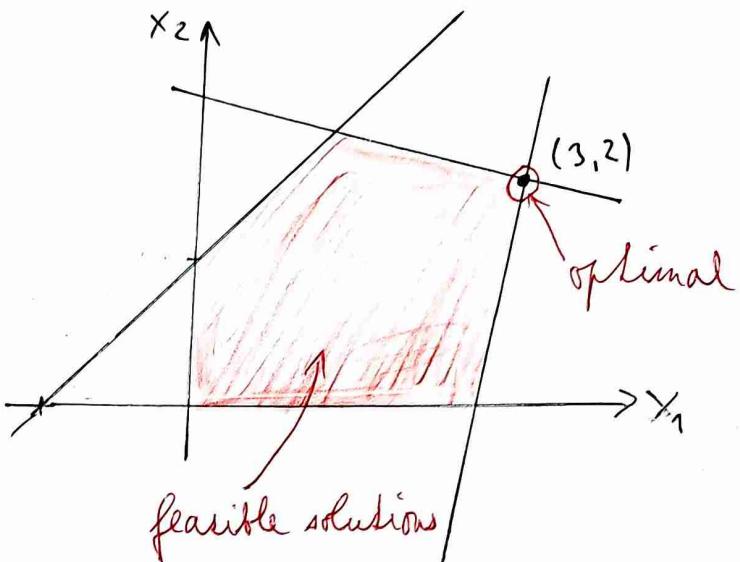


LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ

Problém: chceme max. $x_1 + x_2$, kde

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_2 - x_1 &\leq 1 \\ x_1 + 6x_2 &\leq 15 \\ 4x_1 - x_2 &\leq 10 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{lineární program}$$

- červená oblast to splňuje
- bod $(3,2)$ je optimum



Obecný problém:

chceme max. $c^T x$ ← objective function $c, x \in \mathbb{R}^n$
za podmínek

$$\begin{aligned} a_1^T x &\leq b_1 \\ a_2^T x &= b_2 \\ a_3^T x &\leq b_3 \\ &\vdots \\ a_m^T x &\geq b_m \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{constraints} \quad \dots Ax = b, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$$

Def: $\beta \in \mathbb{R}^n$ is a feasible solution \equiv satisfies all constraints.

Def: $\alpha \in \mathbb{R}^n$ is an optimal solution $\equiv \nexists \beta$ feasible sol. β : $c^T \alpha \geq c^T \beta$.

Def: Feasible LP: \exists a feasible solution. \nexists nem' f.

Def: Bounded LP: $\exists j \in \mathbb{R}^n$ s.t. $c^T x \leq j \quad \forall$ feasible x .

\nexists nem' b.

→ rozšířená málo případ, kdy LP je F&D.

Prädiktionsmodelle:

① lineare Regressionsmodelle: body (x_i, y_i)

$$\min \sum_i (\underbrace{ax_i + b}_{\text{predicted}} - \underbrace{y_i}_{\text{actual}})^2 \quad \leftarrow \text{least squares}$$

vars: a, b

↓
die Sollte nem' linear'

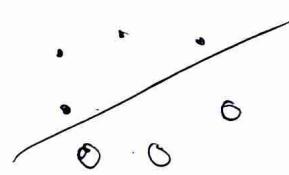
$$\Rightarrow \min \sum_i |ax_i + b - y_i| \dots \text{nicht linear}$$

$$\Rightarrow \sum_i |...| = l_1 + l_2 + \dots + l_m$$

$$\begin{aligned} l_i &\geq ax_i + b - y_i \\ l_i &\geq -(ax_i + b - y_i) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} l_i \geq \max(0, -l_i) = |l_i| \\ \text{nur optimale} \end{array} \right.$$

vars: a, b, l_1, \dots, l_m

② Separation body



classe: p_1, \dots, p_m

klasse: q_1, \dots, q_m

→ verschiedene Funktionen

- classe' nahezu $y(p_i) > ax(p_i) + b$
- klasse' dagegen $y(q_i) < ax(q_i) + b$

! wo vorgegebene Abstande? → füridat slack variable δ

$$y(p_i) \geq ax(p_i) + b + \delta$$

$$y(q_i) \leq ax(q_i) + b - \delta \quad \rightarrow \text{max } \delta$$

→ mehrere Kreise für jede Funktion

$$\rightarrow \text{Parabel}: y \geq ax^2 + bx + c + \delta$$

→ Scheine:

$$\max \delta$$

vars: δ, a_1, \dots, a_k

$$\text{s.t.: } y(p_i) \geq a_1 \varphi_1(p_i) + a_2 \varphi_2(p_i) + \dots + a_k \varphi_k(p_i) + \delta$$

$$y(q_i) \leq a_1 \varphi_1(q_i) + a_2 \varphi_2(q_i) + \dots + a_k \varphi_k(q_i) - \delta$$

$\varphi_1, \dots, \varphi_k$ sind Funktionen

linear
 parabolisch
 sin.
 cos.
 ...
 Kreis

STANDARD FORM

Def: Kanonicí tvor: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

$$\max c^T x, x \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{s.t. } Ax \leq b$$

EQUATIONAL FORM

Def: Rovnicí tvor:

$$\max c^T x, x \geq 0$$

$$\text{s.t. } Ax = b$$

Lemma: Kάdly LP lze převést do rovnicího tvazu. (a i důkaz)

Pl: příkladem

$$\min: 3x_1 - 2x_2 \rightsquigarrow \max -3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t.: } 2x_1 - x_2 \leq 4 \rightsquigarrow 2x_1 - x_2 + \delta_1 = 4, \delta_1 \geq 0$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 5 \rightsquigarrow -x_1 - 3x_2 + \delta_2 = 5, \delta_2 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_1 \in \mathbb{R} \rightsquigarrow y_1, z_1 \geq 0 \text{ & substitute } x_1 \rightsquigarrow y_1 - z_1$$

$$\Rightarrow \max -3(y_1 - z_1) + 2x_2$$

$$\text{s.t. } 2(y_1 - z_1) - x_2 + \delta_1 = 4$$

$$-y_1 + z_1 - 3x_2 + \delta_2 = 5$$

$$x_2, y_1, z_1, \delta_1, \delta_2 \geq 0$$

Integer programming

max $c^T x$

s.t. $Ax \leq b$, $x \in \mathbb{Z}^m$ \rightarrow NP-hard problem

\rightarrow lineární LP: $x \in \{0,1\}^m$

\hookrightarrow lze tak modelovat SAT

Def. LP-relaxace kohu IP je $Ax \leq b$, $x \in \mathbb{R}^m$ nebo $0 \leq x \leq 1$.
 \uparrow tzn. dle největšího aprotimaci ale může se, že pro určitou kritickou hodnotu může optimum

① Maximum-weight matching v DIPARTITNÍM grafu

$\rightarrow G = (V, E)$, hrana e má váhu $w_e \geq 0$

\rightarrow proměnné X_e ... hrana e je v párování ... $X_e \in \{0,1\}$

$$\max \sum_e w_e X_e$$



s.t. $\forall v \in V: \sum_{e \ni v} X_e = 1 \quad \leftarrow$ perfektní párování, ale může

\nexists $e \in E: X_e \in \{0,1\}$ \rightarrow LP-relaxace: $0 \leq X_e \leq 1$

Věta: Pokud LP-relaxace má řešení, tak má alespoň 1 celočíselné optimální řešení, které je optimální i pro ten původní IP.

RE: Nechť X^* je optimální řešení LP relaxace.

$$\rightarrow$$
 označme $w(X^*) := \sum_e w_e X_e^*$

$\ell(X^*) := \#$ neceločíselných složek rešení X^*

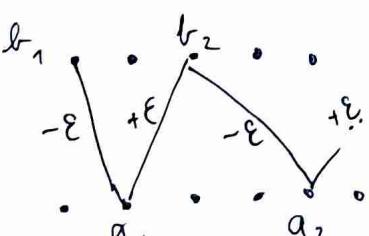
\rightarrow pokud $\ell(X^*) = 0$: výhled je jste

\rightarrow pro $\ell(X^*) > 0$ vyrobime \tilde{X} t.j. $w(\tilde{X}) = w(X^*)$ & $\ell(\tilde{X}) < \ell(X^*)$.

\hookrightarrow \exists hrana $e_1 = \{a_1, b_1\}$ t.j. $0 < X_{e_1} < 1$

\rightarrow musí být splňena podmínka $\sum_{e \ni a_1} X_e = 1$

$\Rightarrow \exists$ hrana $e_2 = \{a_1, b_2\}$, $b_2 \neq b_1$ t.j. $0 < X_{e_2} < 1$



\rightarrow tohle zohled, následce vznikne cyklus (graf je uzavřený)

\hookrightarrow bipartitní graf \Rightarrow cyklus sudejší délky

→ optimální řešení cyklu e_1, e_2, \dots, e_k

↳ pro danou směřování máky řech bran, cílové vnitřné možnosti
celočíselného průvodu

→ lichým branám odděluje ϵ

→ sudým branám přidává ϵ

→ tím získáme různé rachování $\sum_{e \in \pi} \tilde{x}_e = 1$

→ pro dostatečně malé ϵ platí i $0 \leq \tilde{x}_e \leq 1$

→ co objective function?

$$w(\tilde{x}) = \sum_e w_e \tilde{x}_e = w(x^*) + \epsilon \sum_{i=1}^k (-1)^i w_{e_i} = w(x^*) + \epsilon \Delta$$

↳ pokud $\Delta > 0 \Rightarrow$ mohou $\epsilon > 0 \Rightarrow w(\tilde{x}) > w(x^*)$

$\Delta < 0 \Rightarrow$ mohou $\epsilon < 0 \Rightarrow$

⇒ získaný $\Delta = 0 \Rightarrow w(\tilde{x}) = w(x^*) \Rightarrow \tilde{x}$ je optimální

⇒ rozhodně nejvíce $\epsilon \geq 0$ aby \tilde{x} bylo stále přípustné

⇒ pak musí být nejvíc bran a toho cyklu celočíselného
série $\epsilon(\tilde{x}) < \epsilon(x^*)$

2) Min vertex cover - 2-approximace

$$\min \sum_v x_v$$

$$\text{s.t. } x_u + x_v \geq 1, \forall u, v \in E$$

$$x_v \in \{0, 1\}, \forall v \in V$$

Věta: Řešení LP relaxace je 2-approximace (nejhorší 2x horší) Akusto IP.

Def: Nechť x^* je optimum relaxace a definujme

$$S_{LP} := \{v \in V \mid x_v^* \geq \frac{1}{2}\}$$

kolo je vertex-cover $\because \forall u, v \in E: x_u^* + x_v^* \geq 1 \Rightarrow x_u^* \geq \frac{1}{2}$
někdo $x_v^* \geq \frac{1}{2}$

Nechť S_{OPT} je optimální vertex cover, mohime

$$|S_{LP}| \leq 2 |S_{OPT}|$$

→ somužto S_{OPT} od povídá nejvíc přípustné celočíselné řešení \tilde{x}

1. $\sum_v x_v^* \leq \sum_v \tilde{x}_v = |S_{OPT}| \therefore x^* je optimální pro relaxaci$

2. $\sum_v x_v^* \geq \frac{1}{2} |S_{LP}| \therefore \forall x_v \in S_{LP} filiopejte absym $\frac{1}{2}$ do ní sumy$

③ Max independent set

$$\max \sum_r x_r, \quad x_r \in \{0,1\}$$

$$\text{s.t. } \forall uv \in E: x_u + x_v \leq 1$$

→ výpočet stejně jako min cover, jen řešení různé

$$\rightarrow \text{relaxace } x_r \in [0,1]$$

→ f(x): $x_r := \frac{1}{2}$ je přípustné řešení → obj.f. = $\frac{|V|}{2}$

→ ale výpočet graf má největší ind. set. velikost 1

$$\rightarrow LP \text{ relaxace dává } \max \geq \frac{|V|}{2} = \frac{n}{2}$$

⇒ je to mega špatný

BÁZICKÁ ŘEŠENÍ

→ jsou někdy LP v equational form

Assumption:

1) systém rovnic $Ax=b$ má alespoň 1 řešení ...

2) rádky matic A jsou lineárně nezávislé $\Rightarrow A \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow \text{rank}(A)=m$

Důvod:

1) easy check (Gaussova), pokud nemá → konec

2) právě tyto maticy byly robustní

Def: Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \subseteq \{1, \dots, n\}$. A_B je matici složenou z $A \cap B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \{2, 4\} \quad \Rightarrow A_B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Def: Mezi LP v eq. form: $Ax=b$, $x \geq 0$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (objective func.)
 $x \in \mathbb{R}^m$ je basic feasible solution \equiv (más nezávislá)
 $\exists B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, $|B|=m$ 1.r.

1) čívercová matici $A_B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ je regulární (složená jen lin. ner.)

2) $j \notin B \Rightarrow x_j = 0$

→ $j \in B \Rightarrow x_j = \text{basic variables}$ → matici B řešíme bázové
 $j \notin B \Rightarrow x_j = \text{non-basic}$

Lemmas: Přípustné řešení \times LP s rovnicemi zvané je bázické

\Leftrightarrow sloupců matice A_K jsou lin. ner.

$$K = \{j \in [n] \mid x_j > 0\}$$

Df: \Rightarrow : definice bázického řešení

\Leftarrow : pokud $|K| = m$, tak nemáme bázi $B = K$

pokud $|K| < m$, tak vytvoříme B tím, že do K přidáme $m - |K|$ dalších indexů, aby sloupcy A_B byly l. ner.

\rightarrow následně přidáme nějaký sloupec, který nemá ve vektorech prostoru generovaném aktuální bází

\rightarrow prostor matice má rank m , tak na výgenerování celého sloupcového prostoru potřebujeme vektor, čili bázi B velikosti m existuje

Tvrzení: Kardinality báze B jednu vrací a málo řešení neexistuje jiné bázické řešení.

\rightarrow pro $\# B \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$, $|B| = m$, A_B regulární

\exists nejméně jedno přípustné $x \in \mathbb{R}^m$ 1-r. $j \notin B \Rightarrow x_j = 0$

⚠️ Více bází v řešení může dát stejné řešení

Df: Uvažme soustavu rovnic s LP, kde podílne $x \geq 0$

$$\begin{matrix} m \\ \hline m \end{matrix} \boxed{A} \begin{matrix} x \\ \hline m \end{matrix} = \begin{matrix} m \\ \hline m \end{matrix} \boxed{A_B} \begin{matrix} x_B \\ \hline m-m \end{matrix} + \begin{matrix} m \\ \hline m-m \end{matrix} \boxed{A_N} \begin{matrix} x_N \\ \hline m-m \end{matrix} = b \quad , \quad N := [n] \setminus B$$

\rightarrow hledáme bázické řešení x , když $x_N = \vec{0} \Rightarrow A_B x_B = b$

$\rightarrow A_B$ je čtvercová regulární \Rightarrow rovnice $A_B x_B = b$ má jediné řešení \tilde{x}_B .

• pokud jsou všechny sloupcy \tilde{x}_B nezáporné \rightarrow definitivně nulové a máme bázické řešení

• pokud je tam něco nezáporného \rightarrow ne splňuje $x \geq 0 \Rightarrow$ ~~je~~ přípustné bázické řešení

\hookrightarrow v zadání případě užíváme, že báze B je přípustná

Věta: Uvažme LP max $C^T X$ s.t. $Ax = b$, $X \geq 0$.

- * 1, pokud \exists feasible solution & obj. f. is bounded \Rightarrow f. optimal. sol.
2, pokud \exists optimal solution $\Rightarrow \exists$ basic optimal solution.

Důkaz: \Leftrightarrow ekvivalentní dle věty: Pokud je obj. f. bounded, pak pro kohož feasible x_0 \exists basic feasible \tilde{X} s.r. $C^T \tilde{X} \geq C^T x_0$.

