Solución numérica de ecuaciones algebraicas y trascendentes

Tema 2

Ing. Angel Brito Segura

angel.brito@fi.unam.edu

Facultad de Ingeniería, UNAM

Coordinación de Ciencias Aplicadas | DCB

Contenido

Métodos cerrados

- Conjunto de algoritmos que encuentran soluciones a problemas de búsqueda de raíces [1].
- Se utiliza con una función cambia de signo en la vecindad de una raíz.
- También se conocen como ***método de intervalos***, porque se necesita de dos valores iniciales para calcular la raíz.

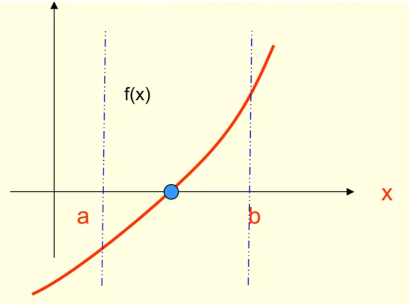

Figura: Función con una sola raíz en el intervalo [a,b]

Teorema del valor intermedio

Teorema de Bolzano

Supongamos que una función **f** es continua en un intervalo cerrado [a,b] y que L es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces existe al menos un valor ***c*** en el intervalo [a,b] tal que $f(c) = L$

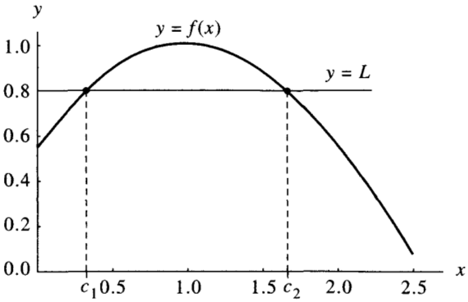

Figura: Función $f(x) = cos(x - 1)$ [2]

Métodos de Búsqueda Incremental

En general...

Si $f(x)$ es real y continua en el intervalo [a,b]. Además, f(a) y f(b) tienen signos opuestos, es decir $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces hay al menos una raíz real entre a y b.

Estos métodos utilizan esta característica para encontrar un intervalo donde la función cambie de signo y dividen el intervalo en subintervalos para encontrar otro cambio de signo, y, en consecuencia, la raíz.

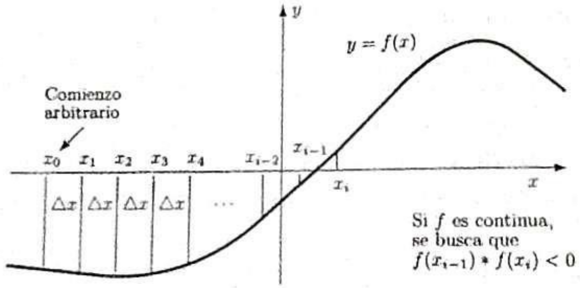

Figura: Búsquedas incrementales

Método de Bisección

- Algoritmo numérico utilizado para encontrar raíces de ecuaciones [3].
- Es un tipo de búsqueda incremental en el que el intervalo se divide siempre a la mitad y selecciona el subintervalo que cambia de signo.
- Se basa en el teorema del valor intermedio, el cual nos indica que existe un número **p** en [a,b] tal que $f(p) = 0$.
- Este método requiere dividir varias veces a la mitad los subintervalos de [a,b] y, en cada iteración, localizar la mitad que contenga a p.

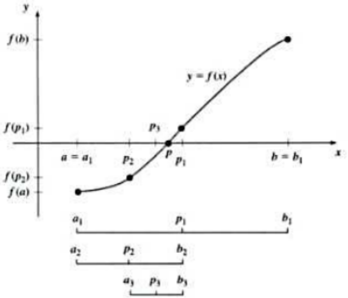

Figura: Método de Bisección

Algoritmo de Búsqueda Binaria

Este método consiste en ir acercando los extremos del intervalo hasta obtener uno muy pequeño en el que se localice un cero. El proceso es el siguiente:

1. Elegir un intervalo inicial $[a, b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$.
2. Calcular el punto medio $c = \frac{a+b}{2}$.
3. Evaluar $f(c)$:
   1) Si $f(a)$ y $f(c)$ tienen signos opuestos ($f(a) \cdot f(c) < 0$), entonces hay un cero (raíz) en $[a, c]$, realizar $b = c$ y volver al paso 2.
   2) Si $f(c)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos ($f(a) \cdot f(c) > 0$), entonces hay un cero (raíz) en $[c, b]$, realizar $a = c$ y volver al paso 2.
   3) Si $f(a) \cdot f(c) = 0$, entonces c es la raíz.

Ventajas y desventajas del Método de Bisección

Ventajas

- Siempre converge en una solución.
- Fácil de implementar.
- Robustez.
- Estabilidad.

Desventajas

- Converge lentamente.
- Necesita que la función tenga un cambio de signo en el intervalo inicial.
- Solo encuentra una raíz.
- Sirve únicamente para funciones continuas en el intervalo dado.

