• Skalární součin

Def: Skalární součin na v.p. V nad $\mathbb{C}$ je zobrazení $V \times V \to \mathbb{C}$ splňující:
$u, v \mapsto \langle u | v \rangle$

- $\forall u \in V$: $\langle u | u \rangle \in \mathbb{R}_0^+$
- $\forall u \in V$: $\langle u | u \rangle = 0 \iff u = o$
- $\forall u, v \in V$: $\langle v | u \rangle = \overline{\langle u | v \rangle}$
- $\forall u, v, w \in V$: $\langle u + v | w \rangle = \langle u | w \rangle + \langle v | w \rangle$
- $\forall u \in V, \forall a \in \mathbb{C}$: $\langle au | v \rangle = a \langle u | v \rangle$

→ skalární součin na V nad $\mathbb{R}$ je zobrazení do $\mathbb{R}$ → $\langle v | u \rangle = \langle u | v \rangle$ ve 3. axiomu
→ $a \in \mathbb{R}$ v posledním axiomu

Příklady

- standardní s.s. na $\mathbb{R}^n$: $\langle u | v \rangle = \sum u_i v_i = v^T u$
- standardní s.s. na $\mathbb{C}^n$: $\langle u | v \rangle = \sum u_i \overline{v_i} = v^H u$
- s.s. na $\mathbb{R}^n$ určený regulární A: $\langle u | v \rangle = v^T A^T A u$
- s.s. na v.p. reálných polynomů na $[a, b]$: $\langle f | g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$

* Hermitovská trans.

$A^H_{ij} = \overline{a_{ji}}$

$(AB)^H = B^H A^H$

Vlastnosti:

- $\langle u | v + w \rangle = \langle u | v \rangle + \langle u | w \rangle$ $\because$ $\langle u | v + w \rangle = \overline{\langle v + w | u \rangle} = \overline{\langle v | u \rangle} + \overline{\langle w | u \rangle} = \langle u | v \rangle + \langle u | w \rangle$
- $\langle u | av \rangle = \bar{a} \langle u | v \rangle$ $\because$ $\langle u | av \rangle = \overline{\langle av | u \rangle} = \overline{a \langle v | u \rangle} = \bar{a} \langle u | v \rangle$
- $\langle au | au \rangle = a \bar{a} \langle u | u \rangle = |a|^2 \langle u | u \rangle$
- $\left\langle \sum_{i=1}^{k} a_i u_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{l} b_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} a_i \overline{b_j} \langle u_i | v_j \rangle$

$\|a \cdot u\| = |a| \cdot \|u\|$

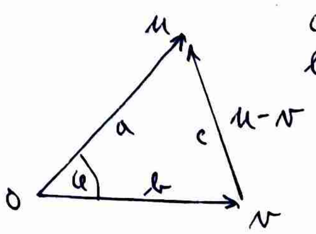
• Norma

Def: Je-li V prostor se skalárním součinem $V \times V \to \mathbb{C}$, pak norma od něj odvozená je zobrazení $V \to \mathbb{R}_0^+$, $u \mapsto \|u\| := \sqrt{\langle u | u \rangle} = \sqrt{\sum_i u_i^2}$.

Geometrická interpretace v euklidovském $\mathbb{R}^n$

- $\|u\|$ → délka u
- $\|u - v\|$ → vzdálenost bodů u a v
- $\langle u | v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\varphi$ → úhel mezi u a v

$a = \|u\|$
$c = \|u - v\|$
$b = \|v\|$



Dk: Cosinová věta: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$

1) $\langle u - v | u - v \rangle = \langle u | u \rangle + \langle v | v \rangle - 2\|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\varphi$
2) $\langle u - v | u - v \rangle = \langle u | u \rangle + \langle v | v \rangle - \langle u | v \rangle - \langle v | u \rangle$

$\|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\varphi = \langle u | v \rangle$

- Cauchy-Schwartzova nerovnost

Věta: Sk. s. ve v. p. V nad $\mathbb{C}$ splňuje:

$$\forall u,v \in V: |\langle u|v\rangle| \leq \sqrt{\langle u|u\rangle\langle v|v\rangle} = \|u\|\cdot\|v\|$$

Dk: Búno $u,v \neq 0$ jinak $0 \leq 0$.

$$\forall a \in \mathbb{C}: 0 \leq \|u+av\|^2 = \langle u+av|u+av\rangle = \langle u|u\rangle + a\langle u|v\rangle + \underbrace{a\langle v|u\rangle + a\bar{a}\langle v|v\rangle}$$

↳ zvolíme $a = -\dfrac{\langle v|u\rangle}{\langle v|v\rangle}$ $\Rightarrow 0 \leq \langle u|u\rangle - \dfrac{\langle v|u\rangle}{\langle v|v\rangle}\langle u|v\rangle + 0$

$$\Rightarrow \langle u|v\rangle\langle v|u\rangle \leq \langle u|u\rangle\langle v|v\rangle \quad \ldots \text{ platí } a\bar{a} = |a|^2$$

$$|\langle u|v\rangle|^2 \leq \|u\|^2\cdot\|v\|^2$$

■

Důsledek: Nerovnost mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem.

Pro $\forall u \in \mathbb{R}^n$: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$.

Dk: Zvolíme $v = (1,1,\ldots 1)^T$ a použijeme C-S nerovnost pro s. s. na $\mathbb{R}$:

$$\sum_i u_i = \langle u|v\rangle \leq |\langle u|v\rangle| \leq \|u\|\cdot\|v\| = \sqrt{\sum_i u_i^2}\cdot\sqrt{n}$$

■

Tvrzení: Každá norma splňuje Δ-nerovnost $\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$.

Dk: $\|u+v\| = \sqrt{\langle u+v|u+v\rangle} = \sqrt{\langle u|u\rangle + \langle u|v\rangle + \langle v|u\rangle + \langle v|v\rangle} \overset{*}{\leq}$

$\leq \sqrt{\langle u|u\rangle + 2|\langle u|v\rangle| + \langle v|v\rangle} \leq \sqrt{\|u\|^2 + 2\|u\|\cdot\|v\| + \|v\|^2} = \|u\|+\|v\|$ ■

| * $\langle u|v\rangle = a+bi$
| $\langle u|v\rangle + \langle v|u\rangle = 2a$
| $2|\langle u|v\rangle| = 2\sqrt{a^2+b^2}$ ✓

- Kolmost

Def: Vektory u,v z prostoru se s. s. jsou kolmé $u \perp v \equiv \langle u|v\rangle = 0$.

Pozorování: Množina netriviálních vzájemně kolmých vektorů je lineárně nezávislá.

Dk: Sporem: $u_0, \ldots u_k$ jsou kolmé a l. nz $\Rightarrow \exists u_r$ (búno $r=0$) $u_0 = \sum_{i=1}^{k} a_i u_i$

$$0 \neq \langle u_0|u_0\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} a_i u_i \middle| u_0 \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} a_i \langle u_i|u_0\rangle = \sum a_i\cdot 0 = 0 \quad \lightning$$

■

Def: Množina vektorů $\{v_1,\ldots v_n\}$ je ortogonální systém $\equiv \forall i,j: v_i \perp v_j$.

Množina vektorů $\{v_1,\ldots v_n\}$ je ortonormální systém $\equiv \forall i\neq j: v_i \perp v_j \wedge \|v_i\| = 1$.

Def: Báze $Z = \{v_1,\ldots v_n\}$ prostoru V se s. s. je ortonormální $\equiv$ tvoří ortonorm. systém.

Def: Matice A je unitární $\equiv A^H A = I_n \iff A^H = A^{-1}$.

vzhledem ke std. s. s.

Pozorování: Matice, jejíž sloupce jsou vektory ortonormální báze $\mathbb{C}^n$ je unitární.

$$M = \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \overline{v_2} \\ \overline{v_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \qquad M_{ii} = \langle v_i|v_i\rangle = 1 \qquad M_{i\neq j} = \langle v_j|v_i\rangle = 0$$

| $A^H A = I_n \wedge B^H B = I_n$
| $(AB)^H(AB) = B^H A^H A B = B^H B = I_n$

• **Fourierovy koeficienty**

Věta: Nechť $Z=\{z_1,\dots z_n\}$ je ortonormální báze prostoru V.

$\Leftrightarrow$ $\forall u\in V$: $u = \langle u|z_1\rangle z_1+\dots+\langle u|z_n\rangle z_n = \sum_i \langle u|z_i\rangle z_i$.

$\langle u|z_i\rangle$ se nazývají F. koeficienty

Dk: $u=\sum_i a_i z_i$ $\Rightarrow$ chci aby $a_j=\langle u|z_j\rangle$

$$\langle u|z_j\rangle = \left\langle \sum_i a_i z_i \middle| z_j\right\rangle = \sum_i a_i\langle z_i|z_j\rangle = a_j \quad \because \langle z_j|z_j\rangle=1,\ \langle z_{i\neq j}|z_j\rangle=0 \quad \blacksquare$$

Důsledek: vektor souřadnic $[u]_Z = (\langle u|z_1\rangle, \langle u|z_2\rangle, \dots \langle u|z_n\rangle)^T$.

Věta: Nechť $Z=\{z_1,\dots z_n\}$ je ortonormální báze prostoru V

$\Leftrightarrow$ $\forall u,v\in V$: $\langle u|v\rangle = v^H u = [v]_Z^H[u]_Z$.

Dk:

$$\langle u|v\rangle = \left\langle \sum_i\langle u|z_i\rangle z_i \middle| \sum_j \langle v|z_j\rangle z_j\right\rangle =$$

$= 1 \Leftrightarrow j=i$
$= 0 \Leftrightarrow j\neq i$

$$= \sum_i\sum_j \langle u|z_i\rangle\overline{\langle v|z_j\rangle}\,\overbrace{\langle z_i|z_j\rangle} = \sum_i \langle u|z_i\rangle\overline{\langle v|z_i\rangle} = [v]_Z^H[u]_Z \quad \blacksquare$$

• **Ortogonální projekce**

Def: Nechť W je prostor se s.s. a V je jeho podprostor s ortonormální bází $Z=\{z_1,\dots z_k\}$.
Ortogonální projekce W na V je zobrazení $p_Z: W\to V$ definované

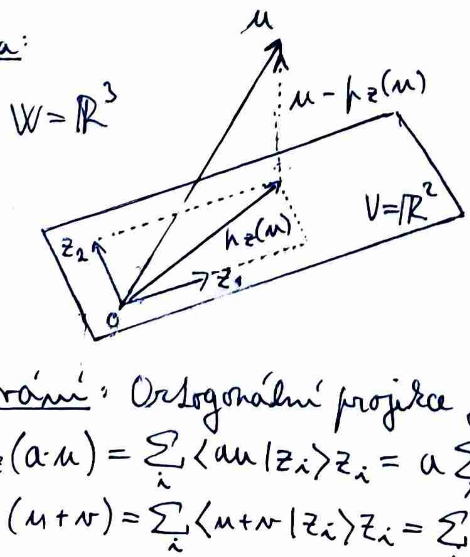
$$p_Z(u) := \sum_{i=1}^{k}\langle u|z_i\rangle z_i.$$

Pozorování: Nyní bázi V $\{z_1,\dots z_k\}$ rozšířím na ortn. bázi W $\{z_1,\dots z_n\}$.

$$\Rightarrow u = \underbrace{\langle u|z_1\rangle z_1+\dots+\langle u|z_k\rangle z_k}_{p_Z(u)} + \underbrace{\langle u|z_{k+1}\rangle z_{k+1}+\dots+\langle u|z_n\rangle z_n}_{u-p_Z(u)}.$$

$= p_{Z^\perp}(u) \to \mathcal{L}\{z_{k+1},\dots z_n\} = V^\perp$

Ukázka:



Důsledek: $\exists$ matice M tohoto l. z.
t. ž. $A u = p_Z(u)$.
Nazývá se matice projekce

Pozorování: Ortogonální projekce je lineární zobrazení.

Dk: $p_Z(a\cdot u) = \sum_i\langle au|z_i\rangle z_i = a\sum_i\langle u|z_i\rangle z_i = a\cdot p_Z(u)$

$p_Z(u+v) = \sum_i\langle u+v|z_i\rangle z_i = \sum_i\langle u|z_i\rangle z_i + \sum_i\langle v|z_i\rangle z_i = p_Z(u)+p_Z(v)$ $\blacksquare$

Značení: Kolmost na množinu. $u \perp Z \equiv \forall z \in Z: u \perp z$.

Lemma: Nechť p_Z je o. projekce W na V, potom $u - p_Z(u) \perp Z \Rightarrow u - p_Z(u) \perp V$.

Dk: $\langle u - p_Z(u) \mid z_j \rangle = \langle u - \sum_{i=1}^{k} \langle u \mid z_i \rangle z_i \mid z_j \rangle = \langle u \mid z_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle u \mid z_i \rangle \langle z_i \mid z_j \rangle$

$$= \langle u \mid z_j \rangle - \langle u \mid z_j \rangle \langle z_j \mid z_j \rangle = 0. \quad \blacksquare$$

Pozorování: Ten vektor $v \in V = \mathrm{span}(Z)$, který minimalizuje $\|u - v\|$ je $p_Z(u)$.

