

## CHUYÊN ĐỀ

### BÀI GIẢNG MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

#### Mục tiêu

##### ❖ Kiến thức

- + Nhận biết được các dạng phương trình lượng giác thường gặp và cách giải.

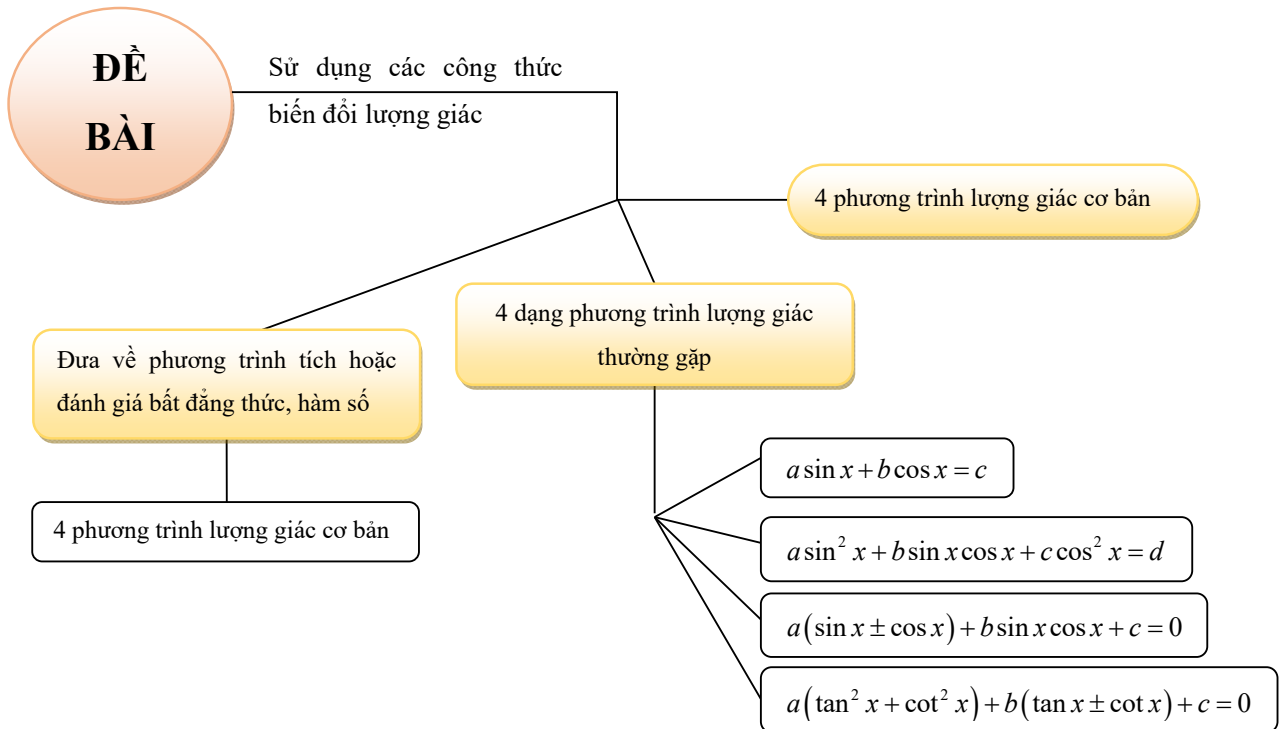
##### ❖ Kỹ năng

- + Biết áp dụng công thức nghiệm đối với từng phương trình lượng giác cơ bản.
- + Vận dụng phương pháp giải phương trình phù hợp vào từng trường hợp.

## I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

### SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

### SƠ ĐỒ CHUNG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC



## II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

### Dạng 1: Phương trình thuần nhất

#### ✚ Phương pháp giải

$$a \sin x + b \cos x = c \quad (a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Để giải phương trình có dạng trên, ta thực hiện theo các bước sau

#### Bước 1. Kiểm tra

- Nếu  $a^2 + b^2 < c^2$  phương trình vô nghiệm.

**Ví dụ:** Giải phương trình  $\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = 2$ .

#### Hướng dẫn giải

- Nếu  $a^2 + b^2 \geq c^2$  khi đó phương trình có nghiệm, ta thực hiện tiếp **Bước 2**.

**Bước 2.** Chia hai vế phương trình cho  $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$  ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (**)$$

Đặt  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha,$

phương trình (\*\*) trở thành

$$\sin x \cdot \cos \alpha + \cos x \cdot \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Phương trình  $\sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  là phương

trình lượng giác dạng cơ bản nên dễ dàng giải được.

**Một số dạng mở rộng:**

$$a \sin u + b \cos u = \sqrt{a^2 + b^2} \sin v$$

$$\longrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin u + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos u = \sin v$$

$$\Leftrightarrow \sin(u + \alpha) = \sin v.$$

$$a \sin u + b \cos u = \sqrt{a^2 + b^2} \cos v$$

$$\longrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin u + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos u = \cos v$$

$$\Leftrightarrow \cos(u - \alpha) = \cos v.$$

$$a \sin u + b \cos u = a' \sin v + b' \cos v \quad \text{với}$$

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$$

$$\longrightarrow \sin(u + \alpha) = \sin(v + \beta).$$

**Dạng đặc biệt:**

$$1) \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$2) \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Ta có  $\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = 2.$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x - \frac{1}{2} \cos 3x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm

$$x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$

### Ví dụ mẫu

**Ví dụ 1.** Giải phương trình  $\sin 2x + 2 \cos 2x = 1 + \sin x - 4 \cos x$ .

#### Hướng dẫn giải

Ta có  $\sin 2x + 2 \cos 2x = 1 + \sin x - 4 \cos x$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + 2(2 \cos^2 x - 1) - 1 - \sin x + 4 \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(2 \cos x - 1) + 4 \cos^2 x + 4 \cos x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(2 \cos x - 1) + (2 \cos x - 1)(2 \cos x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \cos x - 1)(2 \sin x + 2 \cos x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \\ 2 \sin x + 2 \cos x = -3 \end{cases}$$

Xét phương trình  $2 \sin x + 2 \cos x = -3$ ; có  $2^2 + 2^2 = 8 < (-3)^2$  nên vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Ví dụ 2.** Giải phương trình  $3 \sin 3x - \sqrt{3} \cos 9x = 1 + 4 \sin^3 3x$ .

#### Hướng dẫn giải

Ta có  $3 \sin 3x - \sqrt{3} \cos 9x = 1 + 4 \sin^3 3x \Leftrightarrow (3 \sin 3x - 4 \sin^3 3x) - \sqrt{3} \cos 9x = 1$

$$\Leftrightarrow \sin 9x - \sqrt{3} \cos 9x = 1 \Leftrightarrow \sin \left( 9x - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + k \frac{2\pi}{9} \\ x = \frac{7\pi}{54} + k \frac{2\pi}{9} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = \frac{\pi}{18} + k \frac{2\pi}{9}, x = \frac{7\pi}{54} + k \frac{2\pi}{9} (k \in \mathbb{Z})$ .

### Bài tập tự luyện dạng 1

**Câu 1:** Phương trình  $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1$  có nghiệm là

A.  $\begin{cases} x = -\pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

B.  $\begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

C.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

D.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 2:** Phương trình  $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$  có nghiệm âm lớn nhất bằng

A.  $-\frac{\pi}{3}.$

B.  $-\frac{\pi}{6}.$

C.  $-\frac{5\pi}{6}.$

D.  $-\frac{5\pi}{3}.$

**Câu 3:** Nghiệm của phương trình  $\sin x + \cos x = 1$  là

A.  $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

B.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

C.  $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

D.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 4:** Số nghiệm của phương trình  $\sin x + \cos x = 1$  trên khoảng  $(0; \pi)$  là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

**Câu 5:** Điều kiện để phương trình  $3\sin x + m\cos x = 5$  vô nghiệm là

A.  $\begin{cases} m \leq -4 \\ m \geq 4 \end{cases}$ .

B.  $m > 4$ .

C.  $m < -4$ .

D.  $-4 < m < 4$ .

**Câu 6:** Điều kiện để phương trình  $m\sin x - 3\cos x = 5$  có nghiệm là

A.  $m \geq 4$ .

B.  $-4 \leq m \leq 4$ .

C.  $m \geq \sqrt{34}$ .

D.  $\begin{cases} m \leq -4 \\ m \geq 4 \end{cases}$ .

**Câu 7:** Phương trình  $\sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = -1$  tương đương với phương trình nào sau đây?

A.  $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ .

B.  $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}$ .

C.  $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ .

D.  $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ .

**Câu 8:** Trong các phương trình sau phương trình nào có nghiệm?

A.  $\sqrt{3}\sin x = 2$ .

B.  $\frac{1}{4}\cos 4x = \frac{1}{2}$ .

C.  $2\sin x + 3\cos x = 1$ .

D.  $\cot^2 x - \cot x + 5 = 0$ .

**Câu 9:** Cho phương trình  $\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{2}$  trên đoạn  $[0; \pi]$ . Chọn câu trả lời đúng.

A. Phương trình có nghiệm  $x = \frac{\pi}{4}; x = \frac{3\pi}{4}$ .

B. Phương trình có nghiệm  $x = \frac{5\pi}{12}$ .

C. Phương trình có nghiệm  $x = \frac{3\pi}{7}; x = \frac{4\pi}{7}$ .

D. Phương trình có nghiệm  $x = \frac{2\pi}{5}$ .

**Câu 10:** Phương trình  $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$  có nghiệm là

A.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$ .

B.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{7} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$ .

C. 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{7} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

D. 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 11:** Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

A.  $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2.$

B.  $3 \sin x - 4 \cos x = 5.$

C.  $\sin x = \cos \frac{\pi}{4}.$

D.  $\sqrt{3} \sin x - \cos x = -3.$

**Câu 12:** Số nghiệm của phương trình  $\sin 2x - 2 \cos x = 0$  thuộc đoạn  $\left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 2.

