

## Skalární součin

Def: Skalární součin na n.p.  $V$  nad  $\mathbb{C}$  je zobrazení  $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  splňující:

- $\forall u \in V: \langle u|u \rangle \in \mathbb{R}_0^+$

$$u, v \mapsto \langle u|v \rangle$$

- $\forall u \in V: \langle u|u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

- $\forall u, v \in V: \langle v|u \rangle = \overline{\langle u|v \rangle}$

- $\forall u, v, w \in V: \langle u+v|w \rangle = \langle u|w \rangle + \langle v|w \rangle$

- $\forall u \in V, \forall a \in \mathbb{C}: \langle au|v \rangle = a \langle u|v \rangle$

$$\Rightarrow \langle v|u \rangle = \langle u|v \rangle \text{ ne 3. axioma}$$

$\Rightarrow$  skalární součin na  $V$  nad  $\mathbb{R}$  je zobrazení do  $\mathbb{R}$   $\hookrightarrow a \in \mathbb{R}$  v posledním axioma

## Bílkovy

- standardní s.s. na  $\mathbb{R}^n$ :  $\langle u|v \rangle = \sum u_i v_i = v^T u$

\* Hermitská trans.

- standardní s.s. na  $\mathbb{C}^n$ :  $\langle u|v \rangle = \sum u_i \bar{v}_i = v^H u$

$$A_{ij}^H = \bar{a}_{ji}$$

- s.s. na  $\mathbb{R}^n$  svislý regulární  $A$ :  $\langle u|v \rangle = v^T A^T A u$

$$(AB)^H = B^H A^H$$

- s.s. na n.p. reálných polynomů na  $[a, b]$ :  $\langle f|g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$

## Vlastnosti:

- $\langle u|v+w \rangle = \langle u|v \rangle + \langle u|w \rangle \because \langle u|v+w \rangle = \overline{\langle v+w|u \rangle} = \overline{\langle v|u \rangle + \langle w|u \rangle} = \langle u|v \rangle + \langle u|w \rangle$

- $\langle u|av \rangle = \bar{a} \langle u|v \rangle \because \langle u|av \rangle = \overline{\langle av|u \rangle} = \overline{a \langle v|u \rangle} = \bar{a} \langle u|v \rangle$

- $\langle au|au \rangle = a\bar{a} \langle u|u \rangle = |a|^2 \langle u|u \rangle$

- $\left\langle \sum_{i=1}^k a_i u_i \mid \sum_{j=1}^l b_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l a_i \bar{b}_j \langle u_i|v_j \rangle$   $\|a \cdot u\| = |a| \cdot \|u\|$

## Norma

Def: Je-li  $V$  prostor se skalárním součinem  $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , poté norma od něj odvozená je zobrazení  $V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ,  $u \mapsto \|u\| := \sqrt{\langle u|u \rangle} = \sqrt{\sum_i u_i^2}$ .

## Geometrická interpretace v euklidovském $\mathbb{R}^n$

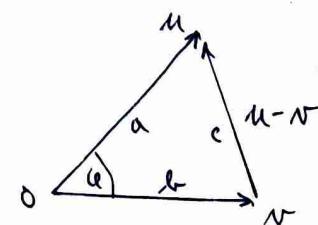
- $\|u\| \rightarrow$  délka  $u$

$$a = \|u\|$$

$$c = \|u-v\|$$

$$b = \|v\|$$

- $\|u-v\| \rightarrow$  vzdálenost bodů  $u$  a  $v$



- $\langle u|v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \alpha \rightarrow$  úhel mezi  $u$  a  $v$

Dle: Cosinovařežna:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$

$$1, \langle u-v|u-v \rangle = \langle u|u \rangle + \langle v|v \rangle - 2\|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \alpha$$

$$2, \langle u-v|u-v \rangle = \langle u|u \rangle + \langle v|v \rangle - \langle u|v \rangle - \langle v|u \rangle$$

$$\|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \alpha$$

$$=$$

$$\langle u|v \rangle$$

## Cauchy - Schwarzska nerovnost

Věta: S.S. re v.r.p. V nad C splňuje:

$$\forall u, v \in V: |\langle u|v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| = \sqrt{\langle u|u \rangle \cdot \langle v|v \rangle}$$

Dle: Buňo  $u, v \neq 0$  jinak  $0 \leq 0$ .

$$\text{Každ. } 0 \leq \|u+av\|^2 = \langle u+av|u+av \rangle = \langle u|u \rangle + a\langle v|u \rangle + \bar{a}\langle u|v \rangle + a\bar{a}\langle v|v \rangle$$

$$\text{Zvolíme } a = -\frac{\langle u|v \rangle}{\langle v|v \rangle} \Rightarrow 0 \leq \langle u|u \rangle - \underbrace{\frac{\langle u|v \rangle}{\langle v|v \rangle} \cdot \langle v|u \rangle}_{\langle v|v \rangle} + 0$$

$$\Rightarrow \langle u|v \rangle \langle v|u \rangle \leq \langle u|u \rangle \langle v|v \rangle \dots \text{ platí } a\bar{a} = |a|^2$$

$$|\langle u|v \rangle|^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \quad \blacksquare$$

Důsledek: Nerovnost mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem.

$$\text{Pro } u \in \mathbb{R}^n: \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i^2}$$

Dle: Zvolíme  $v = (1, 1, \dots, 1)^T$  a použijeme C-S nerovnost pro s.s. na  $\mathbb{R}$ :

$$\sum_i u_i = \langle u|v \rangle \leq |\langle u|v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| = \sqrt{\sum_i u_i^2} \cdot \sqrt{n} \quad \blacksquare$$

Poznámka: Každá norma splňuje 1-nerovnost  $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ .

$$\begin{aligned} \text{Dle: } \|u+v\| &= \sqrt{\langle u+v|u+v \rangle} = \sqrt{\langle u|u \rangle + \langle u|v \rangle + \langle v|u \rangle + \langle v|v \rangle} \leq \\ &\leq \sqrt{\langle u|u \rangle + 2|\langle u|v \rangle| + \langle v|v \rangle} \leq \sqrt{\|u\|^2 + 2\|u\|\cdot\|v\| + \|v\|^2} = \|u\| + \|v\| \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## Kolmost

Def: Vektory  $u, v \in$  prostor se s.s. jsou kolmé  $u \perp v \equiv \langle u|v \rangle = 0$ .

Poznámka: Množina nekriválních reálných kolmých vektorů je lineárně nezávislá.

Dle: Sporem:  $u_0, \dots, u_k$  jsou kolmé a l. ne  $\Rightarrow \exists u_k$  (buňo  $k=0$ )  $u_0 = \sum_{i=1}^k a_i u_i$

$$0 \neq \langle u_0|u_0 \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k a_i u_i \middle| u_0 \right\rangle = \sum_{i=1}^k a_i \langle u_i|u_0 \rangle = \sum a_i \cdot 0 = 0 \quad \text{z} \quad \blacksquare$$

Def: Množina vektorů  $\{v_1, \dots, v_m\}$  je ortogonální systém  $\equiv \forall i, j: v_i \perp v_j$ .

Množina vektorů  $\{v_1, \dots, v_m\}$  je ortonormální systém  $\equiv \forall i, j: v_i \perp v_j \wedge \|v_i\|=1$ .

Def: Báze  $Z = \{v_1, \dots, v_m\}$  prostoru V se s.s. je ortonormální  $\equiv$  báze ortonorm. systému.

Def: Matice A je unitární  $\equiv A^H A = I_m \Leftrightarrow A^H = \bar{A}^T$ . vehledem ke std. s.s.

Poznámka: Matice, jejíž sloužce jsou vektory ortonormální báze  $\mathbb{C}^n$  je unitární.

$$M = \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \overline{v_2} \\ \vdots \\ \overline{v_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$$

$$M_{ii} = \langle v_i|v_i \rangle = 1$$

$$M_{i \neq j} = \langle v_j|v_i \rangle = 0$$

$$\begin{cases} A^H A = I_m \wedge B^H B = I_m \\ (AB)^H (AB) = B^H A^H A B = B^H B = I_m \end{cases}$$

## • Fourierovy koeficienty

Věta: Nechť  $\mathcal{Z} = \{z_1, \dots, z_m\}$  je orthonormální báze prostoru  $V$ .

$$\Leftrightarrow \forall u \in V: u = \langle u | z_1 \rangle z_1 + \dots + \langle u | z_m \rangle z_m = \sum_i \langle u | z_i \rangle z_i.$$

Dle:  $u = \sum_i a_i z_i \Rightarrow$  chci aby  $a_j = \langle u | z_j \rangle$

$$\langle u | z_j \rangle = \left\langle \sum_i a_i z_i | z_j \right\rangle = \sum_i a_i \langle z_i | z_j \rangle = a_j \quad \because \langle z_j | z_j \rangle = 1, \langle z_{i \neq j} | z_j \rangle = 0$$

Důsledek: vektor souřadnic  $[u]_{\mathcal{Z}} = (\langle u | z_1 \rangle, \langle u | z_2 \rangle, \dots, \langle u | z_m \rangle)^T$ .

Věta: Nechť  $\mathcal{Z} = \{z_1, \dots, z_m\}$  je ortonormální báze prostoru  $V$

$$\Leftrightarrow \forall u, v \in V: \langle u | v \rangle = v^H u = [v]_{\mathcal{Z}}^H [u]_{\mathcal{Z}}$$

Dle:

$$\begin{aligned} \langle u | v \rangle &= \left\langle \sum_i \langle u | z_i \rangle z_i | \sum_j \langle v | z_j \rangle z_j \right\rangle = \\ &= \sum_i \sum_j \langle u | z_i \rangle \overline{\langle v | z_j \rangle} \langle z_i | z_j \rangle = \sum_i \langle u | z_i \rangle \overline{\langle v | z_i \rangle} = [v]_{\mathcal{Z}}^H [u]_{\mathcal{Z}} \end{aligned}$$

## • Orthonormální projekce

Def: Nechť  $W$  je prostor se s.s.-a  $V$  je jeho podprostor s orthonormální bází  $\mathcal{Z} = \{z_1, \dots, z_k\}$

Orthonormální projekce  $W$  na  $V$  je zobrazení  $\rho_{\mathcal{Z}}: W \rightarrow V$  definované

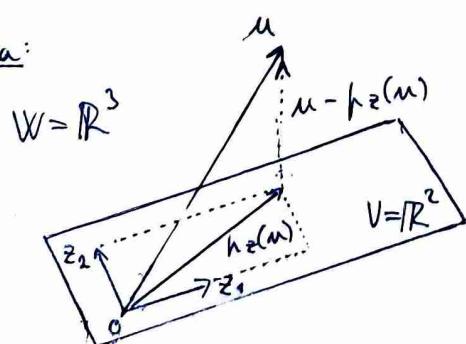
$$\rho_{\mathcal{Z}}(u) := \sum_{i=1}^k \langle u | z_i \rangle z_i.$$

Pozorování: Nyní bázi  $V \{z_1, \dots, z_k\}$  rozšíříme na celou bázi  $W \{z_1, \dots, z_m\}$ .

$$\Rightarrow u = \underbrace{\langle u | z_1 \rangle z_1 + \dots + \langle u | z_k \rangle z_k}_{\rho_{\mathcal{Z}}(u)} + \underbrace{\langle u | z_{k+1} \rangle z_{k+1} + \dots + \langle u | z_m \rangle z_m}_{u - \rho_{\mathcal{Z}}(u)}$$

$$= \rho_{\mathcal{Z}^\perp}(u) \rightarrow \{z_{k+1}, \dots, z_m\} = V^\perp$$

Uzávěra:



Důsledek:  $\exists$  matice  $M$  takohoto l.r.  
1. ř.  $A \cdot u = \rho_{\mathcal{Z}}(u)$ .  
Naryvá se matice projekce

Pozorování: Orthonormální projekce je lineární zobrazení.

Dle:  $\rho_{\mathcal{Z}}(a \cdot u) = \sum_i \langle a \cdot u | z_i \rangle z_i = a \sum_i \langle u | z_i \rangle z_i = a \cdot \rho_{\mathcal{Z}}(u)$

$\rho_{\mathcal{Z}}(u+v) = \sum_i \langle u+v | z_i \rangle z_i = \sum_i \langle u | z_i \rangle z_i + \sum_i \langle v | z_i \rangle z_i = \rho_{\mathcal{Z}}(u) + \rho_{\mathcal{Z}}(v)$

Znacení: Kolmost na množinu.  $u \perp Z \Leftrightarrow \forall z \in Z: u \perp z$ .

Lemma: Nechť  $f_Z$  je o. projekce  $V$  na  $Z$ , potom  $u - f_Z(u) \perp Z \Rightarrow u - f_Z(u) \perp V$ .

$$\begin{aligned} \text{D\ddot{o}: } \langle u - f_Z(u) | z_j \rangle &= \left\langle u - \sum_{i=1}^k \langle u | z_i \rangle z_i | z_j \right\rangle = \langle u | z_j \rangle - \sum_{i=1}^k \langle u | z_i \rangle \langle z_i | z_j \rangle \\ &= \langle u | z_j \rangle - \langle u | z_j \rangle \langle z_j | z_j \rangle = 0. \end{aligned}$$

■

Pozorování: Ten vektor  $v \in V = \text{span}(Z)$ , který minimalizuje  $\|u - v\|$  je  $f_Z(u)$ .

D\ddot{o}: Pro  $v \in V$ ,  $v \neq f_Z(u)$  definujeme  $a := u - f_Z(u)$ ,  $b := f_Z(u) - v \neq 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|u - v\| &= \|a + b\| = \sqrt{\langle a + b | a + b \rangle} = \sqrt{\langle a | a \rangle + \langle a | b \rangle + \langle b | a \rangle + \langle b | b \rangle} \stackrel{a \perp b}{=} \\ &= \sqrt{\langle a | a \rangle + \langle b | b \rangle} \stackrel{b \neq 0}{>} \sqrt{\langle a | a \rangle} = \|a\| = \|u - f_Z(u)\| \end{aligned}$$

■

Důsledek: Zobrazení  $f_Z$  nezávisí na volbě báze  $Z$ .

