VÝROKOVÁ LOGIKA

- Syntaxe výrokové logiky

syntaxe = soubor formálních pravidel pro vytváření korektních vět ze slov nebo formálních výrazů ze symbolů

→ v logice pracujeme s formálními nápisy

Def: Jazyk je určený množinou výrokových proměnných (prvovýroků), kterou značíme $\mathbb{P}$. Je spočetná a má dané uspořádání.

$$\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3\}$$

Jazyk dále obsahuje logické spojky $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ a závorky (,).

Def: Pro jazyk $\mathbb{P}$ definujeme množinu $VF_{\mathbb{P}}$ jako nejmenší množinu splňující

induktivní definice

1, $\forall p \in \mathbb{P} : p \in VF_{\mathbb{P}}$

2, $\forall \varphi \in VF_{\mathbb{P}} : (\neg\varphi) \in VF_{\mathbb{P}}$

3, $\forall \varphi, \psi \in VF_{\mathbb{P}} : (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi) \in VF_{\mathbb{P}}$.

Výrok (výroková formule) v jazyce $\mathbb{P}$ je prvek množiny $VF_{\mathbb{P}}$.

Značení: Místo binárních logických spojek občas používáme zástupný symbol $\square$.

Def: Podvýrok je podřetězec výroku, který je sám o sobě výrokem.

Výroky jsou konečné řetězce napsané pomocí symbolů z jejich jazyka.

Def: $Var(\varphi) := \{p \in \mathbb{P} \mid p \text{ je podřetězec } \varphi\}$ ... množina všech prvovýroků ve φ.

Def: Definujeme zkratky za dva speciální výroky

- pravda $\top := (p \vee (\neg p))$
- spor $\bot := (p \wedge (\neg p))$

$p \in \mathbb{P}$ je pevně zvolený

Značení: Můžeme vynechávat některé závorky. Priorita operátorů

1. $\neg$ 2. $\wedge, \vee$ 3. $\rightarrow, \leftrightarrow$

$((p \vee (\neg q)) \leftrightarrow (r \rightarrow (p \wedge q))) \rightsquigarrow p \vee \neg q \leftrightarrow (r \rightarrow p \wedge q)$

→ protože $\wedge$ a $\vee$ jsou asociativní:

$(p \wedge (q \wedge (r \wedge s))) \rightsquigarrow p \wedge q \wedge r \wedge s$

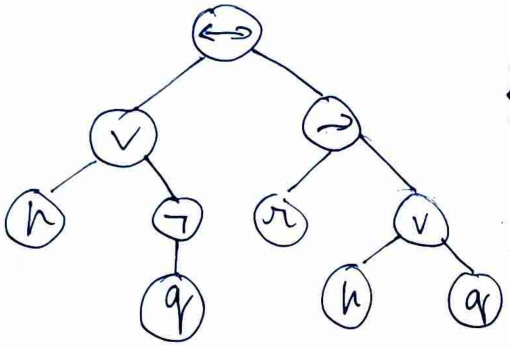
Def: Strom výroku φ, značíme $Tree(\varphi)$, je zakořeněný strom, kde záleží na pořadí potomků, definovaný induktivně takto:

1, pokud $\varphi = p \in \mathbb{P}$: $Tree(\varphi)$ obsahuje jediný vrchol, s labelem p

2, pokud $\varphi = (\neg\varphi')$: kořen s labelem $\neg$, jediný syn je kořen $Tree(\varphi')$

3, pokud $\varphi = (\varphi' \square \varphi'')$: kořen s labelem $\square$, dva synové $\begin{cases} \text{levý: kořen } Tree(\varphi') \\ \text{pravý: kořen } Tree(\varphi'') \end{cases}$

Příklad: $(p \vee \neg q) \leftrightarrow (r \to p \vee q)$



$Tree(\varphi)$ je jednoznačně určený

Def: Teorie v jazyce $\mathbb{P}$ je libovolná množina výroků v $\mathbb{P}$, tedy $T \subseteq VF_{\mathbb{P}}$. Prvkům teorie říkáme axiomy.

• **Sémantika výrokové logiky**

sémantika popisuje význam syntakticky korektních nápisů = výroků

↳ pro nás jen 2 možnosti: pravda a nepravda

$\Downarrow$

pravdivostní hodnota

→ pravdivostní tabulka logických spojek

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

když ohodnotíme prvovýroky, tak pravd. hodnota složených výroků je jednoznačná

Def: Pro logické spojky definujeme odpovídající booleovské funkce:

- pro $\neg$ unární $f_\neg: \{0,1\} \to \{0,1\}$, $f_\neg: x \mapsto 1-x$.
- pro $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ binární $f_\wedge, f_\vee, f_\to, f_\leftrightarrow: \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$, podle tabulky.

Pokud do takové funkce dosadíme ohodnocení proměnných p, q, tak dostaneme pravdivostní hodnotu odpovídajícího složeného výroku.

Def: Pravdivostní funkce výroku φ v konečném jazyce $\mathbb{P}$ je funkce $f_{\varphi,\mathbb{P}}: \{0,1\}^{|\mathbb{P}|} \to \{0,1\}$ definovaná induktivně

číslujeme od 0, $0 \in \mathbb{N}$

1, je-li φ i-tý prvovýrok z $\mathbb{P}$: $f_{\varphi,\mathbb{P}}(x_0, x_1, \dots x_{n-1}) := x_i$

2, je-li $\varphi = (\neg \varphi')$: $f_{\varphi,\mathbb{P}}(\underset{\sim}{x}) := f_{\neg}(f_{\varphi',\mathbb{P}}(\underset{\sim}{x}))$

3, je-li $\varphi = (\varphi' \square \varphi'')$: $f_{\varphi,\mathbb{P}}(\underset{\sim}{x}) := f_{\square}(f_{\varphi',\mathbb{P}}(\underset{\sim}{x}), f_{\varphi'',\mathbb{P}}(\underset{\sim}{x}))$

Příklad: $\varphi = (p \vee \neg q) \leftrightarrow (r \to (p \wedge q))$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r, s\}$

$$f_{\varphi,\mathbb{P}}(x_0, x_1, x_2, x_3) = f_{\leftrightarrow}\Big(\underbrace{f_{\vee}(x_0, f_{\neg}(x_1))}_{p \vee \neg q}, \underbrace{f_{\to}(x_2, f_{\wedge}(x_0, x_1))}_{r \to p \wedge q}\Big)$$

→ pravdivostní hodnotu φ při ohodnocení $p=1, q=0, r=1, s=1$ získáme dosazením těchto hodnot do pravdivostní funkce φ.

$$f_{\varphi,\mathbb{P}}(1,0,1,1) = f_{\leftrightarrow}(f_{\vee}(1, f_{\neg}(0)), f_{\to}(1, f_{\wedge}(1,0)))$$
$$= f_{\leftrightarrow}(f_{\vee}(1,1), f_{\to}(1,0)) = f_{\leftrightarrow}(1,0) = 0.$$

Pravdivostní funkce $f_{\varphi,\mathbb{P}}$ závisí pouze na proměnných, které odpovídají prvovýrokům z $\mathrm{Var}(\varphi)$.

Důsledek: Pokud je φ v nekonečném jazyce, tak se můžeme omezit na $\mathrm{Var}(\varphi)$, který je konečný, a uvažovat pravdivostní funkci nad ním.

- Modely

→ ohodnocený prvovýrok modeluje nějakou reálnou situaci, kterou chceme studovat

Def: Model jazyka $\mathbb{P}$ je libovolné pravdivostní ohodnocení $v: \mathbb{P} \to \{0,1\}$.
Množinu všech modelů značíme $M_{\mathbb{P}}$.

$$M_{\mathbb{P}} := \{v \mid v: \mathbb{P} \to \{0,1\}\} = \{0,1\}^{\mathbb{P}} = 2^{\mathbb{P}} \ * \quad \Rightarrow |M_{\mathbb{P}}| = 2^{|\mathbb{P}|}$$

* značení X^A, kde X, A jsou množiny znamená množinu všech funkcí z A do X
↳ 2^X ~ potenční množina X … funkce $X \to \{0,1\} =: 2$.

Příklad: Jazyk $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$, ohodnocení p, r pravda, q nepravda:

$v = \{(p,1), (q,0), (r,1)\}$, protože $\mathbb{P}$ je uspořádaný, tak můžeme psát jen $v = (1,0,1)$. Ztotožňujeme tak $\{0,1\}^{\mathbb{P}}$ s $\{0,1\}^{|\mathbb{P}|}$.

$M_{\mathbb{P}} = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$.

• Platnost

→ neformálně: výrok je platný ≡ jeho pravd. hodnota je 1.

Def: Nechť φ je výrok v jazyce $\mathbb{P}$ a v je model $\mathbb{P}$. → $\varphi \in VF_{\mathbb{P}}$, $v \in M_{\mathbb{P}}$

• $v \models \varphi \equiv f_{\varphi,\mathbb{P}}(v) = 1$ ... φ platí v modelu v, v je modelem φ

Množinu všech modelů výroku φ značíme $M_{\mathbb{P}}(\varphi)$.

$$M_{\mathbb{P}}(\varphi) = \{v \in M_{\mathbb{P}} \mid v \models \varphi\} = f_{\varphi,\mathbb{P}}^{-1}[1]$$

$$M_{\mathbb{P}} \setminus M_{\mathbb{P}}(\varphi) = \{v \in M_{\mathbb{P}} \mid v \not\models \varphi\} = \varphi_{\varphi,\mathbb{P}}^{-1}[0]$$

Def: Nechť T je teorie v jazyce $\mathbb{P}$ a v je model $\mathbb{P}$. → $T \subseteq VF_{\mathbb{P}}$, $v \in M_{\mathbb{P}}$

• $v \models T \equiv \forall \varphi \in T: v \models \varphi$ ... T platí v modelu v, v je modelem T

Množinu všech modelů teorie T značíme $M_{\mathbb{P}}(T)$.

↳ teorie platí v modelu ≡ v něm platí všechny její axiomy.

Značení: Když do teorie přidáme nový axiom, tak místo $M_{\mathbb{P}}(T \cup \{\varphi\})$ píšeme $M_{\mathbb{P}}(T, \varphi)$.

$$M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) = M_{\mathbb{P}}(T) \cap M_{\mathbb{P}}(\varphi)$$

$$M_{\mathbb{P}}(T) = \bigcap_{\varphi \in T} M_{\mathbb{P}}(\varphi)$$

$$M_{\mathbb{P}}(\varphi_1) \supseteq M_{\mathbb{P}}(\varphi_1, \varphi_2) \supseteq M_{\mathbb{P}}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \supseteq \dots \supseteq M_{\mathbb{P}}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots \varphi_n).$$

Příklad: $T = \{p \vee q \vee r,\ q \to r,\ \neg r\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$.

$M(\neg r) = \{(0,0,0), (0,1,0), (1,0,0), (1,1,0)\}$

$M(\neg r, q \to r) = \{(0,0,0), (1,0,0)\}$

$M(T) = M(\neg r, q \to r, p \vee q \vee r) = \{(1,0,0)\}$.

• Sémantické pojmy

Def: Výrok φ v jazyce $\mathbb{P}$ je

φ platí v logice

1) pravdivý, tautologie ≡ $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = M_{\mathbb{P}}$ ... píšeme $\models \varphi$
2) lživý, sporný ≡ $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = \emptyset$
3) nezávislý ≡ není pravdivý ani lživý
4) splnitelný ≡ není lživý

Def: Výroky φ, ψ v jazyce $\mathbb{P}$ jsou ekvivalentní $\varphi \sim \psi \equiv M_{\mathbb{P}}(\varphi) = M_{\mathbb{P}}(\psi)$.

Příklad:

- $\top$, $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$ jsou pravdivé
- $\bot$, $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg p$ jsou lživé
- p, $q \wedge p$ jsou nezávislé a splnitelné
- $p \sim p \vee p$, $p \to q \sim \neg p \vee q$, $p \to p \sim \neg p \vee p \sim \top$
- $\neg p \to (p \to q) \sim \neg p \to (\neg p \vee q) \sim p \vee \neg p \vee q \sim \top$

- Sémantické pojmy vzhledem k teorii

Def: Nechť T je teorie v jazyce $\mathbb{P}$. Výrok φ v jazyce $\mathbb{P}$ je

1) pravdivý v T, důsledek $T \equiv M_{\mathbb{P}}(T) \subseteq M_{\mathbb{P}}(\varphi)$ ... píšeme $T \models \varphi$

   ↳ φ platí v každém modelu T: $\forall v \in M_{\mathbb{P}}(T): v \models \varphi$

2) lživý v T, sporný v $T \equiv M_{\mathbb{P}}(T) \cap M_{\mathbb{P}}(\varphi) = \emptyset$

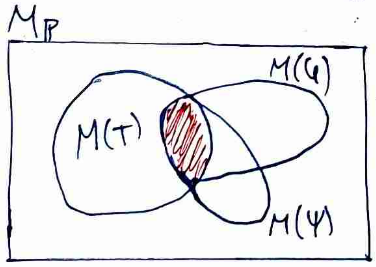
   ↳ φ neplatí v žádném modelu T: $\forall v \in M_{\mathbb{P}}(T): v \not\models \varphi$

3) nezávislý v T $\equiv$ není pravdivý v T ani sporný v T

4) splnitelný v T, konzistentní s T $\equiv$ není lživý v T $\Rightarrow M(T,\varphi) \neq \emptyset$

Def: Výroky φ, ψ jsou ekvivalentní v teorii T $\quad \varphi \sim_T \psi \equiv M_{\mathbb{P}}(T,\varphi) = M_{\mathbb{P}}(T,\psi)$.

↳ platí ve stejných modelech T: $\forall v \in M_{\mathbb{P}}(T): v \models \varphi \Leftrightarrow v \models \psi$



Příklad: $T = \{p \vee q, \neg r\}$, $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$

- $q \vee p$, $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ jsou pravdivé v T
- $(\neg p \wedge \neg q) \vee r$ je lživý v T $\quad (\neg p \wedge \neg q) \sim \neg(p \vee q)$
- $p \leftrightarrow q$, $p \wedge q$ jsou v T nezávislé a splnitelné
- $p \sim_T p \vee r$ ... ale $p \not\sim p \vee r$

• Vlastnosti teorií

Def: Teorie T, T' v jazyce $\mathbb{P}$ jsou ekvivalentní $T \sim T' \equiv M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T')$.

↳ vyjadřují tytéž vlastnosti, ale jsou jinak axiomatizované

Příklad: $\{p \to q, \ p \leftrightarrow r\} \sim \{(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg r \vee p)\}$

Def: Teorie T v jazyce $\mathbb{P}$ je

1) sporná $\equiv$ v ní platí spor ... $T \models \bot$ → $M_{\mathbb{P}}(T) \subseteq M_{\mathbb{P}}(\bot) = \emptyset$
   $\iff$ nemá žádný model $M_{\mathbb{P}}(T) = \emptyset$ ↗ $\emptyset \subseteq M_{\mathbb{P}}(\varphi)$
   $\iff$ v ní platí všechny výroky $\forall \varphi \in VF_{\mathbb{P}} : T \models \varphi$

2) bezesporná (splnitelná) $\equiv$ není sporná
   $\iff$ má alespoň 1 model

   nemá nezávislé výroky

3) kompletní $\equiv$ není sporná & každý výrok je v ní pravdivý nebo lživý
   $\iff$ má právě 1 model
   ↳ důkaz příkladem: 2 různé modely $(1,0,1,1)$, $(0,0,1,1)$
   ↳ $p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge p_4$ ✓ ✗
   $\Rightarrow$ tenhle výrok by byl nezávislý v T ↯

Příklad

- $T_1 = \{p, \ p \to q, \ \neg q\}$ je sporná
- $T_2 = \{p \vee q, \ r\}$ je bezesporná, ale není kompletní → $p \wedge q$ < $(1,1,1)$ platí, $(1,0,1)$ neplatí
- $T_2 \cup \{\neg p\}$ je kompletní → jediný model $(0,1,1)$

• Důsledky a extenze teorií

Def: Množinu všech důsledků teorie T (výroků pravdivých v T) značíme jako

$$Csq_{\mathbb{P}}(T) := \{\varphi \in VF_{\mathbb{P}} \mid T \models \varphi\} = \{\varphi \in VF_{\mathbb{P}} \mid M_{\mathbb{P}}(T) \subseteq M_{\mathbb{P}}(\varphi)\}$$

$T \subseteq Csq_{\mathbb{P}}(T)$ ... axiomy T platí v T

- pokud $\varphi \in Csq_{\mathbb{P}}(T)$, tak $M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) = M(T) \cap M(\varphi) = M(T)$ ... $\because M(T) \subseteq M(\varphi)$
  $\Rightarrow M(Csq(T)) = M(T) \Rightarrow Csq(Csq(T)) = Csq(T)$ → důsledky důsledků jsou důsledky
- pokud $T \subseteq T'$, tak $M(T) \supseteq M(T')$ ... víc podmínek $\Rightarrow$ míň modelů
  $\Rightarrow Csq(T) \subseteq Csq(T')$ $\because$ pokud $\varphi \in Csq(T)$, tak $M(\varphi) \supseteq M(T) \supseteq M(T')$

Def: Nechť T je teorie v jazyce $\mathbb{P}$. Teorie T' v jazyce $\mathbb{P}' \supseteq \mathbb{P}$ je

1) extenze teorie T $\equiv$ $Csq_{\mathbb{P}}(T) \subseteq Csq_{\mathbb{P}'}(T')$

↳ všechno, co platí v T, platí i v T'

→ navíc, pokud to je extenze, tak to je

2) jednoduchá extenze $\equiv$ $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$ ... nezvětšuje jazyk

3) konzervativní extenze $\equiv$ $Csq_{\mathbb{P}}(T) = Csq_{\mathbb{P}'}(T') \cap VF_{\mathbb{P}}$

↳ neměníme platnost tvrzení vyjádřených v původním jazyce

$\Rightarrow$ $\forall$ nový důsledek musí obsahovat nějakou novou proměnnou

Jednoduchá & konzervativní extenze je ekvivalentní původní teorii.

Často je jednodušší pracovat s modely, než s důsledky

- T' je jednoduchá extenze T $\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$ & $M_{\mathbb{P}}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$

  ↳ když $\varphi \in Csq_{\mathbb{P}}(T)$, tak $M_{\mathbb{P}}(\varphi) \supseteq M_{\mathbb{P}}(T) \supseteq M_{\mathbb{P}}(T') \Rightarrow \varphi \in Csq_{\mathbb{P}}(T')$

- T' je extenze T $\Leftrightarrow$ $M_{\mathbb{P}'}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}'}(T)$ $\quad (1,1,1,\cancel{0}) \to (1,1,1)$

  $\Leftrightarrow$ $\forall v \in M_{\mathbb{P}'}(T')$: restrikce v na $\mathbb{P}$ je modelem T

- T' je konzervativní extenze T $\Leftrightarrow$ je extenze & $\forall$ model T lze rozšířit na model T'

  $\Leftrightarrow$ $\forall v \in M_{\mathbb{P}'}(T')$: restrikce v na $\mathbb{P}$ je modelem T

  & $\forall w \in M_{\mathbb{P}}(T)$ $\exists v \in M_{\mathbb{P}'}(T')$: restrikce v na $\mathbb{P} = w$

  $\Leftrightarrow$ $\{$restrikce v na $\mathbb{P} \mid v \in M_{\mathbb{P}'}(T')\} = M_{\mathbb{P}}(T)$

Neformálně:

- extenze nepřidává nové modely (když se omezíme na původní jazyk)
- jednoduchá extenze navíc nezvětšuje jazyk
- konzervativní extenze navíc neodebírá modely

Příklad: $T = \{p \to q\}$, $\mathbb{P} = \{p, q\}$ $\Rightarrow$ $M_{\mathbb{P}}(T) = \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$

- $T_1 = \{p \wedge q\}$ nad $\mathbb{P}$ $\Rightarrow$ $M_{\mathbb{P}}(T_1) = \{(1,1)\}$ $\Rightarrow$ T_1 je jedn. extenze T
- $T' = \{p \leftrightarrow (q \wedge r)\}$ nad $\mathbb{P}' = \mathbb{P} \cup \{r\}$

  $\Rightarrow M_{\mathbb{P}'}(T') = \{(1,1,1), (0,1,0), (0,0,1), (0,0,0)\}$

  $\rightarrow$ restrikce na $\mathbb{P}$: $\{(1,1), (0,1), (0,0)\} = M_{\mathbb{P}}(T)$

  $\Rightarrow T'$ je konzervativní extenze T

• <u>Univerzálnost logických spojek</u>

$|\mathbb{P}| = n$ pro n-ární f

<u>Def:</u> Množina logických spojek je univerzální $\equiv$

$\forall$ booleovská funkce f je pravdivostní funkce $f_{\varphi,\mathbb{P}}$ nějakého výroku φ.

<u>Ekvivalentně:</u> Pro $\forall$ konečný $\mathbb{P}$ a $\forall M \subseteq M_{\mathbb{P}}$ $\exists \varphi \in VF_{\mathbb{P}}$: $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = M$.

<u>Tvrzení:</u> $\{\neg, \wedge, \vee\}$ jsou univerzální.

<u>Dk:</u> Mějme $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, respektive $M := f^{-1}[1]$

→ chceme najít φ t.ž. $M(\varphi) = M$

1, pokud $|M| = 1$ … jediný model $v \in M$.

↳ vyrobíme φ_v = „musím mít model v"

→ příklad: $v = (1,0,1,0) \rightsquigarrow \varphi_v = p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4$

2, pokud $|M| > 1$

→ $\varphi_M := \bigvee_{v \in M} \varphi_v$ … $M = \{(1,0,1), (0,0,1)\} \to (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3)$

→ zřejmě $M(\varphi_M) = M$ ∎

<u>Důsledek:</u> NOR a NAND jsou univerzální.

<u>Dk:</u> lze z nich vyrobit $\neg$, $\vee$, $\wedge$

• Výrokové normální formy – CNF, DNF

Def: Literál l je buď prvovýrok nebo jeho negace. Opačný literál $\neg l$ značíme $\bar{l}$.

Def: Klauzule je disjunkce literálů $C = l_1 \vee l_2 \vee \ldots \vee l_n$

Jednotková klauzule je samotný literál, prázdná klauzule je $\bot$.