- \rightarrow proč to funguje? basic solutions je jen konečné mnoho \Rightarrow jedna je největší.
 \rightarrow uvažme libovolné případné $X_0 \in \mathbb{R}^n$

$$M := \{X \in \mathbb{R}^n \mid C^T X \geq C^T X_0\}$$

$\tilde{X} \in M$... vybereme tak, aby mělo co nejméně nul

\rightarrow uvažme, že \tilde{X} je basic

$$K := \{j \mid \tilde{x}_j > 0\}$$

a, sloupec $A_{:,k}$ je v lin. mer. \Rightarrow podle lemmatu je \tilde{X} basic

b, sloupec $A_{:,k}$ je v lin. rán. \Rightarrow uvažme sponem je nenuště

$$\Rightarrow \exists \underset{n \neq \vec{0}}{n \in \mathbb{R}^{1|K|}} : A_K n = \vec{0} \quad (\text{definice rávnost})$$

$$\Rightarrow \text{vyberme } w \in \mathbb{R}^n : w_i := \begin{cases} n_i, & i \in K \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\circledast A w = A_K n + \vec{0} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \text{definujeme } X(\lambda) := \tilde{X} + \lambda \cdot w, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\circledast A X(\lambda) = A \tilde{X} + \lambda \cdot A w = A \tilde{X} \quad \dots \text{pokud } x(\lambda) \geq 0, \text{ tøe feasible}$$

\hookrightarrow t. t. splňuje podmínky

\rightarrow uvažme, že po nijaké λ_0 je $X(\lambda_0)$ případné & $C^T X(\lambda_0) \geq C^T X_0$
a navíc má $X(\lambda_0)$ několik nul víc než \tilde{X} \rightarrow což bude spor *

Důkaz:

i) $C^T w \geq 0$... jinak vybereme $-w$

! $w \neq 0$

ii) $\exists j \in K$ t.r. $w_j < 0$... kdyby ne, tøe $w \geq 0$

\hookrightarrow pokud $C^T w = 0$, tøe vyberu $w / -w$ aby ii) platilo

\hookrightarrow jinak $C^T w > 0$ & $w \geq 0 \Rightarrow X(\lambda) \geq 0$ pro t. t.

$$\Rightarrow C^T X(\lambda) = C^T \tilde{X} + \lambda \cdot C^T w \longrightarrow \infty, \text{ LP is unbounded}$$

→ Potřebe existuje \ominus složka některou w , budeme rovnost
 $\lambda > 0$ aby $x(1) = \bar{x} + \lambda \cdot w$ mělo \ominus jednu něku něčí nečí.

↳ následí $C^T(\bar{x} + \lambda w) = \underbrace{C^T\bar{x}}_{\geq 0} + \lambda \cdot \underbrace{C^Tw}_{\geq 0} \geq C^T\bar{x}_0 \rightarrow \text{SPOR}$

Geometrie LP

Def: Množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní $\equiv \forall x, y \in M \ \forall \lambda \in [0, 1]: \lambda x + (1-\lambda)y \in M$.

Def: Convex polyhedron je průnik konvexní množby polytopem.

Convex polytope je smíšený polyhedron.

→ hyperplane: $a^T x = b$: \Rightarrow polyhedron = $\{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$

→ half space: $a^T x \leq b$ konvexní kombinace

Def: Convex hull of $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ is $\overbrace{\{x \in \mathbb{R}^n | x = \sum_i \alpha_i v_i : \sum_i \alpha_i = 1\}}_{\alpha_i \geq 0}$

Convex hull M je průnik všech konvexní množin obsahujících M .

Def: M je konvexní \Rightarrow obsahuje všechny konvexní kombinace svých bodů

Def: indukce podle # funkcií M

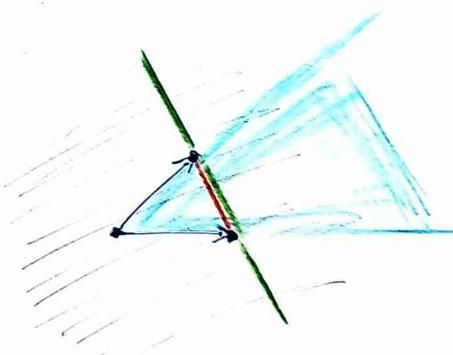
Combinations / halls: \rightarrow hall je všechny množiny všech kombinací

linear lin = $\{x \in \mathbb{R}^n | x = \sum_i \alpha_i v_i, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$

conic cone = $\{x \in \mathbb{R}^n | x = \sum_i \alpha_i v_i, \alpha_i \geq 0\}$

affine aff = $\{x \in \mathbb{R}^n | x = \sum_i \alpha_i v_i, \sum_i \alpha_i = 1\}$

convex conv = $\{x | x = \sum_i \alpha_i v_i, \sum_i \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0\}$



Věta (Minkowski-Weyl): P je polyhedron $\equiv \exists$ konvexní množiny $V, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ až.

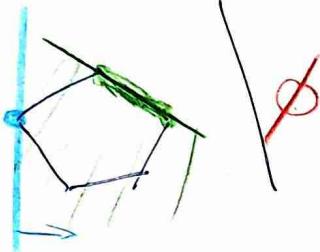
$$P = \text{conv}(V) + \text{cone}(Y) \quad , \quad A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\}$$

↑ Minkowski sum

Věta: P je polytop $\equiv \exists$ konvexna V t.j. $P = \text{conv}(V)$.

Def: Vraćene polyhedron P .

- nevodstvo $a^T x \leq b$ je validno za $P \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq b\}$
- potrebno je $a^T x \leq b$ validno za P , pot. maximum
 $P \cap \{x \mid a^T x = b\}$ marginalne stene (face) P



$$a^T x \leq b \rightarrow a^T x = b \rightarrow \emptyset$$

$$a^T x \leq b \rightarrow a^T x = b \rightarrow P$$

\Rightarrow Trivial faces: \emptyset, P

- $\dim(P) := \dim(\text{aff}(P)) \dots \dim(\square \cap \mathbb{R}^3) = 2$
 $\hookrightarrow \dim \text{affiner frakcija je jaka}$
- specijalni sleng:

vertax := face of dim. 0

brana := face of dim 1

faseta := face of dim $n-1$

- bod $v \in P$: je extreme point pro $P \equiv \exists \text{obj. f. } c \in \mathbb{R}^n \text{ s.t.}$

$$\forall x \in P \setminus \{v\}: c^T x < c^T v$$

v is a vertex of a polytope $P \equiv v$ is an extreme point

Vesla: Kardinalnost polytopa je finitno, mala broj verticima.

\rightarrow impliduje intuitivnu MCV rečenju za polytope

Def: $P = \{x \mid Ax \leq b\}$, polytop

$$Ax \leq b: \begin{aligned} a_1^T x &\leq b_1 \\ a_2^T x &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_m^T x &\leq b_m \end{aligned}$$

v je vertax $\Rightarrow \exists i: a_i^T v = b_i$

stena polytopa je polytop ... & tada ne moraju biti pridružene definicije razlicit stena

\dim stena $P < \dim P$

$\rightarrow f(m, d) := \# \text{ vrcholja } d-\text{dim. polytopa fiksiranog } m \text{ neravnostima}$

$$f(m, d) \leq m^d, f(m+1, d-1) \leq m \cdot (m+1)^{d-1}, f(m+2, d-2) \leq m^{d-1} \leftarrow \text{finite}$$

\hookrightarrow neodoljivo da su m polytopi s d-1 dimenzijama pridruženi m vrcholjima

LP ~ Polyhedrony

Věta: Basic feasible solutions \sim vertices
 \rightarrow Nechť P je mnoha rovnicí možných feasible sols. LP $Ax = b, x \geq 0$
 Všechna $v \in P$ je vertice $P \Leftrightarrow v$ je basic sol.

Důkaz: \Rightarrow : v je vertice, tedy maximizuje nějakou funkci, zdejšíme
 $v = P \cap \{x \mid a^T x = d\}$

\rightarrow rovnice pro naš program novou všeobecnou funkci: $a^T x$
 \rightarrow pokud funkce má max (****) \exists basic optimum

\hookrightarrow abo je k někol., tiské optimum je jen jedno $\Rightarrow v$ je k někol.

\Leftarrow : Nechť v je basic feasible s bází B .

\rightarrow tedy $j \notin B \Rightarrow v_j = 0$, A_B je čistová, regulérní

\rightarrow definujeme víc. fai $\tilde{c}^T \in \mathbb{R}^m$ jeho

$$c_j^T := \begin{cases} 0, & j \in B \\ -1, & j \notin B \end{cases} \Rightarrow \tilde{c}^T v = 0$$

\hookrightarrow $x \geq 0$ je $c^T x \leq 0 \Rightarrow v$ maximizuje obj. f. \tilde{c}^T

\rightarrow pokud je v jedinečné optimum, potom v je vertice

\hookrightarrow pokud má x několik sloučených minima B , potom $c^T x < 0$

\rightarrow může být něco větší, co mají minima B soudí malý?

\hookrightarrow NE: báze B určuje vždy největší počet basicí řešení

SIMPLEXOVA METODA

$$\begin{array}{ll}
 \text{max} & x_1 + x_2 \\
 \text{s.t.} & -x_1 + x_2 \leq 1 \\
 & x_1 \leq 3 \\
 & x_2 \leq 2 \\
 \hline
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

1. friend do roniecrého train
→ slack variables

$$\begin{array}{ll}
 \text{max} & x_1 + x_2 \\
 \text{s.t.} & -x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\
 & x_1 + s_2 = 3 \\
 & \underline{x_2 + s_3 = 2} \\
 & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0
 \end{array}$$

$$A \quad \text{I}_m$$

$$A' = \left(\begin{array}{cc|ccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

2. najdi initial basic feasible solution

→ float from final stock variables

I'm fine regularly

\Rightarrow dr bair dám slack variables

→ final fiducial move auxiliary variables s_1, \dots, s_m

$$\begin{array}{l} x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 \leq 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 3 = 3 \end{array} \rightarrow \text{minimální hod. fázového báze}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + A_1 = 1 \\ x_1 + A_1 + A_2 = 5 \end{cases}$$

→ maximization into which is obj. f. max - ($A_1 + A_2 + \dots + A_m$)

↳ likely starts at 1...3 am or later

\rightarrow pokud optimální hodnota není 0 \Rightarrow původní záloha není řeš.

→ first je optimum nijole' $(x_1, x_2, s_1, 0, 0)$

↳ Aha! mi d'voda' fočíkem' řešení pro
maslosovaření původně si mohlo vyz

! simpler och refinerat införde utvärderingar i sitt råd
medan för vanliga hörer fölge domän

3. mědilární simplexní metoda

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 + x_1 - x_2 \\ S_2 &= 3 - x_1 \\ S_3 &= 2 - x_2 \\ \underline{Z =} & \underbrace{x_1 + x_2}_{\text{obj. func.}} \end{aligned}$$

→ odpovídá jiné basic feasible sol

(0, 0, 1, 3, 2) → bod v rovině O

→ malivo jsou bázičkou funkce

↳ nepravo jejich aktuální hodnota

↳ a ještě srovnání s metařídkami (nula)

4. výberu průměru co má vstoupit do báze

↳ něk. fci. klesání bude přes x_1 nebo x_2 ⇒ výber x_1

⇒ průměrová pravidla: kterou využít

- Danzigov: největší koeficient ... x_1 , x_2

- Largest increase: která má mezi největší klesání hodnota ≤ 0

- Steepest edge: největší míře posun ve směru některého C

↳ reálně se používá

- Bland's rule: vždy výber průměru s nejmenším indexem
↳ zabranuje cyklu

5. výber průměru co má odjet

$S_1 = 1 + x_1 - x_2$... jde možnost mazat x_1 aby $s_1 \geq 0$?
↳ x_1 je tedy unbounded

$$S_2 = 3 - x_1 \quad \dots \quad x_1 \leq 3$$

$$S_3 = 2 - x_2 \quad \dots \quad x_2 \leq 2$$

→ výber největší pozitivní funkce → když nic nejsou

$$S_1 = 1 + x_1 - x_2$$

$$S_2 = 3 - x_1$$

$$S_3 = 2 - x_2$$

$$\underline{Z =} \quad \underline{x_1 + x_2}$$

$$\begin{array}{l} x_1 \\ \hline S_2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} S_1 = 4 - S_2 - x_2 \\ x_1 = 3 - S_2 \\ \hline S_3 = 2 - x_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_2 \\ \hline S_3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} S_1 = 2 - S_2 + S_3 \\ x_1 = 3 - S_2 \\ \hline x_2 = 2 - S_3 \end{array}$$

$$\hline Z = 5 - S_2 - S_3$$

⇒ optimum je $(3, 2, 2, 0, 0)$ a hodnota 5

Přeměříte-li tedy nejlepší $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{S}_3)$ lepsi? $Z = 5 - \tilde{S}_2 - \tilde{S}_3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{NE} \\ \tilde{S}_2, \tilde{S}_3 \geq 0 \end{array} \right.$

Co se může stát?

(1) Unboundedness

→ pokud je obj. f. neomezená v rámci možných LP, tak nějakou proměnnou rostoucí do barevné bude mít vždycky neomezené

(2) Degeneracy

$$\begin{array}{l} x_3 = \frac{x_1 - x_2}{x_2} \xrightarrow{x_2} \\ x_4 = \frac{2 - x_1}{x_2} \xrightarrow{x_2} \\ z = \frac{x_1 - x_3}{x_2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_2 = \frac{x_1 - x_3}{x_4} \xrightarrow{x_1} \\ x_4 = \frac{2 - x_1}{x_2} \xrightarrow{x_4} \\ z = \frac{x_2 - x_4}{x_1} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_2 = 2 - x_4 - x_3 \xrightarrow{x_4} \\ x_1 = 2 - x_4 \xrightarrow{x_4} \\ z = 2 - x_3 - x_4 \end{array}$$

↓
degeneracy error: něč. fa se nelepšila

→ dosud jsem se do jiné barevné (vrcholu) ale růstovne stíhám solution

→ pokud se neracovalím, tak to merodi

(3) Infeasibility

→ sítěm počítaného řešení není obecně snadné

→ formou simplexovy regresivní auxillary LP, jehož optimální řešení bude řešením mého programu - vše mimořádná strana

④ některá mohou být feasible a optimal sol. jsou podobně řešitelné

↳ když máme několik feasible v čase $T(n)$, tak optimal v čase $\log(n) T(n)$ - půlmetrovou (nabízíme)

(4) Cycling

- může se stát, že se bude totit v degeneraci hruhnout

→ Bland's rule tomu rozháníje

- nejde o to mít víc ignoruj - je to rare

(5) Složitost

→ praktický simplex algoritmus může trvat $2m - 3m$ kroků

→ ale nemá známé řádně obecné polynomické provozovací pravidlo

↳ pro mnoho případů jsou známé exponenciální provozovací pravidla

Simplexový řešení obecně

Def: $T(B)$ pro bázi B je systém $m+1$ lineárních rovnic v pravých x_1, \dots, x_m, z , které má stejnou možnost řešení jeho $Ax = b$
 $\quad \quad \quad z = c^T x$

$$\frac{X_B = b + QX_N}{z = z_0 + r^T X_N}$$

X_B = bázičkou řešení

X_N = nebázičkou ... $N = \{m\} - B$

$$\hookrightarrow f \in \mathbb{R}^m, \quad r \in \mathbb{R}^{m-m}, \quad Q \in \mathbb{R}^{m \times (m-m)}, \quad z_0 \in \mathbb{R}$$

Věta:

- pro kódovanou bází B existuje právě jedno řešení
- pokud $r \leq 0$, poté je odpovídající bázičkou řešení optimální
- nebázičkou řešení musí mít všechny nesoupis do báze \Leftrightarrow její koeficienty jsou kladny
- leaving variable musí oproti entering variable most strictly
- pokud entering X_E a leaving X_L jsou splněny, tak $B' = (B \setminus \{E\}) \cup \{L\}$ je opět feasible báze
- pokud rácká řešení není kandidát pro leaving (neexistuje vstupní), tak je LP nehomologed

Věta: pokud existuje feasible báze

maximizujte $c^T x$ s.t. $Ax = b, x \geq 0$

\rightarrow nejprve řešitelné rovnice aby $b \geq 0$ $(x_1, \dots, x_m, A_1, \dots, A_m)$

\rightarrow rozdělení nové řešení s_1, \dots, s_m

\Rightarrow pomocné LP: $\max -\sum s_i$ s.t. $\bar{A}(x, s) = b, x, s \geq 0$

$$\bar{A} = (A \mid I_m)$$

\hookrightarrow počítaná báze: A_1, \dots, A_m

\rightarrow nejprve - optimum není 0 \rightarrow pomocné řešení řešení

\hookrightarrow optimum je 0 $\Rightarrow (x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0)$

\hookrightarrow toto je bázičkou řešení původních - simplexova výrobek mohou být bázičkou řešením

\rightarrow pokud báze obsahuje největší x_i , tak to musí nejdřív být řešením

Vektor (silná o dualitě): Když nastane první jedna situace:

1. P and D are both infeasible (spis \Rightarrow)
2. P is unbounded & D is infeasible
3. P is infeasible & D is unbounded
4. P and D are both feasible & bounded
a major optima $x^*(P)$, $y^*(D)$ a flobi $c^T x^* = b^T y^*$.

