Analys 2

Integral verktyg

Fem steg för att lösa $\int \frac{a(x)}{b(x)}dx$

1. Polynomdivition
$$\int \frac{a(x)}{b(x)}dx = \int (p(x) + \frac{r(x)}{b(x)})dx = \int p(x)dx + \int \frac{r(x)}{b(x)}dx$$
2. Faktorisering av $b(x)$ så långt som möjligt
$$\int \frac{r(x)}{b(x)}dx = \int \frac{r(x)}{p_1 * p_2 * \ldots * p_n}dx.$$
3.

$$\begin{array}{llll}
\text{Faktor} & (x+a) & \text{partialbråk} & \dfrac{A}{(x+a)} \\
\text{Faktor} & (x+a)^n & \text{partialbråk} & \dfrac{A_1}{(x+a)^1} + \dfrac{A_2}{(x+a)^2} + \ldots + \dfrac{A_n}{(x+a)^n} \\
\text{Faktor} & (x^2+ax+b) & \text{partialbråk} & \dfrac{Ax+B}{(x^2+ax+b)} \\
\text{Faktor} & (x^2+ax+b)^n & \text{partialbråk} & \dfrac{A_1x+B_1}{(x^2+ax+b)^1} + \dfrac{A_2x+B_2}{(x^2+ax+b)^2} + \ldots + \dfrac{A_nx+B_n}{(x^2+ax+b)^n}
\end{array}$$

4. Bestäm konstanterna
5. Lös integralerna

Primitiva funktioner för rotenuttryck

! Innehåller uttrycket $\sqrt{\ldots}$ eller trigonometriska uttryck utförs speciella variabelbyten.

- Faktor $\sqrt{x+a}$ byts mot $t = \sqrt{x+a}$
- Faktor $\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+b}}$ byts mot $t = \frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+b}}$
- Faktor Faktor $\sqrt{x^2+a}$ byts mot $t = \sqrt{x^2+a} + x$
- Faktor Faktor $\sqrt{a-x^2}$ byts mot $t = \sqrt{a}\sin(t)$
- Trigonometriska bytas mot $t = tan(\frac{x}{2})$ $\quad , x = 2\arctan(t) \quad , \frac{dx}{dt} = \frac{2}{t^2+1}$

$$\sin(x) = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{\tan(\frac{x}{2})^2+1} = \frac{2t}{t^2+1}$$
$$\cos(x) = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{\tan^2(\frac{x}{2})+1} = \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

- $\sin^2(x)$ eller $\cos^2(x)$ byts mot eulers formel $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, $\cos(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$

Riemansumma

Dela in intervallet $[a, b]$ i n st delintervall $I_k = [x_{k-1}, x_k]$

Välj sedan för varje intervall ett $\epsilon \in I_k$

- Not Väljer man $\epsilon = x_{k-1}$ får man Undertrappa
- Not väljer man $\epsilon = x_k$ får man Övertrappa

$$R_D = \sum_{i=1}^{n} f(\epsilon_i) * (x_i - x_{i-1})$$

Analysens huvudsats

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Om $f(x)$ har asymptot $\epsilon \in [a, b]$ gäller inte analysens huvudsats för $\int_a^b f(x)dx$ istället används:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\epsilon f(x)dx + \int_\epsilon^b f(x)dx$$

Konvergent integral

Där A är ett ändligt tal, kallas integralen förkonvergent

$$\int_a^b f(x)dx = A$$

Divergent integral

$$\int_a^b f(x)dx = \pm\infty$$

Jämförelse test

Om frågan är integralen konvergent eller divergent så kan man använda detta verktyget.

$$\text{Om} \quad 0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \text{och} \quad \int_a^b g(x)dx \quad \text{Konvergent} \implies \int_a^b f(x)dx \quad \text{Konvergent}$$

$$\text{Om} \quad 0 \leq g(x) \leq f(x) \quad \text{och} \quad \int_a^b g(x)dx \quad \text{Divergent} \implies \int_a^b f(x)dx \quad \text{Divergent}$$

Applicationer till integral

Area

$$A = \int_{x_1}^{x_2} h(x)dx$$

Volym

$$V = \int_{x_1}^{x_2} A(x)dx$$

Massan

$$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) * A(x)dx$$

Längd av kurva

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} dt$$

$$\begin{gathered} \text{Special} \quad y = y(x) \quad \text{välj } t = x \\ L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \text{Polära kordinater} \quad x = r * cos(\theta) \quad y = r * sin(\theta) \\ L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right)^{1/2} d\theta \end{gathered}$$

