Kapitel 4

4.3 Trapetsregeln (cont.)

Exempel 4.1
Beräkna approximationer till

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

med trapetsregeln. Uppskatta trunkeringsfelet.

$$\int_a^b f(x)dx \approx [f(b)+f(a)]\frac{(b-a)}{2}$$

$$R_T = \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3$$

Metod	I	R_T
Exakt	0.7468	
Trapetsregeln	0.6839	≤0.17
Simpsons regel		
Trapetsformeln		
Simpsons formel		
Extrapolation		

Exempel 4.2
Beräkna approximationer till

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

med Simpsons regel. Uppskatta trunkeringsfelet.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{6}\left[f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a)\right]$$

$$R_T = -\frac{1}{2880} f^{(4)}(\xi)(b-a)^5$$

Metod	I	R_T
Exakt	0.7468	
Trapetsregeln	0.6839	≤0.17
Simpsons regel	0.7472	≤0.03
Trapetsformeln		
Simpsons formel		
Extrapolation		

Exempel 4.3
Beräkna approximationer till

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

med trapetsformel med steglängden $h = 0.25$. Uppskatta trunkeringsfelet.

$$T(h) = h\left\{\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + \frac{f(b)}{2}\right\}$$

$$R_T = \frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi) >< R_T = \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3 \quad \text{(Trapetsregeln)}$$

Metod	I	R_T
Exakt	0.7468	
Trapetsregeln	0.6839	≤0.17
Simpsons regel	0.7472	≤0.03
Trapetsformeln	0.7430	≤0.01
Simpsons formel		
Extrapolation		

MATLAB 4.1
a) Skriv en MATLAB-funktion för trapetsformeln. Låt intervallets ändpunkter, funktionen och antal delintervall vara inparametrar och låt funktionen få värdet av (den approximativa) integralen.
b) $h = 0.25$, använd funktionen för att approximativt bestämma

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$$

c) $h = 0.5$, använd funktionen för att approximativt bestämma integralen.

- Trapetsformeln med $h = (b-a)/n$ och

$$\int_a^b f(x)dx = h\left\{\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + \frac{f(b)}{2}\right\}$$

- Trunkeringsfelet för trapetsformel

$$R_T = \frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi)$$

Exempel 4.4
Beräkna approximationen till

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$$

med Simpsons formel med steglängden $h = 0.25$. Uppskatta trunkeringsfelet.

$$S(h) = \frac{h}{3}\{f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) + \cdots + f(b)\}$$

$$R_T = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$$

Metod	I	R_T
Exakt	0.7468	
Trapetsregeln	0.6839	≤0.17
Simpsons regel	0.7472	≤0.03
Trapetsformeln	0.7430	≤0.01
Simpsons formel	0.7469	$\leq 2.6 \times 10^{-4}$
Extrapolation		

Exempel 4.5
Använd trapetsformeln och Richardsonextrapolation för att approximativt bestämma integralen

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

Räkna med steglängderna $h = 0.25$ och $h = 0.5$. Uppskatta trunkeringsfelet.

$h = 0.25$	0.7430	≤0.01
$h = 0.5$	0.7314	≤0.04
Extrapolation	0.7469	≤0.01

Metod	I	R_T
Exakt	0.7468	
Trapetsregeln	0.6839	≤0.17
Simpsons regel	0.7472	≤0.03
Trapetsformeln	0.7430	≤0.01
Simpsons formel	0.7469	$\leq 2.6 \times 10^{-4}$
Extrapolation	0.7469	≤0.01

Exempel 4.6
Använd Rombergs metod för att approximativt bestämma integralen

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

Räkna med steglängderna $h = 0.25, h = 0.5$ och $h = 1$.

----

h	T	R_T
$h = 0.25$	0.7430	≤0.01
$h = 0.5$	0.7314	≤0.04
$T^{(2)}(0.25)$	0.7469	≤0.01
$h = 0.5$	0.7314	≤0.04
$h = 1$	0.6839	≤0.17
$T^{(2)}(0.5)$	0.7472	≤0.05
$T^{(3)}(0.25)$	0.7468	$\leq 3.2 \times 10^{-4}$

Exempel 4.7
Beräkna approximationen till

$$I = \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} dx \approx 1.68$$

med trapetsformel med steglängden $h = 0.25$.

$$T(h) = h\left\{\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + \frac{f(b)}{2}\right\}$$