Def: Výrok je v CNF $\equiv$ je to konjunkce klauzulí. Prázdný CNF výrok je $\top$.

Def: Elementární konjunkce je konjunkce literálů $E = l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_n$. $\top$

Def: Výrok je v DNF $\equiv$ je disjunkcí el. konjunkcí. Prázdný DNF je $\bot$.

Výrok v CNF je pravdivý $\Leftrightarrow$ $\forall$ klauzule obsahuje dvojici opačných literálů.

Výrok v DNF je lživý $\Leftarrow$ $\forall$ el. konj. —— " ——

Příklad: Převeď $\varphi = p \Leftrightarrow (q \vee \neg r)$ do CNF a DNF.

• modely $M = \{(0,0,1), (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$

$\Rightarrow \varphi_{DNF} = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

↳ tento výrok říká „jsem jeden z modelů M"

↳ je to ten výrok φ_M z minulého důkazu

• nemodely $\overline{M} = \{(1,0,1), (0,0,0), (0,1,0), (0,1,1)\}$

$\Rightarrow \varphi_{CNF} = (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)$

↳ $\forall$ klauzule zakazuje 1 nemodel

↳ třeba kdyby $(1,0,1)$ byl model, tak není splněná $(\neg p \vee q \vee \neg r)$

Tvrzení: Nechť $\mathbb{P}$ je konečný jazyk a $M \subseteq M_{\mathbb{P}}$ libovolná množina modelů.

Potom existují výroky φ_{DNF} v DNF a φ_{CNF} v CNF takové, že

$M = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{CNF}) = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{DNF})$.

Dk: Zavedeme značení $p^1 := p$, $p^0 := \neg p$. Potom pro model $v \in M$ definujme

$$\varphi_v := \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)} \quad \text{a} \quad C_v := \bigvee_{p \in \mathbb{P}} p^{1-v(p)}$$

Označme

$$\varphi_{DNF} := \bigvee_{v \in M} \varphi_v \qquad \varphi_{CNF} := \bigwedge_{v \notin M} C_v$$

$\rightarrow \varphi_v$ má jen model v $\Rightarrow$ φ_{DNF} má všechny modely z M

$\rightarrow C_v$ má všechny modely kromě v $\Rightarrow$ φ_{CNF} má všechny modely, kromě těch, které nejsou v M

Důsledek: Každý výrok (i v nekonečném jazyce) je ekvivalentní nějakému výroku v CNF a nějakému výroku v DNF.

Dk: Pokud je $\mathbb{P}$ nekonečný, tak se omezíme na konečný $\mathbb{P}' := var(\varphi)$. a $M := M_{\mathbb{P}'}(\varphi)$ a můžeme použít předchozí tvrzení. ∎

- **Převod do CNF/DNF pomocí ekviv. úprav**

  - $\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi$
    $\varphi \leftrightarrow \psi \sim (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)$
  - $\neg(\varphi \wedge \psi) \sim \neg\varphi \vee \neg\psi$
    $\neg(\varphi \vee \psi) \sim \neg\varphi \wedge \neg\psi$

  DNF:
  $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$

  CNF:
  $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$

- **Problém SAT** – satisfiability

  Vstup: výrok v CNF
  Výstup: je tento výrok splnitelný? Případně jaký má model?
  → NP-úplný problém v obecném případě

Def: Výrok φ je v k-CNF $\equiv$ je v CNF & $\forall$ klauzule má nejvýše k literálů.

→ pro $k \geq 3$ je k-SAT pořád NP-úplný
→ ale 2-SAT lze lineárně

• 2-SAT, Algoritmus implikačního grafu

Algoritmus:

Vstup: výrok φ v 2-CNF

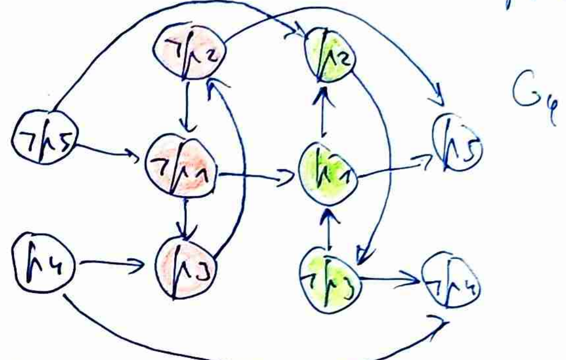
$$\varphi = (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee p_3) \wedge (p_3 \vee \neg p_4) \wedge (\neg p_1 \vee p_5) \wedge (p_2 \vee p_5) \wedge p_1^{*} \wedge \neg p_4^{\boxtimes}$$

1. Všechny klauzule převedeme na implikace: $p \vee q \rightsquigarrow \neg p \to q \wedge \neg q \to p$

$p_1 \to p_2$ $\quad p_2 \to \neg p_3$ $\quad \neg p_1 \to p_3$ $\quad \neg p_3 \to \neg p_4$ $\quad p_1 \to p_5$ $\quad \neg p_2 \to p_5$ $\quad \neg p_1 \to p_1$ *

$\neg p_2 \to \neg p_1$ $\quad p_3 \to \neg p_2$ $\quad \neg p_3 \to p_1$ $\quad p_4 \to p_3$ $\quad \neg p_5 \to \neg p_1$ $\quad \neg p_5 \to p_2$ $\quad p_4 \to \neg p_4$ ⊠

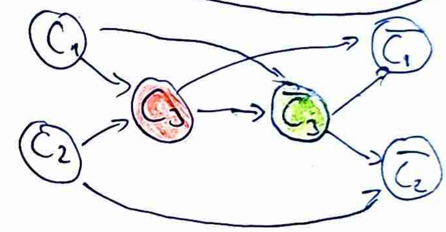
2. Vyrobíme implikační graf G_φ



$V = \{p, \neg p \mid p \in Var(\varphi)\}$

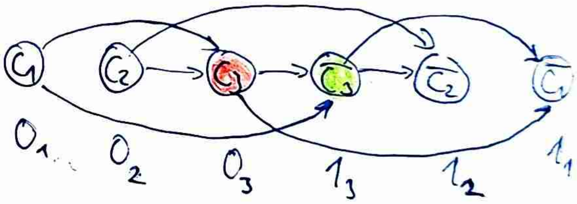
$$E = \{(\bar{l}_1, l_2), (\bar{l}_2, l_1) \mid l_1 \vee l_2 \text{ klauzule } \varphi\} \cup \{(\bar{l}, l) \mid l \text{ je jedn. klauzule } \varphi\}$$

3. Najdeme komponenty silné souvislosti, kontrahujeme je a získáme graf G_φ^*



4. Je to DAG (jinak bychom komponenty našli špatně)

$\Rightarrow$ má topologické uspořádání



5. Ohodnocujeme literály v komp.
↳ vždy 0 a opačné literály 1

literály ve stejné komponentě musí být ohodnoceny stejně

→ jinak $0 \to 1$ $\quad \Rightarrow 1 = 0$ ↯

$\Rightarrow$ pokud jsou ve stejné komponentě opačné literály $l, \bar{l}$, tak $\nexists$ model

Tvrzení: φ má model $\Leftrightarrow$ $\nexists$ silná k. v G_φ s dvojicí opačných literálů.

Dk: Stačí, aby z žádné 1 komponenty nevedla hrana do 0 komponenty.

$\Rightarrow$ literály ve stejné komponentě musí být ohodnoceny stejně

$\Leftarrow$: Ohodnocení vyrobené výše je model φ

- jednotková klauzule l platí kvůli hraně $\bar{l} \to l$ a komponenta s $\bar{l}$ byla hodnocena dříve, tedy $0 \to 1$.
- $l_1 \vee l_2 \rightsquigarrow \bar{l}_1 \to l_2$, $\bar{l}_2 \to l_1$. Pokud jsme l_1 ohodnotili dříve, tak to muselo být díky hraně $\bar{l}_1 \to l_2 \Rightarrow v(\bar{l}_1) = 0 \Rightarrow v(l_1) = 1$ a klauzule platí. Podobně prol

Důsledek: 2-SAT je řešitelný lineárně $\because$ komponenty a TU jsou $O(n+m)$.

• Horn-SAT a jednotková propagace

Def: Klauzule je hornovská $\equiv$ má nejvýš 1 pozitivní literál.

$$\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \dots \vee \neg p_n \vee q \sim (p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \to q$$

$\to$ Horn-SAT = splnitelnost hornovského výroku = CNF s horn. klauzulemi

Jednotková propagace

$\to$ jednotková klauzule l vynucuje $v(l) = 1$

$\Rightarrow$ všechny klauzule s l se tím splní

$\Rightarrow$ z klauzulí s $\bar{l}$ lze $\bar{l}$ odstranit (je to 0)

$\varphi = (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_4) \wedge \underline{p_4} \quad \Rightarrow p_4 = 1$

$\varphi^{p_4} = (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge \underline{\neg p_5} \quad \Rightarrow p_5 = 0$

$(\varphi^{p_4})^{\neg p_5} = (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3)$ — není jednotková klauzule

Když hornovský výrok neobsahuje žádnou jednotkovou klauzuli, tak můžeme všechno ohodnotit 0 a bude to model.

Pz: klauzule: alespoň 2 literály, max. 1 pozitivní $\Rightarrow$ alespoň 1 negativní.

$\to \varphi$ má model $(0,0,0,1,0)$

Značení: φ^l = výrok vzniklý jednotkovou propagací l ve φ

? Co když φ není splnitelný?

$$p \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \underline{\neg r} \sim p \wedge (\neg p \vee q) \wedge \underline{\neg q} \sim p \wedge \neg p \quad \lightning$$

Algoritmus:

1. Pokud φ obsahuje dvojici opačných jednotkových klauzulí $l, \bar{l}$, není splnitelný.
2. Pokud φ neobsahuje žádnou jednotkovou klauzuli, nastav vše na 0 a tohle je model.
3. φ tedy obsahuje jednotkovou klauzuli $l \to$ nahraď φ výrokem φ^l a goto 1.

Korektnost: zřejmě musíme nastavit jednotkovou klauzuli na 1.

modely φ^l jsou modely φ, ve kterých platí l.

Složitost: zřejmě nejhůř kvadratické, lze implementovat lineárně.

• Algoritmus DPLL pro řešení SAT

Def: Literál l má čistý výskyt ve φ $\equiv$ l je ve φ, ale $\bar{l}$ se tam nevyskytuje.

👁 Literál s čistým výskytem lze vždy nastavit na 1 a odstranit tak všechny klauzule, kde se vyskytuje.

→ čistý výskyt nevyrobí nikdy jednotkovou kl., ale jednotková propagace může vyrobit č. výskyt ⇒ nejprve propagace

Algoritmus DPLL:

1. Pokud φ obsahuje jednotkovou klauzuli l, nastav $v(l)=1$, proveď jednotkovou propagaci a nahraď φ za výrok φ^l.

2. Pokud existuje literál l s čistým výskytem ve φ, nastav $v(l)=1$ a odstraň klauzule obsahující l

3. Pokud φ neobsahuje žádnou klauzuli, je splnitelný a tohle je model.

4. Pokud jednotková propagace vznikla prázdná klauzule $p \wedge \neg p \to \square$, je φ nesplnitelný.

5. Jinak zvol dosud neohodnocenou proměnnou p, a zavolej algoritmus rekurzivně na $\varphi \wedge p$ a na $\varphi \wedge \neg p$ ... zkusíme $p=1$ a $p=0$.

Složitost: Kvůli větvení to v nejhorším případě trvá exponenciálně.

Příklad: $(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (q \vee \neg r \vee s) \wedge (p \vee s) \wedge (p \vee \neg s) \wedge (q \vee s)$

→ ∄ jednotková klauzule, ale $\neg r$ má čistý výskyt $r=0$

$(\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee s) \wedge (p \vee \neg s) \wedge (q \vee s)$ → rekurze

$(p=1)$: $(\neg q \vee \neg s) \wedge (q \vee s)$

$(q=1)$: $\neg s$ ⇒ $s=0$ ⇒ model $\begin{array}{cccc} p & q & r & s \\ (1, & 1, & 0, & 0) \end{array}$

→ pro ilustraci i ostatní větve – najdeme více modelů:

$(q=0)$: s ⇒ $s=1$ ⇒ $(1,0,0,1)$

ale ne všechny
∵ čistý výskyt

$(p=0)$: $s \wedge \neg s \wedge (q \vee s)$

$s=0$: $\square \wedge q$ ⇒ tudy cesta nevede

- ## Formální dokazovací systémy

Def: Důkaz faktu, že v teorii T platí výrok φ je konečný syntaktický objekt, vycházející z axiomů T a výroku φ.

Pokud důkaz existuje, tak píšeme $T \vdash \varphi$.

Def: Dokazovací systém je

1) korektní $\equiv T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$ ... dokazatelný výrok je pravdivý

2) úplný $\equiv T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$ ... pravdivý výrok je dokazatelný

→ korektnost vyžadujeme vždy, také chceme, aby důkaz bylo možné algoritmicky sestrojit a ověřit jeho korektnost.

! nutný předpoklad: P musí být spočetný – potom je i T spočetná.

- ## Metoda analytického tabla

→ nejprve se zaměříme na případ $T = \emptyset$, tedy dokazujeme, že φ platí v logice.

→ tablo je strom představující hledání protipříkladu – modelu $v \not\models \varphi$

↳ basically ukážeme, že $\neg\varphi$ nemá model $\Rightarrow \varphi$ je tautologie (dk. sporem)

→ vrcholy stromu mají label $T\varphi$, $F\varphi$ ... platí / neplatí φ

→ do kořene stromu dáme $F\varphi$ a rozvíjíme tak, aby vždy platil následující invariant

Def: model se shoduje s nějakou položkou, pokud v něm platí (T) / neplatí (F) daný výrok

→ model se shoduje s větví ≡ se shoduje se všemi položkami v ní

Invariant: Každý model, který se shoduje s položkou v kořeni (platí v něm $\neg\varphi$) se shoduje i s některou větví tabla.

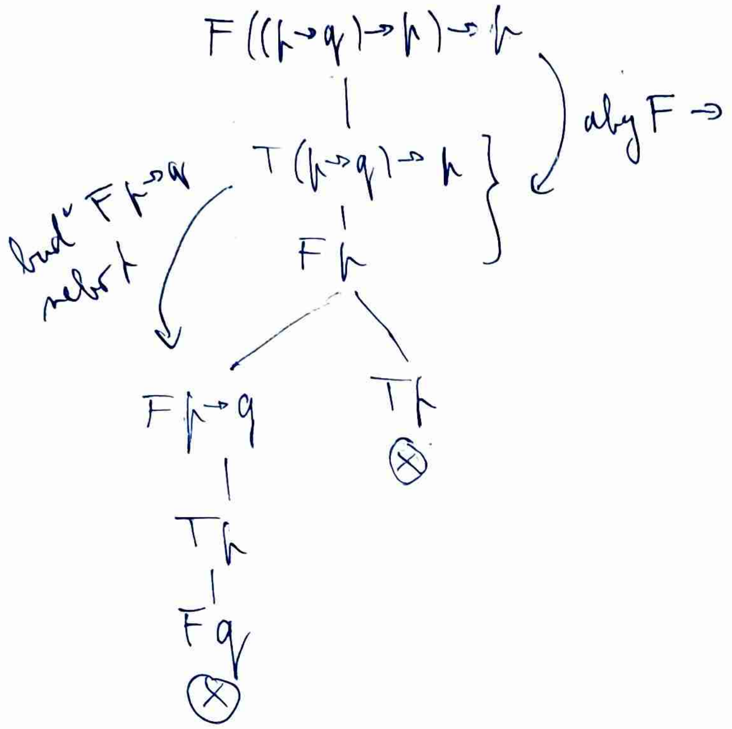
→ pokud je na větvi $T\varphi$ & $F\varphi$, potom větev selhala (je sporná)

→ pokud selžou všechny větve, je tablo sporné a máme důkaz $T \vdash \varphi$

→ pokud nějaká větev neselhala a je dokončená (vše na ní je zredukované), lze z ní zkonstruovat model, ve kterém φ neplatí

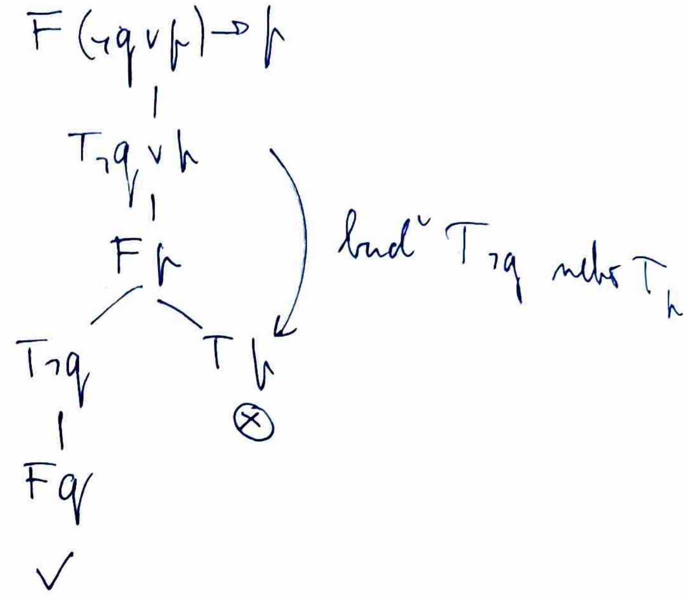
Příklad

$\varphi = ((p \to q) \to p) \to p$



⇒ φ je tautologie

$\varphi = (\neg q \vee p) \to p$

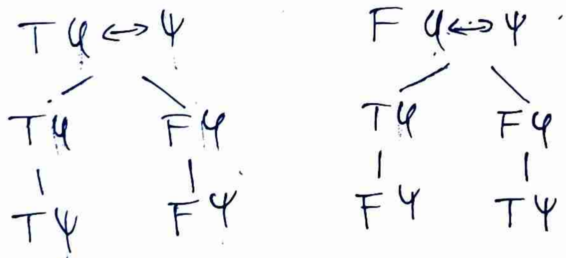


⇒ φ není tautologie

↳ $(0,0)$ není model $1 \vee 0 \to 0$

→ položky redukujeme pomocí atomických tabel

→ tabla pro ekvivalenci:



→ atomická tabla zachovávají invariant ⇒ celé tablo ho zachovává

Def: Strom je $T \neq \emptyset$ s částečným uspořádáním – kořen je nejmenší prvek

↳ množina předků libovolného vrcholu je navíc dobře uspořádaná

Uspořádaný strom má navíc lineární uspořádání množiny synů $\forall$ vrcholu

Větev je maximální lineárně uspořádaná podmnožina T.

Označkovaný strom má navíc funkci label: $T \to$ Labels.

Lemma (Königovo): Nekonečný strom, kde mají všechny vrcholy konečný stupeň má nekonečnou větev.

Def: <u>Položka</u> je nápis $T\varphi$ nebo $F\varphi$, kde φ je výrok.

Def: <u>Konečné tablo z teorie T</u> je uspořádaný, položkami označkovaný strom zkonstruovaný aplikací konečně mnoha následujících pravidel:

- jednoprvkový strom s libovolnou položkou je tablo z teorie T
- pro libovolnou položku P na větvi V, můžeme na konec větve V připojit atomické tablo pro položku P
- na konec libovolné větve můžeme připojit položku $T\alpha$ pro libovolný axiom $\alpha \in T$.

<u>Konvence</u>: Kořen atomického tabla nepřipisujeme (už na té větvi je).

Def: <u>Tablo z teorie T</u> je buď konečné, nebo i nekonečné; v tom případě je spočetné a definujeme to jako

$T := \bigcup_{i \geq 0} T_i$, kde T_0 je jednoprvkové tablo a T_{i+1} vzniklo z T_i v jednom kroku

Def: <u>Větev je sporná</u> $\equiv$ obsahuje položky $T\varphi$ i $F\varphi$.

<u>Tablo je sporné</u> $\equiv$ $\forall$ jeho větev je sporná

Def: Položka P na větvi V je na této větvi <u>redukovaná</u> $\equiv$

- je tvaru Tp nebo Fp pro prvovýrok $p \in \mathbb{P}$
- nebo se na V vyskytuje jako kořen atomického tabla

Def: <u>Větev je dokončená</u> $\equiv$ je sporná nebo

1) $\forall$ její položka je na této větvi redukovaná a
2) obsahuje položku $T\alpha$ pro $\forall \alpha \in T$

<u>Tablo je dokončené</u> $\equiv$ je každá jeho větev dokončená

Def: <u>Tablo důkaz</u> výroku φ z teorie T je sporné tablo z teorie T s položkou $F\varphi$ v kořeni.

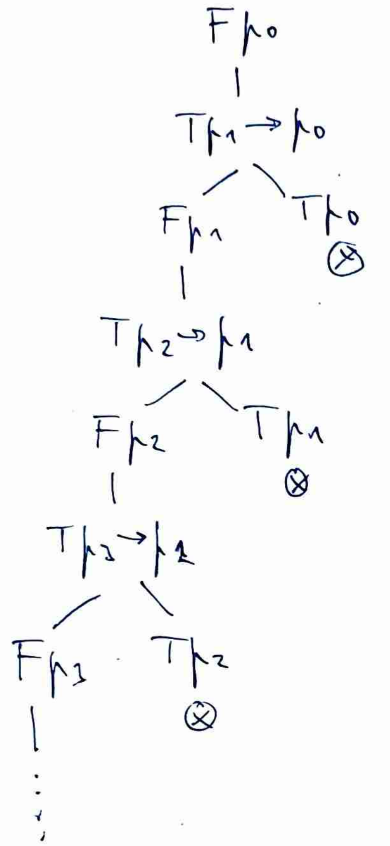
→ pokud existuje, je φ tablo dokazatelný z T, píšeme $T \vdash \varphi$

<u>Tablo zamítnutí</u> je sporné tablo s $T\varphi$ v kořeni.

→ pokud existuje, je φ tablo zamítnutelný z T, tedy platí $T \vdash \neg\varphi$.

Příklad: Dokončené nekonečné bezesporné tablo.