#### • Metoda nejménších čtvrtic

→ problem:  $Ax = b$  nenájde řešení  $\Leftrightarrow b \notin S(A)$

→ nezávisí  $x$  t. i. ko l.r.  $A$  zobrazi na  $b$

→ najdi  $b' \in S(A)$  nejbliže  $b$  → chci minimalizovat  $\|b - b'\|$

→  $b'$  = projekce  $b$  do  $S(A)$

#### → zájdel

1) orthonormalizuj  $S(A) \Rightarrow b' = f_{S(A)}(b) \Rightarrow$  nejdřív  $Ax = b'$

2) najdi  $Ax = b'$  nejjednodušším  $A^T A x = A^T b'$

D\ddot{o}:  $b' = f_{S(A)}(b) \Leftrightarrow b - b' \perp S(A) \quad \left. \begin{array}{l} b - b' \in \ker(A^T) \Leftrightarrow A^T(b - b') = 0 \end{array} \right\}$

$S(A) = R(A^T) \Rightarrow (S(A))^\perp = (R(A^T))^\perp = \ker(A^T) \quad \left. \begin{array}{l} \Leftrightarrow A^T(b - A x) = 0 \Leftrightarrow A^T b = A^T A x \end{array} \right\} \quad \blacksquare$

#### • Gram-Schmidtova ortogonalizace

→ algoritmus pro převod báze  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  prostoru  $V$  na orthonormální bázi  $(z_1, \dots, z_m)$

1. Pro  $\ell = 1, \dots, n$ :

$$y_\ell = x_\ell - \sum_{i=1}^{\ell-1} \langle x_\ell | z_i \rangle z_i$$

$$z_\ell = \frac{1}{\|y_\ell\|} y_\ell$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Máme } z_1, \dots, z_{\ell-1} \Rightarrow \text{chci } z_\ell, \text{ máme } x_\ell \\ x_\ell = \underbrace{\langle x_\ell | z_1 \rangle z_1 + \dots + \langle x_\ell | z_{\ell-1} \rangle z_{\ell-1}}_{\text{projekt } x_\ell \text{ do } \{z_1, \dots, z_{\ell-1}\}} + \underbrace{\langle x_\ell | z_\ell \rangle z_\ell}_{y_\ell = x_\ell - f(x_\ell)} \end{array} \right\}$$

Správnost:

1:  $y_\ell \perp z_j$  pro  $j < \ell \Rightarrow z_i \perp z_j$  pro  $i \neq j$

$$2: \|z_\ell\| = \left\| \frac{1}{\|y_\ell\|} y_\ell \right\| = \frac{1}{\|y_\ell\|} \|y_\ell\| = 1$$

Lemma o rovněž:  $\text{span}\{z_1, \dots, z_{\ell-1}, x_\ell\} = \text{span}\{z_1, \dots, z_{\ell-1}, y_\ell\} = \text{span}\{z_1, \dots, z_{\ell-1}, z_\ell\}$

## • Lineární zobrazení zachovávající s. s.

Def: Lineární zobrazení  $f: V \rightarrow V$  je isometrie  $\Leftrightarrow \forall u, v \in V: \langle u|v \rangle = \langle f(u)|f(v) \rangle$

Věta: Lineární zobrazení  $f: V \rightarrow V$  je isometrie  $\Leftrightarrow \forall u \in V: \|u\| = \|f(u)\|$

$\Rightarrow$  stačí aby  $f$  zachovávalo souřešející normu

Důk:  $\Rightarrow$  Triviale

$$\Leftrightarrow \|u+av\|^2 = \langle u+av|u+av \rangle = \|u\|^2 + a\langle v|u \rangle + \bar{a}\langle u|v \rangle + a\bar{a}\|v\|^2$$

$$\|f(u+av)\|^2 = \langle f(u+av)|f(u+av) \rangle = \|f(u)\|^2 + a\langle f(v)|f(u) \rangle + \bar{a}\langle f(u)|f(v) \rangle + a\bar{a}\|f(v)\|^2$$

$$\Rightarrow a\langle v|u \rangle + \bar{a}\langle u|v \rangle = a\langle f(v)|f(u) \rangle + \bar{a}\langle f(u)|f(v) \rangle$$

$$\left. \begin{array}{l} a=1: \langle v|u \rangle + \langle u|v \rangle = \langle f(v)|f(u) \rangle + \langle f(u)|f(v) \rangle \\ a=i: \langle v|u \rangle - \langle u|v \rangle = \langle f(v)|f(u) \rangle - \langle f(u)|f(v) \rangle \end{array} \right\} \langle u|v \rangle = \langle f(u)|f(v) \rangle$$

## • Maticevá charakterizace bijektivních isometrií

Věta: Nechť  $V$  a  $V'$  jsou prostory se s.s. konečné dimenze a  $X, Y$  jejich ortonormální báze.

Lineární zobrazení  $f: V \rightarrow V'$  je bijektivní isometrie  $\Leftrightarrow {}_Y[f]_X$  je unitární.

Důk: Lineární bijekce implikuje stejnou dimenzi a množství.

$$\bullet X \text{ je ortonorm.} \Leftrightarrow \langle u|v \rangle = v^H u = [v]_X^H [u]_X$$

$$\bullet Y \text{ je ortonorm.} \Leftrightarrow \langle f(u)|f(v) \rangle = [f(v)]_Y^H [f(u)]_Y = ([f]_Y^H [v]_X)^H \cdot ([f]_Y^H [u]_X)$$

$$= [v]_X^H ([f]_Y^H [f]_X) \cdot [u]_X$$

$$\Leftrightarrow {}_Y[f]_X^H {}_Y[f]_X = I_m \Rightarrow \langle u|v \rangle = \langle f(u)|f(v) \rangle$$

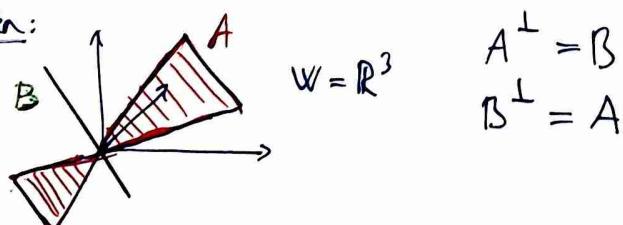
$$\Rightarrow \langle u|v \rangle = \langle f(u)|f(v) \rangle \Rightarrow [r_X]^H [u]_X = [r_Y]^H ({}_{Y[f]}^H [f]_X) [u]_X \Rightarrow {}_Y[f]_X^H {}_Y[f]_X = I_m$$

## • Orthonormální doplněk

Def: Orthonormální doplněk podprostoru  $V \subseteq W$  rektifikovaného prostoru se s.s.  $W$  je

$$V^\perp = \{w \in W \mid \forall v \in V: w \perp v\}$$

Uváděno:



$$W = \mathbb{R}^3 \quad A^\perp = B$$

$$B^\perp = A$$

Pozorování: Pro každý  $U \subseteq V$ , platí  $V^\perp \subseteq U^\perp$

Důk:  $\forall x \in V^\perp: \forall v \in V: x \perp v \Rightarrow \forall u \in U: x \perp u \Rightarrow x \in U^\perp$

Poznámka: Každý ortogonální doplněk je podprostředem  $W$ .

Dоказat:  $\forall u, w \in V^\perp, \forall v \in V$ :

$$1, u \perp v \Rightarrow \langle au | v \rangle = a \langle u | v \rangle = a \cdot 0 = 0 \Rightarrow au \perp v$$

$$2, u, w \perp v \Rightarrow \langle u+w | v \rangle = \langle u | v \rangle + \langle w | v \rangle = 0 \Rightarrow u+w \perp v \quad \blacksquare$$

Poznámka: Pro jdejší podprostor  $V \subseteq W$ :  $V \cap V^\perp = \{0\}$

Dоказat:  $\forall u \in V \cap V^\perp$ :  $u \perp u \Rightarrow \langle u | u \rangle = 0 = u = 0 \quad \blacksquare$

Věta: Pro konečné generování  $W$  se s.s. a podprostor  $V$  plati

$$1, (V^\perp)^\perp = V$$

$$2, \dim(V) + \dim(V^\perp) = \dim(W)$$

• Ortogonalní doplněk a matice

Tvrdění: Pro  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  plati  $(R(A))^\perp = \ker(A)$ .

Dоказat: Uvažme:  $\forall u \in R(A), v \in \ker(A) : u \perp v. \quad r := \text{rank}(A)$

$$\left. \begin{array}{l} \text{• } x_1, \dots, x_r \text{ bázi } R(A) \\ y_1, \dots, y_{m-r} \text{ bázi } \ker(A) \end{array} \right\} \langle u | v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^r a_i x_i \middle| \sum_{j=1}^{m-r} b_j y_j \right\rangle = \sum_i \sum_j a_i b_j \underbrace{\langle x_i | y_j \rangle}_{=0} = 0$$

Dоказat: Zvolíme orthonormální bázi  $V \rightarrow X$  i  $X = \{x_1, \dots, x_r\}$

Poplníme ji na orthonorm. bázi  $W \rightarrow Z$

$\rightarrow$  uvažme  $\text{span}(Y) = V^\perp \rightarrow Y = Z \setminus X$  i  $Y = \{y_1, \dots, y_{m-r}\}$

1)  $\forall u \in \text{span}(X) = V, v \in \text{span}(Y) : u \perp v \Rightarrow \text{span}(Y) \subseteq V^\perp$

2)  $\forall w \in V^\perp : [w]_Z = (\langle w | z_1 \rangle, \dots, \langle w | z_m \rangle)^T \wedge \forall x_i \langle w | x_i \rangle = 0$

$\Rightarrow w \in \text{span}(Z \setminus X) = \text{span}(Y) \Rightarrow V^\perp \subseteq \text{span}(Y)$

$\Rightarrow \dim(V) + \dim(V^\perp) = |X| + |Y| = |Z| = \dim(W)$

$\Rightarrow (V^\perp)^\perp = (\text{span}(Y))^\perp = \text{span}(Z \setminus X) = \text{span}(X) = V \quad \blacksquare$

• Bási:

$x_1 \quad x_2$

1) Najdi o. báci  $V = \text{Span} \left\{ \underline{(1,1,0)^T}, (1,1,1)^T \right\}$

$$z_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1$$

$$x_2 = \underbrace{\langle x_2 | z_1 \rangle}_{y_2} z_1 + \underbrace{\langle x_2 | z_2 \rangle}_{y_3} z_2 \Rightarrow y_2 = x_2 - \langle x_2 | z_1 \rangle z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{báci } \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (1,1,0)^T, (0,0,1)^T \right\}$$

• Doplň ji na o. báci  $\mathbb{R}^3$  - ber G-S orthogonalizace

$$\rightarrow \text{char } y_3 \text{ 1.č. } \langle z_1 | y_3 \rangle = 0 \wedge \langle z_2 | y_3 \rangle = 0 \Rightarrow (R(A))^\perp = \ker(A)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = (1, -1, 0)^T \Rightarrow z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0)^T$$

• Urci souřadnice  $[(3,2,1)^T]$  z

$$[(3,2,1)^T]_z = (\langle u | z_1 \rangle, \langle u | z_2 \rangle, \langle u | z_3 \rangle)^T = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} 5, 1, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T$$

• Spočti projekci  $(3,2,1)^T$  do V

$$h_{z_1}(u) = \langle u | z_1 \rangle z_1 + \langle u | z_2 \rangle z_2 = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (5, 5, 2)^T$$

2) Najdi o. báci f. generovaného  $(1,1,1,1)^T$

↳ preprocessing

$x_1 \perp x_2$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, 0, 1)^T$$

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1, 0)^T$$

$$z_3 = \frac{1}{2} (-1, -1, 1, 1)^T \quad y_3 = x_3 - \langle x_3 | z_1 \rangle z_1 + \langle x_3 | z_2 \rangle z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3)  $C^3: x_1 = \underbrace{(1-i)}_{\text{skal. množobr mě nezájíma}} \cdot (1, i, 1+i)^T, x_2 = (1, 1, 1)^T \rightarrow$  najdi orthonormální báci

skal. množobr mě nezájíma

$$\Rightarrow z_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{1}{2} x_1 \quad ; \quad \|x_1\|^2 = \langle x_1 | x_1 \rangle = 1 \cdot 1 + i \cdot \bar{i} + (1+i) \cdot \overline{(1+i)} = 1+1+2=2^2$$

$$\Rightarrow x_2 = \langle x_2 | z_1 \rangle z_1 + \langle x_2 | z_2 \rangle z_2 \Rightarrow y_2 = x_2 - \langle x_2 | z_1 \rangle z_1$$

$$\Rightarrow y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \langle x_2 | x_1 \rangle \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1-i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1+i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1-i}{2} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ orthogonální doplník

mod  $\mathbb{R}$ :

mod  $\mathbb{C}$ :

→ a já char m

$$(R(A))^\perp = \ker(A)$$

$$\left( \begin{array}{ccc} \underline{\underline{z_1}} & \underline{\underline{z_2}} & \underline{\underline{z_3}} \\ \hline \underline{\underline{-z_1}} & \underline{\underline{-z_2}} & \underline{\underline{-z_3}} \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ w \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (R(A))^\perp = \overline{\ker(A)}$$

4) Najdi směrnici  $\mu \in \mathbb{R}^3$  průmky procházející počátkem souřadnic, když se body  $u = (1, 2, 3)^T$ ,  $v = (0, 3, 1)^T$ ,  $w = (8, 1, 2)^T$  robnazí při projekci na ni do stejného bodu.

