Polynom

$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x^1 + a_0 x^0$, $a_n \in \mathbb{R}$.

Graden av p är n om $a_n \neq 0$.

Nedan är ett exempel på ett polynom så som vi ofta ser dem.

$$\begin{aligned} p(x) &= 3x^2 - x + 2 \\ &= 0 * x^3 + 3x^2 - x + 2 \end{aligned}$$

Graden av p är i detta fall 2.

Lösning av polynomekvationer

Grad 1

$a_1 x^1 + a_0 = 0$
$x = -\frac{a_0}{a_1}$, $a_1 \neq 0$

Grad 2

1:

$$\begin{aligned} a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 &= 0 \\ x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} &= 0 \\ x^2 + px + q &= 0 \\ r = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} & \end{aligned}$$

2:

$$\underbrace{a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0}_{\text{utvecklad form}} = \underbrace{a_2 (x - r_1)(x - r_2)}_{\text{faktoriserad form}} = 0$$

Där r, r_n är rot till p.

Grad 3 och 4

Det finns lösningsformer men de är allt för komplicerade. Istället använder man vanligtvis faktorisering av polynom.

$$
\begin{aligned}
(x-1)(x+2)(x+2) &= 0 \\
(x-1)(x^2+4x+4) &= \\
(x^3+4x^2+4x-x^2-4x-4) &= \\
x^3+3x^2-4
\end{aligned}
$$

x=1

$\left.\begin{array}{l}\text{x=2}\\ \text{x=2}\end{array}\right\}\textit{Dubbelrot}$

	Faktoriserad form	Utvecklad form
polynomekvationer	Lätt	Svår
	Lätt $\rightarrow$	
		$\leftarrow$ Svår

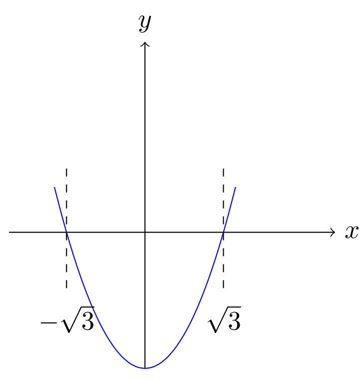
Det generella fallet

$$\underbrace{p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_+ x^0}_{\text{utvecklad form}} = \underbrace{a_n(x-\alpha_2) * \cdots * (x-\alpha_n)}_{\text{faktoriserad form}}$$

Där $\alpha_1 \ldots \alpha_2$ är lösningar till $p(x) = 0$. Dessa lösningar kallas även polynomets rötter och går att jämföra med en ekvations nollställen. Alltså: en ekvation har lösningar / nollställen, ett polynom har rötter.

Exempel

$p(x) = x^2 - 3$ Rötter: $x = \pm\sqrt{3}$



Nollställen: $\pm\sqrt{3}$.

Sats:

$$\left.\begin{array}{l} p(x) \text{ har reella koefficienter.} \\ p(x) \text{ har ett komplext nollställle } z. \end{array}\right\} \textit{även } \overline{z} \text{ är ett nollställe.}$$

Bevis:
$a_n z^n + \cdots + a_1 z^1 + a_0 z^0 = 0$ ty z är ett nollställe.

Konjugera:

$\overline{a_n z^n + \cdots + a_1 z^1 + a_0 z^0} = \overline{0} = 0$

$\overline{a_n} * \overline{z^n} + \cdots + \overline{a_1} * \overline{z^1} + \overline{a_0} * \overline{z^0} = \overline{0} = 0$

Är z ett nollställe är även $\overline{z}$ det, v.s.v.

Detta innebär att om $(x - z)$ är en faktor i $p(x)$ är även $(x + \overline{z})$ en faktor.

$z = a + bi$

$(x - z)(x - \overline{z}) = (x - a - bi)(x - a + bi) = \underbrace{(x - a)^2 + b^2}_{\text{reellt andragradspolynom}}$

Division av polynom

$f(x)$ och $g(x)$ är ett polynom.

$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$ där graden $g(x)$ är densamma som $grad_f - grad_g$ och $grad_r < grad_g$.

Förenklat så innebär det ovanstående att resultatet vid en polynomdivision är ett polynom av graden $grad_f - grad_g$ samt en rest med en lägre grad en det polynomet.

Själva divisionen kan utföras på flera sätt. Bland annat att kontinuerligt lägga till termer på ett och samma bråkstreck för att möjliggöra faktorisering, alternativ använda lång division - den liggande stolen.