$T = \{p_{n+1} \to p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. $\varphi = p_0$



→ nejlevější větev je dokončená a bezesporná
↳ jsou tam ∀ axiomy a jsou zredukované

→ shoduje se s modelem $v = (0, 0, 0, \dots 0)$
tedy $v : \mathbb{P} \to \{0,1\}$, $p_i \mapsto 0$.

⇒ v je model T, ale není model φ

⇒ je to protipříklad ⇒ $T \not\models p_0$.

- Korektnost a úplnost tablo metody

Věta (o korektnosti): Je-li φ tablo dokazatelný z T, potom $T \models \varphi$.

Myšlenka důkazu: Protipříklad by se shodoval s některou z větví tablo důkazu, ale ty jsou všechny sporné.

Věta (o úplnosti): Pokud $T \models \varphi$, potom je φ tablo dokazatelný z T.

Myšlenka důkazu: Libovolné dokončené tablo s $F\varphi$ v kořeni musí být sporné, takže je tablo důkazem $T \vdash \varphi$.

- Konečnost a systematičnost důkazů

→ ukážeme

1) existuje-li tablo důkaz, existuje i konečný tablo důkaz
2) existuje algoritmus, který umí vždy zkonstruovat dokončené tablo
   ↳ systematické tablo
3) pokud ∃ tablo důkaz, tak tento alg. zkonstruuje konečný tablo důkaz
   ↳ pokud ∄, tak se alg. nemusí zastavit

Pro konečnou T je snadné zkonstruovat dokončené tablo.

↳ na začátku použijeme všechny axiomy a pak redukujeme

Def (Systematické tablo): Myšlenka: na všechny se dostane, střídáme
- redukci následující položky na všech bezesporných větvích kde je
- přidání následujícího axiomu na všechny bezesporné větve

Systematické t. z teorie $T=\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ s položkou R v kořeni je tablo $\tau := \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde τ_0 je jednoprvkové t. s R v kořeni a pro $i \geq 0$:

1) nechť P je nejlevější položka v co nejmenší úrovni, která ještě není redukovaná na nějaké bezesporné větvi obsahující P.
   → definujme τ'_i jako tablo vzniklé z τ_i připojením atomického tabla pro P na každou bezespornou větev obsahující P.
   → pokud P neexistuje (vše je redukované), tak $\tau'_i := \tau_i$.
2) τ_{i+1} vznikne z τ'_i připojením $T\alpha_{i+1}$ na $\forall$ bezespornou větev τ'_i
   → pokud $i \geq |T|$ (T je konečná a použili jsme všechny axiomy), tak definujeme $\tau_{i+1} := \tau'_i$

Lemma: Systematické tablo je dokončené.

Dk: Jsou všechny větve dokončené?

- sporné větve jsou dokončené z definice
- bezesporná větev:
  - obsahuje $T\alpha_i$ pro všechna i ... připojeno v i-tém kroku
  - každá položka je na ní zredukovaná – v nejhorším případě je tablo binární strom ⇒ pokud leží v hloubce h, tak na ní přišla řada nejpozději v kroku řádově $i = 2^h$.

Def: Kanonický model pro bezespornou větev V dokončeného tabla je

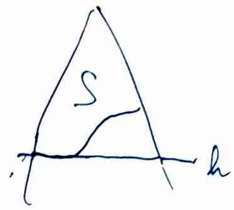
$$v : \mathbb{P} \to \{0,1\}, \quad v(p) := \begin{cases} 1, & \text{pokud se na } V \text{ vyskytuje } Tp \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

↳ pokud Fp nebo není zmíněno vůbec

→ když $F\varphi$ má bezespornou větev, tak kanonický model této větve je (jeden z) protipříklad.

Věta (o konečnosti sporu): Je-li $\tau = \bigcup_{i\geq 0} \tau_i$ sporné (ne nutně systematické) tablo. Potom pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ je τ_n sporné konečné tablo.

Dk: Definujme S jako množinu vrcholů, nad kterými není spor, tedy dvojice položek $T\varphi$, $F\varphi$.



1) Kdyby S byla nekonečná, tak podle Königova lemmatu pro podstrom τ na množině S máme nekonečnou, bezespornou větev v S, tedy i v τ. Ale τ je sporné ↯

2) Takže S je konečná $\Rightarrow$ celá leží v hloubce $\leq h \in \mathbb{N}$.

$\rightarrow \forall$ vrchol na úrovni $h+1$ už má nad sebou spor

$\Rightarrow$ zvolíme n tak, aby τ_n obsahovalo všechny vrcholy z prvních $h+1$ úrovní $\Rightarrow \forall$ větev τ_n je sporná ■

Důsledek (konečnost důkazu): Pokud $T \vdash \varphi$, potom $\exists$ konečný tablo důkaz φ z T.

Dk: Stačí neprodlužovat již sporné větve.

Důsledek (systematičnost důkazů): Pokud $T \vdash \varphi$, potom systematické tablo je konečným tablo důkazem φ z T.

Dk: Věta o úplnosti říká, že libovolné dokončené tablo z T s $F\varphi$ v kořeni je sporné, tedy tablo důkazem.

↳ platí to i pro systematické tablo, které je vždy dokončené

↳ navíc v systematickém tablu neprodlužujeme již sporné větve

$\Rightarrow$ je konečné ■

Důsledek: Tablo dokazatelnost $\vdash$ a pravdivost $\models$ jsou jedno a totéž.

$\Rightarrow$ v definicích je můžeme zaměňovat:

Teorie je sporná $\Leftrightarrow$ je v ní dokazatelný spor

Teorie je kompletní $\Leftrightarrow$ pro $\forall \varphi$: $T \vdash \varphi$ XOR $T \vdash \neg\varphi$.

Věta (o dedukci): $T, \varphi \vdash \psi \Leftrightarrow T \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Dk: stačí dokázat $T, \varphi \models \psi \Leftrightarrow T \models \varphi \rightarrow \psi$.

• Věta o kompaktnosti

Věta: Teorie má model $\iff$ $\forall$ její konečná část má model.

Dk: $\Rightarrow$ zřejmé

$\Leftarrow$: Pro spor nechť T nemá model, najdeme spornou konečnou $T' \subseteq T$. T je sporná, tedy $T \models \bot$ a z úplnosti $T \vdash \bot$, tedy existuje i konečný tablo důkaz τ výroku $\bot$ z T. Protože τ je konečný, tak obsahuje jen konečně mnoho axiomů z T. Označíme

$$T' := \{\alpha \in T \mid T\alpha \text{ je položka v tablu } \tau\}$$

$\Rightarrow$ τ je také tablo důkaz výroku $\bot$ z konečné teorie T', tedy $T' \vdash \bot$, dle korektnosti $T' \models \bot \Rightarrow T'$ je sporná ∎

• Aplikace kompaktnosti – dokazování vět typu

vlastnost nekonečného objektu O

$\Updownarrow$

vlastnost všech konečných podobjektů O'

$\Downarrow$ easy $\quad$ $\Uparrow$ kompaktnost

1. vlastnost popíšeme pomocí nekonečné teorie T
2. ke každé konečné $T' \subseteq T$ sestrojíme konečný podobjekt O'
3. O' splňuje danou vlastnost $\Rightarrow$ T' má model
4. dle věty o kompaktnosti má i T model $\Rightarrow$ O splňuje vlastnost

Příklad: Spočetně nekonečný graf je bipartitní $\iff$ $\forall$ konečný podgraf je bipartitní

Dk: $\Rightarrow$ $\forall$ podgraf b.p. grafu je b.p.

$\Leftarrow$ G je b.p. $\iff$ je 2-obarvitelný.

↳ uděláme jazyk $\mathbb{P} := \{C_v \mid v \in V(G)\}$

teorii $T := \{C_v \to \neg C_u \mid \{u,v\} \in E(G)\}$

→ zřejmě G je b.p. $\iff$ T má model

věta o kompaktnosti: stačí aby $\forall\, T' \subseteq T$ (konečná) měla model

$\Rightarrow$ buď G' podgraf G indukovaný vrcholy o kterých T' hovoří

→ $\because$ T' je konečná, je G' také konečný, tedy dle předpokladu b.p. a 2-obarvitelný – to určuje model T'. ∎

- Rezoluční metoda

- mnohem efektivnější PC implementace
- rezoluční pravidlo:

$(q \vee p_1 \vee p_2) \wedge (\neg q \vee p_1 \vee \neg p_3) \sim p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3$

→ obecně
$$\frac{\{p\} \cup C_1, \quad \{\neg p\} \cup C_2}{C_1 \cup C_2}$$
→ zápis $\frac{\text{podmínky}}{\text{výsledek}}$

- obecnější pravidlo řezu
$$\frac{\varphi \vee \psi, \quad \neg\varphi \vee \emptyset}{\psi \vee \emptyset}$$

- Množinová reprezentace CNF

$(p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3)$

$\{\{p_1, p_2\}, \{\neg p_1, p_3\}, \{p_1, \neg p_2, p_3\}\}$ → ohodnocení $\{p_1, p_3, \neg p_2\}$ funguje $(1, 1, 0)$

↳ klauzule = konečná množina literálů

↳ CNF formule = množina klauzulí (klidně ∞)

→ Modely a množiny literálů

- ohodnocení = množina literálů, co neobsahuje žádnou dvojici $l, \bar{l}$
- úplné ohodnocení obsahuje p nebo $\neg p$ pro každý prvovýrok
- ohodnocení V splňuje formuli S, píšeme $V \models S$ ≡

V obsahuje nějaký literál z každé klauzule S:

$$\forall C \in S: V \cap C \neq \emptyset$$

→ v tom příkladu $\{p_1, p_3\}$ také splňuje S, ale není úplné

Def. Nechť C_1, C_2 jsou klauzule a l literál splňující $l \in C_1$ & $\bar{l} \in C_2$.
Rezolventa klauzulí C_1 a C_2 přes literál l je klauzule

$$C := (C_1 \setminus \{l\}) \cup (C_2 \setminus \{\bar{l}\})$$

Pokud $V \models C_1$ a $V \models C_2$, potom $V \models C$

Def: <u>Rezoluční důkaz</u> <u>klauzule</u> C z formule S je konečná posloupnost klauzulí $C_0, C_1, \dots C_n = C$ t.ž. pro $\forall i$:

1) $C_i \in S$ nebo
2) C_i je rezolventou nějakých C_j, C_k, kde $j,k < i$.

→ pokud r.d. $\exists$, říkáme, že C je <u>rezolucí dokazatelná</u> z S: $S \vdash_R C$

→ <u>rezoluční zamítnutí</u> formule S je rezoluční důkaz $\square$ z S

↳ v každém modelu S musí platit $\square$ neboli spor $\bot$ → prázdná klauzule

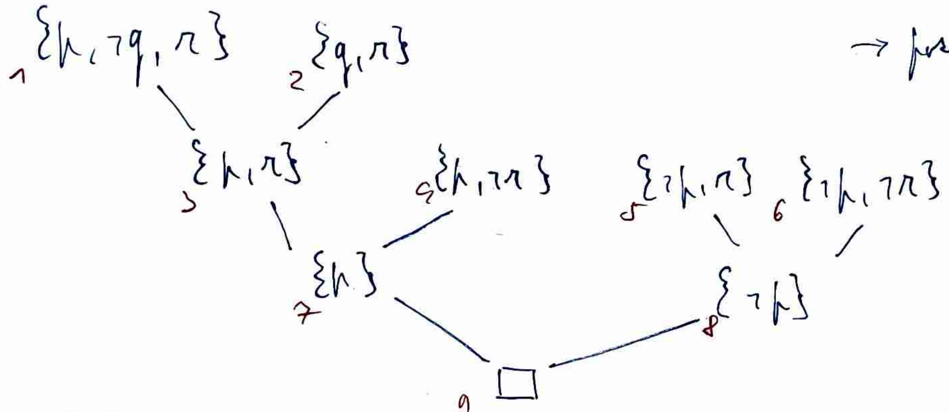
⇒ tedy S nemá model (spor nemá model)

<u>Příklad:</u> $S = \{\{p,\neg q,r\}, \{p,\neg r\}, \{\neg p,r\}, \{\neg p,\neg r\}, \{q,r\}\}$

1 2 3 4 5

↳ zamítnutí $1, 5, \{p,r\}, 2, \{p\}, 3, 4, \{\neg p\}, \square$

→ přirozená stromová struktura:



→ posloupnost zleva → doprava

↓

dolu

Def: <u>Rezoluční strom</u> klauzule C z formule S je konečný binární strom s vrcholy označenými klauzulemi, kde

- v kořeni je C
- v listech jsou klauzule z S
- v každém vnitřním vrcholu je rezolventa klauzulí z jeho synů

C má rezoluční strom z S $\iff$ $S \vdash_R C$.

Def: <u>Rezoluční uzávěr</u> $R(S)$ formule S definujeme induktivně jako nejmenší množinu klauzulí splňující

1) $C \in R(S)$ pro $\forall C \in S$
2) $C_1, C_2 \in R(S) \Rightarrow$ rezolventa C_1 a $C_2 \in R(S)$

<u>Intuice:</u> $R(S)$ je množina všech klauzulí, co se dají z S dokázat

- Korektnost a úplnost rezoluce

Věta (o korektnosti r.): Je-li CNF formule S rezolucí zamítnutelná $S \vdash_R \square$, potom je S nesplnitelná.

Dk: Nechť $S \vdash_R \square$, tedy existuje nějaký rezoluční důkaz $C_0, C_1, \dots C_n = \square$. Pro spor nechť existuje ohodnocení $\mathcal{V} \models S$. Indukcí ukážeme, že $\mathcal{V} \models \square$, což bude spor. Zřejmě $\mathcal{V} \models C_0$, protože $C_0 \in S$. Pro $i > 0$:

↳ spor ⊥ nemá model

1, $C_i \in S$ ✓ 2, C_i je rezolventou nějakých C_j, C_k, pro které to platí ✓

↳ $\mathcal{V} \models C_j$ & $\mathcal{V} \models C_k \Rightarrow \mathcal{V} \models C_i$

→ takto se dopracujeme k $\mathcal{V} \models C_n = \square$ ∎

- Strom dosazení

→ dosazení je množinový zápis jednotkové propagace

Def: Dosazení literálu l do formule S je formule

$$S^l := \{C \setminus \{\bar{l}\} \mid C \in S,\ l \notin C\}$$

👁 S^l je výsledek jednotkové propagace aplikované na $S \cup \{\{l\}\}$

👁 pokud S neobsahovala l ani $\bar{l}$, tak $S^l = S$

pokud S obsahovala $\{\bar{l}\}$, tak $\square \in S^l$, tedy S^l je sporná.
→ jednotková klauzule

Lemma: S je splnitelná $\iff$ je splnitelná S^l nebo $S^{\bar{l}}$.

Dk: $\Rightarrow$: Ohodnocení $\mathcal{V} \models S$ nemůže obsahovat l i $\bar{l}$ $\Rightarrow$ BÚNO $\bar{l} \notin \mathcal{V}$.

Ukážeme $\mathcal{V} \models S^l$. Buď $C \in S^l$. Zřejmě $C = C' \setminus \{\bar{l}\}$ pro nějakou $C' \in S$.

Protože $\mathcal{V} \models C'$ a $\bar{l} \notin \mathcal{V}$, tak $\mathcal{V}$ muselo splnit nějaký jiný literál a tento literál je i v C, čili $\mathcal{V} \models C$.

$\Leftarrow$: BÚNO nechť je S^l splnitelná a $\mathcal{V}$ je její ohodnocení.

∵ se l ani $\bar{l}$ nevyskytují v S^l, tak musí platit $\mathcal{V} \setminus \{\bar{l}\} \models S^l$

Plán: S^l odebralo klauzule s l $\Rightarrow$ musíme je splnit

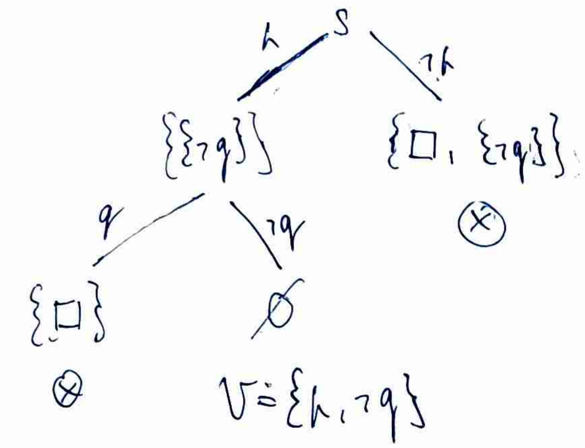
$\Rightarrow$ z $\mathcal{V}$ dáme pryč $\bar{l}$ a přidáme tam l

$\mathcal{V}' := (\mathcal{V} \setminus \{\bar{l}\}) \cup \{l\}$ je ohodnocení S. ∎

To, zda je S splnitelná můžeme zjistit postupným dosazováním obou literálů pro nějaký prvovýrok p a rozvětvením na S^p a $S^{\neg p}$

→ basically větvení z DPLL

$S = \{\{p\}, \{\neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$

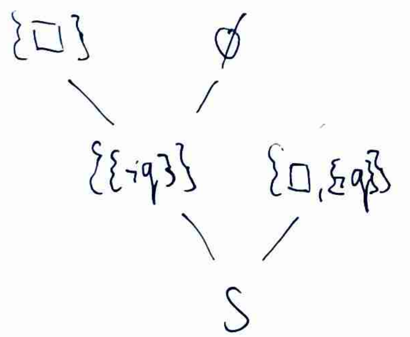


výsledný strom
||
STROM DOSAZENÍ

1) jakmile větev obsahuje □ je nesplnitelná
⇒ nepokračujeme v ní
2) pokud je v listu prázdná teorie, tak posloupnost dosazení určuje splňující ohodnocení

Důsledek: CNF formule je nesplnitelná ⟺ každá větev stromu dosazení obsahuje □.

Dk: Pro konečnou S indukcí podle $|Var(S)|$



→ pro $|Var(S)| = 0$ to triviálně platí $\begin{cases} S = \emptyset \\ S = \{\square\} \end{cases}$

→ pro 1 to platí ∵ podle lemmatu je $\{\{\neg q\}\}$ nesplnitelná
⟺ není splnitelná $\{\{\neg q\}\}^q$ ani $\{\{\neg q\}\}^{\neg q}$
→ tam už je 0 proměnných ⇒ už to máme dokázané

indukční krok: máme S, $|Var(S)| > 0$ → vybereme libovolný $l \in Var(S)$, aplikujeme lemma a řešíme úlohu pro S^l, $S^{\bar{l}}$, ale $|Var(S^l)| < |Var(S)|$.

• Pro nekonečnou S: → její obměna

⇒: dle věty o kompaktnosti ∃ konečná $S' \subseteq S$, která je také nesplnitelná. pro S' už to máme dokázané, čili po dosazení za všechny proměnné z Var(S') bude v každé větvi □ ... konečně mnoho kroků.

⇐: Obměnou: Nechť je S splnitelná, potom ∃ větev co neobsahuje □. S má splňující ohodnocení, tedy větev odpovídající tomuto ohodnocení ve stromu dosazení neobsahuje □.

↳ jinak by byla nesplnitelná, což je spor

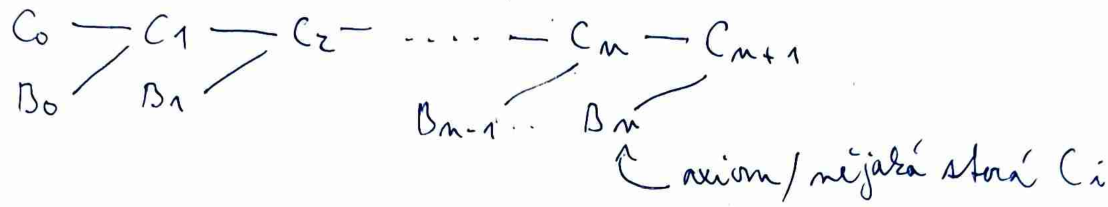
• <u>Úplnost rezoluce</u>

<u>Věta (o úplnosti r.)</u>: Je-li S nesplnitelná, potom je rezolucí zamítnutelná $S \vdash_R \square$.

<u>Dk</u>: indukcí podle $|Var(S)|$

• <u>LI rezoluce</u>

– rezoluční důkaz můžeme reprezentovat i lineárně



<u>Def</u>: <u>Lineární důkaz</u> klauzule C z formule S je konečná posloupnost

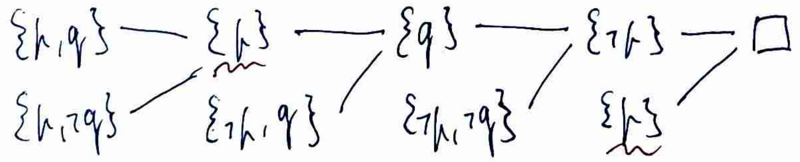
$$\begin{bmatrix}C_0\\B_0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}C_1\\B_1\end{bmatrix}, \dots \begin{bmatrix}C_n\\B_n\end{bmatrix}, C_{n+1},$$

kde C_i jsou <u>centrální klauzule</u>, B_i <u>boční klauzule</u>, C_0 je počáteční a $C_{n+1} = C$ koncová. Platí

- $C_0 \in S$, C_{i+1} je rezolventou C_i a B_i
- $B_0 \in S$, $B_i \in S$ nebo $B_i = C_j$ pro $j < i$.

<u>Lineární zamítnutí S</u> je lineární důkaz $\square$ z S.

<u>Příklad</u>: $S = \{\{p,q\},\{p,\neg q\},\{\neg p,q\},\{\neg p,\neg q\}\}$



C má lineární důkaz z S $\Leftrightarrow$ C má rezoluční důkaz z S.

<u>Def</u>: <u>LI-důkaz</u> klauzule C z formule S je lineární důkaz, ve kterém jsou všechny boční klauzule axiomy z S.

→ pokud LI důkaz existuje, je C LI-dokazatelná z S $\quad S \vdash_{LI} C$

→ S je LI zamítnutelná $\equiv$ $S \vdash_{LI} \square$.

LI důkaz odpovídá rezolučnímu stromu tvaru chlupaté cesty

<u>Důsledek</u>: LI důkaz je <u>korektní</u>, tedy $S \vdash_{LI} \square \Rightarrow S$ nemá ohodnocení.

