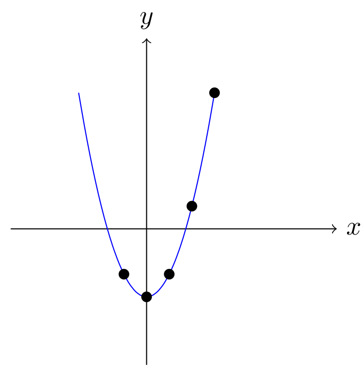
Funktionsbegreppet

Vad är en funktion?

Uttryck: $x^2 - 3$

Ett sätt att avbilda tal

x	$x^2 - 3$
0	-3
1	-2
2	1
-1	-2
3	6



För $f(x) = x^2 - 3$:

Vilka tal kan vi skicka in?

D_f	$\rightarrow$	Bilder / värden
0	$\rightarrow$	-3
1	$\rightarrow$	-2
2	$\rightarrow$	1
-1	$\rightarrow$	-2
3	$\rightarrow$	6

Definerad av $x \in \mathbb{R}$

Definitionsmängden $D_f = \mathbb{R}$

Värdemängden $V_f = \mathbb{R}$

Exempel

Funktion 1

$f(x) = x^2 - 3$

$D_f = \mathbb{R}$

$V_f = \mathbb{R}$

Då exempelvis $f(x) = -4$ aldrig inträffar vinns det värden i V_f som är onödiga. Dock får värdemängden innehålla fler tal än nödvändigt. Mängden av alla värden som behövs, varken fler eller färre, kallas för bildmängd.

Vi tar bort de onödiga talen ur värdemängden och jämför funktionerna.

Funktion 2

f(x)=x$^2 - 3$

D$_f = \mathbb{R}$

V$_f = \{x \geq -3\}$

Notera hur funktionerna, även om de är mycket lika, inte är samma funktion då de inte har samma definition.

Den tidigarenämnda bildmängden kan beskrivas som $f(D_f) = \{x \geq -3\} \subseteq V_f$. Om $f(D_f) = V_f$ kallas funktionen för surjektiv.

Definition

En funktion bestäms av en regel f, två mängder D_f och V_f så att varje $x \in D_f$ ordnas till <u>ett</u> värde $f(x) \in V_f$. Det kallas en trippel; f, D_f och V_f.

Oftast så används enbart regeln. Då antar man att D_f är så stor som möjligt och att V_f är så liten som möjligt (kan vara svår att bestämma). I denna kurs antar vi att $D_f \subseteq \mathbb{R}$ och $V_f \subseteq \mathbb{R}$.

Vad är en funktion?

Exempel

$$f(x) = x^2 - 3$$

D$_f = \mathbb{R}$

V$_f = \{x \geq 0\}$

Vad är $f(0)$?

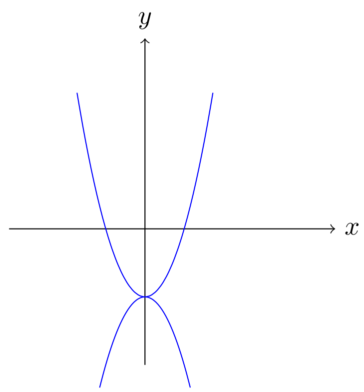
$f(0) = 0^2 - 3 = -3 \notin V_f$

Vi vet alltså inte vad som är en bild av $x = 0$, V_f är för litet.

Exempel

$$f(x) = \pm x^2 - 3$$

x=1 $\Rightarrow f(1) = \pm 1^2 - 3 = \begin{cases} 1 - 3 = -2 \\ -1 - 3 = -4 \end{cases}$



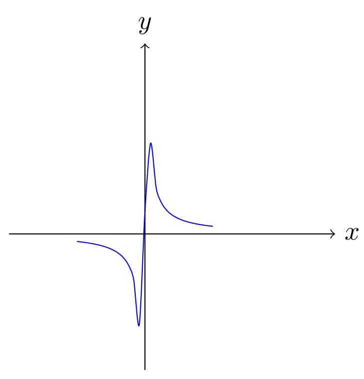
Vi har fler än ett värde till samma x. Från definitionen av en funktion hade vi att varje $x \in D_f$ ordnas till <u>ett</u> värde $f(x) \in V_f$. Då detta inte gäller för $f(x) = \pm x^2 - 3$ är det ingen regelrätt funktion, vi vet inte vilket värde som gäller.

Exempel

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

D$_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$

V$_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$



Notera att V_f även kan bestämmas till $\mathbb{R}$ då V_f får vara större än nödvändigt. Men den skulle då inte bli surjektiv.

Mer om funktioner

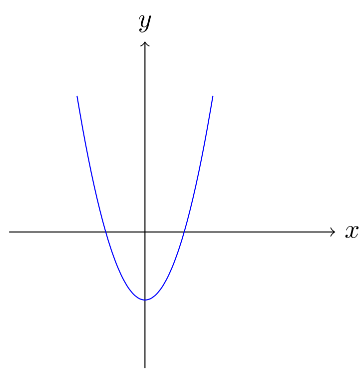
"För vissa funktioner tas varje värde i olika punkter om $x \neq y$ så att $f(x) \neq f(y)$. Olika värden på x ger alltid olika värden på f. En sådan funktion är injektiv."

