Q zjemníuje D, tak

$$S(f, D) \leq S(f, Q) \leq S(f, Q) \leq S(f, D).$$

Tvrdění: Pro libovolná dveře delený D, Q plati $S(f, D) \leq S(f, Q)$.

Důkaz: Nechť R je společné zjednodušení D a Q. Potom máme

$$S(f, D) \leq S(f, R) \leq S(f, R) \leq S(f, Q)$$



Důsledek: Pro libovolné delený D je $S(f, D)$ omezena shora a $S(f, D)$ zdeleň nějakými konstantami, které jsou společné pro všechny delený.

→ Tyto konstanty můžeme získat aplikací předešlého tvrzení na D a libovolné jiné delený Q, které zafixujeme.

Def: Pro omezenou funkci $f: J \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$, J je kompaktní interval, definujeme

1) dolní Riemannův integrál

$$\underline{\int}_J f(x) dx := \sup \{S(f, D) \mid D \text{ je delený J}\}$$

2) horní Riemannův integrál

$$\overline{\int}_J f(x) dx := \inf \{S(f, D) \mid D \text{ je delený J}\}$$

3) Riemannův integrál

$$\int_J f(x) dx, \text{ pokud } \underline{\int}_J f(x) dx = \overline{\int}_J f(x) dx.$$

⊗ Pokud Riemannův integrál $\int_J f(x) dx$ existuje, tak

$$\text{vol}\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in J \text{ a } y \in [0, f(x)]\} = \int_J f(x) dx$$

→ je to jediná hodnota, kterou dává smysl přiřadit tomuto objemu

Existence Riemannova integrálního měřítko pro meřitelných

Věta: Riemannův integrál $\int_I f(x) dx$ existuje \Leftrightarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \exists D \text{ dílčí } I : S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

Důkaz: Stejný jazyk pro obyčejný Riemannův integrál. Například implikace

\Leftarrow : Pro libovolné $\varepsilon > 0$ máme D , že $S(f, D) < \varepsilon + s(f, D)$, kde

$$\bar{S} \leq S(f, D) < \varepsilon + s(f, D) \leq \varepsilon + \underline{S}$$

protože rovné $\bar{S} \geq \underline{S}$ a ε musí být libovolně malé, tak $\bar{S} = \underline{S}$. \blacksquare

Věta: Každá spojitá $f: J \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, J kompaktní i., má Riemannův integrál.

Důkaz: Budeme používat maximum metriku místo Euklidovské - je to silnější.

Tedy $d(x, y) := \max_i |x_i - y_i|$. Musíme ukázat, že

$$\forall \varepsilon > 0 \exists D \text{ dílčí } I : S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

Máme

$$S(f, D) - s(f, D) = \sum_{B \in \mathcal{B}(D)} (M(f, B) - m(f, B)) \cdot \text{vol}(B).$$

Před směrem $M(f, B) - m(f, B)$ použij ε , tak

$$\leq \varepsilon \cdot \sum_{B \in \mathcal{B}(D)} \text{vol}(B) = \varepsilon \cdot \text{vol}(I).$$

Protože $\text{vol}(I)$ je konstanta, tak tohle sladí.

Nyní, že spojitoská f máme

$$\forall x, y \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Takže

$$M(f, B) - m(f, B) = \sup \{f(x) \mid x \in B\} - \inf \{f(x) \mid x \in B\}$$

\hookrightarrow největší rozdíl \hookrightarrow nejménší rozdíl

$$= \sup \{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in B\} < \varepsilon$$

\hookrightarrow největší rozdíl \hookrightarrow nejménší rozdíl



- Jak řešit integrály více proměnných - Fubiniho věta

Věta (Fubiniho): Nechť $J_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ a $J_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ jsou kompaktní i. a. $J = J_1 \times J_2$.

Nechť $f: J \subseteq \mathbb{R}^{m+m} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a pro $\forall x \in J_1$, $\forall y \in J_2$ existuje

$$i) \int_J f(x, y) d\langle x, y \rangle$$

$$ii) \int_{J_1} f(x, y) d\langle x \rangle \rightarrow \text{tady je } y \text{ jako parametr}$$

$$iii) \int_{J_2} f(x, y) d\langle y \rangle \rightarrow \text{tady je } x \text{ jako parametr}$$

Potom platí

$$\int_{J_1 \times J_2} f(x, y) d\langle x, y \rangle = \int_{J_1} \left[\int_{J_2} f(x, y) dy \right] dx = \int_{J_2} \left[\int_{J_1} f(x, y) dx \right] dy$$

Význam: Pro 2 proměnné $\int_J f = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy dx$.

Dc: Definujme $F(x) := \int_{J_2} f(x, y) dy$. Doložíme, že existuje $\int_{J_1} F$ aže

$$\int_{J_1} F(x) dx = \int_{J_1} \int_{J_2} f(x, y) dy dx = \int_J f(x, y) d\langle x, y \rangle.$$

Zvolme dílem D interval J tak, aby pro $\varepsilon > 0$ platilo

$$\int_J f - \varepsilon \leq S(f, D) \leq S(f, D) \leq \int_J f + \varepsilon. \quad (*)$$

Toto dílem je rozděleno dílemi D₁ intervalu J₁ a D₂ intervalu J₂. Máme

$$\mathcal{B}(D) = \{B_1 \times B_2 \mid B_1 \in \mathcal{B}(D_1), B_2 \in \mathcal{B}(D_2)\}.$$

Zrijmě \leftarrow tedy nemůžeme definovat

$$F(x) = \int_{J_2} f \leq "S(f, D_2)" \Rightarrow \text{definujme } M'(x, B) := \sup \{f(x, y) \mid y \in B\}$$

$$\text{Takže} \leq \sum_{B_2 \in \mathcal{B}(D_2)} M'(x, B_2) \cdot \text{vol}(B_2)$$

$$\int_{J_1} F \leq S(F, D_1) = \sum_{B_1 \in \mathcal{B}(D_1)} M(F, B_1) \cdot \text{vol}(B_1) = \sum_{B_1 \in \mathcal{B}(D_1)} \sup \{F(x) \mid x \in B_1\} \cdot \text{vol}(B_1)$$

$$\leq \sum_{B_1 \in \mathcal{B}(D_1)} \sup \left\{ \sum_{B_2 \in \mathcal{B}(D_2)} M'(x, B_2) \cdot \text{vol}(B_2) \mid x \in B_1 \right\} \cdot \text{vol}(B_1)$$

$$\leq \sum_{B_1 \in \mathcal{B}(D_1)} \sum_{B_2 \in \mathcal{B}(D_2)} \sup \{M'(x, B_2) \mid x \in B_1\} \cdot \text{vol}(B_2) \cdot \text{vol}(B_1) \dots M'$$

$$\leq \sum_{B_1} \sum_{B_2} \sup \{f(x, y) \mid x \in B_1 \text{ a } y \in B_2\} \cdot \text{vol}(B_2) \cdot \text{vol}(B_1)$$

$$= \sum_{B_1 \times B_2 \in \mathcal{B}(D)} \sup \{f(x, y) \mid (x, y) \in B_1 \times B_2\} \cdot \text{vol}(B_1 \times B_2) = S(f, D)$$