→ ale ztrácíme úplnost pro obecné S

- Úplnost LI-rezoluce pro Hornovy formule

→ budeme umět dokazovat věci typu

Hornova formule $\models p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$

→ sporem, tedy $H \wedge \underbrace{\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n)}_{\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n \;\leftarrow\; \text{cíl}} \vdash_{LI} \square$

Def: Fakt je pozitivní jednotková klauzule, tedy $\{p\}$ (hornovská)

Pravidlo je hornova klauzule tvaru $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n \vee q \sim (p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q$

Cíl je neprázdná hornova klauzule bez pozitivního literálu $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n$

Příklad: Máme splnitelnou hornovskou teorii

$T = \{\{p, \neg r, \neg s\}, \{\neg q, r\}, \{q, \neg s\}, \{s\}\}$, chceme dokázat $T \models p \wedge q$

$\Rightarrow$ cíl $G := \{\neg p, \neg q\}$ a ukážeme $T \cup \{G\} \vdash_{LI} \square$, z korektnosti $\models$

$$
\begin{tikzcd}
G = \{\neg p, \neg q\} \arrow[r, dash] & \{\neg q, \neg r, \neg s\} \arrow[r, dash] & \{\neg q, \neg s\} \arrow[r, dash] & \{\neg s\} \arrow[r, dash] & \square \\
\{p, \neg r, \neg s\} \arrow[ur, dash] & \{\neg q, r\} \arrow[ur, dash] & \{q, \neg s\} \arrow[ur, dash] & \{s\} \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}
$$

Věta: Nechť je T splnitelná Hornova formule a G je cíl.

Pokud je $T \cup \{G\}$ nesplnitelná, potom je i LI-zamítnutelná,

a to zamítnutím, které začíná cílem G.

Dk: konstrukcí tohoto LI zamítnutí.

PREDIKÁTOVÁ LOGIKA (prvního řádu) → proměnné nemohou být množiny
→ proč: proměnné mohou být [illegible]

příklad: Chceme vyjádřit implikaci $x_1 \leq y_1$ & $x_2 \leq y_2 \Rightarrow (y_1 \cdot y_2) - (x_1 \cdot x_2) \geq 0$

$$\varphi = (x_1 \leq x_2) \wedge (y_1 \leq y_2) \rightarrow ((y_1 \cdot y_2) + (-(x_1 \cdot x_2)) \geq 0)$$

→ 2 binární relační symboly $\geq, \leq$

→ 2 binární funkční $+, \cdot$

1 unární funkční $-$

1 konstantní (= nulární funkční) 0

→ model, ve kterém φ platí: $\mathbb{N}$ s relacemi $\leq^{\mathbb{N}}, \geq^{\mathbb{N}}, +^{\mathbb{N}}, -^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, 0^{\mathbb{N}}$

→ ale podobně v $\mathbb{Z}$ už neplatí: $-3 \leq -2$, $-5 \leq -2$, ale $4 - 15 \ngeq 0$.

- <u>Struktury</u>

<u>Def</u>: <u>Signatura</u> je dvojice $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ kde $\mathcal{R}$ a $\mathcal{F}$ jsou disjunktní množiny <u>relačních</u> a <u>funkčních</u> (ty zahrnují i konstantní) <u>symbolů</u> spolu s jejich <u>aritami</u> – tedy funkce $ar: \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N}$. Symbol '$=$' je ovšem rezervovaný pro rovnost, takže zde není.

<u>Ukázka</u>: Pokud je arita a to, zda jsou r. nebo f. zřejmé z kontextu → jen symboly

$\langle E \rangle$ ... signatura grafů, E je bin. rel. symbol "být hranou"

$\langle \leq \rangle$ ... signatura částečných uspořádání

$\langle +, -, 0 \rangle$ ... signatura grup

$\langle +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$ ... signatura těles

$\langle Succ, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ ... signatura aritmetiky

→ struktura je nějaká konkrétní „implementace" dané signatury na neprázdné doméně prvků

↳ signatura ~ interface

↳ struktura ~ třída co to implementuje

<u>Ukázka</u>:

- struktura v prázdné signatuře $\langle \rangle$ je libovolná neprázdná množina
- struktura v signatuře grafů je $\langle V, E \rangle$, V je doména, E je bin. relace $V \neq \emptyset$, $E \subseteq V^2$ ... orientovaný graf

→ pokud je navíc E reflexivní, tranzitivní a symetrická, tak to je částečné uspořádání

- signatura grup:

  $\underline{\mathbb{Z}_n} = \langle \mathbb{Z}_n, +, -, 0 \rangle$ ... aditivní grupa $\mathbb{Z}_n$

  $S_n = \langle$ permutace, $\circ$, $^{-1}$, $id \rangle$ je symetrická grupa všech permutací na n prvcích.

  $\underline{\mathbb{Q}^*} = \langle \mathbb{Q} \setminus 0, \cdot, {}^{-1}, 1 \rangle$ ... multiplikativní grupa racionálních č. bez nuly

- signatura těles

  $\underline{\mathbb{R}} = \langle \mathbb{R}, +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$ ... reálná čísla

- signatura aritmetiky

  $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, Succ, +, \cdot, 0, \leq \rangle$, kde $Succ(x) = x+1$ je standardní model aritmetiky

Def: Struktura v signatuře $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ je trojice $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^a, \mathcal{F}^a \rangle$, kde

- A je neprázdná množina ... doména / universum
- $\mathcal{R}^a = \{ R^a \mid R \in \mathcal{R} \}$, kde $R^a \subseteq A^{ar(R)}$ je interpretace relačního symbolu R
- $\mathcal{F}^a = \{ f^a \mid f \in \mathcal{F} \}$, kde $f: A^{ar(R)} \to A$ je interpretace funkčního symbolu f

  ↳ speciálně pro konstantní symbol $c \in \mathcal{F}$ máme $c^a \in A$.

- <u>Syntaxe</u>

Def: Jazyk je daný nějakou konkrétní signaturou a informací, zda je s rovností nebo ne.

→ rovnost '=' je identita prvků v konkrétní struktuře dané signatury.

Do jazyka patří:

1) spočetně mnoho proměnných $x_0, x_1, x_2, \dots$ – množina všech prom. značíme Var.
2) relační a funkční symboly ze signatury, případně i symbol '='.
3) kvantifikátory $\underbrace{(\forall x)}_{\text{1 symbol}}$, $(\exists x)$ pro každou proměnnou $x \in Var$
4) symboly logických spojek: $\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$, závorky '(', ')' a čárka ','

<u>Ukázky</u>:

$\langle\rangle$ s rovností ... jazyk čisté rovnosti

$\langle c_0, c_1, \dots \rangle$ s rovností ... jazyk spočetně mnoha konstant

$\langle \leq \rangle$ s rovností ... jazyk uspořádání

$\langle E \rangle$ s rovností ... jazyk teorie grafů

$\langle \in \rangle$ s rovností ... jazyk teorie množin

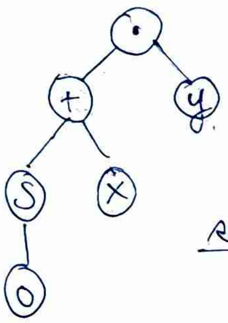
Def: Termy jazyka L jsou konečné nápisy definované induktivně
1) každá proměnná a každý konstantní symbol je term
2) je-li f funkční symbol arity n a jsou-li $t_1, \dots t_n$ termy, potom je nápis $f(t_1, t_2, \dots t_n)$ také term.

→ Term_L := množina všech termů jazyka L.

Def: $\mathrm{Tree}(t)$ pro term t: v listech proměnné / konstanty, vnitřní vrcholy - fční sym.

Ukázka: $(S(0)+x)\cdot y$ v jazyce aritmetiky

↳ formálně $\cdot(+(S(0),x),y)$ ... prefixový zápis, $\cdot$ a $+$ jsou funkce



strom tohoto termu

sémantika: proměnné ohodnotíme prvky, konst. a fční symboly nahradíme interpretacemi ve struktuře ⇒ výsledek je prvek domény

Def: Atomická formule jazyka L je nápis $R(t_1, \dots t_n)$, kde R je n-ární relační symbol z L (včetně '=') a $t_i \in \mathrm{Term}_L$.

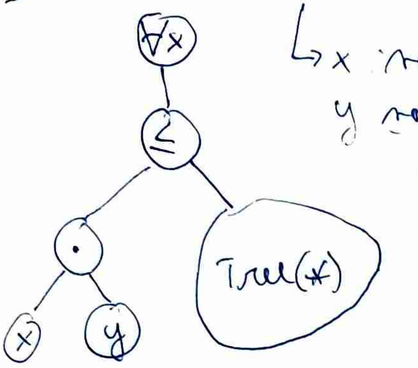
$x \cdot y \leq (S(0)+x)\cdot y$ → $\leq$ opět píšeme infixově

Def: Formule jazyka L jsou konečné nápisy definované induktivně:
1) každá atomická formule jazyka L je formule
2) je-li φ formule, je $(\neg\varphi)$ také formule
3) jsou-li φ, ψ formule, je $(\varphi \square \psi)$ také formule ... $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
4) je-li φ formule a x proměnná, jsou $((\forall x)\varphi)$ a $((\exists x)\varphi)$ také formule.

Konvence: kvantifikátory mají stejnou prioritu jako $\neg$ (nejvyšší)
místo $((\forall x)\varphi)$ píšeme $(\forall x)\varphi$ → jako ve výr. logice

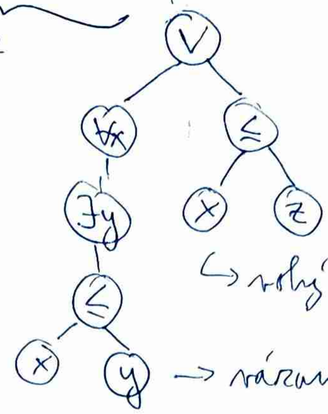
Def: Strom formule $\mathrm{Tree}(\varphi)$ definujeme induktivně takto:
- je-li φ atomická formule $R(t_1, \dots t_n)$, je v kořeni R a připojíme stromy $\mathrm{Tree}(t_i)$
- je-li φ tvaru $(\neg\varphi')$: v kořeni $\neg$, jediný syn: kořen $\mathrm{Tree}(\varphi')$
- je-li φ tvaru $(\varphi' \square \psi)$: v kořeni $\square$, dva synové pro $\mathrm{Tree}(\varphi')$ a $\mathrm{Tree}(\psi)$
- je-li φ tvaru $((Qx)\varphi')$ pro $Q \in \{\forall, \exists\}$: v kořeni Qx, jediný syn pro $\mathrm{Tree}(\varphi')$

Příklad: $\varphi = (\forall x)(x \cdot y \le \underbrace{(S(0) + x)\cdot y}_{*})$ | $\psi = (\forall x)(\exists y)(x \le y) \vee (x \le z)$



↳ x vázaná, y volná

$\varphi(y)$



↳ y vázaná, z volná, x volná i vázaná

$\psi(x, z)$

↳ volný výskyt

→ vázaný výskyt

Qx se nepočítá

- **Sémantika**

Def: Výskyt proměnné x ve formuli φ je list $Tree(\varphi)$ označený x. Výskyt je

1) vázaný $\equiv$ je součástí nějaké podformule (podstromu) začínající (Qx)
2) volný $\equiv$ není-li vázaný

Def: Proměnná x je volná ve φ $\equiv$ má volný výskyt.
vázaná ve φ $\equiv$ má vázaný výskyt.

→ zápis $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$ znamená, že $x_1, x_2, \dots x_n$ jsou volné proměnné ve φ

Poznámka: význam φ bude záviset pouze na volných proměnných, proměnné v kvantifikátorech můžeme libovolně přejmenovat.

Def: Formule je

1) otevřená $\equiv$ nemá žádný kvantifikátor
2) uzavřená $\equiv$ nemá žádnou volnou proměnnou ← sentence

Ukázka:

- $x + y \le 0$ ... otevřená
- $(\forall x)(\forall y)(x + y \le 0)$ ... sentence = uzavřená
- $(\forall x)(x + y \le 0)$ ... ani otevřená ani uzavřená
- $(0+1=1) \wedge (1+1=0)$ ... otevřená i uzavřená <=> nemá žádné proměnné
- atomické formule a jejich kombinace pomocí logických spojek jsou otevřené
- $(\forall x)\ 0=1$ ... formule bez vázané proměnné není nutně otevřená!

• <u>Instance a varianty formulí</u>

<u>Neformálně</u>: proměnná vázaná ke kvantifikátorům je lokální, volná ~ globální

- <u>instance</u> formule ~ dosazení nějakého termu za globální proměnnou
- <u>varianta</u> formule ~ přejmenování lokální proměnné

$$P(x) \wedge (\forall x)(Q(x) \wedge (\exists x) R(x))$$

1. volný 2. vázaný 3. vázaný

1, substituujeme za x term $t = 1+1$
2, přejmenujeme x na y
3, přejmenujeme x na z

Instance: $P(1+1) \wedge (\forall x)(Q(x) \wedge (\exists x) R(x))$ ... značíme $\varphi(x/t)$

Varianta: $P(x) \wedge (\forall y)(Q(y) \wedge (\exists z) R(z))$

? kdy je instance důsledek původní formule ?

$\varphi(x) = (\exists y)(x+y=1)$ ... existuje $1-x$

$\varphi(x/1) = (\exists y)(1+y=1)$ ... existuje $1-1$ ✓

$\varphi(x/y) = (\exists y)(y+y=1)$ ... existuje 2^{-1} ✗

<u>Def</u>: Term t je <u>substituovatelný</u> za proměnnou x ve formuli $\varphi \equiv$ po nahrazení všech volných výskytů x za t nevznikne žádný nový vázaný výskyt.

→ vzniklá formule = <u>instance</u>, značíme ji $\varphi(x/t)$

👁 konstantní termy jsou vždy substituovatelné

<u>Def</u>: Nechť φ obsahuje podformuli s kvantifikátorem $(Qx)\psi$ a pro $y \in Var$ platí

- y je substituovatelná za x do ψ,
- y nemá volný výskyt ve ψ.

<u>Varianta</u> φ vznikne nahrazením $(Qx)\psi$ za $(Qy)\psi(x/y)$.

<u>Ukázka</u>: $\varphi = (\exists x)(\forall y)(x \leq y)$

- $(\exists u)(\forall y)(u \leq y)$ ✓
- $(\exists y)(\forall y)(y \leq y)$ ✗ porušuje 1,
- $(\exists x)(\forall x)(x \leq x)$ ✗ porušuje 2, ... x má volný výskyt ve $(\forall y)(x \leq y)$

• Modely a pravdivostní hodnota

Neformálně:

• modely = struktury dané signatury

• formule platí ve struktuře ≡ platí při každém ohodnocení volných proměnných (prvky z domény)

• hodnota termu se vyhodnocuje podle jeho stromu

• pravdivostní hodnoty atomických formulí získáme z hodnot termů $R(t_1 \dots t_n)$ (značíme)

• ——"—— složených formulí vyhodnocujeme pomocí jejich stromu.

$(\forall x) \sim$ konjunkce přes všechny prvky domény

$(\exists x) \sim$ disjunkce ——"——

Def: Model jazyka L nebo také L-struktura je libovolná struktura v signatuře jazyka L. Třídu všech modelů jazyka L označíme M_L.

↳ doména = množina a množina všech množin neexistuje

Ukázka: Modely jazyka $\langle \leq \rangle$ jsou například

• $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ ... částečná uspořádání

• $\langle \mathbb{Q}, > \rangle$, $G = \langle V, E \rangle$, $\langle \{0,1\}, \emptyset \rangle$ ... ne částečná uspořádání, ale modely ano

Def: Nechť t je term jazyka $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ a nechť $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ je L-struktura. Ohodnocení proměnných množinou A je libovolná funkce $e : \mathrm{Var} \to A$.

Def: Hodnota termu t ve struktuře $\mathcal{A}$ při ohodnocení e, značíme $t^{\mathcal{A}}[e]$, je dána:

1) $x^{\mathcal{A}}[e] := e(x)$ pro $x \in \mathrm{Var}$

2) $c^{\mathcal{A}}[e] := c^{\mathcal{A}}$ pro konstantní $c \in \mathcal{F}$

3) je-li $t = f(t_1, \dots t_n)$ pro $f \in \mathcal{F}$: $t^{\mathcal{A}}[e] := f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[e], \dots t_n^{\mathcal{A}}[e])$.

Ukázka: $t = x + 1$, $L = \langle +, 1 \rangle$, struktura $\langle \mathbb{N}, \cdot, 3 \rangle$, $e(x) = 2$

$t^{\mathcal{A}}[e] = +(x, 1) = \cdot(2, 3) = 6$

Def: Nechť φ je formule v jazyce L, $\mathcal{A}$ je model L a e je ohodnocení proměnných. Pravdivostní hodnota φ v $\mathcal{A}$ při ohodnocení e, značíme $PH^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$, je dána:

1) pro atom. f: $PH^{\mathcal{A}}(R(t_1, \dots t_n))[e] := \begin{cases} 1 & \text{pokud } (t_1^{\mathcal{A}}[e], \dots t_n^{\mathcal{A}}[e]) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

2) $PH^{\mathcal{A}}(\neg\varphi)[e] := f_{\neg}(PH^{\mathcal{A}}(\varphi)[e])$

3) $PH^{\mathcal{A}}(\varphi \square \psi)[e] := f_{\square}(PH^{\mathcal{A}}(\varphi)[e], PH^{\mathcal{A}}(\psi)[e])$ ... $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

4) $PH^{\mathcal{A}}((\forall x)\varphi)[e] := \min_{m \in A} (PH^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/m)])$

$PH^{\mathcal{A}}((\exists x)\varphi)[e] := \max_{m \in A} (PH^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/m)])$ ... $e(x/m)$ je ohodnocení vzniklé z e změnou $e(x)$ na m

p. hodnota formule závisí pouze na ohodnocení volných proměnných

$\Rightarrow$ p. hodnota sentence nezávisí na ohodnocení vůbec

- Platnost formule ve struktuře

L-struktura

Def: Nechť φ je formule v jazyce L, $\mathcal{A}$ model L a e ohodnocení.

1, $\mathcal{A} \models \varphi[e] \equiv PH^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]=1$ ... φ platí v $\mathcal{A}$ při ohodnocení e

2, $\mathcal{A} \not\models \varphi[e] \equiv PH^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]=0$ ... φ neplatí v $\mathcal{A}$ při ohodnocení e

→ globálně:

3, φ je pravdivá v $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \varphi \equiv \forall e$ ohodnocení: $\mathcal{A} \models \varphi[e]$

4, φ je lživá v $\mathcal{A} \equiv \forall e$ ohodnocení: $\mathcal{A} \not\models \varphi[e] \iff \mathcal{A} \models \neg\varphi$.

sentence jsou vždy buď lživé nebo pravdivé.

Def: Generální uzávěr formule $\varphi(x_1, \dots x_n)$ (tedy $x_1, \dots x_n$ jsou volné proměnné) je sentence $(\forall x_1) \dots (\forall x_n) \varphi$.

$A \models \varphi \iff A \models (\forall x)\varphi$

tedy děláme nyní požadujeme aby $\forall m \in A$: $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/m)]$

tedy pro volnou x: $\forall e$ ohodnocení $\mathcal{A} \models \varphi[e]$

$\Rightarrow$ pro libovolné ohodnocení e, $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/m)]$

Důsledek: Formule platí ve struktuře $\iff$ tam platí její generální uzávěr.

- Teorie v predikátové logice

Def: Teorie jazyka L je libovolná množina L-formulí $T \subseteq M_L$.

Def: Model teorie T je L-struktura $\mathcal{A}$, ve které platí všechny axiomy T.

$$\mathcal{A} \models T \equiv \forall \alpha \in T: \mathcal{A} \models \alpha$$

$$M_L(T) := \{\mathcal{A} \in M_L \mid \mathcal{A} \models T\}$$

Def: Nechť je T teorie v jazyce L. L-formule φ je

1, pravdivá v T, $T \models \varphi \equiv M_L(T) \subseteq M_L(\varphi) \iff \forall \mathcal{A} \in M_L(T): \mathcal{A} \models \varphi$.

2, lživá v $T \equiv T \models \neg\varphi \iff M_L(T) \cap M_L(\varphi) = \emptyset$

3, nezávislá v $T \equiv$ není ani lživá ani pravdivá v T

→ je to tautologie

Značení: Pokud $\emptyset \models \varphi$, tak píšeme $\models \varphi$ a říkáme, že φ platí v logice.

Def: Spor $\bot := R(x_1, \dots x_n) \wedge \neg R(x_1, \dots x_n)$, kde R je libovolný relační symbol nebo rovnost, pokud daný jazyk neobsahuje žádné relační symboly.

Def.: Teorie T je

1) sporná $\equiv T \models \bot$ ... platí v ní spor
$\iff$ v ní platí každá formule
$\iff$ nemá žádný model

2) bezesporná $\equiv$ není sporná $\iff$ má aspoň 1 model

3) kompletní $\equiv$ je bezesporná & každá sentence je v ní buď pravdivá nebo lživá.

! neplatí, že má jediný model — ...

Def: Důsledky teorie T jsou sentence pravdivé v T. Označíme
$$\mathrm{Csq}_L(T) := \{\varphi \mid \varphi \text{ je sentence a } T \models \varphi\}$$

Def: Struktury $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ v témže jazyce jsou elementárně ekvivalentní, píšeme $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, jestliže v nich platí tytéž sentence.

Teorie je kompletní $\iff$ má právě 1 model až na elementární ekvivalenci

Ukázka: $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ a $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ jsou el. ekvivalentní. Klíčová je hustota uspořádání. Problém by mohla být neúplnost $\mathbb{Q}$, ale úplnost hovoří o vlastnosti všech podmnožin, ale v logice prvního řádu nemohou být proměnné množiny.

Tvrzení: Nechť je T teorie a φ sentence. Platí $T \models \varphi \iff T \cup \{\neg\varphi\}$ nemá model.

