måndag 10 oktober 2016

Mängdlära

Definitioner

En mängd innehåller element. De tecknas med versaler och dess element med gemener. Mängder skrivs med klammerparanteser, $A = \{1, 2, 3\}$. Det spelar ingen roll i vilken ordning elementen förekommer. Varje element måste vara unikt.

Låt A vara en mängd och a ett tal.

$a \in A$ ”a tillhör A” a är ett element som finns i A

$a \notin A$ ”a tillhör inte A” a är ett element som inte finns i A

Låt A vara en mängd som innehåller tal från 0 till 10. Istället för att skriva hela mängden kan det förkortas till: $A = \{1,2,3,\ldots,9,10\}$. Man använder då ellipsis / uteslutningstecken / aposiopesis för att indikera en förenkling. Notera att stegen bör tydliggöra mönstret.

Istället för att skriva ut alla element i en mängd så kan en mängd beskrivas med en mängdbyggare där alla element uppfyller ett givet villkor. Exempelvis kan $A = \{1,2,3,4,\ldots\}$ skrivas om som $A = \{n : n \in N\}$. Den generella metoden följer: Mängd = {objekt : villkor}.

$N = \{1,2,3,\ldots\}$ = de naturliga talen. Positiva heltal.

$Z = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ = de hela talen. Alla heltal.

$Q = \{a/b : a, b \in Z \text{ och } b \neq 0\}$ = de rationella talen. Bråktal.

R = rationella och irrationella tal, kan placeras på tallinjen. Reella tal.

$C = \{a+bi : a, b \in R\}$ = komplexa tal.

U = Universum, allt annat i sammanhanget.

$\varnothing$ = tomma mängden, innehåller inget.

$A \subseteq B$ = varje element i A finns i B. Delmängd.

$A \subset B$ = varje element i A finns i B. B innehåller även ytterligare element.

Således innebär $A \subseteq B$ att $A = B$ eller $A \subset B$.

$\complement A$ = komplement till A. Allt i Universum som inte finns i A. $\{x \in U : x \notin A\}$ alt. $U \setminus A$.

$A \cup B$ = alla element i A och i B. Union.

$A \cap B$ = alla element som A och B delar. Snitt.

$A \setminus B$ = alla element i A som inte finns i B. Differens.

Logik

Definitioner

$\neg P$ = negation, icke, ej, inverterat.

P	**¬P**
SANT	SANT
SANT	FALSKT
FALSKT	SANT
FALSKT	FALSKT

$P \wedge Q$ = konjunktion, P och Q måste stämma för att det ska vara sant.

P	**Q**	**P∧Q**
SANT	SANT	SANT
SANT	FALSKT	FALSKT
FALSKT	SANT	FALSKT
FALSKT	FALSKT	FALSKT

$P \vee Q$ = disjunktion, P eller Q måste stämma för att det ska vara sant.

P	**Q**	**P∨Q**
SANT	SANT	SANT
SANT	FALSKT	SANT
FALSKT	SANT	SANT
FALSKT	FALSKT	FALSKT

$P \Rightarrow Q$ = implikation, ”medför”, ”om, så”. Så fort P är sant bestämmer Q värdet. Är P falskt är hela uttrycket sant, oavsett värde på Q.

P	**Q**	**P⇒Q**
SANT	SANT	SANT
SANT	FALSKT	FALSKT
FALSKT	SANT	SANT
FALSKT	FALSKT	SANT

Prioritering:

1. Negation
2. Konjunktion
3. Disjunktion
4. Implikation
5. Ekvivalens

$\forall x : P(x)$ = allkvantifikator = ”för alla __ gäller att __ ”. Exempelvis $\forall a,b \in Z : a+b \in Z$ = för alla hela a och b gäller att a+b är helt.

Skillnaden mellan $\{x : P(x)\}$ och $\forall x : P(x)$ är att det första uttrycket är en mängd vars element uppfyller påståendet, det andra är enbart ett påstående.

$\exists x : P(x)$ = Existenskvantifikator = ”det existerar ett __ så att __”.

För att bevisa att en existenskvantifikator är sann gäller alltså att enbart hitta ett värde för vilket uttrycket är sant. Men för att bevisa att påståendet är falskt måste alla värden bevisas ge ett falskt utfall.