→ Sento funkce má káme mědilat i pro infimum
→ celkové rozdíl me

$$S(f, D) \leq S(F, D_1) \leq \int_{D_1} F \leq S(F, D_1) \leq S(f, D).$$

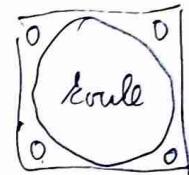
→ v kombinaci s (*) to dává

$$\int_D f - \epsilon \leq S(f, D) \leq S(F, D_1) \leq \int_{D_1} F \leq S(F, D_1) \leq S(f, D) \leq \int_D f + \epsilon$$

$$\Rightarrow \int_D f - \epsilon \leq \int_{D_1} F \leq \int_D f + \epsilon$$

→ Abylo pro libovolně malé ϵ , cíli $\int_D f = \int_{D_1} F$. ■

Příklad: Objem koule \rightarrow rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$



→ plán: spočítáme objem polokoule Δ

→ na intervalu $J = [-r, r]^2$ vyměníme

$$z = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}, & \text{pro } r^2 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \quad \rightarrow \text{mimo kouli placatá } 0$$

$$V = 2 \cdot \int_D f = 2 \int_{-r}^r \int_{-r}^r f(x, y) dx dy = 2 \int_{-r}^r \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} dx dy$$

→ integrujeme po y nebo "která" deje výhledy integrální

$$\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - y^2 - x^2} dx. \quad \text{Jenže ta věc nemůže být } \sqrt{r^2 - y^2 - x^2}$$

→ $dy \sqrt{x^2 + r^2 - y^2}$, ale to je 0. Počít smacime $u := \sqrt{r^2 - y^2}$, takto je

$$\int_{-u}^u \sqrt{u^2 - x^2} dx = \begin{cases} x = u \sin \theta & ; x = u: 1 = u \cos \theta \\ dx = u \cos \theta d\theta & ; x = -u: -1 = u \cos \theta \end{cases} \left| \begin{array}{l} \theta = \frac{\pi}{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right. = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u \cos \theta \cdot u \cos \theta d\theta =$$

$$= u^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = 2u^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (\cos(2\theta) + 1) d\theta = u^2 \left[\frac{1}{2} \sin(2\theta) + \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} u^2.$$

$$\Rightarrow V = 2 \int_{-r}^r \frac{\pi}{2} u^2 dy = \pi \int_{-r}^r r^2 - y^2 dy = 2\pi \int_0^r r^2 - y^2 dy = 2\pi \left[r^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^r$$

$$= 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi r^3}}$$

! Je to logické? Pro použití Fabrieho věty musí být f souvislá
→ tady nahradou byla, protože koule se dotýká plochy $z=0$,
ale většinou se to nestane

• Lebesgueův integrál

→ složitější a mocnější konstrukce, pro kterou platí

1) Pokud na kompaktním intervalu J existuje Riemannův integrál $\int_J f$, tak se shoduje s Lebesgueovým.

→ je nepraktické pracovat pouze s definicími v oboru jak s cílami
 ⇒ chceme integrat přes kompaktní množinu D

2) $\int_D \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n(x) dx$ pokud $|f_n(x)| \leq K$ pro $\forall x$
 \hookrightarrow všechny ty funkce f_1, f_2, \dots musí být omezené stejným K .

→ trocha podrobněji

3) pokud $\int_D f_m$ existuje pro $\forall m \in \mathbb{N}$ a posloupnost $(f_m)_m$ je
 monotonní, potom $\int_D \lim_m f_m = \lim_m \int_D f_m$

4) pokud $\int_{D_m} f$ existuje pro $m=1, 2, \dots$, potom existuje i $\int \bigcup_i D_i f$

→ těch pravidel je níc

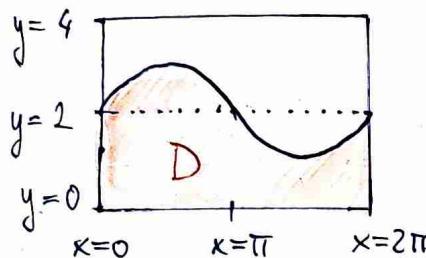
Fakta: Pokud je f spojitá na kompaktním $D \subseteq \mathbb{E}_m$ a $D \subseteq J$, kde
 J je kompaktní interval, tak pokud rozšíříme f na $g: J \rightarrow \mathbb{R}$
 hranicemi D na $J \setminus D$, tak získaná g je Lebesgueovský
 integrovatelná.

• Tietrava věta — fakt rozšířit kompozici množina na cihlu

Věta (Tietrava): Nechť (X, d) je m.f. a $Y \subseteq X$ je mearivna.

Potom k spojisté $f: Y \rightarrow [a, b]$ se dá rozšířit na spojistu $g: X \rightarrow [a, b]$.

Příklad:



$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 2\pi] \text{ a } y \in [0, 2 + \sin x]\}$$

$$J = [0, 2\pi] \times [0, 4] \rightarrow D \subseteq J$$

→ chceme sčítat $\int_D f(x, y) dx dy$ pro $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{1}{2}y$.

→ ale D není cihla → $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) := \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$

$\int_D f = \int_J g$... ale g rozhodně na hranici D není spojita,
takže bodů nespojitosti je mnohem více.

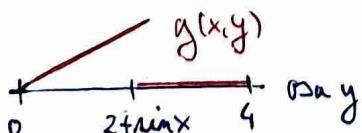
→ ale je k λ Lebesgueovský integratelné

$$\begin{aligned} \int_D f &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2 + \sin x} g(x, y) dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{2 + \sin x} f(x, y) dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{2 + \sin x} \frac{1}{2}y dy dx = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_0^{2 + \sin x} dx = \int_0^{2\pi} (2 + \sin x)^2 dx = \int_0^{2\pi} 4 + 4\sin x + \sin^2 x dx \\ &= [4x - 4\cos x]_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 - \cos(2x) dx = (8\pi - 4) - (0 - 4) + \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2}\sin(2x) \right]_0^{2\pi} \\ &= 8\pi + \frac{1}{2}(2\pi - 0) = \underline{\underline{9\pi}} \end{aligned}$$

Intuice: integraci funkce zleva → doprava podle x

→ každý jednotlivý integrál podle y je $\int_0^4 g(x, y) dy$

→ situace:



→ je tam jenom 1 bod nespojitosti

→ funkci k rozdelit na

$$\int_0^4 g(x, y) dy = \int_0^{2 + \sin x} \frac{1}{2}y dy + \int_{2 + \sin x}^4 0 dy$$

Substituční metoda

→ pro jednu proměnnou

Věta: Nechť f je spojitá a F je k ní primitive. Dále nechť ϕ má derivaci. Potom platí

$$\int_a^b f(\phi(x)) \phi'(x) dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx.$$

Důkaz: Pro funkci $G := F(\phi)$ platí $G'(x) = F'(\phi(x)) \cdot \phi'(x)$, tedy

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(\phi(x)) \phi'(x) dx.$$

Intuice: řekněme, že ϕ je rotační, tedy $\phi : [a, b] \rightarrow [\phi(a), \phi(b)]$.

Potom přejde deformací intervalu $[a, b]$. Konkrétně našabuje malé intervaly $[x, x+h]$ v formě přibližně $\phi'(x)$. To proto, že podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě: $\phi(x+h) - \phi(x) = \phi'(x+\theta h) \cdot h$.

Takže lze $\int f(x) dx \sim$ sčítání obdélníků s výškou h a roštigou $f(x)$,

tak $\int f(\phi(x)) \phi'(x) dx \sim$ sčítání obdélníků s výškou $h \cdot \phi'(x)$ a roštigou $f(\phi(x))$.