Dk: $T \cup \{\neg\varphi\}$ nemá model $\iff \neg\varphi$ neplatí v žádném modelu T
$\iff \varphi$ platí v každém modelu T $\blacksquare$

Ukázka teorie: Teorie grafů $L = \langle E \rangle$ s rovností, axiomy ireflexivity a symetrie
$$T_G = \{\neg E(x,x),\ E(x,y) \to E(y,x)\}$$
$\to$ modely $G = \langle V, E^G \rangle$, kde E^G je libovolná iref. sym. relace

- $x \neq y \to E(x,y)$ platí v G $\iff$ G je úplný.
  $\hookrightarrow$ formálně $\neg x = y$

- $(\exists y_1)(\exists y_2)(y_1 \neq y_2 \wedge E(x,y_1) \wedge E(x,y_2) \wedge (\forall z)(E(x,z) \to z = y_1 \vee z = y_2))$
  platí v G $\iff \forall$ vrchol má stupeň 2

- Teorie uspořádání $L = \langle \leq \rangle$ s r. $T = \{x \leq x,\ x \leq y \wedge y \leq z \to x \leq z,\ x \leq y \wedge y \leq x \to x = y\}$
  - formule $x \leq y \vee y \leq x$ platí $\iff$ model (ČUM) je lineární usp.

- Podstruktury

→ zobecnění podgrupy / vektorového podprostoru / indukovaného podgrafu

→ na podmnožině univerza vyrobíme strukturu, co zdědí všechny relace, funkce a konstanty

<u>Def:</u> Struktura $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^{\mathcal{B}}, \mathcal{F}^{\mathcal{B}} \rangle$ je <u>podstruktura</u> struktury $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle \equiv$

1) $\emptyset \neq B \subseteq A$ → kdyby $B = \emptyset$, tak $\mathcal{B}$ není struktura

2) $R^{\mathcal{B}} = R^{\mathcal{A}} \cap B^{ar(R)}$ pro $\forall R \in \mathcal{R}$

3) $f^{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{A}} \cap (B^{ar(f)} \times B)$ pro $\forall f \in \mathcal{F}$

↳ speciálně pro konstantní $c \in \mathcal{F}$ máme $c^{\mathcal{B}} = c^{\mathcal{A}} \in B$.

Množina $\emptyset \neq B \subseteq A$ je univerzem podstruktury $\Leftrightarrow$ je uzavřená na všechny funkce struktury $\mathcal{A}$ včetně konstant.

$\Rightarrow$ je to restrikce $\mathcal{A}$ na množinu B, značíme $\mathcal{A} \upharpoonright B$.

<u>Ukázka:</u> $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ je podstrukturou $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$, tedy $\underline{\mathbb{Z}} = \underline{\mathbb{Q}} \upharpoonright \mathbb{Z}$

→ také $\underline{\mathbb{N}} = \underline{\mathbb{Z}} \upharpoonright \mathbb{N} = \underline{\mathbb{Q}} \upharpoonright \mathbb{N}$

→ ale $\mathbb{Z}^-$ není doménou žádné podstruktury ∵ není uzavřená na násobení.

Pokud $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, φ je otevřená formule a $e : Var \to \underline{B}$, potom platí

→⊗ kvantifikátory

$\mathcal{B} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e]$.

<u>Důsledek:</u> Otevřená formule platí ve struktuře $\mathcal{A}$ $\Leftrightarrow$ platí v každé $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

<u>Def:</u> Teorie T je <u>otevřená</u> $\equiv$ všechny její axiomy jsou otevřené

Modely otevřené teorie jsou uzavřené na podstruktury, tedy každá podstruktura modelu této teorie je také její model.

<u>Ukázka:</u> Teorie grafů je otevřená - indukovaný podgraf je grafem.

<u>Def:</u> Nechť $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ a $\emptyset \neq X \subseteq A$. Buď $B \subseteq A$ nejmenší podmnožina obsahující X, která je uzavřená na všechny funkce $\mathcal{A}$ (tedy i konstanty). Potom <u>podstruktura</u> $\mathcal{A} \upharpoonright B$ je <u>generovaná</u> X a značíme ji $\mathcal{A}(X)$.

<u>Ukázka:</u> $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$

$\underline{\mathbb{Q}}(\{1\}) = \underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{Q}}(\{-1\}) = \underline{\mathbb{Z}}$

• Expanze a redukt

Def: Nechť $L \subseteq L'$ jsou jazyky, $\mathcal{A}$ L-struktura a $\mathcal{A}'$ L'-struktura na stejné doméně. Je-li interpretace každého symbolu z L stejná v $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$, potom:

1) $\mathcal{A}'$ je expanze $\mathcal{A}$ do L' ... L' expanze $\mathcal{A}$

2) $\mathcal{A}$ je redukt $\mathcal{A}'$ na L ... L redukt $\mathcal{A}'$

Ukázka: Mějme grupu $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, -, 0 \rangle$.

- $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ je její redukt
- $\langle \mathbb{Q}, +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$ je její expanze na těleso

Věta (o konstantách): Nechť φ je L-formule s volnými proměnnými $x_1, \dots x_n$. Označme jako L' rozšíření L o nové konstantní symboly $c_1, \dots c_n$ a T' stejnou teorii jako T, ale v jazyce L'. Potom platí

$$T \models \varphi \iff T' \models \varphi(x_1/c_1, \dots x_n/c_n)$$

Dk: Stačí pro 1 volnou proměnnou, rozšíření indukcí.

$\Rightarrow$: Nechť φ platí v každém modelu T. Chceme ukázat, že $\varphi(x/c)$ platí v každém modelu T'. Tedy buď $\mathcal{A}'$ model T' a $e': Var \to A'$. Ukážeme $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e']$ pro libovolné ohodnocení e'.

$\rightarrow$ označme $\mathcal{A}$ redukt $\mathcal{A}'$ na L. (zapomeneme konstantu c).
zřejmě $\mathcal{A}$ je model T, tedy dle předpokladu $\mathcal{A} \models \varphi$, tedy $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ pro libovolné $e: Var \to A' = A$, speciálně i pro $e'(x/c^{\mathcal{A}'})$, kde x ohodnotíme interpretací c v $\mathcal{A}'$ (domény jsou stejné).

$\Rightarrow$ máme $\mathcal{A} \models \varphi[e'(x/c^{\mathcal{A}'})] \Rightarrow \mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e']$

$\Leftarrow$: Nechť $\varphi(x/c)$ platí v každém modelu T'. Chceme φ platí v každém modelu T. Buď $\mathcal{A}$ model T a $e: Var \to A$. Ukážeme $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

$\rightarrow$ označme $\mathcal{A}'$ expanzi $\mathcal{A}$ do L', kde c interpretujeme jako $c^{\mathcal{A}'} = e(x)$.
Dle předpokladu $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$. Protože v $\mathcal{A}'$ platí $c^{\mathcal{A}'} = e(x)$, tak $\mathcal{A}' \models \varphi[e]$. Formule φ neobsahuje c, tudíž máme $\mathcal{A} \models \varphi[e]$. ∎

• **Extenze teorií**

Def: Pro teorii T jazyka L je

1) extenze: T' v jazyce $L' \supseteq L$ splňující $Csq_L(T) \subseteq Csq_{L'}(T')$.

→ extenze je

2) jednoduchá ≡ $L' = L$

3) konzervativní ≡ $Csq_L(T) = Csq_L(T') = Csq_{L'}(T') \cap FORMULE_L$

Def: Teorie T a T' ve stejném jazyce jsou ekvivalentní ≡

T' je extenze T & T je extenze T'.

Pro T, T' ve stejném jazyce:

- T' je extenze $T \iff M_L(T) \supseteq M_L(T')$
- T' je ekvivalentní s $T \iff M_L(T) = M_L(T')$

vektor modelu necháme

→ zvětšíme-li jazyk

- výroková l.: přidáváme/zapomínáme hodnoty pro nové výrokové proměnné
- predikátová: děláme expanzi/redukt modelu.

Tvrzení: Nechť $L \subseteq L'$ jsou jazyky, T je L-teorie a T' je L'-teorie. Potom

(*) 1) T' je extenze $T \iff$ L-redukt každého modelu T' je model T.

2) T' je konzervativní extenze $T \iff$ to je extenze a každý model T lze expandovat do L' na nějaký model T'.

• **Extenze o definice**

→ přidáme nový symbol, jehož význam popíšeme nějakou definicí

Ukázka: Teorii v jazyce s rovností lze rozšířit o symbol $\neq$ definovaný formulí

$$x \neq y \leftrightarrow \neg x = y$$

- Teorii uspořádání lze rozšířit o $<$ definovaný formulí $x \leq y \wedge \neg x = y$.

Def: Nechť T je teorie a $\varphi(x_1, \dots x_n)$ formule v jazyce L. Označme jako L' rozšíření L o nový n-ární relační symbol R.

Extenze teorie T o definici R formulí φ je L'-teorie

$$T' = T \cup \{R(x_1, \dots x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots x_n)\}$$

Tvrzení: 1) T' je konzervativní extenze T

2) pro každou L'-formuli φ' existuje L-formule φ t.ž. $T' \models \varphi \leftrightarrow \varphi'$

Dk: 1) Každý model T lze jednoznačně expandovat na model T'

↳ R interpretujeme podle jeho definice

⇒ podle tvrzení (*) je T' konzervativní extenze T.

2) Pokud se ve φ' nevyskytuje R, tak $\varphi := \varphi'$.

Jinak nahradíme atomické podformule tvaru $R(t_1, \dots t_n)$ za $\psi'(x_1/t_1, \dots x_n/t_n)$, kde ψ' je varianta ψ zaručující substituovatelnost všech termů $t_1, \dots t_n$ (všechny vázané proměnné ve ψ přejmenujeme na nové) ■

→ teď přidáme nový funkční symbol

→ vztah $f(x_1, \dots x_n)$ definujeme formulí $\psi(x_1, \dots x_n, y)$

! aby to byla fce, tak pro $\forall x_1, \dots x_n \; \exists! y : \psi(x_1, \dots x_n, y)$

Ukázka: Teorie grup: binární funkční symbol $-$ pomocí $+$ a unárního $-$

$x - y = z \iff x + (-y) = z.$

Def: Nechť T je teorie a $\psi(x_1, \dots x_n, y)$ formule v jazyce L. Označme jako L' rozšíření L o nový n-ární funkční symbol f. Nechť platí

i) $T \models (\exists y)\, \psi(x_1 \dots x_n, y)$ → existence

ii) $T \models \psi(x_1, \dots x_n, y) \wedge \psi(x_1, \dots x_n, z) \rightarrow y = z$ → jednoznačnost

Potom extenze teorie T o definici f formulí ψ je L' teorie

$$T' := T \cup \{ f(x_1, \dots x_n) = y \leftrightarrow \psi(x_1, \dots x_n, y) \}$$

Tvrzení: 1) T' je konzervativní extenzí T

2) pro každou L'-formuli φ' existuje L-formule φ t.ž. $T' \models \varphi \leftrightarrow \varphi'$

Dk: 1) modely T lze jednoznačně expandovat na modely T'.

2) stačí pro jediný výskyt symbolu f, potom induktivně.

proměnná

→ Označme φ^* formuli vzniklou z φ' nahrazením termu $f(t_1, \dots t_n)$ za novou p. z.

$\varphi := (\exists z)(\varphi^* \wedge \psi'(x_1/t_1, \dots x_n/t_n, y/z))$ … ψ' varianta ψ aby šlo substituovat

→ ukážeme, že pro libovolný model $\mathcal{A} \models T'$ a ohodnocení e platí $\mathcal{A} \models \varphi'[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e]$.

→ označme $a_e := (f(t_1, \dots t_n))^{\mathcal{A}}[e]$. Díky jednozn.: $\mathcal{A} \models \psi'(x_1/t_1, \dots x_n/t_n, y/z)[e] \iff e(z) = a$.

$\Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi'[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi^*[e(z/a)] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e]$. ■

- Definice konstantního symbolu
  - → speciální případ: funkce arity 0
  - → extenze o definici konstantního symbolu c formulí $\psi(y)$

$$T' = T \cup \{c = y \leftrightarrow \psi(y)\}$$

musí platit $T \models (\exists y)\psi(y)$ a $T \models \psi(y) \wedge \psi(z) \rightarrow y = z$.

Ukázka: Teorie aritmetiky: $1 = y \leftrightarrow y = S(0)$

- Teorie těles, symbol $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2} = y \leftrightarrow y \cdot (1+1) = 1$.

! není extenze o definici, neplatí existence v tělese char. 2 → třeba $\mathbb{Z}_2$

→ ale v tělesech s char > 2 už to funguje

- Extenze teorie o definice

Def: L'-teorie T' je extenzí L-teorie T o definice $\equiv$
vznikla postupnou extenzí o definice relačních a funkčních symbolů.

Tvrzení: 1) T' je konzervativní extenze $\qquad 1 \Leftrightarrow 2$

2) každý model T lze jednoznačně expandovat na model T'

3) pro L'-formuli φ' existuje L-formule φ, t.ž. $T' \models \varphi \leftrightarrow \varphi'$.

Dk: indukcí.

- Definovatelnost ve struktuře

Def: Nechť $\varphi(x_1, \dots x_n)$ je formule a $\mathcal{A}$ struktura ve stejném jazyce.
Množina definovaná formulí $\varphi(x_1, \dots x_n)$ ve struktuře $\mathcal{A}$ je

$$\varphi^{\mathcal{A}}(x_1, \dots x_n) := \{(a_1, \dots a_n) \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi(x_1/a_1, \dots x_n/a_n)\}$$

→ zkráceně $\varphi^{\mathcal{A}}(\underline{x}) := \{\underline{a} \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi(\underline{x}/\underline{a})\}$.

Ukázka:

- $\neg(\exists y) E(x, y)$ definuje v daném grafu množinu všech izolovaných vrcholů.
- $(\exists y)(y \cdot y = x) \wedge (x \neq 0)$ definuje v tělese $\underline{\mathbb{R}}$ množinu $\mathbb{R}^+$

Def: Nechť $\varphi(\underline{x}, \underline{y})$ (kde $|\underline{x}| = n$, $|\underline{y}| = k$) je L-formule, $\mathcal{A}$ L-struktura a $\underline{b} \in A^k$.
<u>Množina definovaná formulí $\varphi(\underline{x}, \underline{y})$ s parametry</u> $\underline{b}$ ve struktuře $\mathcal{A}$ je

$$\varphi^{\mathcal{A}, \underline{b}} := \{\underline{a} \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi(\underline{x}/\underline{a}, \underline{y}/\underline{b})\}$$

→ pro $B \subseteq A$ označíme $Df^n(\mathcal{A}, B)$ množinu všech množin definovatelných v $\mathcal{A}$ s parametry pocházejícími z B.

$Df^n(\mathcal{A}, B)$ je uzavřená na doplněk, průnik, sjednocení a obsahuje $\emptyset$ a A^n.

$\Rightarrow$ je to podstruktura potenční algebry $\langle \mathcal{P}(A^n), \overline{}, \cap, \cup, \emptyset, A^n \rangle$

<u>Ukázka</u>: $\varphi(x, y) = E(x, y)$ a $v \in V(G)$. $\Rightarrow$ $\varphi^{G, v} = \{a \in V(G) \mid G \models E(a, v)\}$

↳ sousedi vrcholu v.

• Tablo metoda v predikátové logice – ZATÍM JAZYK BEZ =

Ukázka: $\varphi = (\exists x)\neg P(x) \Rightarrow \neg(\forall x)P(x)$ $\qquad$ $\psi = \neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)\neg P(x)$

$F (\exists x)\neg P(x) \rightarrow \neg(\forall x)P(x)$

$T (\exists x)\neg P(x)$ ← svědek

$F \neg(\forall x)P(x)$

$T (\forall x)P(x)$ ← všichni

$T \neg P(c_0)$ ← substituce konstantního termu

$F P(c_0)$

$T (\forall x)P(x)$

$T P(c_0)$

⇓

jazyk rozšíříme o nové konstantní symboly

$F \neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)\neg P(x)$

$T \neg(\forall x)P(x)$

$F (\exists x)\neg P(x)$ ← všichni

$F (\forall x)P(x)$ ← svědek

$F P(c_0)$

$F (\exists x)\neg P(x)$

$F \neg P(c_0)$

$T P(c_0)$

$\otimes$

- $T(\exists x)\varphi(x)$, $F(\forall x)\varphi(x)$ → svědek ⇒ nová konstanta c, co na větvi ještě není
- $T(\forall x)\varphi(x)$, $F(\exists x)\varphi(x)$ → všichni ⇒ libovolný konstantní term

↳ bezesporná větev je dokončená jen po dosazení všech termů do "všichni"

↳ musíme použít vše co víme

Konvence: kořeny atomických tabel nekreslíme kromě položek typu "všichni"

↳ po 1 dosazení ještě nejsme hotovi

→ spočetně mnoho axiomů, spočetně konstantních termů

Def: Nechť L je spočetný jazyk bez rovnosti. Označme jako L_C rozšíření L o spočetně mnoho nových pomocných konstantních symbolů. $C = \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

→ konstantních termů v L_C je jen spočetně mnoho → očíslujeme je $\{t_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

Def: směrem k tablu:

- položka = nápis $T\varphi$ nebo $F\varphi$, kde φ je L_C-sentence
  - → $T(\exists x)\varphi(x)$ a $F(\forall x)\varphi(x)$ ... svědek
  - → $F(\exists x)\varphi(x)$ a $T(\forall x)\varphi(x)$ ... všichni
- atomická tabla pro logické spojky jsou stejná jako ve výrokové logice

$T(\forall x)\varphi(x)$	$F(\exists x)\varphi(x)$	$T(\exists x)\varphi(x)$	$F(\forall x)\varphi(x)$
$T\varphi(x/t_i)$	$F\varphi(x/t_i)$	$T\varphi(x/c_i)$	$F\varphi(x/c_i)$
↖ jakýkoli term			↖ nový konstantní symbol

Def: Konečné tablo z teorie T je uspořádaný, položkami označkovaný strom zkonstruovaný aplikací konečně mnoha následujících pravidel:

1, jednoprvkový strom s libovolnou položkou je tablo z teorie T

2, pro libovolnou položku P na libovolné větvi V můžeme na konec větve V připojit atomické tablo pro P

- je-li P typu svědek → pouze $c_i \in C$, který na V dosud není použitý
- je-li P typu všichni → jakýkoli konstantní L_C-term t_i

3, na konec libovolné větve můžeme připojit položku $T\alpha$ pro axiom $\alpha \in T$

Def: Tablo z teorie T je konečné, nebo i nekonečné. V tom případě je spočetné a definujeme ho jako

$\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde τ_0 je jednoprvkové tablo

τ_{i+1} vzniklo z τ_i v jednom kroku

→ tablo pro položku P má v kořeni položku P

Def: Tablo je sporné ≡ ∀ jeho větev je sporná

Větev je sporná ≡ obsahuje položky $T\varphi$ a $F\varphi$ pro nějakou sentenci φ

Def: Tablo je dokončené ≡ ∀ jeho větev je dokončená

Větev je dokončená ≡ je sporná nebo

1, každá její položka je na této větvi redukovaná a

2, obsahuje položku $T\alpha$ pro každý axiom $\alpha \in T$

Def: Položka P je redukovaná na větvi V procházející (= obsahující) P ≡ platí něco z následujícího

1) je tvaru $T\varphi$ nebo $F\varphi$ pro atomickou sentenci → tedy $R(t_1, \ldots, t_n)$ ← konst. L_C termy

2, není typu všichni a vyskytuje se na V jako kořen atomického tabla
⇒ už došlo k jejímu rozvoji

3) je typu všichni a všechny její výskyty na větvi V jsou na V redukované

Def: Výskyt položky P typu všichni na větvi V je i-tý ≡ má (právě) $i-1$ předků s labelem P.

→ i-tý výskyt je redukovaný na V ≡

- P má $(i+1)$-ní výskyt na V a
- na V je položka $T\varphi(x/t_i)$ pro $P = T(\forall x)\varphi(x)$ resp. $F\varphi(x/t_i)$ pro $P = F(\exists x)\varphi(x)$

← i-tý konstantní L_C-term

⇒ 'všichni' je redukovaná ⟺ má na V nekonečně výskytů a dosadili jsme do ní všechny t_i

→ jazyk bez rovnosti

Def: Tablo důkaz sentence φ z teorie T je sporné tablo z T s položkou $F\varphi$ v kořeni

→ pokud existuje, je φ (tablo) dokazatelný z T, píšeme $T \vdash \varphi$

Tablo zamítnutí je sporné tablo s $T\varphi$ v kořeni ... platí $T \vdash \neg\varphi$

• Konečnost a systematičnost důkazů

→ podobně jako ve výrokové logice uděláme systematické tablo

Def: systematické tablo z $T = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ pro položku R je $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde

τ_0 je jednoprvkové s položkou R a pro $i \geq 0$:

1) buď P nejlevější položka v co nejmenší úrovni, která ještě není redukovaná na nějaké bezesporné větvi procházející P. – pro typ všichni není její výskyt redukovaný

2) definujeme τ_i' vzniklé z τ_i připojením atomického tabla pro P na ∀ bezespornou větev procházející P, kde P není redukovaná.

• je-li P typu všichni: nechť má v daném vrcholu k-tý výskyt, potom dosadíme k-tý L_C-term t_k

• je-li P typu svědek: dosadíme $c_k \in C$ pro nejmenší k, co na této větvi ještě není

→ pokud taková položka neexistuje: $\tau_i' = \tau_i$

3) τ_{i+1} vznikne z τ_i' připojením $T\alpha_{i+1}$ na všechny bezesporné větve.

→ pokud jsme již použili všechny axiomy: $\tau_{i+1} := \tau_i'$

Lemma: Systematické tablo je dokončené.

Dk: k-tý výskyt 'všichni' redukujeme když na něj narazíme

→ připojíme (k+1)-ní výskyt ... atomické tablo

→ dosadíme k-tý L_C-term

→ zbytek jako výroková logika: jsou všechny větve dokončené?

• sporné ✓

• jinak obsahují $T\alpha_i$ ✓

a všechny položky redukované v nějakém kroku ~ 2^k.

→ Teď všechny důkazy jako ve výrokové logice

VŽDY

Věta (o konečnosti sporu): Neprodlužujeme-li sporné větve, je sporné tablo konečné.

Důsledek (konečnost důkazu): Pokud $T \vdash \varphi$, potom $\exists$ konečný tablo důkaz φ z T.

Důsledek (Systematičnost důkazu): Pokud $T \vdash \varphi$, potom systematické tablo je konečným důkazem φ z T.