**Câu 13:** Phương trình  $\cos 7x - \sqrt{3} \sin 7x = -\sqrt{2}$  có các họ nghiệm là

A. 
$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{84} + k\frac{2\pi}{7} \\ x = \frac{11\pi}{84} + k\frac{2\pi}{7} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

B. 
$$\begin{cases} x = \frac{-5\pi}{84} + k\frac{2\pi}{7} \\ x = \frac{11\pi}{84} + k\frac{2\pi}{7} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

C. 
$$\begin{cases} x = \frac{-\pi}{84} + k\frac{2\pi}{7} \\ x = \frac{\pi}{84} + k\frac{2\pi}{7} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

D. 
$$\begin{cases} x = \frac{-5\pi}{84} + k\frac{2\pi}{7} \\ x = \frac{-11\pi}{84} + k\frac{2\pi}{7} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 14:** Phương trình  $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$  có nghiệm dương nhỏ nhất bằng

A.  $\frac{2\pi}{3}.$

B.  $\frac{5\pi}{6}.$

C.  $\pi.$

D. 0.

**Câu 15:** Phương trình  $\tan x - \sin 2x - \cos 2x + 2\left(2 \cos x - \frac{1}{\cos x}\right) = 0$  có nghiệm dương nhỏ nhất bằng

A.  $\frac{\pi}{4}.$

B.  $\frac{\pi}{2}.$

C.  $\pi.$

D. 0.

**Câu 16:** Nghiệm của phương trình  $\sin x + \cos x = -1$  với  $k \in \mathbb{Z}$  là

A.  $x = k2\pi.$

B. 
$$\begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}.$$

C.  $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi.$

D. 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}.$$

**Câu 17:** Để phương trình  $2 \sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = m$  có nghiệm thì giá trị của  $m$  là

A.  $m \leq \frac{1 - \sqrt{10}}{2}.$

B.  $m = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{2}.$

C.  $m \geq \frac{1 + \sqrt{10}}{2}.$

D.  $\frac{1 - \sqrt{10}}{2} \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{10}}{2}.$

**Câu 18:** Phương trình  $\cos 2x + \sin x - 1 = 0$  có số họ nghiệm là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

**Câu 19:** Phương trình  $\tan x - \sin 2x - \cos 2x + 2\left(2 \cos x - \frac{1}{\cos x}\right) = 0$  có các họ nghiệm là

A.  $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

B.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C.  $x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

D.  $x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 20:** Cho phương trình  $\tan x - 3 \cot x = 4(\sin x + \sqrt{3} \cos x)$ . Với  $k \in \mathbb{Z}$  thì nghiệm của phương trình là

A.  $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{-4\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}$

B.  $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{4\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}$

C.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}$

D.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}$

## Dạng 2: Phương trình bậc hai của một hàm số lượng giác

### Phương pháp giải

Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng

giác có dạng tổng quát  $at^2 + bt + c = 0$ .

Trong đó:

$t$  là một trong các hàm số  $\sin u, \cos u, \tan u, \cot u$

và  $u = u(x)$ .

$a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .

Khi đặt ẩn phụ để giải ta phải lưu ý đến điều kiện của ẩn phụ. Nếu đặt

+)  $t = \sin u, t = \cos u$  thì điều kiện  $|t| \leq 1$ .

+)  $t = \sin^2 u, t = \cos^2 u$  thì điều kiện  $0 \leq t \leq 1$ .

+)  $t = |\sin u|, t = |\cos u|$  thì điều kiện  $0 \leq t \leq 1$ .

Khi tìm được  $t_1, t_2$  thỏa mãn thì phải giải tiếp

$\sin = t_1; \sin u = t_2; \dots$

### Ví dụ mẫu

**Ví dụ.** Giải phương trình  $3 \sin^2 2x + 7 \cos 2x - 3 = 0$ .

### Hướng dẫn giải

Ta có  $3 \sin^2 2x + 7 \cos 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 3(1 - \cos^2 2x) + 7 \cos 2x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow 3 \cos^2 2x - 7 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(3 \cos 2x - 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ 3 \cos 2x - 7 = 0 \end{cases}$$

Trường hợp 1:  $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$ .

**Ví dụ:** Giải phương trình  $2 \sin^2 x + \sin x - 3 = 0$ .

### Hướng dẫn giải

Đặt  $t = \sin x$ , điều kiện  $|t| \leq 1$ .

Phương trình đã cho trở thành

$$2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện  $|t| \leq 1$  ta được  $t = 1$ .

Với  $t = 1$  thì  $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

Vậy phương trình đã cho có nghiệm

$$x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Trường hợp 2:  $3 \cos 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{7}{3} > 1$  (loại).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm  $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$ .

### Bài tập tự luyện dạng 2

**Câu 1:** Phương trình  $2 \sin^2 x + \sin x - 3 = 0$  có nghiệm là

- A.  $k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .  
B.  $-\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .  
C.  $\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .  
D.  $-\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 2:** Với  $k \in \mathbb{Z}$ , phương trình  $\cos^2 x + 2 \cos x - 3 = 0$  có nghiệm là

- A.  $x = k2\pi$ .  
B.  $x = 0$ .  
C.  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ .  
D. Vô nghiệm.

**Câu 3:** Nghiệm dương bé nhất của phương trình  $2 \sin^2 x + 5 \sin x - 3 = 0$  là

- A.  $x = \frac{\pi}{6}$ .  
B.  $x = \frac{\pi}{2}$ .  
C.  $x = \frac{3\pi}{2}$ .  
D.  $x = \frac{5\pi}{6}$ .

**Câu 4:** Xét phương trình  $3 \cos^2 x - 2 \cos x - 4 = 0$  trên đoạn  $[0; 3\pi]$ . Chọn câu trả lời đúng.

- A. Phương trình có 3 nghiệm.  
B. Phương trình có 4 nghiệm.  
C. Phương trình có 2 nghiệm.  
D. Phương trình vô nghiệm.

**Câu 5:** Nghiệm của phương trình  $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$  thỏa mãn điều kiện  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  là

- A.  $x = \frac{\pi}{3}$ .  
B.  $x = \frac{\pi}{2}$ .  
C.  $x = \frac{\pi}{6}$ .  
D.  $x = \frac{5\pi}{6}$ .

**Câu 6:** Nghiệm của phương trình  $\tan^2 x + 2 \tan x + 1 = 0$  là

- A.  $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .  
B.  $-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
C.  $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
D.  $k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 7:** Với  $k \in \mathbb{Z}$ , phương trình  $\cos^2 2x + \cos 2x - \frac{3}{4} = 0$  có nghiệm là

- A.  $x = k\pi$ .  
B.  $x = k2\pi$ .  
C.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$ .  
D.  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ .

**Câu 8:** Với  $k \in \mathbb{Z}$ , phương trình  $\sin^2 x - 2 \sin x = 0$  có nghiệm là

- A.  $x = k2\pi$ .  
B.  $x = k\pi$ .  
C.  $x = \pi + k2\pi$ .  
D.  $x = -k2\pi$ .

**Câu 9:** Nghiệm của phương trình  $\cot^2 3x - \cot 3x - 2 = 0$  là

- A.  $x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3} \\ \frac{1}{3} \operatorname{arccot} 2 + k\frac{\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$ .  
B.  $x = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3} \\ -\frac{1}{3} \operatorname{arccot} 2 + k\frac{\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{C. } x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \frac{1}{3} \operatorname{arccot} 2 + k\frac{\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{D. } x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \frac{1}{3} \operatorname{arccot} 2 + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 10:** Nghiệm âm lớn nhất của phương trình  $2 \cos 2x + 2 \cos x - \sqrt{2} = 0$  là

A.  $x = -\frac{5\pi}{6}$ .

B.  $x = -\frac{7\pi}{6}$ .

C.  $x = -\frac{\pi}{3}$ .

D.  $x = -\frac{\pi}{4}$ .

**Câu 11:** Trong các phương trình sau phương trình nào có nghiệm?

A.  $\sqrt{3} \sin x = 2$ .

B.  $\frac{1}{4} \cos 4x = \frac{1}{2}$ .

C.  $2 \sin x + 3 \cos x = 5$ .

D.  $\cot^2 x - \cot x - 5 = 0$ .

**Câu 12:** Xét phương trình  $13 \sin^2 x - 78 \sin x + 15 = 0$  trên đoạn  $[0; 2\pi]$ . Lựa chọn phương án đúng.

A. Phương trình có 2 nghiệm.

B. Phương trình có 4 nghiệm.

C. Phương trình vô nghiệm.

D. Cả A, B, C đều sai.

**Câu 13:** Phương trình  $3 \cos x + 2|\sin x| = 2$  có nghiệm là

A.  $x = \frac{\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

B.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

C.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

D.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 14:** Xét phương trình  $\tan^2 x - \frac{4\sqrt{3}}{3} \tan x + 1 = 0$  trên đoạn  $[0; 3\pi]$ . Chọn câu trả lời đúng?

A. Phương trình có 5 nghiệm.

B. Phương trình có 4 nghiệm.

C. Phương trình có 6 nghiệm.

D. Phương trình có 3 nghiệm.

**Câu 15:** Xét phương trình  $\sin^2 x - 5 \sin x + 6 = 0$  trên đoạn  $[0; 2\pi]$ . Chọn câu trả lời đúng?

A. Phương trình có 2 nghiệm.

B. Phương trình có 4 nghiệm.

C. Cả A, B, D đều sai.

D. Phương trình có 3 nghiệm.

**Câu 16:** Cho  $x$  thỏa mãn phương trình sau  $(\tan x + \cot x)^2 - (\tan x + \cot x) = 2$

Giá trị của biểu thức  $\tan x + \frac{1}{\tan x}$  là

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D.  $\sqrt{2}$ .