Tautologi = alltid sant oavsett värde, exempelvis $a=0 \Rightarrow ab = 0$ där b inte har en betydelse.

Induktionsbevis

Definitioner

Slutledningsschema / härledningsschema:

Premiss P(1) - numeriskt, enkel.

Premiss P(n) => P(n+1) -bevisa implikation.

Båda premisserna måste vara sanna för att slutsatsen ska vara sann.

Slutsats för alla n gäller att P(n) är sant. ($\forall n \in N : P(n)$)

Direktbevis:
Använd tidigare kända satser, definitioner eller självklarheter. *För alla två jämna heltal x och y gäller det att x = 2n och y = 2m för några heltal n och m, eftersom x och y är jämna. Men då är x + y = 2n+2m =2(n+m) alltså är summan också jämn.*

Motsägelsebevis:
Anta motsatsen och bevisa att det leder till en motsägelse - alltså måste det vara sant.

Låt $n \in N$ och låt $P(n)$ vara ett påstående.

$P(n) : 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$P(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \Rightarrow sant$

$P(2) : 1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2} = 3 \Rightarrow sant$

$P(3) : 1 + 2 + 3 = \frac{2(2+1)}{2} = 6 \Rightarrow sant$

Det är omöjligt att kontrollera alla möjligheter.

Bevis: induktion över n. Om $n = 1$ är $VL_1 = 1$ $HL_1 = \frac{1(n+1)}{2} = 1$

D.v.s. $VL_1 = HL_1$ bevisar att $P(1)$ är sant. Nu ska vi bevisa att $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ är sant. Detta gör vi med direkt bevis.

Antag att $P(n)$ är sann, d.v.s. $VL_n = HL_n \Leftrightarrow \underbrace{1 + 2 + 3 + ... + n}_{VL_n} = \frac{n(n+1)}{2}$

Då är

$$\begin{aligned} VL_{n+1} &= \underbrace{1 + 2 + 3 + ... + n}_{VL_n} + (n+1) \\ &= VL_n + (n+1) \\ &= HL_n + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \\ &= HL_{n+1} \end{aligned} \tag{1}$$

D.v.s. $P(n+1)$ är sant. Vi har visat att $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ är sant. Enligt induktionsprincipen följer att $P(n)$ är sann för $\forall n \in N$.

$P(n)$: $\frac{9^n-1}{8} \in$ icke-negativa heltal.

Bevis: induktion över n.

Då $n = 0$ är

$$\begin{aligned} \frac{9^n - 1}{8} &= \\ &= \frac{1-1}{8} \\ &= \frac{0}{8} \\ &= 0 \in Z \end{aligned} \tag{1}$$

D.v.s $P(0)$ är sant. Vi ska visa att $\frac{9^n-1}{8} \in Z$.

$\frac{9^n-1}{8} \in Z \Rightarrow \frac{9^{n+1}-1}{8} \in Z$.

Vi använder oss av direkt bevis. Antag att

$\frac{9^n-1}{8} \in Z$

Sätt $\frac{9^n-1}{8} = k$. K är således ett heltal. Vi har att

$$\begin{aligned} \frac{9^{n+1} - 1}{8} &= \frac{9^n * 9 - 9 + 8}{8} \\ &= \frac{9(9^n - 1)}{8} + \frac{8}{8} \\ &= 9 * \underbrace{\frac{9^n - 1}{8}}_{k} + 1 \\ &= \underbrace{9 * k + 1}_{\text{heltal}*\text{heltal}+\text{heltal}=\text{heltal}} \quad \in Z \end{aligned} \tag{2}$$

Vi har visat att

$\frac{9^n-1}{8} \Rightarrow \frac{9^{n+1}-1}{8}$

Induktionsprincipen ger att $P(n)$ är sant för alla icke-negativa heltal.

$n \in N$

$P(n)$: "n är mindre än 2^n"

eller

$P(n) : n < 2^n$

<u>Bevis</u>: induktion över n.

Då $n = 1$ är

$1 < 2^1$

D.v.s. att $P(1)$ är sant. Vi ska visa att $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. D.v.s.

$n < 2^n \Rightarrow n + 1 < 2^{n+1}$

$n \in N$. Vi gör ett direkt bevis.