• Tablo metoda v jazyce s rovností

→ tablo je syntaktický objekt - velký nápis - ale '=' je identita prvků nějakého konkrétního modelu.

⇒ budeme se k $=^{\mathcal{A}}$ chovat jako k nějakému relačnímu symbolu z R struktury $\mathcal{A}$

⇒ musíme přidat axiomy rovnosti, aby:

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = c_2 \rightarrow c_2 = c_1 \\ f(c_1) = f(c_2) \\ c_1 \in P \leftrightarrow c_2 \in P \quad \ldots P \text{ je unární relací} \end{array}\right\} \text{ teď je } = \text{ kongruence na } \mathcal{A}$$

→ ale chceme, aby to byla identita, tedy $a = b \iff a, b$ jsou stejný prvek domény

⇒ uděláme unifikaci všech = ekvivalentních prvků do jediného prvku

↳ faktorstruktura podle kongruence = → zajistí reflexivita, tranzitivita, symetrie

Def: Nechť $\sim$ je ekvivalence na množině A, $f: A^n \to A$ funkce a $R \subseteq A^n$ relace.

- $\sim$ je kongruence pro f $\equiv \forall \underline{a}, \underline{b} \in A^n : (\forall i : a_i \sim b_i) \Rightarrow f(\underline{a}) = f(\underline{b})$.
- $\sim$ je kongruence pro R $\equiv \forall \underline{a}, \underline{b} \in A^n : (\forall i : a_i \sim b_i) \Rightarrow R(\underline{a}) \iff R(\underline{b})$

Def: Kongruence struktury $\mathcal{A}$ je ekvivalence na A, co je kongruencí pro všechny fce a relace $\mathcal{A}$.

Def: Nechť $\mathcal{A}$ je struktura a $\sim$ její kongruence. Faktorstruktura $\mathcal{A}$ podle $\sim$ je struktura $\mathcal{A}/\sim$ v témže jazyce. Doména je množina ekvivalenčních tříd A podle $\sim$, tedy $A/\sim$. Funkce a relace definujeme jako

- $f^{\mathcal{A}/\sim}([a_1]_\sim, \ldots [a_n]_\sim) := [f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots a_n)]_\sim$
- $R^{\mathcal{A}/\sim}([a_1]_\sim, \ldots [a_n]_\sim) \equiv R^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots a_n)$

Def: Axiomy rovnosti pro jazyk L s rovností jsou:

i) $x = x$

ii) pro každý n-ární funkční symbol f jazyka L:

$$x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \dots x_n) = f(y_1, \dots y_n)$$

iii) pro každý n-ární relační symbol R jazyka L včetně rovnosti:

$$x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(x_1, \dots x_n) \rightarrow R(y_1, \dots y_n))$$

→ respektive jejich generální uzávěry – stačí

Pokud teorie T obsahuje axiomy rovnosti a $\mathcal{A}$ je její model:

$=^a$ je ekvivalence … reflexivita z (i) a sym + tranz. ze (iii)

$\forall x_1 x_2 y_1 y_2 : x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \rightarrow (x_1 = x_2 \rightarrow y_1 = y_2)$

$\Rightarrow x = y \wedge \underset{\checkmark}{x = x} \rightarrow (\underset{\checkmark}{x = x} \rightarrow y = x) \sim x = y \rightarrow y = x$

$\Rightarrow y = x \wedge y = z \rightarrow (y = y \rightarrow x = z) \sim x = y \wedge y = z \rightarrow x = z.$

$=^a$ je kongruence … díky (ii) a (iii)

Def: Nechť T je teorie v jazyce L s rovností. Označíme jako T^* rozšíření T o generální uzávěry axiomů rovnosti pro L.

- Tablo důkaz z teorie T je tablo důkaz z T^* → podobně zamítnutí…

$\mathcal{A} \models T^* \Rightarrow \mathcal{A}/{=^a} \models T^*$ a v $\mathcal{A}/{=^a}$ je symbol $=$ interpretován jako identita

v každém modelu, kde je $=$ interpretován jako identita platí axiomy rovnosti

- Korektnost a úplnost tablo metody v predikátové logice

Věta (o korektnosti): Je-li sentence φ tablo dokazatelná z T, potom je pravdivá v T

$$T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$$

Myšlenka důkazu: Sporem: protipříklad by se po vhodné interpretaci shodoval s některou větví, ale ty jsou sporné.

Věta (o úplnosti): Je-li sentence φ pravdivá v T, potom je tablo dokazatelná z T.

$$T \models \varphi \rightarrow T \vdash \varphi$$

Myšlenka: Ukážeme, že libovolné dokončené (např. systematické) tablo z T s $F\varphi$ v kořeni je nutně sporné.

Důsledek: Dokazatelnost = platnost

- Kanonický model

→ opět bezesporná dokončená větev tabla pro položku $F\varphi$ určuje model $\neg\varphi$.
→ jaká bude jeho doména? trik: ze syntaktických objektů uděláme sémantické

Def: Nechť $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ je jazyk bez rovnosti. Pro bezespornou dokončenou větev V definujeme kanonický model jako L_C-strukturu $\mathcal{A} := \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \cup C^{\mathcal{A}} \rangle$, kde

- A je množina všech konstantních L_C-termů – takže to jsou nápisy
- pro n-ární relační symbol $R \in \mathcal{R}$ a "s_1", … "s_n" $\in A$:

  $(\text{"}s_1\text{"}, \dots \text{"}s_n\text{"}) \in R^{\mathcal{A}} \equiv$ na V je položka $TR(s_1, \dots s_n)$
- pro n-ární funkční symbol $f \in \mathcal{F}$ a "s_1", … "s_n" $\in A$:

  $f^{\mathcal{A}}(\text{"}s_1\text{"}, \dots \text{"}s_n\text{"}) := \text{"}f(s_1, \dots s_n)\text{"}$
- speciálně: pro konstantní symbol c máme $c^{\mathcal{A}} = \text{"}c\text{"}$.

Ukázka: $T = \{(\forall x) R(f(x))\}$, $L = \langle R, f, d \rangle$ bez rovnosti – d je konstantní
$\varphi = \neg R(d)$ … platí $T \models \varphi$?

$F \neg R(d)$
|
$T R(d)$
|
• $T (\forall x) R(f(x))$
|
$T R(f(d))$
|
• $T (\forall x) R(f(x))$
|
$T R(f(f(d)))$
|
• $T (\forall x) R(f(x))$
|
$T R(f(c_0))$
|
• $T (\forall x) R(f(x))$
|
$T R(f(c_1))$
|
⋮

$L_C = \langle R, f, d, c_0, c_1, \dots \rangle$

→ tablo se nikdy nerozvětví a nikdy nedojdu ke sporu
⇒ platí $T \not\models \varphi$ ⇒ $\exists$ model, kde φ neplatí

$$A := \{ \text{"}d\text{"}, \text{"}c_0\text{"}, \text{"}c_1\text{"}, \dots \text{"}f(d)\text{"}, \text{"}f(c_0)\text{"}, \text{"}f(c_1)\text{"}, \dots \text{"}f(f(d))\text{"}, \text{"}f(f(c_0))\text{"}, \text{"}f(f(c_1))\text{"}, \dots \}$$

$d^{\mathcal{A}} := \text{"}d\text{"}$
$c_i^{\mathcal{A}} := \text{"}c_i\text{"}$
$f^{\mathcal{A}}(\text{"}d\text{"}) := \text{"}f(d)\text{"}$, $f^{\mathcal{A}}(\text{"}f(d)\text{"}) := \text{"}f(f(d))\text{"}$
$R^{\mathcal{A}} = A \setminus C = \{ \text{"}d\text{"}, \text{"}f(d)\text{"}, \text{"}f(c_0)\text{"}, \dots \}$ → ale $\text{"}c_i\text{"} \notin R^{\mathcal{A}}$

⇒ kanonický model: L_C struktura $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$

→ redukt na původní jazyk L: $\mathcal{A}' = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}} \rangle$

• Kanonický model v jazyce s rovností

Def: Pro jazyk L s rovností:

→ tablo je nyní z teorie T^* s axiomy rovnosti

1. vezmeme kanonický model $\mathcal{B}$ pro V jako by byl L bez rovnosti

↳ symbol $=$ interpretujeme jako obyčejnou binární relaci

⇒ relaci $=^{\mathcal{B}}$ definujeme stejně jako pro ostatní relační symboly:

"s_1" $=^{\mathcal{B}}$ "s_2" $\equiv$ na V je položka $T\, s_1 = s_2$

2. Kanonický model pro V je faktorstruktura $\mathcal{A} := \mathcal{B}/_{=^{\mathcal{B}}}$.

pro libovolnou L_C formuli φ platí $\mathcal{B} \models \varphi \iff \mathcal{A} \models \varphi$

- pro $\mathcal{B}$ interpretujeme '$=$' jako $=^{\mathcal{B}}$
- pro $\mathcal{A}$ interpretujeme '$=$' jako identitu prvků.

v jazyce bez rovnosti je kanonický model vždy spočetně nekonečný

v jazyce s rovností může být i konečný

Ukázka: $T = \{(\forall x)\, R(f(x))\}$, $L = \langle R, f, d \rangle$, tentokrát s rovností

$\varphi = \neg R(d)$

$F \neg R(d)$ | $L_C = \langle R, f, d, c_0, c_1, \dots \rangle$ s rovností

$T R(d)$

⋮

→ sestrojíme kanonický model, jako by L byl bez rovnosti

$\mathcal{B} = \langle B, R^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, d^{\mathcal{B}}, c_0^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}, \dots \rangle$

tablo pro T^* → včetně axiomů pro rovnost

→ '$=$' jako obyčejný symbol

⇒ kanonický model $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$

- $A = B/_{=^{B}}$
- $R^{\mathcal{A}}([s_i]_{\sim}) \equiv R^{\mathcal{B}}(s_i) \Rightarrow R^{\mathcal{A}} = B/_{=^{B}} = A$
- $d^{\mathcal{A}} = [\text{"}d\text{"}]_{=^{B}}$
- $c_i^{\mathcal{A}} = [\text{"}c_i\text{"}]_{=^{B}}$
- $f^{\mathcal{A}}([\text{"}d\text{"}]_{=^{B}}) = [\text{"}f(d)\text{"}]_{=^{B}}$

$f^{\mathcal{A}}([\text{"}f(d)\text{"}]_{=^{B}}) = [\text{"}f(f(d))\text{"}]_{=^{B}}$

• **Löwenheim - Skolemova věta a věta o kompaktnosti**

Věta (Löwenheim - Skolemova): Je-li L spočetný jazyk bez rovnosti, potom každá bezesporná L-teorie má spočetně nekonečný model.

Dk: V T není dokazatelný spor, takže tablo z T s $F\bot$ v kořeni musí mít bezesporou větev. Hledaný model je L-redukt kanonického modelu pro tuto větev. ■

Poznámka: Později dokážeme něco silnějšího pro jazyky s rovností.

Věta (o kompaktnosti): Teorie má model $\iff \forall$ její konečná část má model.

Dk: Stejný jako ve výrokové logice. $\Rightarrow$: zřejmě platí

$\Leftarrow$: pro spor nechť T je sporná, tedy $T \vdash \bot$ $\qquad T' \vdash \bot$ ↯

↳ vezmeme konečný tablo důkaz $\bot$ z T.

$\Rightarrow$ obsahuje jen konečně mnoho axiomů T $\Rightarrow$ tvoří konečnou $T' \subseteq T$ ■

• **Nestandardní model přirozených čísel**

→ aplikace věty o kompaktnosti

$\underline{N} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ ... standardní model

$\Rightarrow Th(\underline{N}) :=$ množina všech sentencí pravdivých v $\underline{N}$

→ n-tý numerál je term $\underline{n} := (\underbrace{S \circ S \circ \ldots \circ S}_{n})(0)$

$\Rightarrow$ přidáme nový konstantní symbol C, větší než každý numerál

$T := Th(\underline{N}) \cup \{ \underline{n} < C \mid n \in \mathbb{N} \}$

$\forall$ konečná část T má model

$\Rightarrow$ T má model ... z věty o kompaktnosti

↳ nestandardní model přirozených čísel

↳ platí v něm tytéž sentence jako v $\underline{N}$

ale navíc obsahuje konstantu větší než $\forall n \in \mathbb{N}$

- **Rezoluce v predikátové logice**

→ opět důkaz sporem $S \vdash_R \square$ ... ale co je CNF?

$T \models \varphi$? $\rightsquigarrow T \cup \{\neg\varphi\} =: S \rightsquigarrow$ ukážeme $S \vdash_R \square \Rightarrow T \models \varphi$.

↑ sentence

Def: Literál je atomická formule $R(t_1, \dots t_n)$ nebo její negace.

Klauzule je konečná množina literálů.

CNF formule je množina klauzulí. – klidně ∞

$\vee, \wedge, \neg$ jsou minimální

otevřenou formuli (bez kvantifikátorů) je vždy možné převést do CNF

pokud je na začátku $(\forall x)$, tak to taky jde ∵ $\varphi \sim$ generální uzávěr φ

$$(\forall x)(P(x) \vee \neg Q(x)) \sim P(x) \vee \neg Q(x) \rightsquigarrow \{P(x), \neg Q(x)\}$$

- pro existenční kv. zavedeme nové svědky

$$(\exists x)(P(x) \vee \neg Q(x)) \rightsquigarrow \{P(C), \neg Q(C)\} \quad \dots \text{skolemizace}$$

↳ není ekvivalentní, ale zachovává [ne]splnitelnost

- rezoluční krok

$$\{P(x), \neg Q(x)\}, \{Q(f(C))\} \rightsquigarrow \{P(f(C))\}$$

↳ uděláme substituci $x/f(C)$ ... unifikace

Ukázka:

- $T = \{(\forall x)P(x), (\forall x)(P(x) \to Q(x))\}$, $\varphi = (\exists x)Q(x)$

→ $\neg\varphi = \neg(\exists x)Q(x) \sim (\forall x)\neg Q(x) \rightsquigarrow \{\neg Q(x)\}$

$T \cup \{\neg\varphi\} \sim S = \{\{P(x)\}, \{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(x)\}\}$

na $P(x)$ se můžu dívat jak p, $Q(x)$ jako q

$\Rightarrow S = \{\{p\}, \{\neg p, q\}, \{\neg q\}\}$ ← grounding

q — $\square$ → řeším jako ve výrokové logice

- $T = \{(\forall x)(\exists y)R(x,y), R(x,y) \to Q(x)\}$, $\varphi = (\exists x)Q(x)$ $\quad \neg\varphi \sim (\forall x)\neg Q(x) \sim \neg Q(x)$

$T \cup \{\neg\varphi\} \sim \{(\forall x)(\exists y)R(x,y), \neg R(x,y) \vee Q(x), \neg Q(x)\}$

↳ nahradíme za $R(x, f(x))$, kde f je nový funkční symbol, reprezentuje výběr svědka

→ $S = \{\{R(x, f(x))\}, \{\neg R(x,y), Q(x)\}, \{\neg Q(x)\}\}$ → obě nesplnitelné

↳ není ekvivalentní $T \cup \{\neg\varphi\}$, ale je ekvisplnitelná

$\rightarrow$ unifikace $y/f(x)$: $\{R(x,f(x))\}$ a $\{\neg R(x,y), Q(x)\}$ $\rightsquigarrow$ $\{Q(x)\}$ $\rightarrow \square$
$\{\neg Q(x)\}$

! ale teď grounding nefunguje
$\{\{r\}, \{\neg p, q\}, \{\neg q\}\}$ není splnitelná

$\Rightarrow$ musíme vyřešit, že $R(x, f(x))$ a $R(x,y)$ mají podobnou strukturu

- Skolemizace

Def: L-teorie T a L'-teorie T' jsou ekvisplnitelné $\equiv$ T má model $\Leftrightarrow$ T' má model.

$\rightarrow$ pro převod do CNF potřebujeme otevřené formule

$\Rightarrow$ cíl: Ke každé teorii T sestrojíme ekvisplnitelnou, otevřenou teorii T'!

1. axiomy T převedeme do PNF ... vytknutí kvantifikátorů
2. nahradíme generálními uzávěry $\Rightarrow$ sentence
3. sentence nahradíme Skolemovými variantami ... odstranění $\exists$
4. odstraníme zbývající $\forall$ $\Rightarrow$ otevřené formule

- Prenexní normální forma - PNF

Def: Formule φ je v PNF $\equiv$ je tvaru $\underbrace{(Q_1 x_1) \cdots (Q_n x_n)}_{\text{kvantif. prefix}} \underbrace{\varphi'}_{\text{otevřené jádro}}$, kde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, φ' otevřená

- univerzální formule: PNF & všechny kvant. jsou $\forall$

Tvrzení: Ke každé formuli φ existuje ekvivalentní formule v PNF.

Dk: Nahrazujeme podformule ekvivalentními a posouváme kvantifikátory blíž ke kořeni Tree(φ), dle pravidel z následujícího lemmatu. $\blacksquare$

Důsledek: Existuje i ekvivalentní PNF sentence (uzávěr).

Lemma: Označme $\overline{Q}$ opačný kvantifikátor ke Q. Pro formule φ, ψ, kde x není volná:

$\neg(Qx)\varphi \sim (\overline{Q}x)\neg\varphi$ $\qquad$ $(Qx)\varphi \rightarrow \psi \sim (\overline{Q}x)(\varphi \rightarrow \psi)$

$(Qx)\varphi \wedge \psi \sim (Qx)(\varphi \wedge \psi)$ $\qquad$ $\varphi \rightarrow (Qx)\psi \sim (Qx)(\varphi \rightarrow \psi)$

$(Qx)\varphi \vee \psi \sim (Qx)(\varphi \vee \psi)$

Dk: Třeba tablo metodou. Konkrétně: $(Qx)\varphi \rightarrow \psi \sim \neg(Qx)\varphi \vee \psi \sim (\overline{Q}x)\neg\varphi \vee \psi$
$\sim (\overline{Q}x)(\neg\varphi \vee \psi) \sim (\overline{Q}x)(\varphi \rightarrow \psi)$ $\blacksquare$

x ~~má~~ nemá být volná ve ψ aby to bylo ekvivalentní

$((\exists x)\, x=2) \wedge x=4 \not\sim (\exists x)(x=2 \wedge x=4)$ | $(\exists y)\, y=2 \wedge x=4 \sim (\exists y)(y=2 \wedge x=4)$

$\hookrightarrow$ přejmenuju to na y

Ukázka: převod do PNF

$$\ (\forall z) P(x,z) \wedge P(y,\overset{\text{volná}}{z}) \to \neg(\exists x) P(x,y)$$

$$\sim (\forall u) P(x,u) \wedge P(y,z) \to (\forall x) \neg P(x,y)$$

$$\sim (\forall u)(P(x,u) \wedge P(y,z)) \to (\forall x) \neg P(x,y)$$

$$\sim (\exists u)(P(x,u) \wedge P(y,z) \to (\forall x) \neg P(x,y))$$

$$\sim (\exists u)(P(x,u) \wedge P(y,z) \to (\forall v) \neg P(v,y)) \quad \to x \text{ volná v } P(x,u)$$

$$\sim (\exists u)(\forall v)(P(x,u) \wedge P(y,z) \to \neg P(v,y))$$

PNF není jednoznačná, je lepší vytknout nejprve $\exists$:

$(\exists y)(\forall x)\varphi$ je lepší než $(\forall x)(\exists y)\varphi$

↳ y nezávisí na x ↳ y závisí na x

- Skolemova varianta

- pokud je PNF sentence univerzální, tedy $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)\psi$

tak hledaná ekvisplnitelná otevřená formule je ψ.

→ jinak musíme provést skolemizaci = odstranění $\exists$

Def: Nechť φ je L-sentence v PNF, všechny vázané proměnné různé. Nechť

1) existenční kvantifikátory jsou $(\exists y_1)\dots(\exists y_n)$

2) pro každé i jsou $(\forall x_1)\dots(\forall x_{n_i})$ univerzální kv. předcházející $(\exists y_i)$.

⇒ označme jako L' rozšíření L o nové funkční symboly $f_1, \dots f_n$

kde f_i má aritu n_i.

→ Skolemova varianta φ je L'-sentence φ_S vzniklá odstraněním $(\exists y_i)$

a substitucí $f_i(x_1, \dots x_{n_i})$ za y_i postupně pro $i = 1, \dots n$.

Ukázka: $\varphi = (\exists y_1)(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists y_2)(\forall x_3)\, R(y_1, x_1, x_2, y_2, x_3)$

$\varphi_S = (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)\, R(f_1, x_1, x_2, f_2(x_1,x_2), x_3)$ ← ty pomocné

Věta (Skolemova): Každá teorie má otevřenou konzervativní extenzi.

Tvrzení: Sentence φ a její s. v. φ_S jsou ekvisplnitelné.

Důsledek: Ke každé teorii můžeme skolemizací najít ekvisplnitelnou otevřenou teorii, kterou už snadno převedeme do CNF.

• Grounding a Herbrandova věta

→ když máme otevřenou nesplnitelnou teorii, tak její nesplnitelnost lze doložit pomocí konkrétních prvků

<u>Def</u>: Nechť $\varphi(x_1,\dots x_n)$ je otevřená formule. Řekneme, že <u>instance</u> $\varphi(x_1/t_1,\dots x_n/t_n)$ je <u>základní</u> (ground) ≡ termy $t_1,\dots t_n$ jsou konstantní

<u>Def</u>: Nechť $L=\langle R,F\rangle$ je jazyk s aspoň jedním konstantním symbolem. L-struktura $\mathcal{A}=\langle A,R^{\mathcal{A}},F^{\mathcal{A}}\rangle$ je <u>Herbrandův model</u> ≡

tohle část jako kanonický model

- A je množina všech konstantních L-termů … <u>Herbrandovo univerzum</u>
- pro $f\in F$ arity n a "t_1", … "t_n" $\in A$: → nápisy
  $$f^{\mathcal{A}}(\text{"}t_1\text{"},\dots \text{"}t_n\text{"}) = \text{"}f(t_1,\dots t_n)\text{"}$$
- na relační symboly neklademe podmínky

<u>Věta</u> (<u>Herbrandova</u>): Je-li T otevřená, v jazyce bez rovnosti a s aspoň jedním konstantním symbolem, potom:

- buď má T Herbrandův model ⇒ je splnitelná
- nebo existuje konečně mnoho základních instancí axiomů T, jejichž konjunkce je nesplnitelná
  ⇒ T je nesplnitelná

<u>Důsledek</u>: Nesplnitelnost T lze doložit na konkrétních prvcích.