**Câu 17:** Cho  $x$  thỏa mãn phương trình  $\sin x + \sin^2 \frac{x}{2} = 0,5$ . Giá trị của biểu thức  $y = \tan x$  là

A. 1.

B. 0,5.

C.  $\sqrt{3}$ .

D. 0.

**Câu 18:** Cho  $x = \arctan\left(\frac{-1}{3}\right) + k\pi$  là nghiệm của một trong phương trình sau, hỏi đó là phương trình nào?

A.  $3 \sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x = 0$ .

B.  $3 \sin^2 2x - 4 \cos^2 2x = 2$ .



$$C. \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{2}{\sin 4x}.$$

$$D. \cos x + 2 \cos^2 x = 0.$$

**Câu 19:** Cho phương trình  $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2 \cos x - \sin x} = \cos 2x$ . Nếu giải phương trình bằng cách đặt  $\tan x = t$  thì phương trình trên sẽ tương đương với phương trình nào dưới đây?

$$A. 2t^2 + t - 1 = 0.$$

$$B. t^2 + 2t - 1 = 0.$$

$$C. t^2 + t - \frac{1}{2} = 0.$$

$$D. t^2 + t + 1 = 0.$$

**Câu 20:** Cho phương trình  $2 \sin x - 2 \cos x = 1 - \sqrt{3}$ . Nếu giải phương trình bằng cách bình phương hai vế thì ta được phương trình nào sau đây?

$$A. \sin 2x = \sin \frac{\pi}{4}.$$

$$B. \sin 2x = \sin \frac{\pi}{6}.$$

$$C. \sin 2x = \sin \frac{\pi}{3}.$$

$$D. \cos 2x = \cos \frac{\pi}{3}.$$

### Dạng 3. Phương trình lượng giác đẳng cấp

#### Phương pháp giải

Phương trình lượng giác đẳng cấp có dạng tổng quát

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cos x + c \cdot \cos^2 x = d.$$

Ta có thể giải phương trình lượng giác đẳng cấp theo hai cách sau

#### Cách 1:

**Bước 1.** Kiểm tra  $\cos x = 0$  có là nghiệm của phương trình hay không, nếu có thì nhận nghiệm này.

**Bước 2.** Nếu  $\cos x \neq 0$  thì chia cả hai vế của phương trình cho  $\cos^2 x$  đưa về phương trình bậc hai theo  $\tan x$ .

$$(1) \Leftrightarrow a \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + b \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} + c \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{d}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow a \tan^2 x + b \tan x + c = d(1 + \tan^2 x).$$

**Bước 3.** Đặt  $t = \tan x$  đưa về phương trình bậc hai để giải.

**Ví dụ:** Giải phương trình sau

$$2\sqrt{3} \cos^2 x + 6 \sin x \cdot \cos x = 3 + \sqrt{3}. \quad (1)$$

#### Hướng dẫn giải

$$\text{Với } \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Thay vào phương trình (1) ta có  $0 = 3 + \sqrt{3} \Rightarrow$  phương trình vô nghiệm.

Với  $\cos x \neq 0$ . Chia cả hai vế của phương trình (1) cho  $\cos^2 x$  ta được

$$2\sqrt{3} + 6 \tan x = (3 + \sqrt{3})(1 + \tan^2 x)$$

$$\Leftrightarrow (3 + \sqrt{3}) \tan^2 x - 6 \tan x + 3 - \sqrt{3} = 0 \quad (2). \text{ Đặt}$$

$\tan x = t$  phương trình (2) trở thành

$$(3 + \sqrt{3})t^2 - 6t + 3 - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Cách 2:** Dùng công thức hạ bậc.

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2};$$

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Đưa phương trình đã cho về phương trình

$$b \sin 2x + (c - a) \cos 2x = d - c - a.$$

Đây là phương trình bậc nhất đối với sin và cosin ta đã biết cách giải ở dạng 1.

$$\text{Ta có } 2\sqrt{3} \cos^2 x + 6 \sin x \cdot \cos x = 3 + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}(1 + \cos 2x) + 3 \sin 2x = 3 + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm là

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

**Tổng quát:** Đối với phương trình đẳng cấp bậc

$$n \left( n \geq 2 : A(\sin^n x, \cos^n x, \sin^k x \cos^h x) = 0 \right) \text{ trong}$$

đó  $k + h = n; k, h, n \in \mathbb{N}$ , ta cũng giải tương tự theo hai cách.

**Cách 1:** Nếu  $\cos x \neq 0$  thì chia cả hai vế cho  $\cos^n x$ .

**Cách 2:** Dùng công thức hạ bậc.

 **Ví dụ mẫu**

**Ví dụ.** Cho phương trình  $2 \sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = m$ . Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm.

**Hướng dẫn giải**

- Nếu  $\cos x = 0 \Rightarrow$  Phương trình có dạng  $2\sin^2 x = m$

Để phương trình có nghiệm thì  $m = 2$ . (\*)

- Nếu  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$  thì ta chia cả hai vế của phương trình cho  $\cos^2 x$ .

Phương trình đã cho trở thành  $2\tan^2 x - \tan x - 1 - \frac{m}{\cos^2 x} = 0$

$$\Leftrightarrow (2-m)\tan^2 x - \tan x - m - 1 = 0. \quad (1)$$

Với  $m \neq 2$  thì phương trình (1) là phương trình bậc hai ẩn  $t = \tan x$ .

Xét  $\Delta = -4m^2 + 4m + 9$ .

Để phương trình đã cho có nghiệm thì  $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{10}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{10}}{2} \\ m \neq 2 \end{cases}. (**)$

Kết hợp (\*) và (\*\*), ta được  $\frac{1-\sqrt{10}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{0}}{2}$  là những giá trị cần tìm.

Vậy với  $\frac{1-\sqrt{10}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{0}}{2}$  thì phương trình đã cho có nghiệm.

### Bài tập tự luyện dạng 3

**Câu 1:** Phương trình  $\cos^2 x - 3\sin x \cos x - 2\sin^2 x = 1$  có nghiệm là

A.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

B.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

C.  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{-\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

D.  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{-\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**Câu 2:** Phương trình  $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$  có nghiệm là

A.  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

B.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

C.  $\begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

D.  $x = k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

**Câu 3:** Phương trình  $3\cos^2 4x + 5\sin^2 4x = 2 - 2\sqrt{3}\sin 4x \cdot \cos 4x$  có nghiệm là

A.  $x = \frac{-\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B.  $x = \frac{-\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

C.  $x = \frac{-\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

D.  $x = \frac{-\pi}{24} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 4:** Cho  $x$  thỏa mãn phương trình  $\sin^2 x + \frac{1-\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0$ . Giá trị nguyên của  $\tan x$  là

- A. 1.                                      B. -1.                                      C. 3.                                      D. 2.

**Câu 5:** Phương trình  $2\sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x = 1$  có nghiệm là

- A.  $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \arctan 2 + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$                                       B.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan 2 + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$
- C.  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \arctan 2 + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$                                       D.  $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan 2 + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 6:** Giải phương trình  $-\sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 1 = 2$  ta được nghiệm là

- A.  $x = \frac{-\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$                                       B.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- C.  $\begin{cases} x = \arctan \frac{1+\sqrt{3}}{2} + k\pi \\ x = \arctan \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$                                       D.  $x = \frac{-\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 7:** Cho  $x$  thỏa mãn phương trình  $\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cdot \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cdot \cos x$ . Giá trị nguyên của  $\tan x$  là

- A. 1.                                      B.  $\pm 1$ .                                      C.  $\sqrt{3}$ .                                      D.  $\begin{cases} \tan x = -\sqrt{3} \\ \tan x = \pm 1 \end{cases}.$

**Câu 8:** Phương trình  $2\sin^2 x - 5\sin x \cos x - \cos^2 x = -2$  có thể được đưa về phương trình nào trong các phương trình sau

- A.  $4\sin^2 x + 5\sin 2x - \cos^2 x = 0.$                                       B.  $5\sin 2x + 3\cos 2x = 5.$
- C.  $4\sin^2 x + 5\sin x \cos x + \cos^2 x = 0.$                                       D. Một phương trình khác.

**Câu 9:** Kết quả nào cho dưới đây là đúng? Phương trình  $\sin^2 \frac{x}{2} - \sin x + 3\cos^2 \frac{x}{2} = 0$  có tập nghiệm là

- A.  $S = \emptyset.$                                       B.  $S = \{-\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$
- C.  $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$                                       D. Đáp án khác.

**Câu 10:** Khi  $m = 2$  thì phương trình

$(4-6m)\sin^3 x + 3(2m-1)\sin x + 2(m-2)\sin^2 x \cdot \cos x - (4m-3)\cos x = 0$  có bao nhiêu họ nghiệm?

- A. 0.                                      B. 2.                                      C. 1.                                      D. 3.

**Câu 11:** Cho phương trình  $\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cdot \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cdot \cos x$ . Nghiệm của phương trình là

A.  $x = \frac{-\pi}{3} + k\pi$ .

B.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

C.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$ .