Dk: Pro $v \in V$, $v \neq p_Z(u)$ definujeme $a := u - p_Z(u)$, $b := p_Z(u) - v \neq 0$

$$\Rightarrow \|u - v\| = \|a + b\| = \sqrt{\langle a+b \mid a+b \rangle} = \sqrt{\langle a \mid a \rangle + \langle a \mid b \rangle + \langle b \mid a \rangle + \langle b \mid b \rangle} \quad \underline{\underline{a \perp b}}$$

$$= \sqrt{\langle a \mid a \rangle + \langle b \mid b \rangle} \overset{b \neq 0}{>} \sqrt{\langle a \mid a \rangle} = \|a\| = \|u - p_Z(u)\| \quad \blacksquare$$

Důsledek: Zobrazení p_Z nezávisí na volbě báze Z.

- Metoda nejmenších čtverců
  - → problém: $Ax = b$ nemá řešení $\iff b \notin S(A)$
    - $\Rightarrow$ neexistuje x t.ž. lo l.k. A zobrazí na b
    - $\Rightarrow$ najdu $b' \in S(A)$ nejblíže b $\Rightarrow$ chci minimalizovat $\|b - b'\|$
    - $\Rightarrow b' =$ projekce b do $S(A)$
  - → výpočet
    1. ortonormalizuji $S(A) \Rightarrow b' = p_{S(A)}(b) \Rightarrow$ vyřeším $Ax = b'$
    2. namísto $Ax = b'$ vyřešit ekvivalentní $A^T A x = A^T b$

Dk: $\left.\begin{aligned} &b' = p_{S(A)}(b) \iff b - b' \perp S(A) \\ &S(A) = R(A^T) \Rightarrow (S(A))^{\perp} = (R(A^T))^{\perp} = \mathrm{Ker}(A^T) \end{aligned}\right\} b - b' \in \mathrm{Ker}(A^T) \iff A^T(b - b') = 0$

$$\iff A^T(b - Ax) = 0 \iff A^T b = A^T A x \quad \blacksquare$$

- Gram-Schmidtova ortogonalizace
  - → algoritmus pro převod báze $(x_1, x_2, \dots x_n)$ prostoru V na ortonormální bázi $(z_1, \dots z_n)$

1. Pro $k = 1, \dots n$:
2. $y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle x_i \mid z_i \rangle z_i$
3. $z_k = \frac{1}{\|y_k\|} y_k$

Mám $z_1, \dots z_{k-1} \Rightarrow$ chci z_k, mám x_k

$$x_k = \underbrace{\langle x_k \mid z_1 \rangle z_1 + \dots + \langle x_k \mid z_{k-1} \rangle z_{k-1}}_{\text{projekce } x_k \text{ do } \{z_1, \dots z_{k-1}\}} + \underbrace{\langle x_k \mid z_k \rangle z_k}_{y_k = x_k - p(x_k)}$$

Správnost:

2: $y_k \perp z_j$ pro $\forall j < k \Rightarrow z_i \perp z_j$ pro $i \neq j$

3: $\|z_k\| = \left\| \frac{1}{\|y_k\|} y_k \right\| = \frac{1}{\|y_k\|} \|y_k\| = 1$

Lemma o výměně: $\mathrm{span}\{z_1, \dots z_{k-1}, x_k\} = \mathrm{span}\{z_1, \dots z_{k-1}, y_k\} = \mathrm{span}\{z_1, \dots z_{k-1}, z_k\}$

• Lineární zobrazení zachovávající s. s.

Def: Lineární zobrazení $f: U \to V$ je izometrie $\equiv \forall u, v \in U: \langle u|v\rangle = \langle f(u)|f(v)\rangle$

Věta: Lineární zobrazení $f: U \to V$ je izometrie $\iff \forall u \in U: \|u\| = \|f(u)\|$

$\Rightarrow$ stačí aby f zachovávalo související normu

Dk: $\Rightarrow$ triviální

$$\Leftarrow: \|u+av\|^2 = \langle u+av|u+av\rangle = \|u\|^2 + a\langle v|u\rangle + \bar{a}\langle u|v\rangle + a\bar{a}\|v\|^2$$

$$\|f(u+av)\|^2 = \langle f(u+av)|f(u+av)\rangle = \|f(u)\|^2 + a\langle f(v)|f(u)\rangle + \bar{a}\langle f(u)|f(v)\rangle + a\bar{a}\|f(v)\|^2$$

$$\Rightarrow \quad a\langle v|u\rangle + \bar{a}\langle u|v\rangle = a\langle f(v)|f(u)\rangle + \bar{a}\langle f(u)|f(v)\rangle$$

$$\left.\begin{aligned} a=1: &\quad \langle v|u\rangle + \langle u|v\rangle = \langle f(v)|f(u)\rangle + \langle f(u)|f(v)\rangle \\ a=i: &\quad \langle v|u\rangle - \langle u|v\rangle = \langle f(v)|f(u)\rangle - \langle f(u)|f(v)\rangle \end{aligned}\right\} \langle u|v\rangle = \langle f(u)|f(v)\rangle$$

• Maticová charakterizace bijektivních izometrií

Věta: Nechť U a V jsou prostory se s.s. konečné dimenze a X, Y jejich ortonormální báze. Lineární zobrazení $f: U \to V$ je bijektivní izometrie $\iff {}_Y[f]_X$ je unitární.

Dk: Lineární bijekce implikuje stejné dimenze a naopak.

• X je ortonorm. $\iff \langle u|v\rangle = v^H u = [v]_X^H [u]_X$

• Y je ortonorm. $\iff \langle f(u)|f(v)\rangle = [f(v)]_Y^H [f(u)]_Y = \left({}_Y[f]_X [v]_X\right)^H \cdot \left({}_Y[f]_X [u]_X\right)$

$$= [v]_X^H \left({}_Y[f]_X^H \; {}_Y[f]_X\right) \cdot [u]_X$$

$\Leftarrow$: ${}_Y[f]_X^H \, {}_Y[f]_X = I_n \Rightarrow \langle u|v\rangle = \langle f(u)|f(v)\rangle$

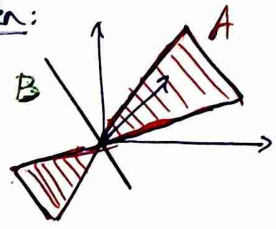
$\Rightarrow$: $\langle u|v\rangle = \langle f(u)|f(v)\rangle \Rightarrow [v_X]^H [u]_X = [v]_X^H \left({}_Y[f]_X^H \, {}_Y[f]_X\right) [u]_X \Rightarrow {}_Y[f]_X^H \, {}_Y[f]_X = I_n$ ∎

• Ortogonální doplněk

Def: Ortogonální doplněk podmnožiny $V \subseteq W$ vektorového prostoru se s.s. W je

$$V^\perp \equiv \{u \in W \mid \forall v \in V: u \perp v\}$$

Ukázka:



$W = \mathbb{R}^3$

$A^\perp = B$

$B^\perp = A$

Pozorování: Pokud $U \subseteq V$, pak $V^\perp \subseteq U^\perp$

Dk: $\forall x \in V^\perp: \forall v \in V: x \perp v \Rightarrow \forall u \in U: x \perp u \Rightarrow x \in U^\perp$ ∎

Pozorování: Každý ortogonální doplněk je podprostorem W.

Dk: $\forall u, w \in V^\perp, \forall v \in V$:

1, $u \perp v \Rightarrow \langle au | v \rangle = a \langle u | v \rangle = a \cdot 0 = 0 \Rightarrow au \perp v$

2, $u, w \perp v \Rightarrow \langle u + w | v \rangle = \langle u | v \rangle + \langle w | v \rangle = 0 \Rightarrow u + w \perp v$ ■

Pozorování: Pro jakýkoli podprostor $V \subseteq W$: $V \cap V^\perp = \{o\}$

Dk: $\forall u \in V \cap V^\perp$: $u \perp u \Rightarrow \langle u | u \rangle = 0 = u = o$ ■

Věta: Pro konečně generovaný W se s.s. a podprostor V platí

1, $(V^\perp)^\perp = V$

2, $\dim(V) + \dim(V^\perp) = \dim(W)$

- Ortogonální doplněk a matice

Tvrzení: Pro $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ platí $(R(A))^\perp = \ker(A)$.

Dk: Ukážeme: $\forall u \in R(A), v \in \ker(A)$: $u \perp v$. $\quad r := \operatorname{rank}(A)$

$$\left.\begin{array}{l} x_1, \dots x_r \text{ báze } R(A) \\ y_1, \dots y_{n-r} \text{ báze } \ker(A) \end{array}\right\} \langle u | v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{r} a_i x_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n-r} b_j y_j \right\rangle = \sum_i \sum_j a_i b_j \overset{0}{\langle x_i | y_j \rangle} = 0$$

Dk: Zvolíme ortonormální bázi $V \to X$; $X = \{x_1, \dots x_k\}$

Doplníme ji na ortonorm. bázi $W \to Z$

$\to$ ukážeme $\operatorname{span}(Y) = V^\perp \to Y = Z \setminus X$; $Y = \{y_1, \dots y_e\}$

1, $\forall u \in \operatorname{span}(X) = V$, $v \in \operatorname{span}(Y)$: $u \perp v \Rightarrow \operatorname{span}(Y) \subseteq V^\perp$

2, $\forall w \in V^\perp$: $[w]_Z = (\langle w | z_1 \rangle, \dots \langle w | z_n \rangle)^T \wedge \forall x_i \langle w | x_i \rangle = 0$

$\Rightarrow w \in \operatorname{span}(Z \setminus X) = \operatorname{span}(Y) \Rightarrow V^\perp \subseteq \operatorname{span}(Y)$

$\Rightarrow \dim(V) + \dim(V^\perp) = |X| + |Y| = |Z| = \dim(W)$

$\Rightarrow (V^\perp)^\perp = (\operatorname{span}(Y))^\perp = \operatorname{span}(Z \setminus Y) = \operatorname{span}(X) = V$ ■

• Příklady:

1) Najdi o. bázi $U = \text{span}\{\overset{x_1}{(1,1,0)^T}, \overset{x_2}{(1,1,1)^T}\}$

$$z_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1$$

$$x_2 = \langle x_2|z_1\rangle z_1 + \underbrace{\langle x_2|z_2\rangle z_2}_{y_2} \Rightarrow y_2 = x_2 - \langle x_2|z_1\rangle z_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{báze } \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, (0,0,1)^T\right\}$$

• Doplň ji na o. bázi $\mathbb{R}^3$ – bez G-S ortogonalizace

→ chci y_3 t.ž. $\langle z_1|y_3\rangle = 0 \wedge \langle z_2|y_3\rangle = 0 \Rightarrow (R(A))^\perp = \ker(A)$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot y_3 = \mathcal{O} \Rightarrow y_3 = (1,-1,0)^T \Rightarrow z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$$

• Urči souřadnice $[(3,2,1)^T]_Z$

$$[(3,2,1)^T]_Z = (\langle u|z_1\rangle, \langle u|z_2\rangle, \langle u|z_3\rangle)^T = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}5, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$$

• Spočti projekci $(3,2,1)^T$ do U

$$p_{Z'}(u) = \langle u|z_1\rangle z_1 + \langle u|z_2\rangle z_2 = \frac{5}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(5,5,2)^T$$

2) Najdi o. bázi p. generovaného $(1,1,1,1)^T$ $(4,1,4,1)^T$ $(1,2,3,4)^T$

↳ preprocessing ⟶

$$(1,1,1,1)^T,\quad (4,1,4,1)^T \to (1,0,1,0),\quad (1,2,3,4)^T \to (0,1,2,3)$$

$$\underset{x_1}{(0,1,0,1)} \leftarrow (1,0,1,0) \xrightarrow{x_2} (0,0,2,2) \to \underset{x_3}{(0,0,1,1)}$$

$x_1 \perp x_2$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)^T$$

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)^T$$

$$z_3 = \frac{1}{2}(-1,-1,1,1)^T \qquad y_3 = x_3 - \langle x_3|z_1\rangle z_1 + \langle x_3|z_2\rangle z_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

3) $\mathbb{C}^3$: $x_1 = (1-i)\cdot\underbrace{(1, i, 1+i)^T}_{x'}$, $x_2 = (1,1,1)^T$ → najdi ortonormální bázi

skal. násobek mě nezajímá

$$\Rightarrow z_1 = \frac{x'}{\|x'\|} = \frac{1}{2}x' \quad ; \|x'\|^2 = \langle x'|x'\rangle = 1\cdot 1 + i\cdot\bar{i} + (1+i)\overline{(1+i)} = 1+1+2 = 2^2$$

$$\Rightarrow x_2 = \langle x_2|z_1\rangle z_1 + \langle x_2|z_2\rangle z_2 \Rightarrow y_2 = x_2 - \langle x_2|z_1\rangle z_1$$

$$\Rightarrow y_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\langle x_2|x'\rangle\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\i\\1+i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1-i}{2}\begin{pmatrix}1\\i\\1+i\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-i\\1+i\\2\end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+i\\1-i\\0\end{pmatrix}}}$$

→ ortogonální doplněk

nad $\mathbb{R}$: nad $\mathbb{C}$: → a já chci $\bar{w}$

$$(R(A))^\perp = \ker(A) \qquad \begin{pmatrix} — z_1 — \\ — z_2 — \\ — z_3 — \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}|\\w\\|\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \Rightarrow (R(A))^\perp = \overline{\ker(A)}$$

4) Najdi směrnici $p \in \mathbb{R}^3$ přímky procházející počátkem takové, že se body $u=(1,2,3)^T$, $v=(0,3,1)^T$, $w=(8,1,2)^T$ zobrazí při projekci na ni do stejného bodu.

a) najdu rovinu určenou $u, v, w \to p =$ norm. vektor $(\underbrace{a, b, c}_{\vec{n}}, d)$

b) $z = \frac{p}{\|p\|} = (a, b, c)^T \Rightarrow \langle u|z\rangle z = \langle v|z\rangle z = \langle w|z\rangle z$

$$a + 2b + 3c = 3b + c = 8a + b + 2c$$

$$\begin{matrix} a - b \;\; 2c = 0 \\ 7a - b - c = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 7 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & -15 \end{pmatrix} \to \underline{(1,5,2)^T}$$

$$\qquad\qquad 2 \quad -5$$

5) Buď $\langle x|y\rangle$ s.s. v $\mathbb{R}^3$ a $\overset{x}{(1,0,1)^T}, \overset{y}{(1,2,0)^T}, \overset{z}{(0,1,1)^T}$ ort. báze. $\langle (3,1,1)^T | (2,1,6)^T \rangle = ?$

$$\left\langle \sum_i a_i z_i \,\middle|\, \sum_j b_j z_j \right\rangle = \sum_i \sum_j a_i b_j \langle z_i | z_j \rangle = \sum_i a_i b_j \quad \leftarrow \text{standardní s.s. !}$$

$$\left.\begin{matrix} u = (3,1,1)^T = 2x + y - z \\ v = (2,1,6)^T = 3x - y + 3z \end{matrix}\right\} \langle u|v\rangle = 6 - 1 - 3 = 2$$

6) Urči vzdálenost $x = (6,6,4,4)^T$ od roviny procházející body $A = (1,1,1,1)^T$, $B = (9,1,1,-1)^T$ $C = (5,-1,3,0)^T$

→ posunu celou situaci do počátku ⇒ ϱ bude prostor

⇒ udělám projekci X do ϱ a určím vzdálenost $\|X - p(x)\|$.