Vilket innebär att varje f inträffar en gång, varje värder f är unikt.

Geometriskt innebär det att en vågrät linje $y = x$ skär $f(x)$ högst en gång.

Exempel

$f(x) = x^2 - 3$



Exempel: $f(1) = -2 = f(-1)$

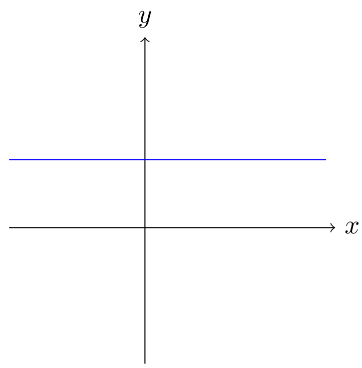
Funktionen är inte injektiv.

Exempel

$$f(x) = 7$$

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$

$\mathrm{V}_f = \{7\}$



Funktionen är inte injektiv då varje värde f är detsamma. Däremot är den surjektiv då värdemängden är så liten som möjligt.

Inledande exempel invertering

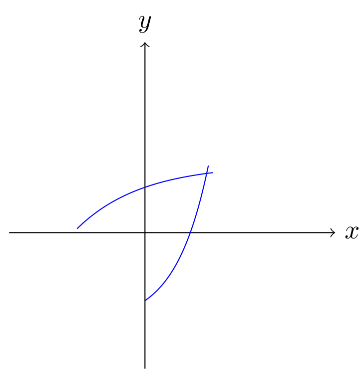
Vilka funktioner definerar en funktion som går baklänges?

En sådan funktion tecknas f^{-1} och kallas för inversen. Den har samma krav som de övriga funktionerna med hänseende på definitionen / reglerna.

För att en funktion ska vara inverterbar måste den vara surjektiv och injektiv (detta kallas sammansatt för bijektiv).

x	f
0	-3
1	-2
2	1
3	6

x	f^{-1}
-3	0
-2	1
1	2
6	3



Denna funktionen är inverterbar då $x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{f^{-1}} x$

För inverterbara funktioner gäller omvända förhållanden mellan definitionsmängden och värdemängden. Utöver det så blir funktions värde av dess invers alltid x.

$D_{f^{-1}} = V_f$

$V_{f^{-1}} = D_f$

$f(f^{-1}(x)) = x$

Själva grafen för $f^{-1}(x)$ får vi genom att spegla $f(x)$ i linjen $y = x$.

1 Sammanfattning invers

Om $f(x)$ är en funktion $D_f \xrightarrow{f} V_f$ (inverterbar):

Så är den surjektiv om alla bilder är värdemängden. $f(D_f) = V_f$. D.v.s. det finns inga onödiga värden i V_f.

Så är den injektiv om $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ för alla x_1, $x_2 \in D_f$.

Om f är injektiv och surjektiv så är den bijektiv och inverterbar. D.v.s det finns en invers $f^{-1}(x)$. Där $D_{f^{-1}} = V_f$ och $V_{f^{-1}} = D_f$. f^{-1} avbildar tillbaka.

Grafiskt är den inverterade funktionen en spegling i linjen $y = x$.

2 Exempel: Sammansättning

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

g(x)=x^2

f(g(x))=$\sqrt{x^2+1}$

g(f(x))=$(\sqrt{x+1})^2 = x + 1$

När man sätter samman funktioner på detta viset kallas det för sammansättning. Notera att de inte alltid resulterar i samma funktion.

Sammansättningen kan skrivas $f \circ g(x)$ och uttallas ”f boll g”.

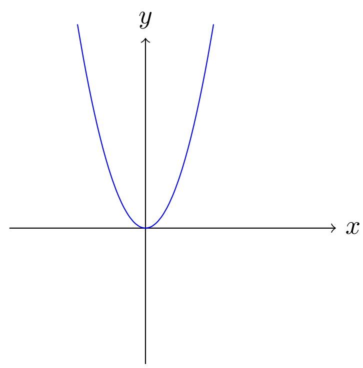
Sammansättning är ej kommutativ, $f(g(x)) \neq g(f(x))$, $f \circ g \neq g \circ f$.

Exempel på kommutativa uttryck är multiplikation, $x * y = y * x$, och addition, $x + y = y + x$. Man kan se det som att man i kommutativa uttryck har en neutral faktor, så som $0 + x = x$.

Uttryck har en identitet. Sammansättning med identiteten ändrar ingenting. Det går att likna vid ett neutralt element i de ovanstående kommutativa exemplen. Denna identitet tecknas $id(x) = x$ och är samma sak som funktionen $f(x) = x$.