D.  $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 12:** Phương trình  $2\sin^2 x + \sin 2x + 1 = 0$  có tập nghiệm là

A.  $S = \emptyset$ .

B.  $S = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

C. Phương trình vô số nghiệm.

D. Đáp án khác.

**Câu 13:** Phương trình  $\sin^2 2x + \sqrt{3} \sin 4x + 3\cos^2 2x = 0$  có nghiệm là

A.  $x = \frac{-\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

B.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

C.  $x = \frac{-\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .

D.  $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 14:** Phương trình  $\sin^2 4x + 3\cos^2 4x = 0$  có tập nghiệm là

A.  $S = \emptyset$ .

B.  $S = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

C. Phương trình vô số nghiệm.

D. Đáp án khác.

**Câu 15:** Cho  $x$  thỏa mãn phương trình  $\sin 2x + 2 \tan x = 3$ . Giá trị của biểu thức

$(\tan x - 1)(2 \tan^2 x - \tan x + 3)$  là

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

**Câu 16:** Cho phương trình  $3\sin^2 \frac{x}{2} + \sqrt{3} \sin x + \cos^2 \frac{x}{2} = 0$ . Số nghiệm của phương trình đã cho trong khoảng  $(0; 2\pi)$  là

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

**Câu 17:** Cho phương trình  $2\sqrt{3} \cos^2 x - \sin 2x = 0$ , khẳng định đúng là

A. Phương trình có 1 họ nghiệm.

B. Phương trình vô nghiệm.

C. Phương trình có 2 họ nghiệm.

D. Cả A, B, C đều sai.

**Câu 18:** Cho  $x$  thỏa mãn phương trình  $\sin^3 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin x$ . Giá trị của biểu thức

$(2 \tan^2 x - \tan x + 3) \tan x$  là

A. 1.

B. -6.

C. 3.

D. 2.

**Câu 19:** Cho phương trình  $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = 1 + \sin 2x$ , khẳng định đúng là

A. Phương trình có 2 họ nghiệm.

B. Phương trình vô nghiệm.

C. Phương trình có 1 họ nghiệm.

D. Cả A, B, C đều sai.

**Câu 20:** Cho phương trình  $\sin^2 x + (2m-2)\sin x \cos x - (m+1)\cos^2 x - m = 0$ . Giá trị của  $m$  để phương trình có nghiệm là

A.  $-2 \leq m \leq 1$ .

B.  $0 \leq m \leq 1$ .

C.  $0 \leq m$ .

D.  $m \geq -2$ .

#### Dạng 4. Phương trình lượng giác đối xứng

##### Phương pháp giải

Phương trình lượng giác đối xứng có dạng tổng quát

$$a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$$

Trong đó  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Để giải phương trình lượng giác đối xứng, ta làm như sau.

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{Điều kiện } |t| \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Ta có } (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$bt^2 + 2at - b + 2c = 0.$$

Đây là phương trình bậc hai đã biết cách giải.

**Chú ý:** Cách giải trên áp dụng cho phương trình

$$a(\sin x - \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0.$$

$$\text{Đặt } t = \sin x - \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2}.$$

##### Ví dụ mẫu

**Ví dụ 1.** Giải phương trình  $\sin x - \cos x + 14 \sin x \cos x = 1$ . (1)

##### Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } t = \sin x - \cos x \left( -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \right) \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2}.$$

$$\text{Khi đó phương trình (1) trở thành } t + 7(1 - t^2) = 1 \Leftrightarrow 7t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{6}{7} \end{cases}.$$

$$\sin x + \cos x - 2 \sin x \cos x + 1 = 0. \quad (1)$$

##### Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x \left( -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \right)$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

Khi đó phương trình (1) trở thành

$$t - 2\left(\frac{t^2 - 1}{2}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện  $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$  ta được

$$t = -1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = -1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm là

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

- Nếu  $t = 1$  thì  $\sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

- Nếu  $t = -\frac{6}{7}$  thì  $\sin x - \cos x = \frac{-6}{7}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-3\sqrt{2}}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{-3\sqrt{2}}{7} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} - \arcsin \frac{-3\sqrt{2}}{7} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có 4 họ nghiệm  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \pi + k2\pi$

$$x = \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{-3\sqrt{2}}{7} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{4} - \arcsin \frac{-3\sqrt{2}}{7} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

**Ví dụ 2.** Giải phương trình  $\sin^3 x + \cos^3 x + 1 = \frac{3}{2} \sin 2x$ . (2)

**Hướng dẫn giải**

$$(2) \Leftrightarrow 1 + (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = 3 \sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow 1 + (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = 3 \sin x \cos x. (*)$$

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x \left( -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \right) \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

$$\text{Khi đó phương trình } (*) \text{ trở thành } 1 + t \left( 1 - \frac{t^2 - 1}{2} \right) = 3 \cdot \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow t^3 + 3t^2 - 3t - 5 = 0 \Leftrightarrow (t + 1)(t^2 + 2t - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 - \sqrt{6} < -\sqrt{2} \Rightarrow t = -1. \\ t = -1 + \sqrt{6} > \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \sin x + \cos x = -1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có 2 họ nghiệm  $x = \pi + k2\pi; x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

#### Bài tập tự luyện dạng 4

**Câu 1:** Cho phương trình  $-\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 2 \sin x \cos x + 1 = 0$ . Đặt  $t = \sin x + \cos x$ , ta được phương trình nào dưới đây?

A.  $t^2 + \sqrt{2}t = 0$ .

B.  $t^2 + \sqrt{2}t + 2 = 0$ .

C.  $t^2 - \sqrt{2}t = 0$ .

D.  $t^2 - \sqrt{2}t - 2 = 0$ .

**Câu 2:** Nếu  $(1 + \sin x)(1 + \cos x) = 2$  thì  $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  nhận giá trị là

- A.  $-1$ .                      B.  $1$ .                      C.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .                      D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Câu 3:** Phương trình  $\sin x - \cos x + 2 \sin 2x + 1 = 0$  có nghiệm là

- A.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$ .                      B.  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$ .  
C.  $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .                      D. Vô nghiệm.

**Câu 4:** Cho phương trình  $\sin 2x - 2(\sin x - \cos x) - 2 = 0$ . Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là

- A.  $x = \frac{\pi}{2}$ .                      B.  $x = 0$ .                      C.  $x = \frac{3\pi}{2}$ .                      D.  $x = \frac{5\pi}{6}$ .

**Câu 5:** Phương trình  $\sin 2x + 2(\cos x - \sin x) - 1 = 0$  có nghiệm là

- A.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .                      B.  $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
C.  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .                      D. Vô nghiệm.

**Câu 6:** Cho phương trình  $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \tan x + \cot x$ . Nếu  $t = \sin x + \cos x$  thì giá trị của  $t$  thỏa mãn  $|t| \leq \sqrt{2}$  là

- A.  $-1$ .                      B.  $\sqrt{2}$ .                      C.  $-\sqrt{2}$ .                      D.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Câu 7:** Cho phương trình  $\sin 2x + 4(\sin x - \cos x) - 5 = 0$ . Số nghiệm của phương trình thỏa mãn  $0 < x < \pi$  là

- A. 1.                      B. 0.                      C. 2.                      D. 4.

**Câu 8:** Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

- A.  $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2$ .                      B.  $\sin 2x - \sin x + \cos x = 1$ .  
C.  $\sin x = \cos \frac{\pi}{4}$ .                      D.  $\sqrt{3} \sin x - \cos x = -3$ .

**Câu 9:** Cho  $x$  thỏa mãn phương trình  $\sin 2x + \sin x - \cos x = 1$ . Giá trị lớn nhất tìm được của  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  là

- A. 0.                      B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .                      C.  $\frac{1}{2}$ .                      D. 1.

**Câu 10:** Số họ nghiệm của phương trình  $\sin 2x - \sin x + \cos x - 1 = 0$  là



- A. 4.                                      B. 3.                                      C. 2.                                      D. 1.

**Câu 11:** Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

- A.  $4(\sin x - \cos x) + \sin 2x - 5 = 0$ .                                      B.  $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ .  
C.  $2(\sin x - \cos x) - \sin 2x + 2 = 0$ .                                      D.  $3\sin x - 2 = 0$ .

**Câu 12:** Nghiệm âm lớn nhất của phương trình  $\sin x + \cos x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x$  là

- A.  $x = -\frac{\pi}{6}$ .                                      B.  $x = -\frac{\pi}{2}$ .                                      C.  $x = -\frac{3\pi}{2}$ .                                      D.  $x = -\frac{5\pi}{6}$ .

**Câu 13:** Số nghiệm của phương trình  $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - \sin 2x - 3 = 0$  thỏa mãn điều kiện  $\pi < x < 5\pi$  là

- A. 1.                                      B. 0.                                      C. 3.                                      D. 2.

**Câu 14:** Trong các phương trình sau phương trình nào có nghiệm?

- A.  $\sqrt{3}\sin x = 2$ .                                      B.  $\frac{1}{4}\cos 4x = \frac{1}{2}$ .  
C.  $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 3 = 0$ .                                      D.  $\cot^2 x - \cot x + 5 = 0$ .

**Câu 15:** Điều kiện để phương trình  $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + m - 2 = 0$  có nghiệm là

- A.  $m \leq 0$ .                                      B. Không có giá trị nào của  $m$ .  
C.  $m \geq 4$ .                                      D.  $0 \leq m \leq 4$ .

**Câu 16:** Phương trình  $3(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2}\sin 2x = -3$  có nghiệm là

- A.  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .                                      B.  $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$ .  
C.  $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .                                      D. Vô nghiệm.

**Câu 17:** Nghiệm của phương trình  $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0$  thỏa mãn điều kiện  $0 < x < \pi$  là

- A.  $x = \frac{3\pi}{4}$ .                                      B.  $x = \frac{-\pi}{2}$ .                                      C.  $x = \pi$ .                                      D.  $x = \frac{-\pi}{4}$ .

**Câu 18:** Từ phương trình  $\sin^3 x + \cos^3 x + 1 = \frac{3}{2}\sin 2x$  ta tìm được  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  có giá trị bằng

- A. -1.                                      B.  $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ .                                      C.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .                                      D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Câu 19:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $\sin x \cos x - \sin x - \cos x + m = 0$  có nghiệm?

- A. 1.                                      B. 2.                                      C. 3.                                      D. 4.

**Câu 20:** Giá trị của  $m$  để phương trình  $m(\sin x + \cos x) + \sin 2x = 0$  có nghiệm là

A. Không có giá trị nào của  $m$ .

B.  $\forall m$ .

C.  $m = -1$ .

D. Cả A, B, C đều sai.

## ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

### Dạng 1. Phương trình thuần nhất

1- C	2- A	3- B	4- B	5- D	6- D	7- C	8- C	9- B	10- C
11- D	12- B	13- A	14- A	15- A	16- B	17- D	18- B	19- A	20- B

### HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

#### Câu 1.

Phương trình  $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có } \sqrt{3} \sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

#### Câu 2.

Phương trình  $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có } \sin x + \sqrt{3} \cos x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Vậy phương trình có nghiệm âm lớn nhất  $x = -\frac{\pi}{3}$  là với  $k = 0$ .

