CHUYÊN ĐỀ

BÀI GIẢNG GIỚI HẠN HÀM SỐ

Mục tiêu

- **Kiến thức**
  - Nắm được khái niệm giới hạn của hàm số.
  - Nắm được các tính chất và các phép toán về giới hạn của hàm số.
- **Kĩ năng**
  - Biết cách tìm giới hạn của hàm số tại một điểm.
  - Vận dụng được các quy tắc tìm giới hạn của hàm số.
  - Thực hành khử một số hạng vô định cơ bản.

I. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

Định nghĩa giới hạn của hàm số tại một điểm

1. Giới hạn hữu hạn tại một điểm

Định nghĩa 1

Cho khoảng $(a;b)$ và một điểm x_0. Hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ hoặc trên $(a;b)\setminus\{x_0\}$. Ta nói rằng hàm số $f(x)$ có giới hạn là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số $\{x_n\}$ trong tập hợp $(a;b)\setminus\{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n)=L$.

Khi đó ta viết $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to x_0$.

Các giới hạn đặc biệt

+) $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$, với C là hằng số bất kỳ.

+) $f(x)$ là hàm số quen thuộc (đa thức, phân thức hữu tỉ, cân lượng giác) xác định trên $(a;b)$ chứa x_0 thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

2. Giới hạn vô cực

Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn dương vô cực khi x dần tới x_0 nếu với mọi dãy số (x_n) sao cho $x_n\to x_0$ thì $f(x_n)\to +\infty$. Kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.

Tương tự ta cũng có định nghĩa giới hạn âm vô cực $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

3. Giới hạn hàm số tại vô cực

Định nghĩa 2

Các giới hạn đặc biệt

Giả sử hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên khoảng $\left(a;+\infty\right)$. Ta nói rằng hàm số $f\left(x\right)$ có giới hạn là số thực L khi $x\to+\infty$ nếu với mọi dãy số $\left(x_n\right):\left(x_n\right)>a$ và $x_n\to+\infty$ thì $f\left(x_n\right)\to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=L$.

Các giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=L$.

Các giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\pm\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\pm\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=L$ được định nghĩa tương tự.

4. Một số định lí về giới hạn hữu hạn

Định lí 1

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)=L,\ \lim\limits_{x\to x_0}g\left(x\right)=M$. Khi đó

a) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f\left(x\right)\pm g\left(x\right)\right]=L\pm M$.

b) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f\left(x\right).g\left(x\right)\right]=L.M$.

c) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\dfrac{L}{M}\left(M\neq0\right)$.

d) $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f\left(x\right)\right|=\left|L\right|$.

e) Nếu $f\left(x\right)\geq0,\ \lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)=L$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f\left(x\right)}=\sqrt{L}$.

f) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f\left(x\right)}=\sqrt[3]{L}$.

g) Nếu c là một hằng số thì $\lim\limits_{x\to x_0}cf\left(x\right)=cL$.

Quy tắc 1

Cho $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)=\pm\infty;\ \lim\limits_{x\to x_0}g\left(x\right)=L\neq0$. Ta có:

$\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)$	Dấu của L	$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f\left(x\right).g\left(x\right)\right]$
$+\infty$	$\pm$	$\pm\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

Quy tắc 2

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}C=C;\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{C}{x}=0$ *với C là hằng số.*
- $\lim\limits_{x\to+\infty}x^k=+\infty$ *với k nguyên dương;* $\lim\limits_{x\to-\infty}x^k=-\infty$ *với k là số nguyên dương lẻ,* $\lim\limits_{x\to-\infty}x^k=+\infty$ *với k nguyên dương chẵn.*

Cho $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L;\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0;\ L \neq 0$. Ta có:

Dấu của L	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
$+$	$\pm$	$\pm\infty$
$-$	$+$	$-\infty$
$-$	$-$	$+\infty$

Giới hạn một bên

1. Giới hạn hữu hạn

Định nghĩa 1

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$, $(x_0 \in \mathbb{R})$. Ta nói rằng hàm số $f(x)$ có giới hạn bên phải là số thực L khi x cần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) thuộc khoảng $(x_0;b)$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó ta viết $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^+$.

Định nghĩa 2

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0)$, $(x_0 \in \mathbb{R})$. Ta nói rằng hàm số $f(x)$ có giới hạn bên trái là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy (x_n) thuộc khoảng $(a;x_0)$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó ta viết $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^-$.

Chú ý:

a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$.

b) Các định lí về giới hạn của hàm số vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ *bởi* $x \to x_0^-$ *hoặc* $x \to x_0^+$.

2. Giới hạn vô cực

a) Các định nghĩa $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ được phát biểu tương tự Định nghĩa 1 và định nghĩa 2.

b) Các chú ý 1 và 2 vẫn đúng nếu thay L bởi $+\infty$ hoặc $-\infty$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm giới hạn của hàm số bằng cách thay trực tiếp

Phương pháp giải

Nếu $f\left(x\right)$ là hàm số sơ cấp xác định tại x_0 thì $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$.

Ví dụ: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2-2x+4\right)$ có giá trị là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Do hàm số $f\left(x\right)=x^2-2x+4$ xác định tại điểm $x_0=-1$, nên giới hạn này bằng $f\left(-1\right)$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1}\left(x^2-2x+4\right)=7$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x-5}{3x-1}$ có giá trị là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Cách 1: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x-5}{3x-1}=-\dfrac{7}{5}$.

Cách 2: Nhập máy tính như sau $\dfrac{x^2-3x-5}{3x-1}$, bấm CACL, nhập giá trị của $x=2$ và ta sẽ nhận được đáp án.

Ví dụ 2: Tìm giới hạn của hàm số $B=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2\tan x+1}{\sin x+1}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $B=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2\tan x+1}{\sin x+1}=\dfrac{2\tan\dfrac{\pi}{6}+1}{\sin\dfrac{\pi}{6}+1}=\dfrac{4\sqrt{3}+6}{9}$.

Ví dụ 3: Cho $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=3$. Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2f\left(x\right)+1}{f^2\left(x\right)+1}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2f\left(x\right)+1}{f^2\left(x\right)+1}=\dfrac{2.3+1}{3^2+1}=\dfrac{7}{10}$.

Ví dụ 4: Tìm các giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^3-4x}{\left(2x-1\right)\left(x^3-2\right)}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^3-4x}{(2x-1)(x^3-2)}}=\sqrt{\dfrac{2^3-4.2}{(2.2-1)(2^3-2)}}=0$.

Ví dụ 5: Tìm giá trị của tham số *m* để $B\le 2$ với

$B=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3-2x+2m^2-5m+5\right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $B=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3-2x+2m^2-5m+5\right)=2m^2-5m+4$.

Do $B\le 2\Leftrightarrow 2m^2-5m+2\le 0\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le m\le 2$.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Giá trị của $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{2\left(x^2-x+1\right)}$ là

A. $-\infty$ **B.** 0 **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** $+\infty$

Câu 2: Giá trị của $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\left(2x^2-3x+2\right)^3}$ là

A. 0 **B.** 1 **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{1}{8}$

Câu 3: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+2x^2+1}{\sqrt[3]{2x^5+1}}$ bằng

A. -2 **B.** $-\dfrac{1}{2}$ **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** 2

Câu 4: Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to 0}x^2.\sqrt{\cos x+3}$

A. Không tồn tại. **B.** 0 **C.** 1 **D.** $+\infty$

Câu 5: Cho $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+m}{x+2}$. Để $A=5$, giá trị của *m* là bao nhiêu?

A. 14 **B.** 4 **C.** 3 **D.** $\dfrac{10}{3}$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x^4+x^2-3}$. Giá trị của $\lim\limits_{x\to -2}f(x)$ là

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** không xác định. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{33}$ **D.** $+\infty$

Câu 7: Kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 3x+1}{\cot 2x-3}$ là

A. $-\infty$ **B.** $\dfrac{\sqrt{2}-2}{6}$ **C.** $\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$ **D.** không xác định.

Câu 8: Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^3-x^2}}{\sqrt{x-1}+1+x}$

A. -1 **B.** 1 **C.** 0 **D.** $+\infty$

Câu 9: Nếu $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=5$ thì $\lim\limits_{x\to -2}\left[13-4f(x)\right]$ bằng bao nhiêu?

A. -17 **B.** -1 **C.** 9 **D.** -7

Câu 10: Cho $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-4\sqrt[3]{2x^3+5x+1}}{x^2-2}\right)=\dfrac{a}{b}$ ($\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản; *a, b* là số nguyên dương). Tính tổng $L=a^2+b^2$.

A. 6 **B.** 36 **C.** 7 **D.** 37

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)=\dfrac{3x+5}{2x-1}\left(x\neq -2; x\neq \dfrac{1}{2}\right)$. Giá trị của $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ là

A. $\dfrac{4}{3}$ **B.** $\dfrac{1}{5}$ **C.** $\dfrac{3}{2}$ **D.** $\dfrac{2}{3}$

Câu 12: Cho $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+1}{x+1}=-1$, tính $I=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^2+x\right)f(x)+2}{x+4}$.

A. $I=-\dfrac{4}{5}$ **B.** $I=\dfrac{4}{5}$ **C.** $I=4$ **D.** $I=-5$

Dạng 2: Tìm giới hạn của hàm số dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

Đây là dạng toán vô cùng quan trọng về tìm giới hạn của hàm số. Việc tìm giới hạn dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ là bài toán tìm giới hạn của hàm số dạng hữu tỉ $L=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $Q(x_0)=0$ và $P(x_0)=0$.

Phương pháp giải

Phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử và rút gọn.

Sử dụng các hằng đẳng thức để nhân liên hợp ở tử và mẫu đưa về dạng 1.

Chú ý:

• Nếu tam thức bậc hai ax^2+bx+c có hai nghiệm x_1, x_2 thì $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

• $a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$.

Trường hợp 1.

$L=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x_0)=Q(x_0)=0$ và $P(x)$,

Ví dụ: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{2x+2}$.

Hướng dẫn giải

Ta thấy khi thay $x_0=-1$ thì bài toán có dạng $\dfrac{0}{0}$, như vậy ta nhóm nhân tử chung $(x+1)$ của cả tử và mẫu để triệt tiêu sau đó đưa về dạng bài toán 1 để tìm kết quả.

Cách 1: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{2x+2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)^2}{2(x+1)}$

$Q(x)$ là các biểu thức chứa căn cùng bậc.

Sử dụng các hằng đẳng thức để nhân liên hợp ở tử và mẫu đưa về dạng 1.

Chú ý: Ta có thể MTCT để tìm các giới hạn

1. Sử dụng MTCT với chức năng của phím CALC.

2. Dùng chức lim của máy Vinacal 570ES Plus.

Trường hợp 2.

$L=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x_0)=Q(x_0)=0$ và $P(x)$ là biểu thức chứa căn không đồng bậc.

Giả sử: $P(x)=\sqrt[m]{u(x)}-\sqrt[n]{v(x)}$ với $\sqrt[m]{u(x_0)}=\sqrt[n]{v(x_0)}=a$.

Ta phân tích $P(x)=\left(\sqrt[m]{u(x)}-a\right)+\left(a-\sqrt[n]{v(x)}\right)$.

Chú ý: Ta hoàn toàn có thể dùng cách đặt ẩn phụ với những bài toán căn bậc cao.

Trong nhiều trường hợp việc phân tích như trên không đi đến kết quả ta phải phân tích như sau:

$\sqrt[n]{u(x)}-\sqrt[m]{v(x)}$

$=\left(\sqrt[n]{u(x)}-m(x)\right)-\left(\sqrt[m]{v(x)}-m(x)\right)$

trong đó $m(x)\to c$.

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{2}=0$.

Cách 2: Bấm máy tính như sau: $\dfrac{x^2+2x+1}{2x+2}$ CACL $x=-1+10^{-9}$ và nhận được đáp án.