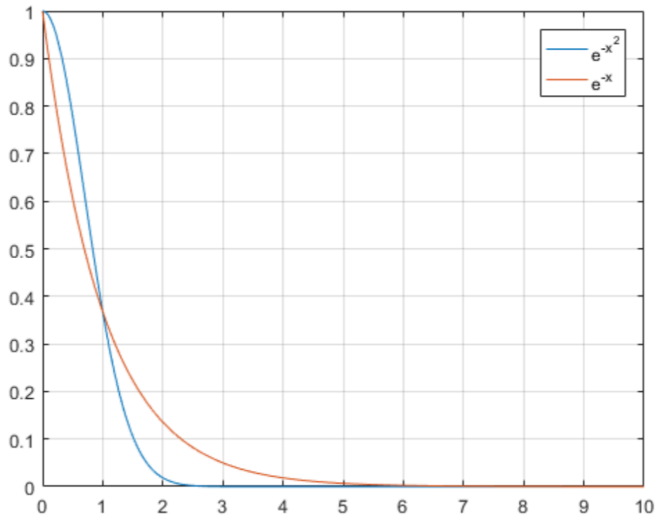
Exempel 4.8
Integralen

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

ska beräknas med kapning

$$I = I_1 + I_2 = \int_0^b e^{-x^2} dx + \int_b^\infty e^{-x^2} dx$$

Bestäm ett heltal b sådant att $I_2 \leq 0.5 \times 10^{-6}$.



MATLAB 4.2
a) Skriv en MATLAB-funktion för Simpsons formel. Låt intervallets ändpunkter, funktionen och antal delintervall vara inparametrar och låt funktionen få värdet av (den approximativa) integralen.
b) Beräkna integralen med kapning

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

sådant att

$$I_2 = \int_b^\infty e^{-x^2} dx \leq 0.5 \times 10^{-6}.$$

b) $h = 0.25$, använd funktionen för att approximativt bestämma

$$I = \int_0^b e^{-x^2} dx$$

c) Hur många delintervall behövs för att trunkeringsfelet $R_T \leq 0.5 \times 10^{-6}$
d) Jämför med MATLAB:s quad och quadl

- Simpsons formel med $2h = (b-a)/n$ och

$$S(h) = \frac{h}{3}\{f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + \cdots + f(b)\}$$

- Trunkeringsfelet för Simpsons formel

$$R_T = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$$

MATLAB 4.3
a) Skriv en MATLAB-funktion för trapetsformeln. Låt intervallets ändpunkter, funktionen och antal delintervall vara inparametrar och låt funktionen få värdet av (den approximativa) integralen.
b) Använd funktionen för att approximativt bestämma

$$I = \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} dx$$

när $h = 0.25$, $h = 2 \times 0.25$ och $h = 2^2 \times 0.25$
c) Jämför med MATLAB:s trapz.

$$\int_a^b f(x)dx = h\left\{\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + \frac{f(b)}{2}\right\} + \frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$$

----

d) Skriv en MATLAB-funktion för Richardsonextrapolation. Låt en kolonnvektor y med beräknade approximationer för olika h −värden, q delningstalet mellan steglängderna och en kolonnvektor med h −potenserna i aktuell felutveckling av trunkeringsfelet vara inparametrar och låt funktionen få värdet av de extrapolerade approximationerna till integralen, administrerade i en lämplig matris.

MATLAB 4.3 (4.15)

d) Skriv en MATLAB-funktion för Richardsonextrapolation. Låt en kolonnvektor y med beräknade approximationer för olika h −värden, q delningstalet mellan steglängderna och en kolonnvektor p med h −potenserna i aktuell felutveckling av trunkeringsfelet $p = [2\ 4\ 6\ 8\ \cdots]$ vara inparametrar och låt funktionen få värdet av de extrapolerade approximationerna till integralen, administrerade i en lämplig matris.

$$\int_a^b f(x)dx = h\left\{\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + \frac{f(b)}{2}\right\} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$T^{(2)}(h) = T(h) + \frac{T(h) - T(nh)}{q^2 - 1} + \mathcal{O}(h^4)$$

$$T^{(2)}(qh) = T(qh) + \frac{T(qh) - T(q^2h)}{q^2 - 1} + \mathcal{O}(h^4)$$

$$T^{(3)}(h) = T^{(2)}(h) + \frac{T^{(2)}(h) - T^{(2)}(nh)}{q^4 - 1} + \mathcal{O}(h^6)$$

$$R = \begin{pmatrix} T(h) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ T(qh) & T^{(2)}(h) & 0 & \ddots & 0 \\ T(q^2h) & T^{(2)}(qh) & T^{(3)}(h) & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T(q^nh) & T^{(2)}(q^{n-1}h) & T^{(3)}(q^{n-2}h) & \cdots & T^{(n)}(qh) \end{pmatrix} = \mathrm{richard}(y, p, q)$$