#### Câu 3.

Phương trình  $\sin x + \cos x = 1$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có } \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

#### Câu 4.

Phương trình  $\sin x + \cos x = 1$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có } \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Theo bài ra  $x \in (0; \pi) \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ .

**Câu 5.**

Phương trình  $3 \sin x + m \cos x = 5$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Điều kiện để phương trình có nghiệm  $3^2 + m^2 \geq 5^2 \Leftrightarrow m^2 \geq 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ m \geq 4 \end{cases}$ .

Vậy phương trình vô nghiệm khi  $-4 < m < 4$ .

**Câu 6.**

Phương trình  $m \sin x - 3 \cos x = 5$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Điều kiện để phương trình có nghiệm  $m^2 + (-3)^2 \geq 5^2 \Leftrightarrow m^2 \geq 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ m \geq 4 \end{cases}$ .

**Câu 7.**

Phương trình  $\sqrt{3} \sin 3x + \cos 3x = -1$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $\sqrt{3} \sin 3x + \cos 3x = -1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x + \frac{1}{2} \cos 3x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ .

**Câu 8.**

Phương trình  $2 \sin x + 3 \cos x = 1$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ . Ta có  $2^2 + 3^2 - 1^2 = 12 > 0$ .

Vậy phương trình  $2 \sin x + 3 \cos x = 1$  có nghiệm.

**Câu 9.**

Phương trình  $\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{2}$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì  $x \in [0; \pi]$  nên  $x = \frac{5\pi}{12}$ .

**Câu 10.**

Phương trình  $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x) \Leftrightarrow \sin 8x - \sqrt{3} \cos 8x = \cos 6x + \sqrt{3} \sin 6x$

$$\frac{1}{2} \sin 8x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 8x = \frac{1}{2} \cos 6x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 6x \Leftrightarrow \sin\left(8x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(6x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin\left(8x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(6x + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - \frac{\pi}{3} = 6x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ 8x - \frac{\pi}{3} = \pi - 6x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{7} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 11.**

Phương trình  $\sqrt{3} \sin x - \cos x = -3$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Để phương trình có nghiệm thì  $(\sqrt{3})^2 + (-1)^2 \geq (-3)^2 \Leftrightarrow 4 \geq 9$  (vô lý).

Vậy phương trình  $\sqrt{3} \sin x - \cos x = -3$  vô nghiệm.

**Câu 12.**

Phương trình  $\sin 2x - 2 \cos x = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $\sin 2x - 2 \cos x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - 2 \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x (\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Vì  $x \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  nên  $x = -\frac{5\pi}{12}; x = -\frac{3\pi}{2}; x = -\frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2}$ .

Vậy phương trình có 4 nghiệm thỏa mãn đề bài.

**Câu 13.**

Phương trình  $\cos 7x - \sqrt{3} \sin 7x = -\sqrt{2}$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có } \cos 7x - \sqrt{3} \sin 7x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos 7x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 7x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 7x - \frac{1}{2} \cos 7x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(7x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7} \\ 7x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \Rightarrow x = \frac{11\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 14.**

Phương trình  $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có } \sin x + \sqrt{3} \cos x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Vậy phương trình có nghiệm dương nhỏ nhất là  $x = \frac{2\pi}{3}$  với  $k = 1$ .

**Câu 15.**

Phương trình có nghĩa  $\Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ .

$$\text{Ta có } \tan x - \sin 2x - \cos 2x + 2\left(2 \cos x - \frac{1}{\cos x}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - \sin 2x - \cos 2x + 4 \cos x - \frac{2}{\cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x - 2 \sin x \cos^2 x - \cos 2x \cos x + 2(2 \cos^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x(1 - 2 \cos^2 x) - \cos 2x \cos x + 2 \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sin x \cos 2x - \cos 2x \cos x + 2 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(\sin x + \cos x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin x + \cos x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có nghiệm dương nhỏ nhất là  $x = \frac{\pi}{4}$  với  $k = 0$ .

**Câu 16.**

Phương trình  $\sin x + \cos x = -1$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có } \sin x + \cos x = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{-\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{-\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 17.**

Phương trình  $2\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = m$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có } 2\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = m \Leftrightarrow (1 - \cos 2x) - \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = m$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x + 3\cos 2x = -2m + 1. \quad (1)$$

$$\text{Để phương trình (1) có nghiệm thì } (1 - 2m)^2 \leq 1 + 9 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 9 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{10}}{2} \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{10}}{2}.$$

**Câu 18.**

Phương trình  $\cos 2x + \sin x - 1 = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có } \cos 2x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin x = 0 \Leftrightarrow \left(\sin x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} (1) \\ \sin x - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin x = 0 (2) \end{cases}.$$

$$\text{Giải (1) ta có } \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}.$$

$$\text{Giải (2) ta có } \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 19.**

$$\text{Phương trình có nghĩa } \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}.$$

$$\text{Ta có } \tan x - \sin 2x - \cos 2x + 2\left(2\cos x - \frac{1}{\cos x}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - \sin 2x - \cos 2x + 4\cos x - \frac{2}{\cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x - 2\sin x \cos^2 x - \cos 2x \cos x + 2(2\cos^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x(1 - 2\cos^2 x) - \cos 2x \cos x + 2\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sin x \cos 2x - \cos 2x \cos x + 2\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin x + \cos x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin x + \cos x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 20.**

$$\text{Phương trình có nghĩa } \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \right\}.$$

$$\text{Ta có } \tan x - 3\cot x = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - 3\frac{\cos x}{\sin x} = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - 3\cos^2 x = 4\sin x \cos x(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \sqrt{3}\cos x)(\sin x - \sqrt{3}\cos x) = 4\sin x \cos x(\sin x + \sqrt{3}\cos x) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \sqrt{3}\cos x = 0 \\ \sin x - \sqrt{3}\cos x = 4\sin x \cos x \end{cases}$$

*Trường hợp 1:*

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi.$$

$$\text{Trường hợp 2: } \sin x - \sqrt{3}\cos x = 4\sin x \cos x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = 2\sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}$$

## Dạng 2. Phương trình bậc hai của hàm số lượng giác

1- C	2- A	3- A	4- A	5- C	6- B	7- C	8- B	9- A	10- D
11- D	12- A	13- B	14- C	15- C	16- B	17- B	18- A	19- A	20- C

## HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

### Câu 1.

Phương trình  $2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R}$ .

Đặt  $t = \sin x, |t| \leq 1$ . Ta có  $2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$  (do  $|t| \leq 1$ ).

Với  $t = 1$ , ta có  $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

### Câu 2.

Phương trình  $\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R}$ .

Đặt  $t = \cos x, |t| \leq 1$ . Ta có  $\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$  (do  $|t| \leq 1$ ).

Với  $t = 1$ , ta có  $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

### Câu 3.

Phương trình  $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R}$ .

Đặt  $t = \sin x, |t| \leq 1$ . Ta có  $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$  (do  $|t| \leq 1$ ).

Với  $t = \frac{1}{2}$ , ta có  $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

Vậy nghiệm dương bé nhất của phương trình là  $x = \frac{\pi}{6}$ .

### Câu 4.

Phương trình  $3\cos^2 x - 2\cos x - 4 = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R}$ .

Đặt  $t = \cos x, |t| \leq 1$ .

Ta có  $3\cos^2 x - 2\cos x - 4 = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1-\sqrt{13}}{3} \\ t = \frac{1+\sqrt{13}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1-\sqrt{13}}{3}$  (do  $|t| \leq 1$ ).

$$\text{Với } t = \frac{1-\sqrt{13}}{3}, \text{ ta có } \cos x = \frac{1-\sqrt{13}}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos \frac{1-\sqrt{13}}{3} + k2\pi \\ x = -\arccos \frac{1-\sqrt{13}}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì  $x \in [0, 3\pi]$  nên phương trình chỉ có 3 nghiệm.

$$x = \arccos \frac{1-\sqrt{13}}{3}, x = \arccos \frac{1-\sqrt{13}}{3} + 2\pi, x = -\arccos \frac{1-\sqrt{13}}{3} + 2\pi.$$

#### Câu 5.

Phương trình  $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R}$ .

$$\text{Đặt } t = \sin x, |t| \leq 1. \text{ Ta có } 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \frac{1}{2}, \text{ ta có } \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Với } t = 1, \text{ ta có } \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vì } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ nên } x = \frac{\pi}{6}.$$

#### Câu 6.

$$\text{Phương trình } \tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0 \text{ có nghĩa } \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

$$\text{Đặt } t = \tan x. \text{ Ta có } \tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

$$\text{Với } t = -1, \text{ ta có } \tan x = -1 \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{-\pi}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

#### Câu 7.

$$\text{Phương trình } \cos^2 2x + \cos 2x - \frac{3}{4} = 0 \text{ có nghĩa } \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R}.$$

$$\text{Đặt } t = \cos 2x, |t| \leq 1. \text{ Ta có } \cos^2 2x + \cos 2x - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \quad (\text{do } |t| \leq 1).$$

$$\text{Với } t = \frac{1}{2}, \text{ ta có } \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

#### Câu 8.

$$\text{Phương trình } \sin^2 x - 2\sin x = 0 \text{ có nghĩa } \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R}.$$

$$\text{Đặt } t = \sin x, |t| \leq 1. \text{ Ta có } \sin^2 x - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0 \quad (\text{do } |t| \leq 1).$$

$$\text{Với } t = 0, \text{ ta có } \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

#### Câu 9.

Phương trình  $\cot^2 3x - \cot 3x - 2 = 0$  có nghĩa  $\Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{3}$ .