Método de Interpolación lineal (regla falsa)

- Aproxima la raíz mediante la intersección de la recta secante (uniendo los puntos $f(a)$ y $f(b)$) con el eje x.
- Requiere de un intervalo [a, b] que pertenece al dominio de la función y para el cual $f(a) \cdot f(b) = 0$, lo que implica que en el intervalo [a, b] existe al menos una raíz.
- Combina la garantía de convergencia del método de Bisección con una convergencia más rápida en algunos casos.

Algoritmo del Método de Regla Falsa

Este método propone unir los puntos `f(a)` y `f(b)` con una línea recta de tal forma que se construya una cuerda. Esta línea recta deberá cortar al eje de las abscisas para la primera aproximación a la raíz buscada.

1. Elegir un intervalo inicial $[a, b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$.
2. Calcular el punto $c = a + \frac{(a-b)f(a)}{f(b)-f(a)}$.
3. Evaluar $f(c)$:
   1) Si $f(a)$ y $f(c)$ tienen signos opuestos ($f(a) \cdot f(c) < 0$), entonces hay un cero (raíz) en $[a, c]$, realizar $b = c$ y volver al paso 2.
   2) Si $f(c)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos ($f(a) \cdot f(c) > 0$), entonces hay un cero (raíz) en $[c, b]$, realizar $a = c$ y volver al paso 2.
   3) Si $f(a) \cdot f(c) = 0$, entonces c es la raíz.

Ventajas y desventajas del Método de Interpolación lineal

Ventajas

- Convergencia más rápida que Bisección en muchos casos.
- Mantiene la garantía de convergencia si $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Desventajas

- Puede “atascarse” si un extremo casi no cambia.
- Menos eficiente en funciones muy curvas.

Métodos abiertos

- Requieren una o dos aproximaciones iniciales, no un intervalo.
- La raíz no está garantizada, puede divergir.

Característica	**Métodos Cerrados**	**Métodos Abiertos**
Datos iniciales	Intervalo $[a, b]$ con $f(a) \cdot f(b) < 0$	Una o dos aproximaciones iniciales
Garantía de convergencia	Siempre convergen (si f es continua y cambia de signo)	No garantizan convergencia
Velocidad de convergencia	Lenta (lineal o sublineal)	Rápida (puede ser cuadrática o superior)
Ejemplos	Bisección, Regla Falsa	Punto Fijo, Newton-Raphson, Factores Cuadráticos

Método de Aproximaciones Sucesivas (punto fijo)

- Esencia de los procesos iterativos, ya que toma un valor inicial que se mejora a través de ellas.
- Se basa en la idea de reescribir la ecuación $f(x) = 0$ en la forma $x = g(x)$.
- A partir de una aproximación inicial x_0, se generan sucesivas aproximaciones mediante la fórmula iterativa $x_{n+1} = g(x_n)$.
- La convergencia del método depende de las propiedades de la función $g(x)$, como su continuidad y la magnitud de su derivada en el intervalo considerado.

Algoritmo del Método de Aproximaciones Sucesivas

1. Reescribir $f(x) = 0$ en la forma $x = g(x)$.
2. Elegir una aproximación inicial x_0.
3. Calcular:
$$x_{k+1} = g(x_k)$$
4. Repetir hasta que el error relativo sea menor que la tolerancia solicitada o que el criterio de convergencia no se cumpla:
$$|g'(x)| < 1$$

Ventajas y desventajas del Método de Punto fijo

Ventajas

- Método sencillo de aplicar.
- Requiere menos cálculos por iteración en comparación con otros métodos.
- Puede converger rápidamente si la función $g(x)$ está bien elegida.

Desventajas

- No siempre garantiza convergencia.
- La elección de $g(x)$ afecta directamente el resultado.
- Puede ser lento si la derivada de $g(x)$ es cercana a 1 en el intervalo.

Método de Newton-Raphson (tangentes)

- Es uno de los métodos más utilizados junto con el de Bisección.
- Su preferencia radica en su robustez y velocidad para encontrar la raíz cuando la aproximación cumple con su criterio de convergencia.
- Aplicación en ecuaciones algebraicas y trascendentes y proporciona raíces reales y complejas.

Algoritmo del Método de Newton-Raphson

1. Elegir una aproximación inicial x_0.

2. Calcular:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

3. Repetir hasta que el error relativo sea menor que la tolerancia solicitada o que el criterio de convergencia no se cumpla:

$$|g'(x)| < 1$$

Donde:

$$g'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}$$

Ventajas y desventajas del Método de Newton-Raphson

Ventajas

- Convergencia rápida (cuadrática).
- Muy eficiente si se aproxima bien a la raíz.
- Puede encontrar raíces múltiples y complejas.

Desventajas

- Necesita calcular derivadas.
- Puede divergir si la aproximación inicial es mala.
- No sirve si $f'(x) = 0$ en algún paso.

