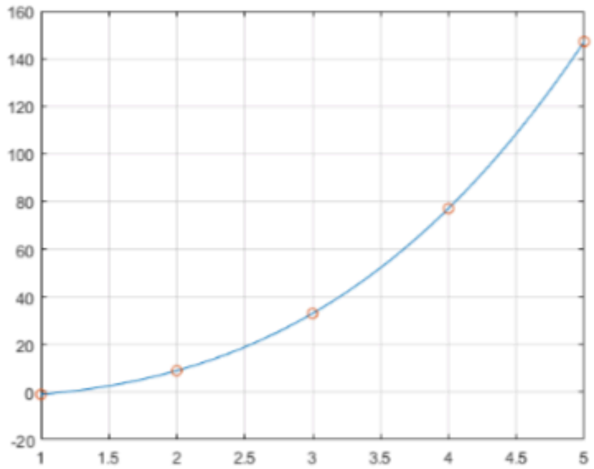
Kapitel 6

6.1 Approximation av derivator (cont.)

Exempel 6.1
En funktion $f(x)$ är endast given som en diskret punktmängd



x	f
1	-1.00
2	9.00
3	33.02
4	77.05
5	147.10

Beräkna en approximation till f' i punkten $x = 3$ med hjälp av differensapproximation och Richardsonextrapolation. Gör en ordentlig feluppskattning. Tabellvärdena är korrekt avrundade.

Korrekt decimal
Om det absoluta felet δx uppfyller felgränsen $|\delta x| \leq 0.5 \times 10^{-t}$ så säger vi att approximationen $\hat{x}$ har t korrekta decimaler.

6.3 Differensmetoder för ordinära differentialekvationer

Exempel 6.3: lösa begynnelsesvärdesproblemet med Eulers bakåtmetod (implicit):

$$(BVP)\ \begin{cases} y'(t) = 3(y - t^2 + 3)^{2/3} + 2t, 1 \leq t \leq 5 \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

Eulers bakåtmetod:

$$y_{k+1} = y_k + h\, f(t_{k+1}, y_{k+1})$$
$$= y_k + h\left(3\left(y_{k+1} - t_{k+1}^2 + 3\right)^{2/3} + 2t_{k+1}\right)$$
$$y_{k+1} - y_k - h\left(3\left(y_{k+1} - t_{k+1}^2 + 3\right)^{\frac{2}{3}} + 2t_{k+1}\right) = 0$$
$$g(y_{k+1}) = y_{k+1} - y_k - h\left(3\left(y_{k+1} - t_{k+1}^2 + 3\right)^{\frac{2}{3}} + 2t_{k+1}\right)$$

$$\begin{cases} y_0 = -1 \\ y_1 = 0.77 \\ y_2 = 5.91 \\ y_3 = 12.88 \\ y_4 = 21.94 \end{cases} \text{med } h = 1 >< \begin{cases} y_0 = -1 \\ y_1 = 4 \\ y_2 = 14.24 \\ y_3 = 32.48 \\ y_4 = 62.20 \end{cases} \text{med } h = 1$$

Exempel 6.4:
Tillämpa trapetsmetoden på testproblemet

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y \\ y(0) = c \end{cases} \text{ med exakt lösning } y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$$

för att få fram approximationsordning och stabilitetsvillkor

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}[f(t_{k+1}, y_{k+1}) + f(t_k, y_k)] \\ &= y_k + \frac{h}{2}(\lambda y_{k+1} + \lambda y_k) \\ y_{k+1}(1 - h\lambda/2) &= y_k(1 + h\lambda/2) \\ y_{k+1} &= y_k\left(\frac{1 + h\lambda/2}{1 - h\lambda/2}\right) = c\left(\frac{1 + h\lambda/2}{1 - h\lambda/2}\right)^{k+1} \end{aligned} \quad \Leftarrow \begin{cases} y_1 = c\left(\frac{1 + h\lambda/2}{1 - h\lambda/2}\right) \\ y_2 = c\left(\frac{1 + h\lambda/2}{1 - h\lambda/2}\right)^2 \\ \vdots \end{cases}$$

Exempel 6.4: lösa begynnelsesvärdesproblemet

$$\begin{cases} y'(t) = 3(y - t^2 + 3)^{2/3} + 2t, 1 \le t \le 5 \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

med Eulers framåtmetod som prediktor och trapetsmetod som korrektor.