$\varrho = \text{span}(u, v)$

$A' = A - A = (0,0,0,0)$

$B' = B - A = (8,0,0,-2) = u \to (4,0,0,-1) \to z_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}(4,0,0,-1)^T$

$C' = C - A = (4,-2,2,-1) = v \to y_2 = v - \langle v|z_1\rangle z_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{17}{17}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (0,-2,2,0)^T \qquad (0,1,-1,0)^T$

$x' = X - A = (5,5,3,3)$

$z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0)^T$

$$\Rightarrow p_z(x') = \langle x'|z_1\rangle z_1 + \langle x'|z_2\rangle z_2 = \frac{17}{17}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (4,1,-1,-1)^T$$

$$\Rightarrow d(\varrho, x) = \|x' - p_z(x')\| = \|(1,4,4,4)\| = \sqrt{1+16+16+16} = \underline{\underline{7}}$$

- **Determinanty**

→ Značení: S_n = grupa permutací na $\{1, \dots n\}$

Def: Determinant matice $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ je

$$\det(A) := \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)}$$ → jedu po řádcích a vybírám prvky podle p

Ukázka: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \to p_1 = (1,2) \to +1 \;,\; a \cdot d \\ \to p_2 = (2,1) \to -1 \;,\; b \cdot c \end{array}\right\} \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Pro 3x3 → 6 permutací

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

→ $p_1 = (1,2,3) \to a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$ | $p_4 = (3,2,1) \to a_{13} a_{22} a_{31}$

$p_2 = (2,3,1) \to a_{12} a_{23} a_{31}$ | $p_5 = (1,3,2) \to a_{11} a_{23} a_{32}$

$p_3 = (3,1,2) \to a_{13} a_{21} a_{32}$ | $p_6 = (2,1,3) \to a_{12} a_{21} a_{33}$

↪ $\operatorname{sgn} = +1$ | ↪ $\operatorname{sgn} = -1$

Pozorování: Má-li A nulový řádek, pak $\det(A) = 0$.

Dk: každý součin v definici obsahuje prvek z nulového řádku.

Pozorování: Pro trojúhelníkové matice platí $\det(A) = \pm$ součin prvků na diagonále

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & & \ddots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \vdots \\ 0 & & \ddots \;\; a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_i a_{ii}$$

$\left\{\begin{array}{l} \text{v 1. řádku musím } a_{11} \\ \text{v 2. řádku musím } a_{22} \\ \vdots \\ \to \det(A) = \det(A^T) \end{array}\right.$

$$\begin{vmatrix} 0 & & a_{1n} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ & a_{n-1\,2} & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \\ a_{n1} & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \prod_i a_{i,n+1-i}$$

$\left\{ \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1+\dots+1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \right.$

Vlastnosti

- $\det(A) = \det(A^T)$ Dk: permutace sečtu v jiném pořadí: $p \in S_n : p(i) = j \Leftrightarrow i = p^{-1}(j)$

$$\Rightarrow \det(A^T) = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} \underbrace{(A^T)_{i\,p(i)}}_{a_{p(i)\,i}} = \sum_{p^{-1} \in S_n} \operatorname{sgn}(p^{-1}) \prod_{i=1}^{n} a_{j\,p^{-1}(j)} = \det(A)$$ ■

- přerovnání sloupců podle $q \in S_n$: $B: b_{ij} = a_{i\,q(j)}$: $\det(B) = \operatorname{sgn}(q) \det(A)$

$$\det(B) = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_i b_{i\,p(i)} = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(q) \operatorname{sgn}(q) \operatorname{sgn}(p) \prod_i a_{i\,q(p(i))} =$$

$$= \operatorname{sgn}(q) \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(q \circ p) \prod_i a_{i\,(q \circ p)(i)} = \operatorname{sgn}(q) \sum_{r \in S_n} \operatorname{sgn}(r) \prod_i a_{i\,r(i)} = \operatorname{sgn}(q) \det(A)$$ ■

$r = q \circ p$ $\quad p \mapsto r$ je bijekce na S_n

• **Důsledky**

• Totéž platí pro prorování řádků ← díky $\det(A) = \det(A^T)$

• výměna dvou řádků / sloupců změní znaménko determinantu

• pro matice nad tělesy char $\neq 2$ se dvěma stejnými řádky / sloupci platí

$$\det(A) = -\det(A) \Rightarrow \det(A) = 0, \quad \text{pro char} = 2 \text{ platí } 1 = -1$$

Lemma: Má-li A dva stejné řádky / sloupce, pak $\det(A) = 0$.

Dk: Nechť ~~to~~ k-tý řádek shoduje s l-tým

$\Rightarrow$ pro každou $p \in S_n$ umíme najít $q = p \circ (k, l) \in S_n$, takže

$$\prod_i a_{i p(i)} = \prod_i a_{i q(i)} \quad \& \quad \operatorname{sgn}(p) = -\operatorname{sgn}(q)$$

$\Rightarrow p \mapsto q$ je bijekce na $S_n \Rightarrow$ sčítance v $\det(A)$ spárujeme tak, že se navzájem odečtou ∎

• **Linearita determinantu**

Věta: Determinant matice je lineárně závislý na každém jejím řádku a sloupci.

$$\begin{vmatrix} \text{———} \\ \text{———} \\ t \cdot \text{———} \\ \text{———} \end{vmatrix} = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \left(t \cdot \prod_i a_{i p(i)} \right) = t \cdot \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_i a_{i p(i)} = t \cdot \begin{vmatrix} \text{———} \\ \text{———} \\ \text{———} \\ \text{———} \end{vmatrix}$$

$$i: \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{B} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{C} \qquad a_{kj} = \begin{cases} b_{ij} + c_{ij}, & k = i \\ b_{kj} = c_{kj}, & k \neq i \end{cases}$$

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_k a_{k p(k)} = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p)\, a_{i p(i)} \prod_{k \neq i} a_{k p(k)} =$$

$$= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p)\, b_{i p(i)} \prod_{k \neq i} b_{k p(k)} + \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p)\, c_{i p(i)} \prod_{k \neq i} c_{k p(k)} = \det(B) + \det(C)$$ ∎

Důsledek: Přičtením skalárního násobku řádku / sloupce k jinému se determinant nezmění.

Dk:
$$\begin{vmatrix} - a_{i*} + t \cdot a_{j*} - \\ \text{——} a_{j*} \text{——} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} - a_{i*} - \\ - a_{j*} - \end{vmatrix} + t \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} - a_{j*} - \\ - a_{j*} - \end{vmatrix}}_{0} = \begin{vmatrix} - a_{i*} - \\ - a_{j*} - \end{vmatrix}$$ ∎

Důsledek: Je-li A singulární, pak $\det(A) = 0$.

Dk: Závislý řádek lze eliminovat na nulový řádek.

• **Výpočet determinantu:** Permutace řádků / sloupců, vytýkání konstant.

~ gaussovka podle řádků / sloupců

• **Determinant součinu**

Věta: Pro libovolné $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ platí $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$

Dk: BÚNO A i B jsou regulární, jinak $0 = 0$.

⇒ A rozložíme na součet el. matic $A = E_1 E_2 \cdots E_k$ } indukcí $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
a ukážeme $\det(EB) = \det(E)\det(B)$

⇒ pro přičtení i-tého řádku k j-tému: $\det(E) = 1$, $\det(EB) = \det(B)$ ✓
pro vynásobení i-tého řádku $t \neq 0$: $\det(E) = t$, $\det(EB) = t\cdot\det(B)$ ✓ ■

Důsledky

• $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ Dk: $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$ ■

• A je regulární $\iff \det(A) \neq 0$ Dk: $\det(A) = \det(E_1\cdots E_k) \neq 0$ ■

• **Laplaceův rozvoj**

Značení: A^{ij} je podmatice získaná z A odstraněním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Věta: Pro libovolnou $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ a jakýkoli index řádku i platí:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij})$$

→ stejný rozvoj lze dělat podle i-tého sloupce

Dk: Rozklad i-tého řádku + linearita:

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{in})^T = a_{i1} e_1^T + a_{i2} e_2^T + \dots + a_{in} e_n^T$$

$$\begin{vmatrix} \hline a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \hline \end{vmatrix} = a_{i1} \begin{vmatrix} \hline 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \end{vmatrix} + a_{i2} \begin{vmatrix} \hline 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hline \end{vmatrix} + \dots + a_{in} \begin{vmatrix} \hline 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline \end{vmatrix}$$

j-tý člen: $$\begin{vmatrix} \hline 0 \dots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline \\ \hline \end{vmatrix} = (-1)^{(i-1)+(j-1)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \\ \hline \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \\ \hline \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \hline & A^{ij} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \det(A^{ij})$$ ■

• **Determinant matice podmatic**

$$\det\begin{pmatrix} A & & 0 \\ & B & \\ 0 & & C \end{pmatrix} = \det(A)\cdot\det(B)\cdot\det(C)$$

Dk: indukcí z

$$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\cdot\det(B)$$

tohle z: $$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

↳ $$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{smallmatrix} \end{pmatrix} = \det(A)$$

- Adjungovaná matice

Def: Pro matici $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ definujeme adjungovanou matici $\mathrm{adj}(A)$

$$(\mathrm{adj}(A))_{ji} = (-1)^{i+j} \det(A^{ij})$$ → faktory L. rozvoje podél i-tého řádku A ukládám do i-tého sloupce $\mathrm{adj}(A)$

Věta: Pro regulární $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ platí $\mathrm{adj}(A) = \det(A)\cdot A^{-1}$

Dk: Ukážeme $A\cdot \mathrm{adj}(A) = \det(A)\cdot I_n$.

- diagonála: (i-tý řádek A)·(i-tý sloupec adj(A)) $= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A^{ij}) = \det(A)$
- mimo $k\neq i$: (k-tý řádek A)·(i-tý sloupec adj(A)) $= \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(-1)^{i+j}\det(A^{ij}) = \det(A') = 0$

↳ A' = matice získaná nahrazením i-tého řádku za k-tý ⇒ 2 stejné ř.

- Crammerovo pravidlo

↳ původní motivace za determinanty – hledali obecné řešení soustavy l. r.

Věta: Nechť $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ je regulární. Pak pro jakékoli $b \in \mathbb{K}^n$ splňuje řešení $Ax=b$

$$x_i = \frac{1}{\det(A)}\cdot \det(A_{i\to b})$$ → $A_{i\to b}$ získáme z A nahrazením i-tého sloupce vektorem b.

Ukázka:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & 5 & 3\end{pmatrix}}_{A}\cdot x = \underbrace{\begin{pmatrix}7\\4\\9\end{pmatrix}}_{b} \qquad \det(A_{1\to b}) = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 5\\ 4 & 3 & 0\\ 9 & 5 & 3\end{vmatrix} = 4,\ \det(A) = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{4}{2} = 2$$

Dk: Označme $a_1, \dots a_n$ sloupce matice A.