Pozn.: 3 možnosti: infeasible, feasible $\underline{2}$ bounded, unbounded \rightarrow pro P a D

\hookrightarrow weak věta rovnice: $P_3 \& D_2$, $P_3 \& D_3$, $P_2 \& D_3$

\hookrightarrow v důvěrných výkrocích $P_1 \& D_2$, $P_2 \& D_1$

Dle: Dohádme, že pokud je P feasible & bounded, pak je dual feasible
(a flobi slabé duality také bounded) a má stejné optimum jako P.

\hookrightarrow Sobě výkrocí $P_2 \& D_1$, protože dual dualu je primární, takže $P_1 \& D_2$

\rightarrow maximální LP max $c^T x$ s.t. $Ax \leq b$, $x \geq 0$. (P)

\rightarrow simplexova: přidáme slack variables x_{m+1}, \dots, x_{n+m}

$$\Rightarrow \max \bar{c}^T \bar{x} \text{ s.t. } \bar{A} \bar{x} \leq \bar{b}, \bar{x} \geq 0$$

$$\hookrightarrow \bar{x} = (x_1, \dots, x_{m+n}), \bar{c}^T = (c_1, \dots, c_m, 0, \dots, 0), \bar{A} = (A | I_m)$$

\rightarrow pokud je feasible & bounded, lze simplexovou s vlastním prvním řešením \bar{x}^* a bázi B., kde $x^* := (\bar{x}_1^*, \dots, \bar{x}_m^*)$
je optimum primárního programu (P)

Lemma: Vektor $y^* = (\bar{c}_B^T \bar{A}_B^{-1})^T$ je primární řešení D a $c^T x^* = b^T y^*$.

Důsledek: Ze slabé duality je y^* optimum D, což dokáže větu.

Dle: maximální tablo, $\because \bar{x}^*$ je optimální, takže $r \leq 0$

$$\begin{aligned} \bar{x}_B^* &= \bar{b} + Q \bar{x}_N^* \\ z &= z_0 + r \bar{x}_m^* \end{aligned} \quad \rightarrow \bar{A} \bar{x}^* = \bar{A}_B \bar{x}_B^* + \bar{A}_N \bar{x}_N^* = \bar{b} \quad \Rightarrow \bar{x}_B^* = \bar{A}_B^{-1} \bar{b} \quad (+)$$

$$\Rightarrow \bar{c}^T x^* = \bar{c}^T \bar{x}^* = \bar{c}_B^T \bar{x}_B^* = \bar{c}_B^T (\bar{A}_B^{-1} \bar{b}) = (\bar{c}_B^T \bar{A}_B^{-1}) \bar{b} = (y^*)^T \bar{b} = \bar{b}^T y^*$$

\rightarrow zvýšení nároku, že y^* je feasible, tedy $y^* \geq 0$ & $A^T y^* \geq c$ (D)

\hookrightarrow tedy $\bar{A}^T y^* \geq \bar{c}$ (*) ... $\because y^* \geq 0 \Leftrightarrow I_m y^* \geq 0$

$$\hookrightarrow \bar{A}^T y^* = \bar{A}^T (\bar{c}_B^T \bar{A}_B^{-1})^T = (\bar{c}_B^T \bar{A}_B^{-1} \bar{A}^T)^T =: w \in \mathbb{R}^{m+n}$$

bázi $\bullet w_B = (\bar{c}_B^T \bar{A}_B^{-1} \bar{A}_B^T)^T = \bar{c}_B^T \quad \dots$ tedy flobi nárok (*) \Rightarrow flobi nárok

nabázi $\bullet w_N = (\bar{c}_B^T \bar{A}_B^{-1} \bar{A}_N^T)^T \stackrel{(+)}{=} \bar{c}_N - r \geq \bar{c}_N \quad \because r \leq 0 \quad \dots$ flobi nárok (*)

Komplementarity

Výzva: Mějme náslohy

$$P: \max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0$$

$$D: \min b^T y, A^T y \geq c, y \geq 0$$

Přípustná řešení x^*, y^* jsou optimální \Leftrightarrow

$$1) \forall i \in [m]: x_i = 0 \quad \vee \quad \sum_{j=1}^m A_{ji} \cdot y_{ji} = c_i$$

$$2) \forall j \in [n]: y_j = 0 \quad \vee \quad \sum_{i=1}^m A_{ji} \cdot x_i = b_j$$

Příklad:

$$\begin{aligned} P: \max & \quad 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} & \quad 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 12 \\ & \quad x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 7 \\ & \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 10 \\ & \quad x_i \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D: \min & \quad 12y_1 + 7y_2 + 10y_3 \\ \text{s.t.} & \quad 3y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 2 \\ & \quad y_1 - 3y_2 + y_3 \geq 4 \\ & \quad y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 3 \\ & \quad 4y_1 + 3y_2 - y_3 \geq 1 \\ & \quad y_j \geq 0 \end{aligned}$$

$\rightarrow x^* = (0, \frac{52}{5}, 0, \frac{2}{5})$ je optimum $\sim P$. \rightarrow málo optimální $\sim D$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow x_2 \neq 0 & \Rightarrow y_1 - 3y_2 + y_3 = 4 \\ \hookrightarrow x_4 \neq 0 & \Rightarrow 4y_1 + 3y_2 - y_3 = 1 \quad \dots \text{vyvážil prem} \quad (1) \end{aligned}$$

(2): splňuje x^* nějaké nerovnosti $\sim P$ neplatí?

\rightarrow 2. nerovnost $\sim P$ nemá splňovat řešení $\Rightarrow y_2 = 0$

$$\Rightarrow \text{celkem} \quad \begin{array}{l} y_1 + y_3 = 4 \\ y_1 - y_3 = 1 \end{array} \Rightarrow y^* = (1, 0, 3)$$

Příklad

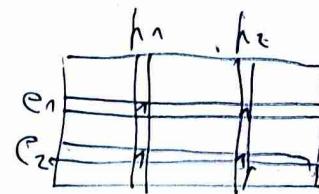
\rightarrow málo náslohu LP a nějaké přípustné řešení dvojí

\hookrightarrow pouze někdo fokusek málo kontrolovat, zde je optimální

Využití duality

Věta: Max flow = Min cut

$$\Pi := \{p \mid p \text{ je cesta zdroj} \rightarrow sck\}$$



$$P: \max \sum_{h \in \Pi} f_h \quad \text{s.t.} \quad \forall e \in E: \sum_{h \in e} f_h \leq c_e, \quad f_h \geq 0$$

$$D: \min \sum_{e \in E} c_e y_e \quad \text{s.t.} \quad \forall h \in \Pi: \sum_{e \in h} y_e \geq \overset{\rightarrow}{1} \quad \dots c^T = (1, \dots, 1)$$

⊗ P je feasible a bounded \Leftrightarrow capacity jsou bounded

⊗ D $\xrightarrow{\text{---}}$ \Leftrightarrow $\xrightarrow{\text{---}}$

\Rightarrow podle svého významu dualitě $\text{opt } P = \text{max flow} = \text{opt } D$

\rightarrow stejná mříž, kde D resí min cut problem

Lemma: $C_{\min} = \text{opt } D$

Df: Pro $S \subseteq V$ definujeme edge-cut jako $E(S, \bar{S}) := \{uv \in E \mid u \in S, v \in \bar{S}\}$

$$C(S, \bar{S}) := \sum_{e \in E(S, \bar{S})} c_e \quad \dots \text{lopatka rámce}$$

i) $\text{opt } D \leq C_{\min}$: Pro každý rámec (S, \bar{S}) existuje nějaké feasible $y \in D$ se stejnou hodnotou, tedy $C(S, \bar{S}) = \sum_e y_e c_e$.

\rightarrow pro rámec (S, \bar{S}) definujeme $y_e := \begin{cases} 1, & e \in E(S, \bar{S}) \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$

\hookrightarrow je y feasible? Ans: $\because (S, \bar{S})$ je rámec \Rightarrow k celek obsahují hrany v rámci.

ii) $C_{\min} \leq \text{opt } D$: Pro \forall feasible y existuje rámec (S, \bar{S}) k.r.

$$C(S, \bar{S}) \leq \sum_e y_e c_e$$

Df: Do grafu máme každou hranci $e \in E$ přidáme rámců $W_e := \{v \mid e \in E(v, \bar{v})\}$

\hookrightarrow definujeme d: $V \mapsto \mathbb{R}$ jak vzdálenost mezi sem tam rámcům

\rightarrow pro $S \in [0, 1]$: $S_d := \{v \in V \mid d(v) \leq S\}$

(sledování)

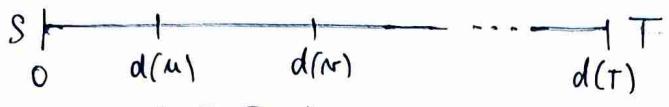
zdroj $\hookrightarrow d(S) = 0 \Rightarrow S \in S_d \Rightarrow (S_d, \bar{S}_d)$ je rámec
ske $d(T) \geq 1 \Rightarrow T \notin S_d$

\hookrightarrow z podmínek D

\rightarrow mym' uniforme náhodné systém $S \in (0, 1)$

$$\mathbb{E}[c(S_S, \bar{S}_S)] = \sum_{e \in E} c_e \underbrace{P[e \in c(S_S, \bar{S}_S)]}_n$$

\rightarrow jdej je fak f, že $e = uv \in \text{res}$?



$$d(v) - d(u) \leq w_e = y_e$$

\rightarrow pokud $S < d(u)$ nebo $S > d(v)$, pak $e \notin \text{res}$

$$\Rightarrow \text{chci aby } S \in [d(u), d(v)] \Rightarrow p = P[S \in [d(u), d(v)]] \leq y_e$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[c(S_S, \bar{S}_S)] \leq \sum_{e \in E} c_e y_e$$

$\rightarrow \mathbb{E}[\text{res}] \leq \text{res} \uparrow$, když $\exists \text{ res } (S, \bar{S})$ což je $\leq \sum_e c_e y_e$.

Twen: Sloha nábreží pripravil riešení je skôr "terka" ako oplňovanie.

Df: $P \max c^T x$

$$\text{s.t. } Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

\rightarrow náležíme

$$\max c^T x$$

$$\text{s.t. } Ax \leq b$$

$$A^T y \geq c$$

$$c^T x \geq b^T y$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

⑥ P má optimum $\Leftrightarrow P'$

má feasible solution

} rovnakého súboru vektorov dimensií



TOTALNÍ UNIMODULARITA

Def: Čívercová matice $A \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ je unimodulární $\Leftrightarrow \det(A) \in \{-1, 1\}$.

Def: Matice $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ je celého unimodulární \Leftrightarrow

• čívercová podmatice má $\det \in \{-1, 0, +1\}$;

• TV matice obsahuje pouze 0, 1, -1.

Uvěřit: Pokud je A TUM, pak má polyhedron $\{X \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b, X \geq 0\}$ celočíselné vrcholy pro kariéru $b \in \mathbb{Z}^m$.

Dr: Kariéru vrcholu odporučuje nejdříve baricidu řešení $x \in \mathbb{R}^m$

$$x_N = 0 \dots x_\sigma \in \mathbb{Z} \quad \sigma$$

$$x_B = ? \dots Ax = b \Rightarrow A_B x_B + A_N x_N = b \Rightarrow x_B = A_B^{-1} b$$

\rightarrow stále věrohodnost, že $A_B^{-1} \in \mathbb{Z}^{m \times m}$

\hookrightarrow máme, že A_B obsahuje jen 0, 1, -1, tedy speciálně $\in \mathbb{Z}^{m \times m}$

\rightarrow z L.A máme, že $\text{adj}(A_B) = \det(A) \cdot A_B^{-1}$ $(\text{adj}(A))_{ji} := (-1)^{i+j} \det(A^{ij})$

\hookrightarrow adjungovaná matice je definována pomocí determinant $A^{ij} \in \{0, 1, -1\}$

\Rightarrow protože $\text{adj}(A_B) \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ & $\det(A) \in \{0, 1, -1\}$, tak $A_B^{-1} \in \mathbb{Z}^{m \times m}$

Riešedelci: Pokud matice nejdříveho problému je TUM a my máme reálnou relaci, tak máme rovnou celočíselné optimum.

Lemma: $A \in \{0, 1, -1\}^{m \times m}$, kde \nexists sloupec obsahuje nanejvýše 2 nenulové prvky.

Nechť lze rámeček A rozdělit do dvou matic R_1, R_2 . Potom, že

jsou-li ve rámečku sloupců 2 nenulové prvky

$A \in \text{TUM} \left\{ \begin{array}{l} \text{i)} stejným znaménkem} \Rightarrow \text{partii do menších matic } R_1, R_2 \\ \text{ii)} různých znaménk } \Rightarrow \text{oba lze ve rámečku rozdělit} \end{array} \right.$

Dr: Laplaceovo pravidlo

$$\rightarrow \text{sloupec } j: \det(A) = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij})$$

Indukce podle K : $K :=$ velikost \square podmatice $\rightarrow K=1$ triviálně platí

$K>1: \det(\square) \in \{-1, 0, 1\}$

1) 3 sloupců s 0 $\Rightarrow \det = 0$

2) 3 sloupců s jedním výslysem -1 mimo 1 \Rightarrow pomocí Laplace rozvedu na $K-1$

3) \nexists sloupec má 2 nenuly

$\Rightarrow \det$ bude 0

-1	1
-1	

sechn $\begin{matrix} \text{red} \\ \text{r.i.} \end{matrix}$ sechn $\begin{matrix} \text{red} \\ \text{r.i.} \end{matrix}$ odebír od sebe \Rightarrow nula $\Rightarrow \det = 0$

Květa:

a) Matice incidence orientovaného grafu $G = (V, E)$ je $A_G \in \{-1, 0, 1\}^{|V| \times |E|}$

$$(A_G)_{v_i, e} := \begin{cases} -1, & e = (v_i, v) \\ 1, & e = (v, v_i) \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \quad \dots \text{hrana račína mezi } v$$

b) Matice incidence neorientovaného grafu G je $A_G \in \{0, 1\}^{|V| \times |E|}$

$$(A_G)_{v_i, e} = \begin{cases} 1, & v \in e \\ 0, & v \notin e \end{cases}$$

Takhle, že

- a) pro orientovaný graf je A_G vždy TUM
- b) pro neorientovaný graf je A_G TUM $\Leftrightarrow G$ je bipartitní

Důkaz:

a) → prosté rozumu
 $R_1 = V$ → vždy ve sloupcích 1, -1
 $R_2 = \emptyset$

b) parity $A, B \Leftrightarrow R_1 = A$
 $R_2 = B$



Důsledek: Pro celočíselné kapacity je max-flow = min-cover.