<u>Ukázka</u>: $T=\{P(x,y)\vee R(x,y),\ \neg P(c,y),\ \neg R(x,f(x))\}$

→ substituujeme konstantní termy x/c a $y/f(c)$

⇒ $\{P(c,f(c))\vee R(c,f(c)),\ \neg P(c,f(c)),\ \neg R(c,f(c))\}$

$R(c,f(c))$ —— $\square$

→ když tyto základní instance axiomů chápeme jako prvovýroky $\{p\vee r, \neg p, \neg r\}$, tak to umíme zamítnout výrokovou rezolucí

<u>Důsledek</u>: Je-li T otevřená v jazyce bez rovnosti s konstantním symbolem, potom má T model ⟺ má model $T_{ground} := \{\varphi \mid \varphi \text{ je zákl. instance } \alpha\in T\}$

<u>Dk</u>: ⇒: V modelu T platí i všechny základní instance axiomů → je to model T_{ground}.

⟸: Pro spor nechť T nemá model. Potom je podle podle H. věty nějaká konečná $T'\subseteq T_{ground}$ nesplnitelná, tedy T_{ground} je také nesplnitelná ↯ ∎

• <u>Unifikace</u>:

→ místo všech základních instancí použijeme nějaké vhodné substituce

<u>Ukázka</u>: $\{P(x), Q(x,z)\}$ a $\{\neg P(y), \neg Q(f(y), y)\}$

1) $\{x/f(a), y/a, z/a\}$: $\{P(f(a)), Q(f(a), a)\}$ a $\{\neg P(a), \neg Q(f(a), a)\}$

$\Rightarrow \{P(f(a)), \neg P(a)\}$

2) $\{x/f(z), y/z\}$: $\{P(f(z)), Q(f(z), z)\}$ a $\{\neg P(z), \neg Q(f(z), z)\}$

$\Rightarrow \{P(f(z)), \neg P(z)\}$

2) je lepší než 1) ... je to obecnější, dozvíme se více

<u>Def</u>: <u>Substituce</u> je konečná množina $\sigma = \{x_1/t_1, \dots x_n/t_n\}$, kde x_i jsou navzájem různé proměnné a t_i jsou termy různé od x_i ($t_i \neq x_i$).

<u>Def</u>: Substituce $\sigma = \{x_1/t_1, \dots x_n/t_n\}$ je

1) <u>základní</u> ≡ všechny termy t_i jsou konstantní

2) <u>přejmenování proměnných</u> ≡ všechny termy t_i jsou navzájem různé proměnné

<u>Def</u>: Výraz je term nebo literál (at. formule / její negace).

<u>Def</u>: Instance výrazu E při substituci $\sigma = \{x_1/t_1, \dots x_n/t_n\}$ je

$E\sigma := E(x_1/t_1, \dots x_n/t_n)$ ⇝ výskyty x_i nahradíme za t_i

Pro množinu výrazů S je $S\sigma := \{E\sigma \mid E \in S\}$

<u>Ukázka</u>: $S = \{P(x), R(y,z)\}$, $\sigma = \{x/f(y,z), y/x, z/c\}$

$\Rightarrow S\sigma = \{P(f(y,z)), R(x,c)\}$

→ substituce lze skládat: $\sigma\tau$ znamená nejprve σ, potom τ

$\Rightarrow$ chceme aby $E(\sigma\tau) = (E\sigma)\tau$

<u>Def</u>: Složení substitucí $\sigma = \{x_1/t_1, \dots x_n/t_n\}$ a $\tau = \{y_1/s_1, \dots y_m/s_m\}$ je substituce $\sigma\tau$ definovaná následovně.

Označme $X := \{x_1, \dots x_n\}$ a $Y := \{y_1, \dots y_m\}$

1) pokud $y_j \in Y \setminus X$, potom $y_j/s_j \in \sigma\tau$

2) pokud $x_i \in X$ a $x_i = t_i\tau$, tak nemusíme dělat nic

3) pokud $x_i \in X$ a $x_i \neq t_i\tau$, potom $x_i/t_i\tau \in \sigma\tau$

Tvrzení: Platí 1) $(E\sigma)\tau = E(\sigma\tau)$

2) $(\sigma\tau)\varrho = \sigma(\tau\varrho)$

Dk: 1) Stačí postupně pro $E = x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_m$ ... triviálně ✓

↳ substituce nemění ostatní symboly

2) $E((\sigma\tau)\varrho) = (E(\sigma\tau))\varrho = ((E\sigma)\tau)\varrho = (E\sigma)(\tau\varrho) = E(\sigma(\tau\varrho))$ ■

• Unifikační algoritmus

Def: Unifikace pro $S = \{E_1, \dots E_n\}$ je substituce σ t.ž. $E_1\sigma = E_2\sigma = \dots = E_n\sigma$, tedy $S\sigma$ obsahuje jediný výraz.

→ unifikace σ je nejobecnější ≡ ∀ jinou unifikaci τ pro S lze získat jako $\tau = \sigma\lambda$ pro nějakou substituci λ.

konst.

Ukázka: $S = \{P(f(x), y), P(f(a), w)\}$

proměnná

• $\sigma = \{x/a, y/w\}$ je nejobecnější unifikace ⇒ $\{P(f(a), w)\}$

konstanta

• $\tau = \{x/a, y/b, w/b\}$ je unifikace $\{P(f(a), b)\}$ ale není nejobecnější

↳ nelze z ní získat σ nebo ani $\{x/a, y/c, w/c\}$

• $\tau = \sigma\lambda$ pro $\lambda = \{w/b\}$: $\{x/a, y/w\}\lambda = \{x/a, y/b, w/b\}$

Algoritmus:

Vstup: $S = \{E_1, \dots E_n\} \neq \emptyset$

Výstup: nejobecnější unifikace σ nebo info, že S není unifikovatelná

0. $S_0 \leftarrow S$, $\sigma_0 \leftarrow \emptyset$, $k \leftarrow 0$

1. Pokud $|S_k| = 1$: return $\sigma = \sigma_0\sigma_1 \cdots \sigma_k$ → konec

→ teď budeme postupně procházet výrazy $E_1, \dots E_n$ jako řetězce zleva doprava a když narazíme na neshodu dvou řetězců, tak je unifikujeme

$D(S)$:= množina všech podvýrazů začínajících na pozici první neshody v S

$$S = \{P(x, y), P(f(x), z), P(z, f(x))\} \quad \dots \quad p = 3 \Rightarrow D(S) = \{x, f(x), z\}$$

2. Pokud je v $D(S_k)$ proměnná x a term t neobsahující x: $f(x), z$

3. $\sigma_{k+1} \leftarrow \{x/t\}$, $S_{k+1} \leftarrow S_k\sigma_{k+1}$

$k \leftarrow k+1$, goto 1.

4. Jinak S není unifikovatelná → konec

Ukázka:

$S_0 = \{P(f(y,g(z)), h(t)),\ P(f(h(w), g(a)), s),\ P(f(h(t), g(z)), y)\}$

$\to k = 5:\ D(S_0) = \{y, h(w), h(t)\}$ ... y není v $h(w)$ $\Rightarrow \sigma_1 = \{y/h(w)\}$

$S_1 = \{P(f(h(w), g(z)), h(t)),\ P(f(h(w), g(a)), s),\ P(f(h(t), g(z)), h(w))\}$

$\to D(S_1) = \{w, t\} \Rightarrow \sigma_2 = \{w/t\}$

$S_2 = \{P(f(h(t), g(z)), h(t)),\ P(f(h(t), g(a)), s),\ \cancel{P(f(h(t), g(z)), h(t))}\}$

$\to D(S_2) = \{z, a\} \Rightarrow \sigma_3 = \{z/a\}$

$S_3 = \{P(f(h(t), g(a)), h(t)),\ P(f(h(t), g(a)), s)\}$

$\to D(S_3) = \{h(t), s\} \Rightarrow \sigma_3 = \{s/h(t)\}$

$S_4 = \{P(f(h(t), g(a)), h(t))\}$

$\Rightarrow$ nejobecnější unifikace: $\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 = \{y/h(t),\ w/t,\ z/a,\ s/h(t)\}$

Tvrzení: Unifikační alg. najde nejobecnější unifikaci σ, která splňuje $\sigma\tau = \tau$ pro libovolnou unifikaci τ.

Dk: Zjevně najde unifikaci, obecnost z vlastnosti nové – indukcí.

- Rezoluční pravidlo

$\to$ chceme-li ukázat $T \models \varphi$, skolemizací najdeme ekvisplnitelnou otevřenou formuli, kterou převedeme do CNF a najdeme rezoluční zamítnutí $T \cup \{\neg\varphi\}$.

Ukázka: $C_1 = \{P(x), Q(x,y), Q(x, f(z))\}$ a $C_2 = \{\neg P(u), \neg Q(f(u), u)\}$

$\to$ chceme rezolucí odstranit $Q(x, f(z))$ a $\neg Q(f(u), u)$

$\Rightarrow S = \{Q(x,y), Q(x, f(z)), Q(f(u), u)\}$ ... Q a zapomeneme na $\neg$

unifikace $\sigma = \{x/f(f(z)),\ y/f(z),\ u/f(z)\}$

$S\sigma = \{\underbrace{Q(f(f(z)), f(z))}_{\bullet}\}$

rezolventa: $C_1\sigma = \{P(f(f(z))), \bullet\}$

$C_2\sigma = \{\neg P(f(z)), \neg\bullet\}$ $\Rightarrow C = \{P(f(f(z))), \neg P(f(z))\}$

Def: Nechť C_1 a C_2 jsou klauzule s disjunktními množinami proměnných.

Nechť $C_1 = C_1' \sqcup \{A_1, \dots A_n\}$ $n \geq 1$

$C_2 = C_2' \sqcup \{\neg B_1, \dots \neg B_m\}$ $m \geq 1$ … $\sqcup$ značí disjunktní sjednocení

a nechť $S = \{A_1, \dots A_n, B_1, \dots B_m\}$ lze unifikovat. Označme σ nejobecnější unifikaci S a E výsledek $S\sigma$. Máme

$$C_1\sigma = C_1'\sigma \sqcup \{E\}$$
$$C_2\sigma = C_1'\sigma \sqcup \{\neg E\}$$

Rezolventou C_1 a C_2 myslíme klauzuli $C_1'\sigma \cup C_2'\sigma$.

Pokud C_1 a C_2 nemají disjunktní proměnné, tak proměnné z C_1 přejmenujeme.

→ děláme to proto, aby unifikační algoritmus fungoval

• Rezoluční důkaz

Def: Rezoluční důkaz klauzule C z formule S je konečná posloupnost klauzulí $C_0, C_1, \dots C_n = C$ t.ž.

druh substituce

1) C_i je nějaká klauzule z S až na přejmenování proměnných

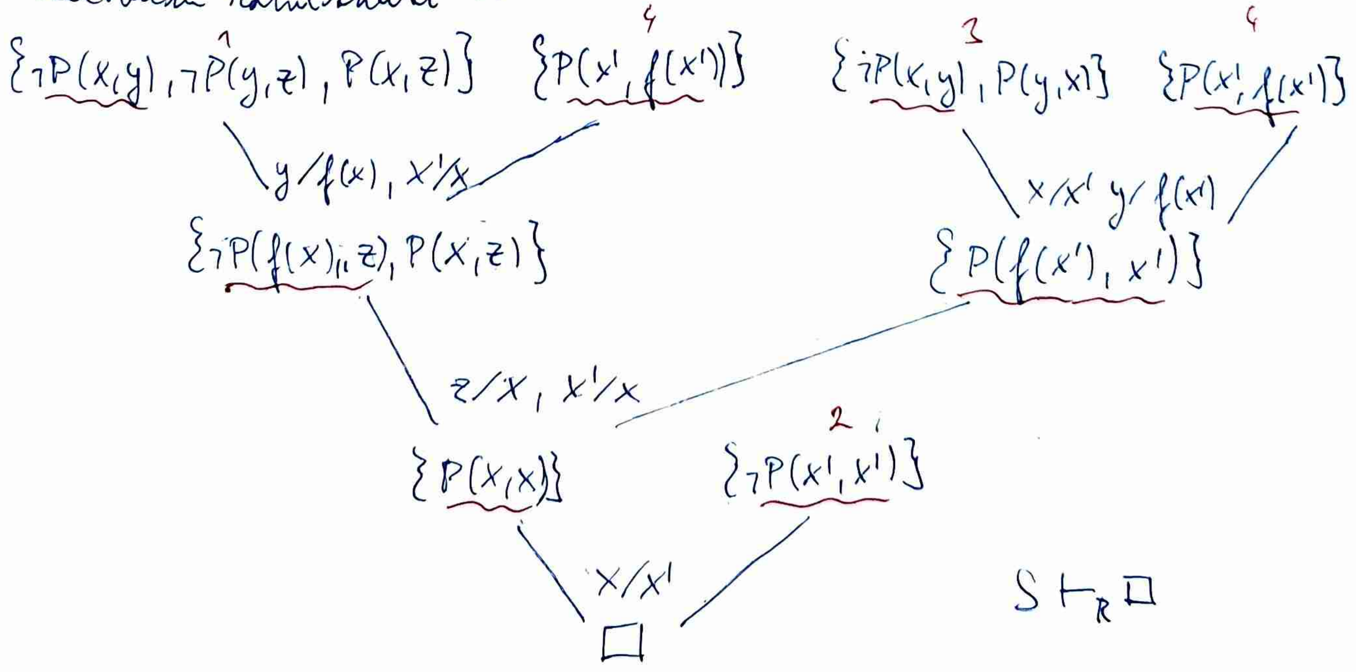
2) nebo C_i je rezolventou nějakých C_k, C_j, kde $j, k < i$.

→ existuje-li, píšeme $S \vdash_R C$

Rezoluční zamítnutí S je rezoluční důkaz $\square$ z S

Ukázka: $S = \{\underset{1}{\{\neg P(x,y), \neg P(y,z), P(x,z)\}}, \underset{2}{\{\neg P(x,x)\}}, \underset{3}{\{\neg P(x,y), P(y,x)\}}, \underset{4}{\{P(x, f(x))\}}\}$

→ rezoluční zamítnutí S:



$S \vdash_R \square$

• Korektnost a úplnost rezoluce

Tvrzení: Pokud je C rezolventou klauzulí C_1 a C_2 & $\mathcal{A}$ je model C_1 a C_2, tak $\mathcal{A}$ je i modelem C. Tedy $\mathcal{A} \models C_1$ & $\mathcal{A} \models C_2 \Rightarrow \mathcal{A} \models C$.

Dk: Rozepišme si to. C je rezolventou C_1 a C_2, tedy

$$C_1 = C_1' \sqcup \{A_1, \dots A_n\}$$
$$C_2 = C_2' \sqcup \{\neg B_1, \dots \neg B_m\}$$

a máme nejobecnější unifikaci σ

$C = C_1'\sigma \cup C_2'\sigma$ a označme E výsledek unifikace $\{A_1, \dots A_n, B_1, \dots B_m\}$
$\hookrightarrow E = A_1\sigma$

$\Rightarrow$ máme $C_1\sigma = C_1'\sigma \cup \{E\}$
$C_2\sigma = C_2'\sigma \cup \{\neg E\}$

Nechť $\mathcal{A}$ je model C_1 a C_2. Takže platí i $\mathcal{A} \models C_1\sigma$ a $\mathcal{A} \models C_2\sigma$.

$\rightarrow$ musíme ukázat, že při libovolném ohodnocení proměnných e je v klauzuli $C = \underbrace{C_1'\sigma}_{1} \cup \underbrace{C_2'\sigma}_{2}$ nějaký splněný literál.

1, pokud $\mathcal{A} \models E[e]$, tak $\mathcal{A} \not\models \neg E[e]$, takže aby mohlo být $\mathcal{A} \models C_2\sigma$, tak musí platit $\mathcal{A} \models \underbrace{C_2'\sigma[e]}_{2}$, což splňuje C.

2, pokud $\mathcal{A} \not\models E[e]$, tak musí být $\mathcal{A} \models \underbrace{C_1'\sigma[e]}_{1}$, což splňuje C. ∎

Věta (o korektnosti r.): Pokud je CNF formule rezolucí zamítnutelná, potom je nesplnitelná.

Dk: Víme, že $S \vdash_R \square$, vezmeme tedy nějaký r. důkaz $\square$ z S. : $C_0, C_1, \dots C_n = \square$

Kdyby existoval model $\mathcal{A} \models S$, tak indukcí podle délky důkazu platí i $\mathcal{A} \models S$ ... protože C_0 je nějaká klauzule z S a C_i je buď klauzule z S nebo rezolventa nějakých C_k a C_l, $k, l < i$. Podle předchozího tvrzení musí být $\mathcal{A} \models C_i$, takže i $\mathcal{A} \models \square$. Ale spor nemá žádný model, SPOR. ∎

Věta (o úplnosti r.): Je-li CNF formule nesplnitelná, potom je rezolucí zamítnutelná.

Myšlenka důkazu: Přes grounding převedeme na výrokovou logiku.

• <u>LI-rezoluce</u>

Def: <u>Lineární důkaz</u>: $\begin{bmatrix} C_0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 \\ B_1 \end{bmatrix}, \dots \begin{bmatrix} C_n \\ B_n \end{bmatrix}, C_{n+1}$ klauzule C z S.

- B_0 a C_0 jsou varianty klauzulí z S (varianta = přejmenování proměnných v kvantifikátorech)
- $C_{n+1} = C$
- C_{i+1} je rezolventa C_n a B_n
- B_i je buď varianta klauzule z S nebo $B_i = C_j$, $j < i$

→ <u>lineární zamítnutí</u> S je lineární důkaz $\square$ z S.

Def: <u>LI-důkaz</u> je lin. důkaz, kde $\forall B_i$ je varianta nějaké klauzule z S.

→ pokud existuje: $S \vdash_{LI} C$

→ <u>LI zamítnutí</u> S je $S \vdash_{LI} \square$.

Korektnost LI rezoluce plyne z korektnosti rezoluce.

<u>Věta (o úplnosti lin. r.)</u>: C má lineární důkaz z S $\Leftrightarrow$ má rezoluční důkaz z S.

<u>Dk</u>: převodem na výrokovou logiku.

<u>Věta (o úplnosti LI pro Hornovy formule)</u>: Je-li Hornova formule T splnitelná, a $T \cup \{G\}$ nesplnitelná pro cíl G, potom $T \cup \{G\} \vdash_{LI} \square$, a to LI-zamítnutím, které začíná v G.

<u>Dk</u>: Převod na výrokovou logiku.

POKROČILÉ PARTIE

Def: Teorie struktury $\mathcal{A}$ v jazyce L je množina

$$Th(\mathcal{A}) := \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } \mathcal{A} \models \varphi\}$$

Ukázka: Budeme pracovat s $Th(\underline{\mathbb{N}})$, kde $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ ... std. model arit.

Nechť $\mathcal{A}$ je L-struktura a T je L-teorie.

- $Th(\mathcal{A})$ je kompletní teorie = je bezesporná a $\forall$ sentence je v ní pravdivá nebo lživá
  $\rightarrow$ pravdivá $\Leftrightarrow$ $\in Th(\mathcal{A})$, jinak lživá
- $\mathcal{A} \in M_L(T) \Rightarrow Th(\mathcal{A})$ je jednoduchá extenze T
- $\mathcal{A} \in M_L(T)$ & T je kompletní $\Rightarrow Th(\mathcal{A}) = Csq_L(T) \sim T$

Připomenutí: Struktury $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ jsou elementárně ekvivalentní $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ $\Leftrightarrow$ v nich platí tytéž L-sentence, neboli $Th(\mathcal{A}) = Th(\mathcal{B})$.

Ukázka: $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$

$\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\equiv \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ ... $\mathbb{Z}$ není husté

Def: Teorie je rozhodnutelná $\equiv$ existuje algoritmus, který dokáže rozhodnout o platnosti každé sentence: $T \models \varphi$?

Teorie je kompletní $\equiv$ má až na el. ekvivalenci právě 1 model.

Důsledek: Nechť T je libovolná teorie. Protože $\mathcal{A} \in M_L(T) \Rightarrow Th(\mathcal{A})$ je jednoduchá ex. T, tak model $\mathcal{A}$ odpovídá kompletní extenzi T: $Th(\mathcal{A})$.
Navíc pokud $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, tak $Th(\mathcal{A}) = T(\mathcal{B})$, tedy jim odpovídají stejné kompletní extenze T.

Motivace: Ukážeme, že pokud lze efektivně popsat všechny kompletní jednoduché extenze dané teorie, potom je rozhodnutelná.

• Kompletní jednoduché extenze DeLO*

Def: Teorie hustého lin. uspořádání (DeLO*) je extenze teorie uspořádání o linearitu, hustotu a netrivialitu:

- $x \le y \vee y \le x$

→ značení: $x < y$ je zkratka za $x \le y \wedge \neg x = y$

- $x < y \rightarrow (\exists z)(x < z \wedge z < y)$
- $(\exists y)(\exists x)(\neg x = y)$ ... alespoň 2 prvky

Tvrzení: DeLO* má právě 4 kompletní jednoduché extenze (až na ekvivalenci).

Označme $\varphi := (\exists x)(\forall y)(x \le y)$ a $\psi := (\exists x)(\forall y)(y \le x)$.

→ v každém modelu $\mathcal{A}$ musí φ a ψ buď platit nebo neplatit.

→ protože modely určují kompletní extenze, tak

$$DeLO = DeLO^* \cup \{\neg\varphi, \neg\psi\} \qquad DeLO^+ = DeLO^* \cup \{\neg\varphi, \psi\}$$
$$DeLO^\pm = DeLO^* \cup \{\psi, \varphi\} \qquad DeLO^- = DeLO^* \cup \{\varphi, \neg\psi\}$$

pokud tohle jsou kompletní extenze, tak jsou jediné možné.

Pz: To, že jsou kompletní vyplyne z něčeho, co dokážeme později.