Soustavu $Ax=b$ nyní přepíšeme po sloupcích: $\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot a_k = b$

$$\det(A_{i\to b}) = \det(A_{i\to \sum_k x_k a_k}) \overset{*}{=} \sum_k x_k \det(A_{i\to a_k}) = x_i \det(A_{i\to i}) = \underline{x_i \det(A)}$$

$$* \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \left(\sum_k x_k a_k\right) & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \sum_k x_k a_{1k} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & \sum_k x_k a_{nk} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} + \dots + x_n \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$\blacksquare$

Dk #2: Všimnu si, že $\det(I_{i\to x}) = x_i$

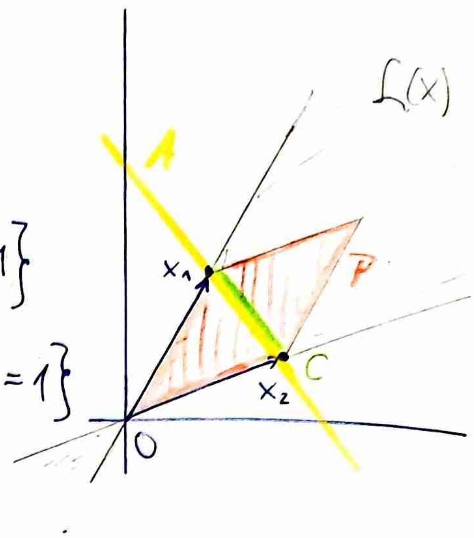
& $A\cdot I_{i\to x} = A_{i\to b}$

$\Rightarrow \det(A)\cdot\det(I_{i\to x}) = \det(A_{i\to b}) \Rightarrow x_i\cdot\det(A) = \det(A_{i\to b})$

$\blacksquare$

Obaly množiny v eukleidovském prostoru

Pro $X = \{x_1, \dots x_k\} \subset \mathbb{R}^n$



1) Lineární obal $LO(X) = \left\{ \sum_i a_i x_i \mid a_i \in \mathbb{R} \right\}$

2) Afinní obal $AO(X) = \left\{ \sum_i a_i x_i \mid a_i \in \mathbb{R} \ \& \ \sum_i a_i = 1 \right\}$

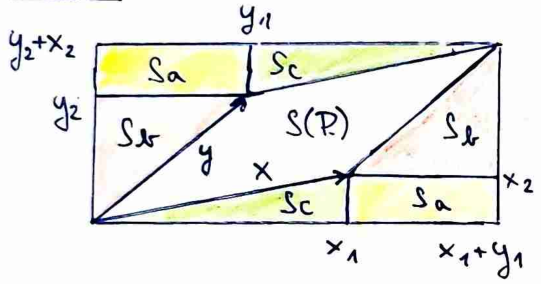
3) Konvexní obal $CO(X) = \left\{ \sum_i a_i x_i \mid a_i \in [0,1] \ \& \ \sum_i a_i = 1 \right\}$

4) Rovnoběžnostěn $P(X) = \left\{ \sum_i a_i x_i \mid a_i \in [0,1] \right\}$

Geometrický význam determinantu

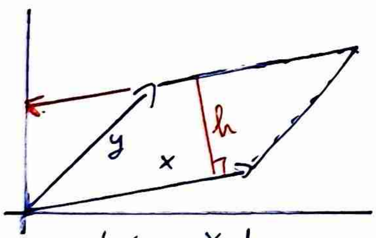
Věta: Pro $X = \{x_1, \dots x_n \mid x_i \in \mathbb{R}^n\}$ je $vol(P(X)) = |det(A)|$, kde $x_1, \dots x_n$ jsou sloupce A.
↳ objem

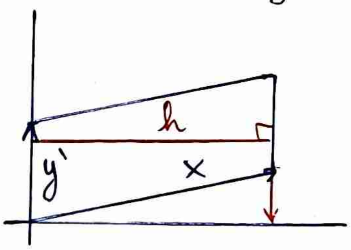
Ukázka:

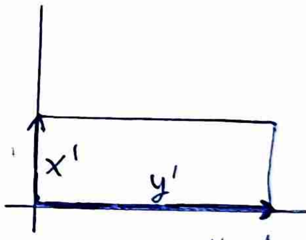


$$S(P) = (x_1+y_1)(x_2+y_2) - 2(S_a + S_b + S_c)$$
$$= x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2 - 2y_1x_2 - y_1y_2 - x_1x_2$$
$$= x_1y_2 - y_1x_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Dk: Elementární úpravy zachovávají objem.
→ vektory zapíšu do řádků matice, díky $det(A) = det(A^T)$







$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 + \Delta x_1 & y_2 + \Delta x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + 0 & x_2 + \Delta' y_2' \\ 0 & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1' & 0 \\ 0 & y_2' \end{vmatrix} = S(P)$$

Důsledek: Pro l.z. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a matici tohoto zobrazení vzhledem k nějaké bázi X platí, že se objem tělesa V po transformaci změní následovně:

$$vol(f(V)) = |det({}_X[f]_X)| \cdot vol(V)$$

Idea: Rozdělíme V na hyperkrychličky, které se pak zobrazí na rovnoběžnostěny s objemy změněnými faktorem $|det({}_K[f]_K)|$, protože ${}_K[f]_K$ obsahuje obrazy k.b.

Pro jiné báze: $det({}_X[f]_X) = det({}_X[id]_K \, {}_K[f]_K \, {}_K[id]_X) = det({}_K[f]_K)$
↳ ${}_K[id]_X^{-1} = {}_X[id]_K$

∎

- **Příklady**

1) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $A^{-1}=?$ $\rightarrow \operatorname{adj}(A)=\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$

2) $$\det\begin{pmatrix}2&0&2&0&-1\\0&3&0&2&0\\2&0&-2&0&2\\0&2&0&3&0\\-2&0&2&0&2\end{pmatrix}=(-1)^{k}\begin{vmatrix}2&-1&2&0&0\\0&0&0&2&3\\2&2&-2&0&0\\0&0&0&3&2\\-2&2&2&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{22}\begin{vmatrix}2&-1&2&0&0\\-2&2&2&0&0\\2&2&-2&0&0\\0&0&0&3&2\\0&0&0&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1&2\\-2&2&2\\2&2&-2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}3&2\\2&3\end{vmatrix}=-32\cdot5=\underline{\underline{-160}}$$

3) $a=(a_1,\dots a_n)^T$, $b=(b_1,\dots b_n)^T \rightarrow \det(a\cdot b^T)=?$

dva konstantní řádky pro $n\geq 3$

$$\det\begin{pmatrix}a_1+b_1&a_1+b_2&\cdots&a_1+b_n\\a_2+b_1&a_2+b_2&\cdots&a_2+b_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_n+b_1&a_n+b_2&\cdots&a_n+b_n\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_1+b_1&\cdots&a_1+b_n\\a_2-a_1&\cdots&a_2-a_1\\\vdots&&\vdots\\a_n-a_{n-1}&\cdots&a_n-a_{n-1}\end{vmatrix}=\begin{cases}a_1+b_1, & n=1\\(a_1-a_2)(b_2-b_1), & n=2\\0, & n\geq 3\end{cases}$$

4) $$\det(A_n)=\underbrace{\begin{vmatrix}3&2&&&0\\1&3&2&&\\&1&3&2&\\&&1&\ddots&2\\0&&&1&3\end{vmatrix}}_{n}=3\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}3&2&&\\1&3&2&\\&1&3&\ddots\\&&\ddots&2\\&&1&3\end{vmatrix}}_{n-1}-2\underbrace{\begin{vmatrix}1&2&&&\\&3&2&&\\&1&3&2&\\&&1&3&\ddots\\&&&\ddots&2\\&&&1&3\end{vmatrix}}_{n-1}=3\left|A_{n-1}\right|-2\underbrace{\begin{vmatrix}3&2&&\\1&3&2&\\&1&3&\ddots\\&&\ddots&2\\&&1&3\end{vmatrix}}_{n-2}$$

$\Rightarrow \det(A_n)=3\cdot\det(A_{n-1})-2\det(A_{n-2})$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\det(A_1)=3\\\det(A_2)=7\end{array}\right\}\det(A_3)=15$

$D_n=2^{n+1}-1 \rightarrow$ indukcí:

$D_n=3D_{n-1}-2D_{n-2}=3\cdot2^n-3-2\cdot2^{n-1}+2$

$=2\cdot2^n-1=\underline{\underline{2^{n+1}-1}}$

5) $$\det\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&3&\cdots&n&1\\3&\cdots&n&1&2\\\vdots&&&&\vdots\\n&1&2&\cdots&n-1\end{pmatrix}\overset{ř.}{=}\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&1&1&\cdots 1&(1-n)\\1&1&\cdots&(1-n)&1\\1&\cdots&(1-n)&\vdots&1\\\vdots&&&1&\vdots\\1&(1-n)&1&\cdots 1&1\end{vmatrix}\overset{s.}{=}\begin{vmatrix}1&1&2&\cdots&(n-1)\\1&0&0&\cdots&(-n)\\1&&&&\\1&&0&&0\\\vdots&&&&\\1&(-n)&&&\end{vmatrix}=\frac{1}{n}\begin{vmatrix}n&1&2&\cdots&(n-1)\\n&&&&(-n)\\n&&&&\\n&&&&\\\vdots&&&&\\n&(-n)&&&\end{vmatrix}$$

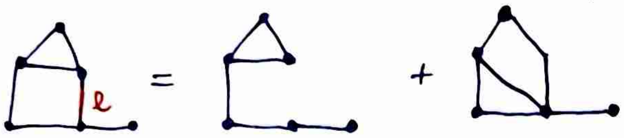
$$=\frac{1}{n}\begin{vmatrix}\frac{n(n+1)}{2}&1&2&\cdots&(n-1)\\0&&&&(-n)\\0&&&&\\\vdots&&&&\\0&(-n)&&&\end{vmatrix}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\underbrace{\begin{vmatrix}0&&(-n)\\&&\\(-n)&&0\end{vmatrix}}_{n-1}=\frac{1}{2}(n+1)\cdot(-n)^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

$$=\underline{\underline{\frac{1}{2}(n+1)\,n^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}}$$

- **Počet koster grafu**

$K(G) :=$ # koster grafu G

👁: $K(G) = K(G-e) + K(G \cdot e)$ pro libovolnou hranu e



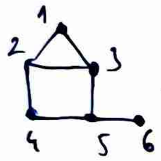
← kontrakce hrany

↳ kostry co e neobsahují ↘ kostry co e obsahují

Def: Laplaceova matice grafu G na $V(G) = \{v_1, \dots v_n\}$ je $L_G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.ž.:

$$(L_G)_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & , i = j \\ -1 & , i \neq j \wedge v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \end{cases}$$

Ukázka:



$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$ součet všech řádků / sloupců $= 0$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline L_{C_1} & \\ \hline & L_{C_2} \\ \hline \end{array}$$ ← 2 komponenty

👁 L_G je singulární

👁 G není souvislý $\Rightarrow L^{11}_G$ je singulární $\because$ $\exists$ komponenta, ve které neleží v_1

$\Rightarrow \sum$ řádků této komponenty $= 0$

$\Rightarrow$ BÚNO G souvislý

Věta: Pro $|V(G)| \geq 2$ platí $K(G) = \det(L^{11}_G)$.

Vlastnosti $\det(L^{ij})$

$$1. + 2. + 3. + 4. + 5. + 6. = 0$$

$$\det L^{11}_G = \left| \begin{array}{ccccc} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} 2. \\ 3. \\ 4. \\ 5. \\ 6. \end{array} = \left| \begin{array}{c} 2.+3.+4.+5.+6. \\ 3. \\ 4. \\ 5. \\ 6. \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} -1. \\ 3. \\ 4. \\ 5. \\ 6. \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{c} 1. \\ 3. \\ 4. \\ 5. \\ 6. \end{array} \right| = -\det L^{21}_G$$

$$\det L^{21}_G = |2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.| = |-1.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.| = -|1.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.| = -\det L^{22}_G$$

Důsledek: $\forall i,j$ $\det L^{ij}_G = (-1)^{i+j} \det L^{11}_G$.

Isomorfní grafy: $G \cong G' \Rightarrow \pi(v_1, \dots v_n) = (v_1', \dots v_n')$

$\Rightarrow$ v L_G se jenom zpermutují řádky i sloupce podle π

$\Rightarrow \exists i: \det L^{11}_G = \det L^{ii}_{G'} = \det L^{11}_{G'}$ $\rightarrow i = \pi(1)$

↳ $L^{11}_G, L^{ii}_{G'}$ se liší pouze permutací ř. i s. podle π $\Rightarrow \operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\pi) = 1$

Dk: BÚNO G souvislý. Indukcí podle $m := |E(G)|$.

1, $m=1$: $\bullet\!\!-\!\!\bullet$ $K(G)=1$, $L_G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det L^{11}_G = 1$ ✓

2, $m-1 \to m$: Zvolím libovolnou $e \in E_G$, BÚNO $e = v_1 v_2$ ← díky $G \cong G'$ $\Rightarrow \det L^{11}_G = \det L^{11}_{G'}$

$\mathbb{R}^{n-1\times n-1}$ $A := L^{11}_G$

$\mathbb{R}^{n-1\times n-1}$ $B := L^{11}_{G-e} \to \det B = K(G-e)$

$\mathbb{R}^{n-2\times n-2}$ $C := L^{11}_{G.e} \to \det C = K(G.e)$

} chci ukázat $\det A = \det B + \det C$

$\to C \approx v_3, \dots v_n \Rightarrow C = A^{11} = B^{11}$

👁 A a B jsou shodné, kromě $b_{11} = a_{11} - 1$ → stupeň v_2 klesne o 1

$\Rightarrow A_{*1} = B_{*1} + e_1$ → 1. sloupec A = 1. sloupec $B + e_1$

$\Rightarrow$ linearita $\det(A) = \det(B) + \det\begin{pmatrix} 1 & ???? \\ 0 & A^{11} \\ 0 & \end{pmatrix} = \det(B) + \det(A^{11})$

$\Rightarrow \det(A) = \det(B) + \det(C)$ ∎

- Cayleho vzorec

Tvrzení: Úplný graf K_n má n^{n-2} koster.