a, najdu rovinu určenou  $u, v, w \rightarrow \mu = \text{norm. vektor } \underbrace{(a, b, c)}_{\tilde{m}} (d)$

$$b, \tilde{z} = \frac{\mu}{\|\mu\|} = (a, b, c)^T \Rightarrow \langle u | \tilde{z} \rangle \tilde{z} = \langle v | \tilde{z} \rangle \tilde{z} = \langle w | \tilde{z} \rangle \tilde{z}$$

$$a + 2b + 3c = 3a + b + 2c = 8a + b + 2c$$

$$\begin{array}{l} a - b - 2c = 0 \\ 7a - b - c = 0 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 7 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & -15 \\ 2 & -5 & \end{pmatrix} \rightarrow \underline{(1, 5, 2)^T}$$

5) Budu  $\langle x | y \rangle$  s.o. v  $\mathbb{R}^3$  a  $(1, 0, 1)^T, (1, 2, 0)^T, (0, 1, 1)^T$  ort. báze.  $\left\langle (3, 1, 1)^T \mid (2, 1, 6)^T \right\rangle = ?$

$$\left\langle \sum_i a_i z_i \mid \sum_j b_j z_j \right\rangle = \sum_i \sum_j a_i b_j \langle z_i | z_j \rangle = \sum_i a_i b_i \quad \leftarrow \text{standardní s.o. !}$$

$$\begin{aligned} u &= (3, 1, 1)^T = 2x + y - z \\ v &= (2, 1, 6)^T = 3x - y + 3z \end{aligned} \quad \left\{ \quad \langle u | v \rangle = 6 - 1 - 3 = 2$$

6) Urči vzdálenost  $x = (6, 6, 4, 4)^T$  od roviny procházející body

$$A = (1, 1, 1, 1)^T, \quad B = (9, 1, 1, -1)^T, \quad C = (5, -1, 3, 0)^T$$

$\rightarrow$  posunu celou situaci do počátku  $\Rightarrow S$  bude prostor

$\rightarrow$  uděláme projekci  $X$  do  $S$  a určíme vzdálenost  $\|X - \mu(x)\|$ .

$$A' = A - A = (0, 0, 0, 0) \quad \rightarrow S = \text{span}(u, v)$$

$$B' = B - A = (8, 0, 0, -2) = u \rightarrow (4, 0, 0, -1) \rightarrow z_1 = \frac{1}{\sqrt{17}} (4, 0, 0, -1)^T \quad (0, 1, -1, 0)^T$$

$$C' = C - A = (4, -2, 2, -1) = v \rightarrow (y_2 = v - \langle v | z_1 \rangle z_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) = (0, -2, 2, 0)^T$$

$$x' = X - A = (5, 5, 3, 3) \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, -1, 0)^T$$

$$\Rightarrow \mu_z(x') = \langle x' | z_1 \rangle z_1 + \langle x' | z_2 \rangle z_2 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (4, 1, -1, -1)^T$$

$$\Rightarrow d(S, x) = \|x' - \mu_z(x')\| = \|(1, 4, 4, 4)\| = \sqrt{1+16+16+16} = \underline{\underline{4}}$$

## Determinanty

$\rightarrow$  znacení:  $S_m$  = grupa permutací na  $\{1, \dots, m\}$

Def: Determinant matice  $A \in K^{m \times m}$  je

$$\det(A) := \sum_{\mu \in S_m} \text{sgn}(\mu) \prod_{i=1}^m a_{i,\mu(i)}$$

$\rightarrow$  řádky po řádcích a vybíráme prvek podle  $\mu$

Vzorec:  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \rightarrow \mu_1 &= (1, 2) \rightarrow +1, a \cdot d \\ \rightarrow \mu_2 &= (2, 1) \rightarrow -1, b \cdot c \end{aligned} \quad \left. \right\} \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Pro  $3 \times 3 \rightarrow 6$  permutací

$$\rightarrow \mu_1 = (1, 2, 3) \rightarrow a_{11} a_{22} a_{33}$$

$$\mu_2 = (2, 3, 1) \rightarrow a_{12} a_{23} a_{31}$$

$$\mu_3 = (3, 1, 2) \rightarrow a_{13} a_{21} a_{32}$$

$$\hookrightarrow \text{sgn} = +1$$

$$\left. \begin{array}{l} \mu_4 = (3, 2, 1) \rightarrow a_{13} a_{22} a_{31} \\ \mu_5 = (1, 3, 2) \rightarrow a_{11} a_{23} a_{32} \\ \mu_6 = (2, 1, 3) \rightarrow a_{12} a_{21} a_{33} \end{array} \right\} \hookrightarrow \text{sgn} = -1$$

Pozorování: Máli  $A$  nulový řádek, pot  $\det(A) = 0$ .

Def: každý součin v definici obsahuje prvek z nulového řádku.

Pozorování: Pro trojúhelníkovou matice platí  $\det(A) = \pm$  součin prvků na diagonále

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots \\ \vdots & & \ddots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \cdots a_{1m} \\ a_{22} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & a_{mm} \end{vmatrix} = \prod_i a_{ii} \quad \left. \begin{array}{l} \text{v 1. řádku musí a}_{11} \\ \text{v 2. řádku musí a}_{22} \\ \vdots \\ \rightarrow \det(A) = \det(A^\tau) \end{array} \right\}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{1m} \\ & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & \cdots & a_{m-1,m} \\ a_{m1} a_{m2} \cdots a_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1m} \\ \vdots & \ddots \\ a_{m-1,1} a_{m-1,2} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \cdot \prod_i a_{i, m+1-i} \quad \left. \begin{array}{l} \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & m \\ m & m-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \\ = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \end{array} \right\}$$

## Vlastnosti

•  $\det(A) = \det(A^\tau)$

Def: permutace sechn v jiném pořadí:  $\mu \in S_m : \mu(i) = j \Leftrightarrow i = \mu^{-1}(j)$

$$\Rightarrow \det(A^\tau) = \sum_{\mu \in S_m} \text{sgn}(\mu) \prod_{i=1}^m \underbrace{(A^\tau)_{i\mu(i)}}_{a_{\mu(i)i}} = \sum_{\mu \in S_m} \text{sgn}(\mu^{-1}) \prod_{i=1}^m a_{j\mu^{-1}(i)} = \det(A)$$

• permutaci sloupců podle  $q \in S_m$ :  $B: b_{ij} = a_{iq(j)}$ :  $\det(B) = \text{sgn}(q) \det(A)$

$$\det(B) = \sum_{\mu \in S_m} \text{sgn}(\mu) \prod_i b_{i\mu(i)} = \sum_{\mu \in S_m} \text{sgn}(q) \text{sgn}(q) \text{sgn}(\mu) \prod_i a_{i q(\mu(i))} =$$

$$= \text{sgn}(q) \sum_{\mu \in S_m} \text{sgn}(q \circ \mu) \prod_i a_{i q(\mu(i))} = \text{sgn}(q) \sum_{\mu \in S_m} \text{sgn}(\mu) \prod_i a_{i q(\mu(i))} = \underline{\text{sgn}(q) \det(A)}$$

$$\pi = q \circ \mu \quad \mu \mapsto \pi \text{ je bijekce na } S_m$$

## Důkaz

- totéž platí pro první řádku  $\leftarrow$  díky  $\det(A) = \det(A^T)$
- výměna dvou řádků / sloupců změní známku determinantu
- pro matice nad tělesy char  $\neq 2$  se dvěmi stejnými řádky / sloupcem platí  
 $\det(A) = -\det(A) \Rightarrow \det(A) = 0$ , pro  $\text{char} = 2$  platí  $1 = -1$

Lemma: Má-li  $A$  dva stejné řádky / sloupce, pak  $\det(A) = 0$ .

Dc: Nechť  $\alpha$ -tý řádek shoduje s  $\beta$ -tým

$\Rightarrow$  pro řádkou  $p \in S_m$  umíme mít  $q = p \circ (\alpha, \beta) \in S_m$ , takže

$$\prod_i a_{ip(i)} = \prod_i a_{iq(i)} \quad \& \quad \text{sgn}(p) = -\text{sgn}(q)$$

$\Rightarrow p \mapsto q$  je bijekce na  $S_m \Rightarrow$  scitance v  $\det(A)$  spáruje se tak, že se mazají všechny řádky

■

## Linearita determinantu

Věta: Determinant matice je lineárně závislý na každém jejím řádku a sloupci.

$$\boxed{\begin{array}{|ccc|} \hline & \dots & \\ \hline 1. & \dots & \\ \hline \end{array}} = \sum_{p \in S_m} \text{sgn}(p) \left( 1 \cdot \prod_i a_{ip(i)} \right) = 1 \cdot \sum_{p \in S_m} \text{sgn}(p) \prod_i a_{ip(i)} = 1 \cdot \boxed{\begin{array}{|ccc|} \hline & \dots & \\ \hline & \dots & \\ \hline \end{array}}$$

$$i: \boxed{\begin{array}{|ccc|} \hline a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{11} + c_{11} & \dots & b_{1m} + c_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{mm} & \dots & a_{mm} \\ \hline A & & \end{array}} = \boxed{\begin{array}{|ccc|} \hline a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{mm} & \dots & a_{mm} \\ \hline B & & \end{array}} + \boxed{\begin{array}{|ccc|} \hline a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{11} & \dots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{mm} & \dots & a_{mm} \\ \hline C & & \end{array}}$$

$$a_{2j} = \begin{cases} b_{1j} + c_{1j}, & \ell = i \\ b_{2j} = c_{2j}, & \ell \neq i \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{p \in S_m} \text{sgn}(p) \prod_i a_{ip(i)} = \sum_{p \in S_m} \text{sgn}(p) a_{ip(i)} \prod_{\ell \neq i} a_{\ell p(\ell)} = \\ &= \sum_{p \in S_m} \text{sgn}(p) b_{ip(i)} \prod_{\ell \neq i} b_{\ell p(\ell)} + \sum_{p \in S_m} \text{sgn}(p) c_{ip(i)} \prod_{\ell \neq i} c_{\ell p(\ell)} = \det(B) + \det(C) \end{aligned}$$

Důkaz: Přičleněním skalárního násobku řádku / sloupce k jinému se determinant nezmění.

$$\text{Dc: } \left| \begin{array}{cc} -a_{i*} + 1 \cdot a_{j*} & - \\ a_{j*} & - \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} -a_{i*} & - \\ a_{j*} & - \end{array} \right| + 1 \cdot \underbrace{\left| \begin{array}{cc} -a_{j*} & - \\ a_{j*} & - \end{array} \right|}_{=0} = \left| \begin{array}{cc} -a_{i*} & - \\ a_{j*} & - \end{array} \right| \quad \blacksquare$$

Důkaz: Je-li  $A$  singulární, pak  $\det(A) = 0$ .

Dc: Závislý řádek lze eliminovat na nulový řádek.

Výpočet determinantu: Permutace řádků / sloupců, nezáleží konstant.

→ gaušování podle řádků / sloupců

### • Determinant součinu

Věta: Pro libovolné  $A, B \in K^{n \times n}$  platí  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

Dle: Díky A i B jsou regulární, jinak  $0 = 0$ . ↗

$\Rightarrow$  A rozložíme na součet el. matic  $A = E_1 E_2 \cdots E_k$  } indukce  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$   
a pak  $\det(EB) = \det(E)\det(B)$

$\Rightarrow$  pro první i-tého řádku & j-tému:  $\det(E) = 1$ ,  $\det(EB) = \det(B)$  ✓

pro vynásobení i-tého řádku  $1 \neq 0$ :  $\det(E) = 1$ ,  $\det(EB) = 1 \cdot \det(B)$  ✓

### • Důsledky

$$\bullet \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \quad \text{Dle: } \det(A) \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_m) = 1 \quad \blacksquare$$

$$\bullet A \text{ je regulární} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \quad \text{Dle: } \det(A) = \det(E_1 \cdots E_k) \neq 0 \quad \blacksquare$$

### • Laplaceův rozvoj

Značení:  $A^{ij}$  je podmatrix získaná z A odstraněním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Věta: Pro libovolnou  $A \in K^{n \times n}$  a járkohi index řádku i platí:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij}) \quad \rightarrow \text{stejný rozvoj lze dělat}\text{ po každém sloupci}$$

Dle: Rozložit i-tého řádku + linearita:

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})^T = a_{i1} e_1^T + a_{i2} e_2^T + \dots + a_{in} e_n^T$$

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{array} \right| = a_{i1} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right| + a_{i2} \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & 0 \end{array} \right| + \dots + a_{in} \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \text{j-ty člen: } \left| \begin{array}{cccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right| &= (-1)^{i-1} \left| \begin{array}{ccccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right| = (-1)^{(i-1)+(j-1)} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right| = \\ &= (-1)^{i+j} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right| = (-1)^{i+j} \left| \begin{array}{c} 1 \\ \hline A^{ij} \end{array} \right| = (-1)^{i+j} \det(A^{ij}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### • Determinant matice podmatrix

$$\det \begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B) \cdot \det(C)$$

Dle: indukce z

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)$$

Indukce:  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

$$\hookrightarrow \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \det(A)$$

## Adjungovaná matice

Def: Pro matici  $A \in K^{n \times n}$  definujeme adjungovanou matici  $\text{adj}(A)$

$$(\text{adj}(A))_{ji} = (-1)^{i+j} \det(A^{ij}) \quad \rightarrow \text{faktory L. rozvoje podél } i\text{-tého řádku } A \text{ ukládám do } i\text{-tého sloupce } \text{adj}(A)$$

Věta: Pro regulární  $A \in K^{n \times n}$  platí  $\text{adj}(A) = \det(A) \cdot A^{-1}$

Dle: Ukažeme  $A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n$ .