Cách 3: Dùng chức năng lim của máy Vinacal 570ES Plus: $\lim\dfrac{x^2+2x+1}{2x+2}\Bigg|_{x\to -1+10^{-9}}$

Ví dụ: Tìm giới hạn $L=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{4x-1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt[4]{2x+2}-2}$.

Hướng dẫn giải

$$L=\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{4x-1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt[4]{2x+2}-2}$$

$$=\lim_{x\to 7}\left[\frac{\sqrt[3]{4x-1}-3}{\sqrt[4]{2x+2}-2}-\frac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt[4]{2x+2}-2}\right]=\lim_{x\to 7}(A-B).$$

Ta có

$$A=\frac{\sqrt[3]{4x-1}-3}{\sqrt[4]{2x+2}-2}$$

$$=\frac{2\left(\sqrt[4]{2x+2}+2\right)\left(\sqrt[4]{(2x+2)^2}+4\right)}{\left(\sqrt[3]{(4x-1)^2}+3\sqrt[3]{4x-1}+9\right)}=\frac{64}{27}.$$

$$B=\frac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt[4]{2x+2}-2}$$

$$=\frac{\left(\sqrt[4]{2x+2}+2\right)\left(\sqrt[4]{(2x+2)^2}+4\right)}{2\left(\sqrt{x+2}+3\right)}=\frac{8}{3}.$$

$$L=\lim_{x\to 7}(A-B)=\frac{64}{27}-\frac{8}{3}=\frac{-8}{27}.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2-2x-2)}{(x-1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x-2}{x-3}=\dfrac{3}{2}$

Ví dụ 2: Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-8}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $B=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-8}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)}{x^3-2^3}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-1\right)\left(x-2\right)\left(x+2\right)}{\left(x-2\right)\left(x^2+2x+4\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)}{x^2+2x+4}=1.$$

Ví dụ 3: Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+5x\right)^3-\left(1-6x\right)^4}{x}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+5x\right)^3-\left(1-6x\right)^4}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+5x\right)^3-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-6x\right)^4-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x\left[\left(1+5x\right)^2+\left(1+5x\right)+1\right]}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{12x\left(3x-1\right)\left[\left(1-6x\right)^2+1\right]}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}5\left[\left(1+5x\right)^2+\left(1+5x\right)+1\right]-\lim_{x\to 0}12\left(3x-1\right)\left[\left(1-6x\right)^2+1\right]=39.$$

Ví dụ 4: Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+x\right)\left(1+2x\right)\left(1+3x\right)-1}{x}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+x\right)\left(1+2x\right)\left(1+3x\right)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x^3+11x^2+6x}{x}=6$.

Ví dụ 5: Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}\left(m,n\in\mathbb{N}^*\right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x-1\right)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1\right)}{\left(x-1\right)\left(x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1}{x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1}=\frac{n}{m}.$$

Sau đây chúng ta sẽ tìm một số giới hạn liên quan đến biểu thức chứa dấu căn. Nguyên tắc cơ bản của dạng bài tập này là nhân lượng liên hợp để đưa về đa thức. Ngoài cách đó chúng ta có thể chuyển về đa thức khi thực hiện đặt ẩn phụ tùy bài cụ thể:

Ví dụ 6: Tìm giới hạn $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(\sqrt{3x+1}-1\right)}{x}$.

A. 6 **B.** 3 **C.** -6 **D.** 0

Hướng dẫn giải

Ta có $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(\sqrt{3x+1}-1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{\left(\sqrt{3x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6}{\sqrt{3x+1}+1}=3$.

Ví dụ 7: Tìm giới hạn $K=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x}{\sqrt{4x+1}-1}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $K=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-3)\left(\sqrt{4x+1}+1\right)}{4}=-\dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 8: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{3x+1}-4}{3-\sqrt{x+4}}$ có giá trị bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{3x+1}-4}{3-\sqrt{x+4}}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\left[(3x+1)-16\right]\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{\left[9-(x+4)\right]\left(\sqrt{3x+1}+4\right)}$

$$=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{-3\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{\sqrt{3x+1}+4}=\dfrac{-18}{8}=-\dfrac{9}{4}.$$

Ví dụ 9: Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}+1}{x+2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x+2}{(x+2)\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{x+1}+1\right)}$

$$=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{x+1}+1}=\dfrac{1}{3}.$$

Bằng phương pháp tương tự ta làm một số các bài toán mở rộng sau đây

Ví dụ 10: Tìm giới hạn $M=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{x^2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $M=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-(2x+1)}{x^2}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+6x}-(2x+1)}{x^2}$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-4}{\sqrt{4x+1}+2x+1}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-8x-12}{\sqrt[3]{(1+6x)^2}+(2x+1)\sqrt[3]{1+6x}+(2x+1)^2}$$

$$=-2+4=2.$$

Ví dụ 11: Cho biết $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{1+ax^2}-bx-2}{4x^3-3x+1}=c$, với c là một số nguyên và $a,b\in\mathbb{R}$.

Phương trình $ax^4-2bx^2+c-1=0$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm trên $\mathbb{R}$?

Hướng dẫn giải

Ta có $4x^3-3x+1=(2x-1)^2(x+1)$.

Suy ra phương trình $\Rightarrow 1+ax^2-(bx+2)^2=0$ phải có nghiệm kép là $x=\dfrac{1}{2}$.

$\Rightarrow (a-b^2)x^2-4bx-3=0$ có nghiệm kép $x=\dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-b^2=0\\ \Delta=16b^2+4(a-b^2).3=0\\ (a-b^2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-4.b.\dfrac{1}{2}-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-b^2\neq 0\\ a-b^2=-\dfrac{4}{3}b^2\\ -\dfrac{4}{3}b^2.\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-4.b.\dfrac{1}{2}-3=0\end{cases}\Rightarrow a=b=-3.$$

Thử lại đúng. Vậy $a=b=-3$.

Khi đó $$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{1-3x^2}+3x-2}{4x^3-3x+1}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\dfrac{-3(2x-1)^2}{\sqrt{1-3x^2}-(3x-2)}}{(2x-1)^2(x+1)}$$

$$=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{-3}{\left(\sqrt{1-3x^2}-3x+2\right)(x+1)}=-2.$$

Suy ra $c=-2$.

Vậy ta có phương trình $-3x^4+6x^2-3=0$ có nghiệm $x=\pm1$.

Sau đây chúng ta sẽ làm một số bài toán mang tính tổng quát

Ví dụ 12: Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}\left(n\in\mathbb{N}^*,a\neq0\right)$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Nhân liên hợp

Ta có $$B=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\sqrt[n]{1+ax}-1\right)\left(\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+ax)^{n-2}}+...+\sqrt[n]{1+ax}+1\right)}{x\left(\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+ax)^{n-2}}+...+\sqrt[n]{1+ax}+1\right)}$$

$$B=\lim\limits_{x\to0}\frac{a}{\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+ax)^{n-2}}+...+\sqrt[n]{1+ax}+1}=\frac{a}{n}.$$

Cách 2: Đặt ẩn phụ

Đặt $t=\sqrt[n]{1+ax}\Rightarrow x=\dfrac{t^n-1}{a}$ và $x\to 0\Leftrightarrow t\to 1$.

$$\Rightarrow B=a\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^n-1}=a\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{(t-1)\left(t^{n-1}+t^n+...+t+1\right)}=a\lim_{t\to 1}\frac{1}{t^{n-1}+t^n+...+t+1}=\frac{a}{n}.$$

Ví dụ 13: Tìm giới hạn $N=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $N=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+bx}-1}{x}=\dfrac{a}{m}-\dfrac{b}{n}$.

Ví dụ 14: Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{\sqrt[m]{1+bx}-1}$ với $ab\neq 0$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng bài toán trên ta có $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[m]{1+bx}-1}=\dfrac{a}{n}.\dfrac{m}{b}=\dfrac{am}{bn}$.

Ví dụ 15: Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}\sqrt[3]{1+bx}-1}{x}$ với $ab\neq 0$.

Ta có $\sqrt{1+ax}\sqrt[3]{1+bx}-1=\sqrt{1+ax}\left(\sqrt[3]{1+bx}-1\right)+\left(\sqrt{1+ax}-1\right)$

$$B=\lim_{x\to 0}\sqrt{1+ax}\,\frac{\sqrt[3]{1+bx}-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+ax}-1}{x}\Rightarrow B=\frac{a}{2}+\frac{b}{3}.$$

Ví dụ 16: Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}\sqrt[3]{1+bx}\sqrt[4]{1+cx}-1}{x}$ với $ab\neq 0$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\sqrt{1+ax}\sqrt[3]{1+bx}\sqrt[4]{1+cx}-1$

$=\sqrt{1+ax}\sqrt[3]{1+bx}\left(\sqrt[4]{1+cx}-1\right)+\sqrt{1+ax}\left(\sqrt[3]{1+bx}-1\right)+\left(\sqrt{1+ax}-1\right)$.

$$B=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+ax}\sqrt[3]{1+bx}\right)\frac{\sqrt[4]{1+cx}-1}{x}+\lim_{x\to 0}\sqrt{1+ax}\,\frac{\sqrt[3]{1+bx}-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+ax}-1}{x}$$

$$\Rightarrow B=\frac{c}{4}+\frac{b}{3}+\frac{a}{2}.$$

Ví dụ 17: Tìm giới hạn $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+nx)^m-(1+mnx)}{x^2}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+mnx)}{x^2}=\dfrac{mn(n-m)}{2}$.

Ví dụ 18: Tìm giới hạn $K=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)...\left(1-\sqrt[n]{x}\right)}{\left(1-x\right)^{n-1}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $K=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x+1}\right)...\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}+...+1\right)}=\dfrac{1}{n!}$.

Ví dụ 19: Tìm giới hạn $F=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{(2x+1)(3x+1)(4x+1)}-1}{x}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $y=\sqrt[n]{(2x+1)(3x+1)(4x+1)}\Rightarrow x\to 0$ thì $y\to 1$.

Ta có $\sqrt[n]{(2x+1)(3x+1)(4x+1)}-1=y-1$.

Lại có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y^n-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x+1)(3x+1)(4x+1)-1}{x}=9$.

Do đó $F=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y^n-1}{x\left(y^{n-1}+y^{n-2}+...+y+1\right)}=\dfrac{9}{n}$.

Để tiếp tục ta xét một số bài toán tìm giới hạn của hàm ẩn và giới hạn có tham số sau.

Ví dụ 20: Cho $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+1}{x-1}=-1$. Tính $I=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^2+x\right)f(x)+2}{x-1}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^2+x\right)f(x)+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^2+x\right)\left(f(x)+1\right)-x^2-x+2}{x-1}$

$$=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\left(x^2+x\right)\left(f(x)+1\right)}{x-1}-x-2\right)=-5.$$

Ví dụ 21: Cho *a, b* là các số thực dương thỏa mãn $a+b=2020$ và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+ax+1}-\sqrt{bx+1}}{x}=1010$. Tìm *a, b*.

Hướng dẫn giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+ax+1}-\sqrt{bx+1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2+ax+1\right)-\left(bx+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+ax+1}+\sqrt{bx+1}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+(a-b)x}{x\left(\sqrt{x^2+ax+1}+\sqrt{bx+1}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+(a-b)}{\sqrt{x^2+ax+1}+\sqrt{bx+1}}=\dfrac{a-b}{2}$.

Lại có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+ax+1}-\sqrt{bx+1}}{x}=1010\Leftrightarrow\dfrac{a-b}{2}=1010\Leftrightarrow a-b=2020$.

Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}a+b=2020\\a-b=2020\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2020\\b=0\end{cases}$.

Ví dụ 22: Cho *m, n* là các số thực khác 0. Nếu giới hạn $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+mx+n}{x+5}=3$, hãy tìm *mn*?

Hướng dẫn giải

Vì $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+mx+n}{x-5}=3$ nên $x=-5$ là nghiệm của phương trình $x^2+mx+n=0$

$\Rightarrow -5m+n+25=0\Leftrightarrow n=-25+5m$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+mx+n}{x-1}=\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+mx+5m-25}{x+5}=\lim\limits_{x\to -5}(x-5+m)=m-10$

$\Leftrightarrow m=13\Rightarrow n=40\Rightarrow mn=520$.