Věta: Nechť V je otevřené a volné kompaktní množství $D \subseteq \mathbb{R}^n$ a $\phi : V \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulární. Potom pro spojité funkci $f : \phi[D] \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ platí

$$\int_{\phi[D]} f(x) dx = \int_D f(\phi(x)) \underbrace{|\det(D\phi(x))|}_{D(\phi) / D(x)} dx$$

Intuice: Absolutní hodnota determinanta matice lineárního zobrazení je faktor, o který se deformační objemy zlepší po provedení lokálního zobrazení. Protože ϕ je regulární, tedy má TD, tedy je lokálně lineární a determinant rohové lokálně lineárního zobrazení je právě Jacobian.

1. Série domácích úkolů – termín odevzdání 30.10.2023

Příklad 1:

Ukažte, že je-li funkce f spojitá na \mathbb{R}^n , potom množina $M = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) < 0\}$ je otevřená. (1 bod)

Příklady 2:

Lze následující funkce dodefinovat tak, aby byly na \mathbb{R}^2 spojité?

(a) $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}$ (1 bod)

(c) $f(x, y) = (x + y)^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ (1 bod)

Příklad 3.

Určete definiční obor následující funkce a vypočtěte parciální derivace všude, kde existují:

$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{x+y}$, vyčíslte v bodě $[1, 1]$ (1 bod)

Příklady k procvičování (na doma, pokud si nejste jistí a chtěli byste se procvičit) – nejde o domácí úkol!

Určete definiční obor – jde o ot. či uz. množinu? Rozhodněte, zda jde o spojitu funkci, příp. zda ji lze spojit rozšířit. Umíte vypočítat parciální derivace?

(a) $f(x, y, z) = \sqrt{\frac{z^2}{x^2 + y^2} - 1}$ (b) $f(x, y) = x^2 - y^2$ (c) $f(x, y) = \frac{x}{y}$

(d) $f(x, y) = \arcsin xy$ (e) $f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x+1}$ (f) $f(x, y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

① f spojita na $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall x, y \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : (d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon)$
 M je otevřená $\Leftrightarrow \forall x \in M \ \exists \delta > 0 : \Omega(x, \delta) \subseteq M$
→ dostanu $x \in M, f(x) < 0 \Rightarrow$ vezmu si nějaké jeho okolí t.ř. $d(f(x), f(y)) < |f(x)|$
→ potom pro $d = 1 \dots 1$ máme $|f(x)| < f(y) < f(x) + |f(x)| = 0 \Rightarrow f(y) < 0$
→ tohle okolí musí se spojitostí existovat
↳ budeme chlubit δ pro $\varepsilon := |f(x)|$

② Je funkce spojitě dodefinovat?

a) $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = ?$

$$f(x,0) = \frac{0}{x^2} = 0, f(x,x) = \frac{\sin(x^2)}{2x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x,x) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

\Rightarrow auto funkci nelze spojitě dodefinovat

b) $f(x,y) = (x+y)^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, $f(0,0) = ?$

$$f(x,0) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = x \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{možná } f(0,0) \rightarrow 0? \\ f(x,x) = 4x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2}}\right) \dots \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x,x) = 0 \end{array} \right\}$$

$$f'(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & \text{pro } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{pro } (x,y) = (0,0) \end{cases} \dots \text{je } f' \text{ spojite v } (0,0)?$$

spojite: $\forall \bar{x} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d((0,0), \bar{x}) < \delta \Rightarrow d(0, f'(\bar{x})) < \varepsilon$
 $\hookrightarrow \bar{x} = (x,y) \quad \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow |f'(x,y)| < \varepsilon$

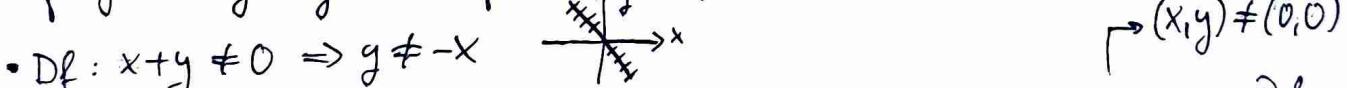
$$|f'(x,y)| = (x+y)^2 \cdot \left| \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \right| \leq (x+y)^2 \stackrel{*}{\leq} 4(x^2+y^2) < 4\delta^2 \Rightarrow \text{zvolím } \delta := \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}$$

\Rightarrow pro $\delta := \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}$ platí $|f'(x,y)| < \varepsilon \Rightarrow$ je spojite dodefinovat

$$*: (x+y)^2 \leq 4(x^2+y^2) \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2 \leq 4x^2+4y^2 \Leftrightarrow 0 \leq 3x^2-2xy+3y^2 = (x-y)^2 + 2(x^2+y^2)$$

③ Definiční obor, parciální derivace, hodnota v (1,1)

$$f(x,y) = \arctg \frac{x-y}{x+y} \Rightarrow f(1,1) = \arctg \frac{0}{2} = 0$$

• Df: $x+y \neq 0 \Rightarrow y \neq -x$  $\Rightarrow (x,y) \neq (0,0)$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2} \cdot \frac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2+(x-y)^2} = \frac{2y}{2x^2+2y^2} = \frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2} \cdot \frac{-1(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{2x^2+2y^2} = \frac{-x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\frac{1}{2}$$

$\hookrightarrow (x,y) \neq (0,0)$

2. Série domácích cvičení - termín odevzdání 13. 11. 2023

Coulaslaw

1. Najděte definiční obor, zjistěte, zda je funkce omezená shora a zda je omezená zdola.
Spočítejte všechny derivace prvního a druhého řádu. (1 bod)
- $$f(x, y) = \ln(x^2 - 2x - y)$$
2. Vypočtěte derivaci funkce $f(x, y, z) = \sin(xy z)$ ve směru $(2, 1, 1)$ v bodě $(1, 1, 0)$. (1 bod)
3. Buď dáná funkce $f(x, y) = \arccos \frac{x}{x+y}$ (1 bod)
- Najděte definiční obor D funkce f a načrtněte jej.
 - Určete gradient funkce $\nabla f(x, y)$ v bodě $[1, 1]$.
 - Je funkce f v tomto bodě diferencovatelná? Pokud ano, napište její totální diferenciál v tomto bodě.
 - Aproximujte f pomocí diferenciálu v bodě $[1.01; 0.99]$.
4. Zjistěte, zda lze funkci $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}$ dodefinovat tak, aby měla ve všech bodech R^2 totální diferenciál. Všude, kde existuje, totální diferenciál určete! (2 body)

$$\textcircled{1} \quad D(f): y < x^2 - 2x \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad f(x, y) = \ln(x^2 - 2x - y)$$

• Omezená shora: Nechť $\exists K$ l.ž. $\forall x, y : f(x, y) < K$.

$$x^2 - 2x = 2e^K \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1+2e^K}$$

$$\text{Potom } f(1+\sqrt{1+2e^K}, 0) = \ln(2e^K - 0) = \ln(2) + K > K. \quad \text{SPOR}$$

• Omezená zdola: Nechť $\exists L$ l.ž. $\forall x, y : L < f(x, y)$

$$x^2 - 2x = e^L \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1+e^L}$$

$$\text{Potom } f(1+\sqrt{1+e^L}, \frac{1}{2}e^L) = \ln(e^L - \frac{1}{2}e^L) = \ln(\frac{1}{2}e^L) = \ln(\frac{1}{2}) + L < L. \quad \text{SPOR}$$

f není omezená.