Faktorsatsen

Om α är ett nollställe till $p(x9$ kan $p(x)$ faktoriseras till $p(x) = (x_\alpha) * q(x)$ där $grad_q = grad_p - 1$.

Alternativt, om z_0 är nollställe till $p(x)$ så är $p(z) = (z - z_0)q(z) = (z - z_0)(z - z_1)q_1(z)$.

Bevis:

$$\frac{p(x)}{x-\alpha} = q(x) + \frac{c}{x-\alpha}$$

p(x)=(x-$\alpha) * q(x) + c$

p(x)=0 $\Rightarrow p(\alpha) = (\alpha - \alpha) * q(\alpha) + c$

c=0

Mer om polynom

Monomiska ekvationer

$$\begin{aligned} z^n &= c, c \in \mathbb{C} \\ z &= re^{i\theta} \to r^n e^{i\theta n} \\ &= r_1 e^{i\theta + i2\pi k} \\ &= r_1(\cos(\theta_1 + 2\pi k) + i\sin(\theta_1 + 2\pi k)) \end{aligned}$$

Geometrisk summa

$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$

Varför?

$$\begin{aligned} (1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n) &= 1 - x + x - x^2 + x^2 - x^3 + \cdots + x^n - x^{n-1} \\ &= 1 - 0 - 0 + 0 - \cdots - x^{n-1} \\ &= 1 - x^{n+1} \end{aligned}$$

Algebrans fundemantalsats

Varje polynomekvation har minst en komplex rot (Notera att $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$).Varje polynom har minst ett komplext nollställe. Därför gäller faktorsatsen $q(x) = (x-\alpha_1)*\cdots*(x-\alpha_n)*A$ för alla $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

Om $q(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x^1 + a_0$ är reellt för alla $a_i \in \mathbb{R}$ och om $q(\alpha) = 0$ så att $q(\overline{\alpha}) = 0$, så är $(z - \underbrace{\alpha}_{a+bi})(z-\overline{\alpha}) = (z-a-bi)(z-a+bi) = (z-a)^2 + b^2$ ett reellt andragradspolynom.

Varje reellt polynom kan faktoriseras till enbart komplexa förstagradspolynom eller till reella polynom av grad 1 eller 2. Alla tredjegradspolynom kan faktoriseras reellt.

Ett polynom är irreducibelt om det inte kan faktoriseras till polynom av lägre gradtal, reellt.

Alla förstagradspolynom är irreducibla och vissa andragradspolynom, inga andra.

Binomialsatsen

$$\underbrace{(x+a)^n}_{\text{binom}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k} = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} a + \cdots + a^n = \overbrace{(x+a)(x+a)*\cdots*(x+a)}^{n\text{st}}$$

$\binom{n}{k}$ är en binomialkoefficient, antalet sätt att välja k element ur en mängd med n element.

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)*\cdots*n(n-k+1)}{k!}$

$n! = 1*2*3*\cdots*n$

pascals triangel

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\ & & & & \cdots & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \cdots & & & & \end{array}$$

Rationella funktioner

En rationell funktion: $\frac{p(x)}{q(x)}, p(x), q(x)$ är polynom. $\frac{p(x)}{q(x)} = 0? \iff p(x) = 0$ (om vi har förkortat)

Samma nollställe som $p(x)$.

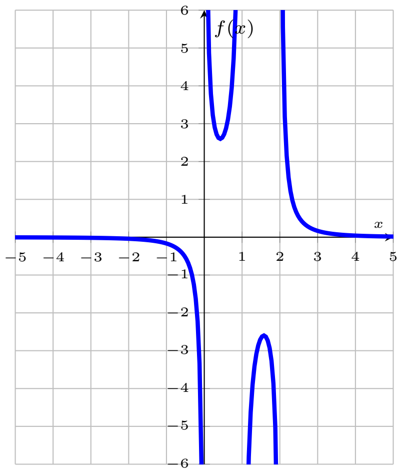
$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$, 0 om $x = -1$.

$x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm 1$

Vi antar att $p(x), q(x)$ saknar gemensamma faktorer.

Singulära punkter om $q(x) = 0$, sådana punkter att de är ej definerade, går mot oändligheten.

Exempel



$f(x) = \frac{1}{x(x-1)(x-2)}$

Ej definerad då $x = 0, x = 1, x = 2$.

Om $1 < x < 2$ så är <u>en</u> faktor negativ, $x - 2$.
Om $0 < x < 1$ så är <u>två</u> faktorer negativa, $f(x) > 0$.