• Min vertex cover = Max matching

Věta (Königovo lemma): V bipartitním grafu platí $|C_{\min}| = |M_{\max}|$.

Důkaz: $\max \sum_{e \in E} x_e$ $\min \sum_{v \in V} y_v$

$\forall v \in V: \sum_{e \ni v} x_e \leq 1$ $\forall e \in E: y_u + y_v \geq 1, e = uv$

$\begin{array}{l} \text{nytřebují} \\ \leq 1 \\ \rightarrow \text{dil. do 0-1} \end{array}$ $\begin{array}{l} \text{dil.} \\ x_e \geq 0 \end{array}$

$\xrightarrow{\text{dual}}$ $y_u \geq 0$

relaxace max matching

relaxace min cover

→ podle předchozí věty je A TUM

↪ simplexova fida slze variabli a bude různé $\Rightarrow \bar{A} = (A | I_m)$

↳ ale potom je A TUM, takže $(A | I_m)$ je taky TUM

\Rightarrow optimum P je celočíselné

$\rightarrow A$ je TUM $\Rightarrow A^T$ je TUM \Rightarrow optimum D je celočíselné

$\left. \begin{array}{l} C_{\min} = M_{\max} \\ \text{celočíselné} \end{array} \right\}$



ELLIPSOID ALGORITHM

→ algorithmus lineárního programování

↳ v rozdílu formulejší než simplex

↳ ale srovnatelný s jinými :: je polynomiální (je to dobré)

Def: bit-size of

$$i \in \mathbb{Z}: \langle i \rangle := \lceil \lg_2(|i|+1) \rceil + 1$$

$$r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}: \langle r \rangle := \langle p \rangle + \langle q \rangle$$

$$\vec{v} \in \mathbb{Q}^m: \langle \vec{v} \rangle := \sum_{i=1}^m \langle v_i \rangle$$

$$(A) \in \mathbb{Q}^{n \times m}: \langle A \rangle := \sum_i \sum_j \langle a_{ij} \rangle$$

$$L := \max \quad C^T x \quad \text{s.t.} \quad Ax \leq b$$

$$\hookrightarrow \langle L \rangle := \langle A \rangle + \langle b \rangle + \langle C \rangle$$

Def: Algorithmus je polynomiální pro lin. prog $\equiv \exists$ polynom $f(x)$ a. z.

pro rozhodujícího polynomiální LP L může být řešení x $f(L)$ krokach.

Def (ellipsoid): Vektor $s \in \mathbb{R}^n$ je elipsa plus vektor. Obecně

$$B_m := \{x \in \mathbb{R}^m \mid x^T x \leq 1\} \quad \dots \text{n-dim jednotkový koule}$$

→ n-dimensional ellipsoid je affin transformace jednotkové koule

$$E := \{Mx + s \mid x \in B_m\}$$

• $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je regulární

• $s \in \mathbb{R}^m$ může stát

• $x \mapsto Mx + s \quad \dots$ lineární rotační + translace = affin rotační

$$\textcircled{O} E = \{y \in \mathbb{R}^m \mid M^{-1}(y-s) \in B_m\}$$

$$= \{y \in \mathbb{R}^m \mid (y-s)^T (M^{-1})^T M^{-1}(y-s) \leq 1\}$$

$$= \{y \in \mathbb{R}^m \mid (y-s)^T Q^{-1}(y-s) \leq 1\}, \quad Q = M M^T$$

$\textcircled{O} M$ je neg $\Rightarrow Q = M M^T$ je pozitivně definovaná, tedy $x^T Q x > 0 \iff x \neq 0$

Eliipsoidní: E je elipsoid $\equiv E = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (y-s)^T Q^{-1}(y-s) \leq 1\}$
pro nějakou pozitivně definitní Q .

s je střed kohy elipsoidu

\rightarrow pokud je Q diagonální a $s=0$, tak

$$E = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \frac{y_1^2}{q_{11}} + \frac{y_2^2}{q_{22}} + \dots + \frac{y_n^2}{q_{nn}} \leq 1 \right\}$$

axial position

Fakt: Protože je Q f.d., tak ji lze diagonalizovat pomocí

ortogonální matice T takže: $T Q T^{-1}$, kde na diagonále jsou vlastní čísla Q

\rightarrow geometricky to reprezentuje rotaci soustavy souřadnic tak, aby se elipsoid dostal do axial position

Ellipsoid method

- nejdřív optimum, abe majde nějaké přípustné řešení. - (což nevadí)

$P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, předpokládáme, že celý folyhedron je

1) neprázdný a nějaké houby $B(\vec{o}, R)$, $R \in \mathbb{R}$

2) dost velký na Ax , aby se do něj vešla koule s o. polomolem $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

- ellipsoidová metoda myrákem poslouží elipsoidy E_0, E_1, \dots, E_k , kde

$P \subseteq E_k$ pro když k a objemy elipsoidů se zmenšují

1. $E_0 := B(\vec{o}, R)$

2. aktuální elipsoid $E_k = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (y-s_k)^T Q_k^{-1}(y-s_k) \leq 1\}$

\hookrightarrow pokud $A s_k \leq b$, tak je s_k feasible \rightarrow konec

3. jinak vyber novost, co nemá uplninu

\hookrightarrow nechť a_i je i-ta novost, tedy $a_i^T s_k > b_i$

$\rightarrow P \subseteq E_k$, ale střed $s_k \notin P \Rightarrow$ chceme P uvozit nížší k

$\hookrightarrow E_{k+1} :=$ nejménší elipsoid obsahující half-elipsoid

$$a_i^T x \leq b_i \quad H_k := E_k \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \leq a_i^T s_k\}$$

$$a_i^T x \leq a_i^T s_k \quad \rightarrow$$

\rightarrow různý $P \in$



4. Pokud $\text{vol}(E_{k+1}) < \text{vol}(B(\vec{o}, \varepsilon)) \rightarrow$ NO solution; ELSE: goto 2

Složitost:

$$\text{ber dílce: } \frac{\text{volume}(\tilde{E}_{\delta+1})}{\text{volume}(E_\delta)} \leq e^{\frac{-1}{2m+2}}$$

$$\Rightarrow \text{volume}(E_\delta) \leq e^{\frac{-\delta}{2m+2}} \cdot \text{vol}(B(0, R))$$

→ prostej objem B_m je $O(R^m)$, takže přední číslo splňuje

$$R \cdot e^{\frac{-\delta}{2m+2}} < \varepsilon, \text{ takže } \text{vol}(E_\delta) < \text{vol}(B(0, \varepsilon))$$

→ volové k dílce kom odhad složitosti

$$\delta < m(2m+2) \ln(R/\varepsilon)$$

Edmonds' Algorithm

Def: Mejme bipartitní graf $G = (V, E)$. Definice

- matching polytop $P_M(G) := \left\{ x \mid \forall v \in V : \sum_{e \ni v} x_e \leq 1 \right. \atop \left. \forall e \in E : x_e \geq 0 \right\}$

↳ neplatí, že $\sum x_e \leq 1$ je implicitně v řešení

- perfect matching polytop $P_{PM}(G) := \left\{ x \mid \forall v \in V : \sum_{e \ni v} x_e = 1 \right. \atop \left. \forall e \in E : x_e \geq 0 \right\}$

Bifurkace: Aby se rozložit řešení daného problému fázově - optimum $x \in \mathbb{Z}^m$

dkz 1: pomocí sudých cyklů

dkz 2: pomocí TUM

→ co pro obecné grafy? Tam se sice mohou vytvořit cykly

↳ pro $S \subseteq V$, $|S| = \text{důležitá množina}$

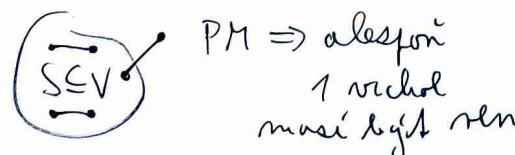
$0 \leq \sum_{e \in E[S]} x_e \leq \left\lfloor \frac{|S|}{2} \right\rfloor$, $E[S] := \text{brany mezi množinou } S$

↳ pouze $\sum_{e \in E[S]} x_e \leq \left\lfloor \frac{|S|}{2} \right\rfloor$ brány mezi množinou S

Def: Pro obecný graf G definujeme

$$P_M(G) := \left\{ x \mid \forall v \in V : \sum_{e \ni v} x_e \leq 1 \atop \forall e \in E : x_e \geq 0 \right. \quad \forall V \subseteq V : \sum_{e \in E[V]} x_e \leq \frac{|V|-1}{2} \atop \left. \quad |V| = \text{důležitá množina} \right\}$$

$$P_{PM}(G) := \left\{ x \mid \forall v \in V : \sum_{e \ni v} x_e \leq 1 \atop \forall e \in E : x_e \geq 0 \right. \quad \forall V \subseteq V : \sum_{e \in E[V]} x_e \geq 1 \atop \left. \quad |V| = \text{důležitá množina} \right\}$$



$\delta(S) := \text{brany mezi } V \text{ a } V \setminus S$

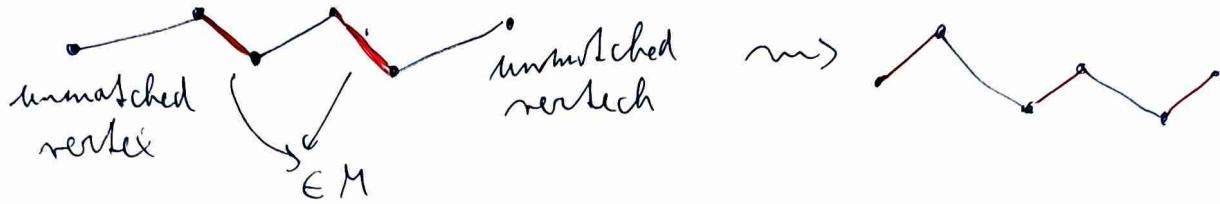
Fakt: Tyto nerovnosti slouží. Optimalní řešení následně rozloží

je řešení celočíselné a je to optimum celočíselného programu

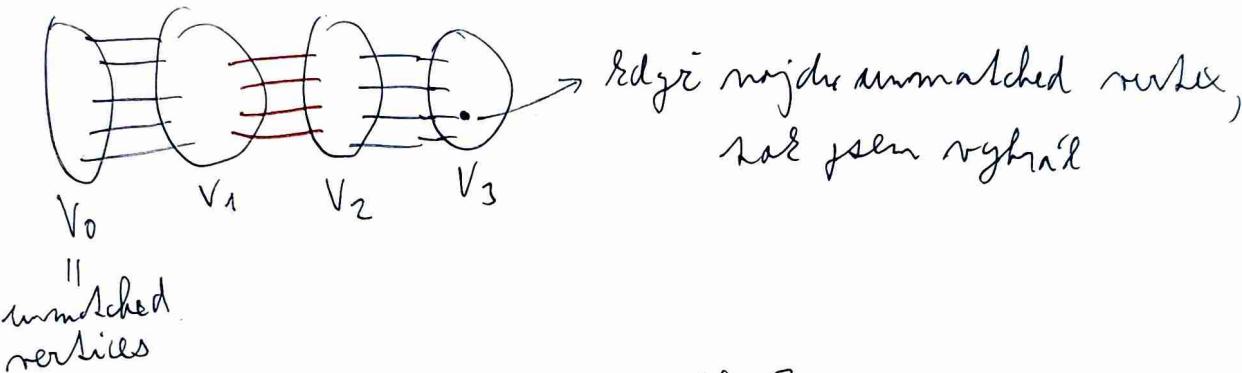
Problém: je exponenciálně mnoho řešení.

Lemma (Berge): Parvání M v gráfu G je maximální (\Leftrightarrow)

3 M-augmenting forth , cor' p̄



→ Jak najít angverking folii?



→ os edgy n now grafu jom cylgy?

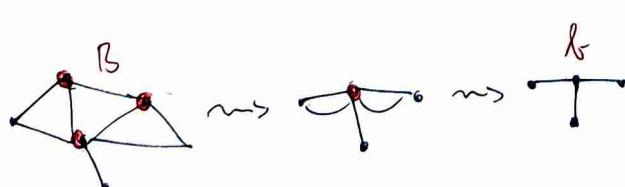
↳ sude cylry : 

↳ like 'cyrly':

- řečad „Jsem sude“, ale je graf bipolární, tedy je dobré
- řečad je liché, ale je i korektní

→ shrinking a blossom: *predstrim si, re/lo je sen 1 mchol*

Def: Prek grafu $G = (V, E)$ a $B \subseteq V$ definjene graf G/B jaka

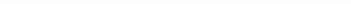


$$V' := V \setminus B \cup \{b\}$$

$$E' := E \setminus \left(\binom{B}{2} \cup \left\{ ab \mid \exists m \in E : \frac{m+B}{m} = ab \right\} \right)$$

→ frōi mām rodi' wldy? Chai māist nīch, ric or 1m graft
Augmenting forth retro jin wldy majorit

sende: → ↗ → → nebr → → ↗ → → ⇒ cyklise So rezipidn

Mihé:  'machi' se doradu \rightarrow mihé nepristupuj
mári se jeho angrejning post roho

→ formal shrinking minne odkrobit augmenting path or finding blossoms

Věta: Nechť G je graf, M matching a B blossom. Pak \exists M -augmenting path τ v G $\Leftrightarrow \exists$ M/B -augmenting path τ v G/B .

Důkaz:



je M/B opět matching?

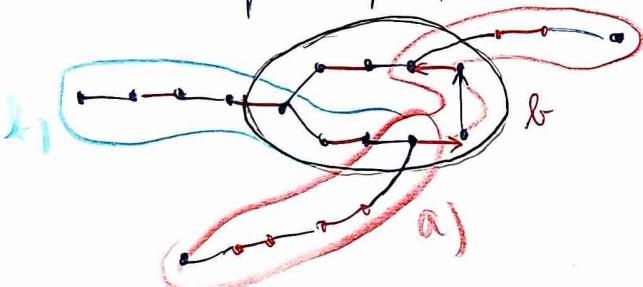
co by se mohlo stovat?



nevzbudí se kvůli τ : B je nové červené rozvojení
jen zom hranou \star a ta je žlutá — nevzbudí

Důkaz: \Rightarrow : Nechť \exists M -aug. path τ v G .

- pokud τ se nedotýká B , tak τ je M/B -aug.-path v G/B .
- pokud τ prochází B



a) pokud nemá stonky

\Rightarrow pokud b je unmatched vertex v G/B
 \rightarrow "prefix" je augmenting path

b) pokud je stonky

\rightarrow tak buď pravým - končí na unmatched vertex

\Leftarrow : Nechť \exists M/B ang. path in G/B

- τ does not touch b ✓
- τ uses b



\rightarrow stejný argument ale opačně, někde druhého
blossom rozvojení, někde rybník



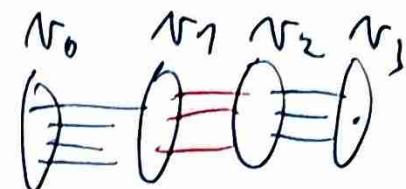
Rukávem: Když shrnuji graf a

- najdu ang. path \Rightarrow došlo k rozbití a.p. v tom prvním
- nenajdu a.p. \Rightarrow v prvním době netyla

Edmonds' alg.

