

Devoir 1 : Équations différentielles ordinaires

PHQ404

8 février 2024

1 Objectif

L'objectif de ce devoir est d'implanter plusieurs méthodes de solution d'équations différentielles en Python et de les appliquer au problème de Kepler, soit le mouvement d'un point soumis à une force attractive en inverse du carré de la distance.

2 Comment présenter et remettre votre TP

Vous devez cloner le répertoire github dans l'organisation du cours au lien suivant : <https://classroom.github.com/a/4PhLRaKv>. Dans ce répertoire se trouvera votre code python, vos tests unitaires ainsi que votre rapport décrivant les méthodes utilisés et l'analyse de vos résultats. La structure des fichiers ne doit pas être modifiée, mais vous pouvez ajouter des fichiers si vous le désirez. Voici la structure de fichiers que votre répertoire devra garder :

```
Root
  → src
    ↪ fichier0.py
    ↪ fichier1.py
    ↪ ...
  → tests
    ↪ test_fichier0.py
    ↪ test_fichier1.py
    ↪ ...
↪ .gitignore
↪ requirements.txt
↪ README.md
↪ rapport_devoiri-vos_noms.pdf
```

Le fichier `requirements.txt` doit contenir les dépendances de votre projet. Le fichier `README.md` doit contenir les instructions pour installer et utiliser votre projet ainsi qu'une brève description du devoir et des méthodes utilisés dans le code. Le fichier `rapport_devoiri-vos_noms.pdf` doit contenir votre rapport en format pdf. L'utilisation de \LaTeX est fortement recommandée pour la rédaction de votre rapport. Dans le dossier `src` se trouvera votre code python et dans le dossier `tests` se trouvera vos tests unitaires.

La remise et la correction automatique du code se fera à chaque **push** sur le répertoire github. Notez que seul le dernier **push** sera considéré pour la correction.

3 Énoncé

3.1 Implémentation

Dans le fichier `src/solvers.py`, vous devez implémenter les fonctions suivantes pour résoudre une équation différentielle ordinaire tout en conservant le même nom que ceux affichés ici-bas :

1. `euler` pour la méthode d'Euler,
2. `pred_corr` pour la méthode du prédicteur-correcteur,
3. `rk2` pour la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2,
4. `rk4` pour la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4,
5. `scipy_int` pour la bibliothèque `scipy` (nous vous laissons regarder la documentation pour trouver une telle fonction).

Les signatures des fonctions doivent respecter la suivante :

```
def solver_func(
    func: Callable[
        [Union[numbers.Number, np.ndarray], numbers.Number, Any], float
    ],
    y0: Union[numbers.Number, np.ndarray],
    time_steps: Union[numbers.Number, np.ndarray],
    *args,
    **kwargs
) -> np.ndarray
```

Dans le fichier `src/systems.py`, vous devez implémenter les fonctions suivantes pour décrire un système d'équations différentielles ordinaires :

1. `kepler` pour le problème de Kepler.

Les signatures des fonctions doivent respecter la suivante :

```
def system_func(
    y: Union[numbers.Number, np.ndarray],
    t: numbers.Number,
) -> np.ndarray
```

Veuillez lire la documentation de chacune des méthodes pour comprendre les arguments.

Note : Toutes les fonctions qui doivent être implémentées sont déjà définies dans les fichiers et retournent des `NotImplementedError`.

3.2 Vérification

Il est important de vérifier vos implémentations. En effet, vous devez vous assurer que vos méthodes fonctionnent correctement et pour ce faire, vous devez rouler et implémenter des tests unitaires qui testent chacune de vos classes et fonctions. De plus, vous devriez tester si les résultats obtenus sont logiques. Une façon de le faire, est d'appliquer vos méthodes à un système que vous pouvez résoudre analytiquement. Par exemple, vous pouvez vérifier que vos fonctions retournent un résultat raisonnable pour un oscillateur harmonique en 2 dimensions, un projectile ou tout autre système simple. Il serait aussi intéressant de retrouver ce type de vérification dans votre rapport. Il est fortement recommandé d'ajouter des tests unitaires dans le dossier `tests`, mais les tests déjà implémentés ne doivent pas être modifiés.

3.3 Application au problème de Kepler

Supposez une particule de masse unité dans un espace en 2 dimensions soumise à une force attractive

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{|\mathbf{r}|^2}. \quad (1)$$

Utilisez les quatre méthodes que vous avez implémentées pour résoudre ce système. Ensuite, pour chacune des méthodes, tracer un graphique avec la position x sur l'axe horizontal et la position z sur l'axe vertical. Vous devez utiliser les conditions initiales suivantes :

$$\mathbf{r}_0 = (1.0, 0.0), \quad \dot{\mathbf{r}}_0 = (0.0, 0.5). \quad (2)$$

De plus, le domaine d'intégration doit couvrir les temps de 0 à 10 avec environ 2000 pas de temps.

4 Critères d'évaluation

70 points Pour le résultat de vos tests unitaires.

30 points Pour la qualité du rapport.