- Exakt lösning och numerisk lösning med Eulers framåtmetod

$$\begin{cases} y(1) = -1 \\ y(2) = 9 \\ y(3) = 33 \\ y(4) = 77 \\ y(5) = 147 \end{cases} \text{ och } \begin{cases} y_0 = -1 \\ y_1 = 4 \\ y_2 = 14.24 \\ y_3 = 32.48 \\ y_4 = 62.20 \end{cases} \text{ med } h = 1$$

$$y_1^{(0)} = 4$$

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2}\left[f\left(t_1, y_1^{(0)}\right) + f(t_0, y_0)\right]$$

$$= -1 + \frac{1}{2}\left[3(4 - 2^2 + 3)^{\frac{2}{3}} + 4 + 3(-1 - 1^2 + 3)^{\frac{2}{3}} + 2\right]$$

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= 6.6201 \\ y_1^{(2)} &= 8.2416 \\ &\vdots \\ y_1^{(16)} &= 9.9809 \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{cases} y_0 = -1 \\ y_1^{(16)} = 9.9810 \\ y_2^{(11)} = 36.9176 \\ y_3^{(10)} = 82.8032 \\ y_4^{(9)} = 156.6362 \end{cases}$$

Exempel 6.5: lösa randvärdesproblemet

$$(RVP)\begin{cases} y''+y'=3t^2+8t \\ y(1)=-1 \\ y(5)=147 \end{cases}$$

med $h=1$.

$$\begin{pmatrix} -2\alpha+\gamma h^2 & \alpha+\frac{\beta h}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha-\frac{\beta h}{2} & -2\alpha+\gamma h^2 & \alpha+\frac{\beta h}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \alpha-\frac{\beta h}{2} & -2\alpha+\gamma h^2 & \alpha+\frac{\beta h}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha-\frac{\beta h}{2} & -2\alpha+\gamma h^2 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} h^2 f_2-\left(\alpha-\frac{\beta h}{2}\right)c_1 \\ h^2 f_3 \\ \vdots \\ h^2 f_{n-2} \\ h^2 f_{n-1}-\left(\alpha+\frac{\beta h}{2}\right)c_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1.5 & 0 \\ 0.5 & -2 & 1.5 \\ 0 & 0.5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 28.5 \\ 51 \\ -140.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14.1 \\ 37.8 \\ 79.7 \end{pmatrix} >< \begin{cases} y(1)=-1 \\ y(2)=9 \\ y(3)=33 \\ y(4)=77 \\ y(5)=147 \end{cases}$$

Exempel 6.5: betrakta randvärdesproblemet

$$(RVP)\begin{cases} y''+y'=3t^2+8t \\ y(1)=-1 \\ y(5)=147 \end{cases}$$

Formulera om randvärdesproblemet (RVP) till ett system av begynnelsevärdesproblem (BVP)

$$\begin{cases} y''+y'=3t^2+8t \\ y(1)=-1 \\ y(5)=147 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'=y_2 & y_1(1)=-1 \\ y_2'=-y_2+3t^2+8t & y_2(1)=s \end{cases}$$

där s är obekant och är lösningen till

$$y_1(5,s)-147=0$$

- Om vi använda Sekantmetoden

$$s_{l+1}=s_l-(y_1(5,s_l)-147)\frac{s_l-s_{l-1}}{y_1(5,s_l)-y_1(5,s_{l-1})}\, l=1,2,...$$

- Hur kan man väljer s_{l-1} och s_l?
  - Med Eulers framåtmetod

$$y_{k+1}=y_k+h\,f(t_k,y_k) \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}^{(k+1)}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}^{(k)}+h\begin{pmatrix} y_2 \\ -y_2+3t^2+8t \end{pmatrix}^{(k)}$$

  - Om vi väljer $h=4$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}^{(1)}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}^{(0)}+4\begin{pmatrix} y_2 \\ -y_2+3t^2+8t \end{pmatrix}^{(0)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 147 \\ {y_2}^{(1)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ s \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} s \\ -s+11 \end{pmatrix}$$