Talen

				Problem-ekvation
Naturliga tal	$\mathbb{N}$	Positiva heltal	$\underbrace{\{1,2,3,\dots\}}_{\substack{\text{Notera att det är svensk} \\ \text{konvention att inkludera 0}}}$	$x+2=0$
Hela tal	$\mathbb{Z}$		$\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$	$2x=1$
Rationella tal	$\mathbb{Q}$	Bråktal, $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$	$\{\dots,-\frac{1}{2},\dots,0,\dots,\frac{1}{2},\dots\}$	$x^2=2$
Reella tal	$\mathbb{R}$	Rationella, irrationella	$\{\dots,-\sqrt{2},\dots,0,\dots,\sqrt{2},\dots\}$	$x^2=-1$
Komplexa tal	$\mathbb{C}$	$a+bi$, $i=\sqrt{-1}$		
Kvaternioner	$\mathbb{H}$			

Räkneregler

Kommutativa lagen	$x+y=y+x$, $xy=yx$	
Associativa lagen	$(x+y)+z=x+(y+z)$, $x(yz)=(xy)z$	
Distributiva lagen	$x(y+z)=xy+xz$	
Additiv invers	$x+y=0 \Rightarrow y=-x$	ej för $\mathbb{N}$
Multiplikativ invers	$x-y=1 \Rightarrow y=x^{-1}$	ej för $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$
Olikheter	$x<y, x<z \Rightarrow y<z$	ej för $\mathbb{C}$

För komplexa tal gäller samma räkneregler som för reella tal, med skillnaden att oliketer saknas.

För $\mathbb{N}$ har vi aritmetikens huvudsats: Om $n \in \mathbb{N}$ så finns exakt <u>en</u> faktorisering i primtal så att $n = P_1 * \cdots * P_k$. Exempelvis är $52 = 2 * 2 * 13$ det enda sättet att faktorisera 52 med enbart primfaktorer.

Är $\sqrt{2}$ irrationellt?

Ja: bevis: anta att $\sqrt{2}$ är rationellt.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} &= \frac{n}{m} \\
2 &= \frac{n^2}{m^2} \\
2m^2 &= n^2
\end{aligned}
$$

VL: udda antal faktorer 2
HL: jämnt antal faktorer 2

Detta leder till en måtsägelse, d.v.s $\sqrt{2}$ är irrationellt.

Vad skiljer $\mathbb{Q}$ och $\mathbb{R}$?

$\mathbb{Q}$	alla decimaltal med periodisk utveckling
$\mathbb{R}$	alla decimaltal (exempelvis har $\sqrt{2}$ ingen periodisk utveckling)

$\mathbb{R}$ är således en komplettering till $\mathbb{Q}$ som lägger till irrationela tal så som $\sqrt{2}$ och π. $\mathbb{R}$ är fullständig.

En följd $\{x_i\} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ är konvergent om $\mid x_j - x_k \mid \to 0$ om $j, k \to \infty$.

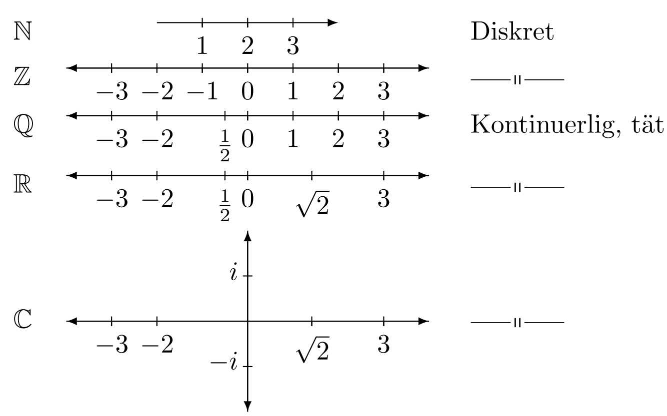
Att $\mathbb{R}$ är fullständig betyder att $\{x_i\}$ $x_i \in \mathbb{R}$ är konvergent. D.v.s det finns $\overline{x}$ så att $\mid \overline{x} - x_j \mid$ $\overline{x} \in \mathbb{R} \to 0$.