→ bleda's max-matching $\sim G$ augment or assign M , $M_0 = \emptyset$

Augment (G, M)



1. Pick a $v \in N_0$ w/o M -aug. path
2. if fail with blossom B :

$$G' := G/B$$

$$M' := M/B \rightarrow \text{augment}(G', M')$$

3. if found augmentation \rightarrow augment using it
4. else failed completely \Rightarrow max matching

CUTTING PLANES METHOD

→ způsob jak řešit celočíselné programy pomocí normálních programů

Algoritmus:

Vstup: celočíselný program IP

0. nejprve nechť LP := relaxace IP

1. Nechť x^* je optimum LP

2. Pokud je x^* celočíselné → je to optimum IP

3. Jinak najdi nerovnost, kterou splňují všechny feasible řešení IP, ale x^* ji nesplňuje, a přidej ji do LP → goto 1

→ LP je moc lažní, moc optimistická, přesnější to

⇒ rázidlo musí nerovnost hrát trochu stráže

⇒ posunji dostávám lepsí a lepsí odhady

→ hard part je step 3: najít tu nerovnost

Krátko (Chvátil-Gomory cutting planes): Řešme IP

$$\max c^T x$$

$$\text{s.t. } Ax \leq b \quad \dots \quad \forall i: a_i^T x \leq b_i \quad \dots \quad \sum_j a_{ij} x \leq b_i \\ x \geq 0, \quad x \in \mathbb{Z}^m$$

→ rvejme $u \in \mathbb{R}^{+m}$ libovolné. Máme

$$u^T A x \leq u^T b \quad \text{neboli} \quad \sum_i u_i \sum_j a_{ij} x_j \leq u^T b \quad \dots$$

→ nulikáme krok $\gamma - \gamma = 0$:

$$\sum_j \left\lfloor \sum_i u_i a_{ij} \right\rfloor x_j + \sum_j \underbrace{\left(\sum_i u_i a_{ij} - \left\lfloor \sum_i u_i a_{ij} \right\rfloor \right)}_{\geq 0} x_j \leq u^T b$$

$$\Rightarrow \sum_j \left\lfloor \sum_i u_i a_{ij} \right\rfloor x_j \leq u^T b$$

→ pokudž když x je řešení IP je celočíselné, tak

$$\sum_j \left\lfloor \sum_i u_i a_{ij} \right\rfloor x_j \leq u^T b \rightarrow \text{takto je Ch-G cutting p.}$$

Príklad:

$$\max 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t. } 7x_1 + x_2 \leq 28$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 7 \quad x_1, x_2 \geq 0$$

$$-8x_1 - 9x_2 \leq -32 \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

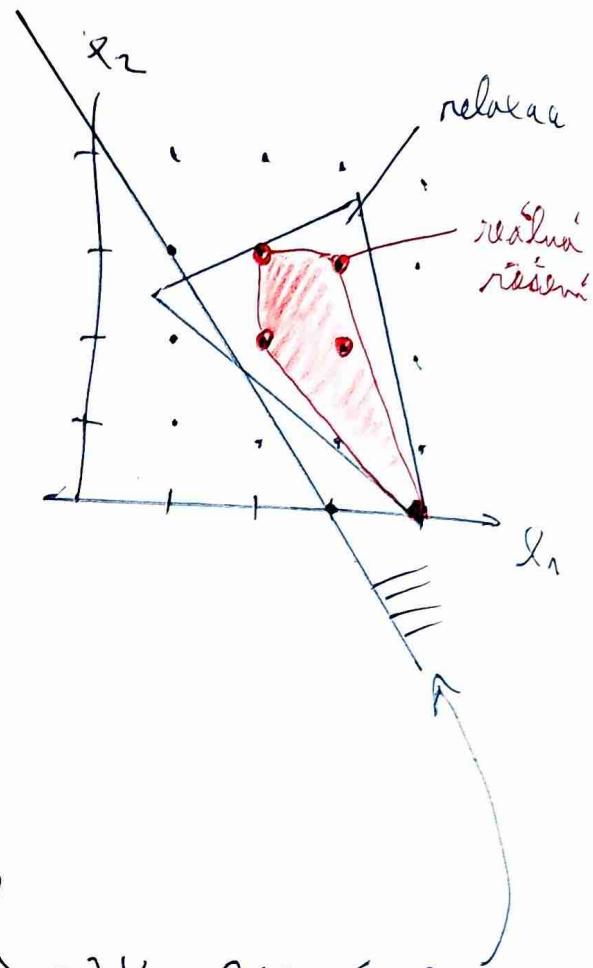
$$\rightarrow \text{moba } u = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

$$\hookrightarrow \sum_j \left[\sum_i u_i a_{ij} \right] x_j \leq u^T b$$

$$x_1: \left\lfloor 0 \cdot 7 - \frac{1}{3} \cdot 8 \right\rfloor = \left\lfloor -\frac{9}{3} \right\rfloor = -3$$

$$x_2: \left\lfloor 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \right\rfloor = \left\lfloor -2 \right\rfloor = -2$$

$$u^T b = \left\lfloor \frac{7}{3} - \frac{32}{3} \right\rfloor = \left\lfloor -\frac{25}{3} \right\rfloor = -9$$



Edmondsky metodou pro matching folgující zprávou
Chvátal-Gomory cutting planes

Matroids

- topisají někdo na Slov' fungují greedy algoritmus

Def: Independence system is (E, I) , where $I \subseteq P(E)$ splitting elements \uparrow independent set

i) $\emptyset \in I$

ii) $Y \in I \wedge X \subseteq Y \Rightarrow X \in I$

Príklad: $E = \{1, 2, 3\}$

$$I = \{\emptyset, \overbrace{\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}}^{\text{elements}}, \{1, 2, 3\}\}$$

Def: (E, I) is a Matroid \Leftrightarrow splitting exchange axiom

$$X, Y \in I \wedge |X| < |Y| \Rightarrow \exists e \in Y \setminus X : X \cup \{e\} \in I.$$

$$\{1, 2\}, \{a, b, c\} \in I \Rightarrow \{1, 2, a\} \in I \vee \{1, 2, b\} \in I \vee \{1, 2, c\} \in I$$

Príklad: $G = (V, E)$ je graf, $\mathcal{F} := \{F \mid F \text{ je les nebo G}\}$

$\rightarrow (E, \mathcal{F})$ je graphic matroid of G

i) \emptyset je les

ii) odstraněním hrany e lesa dostane les

iii) ze množiny lesů máme sirotce mezi kružnicemi kruhu a všechny lesy

Lemma: Nechť X, Y jsou lesy nebo G a. s. $|X| < |Y|$, pak $\exists e \in Y \setminus X$
a. s. $X \cup \{e\}$ je les.

Dr:  show: $|Tree| = |V| - 1$ $\rightarrow C(F) := \# \text{stromů}$
les: $|F| = |V| - \# \text{stromů}$

$$\hookrightarrow \text{důsledek: } |X| < |Y| \Rightarrow C(Y) < C(X)$$

\rightarrow čai mají kruhy $\approx Y$, což znamená dva stromy $\approx X$

\hookrightarrow sedmibokový kruh $\not\models$, sedmibokový kruh $\approx Y$ kruh $\approx X$ kruh $\approx Y$

\rightarrow kruh $\approx X$ má méně větví $\approx Y \Rightarrow C(Y) \geq C(X) \not\models$

• Greedy algorithms vs. Matroids

Def.: Bro matroid $M = (E, \mathcal{I})$ definuje funkce $r_M: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{R}$

↳ rank function of M

$$x \mapsto \max_{\substack{Y \subseteq X \\ Y \in \mathcal{I}}} |Y|$$

→ $r_M(E)$ is rank of M

→ největší množina maximálního báru

↳ $X \in \mathcal{I}$ je base $\Leftrightarrow |X| = r_M(E)$

Problem: Dostaneme matroid $M = (E, \mathcal{I})$ a weight-func $w: E \rightarrow \mathbb{R}$

Najdi báru s maximálním váhou.

(1) Počud jsou ráhy 1: máloha = najdi nejlepšou báru

řešení: dle exchange axiom a iii) máloha greedily

→ když jde o jeden ts pohrom, přidávám do množiny

→ pokud $e \in E$ je v nejlepší $i \in \mathcal{I}$, tak ze iii) je $\{e\} \in \mathcal{I}$,

abecd At pomoč exchange axiom máloha přidat do své báre

(2) ráhy nejsou máloha → hledy bce greedy

Q: $S_0 := \emptyset$ přidávám bladné elementy $x \in E \rightarrow$

$U := E(M)$ ← universum

1. while ($U \neq \emptyset$)

2. vyber $e \in U$ → nejlepší ráhon

3. pokud $S \cup \{e\} \in \mathcal{I}$:

$$S \leftarrow S \cup \{e\}$$

$$4. \quad U \leftarrow U \setminus \{e\}$$

Věta: Algoritmus je kvadratický: Prost $\forall i = 1, \dots, r_M(E)$ najde nejlepší ráhon.

→ dle gly pro nejlepší k možel $S_k = \{s_1, \dots, s_k\}$, $w(s_1) \geq \dots \geq w(s_k)$,
žež už nemá nejlepší ráhon. Nejdřív je nejméně dobré.

$T = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ je lepší, ale $w(T \setminus \{s_i\}) \leq w(\{s_1, \dots, s_{k-1}\})$

⇒ musí být $w(s_i) > w(s_k) \Rightarrow s_i je jeho přidat do S_k pro $\# s_i \Rightarrow T = S_k \cup \{s_i\}$$

Vielm: Nachs. (E, \mathcal{I}) je indefektive system. Punkt für
nichig nähme' für $w: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit' greedy alg.
max-weight independence set, pkt (E, \mathcal{I}) je matroid.

Rücksicht: (E, \mathcal{I}) je matroid \Leftrightarrow Nam fasse greedy alg.

Bsp: Nachs. $X, Y \in \mathcal{I}$, $|X| < |Y|$ s.t. $\forall e \in Y \setminus X: X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$.

\rightarrow dojdene se spom

$$\Rightarrow \text{definjene } w(e) := \begin{cases} 1 + \epsilon & , e \in X \\ 1 & , e \in Y \setminus X \\ 0 & , \text{other} \end{cases}$$

\rightarrow greedy alg. myde $X' \supseteq X$, pustie folg z X von mydizsin'
 $X' = X \cup \underset{\text{only}}{\downarrow} \text{other} \rightarrow X' \cap (Y \setminus X) = \emptyset$

\rightarrow problem: Es dat mat' alg. Y fahr Aisin' nei X' □

Rank properties

$$1) \quad 0 \leq r(X) \leq |X| , \forall X \subseteq E$$

$$2) \quad X \subseteq Y \Rightarrow r(X) \leq r(Y)$$

3) submodularis:

$$r(X \cup Y) - \leq r(X) + r(Y) - r(X \cap Y)$$

① n peráren
 m obochodní

perána príd. \bar{p}_i
 obochod príd. \bar{o}_j

period $\bar{p}_i \rightarrow o_j$ at c_{ij}

a) proměnné: pro $i \in [n], j \in [m]$: $\lambda_{ij} \in \mathbb{N}_0$... # rohliků transport $\bar{p}_i \rightarrow \bar{o}_j$

úč. fce: $\min \sum_{i \in [n]} \sum_{j \in [m]} \lambda_{ij} \cdot c_{ij}$ $\hookrightarrow \mathbb{Z}$ & $\lambda_{ij} \geq 0$

podmínky:

1) pro $\forall i \in [n]$: $\sum_{j \in [m]} \lambda_{ij} = p_i$... perána se všechno zavádí

2) pro $\forall j \in [m]$: $\sum_{i \in [n]} \lambda_{ij} = o_j$... obochod vše prodává

b) navíc logická λ_{ij}

proměnné: $\lambda_{ij} \in \mathbb{N}_0$, $I_{ij} \in \{0, 1\}$... indikátory přepravy / nepřepravy

úč. fce: $\min \sum_i \sum_j (\lambda_{ij} \cdot c_{ij} + I_{ij} \cdot l_{ij})$

podmínky: 1) & 2) stejné

$$3) I_{ij} \geq \left(\frac{\lambda_{ij}}{p_i} \right) \Leftrightarrow I_{ij} - \frac{1}{p_i} \lambda_{ij} \geq 0$$

② Grafy $G = (V, E)$, $H = (W, F)$ jsou izomorfní \Leftrightarrow

\exists permutace $\pi: V \rightarrow W$ s.r. $uv \in E \Leftrightarrow \pi(u)\pi(v) \in F$.

Tvrdíme: G, H jsou izomorfní $\Leftrightarrow \exists$ permutaci matic P a.r. $AP = PB$,
 kde A, B jsou matici sousednosti grafů G, H.

Dk: Označme π permutaci odpovídající matici P.

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \dots ij \in E \\ 0 & \dots jinak \end{cases}$$

$$(AP)_{i\pi(j)} = \begin{cases} 1 & \dots ij \in E \\ 0 & \dots jinak \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (P^{-1}AP)_{\pi(i)\pi(j)} &= \begin{cases} 1 & \dots ij \in E \\ 0 & \dots jinak \end{cases} \\ B_{\pi(i)\pi(j)} &= \begin{cases} 1 & \dots \pi(i)\pi(j) \in F \\ 0 & \dots jinak \end{cases} \end{aligned} \quad \begin{aligned} P^{-1}AP = B &\Leftrightarrow (ij \in E \Leftrightarrow \pi(i)\pi(j) \in F) \\ \Leftrightarrow G, H \text{ jsou izomorfní}. & \end{aligned}$$

Lineární program:

proměnné: $\forall i, j \in [n]: p_{ij} \in \{0, 1\}$

úč. fce: $\min 0$

podmínky: $\forall i: \sum_j p_{ij} = 1$

$\forall j: \sum_i p_{ij} = 1$

Aby to byla form. matici

$$AP = PB$$

$$\begin{aligned} \forall i: \sum_{j=1}^m A_{ij} p_{ij} &= \sum_{j=1}^m B_{ij} \\ \forall i: \sum_{j=1}^m A_{ij} p_{ij} &= \sum_{j=1}^m B_{ij} \end{aligned}$$

Lin. prg. - nárol 2

① Def: M je konvexní $\Leftrightarrow \forall x, y \in M: \lambda x + (1-\lambda)y \in M, \lambda \in [0, 1]$

Def: Konvexní kombinace bodů x_1, \dots, x_m je libovolná

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m, \sum \lambda_i = 1, \forall i: \lambda_i \geq 0.$$

Intu: M je konvexní $\Leftrightarrow M$ obsahuje všechny konv. komb. svých bodů.

Def: \Leftrightarrow definice ... $\lambda x + (1-\lambda)y$ je konvexní kombinace

\Rightarrow Indukč. Pro $m=1$ je triviálně platí $m=2$ je dáné konvexiton M . Předpokládejme, že je platí pro nějaké $m \geq 2$.

Nechť $x_1, \dots, x_{m+1} \in M, \lambda_1, \dots, \lambda_{m+1} \geq 0, \sum \lambda_i = 1$

$$X = \sum_i \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i + \lambda_{m+1} x_{m+1} = \underbrace{\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda_{m+1}}}_{\lambda} x_i + \lambda_{m+1} x_{m+1}$$

$$\Rightarrow \text{označme } \alpha := \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda_{m+1}} = 1 - \lambda_{m+1}$$

$$\Rightarrow \text{protože } \sum_{i=1}^m \frac{1}{\alpha} \lambda_i = 1, \text{ tak } Y \in M \dots \text{ t.j.}$$

$$\Rightarrow X = \alpha Y + \lambda_{m+1} x_{m+1} = (1 - \lambda_{m+1}) Y + \lambda_{m+1} x_{m+1} \in M$$

② $v = (1, 1, 1)$

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Def: Dle $v \in \mathbb{R}^d$ je vektor b posloupností

$$P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid Ax \leq b\} \equiv \exists c \in \mathbb{R}^d, \lambda \in \mathbb{R} \text{ s.d.}$$

$$c^T v = 1 \quad \& \quad \forall x \in P: c^T x \leq 1.$$

\Rightarrow první lin. ner. fas. soudí o dim. ≤ 1

\Rightarrow můžeme splnit 3 lin. ner. rovnou a třetí poslední nerovnost

I, II, IV jsou s rovností, ale nejsou lin. ner.

