

Solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales

Tema 3

Ing. Angel Brito Segura

angel.brito@fi.unam.edu



Facultad de Ingeniería, UNAM



Contenido



Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de Gauss-Jordan

Métodos de descomposición LU

Métodos iterativos

Método de Krylov

Método de potencias

Sistemas de ecuaciones lineales



- Son un conjunto de una o más ecuaciones lineales que involucran las mismas variables.
- Su solución es el conjunto de n valores que satisfacen todas las ecuaciones simultáneamente. Se pueden presentar 3 casos en esta solución:
 1. Que el sistema no tenga solución finita (*incompatible*).
 2. Que el sistema tenga solución finita única (*compatible determinado*).
 3. Que tenga más de una solución (*compatible indeterminado*).
- Para encontrar la solución se tiene la *técnica de eliminación*, donde se puede utilizar operaciones fundamentales sobre estas ecuaciones
- Este sistema puede representarse en forma matricial como:

$$Ax = b$$

Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales



Del sistema de ecuaciones matricial, se tiene que A es la matriz de coeficientes que es de tamaño $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

x es el vector de incógnitas de tamaño $n \times 1$:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Y la matriz b representa el vector de términos independientes que es de tamaño $n \times 1$:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Método de Gauss



- A través de las operaciones fundamentales aplicadas a la matriz de coeficientes A y al vector de términos independientes b , se convierte a la matriz A en una triangular superior donde la diagonal principal la constituyen números 1.
- El proceso comienza construyendo la matriz aumentada combinando A y b :

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right]$$

- Se aplican las operaciones fundamentales para transformarla a una matriz ampliada triangular superior:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b'_n \end{array} \right]$$

Ventajas y desventajas del Método de Gauss



Ventajas

- Método directo y sistemático, aplicable a cualquier sistema lineal que tenga solución única.
- Es eficiente para sistemas pequeños o medianos, permitiendo obtener la solución exacta en pocos pasos.
- Permite obtener la solución general de sistemas compatibles indeterminados.

Desventajas

- Es susceptible a errores de redondeo.
- Puede verse afectado por la aparición de ceros o valores muy pequeños en los pivotes, lo cual puede generar divisiones por cero o inestabilidad numérica.
- No es eficiente para sistemas muy grandes.

Método de Gauss-Jordan



- Extensión del método de Gauss on la diferencia que la matriz de coeficientes A se transforma en la identidad.
- Se aplican las operaciones fundamentales para transformar la matriz aumentada a una forma reducida por filas:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_n \end{array} \right]$$

Donde x_1, x_2, \dots, x_n son las soluciones del sistema de ecuaciones lineales.

Ventajas y desventajas del Método de Gauss-Jordan



Ventajas

- Permite resolver sistemas de ecuaciones lineales de manera directa y sistemática.
- Es especialmente útil para encontrar la matriz inversa de una matriz cuadrada.
- Elimina variables de todas las filas permitiendo obtener la solución de todas las incógnitas directamente desde la matriz escalonada.

Desventajas

- Susceptible a errores de redondeo, especialmente en sistemas grandes o cuando hay valores pequeños en los pivotes.
- Para sistemas grandes, el procedimiento requiere muchas operaciones.
- En presencia de ceros o valores muy pequeños en el pivote principal, puede ocurrir división por cero o fuerte amplificación de errores.

Estrategias de pivoteo para reducir errores



- El pivoteo es una técnica utilizada en los métodos de eliminación para mejorar la estabilidad numérica y reducir errores de redondeo.
- Consiste en intercambiar filas o columnas de la matriz para colocar el elemento más grande (en valor absoluto) en la posición del pivote.
- Existen dos tipos principales de pivoteo:
 1. **Pivoteo parcial:** Solo se intercambian filas. Se busca el elemento más grande en valor absoluto en la columna del pivote y se intercambia con la fila actual.
 2. **Pivoteo total:** Se intercambian tanto filas como columnas. Se busca el elemento más grande en valor absoluto en toda la submatriz restante y se intercambia con la posición del pivote.
- El uso de estas estrategias ayuda a minimizar los errores numéricos y mejora la precisión de los resultados obtenidos mediante los métodos de eliminación.