Kan vi uppskata π allt bättre?

$$\left.\begin{array}{c} 3 \\ 3{,}1 \\ 3{,}14 \\ 3{,}141 \\ 3{,}1415 \\ 3{,}14159 \\ 3{,}141592 \\ \ldots \end{array}\right\} \text{Rationella}$$

$$\left.\begin{array}{c} \\ \pi \\ \\ \end{array}\right\} \text{Irrationell}$$

Mer om tal



Komplexa tal

Komplexa tal har samma räkneregler som för $\mathbb{R}$. De kan skrivas på rektangulär form $x + iy$ där i betäcknar något som $i^2 = -1$. De komplexa talen betecknas $\mathbb{C} = \{x + iy, x, y \in \mathbb{R}\}$. De består av en realdel, $Re(a + bi) = a$, och en imaginärdel, $Im(a + bi) = b$.

Det komplexa talet $z = a + bi$ har en spegling $a - iy$. Denna spegling kallas vanligtvis för konjugat och betecknas $\overline{z}$.

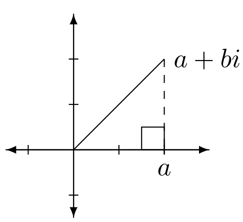
Exempel: är $\frac{1}{1+i}$ komplext?

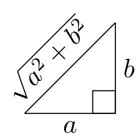
$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+i} &= \underbrace{\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}}_{\text{förläng med } \overline{z} \Rightarrow \text{ reellt tal}} \\
&= \frac{1-i}{1^2+i^2} \\
&= \frac{1-i}{2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

Svar: Ja, $\frac{1}{1+i}$ är komplext.

Polär form

Ett komplext tal z kan alternativt skrivas med ett anvstånd till origon och en vinkel.





$$\underbrace{|\overbrace{z}^{\text{komplext}}|}_{\text{reellt}} = \sqrt{z\overline{z}} \qquad z\overline{z} = |z|^2$$

$$\begin{aligned}
a + bi &= |z| \cos\theta + i |z| \sin\theta \\
&= |z| (\cos\theta + i \sin\theta) \\
&= e^{i\theta} * e^{i\varphi} \\
&= e^{i(\theta+\varphi)}
\end{aligned}$$

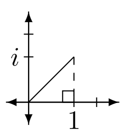
Eulers formel

$cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

$sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Exempel: Skriv $z = 1 + i$ på polär form

<u>Geometrisk lösning:</u>



$\theta = 45 = \frac{\pi}{4}$

$\mid z \mid = \sqrt{2}$

$1 + i = \sqrt{2} * e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$\begin{aligned} \mid z \mid (\cos\theta + i\sin\theta) &= \mid z \mid e^{i\theta} \\ &= re^{i\theta} \\ &= \mid z \mid e^{i*arg(z)} \\ &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

$arg(z)$ är vinkeln till z för den positiva realaxeln och $\mid z \mid$ är beloppet alt. absolutbeloppet.

Svar: $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

<u>Algebraisk lösning:</u>

$x = \mid z \mid \cos\theta = 1$ $y = \mid z \mid \sin\theta = 1$

$\frac{1}{1} = \frac{|z|\cos\theta}{|z|\sin\theta} = \tan\theta = 1$

$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \pi$

Notera att lösningen $\frac{\pi}{4} + \pi$ är orimlig då detta skulle innebära att realdelen skulle vara negativ, något vi vet inte gäller då den i uppgiften är 1.

$\mid z \mid = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$

Svar: $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Sammanfattning

Ett komplex tal kan skrivas på rektangulär form, $a + bi$ där $a, b \in \mathbb{Q}$. Det kan även skrivas på polär form, $re^{i\theta}$ där r är absolutbeloppet. Realdelen a fås genom $r\cos\theta$ och imaginärdelen b genom $r\sin\theta$. θ är vinkeln från den positiva x-axeln och kan fås genom $\arctan\frac{b}{a} + n + \pi$ där $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\overline{zw} = \overline{z} * \overline{w}$$

$$\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

$$\mid z \mid^2 = z\overline{z}$$

$$\mid z \mid * \mid w \mid = \mid zw \mid$$

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2}$$

$$\frac{r_1 e^{i\theta}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$