III je s nerovností \Rightarrow v něm' vrchol, ale $v \in P$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -10 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{I: } -6 = -6$$

$$\text{II: } 4 \leq 5$$

$$\text{IV: } -7 = -7$$

$$\text{V: } 6 = 6$$

I a IV nejsou lin. ner.

\Rightarrow nem' k vechol

$$c) \text{ max } 3x_1 + 2x_2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 18$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 42 \Rightarrow$$

$$3x_1 + x_2 \leq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$S_1 = 18 - 2x_1 - x_2$$

$$\Rightarrow S_2 = 42 - 2x_1 - 3x_2 \xrightarrow{x_1} \xrightarrow{S_3} S_3 = 24 - 3x_1 - x_2$$

$$\underline{Z = 3x_1 + 2x_2}$$

$$x_2 = 12 + \dots$$

$$\xrightarrow{S_3} S_3 = 3 - \frac{1}{3}S_2 + \frac{2}{3}S_1$$

$$\xrightarrow{S_2} x_1 = 3 + \dots$$

$$\underline{Z = 33 - \frac{1}{3}S_2 - \frac{5}{3}S_1}$$

$$2x_1 + x_2 + S_1 \leq 18$$

$$2x_1 + 3x_2 + S_2 = 42$$

$$3x_1 + x_2 + S_3 = 24$$

$$x_1, x_2, S_i \geq 0$$

$$S_1 = 2 + \frac{2}{3}S_3 - \frac{1}{3}x_2$$

$$S_2 = 12 - 4S_3 + \frac{2}{3}x_2$$

$$\underline{x_1 = 3 - \frac{1}{3}S_3 - \frac{1}{3}x_2}$$

$$\underline{Z = 33 - S_3 + x_2}$$

$$26 - \frac{2}{3}S_1 - 2$$

$$x_2 = 6 + 2S_3 - 3S_1$$

$$\xrightarrow{x_2} S_2 = 12 - 4S_3 + \frac{2}{3}S_1$$

$$\xrightarrow{S_1} x_1 = 6 - S_3 + S_1$$

$$\underline{Z = 33 - S_3 - 3S_1}$$

$$x^* = (3, 12, 0, 0, 3)$$

$$C^T x^* = 33$$

Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 4. cvičení*

18. března 2024

1 Základní pojmy z geometrie

1.1 Afinita

Afinitní prostor $A \subseteq \mathbb{R}^d$ má tvar $L + \mathbf{v}$ pro nějaký lineární prostor L a vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$. Afinitní prostor jde určit pomocí soustavy rovnic $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Dimenze afinitního prostoru A je rovna dimenzi jeho přidruženého lineárního prostoru L . Afinní kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^d$ je vektor $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i$, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ a $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Množina $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je *afinně nezávislá*, pokud platí, že žádný vektor $\mathbf{v} \in V$ není affinní kombinací ostatních vektorů z V . Afinní obal $af(V)$ množiny vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je množina všech affiných kombinací jakékoli konečné podmnožiny vektorů z V .

Příklad 1. Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^d$ je affinní prostor. Z definice je pak A tvaru $A = L + \mathbf{v}$ pro nějaký lineární prostor L a nějaký vektor \mathbf{v} . Dokažte, že pro dané $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ existuje nanejvýš jeden lineární prostor $L \subseteq \mathbb{R}^d$ takový, že $A = L + \mathbf{v}$.

(*) Charakterizujte všechny vektory \mathbf{v} , které posunou lineární prostor L na affinní prostor A .

1.2 Nadroviny

Nadrovina je libovolný affinní prostor v \mathbb{R}^d dimenze $d - 1$. V rovině nadroviny odpovídají přímkám a v \mathbb{R}^3 zase rovinám. Nadrovinu lze zapsat jako $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = h\}$ pro $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$ a $h \in \mathbb{R}$. Nadrovina rozděluje prostor \mathbb{R}^d na dva *poloprostory*. Nadrovinu samotnou počítáme jako součást obou poloprostorů.

Příklad 2. (a) Mohou se v \mathbb{R}^4 dvě roviny protínat v jednom bodě? Jak mohou vypadat průniky dvou rovin v \mathbb{R}^4 ? ANO

(b) Mohou se v \mathbb{R}^5 dva affinní prostory dimenze 3 protínat v jednom bodě? NE

1.3 Konvexita

Množina $K \subseteq \mathbb{R}^d$ je *konvexní*, pokud pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ a $t \in [0, 1]$ platí $t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \in K$. Jinak řečeno, každá úsečka se dvěma konci v K je celá v K . Vektor \mathbf{x} je *konvexní kombinací* vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, pokud $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i$, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$ splňují $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Množina $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je v *konvexní poloze* (neboli *konvexně nezávislá*), pokud platí, že žádný vektor $v \in V$ není konvexní kombinací ostatních vektorů z V . Konvexní obal $conv(V)$ množiny vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je množina konvexních kombinací jakékoli konečné podmnožiny vektorů z V .

Příklad 3. Víme, že v \mathbb{R}^d je maximálně d lineárně nezávislých vektorů a maximálně $d + 1$ affinně nezávislých vektorů. Kolik nejvýše je v \mathbb{R}^d konvexně nezávislých vektorů?

1.4 Mnohostény

Konvexní mnohostěn je průnikem konečně mnoha poloprostorů. Alternativně je konvexním mnohostěnem libovolná množina bodů tvaru $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ pro nějakou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Nechť P je konvexní mnohostěn a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}$. Jestliže pro každé $\mathbf{x} \in P$ platí $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq t$ a zároveň existuje $\mathbf{x} \in P : \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = t$, pak množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = t\}$ tvoří *tečnou nadrovinu* H mnohostěnu P . Průniky tečných nadrovin s mnohostěnem P pak nazýváme *stěnami* mnohostěnu P . K nim také započítáváme dvě *nevlastní stěny* \emptyset a P . Stěny dimenzi 0, 1 a $d - 1$ nazýváme *vrcholy*, *hrany* a *fasy*. Konvexní mnohostěn je *omezený*, pokud je obsažený v kouli s konečně velkým poloměrem.

*Informace o cvičení najeznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

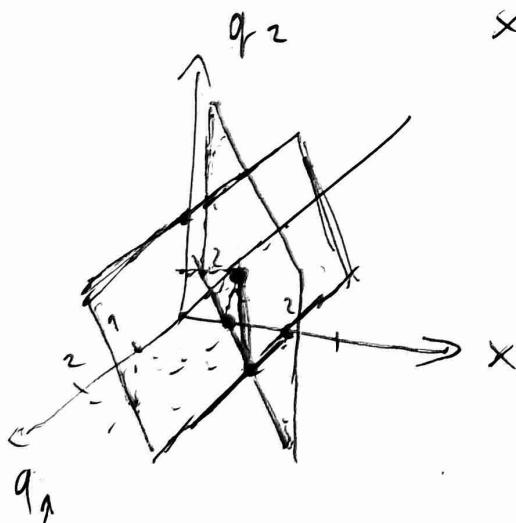
Příklad 4. Jaký je počet stěn krychle a osmistěnu v \mathbb{R}^3 ?

Příklad 5. Mějme mnohostěn $P = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 1 \& x \leq 2\}$. Převeďte zápis jeho dvou nerovnicových podmínek do rovnicového tvaru a nakreslete mnohostěn z rovnicového tvaru (jeho prostoru vzroste dimenze).

Příklad 6. Nechť P je konvexní mnohostěn v \mathbb{R}^d a nechť F a G jsou jeho stěny. Dokažte, že $F \cap G$ je stěnou P .

Přesněji $F = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d: \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \alpha\}$ a $G = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d: \mathbf{b}^\top \mathbf{x} = \beta\}$, kde platí $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq \alpha$ a $\mathbf{b}^\top \mathbf{x} \leq \beta$ pro každé $\mathbf{x} \in P$. Uveďte formuli, která stěnu $F \cap G$ určuje.

(5)



P v rovinném tvare

$$x \geq 1 \rightsquigarrow x - q_1 = 1$$

$$x, q_1, q_2 \geq 0$$

$$x \leq 2 \rightsquigarrow x + q_2 = 2$$

$(1, -1, 0) \rightarrow$ rovine

přímky $(1, 0, 1), (2, 1, 0)$

přímka = vee hull

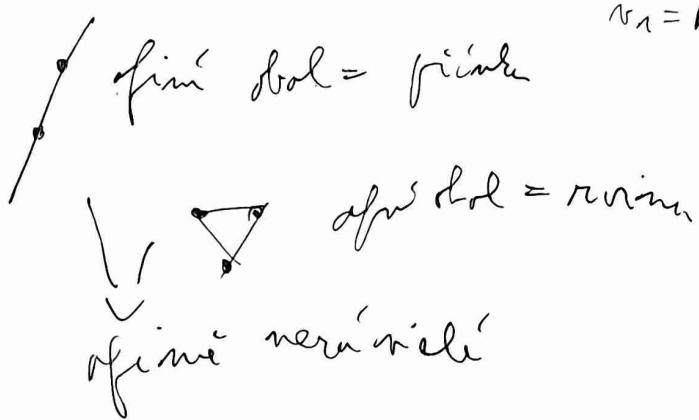
\rightarrow přímá $A+$ je úsečka a přímá $1 \leq x \leq 2$

LINEARNI PRG

Affine Linie:

$$\Rightarrow v \in \mathbb{R}^d \text{ a } d+1$$

af. ver. bodí



$$v_1 = \alpha v_2 + \beta v_3$$

(1) $A = L + v$. Tvrz: pro $\forall v \in \mathbb{R}^d \exists$ nejed. L a.ř. $A = L + v$

Dc: $A = \{u + v \mid u \in L\} = \{u' + v \mid u' \in L'\}$, $L, L' \subseteq \mathbb{R}^d$

→ char. vlastnost $L = L'$, staci $L \subseteq L'$ + symetrie

$$L \subseteq L' \quad (\Leftrightarrow \forall u \in L: u \in L')$$

Nechť $m \in L$. Potom $w := u + v \in A$, tedy $\exists u' \in L': w = u' + v$

$$\text{tj. } u + v = u' + v \Leftrightarrow u = u', \text{ tedy } u \in L'.$$

(*) Charakterizace vektoru v a.ř. $L + v = A$. (nějaký jednoduché)

Tvrz: Pokud $A = L + v$, potom pro $\forall w \in A$ je $A = L + w$.

Dc: nechme a rozližit nejedny vektory $v \in A$ a.ř. $A = L + v$.

$$A = \{u + v \mid u \in L\}. \text{ Char. vlastnost, tj.}$$

$$\forall u \in L: A = L + u + v \Leftrightarrow \{u' + v \mid u' \in L\} = \{u' + u + v \mid u' \in L\}.$$

Prosteje $u' \in L \wedge u \in L$, tak $u' + u \in L$. Dále maximální vlastnost, tj.

pro $\forall u'' \in L \exists u' \in L$ a.ř. $u' + u = u''$. Staci $u' := u'' - u \in L$.

Tvrz: Není to jen průsečík všech $v \in A$.

Dc: Pokud $A = L + v$, potom $v \in A$. Ale to je jisté, protože $0 \in L$.

② \mathbb{R}^d : Nadřízené je $\{x \in \mathbb{R}^d : Cx = h\}$... affine polynomy dimenze $d-1$.

a) primitiv modravina v \mathbb{R}^4

$$\{x \in \mathbb{R}^4 \mid C_1^T x = h_1\} \cap \{x \in \mathbb{R}^4 \mid C_2^T x = h_2\} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid C_1^T x = h_1 \text{ & } C_2^T x = h_2\}$$

$$\begin{array}{l} C_1^T x = h_1 \\ C_2^T x = h_2 \end{array}$$

$$2 \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

1) nema řešení min

2) kernel má dimenzi 2 \Rightarrow rovina
jednak dim 2

b) \mathbb{R}^5 dva af. f. dim

\Rightarrow některý řešení

$$4 \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

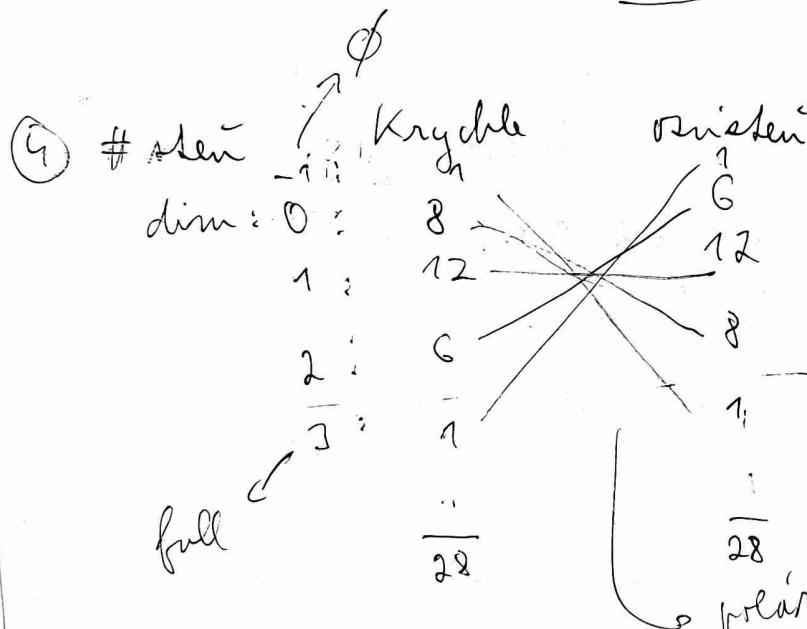
1) nema řešení min

2) kernel má dimenzi 1 \Rightarrow řešení
dim 1, 2, 3

c) primitiv rovina (dim 2) v \mathbb{R}^4

4 řešení v neřešení \Rightarrow 1 bod, řešení, mina
jednak

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$



rohový
hrany
fasety

③ konvexní množiny: když myjsou konvexe ner. body \mathbb{R}^d , $d \geq 2$

$$K = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2 = 1\} \rightarrow \text{sfera}$$

nekonvexní



Nechť $m \in \mathbb{N}$. Tedy m řešení konvexe ner. body

\rightarrow stacionární nejtěsnější m body $a_1, \dots, a_m \in K$

Pro spor. Nechť $x \notin K$ & $x \in \text{ball}(a_1, \dots, a_m)$... x nemá konvexe ner.

BUNO: $x = (1, 0, 0, \dots, 0)$. Když ne, tak sú sféra prototyp aby se x robustná

$$x = \sum d_i a_i \Rightarrow x_1 = \sum d_i a_{1i} \dots \text{protože } x = e^1, \text{ tak } a_{1i} < 1 \Leftrightarrow a_{1i} + \varepsilon \leq 1$$

$$d_1, \dots, d_m \in [0, 1]$$

$$\Leftrightarrow (1 - \varepsilon) \sum d_i = 1 - \varepsilon \Rightarrow 1 \leq 1 - \varepsilon, \varepsilon > 0 \quad \square$$

$$\sum d_i = 1$$

Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 5. cvičení*

25. března 2024

1 Mnohostěny

Množina $K \subseteq \mathbb{R}^d$ je *konvexní*, pokud pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ a $t \in [0, 1]$ platí $t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \in K$. Jinak řečeno, každá úsečka se dvěma konci v K je celá v K . *Konvexní mnohostěn* je průnikem konečné mnoha poloprostorů. Alternativně je konvexním mnohostěnem libovolná množina bodů tvaru $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ pro nějakou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Nechť P je konvexní mnohostěn a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}$. Jestliže pro každé $\mathbf{x} \in P$ platí $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq t$ a zároveň existuje $\mathbf{x} \in P : \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = t$, pak množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = t\}$ tvoří *tečnou nadrovinu* H mnohostěnu P . Průniky tečných nadrovin s mnohostěnem P pak nazýváme *stěny* mnohostěnu P . K nim také započítáváme dvě *nevlastní stěny* \emptyset a P . Stěny dimenzí 0, 1 a $d - 1$ nazýváme *vrcholy*, *hrany* a *fasety*.