Métodos de descomposición LU



- Este método permite descomponer una matriz cuadrada **A** de orden $n \times n$ en el producto de dos matrices:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

donde **L** es una matriz triangular inferior y **U** es una matriz triangular superior.

- Al sustituir **A**, el sistema se transforma en:

$$\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$$

- Definiendo una matriz intermedia $\mathbf{y} = \mathbf{Ux}$, podemos resolver el problema en dos pasos computacionalmente eficientes:
 1. **Sustitución Hacia adelante** (progresiva): Resolver $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ para **y**.
 2. **Sustitución Hacia atrás** (regresiva): Resolver $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ para **x**.
- Para que realizarla se tienen dos formas: Doolittle y Crout.

Método de Doolittle



Esta descomposición define que la matriz **L** sea **unitaria**. Es decir, todos los elementos de su diagonal principal son 1, teniendo la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Para calcular los elementos de las matrices **L** y **U**, se cuenta con las siguientes fórmulas:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}}{u_{jj}}$$

Es crucial que $u_{jj} \neq 0$ en cada paso. Si esto no se cumple, la descomposición directa falla y se requiere pivoteo.

Método de Crout



Por su parte, esta descomposición define que la matriz **U** sea **unitaria**. Es decir, todos los elementos de U en su diagonal principal son 1, teniendo la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular los elementos de las matrices **L** y **U**, se cuenta con las siguientes fórmulas:

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \quad u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}}{l_{ii}}$$

Es crucial que $l_{ii} \neq 0$ en cada paso. Si esto no se cumple, la descomposición directa falla y se requiere pivoteo.

Ventajas y desventajas del Método de descomposición LU



Ventajas

- Eficiencia para múltiples sistemas de ecuaciones con la misma matriz de coeficientes, debido a que la descomposición solo se realiza una vez.
- Cálculo eficiente del determinante y de la matriz inversa.
- Buena estabilidad numérica cuando se implementa con una estrategia de pivoteo parcial, la descomposición es numéricamente estable y robusta para una amplia gama de matrices.

Desventajas

- Costoso para matrices grandes que tienen muchos ceros (matrices esparzas), ya que consume mucha memoria y tiempo el almacenamiento de tantos ceros.
- Falla al encontrar un cero en la posición del pivote (u_{jj} en Doolittle o l_{jj} en Crout).
- Restringido a matrices cuadradas y no es más rápido para un solo sistema de ecuaciones.

Métodos iterativos



- A diferencia de los métodos directos, aquí se genera una secuencia de aproximaciones que convergen hacia la solución deseada.
- Son especialmente útiles para sistemas grandes y dispersos, donde los métodos directos pueden ser computacionalmente costosos.
- La derivación se basa en descomponer la matriz A en tres componentes:
 1. D : Una matriz diagonal que contiene solo la diagonal principal de A .
 2. L : Una matriz triangular estrictamente inferior.
 3. U : Una matriz triangular estrictamente superior.

De tal manera que:

$$A = D + L + U$$

El sistema $Ax = b$ se puede reescribir como $(D + L + U)x = b$.

Método de Jacobi



- Su idea central es resolver para la diagonal.^{en} cada iteración, usando *exclusivamente* los valores de la iteración anterior.
- El proceso se repite hasta que las aproximaciones converjan a una solución dentro de un margen de error predefinido.
- Para calcular cualquier componente de $x^{(k+1)}$, solo se necesitan los componentes de $x^{(k)}$. Esto significa que todos los nuevos valores $x_i^{(k+1)}$ pueden calcularse en paralelo, de forma independiente.

Derivación iterativa del Método de Jacobi



Partimos del sistema $Ax = b$. Para la i -ésima ecuación:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$$

Despejamos el término $a_{ii}x_i$ (asumiendo que $a_{ii} \neq 0$):

$$a_{ii}x_i = b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j$$

Ahora, convertimos esto en una fórmula iterativa. Para calcular el nuevo valor $x_i^{(k+1)}$ en la iteración $k + 1$, usamos *todos* los valores de la iteración anterior, $x^{(k)}$:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right)$$

Derivación matricial del Método de Jacobi



Partimos de $(D + L + U)x = b$ y lo reescribimos como:

$$Dx = b - (L + U)x$$

Convertimos esto en la relación iterativa:

$$Dx^{(k+1)} = b - (L + U)x^{(k)}$$

Finalmente, despejamos $x^{(k+1)}$ (multiplicando por D^{-1} , que es trivial de calcular, ya que es la inversa de una matriz diagonal):

$$x^{(k+1)} = D^{-1} (b - (L + U)x^{(k)})$$

A la matriz $T_J = -D^{-1}(L + U)$ se le llama la **matriz de iteración de Jacobi**.