• Löwenheim – Skolemova věta pro jazyk s rovností

→ pomocí kanonického modelu tabla jsme dokázali

Věta (L-S bez '='): Ve spočetném jazyce bez rovnosti má každá bezesporná teorie spočetně nekonečný model.

Důsledek: Je-li L spočetný bez rovnosti, potom ke každé L-struktuře existuje elementárně ekvivalentní spočetně nekonečná struktura.

Dk: Buď $\mathcal{A}$ L-struktura. Teorie $Th(\mathcal{A})$ je bezesporná (má model $\mathcal{A}$), tedy dle L-S věty má spočetně nekonečný model $\mathcal{B} \models Th(\mathcal{A})$. Ale $Th(\mathcal{A})$ je kompletní, takže musí platit $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. ■

Důsledek: Bez rovnosti tedy nelze specifikovat například počet prvků modelu dané teorie.

Věta (L-S s '='): Ve spočetném jazyce s rovností má každá bezesporná teorie spočetný model.

Dk: Podobně jako bez '=', tam použijeme kanonický model pro bezespornou větev tabla z T pro $F\bot$.

→ pro jazyk s '=' stačí tento model faktorovat podle $=^{\mathcal{A}}$.

↳ výsledná faktorstruktura může být i konečná. ■

Důsledek: Je-li L spočetný s rovností, potom ke každé nekonečné L-struktuře existuje elem. ekvivalentní spočetně nekonečná struktura.
ale ne konečná

Dk: K nekonečné L-struktuře $\mathcal{A}$ najdeme stejně jako v minulém důkazu spočetnou $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$.

→ protože v $\mathcal{A}$ neplatí pro žádné $n \in \mathbb{N}$ sentence vyjadřující 'model má nejvýše n prvků' – to je s rovností easy

tak neplatí ani v $\mathcal{B}$. Tedy $\mathcal{B}$ nemůže být konečná. ■

• Spočetné algebraicky uzavřené těleso

Def: Těleso je algebraicky uzavřené ≡ v něm má ∀ polynom stupně > 0 kořen.

→ $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ nejsou alg. uzavřené: x^2+1

→ $\mathbb{C}$ je algebraicky uzavřené, ale není spočetné

→ algebraickou uzavřenost vyjádříme pro polynom stupně $n>0$ sentencí

$$\psi_n := (\forall x_0)(\forall x_1)\dots(\forall x_{n-1})(\exists y)(x_0 + x_1 y + \dots + x_{n-1} y^{n-1} + y^n) = 0$$

→ y^k je zkratka za $y \cdot y \cdot \ldots \cdot y$

Tvrzení: Existuje algebraicky uzavřené spočetné těleso.

Dk: Dle důsledku L-S. věty a rovnosti existuje spočetné nekonečná struktura $\mathcal{A} \equiv \mathbb{C}$. Protože $Th(\mathcal{A}) = Th(\mathbb{C})$ a $\mathbb{C}$ splňuje ψ_n pro všechna n, tak je i $\mathcal{A}$ algebraicky uzavřené. ∎

• Izomorfismus struktur

Def: Izomorfismus struktur $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ jazyka $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ je bijekce $h: A \to B$ t.ž.

i) pro každý $f \in \mathcal{F}$ arity n a $\underset{\sim}{a} \in A^n$:

$$h(f^{\mathcal{A}}(\underset{\sim}{a})) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots h(a_n))$$

→ speciálně pro konstantní $c \in \mathcal{F}$: $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$

ii) pro každý $R \in \mathcal{R}$ arity n a $\underset{\sim}{a} \in A^n$:

$$R^{\mathcal{A}}(\underset{\sim}{a}) \iff R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots h(a_n))$$

→ existuje-li, jsou izomorfní $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

→ automorfismus $\mathcal{A}$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ s $\mathcal{A}$.

→ izomorfismus ~ liší se jen pojmenováním prvků (mají stejně velké domény)

Relace 'být izomorfní' je ekvivalence.

Ukázka: Potenční algebra $\underline{P(X)} = \langle P(X), ^{-}, \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$ $|X| = n$

je izomorfní s $\underline{2^n} = \langle \{0,1\}^n, NOT, AND, OR, (0,\dots 0), (1,\dots 1) \rangle$

0-1 vektory ↗ po složkách jako na počítači

→ izomorfismus $h(A)$ = charakteristický vektor podmnožiny $A \subseteq X$

Tvrzení: Bijekce $h: A \to B$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ $\iff$ pro ∀ ohodnocení $e: Var \to A$

(*)

i) pro ∀ term t: $h(t^{\mathcal{A}}[e]) = t^{\mathcal{B}}[e \circ h]$

ii) pro ∀ formuli φ: $\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{B} \models \varphi[e \circ h]$

Dk: ⇒: indukcí podle stromu termu / formule

↳ pro konstanty a proměnné triviálně ⇒ pak i pro složené

↳ pro atomické formule triviálně ⇒

⇐: Je-li h bijekce splňující i) a ii), tak dosadíme $e: x_i \mapsto a_i$

$t = f(x_1, \dots x_n) \Rightarrow t^{\mathcal{A}}[e] = f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots a_n) = f^{\mathcal{A}}(\underset{\sim}{a})$

i) : $h(f^{\mathcal{A}}(\underset{\sim}{a})) = t^{\mathcal{B}}[e \circ h] = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots h(a_n))$

definice $\simeq$

$\varphi = R(x_1, \dots x_n)$

ii) $\mathcal{A} \models R(\underset{\sim}{a}) \iff \mathcal{B} \models R(h(a_1), \dots h(a_n)) \Rightarrow R^{\mathcal{A}}(\underset{\sim}{a}) \iff R^{\mathcal{B}}(\dots)$ ■

Důsledek: $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. $\nearrow Th(\mathcal{A}) = Th(\mathcal{B})$

Dk: Pro každou sentenci φ máme z ii) $\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{B} \models \varphi$ ∎

Tvrzení: Nechť je L jazyk s rovností a $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ konečné L-struktury. Platí
$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}.$$

Dk: $\Rightarrow$: už víme
$\Leftarrow$: $|A| = |B|$ protože díky '=' můžeme vyjádřit "existuje právě n prvků"
... pak jen ukázat, že existuje izomorfismus (bijekce existuje).

Důsledek: Pokud má kompletní teorie v jazyce s rovností konečný model, potom jsou všechny její modely izomorfní.

Dk: Kompletní teorie má všechny modely el. ekvivalentní ∎

- Vztah definovatelných množin a automorfismů

Připomenutí: Množina definovaná formulí $\varphi(x_1, \dots x_n)$ ve struktuře $\mathcal{A}$ je
$$\varphi^{\mathcal{A}}(\underline{x}) := \{\underline{a} \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi(\underline{x}/\underline{a})\}.$$
Množina definovaná formulí $\varphi(x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_m)$ s parametry $\underline{b} \in A^m$ je
$$\varphi^{\mathcal{A}, \underline{b}}(\underline{x}) := \{\underline{a} \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi(\underline{x}/\underline{a}, \underline{y}/\underline{b})\}$$

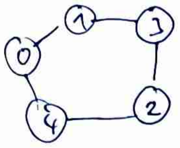
Když mám graf a udělám automorfismus, tak se musí zachovat všechny vlastnosti (je to jen přejmenování vrcholů)
$\Rightarrow$ Δ se zobrazí na Δ, izolovaný vrchol na izolovaný vrchol atd.
$\Rightarrow$ množina všech Δ se zobrazí na množinu všech Δ

Tvrzení: Je-li $D \subseteq A^n$ definovatelná v $\mathcal{A}$, potom pro každý automorfismus h na $\mathcal{A}$ platí, že obraz D v h, $h[D] = D$.

→ Je-li navíc definovatelná s parametry $\underline{b}$, tak to platí pro automorfismy identické na $\underline{b}$: tedy $h(b_i) = b_i$.

Dk: Ukážeme jen verzi s parametry. Nechť $D = \varphi^{\mathcal{A}, \underline{b}}(\underline{x}, \underline{y})$. Potom pro $\forall \underline{a} \in A^n$:
$$\underline{a} \in D \iff \mathcal{A} \models \varphi(\underline{x}/\underline{a}, \underline{y}/\underline{b}) \iff \mathcal{A} \models \varphi[e(\underline{x}/\underline{a}, \underline{y}/\underline{b})]$$, kde e je libovolné ohodnocení
$$\overset{(*)}{\iff} \mathcal{A} \models \varphi[(e \circ h)(\underline{x}/\underline{a}, \underline{y}/\underline{b})]$$
$$\iff \mathcal{A} \models \varphi[e(\underline{x}/h(\underline{a}), \underline{y}/h(\underline{b}))]$$
$$\iff \mathcal{A} \models \varphi[e(\underline{x}/h(\underline{a}), \underline{y}/\underline{b})] \iff h(\underline{a}) \in D.$$ ∎

Ukázka: Mějme graf G a parametr $y = 0$



Množiny definovatelné s $y = 0$:

$\{0\}$ formulí $y = x$

$\{1,4\}$ formulí $E(x,y)$

$\{2,3\}$ formulí $\neg E(x,y) \wedge x \neq y$

$\emptyset$, $\{0,1,2,3,4\}$

$\rightarrow$ a $\cap$, $\cup$, doplňky, ...

$\rightarrow$ jediný netriviální automorfismus G zachovávající 0 je $h(i) = (5-i) \bmod 5$.

$\Rightarrow h[\{2,3\}] = \{3,2\}$ ...

• ω-kategorické teorie

Def: Izomorfní spektrum T: $I(\kappa, T) := \#$ modelů T kardinality κ až na $\simeq$.

T je κ-kategorická $\equiv I(\kappa, T) = 1$.

Speciálně: T je ω-kategorická $\Leftrightarrow$ má jediný spočetně nekonečný model až na $\simeq$.

Tvrzení: DeLO je ω-kategorická.

Dk: Nechť $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ jsou spočetné nekonečné modely. Ukážeme $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$. Označme

$A = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$
$B = \{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ DeLO má axiom hustoty, tedy indukcí postupně

najdeme funkce $h_0 \subseteq h_1 \subseteq h_2 \subseteq \dots$ takové, že jsou prosté a

$h_i : A_i \subseteq A \to B$ je definovaná pro $\{a_0, \dots, a_{i-1}\}$ a její obor hodnot obsahuje $\{b_0, \dots, b_{i-1}\}$.

$\rightarrow$ dále h_i zachovávají axiomy uspořádání

$\Rightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ pomocí izomorfismu $h := \bigcup_{i \geq 0} h_i$

Důsledek: Izomorfní spektrum teorie DeLO*:

$I(k, \text{DeLO}^*) = 0$ pro $k \in \mathbb{N}$

$I(\omega, \text{DeLO}^*) = 4$

Dk: Husté uspořádání nemůže být konečné.

Proč 4? Když by modely z různých DeLO*

$\hookrightarrow$ min se musí zobrazit na min a max na max.

• ω-kategorické kritérium kompletnosti.

Věta: Buď T ω-kategorická ve spočetném jazyce L. Je-li

1) bez rovnosti nebo

2) s rovností a T nemá konečné modely,

potom je T kompletní.

Dk: 1) L-S věta bez rovnosti: $\forall$ model je $\equiv$ k nějakému spočetně nekonečném

$\rightarrow$ ale ten je z ω-kat. jediný (až na $\simeq$). a $\simeq \Rightarrow \equiv$.

2) L-S věta s rovností: podobně $\forall$ model je $\equiv$ k nějakému spočetném

$\rightarrow$ ale ten je jen 1, protože jsme konečné zakázali ■

Důsledek: DeLO, DeLO$^+$, DeLO$^-$, DeLO$^\pm$ jsou kompletní, takže to jsou jediné kompletní jednoduché extenze DeLO*.

• Axiomatizovatelnost

Def: Třída struktur $K \subseteq M_L$ je

1) axiomatizovatelná $\equiv \exists$ teorie T t.ž. $M_L(T) = K$.

2) konečně axiom. $\equiv$ je axiom. konečnou teorií

3) otevřeně axiom. $\equiv$ je axiom. otevřenou teorií

Def: Teorie T je konečně resp. otevřeně axiom. $\equiv$

třída jejích modelů $K = M_L(T)$ je konečně resp. otevřeně axiom.

Aby K mohla být axiom., tak musí být uzavřená na el. ekvivalenci.

Ukázka:

• grafy a částečná usp. jsou konečně i otevřeně ax.

• tělesa jsou konečně, ale ne otevřeně ax.

Věta: Má-li T libovolně velké konečné modely, má i nekonečný model.

Navíc není třída jejích modelů axiomatizovatelná.

Důsledek: Třídy konečných modelů nejsou axiomatizovatelné

• konečné grafy nejsou axiomatizovatelné

Věta (o konečné ax.): $K \subseteq M_L$ je konečně axiomatizovatelná $\iff$

K i $\overline{K} = M_L \setminus K$ jsou obě konečně axiomatizovatelné.

- Tělesa char. 0 nejsou konečně ax.

→ odteď značí T teorii těles

tělesa char p jsou konečně ax. jako

$$T_p = T \cup \{\underbrace{1+1+\dots+1}_{p} = 0\}$$

tělesa char 0 jsou ax., ale ne konečně

$$T_0 = T \cup \{\underbrace{1+1+\dots+1}_{p} \neq 0 \mid p \text{ je prvočíslo}\}$$

Tvrzení: Třída K těles char. 0 není konečně ax.

Dk: Stačí dokázat, že $\overline{K}$ (tělesa nenulové char. a netělesa) není ax.

Pro spor nechť $\overline{K} = M(S)$ pro nějakou (ne nutně konečnou) teorii S.

Definujme $S' := S \cup T_0$.

každá konečná část S' má model – těleso dostatečně velké char.

$\Rightarrow$ z věty o kompaktnosti má i S' model – označme ho $\mathcal{A}$.

Protože $\mathcal{A} \models S' = S \cup T_0$, tak $\mathcal{A} \models S \Rightarrow \mathcal{A} \in M(S) = \overline{K}$

$\mathcal{A} \models T_0 \Rightarrow \mathcal{A} \in M(T_0) = K$. ↯ ∎

- Otevřená axiomatizovatelnost

Věta: Je-li T otevřeně ax. potom je každá podstruktura modelu T také model T.

Dk: Nechť T' je otevřená ax. T, $\mathcal{A}$ model T' (tedy i T) a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Pro $\forall \alpha \in T'$ platí $\mathcal{B} \models \alpha$, tudíž $\mathcal{B} \models T'$ (tedy i T).

↳ α je otevřená = bez kvant. → nezáleží na doméně ∎

Poznámka: Platí i opačná implikace

Ukázka:

- DeLO není otevřeně ax. ∵ tieto $\mathbb{N} \subseteq$ DeLO není hustá
- teorie těles není otevřeně ax. ∵ $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ není těleso

- Nerozhodnutelnost a neúplnost

→ Gödelovy věty

- Rekurzivní axiomatizace → neúplnost

Def: T je rekurzivně axiomatizovaná ≡ ∃ algoritmus, který pro ∀ formuli φ doběhne a odpoví, zda $\varphi \in T$.

Def: Teorie T je

1) rozhodnutelná ≡ ∃ algoritmus, který pro ∀ formuli φ doběhne a odpoví, zda $T \models \varphi$.
2) částečně rozhodnutelná ≡ ∃ algoritmus, který
   - pokud $T \models \varphi$ doběhne a odpoví "ano"
   - pokud $T \not\models \varphi$ buď nedoběhne, nebo doběhne a odpoví "ne".

Tvrzení: Je-li T rekurzivně ax., potom

1) T je částečně rozh.
2) pokud je navíc kompletní, tak je rozhodnutelná.

Dk: 1) Algoritmus zkonstruuje systematické tablo z T pro $F\varphi$.
T je rekurzivní ax. takže postupně dostaneme všechny axiomy
→ pokud $T \models \varphi$, je tablo konečné a sporné

2) Víme, že buď $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \neg\varphi$
⇒ paralelně konstruujeme systematická tabla z T pro $F\varphi$ a $T\varphi$.
↔ jedno z nich bude konečné. ■

- Rekurzivně spočetná kompletace

Def: T má rekurzivně spočetnou kompletaci ≡ → až na ekvivalenci
množina všech jednoduchých kompletních extenzí T je rekurzivně spočetná
→ tedy ∃ algoritmus, který pro vstup (i, j) vypíše i-tý axiom j-té extenze nebo odpoví, že neexistuje.

Věta: Je-li T rekurzivně ax. a má rekurzivně spočetnou kompletaci, potom je rozhodnutelná.

Dk: Algoritmus paralelně konstruuje tablo důkaz φ z T a postupně tablo důkazy $\neg\varphi$ ze všech kompletních jednoduchých extenzí $T_1, T_2, \dots$ Aspoň 1 z tabel je sporné ■

Ukázka: Následující teorie jsou rekurzivní ax. a mají rekurzivní spoč. kompletaci

$\Rightarrow$ jsou rozhodnutelné

- Teorie hustých lineárních uspořádání DeLO
- Teorie Booleových algeber $\langle -, \wedge, \vee, \bot, \top \rangle$
- Teorie algebraicky uzavřených těles

• Rekurzivní axiomatizovatelnost

Def: Třída modelů $K \subseteq M_L$ je rek. axiomatizovatelná $\equiv$

$\exists$ rekurzivní axiomatizovaná T t.ž. $K = M_L(T)$.

$\rightarrow T'$ je rek. axiomatizovatelná $\equiv$ to platí pro třídu jejích modelů

$\Leftrightarrow$ je ekvivalentní nějaké rek. ax. teorii

Tvrzení: Je-li $\mathcal{A}$ konečná struktura v konečném jazyce s rovností,

potom je teorie $Th(\mathcal{A})$ rekurzivně axiomatizovatelná.

Dk: Označme doménu $A = \{a_1, \dots a_n\}$.. $Th(\mathcal{A})$ axiomatizujeme sentencí

"existuje právě n prvků $a_1, \dots a_n$ splňujících právě ty základní vztahy o funkčních hodnotách a relacích, které platí v $\mathcal{A}$"

$\rightarrow$ třeba když $f^{\mathcal{A}}(a_4, a_2) = a_{17}$, tak přidáme $f(x_4, x_2) = x_{17}$.

$(a_3, a_3, a_1) \notin R^{\mathcal{A}}$, přidej $\neg R(x_3, x_3, x_1)$. ∎

Důsledek: $Th(\mathcal{A})$ konečné struktury $\mathcal{A}$ v konečném jazyce s '$=$' je rozhodnutelná.

Dk: je rek. ax. & $Th(\mathcal{A})$ je vždy kompletní $\Rightarrow$ rozhodnutelná ∎

Ukázka: Pro následující struktury je $Th(\mathcal{A})$ rekurzivně axiomatizovatelná

$\Downarrow$ tedy i rozhodnutelná

- $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ ... teorie diskrétních lin. usp.
- $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ ... teorie DeLO
- $\langle \mathbb{N}, S, 0 \rangle$ ... teorie následníka s nulou
- $\langle \mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ ... teorie algebraicky uzavřených těles char. 0

! teorie standardního modelu aritmetiky

$\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$

není rekurzivní ax.

- Gödelovy věty o neúplnosti

Věta (o nerozhodnutelnosti predikátové l.): Neexistuje algoritmus, který pro vstupní formuli φ rozhodne, zda platí v logice, tedy $\models \varphi$.

→ neboli $T = \emptyset$ není rozhodnutelná

- Aritmetika

→ jazyk je $L = \langle S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ s rovností

→ standardní model $\underline{\mathbb{N}}$ nemá rekurzivně axiomatizovatelnou teorii (viz 1. věta o neúplnosti)

⇒ používáme rekurzivně ax. teorie, které vlastnosti $\mathbb{N}$ popisují částečně

- Robinsonova aritmetika – Q

$$S(x) \neq 0 \qquad x \cdot 0 = 0$$
$$S(x) = S(y) \rightarrow x = y \qquad x \cdot S(y) = x \cdot y + x$$
$$x + 0 = x \qquad x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(x = S(y))$$
$$x + S(y) = S(x+y) \qquad x \leq y \leftrightarrow (\exists z)(z + x = y)$$

→ velmi slabá, nelze dokázat ani asociativita / komutativita $+$ a $\cdot$

- Peanova aritmetika – PA

→ extenze Q o schéma axiomů indukce

↳ pro každou L-formuli $\varphi(x, \bar{y})$ přidáme axiom

$$(\varphi(0, \bar{y}) \wedge (\forall x)(\varphi(x, \bar{y}) \rightarrow \varphi(S(x), \bar{y}))) \rightarrow (\forall x)\, \varphi(x, \bar{y})$$

→ mnohem silnější aproximace $Th(\underline{\mathbb{N}})$

Věta (1. Gödelova): Je-li T bezesporná rekurzivně axiomatizovatelná extenze Q, potom $\exists$ sentence pravdivá v $\underline{\mathbb{N}}$, ale nedokazatelná v T.

⇒ $\nexists$ efektivní popis aritmetiky přirozených čísel je neúplný

Důsledek: Je-li T bezesporná, rek. ax. extenze Q & $\underline{\mathbb{N}}$ je model T, potom T není kompletní.

Dk: Pro spor nechť je T kompletní. Vezmeme sentenci φ, garantovanou 1. větou, která je $\underline{\mathbb{N}} \models \varphi$, ale $T \nvdash \varphi$.

→ T je kompletní, tudíž $T \vdash \neg\varphi$, tedy $T \models \neg\varphi$, tedy $\underline{\mathbb{N}} \models \neg\varphi$. ■

Věta (nedefinovatelnost pravdy): V žádném bezesporném rozšíření Robinsonovy aritmetiky nemůže existovat definice pravdy

→ to se dá nějak formálně definovat

→ myšlenka: paradox lháře … je pravdivá φ = "nejsem pravdivá v T"?

• Druhá věta o neúplnosti

Neformálně: Efektivně daná, dostatečně bohatá T nedokáže svou bezespornost.

Věta (2. Gödelova): Je-li T bezesporná rekurzivně axiomatizovatelná extenze PA, potom φ = "T je bezesporná" není dokazatelná v T.

Důsledek: Je-li ZFC bezesporná, nelze to v ní dokázat.

Pz.: ZFC není extenze PA, ale je v ní možné PA interpretovat.

Důsledek: Kdyby někdo v rámci ZFC dokázal, že je bezesporná, znamenalo by to, že je sporná.