Ví dụ 23: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-16}{x-2}=12$.

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{5f(x)-16}-4}{x^2+2x-8}$.

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết có $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)-16\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 2}f(x)=16$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{5f(x)-16}-4}{x^2+2x-8}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(5f(x)-16\right)-64}{(x-2)(x+4)\left[\left(\sqrt[3]{5f(x)-16}\right)^2+4\sqrt[3]{5f(x)-16}+4^2\right]}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{5\left(f(x)-16\right)}{(x-2)(x+4)\left[\left(\sqrt[3]{5f(x)-16}\right)^2+4\sqrt[3]{5f(x)-16}+4^2\right]}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{f(x)-16}{x-2}.\frac{5}{(x+4)\left(\left(\sqrt[3]{5f(x)-16}\right)^2+4\sqrt[3]{5f(x)-16}+4^2\right)}\right]$$

$$=12.\frac{5}{6\left[\left(\sqrt[3]{5.16-16}\right)^2+4\sqrt[3]{5.16-16}+16\right]}=\frac{5}{24}.$$

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Kết quả đúng của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+4}-2}{x^2-4}$ bằng

A. $-\dfrac{1}{12}$ **B.** $\dfrac{5}{12}$ **C.** $-\dfrac{5}{12}$ **D.** $\dfrac{1}{12}$

Câu 2: Kết quả đúng của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ bằng

A. 0 **B.** $+\infty$ **C.** $-\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{1}{2}$

Câu 3: Kết quả đúng của giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-27x}{2x^2-3x-9}$ bằng

A. 7 **B.** 5 **C.** 9 **D.** 3

Câu 4: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-\sqrt{3x+1}}{x^2-1}$, ta được kết quả là

A. 0 **B.** $\dfrac{4}{3}$ **C.** $\dfrac{5}{8}$ **D.** 2

Câu 5: Kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x^2+3}-2}$ bằng

A. $-\dfrac{2}{3}$ **B.** $\dfrac{-1}{\sqrt[3]{4}-2}$ **C.** 0 **D.** 1

Câu 6: Kết quả đúng của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+a)^3-a^3}{x}$ bằng

A. a^2 **B.** $2a^2$ **C.** 0 **D.** $3a^2$

Câu 7: Kết quả đúng của giới hạn $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x^2+6x+8}$ bằng

A. -14 **B.** -16 **C.** -18 **D.** -12

Câu 8: Kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+8x}{x^3+2x^2+x+2}$ bằng

A. $-\dfrac{21}{5}$ **B.** $\dfrac{21}{5}$ **C.** $\dfrac{24}{5}$ **D.** $-\dfrac{24}{5}$

Câu 9: Kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}$ bằng

A. $-\infty$ **B.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\dfrac{-2\sqrt{2}}{3}$ **D.** -2

Câu 10: Kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{3x}$ bằng

A. $+\infty$ **B.** $\dfrac{1}{3}$ **C.** $\dfrac{1}{6}$ **D.** 1

Câu 11: Kết quả đúng của $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{4-\sqrt{x^2+16}}$ bằng

A. $+\infty$ **B.** -1 **C.** -4 **D.** 4

Câu 12: Tính giới hạn $\lim_{x \to 1} \frac{x^m - x^n}{x-1}$; $m, n \in \mathbb{N}$ ta được kết quả là

A. $+\infty$ **B.** $m-n$ **C.** m **D.** mn

Câu 13: Giới hạn $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}$ bằng

A. 1 **B.** 0 **C.** $+\infty$ **D.** $\frac{1}{2}$

Câu 14: Giả sử $L = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{ax+1}-1}{2x}$. Hệ số a bằng bao nhiêu để $L = 3$?

A. 6 **B.** -6 **C.** -12 **D.** 12

Câu 15: Biết $\lim_{x \to 8} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+19}}{\sqrt[4]{x+8}-2} = \frac{a}{b}$, trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, a và b là các số nguyên dương. Tổng $a+b$ bằng

A. 137 **B.** 138 **C.** 139 **D.** 140

Câu 16: Cho a là một số thực khác 0. Kết quả của $\lim_{x \to a} \frac{x^4 - a^4}{x-a}$ bằng

A. $3a$ **B.** $2a^2$ **C.** a^3 **D.** $4a^3$

Câu 17: Biết $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2} = \frac{a}{b}$ trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, a và b là các số nguyên dương. Tổng $2a+b$ bằng

A. 68 **B.** 69 **C.** 70 **D.** 71

Câu 18: Biết $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{6x+9}-\sqrt[3]{27x-54}}{(x-3)(x^2+3x-18)} = \frac{a}{b}$ trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, a và b là các số nguyên dương. Tổng $3x+b$ bằng

A. 57 **B.** 58 **C.** 56 **D.** 55

Dạng 3: Tìm giới hạn của hàm số dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

Đây là dạng quan trọng của giới hạn hàm số, là lớp các bài toán tìm giới hạn dạng $L = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, trong đó $f(x); g(x) \to \pm\infty$ khi $x \to \pm\infty$.

Phương pháp giải

Ví dụ: Tính giới hạn $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4+7}{x^4+1}$.

1. Chia tử và mẫu cho x^n với n là số mũ cao nhất của biến ở mẫu (hoặc phân tích thành tích chứa nhân tử x^n rồi giản ước).

2. Nếu $f\left(x\right)$ hoặc $g\left(x\right)$ có chứa biến x trong dấu căn thì đưa x^k ra ngoài dấu căn (với k là mũ cao nhất của biến x trong dấu căn), sau đó chia tử và mẫu cho lũy thừa cao nhất của x (thường là bậc cao nhất ở mẫu).

3. Sử dụng các kết quả sau đây để tính.

Các giới hạn đặc biệt:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c = c$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{c}{x^k}=0$ với c là hằng số và $k\in\mathbb{N}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$ với k nguyên dương; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=-\infty$

với k lẻ; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=+\infty$ với k chẵn.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Chia cả từ và mẫu cho x^4.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+7}{x^4+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{7}{x^4}}{1+\dfrac{1}{x^4}}=1.$$

Cách 2: Bấm máy tính như sau $\dfrac{x^4+7}{x^4+1}$; CACL; $x=10^9$ và nhận được đáp án.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\sqrt{3x^2+2}}{5x+\sqrt{x^2+2}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\sqrt{3x^2+2}}{5x+\sqrt{x^2+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\sqrt{3+\dfrac{2}{x^2}}}{5+\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{6}$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{2x^4+x^2-3}}$, tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{2x^4+x^2-3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}{2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x^2}}}=0$.

Ví dụ 3: Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}=\dfrac{1+3x}{\sqrt{2x^2+3}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+3x}{\sqrt{2x^2+3}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+3}{-\sqrt{2+\dfrac{3}{x}}}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 4: Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^4+x^6}}{\sqrt{1+x^3+x^4}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^4+x^6}}{\sqrt{1+x^3+x^4}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^6}+\dfrac{1}{x^2}+1}}{x^2\sqrt{\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^2}+1}}=1$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)=(2+x)\sqrt{\dfrac{x-1}{x^4+x^2+1}}$, tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}(2+x)\sqrt{\dfrac{x-1}{x^4+x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{(x-1)(2+x)^2}{x^4+x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{x^4}}{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}}=0$.

Ví dụ 6: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-x^5}{x^4+6x+5}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-x^5}{x^4+6x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(-1+\dfrac{3}{x^3}\right)}{\left(1+\dfrac{6}{x^3}+\dfrac{5}{x^4}\right)}=-\infty$.

Ví dụ 7: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^5+x^4-3}{3x^2-7}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^5+x^4-3}{3x^2-7}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3\left(-2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^5}\right)}{\left(3-\dfrac{7}{x^5}\right)}=+\infty$.

Ví dụ 8: Tính giới hạn $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{3x^3+1}-\sqrt{2x^2+x+1}}{\sqrt[4]{4x^4+2}}$.

Hướng dẫn giải

$$A=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{3x^3+1}-\sqrt{2x^2+x+1}}{\sqrt[4]{4x^4+2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\sqrt[3]{3+\dfrac{1}{x^3}}+x\sqrt{2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{x\sqrt[4]{4+\dfrac{2}{x^4}}}=-\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Ví dụ 9: Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\sqrt{x^2+1}-2x+1}{\sqrt[3]{2x^3-2}+1}$.

Hướng dẫn giải

$$A=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{x^2+1}-2x+1}{\sqrt[3]{2x^3-2}+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(\sqrt[3]{2-\frac{2}{x^3}}+\frac{1}{x}\right)}=+\infty.$$

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Giả sử $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=b$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x).g(x)=a.b$

B. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=a-b$

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$

D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+g(x)\right]=a+b$

Câu 2: Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt[6]{64x^6+x-1}}{\sqrt[4]{x^4+3}}$ được kết quả là

A. -4 **B.** $\dfrac{4}{3}$ **C.** 4 **D.** $-\dfrac{4}{3}$

Câu 3: Giá trị đúng của $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{14}+7}{x^{14}-1}$ là

A. -1 **B.** 1 **C.** 7 **D.** $+\infty$

Câu 4: Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-\sqrt{9x^2+2}}{5x+\sqrt{x^2+1}}$ được kết quả là

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{5}{4}$ **D.** $-\dfrac{1}{6}$

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+2020}{2x^{2019}+x^2}}$. Kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ là

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** 0 **D.** $+\infty$

Câu 6: Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+3x}{\sqrt[5]{2x^5+3}}$ được kết quả

A. $\dfrac{3}{\sqrt[5]{2}}$ **B.** 0 **C.** $-\dfrac{3}{\sqrt[5]{2}}$ **D.** $-\infty$

Câu 7: Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+\sqrt[3]{1+x^4+x^6}}{\sqrt{1+x^3+x^4}+x-1}$ được kết quả

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{3}{2}$ **D.** 1

Câu 8: Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(2x+1\right)\sqrt{\dfrac{x^2-2x-1}{x^4+3x^2+1}}$. Kết quả của $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)$ là

A. 0 **B.** 2 **C.** -2 **D.** $+\infty$

Câu 9: Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x^2+3}}{2\left|x\right|\sqrt{4x^2+5}}$ được kết quả

A. 3 **B.** $\dfrac{1}{4}$ **C.** 1 **D.** $-\dfrac{1}{4}$

Câu 10: Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4+8x\sqrt{x+2}+1}{x^3+2x^2+x+2}$

A. 0 **B.** $+\infty$ **C.** $-\infty$ **D.** 1

Câu 11: Tìm giới hạn $E=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-2x}{x+1}$ được kết quả là

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -1 **D.** 0

Câu 12: Tìm giới hạn $F=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(\sqrt{4x^2+1}+x\right)}{\sqrt[3]{4x^3+1}+2x}$ được kết quả là

A. $-\dfrac{1}{4}$ **B.** $+\infty$ **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** 0

Câu 13: Kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^3-3}+2x^2}{\sqrt{x^4-x^3+x^2-x}}$ là

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** $+\infty$

Câu 14: Tìm giới hạn $M=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}}{x+1}$ được kết quả là

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 1 **D.** -1

Câu 15: Tìm giới hạn $N=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+3}{\sqrt[3]{\left(8x^3+2x\right)^2}+2x\sqrt[3]{8x^3+2x}+4x^2+2}$ được kết quả là

A. $+\infty$ **B.** 0 **C.** $\dfrac{1}{6}$ **D.** $\dfrac{1}{12}$

Câu 16: Tìm giới hạn $H=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[4]{16x^4+3x+1}+\sqrt{4x^2+2}}{3x+1}$ được kết quả là

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** $-\dfrac{4}{3}$

Câu 17: Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{3x^3+1}-\sqrt{2x^2+x+1}}{\sqrt[4]{4x^4+2}}$ được kết quả là

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ **D.** 0

Câu 18: Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x^2+1}-2x+1}{\sqrt[3]{2x^3-2}+1}$ được kết quả là

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** 0

Câu 19: Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x+1)^3(x+2)^{2020}}{(3-2x^4)(1-x)^{2019}}$ được kết quả là

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 4 **D.** 0

Câu 20: Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-3x+4}-2x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$ được kết quả là

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 2 **D.** 0

Dạng 4: Tìm giới hạn của hàm số dạng vô định $\infty-\infty$ và $0.\infty$

Phương pháp giải

1. Tìm giới hạn dạng $L=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-g(x)\right)$, trong đó $f(x);g(x)\to+\infty$, khi $x\to\pm\infty$ hoặc $f(x);g(x)\to-\infty$, khi $x\to\pm\infty$.