Dk:

$$K(K_n) = \det L^{11}_{K_n} = \underbrace{\begin{vmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & & \vdots \\ -1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}}_{n-1} \overset{\downarrow +}{=} \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -n & n & & \\ -n & & n & 0 \\ \vdots & 0 & & \ddots \\ -n & & & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & n & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & 0 & & \\ 0 & & & n \end{vmatrix} = \underline{\underline{n^{n-2}}}$$

$\hookrightarrow n-1 + (n-2)\cdot(-1) = 1$

- Polynomy

Def: Polynom stupně n v proměnné x nad tělesem $\mathbb{K}$ je výraz $p \in \mathbb{K}(x)$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,\ a_0 \dots a_n \in \mathbb{K}.$$

↳ Operace s polynomy $p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$, $q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ $\quad n \geq m$

- $(p \pm q)(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i \pm b_i) x^i$
- $(\alpha p)(x) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_i) x^i$
- $(p \cdot q)(x) = \sum_{i=1}^{n+m} c_i x^i$, kde $c_i = \sum_{j=1}^{i} a_j b_{i-j}$
- dělení se zbytkem $\frac{p}{q} = r + \frac{z}{q}$ $\quad \deg(z) < \deg(q)$

$\Rightarrow \exists$ unikátní $r, z \in \mathbb{K}(x)$: $p = q \cdot r + z$

$\to$ pro $\deg(p) < \deg(q)$: $z = p$, $r = 0$

• **Malá Fermatova věta**

$\nearrow\ x^p = x$

Věta: Pro $x \in \mathbb{Z}_p \setminus 0$ platí $x^{p-1} = 1$.

Dk: zobrazení $i \mapsto x \cdot i$ je bijekce na $\{1, \dots p-1\}$ v $\mathbb{Z}_p$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{p-1} i = \prod_{i=1}^{p-1} x i = x^{p-1} \prod_{i=1}^{p-1} i \Rightarrow \underline{\underline{1 = x^{p-1}}}$$ ■

Důsledek: Pro $x \in \mathbb{Z}_p$: $x^p - p = 0$

$\Rightarrow$ pro $\forall\, q \in \mathbb{Z}_p(x)$ $\exists\, r \in \mathbb{Z}_p(x)$ t.ž. $\begin{cases} \deg(r) \leq p-1 \\ \forall x \in \mathbb{Z}_p : q(x) = r(x) \end{cases}$

Příklad: $\mathbb{Z}_5$

$$\underbrace{4x^5 + 2x^4 + 3x^2 + 2}_{q(x)} = 4\overbrace{(x^5 - x)}^{0} + \underbrace{2x^4 + 3x^2 + 4x + 2}_{r(x)}$$

• **Kořeny**

Def: $r \in \mathbb{K}$ je **kořenem** polynomu $p \in \mathbb{K}(x) \equiv p(r) = 0$.

👁 r je kořen $\Leftrightarrow$ $x - r$ dělí p beze zbytku ∵ pak $p = (x-r) \cdot q \overset{x=r}{=\!=} 0 \cdot q = 0$.

Def: **Násobnost** kořene $r \in \mathbb{K}$ je největší takové $k \in \mathbb{N}$, že $(x-r)^k$ dělí p.

Věta (**Základní věta algebry**): $\forall\, p \in \mathbb{C}(x)$, $\deg(p) \geq 1$ má alespoň 1 kořen.

Důsledek: $\forall\, p \in \mathbb{C}(x)$ lze rozložit na součin **lineárních faktorů**.

Def: Těleso $\mathbb{K}$ je **algebraicky uzavřené** $\equiv \forall\, p \in \mathbb{K}(x)$, $\deg(p) \geq 1$ má alespoň 1 kořen

• **Reprezentace polynomu stupně n**

1) $a_0, \dots a_n$

2) pro algebraicky uzavřená tělesa $\to a_n$ a n kořenů

3) hodnoty polynomu v $n+1$ bodech.

Problém: Dáno $n+1$ dvojic (x_i, y_i), urči $p \in \mathbb{K}(x)$ $\begin{cases} \deg(p) \leq n \\ \forall i : p(x_i) = y_i \end{cases}$

① **vyřeším soustavu**

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Def: Matice této soustavy se nazývá **Vandermondova** $V_{n+1}(x_0, \dots x_n)$.

Věta: Vandermondova matice V_{n+1} je regulární $\Leftrightarrow$ $x_0, \dots x_n$ jsou různé.

Dk: regulární $\Leftrightarrow$ determinant $\neq 0$

$$\det(V) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & \cdots & x_1^n - x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & \cdots & x_n^n - x_0^n \end{vmatrix} =$$

rozvoj podle 1. s. + z každého ř. vytknu $x_i - x_0$

$$= \prod_{i=1}^{n} (x_i - x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1 + x_0 & x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2 & \cdots & x_1^{n-1} + x_1^{n-2} x_0 + \dots + x_0^{n-1} \\ 1 & x_2 + x_0 & x_2^2 + x_2 x_0 + x_0^2 & & x_2^{n-1} + x_2^{n-2} x_0 + \dots + x_0^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_n + x_0 & x_n^2 + x_n x_0 + x_0^2 & \cdots & x_n^{n-1} + x_n^{n-2} x_0 + \dots + x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$\Rightarrow$ odzadu odečtu od každého sloupce x_0-násobek předchozího

$$= \prod_{i=1}^{n} (x_i - x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

rekurence

$$\Rightarrow \det(V_{n+1}(x_0, \dots x_n)) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - x_0) \cdot \det(V_n(x_1, \dots x_n)) = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \quad \blacksquare$$

2 Lagrangeova interpolace

- určím $n+1$ pomocných polynomů stupně n

$$p_i(x) = \frac{1}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} \cdot \prod_{j \neq i} (x - x_j) \qquad \begin{cases} p_i(x_i) = 1 \\ p_i(x_j) = 0, & j \neq i \end{cases}$$

ten součin ve jmenovateli je KONSTANTA

$$\Rightarrow p(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \, p_i(x) \qquad \Rightarrow p(x_i) = y_i \, p_i(x_i) = y_i \quad \blacksquare$$

Problém: Pro čísla m a n navrhni m klíčů tak, aby bylo možné zrekonstruovat tajný kód z libovolných n klíčů, ale nebylo možné to udělat s libovolnou kombinací méně klíčů.

Řešení: Zvolím nějaký polynom stupně $n-1$.

$\Rightarrow$ tajný kód je ten polynom

$\Rightarrow$ klíče je m dvojic (x_i, y_i)

těleso může být $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{Z}_p$ s $p \geq m$

• Vlastní čísla a vektory

Def: Nechť V je v.p. nad $\mathbb{K}$ a $f: V \to V$ je l.z. $\lambda \in \mathbb{K}$ je vlastní číslo $f \equiv$

$$\exists v \in V \setminus o : f(v) = \lambda v$$

Vektor $v \in V$ je vlastní vektor k $\lambda \equiv f(v) = \lambda v$

Def: pro matici $A = {}_X[f]_X \in \mathbb{K}^{n \times n}$: $Ax = \lambda x$, $x \in \mathbb{K}^n$.

Def: Množina všech vlastních čísel je její spektrum

👁: Vlastní čísla diagonální matice jsou prvky na diagonále.

$$Dx = \begin{pmatrix} d_{11} & & \\ & d_{22} & \\ & & \ddots \; d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda x \qquad \begin{array}{l} \lambda_1 = d_{11} \quad x_1 = (1, 0, \dots 0)^T \\ \lambda_2 = d_{22} \quad x_2 = (0, 1, \dots 0)^T \end{array}$$

$\Rightarrow$ vlastní vektory ~ kanonická báze

👁 Vlastní vektory odpovídající stejnému vlastnímu č. tvoří podprostor.

Dk: $U = \{ u \in V \mid f(u) = \lambda u \}$

$$\forall u, v \in V: \; f(u+v) = f(u) + f(v) = \lambda(u+v) \quad \checkmark$$
$$\forall a \in \mathbb{K}: \; f(au) = a f(u) = \lambda(au) \quad \checkmark \quad \blacksquare$$

Def: Geometrická násobnost v.č. je dimenze prostoru jeho vlastních vektorů.

Věta: Nechť $f: V \to V$ je l.z. a $\lambda_1, \dots \lambda_k$ jsou různá vlastní čísla f
a $x_1, \dots x_k$ odpovídající netriviální vlastní vektory.

Potom $x_1, \dots x_k$ jsou lineárně nezávislé.

Dk: Spor minimálním protipříkladem $\to$ k je nejmenší, že $\exists \lambda_1 \dots \lambda_k, x_1, \dots x_k$ l.z.

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i x_i = o$ má netriviální řešení

$$o = \lambda_k o = \lambda_k \sum_{i=1}^{k} a_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_k a_i x_i$$

$$o = f(o) = f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i x_i\right) = \sum_i a_i f(x_i) = \sum_i \lambda_i a_i x_i$$

$$\Rightarrow o = o - o = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_k) a_i x_i = \sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{(\lambda_i - \lambda_k)}_{\neq 0} a_i x_i$$

$\Rightarrow x_1, \dots x_{k-1}$ jsou lineárně závislé $\Rightarrow$ spor s minimalitou k ↯ $\blacksquare$

Důsledek: Matice řádu n může mít nejvýše n vlastních čísel.

• Charakteristický polynom

Def: Charakteristický polynom matice $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ je $p_A(t) := \det(A - t \cdot I_n)$.

Věta: $\lambda \in \mathbb{K}$ je vlastním číslem matice $A \iff p_A(\lambda) = 0$.

Dk: λ je vlastní č. $A \iff$

$$\exists x \in \mathbb{K}^n \setminus 0 : \; Ax = \lambda x \iff 0 = Ax - \lambda x = (A - \lambda I_n)x$$
$$\iff (A - \lambda I_n) \text{ je singulární}$$
$$\iff \det(A - \lambda I_n) = p_A(\lambda) = 0 \quad \blacksquare$$

Důsledek: Vlastní čísla Δ matice jsou prvky na diagonále.

Def: Algebraická násobnost vlastního č. λ je jeho násobnost jakožto kořene v p_A.

Tvrzení: Každý polynom $\sum_{i=0}^{n} b_i t^i$, $b_n = (-1)^n$ je char. polynomem nějaké matice.

Dk: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & -b_0 \\ 1 & & & -b_1 \\ & 1 & & \vdots \\ 0 & & 1 & -b_{n-1} \end{pmatrix}$ má char. polynom $(t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \dots + b_1 t + b_0)(-1)^n$ $\blacksquare$

• Koeficienty char polynomu

→ $p_A(t) = \det(A - t I) = \sum_i b_i t^i = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \dots + b_1 t + b_0$.

- $b_n = (-1)^n$ ... součin podle diagonály dá $(-t)^n$
- $b_0 = \det(A)$ ... $\det(A - 0 \cdot I) = 0 + 0 + \dots + b_0$
- $b_{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ ... diagonála

$$\begin{vmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn}-t \end{vmatrix}$$

→ pokud je $\mathbb{K}$ algebraicky uzavřené, tak

$$p_A(t) = (\lambda_1 - t)^{r_1} (\lambda_2 - t)^{r_2} \cdots (\lambda_k - t)^{r_k}, \quad r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$$

r_k → algebraická násobnost λ_k

- $b_0 = \prod_i \lambda_i^{r_i}$ ... $\det(A - 0 \cdot I) = \lambda_1^{r_1} \cdots \lambda_k^{r_k}$
- $b_{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_i r_i \lambda_i$

Důsledek: Nechť $\lambda_1, \dots \lambda_n$ jsou vlastní čísla $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, alg. uzavřeného:

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \rightsquigarrow \det(A) = \prod_i \lambda_i$$

$$a_{11} + a_{22} + \dots a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \rightsquigarrow \sum_i a_{ii} = \sum_i \lambda_i$$

• Příklady

(1.) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -4 \\ -1 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(4-\lambda) - 4 = -\lambda(\lambda-3)^2$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \rightarrow (A - \lambda_1 I)x = 0 \Rightarrow$ řeším soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow x_1 = (4, 4, 1)$$

$$\Rightarrow \lambda_{2,3} = 3 \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow x_2 = (-1, 2, -1)$$

↳ alg. násobnost = 2, geom. nás. = 1

Pozorování: pro A singulární je $\lambda = 0$ vždy vlastní číslo. $\because \det(A) = 0$

Pozorování: pro A s konstantními ř. součty k je k v.č. a $(1,1,\dots 1)^T$ v.v.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ sing. $\Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\Rightarrow \sum$ řádku $= 3 \Rightarrow \lambda_2 = 3$

$\Rightarrow \sum a_{ii} = \sum_i \lambda_i \Rightarrow 3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = 0$

• Vlastní čísla příbuzných lineárních zobrazení

$A \in \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \lambda_1, \dots \lambda_k$ a $x_1, \dots x_k$

- αA : $(\alpha A)x = \alpha(Ax) = \alpha \lambda x \Rightarrow \alpha\lambda_1, \dots \alpha\lambda_k$
- A^2 : $A^2 x = A\lambda x = \lambda A x = \lambda^2 x \Rightarrow \lambda_1^2, \dots \lambda_k^2$ — l.z.: znovu se natáhnou
- A^T : $p_{A^T}(\lambda) = \det(A^T - \lambda I) = \det(A^T - \lambda \cdot I^T) = \det((A - \lambda I)^T) =$
  $= \det(A - \lambda I) = p_A(\lambda)$