Mantelarea

$$A_m = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y * \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Krökningsradie

$$\kappa \equiv \frac{1}{R} \qquad R = \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{y''}$$

Masscentrum

$$X_{cm} = \frac{1}{m} * \int_{x_1}^{x_2} x * \rho(x) * A(x)dx$$

Tröghetsmoment

$$E = \frac{I\omega^2}{2} \qquad I = \int_{x_1}^{x_2} r^2\, dm$$

Diffar

Första ordningens diffar

$$y' + g(x)y = f(x)$$

$$I(x) = e^{G(x)} \qquad y = \frac{\int I(x) * f(x)dx}{I(x)}$$

Andra ordningens linjära diffar

$$y'' + Ay' + By = f(x)$$

$$\begin{array}{c} K.E. \quad r^2 + Ar + B = 0 \\ a) \quad r_1 \neq r_2 \qquad reella \quad y_h = Ae^{r_1 * x} + Be^{r_2 * x} \\ b) \quad r_1 = r_2 \qquad reella \quad y_h = (Ax + B)e^{r*x} \\ c) \quad r = \alpha \pm i\beta \quad img \quad y_h = e^{\alpha * x}(Asin(\beta x) + Bcos(\beta x)) \end{array}$$

$$\text{Ansättning av } y_p$$

$$1) \quad y_h \neq k * f(x)$$

$f(x)$	y_p
polynom grad n	polynom grad n
Ae^{k*x}	Be^{kx}
$Asin(kx) + Bcos(kx)$	$Csin(kx) + Dcos(kx)$

$$2) \quad y_h = k * f(x)$$

$f(x)$	y_p
Ae^{k*x}	Bxe^{kx}
Axe^{k*x}	Bx^2e^{kx}

Separabla variabler

$$g(y)y' = f(x)$$

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

Bernaulis ekvation

$$y' + g(x)y = f(x)y^n$$

$$Z' + (1-n)g(x)Z = (1-n)f(x)$$

$$I(x) = e^{G(x)} \quad Z = \frac{\int I(x) * f(x)dx}{I(x)}$$

$$y = Z^{\left(\frac{1}{1-n}\right)}$$

Serie expansioner

Maclaurin Serier

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} * x^i$$

Tayler Serier

*Not om $f(x)$ ej har kontinueliga derivator $f^{(n)}(x)$ eller ej är kontinuerlig funkar ej maclaurin expansion

*Egenskap Om en diskontinuelig funktion är kontinuelig och har kontinueliga derivator i intervallet $(a < x < b) = I$ kan valfri $\epsilon \in I$ väljas och $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(\epsilon)}{i!} * (x - \epsilon)^i$

- Def Taylorpolynom ordo n kring a

  $$T_a(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} * (x - a)^i$$

Bevis

1 Partiell integrering

$$D\left(F*g-\int F*g'dx\right)=F*g+F*g'-F*g'=f*g$$

2. Analysens huvudsats

$$\text{Antag att } F(x)=\int_t^x f(x)dx$$

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\int_t^{x+\Delta x} f(x)dx-\int_t^x f(x)dx}{\Delta x}\right)\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\int_t^{x} f(x)dx+\int_t^{x+\Delta x} f(x)dx-\int_t^x f(x)dx}{\Delta x}\right)\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\Delta x}*\Delta x*f(x)\right)\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

$$\implies F'(x)=f(x)\text{ Så är } F(x)\text{ primitiv till } f(x)$$

$$F(b)-F(a)=\int_t^b f(x)dx-\int_t^a f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

3 Längd av Kurva

$$L=\int_L\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int_L\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}*\frac{dx}{dx}=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}dx$$

4 Mantelarea

$$dL=\sqrt{1+(y')^2}dx$$

$$dA_m=2\pi*y*dL=2\pi*y*\sqrt{1+(y')^2}dx$$

$$\implies A_m=\int_{x_1}^{x_2}2\pi*y*\sqrt{1+(y')^2}dx=2\pi\int_{x_1}^{x_2}y*\sqrt{1+(y')^2}dx$$