- diagonálna:  $(i\text{-ý řádek } A) \cdot (i\text{-ý sloupec } \text{adj}(A)) = \sum_{j=1}^m a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A^{ij}) = \det(A)$

- mimo:  $(k\text{-ý řádek } A) \cdot (i\text{-ý sloupec } \text{adj}(A)) = \sum_{j=1}^m a_{kj} (-1)^{i+j} \det(A^{ij}) = \det(A') = 0$

$\hookrightarrow A' = \text{matice získaná nahrazením } i\text{-tého řádku za } k\text{-ý řádek} \Rightarrow 2 \text{ stejné ř.}$

## Crammerovo pravidlo

$\hookrightarrow$  původní motivace za determinanty - hledali obecné řešení soustavy l. r.

Věta: Nechť  $A \in K^{n \times n}$  je regulární. Pak pro jakékoli  $b \in K^n$  splňuje řešení  $Ax = b$

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(A_{i \rightarrow b}) \quad \rightarrow A_{i \rightarrow b} \text{ získáme z } A \text{ nahrazením } i\text{-tého sloupce vektorem } b.$$

Uzávěra:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}}_A \cdot x = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}}_b \quad \det(A_{1 \rightarrow b}) = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \\ 9 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 4, \quad \det(A) = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{4}{2} = 2$$

Dle: Označme  $a_1, \dots, a_n$  sloupce matice  $A$ .

Soustavu  $Ax = b$  mym' přepíšeme po sloupcích:  $\sum_{z=1}^n x_z \cdot a_z = b$

$$\det(A_{i \rightarrow b}) = \det(A_{i \rightarrow \sum_z x_z a_z}) \stackrel{*}{=} \sum_z x_z \det(A_{i \rightarrow a_z}) = x_i \det(A_{i \rightarrow i}) = \underline{x_i \det(A)}$$

$$* \quad \left| \begin{array}{c|ccc} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ni} & \dots & \left( \sum_z x_z a_z \right) & \dots & a_{nm} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|ccc} a_{11} & \dots & \sum_z x_z a_{1z} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{ni} & \dots & \sum_z x_z a_{nz} & \dots & a_{nm} \end{array} \right| = x_i \left| \begin{array}{c|ccc} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{ni} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nm} \end{array} \right| + \dots + x_m \left| \begin{array}{c|ccc} a_{11} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{ni} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nm} \end{array} \right|$$

Dle #2: Vážmu si, že  $\det(I_{i \rightarrow x}) = x_i$

$$\& \quad A \cdot I_{i \rightarrow x} = A_{i \rightarrow b}$$

$$\Rightarrow \det(A) \cdot \det(I_{i \rightarrow x}) = \det(A_{i \rightarrow b}) \Rightarrow x_i \cdot \det(A) = \det(A_{i \rightarrow b})$$

## Obraly množiny v euklidovském prostoru

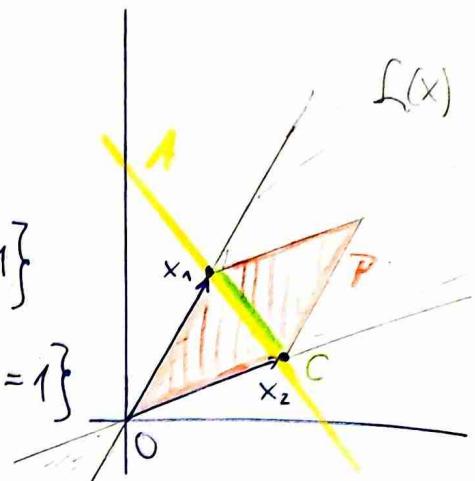
Pro  $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^n$

$$1) \text{ Lineární obal } LO(X) = \left\{ \sum_i a_i x_i \mid a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$2) \text{ Afinitní obal } AO(X) = \left\{ \sum_i a_i x_i \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ a } \sum_i a_i = 1 \right\}$$

$$3) \text{ Konečný obal } CO(X) = \left\{ \sum_i a_i x_i \mid a_i \in [0, 1] \text{ a } \sum_i a_i = 1 \right\}$$

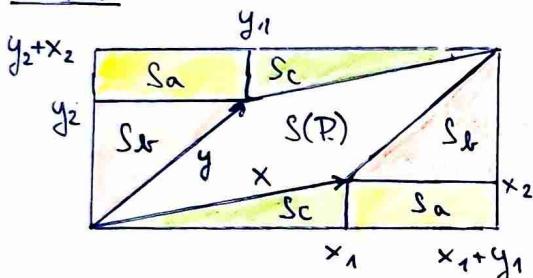
$$4) \text{ Rovnoběžnostní } P(X) = \left\{ \sum_i a_i x_i \mid a_i \in [0, 1] \right\}$$



## Geometrický význam determinanta

Věta: Pro  $X = \{x_1, \dots, x_m \mid x_i \in \mathbb{R}^n\}$  je  $\text{vol}(P(X)) = |\det(A)|$ , kde  $x_1, \dots, x_m$  jsou sloupce  $A$ .  
 (objem)

Vrážka:



$$\begin{aligned} S(P) &= (x_1+y_1)(x_2+y_2) - 2(S_a + S_b + S_c) \\ &= x_1 x_2 + x_1 y_2 + y_1 x_2 + y_1 y_2 - 2y_1 x_2 - y_1 y_2 - x_1 x_2 \\ &= x_1 y_2 - y_1 x_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Důkaz: Elementární úpravy zachovávají objem.

→ mohou být zapsány do rámečku matice, díky  $\det(A) = \det(A^T)$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 + \lambda x_1 & y_2 + \lambda x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + 0 & x_2 + \lambda' y_2' \\ 0 & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1' & 0 \\ 0 & y_2' \end{vmatrix} = S(P)$$

Důsledek: Pro l.e.  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  a matice s kolmými sloupcem vzhledem k řejadélkám  $X$  platí, že se objem tělesa  $V$  po transformaci změní následovně:

$$\text{vol}(f(V)) = |\det(\chi_{[f]X})| \cdot \text{vol}(V)$$

Idea: Rozdělíme  $V$  na hyperplánové části, které se pak roztáhnou rovnoběžností s objemem eminující faktorem  $|\det(\chi_{[f]K})|$ , protože  $\chi_{[f]K}$  obsahuje obrny k-l. b.

Pro jiné báze:  $\det(\chi_{[f]X}) = \det(\chi_{[\text{id}]K} \chi_{[f]K} [\text{id}]_X) = \det(\chi_{[f]K})$

$$\hookrightarrow \chi_{[id]_X}^{-1} = \chi_{[id]_K}$$

• Brückblad

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, H^{-1} = ? \rightarrow \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^k \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{28} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -32 \cdot 5 = -160$$

$$3) a = (a_1, \dots, a_m)^T, b = (b_1, \dots, b_m)^T \rightarrow \det(a \cdot b^T) = ?$$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_m \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_m \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & \dots & a_1 + b_m \\ a_2 - a_1 & \dots & a_2 - a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n - a_{n-1} & \dots & a_n - a_{n-1} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{drei Kettentauschungen für } m \geq 3} \begin{cases} a_1 + b_1, & m=1 \\ (a_1 - a_2)(b_2 - b_1), & m=2 \\ 0, & m \geq 3 \end{cases}$$

$$4) \det(A_m) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & & & 0 \\ 1 & 3 & 2 & & \\ 1 & 3 & 2 & & \\ 0 & & \ddots & 2 \\ & & & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & & & \\ 1 & 3 & 2 & & \\ 1 & 3 & \ddots & 2 & \\ & \ddots & 1 & 3 & \\ & & 1 & 3 & \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & & & \\ 3 & 2 & & & \\ 1 & 3 & 2 & & \\ 1 & 3 & \ddots & 2 & \\ & \ddots & 1 & 3 & \end{vmatrix} = 3 \cdot \det(A_{m-1}) - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & & \\ 1 & 3 & 2 & & \\ 1 & 3 & \ddots & 2 & \\ & \ddots & 1 & 3 & \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A_m) = 3 \cdot \det(A_{m-1}) - 2 \det(A_{m-2}) \quad \left. \begin{array}{l} D_m = 2^{m+1} - 1 \rightarrow \text{induktiv:} \\ D_m = 3D_{m-1} - 2D_{m-2} = 3 \cdot 2^m - 3 - 2 \cdot 2^{m-1} + 2 \\ = 2 \cdot 2^m - 1 = 2^{m+1} - 1 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \det(A_1) = 3 \quad \left. \begin{array}{l} \det(A_1) = 15 \\ \det(A_2) = 7 \end{array} \right\} \quad \det(A_3) = 15$$

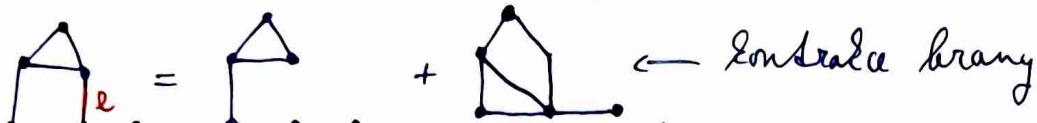
$$5) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & m \\ 2 & 3 & \dots & m & 1 \\ 3 & \dots & m & 1 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ m & 1 & 2 & \dots & m-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{R}_i \leftrightarrow \text{R}_{m-i}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & m \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & (1-m) \\ 1 & 1 & \dots & (1-m) & 1 \\ 1 & \dots & (1-m) & \vdots & 1 \\ 1 & (1-m) & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{A}_i} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \dots & (m-1) \\ 1 & 0 & 0 & \dots & (-m) \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (-m) & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{m} \begin{vmatrix} m & 1 & 2 & \dots & (m-1) \\ m & m & m & \dots & (-m) \\ m & m & m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & (-m) & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{m} \begin{vmatrix} \frac{m(m+1)}{2} & 1 & 2 & \dots & (m-1) \\ 0 & & & & (-m) \\ 0 & & & & (-m) \\ \vdots & & & & (-m) \\ 0 & & & & (-m) \end{vmatrix} = \frac{1}{m} \cdot \frac{m(m+1)}{2} \begin{vmatrix} 0 & & & & (-m) \\ (-m) & & & & 0 \\ (-m) & & & & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (m+1) \cdot (-m) \cdot (-1)^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}} = \frac{1}{2} (m+1) m^{m-1} \cdot (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}$$

## Počet košler grafu

$K(G) := \# \text{košler grafu } G$

$\circlearrowleft: K(G) = K(G-e) + K(G+e)$  pro libovolnou hranu  $e$



$\leftarrow$  Lomadlá hranu

$\hookrightarrow$  hranu co e neobsahuje  $\rightarrow$  košly co e obsahují

Def: Laplaceova matice grafu  $G$  na  $V(G) = \{v_1, \dots, v_m\}$  je  $L_G \in \mathbb{R}^{m \times m}$  t.j.:

$$(L_G)_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i), & i=j \\ -1 & i \neq j \wedge v_i, v_j \in E(G) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Vráťte:

$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$  součet všech řádků / sloupce = 0

$L_{C_1}$	
	$L_{C_2}$

$\leftarrow$  2 komponenty

$\circlearrowleft L_G$  je singulární

$\circlearrowleft G$  nemá souvislost  $\Rightarrow L''_G$  je singulární  $\because \exists$  komponenta, ve které nejsou  $v_i$ ,  
 $\Rightarrow \sum$  řádků této komponenty = 0  
 $\Rightarrow$  DÍLO  $G$  souvislost

Kladnost  $\det(L_{ij})$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 0$$

$$\det L''_G = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \\ 4 \cdot 5 \cdot 6 \\ 5 \cdot 6 \\ 6 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{vmatrix} = - \det L_G^{21}$$

$$\det L_G^{21} = |2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6| = |-1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6| = -|1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6| = -\det L_G^{22}$$

Důsledek:  $\forall i, j \quad \det L_G^{ij} = (-1)^{i+j} \det L''_G$ .

Isomorfni grafy:  $G \cong G' \Rightarrow \pi(V_1, \dots, V_m) = (V_1, \dots, V_m)$

$\Rightarrow \sim L_G$  se jenom zpermutuje řádky i sloupce podle  $\pi$

$\Rightarrow \exists i: \det L''_G = \det L_G^{ii} = \det L''_{G'}$   $\rightarrow i = \pi(i)$

$\hookrightarrow L''_G, L_G^{ii}, L''_{G'}$  se liší pouze permutací r. i. s. podle  $\pi \Rightarrow \text{sgn}(\pi) \text{sgn}(\pi) = 1$

Def: BÚNO  $G$  souvisí. Indukční pravla  $m := |E(G)|$ .

1,  $m=1$ :  $\rightarrow K(G)=1$ ,  $L_G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det L_G^{11} = 1 \quad \checkmark$

2,  $m-1 \rightarrow m$ : Zvolim libovolnou  $e \in E_G$ , BÚNO  $e = v_1 v_2 \quad \checkmark \Rightarrow \det L_G^{11} = \det L_G^{11}$  dleží  $G \cong G'$

$$\begin{array}{l} R^{n-1 \times n-1} A := L_G^{11} \\ R^{n-1 \times n-1} B := L_{G-e}^{11} \rightarrow \det B = K(G-e) \\ R^{n-2 \times n-2} C := L_{G-e}^{11} \rightarrow \det C = K(G \cdot e) \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{char akára } \det A = \det B + \det C \\ \rightarrow C \approx v_1, \dots, v_m \Rightarrow C = A^{11} = B^{11} \end{array} \right.$$

$\circledast$   $A$  a  $B$  jsou shodné, kromě  $b_{11} = a_{11} - 1 \rightarrow$  stupň  $N_2$  ještě o 1  
 $\rightarrow A_{*1} = B_{*1} + e_1 \rightarrow 1.$  sloupec  $A = 1.$  sloupec  $B + e_1$   
 $\Rightarrow$  linearita  $\det(A) = \det(B) + \det(\overset{1 \cdots 1}{0} A^{11}) = \det(B) + \det(A^{11})$   
 $\Rightarrow \det(A) = \det(B) + \det(C)$  ■

### Cayleyho vzorec

Tvrdění: Úplný graf  $K_n$  má  $n^{n-2}$  řešení.