2. Tìm giới hạn dạng $L=\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x).g(x)$, trong đó $f(x)\to 0;\ g(x)\to\pm\infty$, khi $x\to\pm\infty$.

Ví dụ: Tìm giới hạn $E=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)$.

Hướng dẫn giải

Đây là giới hạn dạng $\infty-\infty$, để tính giới hạn này ta nhân liên hợp của tử sau đó chia cả tử và mẫu cho *x*.

Chú ý khi $x\to+\infty$ thì $x=\sqrt{x^2}$.

Ta có $E=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Tìm giới hạn $F=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $F=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{4x^2+1}-2x}=-\dfrac{1}{4}$.

Đây là giới hạn dạng $\infty-\infty$, để tính giới hạn này ta nhân liên hợp của tử sau đó chia cả tử và mẫu cho x.

Chú ý khi $x\to-\infty$ thì $x=-\sqrt{x^2}$.

Ví dụ 2: Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x-1}{x-\sqrt{x^2+x+1}}=-\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 3: Tìm giới hạn $C = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $C = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x}{x + 1} = 4$.

Ví dụ 4: Tìm giới hạn $M = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $M = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x}{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}} = -2$.

Ví dụ 5: Tìm giới hạn $K = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1} - 2x \right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $K = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} + \dfrac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} \right) = 0$.

Tiếp theo, ta xét bài tập liên hợp của căn bậc ba hay sự kết hợp căn ở cả tử và mẫu.

Ví dụ 6: Tìm giới hạn $N = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 + 2x} - 2x \right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $N = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{\sqrt[3]{\left(8x^3 + 2x\right)^2} + 2x\sqrt[3]{8x^3 + 2x} + 4x^2} = 0$.

Ví dụ 7: Tìm giới hạn $B = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 - 3x + 4} + 2x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}$.

Hướng dẫn giải

$$B = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3x + 4} + 2x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(4 - 3x)\left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x\right)}{(x + 1)\left(\sqrt{4x^2 - 3x + 4} - 2x\right)} = -\frac{3}{2}.$$

Ví dụ 8: Tìm giới hạn $D = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $D = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x \right) + \left(\sqrt{x^2 + 1 + 1} + x \right) \right)$.

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{\sqrt[3]{\left(x^3 + x^2 + 1\right)^2} + x\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} + x^2} + \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} \right) = -\frac{1}{6}.$$

Ví dụ 9: Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-2\sqrt{x^2-x}+x\right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-x\right)-2\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)\right)$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+1}{\sqrt[3]{\left(x^3+2x^2+1\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}+x^2}+\frac{2x}{\sqrt{x^2-x}+x}\right)=\frac{5}{3}.$$

Bài tập tự luyện dạng 4

Câu 1: Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-x\right)$ được kết quả là

A. $+\infty$ **B.** $-\frac{3}{2}$ **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{3}{2}$

Câu 2: Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2-x+1}\right)$ được kết quả là

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $-\frac{1}{4}$ **D.** $-\frac{1}{2}$

Câu 3: Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[n]{\left(x+a_1\right)\left(x+a_2\right)...\left(x+a_n\right)}-x\right)$ được kết quả là

A. $n\left(a_1+a_2+...+a_n\right)$ **B.** $\frac{a_1a_2...a_n}{n}$ **C.** $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{2n}$ **D.** $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$

Câu 4: Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$ được kết quả là

A. $-\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $-\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Câu 5: Tìm giới hạn $E=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2\left(\sqrt[3]{x^3+2}-x\right)$ được kết quả là

A. $-\frac{1}{6}$ **B.** $-\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $-\frac{1}{3}$

Câu 6: Tìm giới hạn $F=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt[3]{1-x^3}\right)$ được kết quả là

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** 0

Câu 7: Tìm giới hạn $G=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-3x^2}+\sqrt{x^2-2x}\right)$ được kết quả là

A. 0 **B.** 1 **C.** $-\frac{5}{2}$ **D.** -2

Câu 8: Tìm giới hạn $H=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}-\sqrt{4x^2+2}\right)$ được kết quả là

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** 0

Câu 9: Kết quả giới hạn $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^6+x+1}-4\sqrt{x^4+2x-1}}{(2x+3)^2}=-\dfrac{a}{b}$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản $(a;b>0)$.

Tổng $a+b$ bằng

A. 7 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 8

Câu 10: Kết quả giới hạn $J=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-2\sqrt[3]{x^3+x^2-1}+x\right)=-\dfrac{a}{b}$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản $(a;b>0)$. Tổng $a+b$ bằng

A. 7 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 8

Câu 11: Kết quả giới hạn $K=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3+3x^2}\right)=\dfrac{a}{b}$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản $(a;b>0)$.

Tổng $a+b$ bằng

A. 3 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 2

Câu 12: Cho $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+ax+12}+2x\right)=5$. Giá trị của *a* là

A. 10 **B.** -6 **C.** 6 **D.** -20

Câu 13: Cho *a, b* là các số dương. Biết $M=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-ax}+\sqrt[3]{8x^3+bx^2+5}\right)=\dfrac{3}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của *ab*.

A. $\dfrac{8}{9}$ **B.** $\dfrac{16}{3}$ **C.** $\dfrac{3}{8}$ **D.** $\dfrac{8}{3}$

Câu 14: Biết rằng $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x+1}+x\sqrt{2}\right)=\dfrac{a}{b}\sqrt{2}$ (*a* là số nguyên, *b* là số nguyên dương, $\dfrac{a}{b}$ tối giản). Tổng $a+b$ có giá trị là

A. 1 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 7

Câu 15: Biết rằng $b>0, a+3b=9$ và $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=2$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $1<a<3$ **B.** $b>1$ **C.** $a^2+b^2>12$ **D.** $b-a<0$

Câu 16: Cho các số thực *a, b, c* thỏa mãn $c^2+a=18$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx}-cx\right)=-2$. Tính $P=a+b+5c$.

A. $P=18$ **B.** $P=12$ **C.** $P=9$ **D.** $P=5$

Dạng 5: Tìm giới hạn một bên và giới hạn vô cùng

Phương pháp giải

1. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to a^{\pm}}f(x)$ ta sử dụng các định nghĩa và quy tắc giới hạn một bên.

Ví dụ: Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{|x-3|}{5x-1}$.

Hướng dẫn giải

Do $x\to3^-\Rightarrow x<3$, như vậy $|x-3|=-x+3$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right)=L$.

3. Các định lí về giới hạn của hàm số vẫn đúng khi thay $x\to x_0$ bởi $x\to x_0^-$ hoặc $x\to x_0^+$.

4. Quy tắc sử dụng các giới hạn vô cùng dạng thương

Nếu $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=L\neq 0,\ \lim\limits_{x\to a} g\left(x\right)=0$ và $g\left(x\right)>0$ hoặc $g\left(x\right)<0$ với mọi $x\in D\setminus\left\{a\right\}$, thì $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$ được cho bởi bảng sau

L	Dấu của $g\left(x\right)$	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

5. Quy tắc sử dụng các giới hạn vô cùng dạng tích

Nếu $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=L\neq 0,\ \lim\limits_{x\to a} g\left(x\right)=\pm\infty$ thì $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right).g\left(x\right)$ được cho bởi bảng sau

$\lim\limits_{x\to a} g\left(x\right)$	Dấu của L	$\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right).g\left(x\right)$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

Ta có $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\left|x-3\right|}{5x-1}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-x+3}{5x-15}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-1}{5}=\dfrac{-1}{5}$.

Ví dụ: Cho hàm số

$f\left(x\right)=\begin{cases}5x^4-6x^2-x & khi\ x\geq 1\\ -x^3+3x & khi\ x<1\end{cases}$. Tính giới hạn

$K=\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-x^3+3x\right)=-1+3=2$;

$\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(5x^4-6x^2-x\right)=-2$.

Do $\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)\neq\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)$.

Ví dụ: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left|x^2-3x+2\right|}{x-2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\left|\left(x-2\right)\left(x-1\right)\right|}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\left(x-2\right)\left(x-1\right)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x-1\right)=1$.

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\left|\left(x-2\right)\left(x-1\right)\right|}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-\left(x-2\right)\left(x-1\right)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(1-x\right)=-1$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\left|\left(x-2\right)\left(x-1\right)\right|}{x-2}\neq\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\left|\left(x-2\right)\left(x-1\right)\right|}{x-2}$.

Vậy không tồn tại $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left|x^2-3x+2\right|}{x-2}$.

6. Bấm máy tính giới hạn $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)$

- Nhập hàm số $f\left(x\right)$.

$x\to+\infty \Rightarrow$ CALC $x=10^{11}$

$x\to-\infty \Rightarrow$ CALC $x=-10^{11}$

$x\to x_0 \Rightarrow$ CALC $x=x_0\pm\dfrac{1}{10^{11}}$

$x\to x_0^+ \Rightarrow$ CALC $x=x_0+\dfrac{1}{10^{11}}$

$x\to x_0^- \Rightarrow$ CALC $x=x_0-\dfrac{1}{10^{11}}$.

CÁCH CHỌN KẾT QUẢ:

$......10^{-...}\to KQ=0$

$+......10^{+...}\to KQ=+\infty$

$-......10^{+...}\to KQ=-\infty$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{1}{-1}=-1$.

Ví dụ 2: Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2+4x+3}{\sqrt{x^3+x^2}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2+4x+3}{\sqrt{x^3+x^2}}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\left(x+1\right)\left(x+3\right)}{\sqrt{x^2\left(x+1\right)}}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{x+1}\left(x+3\right)}{\sqrt{x^2}}=\dfrac{0}{1}=0$.

Một bài toán về định lí tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right)=L$.

Ví dụ 3: Tìm $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)$ với $f\left(x\right)=\begin{cases} x-3 & khi\ x\le 1\\ 1-\sqrt{7x^2+2} & khi\ x>1\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x-3\right)=-2\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(1-\sqrt{7x^2+2}\right)=-2\end{cases}$.

Do $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -2$ nên $\lim\limits_{x\to1} f(x) = -2$.

Sau đây ta sẽ xét một số bài tập về kết quả giới hạn một phía bằng vô cùng.

Ví dụ 4: Tìm giới hạn $L = \lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x^2-4}\right)$.

Hướng dẫn giải

$$L = \lim_{x\to2^-}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4}\right) = \lim_{x\to2^-}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)(x+2)}\right)$$

$$= \lim_{x\to2^-}\frac{x+2-1}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to2^-}\frac{x+1}{(x-2)(x+2)}.$$

Ta có $\lim\limits_{x\to2^-}(x-2) = 0$ và $x\to2^- \Rightarrow x<2 \Rightarrow x-2<0$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{3}{4} > 0$.

Kết luận $L = -\infty$.

Ví dụ 5: Tìm $\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{x+\sqrt{x+12}}{(x+3)^2}$.

Hướng dẫn giải

$$L = \lim_{x\to-3^+}\frac{x+\sqrt{x+12}}{(x+3)^2} = \lim_{x\to-3^+}\frac{x^2-x-12}{(x+3)^2\left(x-\sqrt{x+12}\right)} = \lim_{x\to-3^+}\frac{(x-4)}{(x+3)\left(x-\sqrt{x+12}\right)}.$$

Ta có $\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{(x-4)}{\left(x-\sqrt{x+12}\right)} = \dfrac{7}{6}$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to-3^+}(x+3) = 0$ và $x\to-3^+ \Rightarrow x>-3 \Rightarrow x+3>0$.