5 Krökningsradie

$$y' = tan(\theta) \implies \theta = arctan(y')$$
$$dL = R * d\theta \implies R = \frac{dL}{d\theta} = \frac{dL}{dx} * \frac{dx}{d\theta} = \frac{dL}{dx} * \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^{-1}$$
$$= \frac{\sqrt{1+(y')^2}dx}{dx} * \left(\frac{y''}{1+(y')^2}\right)^{-1}$$
$$= \sqrt{1+(y')^2} * \frac{1+(y')^2}{y''}$$
$$= \frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{y''}$$

6 Tröghetsmomentet

$$2E = \int V^2 dm = \int \omega^2 r^2 dm = \omega^2 \int r^2 dm \implies I = \int r^2 dm$$

7 Första ordningens diff

$$\begin{aligned} y' + g(x)y = f(x) \quad & \implies y' e^{G(x)} + g(x)ye^{G(x)} = f(x)e^{G(x)} \\ & \implies \frac{d}{dx}\left(y' e^{G(x)}\right) = \int f(x)e^{G(x)} dx \\ & \implies y = \frac{\int e^{G(x)} f(x) dx}{e^{G(x)}} \end{aligned}$$

8 Andra ordningens diffar

$$y'' + Ay' + By = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Antag} \quad & y = Ze^{rx} \\ & y' = Z' e^{rx} + rZe^{rx} \\ & y'' = Z'' e^{rx} + 2rZ' e^{rx} + r^2 Ze^{rx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' + Ay' + By \quad & = e^{rx}\left(Z'' + 2rZ' + r^2 Z + AZ' + ArZ + BZ\right) \\ & = e^{rx}\left(Z'' + Z'(2r+A) + Z\underbrace{(r^2 + ar + B)}_{\text{KE}}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Då KE har dubbelrot}$$

$$\begin{aligned} r = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{0} \quad &\implies a = -2r \\ &\implies Z'' = 0 \\ &\implies Z' = A \\ &\implies Z = Ax + B \\ &\implies y = e^{rx}(Ax + B) \end{aligned}$$

$$\text{Då KE har reella rötter}$$

$$\begin{aligned} a \neq -2r \quad &\implies Z' = 0 \\ &\implies Z = A \\ &\implies y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \end{aligned}$$

$$\text{Då KE har imaginära rötter}$$

$$\begin{aligned} r = \alpha \pm i\beta \quad &\implies y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \\ &\implies y = Ae^{\alpha + i\beta} + Be^{\alpha - i\beta} \\ &\implies y = e^{\alpha x}\left(Ae^{i\beta} + Be^{-i\beta}\right) \\ &\implies y = e^{\alpha x}\left(Acos(\beta x) + iAsin(\beta x) + Bcos(\beta x) - iBsin(\beta x)\right) \\ &\implies y = e^{\alpha x}\left(\underbrace{(A+B)}_{=\text{D}}cos(\beta x) + \underbrace{i(A+B)}_{=\text{E}}sin(\beta x)\right) \\ &\implies y = e^{\alpha x}\left(Dcos(\beta x) + Esin(\beta x)\right) \end{aligned}$$

9 Bernaulis ekvation

$$y' + g(x)y = f(x)y^n$$

$$y = Z^{\frac{1}{1-n}}$$

$$y' = \frac{Z^{\frac{1}{1-n}} * Z'}{1-n}$$

$$\text{Insättning ger}$$

$$\frac{Z^{\frac{1}{1-n}} * Z'}{1-n} + g(x)Z^{\frac{1}{1-n}} = f(x)Z^{\frac{n}{1-n}}$$

$$Z' + (1-n)g(x)Z = (1-n)f(x)$$

10 Maclaurin utveckling

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(x)dx \\
&= f(0) + \int_0^x \left(f'(0) + \int_0^x f''(x)dx \right) dx \\
&= f(0) + \int_0^x f'(0)dx + \int_0^x \int_0^x f''(x)dxdx \\
&= f(0) + \int_0^x f'(0)dx + \int_0^x \int_0^x \left(f''(0) + \int_0^x f^{(3)}(x)dx \right) dxdx \\
&= f(0) + \int_0^x f'(0)dx + \int_0^x \int_0^x f''(x)dxdx + \int_0^x \int_0^x \int_0^x f^{(3)}(x)dxdxdx \\
&\vdots \\
&= f(0) = +f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{2*3}x^3 \dots \\
&= \sum_{i=0}^{\text{inf}} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i
\end{aligned}
$$