

算法设计与分析第六次作业 - NP

201628013229058 洪鑫

1

1. Integer Programming

Given an integer $m \times n$ matrix A and an integer m -vector b , the Integer programming problem asks whether there is an integer n -vector x such that $Ax \geq b$. Prove that Integer-programming is in NP-complete.

证明思路

可满足问题（SAT）可以在多项式时间内规约为整数规划问题。

详细证明

首先，整数规划问题是NP问题。因为对于任意一个实例的解，只需要计算 Ax 的值并与 b 进行比较即可验证解得正确性，计算与比较可以再多项式时间内完成。

然后证明对于任意的NP问题，都可以在多项式时间内规约为一个整数规划问题。因为可满足问题是NP-C类问题，这里我们只需要证明，可满足问题（SAT）可以在多项式时间内规约为整数规划问题。

可满足问题规约到整数规划问题的过程：

1. 将“真”与“1”相对应，“假”与“0”相对应，所有变量满足为 $[0,1]$ 的整数；
2. 将“或”运算用“加法”代替；
3. 将 \bar{x} 用 $1 - x$ 代替；
4. 整个合区范式的每个子句都为真转换为：所有子句对应的和大于等于1；
5. 整理不等式得到 A 和 b 。

比如，对于可满足问题：

$$(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3)$$

可以转换为整数规划问题：

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1 + 1 - x_2 & \geq 1 \\ 1 - x_1 + 1 - x_3 & \geq 1 \\ x_2 + 1 - x_3 & \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3 & \leq 1 \end{array} \right.$$

调整下形式：

$$\left\{ \begin{array}{lll} x_1 & -x_2 & \geq 0 \\ -x_1 & & -x_3 \geq -1 \\ & x_2 & -x_3 \geq 0 \\ x_1 & & \geq 0 \\ & x_2 & \geq 0 \\ & & x_3 \geq 0 \\ -x_1 & & \geq -1 \\ & -x_2 & \geq -1 \\ & & -x_3 \geq -1 \end{array} \right.$$

可以写成 $Ax \geq b$ 的形式，其中：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

下面说明，可满足问题存在一个解，当且仅当整数规划问题存在一个解。

如果一个可满足问题存在解，那么必然有一个真假赋值，使得所有的子式都为真，那么对应的整数规划问题也就存在相应的0, 1赋值使得所有的不等式成立。

同样道理，相应的整数规划问题存在一个解，那么必然首先满足0, 1约束，然后对应子式的和至少为1，相应的0, 1赋值转换为真假赋值后，使得可满足问题中所有的子式为真。

综上所述，整数规划问题是NP问题，可满足问题（SAT）可以在多项式时间内转换为整数规划问题，因为已知可满足问题是NP-完全的，所以整数规划也同样是NP-完全的。

2. Half-3SAT

3

In the Half-3SAT problem, we are given a 3SAT formula ϕ with n variables and m clauses, where m is even. We wish to determine whether there exists an assignment to the variables of ϕ such that exactly half the clauses evaluate to false and exactly half the clauses evaluate to true. Prove that

证明思路

3SAT问题可以在多项式时间内规约为一个Half-3SAT问题。

详细证明

显然，半-3SAT问题是NP的。因为通过带入解得赋值后统计子句真假的个数，即可判断解是否满足条件，而这一过程是能在多项式时间内完成的。

3SAT问题规约到半-3SAT的过程：

（对于任意一个3SAT问题，假设其表达式为 ϕ ，子句的个数为 n ，我们用 ϕ' 表示用于求解半-3SAT问题的表达式。）

1. 将 ϕ 中所有的子句都添加到 ϕ' 中；
2. ϕ' 中添加 n 个形如 $x \wedge \neg x \wedge y$ 的子句，这 n 个子句完全一致；
3. ϕ' 中添加 $2n$ 个形如 $p \wedge q \wedge r$ 的子句，这 $2n$ 个子句完全一致，且 p, q, r 和 ϕ 中的变量均不相同。

下面说明3SAT问题有解当且仅当半-3SAT问题有解：

首先， ϕ' 中含有 $4n$ 个子句。我们注意到，第2步添加的 n 个子句总为真，第3步添加的 $2n$ 个子句要么全为真，要么全为假。

如果3SAT问题有解，那么根据第1步和第2步，显然 ϕ' 中至少有 $2n$ 个子句为真。此时，给 p, q, r 都赋值为假，则剩下的 $2n$ 个子句都为假。显然，对于 ϕ' 求解半-SAT问题有解。

如果对应的半-3SAT问题有解，那么 ϕ' 有 $2n$ 个子句为真，因为第2步已经有 n 个子句为真，所以第3步添加的 $2n$ 子句只能为假，第1步添加的 n 个子句全为真。所以对 ϕ 求解3-SAT问题有解。

综上所述，半-3SAT问题是NP问题，3SAT问题可以在多项式时间内规约为半-3SAT问题，因为已知3SAT问题是NP-完全的，所以半-3SAT也同样是NP-完全的。