Def:  $K(K_n) = \det L_{K_n}^{11} = \underbrace{\begin{vmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}}_{n-1} = \underbrace{\begin{vmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -m & m & \ddots & \vdots \\ -m & m & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & m \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}}_{m-1} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & m & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}}_{m-1} = \underline{\underline{n^{n-2}}} \quad \hookrightarrow m-1 + (m-2) \cdot (-1) = 1$

### Polynomy

Def: Polynom stupně  $n$  v proměnné  $x$  nad tělesem  $K$  je výraz  $p \in K(x)$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad a_0, \dots, a_n \in K.$$

Operace s polynomy  $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i \quad n \geq m$

$$(p \pm q)(x) = \sum_{i=0}^n (a_i \pm b_i) x^i$$

$$(xp)(x) = \sum_{i=1}^n (xa_i) x^i$$

$$(p \cdot q)(x) = \sum_{i=1}^{n+m} c_i x^i, \quad \text{kde } c_i = \sum_{j=1}^i a_j b_{i-j}$$

$$\frac{p}{q} = r + \frac{z}{q} \quad \deg(z) < \deg(q)$$

$$\Rightarrow \exists \text{ unikátní } r, z \in K(x) : p = q \cdot r + z$$

$$\rightarrow \text{pro } \deg(p) < \deg(q) : z = p, \quad r = 0$$

## • Mala Fermatova věta

Věta: Pro  $x \in \mathbb{Z}_p \setminus 0$  platí  $x^{p-1} = 1$ .

Důkaz: Zobrazení  $i \mapsto x \cdot i$  je bijekce mezi  $\{1, \dots, p-1\}$  a  $\mathbb{Z}_p$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{p-1} i = \prod_{i=1}^{p-1} x \cdot i = x^{p-1} \prod_{i=1}^{p-1} i \Rightarrow \underline{\underline{1 = x^{p-1}}} \quad \blacksquare$$

Důsledek: Pro  $x \in \mathbb{Z}_p$ :  $x^p - x = 0$

$$\Rightarrow \text{pro } \forall q \in \mathbb{Z}_p(x) \exists r \in \mathbb{Z}_p(x) \text{ d.i. } \begin{cases} \deg(r) \leq p-1 \\ \forall x \in \mathbb{Z}_p : q(x) = r(x) \end{cases}$$

Příklad:  $\mathbb{Z}_5$

$$4x^5 + 2x^4 + 3x^2 + 2 = \underbrace{4}_{q(x)} \underbrace{(x^5 - x)}_0 + \underbrace{2x^4 + 3x^2 + 4x + 2}_{r(x)}$$

## • Kořeny

Def:  $r \in \mathbb{K}$  je kořenem polynomu  $p \in \mathbb{K}(x) \Leftrightarrow p(r) = 0$ .

•  $r$  je kořen  $\Leftrightarrow x-r$  dělí  $p$  bez zbytku  $\because$  pak  $p = (x-r) \cdot q \stackrel{x=r}{=} 0 \cdot q = 0$ .

Def: Násobnost kořene  $r \in \mathbb{K}$  je největší celový  $k \in \mathbb{N}$ , že  $(x-r)^k$  dělí  $p$ .

Věta (základní věta algebry):  $\forall p \in \mathbb{C}(x), \deg(p) \geq 1$  má alespoň 1 kořen.

Důsledek:  $\forall p \in \mathbb{C}(x)$  lze rozložit na součin lineárních faktorů.

Def: Těleso  $\mathbb{K}$  je algebraicky uzavřené  $\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{K}(x), \deg(p) \geq 1$  má alespoň 1 kořen.

## • Reprezentace polynomu stupně m

1)  $a_0, \dots, a_m$

2) pro algebraicky uzavřená tělesa  $\rightarrow a_n$  a  $n$  kořenů

3) hodnoty polynomu v  $n+1$  bodech.

Problém: Dány  $n+1$  dvojice  $(x_i, y_i)$ , urči  $p \in \mathbb{K}(x)$   $\begin{cases} \deg(p) \leq n \\ x_i : p(x_i) = y_i \end{cases}$

### ① vyřešení soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Def: Matice této soustavy se nazývá Vandermondova  $V_{n+1}(x_0, \dots, x_n)$ .

Věta: Vandermondova matice  $V_{m+1}$  je regulární  $\Leftrightarrow x_0, \dots, x_m$  jsou různé.  
Důkaz: regulární  $\Leftrightarrow$  determinant  $\neq 0$

$$\det(V) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^m \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & \cdots & x_1^m - x_0^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_m - x_0 & x_m^2 - x_0^2 & \cdots & x_m^m - x_0^m \end{vmatrix} =$$

rozvoj podle 1. sl.  
+  
z každého ř.  
vyčlení  $x_i - x_0$

$$= \prod_{i=1}^n (x_i - x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1 + x_0 & x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2 & \cdots & x_1^{m-1} + x_1^{m-2} x_0 + \cdots + x_0^{m-1} \\ 1 & x_2 + x_0 & x_2^2 + x_2 x_0 + x_0^2 & \cdots & x_2^{m-1} + x_2^{m-2} x_0 + \cdots + x_0^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m + x_0 & x_m^2 + x_m x_0 + x_0^2 & \cdots & x_m^{m-1} + x_m^{m-2} x_0 + \cdots + x_0^{m-2} \end{vmatrix} =$$

$\Rightarrow$  vedení odčítaní od každého sloupce  $x_0$ -másober předchozího

$$= \prod_{i=1}^m (x_i - x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{m-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^{m-1} \end{vmatrix}.$$

recurrence

$$\Rightarrow \det(V_{m+1}(x_0, \dots, x_m)) = \prod_{i=1}^m (x_i - x_0) \cdot \det(V_m(x_1, \dots, x_m)) = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \quad \blacksquare$$

## ② Lagrangeova interpolace

• určím  $m+1$  pomocných polynomů stupně  $m$

$$p_i(x) = \frac{1}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} \cdot \prod_{j \neq i} (x - x_j)$$

$$\begin{cases} p_i(x_i) = 1 \\ p_i(x_j) = 0, \quad j \neq i \end{cases}$$

ten součin  
ve jmenovateli  
je KONSTANTA

$$\Rightarrow p(x) = \sum_{i=1}^{m+1} y_i p_i(x) \quad \Rightarrow p(x_i) = y_i p_i(x_i) = y_i \quad \blacksquare$$

Problém: Pro čísla  $m$  a  $n$  návrhni  $m$  elicí řeš, aby bylo možné rekonstruovat Lajngův kód z libovolných  $n$  elicí, ale nebylo možné to udělat s libovolnou kombinací mezi elicí.

Riešení: Zvolím nějaký polynom stupně  $m-1$ .

$\Rightarrow$  Lajngův kód je ten polynom

$\Rightarrow$  elice je m dvojic  $(x_i, y_i)$

$\left. \begin{array}{l} \text{těleso může být R} \\ \text{nebo } \mathbb{Z}_p \text{ a } p \geq m \end{array} \right\}$

## • Vlastní čísla a vektory

Def: Nechť  $V$  je v.s.p. nad  $K$  a  $f: V \rightarrow V$  je l.e.  $\lambda \in K$  je vlastní číslo  $f \Leftrightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} : f(v) = \lambda v$

Vektor  $v \in V$  je vlastní vektor k  $\lambda \equiv f(v) = \lambda v$

Def: pro matici  $A = [f]_X \in K^{n \times n}$ :  $Ax = \lambda x$ ,  $x \in K^n$ .

Def: Množina všech vlastních čísel je její spectrum

💡: Vlastní čísla diagonální matice jsou prvek na diagonále.

$$DX = \begin{pmatrix} d_{11} & & & \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda x$$

$\lambda_1 = d_{11}, x_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$   
 $\lambda_2 = d_{22}, x_2 = (0, 1, \dots, 0)^T$   
 $\Rightarrow$  vlastní vektory  $\sim$  kanonická báse

💡: Vlastní vektory odpovídající stejnému vlastnímu č. jsou podprostor.

Dě:  $U = \{u \in V \mid f(u) = \lambda u\}$

$$\forall u, v \in U: f(u+v) = f(u) + f(v) = \lambda(u+v) \quad \checkmark$$

$$\forall a \in K: f(au) = af(u) = \lambda(au) \quad \checkmark \quad \blacksquare$$

Def: Geometrická násobnost v.c. je dimenze prostoru jeho vlastních vektorů.

Věta: Nechť  $f: V \rightarrow V$  je l.e. a  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  jsou různá vlastní čísla  $f$  a  $x_1, \dots, x_k$  odpovídající nevirovální vlastní vektory

Potom  $x_1, \dots, x_k$  jsou lineárně nezávislé.

Dě: Správ minimálním protipříkladem  $\Rightarrow \lambda$  je nejmenší, ře  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k, x_1, \dots, x_k$  l.e.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k a_i x_i = 0 \text{ má nevirovální řešení}$$

$$0 = \lambda_k 0 = \lambda_k \sum_{i=1}^k a_i x_i = \sum_{i=1}^k \lambda_k a_i x_i$$

$$0 = f(0) = f\left(\sum_{i=1}^k a_i x_i\right) = \sum_i a_i f(x_i) = \sum_i \lambda_i a_i x_i$$

$$\Rightarrow 0 = 0 - 0 = \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \lambda_k) a_i x_i = \sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{(\lambda_i - \lambda_k)}_{\neq 0} a_i x_i$$

$\Rightarrow x_1, \dots, x_{k-1}$  jsou lineárně závislé  $\Rightarrow$  správ s minimálou  $\lambda$

Důležitě: Matice řádu  $n$  máže mít nejvýše  $n$  vlastních čísel.

### Charakteristický polynom

Def: Charakteristický polynom matice  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  je  $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda \cdot I_n)$ .

Věta:  $\lambda \in \mathbb{K}$  je vlastním číslem matice  $A \Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0$ .

Důkaz:  $\lambda$  je vlastní č.  $A \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \exists x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}: Ax = \lambda x &\Leftrightarrow 0 = Ax - \lambda x = (A - \lambda I_n)x \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda I_n) \text{ je singulární} \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = p_A(\lambda) = 0 \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Důležitě: Vlastní čísla Δ matice jsou prvky na diagonále.

Def: Algebraická násobnost vlastního č.  $\lambda$  je jeho násobnost jakožto kořene  $r$   $p_A$ .

Tvrzení: Když polynom  $\sum_{i=0}^m b_i \lambda^i$ ,  $b_m = (-1)^m$  je char. polynomem nejalejší matice.

Důkaz:  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & -b_0 \\ 1 & 1 & & -b_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 - b_{m-1} \end{pmatrix}$  má char. polynom  $(\lambda^m + b_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0)(-1)^m$   $\blacksquare$

### Koeficienty char. polynomu

$$\rightarrow p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I) = \sum_i b_i \lambda^i = b_m \lambda^m + b_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0.$$

•  $b_m = (-1)^m$  ... součin podél diagonály dá  $(-1)^m$

•  $b_0 = \det(A) \dots \det(A - 0 \cdot I) = 0 + 0 + \dots + b_0$

•  $b_{m-1} = (-1)^{m-1} \sum_{i=1}^m a_{ii}$  ... diagonála

$$\begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} - 1 & \end{vmatrix}$$

$\rightarrow$  pokud je  $\mathbb{K}$  algebraicky nezávislý, tak  $\rightarrow$  algebraická násobnost  $\lambda$  je

$$p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} (\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{r_k}, \quad r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$$

$$\bullet b_0 = \prod_i \lambda_i^{r_i} \dots \det(A - 0 \cdot I) = \lambda_1^{r_1} \cdots \lambda_k^{r_k}$$

$$\bullet b_{m-1} = (-1)^{m-1} \sum_i r_i \lambda_i$$

Důležitě: Nechť  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  jsou vlastní čísla  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ , alg. nezávislých:

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_m \quad \rightsquigarrow \det(A) = \prod_i \lambda_i$$

$$a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m \rightsquigarrow \sum_i a_{ii} = \sum_i \lambda_i$$

## • Příklady

$$\textcircled{1} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \mu_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -4 \\ -1 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(4-\lambda) - 4 = -\lambda(1-\lambda)^2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \rightarrow (A - \lambda_1 I)x = 0 \rightarrow \text{řešení soustavy}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow x_1 = (4, 4, 1)$$

$$\Rightarrow \lambda_{2,3} = 3 \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow x_2 = (-1, 2, -1)$$

↳ alg. množnost = 2, geom. množ. = 1

Pozorování: pro  $A$  singulární je  $\lambda = 0$  vždy vlastní číslo.  $\because \det(A) = 0$

Pozorování: pro  $A$  s konstantními ř. součty  $k$  je  $k$  v. č. a  $(1, 1, \dots, 1)^T$  v. n.

$$\textcircled{2} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{sing.} \Rightarrow \lambda_1 = 0 \\ \Rightarrow \sum \text{řádků} = 3 \Rightarrow \lambda_2 = 3 \\ \Rightarrow \sum a_{ii} = \sum \lambda_i \Rightarrow 3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = 0$$

## • Vlastní čísla příbuzných lineárních operátorů

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_k \text{ a } x_1, \dots, x_k$$