Đặt  $t = \cot 3x$ . Ta có  $\cot^2 3x - \cot 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$ .

Với  $t = -1$ , ta có  $\cot 3x = -1 \Leftrightarrow \cot 3x = \cot \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow 3x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ .

Với  $t = 2$ , ta có  $\cot 3x = 2 \Leftrightarrow 3x = \operatorname{arccot} 2 + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \operatorname{arccot} 2 + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 10.**

Phương trình  $2\cos 2x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $2\cos 2x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2 x - 2 + 2\cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2 x + 2\cos x - 2 - \sqrt{2} = 0$ .

Đặt  $t = \cos x, |t| \leq 1$ .

Ta có  $4\cos^2 x + 2\cos x - 2 - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow 4t^2 + 2t - 2 - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ t = \frac{-2 - \sqrt{36 + 16\sqrt{2}}}{8} \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (do } |t| \leq 1 \text{)}.$

Với  $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , ta có  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

Vậy nghiệm âm lớn nhất của phương trình là  $x = -\frac{\pi}{4}$ .

**Câu 11.**

Ta có  $\sqrt{3} \sin x = 2 \Leftrightarrow \sin x = \frac{2}{\sqrt{3}} > 1$  (vô nghiệm).

Ta có  $\frac{1}{4} \cos 4x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = 2 > 1$  (vô nghiệm).

Ta có  $2^2 + 2^2 < 5^2$  nên phương trình  $2\sin x + 3\cos x = 5$  (vô nghiệm)

**Câu 12.**

Phương trình  $13\sin^2 x - 78\sin x + 15 = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R}$ . Đặt  $t = \sin x, |t| \leq 1$ .

Ta có  $13\sin^2 x - 78\sin x + 15 = 0 \Leftrightarrow 13t^2 - 78t + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0,199 \\ t = 5,801 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0,199 \text{ (do } |t| \leq 1 \text{)}.$

Với  $t = 0,199$ , ta có  $\sin x = 0,199 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin 0,199 + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin 0,199 + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

Vì  $x \in [0; 2\pi]$  nên phương trình có hai nghiệm.

**Câu 13.**

Phương trình  $3\cos x + 2|\sin x| = 2$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $3\cos x + 2|\sin x| = 2 \Leftrightarrow 3\cos x + 2\sqrt{1 - \cos^2 x} = 2$ .

Đặt  $t = \cos x, |t| \leq 1$ . Ta có  $3\cos x + 2|\sin x| = 2 \Leftrightarrow 3t + 2\sqrt{1 - t^2} = 2 \Leftrightarrow t = 0$ .

Với  $t = 0$ , ta có  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 14.**



Phương trình  $\tan^2 x - \frac{4\sqrt{3}}{3} \tan x + 1 = 0$  có nghĩa  $\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

Đặt  $t = \tan x$ . Ta có  $\tan^2 x - \frac{4\sqrt{3}}{3} \tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3} t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ t = \sqrt{3} \end{cases}$ .

Với  $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , ta có  $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

Với  $t = \sqrt{3}$ , ta có  $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

Vì  $x \in [0; 3\pi]$  nên  $x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{7\pi}{6}; x = \frac{13\pi}{6}; x = \frac{\pi}{3}; x = \frac{4\pi}{3}; x = \frac{7\pi}{3}$ .

Vậy phương trình có 6 nghiệm thỏa mãn đề bài.

#### Câu 15.

Phương trình  $\sin^2 x - 5 \sin x + 6 = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R}$ .

Đặt  $t = \sin x, |t| \leq 1$ .

Ta có  $\sin^2 x - 5 \sin x + 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow t = \emptyset$  (do  $|t| \leq 1$ ).

Vậy phương trình vô nghiệm.

#### Câu 16.

Phương trình  $(\tan x + \cot x)^2 - (\tan x + \cot x) = 2$  có nghĩa  $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$ .

Đặt  $t = \tan x + \cot x$ . Ta có  $(\tan x + \cot x)^2 - (\tan x + \cot x) = 2 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -1 \end{cases}$ .

Với  $t = 2$ , ta có  $\begin{cases} \tan x + \cot x = 2 \\ \tan x \cot x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \cot x = 1 \end{cases}$ .

Với  $t = -1$ , ta có  $\begin{cases} \tan x + \cot x = -1 \\ \tan x \cot x = 1 \end{cases}$  (vô nghiệm).

Vậy  $\tan x + \frac{1}{\tan x} = 2$ .

#### Câu 17.

Phương trình  $\sin x + \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $\sin x + \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x + \frac{1 - \cos x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \sin x + 1 - \cos x = 1 \Leftrightarrow 2 \sin x - \cos x = 0$ . (\*)

Vì  $\cos x = 0$  thì (\*) vô nghiệm nên  $(*) \Rightarrow 2 \frac{\sin x}{\cos x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{2}$ .

#### Câu 18.

Phương trình  $3 \sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $3 \sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 3 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$ . (1)

Vì  $\cos x = 0$  không là nghiệm của phương trình (1) nên ta chia cả hai vế của phương trình cho  $\cos^2 x$ .

Ta có  $3 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0 \Rightarrow 3 \tan^2 x - 2 \tan x - 1 = 0$ .

Đặt  $t = \tan x$ . Ta có  $3 \tan^2 x - 2 \tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases}$ .

Với  $t = 1$ , ta có  $\tan x = 1 \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

Với  $t = -\frac{1}{3}$ , ta có  $\tan x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \arctan \frac{-1}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 19.**

Ta có  $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2 \cos x - \sin x} = \cos 2x \Leftrightarrow \sin^3 x + \cos^3 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(2 \cos x - \sin x)$

$\Leftrightarrow \sin^3 x + \cos^3 x = 2 \cos^3 x - 2 \cos x \sin^2 x - \sin x \cos^2 x + \sin^3 x$

$\Leftrightarrow \cos^3 x - 2 \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x} - \frac{2 \sin^2 x \cos x}{\cos^3 x} - \frac{\sin x \cos^2 x}{\cos^3 x} = 0$

(Điều kiện  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ).

$\Leftrightarrow 1 - 2 \tan^2 x - \tan x = 0 \Leftrightarrow 2 \tan^2 x + \tan x - 1 = 0$ .

Đặt  $\tan x = t$ , ta có  $2 \tan^2 x + \tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + t - 1 = 0$ .

**Câu 20.**

Phương trình  $2 \sin x - 2 \cos x = 1 - \sqrt{3}$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $2 \sin x - 2 \cos x = 1 - \sqrt{3} \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{3}$ .

**Dạng 3. Phương trình lượng giác đẳng cấp**

1- D	2- A	3- D	4- B	5- C	6- C	7- D	8- B	9- A	10- C
11- C	12- A	13- C	14- A	15- B	16- D	17- C	18- B	19- C	20- A

**HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**

**Câu 1.**

Phương trình  $\cos^2 x - 3 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = 1$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Với  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  phương trình vô nghiệm.

Với  $\cos x \neq 0$ . Chia cả hai vế của phương trình cho  $\cos^2 x$  ta được

$\cos^2 x - 3 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow 1 - 3 \tan x - 2 \tan^2 x = 1 + \tan^2 x$

$\Leftrightarrow \tan^2 x + \tan x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}). \\ \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \end{cases}$

**Câu 2.**

Phương trình  $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$  có nghĩa khi  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Chia cả 2 vế của phương trình cho  $\cos x$  ta được

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \sqrt{3} \tan x + 1 = 1 + \tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x - \sqrt{3} \tan x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

### Câu 3.

Phương trình  $3 \cos^2 4x + 5 \sin^2 4x = 2 - 2\sqrt{3} \sin 4x \cdot \cos 4x$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Với  $\cos 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  phương trình vô nghiệm.

Với  $\cos 4x \neq 0$ . Chia cả hai vế của phương trình cho  $\cos^2 4x$  ta được

$$3 \cos^2 4x + 5 \sin^2 4x = 2 - 2\sqrt{3} \sin 4x \cdot \cos 4x \Leftrightarrow 3 + 5 \tan^2 4x = 2(1 + \tan^2 4x) - 2\sqrt{3} \tan 4x$$

$$\Leftrightarrow 3 \tan^2 4x + 2\sqrt{3} \tan 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan 4x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 4x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}).$$

### Câu 4.

Phương trình  $\sin^2 x + \frac{1-\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có } \sin^2 x + \frac{1-\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x + (1-\sqrt{3}) \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0.$$

Với  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  phương trình vô nghiệm.

Với  $\cos x \neq 0$ . Chia cả hai vế của phương trình cho  $\cos^2 x$  ta được

$$\sin^2 x + (1-\sqrt{3}) \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \tan^2 x + (1-\sqrt{3}) \tan x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = \sqrt{3} \end{cases}.$$

Vậy giá trị nguyên của  $\tan x$  là  $-1$ .

### Câu 5.

Phương trình  $2 \sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x = 1$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có } 2 \sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1.$$

Với  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  phương trình vô nghiệm.

Với  $\cos x \neq 0$ . Chia cả hai vế của phương trình cho  $\cos^2 x$  ta được

$$2 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow 2 \tan^2 x - 2 \tan x + 1 = 1 + \tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x - 2 \tan x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \tan x = 2 \Leftrightarrow x = \arctan 2 + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

### Câu 6.

Phương trình  $-\sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 1 = 2$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Với  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  phương trình vô nghiệm.

Với  $\cos x \neq 0$ . Chia cả hai vế của phương trình cho  $\cos^2 x$  ta được

$$-\sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 1 = 2 \Leftrightarrow -\tan^2 x + 2\sqrt{3} \tan x = 1 + \tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow 2 \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \arctan \frac{1+\sqrt{3}}{2} + k\pi \\ \tan x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \arctan \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 7.**

Phương trình  $\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cdot \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cdot \cos x$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Với  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  phương trình vô nghiệm.