Kết luận $L = +\infty$.

Ví dụ 6: Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+x\right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)}+x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}+1\right) = +\infty$.

Vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}+1\right) = 1-\sqrt{2} < 0 \end{cases}$.

Ví dụ 7: Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^2-4x}-x\right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^2-4x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}-1\right)=-\infty$.

Sau đây chúng ta xét các bài tập về tìm điều kiện để tồn tại giới hạn.

Ví dụ 8: Tìm các giá trị thực của tham số *m* để hàm số $f(x)=\begin{cases}x+m & khi\ x<0\\ x^2+1 & khi\ x\ge 0\end{cases}$ có giới hạn tại $x=0$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x+m)=m;\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+1)=1$.

Hàm số có giới hạn tại $x=0$ khi $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\Leftrightarrow m=1$.

Ví dụ 9: Biết hàm số $y=f(x)=\begin{cases}3x+b, & khi\ x\ge -1\\ x+a, & khi\ x>-1\end{cases}$ cơ giới hạn tại $x=-1$. Tính giá trị của $a-b$?

Hướng dẫn giải

Tại điểm $x=-1$ ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}(3x+b)=-3+b=f(-1)$

và $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+a)=-1+a$.

Hàm số có giới hạn tại $x=-1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)$.

Điều này tương đương với $-3+b=-1+a\Rightarrow a-b=-2$.

Bài tập tự luyện dạng 5

Câu 1: Kết quả $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)$ là

A. $-\infty$ **B.** 0 **C.** $+\infty$ **D.** không tồn tại.

Câu 2: Kết quả $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x^3-x^2}}{\sqrt{x-1}+1-x}$ là

A. -1 **B.** 0 **C.** 1 **D.** $+\infty$

Câu 3: Kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2-x+1}{x^2-1}$ bằng

A. $-\infty$ **B.** -1 **C.** 1 **D.** $+\infty$

Câu 4: Giá trị đúng của $\lim\limits_{x\to3}\frac{|x-3|}{x-3}$ bằng

A. không tồn tại. **B.** 0 **C.** 1 **D.** $+\infty$

Câu 5: Giới hạn $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-2x\right)$ kết quả bằng

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{1}{2}$ **D.** 0

Câu 6: Giới hạn $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^4-x+1}\right)$ có kết quả là

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** 0

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}$. Tìm $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$.

A. $-\infty$ **B.** $-\dfrac{2}{3}$ **C.** $\dfrac{2}{3}$ **D.** $+\infty$

Câu 8: Giới hạn $B=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{4x^2+1}-x\right)$ bằng

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** 0

Câu 9: Tìm $\lim\limits_{x\to(-2)^-}f(x)$ với $f(x)=\begin{cases}2x^2-3, & khi\ |x|<2\\ 5, & khi\ |x|=2\\ 3x-1, & khi\ |x|>2\end{cases}$.

A. Không tồn tại. **B.** $-\infty$ **C.** 5 **D.** -7

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x}, & khi\ x<1\\ \sqrt{2x-2}, & khi\ x\ge1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ bằng

A. 0 **B.** 2 **C.** $-\infty$ **D.** $+\infty$

Câu 11: Cho $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2}, & khi\ -2\le x\le2\\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & khi\ x>2\end{cases}$. Giá trị của $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)$ là

A. 0 **B.** 4 **C.** $+\infty$ **D.** không tồn tại.

Câu 12: Giá trị thực của tham số *a* để hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-2}+3, & khi\ x\ge2\\ ax-1, & khi\ x<2\end{cases}$ tồn tại $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ là

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 1

Câu 13: Giá trị thực của tham số *m* để hàm số $f(x)=\begin{cases}m-3 & khi\ x<1\\ 2m-13 & khi\ x=1\\ 1-\sqrt{7x^2+2} & khi\ x>1\end{cases}$ tồn tại $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ là

A. không tồn tại. **B.** $m=1$ **C.** $m=5$ **D.** $m=\dfrac{11}{2}$

Câu 14: Tìm các giá trị thực của tham số *b* để hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^3-x+6}}, & khi\ x>3\\ b+\sqrt{3}, & khi\ x\le3\end{cases}$ có giới hạn tại $x=3$.

A. $\sqrt{3}$ **B.** $-\sqrt{3}$ **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Câu 15: Các giá trị thực của tham số m để hàm số $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+1}{x+1}, & khi\ x<-1\\ mx^2-x+m^2, & khi\ x\geq -1\end{cases}$ có giới hạn tại $x=-1$ là

A. $m=-1;m=2$ **B.** $m=-1;m=-2$ **C.** $m=1;m=-2$ **D.** $m=1;m=2$

Câu 16: Giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}, & khi\ x>3\\ m & khi\ x\leq 3\end{cases}$ có giới hạn $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ là bao nhiêu?

A. $m=-1$ **B.** $m=4$ **C.** $m=-4$ **D.** $m=1$

Câu 17: Các giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & khi\ x>2\\ ax+\dfrac{1}{4} & khi\ x\leq 2\end{cases}$ có giới hạn $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ là bao nhiêu?

A. $a=0$ **B.** $a=3$ **C.** $a=2$ **D.** $a=1$

Câu 18: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số a để hàm số $f(x)=\begin{cases}a^2x^2 & khi\ x\leq\sqrt{2}\\ (2-a)x^2 & khi\ x>\sqrt{2}\end{cases}$ có giới hạn tại $x=\sqrt{2}$. Tổng các giá trị của S là

A. 3 **B.** 0 **C.** 1 **D.** -1

Câu 19: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x-2 & khi\ x\leq 2\\ ax+b & khi\ 2<x<6\\ x+4 & khi\ x\geq 6\end{cases}$. Biết hàm số $f(x)$ có giới hạn tại $x=2$ và $x=6$. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $2a-b=0$ **B.** $2a+b=0$ **C.** $a-2b=0$ **D.** $a+2b=0$

Câu 20: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{8-x}}{x} & khi\ x\geq 0\\ ax+b-1 & khi\ -2<x<0\\ \dfrac{x^2-4}{x+2} & khi\ x\leq -2\end{cases}$. Tìm *a, b* để hàm số cùng có giới hạn tại $x=-2$ và $x=0$.

A. $a=\dfrac{61}{24},\ b=\dfrac{25}{12}$ **B.** $a=\dfrac{37}{24},\ b=\dfrac{1}{12}$ **C.** $a=\dfrac{61}{24},\ b=\dfrac{1}{12}$ **D.** $a=\dfrac{85}{24},\ b=\dfrac{25}{12}$

Dạng 6: Tìm giới hạn hàm lượng giác

Phương pháp giải

1. Sử dụng các giới hạn cơ bản $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=1$.

2. Mở rộng ta có thể sử dụng các kết quả sau với mọi số thực $a\neq 0$.

+) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=a\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}=a$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin ax}=\dfrac{1}{a}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{x}=a$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan ax}=\dfrac{1}{a}$.

+) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^n x}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^n=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n}{\sin^n x}=1$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^n x}{x^n}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n}{\tan^n x}=1$.

3. Sử dụng nguyên lý kẹp.

4. Sử dụng MTCT như các giới hạn trên, nhưng chuyển qua chế độ Radian.

Ví dụ: Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x-\sin 3x}{x}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $A=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan 2x}{x}-\dfrac{\sin 3x}{x}\right)=2-3=-1$.

Ví dụ: Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $A=\lim\limits_{x\to 0}2.\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2=2$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}$, với $a\neq 0$.

Hướng dẫn giải

Ta có $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{ax}{2}}{x^2}=\dfrac{a^2}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{ax}{2}}{\dfrac{ax}{2}}\right)^2=\dfrac{a^2}{2}$.

Ví dụ 2: Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x}{x^2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\dfrac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x}{x^2}$

$=\dfrac{1-\cos x+\cos x\cos 2x\left(1-\cos 3x\right)+\cos x\left(1-\cos 2x\right)}{x^2}$

$=\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\cos x.\cos 2x\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}+\cos\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

$$B=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\cos x.\cos 2x\frac{1-\cos 3x}{x^2}+\cos x\frac{1-\cos 2x}{x^2}\right)=7.$$

Ví dụ 3: Tìm giới hạn $A=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin 2x-\cos 2x}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin 2x-\cos 2x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2 x+2\sin x\cos x}$

$$\Rightarrow A=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}.\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.\frac{x}{\sin x}.\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\sin x+\cos x}=\frac{1}{2}.$$

Một cách tổng quát ta có bài tập sau:

Ví dụ 4: Tìm giới hạn $A=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin mx-\cos mx}{1+\sin nx-\cos nx}$, với $m.n\neq 0$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{1+\sin mx-\cos mx}{1+\sin nx-\cos nx}=\frac{2\sin^2\frac{mx}{2}+2\sin\frac{mx}{2}\cos\frac{mx}{2}}{2\sin^2\frac{nx}{2}+2\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{nx}{2}}$

$$=\frac{m}{n}.\frac{\sin\frac{mx}{2}}{\frac{mx}{2}}.\frac{\frac{nx}{2}}{\sin\frac{nx}{2}}.\frac{\sin\frac{mx}{2}+\cos\frac{mx}{2}}{\sin\frac{nx}{2}+\cos\frac{nx}{2}}.$$

Suy ra $A=\frac{m}{n}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{mx}{2}}{\frac{mx}{2}}.\lim_{x\to 0}\frac{\frac{nx}{2}}{\sin\frac{nx}{2}}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{mx}{2}+\cos\frac{mx}{2}}{\sin\frac{nx}{2}+\cos\frac{nx}{2}}=\frac{m}{n}$.

Ví dụ 5: Tìm giới hạn $A=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2\sin\frac{3x}{2}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $A=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin\frac{3x}{2}}=\lim_{x\to 0}x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2.\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}=0$.

Ví dụ 6: Tìm giới hạn $B=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{(\sin 3x-\sin 4x)}$.

Hướng dẫn giải

$$B=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}}{-2x\cos\frac{7x}{2}\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{2}.\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\right).\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos\frac{7x}{2}}=\frac{5}{2}.$$

Bây giờ ta xét một số bài tập chứa dấu căn:

Ví dụ 7: Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{1-\sqrt[3]{\cos 2x}}$.

Hướng dẫn giải

$$C=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x}{1-\sqrt[3]{\cos 2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x\left(1+\sqrt[3]{\cos 2x}+\sqrt[3]{\cos^2 2x}\right)}{1-\cos 2x}$$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x\left(1+\sqrt[3]{\cos 2x}+\sqrt[3]{\cos^2 2x}\right)}{2\sin^2 x}$$

$$=2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{2x}\right)^2.\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2.\left(1+\sqrt[3]{\cos 2x}+\sqrt[3]{\cos^2 2x}\right).$$

$\Rightarrow C=6$.

Ví dụ 8: Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin 3x}-\cos 2x}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{1+x\sin 3x}-\cos 2x}{x^2}}$

mà $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin 3x}-\cos 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin 3x}-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

$$=3\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}.\frac{1}{\sqrt{1+x\sin 3x}+1}\right)+2=\frac{7}{2}.$$

Ví dụ 9: Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(\pi x^m\right)}{\sin\left(\pi x^n\right)}$.

Hướng dẫn giải

$$A=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\pi\left(1-x^m\right)}{\sin\pi\left(1-x^n\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\pi\left(1-x^m\right)}{\pi\left(1-x^m\right)}.\lim\limits_{x\to 1}\frac{\pi\left(1-x^n\right)}{\sin\pi\left(1-x^n\right)}.\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^n}{1-x^m}$$

$$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^n}{1-x^m}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1\right)}{(1-x)\left(x^{m-1}+x^{m-2}+...+1\right)}=\frac{n}{m}.$$

Trong nhiều trường hợp việc tìm giới hạn phải sử dụng đến nguyên lý kẹp.
Bài tập sau đây là một trường hợp cụ thể.