$$\cdot \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x-2}{x^2-2x-y} ; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(x^2-2x-y)-2(x-1)(2x-2)}{(x^2-2x-y)^2} = 2 \cdot \frac{-x^2+2x-y-2}{(x^2-2x-y)^2}$$

$$\cdot \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{x^2-2x-y} ; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-1}{(x^2-2x-y)}$$

$$\cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{2x-2}{(x^2-2x-y)^2} \dots \text{prostře to je souhlasí'}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x, y, z) = \sin(xy z), \quad \nu = (2, 1, 1), \quad a = (1, 1, 0)$$

$$\nabla f = (yz \cdot \cos(xy z), xz \cdot \cos(xy z), xy \cdot \cos(xy z)) ; \quad \nabla f(a) = (0, 0, 1)$$

$$D_\nu f(a) = \langle \nabla f(a), \nu \rangle = 0 + 0 + 1 = \underline{\underline{1}}$$

↑
Achle musím udělat, prostře f má ν a TD

$$\textcircled{3} \quad f(x,y) = \arccos\left(\frac{x}{x+y}\right)$$

JAKUB SMULÍK
couleslaw

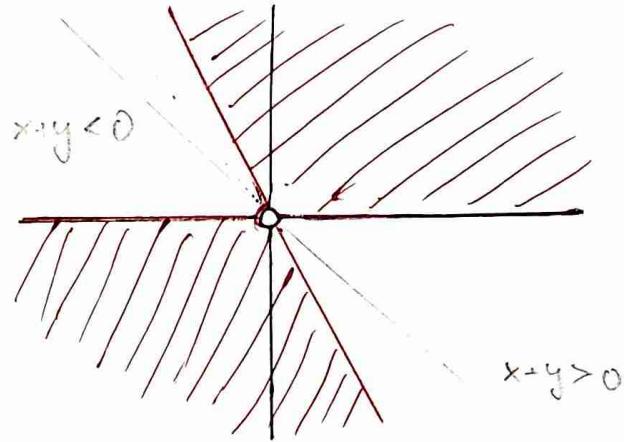
a), $D(f) : -1 \leq \frac{x}{x+y} \leq 1, \quad y \neq -x$

$\bullet x+y > 0 : -x-y \leq x \leq x+y \Rightarrow y \geq 0$
 $-2x-y \leq 0 \leq y \Rightarrow y \geq -2x$

$\bullet x+y < 0 : -2x-y \geq 0 \geq y \Rightarrow y \leq 0$
 $y \leq -2x$

b), $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-1}{\sqrt{1-(\frac{x}{x+y})^2}} \cdot \frac{(x+y)-x}{(x+y)^2} = \frac{-y}{|x+y|} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x+y)^2-x^2}}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{\sqrt{1-(\frac{x}{x+y})^2}} \cdot \frac{-x}{(x+y)^2} = \frac{x}{|x+y|} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x+y)^2-x^2}}$$



$$\nabla f(1,1) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

c), formální derivace jsou v rohů (1,1) sfojité \Rightarrow TD existuje

$$D_f^{(1,1)}(h_1, h_2) = -h_1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} + h_2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}(h_2 - h_1)$$

d), $f(1.04, 0.99) \approx f(1,1) + D_f^{(1,1)}(0.04, -0.01) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}(-0.05) \approx \underline{1.033}$

\textcircled{4} $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}, \quad Df = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad$ sfojitosl OK mimo (0,0)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2y(x^2+y^2) - x^3y(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3(x^2+y^2) - x^3y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

• Pro $(x,y) \neq (0,0) : D_f^{(x,y)}(h_1, h_2) = h_1 \cdot \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} + h_2 \cdot \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

• Pro $(x,y) = (0,0) :$

a), dodefinujeme $f(0,0) := 0$ a ověřme, že funkce f bude v $(0,0)$ sfojita.
 $\forall (x,y) \nexists \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y)| < \varepsilon.$

$$\left| \frac{x^3y}{x^2+y^2} \right| = \frac{x^2|xyl|}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = x^2 \leq x^2+y^2 < \delta^2 \Rightarrow \underline{\delta := \sqrt{\varepsilon}} \quad \checkmark$$

b), ukažeme si definice TD, že $D_f^{(0,0)}(h_1, h_2) = 0$.

$$f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) = 0 + \|h\| \cdot \mu(h) \Rightarrow \mu(h) = \frac{f(h_1, h_2)}{\|h\|}$$

\rightarrow pro $h \neq (0,0)$ je μ definována a sfojita.

\rightarrow pro $h = (0,0)$ ji dodefinujeme jako $\mu(0,0) := 0$. a ověřme sfojitosl:

$$\forall (x,y) \nexists \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow |\mu(x,y)| < \varepsilon.$$

$$\left| \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot |f(x,y)| \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (x^2+y^2) = \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \underline{\delta := \varepsilon}$$

\rightarrow tedy μ je sfojita v rohů $(0,0)$ a $\mu(0,0) = 0$. Tedy $D_f^{(0,0)}(h_1, h_2) = 0$.

\Rightarrow funkce f je dodefinována aby měla TD na celém \mathbb{R}^2

3. Série domácích cvičení – termín odevzdání 27. 11. 2023

1. Mějme funkci $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$. (2 body)

Vypočtěte její totální diferenciál všude, kde existuje. Vyčíslete jej v bodě $(1, 1, 1)$.

2. Mějme následující funkci: (2 body)

$$f(x, y) = 4 \cdot \sqrt{1 - \frac{y}{x+1}}$$

- Najděte definiční obor funkce f a načrtněte jej.
- Spočítejte parciální derivace všude, kde existují.
- Ukažte, že funkce f je diferencovatelná v bodě $[0, -3]$ a určete v tomto bodě její totální diferenciál.
- Napište rovnici tečné roviny ke grafu f v bodě $[0, -3, 8]$.
- Najděte lineární aproximaci funkce f v okolí bodu $[0, -3]$.

3. Nechť $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4$. (2 body)

Určete tečnou rovinu T , která je kolmá k přímce $\{[t, t, t] \in \mathbb{R}^3; t \in \mathbb{R}\}$. Ve kterém bodě protíná T přímku $\{(0, 0, t) \in \mathbb{R}^3; t \in \mathbb{R}\}$?

Tečná nadrovina. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $a \in G$, $f \in C^1(G)$. Tečnou nadrovinou ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$ rozumíme graf fce T , $x \in \mathbb{R}^n$:

$$T : x \mapsto f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n)$$

4. Mějme funkci $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a funkce $r, s, t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: (2 body)

$$f(u, v, w) = u + vw$$

$$r(x) = x^2, s(x) = x^3 \text{ a } t(x) = \ln x$$

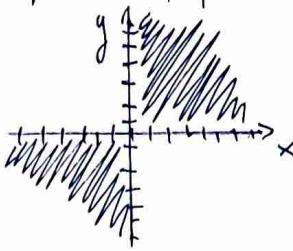
- a) Spočítejte všechny parciální derivace složené funkce $f(r(x), s(x), t(x))$.

Užijte maticové značení z přednášky!