Antag att P(n) är sant, d.v.s.

$n < 2^n$

då är

$$2^{n+1} = 2^n * 2 > n * 2 = \underbrace{n+n}_{\substack{\text{vi vill komma till} \\ n+1<2^{n+1} \\ \text{vi har naturliga tal:} \\ \text{ersätt med ett tal}}} \geq n + 1$$

d.v.s

$n + 1 < 2^n$

Vi har visat att $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Induktionsprincipen gör att $n < 2^n$ gäller för $\forall n \in N$.

$$\begin{aligned}
&1 = 1 && = 1^2 \\
&1+3 = 4 && = 2^2 \\
&1+3+5 = 9 && = 3^2 \\
&1+3+5+7 = 16 && = 4^2 \\
&1+3+5+7+8 = 25 && = 5^5
\end{aligned} \tag{1}$$

Vi påstår att

$P(n) : 1+3+5+...+(2n-1) = n^2$ gäller för alla $n \in N$

Bevis: induktion över n.

Då $n = 1$ är

$VL_1 = 1$

$HL_1 = 1^2 = 1$

D.v.s. $VL_1 = HL_1$.

Vi ska visa att

$$\underbrace{1+3+...+(2n-1)}_{VL_n} = \underbrace{n^2}_{HL_n} \Rightarrow \underbrace{1+3+...+(2(n+1)-1)}_{VL_{n+1}} = \underbrace{(n+1)^2}_{HL_{n+1}}$$

Vi använder direkt bevis. Antag att $VL_n = HL_n$.

$$\begin{aligned}
VL_{n+1} &= \underbrace{1+3+...+(2n-1)}_{VL_n} + (2(n+1)-1) \\
&= HL_n + (2n+1) \\
&= n^2 + (2n+1) = \underbrace{n^2+2n+1}_{\text{kvadreringsregeln}} \\
&= (n+1)^2 \\
&= HL_{n+1}
\end{aligned} \tag{2}$$

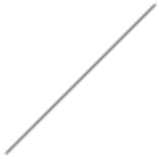
Enligt induktionsprincipen följer påståendet.

Låt $n \in N$. Givet n olika räta linjer i planet. Vad är det maximala antalet skärningspunkter?

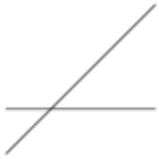
Låt $A(n)$ vara max antal skärningspunkter.

Exempelvis

$n = 1 \qquad A(n) = 0$

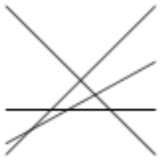


$n = 2 \quad A(n) = 1 = 0 + 1$

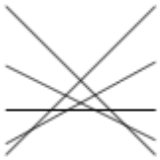


$n = 3 \quad A(n) = 3 = 1 + 2$

$n = 4 \quad A(n) = 6 = 3 + 3$



$n = 5 \quad A(n) = 10 = 6 + 4$



Påstående:

$P(n) : A(n) = \frac{n(n-1)}{2}$

<u>Bevis</u>: induktion över n

Vi såg ovan att $A(1) = 0$, se figur. Vidare är

$\frac{1*(1-1)}{2} = 0$

Det visar att $P(1)$ är sant.

Vi visar att $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ med hjälp av direkt bevis. Vi vill visa att

$$\underbrace{A(n) = \frac{n(n-1)}{2}}_{\text{Anta korrekt}} \Rightarrow A(n+1) = \tfrac{n+n((n+1)-1)}{2} = \tfrac{n(n+1)}{2}$$

Anta att $A(n) = \frac{n(n-1)}{2}$. I en figur med $n = 1$ linjer så studerar vi för en stund n styck av linjerna. Den $(n+1)$:e linjen kan som mest skära n stycken linjer. Alltså är

$$\begin{aligned} A(n+1) &= A(n) + n \\ &= \frac{n(n-1)}{2} + n \\ &= \frac{n(n-1) + 2n}{2} \\ &= \frac{\overbrace{n^2 - 2n + n}^{\text{kvadreringsregeln}} \; + 2n}{2} \\ &= \frac{n^2 + n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

Det visar att $P(n+1)$ är sann, då $P(n)$ är sann, d.v.s $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Induktionsprincipen medör att $P(1)$ är sann för alla $n \in N$.