Método de Gauss-Seidel



- Mejora (refinamiento) del método de Jacobi. Se basa en la siguiente observación:
Si ya he calculado un nuevo valor $x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k+1)}$, etc., ¿por qué no usarlos inmediatamente en lugar de esperar a la siguiente iteración?
- Este enfoque suele converger más rápido que el método de Jacobi debido al uso inmediato de los valores actualizados.
- El cálculo es inherentemente secuencial. Para calcular $x_3^{(k+1)}$, *necesitas* haber calculado primero $x_1^{(k+1)}$ y $x_2^{(k+1)}$ en esa misma iteración. Esto hace que sea más difícil de paralelizar, pero generalmente converge más rápido que Jacobi.

Derivación iterativa del Método de Gauss-Seidel



Al igual que en Jacobi, despejamos x_i y la suma en dos partes: los términos que vienen *antes* de i y los que vienen *después*:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j < i} a_{ij} x_j - \sum_{j > i} a_{ij} x_j \right)$$

Ahora, aplicamos la idea de Gauss-Seidel:

- Para los términos $j < i$, usamos los valores **recién calculados** en la iteración actual ($k + 1$).
- Para los términos $j > i$, usamos los valores de la iteración anterior (k), ya que aún no los hemos actualizado.

Esto nos da la fórmula de iteración de Gauss-Seidel:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j < i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j > i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Derivación matricial del Método de Gauss-Seidel



Partimos de $(D + L + U)x = b$ y agrupamos los términos de manera diferente:

$$(D + L)x = b - Ux$$

Convertimos esto en la relación iterativa. Los términos de la "nueva" iteración $k + 1$ están a la izquierda, y los "viejos" de la iteración k a la derecha:

$$(D + L)x^{(k+1)} = b - Ux^{(k)}$$

Despejamos $x^{(k+1)}$ (esto implica resolver un sistema triangular inferior, lo cual es rápido mediante sustitución hacia adelante):

$$x^{(k+1)} = (D + L)^{-1} (b - Ux^{(k)})$$

La **matriz de iteración de Gauss-Seidel** es $T_{GS} = -(D + L)^{-1} U$.

Convergencia de los método iterativos



- Ninguno de estos métodos tiene garantía de funcionar siempre. La convergencia depende de las propiedades de la matriz A .
- Condiciones suficientes para la convergencia incluyen:
 1. La matriz A es estrictamente diagonal dominante.
 2. La matriz A es simétrica positiva definida.
- En la práctica, se monitorea la norma del residuo o la diferencia entre iteraciones sucesivas para determinar cuándo detener el proceso iterativo.

Condición suficiente: Dominancia Diagonal



La condición más simple y común para garantizar la convergencia de *ambos* métodos es que la matriz A sea **estrictamente diagonal dominante**. Una matriz es estrictamente diagonal dominante si, para cada fila, el valor absoluto del elemento en la diagonal es *mayor* que la suma de los valores absolutos de todos los demás elementos en esa fila:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n$$

Si una matriz cumple esta condición, tanto Jacobi como Gauss-Seidel convergerán a la solución única, sin importar el vector inicial $x^{(0)}$ que se elija.

Condición Necesaria y Suficiente: Radio Espectral



La condición formal de convergencia es que el **radio espectral** (el máximo valor absoluto de los eigenvalores) de la matriz de iteración (T_J o T_{GS}) sea estrictamente menor que 1.

$$\rho(T) < 1$$

- El **Teorema de Stein-Rosenberg** establece que si A tiene elementos no positivos fuera de la diagonal ($a_{ij} \leq 0$ para $i \neq j$) y elementos positivos en la diagonal ($a_{ii} > 0$), entonces ambos métodos convergen o ambos divergen. Si convergen, Gauss-Seidel lo hace más rápido (o a lo sumo, igual de rápido).

