Kapitel 5

Exempel 5.2
Lös följande ekvationssystem med LU-faktorisering med pivotering.

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Utan pivotering kan vi inte lösa systemet med LU-faktorisering.

- Sammanfattningsvis löser man ett linjärt ekvationssystem $Ax = b$
  - Faktorisera A på formen $PA = LU$ genom Gausselimination med radpivotering.
  - Lös det triangulära systemet $Ly = Pb$ med framåtsubstitution, där y är en hjälpvektor.
  - Lös det triangulära systemet $Ux = y$ med bakåtsubstitution för att få lösningen x till det givna problemet $Ax = b$.

Exempel 5.5
Betrakta följande matris A med invers A^{-1} för $|\epsilon| \ll 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\epsilon \\ 1+\epsilon & 1 \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{2\epsilon + \epsilon^2}\begin{pmatrix} -1 & 1+\epsilon \\ 1+\epsilon & -1 \end{pmatrix}$$

Vi lösa ekvationssystemet $Ax = b$ med $b = \left(\sqrt{3}, 2\right)^T$. Ange en gräns för $\|\delta b\|_\infty$ dår vi kräver att relativa felet i lösningen (i ∞ −norm) inte får överskrida $0.5 \cdot 10^{-4}$. Ange speciellt en noggrannhet i approximationen av $\sqrt{3}$, mätt i antal korrekta decimaler, som duger om $\epsilon = 10^{-2}$ respektive $\epsilon = 10^{-4}$

Korrekt decimal
Om det absoluta felet δx uppfyller felgränsen $|\delta x| \leq 0.5 \times 10^{-t}$ så säger vi att approximationen $\hat{x}$ har t korrekta decimaler.
Inversmatrisen

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} D_{11} & -D_{21} & D_{31} \\ -D_{12} & D_{22} & -D_{32} \\ D_{13} & -D_{23} & D_{33} \end{pmatrix}$$

där D_{ij} är determinanten för den matris som erhålles A ur genom strykning av rad i och kolon j.

Exempel 5.7

Betrakta det överbestämda ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Ange mistakvadratlösningen x.
b) Ange 2 −normen hos den residualvektor $r = Ax - b$, som har minsta 2 −norm.

$$x = (A^TA)^{-1}A^Tb$$
$$r = Ax - b \Rightarrow \|r\|_2 = \|A(A^TA)^{-1}A^Tb - b\|_2$$

Exempel 5.6
Utför kompakt QR-faktorisiering av matrisen med Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = a_1$$
$$u_2 = a_2 - \mathrm{proj}_{u_1} a_2 = a_2 - \frac{a_2 \cdot u_1}{\|u_1\|^2} u_1$$
$$u_3 = a_3 - \mathrm{proj}_{u_1} a_3 - \mathrm{proj}_{u_2} a_3 = a_3 - \frac{a_3 \cdot u_1}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{a_3 \cdot u_2}{\|u_2\|^2} u_2$$
$$\vdots$$
$$u_n = a_n - \mathrm{proj}_{u_1} a_n - \mathrm{proj}_{u_2} a_n - \cdots - \mathrm{proj}_{u_{-1}} a_n$$
$$= a_n - \frac{a_n \cdot u_1}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{a_n \cdot u_2}{\|u_2\|^2} u_2 - \cdots - \frac{a_n \cdot u_{n-1}}{\|u_{n-1}\|^2} u_{n-1}$$
$$Q_1 = \left(\frac{u_1}{\|u_1\|} \ \frac{u_2}{\|u_2\|} \cdots \frac{u_n}{\|u_n\|} \right)$$
$$R = Q_1^T A$$
$$Rx = {Q_1}^T b$$

Exempel 5.6
Utför QR-faktorisiering av matrisen med Householderspeglingar

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} - \|a_1\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow H_1 = I - 2 \frac{v_1}{\|v_1\|} \frac{v_1^T}{\|v_1\|} \Rightarrow H_1 A = \begin{pmatrix} \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$
$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{m2} \end{pmatrix} - \|b_2\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow H_2 = I - 2 \frac{v_2}{\|v_2\|} \frac{v_2^T}{\|v_2\|} \Rightarrow H_2 \, H_1 A = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & 0 & c_3 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

MATLAB 5.2:
a) Skriv en MATLAB-funktion för QR-faktorisiering av matrisen med Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod. Låt matris A vara inparametrar och låt funktionen få Q_1och R.
b) Undersök hur minstakvadratlösningen och QR-faktorisiering fungerar vid minstakvadratanpassning av en tredjegradskurva till punkterna

t	1	2	4	5	6	7	8	9
y	1	2	2	3	3	4	5	6

Rita ut punkterna och kurvan med hjälp av rutinen polyval.

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b$$
$$u_1 = a_1$$
$$u_2 = a_2 - \operatorname{proj}_{u_1} a_2 = a_2 - \frac{a_2 \cdot u_1}{\|u_1\|^2} u_1$$
$$u_3 = a_3 - \operatorname{proj}_{u_1} a_3 - \operatorname{proj}_{u_2} a_3 = a_3 - \frac{a_3 \cdot u_1}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{a_3 \cdot u_2}{\|u_2\|^2} u_2$$
$$\vdots$$
$$u_n = a_n - \operatorname{proj}_{u_1} a_n - \operatorname{proj}_{u_2} a_n - \cdots - \operatorname{proj}_{u_{-1}} a_n$$
$$Q_1 = \left(\frac{u_1}{\|u_1\|} \, \frac{u_2}{\|u_2\|} \cdots \frac{u_n}{\|u_n\|}\right) \text{och } R = Q_1^T A \Rightarrow x = R^{-1} {Q_1}^T b$$

Exempel 5.6
Undersök hur trunkerad sigulärvärdesfaktorisering fungerar vid minstakvadratanpassning av en tredjegradskurva till punkterna

t	1	2	4	5	6	7	8	9
y	1	2	2	3	3	4	5	6

Använd som antal termer i trunkerad SVD: $k = 1, 2, 3, 4$, där $k = 4$ motsvarar full SVD förstås. Rita ut punkterna och de fyra kurvorna. Hur många termer bör man ta med i trunkerad SVD?

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b$$
$$x = V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^T b = \sum_{i=1}^{r} ({u_i}^T b) {\sigma_i}^{-1} v_i$$
$$x \approx \sum_{i=1}^{k} ({u_i}^T b) {\sigma_i}^{-1} v_i$$

Exempel 5.7
Beräkna approximationen till det dominerade egenvärdet till matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$
genom att göra tre iterationer med postensmetoden utgående från startapproximationen
$$x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exempel 5.7
Beräkna approximationen till det till belopp minsta egenvärdet till matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

genom att göra två iterationer med invers iteration utgående från startapproximationen

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Exempel 5.8
Beräkna ett visst egenvärde till matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

nära ett givet tal σ från startapproximationen utan och med uppdatering av skiftet.

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \sigma_0 = 1.2$$

Exempel 5.8
Beräkna egenvärden till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

med QR-iteration, QR-iteration med enkelt shift, QR-iteration med Willkisons skift.