Ví dụ 10: Tìm giới hạn $F=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\sin x+2\cos x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $-\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\le\dfrac{3\sin x+2\cos x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\le\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.

Lại có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pm\sqrt{13}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$.

Vậy $F=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\sin x+2\cos}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$.

Bài tập tự luyện dạng 6

Câu 1: Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\tan\left(x-1\right)}{x-1}$ được kết quả là

A. $+\infty$ **B.** 0 **C.** $\dfrac{5}{2}$ **D.** 1

Câu 2: Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x.\sin 5x}{x^2}$ được kết quả là

A. 10 **B.** 7 **C.** $\dfrac{5}{2}$ **D.** 3

Câu 3: Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$ được kết quả là

A. $+\infty$ **B.** $-\dfrac{1}{2}$ **C.** $\dfrac{5}{2}$ **D.** 0

Câu 4: Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x-\cos 4x}{\cos 5x-\cos 6x}$ được kết quả là

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{7}{11}$ **D.** 0

Câu 5: Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1+2\sin 2x}}{\sin 3x}$ được kết quả là

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{4}{9}$ **D.** 0

Câu 6: Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 2x}{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt[4]{\cos x}}$ được kết quả là

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -96 **D.** 0

Câu 7: Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^4 2x}{\sin^4 3x}$ được kết quả chính xác là

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{16}{81}$ **D.** 0

Câu 8: Tìm giới hạn $E=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin\left(\tan x\right)}$ được kết quả là

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{5}{2}$ **D.** 0

Câu 9: Kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to0}x^2\cos\dfrac{2}{nx}$ là

A. không tồn tại. **B.** 0 **C.** 1 **D.** $+\infty$

Câu 10: Kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-5\sin 2x+\cos^2 x}{x^2+2}$ là

A. 1 **B.** 0 **C.** 3 **D.** -1

Câu 11: Tìm giới hạn $L=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ kết quả là

A. $L=1$ **B.** $L=-1$ **C.** $L=0$ **D.** $L=\dfrac{\pi}{2}$

Câu 12: Tìm giới hạn $H=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{\cos ax}-\sqrt[m]{\cos bx}}{\sin^2 x}$ có kết quả là

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{b}{2n}-\dfrac{2}{2m}$ **D.** 0

Câu 13: Tìm giới hạn $M=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[n]{\cos ax}}{x^2}$ có kết quả là

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{a}{2n}$ **D.** 0

Câu 14: Kết quả giới hạn $M=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{1-\cos 2x}=-\dfrac{a}{b}$ trong đó $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản $a;b>0$. Tổng $a+b$ bằng

A. 3 **B.** 2 **C.** 6 **D.** 5

Câu 15: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{\sin 3x}$. Kết quả giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=\dfrac{a}{b}$, trong đó $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản $a;b>0$. Tổng $a+b$ bằng

A. 49 **B.** 48 **C.** 21 **D.** 35

ĐÁP ÁN

Dạng 1. Tìm giới hạn của hàm số bằng thay trực tiếp

1 - B	**2 - B**	**3 - A**	**4 - B**	**5 - A**	**6 - C**	**7 - B**	**8 - C**	**9 - D**	**10 – B**
11 - C	**12 - A**								

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Ta có $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x+1\right)}{2\left(x^2-x+1\right)}=0$.

Câu 2.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\left(2x^2-3x+2\right)^3}=1$.

Câu 3.

Ta có $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+2x^2+1}{\sqrt[3]{2x^5+1}}=-2$.

Câu 4.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2\sqrt{\cos x+3}\right]=0.\sqrt{4}=0$.

Câu 5.

Ta có $5=A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+m}{x+2}=\dfrac{6+m}{4}\Rightarrow m=14$.

Câu 6.

Ta có $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x^4+x^2-3}=\dfrac{\sqrt{5}}{33}$.

Câu 7.

Ta có $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 3x+1}{\cot 2x-3}=\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{-3}=\dfrac{\sqrt{2}-2}{6}$.

Câu 8.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^3-x^2}}{\sqrt{2x-1}+1+x}=\dfrac{0}{3}=0$.

Câu 9.

Nếu $\lim\limits_{x\to -2}f\left(x\right)=5$ thì $\lim\limits_{x\to -2}\left[13-4f\left(x\right)\right]=13-4.\lim\limits_{x\to -2}f\left(x\right)=13-4.5=-7$.

Câu 10.

Ta có $\dfrac{a}{b}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-4\sqrt[3]{2x^3+5x+1}}{x^2-2}\right)=\dfrac{2-4.2}{1^2-2}=6\Rightarrow L=37$.

Câu 11.

Đặt $t=\dfrac{2x-1}{x+2}\Rightarrow x=\dfrac{-2t-1}{t-2}$. Khi $x\to+\infty$ thì $t\to 2$.

Ta có $f\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)=\dfrac{3(x+2)}{2x-1}-\dfrac{1}{2x-1}\Rightarrow f(t)=\dfrac{t+13}{5t}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{t\to 2} f(t)=\dfrac{3}{2}$.

Câu 12.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+1}{x+1}=-1\Rightarrow\dfrac{f(1)+1}{1+1}=-1\Rightarrow f(1)=-3$.

$I=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2+x)f(x)+2}{x+4}=\dfrac{(1+1)f(1)+2}{1+4}=\dfrac{2.(-3)+2}{5}=-\dfrac{4}{5}$.

Dạng 2: Tìm giới hạn của hàm số dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

1 - D	**2 - C**	**3 - C**	**4 - C**	**5 - A**	**6 - D**	**7 - B**	**8 - D**	**9 - B**	**10 – C**
11 - C	**12 - B**	**13 - B**	**14 - D**	**15 - C**	**16 - D**	**17 - A**	**18 - A**		

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+4}-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\left(\sqrt[3]{\left(x^2+4\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2+4}+4\right)\left(x^2-4\right)}$

$$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{\left(x^2+4\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2+4}+4\right)}=\dfrac{1}{12}.$$

Câu 2.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{\left(\sqrt{1-x}+1\right)}=\dfrac{-1}{2}$.

Câu 3.

Ta có $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-27x}{2x^2-3x-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}{(2x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x\left(x^2+3x+9\right)}{(2x+3)}=9$.

Câu 4.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-\sqrt{3x+1}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-3x-1}{\left(x^2-1\right)\left(2x+\sqrt{3x+1}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x+1}{\left(x+1\right)\left(2x+\sqrt{3x+1}\right)}=\dfrac{5}{8}$.

Câu 5.

Ta có $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x^2+3}-2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x+1\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)\left(x^2-1\right)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)\left(x-1\right)}=\dfrac{4}{-6}=\dfrac{-2}{3}$.

Câu 6.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x+a\right)^3-a^3}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+3x^2a+3xa^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+3xa+3a^2\right)=3a^2$.

Câu 7.

Ta có $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x^2+6x+8}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\left(x^2+4\right)\left(x-2\right)\left(x+2\right)}{\left(x+2\right)\left(x+4\right)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\left(x^2+4\right)\left(x-2\right)}{\left(x+4\right)}=-16$.

Câu 8.

Ta có $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+8x}{x^3+2x^2+x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x\left(x+2\right)\left(x^2-2x+4\right)}{\left(x+2\right)\left(x^2+1\right)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x\left(x^2-2x+4\right)}{\left(x^2+1\right)}=\dfrac{-24}{5}$.

Câu 9.

Ta có $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)\left(-x-1\right)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x-1\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{2}\right)}{-\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 10.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{3x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{3\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=\dfrac{1}{6}$.

Câu 11.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{4-\sqrt{x^2+16}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\left(4+\sqrt{x^2+16}\right)}{-x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(4+\sqrt{x^2+16}\right)}{-\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=-4$.

Câu 12.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-x^n}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^m-1\right)-\left(x^n-1\right)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x-1\right)\left(x^{m-1}+x^{m-2}+...+1\right)-\left(x-1\right)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1\right)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\left[\left(x^{m-1}+x^{m-2}+...+1\right)-\left(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1\right)\right]=m-n$.

Câu 13.

Ta có $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+1}=1$ và $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{3x-2}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3}{\left(\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{3x-2}+1\right)}=1$.

Do đó $L=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{3x-2}-1}{x-1}=1-1=0$. Vậy $L=0$.

Câu 14.

Ta có $L=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{ax+1}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a}{2\left(\sqrt{ax+1}+1\right)}=\dfrac{a}{4}\Rightarrow\dfrac{a}{4}=3\Rightarrow a=12$.

Câu 15.

Đặt $\sqrt[4]{x+8}=t\Rightarrow\begin{cases}t^4-8=x\\ x\to8\Rightarrow t\to2\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+19}}{\sqrt[4]{x+8}-2}=\lim\limits_{t\to2}\dfrac{\sqrt{t^4-7}-\sqrt[3]{t^4+11}}{t-2}$

Khi đó $\lim\limits_{t\to2}\dfrac{\sqrt{t^4-7}-3}{t-2}=\lim\limits_{t\to2}\dfrac{\left(t^2+4\right)(t+2)}{\sqrt{t^4-7}+3}=\dfrac{16}{3}$

và $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{t^4+11}-3}{t-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\left(t^4+4\right)(t+2)}{\left(\sqrt[3]{\left(t^4+11\right)^2}+3\sqrt[3]{t^4+11}+9\right)}=\dfrac{32}{27}$.

Ta có $\dfrac{a}{b}=\lim\limits_{t\to2}\dfrac{\sqrt{t^4-7}-\sqrt[3]{t^4+11}}{t-2}=\lim\limits_{t\to2}\dfrac{\sqrt{t^4-7}-3}{t-2}-\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{t^4+11}-3}{t-2}=\dfrac{16}{3}-\dfrac{32}{27}$.

Suy ra $\dfrac{a}{b}=\dfrac{112}{27}\Rightarrow a+b=139$.

Câu 16.

Ta có $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-a^4}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\left(x^2+a^2\right)(x+a)(x-a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\left[\left(x^2+a^2\right)(x+a)\right]=4a^3$.

Câu 17.

Vì $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-3}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{8}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(8x+11)^2}+3\sqrt[3]{8x+11}+9\right)}=\dfrac{8}{27}$.

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{(x-1)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\dfrac{1}{6}$.

Suy ra $\dfrac{a}{b}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-3}{x^2-3x+2}-\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-3x+2}=\dfrac{8}{27}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{54}$.

Vậy $\dfrac{a}{b}=\dfrac{7}{54}\Rightarrow2a+b=14+54=68$.

Câu 18.

Vì $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{6x-9}-x}{(x-3)^2(x+6)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{-1}{(x+6)\left(\sqrt{6x-9}+x\right)}=\frac{-1}{54}$;

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{27x-54}-x}{(x-3)^2(x+6)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{-1}{\left(\sqrt[3]{(27x-54)^2}+x\sqrt[3]{27x-54}+x^2\right)}=\frac{-1}{27}$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x-54}}{(x-3)\left(x^2+3x-18\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{6x-9}-x}{(x-3)^2(x+6)}-\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{27x-54}-x}{(x-3)^2(x+6)}=\frac{-1}{54}+\frac{1}{27}=\frac{1}{54}$.

Vậy $\frac{a}{b}=\frac{1}{54}\Rightarrow 3a+b=57$.

Dạng 3: Tìm giới hạn của hàm số dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

1 - C	**2 - C**	**3 - B**	**4 - C**	**5 - C**	**6 - A**	**7 - D**	**8 - C**	**9 - B**	**10 – B**
11 - C	**12 - B**	**13 - B**	**14 - C**	**15 - C**	**16 - D**	**17 - C**	**18 - A**	**19 - C**	**20 - C**

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Theo tính chất thì C sai khi $b=0$ hay $g(x)=0$.

Câu 2.