Příklad 1. Dokažte, že množina všech optimálních řešení lineárního programu $\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ za podmínek $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, kde $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, je konvexní množina. *Nebude vlastní, je optimální jen když má vlastní*
Příklad 2. Mějme mnohostěn $P \subseteq \mathbb{R}^3$ určený množinou vrcholů $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = \text{optimum}$

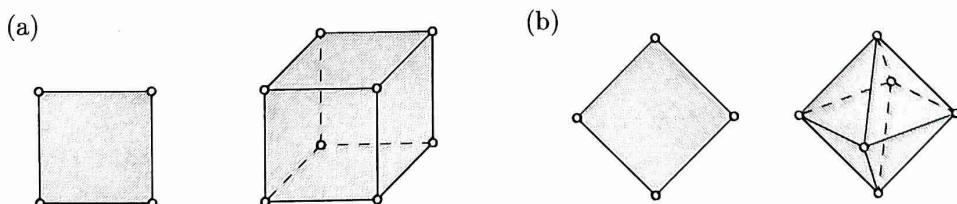
$$\mathbf{a} = (2, 1, 6), \quad \mathbf{b} = (0, -5, 0), \quad \mathbf{c} = (-2, 2, -1), \quad \mathbf{d} = (0, -4, 0), \quad \mathbf{e} = (0, 1, 1).$$

Pro každou z následujících rovin určete, zda je vůči P tečná, sečná či mimoběžná. Pro tečné roviny určete dimenze příslušné stěny.

- (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 5x + 3y - 2z = 1\}$,
- (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 2\}$,
- (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + z = 0\}$.

Příklad 3. Počty stěn pro známé mnohostěny v \mathbb{R}^d , kde $d \in \mathbb{N}$.

- (a) Jaký je počet vrcholů a faset d -dimenzionální krychle $[0, 1]^d$?
- (b) Jaký je počet vrcholů a faset d -dimenzionálního křížového mnohostěnu (neboli zobecněného osmistěnu)
 $\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots + |x_d| \leq 1\}$?



Obrázek 1: Příklady (a) d -dimenzionální krychle a (b) d -dimenzionálního křížového mnohostěnu pro $d = 2, 3$.

Příklad 4. Nalezněte všechny vrcholy mnohostěnu zadaného následujícími nerovnostmi a zdůvodněte, že jiné vrcholy neexistují:

$$\begin{aligned} x + y + z &\leq 3, \\ y + 2z &\leq 2, \\ x, y, z &\geq 0. \end{aligned}$$

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

Příklad 5. Nechť P je konvexní mnohostěn v \mathbb{R}^d a nechť F a G jsou jeho stěny. Dokažte, že $F \cap G$ je stěnou P .

Přesněji $F = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \alpha\}$ a $G = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{b}^\top \mathbf{x} = \beta\}$, kde platí $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq \alpha$ a $\mathbf{b}^\top \mathbf{x} \leq \beta$ pro každé $\mathbf{x} \in P$. Uveděte formuli, která stěnu $F \cap G$ určuje.

(4) d)

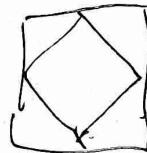
$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid |x_1| + |x_2| + \dots + |x_d| \leq 1 \right\}$$

$$= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \sum_i \epsilon_i x_i \leq 1 \right\} = H(\epsilon_1, \dots, \epsilon_d), \quad \epsilon_1, \dots, \epsilon_d \in \{-1, 1\}$$

↳ 1 sa weigini modulári

$$\Rightarrow P = \bigcap_{\epsilon \in \{-1, 1\}^d} H(\epsilon) \quad \Rightarrow 2^d weigini modulári$$

⇒ mělo by nám zajít
2^d foret & 2^d vrcholů



→ vrcholy \leftrightarrow foret
vrcholů mohou být
→ lokalita fálorita

• $\geq 2^d$ foret

\Rightarrow mějme $H(\epsilon_1, \dots, \epsilon_d)$ → maximální množství dle affine verz. bodů
což je $\epsilon_1, \dots, \epsilon_d$

$$\rightarrow \forall i \in \{1, \dots, d\} \quad \epsilon_i C_i = (0, \dots, \epsilon_i)$$

↳ paralelní vektory lze kombinovat a $+$, $-$ podle známky ϵ_i

• Vrcholy $(0, \dots, 0 \pm 1, 0, \dots, 0)$

→ musel bych ale vědět,
že hodlám vrchol, včetně jeho
tak všechny vrcholy

Linear Proj = Morphism

$$A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \underbrace{\lambda Ax_1}_{\leq b} + (1-\lambda) \underbrace{Ax_2}_{\leq b}$$

① LP: $Ax \leq b$ \rightarrow ... max, $C^T X$

$\rightarrow \{x \in \mathbb{R}^m \mid x \text{ je Optimum}\}$ je Lokaum

→ vermutl. für: $A_b + (1-A)b = b$ ✓

$\Rightarrow x_1, x_2$ optima $C^T x_1 = C^T x_2 = R$

$$C^T(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda C^T x_1 + (1-\lambda) C^T x_2 = \lambda R + (1-\lambda)R = R$$

(3) d -dim boxche ji $[0, 1]^d$

a) \hookrightarrow chia we show $\{x \in \mathbb{R}^d \mid Ax \leq b\}$

$$f_i: x_i \geq 0 \quad x_i \leq 1$$

$$\{ -x_i \leq 0$$

$$d=2$$

1		1
	1	1
-1		0
	-1	0

\rightarrow stejněj $P \cap \{x \in \mathbb{R}^d : c^T x = 1\}$, kde $\nexists x \in P : c^T x \leq 1$

$$\Rightarrow \left(\forall x \right) \left(A_x \leq g \Rightarrow c^T x \leq 1 \right)$$

Fasety: Naujys \neq mynich modrini = 2d

→ Anwendung: je sich präzise Id

- *Fusiformia nodorum* obsoleta d'apprécier relativement facile et hyperépigae

$$x_1 = 1 \Rightarrow (1, 0, \dots, 0)$$

Uffini' dov' ma' dim. d-

→ wangi faseln

→ Krichely: 2^d

$\geq 2^d$: $\beta \text{ doby } \mathbb{R} \{0,1\}^d \rightarrow$ kódov primitiv d leib
mijigach modrovim

$\leq 2^d$: Viele Lern- oder Präsentationen sind ähnlich voneinander,
aber für die Lern- oder Präsentationsziele sind sie davon

→ *ordemich frisch*, *ordensh*

⇒ je so steina

→ foliatogene re primil nodovin shiruyi dimensi

- ② mohletek s nebody --- finsky s rumin
 $a = (2, 1, 6) \quad b = (0, -5, 0) \quad c = (-2, 2, -1) \quad d = (6, -9, 0) \quad e = (0, 1, 1)$
- $a \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + 3y - 2z = 1\}$
- dvojne body: $a: 1=1 \dots a \in \text{rumin}$
 $b: -15 \leq 1 \dots b \not\in \text{fod rumin}$
 $c, d \not\in \text{fod rumin}$
 $e \not\in \text{na rumin}$
- $\left. \begin{array}{l} \text{fod rumin} \\ 2 \text{ body} \\ \text{dim } 1 \end{array} \right\}$
- b) $x+y-z=2$: všechno hod \Rightarrow je množství rumin
c) $3x+z=0$: něco hod, něco fud \Rightarrow sečná rumin

④ Verbalní mohletek

$$\begin{aligned} x+y+z &\leq 3 \\ y+2z &\leq 2 \\ x, y, z &\geq 0 \end{aligned}$$

$(0, 0, 0)$
 $(0, 0, 1)$ nový rumin $\rightarrow (0, 0, 1)$ je

$(0, 2, 0)$

$(1, 0, 0)$

$(1, 1, 0), (2, 0, 1)$

Verbal: split xpon \rightarrow novosti a novostí
& split všechny novosti
 $\binom{5}{3}$ kombinace

Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 6. cvičení*

8. dubna 2024

1 Simplexová metoda

Úloha lineárního programování v rovnicovém tvaru je zapsaná jako $\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ za podmínek $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Předpokládejme, že $\text{rank}(A) = m$.

Báze je množinou $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ indexů proměnných takovou, že A_B je regulární, kde A_B značí podmatice A indexovanou sloupce z B . Bázickým řešením $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ odpovídající bázi B je řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, pro které platí $x_i = 0$ pro každé $i \notin B$. Přípustná báze je taková, že jí odpovídající bázické řešení \mathbf{x} je přípustné, tedy $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Vzorový řešený příklad:

$$\begin{aligned} & \max 2x_1 + x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Upravíme na rovnicový tvar zavedením nových proměnných $s_1, s_2, s_3 \geq 0$:

$$\begin{aligned} & \max 2x_1 + x_2 \\ & -x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 + s_2 = 3 \\ & x_2 + s_3 = 2 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Začneme v nějakém přípustném bázickém řešení. Zde lze zvolit původní proměnné $x_1 = x_2 = 0$ a $(s_1, s_2, s_3) = \mathbf{b}^\top = (1, 3, 2)$. Pak přepíšeme soustavu tak, aby bázické proměnné s_1, s_2, s_3 byly na levé straně:

$$\begin{aligned} & \max 2x_1 + x_2 \\ & s_1 = 1 + x_1 - x_2 \\ & s_2 = 3 - x_1 \\ & s_3 = 2 - x_2 \end{aligned}$$

Vstoupíme x_1 do báze, protože má nejvyšší kladný koeficient v účelové funkci, a vystoupíme s_2 :

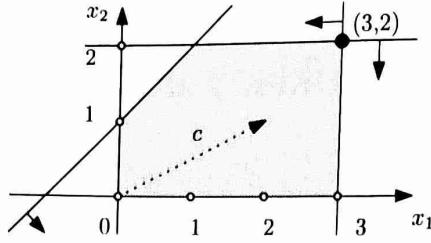
$$\begin{aligned} & \max 6 + x_2 - 2s_2 \\ & s_1 = 4 - x_2 - s_2 \\ & x_1 = 3 - s_2 \\ & s_3 = 2 - x_2 \end{aligned}$$

Vstoupíme x_2 do báze, protože má nejvyšší kladný koeficient v účelové funkci, a vystoupíme s_3 :

$$\begin{aligned} & \max 8 - 2s_2 - s_3 \\ & s_1 = 2 - s_2 + s_3 \\ & x_1 = 3 - s_2 \\ & x_2 = 2 - s_3 \end{aligned}$$

Není, co zlepšovat, takže máme optimum pro $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $s_1 = 2$ a $s_2 = s_3 = 0$ s hodnotou účelové funkce 8.

*Informace o cvičení najeznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>



Obrázek 1: Uvedené řešení odpovídá posunu z počátku do vrcholu $(3, 0)$ a poté do $(3, 2)$.

Pseudokód simplexové metody:

1. *Vstup:* Úloha lineárního programování P v rovnicovém tvaru, $\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ za podmínek $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Předpokládáme, že $\text{rank}(A) = m$.
2. *Nalezni počáteční bázické přípustné řešení:* Přenásob soustavu, aby $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, a vyřeš simplexovou metodou pomocnou úlohu $\max -x_{n+1} - \dots - x_{n+m}$ za $\bar{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$, $\bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$, kde $\bar{A} = (A \mid I_m) \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$ a $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_{n+m})$. Tato úloha má snadné počáteční řešení $(0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m)$. Pokud je optimální hodnota záporná, pak **skonči**, protože neexistuje přípustné řešení pro P . Jinak je optimem $(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ a pak je (x_1, \dots, x_n) počátečním řešením pro P .
3. *Spočítej simplexovou tabulku:* Pro přípustnou bázi $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ přepiš P na $\max z$ pro

$$\begin{aligned} z &= z_0 + \mathbf{r}^\top \mathbf{x}_N \text{ za podmínek} \\ \mathbf{x}_B &= \mathbf{p} + Q\mathbf{x}_N, \end{aligned}$$

kde $N = \{1, \dots, n\} \setminus B$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$, $Q \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $z_0 \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{n-m}$.

4. *Vrať případné optimum:* Pokud $\mathbf{r} \leq \mathbf{0}$, tak **skonči** a vrať optimum s bázickými proměnnými $\mathbf{x}_B = \mathbf{p}$ a nebázickými proměnnými $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$.
5. *Vyber proměnnou vstupující do báze:* Podle zvoleného pivotovacího pravidla vyber vstupující proměnnou x_t z proměnných x_j s $j \in N$ a $r_j > 0$. Protože není $\mathbf{r} \leq \mathbf{0}$, tak vstupující proměnná x_t vždy existuje. Volbou x_t chceme zvýšit hodnotu účelové funkce.
6. *Vyber proměnnou vystupující z báze:* Uvaž řádky i simplexové tabulky, ve kterých se x_t objevuje, a vyber z nich vystupující proměnnou x_s tak, aby $\frac{-p_s}{Q_{s,t}} = \min_{i \in B: Q_{i,t} < 0} \frac{-p_i}{Q_{i,t}}$. Speciálně tedy musí platit $Q_{s,t} < 0$. Tato volba x_s zajišťuje, že nové bázické řešení je přípustné. Pokud vystupující proměnná neexistuje (t -tý sloupec Q je nezáporný), pak **skonči**, protože úloha P je neomezená. Je-li na výběr více vystupujících proměnných, tak vyber podle pivotovacího pravidla, či libovolně, pokud pravidlo ani tak vystupující proměnnou nespecifikuje.
7. *Aktualizuj simplexovou tabulku a iteruj:* Zvol $(B \setminus \{s\}) \cup \{t\}$ jako novou bázi a přepiš simplexovou tabulku tak, aby odpovídala této nové bázi. Pokračuj krokem 4.

V kroce 5 se může stát, že nově vybraná vstupující proměnná nevylepší hodnotu účelové funkce a pak říkáme, že řešení je *degenerované*. To například nastává, pokud je v předešlém kroce na výběr více vystupujících proměnných. U degenerovaných řešení může dojít k *zacyklení* simplexové metody, kdy se nevylepšuje hodnota účelové funkce a algoritmus se nikdy nezastaví. Zacyklení se dá zabránit volbou vhodného pivotovacího pravidla.

Příklady pivotovacích pravidel pro výběr vstupující proměnné x_t a vystupující x_s :

1. *Dantzigovo pravidlo:* Vyber $t \in N$ s maximálním r_t a zvol x_s libovolně z možných proměnných.
2. *Blandovo pravidlo:* Vyber nejmenší možné $t \in N$ a pro něj nejmenší možné $s \in B$. Brání zacyklení, ale je pomalé.

Existuje spousta dalších pivotovacích pravidel (lexikografické, náhodné a další).

Příklad 1. Převeďte následující soustavu nerovnic do rovnicového tvaru:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\leq 3 \\x_2 + x_3 &\leq 12 \\x_1 + 3x_2 - x_4 &\geq 7 \\x_1, x_2, x_3 &\in \mathbb{R} \\x_4 &\geq 0\end{aligned}$$

Převeďte výslednou úlohu v rovnicovém tvaru na lineární program, ze kterého půjde získat bázické přípustné řešení.

Mějme libovolný lineární program s m lineárními nerovnicemi či rovnicemi a n proměnnými. Kolik proměnných nám vždy stačí v rovnicovém tvaru této úlohy a kolik v pomocném LP pro hledání přípustného bázického řešení?