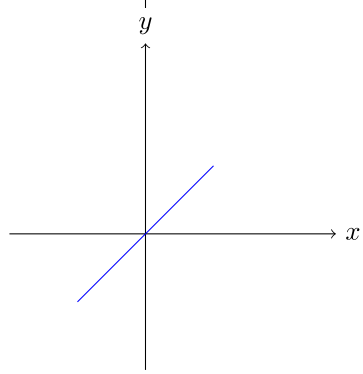
Egenskaper för funktioner

En jämn funktion uppfyller $f(-x) = f(x)$ för alla x. Det är detsamma som en spegling kring y-axeln.



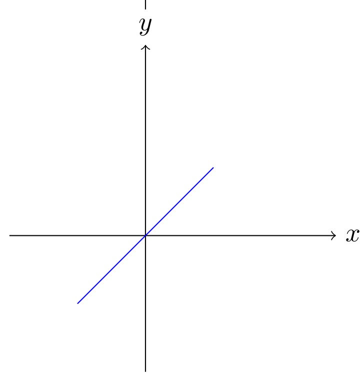
Exempelvis funktionen $y = x^2$

En udda funktion uppfyller $f(-x) = -f(x)$ för alla x. Värdet har ombytt tecken. Det är detsamma som en total spegling / rotation på 180°.



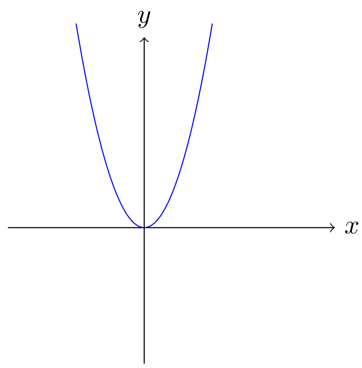
Exempelvis funktionen $y = x$

En strängt växande funktion uppfyller $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Går vi åt höger får vi ett större värde. En sådan funktion är injektiv.



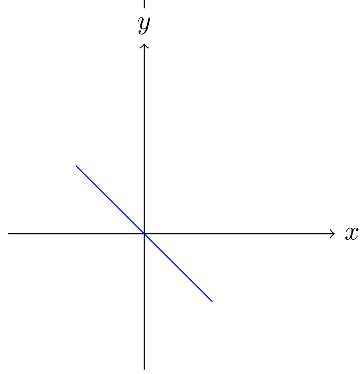
Exempelvis funktionen $y = x$

En ej strängt växande funktion är lik den förra funktionen, men denna är ej växande överallt men kan vara det i intervall.



Exempelvis funktionen $y = x^2$

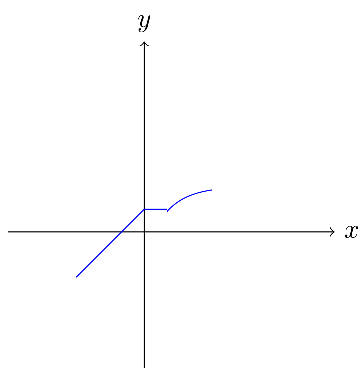
En strängt avtagande funktion uppfyller $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Går vi åt höger får vi ett mindre värde.



Exempelvis funktionen $y = -x$

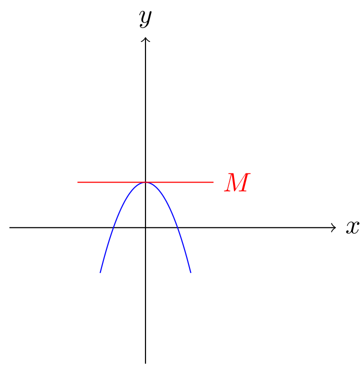
En monoton funktion är strängt växande eller strängt avtagande.

En växande funktion uppfyller $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. Dessa funktioner kan ha platåer.

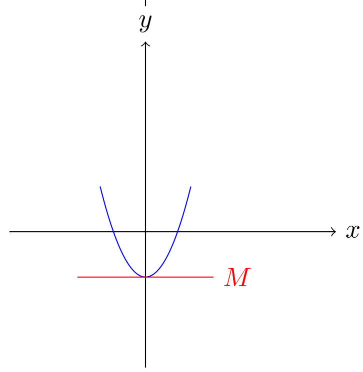


En konstant funktion är både växande och avtagande, men däremot inte strängt. Den är ej injektiv.

$f(x)$ är begränsad uppåt om det finns ett tal M $f(x) \leq M$ för alla x.

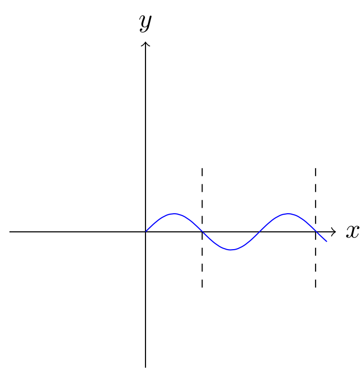


$f(x)$ är begränsad nedåt om det finns ett tal M $f(x) \geq M$ för alla x.



$f(x)$ är begränsad om funktionen är begränsad uppåt och nedåt

$f(x)$ är periodisk om det finns ett tal P så $f(x) = f(x + P)$ för alla x.



Exempelvis funktionerna $\cos x$ och $\sin x$.