  $\rightarrow$ stejné char. polynomy $\Rightarrow$ stejná vlastní čísla

- A^{-1} : $Ax = \lambda x \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}\lambda x$
  $\Rightarrow x = \lambda A^{-1} x \Rightarrow A^{-1}x = \frac{1}{\lambda} x \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1}, \dots \frac{1}{\lambda_k}$

• Cayleyova - Hamiltonova věta

Věta: Pro matici $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ a její char. polynom platí:

$$p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0$$

nelegální

$$\emptyset_n = (-1)^n A^n + b_{n-1} A^{n-1} + \dots + b_1 A + b_0 I_n \quad = p_A(A)$$

Dk: $M := A - \lambda \cdot I_n$, upravíme $M \cdot adj(M) = det(M) \cdot I_n$

→ složky $adj(M)$ jsou determinanty podmatic ⇒ polynomy stupně $\leq n-1$

$$\Rightarrow adj(M) = \lambda^{n-1} B_{n-1} + \lambda^{n-2} \cdot B_{n-2} + \dots + \lambda \cdot B_1 + B_0 \quad , \quad B_0, \dots B_{n-1} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

$$\Rightarrow M \cdot adj\, M = det\, M \cdot I_n \Rightarrow (A - \lambda \cdot I_n) \cdot adj\, M = p_A(\lambda) \cdot I_n$$

$$\Rightarrow (A - \lambda I_n)(\lambda^{n-1} B_{n-1} + \dots + \lambda B_1 + B_0) = (-1)^n \lambda^n I_n + b_{n-1} \lambda^{n-1} I_n + \dots + b_1 \lambda I_n + b_0 I_n$$

$$\begin{array}{lll}
\lambda^n: & -B_{n-1} = (-1)^n I_n & \Rightarrow \quad -A^n B_{n-1} = (-1)^n A^n \\
\lambda^{n-1}: & A B_{n-1} - B_{n-2} = b_{n-1} I_n & A^{n-1}(A B_{n-1} - B_{n-2}) = b_{n-1} A^{n-1} \\
\lambda^i: & A B_i - B_{i-1} = b_i I_n & A^i (A B_i - B_{i-1}) = b_i A^i \\
\lambda^0: & A B_0 = b_0 I_n & A B_0 = b_0 I_n
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
L := -A^n B_{n-1} + A^{n-1}(A B_{n-1} - B_{n-2}) + \dots + A(A B_1 - B_0) + A B_0 = \emptyset_n \\
P := (-1)^n A^n + b_{n-1} A^{n-1} + \dots + b_1 A + b_0 I_n = p_A(A)
\end{array}\right\} \begin{array}{c} L \\ \shortparallel \\ P \end{array} \quad \blacksquare$$

• Podobné matice

👁 Matice l.z. f není jednoznačná ∵ závisí na bázi.

⇒ všechny matice stejného zobrazení mají stejná vlastní čísla

$$_X[f]_X = {_X[id]_Y}\, {_Y[f]_Y}\, {_Y[id]_X} \,, \quad {_X[id]_Y^{-1}} = {_Y[id]_X}$$

Def: Matice $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ jsou si <u>podobné</u> ≡

$\exists$ regulární $R \in \mathbb{K}^{n\times n}$: $A = R^{-1} B R$

👁: Podobné matice mají <u>stejná</u> vlastní čísla.

$Ax = \lambda x \quad , \quad B(Rx) = \lambda(Rx)$

$\Rightarrow B(Rx) = RAR^{-1}Rx = RAx = R\lambda x = \lambda Rx$ ∎

👁: Podobné matice mají <u>stejné char. polynomy</u>.

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda \cdot I) = \det(RAR^{-1} - R(\lambda I)R^{-1}) =$$

$$= \det(R(A - \lambda I)R^{-1}) = \det R \cdot p_A(\lambda) \cdot \det R^{-1} = p_A(\lambda) \cdot \underbrace{\det R \cdot \det R^{-1}}_{\det(I) = 1} \quad ∎$$

👁 Pokud báze X obsahuje v.v. u zobrazení f, tak se při provedení f ten vektor jenom natáhne – takže pro $[v]_X \to [f(v)]_X$ se souřadnice $\sim u$ jen vynásobí λ

⇒ $_X[f]_X$ obsahuje v sloupci odpovídajícím u jen <u>λ na diagonále</u>.

Dk: u je i-tým vektorem X ⇒ i-tý sloupec

$$({_X[f]_X})_{*i} = [f(u)]_X = [\lambda u]_X = \lambda [u]_X = \lambda e^i \quad ∎$$

Věta: Geometrická násobnost vlastního čísla λ matice A je <u>menší nebo rovna</u> jeho algebraické násobnosti.

Dk: Budu A vnímat jako matici l.z. ⇒ $A = {_K[f]_K}$

Nechť $u_1, \dots u_k$ je báze prostoru vlastní vektorů příslušných λ

⇒ $Geom(\lambda) = k$

Nyní $u_1, \dots u_k$ doplníme na bázi $\mathbb{K}^n \to X$

⇒ $_X[f]_X = {_X[id]_K}\,{_K[f]_K}\,{_K[id]_X}$ ⇒ $_X[f]_X$ je podobná A

⇒ $_X[f]_X$ má v prvních k sloupcích pouze λ na diagonále

⇒ $(\lambda - \lambda)^k$ dělí $p_{_X[f]_X}(\lambda) = p_A(\lambda)$ ⇒ $Alg(\lambda) \geq k = Geom(\lambda)$ ∎

• Diagonalizace

Pozorování: Matice $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ je podobná diagonální matici

$\iff$ prostor $\mathbb{K}^n$ má bázi sestávající z vlastních vektorů A.

Dk: $AR = DR$ s diagonální D. Ukážeme, že R obsahuje vlastní vektory A

$\Rightarrow$ protože R je regulární, tak jsou l. nezávislé $\Rightarrow$ tvoří bázi

$AR = DR$

i-tý sloupec: $(RD)_{*i} = x\, d_{ii} = \lambda x \Rightarrow Ax = \lambda x \Rightarrow x$ je v. v. A. ∎

Def: Matice je diagonalizovatelná $\equiv$ je podobná diagonální matici.

Důsledek: Matice $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ je diag. $\iff$ má n různých vlastních čísel.

$\rightarrow$ od každého si vezmu 1 vl. v.

Důsledek: Když $p_A(t) = \prod_i (t-\lambda_i)^{r_i}$, pak:

A je diag. $\iff \forall i \ \mathrm{Geom}(\lambda_i) = r_i$

Důsledek: Je-li $A = R^{-1}DR$, pak $A^k = (R^{-1}DR)^k = R^{-1}D^kR$.

• Příklady

1) Mám vlastní čísla a vlastní vektory nějaké matice $A \Rightarrow$ chci A

$$A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \cdots & \lambda_n x_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{C} \Rightarrow A = C \cdot B^{-1}$$

2) Mám $A \rightarrow$ chci najít R a D, že $A = R^{-1}DR$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow p_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -1 & -1 \\ 0 & -1-t & 0 \\ 0 & 2 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t)(-1-t)$$

$$\lambda_1 = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (1,0,0)^T$$

$$\lambda_2 = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (1,0,1)^T$$

$$\lambda_3 = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (0,-1,1)^T$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

• do D zapíšu na diag. vlastní č.

• do R zapíšu odpovídající vlastní v.

• Speciální komplexní matice

Def: Hermitovská transpozice matice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ je $A^H \in \mathbb{C}^{n\times m}$, kde $(A^H)_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

Def: Matice A je hermitovská $\equiv A = A^H$.

Def: Matice A je unitární $\equiv A^{-1} = A^H$, ortogonální $\equiv A^{-1} = A^T$.

1, Hermitovské matice mají reálnou úhlopříčku $a_{ii} = \overline{a_{ii}} \Rightarrow a_{ii} \in \mathbb{R}$

2, $(A^H)^H = A$, $(AB)^H = B^H A^H$ – práce jako s A^T

3, pro unitární A, B je unitární i A^H, AB

4, $A^H A = I \Rightarrow$ sloupce unitární matice ~ ortonorm. báze

• $x_i^H x_j = 0$ pro $i \neq j$, $x_i^H x_i = 1$

5, Každý $x \in \mathbb{C}^n$ t.ž. $x^H x = 1$ lze doplnit na unitární matici

$\Rightarrow$ Grand-Schidtovou ortonormalizací

Věta: Každá hermitovská matice A má všechna vlastní čísla reálná.
Navíc $\exists$ unitární R t.ž. $R^{-1} A R = R^H A R$ je diagonální.

Důsledek: Každá hermitovská i symetrická matice je diagonalizovatelná.

Dk: Indukcí podle n. Pro $n = 1$ zjevně platí. $A_n := A$

1, v $\mathbb{C}$ má A_n vždy vlastní č. λ s v.v. x

$\Rightarrow$ x znormalizuji $\Rightarrow \|x\| = 1 \Rightarrow$ Gram-Schmidtem doplním na unitární P_n

2, ukážu, že $P_n^H A_n P_n = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \boxed{A_{n-1}} \end{pmatrix} \Rightarrow$ nějak zdiagonalizuji $A_{n-1} \Rightarrow \checkmark$

$(P_n^H A_n P_n)^H = P_n^H A_n^H P_n = P_n^H A_n P_n$ je hermitovská $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

• x je 1. sloupec $P_n \Rightarrow$ 1. sl. $P_n^H A_n P_n$ je: $P_n^H A_n x = P_n^H \lambda x = \lambda P_n^H x$

$\rightarrow P_n$ je unitární (o.s.) $\Rightarrow \lambda P_n^H x = \lambda (1, 0, \dots 0)^T = (\lambda, 0, \dots 0)^T$

3, $P_n^H A_n P_n = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \boxed{A_{n-1}} \end{pmatrix}$ $\lambda \in \mathbb{R}$, A_{n-1} je hermitovská

$\Rightarrow$ podle i.p. $\exists R_{n-1}, D_{n-1}$: $R_{n-1}^{-1} A_{n-1} R_{n-1} = D_{n-1}$

$\rightarrow$ chci udělat něco jako $P_n^H R_{n-1}^{-1} A_{n-1} R_{n-1} P_n$

$\Rightarrow R_n := P_n \begin{pmatrix} 1 & \\ & \boxed{R_{n-1}} \end{pmatrix} \Rightarrow R_n^{-1} A_n R_n = R_n^H A_n R_n = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \boxed{R_{n-1}^H} \end{pmatrix} P_n^H A_n P_n \begin{pmatrix} 1 & \\ & \boxed{R_{n-1}} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \\ & \boxed{R_{n-1}^{-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \boxed{A_{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & \boxed{R_{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \boxed{D_{n-1}} \end{pmatrix} = D_n \quad \blacksquare$$

Věta: Každá symetrická A má rozklad $R^{-1}AR = D$ pro ortogonální R.

Příklad: Diagonalizuj $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$.

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\0&1-\lambda&0\\-1&0&3-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda)+(1-\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$$

$$\lambda_1 = 1 \to \begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\-1&0&2\end{pmatrix} \to (2,-1,1)^T$$

$$\lambda_{2,3} = 2 \to \begin{pmatrix}-1&1&1\\0&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-1&0\\0&-1&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\end{pmatrix} \to (1,0,1)^T$$

$\Rightarrow$ jenom 2 vlastní v. $\Rightarrow$ není diagonalizovatelná

Jordanův blok $\Rightarrow$ diagonalizuju ji co nejvíc to půjde $\to J$

$$J = \begin{pmatrix}1&&\\&\boxed{\begin{matrix}2&1\\&2\end{matrix}}\end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix}2&1&1\\-1&0&0\\1&1&2\end{pmatrix}$$

To se dopočítá, aby to vyšlo

každý blok začíná na skutečný vl. v.

$\hookrightarrow A = R^{-1}JR$

• Jordanova normální forma

$\to$ 1. nad diagonálou

Def: Jordanův blok je matice ve tvaru $J_\lambda = \begin{pmatrix}\lambda&1&&\\&\lambda&1&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda\end{pmatrix}$

Věta: Každá čtvercová komplexní matice A je podobná J v Jordanově normální formě $J = \begin{pmatrix}J_{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&J_{\lambda_k}\end{pmatrix}$

$\to$ Každý Jordanův blok J_{λ_i} odpovídá vlastnímu číslu λ_i matice A

- # bloků s λ_i = Geom(λ_i)
- $\sum$ velikostí bloků s λ_i = Arit(λ_i)

} J je určena jednoznačně až na permutaci bloků

Diagonalizovatelná A má Jordanovy bloky 1×1

• Zobecněné vlastní vektory

$\to$ normálně $AR = RD$, tady $AR = RJ_\lambda$

x_1 = ten skutečný vlastní vektor

: i-tý sloupec $R = x_i$ splňuje $(A-\lambda I)^i x_i = 0$

Dk: $Ax_1 = \lambda x_1 \Rightarrow (A-\lambda I)x_1 = 0$

$Ax_2 = x_1 + \lambda x_2 \Rightarrow (A-\lambda I)x_2 = x_1 \Rightarrow (A-\lambda I)^2 x_2 = 0$

...

Def: Zobecněný vlastní vektor matice A k v.č. λ je libovolný vektor x splňující $(A-\lambda I)^i x = 0$ pro nějaké $i \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ lze je řadit do řetízků $x_k, x_{k-1}, \dots x_2\, x_1, 0$, kde $(A-\lambda I)x_i = x_{i-1}$.