Método de Factores Cuadráticos (Lin-Bairstow)

- Consiste en extraer polinomios de grado mayor a dos pares de raíces.
- Requiere de dos aproximaciones iniciales para comenzar el proceso iterativo.
- Si el polinomio es de grado mayor a 4, deberán extraerse raíces de dos en dos hasta que se agote el procedimiento.

Definición del método I

- Dado un polinomio de grado n:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

  donde los coeficientes $a_i \in \mathbb{R}$.

- El objetivo es encontrar un factor cuadrático de $P(x)$. Por conveniencia en la deducción, definimos este factor como: $x^2 + Px + Q$ y lo dividimos en el polinomio:

$$\begin{aligned}P(x) &= (x^2 + Px + Q)(b_0 x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + \cdots + b_{n-2}) + Rx + S \\ &= b_0 x^n + Pb_0 x^{n-1} + Qb_0 x^{n-2} + b_1 x^{n-1} + Pb_1 x^{n-2} + \dots \\ &\quad + b_{n-2} x^2 + Pb_{n-2} x + Qb_{n-2} + Rx + S\end{aligned}$$

Definición del método II

- Utilizando la propiedad de igualdad de polinomios, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
a_n &= b_0 \\
a_{n-1} &= b_1 + Pb_0 \\
a_{n-2} &= b_2 + Pb_1 + Qb_0 \\
&\vdots \\
a_1 &= R + Pb_{n-2} + Qb_{n-3} \\
a_0 &= S + Qb_{n-2}
\end{aligned}
$$

- Con lo anterior se pueden obtener las ecuaciones de recurrencia.

Algoritmo del Método de Factores Cuadráticos I

1. Sea $P(x)$ un polinomio de grado n de la forma:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-1} x + a_n$$

2. Extraer los factores cuadráticos de la forma:

$$P(x) = (x^2 + Px + Q)(b_0 x^{n-2} + ... + b_{n-3} x + b_{n-2}) + Rx + S$$

3. Obtener los siguientes valores de P y Q donde i > 1:

$$P_{i+1} = P_i + \Delta P \quad \text{y} \quad Q_{i+1} = Q_i + \Delta Q$$

donde:

$$\Delta P = \frac{R}{b_{n-2}} \quad \text{y} \quad \Delta Q = \frac{S}{b_{n-2}}$$

para cuando i = 1, se toman los siguientes valores:

$$P_1 = Q_1 = 0 \quad \Delta P_1 = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \quad \Delta Q_1 = \frac{a_n}{b_{n-2}}$$

Algoritmo del Método de Factores Cuadráticos II

4. Calcular los coeficientes b_i mediante la siguiente relación de recurrencia:

$$b_k = a_k - Pb_{k-1} - Qb_{k-2}$$

   para $k = 0, 1, 2, ..., n-2$, con $b_{-1} = b_{-2} = 0$.
5. Calcular los residuos R y S:

$$R = a_{n-1} - Pb_{n-2} - Qb_{n-3}$$

$$S = a_n - Qb_{n-2}$$

6. Repetir los pasos 3 a 6 hasta que ΔP o ΔQ sean menores o iguales a la tolerancia, o bien, $Rx + S$ tiendan a 0.
7. Sustitur los valores finales obtenidos en el polinomio del paso 2 y obtener las raíces de cada factor cuadrático con la fórmula general de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Algoritmo del Método de Factores Cuadráticos III

Para el desarrollo del algoritmo se recomienda utilizar la siguiente tabla:

			$1^a Iter.$	$2^a Iter.$	$3^a Iter.$	$4^a Iter.$	...	$n\ Iter.$
		p						
		q						
a_0		b_0						
a_1		b_1						
a_2		b_2						
a_3								
a_4		b_{n-3}						
$\vdots$		b_{n-2}						
a_{n-1}		R						
a_n		S						
		Δp						
		Δq						

Figura: Esquema Tabular del Método de Lin-Bairstow (Factores Cuadráticos)

Ventajas y desventajas del Método de Lin-Bairstow

Ventajas

- Permite calcular raíces reales y complejas.
- No requiere conocer derivadas de alto orden.
- Eficiente para polinomios de grado alto.

Desventajas

- El proceso es más complejo.
- Puede no converger si las aproximaciones iniciales no son adecuadas.

Tarea 5

Serie Tema 2 del SEPAAN

Resolver los ejercicios 3, 7 y 10 con una tolerancia del 0.01 %, además en el ejercicio 7 también resolverlo con el método de Bisección respondiendo: *¿Cuál método es más eficiente? Justifique su respuesta.*

Método de factores cuadráticos

Obtener las raíces del polinomio $P(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$ para una tolerancia del 0.01 %.

Referencias

[1] S. C. Chapra y R. P. Canale, *Métodos Numéricos para Ingenieros*. McGraw-Hill Interamericana, 2007.

[2] J. H. Mathews y K. D. Fink, *Métodos Numéricos con MATLAB*. Prentice Hall, 2000.

[3] R. L. Burden y J. D. Faires, *Numerical Analysis*. Brooks Cole, 2005.