Ejemplo del Método Gauss-Seidel



Resolver el siguiente sistema, utilizando el método de Gauss-Seidel:

$$5x_1 + 2.2x_2 + x_3 = 2.5$$

$$4.5x_1 + 9.6x_2 + 1.1x_3 = 1$$

$$2.7x_1 + 4.6x_2 + 9.7x_3 = 3.9$$

Ventajas y desventajas de los métodos iterativos



Ventajas

- Eficiencia en memoria y tiempo computacional para sistemas grandes y dispersos.
- Flexibilidad para adaptarse a diferentes tipos de problemas y condiciones iniciales.
- Fácil de implementar y paralelizar, lo que permite aprovechar arquitecturas de computación modernas.

Desventajas

- Convergencia no garantizada para todos los sistemas; depende de las propiedades de la matriz (por ejemplo, diagonal dominante o simétrica positiva definida).
- Puede requerir muchas iteraciones para alcanzar una solución precisa, especialmente si la matriz tiene un mal condicionamiento.
- La elección de la condición inicial puede afectar significativamente la velocidad de convergencia.

Problema de Valores Característicos



El cálculo de los valores y vectores característicos de una matriz es de gran importancia en el análisis numérico, especialmente en temas de estabilidad y dinámica de sistemas, en la que dada una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se busca encontrar un escalar λ (**valor característico**) y un vector no nulo x (**valor característico**) tales que satisfagan la ecuación:

$$Ax = \lambda x$$

Esto es equivalente a encontrar las raíces del polinomio característico:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Para matrices pequeñas, esto se puede resolver analíticamente. Sin embargo, para matrices grandes (típicas en problemas reales), esto es computacionalmente inviable por lo que los métodos numéricos iterativos se vuelven esenciales para poder resolver este problema.

Método de Krylov



El método de Krylov se basa en el *teorema de Cayley-Hamilton*, el cual establece que toda matriz cuadrada A satisface su propio polinomio característico:

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \dots + b_n = 0$$

La idea del método consiste en evitar el cálculo directo del determinante $|A - \lambda I|$. En su lugar, se elige un vector $y \neq 0$ y se generan los vectores:

$$y_0 = y, \quad y_1 = Ay, \quad y_2 = A^2y, \quad \dots, \quad y_n = A^ny$$

De la ecuación matricial anterior se obtiene:

$$A^ny + b_1A^{n-1}y + b_2A^{n-2}y + \dots + b_ny = 0$$

Lo que se traduce en el sistema lineal:

$$[y_{n-1} \ y_{n-2} \ \dots \ y_0] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = -y_n$$

Resolviendo este sistema, se obtienen los coeficientes del polinomio característico. Luego, las raíces de dicho polinomio son los valores propios.

Ejemplo del Método de Krylov



Obtener el polinomio característico de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ventajas y desventajas del Método de Krylov



Ventajas

- Permite obtener el polinomio característico de la matriz sin necesidad de calcular determinantes, lo que es computacionalmente costoso.
- Es adecuado para matrices grandes, especialmente dispersas, ya que trabaja en subespacios de dimensión reducida.
- Aprovecha el teorema de Cayley-Hamilton para sustituir cálculos directos por sistemas lineales más manejables.

Desventajas

- Requiere seleccionar apropiadamente el vector inicial para asegurar que el sistema resultante sea compatible y que el método funcione correctamente.
- No siempre es sencillo de implementar en comparación con métodos iterativos simples.
- No permite directamente obtener los vectores propios, solo el polinomio característico (aunque estos pueden calcularse después).