Ta có $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt[6]{64x^6+x-1}}{\sqrt[4]{x^4+3}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}}-\sqrt[6]{64+\frac{1}{x^5}-\frac{1}{x^6}}}{-\sqrt[4]{1+\frac{3}{x^4}}}=4$.

Câu 3.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{14}+7}{x^{14}-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{7}{x^{14}}}{1-\frac{1}{x^{14}}}=1$.

Câu 4.

Ta có $C=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-\sqrt{9x^2+2}}{5x+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2+\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}{5-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{5}{4}$.

Câu 5.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{\frac{1}{x^{2017}}+\frac{2020}{x^{2019}}}{2+\frac{1}{x^{2017}}}}=0$.

Câu 6.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+3x}{\sqrt[5]{2x^5+3}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(\dfrac{1}{x}+3\right)}{x\sqrt[5]{2+\dfrac{3}{x^5}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\dfrac{1}{x}+3\right)}{\sqrt[5]{2+\dfrac{3}{x^5}}}=\dfrac{3}{\sqrt[5]{2}}$.

Câu 7.

Ta có $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+\sqrt[3]{1+x^4+x^6}}{\sqrt{1+x^3+x^4}+x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\left(\dfrac{2}{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^6}+\dfrac{1}{x^2}+1}\right)}{x^2\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x}+1}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\dfrac{2}{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^6}+\dfrac{1}{x^2}+1}\right)}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x}+1}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}=1$.

Câu 8.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1)\sqrt{\dfrac{x^2-2x-1}{x^4+3x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)\left(-\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}}\right)=-2$.

Câu 9.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x^2+3}}{2|x|\sqrt{4x^2+5}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^4}}}{2x^2\sqrt{4+\dfrac{5}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^4}}}{2\sqrt{4+\dfrac{5}{x^2}}}=\dfrac{1}{4}$.

Câu 10.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4+8x\sqrt{x+2}+1}{x^3+2x^2+x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4\left(1+\dfrac{8}{x^2\sqrt{x}}\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^4}}\right)}{x^3\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{8}{x^2\sqrt{x}}\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^4}}\right)}{\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)}=+\infty$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{8}{x^2\sqrt{x}}\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^4}}\right)}{\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)}=1>0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

Câu 11.

Ta có $E=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-2x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-2}{1+\dfrac{1}{x}}=-1$.

Câu 12.

Ta có $F=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\left(-\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}{x\left(\sqrt[3]{4+\dfrac{1}{x^3}}+2\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(-\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}{\sqrt[3]{4+\dfrac{1}{x^3}}+2}=+\infty$

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}+1}{\sqrt[3]{4+\dfrac{1}{x^3}}+2}=\dfrac{-1}{\sqrt[3]{4}+2}<0$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$.

Câu 13.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^3-3}+2x^2}{\sqrt{x^4-x^3+x^2-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^4}}+2\right)}{x^2\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^4}}+2}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}}=2$.

Câu 14.

Ta có $M=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(-\sqrt{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+2\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+2\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=1$.

Câu 15.

Ta có $N=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(2+\dfrac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(8+\dfrac{2}{x^2}\right)^2}+2\sqrt[3]{8+\dfrac{2}{x^2}}+4+\dfrac{2}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{3}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(8+\dfrac{2}{x^2}\right)^2}+2\sqrt[3]{8+\dfrac{2}{x^2}}+4+\dfrac{2}{x^2}}=\dfrac{1}{6}$.

Câu 16.

Ta có $H=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[4]{16x^4+3x+1}+\sqrt{4x^2+2}}{3x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{x\left(\sqrt[4]{16+\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}+\sqrt{4+\dfrac{2}{x^2}}\right)}{3x+1}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{\sqrt[4]{16+\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}+\sqrt{4+\dfrac{2}{x^2}}}{3+\dfrac{1}{x}}=-\dfrac{4}{3}$.

Câu 17.

Ta có $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{3x^3+1}-\sqrt{2x^2+x+1}}{\sqrt[4]{4x^4+2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{x\left(\sqrt[3]{3+\dfrac{1}{x^3}}+\sqrt{2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)}{x\sqrt[4]{4+\dfrac{2}{x^4}}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{\sqrt[3]{3+\dfrac{1}{x^3}}+\sqrt{2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{\sqrt[4]{4+\dfrac{2}{x^3}}}=-\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

Câu 18.

Ta có $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x^2+1}-2x+1}{\sqrt[3]{2x^3-2}+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt[3]{2-\dfrac{1}{x^3}}+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x}}{\sqrt[3]{2-\dfrac{2}{x^3}}+\dfrac{1}{x}}\right)=+\infty$.

Câu 19.

Ta có $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2023}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^3\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{2020}}{x^{2023}\left(\dfrac{3}{x^4}-2\right)\left(\dfrac{1}{x}-1\right)^{2019}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^3\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{2020}}{\left(\dfrac{3}{x^4}-2\right)\left(\dfrac{1}{x}-1\right)^{2019}}=4$.

Câu 20.

Ta có $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\left(\sqrt{4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}}+2\right)}{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}}+2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}=2$.

Dạng 4: Tìm giới hạn của hàm số vô định $\infty-\infty$ và $0.\infty$

1 - B	**2 - A**	**3 - D**	**4 - B**	**5 - C**	**6 - B**	**7 - A**	**8 - D**	**9 - A**	**10 - A**
11 - A	**12 - D**	**13 - B**	**14 - D**	**15 - A**	**16 - B**				

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Ta có $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-x\right)\Leftrightarrow A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x+1}{\sqrt{x^2-3x+1}+x}\Leftrightarrow A=-\dfrac{3}{2}$.

Vậy $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-x\right)=\dfrac{-3}{2}$.

Câu 2.

Ta có $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2-x+1}\right)\Leftrightarrow B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+1}{\sqrt{4x^2-x+1}-2x}\Leftrightarrow B=\dfrac{1}{4}$.

Vậy $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2-x+1}\right)=\dfrac{1}{4}$.

Câu 3.

Sử dụng công thức $a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$.

Ta có $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)}-x\right)\Leftrightarrow C=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)-x^n}{\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)}^{\,n-1}+\ldots+x^{n-1}}$

$\Leftrightarrow C=\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$.

Câu 4.

Ta có $D=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{9x^2+1}+3}=\dfrac{1}{6}$.

Câu 5.

Ta có $E=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left(\sqrt[3]{x^3+2}-2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3+2\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3+2}+x^2}=\dfrac{2}{3}$.

Câu 6.

Ta có $E=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt[3]{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1-\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^3}-1}\right)=-\infty$.

Câu 7.

Ta có $G=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-3x^2}+\sqrt{x^2-2x}\right)\Leftrightarrow G=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-3x^2}-x\right)+\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)$

$\Leftrightarrow G=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x^2\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3-3x}+x^2}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x-\sqrt{x^2-2x}}\Leftrightarrow G=-1+1=0$.

Câu 8.

Ta có $H=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}-\sqrt{4x^2+2}\right)$

$\Leftrightarrow H=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}-2x\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{\sqrt[4]{\left(16x^4+3x+1\right)^3}+2x.\sqrt[4]{\left(16x^4+3x+1\right)^2}+4x^2\sqrt[4]{16x^4+3x+1}+8x^3}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{2x+\sqrt{4x^2+2}}\Leftrightarrow H=0$.

Câu 9.

Ta có $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^6+x+1}-4\sqrt{x^4+2x-1}}{\left(2x+3\right)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^5}+\dfrac{1}{x^6}}-4\sqrt{1+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}}}{\left(2+\dfrac{3}{x}\right)^2}=-\dfrac{3}{4}$.

Suy ra $a+b=7$.

Câu 10.

Ta có $J=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-2\sqrt[3]{x^3+x^2-1}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}2\left(x-\sqrt[3]{x^3+x^2-1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}+\lim\limits_{x\to+\infty}2\dfrac{-x^2+1}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+x^2-1}+\sqrt[3]{\left(x^3+x^2-1\right)^2}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{6}$.

Suy ra $a+b=7$.

Câu 11.

Ta có $K=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3+3x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x}-x-1\right)+\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(x+1-\sqrt[3]{x^3+3x^2}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2+2x}+(x+1)} + \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+x}{(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{x^3+3x}+\sqrt[3]{(x^3+3x)^2}} = -\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}.$$

Suy ra $a+b=3$.

Câu 12.

Ta có $L=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+ax+12}+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+12}{\sqrt{4x^2+ax+12}-2x}=-\frac{a}{4}$.

Suy ra $-\frac{a}{4}=5 \Leftrightarrow a=-20$.

Câu 13.

Ta có $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-ax}+\sqrt[3]{8x^3+bx^2+5}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-ax}+2x\right)+\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+bx^2+5}-2x\right)$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-ax}{\sqrt{4x^2-ax}-2x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{bx^2+5}{\sqrt[3]{(8x^3+bx^2+5)^2}+2x\sqrt[3]{8x^3+bx^2+5}+4x^2}=\frac{a}{4}+\frac{b}{12}.$$

Ta có $\frac{2}{3}=\frac{a}{4}+\frac{b}{12}\ge 2\sqrt{\frac{a}{4}.\frac{b}{12}} \Leftrightarrow ab\le\frac{16}{3}$.

Câu 14.

Ta có $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x+1}+x\sqrt{2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x+1}{\sqrt{2x^2-3x+1}-x\sqrt{2}}=\frac{3}{4}\sqrt{2}$.

Suy ra $a+b=7$.

Câu 15.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt[3]{ax+1}-1}{x}+\frac{1-\sqrt{1-bx}}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{ax}{x\left(\sqrt[3]{(ax+1)^2}+\sqrt[3]{ax+1}+1\right)}+\frac{bx}{x\left(1+\sqrt{1-bx}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{a}{\sqrt[3]{(ax+1)^2}+\sqrt[3]{ax+1}+1}+\frac{b}{1+\sqrt{1-bx}}\right]=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}$$

Theo bài ra ta có $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=2 \Leftrightarrow 2a+3b=12$. Từ giả thiết $a+3b=9$ suy ra $a=3;b=2$, vậy **A** sai.

Câu 16.

Ta có $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx}-cx\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-c)^2x^2+bx}{\sqrt{ax^2+bx}+cx}$.

Để giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(a-c^2\right)x^2+bx}{\sqrt{ax^2+bx}+cx}=-2$ thì $\begin{cases}a-c^2=0\\ \dfrac{b}{\sqrt{a}+c}=-2\end{cases}$.

Theo đầu bài ta có hệ $\begin{cases}a-c^2=0\\ a+c^2=18\\ \dfrac{b}{\sqrt{a}+c}=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=9\\ c=3\\ b=-12\end{cases}$ (nếu $c=-3$ thì $\sqrt{a}+c=0$).

Suy ra $P=a+b+5c=9-12+15=12$.

Dạng 5: Tìm giới hạn một bên và giới hạn bằng vô cùng

1 - C	**2 - C**	**3 - D**	**4 - A**	**5 - B**	**6 - A**	**7 - A**	**8 - B**	**9 - D**	**10 - D**
11 - A	**12 - A**	**13 - A**	**14 - D**	**15 - C**	**16 - C**	**17 - A**	**18 - D**	**19 - B**	**20 - A**

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Cách 1:

Ta có $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x^2}-\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2}{x^3}=+\infty$.

Cách 2:

(Sử dụng MTCT)

Nhập hàm số $f\left(x\right)=\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)$.

Vì $x\to0^-$ nên nhập $CALC\ x=-\dfrac{1}{10^{11}}$.

Câu 2.

Cách 1:

Ta có $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^3-x^2}}{\sqrt{x-1}+1-x}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1-x}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{1-\sqrt{x-1}}=1$.

Cách 2:

(Sử dụng MTCT)

Nhập hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x^3-x^2}}{\sqrt{x-1}+1-x}$.

Vì $x\to1^+$ nên nhập $CALC\ x=1+\dfrac{1}{10^{11}}$.

Câu 3.

Cách 1:

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-x+1}{x^2-1}=+\infty$.

