Numerisk Analys - Cheat Sheet

TODO

- Ändar strukturen på kap 1
- Gör om Checklistan till tabeller

Cheat Sheet

Kapitel 1

Absolutfel

$$\delta x = \hat{x} - x$$

Där $\hat{x}$ är det approximativa värdet och x är det riktiga värdet

$$\textbf{Exempel}$$
$$\delta x = 3.14159 - \pi = -2.65 * 10^{-6}$$

Relativa fel

$$\frac{\delta x}{x} \approx \frac{\delta x}{\hat{x}} = \rho$$

$$\textbf{Exempel}$$
$$\rho = \frac{-2.65 * 10^{-6}}{3.1415} = -8.45 * 10^-7$$

Korrekt decimal

$$|\delta x| \leq 0.5 * 10^{-t}$$

Man säger att $\hat{x}$ har *t* rätta decimaler

$$\begin{gathered}\textbf{Exempel}\\ -2.65*10^{-6} > 0.5*10^{-1}\\ -2.65*10^{-6} > 0.5*10^{-2}\\ -2.65*10^{-6} > 0.5*10^{-3}\\ -2.65*10^{-6} > 0.5*10^{-4}\\ -2.65*10^{-6} > 0.5*10^{-5}\\ -2.65*10^{-6} > 0.5*10^{-6}\\ -2.65*10^{-6} < 0.5*10^{-7}\\ \hat{x}\text{ har 7 korrekta decimaler}\end{gathered}$$

Signifikanta siffror

$$\sigma = t + 1$$

Där σ betecknar antalet signifikanta siffror

$$\begin{gathered}\textbf{Exempel}\\ \sigma = 7 + 1 = 8\end{gathered}$$

Kapitel 2

Kapitel 3

Kapitel 4

Kvadraturformler

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + R_T$$
$$R_T \text{ är trunkeringsfelet}$$

Trapetsreglen

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\{f(a) + f(b)\}$$
$$R_T = \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3 \quad , \quad a \le \xi \le b$$

Exempel

Simpsons regel

$$\text{Tre punkter behövs} \quad [a, b, c] \quad , \quad c = \frac{a+b}{2}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\{f(a) + f(b) + 4 * f(c)\}$$

$$R_T = \frac{f^{(4)}(\xi)}{2880}(b-a)^5 \quad , \quad a \leq \xi \leq b$$

Exempel

Trapets formlen

$$n \text{ är antalet delintervall och } h \text{ är längden på intervallen}$$

$$T(h) = h\left\{\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1} + \frac{f(x_n)}{2})\right\} \quad , \quad x_i = a + ih$$

$$R_T = \frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi) \quad , \quad a \leq \xi \leq b$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Exempel

Simpsons formel

$$n \text{ är antalet delintervall och } h \text{ är längden på intervallen}$$

$$S(h) = \frac{h}{3}\{f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\} \quad , \quad x_i = a + ih$$

$$R_T = \frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\xi) \quad , \quad a \leq \xi \leq b$$

$$h = \frac{b-a}{2n}$$

Exempel

Richardsonextrapolation

$$T^{(2)}(h) = T(h) + \frac{T(h) - T(2h)}{3}$$
$$|R_T| \leq |T(h) - T(2h)| \qquad \text{(Kalls för tumreglen)}$$

Not: Om man använder trapetsformeln plus Richardsonextrapolation får man simpsons formel

Exempel

Rombergs metod

När man använder upprepad Richardsonextrapolation på trapetsformeln kallas det Rombers metod