- $dA$ :  $(dA)x = d(Ax) = d\lambda x \Rightarrow d\lambda_1, \dots, d\lambda_k$

l. z.: Rovna se množinou

- $A^2$ :  $A^2x = A\lambda x = \lambda Ax = \lambda^2 x \Rightarrow \lambda_1^2, \dots, \lambda_k^2$

- $A^T$ :  $\mu_{A^T}(\lambda) = \det(A^T - \lambda I) = \det(A^T - \lambda \cdot I^T) = \det((A - \lambda I)^T) = \det(A - \lambda I) = \mu_A(\lambda)$

→ stejné char. polynomy  $\Rightarrow$  stejné vlastní čísla

- $\tilde{A}^{-1}$ :  $Ax = \lambda x \Rightarrow \tilde{A}^{-1}Ax = \tilde{A}^{-1}\lambda x \\ \Rightarrow x = \lambda \tilde{A}^{-1}x \Rightarrow \tilde{A}^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_k}$

• Cayleyova - Hamiltonova věta

Věta: Pro matici  $A \in K^{n \times n}$  a její char. polynom platí:

$$\mu_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0 \quad \text{nejednáme}$$

$$Q_n = (-1)^n A^n + b_{n-1} A^{n-1} + \dots + b_1 A + b_0 I_n = \mu_A(A)$$

Důkaz:  $M := A - \lambda \cdot I_n$ , upravíme  $M \cdot \text{adj}(M) = \det(M) \cdot I_n$

$\Rightarrow$  sloučí adj(M) jen determinanty podmatric  $\Rightarrow$  polynomy stupně  $\leq n-1$

$$\Rightarrow \text{adj}(M) = \lambda^{n-1} B_{n-1} + \lambda^{n-2} \cdot B_{n-2} + \dots + \lambda \cdot B_1 + B_0, \quad B_0, \dots, B_{n-1} \in K^{n \times n}$$

$$\Rightarrow M \cdot \text{adj} M = \det M \cdot I_n \Rightarrow (A - \lambda \cdot I_n) \cdot \text{adj} M = \mu_A(\lambda) \cdot I_n$$

$$\Rightarrow (A - \lambda I_n)(\lambda^{n-1} B_{n-1} + \dots + \lambda B_1 + B_0) = (-1)^n \lambda^n I_n + b_{n-1} \lambda^{n-1} I_n + \dots + b_1 \lambda I_n + b_0 I_n$$

$$\lambda^n: \quad -B_{n-1} = (-1)^n I_n \Rightarrow -A^n B_{n-1} = (-1)^n A^n$$

$$\lambda^{n-1}: \quad AB_{n-1} - B_{n-2} = b_{n-1} I_n \quad A^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) = b_{n-1} A^{n-1}$$

$$\lambda^i: \quad AB_i - B_{i-1} = b_i I_n \quad A^i(AB_i - B_{i-1}) = b_i A^i$$

$$\lambda^0: \quad AB_0 = b_0 I_n$$

$$L := -A^n B_{n-1} + A^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) + \dots + A(AB_1 - B_0) + AB_0 = Q_n \quad \left. \begin{array}{l} L \\ \parallel \\ P \end{array} \right\}$$

$$P := (-1)^n A^n + b_{n-1} A^{n-1} + \dots + b_1 A + b_0 I_n = \mu_A(A)$$

## • Podobné matice

Matice l.r.  $f$  nemá jednoznačnou  $\Leftrightarrow$  závisí na báci.

$\Rightarrow$  všechny matice stejného obrazem mají stejná vlastní čísla

$$x[f]_X = x[id]_Y \circ [f]_Y \circ [id]_X, \quad x[id]_Y^{-1} = [id]_X$$

Def: Matice  $A, B \in K^{n \times n}$  jsou si podobné  $\Leftrightarrow$

$\exists$  regulární  $R \in K^{n \times n}$ :  $A = R^{-1}BR$

$\Leftrightarrow$  Podobné matice mají stejné vlastní čísla.

$$Ax = \lambda x, \quad B(Rx) = \lambda(Rx)$$

$$\Rightarrow B(Rx) = RAR^{-1}Rx = RAx = R\lambda x = \lambda Rx \quad \blacksquare$$

$\Leftrightarrow$  Podobné matice mají stejné char. polynomy.

$$\mu_B(\lambda) = \det(B - \lambda \cdot I) = \det(RAR^{-1} - R(\lambda I)R^{-1}) =$$

$$= \det(R(A - \lambda I)R^{-1}) = \det R \cdot \mu_A(\lambda) \cdot \det R^{-1} = \mu_A(\lambda) \cdot \det R \cdot \det R^{-1} \quad \blacksquare$$

$\Leftrightarrow$  Počud báce  $X$  obsahuje r.v.  $v$  obrazem  $f$ , tak se při prořezení  $f$  ten vektor jenom mazávne - taktéž pro  $[v]_X \rightarrow [f(v)]_X$  se souřadnice  $v$  v jen vynásobí  $\lambda$

$\Rightarrow x[f]_X$  obsahuje  $v$  sloupcí odpovídajícím  $u$  jen  $\lambda$  na diagonále.

Dk:  $u$  je  $i$ -tým vektorem  $X \Rightarrow i$ -tý sloupec

$$(x[f]_X)_{*i} = [f(u)]_X = [\lambda u]_X = \lambda [u]_X = \lambda e^i \quad \blacksquare$$

Věta: Geometrická másobnost vlastního čísla  $\lambda$  matice  $A$  je menší nebo rovna jeho algebraické másobnosti.

Dk: Budu  $A$  využívat jako matici l.r.  $\Rightarrow A = x[f]_X$ .

Nechť  $u_1, \dots, u_k$  je báce prostoru vlastní vektorů příslušných  $\lambda$

$$\Rightarrow \text{Geom}(\lambda) = k$$

Nyní  $u_1, \dots, u_k$  doplníme na báci  $K^n \rightarrow X$

$$\Rightarrow x[f]_X = x[id]_K \circ [f]_K \circ [id]_X \Rightarrow x[f]_X \text{ je podobná } A$$

$\Rightarrow x[f]_X$  má  $r$  prvních  $k$  sloupcích pouze  $\lambda$  na diagonále

$$\Rightarrow (\lambda - 1)^k \text{ dělí } f_{*}[q]_X(\lambda) = \mu_A(\lambda) \Rightarrow \text{Alg}(\lambda) \geq k = \text{Geom}(\lambda) \quad \blacksquare$$

## • Diagonalizace

Poznámka: Matice  $A \in K^{n \times n}$  je podobná diagonální matici.

$\Leftrightarrow$  prostor  $K^n$  má bázi sestávající z vlastních vektorů  $A$ .

Dle:  $AR = DR$  s diagonální  $D$ . Vážene, že  $R$  obsahuje vlastní vektory  $A$

$\Rightarrow$  protože  $R$  je regulární, tak jsem l. nerovnice  $\Rightarrow$  má bázi

i-tý sloupec:  $(RD)_{*i} = x_{dii} = \lambda x \Rightarrow Ax = \lambda x \Rightarrow x$  je v.v. A.  $\square$

Def: Matice je diagonalizovatelná  $\Leftrightarrow$  je podobná diagonální matici.

Důkaz: Matice  $A \in K^{n \times n}$  je diag.  $\Leftrightarrow$  má n různých vlastních čísel.

$\rightarrow$  od každého si vezmu 1 v.l.v.

Důkaz: Když  $f_A(\lambda) = \prod_i (1 - \lambda_i)^{r_i}$ , pak:

$A$  je diag.  $\Leftrightarrow \forall i \text{ Geom}(\lambda_i) = r_i$

Důkaz: Je-li  $A = R^{-1}DR$ , pak  $A^k = (R^{-1}DR)^k = R^{-1}D^k R$ .

## • Příklady

1) Mám vlastní čísla a vlastní vektory nejaké matice A  $\Rightarrow$  chci A

$$A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & & & \end{pmatrix}}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \cdots & \lambda_n x_n \\ 1 & & & \end{pmatrix}}_C \Rightarrow A = C \cdot B^{-1}$$

2) Mám A  $\rightarrow$  chci najít R a D, že  $A = R^{-1}DR$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow f_A(A) = \begin{pmatrix} 2-1 & -1 & -1 \\ 0 & -1-1 & 0 \\ 0 & 2 & -1-1 \end{pmatrix} = (2-1)(1-1)(-1-1)$$

$$\lambda_1 = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (1, 0, 0)^T$$

$$\lambda_2 = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (1, 0, 1)^T$$

$$\lambda_3 = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (0, -1, 1)^T$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- do D zapín na diag. vlastní č.
- do R zapín odpovídající vlastní v.

## Speciální komplexní matice

Def: Hermitská transformace matice  $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$  je  $A^H \in \mathbb{C}^{m \times m}$ , kde  $(A^H)_{ij} = \overline{a_{ji}}$ .

Def: Matice  $A$  je hermitovská  $\Leftrightarrow A = A^H$ .

Def: Matice  $A$  je unitární  $\Leftrightarrow A^{-1} = A^H$ , ortogonální  $\Leftrightarrow A^{-1} = A^T$ .

1, Hermitské matice mají reálnou úhlopríčku  $a_{ii} = \overline{a_{ii}} \Rightarrow a_{ii} \in \mathbb{R}$

$$2, (A^H)^H = A, (AB)^H = B^H A^H \quad -\text{práce jde o } A^T$$

3, pro unitární  $A, B$  je unitární i  $A^H, AB$

4,  $A^H A = I \Rightarrow$  slouží unitární matice  $\sim$  orthonorm. báze

$$\bullet X^H_i X_j = 0 \text{ pro } i \neq j, X^H_i X_i = 1 \quad \nearrow$$

5, Každý  $x \in \mathbb{C}^n$  s. ř.  $x^H x = 1$  lze doplnit na unitární matici

$\Rightarrow$  Gram-Schmidtova orthonormalizace

Věta: Každá hermitovská matice  $A$  má všechna vlastní čísla reálná.

Navíc  $\exists$  unitární  $R$  s. ř.  $R^{-1} A R = R^H A R$  je diagonální.

Důkaz: Každá hermitovská i symetrická matice je diagonalizovatelná.

Dk: Indukcí podle  $n$ . Pro  $n=1$  jejově platí.  $A_1 := A$

1,  $\forall \mathbb{C}$  má  $A_m$  několik vlastních  $\lambda$  a N.V.  $X$

$\Rightarrow X$  normalizují  $\Rightarrow \|X\|=1 \Rightarrow$  Gram-Schmidtovem doplněm na unitární  $P_m$

2, některou ře  $P_m^H A_m P_m = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & A_{m-1} \end{pmatrix} \Rightarrow$  nejdříve diagonálnizuj  $A_{m-1} \Rightarrow \checkmark$

$\diamond (P_m^H A_m P_m)^H = P_m^H A_m^H P_m = P_m^H A_m P_m$  je hermitovská  $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

$\bullet X \neq 0$  sloupec  $P_m \Rightarrow$  1. sl.  $P_m^H A_m P_m$  je:  $P_m^H A_m X = P_m^H \lambda X = \lambda P_m^H X$   
 $\rightarrow P_m$  je unitární (s.o.)  $\Rightarrow \lambda P_m^H X = \lambda (1, 0, \dots, 0)^T = (\lambda, 0, \dots, 0)^T$

3,  $P_m^H A_m P_m = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & A_{m-1} \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}, A_{m-1}$  je hermitovská

$\Rightarrow$  podle i.f.  $\exists R_{m-1}, D_{m-1}: R_{m-1}^{-1} A_{m-1} R_{m-1} = D_{m-1}$

$\rightarrow$  chci udělat něco jalo  $P_m^H R_{m-1}^{-1} A_{m-1} R_{m-1} P_m$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R_m := P_m \cdot \begin{pmatrix} 1 & \\ & R_{m-1} \end{pmatrix} \Rightarrow R_m^{-1} A_m R_m &= R_m^H A_m R_m = \begin{pmatrix} 1 & \\ & R_{m-1}^H \end{pmatrix} P_m^H A_m P_m \begin{pmatrix} 1 & \\ & R_{m-1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \\ & R_{m-1}^{-1} \end{pmatrix} \left( \lambda \begin{pmatrix} 1 & \\ & A_{m-1} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & \\ & R_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & D_{m-1} \end{pmatrix} = D_m \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Věta: Každá symetrická A má rozložení  $R^T A R = D$  pro ortogonální R.

Průvod: Diagonalizuj  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

$$\lambda_1(A) = \begin{pmatrix} 1-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ -1 & 0 & 3-1 \end{pmatrix} = (-1)^2(3-1) + (1-1) = (1-1)(2-1)^2$$

$$\lambda_1 = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (2, -1, 1)^T$$

$$\lambda_{2,3} = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (1, 0, 1)^T$$

$\Rightarrow$  jenom 2 vlastní v. v.  $\Rightarrow$  nemůže být diagonalizovatelná

Jordanův blok

$\Rightarrow$  diagonalizuje ji co nejvíce to půjde  $\rightarrow J$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & 1 \\ & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

To se doposílá, aby to vypadalo

Každý blok je racionalní na skutečný v. v.

$$A = R^{-1}JR$$

$\rightarrow$  1. nad diagonálou

### Jordanova normální forma

Def: Jordanův blok je matice ve tvaru  $J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$

Věta: Každá čtvercová komplexní matice A je podobná J v Jordanově normální formě  $J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda_k} \end{pmatrix}$

$\rightarrow$  Každý Jordanův blok  $J_{\lambda_i}$  odpovídá vlastnímu číslu  $\lambda_i$  matice A

- # bloků s  $\lambda_i = \text{Geom}(\lambda_i)$
  - $\sum$  velikosti bloků s  $\lambda_i = \text{Arif}(\lambda_i)$
- $\left. \begin{array}{l} J \text{ je určena jednoznačně až} \\ \text{na permutaci bloků} \end{array} \right\}$

$\Leftrightarrow$  Diagonalizovatelná A má Jordanovy bloky  $1 \times 1$

### Zobecněné vlastní vektory

$\rightarrow$  normálně  $AR = RD$ , když  $AR = R J_\lambda$

$x_i =$  ten skutečný  
vlastní vektor

$\Leftrightarrow$  i-ty sloupec  $R = x_i$  splňuje  $(A - \lambda I)^i x_i = 0$

Def:  $Ax_1 = \lambda x_1 \Rightarrow (A - \lambda I)x_1 = 0$

$Ax_2 = x_1 + \lambda x_2 \Rightarrow (A - \lambda I)x_2 = x_1 \Rightarrow (A - \lambda I)^2 x_2 = 0$

...