Método de potencias I



El método de las potencias es un procedimiento iterativo que permite determinar el valor propio dominante (de mayor magnitud) y su vector propio asociado. En este método suponemos que la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable y tiene n valores característicos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ con sus respectivos vectores característicos x_1, x_2, \dots, x_n . El método asume que existe un único valor característico dominante, es decir:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

Cualquier vector inicial $v^{(0)}$ (que no sea ortogonal a x_1) se puede expresar como una combinación lineal de la base de vectores característicos:

$$v^{(0)} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad (\text{con } c_1 \neq 0)$$

Método de potencias II



Ahora, aplicamos la matriz A repetidamente a $v^{(0)}$:

$$\begin{aligned} v^{(1)} &= Av^{(0)} = c_1(Ax_1) + c_2(Ax_2) + \cdots + c_n(Ax_n) \\ &= c_1(\lambda_1 x_1) + c_2(\lambda_2 x_2) + \cdots + c_n(\lambda_n x_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^{(2)} &= Av^{(1)} = c_1 \lambda_1 (Ax_1) + c_2 \lambda_2 (Ax_2) + \cdots \\ &= c_1 \lambda_1^2 x_1 + c_2 \lambda_2^2 x_2 + \cdots + c_n \lambda_n^2 x_n \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$v^{(k)} = A^k v^{(0)} = c_1 \lambda_1^k x_1 + c_2 \lambda_2^k x_2 + \cdots + c_n \lambda_n^k x_n$$

Podemos factorizar el término dominante λ_1^k :

$$v^{(k)} = \lambda_1^k \left(c_1 x_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k x_2 + \cdots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k x_n \right)$$

Método de potencias III



Dado que $|\lambda_1| > |\lambda_i|$ para $i > 1$, tenemos que $\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right| < 1$. Por lo tanto, a medida que $k \rightarrow \infty$, todos los términos $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \rightarrow 0$.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v^{(k)} \approx \lambda_1^k c_1 x_1$$

Esto significa que el vector $v^{(k)}$ se alinea progresivamente con la dirección del vector característico dominante x_1 .

Algoritmo del Método de potencias



1. Elegir un vector inicial $x^{(0)} \neq 0$.
2. Obtener el vector característico:

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)}$$

3. Estimar el valor característico propio dominante:

$$\lambda^{(k)} = \frac{x_j^{(k)}}{x_j^{(k-1)}}$$

4. Repetir hasta que $\left| \frac{\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}}{\lambda^{(k)}} \right| * 100 \% < \varepsilon$, para cierta tolerancia.

Ejemplo del Método de potencias



Obtener el valor propio dominante de la siguiente matriz y vector inicial:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ventajas y desventajas del Método de potencias



Ventajas

- Es simple y fácil de implementar.
- Funciona bien con matrices grandes y dispersas donde los métodos directos son poco prácticos.
- Requiere solo multiplicaciones sucesivas de la matriz por vectores, sin necesidad de resolver sistemas lineales.

Desventajas

- Solo converge al valor propio dominante, por lo que no es útil para obtener otros valores propios fácilmente.
- La convergencia puede ser lenta si el valor propio dominante no está muy separado del segundo mayor.
- No da información sobre valores propios complejos o múltiples sin modificaciones o métodos complementarios.



Referencias I

- [1] R. L. Burden y J. D. Faires, *Numerical Analysis*. Brooks Cole, 2005.
- [2] S. C. Chapra y R. P. Canale, *Métodos Numéricos para Ingenieros*. McGraw-Hill Interamericana, 2007.
- [3] E. G. Maximenko, «Estrategias de pivoteo,» (2021), dirección: http://esfm.egormaximenko.com/numerical_methods/pivoting_es.pdf.
- [4] «Estrategias de Pivoteo para Reducir Los Errores,» (2025), dirección: <https://es.scribd.com/document/654762072/Estrategias-de-pivoteo-para-reducir-los-errores>.
- [5] «Metodo de Doolittle y Crout,» (2025), dirección: <https://www.scribd.com/document/559185252/Metodo-de-Doolittle-y-Crout>.
- [6] J. de la Fuente O'Connor, «Métodos iterativos de resolución,» (2024), dirección: https://www.jldelafuenteoconnor.es/Clase_itera.pdf.
- [7] E. de Cálculo Numérico, (2009), dirección: https://www.dm.uba.ar/materias/elementos_calculo_numerico_M/2009/2/numerico3.pdf.

Referencias II



- [8] «Metodo Krylov,» (2025), dirección:
<https://es.scribd.com/document/482869570/Metodo-Krylov>.
- [9] «MÉTODO DE LAS POTENCIAS | PPTX,» (2017), dirección:
<https://es.slideshare.net/slideshow/mtodo-de-las-potencias-79755904/79755904>.