- b) Zkontrolujte výpočtem derivací přímo („postaru“).

$$f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}, \quad TD = ?, \quad TD(1,1,1) = ?$$

- Def. obor: $y \neq 0, \frac{x}{y} > 0$
 $x \neq 0$
 $z \neq 0$



$$f(x,y,z) = C^{\frac{1}{z} \ln\left(\frac{x}{y}\right)}$$

• Možnost: $\frac{x}{y}$ i $a^{\frac{1}{z}}$ jsou sfojité na $D(f) \Rightarrow f$ je sfojita na celém $D(f)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{xz} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}} \quad \dots x,y,z \neq 0, \frac{x}{y} > 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{y}{x} \cdot -\frac{x}{y^2} = -\frac{1}{yz} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}} \quad \dots x,y,z \neq 0, \frac{x}{y} > 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}} \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right) \cdot -\frac{1}{z^2} = -\frac{1}{z^2} \ln\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}} \quad \dots x,y,z \neq 0, \frac{x}{y} > 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{definováno} \\ \text{na celém} \\ D(f) \end{array} \right\}$$

\Rightarrow všechny parciaální derivace jsou sfojité na celém $D(f)$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \underline{TD}: \quad D_f^{(x,y,z)}(h) &= \frac{1}{xz} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}} h_1 - \frac{1}{yz} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}} h_2 - \frac{1}{z^2} \ln\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}} h_3 = \\ &= \frac{1}{z} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}} \cdot \left(\frac{1}{x} h_1 - \frac{1}{y} h_2 - \frac{1}{z} \ln\left(\frac{x}{y}\right) h_3 \right) \end{aligned}$$

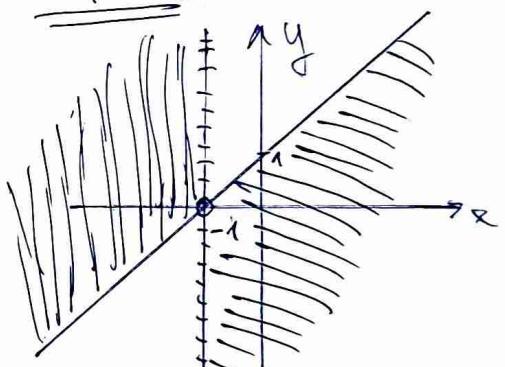
$$D_f^{(1,1,1)}(h) = 1 \cdot 1 \cdot (1 h_1 - 1 h_2 - 1 \cdot \ln(1) h_3) = \underline{h_1 - h_2}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x,y) = 4 \sqrt{1 - \frac{y}{x+1}}$$

$$\text{a) Def. obor: } x \neq -1, \frac{y}{x+1} \leq 1 \quad \begin{cases} x+1 > 0 : y \leq x+1 \\ x+1 < 0 : y \geq x+1 \end{cases}$$

$\hookrightarrow f$ je sfojita na celém $D(f)$

$$\begin{aligned} h_1 \quad \frac{\partial f}{\partial x} &= 4 \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{y}{x+1}}} \cdot \frac{y}{(x+1)^2} = \frac{2y}{(x+1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y}{x+1}}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 4 \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{y}{x+1}}} \cdot \frac{-1}{x+1} = \frac{-2}{x+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y}{x+1}}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} x \neq -1 \\ \frac{y}{x+1} < 1 \end{array} \right\} \quad \rightarrow \text{Definováno a sfojité na celém } D(f) \text{ kromě } y=x+1.$$



c) $TD \approx (0,-3) \dots$ sfojite PD \Rightarrow TD

$$D_f^{(0,-3)}(h) = \frac{-6}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+3}} h_1 + \frac{-2}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} h_2 = -\underline{3h_1 - h_2}$$

$$\text{d) } f(0,-3) = 4 \cdot \sqrt{1+3} = 8 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow T_f^{(0,-3)}(x,y) = 8 - 3(x-0) - 1(y+3) = \underline{5-3x-y} \quad \Rightarrow \text{lineární rovina} \\ 3x+y+z=5$$

d) lineární apředimace f v okolí $(0,-3)$

\Rightarrow fiktivní kohle díla ta lineární rovina

Jacob Smolka
Coulenslaw

$$\textcircled{1} \quad f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4$$

\rightarrow stejnětož OK může

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 4 \quad \rightarrow \text{stejnětož OK může}$$

$$T_f^{(a_1, a_2)}(x, y) = (-2a_1 + 2)(x - a_1) + (-2a_2 + 4)(y - a_2)$$

$$T_f^{(a_1, a_2)}(x, y) = (2 - 2a_1)x + (4 - 2a_2)y + a_1(2a_1 - 2) + a_2(2a_2 - 4)$$

$$z = -x - y - c \dots \text{faktore řešme na } \{(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \in \mathbb{R}\}$$

$$\Rightarrow 2 - 2a_1 = -1 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} -c = \frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{5}{2} \cdot 1 = 4$$

$$\Rightarrow 4 - 2a_2 = -1 \Rightarrow a_2 = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow T_f^{(a_1, a_2)}(x, y) = -x - y + 4$$

$$\bullet T \cap \{(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \in \mathbb{R}\} \dots 1 = -0 - 0 + 4 = 4 \Rightarrow \text{v bodě } \underline{(0, 0, 4)}.$$

$$\textcircled{2} \quad f(u, v, w) = u + v w, \quad r(x) = x^2, \quad s(x) = x^3, \quad t(x) = \ln(x)$$

$$h(x) := f(r(x), s(x), t(x)), \quad g(x) = (r(x), s(x), t(x))$$

$$D_h(x) = D_f(g(x)) \cdot Dg(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}(g(x)), \frac{\partial f}{\partial v}(g(x)), \frac{\partial f}{\partial w}(g(x)) \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial s}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial t}{\partial x}(x) \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 2x + t(x) \cdot 3x^2 + s(x) \cdot \frac{1}{x} = \underline{2x + 3x^2 \ln(x) + \frac{1}{x}}$$

Kontrola:

$$h(x) = x^2 + x^3 \ln(x)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x) = 2x + 3x^2 \ln(x) + x^2 \quad \checkmark$$

faktury:

r, s, t mají derivace ✓
 f má totální diferenciál ✓

Průběžný test A – 11. 12. 2023

Jméno:

1. Mějme následující funkci:

$$f(x, y) = \ln \left| \frac{1}{y} - x \right|$$

$$\frac{d}{dx} |x| = \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{d}{dx} x \quad \checkmark$$
$$\frac{d}{dx} |f(x)| = \operatorname{sgn}(f(x)) \cdot \frac{d}{dx} f(x) \quad \checkmark$$

- (a) Najděte definiční obor D_f funkce f a načrtněte jej.
- (b) Je D_f otevřená nebo uzavřená množina? Jde o kompaktní množinu? (Nemusíte formálně dokazovat, ale zdůvodněte!)
- (c) Vypočítejte gradient ∇f pro všechny body, ve kterých existuje.
- (d) Kde všude je funkce f diferencovatelná? Pokud totální diferenciál existuje v bodě $[1, 2]$, určete ho!
- (f) Pokud existuje tečná rovina ke grafu f v bodě $[1, 2, ?]$, napište její rovnici a určete normálový vektor.

Vše pečlivě zdůvodněte!

(5 bodů)

2. Mějme následující funkci f a množinu M :

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2, \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \leq 1\}$$

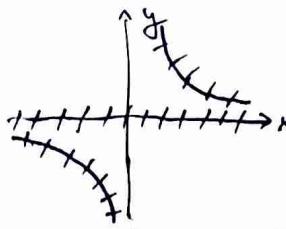
Najděte pro funkci f na množině M všechny body podezřelé z extrému; určete globální extrémy f na M .

Postup zdůvodněte!