Với  $\cos x \neq 0$ . Chia cả hai vế của phương trình cho  $\cos^3 x$  ta được

$$\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cdot \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cdot \cos x \Leftrightarrow \tan^3 x - \sqrt{3} = \tan x - \sqrt{3} \tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow \tan^3 x + \sqrt{3} \tan^2 x - \tan x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = -1 \\ \tan x = -\sqrt{3} \end{cases}.$$

**Câu 8.**

Phương trình  $2 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x - \cos^2 x = -2$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có } 2 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x - \cos^2 x = -2 \Leftrightarrow 4 \sin^2 x - 5.2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = -4$$

$$\Leftrightarrow 5 \sin 2x + 2 \cos^2 x - 4 \sin^2 x - 4 = 0 \Leftrightarrow 5 \sin 2x + 3(\cos^2 x - \sin^2 x) - (\cos^2 x + \sin^2 x) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5 \sin 2x + 3 \cos 2x = 5.$$

**Câu 9.**

Phương trình  $\sin^2 \frac{x}{2} - \sin x + 3 \cos^2 \frac{x}{2} = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có } \sin^2 \frac{x}{2} - \sin x + 3 \cos^2 \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \cos x}{2} - \sin x + \frac{3(1 + \cos x)}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin x - \cos x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}.$$

Có  $\sqrt{2} > 1 \Rightarrow$  phương trình vô nghiệm.

**Câu 10.**

Phương trình  $(4 - 6m) \sin^3 x + 3(2m - 1) \sin x + 2(m - 2) \sin^2 x \cdot \cos x - (4m - 3) \cos x = 0(1)$  có nghĩa

$$\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}.$$

$$\text{Với } m = 2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow -8 \sin^3 x + 9 \sin x - 5 \cos x = 0.$$

$$\text{Với } \cos x = 0 \Rightarrow -8 \sin^3 x + 9 \sin x - 5 \cos x = 0 \Leftrightarrow -8 \sin^3 x + 9 \sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{3\sqrt{2}}{4} \\ \sin x = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \end{cases} (\text{loại}).$$

Với  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  phương trình vô nghiệm.

Với  $\cos x \neq 0$ . Chia cả hai vế của phương trình cho  $\cos^3 x$  ta có

$$-8 \sin^3 x + 9 \sin x - 5 \cos x = 0 \Leftrightarrow -8 \tan^3 x + 9 \tan x (1 + \tan^2 x) - 5(1 + \tan^2 x) = 0$$

$$\tan^3 x - 5 \tan^2 x + 9 \tan x - 5 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có 1 họ nghiệm.

**Câu 11.**

Phương trình  $\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cdot \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Với  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  phương trình vô nghiệm.

Với  $\cos x \neq 0$ . Chia cả hai vế của phương trình cho  $\cos^3 x$  ta có

$$\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cdot \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x \Leftrightarrow \tan^3 x - \sqrt{3} = \tan x - \sqrt{3} \tan^2 x$$

$$\tan^3 x + \sqrt{3} \tan^2 x - \tan x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \\ \tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp nghiệm ta được } \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 12.**

Phương trình  $2\sin^2 x + \sin 2x + 1 = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $2\sin^2 x + \sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 2\sin x \cos x + 1 = 0$

Với  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  phương trình vô nghiệm.

Với  $\cos x \neq 0$ . Chia cả hai vế của phương trình cho  $\cos^2 x$  ta có

$$2\sin^2 x + 2\sin x \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\tan^2 x + 2\tan x + 1 + \tan^2 x = 0 \Leftrightarrow 3\tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

**Câu 13.**

Phương trình  $\sin^2 2x + \sqrt{3} \sin 4x + 3\cos^2 2x = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $\sin^2 2x + \sqrt{3} \sin 4x + 3\cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 2x + 2\sqrt{3} \sin 2x \cos 2x + 3\cos^2 2x = 0$ .

Với  $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  phương trình vô nghiệm.

Với  $\cos 2x \neq 0$ . Chia cả hai vế của phương trình cho  $\cos^2 2x$  ta có

$$\sin^2 2x + 2\sqrt{3} \sin 2x \cos 2x + 3\cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow \tan^2 2x + 2\sqrt{3} \tan 2x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan 2x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 14.**

Phương trình  $\sin^2 4x + 3\cos^2 4x = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Với  $\cos 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  phương trình vô nghiệm.

Với  $\cos 4x \neq 0$ . Chia cả hai vế của phương trình cho  $\cos^2 4x$  ta có

$$\sin^2 4x + 3\cos^2 4x = 0 \Leftrightarrow \tan^2 4x + 3 = 0 \text{ (Vô lí).}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

**Câu 15.**

Phương trình  $\sin 2x + 2\tan x = 3$  có nghĩa  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Ta có  $\sin 2x + 2 \tan x = 3 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + 2 \tan x = 3$ .

Với  $\cos x \neq 0$ . Chia cả hai vế của phương trình cho  $\cos^2 x$  ta có

$$2 \sin x \cos x + 2 \tan x = 3 \Leftrightarrow 2 \tan x + 2 \tan x (\tan^2 x + 1) = 3(\tan^2 x + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2 \tan^3 x - 3 \tan^2 x + 4 \tan x - 3 = 0 \Leftrightarrow (\tan x - 1)(2 \tan^2 x - \tan x + 3) = 0.$$

**Câu 16.**

Phương trình  $3 \sin^2 \frac{x}{2} + \sqrt{3} \sin x + \cos^2 \frac{x}{2} = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có } 3 \sin^2 \frac{x}{2} + \sqrt{3} \sin x + \cos^2 \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow 3 \frac{1 - \cos x}{2} + \sqrt{3} \sin x + \frac{1 + \cos x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3} \sin x - 2 \cos x + 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = -1 \Leftrightarrow \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = -1$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì  $x \in (0; 2\pi)$  nên  $x = \frac{5\pi}{3}$  với  $k = 1$ .

Phương trình có 1 nghiệm thỏa mãn đề bài.

**Câu 17.**

Phương trình  $2\sqrt{3} \cos^2 x - \sin 2x = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có } 2\sqrt{3} \cos^2 x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}(1 + \cos 2x) - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin \left( 2x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm.

**Câu 18.**

Phương trình  $\sin^3 \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin x$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có } \sin^3 \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin x \Leftrightarrow \left( \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}} \right)^3 = \sqrt{2} \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x - 3 \sin^2 x \cos x + 3 \sin x \cos^2 x - \cos^3 x = 4 \sin x. (1)$$

$$\text{Với } \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$(1) \Leftrightarrow \sin^3 x - 4 \sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \pm 2 \\ \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \end{cases} \text{ (loại)}.$$

Với  $\cos x \neq 0$ . Chia cả hai vế của phương trình cho  $\cos^3 x$  ta có

$$(1) \Leftrightarrow \tan^3 x - 3 \tan^2 x + 3 \tan x - 1 = 4 \tan x (1 + \tan^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 3 \tan^3 x + 3 \tan^2 x + \tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1.$$

$$\text{Vậy } (2 \tan^2 x - \tan x + 3) \tan x = -6.$$

**Câu 19.**

Phương trình  $\frac{1-\tan x}{1+\tan x} = 1 + \sin 2x$  có nghĩa  $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Ta có  $\frac{1-\tan x}{1+\tan x} = 1 + \sin 2x \Leftrightarrow \frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}} = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x$   
 $\Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = (\cos x + \sin x)^2 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = (\cos x + \sin x)^3. \quad (3)$

Chia cả hai vế của phương trình (3) cho  $\cos^3 x \neq 0$  ta được

$$1 + \tan^2 x - (1 + \tan^2 x) \tan x = (1 + \tan x)^3$$

$$\Leftrightarrow \tan^3 x + \tan^2 x + 2 \tan x = 0 \Leftrightarrow (\tan^2 x + \tan x + 2) \tan x = 0. \quad (*)$$

Do  $\tan^2 x + \tan x + 2 = 0$  vô nghiệm nên  $(*) \Leftrightarrow \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy phương trình có 1 họ nghiệm.

**Câu 20.**

Phương trình  $\sin^2 x + (2m-2)\sin x \cos x - (m+1)\cos^2 x - m = 0(1)$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}.$

Với  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Ta có  $(1) \Leftrightarrow 1 - m = 0.$  Để phương trình có nghiệm thì  $m = 1.$

Với  $\cos x \neq 0.$  Chia cả hai vế của phương trình cho  $\cos^2 x$  ta có

$$(1) \Leftrightarrow \tan^2 x + (2m-2)\tan x - (m+1) - m(1 + \tan^2 x) = 0 \Leftrightarrow (1-m)\tan^2 x + 2(m-1)\tan x - (2m+1) = 0.$$

Để phương trình có nghiệm thì  $(m-1)^2 - (1-m)(-2m-1) \geq 0 \Leftrightarrow -m^2 - m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 1.$

#### Dạng 4. Phương trình lượng giác đối xứng

1- C	2- D	3- A	4- C	5- A	6- B	7- B	8- D	9- B	10- B
11- A	12- C	13- D	14- C	15- D	16- B	17- A	18- B	19- C	20- B

#### HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

**Câu 1.**

Phương trình  $-\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 2 \sin x \cos x + 1 = 0(1)$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}.$

Đặt  $t = \sin x + \cos x, (|t| \leq \sqrt{2}).$

Ta có  $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow t^2 - \sqrt{2}t = 0.$

**Câu 2.**

Phương trình  $(1 + \sin x)(1 + \cos x) = 2$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}.$

Ta có  $(1 + \sin x)(1 + \cos x) = 2 \Leftrightarrow \cos x + \sin x + \sin x \cos x = 1.$

Đặt  $t = \sin x + \cos x, (|t| \leq \sqrt{2}).$

Ta có  $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}(1) \Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases}$ .