• **Poznámka:** Děláme to nad $\mathbb{C}$, protože je algebraicky uzavřené $\Rightarrow \sum Alg(\lambda) = n$.

• Gramova matice

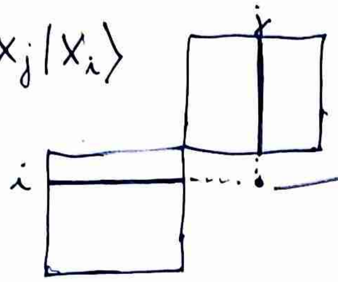
→ mám nějaký obecný s.s. a vůči němu ortonormální bázi Z, potom:

$$\langle u | v \rangle = [v]_Z^H \cdot [u]_Z \qquad [u]_Z = {}_Z[id]_X [u]_X, \quad [v]_Z = {}_Z[id]_X [v]_X$$

$$\langle u | v \rangle = [v]_X^H \cdot \underbrace{{}_Z[id]_X^H \cdot {}_Z[id]_X}_{G \to \text{ Gramova matice } := G^T} \cdot [u]_X \quad , \quad X = (x_1, x_2, \dots x_n)$$

$G_{ij} = \langle x_j | x_i \rangle$

Dk:



$$G_{ij} = [x_i]_Z^H [x_j]_Z = \langle x_j | x_i \rangle$$ protože Z je ortonorm. ■

→ Vlastnosti:

- $\langle x_i | x_j \rangle = \overline{\langle x_j | x_i \rangle} \Rightarrow G_{ji} = \overline{G_{ij}} \Rightarrow G$ je hermitovská
- $\langle u | u \rangle > 0$ pro $u \neq 0 \Rightarrow [u]_X^H G [u]_X > 0$ pro $\forall u \neq 0$

• Pozitivně definitní matice

Def: Hermitovská matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je pozitivně definitní $\equiv$

$\forall x \in \mathbb{C}^n \setminus 0 : x^H A x > 0$.

Tvrzení: Pokud $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ jsou pozitivně def., $\alpha > 0$, pak:

- αA, $A + B$ jsou p.d.
- A je regulární $\because Ax = 0 \Rightarrow x^H A x = x^H 0 = 0 \Rightarrow x = 0$
- A^{-1} je p.d. Sporem: $x^H A^{-1} x \leq 0$
  $x^H A^{-1} A A^{-1} x \leq 0 \Rightarrow y^H A y \leq 0$ pro $y = A^{-1} x$
  $\Rightarrow$ spor s p.d. A

Věta: Pro hermitovskou A je toto ekvivalentní:

1, A je pozitivně definitní

2, A má všechna vlastní čísla kladná

3, $\exists$ regulární U t.ž. $A = U^H U$

Dk: $1 \Rightarrow 2$: A je hermitovská $\Rightarrow$ má reálná vlastní čísla → jsou kladná?

→ nechť $x \neq 0$ je v.v. k λ : $0 < x^H A x = x^H \lambda x = \lambda x^H x = \lambda \underbrace{\langle x | x \rangle}_{+} \Rightarrow \lambda > 0$

$2 \Rightarrow 3$: A je hermitovská $\Rightarrow \exists$ unitární R a diagonální D t.ž.:

$$A = R^H D R = R^H \sqrt{D} \sqrt{D} R = R^H \sqrt{D}^H \sqrt{D} R = (\sqrt{D} R)^H (\sqrt{D} R) \to U := \sqrt{D} R$$

$3 \Rightarrow 1$: $x^H A x = ?$, pokud $x \in \mathbb{C}^n \setminus 0 \Rightarrow Ux \neq 0 \because U$ je regulární

$$\Rightarrow x^H A x = x^H U^H U x = (Ux)^H (Ux) = \langle Ux | Ux \rangle > 0$$ ■

Poznámka: $x^H A x = \sum_{i,j} \overline{x_i}\, a_{ij}\, x_j$ $\qquad x^T A y = \sum_{i,j} x_i\, a_{ij}\, y_j$

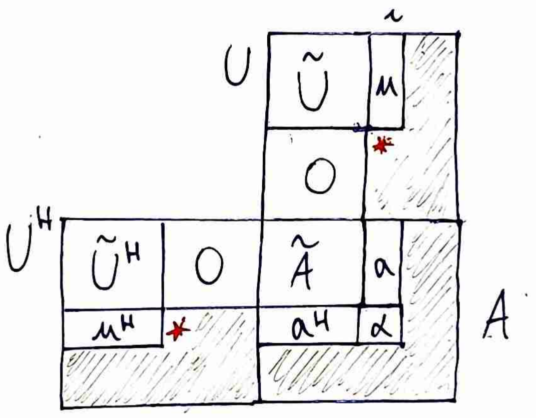
• **Choleského rozklad**

Věta: Pro $\forall$ p.d. matici A existuje unikátní horní Δ matice U s kladnou diagonálou t.ž. $A = U^H U$. U se nazývá Choleského r.

1. Pro $i = 1, \dots n$:
2. $u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{u_{ki}}\, u_{ki}}$ $\qquad \because\; a_{ii} = u_{ii}^2 + \sum_{k=1}^{i-1} \overline{u_{ki}}\, u_{ki}$
3. Pokud $u_{ii} \notin \mathbb{R}^+$: A není p.d. $\Rightarrow$ STOP
4. Pro $j = i+1, \dots n$:
5. $u_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{u_{ki}}\, u_{kj} \right)$ $\qquad \because\; a_{ij} = u_{ij} u_{ii} + \sum_{k=1}^{i-1} \overline{u_{ki}}\, u_{kj}$

Příklad:

					2	-1	1	0
					0	1	0	0
					0	0	2	-1
					0	0	0	1
2	0	0	0		4	-2	2	0
-1	1	0	0		-2	2	-1	0
1	0	2	0		2	-1	5	-2
0	0	-1	1		0	0	-2	2



$\tilde A = \tilde U^H \tilde U$

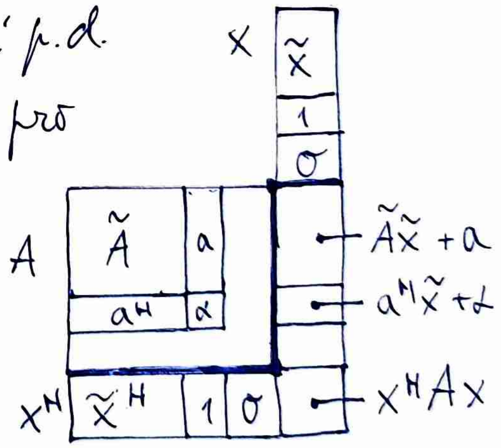
$a = \tilde U^H u$

$a^H = u^H \tilde U$

Správnost: Ukážeme, že pokud selže, tak A není p.d.

$\rightarrow$ selhal $\Rightarrow \alpha \le u^H u$, ukážeme $x^H A x \le 0$ pro

$x^T = \boxed{\tilde x^T \mid 1 \mid 0 \dots 0}$ kde $\tilde x = -\tilde U^{-1} u$



$\Rightarrow x^H A x = \tilde x^H \tilde A \tilde x + \tilde x^H a + a^H \tilde x + \alpha =$

$= \tilde x^H (\tilde U^H \tilde U) \tilde x + \tilde x^H (\tilde U^H u) + (u^H \tilde U) \tilde x + \alpha =$

$= (-\tilde U^{-1} u)^H (\tilde U^H \tilde U)(-\tilde U^{-1} u) + (-\tilde U^{-1} u)^H (\tilde U^H u) + (u^H \tilde U)(-\tilde U^{-1} u) + \alpha =$

$= u^H u - u^H u - u^H u + \alpha = \alpha - u^H u \le 0$ $\blacksquare$

- **Rekurentní podmínka**

Věta: Bloková matice $A = \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & a^H \\ \hline a & \tilde{A} \\ \hline \end{array}$ je p.d. $\iff$ $\alpha > 0$ & $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^H$ je p.d.

👁 Gaussovka prvního sl. pomocí prvního ř. dává: $\begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & a^H \\ \hline a & \tilde{A} \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & a^H \\ \hline 0 & \tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^H \\ \hline \end{array}$ $a_i - \frac{1}{\alpha} a_i \cdot \alpha$, $\quad - \frac{1}{\alpha} a_i \cdot a^H$

Důsledek: Gaussovka odshora dolu $\Rightarrow$ pokud je na konci ⊕ diagonála $\Rightarrow$ p.d.

Dk: $\Leftarrow$: $x \in \mathbb{C}^n \setminus 0$ zapíšeme jako $x^T = \begin{array}{|c|c|}\hline x_1 & \tilde{x}^T \\ \hline \end{array}$, $x_1 \in \mathbb{C}$, $\tilde{x}^T \in \mathbb{C}^{n-1}$.

$$x^H A x = \alpha x_1 \bar{x}_1 + \bar{x}_1 a^H \tilde{x} + x_1 \tilde{x}^H a + \tilde{x}^H \tilde{A} \tilde{x} =$$

$$\begin{array}{cc|c|c|c} & & & & x_1 \\ & & & & \tilde{x} \\ \hline & & \alpha & a^H & \alpha x_1 + a^H \tilde{x} \\ \hline A & & a & \tilde{A} & a x_1 + \tilde{A}\tilde{x} \\ \hline x^H & & \bar{x}_1 & \tilde{x}^H & x^H A x \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \tilde{x}^H \tilde{A} \tilde{x} = \underbrace{\tilde{x}^H \left(\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^H\right) \tilde{x}}_{m} + \frac{1}{\alpha} \tilde{x}^H a a^H \tilde{x}$$

$$= m + \alpha x_1 \bar{x}_1 + x_1 \tilde{x}^H a + \bar{x}_1 a^H \tilde{x} + \frac{1}{\alpha} \tilde{x}^H a a^H \tilde{x} =$$

$$= m + \underbrace{\left(\sqrt{\alpha} x_1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} a^H \tilde{x}\right)}_{r} \underbrace{\left(\sqrt{\alpha} \bar{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tilde{x}^H a\right)}_{r^H = \bar{r}}$$

$m \downarrow > 0$ pro $\tilde{x} \neq 0$ $\qquad r^H = \bar{r} \Rightarrow r \cdot \bar{r} > 0$ pro $r \neq 0$

$\Rightarrow$ alespoň jeden je ryze kladný $\Rightarrow x^H A x > 0$.

$\Rightarrow$: pro $\tilde{x} \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus 0$ vezmeme $x^T = \begin{array}{|c|c|}\hline x_1 & \tilde{x}^T \\ \hline \end{array}$ a najdeme x_1 aby:

$$0 < x^H A x = \tilde{x}^H \left(\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^H\right) \tilde{x} \Rightarrow \tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^H \text{ je p.d.} \checkmark$$

potřebuju, aby $x^H A x = m \Rightarrow r = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{\alpha} a^H \tilde{x}$

$\rightarrow$ taky chceme $\alpha > 0$: pro $x_1 = 1$, $\tilde{x} = 0$: $x^H A x = 0 + \alpha > 0$ ■

- **Sylvestrova podmínka**

Věta: Matice A je p.d. $\iff \forall i: \det(A_i) > 0$, kde A_i sestává z prvních i řádků a sloupců A.

Dk: Použijeme Gaussovku $A \sim A'$ na test zda je A p.d.

Nechť $\alpha_1, \dots \alpha_n$ jsou prvky na diagonále výsledné horní Δ matice A'.

$\rightarrow$ řádky jsme eliminovali odshora dolů

$$\Rightarrow \det A_i = \det A'_i = \prod_{j \leq i} \alpha_j = \alpha_i \cdot \prod_{j < i} \alpha_j = \alpha_i \det A_{i-1}$$

$$A \text{ je p.d.} \iff \alpha_1, \dots \alpha_n > 0 \iff \det A_1, \dots \det A_n > 0$$ ■

• **Příklad:** $\qquad A$ je p.d. $\iff \alpha A$ je p.d. $\quad \alpha > 0$

$$
\begin{array}{c|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}
\sim
\begin{array}{c|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & 5/2 \end{array}
\rightsquigarrow
\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{array}
\sim
\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 8/3 & 8/3 \\ 0 & 8/3 & 14/3 \end{array}
\rightsquigarrow
\begin{array}{c|c} 8 & 8 \\ \hline 8 & 14 \end{array}
\sim
\begin{array}{c|c} 8 & 8 \\ \hline 0 & 6 \end{array}
$$

$\uparrow$ je p.d.

• **Rekurentní podmínka**

Důkaz #2: Gaussovu eliminaci 1. sloupce A zapíšeme jako součin:

$$
\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & o^H \\ \hline -\frac{1}{\alpha}a & I \end{array}\right)}_{E^H}
\cdot
\left(\begin{array}{c|c} \alpha & a^H \\ \hline a & \tilde{A} \end{array}\right)
=
\left(\begin{array}{c|c} \alpha & a^H \\ \hline 0 & \tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^H \end{array}\right)
$$

$\hookrightarrow \alpha \cdot x + a = 0$

$$
\Rightarrow E^H A E = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & o^H \\ \hline 0 & \tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^H \end{array}\right)
$$

$\hookrightarrow$ p.d. $\iff \alpha$ i $\boxed{\tilde{A}-\tilde{a}}$ jsou p.d.

$\Rightarrow$: $E^H \overset{U^H U}{\overset{\|}{A}} E = (UE)^H (UE)$ je p.d.