(5 bodů)

$$f(x,y) = \ln \left| \frac{1}{y} - x \right|$$

a) $y \neq 0, \frac{1}{y} - x \neq 0 \Rightarrow y \neq \frac{1}{x}$



(1b)

Jakub Smolík
Czechoslovakia

$$Df = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=0 \vee y=\frac{1}{x}\}$$

b) Df je otevřená protože $\mathbb{R}^2 \setminus Df$ tedy $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=0 \vee y=\frac{1}{x}\}$ je neavřená ✓
 Df není kompaktní protože je otevřená a nemá omezená ✓

(1b)

c) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{|\frac{1}{y}-x|} \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{y}-x\right) \cdot (-1) = \frac{-1}{\frac{1}{y}-x} = \frac{y}{xy-1}$ } definováno na celém Df
 $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{|\frac{1}{y}-x|} \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{y}-x\right) \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{-1}{y^2\left(\frac{1}{y}-x\right)} = \frac{1}{xy^2-y}$ } spojite na celém Df

$\nabla f = \left(\frac{y}{xy-1}, \frac{1}{xy^2-y} \right)$ pro $(x,y) \in Df$ ✓

(1b)

d) PD derivace spojite na celém $Df \Rightarrow$ TD na celém Df ✓

$$D_f^{(1,2)}(h_1, h_2) = h_1 \cdot \frac{2}{2-1} + h_2 \cdot \frac{1}{4-2} = \underline{2h_1 + \frac{1}{2}h_2} \quad (1b)$$

e) $f(1,2) = \ln \left| \frac{1}{2} - 1 \right| = \ln \left(\frac{1}{2} \right) = -\ln(2) \quad \square$

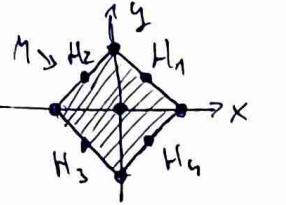
$$T_f^{(1,2)} = -\ln(2) + (x-1) \cdot 2 + (y-2) \cdot \frac{1}{2} = 2x + \frac{1}{2}y - 2 - 1 - \ln(2) = z$$

\Rightarrow seciná rovina v bodě $(1,2, -\ln(2))$ je $2x + \frac{1}{2}y - z = 3 + \ln(2)$ (1b)

\rightarrow normalizuj v. $\vec{n} = (2, \frac{1}{2}, -1)$.

5b

$$(2) \quad f(x,y) = x^2 - xy + y^2, \quad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$$



f je definována + spojita na \mathbb{R}^2
PD f je na množině def. + spoj na \mathbb{R}^2 ✓

$$1) \quad \text{Interior } M: \quad \nabla f = (2x-y, 2y-x)$$

$$\nabla f = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=0 \\ 2y-x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x \\ 4x-x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow [0,0] \quad \checkmark$$

$$2) \quad \text{Rohy } M: [1,0], [0,1], [-1,0], [0,-1] \quad \checkmark$$

$$3) \quad \text{Hranice } M:$$

$$\bullet H_1: y = 1-x \Rightarrow g_1(x) := f(x, 1-x) = x^2 - \overbrace{x(1-x)}^{x^2-x} + 1 - 2x + x^2 = 3x^2 - 3x + 1$$

$$g_1'(x) = 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

$$\bullet H_2: y = 1+x \Rightarrow g_2(x) := f(x, 1+x) = x^2 - x - x^2 + 1 + 2x + x^2 = x^2 + x + 1$$

$$g_2'(x) = 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

$$\bullet H_3: y = -1-x \Rightarrow g_3(x) := f(x, -1-x) = x^2 + x + x^2 + 1 + 2x + x^2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$g_3'(x) = 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right]$$

$$\bullet H_4: y = -1+x \Rightarrow g_4(x) := f(x, x-1) = x^2 - x^2 + x + x^2 - 2x + 1 = x^2 - x + 1$$

$$g_4'(x) = 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right] \quad \checkmark$$

M je uzavřená a omezená \Rightarrow kompaktní $\quad \checkmark$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} f \text{ na } M \text{ má globální min. a max.} \\ f \text{ je na } M \text{ spojita} \end{array} \right.$

• fodorovské body

$$f(0,0) = 0$$

$$f(1,0) = f(0,1) = f(-1,0) = f(0,-1) = 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

• globální extrémum na M

$$\text{g. maximum je v bodech } [1,0], [0,1], [-1,0], [0,-1] \rightarrow 1$$

$$\text{g. minimum je v bodě } [0,0] \rightarrow 0$$

✓

• lokační extrémum na M

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow H_f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = H_f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = H_f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = H_f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

56

$$h_H(A) = \begin{vmatrix} 2-1 & -1 \\ -1 & 2-1 \end{vmatrix} = (2-1)^2 - 1 = (1-1)(1-1) \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$$

$\Rightarrow H_f$ je pozitivně definidm \Rightarrow v bodech $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right], \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$

jsou lokační minima $\frac{1}{4}$ a $\frac{3}{4}$. ✓

Zápočtový test B – 8. 1. 2024

Jméno: Jakub Smolík

Počet listů: 2 + Zadání

1. Buď dáná funkce

(10 bodů)

$$f : (x, y) = \operatorname{arctg} \left(\frac{x - y}{x + y} \right)$$

- (a) Najděte definiční obor D_f funkce f a načrtněte jej.
(b) Pokud to lze, najděte fci F , která je spojitým rozšířením funkce f na R^2 .
(c) Vypočítejte gradient $\nabla f(x, y)$ v bodě $[1, 2]$.
(d) Zjistěte, v jakých bodech má funkce f totální diferenciál.

Pokud má funkce f totální diferenciál v bodě $[1, 2]$, spočtěte ho.

- (e) Aproximujte hodnotu funkce f v bodě $[1, 02; 1, 99]$ pomocí jejího totálního diferenciálu v bodě $[1, 2]$.

Vše pečlivě zdůvodněte!

2. Mějme následující vztahy:

(10 bodů)

$$\begin{aligned}\exp(z) - xyz &= 0 \\ \ln(xy) - \frac{x}{z} &= 0\end{aligned}$$

- (a) Dokažte, že existují funkce $y = y(x)$ a $z = z(x)$ třídy C^∞ , pro které platí $y(1) = e$, $z(1) = 1$, a které na jistém okolí bodu $[1]$ tyto vztahy splňují.
(Napište, co přesně vyplývá z věty o implicitních funkcích!)
- (b) Vypočítejte $y'(1)$ a $z'(1)$.

3. Najděte všechny kandidáty na (lokální) extrémy funkce f na množině M :

(12 bodů)

$$f(x, y) = \exp(x^2 - y^2 + y), M = \{[x, y] \in R^2; x^2 + y^2 \leq 1 \text{ & } 0 \leq y\}$$

Nabývá tato funkce na dané množině globálního maxima, resp. globálního minima? V jakých bodech?

Pečlivě zdůvodněte!

4. Určete primitivní funkci na maximálních intervalech, kde existuje:

(8 bodů)

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

$$\textcircled{1} \quad f(x,y) = \arctg\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$$

a, $Df: x+y \neq 0 \Rightarrow y \neq -x \checkmark$

$$\textcircled{1} \quad f(x,-x) = \arctg\left(\frac{x+x}{x-x}\right)$$



(26)

$$x > 0$$

$$x > 0: \lim_{y \rightarrow x^+} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow x^+} \arctg\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \left| \arctg\left(\frac{x+x^+}{0^-}\right) \right| = \left| \arctg(-\infty) \right| = -\frac{\pi}{2} \checkmark$$

$$\lim_{y \rightarrow x^-} f(x,y) = \dots = \left| \arctg(+\infty) \right| = \frac{\pi}{2} \checkmark$$

(26)

\Rightarrow funkcia f nelze na priame $y = -x$ a je kde definovana \checkmark

$$\textcircled{c)} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2} \cdot \frac{x+y - (x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2 + (x-y)^2} = \frac{2y}{2x^2 + 2y^2} = \frac{y}{x^2 + y^2} \checkmark \quad \dots (x,y) \neq (0,0) \text{ ne } D_f$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2} \cdot \frac{-1(x+y) - (x-y)}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{2x^2 + 2y^2} = \frac{-x}{x^2 + y^2} \checkmark \quad \dots (x,y) \neq (0,0) \text{ ne } D_f$$