Příklad 2. Vyřešte pomocí simplexové metody následující úlohu lineárního programování:

$$\begin{aligned}\max & 3x_1 + 4x_2 \\x_1 + x_2 &\leq 4 \\2x_1 + x_2 &\leq 5 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Příklad 3. Vyřešte pomocí simplexové metody následující úlohu lineárního programování:

$$\begin{aligned}\max & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\2x_1 + x_2 &\leq 10 \\x_1 + 2x_2 - 2x_3 &\leq 20 \\x_2 + 2x_3 &\leq 5 \\x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 7. cvičení*

15. dubna 2024

1 Simplexová metoda o něco podrobněji

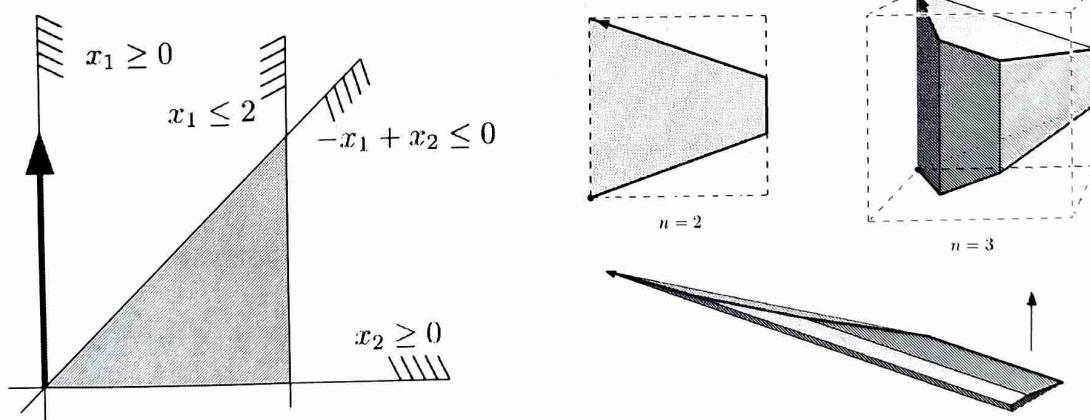
Víme, že simplexová metoda se může zacyklit a pak nikdy neskončí. To nastává pouze v degenerovaném případě a je to jediný způsob, jak metoda může selhat. V praxi toto typicky nenastává a možnost zacyklení se často ignoruje. Jinak se zacyklení dá zabránit volbou vhodného pivotovacího pravidla, poslouží například Blandovo pravidlo.

Příklady pivotovacích pravidel pro výběr vstupující proměnné x_t a vystupující x_s :

1. *Dantzigovo pravidlo*: Vyber $t \in N$ s maximálním r_t a zvol x_s libovolně z možných proměnných.
2. *Blandovo pravidlo*: Vyber nejmenší možné $t \in N$ a pro něj nejmenší možné $s \in B$. Brání zacyklení, ale je pomalé.

Existuje spousta dalších pivotovacích pravidel (lexikografické, náhodné a další).

Efektivita simplexové metody: V praxi funguje velmi efektivně, podle počítačových experimentů u úloh v rovnicovém tvaru s m omezeními typicky stačí k nalezení optima $2m$ až $3m$ pivotovacích kroků. Není známé pivotovací pravidlo, pro které by se umělo ukázat, že simplexová metoda skončí v počtu kroků, který je polynomiální vzhledem k počtu omezení m a počtu proměnných n . Naopak pro spoustu pivotovacích pravidel existují příklady v rovnicovém tvaru s $O(n)$ omezeními a $O(n)$ proměnnými, pro které s určitou počáteční bází potřebuje simplexová metoda $2^{\Omega(n)}$ pivotovacích kroků. Tyto příklady jsou ovšem vzácné. Existuje pravděpodobnostní pivotovací pravidlo, pro nějž je známo, že simplexová metoda nad každou vstupní úlohou použije nejvíce $e^{O(\sqrt{n} \ln n)}$ pivotovacích kroků.



Obrázek 1: Degenerovaný program a Mintyho-Kleeovy hyperkrychle (J. Matoušek: Understanding and using linear programming).

Příklad 1. Vyřešte simplexovou metodou následující úlohu lineárního programování:

$$\begin{aligned} & \max x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 0 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Jako pivotovací pravidlo použijte Dantzigovo pravidlo.

*Informace o cvičení najeznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

Příklad 2. Na následující úlohy lineárního programování aplikujte simplexovou metodu. V nějaké chvíli by již nemělo být možné pokračovat. Zkuste důvodnit, proč se algoritmus zastavil.

(a) Optimalizujte funkci $\max 3x_1 + x_2$ za podmínek

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq -1 \\ -x_1 - x_2 &\leq -3 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Po převodu do rovnicového tvaru můžete použít počáteční přípustné bázické řešení s $x_1 = 3$ a $x_2 = 4$.

(b) Optimalizujte funkci $\max 4x_1 + 5x_2 + 3x_3$ za podmínek

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 20 \\ 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 &\leq 50 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 30 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Příklad 3. Vyřešte simplexovou metodou následující úlohu lineárního programování:

$$\begin{aligned} \max & 5x_1 - 19x_2 - 3x_3 - 4x_4 \\ x_5 &= -0.5x_1 + 2x_2 + 0.5x_3 - 4x_4 \\ x_6 &= -0.5x_1 + 4x_2 + 1x_3 - x_4 \\ x_7 &= 1 - x_1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 &\geq 0. \end{aligned}$$

Jako pivotovací pravidlo použijte Blandovo pravidlo. Změní se výpočet, pokud bychom používali Dantzigovo pravidlo?

Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 9. cvičení*

29. dubna 2024

1 Dualita

Mějme následující úlohu lineárního programování P s n proměnnými a m podmínkami:

$$\max \mathbf{c}^T \mathbf{x} \text{ za podmínek } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ a } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (\text{P})$$

Té budeme říkat *primární lineární program* (neboli *primár*). Jeho *duálním lineárním programem* (neboli *duálem*) nazveme následující lineární program D s m proměnnými a n podmínkami:

$$\min \mathbf{b}^T \mathbf{y} \text{ za podmínek } A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \text{ a } \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \quad (\text{D})$$

Vysvětlení: při řešení P se snažíme najít lineární kombinaci m podmínek soustavy $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ s nějakými koeficienty $y_1, \dots, y_m \geq 0$ takovými, aby výsledná nerovnost měla j -tý koeficient aspoň c_j pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ a pravá strana přitom byla co nejmenší.

Ukazuje se, že program D „hlídá“ program P podle následujícího výsledku, ze kterého například vidíme, že je-li P neomezený, pak D nemá přípustné řešení.

Věta 1 (Slabá věta o dualitě). *Pro každé přípustné řešení \mathbf{x} úlohy P a každé přípustné řešení \mathbf{y} úlohy D platí $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y}$.*

Následující zesílení je asi nejdůležitějším teoretickým výsledkem o lineárních programech.

Věta 2 (Slná věta o dualitě). *Pro úlohy P a D nastane právě jedna z následujících čtyř možností:*

- (a) *Ani P ani D nemá přípustné řešení.*
- (b) *Úloha P je neomezená a D nemá přípustné řešení.*
- (c) *Úloha P nemá přípustné řešení a D je neomezená.*
- (d) *Úlohy P i D mají přípustné řešení. Pak mají i optimální řešení \mathbf{x}^* a \mathbf{y}^* a platí $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$.*

Duální lineární programy můžeme uvážit i pro lineární programy v obecném tvaru, stačí používat podle následující tabulky. Postup funguje zleva doprava i zprava doleva.

	Primární úloha	Duální úloha
Proměnné	$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$	$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$
Matice	$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$	$A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$
Pravá strana	$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$	$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$
Účelová funkce	$\max \mathbf{c}^T \mathbf{x}$	$\min \mathbf{b}^T \mathbf{y}$
Podmínky	i -tá podmínka má \leq $x_j \geq 0$ $x_j \leq 0$ $x_j \in \mathbb{R}$	$y_i \geq 0$ $y_i \leq 0$ $y_i \in \mathbb{R}$ j -tá podmínka má \geq \leq $=$

*Informace o cvičení najeznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

Příklad 1. Vytvořte duální program D pro následující primární lineární program P :

$$\begin{aligned} \max & 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t. } & 5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Příklad 2. Vytvořte duální program D pro následující primární lineární program P :

$$\begin{aligned} \max & x_1 - 2x_2 + 3x_4 \\ \text{s.t. } & x_2 - 6x_3 + x_4 \leq 4 \\ & -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ & 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 \geq 5 \\ & x_2 \leq 0 \\ & x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Příklad 3. Dokažte nebo vyvrátěte tvrzení:

- (a) Pro každý lineární program P platí, že duál duálu P je původní program P . → *pravou*
- (b) Pokud má lineární program optimum s celočíselnými proměnnými, tak má celočíselné optimální řešení i duál.

Příklad 4. (*) Mějme následující úlohu lineárního programování P :

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ za podmínek } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ a } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Pomocí duality zkonstruujte soustavu nerovnic, pro kterou ze souřadnic libovolného řešení lze vypočít optimální řešení pro P .

Tím ukážeme, že asymptotická složitost problému rozhodnout, zda je daný mnohostěn neprázdný, je stejná jako složitost problému nalezení optimálního řešení úlohy lineárního programování. Nebo jde jinak: nalezení přípustného řešení lineárního programu je asymptoticky stejně obtížné jako nalezení optimálního řešení.

$$P \rightarrow D \rightarrow F^{\parallel P}$$

$$\forall x, y: c^\top x \leq b^\top y \leq c^\top x$$

Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 10. cvičení*

6. kvěna 2024

1 Dualita její aplikace

Příklad 1. Sestrojte duální úlohu k lineární relaxaci úlohy Nalezení minimálního vrcholového pokrytí ve váženém grafu $G = (V, E, w)$, kde $w: V \rightarrow \mathbb{R}^+$. Pro připomenutí, tato relaxace vypadá následovně:

Proměnné: $x_v \geq 0$ pro každé $v \in V$

Účelová funkce: $\min \sum_{v \in V} w(v)x_v$

Podmínky: $x_u + x_v \geq 1$ pro každé $\{u, v\} \in E$

Jaký problém řeší duální úloha pro jednotkové váhy?

Síť je uspořádaná čtverice (G, z, s, c) , kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, neboli $E \subseteq V \times V$, z a s jsou dva různé vrcholy grafu G (zvané *zdroj* a *stok*) a kapacita $c: E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ je funkce ohodnocující hrany. Tok v síti je každá funkce $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ splňující $0 \leq f(e) \leq c(e)$ pro každou hranu $e \in E$ a

$$\sum_{v:(u,v) \in E} f(u,v) = \sum_{v:(v,u) \in E} f(v,u)$$

pro každý vrchol $u \in V$ mimo stok a zdroj. Velikost toku je

$$w(f) = \sum_{v:(z,v) \in E} f(z,v) - \sum_{v:(v,z) \in E} f(v,z).$$

Řezem v síti je množina R hran vedoucích z množiny vrcholů Z do množiny vrcholů $S = V \setminus Z$, kde $z \in Z$ a $s \in S$. Kapacitou řezu R je $\sum_{e \in R} c(e)$.

Příklad 2. Uvažme následující úlohu lineárního programování pro problém Nalezení maximálního toku v síti ($G = (V, E)$, z, s, c):

Proměnné: $x_e \geq 0$ pro každé $e \in E$

Účelová funkce: $\max x_{s,z}$

Podmínky: $\sum_{u:(u,v) \in E} x_{u,v} - \sum_{u:(v,u) \in E} x_{v,u} = 0$ pro každé $v \in V$

$x_e \leq c(e)$ pro každé $e \in E$

(V tomto programu jsme přidali hranu (s, z) „nekonečně“ velké kapacity, čímž tok cirkuluje a program se tak zjednoduší uvedením podmínek Kirchhoffových zákonů i pro zdroj a stok).

Sestrojte duál této úlohy a (*) nahlédněte, že odpovídá relaxaci úlohy Nalezení řezu minimální kapacity v síti.

Příklad 3. (a) Uvažte následující lineární program pro orientovaný graf $G = (V, E)$ a jeho vrcholy s a t :

Proměnné: $x_v \in \mathbb{R}$ pro každé $v \in V$

Účelová funkce: $\max x_t$

Podmínky: $x_s = 0$

$x_v - x_u \leq 1$ pro každé $(u, v) \in E$

Nahlédněte, že řeší úlohu Nalezení délky nejkratší cesty mezi vrcholy s a t v G . V účelové funkci je skutečně maximum, i když chceme nalézt nejkratší cestu.

(b) Zkonstruujte duál k předešlé úloze. Jaký problém duál řeší?

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

2 Komplementarita

Věta 1 (Věta o komplementaritě). *Mějme úlohu lineárního programování P a její duál D v následující formě:*

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}, A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (\text{P})$$

$$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y}, A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \quad (\text{D})$$

Mějme přípustná řešení \mathbf{x}^ a \mathbf{y}^* pro P a D a označme jako $A_{j,i}$ prvek matice A na pozici (j, i) . Pak \mathbf{x}^* a \mathbf{y}^* jsou optimálními řešeními úloh P a D právě tehdy, když platí následující dva vztahy*

$$x_i = 0 \text{ nebo } \sum_{j=1}^m A_{j,i} y_j = c_i \text{ pro každé } i \in \{1, \dots, n\} \text{ a}$$

$$y_j = 0 \text{ nebo } \sum_{i=1}^n A_{j,i} x_i = b_j \text{ pro každé } j \in \{1, \dots, m\}.$$

První vztah říká, že pro každé i je buď i -tá proměnná primáru nulová nebo je i -tá podmínka duálu těsná. Druhý vztah analogicky říká, že pro každé j je buď j -tá proměnná duálu nulová nebo je j -tá podmínka primáru těsná. Tento výsledek nám pomůže ověřovat optimalitu řešení či například určovat optima duálu z optim primáru.

Příklad (Řešený příklad). *Mějme následující primár P a duál D :*

$$\begin{aligned} & \max 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 12 \\ & x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 7 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{P})$$

a

$$\begin{aligned} & \min 12y_1 + 7y_2 + 10y_3 \\ & 3y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 2 \\ & y_1 - 3y_2 + y_3 \geq 4 \\ & y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 3 \\ & 4y_1 + 3y_2 - y_3 \geq 1 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{D})$$

Bud' $\mathbf{x}^* = (0, \frac{52}{5}, 0, \frac{2}{5})$ optimem v P . Určete optimum v D .

Řešení. Pode Věty o komplementaritě jsou 2. a 4. nerovnost v D splněny těsně, protože $x_2 \neq 0$ a $x_4 \neq 0$. V primáru P po dosazení hodnot \mathbf{x}^* vidíme, že 2. nerovnost v P není těsná a podle Věty o komplementaritě tedy máme $y_2 = 0$. Dosazením $y_2 = 0$ do 2. a 4. nerovnosti v D zapsaných s rovností dostaváme soustavu

$$\begin{aligned} & y_1 + y_3 = 4 \\ & 4y_1 - y_3 = 1, \end{aligned}$$

jejíž řešení $\mathbf{y}^* = (1, 0, 3)$ je přípustné pro D a tedy je optimem v D . \square

Příklad 4. Optimálním řešením duální úlohy D k následující úloze P je $\mathbf{y}^* = (0, 7, \frac{11}{2}, 0)$.

$$\begin{aligned} & \max 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 \\ & 5x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 12 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 \leq -1 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + x_3 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{P})$$

- (a) Spočtěte pomocí komplementarity optimální řešení primáru P .
- (b) Nalezněte vektory $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ a $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$, které splňují oba vztahy z Věty o komplementaritě, ale ani \mathbf{x} a ani \mathbf{y} nejsou optimálními řešeními pro P a D .

Příklad 5. Mějme následující zadání duálu D úlohy P :

$$\begin{aligned}
 & \max 3y_1 + 3y_2 + 6y_3 + 4y_4 \\
 & y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \leq 5 \\
 & y_1 + y_2 + 2y_3 + 3y_4 = 3 \\
 & y_1 + y_2 + y_3 \geq 1 \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0
 \end{aligned} \tag{D}$$

Přípustným řešením primáru P je $\mathbf{x}' = (4, 0, -1)$. Je toto řešení primáru optimem v P ?