Do  $|t| \leq \sqrt{2}$  nên  $t = 1$ .

Với  $t = 1$ , ta có  $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Câu 3.**

Phương trình  $\sin x - \cos x + 2 \sin 2x + 1 = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $\sin x - \cos x + 2 \sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x - \cos x + 4 \sin x \cos x + 1 = 0. \quad (1)$

Đặt  $t = \sin x - \cos x, (|t| \leq \sqrt{2})$ .

Ta có  $\sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow t + 2(1 - t^2) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{3}{2} \end{cases}$ .

Do  $|t| \leq \sqrt{2}$  nên  $t = -1$ .

Với  $t = -1$ , ta có  $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{-\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 4.**

Phương trình  $\sin 2x - 2(\sin x - \cos x) - 2 = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $\sin 2x - 2(\sin x - \cos x) - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(\sin x - \cos x) - 2 \sin x \cos x + 2 = 0. \quad (1)$

Đặt  $t = \sin x - \cos x, (|t| \leq \sqrt{2})$ . Ta có  $\sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2}$

$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2t - (1 - t^2) + 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ .

Với  $t = -1$ , ta có  $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{-\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là  $x = \frac{3\pi}{2}$ .

**Câu 5.**

Phương trình  $\sin 2x + 2(\cos x - \sin x) - 1 = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $\sin 2x + 2(\cos x - \sin x) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - 2(\sin x - \cos x) - 1 = 0. \quad (1)$

Đặt  $t = \sin x - \cos x, (|t| \leq \sqrt{2})$ . Ta có  $\sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2}$

$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow 1 - t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \end{cases}$ .



Do  $|t| \leq \sqrt{2}$  nên  $t = 0$ .

Với  $t = 0$ , ta có  $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 6.**

Phương trình  $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \tan x + \cot x$  có nghĩa  $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$ .

Ta có  $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \tan x + \cot x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{1}{\sin x \cos x}. \quad (1)$$

Đặt  $t = \sin x + \cos x, (|t| \leq \sqrt{2})$ . Ta có  $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \sqrt{2}t = \frac{2}{t^2 - 1} \Leftrightarrow \sqrt{2}t^3 - \sqrt{2}t - 2 = 0 (t \neq 1) \Leftrightarrow t = \sqrt{2}.$$

**Câu 7.**

Phương trình  $\sin 2x + 4(\sin x - \cos x) - 5 = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $\sin 2x + 4(\sin x - \cos x) - 5 = 0 \Leftrightarrow 4(\sin x - \cos x) + 2\sin x \cos x - 5 = 0. \quad (1)$

Đặt  $t = \sin x - \cos x, (|t| \leq \sqrt{2})$ . Ta có  $\sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2}$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow 4t + 1 - t^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ (loại)}.$$

Vậy phương trình vô nghiệm hay không có nghiệm thỏa mãn  $0 < x < \pi$ .

**Câu 8.**

Phương trình  $\sqrt{3} \sin x - \cos x = -3$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $(\sqrt{3})^2 + (-1)^2 < (-3)^2$ .

Vậy phương trình vô nghiệm.

**Câu 9.**

Phương trình  $\sin 2x + \sin x - \cos x = 1$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $\sin 2x + \sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin x - \cos x + 2\sin x \cos x - 1 = 0. \quad (1)$

Đặt  $t = \sin x - \cos x, (|t| \leq \sqrt{2})$ . Ta có  $\sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2}$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow t + 1 - t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 0 \end{cases}.$$

Với  $t = 1$ , ta có  $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Với  $t = 0$ , ta có  $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ .

Vậy giá trị lớn nhất của  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Câu 10.**

Phương trình  $\sin 2x - \sin x + \cos x - 1 = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $\sin 2x - \sin x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x - \cos x - 2 \sin x \cos x + 1 = 0. \quad (1)$

Đặt  $t = \sin x - \cos x, (|t| \leq \sqrt{2})$ . Ta có  $\sin x \cos x = \frac{1-t^2}{2}$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow t - (1-t^2) + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 0 \end{cases}.$$

Với  $t = -1$ , ta có  $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{-\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Với  $t = 0$ , ta có  $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm.

#### Câu 11.

Phương trình  $4(\sin x - \cos x) + \sin 2x - 5 = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}.$

Ta có  $4(\sin x - \cos x) + \sin 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow 4(\sin x - \cos x) + 2 \sin x \cos x - 5 = 0. \quad (1)$

Đặt  $t = \sin x - \cos x, (|t| \leq \sqrt{2})$ . Ta có  $\sin x \cos x = \frac{1-t^2}{2}$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow 4t + 1 - t^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ (loại)}.$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

#### Câu 12.

Phương trình  $\sin x + \cos x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}.$

Ta có  $\sin x + \cos x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x \Leftrightarrow \sin x + \cos x + \sin x \cos x - 1 = 0. \quad (1)$

Đặt  $t = \sin x + \cos x, (|t| \leq \sqrt{2})$ . Ta có  $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow t + \frac{t^2 - 1}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases}.$$

Do  $|t| \leq \sqrt{2}$  nên  $t = 1$ .

Với  $t = 1$ , ta có  $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm âm lớn nhất của phương trình là  $x = -\frac{3\pi}{2}.$

#### Câu 13.

Phương trình  $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - \sin 2x - 3 = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}.$

Ta có  $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - \sin 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 2\sin x \cos x - 3 = 0. \quad (1)$

Đặt  $t = \sin x + \cos x, (|t| \leq \sqrt{2})$ . Ta có  $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2\sqrt{2}t - (t^2 - 1) - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}.$$

Với  $t = \sqrt{2}$ , ta có  $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Do  $x \in [\pi; 5\pi]$  nên  $x = \frac{9\pi}{4}; x = \frac{17\pi}{4}.$

Vậy có 2 nghiệm thỏa mãn đề bài.

#### Câu 14.

Ta có  $\sqrt{3} \sin x = 2 \Leftrightarrow \sin x = \frac{2}{\sqrt{3}} > 1 \Rightarrow$  Phương trình vô nghiệm.

Ta có  $\frac{1}{4} \cos 4x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = 2 > 1 \Rightarrow$  Phương trình vô nghiệm.

Ta có  $\Delta = (-1)^2 - 4.1.5 = -19 < 0 \Rightarrow$  Phương trình  $\cot^2 x - \cot x + 5 = 0$  vô nghiệm.

#### Câu 15.

Phương trình  $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + m - 2 = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}.$

Ta có  $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 2.$

Có  $-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -2 \leq \sqrt{2}(\sin x + \cos x) \leq 2$

$\Leftrightarrow -2 \leq -\sqrt{2}(\sin x + \cos x) \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq -\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 2 \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4.$

#### Câu 16.

Phương trình  $3(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2} \sin 2x = -3$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}.$

Ta có  $3(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2} \sin 2x = -3 \Leftrightarrow 3(\sin x + \cos x) + \sin x \cos x + 3 = 0. \quad (1)$

Đặt  $t = \sin x + \cos x, (|t| \leq \sqrt{2})$ .

Ta có  $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 3t + \frac{t^2 - 1}{2} + 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 6t + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -5 \end{cases}.$

Do  $|t| \leq \sqrt{2}$  nên  $t = -1.$

Với  $t = -1$ , ta có  $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{-\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{-\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

#### Câu 17.

Phương trình  $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}.$

Ta có  $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x) + 2\sin x \cos x + 1 = 0. \quad (1)$

Đặt  $t = \sin x + \cos x, (|t| \leq \sqrt{2})$ .

Ta có  $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2t + t^2 - 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \end{cases}$ .

Do  $|t| \leq \sqrt{2}$  nên  $t = 0$ .

Với  $t = 0$ , ta có  $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Do  $x \in (0; \pi)$  nên  $x = \frac{3\pi}{4}$ .

### Câu 18.

Phương trình  $\sin^3 x + \cos^3 x + 1 = \frac{3}{2} \sin 2x$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $\sin^3 x + \cos^3 x + 1 = \frac{3}{2} \sin 2x \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) + 1 = 3 \sin x \cos x$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + \sin x \cos x) + 1 = 3 \sin x \cos x. \quad (1)$

Đặt  $t = \sin x + \cos x, (|t| \leq \sqrt{2})$ .

Ta có  $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow t\left(1 + \frac{t^2 - 1}{2}\right) + 1 = 3 \frac{t^2 - 1}{2} \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ .

Với  $t = -1$ , ta có  $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

### Câu 19.

Phương trình  $\sin x \cos x - \sin x - \cos x + m = 0(1)$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Đặt  $t = \sin x + \cos x, (|t| \leq \sqrt{2})$ .

Ta có  $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \frac{t^2 - 1}{2} - t + m = 0 \Leftrightarrow -2m = t^2 - 2t - 1 \Leftrightarrow (t - 1)^2 = -2m + 2$ .

Do  $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} - 1 \leq t - 1 \leq \sqrt{2} - 1 \Rightarrow 0 \leq (t - 1)^2 \leq 3 + 2\sqrt{2}$ .

Để phương trình có nghiệm thì  $0 \leq -2m + 2 \leq 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow -\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} \leq m \leq 1$ .

Vì  $m \in \mathbb{Z}$  nên  $m \in \{-1; 0; 1\}$ .

### Câu 20.

Phương trình  $m(\sin x + \cos x) + \sin 2x = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $m(\sin x + \cos x) + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow m(\sin x + \cos x) + 2 \sin x \cos x = 0. \quad (1)$

Đặt  $t = \sin x + \cos x (-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2})$ .

Ta có  $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow t^2 + mt - 1 = 0$ .

$\Delta = m^2 + 4 > 0 \Rightarrow$  Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt  $t_1; t_2$ .

Theo Vi-ét ta có  $t_1 t_2 = -1$ .

Suy ra luôn có ít nhất một nghiệm thỏa mãn  $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ .

Vậy phương trình luôn có nghiệm.