$\Rightarrow f$ spojita na celem $Df \checkmark$

PD definovane a spojite na celem $Df \checkmark \Rightarrow \exists$ TD na celem $Df \checkmark$

$$[1,2] \in D_f \Rightarrow Df(1,2) = \left(\frac{2}{1+4}, \frac{-1}{1+4} \right) = \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5} \right) \checkmark$$

(26)

d, TD na celem Df

$$D_f^{(1,2)}(h_1, h_2) = \frac{2}{5}h_1 - \frac{1}{5}h_2 = \frac{1}{5}(2h_1 - h_2) \checkmark$$

(26)

$$\textcircled{e)} \quad f(1.02, 1.01) \approx f(1,2) + D_f^{(1,2)}(0.02, -0.01) = \arctg\left(\frac{1-2}{1+2}\right) + \frac{1}{5}(2 \cdot 0.02 + 0.01)$$

$$= \arctg\left(-\frac{1}{3}\right) + 0.01 = 0.01 - \arctg\left(\frac{1}{3}\right) \checkmark$$

(26)

106

Jakub Smotlik

$$F_1(x, y, z) = e^z - xyz = 0$$

$$F_2(x, y, z) = \ln(xy) - \frac{x}{z} = 0$$

chci $y = y(x)$ a $z = z(x)$

Implicitní funkce

i) $a = (1, e, 1)$, $F_1(a) = e - e = 0$, $F_2(a) = \ln(e) - 1 = 0$ ✓ ✓

ii) F_1 a F_2 souvisí a spojité v okolí bodu a

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -xz \quad \checkmark, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = e^z - xy$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = -\frac{x}{z^2}$$

Hledáme spojitosť $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ a $\frac{\partial F_2}{\partial x}$
 PD definuje a
 spojite v okolí bodu a

iii) $\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(a) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(a) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{e} & 1 \end{vmatrix} = -1 - \frac{1}{e} \neq 0 \quad \checkmark$
 $\forall x \in U_{e,1}, \exists (y, z) \in V_{(e,1)}$

$$\Rightarrow \exists U(1), \exists V(e, 1): \cancel{\exists (y, z) \in V}: \exists! x \in U, y = y(x), F_1(x, y(x), z(x)) = 0$$

$$z = z(x), F_2(x, y(x), z(x)) = 0$$

Budeme $U \times V$ je otvorené okolí bodu a $\& F_1 = F_2$ sú rovné 0,
 tak PD je rovná 0.

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - yz - x \cdot \frac{\partial y}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial x}$$

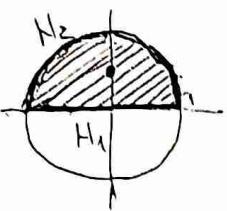
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{1}{xy} \cdot \left(y + x \cdot \frac{\partial y}{\partial x}\right) - \frac{z - x \cdot \frac{\partial z}{\partial x}}{z^2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(a) = e \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - e - \frac{\partial y}{\partial x} - e \frac{\partial z}{\partial x} = -e - \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \Rightarrow \underline{\frac{\partial y}{\partial x}(a) = -e} \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(a) = \frac{1}{e} \left(e + \frac{\partial y}{\partial x}\right) - \left(1 - \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 1 + \frac{1}{e} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} - 1 + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e} \cdot (-e) + \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \underline{\frac{\partial z}{\partial x}(a) = 1} \quad \checkmark$$

$$\textcircled{2} \quad f(x,y) = e^{x^2-y^2+y}, \quad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1 \text{ a } y \geq 0\}$$



f je na M definována a spojita a směrností ✓

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2-y^2+y} \cdot (2x), \quad \rightarrow \text{PD def. a spojite} \checkmark$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2-y^2+y} \cdot (1-2y)$$

i) Interior M:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x e^{x^2-y^2+y} = 0 \Rightarrow x=0 \\ (1-2y) e^{x^2-y^2+y} = 0 \Rightarrow 1-2y=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2} \end{cases} \left. \right\} [0, \frac{1}{2}] \checkmark$$

ii) dome body: $[-1,0], [1,0]$ ✓ "Spiky"

$$\text{iii) Hranice } H_1: y=0 \Rightarrow g(x) := f(x,0) = e^{x^2}$$

$$g'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 0 \Leftrightarrow x=0 \left. \right\} [0,0] \checkmark$$

$$\text{iv) Hranice } H_2: y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow h(x) := f(x, \sqrt{1-x^2}) = e^{x^2-(1-x^2)+\sqrt{1-x^2}}$$

$$h(x) = e^{2x^2-1+\sqrt{1-x^2}} \quad \text{letro: } x^2 = 1-y^2$$

$$h'(x) = e^{2x^2-1+\sqrt{1-x^2}} \cdot \left(4x - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \right) = 0 \Leftrightarrow 4x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow 4x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow x=0 \quad \vee \quad 4 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1-x^2 = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{15}{16} \Leftrightarrow |x| = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Přestože M je kompaktní a f je spojita na M , má f nějaká minima a max.

Podevětě body: $[0, \frac{1}{2}], [-1,0], [1,0], [0,0], [0,1], [\pm \frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{4}]$ ✓

$$f[0, \frac{1}{2}] = e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}}$$

$$f(-1,0) = f(1,0) = e$$

$$f[0,0] = e^0 = 1 \quad \left. \right\} \text{minimum}$$

$$f[0,1] = e^{1-1} = 1$$

$$f[\pm \frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{4}] = e^{\frac{15}{16}-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}} = e^{\frac{7}{8}+\frac{2}{8}} = e^{\frac{9}{8}} \rightarrow \text{maximum}$$

126

f nabývá globálního minima v bodech $(0,0)$ a $(0,1)$... ✓

globálního maxima v bodech $\left[\pm \frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{4}\right]$... $\exp(9/8)$

4. Série domácích cvičení – termín odevzdání 11. 12. 2023

1. Mějme množinu $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \sin z + y \cos z - e^z = 0\}$.
(a) Ukažte, že tuto množinu lze na okolí bodu $a = (2, 1, 0)$ popsat jako graf funkce $z = z(x, y)$, kde $z(2, 1) = 0$.
(b) Spočtěte parciální derivace prvního řádu této funkce z v příslušném bodu a .
(c) Napište rovnici tečné roviny (pokud existuje) ke grafu funkce z v bodě a . (1 bod)
 2. Najděte všechny globální a lokální extrémy následující funkce $f(x, y)$ na jejím definičním oboru: $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^2}{2}$ (2 body)
 3. Zjistěte pomocí Lagrangeových multiplikátorů lokální extrémy funkce $f(x, y) = x + y$ na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ (2 body)
 4. Zjistěte maximální a minimální hodnoty funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11$ na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4x \leq 5\}$. Využijte libovolných metod, ale detailně zdůvodněte.
BONUS: Vyšetřete, zda má tato funkce i lokální extrémy. (1 bod)
(1 bod)
-

Pro zájemce o další procvičení (nejde o dom. úkol)

1. Najděte všechny body podezřelé z extrému, případně určete též lokální a globální extrémy následující funkce f (na celém definičním oboru):

$$f(x, y, z) = -x^3 + 3xz + 2y - y^2 - 3z^2$$

2. Najděte všechny body podezřelé z extrému, případně určete též lokální a globální extrémy následující funkce f (na celém definičním oboru)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{pro } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Pokud byste potřebovali, můžete využít skutečnost, že funkce f je spojitá a má tot. diferenciál na \mathbb{R}^2 (bylo za domácí úkol).