$\Rightarrow \alpha > 0$ a $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^H$ je p.d.

$\Leftarrow$: $E^H A E = U^H U$

$\Rightarrow A = (E^H)^{-1} U^H U E^{-1} =$ $\qquad$ je p.d.

$= (UE^{-1})^H (UE^{-1})$

∎

• Bilineární a kvadratické formy

Def: Nechť V je v. p. nad $\mathbb{K}$. Zobrazení $V \times V \to \mathbb{K}$ je <u>bilineární forma</u> na $V \equiv$

- $\forall u, v \in V,\ \forall a \in \mathbb{K}:\quad f(au, v) = f(u, av) = a f(u, v)$
- $\forall u, v, w \in V:\quad f(u+v, w) = f(u, w) + f(v, w)$
- $\forall u, v, w \in V:\quad f(u, v+w) = f(u, v) + f(u, w)$

Def: Bilineární forma f je <u>symetrická</u> $\equiv \forall u, v \in V: f(u, v) = f(v, u)$.

Def: Zobrazení $g: V \to \mathbb{K}$ je <u>kvadratická forma</u> $\equiv$
$\exists$ b. forma $f: \forall u \in V: g(u) = f(u, u)$.   } něco jako $\|u\|^2$

👁 skalární součiny nad $\mathbb{R}$ jsou bilineární formy

Def: Nechť V je v. p. nad $\mathbb{K}$ s bází $X = (x_1, \dots x_n)$.

- <u>Matice b. formy</u> f vzhledem k bázi X je B_X, $b_{ij} = f(x_i, x_j)$.
- <u>Matice k. formy</u> g je matice <u>symetrické</u> b. formy f odpovídající g. → v tělesech s char $= 2$ nemusí $\exists$

→ jedné k. formě odpovídá spousta bilineárních ⇒ chci tu matici jednoznačnou

<u>Příklady</u> ← nad $\mathbb{Z}_5$

- $f(u, v) = u_1 v_1 + 2u_1 v_2 + 4u_2 v_1 + 3u_2 v_2 \qquad B_K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ → najdi g

$\Rightarrow g(u) = f(u, u) = u_1^2 + u_1 u_2 + 3u_2^2 \quad \longrightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

- $g(u) = 2u_1^2 + 2u_1 u_2 - u_2^2 - 2u_2 u_4 - 4u_4^2$ → najdi f ← nad $\mathbb{R}$

$f(u, v) = 2u_1 v_1 + (u_1 v_2 + v_1 u_2) - u_2 v_2 - (u_2 v_4 + v_2 u_4) - 4u_4 v_4$

$$\Rightarrow B_K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

👁 Když mám matici B b. formy odpovídající k. formě g, která není symetrická, tak ji můžu symetrizovat takto:

$$B' = \frac{1}{2}(B + B^T)$$ → B' je symetrická a pořád je to matice formy g

$$\because\ x^T B x = g(x) = x^T B' x$$

$$x^T B' x = x^T \frac{1}{2}(B + B^T) x = \frac{1}{2}\Big(x^T B x + \underset{(x^T B^T x)^T}{\underset{\|}{\overset{\text{skalár}}{x^T B^T x}}}\Big) = \frac{1}{2}(x^T B x + x^T B x) = x^T B x \quad \blacksquare$$

: $f(u,v) = [u]_X^T B_X [v]_X$, $g(u) = [u]_X^T B_X [u]_X$.

Dk: $u = \sum_i a_i x_i$, $v = \sum_i c_i x_i$

$$f(u,v) = f\Big(\sum_i a_i x_i, \sum_j c_j x_j\Big) = \sum_i \sum_j a_i c_j f(x_i, x_j) = \sum_{i,j} a_i b_{ij} c_j = [u]_X^T B [v]_X \quad \blacksquare$$

: Nechť B_X je matice b/k formy vzhledem k bázi X.

Potom $B_Y = {}_X[id]_Y^T B_X \, {}_X[id]_Y$ je matice stejné formy vzhledem k Y.

Dk: $[u]_X = {}_X[id]_Y [u]_Y$, $[v]_X = {}_X[id]_Y [v]_Y$

$$f(u,v) = [u]_X^T B_X [v]_X = [u]_Y^T \underbrace{\left({}_X[id]_Y^T B_X \, {}_X[id]_Y\right)}_{B_Y} [v]_Y \quad \blacksquare$$

Def: Analytické vyjádření b. formy nad $\mathbb{K}^n$ s maticí B je polynom

$$f(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} u_i v_j$$ ← ! tohle je vůči kanonické bázi

• Diagonalizace forem

předtím jsme uměli jen symetrickou

Věta: Pokud je g kvadratická forma na v.p. V konečné dimenze n nad $\mathbb{K}$, char $\neq 2$ pak má forma g diagonální matici B vzhledem k vhodné bázi X.

Def: Takovou bázi nazýváme polární báze. B_P je diagonální   diagonální

Ekvivalentně: Pro $\forall$ symetrickou $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ s $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ $\exists$ regulární R: $R^T A R = D$.

Dk: indukcí podle n. → gausovkou eliminuju 1. ř. a s. ⇒ i.p.

$$A_n = A = \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & a^T \\ \hline a & \tilde{A} \\ \hline\end{array} \qquad ① \ \alpha \neq 0: \quad P_n := \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & -\frac{1}{\alpha} a^T \\ \hline 0 & I \\ \hline\end{array}$$

$$P_n^T A_n P_n = \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & 0^T \\ \hline 0 & \tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^T \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & 0^T \\ \hline 0 & A_{n-1} \\ \hline\end{array}$$

→ el. úpravy na řádky i sloupce zachovávají symetrii ⇒ A_{n-1} je sym.

⇒ podle i.p. $\exists\, R_{n-1}, D_{n-1}$ pro A_{n-1} → chci vyrobit $R_{n-1}^T A_{n-1} R_{n-1} = D_{n-1}$

$$R_n := P_n \cdot \underbrace{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1} \\ \hline\end{array}}_{\tilde{R}_{n-1}} \Rightarrow R_n^T A_n R_n = \tilde{R}_{n-1}^T (P_n^T A_n P_n) \tilde{R}_{n-1} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0^T \\ \hline 0 & D_{n-1} \\ \hline\end{array} = D_n$$

② $\alpha = 0$, $a \neq 0$: $\exists i: a_{i1} \neq 0$ ⇒ přičtu i-tý řádek a sloupec k prvnímu

⇒ místo A budu diagonalizovat $A' := E^T A E$, kde $\alpha' = 2a_{i1} \neq 0$ → ①

③ $\alpha = 0$, $a = 0$: vezmu $A_{n-1} = \tilde{A}$ a $R_n = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1} \\ \hline\end{array}$ $\blacksquare$

• <u>Diagonalizace forem</u>

→ Gaussovka, ale všechny operace provádíme na řádky i na sloupce.

👁: A symetrická ⇒ E^TAE také symetrická

<u>Důsledek:</u> Horní △ R^TAR je i diagonální.

signatura: (2, 1, 0)

<u>Příklad:</u> $$\underset{A}{\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&0&0\\-2&0&3\end{pmatrix}} \sim \underset{E_1^TA}{\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-1&2\\-2&0&3\end{pmatrix}} \sim \underset{E_1^TAE_1}{\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&-1&2\\-2&2&3\end{pmatrix}} \sim \underset{E_2^TE_1^TAE_1E_2}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&2&-1\end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

→ můžu si stranou psát řádkové úpravy: $(A|I_n) \sim\sim (D|R^T)$ ← jenom řádkové

⇒ vektory polární báze X jsou sloupce R ⇒ řádky R^T

∵ $D_X = {}_K[id]_X^T \, B \, {}_K[id]_X \Rightarrow {}_K[id]_X = R$

$D = R^T \, B \, R$

• <u>Sylvestrův zákon setrvačnosti</u>

<u>Věta:</u> Každá kvadratická forma na konečně generovaném <u>reálném v.p.</u> má vzhledem k vhodné bázi <u>diagonální</u> matici pouze s 1, −1, a 0.

Všechny takové diagonální matice odpovídající téže formě mají <u>stejný</u> #1 a #−1.

<u>Def:</u> Nechť reálná kvadratická forma g má diagonální matici B obsahující 1, −1 a 0. <u>Signatura formy</u> g je (#1, #−1, #0) v B.

<u>Dk:</u> ① <u>existence takové matice</u>

Nechť B je matice formy vůči nějaké bázi Y. Char(ℝ) ≠ 2 ⇒ jde diagonalizovat

$\Rightarrow B = R^TDR$, R regulární

$\Rightarrow D = S^TD'S$, kde pro d_{ii} $\begin{cases} =0, & d'_{ii}=0, \; s_{ii}=1 \\ >0, & d'_{ii}=1, \; s_{ii}=\sqrt{d_{ii}} \\ <0, & d'_{ii}=-1, \; s_{ii}=\sqrt{-d_{ii}} \end{cases}$

$\Rightarrow B = (SR)^TD'(SR)$, SR reg.

$\left.\Rightarrow \text{najdu } X \text{ t.ž. } {}_Y[id]_X = (SR)^{-1}\right\} \; {}_Y[id]_X^T B \, {}_Y[id]_X = D'$ ∎

② <u>jednoznačnost signatury</u>

→ pro ortogonální R máme $R^T = R^{-1} \Rightarrow B = R^{-1}DR \Rightarrow$

⇒ D obsahuje vlastní čísla ⇒ signatura je jednoznačná pro ortogonální R — co jinak?

→ Nechť $X = (u_1, \dots u_n)$, $Y = (v_1, \dots v_n)$ jsou dvě báze t.ž. odpovídající matice B a B' formy g jsou diagonální s $1, -1$ a 0 uspořádanými tak, že nejdříve jsou 1, potom -1 a nakonec 0.

→ protože součin s regulárními maticemi nemění rank a $B = {}_Y[id]_X^T \, B' \, {}_Y[id]_X$

$$\Rightarrow \#0 \text{ v } B = n - \text{rank}(B) = n - \text{rank}(B') = \#0 \text{ v } B'.$$

→ $r := \#1 \text{ v } B$, $s := \#1 \text{ v } B'$. → sporem ukážeme $r = s$

→ pokud $r > s$: $\left.\begin{array}{l} \text{span}(u_1, \dots u_r) \\ \text{span}(v_{s+1}, \dots v_n) \end{array}\right\}$ součet dimenzí $= r + n - s > n$ $\Rightarrow$ mají netriviální průnik

$\Rightarrow$ zvolme $w \neq 0$ z tohoto průniku.

$$\left.\begin{array}{l} [w]_X = (x_1, \dots x_r, 0, \dots 0)^T \\ [w]_Y = (0, \dots 0, y_{s+1}, \dots y_n)^T \end{array}\right\} \text{ co se stane s } g(w)\,?$$

$$\left.\begin{array}{l} g(w) = [w]_X^T B [w]_X = x_1^2 + \dots + x_r^2 > 0 \quad \because w \neq 0 \\ g(w) = [w]_Y^T B' [w]_Y = -y_{s+1}^2 - \dots - y_{\text{rank}(B')}^2 \leq 0 \end{array}\right\} \lightning$$

→ podobně pro $r < s$ $\Rightarrow$ takže $s = r$ ∎

Pokud má forma reálnou pozitivně def. matici, tak ji lze diagonalizovat na I_n

$\because B = U^H U = U^T U = U^T I_n U$

- Problém přímek svírající stejný úhel

Problém: Kolik nejvíce může být přímek v $\mathbb{R}^d$ t.ž. všechny svírají stejný úhel?

→ $\mathbb{R}^2$: 3 přímky $\varphi = 60°$

→ $\mathbb{R}^3$: 6 přímek

Věta: V $\mathbb{R}^d$ může nejvýše $\binom{d+1}{2}$ přímek svírat stejný úhel.

Dk: Předpokládejme, že $\exists$ n takových přímek. Zvolíme vektory jednotkové délky

$$v_1, \dots v_n \Rightarrow \langle v_i | v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ \cos\varphi & \text{jinak} \end{cases}$$

Zobrazení $v_i \mapsto v_i v_i^T$ je prosté $\Rightarrow$ ukážeme, že matice

$v_1 v_1^T, \dots v_n v_n^T \in \mathbb{R}^{d \times d}$ jsou lineárně nezávislé

$\Rightarrow$ pak $n \leq \binom{d+1}{2}$ $\because$ dimenze prostoru symetrický matic $\mathbb{R}^{d \times d}$ je $\binom{d+1}{2}$

→ ukážeme, že $\sum_i a_i v_i v_i^T = O_n$ má pouze triviální řešení

$$\forall j \in [n]: \; 0 = v_j^T O_n v_j = v_j^T \Big(\sum_i a_i v_i v_i^T\Big) v_j =$$

$$= \sum_i a_i (v_j^T v_i)(v_i^T v_j) = \sum_i a_i \langle v_i | v_j \rangle^2 = a_j + \cos^2\varphi \sum_{i \neq j} a_i$$

→ tyto podmínky zapíšeme do matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos^2\varphi & \cdots & \cos^2\varphi \\ \cos^2\varphi & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots \; 1 & \cos^2\varphi \\ \cos^2\varphi & \cdots & \cos^2\varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ matice této soustavy je regulární $\Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$.

$\Rightarrow$ takže $v_1 v_1^T, \dots v_n v_n^T$ jsou l.n. a $n \leq \binom{d+1}{2}$ ■