Def: Zobecněný vlastní vektor matice A je n.r.c.  $\lambda$  je libovolný vektor

$x$  splňující  $(A - \lambda I)^i x = 0$  pro největší  $i \in \mathbb{N}$ .



$\Rightarrow$  lze je řadit do řeřice  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1, 0$ , kde  $(A - \lambda I)x_i = x_{i-1}$ .

Pravidlo: Relyme to mod C, protože je algebraicky uavivene  $\Rightarrow \sum \text{Alg}(\lambda) = n$ .

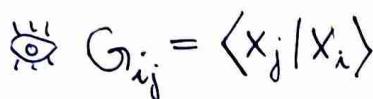
## Gramova matice

→ máme nejaky obecný s.s. a veci nema orthonormální báci  $Z$ , potom:

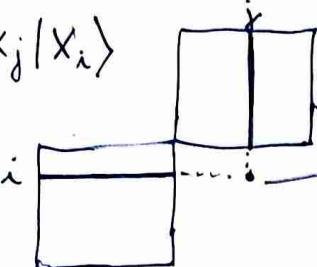
$$\langle u | v \rangle = [v]_Z^H \cdot [u]_Z \quad [u]_Z = _Z[\text{id}]_X [u]_X, \quad [v]_Z = _Z[\text{id}]_X [v]_X$$

$$\langle u | v \rangle = [v]_X^H \underbrace{[id]_Z^H}_{G} [id]_X \cdot [u]_X \quad , \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$G \rightarrow$  Gramova matice :=  $G^T$

  $G_{ij} = \langle x_j | x_i \rangle$

Dle:



protoze  $Z$  je orthonorm.

$$G_{ij} = [x_i]_Z^H [x_j]_Z = \langle x_j | x_i \rangle$$



→ Vlastnosti:

- $\langle x_i | x_j \rangle = \overline{\langle x_j | x_i \rangle} \Rightarrow G_{ji} = \overline{G_{ij}} \Rightarrow G$  je hermitovska' }
- $\langle u | u \rangle > 0$  pro  $u \neq 0 \Rightarrow [u]_X^H G [u]_X > 0$  pro  $u \neq 0$ .

## Positivně definitní matice

Def: Hermitovska' matice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  je pozitivně definitní  $\equiv$

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} : x^H A x > 0.$$

Torem: Pokud  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  jsou pozitivně def.,  $\alpha > 0$ , pak:

- $\alpha A, A + B$  jsou p.d.
- $A$  je regulární  $\because Ax = 0 \Rightarrow x^H A x = x^H 0 = 0 \Rightarrow x = 0$
- $A^{-1}$  je p.d. Sporem:  $x^H A^{-1} x \leq 0 \Rightarrow y^H A y \leq 0$  pro  $y = A^{-1} x$   
 $x^H A^{-1} A A^{-1} x \leq 0 \Rightarrow$  spor s p.d.  $A$

Věta: Pro hermitovskou  $A$  je toto ekvivalentní:

1,  $A$  je pozitivně definitní

2,  $A$  má všechna vlastní čísla reálná

3,  $\exists$  regulární  $U$  t.j.  $A = U^H U$

Dle: 1  $\Rightarrow$  2:  $A$  je hermitovska'  $\Rightarrow$  má reálná vlastní čísla  $\rightarrow$  jsou reálná?

$\rightarrow$  nechť  $x \neq 0$  je v.v. k  $\lambda$ :  $0 < x^H A x = x^H \lambda x = \lambda x^H x = \lambda \underbrace{x^H x}_+ > 0$

2  $\Rightarrow$  3:  $A$  je hermitovska'  $\Rightarrow$   $\exists$  unitární  $R$  a diagonální  $D$  t.j.:

$$A = P^H D R = R^H \overline{D} \overline{R} R = R^H \overline{D}^H \overline{R} R = (\overline{D} R)^H (\overline{R} R) \rightarrow U := \overline{D} R$$

3  $\Rightarrow$  1:  $x^H A x = ?$ , pokud  $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \Rightarrow U x \neq 0$   $\because U$  je regulární

$$\Rightarrow x^H A x = x^H U^H D U x = (U x)^H (U x) = \langle U x | U x \rangle > 0$$



Poznámka:  $x^H A x = \sum_{i,j} x_i a_{ij} x_j$        $x^T A y = \sum_{i,j} x_i a_{ij} y_j$

• Choleského rozklad

Věta: Pro k.p.d. matici  $A$  existuje unikátní horní  $\Delta$  matice  $U$  s pladnou diagonálou l.r.  $A = U^H U$ .  $U$  se nazývá Choleského r.

1. Pro  $i=1, \dots, n$ :

$$2. u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{ki}} \quad \because a_{ii} = u_{ii}^2 + \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{ki}$$

3. Pokud  $u_{ii} \notin \mathbb{R}^+$ :  $A$  nemá p.d.  $\Rightarrow$  STOP

4. Pro  $j=i+1, \dots, n$ :

$$5. u_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj}) \quad \because a_{ij} = u_{ij} u_{ii} + \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj}$$

Příklad:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -1 & 1 & 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \textcircled{1} & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 2 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 2 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & -2 & \textcircled{2} & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc|cc|cc} U & \tilde{U} & & u & & & \\ \hline & 0 & & & & & \\ \hline & & 0 & & & & \\ \hline & & & \tilde{A} & a & & \\ \hline & u^H & \textcircled{*} & a^H & \alpha & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

$$\tilde{A} = \tilde{U}^H \tilde{U}$$

$$a = \tilde{U}^H u$$

$$a^H = u^H \tilde{U}$$

Správnost: Uvažme, že pokud selže, tak  $A$  nemá p.d.

$\Rightarrow$  selhal  $\Rightarrow \alpha \leq u^H u$ , uvažme  $x^H A x \leq 0$  pro

$$x^T = [\tilde{x}^T \ 1 \ 0 \dots 0] \text{ kde } \tilde{x} = -\tilde{U}^{-1} u$$

$$\Rightarrow x^H A x = \tilde{x}^H \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{x}^H a + a^H \tilde{x} + \alpha =$$

$$= \tilde{x}^H (\tilde{U}^H \tilde{U}) \tilde{x} + \tilde{x}^H (\tilde{U}^H u) + (u^H \tilde{U}) \tilde{x} + \alpha =$$

$$= (-\tilde{U}^H u)^H (\tilde{U}^H \tilde{U}) (-\tilde{U}^H u) + (-\tilde{U}^{-1} u)^H (\tilde{U}^H u) + (u^H \tilde{U}) (-\tilde{U}^H u) + \alpha =$$

$$= u^H u - u^H u - u^H u + \alpha = \alpha - u^H u \leq 0$$

$$\begin{array}{c|cc|cc|cc} A & \tilde{A} & a & & & & \\ \hline & a^H & \alpha & & & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline & \tilde{x}^H & 1 & 0 & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

- $\rightarrow \tilde{A} \tilde{x} + a$
- $\rightarrow a^H \tilde{x} + \alpha$
- $\rightarrow x^H A x$

■

## • Returenské podmínka

Veta: Bloková matice  $A = \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha & a^H \\ \hline a & \tilde{A} \\ \hline \end{array}$  je p.d.  $\Leftrightarrow \alpha > 0$  &  $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} aa^H$  je p.d.

Gaussova průměr sl.  
 pomocí průměr i. dárá:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \alpha & a^H \\ \hline a & \tilde{A} \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha & a^H \\ \hline 0 & \tilde{A} - \frac{1}{\alpha} aa^H \\ \hline \end{array}$$

$$a_i - \frac{1}{\alpha} a_i \cdot a \\ - \frac{1}{\alpha} a_i \cdot a^H$$

Důkaz: Gaussova odstřela obecný  $\Rightarrow$  pokud je na řadci  $\oplus$  diagonála  $\Rightarrow$  p.d.

Dl:  $\Leftrightarrow X \in \mathbb{C}^n \setminus 0$  různé jaro  $X^T = \begin{array}{|c|c|} \hline x_1 & \tilde{X}^T \\ \hline \end{array}$ ,  $x_1 \in \mathbb{C}$ ,  $\tilde{X}^T \in \mathbb{C}^{n-1}$ .

$$x^H A x = \alpha x_1 \bar{x}_1 + \bar{x}_1 a^H \tilde{X} + x_1 \tilde{X}^H a + \tilde{X}^H \tilde{A} \tilde{X} =$$

$$\rightarrow \tilde{X}^H \tilde{A} \tilde{X} = \underbrace{\tilde{X}^H (\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} aa^H) \tilde{X}}_m + \frac{1}{\alpha} \tilde{X}^H aa^H \tilde{X}$$

$$= m + \alpha x_1 \bar{x}_1 + x_1 \tilde{X}^H a + \bar{x}_1 a^H \tilde{X} + \frac{1}{\alpha} \tilde{X}^H aa^H \tilde{X} =$$

$$= m + \underbrace{(\sqrt{\alpha} x_1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} a^H \tilde{X})}_{\text{pro } \tilde{X} \neq 0} \underbrace{(\sqrt{\alpha} \bar{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tilde{X}^H a)}_{r^H = \bar{r} \Rightarrow r \bar{r} > 0 \text{ pro } r \neq 0}$$

$\downarrow$   
 $\alpha > 0$        $r$        $r^H = \bar{r} \Rightarrow r \bar{r} > 0$  pro  $r \neq 0$   
 $\Rightarrow$  alespoň jeden je rye dobrý  $\Rightarrow x^H A x > 0$ .

$\Rightarrow$  pro  $\tilde{X} \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus 0$  vezmeme  $X^T = \begin{array}{|c|c|} \hline x_1 & \tilde{X}^T \\ \hline \end{array}$  a najdeme  $x_1$  aby:

$$0 < x^H A x = \tilde{X}^H (\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} aa^H) \tilde{X} \rightarrow \tilde{A} - \frac{1}{\alpha} aa^H \text{ je p.d. } \checkmark$$

potřebuju, aby  $x^H A x = m \Rightarrow r = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{\alpha} a^H \tilde{X}$

$\rightarrow$  taky chceme  $\alpha > 0$ : pro  $x_1 = 1$ ,  $\tilde{X} = 0$ :  $x^H A x = 0 + \alpha > 0$   $\blacksquare$

## • Sylvestrova podmínka

Veta: Matice  $A$  je p.d.  $\Leftrightarrow \forall i: \det(A_i) > 0$ , kde  $A_i$  sestává z prvních  $i$  řádků a sloupců  $A$ .

Dl: Použijeme Gaussova  $A \rightsquigarrow A'$  na tento zádaj je  $A$  p.d.

Nechť  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  jsou prvky na diagonále výsledné horní  $\Delta$  matice  $A'$ .

$\rightarrow$  řádky jsme eliminovali odstřela dolu

$$\Rightarrow \det A_i = \det A'_i = \prod_{j \leq i} \alpha_j = \alpha_i \cdot \prod_{j < i} \alpha_j = \alpha_i \det A_{i-1}$$

$A$  je p.d.  $\Leftrightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_n > 0 \Leftrightarrow \det A_1, \dots, \det A_n > 0$   $\blacksquare$

• Buklad:

$$\begin{array}{c} A \text{ je f.d.} \Leftrightarrow \alpha A \text{ je f.d. } \alpha > 0 \\ \text{je f.d.} \\ \uparrow \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & 5/2 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 5 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8/3 & 14/3 & 14/3 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cc|cc} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 14 & 14 & 14 \\ 0 & 6 & 6 & 6 \end{array} \right|$$

• Reverendni podminka

Rukac #2: Gausova eliminaci 1. sloupce A rapsíme jako součin:

$$\left| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0^H & \alpha & a^H \\ -\frac{1}{\alpha}a & I & a & \tilde{A} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc|cc} \alpha & a^H \\ a & \tilde{A} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc|cc} \alpha & a^H \\ 0 & \tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^H \end{array} \right|$$

$\hookrightarrow \alpha \cdot x + a = 0$

$$\underbrace{E^H}_{\text{f.d.}} \Rightarrow E^H A E = \left| \begin{array}{cc|cc} \alpha & 0^H \\ 0 & \tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^H \end{array} \right|$$

$\hookrightarrow \text{f.d.} \Leftrightarrow \alpha \text{ i } \boxed{\tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^H} \text{ jsou f.d.}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow E^H A E = (U E)^H (U E) \text{ je f.d.} \\ &\Rightarrow \alpha > 0 \text{ a } \tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^H \text{ je f.d.} \\ &\Leftarrow E^H A E = U^H U \\ &\Rightarrow A = (E^H)^{-1} U^H U E^{-1} = \\ &\quad = (U E^{-1})^H (U E^{-1}) \text{ je f.d.} \blacksquare \end{aligned}$$

## Bilineární a kvadratické formy

Def: Nechť  $V$  je v. p. nad  $\mathbb{K}$ . Zobrazem  $V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  je bilineární forma na  $V \equiv$

- $\forall u, v \in V, \forall a \in \mathbb{K}: f(au, v) = f(u, av) = a f(u, v)$
- $\forall u, v, w \in V: f(u+v, w) = f(u, w) + f(v, w)$
- $\forall u, v, w \in V: f(u, v+w) = f(u, v) + f(u, w)$

Def: Bilineární forma  $f$  je symetrická  $\equiv \forall u, v \in V: f(u, v) = f(v, u)$ .