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \sin(z) + y \cos(z) - e^z = 0\} \rightarrow z = z(x, y)$$

Jakub Smolík
Coulterlaw

a), $a = (2, 1, 0)$, $f(x, y, z) = x \sin(z) + y \cos(z) - e^z \rightarrow Df = \mathbb{R}^3$

i), $f(a) = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - e^0 = 0 \quad \checkmark$

ii), f spojite PD na oboru $(2, 1, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x \cos(z) - y \sin(z) - e^z$$

iii), $\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right) = \det \left(\frac{\partial f}{\partial z}(a) \right) = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 - e^0 = 1 \neq 0 \quad \checkmark$

$\Rightarrow \exists V(2, 1) \exists V(0) \text{ l.z. } \forall (x, y) \in U \exists! z \in V : z = z(x, y), f(x, y, z(x, y)) = 0$

b), ma $U \times V$: $f(x, y, z(x, y)) = 0$ na oboru $(2, 1, 0)$

\hookrightarrow je to otevřená množina a f je mimořádne PD f je všude mimořádne

• $\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(z) + x \cos(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y \sin(z) \frac{\partial z}{\partial x} - e^z \frac{\partial z}{\partial x}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(a) - 1 \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(a) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\frac{\partial z}{\partial x}(a) = 0}}$$

• $\frac{\partial f}{\partial y} = x \cos(z) \frac{\partial z}{\partial y} + \cos(z) - y \sin(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - e^z \frac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y}(a) + 1 - \frac{\partial z}{\partial y}(a) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\frac{\partial z}{\partial y}(a) = -1}}$$

c), $T_z^{(2, 1)} = z(2, 1) + \frac{\partial z}{\partial x}(a) \cdot (x-2) + \frac{\partial z}{\partial y}(a) \cdot (y-1) = -1(y-1) = \underline{\underline{1-y}} = \underline{\underline{z}}$

② $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^2}{2} \rightarrow \text{extremy}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 - y \quad \left. \begin{array}{l} f \text{ i PD} \\ f \text{ je definována a spojite na celém } \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = y - x$

$Df = 0 \Leftrightarrow y - x = 0 \Rightarrow x = y \quad \& \quad x^2 - y = 0 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$

\Rightarrow kdežidlo body $[0, 0]$ a $[1, 1]$

\rightarrow pokud $y = 0$: $f(x, y) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f$ není omezená $\Rightarrow f$ nemá globální extremy

$$H_f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow H(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1-1 \end{vmatrix} = 1(1-1) - 1 = 1^2 - 1 - 1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0 \\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \end{cases} \text{ sedlo}$$

$$H_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow H(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-1 & -1 \\ -1 & 1-1 \end{vmatrix} = (2-1)(1-1) - 1 = 1^2 - 1 + 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} > 0 \Rightarrow \min$$

\Rightarrow v bodě $[0, 0]$ má f sedlo a v bodě $[1, 1]$ lokální minimum.

$$\textcircled{3} \quad f(x,y) = x+y, \quad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\} \rightarrow \text{extremy}$$

 $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \rightarrow f, g \text{ definované a spojité na celém } \mathbb{R}^2$
PD také:

Lagrangeovy multiplicátory

i, $\nabla g = (2x, 2y) \neq (0,0)$ na M

ii, (\bar{x}, \bar{y}) je extremum $\Rightarrow \exists \lambda: L = f + \lambda g$

a, $0 = \frac{\partial L}{\partial x} \Rightarrow 1 + 2\lambda x = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad 2\lambda(x-y) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee x=y$

b, $0 = \frac{\partial L}{\partial y} \Rightarrow 1 + 2\lambda y = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \& x=y \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow |x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

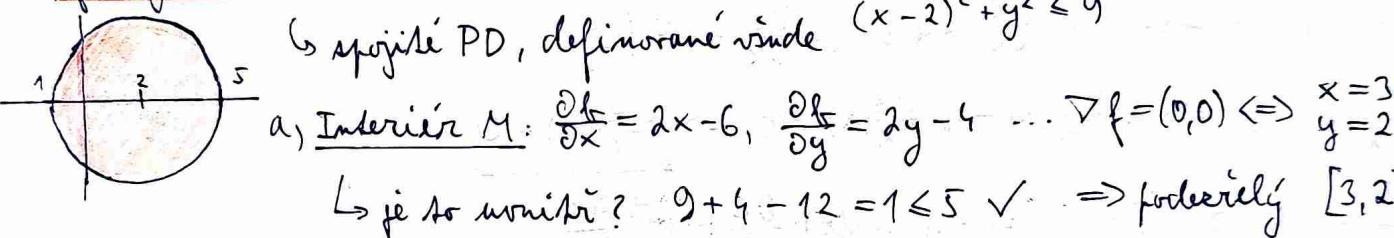
\Rightarrow pohledové body $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ a $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ spojita

$\rightarrow M$ je omezená a uzavřená \Rightarrow kompaktní $\Rightarrow f$ na ně má význam a má

• $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$... maximum

• $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}$... minimum

$$\textcircled{4} \quad f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11, \quad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4x \leq 5\} \rightarrow \text{extremum}$$



kr, hranice M: Lagrangeovy multiplicátory

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 5$$

i, $\nabla g = (2x-4, 2y) \neq (0,0)$ na hranici M

ii, (1) $0 = 2x-6 + \lambda(2x-4) \Rightarrow 0 = x-3 + \lambda(x-2)$

(2) $0 = 2y-4 + \lambda \cdot 2y \Rightarrow 0 = y-2 + \lambda y \Rightarrow \lambda = \frac{2-y}{y}$

(3) $0 = x^2 + y^2 - 4x - 5$

$\Rightarrow (1) \& \lambda: x-3 + \frac{1}{y}(x-2)(2-y) = 0 \Rightarrow xy - 3y + 2x - xy - 4 + 2y = 0$
 $-y + 2x - 4 = 0 \Rightarrow y = 2x - 4$

$\Rightarrow (3) \& y: x^2 + 4x^2 - 16x + 16 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 20x + 11 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 220}}{10} = \underline{2 \pm \frac{3}{\sqrt{5}}} \Rightarrow y_{1,2} = 2\left(2 \pm \frac{3}{\sqrt{5}}\right) - 4 = \underline{\pm \frac{6}{\sqrt{5}}}$$

• pohledové body: $p_1 = [3, 2], \quad p_2 = \left[2 + \frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{6}{\sqrt{5}}\right], \quad p_3 = \left[2 - \frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{6}{\sqrt{5}}\right]$

$f(p_1) = 9+4-18-8+11 = -2$

$f(p_2) = 4 + \frac{12}{\sqrt{5}} + \frac{9}{5} + \frac{36}{5} - 12 - \frac{18}{\sqrt{5}} - \frac{24}{\sqrt{5}} + 11 = 3 + \frac{45}{5} - \frac{30}{\sqrt{5}} = 12 - 6\sqrt{5} \approx -1.4$

$f(p_3) = 4 - \frac{12}{\sqrt{5}} + \frac{9}{5} + \frac{36}{5} - 12 + \frac{18}{\sqrt{5}} + \frac{24}{\sqrt{5}} + 11 = 3 + 9 + \frac{30}{\sqrt{5}} = 12 + 6\sqrt{5} \approx 25.4$

$\rightarrow M$ je kompaktní a f spojita \Rightarrow max. je $\underline{12 + 6\sqrt{5}}$, min. je $\underline{-2}$