Nästa steg blir:

$$T^{(3)}(h) = T^{(2)}(h) + \frac{T^{(2)}(h) - T^{(2)}(2h)}{15}$$
$$\vdots$$
$$T^{(n)}(h) = \dots$$

$$|R_T| \leq |T(h) - T(2h)|$$

Generaliserade integraler

Kapitel 5

LU-faktorisering

Sätt in beskrivning

$$\textbf{Exempel}$$
$$Ax = b$$
$$\begin{pmatrix} 0.01 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -100 & 1 \end{pmatrix}$$
$$E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -100 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.01 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.01 & 2 \\ 0 & -199 \end{pmatrix} = U$$
$$E_1 \implies L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 100 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 100 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.01 & 2 \\ 0 & -199 \end{pmatrix}$$

$$Ly = b$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 100 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} \implies y = \begin{pmatrix} -1 \\ 106 \end{pmatrix}$$

$$Ux = y$$
$$\begin{pmatrix} 0.01 & 2 \\ 0 & -199 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -1 \\ 106 \end{pmatrix} \implies x = \begin{pmatrix} 7 \\ -0.533 \end{pmatrix}$$

$$\text{Insättning av x i Ax=b ger} \ldots$$

LU-faktorisering med pivotering

Sammanfattnigsvis löser man ett linjärt ekvationssystem $Ax = b$

- Faktorisera A på formen $PA = LU$ genom Gausselimineation med radpiovotering
- Lös det triangulära systemet $Ly = Pb$ med framåtsubstitution där y är en hjälpverktor
- Lös det triangulära systemet $Ux = y$ med bakåtsubstitution för att få lösningen x till det givna problemet $Ax = b$

$$\textbf{Exempel}$$

Vektornormer och matrisnormer

Summa normen

$$||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\textbf{Exempel}$$
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Kollumnsumma}$$
$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 \end{pmatrix} \implies ||A||_1 = 8$$

Euklidiska normen

$$||x||_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

$$\textbf{Exempel}$$

Maximum normen

$$||x||_\infty = \max\{|x_1| + \cdots + |x_n|\} = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

$$\textbf{Exempel}$$
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Radsumman}$$
$$\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \implies ||A||_\infty = 7$$

Linjära minstakvadratproblem

Minstakvadrat

$$x = \left(A^T A\right) A^T b$$
$$r = Ax - b \implies ||r||_2 = ||A(A^T A)^{-1} A^T b - b||_2$$

$$\textbf{Exempel}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^T A = \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 15 & 26 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A) = \frac{1}{det(A^T A) = 9 * 26 - 15 * 15} \begin{pmatrix} 26 & -15 \\ -15 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 26 & -15 \\ -15 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\text{Beräkna Minstakvadrat}$$

$$x = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 26 & -15 \\ -15 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & -15 \\ -15 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$r = Ax - b = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$||r||_2 = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2} = 0$$

QR faktorisering

Singularitetsfaktorisering (SVD)

Kapitel 6

Checklista på saker man ska kunna

Wordlist

Sybol	Krav med hänseende till tentamen
✅	Ska kunna
⚠️	Förkunskap till de andra formlerna som man bör ha koll på, men nödvändigt vis kunna
❓	Osäker om man behöver kunna

Kapitel 1

- Absolut fel
- Relativ fel
- Korrekt decimal
- Signifikana siffror

- Felfortplantning, envariable
- Felfortplantning, fler variabler
- Kondition och kontitionstal
- bakåt fel
- frammåt fel
- Flyttalssystem

Kapitel 2

- Newtons metod - dämpad - hybrid
- Sekantmetoden
- Intervallhalverinsmetoden
- Fixpunktmedtoden
- Jacobymatrisen
- Newtons metod för system - dämpad - hybrid
- Fixpunktmetoden för system
- Lösningsnogranhet/metodberonde feluppskattning
- Lösningsnogranhet för system

Kapitel 3

Kapitel 4

- ⚠️ Kvadraturformler
- ⚠️ ❓ Trapetsreglen
- ⚠️ ❓ Simpsons regel
- ✅ Trapets formlen
- ✅ Simpsons formel
- ✅ Richardsonextrapolation
- ✅ Rombergs metod
- ✅ Generaliserade integraler

Kapitel 5

- ⚠️ LU-faktorisering
- ✅ LU-faktorisering med pivotering
- ⚠️ Vektornormer och matrisnormer

Kapitel 6