Def: Zobrazem  $g: V \rightarrow \mathbb{K}$  je kvadratická forma  $\equiv$

$\exists b.$  forma  $f: \forall u \in V: g(u) = f(u, u)$ .

} něco jalo  $\|u\|^2$

⊗ slární součiny nad  $\mathbb{R}$  jsou bilineární formy

Def: Nechť  $V$  je v. p. nad  $\mathbb{K}$  a bázi  $X = (x_1, \dots, x_n)$ .

- Matice b. formy  $f$  vzhledem k bázi  $X$  je  $B_f$ ,  $b_{ij} = f(x_i, x_j)$ .  $\rightarrow$  v tělech
- Matice k. formy  $g$  je matice symetrické b. formy  $f$  odpovídající  $g$ .  $\begin{cases} \text{char } 2 \\ \text{nemá } \exists \end{cases}$

$\rightarrow$  jedné k. formě odpovídá správa bilineárních  $\Rightarrow$  char každé matice jednoznačnou

Bezklady  $\swarrow$  nad  $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{aligned} & \bullet f(u, v) = u_1 v_1 + 2u_1 v_2 + 4u_2 v_1 + 3u_2 v_2 \quad B_K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \text{najdi } g \\ & \Rightarrow g(u) = f(u, u) = u_1^2 + u_1 u_2 + 3u_2^2 \quad \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\ & \bullet g(u) = 2u_1^2 + 2u_1 u_2 - u_2^2 - 2u_2 u_4 - 4u_4^2 \quad \rightarrow \text{najdi } f \quad \leftarrow \text{nad } \mathbb{R} \\ & f(u, v) = 2u_1 v_1 + (u_1 v_2 + v_1 u_2) - u_2 v_2 - (u_2 v_4 + v_2 u_4) - 4u_4 v_4 \\ & \Rightarrow B_K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

⊗ Když máme matici  $B$  b. formy odpovídající k. formě  $g$ , která nemá symetriku, pak ji můžeme symetrizovat takto:

$$B' = \frac{1}{2}(B + B^T) \quad \rightarrow B' \text{ je symetrická a pokud je to matice formy } g \\ \because x^T B x = g(x) = x^T B' x$$

$$x^T B' x = x^T \frac{1}{2}(B + B^T) x = \frac{1}{2}(x^T B x + x^T B^T x) = \frac{1}{2}(x^T B x + x^T B x) = x^T B x$$

$\swarrow$  slární  
 $(x^T B^T x)^T$

$$\textcircled{1}: f(u, v) = [u]_x^T B_x [v]_x, \quad g(u) = [u]_x^T B_x [u]_x.$$

$$\text{Def: } u = \sum_i a_i x_i, \quad v = \sum_i c_i x_i$$

$$f(u, v) = f\left(\sum_i a_i x_i, \sum_j c_j x_j\right) = \sum_i \sum_j a_i c_j f(x_i, x_j) = \sum_{i,j} a_i b_{ij} c_j = [u]_x^T B [v]_x \blacksquare$$

\textcircled{2}: Nechť  $B_x$  je matice b/t formy vzhledem k bázi  $X$ .

Příslušn.  $B_y = {}_x[\text{id}]_Y^T B_x {}_x[\text{id}]_Y$  je matice stejné formy vzhledem k  $Y$ .

$$\text{Def: } [u]_x = {}_x[\text{id}]_Y [u]_Y, \quad [v]_x = {}_x[\text{id}]_Y [v]_Y$$

$$f(u, v) = [u]_x^T B_x [v]_x = [u]_Y^T \underbrace{\left({}_x[\text{id}]_Y^T B_x {}_x[\text{id}]_Y\right)}_{B_Y} [v]_Y \blacksquare$$

\text{Def: } \underline{\text{Analytické vyjádření}} b. formy nad  $K^n$  s maticí  $B$  je polynom

$$f(u, v) = \sum_{i,j=1}^m b_{ij} u_i v_j \quad \leftarrow ! \text{ Ažle je učci kanonické bázi}$$

### • Diagonalizace form

právě jen pro symetrickou

Věta: Pokud je  $g$  kvadratická forma na v.f.  $V$  konečné dimenze  $n$  nad  $\mathbb{K}$ , char \neq 2  
pak má forma  $g$  diagonální matici  $B$  vzhledem k vhodné bázi  $X$ .

Def: Takovou bázi nazíváme párovou bázi.  $B_P$  je diagonální diagonální

Ekvivalentně: Pro symetrickou  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  s  $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$   $\exists$  regulérní  $R$ :  $R^T A R = D$ .

Def: indukce podle  $n$ .  $\rightarrow$  gaussova eliminace 1. r. a.s.  $\Rightarrow$  i.f.

$$A_m = A = \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha & a^T \\ \hline a & \tilde{A} \\ \hline \end{array} \quad \textcircled{1} \alpha \neq 0: \quad P_m := \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -\frac{1}{\alpha} a^T \\ \hline 0 & I \\ \hline \end{array}$$

$$P_m^T A_m P_m = \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha & 0^T \\ \hline 0 & \tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^T \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha & 0^T \\ \hline 0 & A_{m-1} \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \text{el. úpravy na řádky a sloupce zachovávají symetrii} \Rightarrow A_{m-1} \text{ je sym.}$$

$\Rightarrow$  podle i.f.  $\exists R_{m-1}, D_{m-1}$  pro  $A_{m-1} \rightarrow$  chci zjistit  $R_{m-1}^T A_{m-1} R_{m-1} = D_{m-1}$

$$R_m := P_m \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{m-1} \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow R_m^T A_m R_m = \tilde{R}_{m-1}^T (P_m^T A_m P_m) \tilde{R}_{m-1} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0^T \\ \hline 0 & D_{m-1} \\ \hline \end{array} = D_m$$

\textcircled{2}  $\alpha = 0, a \neq 0$ :  $\exists i: a_{ii} \neq 0 \Rightarrow$  první i-ky řádek a sloupec s prvním

$\Rightarrow$  místo  $A$  budu diagonalizovat  $A' := E^T A E$ , kde  $e_i = 2a_{ii} \neq 0 \rightarrow$  \textcircled{1}

$$\textcircled{3} \alpha = 0, a = 0: \text{ nezna A}_{m-1} = \tilde{A} \text{ a } R_m = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{m-1} \\ \hline \end{array} \blacksquare$$

## • Diagonálníce form

→ Gaussova, ale všechny operace prováděme na řádky i na sloupce.

⊗:  $A$  symetrická  $\Rightarrow E^TAE$  také symetrická

signatura:  
 $(2, 1, 0)$   
↑

Důležité: Horní  $\Delta$  RTAR je i diagonální.

$$\text{Príklad: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \quad E_1^T A \quad E_1^T A E_1 \quad E_1^T E_2^T A E_1 E_2$

→ můžeme si stranou počít řádkové úpravy:  $(A|I_m) \sim \sim (D|R^T)$

⇒ rektory polární báze  $\times$  jenom sloupce  $R \Rightarrow$  řádky  $R^T$  jenom řádkové

$$\because D_x = \sqrt{\text{id}}_x^T B \sqrt{\text{id}}_x \Rightarrow \sqrt{\text{id}}_x^T B \sqrt{\text{id}}_x = R$$

$$D = R^T B R$$

## • Sylvesterův zákon setrvání

Věta: Každá kvadratická forma na konečně generovaném reálném v.p. má vzhledem k vhodné bázi diagonální matici pouze s 1, -1, a 0.

Všechny takové diagonální matice odpovídající této formě mají stejný #1 a #-1.

Def: Nechť reálná kvadratická forma  $g$  má diagonální matici  $B$  obsahující 1, -1 a 0. Signatura formy  $g$  je  $(\#1, \#-1, \#0) \sim B$ .

### Dоказat: ① existence takové matice

Nechť  $B$  je matice formy něčí nejdříve bázi  $Y$ .  $\text{Char}(R) \neq 2 \rightarrow$  jede diagonální

$$\Rightarrow B = R^T D R, \quad R \text{ regulární} \quad \left\{ \begin{array}{l} = 0, \quad d'_{ii} = 0, \quad s_{ii} = 1 \\ > 0, \quad d'_{ii} = 1, \quad s_{ii} = \sqrt{d_{ii}} \\ < 0, \quad d'_{ii} = -1, \quad s_{ii} = \sqrt{-d_{ii}} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow B = (SR)^T D^1 (SR), \quad SR \text{ reg.} \quad \left\{ \begin{array}{l} > 0, \quad d'_{ii} = 1, \quad s_{ii} = \sqrt{d_{ii}} \\ < 0, \quad d'_{ii} = -1, \quad s_{ii} = \sqrt{-d_{ii}} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow B = (SR)^T D^1 (SR), \quad SR \text{ reg.}$$

$$\Rightarrow \text{majdet } \times 1. \text{ z. } \sqrt{\text{id}}_x^T B \sqrt{\text{id}}_x = D^1 \quad \blacksquare$$

### ② jednoznačnost signatury

→ pro ortogonální  $R$  máme  $R^T = R^{-1} \Rightarrow B = R^{-1} D R \Rightarrow$

⇒  $D$  obsahuje reálná čísla  $\Rightarrow$  signatura je jednoznačná pro ortogonální  $R$  – co jinak?

→ Nechť  $X = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $Y = (y_1, \dots, y_m)$  jsou dvě báze s.č. odpovídající  
matice  $B$  a  $B'$  formy g jsou diagonální s 1, -1 a 0 nezávislými koh.,  
že nejdříve jsou 1, potom -1 a nakonec 0.

→ protože součin o regulárními maticemi nemívá rank a  $B = \begin{bmatrix} \text{id} \end{bmatrix}_X^T B' \begin{bmatrix} \text{id} \end{bmatrix}_X$   
 $\Rightarrow \#\{0\} \times B = n - \text{rank}(B) = n - \text{rank}(B') = \#\{0\} \times B'$ .

→  $r := \#\{1\} \times B$ ,  $s := \#\{1\} \times B'$ . → sporem určíme  $r = s$

→ pokud  $r > s$ :  $\begin{array}{l} \text{span}(x_1, \dots, x_r) \\ \text{span}(y_{s+1}, \dots, y_m) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{součet dimenší} = r + m - s > n \\ \Rightarrow \text{mají nevirovální průnik} \end{array} \right.$

$\Rightarrow$  existuje  $w \neq 0$  s takto průnikem.

$$\begin{array}{l} [w]_X = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)^T \\ [w]_Y = (0, \dots, 0, y_{s+1}, \dots, y_m)^T \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{co se stane s } g(w) ? \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} g(w) = [w]_X^T B [w]_X = x_1^2 + \dots + x_r^2 > 0 \quad \because w \neq 0 \\ g(w) = [w]_Y^T B' [w]_Y = -y_{s+1}^2 - \dots - y_{\text{rank}(B')}^2 \leq 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right.$$

→ podobně pro  $r < s \Rightarrow$  závěr  $s = r$  

💡 Pokud má forma reálnou pozitivní def. matici, tak ji lze diagonalizovat na  $I_m$

$$\because B = V^H V = V^T V = V^T I_m V$$

## • Problem prímerov svírajúcich stejné uhol

Problem: Kolik nejviac miere byt prímer v  $\mathbb{R}^d$  t. k. všetky svírajú stejný uhol?

$\rightarrow \mathbb{R}^2$ : 3 prímer  $\varphi = 60^\circ$

$\rightarrow \mathbb{R}^3$ : 6 prímer

Veta: V  $\mathbb{R}^d$  miere najviac  $\binom{d+1}{2}$  prímer svírajúcich stejný uhol.

Dоказ: Predpokladajme, že  $\exists n$  takových prímerov. Z rovnice rektory jednotlivé dĺžky

$$v_1, \dots, v_m \Rightarrow \langle v_i | v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{pre } i=j \\ \cos \varphi & \text{jinak} \end{cases}$$

Zobrazenie  $v_i \mapsto v_i v_i^T$  je prosté  $\Rightarrow$  ukáčeme, že matice

$v_1 v_1^T, \dots, v_m v_m^T \in \mathbb{R}^{d \times d}$  sú lineárne nezávislé

$\Rightarrow$  pre  $n \leq \binom{d+1}{2}$   $\because$  dimenze prostoru symetrických matic  $\mathbb{R}^{d \times d}$  je  $\binom{d+1}{2}$

$\rightarrow$  ukáčeme, že  $\sum_i a_i v_i v_i^T = O_n$  má pouze triviálny riešenie

$$\begin{aligned} \forall j \in [n]: 0 &= v_j^T O_n v_j = v_j^T \left( \sum_i a_i v_i v_i^T \right) v_j = \\ &= \sum_i a_i (v_j^T v_i) (v_i^T v_j) = \sum_i a_i \langle v_i | v_j \rangle^2 = a_j + \cos^2 \varphi \sum_{i \neq j} a_i \end{aligned}$$

$\rightarrow$  Ako podmienky zapišeme do matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos^2 \varphi & \cdots & \cos^2 \varphi \\ \cos^2 \varphi & 1 & \ddots & : \\ \vdots & & \ddots & 1 & \cos^2 \varphi \\ \cos^2 \varphi & \cdots & \cos^2 \varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$  Matice súbor sourskary je regulárna  $\Rightarrow a_1 = \dots = a_m = 0$ .

$\Rightarrow$  Takže  $v_1 v_1^T, \dots, v_m v_m^T$  sú l.m. a  $n \leq \binom{d+1}{2}$