Cách 2:

(Sử dụng MTCT)

Nhập hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2-1}$.

Vì $x\to 1^+$ nên nhập $CALC\ x=1+\dfrac{1}{10^{11}}$.

Câu 4.

Cách 1:

Ta có $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\left|x-3\right|}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-3}{x-3}=1$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\left|x-3\right|}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{3-x}{x-3}=-1$.

Do $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\left|x-3\right|}{x-3}\neq\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\left|x-3\right|}{x-3}$. Nên không tồn tại giới hạn.

Cách 2:

(Sử dụng MTCT)

Nhập hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{\left|x-3\right|}{x-3}$.

Vì $x\to 3^+$ nên nhập $CALC\ x=3+\dfrac{1}{10^{11}}$.

Vì $x\to 3^-$ nên nhập $CALC\ x=3-\dfrac{1}{10^{11}}$.

Hai giá trị không gần nhau nên không tồn tại giới hạn.

Câu 5.

Cách 1:

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}+\dfrac{2}{x}}=-\infty$.

Cách 2:

(Sử dụng MTCT)

Nhập hàm số $f\left(x\right)=\left(\sqrt{x^2-x+1}-2x\right)$.

Vì $x\to+\infty$ nên nhập $CALC\ x=10^{10}$.

Câu 6.

Cách 1:

Ta có $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^4-x+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x^4+4x^2+x-1}{2x-\sqrt{4x^4-x+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}}{\dfrac{2}{x^3}-\sqrt{\dfrac{4}{x^4}-\dfrac{1}{x^7}+\dfrac{1}{x^8}}}=+\infty$.

Cách 2:

(Sử dụng MTCT)

Nhập hàm số $f\left(x\right)=\left(2x+\sqrt{4x^4-x+1}\right)$.

Vì $x\to-\infty$ nên nhập $CALC\ x=-10^{10}$.

Câu 7.

Cách 1:

Ta có $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{1}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1}\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}-1\right)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-2}{3(x-1)}=-\infty$.

Cách 2:

(Sử dụng MTCT)

Nhập hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}$.

Vì $x\to1^+$ nên nhập $CALC\ x=1+\dfrac{1}{10^{10}}$.

Câu 8.

Cách 1:

Ta có $B=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{4x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(3x^2+1\right)}{\sqrt{4x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3+\dfrac{1}{x^2}}{-\sqrt{\dfrac{4}{x^4}+\dfrac{1}{x^6}}+\dfrac{1}{x^2}}=-\infty$.

Cách 2:

(Sử dụng MTCT)

Nhập hàm số $f\left(x\right)=x\left(\sqrt{4x^2+1}-x\right)$.

Vì $x\to-\infty$ nên nhập $CALC\ x=-10^{10}$.

Câu 9.

Với $f\left(x\right)=\begin{cases}2x^2-3, & khi\ |x|<2\\ 5, & khi\ |x|=2\\ 3x-1, & khi\ |x|>2\end{cases}$. Ta có $\lim\limits_{x\to(-2)^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to(-2)^-}\left(3x-1\right)=-7$.

Câu 10.

Với hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x}, & khi\ x<1\\ \sqrt{2x-2}, & khi\ x\ge1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to1^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+1}{1-x}=+\infty$.

Câu 11.

Với hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2},\ khi\ -2\le x\le 2\\ \dfrac{x^2-4}{x-2},\quad khi\ x>2\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\sqrt{4-x^2}=0$.

Câu 12.

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{x-2}+3\right)=3\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(ax-1)=2a-1\end{cases}$

Vậy để tồn tại $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ thì $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

$\Leftrightarrow 3=2a-1$

$\Leftrightarrow a=2$.

Câu 13.

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(1-\sqrt{7x^2+2}\right)=-2\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(m-3)=m-3\\ f(1)=2m-13\end{cases}$

Để tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ thì $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\Leftrightarrow -2=m-3=2m-13$.

Vậy không tồn tại *m*.

Câu 14.

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^3-x+6}}=\sqrt{\dfrac{1}{3}}\\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(b+\sqrt{3}\right)=b+\sqrt{3}\end{cases}$

Vậy để tồn tại $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ thì $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{1}{3}}=b+\sqrt{3}\Leftrightarrow b=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 15.

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(mx^2-x+m^2\right)=m^2+m+1\\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\dfrac{x^3+1}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to -1^-}\left(x^2-x+1\right)=3\end{cases}$

Vậy để tồn tại $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ thì $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

$\Leftrightarrow m^2+m+1=3\Leftrightarrow m=1; m=-2$.

Câu 16.

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{(3-x)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x-3} = -4 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} m = m \end{cases}$

Vậy để tồn tại $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ thì $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \Leftrightarrow m = -4$.

Câu 17.

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4\right)} = \dfrac{1}{4} \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \left(ax + \dfrac{1}{4}\right) = 2a + \dfrac{1}{4} \end{cases}$

Vậy để tồn tại $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ thì $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

$\Leftrightarrow 2a + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow a = 0$.

Câu 18.

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to \sqrt{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \sqrt{2}^+} (2-a)x^2 = 4 - 2a \\ \lim\limits_{x\to \sqrt{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \sqrt{2}^-} a^2x^2 = 2a^2 \end{cases}$

Để tồn tại $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} f(x)$ thì $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \sqrt{2}^-} f(x)$

$\Leftrightarrow 4 - 2a = 2a^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -2 \end{array}\right.$.

Vậy tổng các giá trị của S là -1.

Câu 19.

Vì hàm số có giới hạn tại $x = 2$ và $x = 6$ nên ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \\ \lim\limits_{x\to 6^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 6^-} f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ 6a + b = 10 \end{cases}$.

Câu 20.

Để hàm số có giới hạn tại $x = -2$ và $x = 0$ thì

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^+} (ax + b - 1) = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^2-4}{x+2} \Leftrightarrow -2a + b - 1 = -4 (1) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{8-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} (ax + b - 1) \Leftrightarrow b - 1 = \dfrac{13}{12} (2) \end{cases}$. Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} -2a + b = -3 \\ b - 1 = \dfrac{13}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{61}{24} \\ b = \dfrac{25}{12} \end{cases}$.

Dạng 6: Tìm giới hạn hàm lượng giác

1 - D	2 - A	3 - B	4 - C	5 - C	6 - C	7 - C	8 - D	9 - B	10 - B
11 - B	12 - C	13 - C	14 - D	15 - A					

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Ta có $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\tan\left(x-1\right)}{x-1}=1$.

Câu 2.

Ta có $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tan 2x}{2x}.\dfrac{5\sin 5x}{5x}=10$.

Câu 3.

Ta có $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\left(\cos x-1\right)}{x^3\cos x}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x.\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^3\cos x}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 4.

Ta có $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 4x}{\cos 5x-\cos 6x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{7x}{2}.\sin\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{11x}{2}.\sin\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{7x}{2}}{\sin\dfrac{11x}{2}}=\dfrac{7}{11}$.

Câu 5.

Ta có $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1+2\sin 2x}}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 2x}{\sin 3x\left(1+\sqrt[3]{1+2\sin 2x}+\sqrt[3]{\left(1+2\sin 2x\right)^2}\right)}=-\dfrac{4}{9}$.

Câu 6.

Ta có $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt[4]{\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}}{\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x^2}+\dfrac{1-\sqrt[4]{\cos x}}{x^2}}$;

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2\left(1+\sqrt[3]{\cos 2x}+\sqrt[3]{\cos^2 2x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2\left(1+\sqrt[3]{\cos 2x}+\sqrt[3]{\cos^2 2x}\right)}=\dfrac{1}{6}$;
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[4]{\cos x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\cos x\right)}{x^2\left(1+\sqrt[4]{\cos x}\right)\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\dfrac{1}{8}$;
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}=4$.

Vậy $C=\dfrac{4}{-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}}=-96$.

Câu 7.

Ta có $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^4 2x}{\sin^4 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin^4 2x}{x^4}}{\dfrac{\sin^4 3x}{x^2}}=\dfrac{16}{81}$.

Câu 8.

Ta có $E=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)}{\tan x}}{\dfrac{\sin(\tan x)}{\tan x}}$ mà $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)}{\tan x}=1$.

Lại có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\left[\dfrac{\pi}{2}(1-\cos x)\right]}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{\pi\sin^2\dfrac{x}{2}}{2}\right)}{\tan x}$

$$=\frac{\pi}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi\sin^2\dfrac{x}{2}}{2}\right)}{\dfrac{\pi\sin^2\dfrac{x}{2}}{2}}.\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}.x.\frac{x}{\tan x}=0.$$

Do đó $E=0$.

Câu 9.

Ta có $0\le\left|\cos\dfrac{2}{nx}\right|\le 1\Leftrightarrow 0\le\left|x^2\cos\dfrac{2}{nx}\right|\le x^2$ mà $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ nên $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\dfrac{2}{nx}=0$.

Câu 10.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-5\sin 2x+\cos^2 x}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x-10\sin 2x+\cos 2x+1}{2x^2+4}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+1}{2x^2+4}+\lim_{x\to+\infty}\frac{-10\sin 2x+\cos 2x}{2x^2+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-10\sin 2x+\cos 2x}{2x^2+4}.$$

Vì $-10\sin 2x+\cos 2x\le\sqrt{\left(10^2+1^2\right)\left(\sin^2 2x+\cos^2 2x\right)}=\sqrt{101}$ nên $0\le\left|\dfrac{-10\sin 2x+\cos 2x}{2x^2+4}\right|\le\dfrac{\sqrt{101}}{2x^2+4}$.

Lại có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{101}}{2x^2+4}=0$ suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-10\sin 2x+\cos 2x}{2x^2+4}=0$.

Câu 11.

Ta có $L=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{x-\dfrac{\pi}{2}}=-1$.

Câu 12.

$$H=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{\cos ax}-\sqrt[m]{\cos bx}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{\cos ax}-1+1-\sqrt[m]{\cos bx}}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos ax-1}{\left[\left(\sqrt[m]{\cos ax}\right)^{m-1}+\left(\sqrt[m]{\cos ax}\right)^{m-2}+...+1\right]\sin^2 x}-\lim_{x\to0}\frac{\cos bx-1}{\left[\left(\sqrt[m]{\cos bx}\right)^{m-1}+\left(\sqrt[m]{\cos bx}\right)^{m-2}+...+1\right]\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\dfrac{bx}{2}}{\left[\left(\sqrt[m]{\cos bx}\right)^{m-1}+\left(\sqrt[m]{\cos bx}\right)^{m-2}+...+1\right]\sin^2 x}-\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\dfrac{ax}{2}}{\left[\left(\sqrt[m]{\cos ax}\right)^{m-1}+\left(\sqrt[m]{\cos ax}\right)^{m-2}+...+1\right]\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{b^2}{2}.\dfrac{\sin^2\dfrac{bx}{2}}{\dfrac{b^2x^2}{4}}}{\left[\left(\sqrt[m]{\cos bx}\right)^{m-1}+\left(\sqrt[m]{\cos bx}\right)^{m-2}+...+1\right]\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}-\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{a^2}{2}.\dfrac{\sin^2\dfrac{ax}{2}}{\dfrac{a^2x^2}{4}}}{\left[\left(\sqrt[m]{\cos ax}\right)^{m-1}+\left(\sqrt[m]{\cos ax}\right)^{m-2}+...+1\right]\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}$$

$$=\frac{b^2-a^2}{2m}.$$

Câu 13.

Ta có $M=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt[n]{\cos ax}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos ax}{\left[\left(\sqrt[n]{\cos ax}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{\cos ax}\right)^{n-2}+...+1\right]x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{a^2}{2}\sin^2\dfrac{ax}{2}}{\left[\left(\sqrt[n]{\cos ax}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{\cos ax}\right)^{n-2}+...+1\right]\dfrac{a^2x^2}{4}}=\frac{a^2}{2n}.$$

Câu 14.

Ta có $M=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\sqrt[3]{3x+1}-\sqrt{2x+1}}{x^2}}{\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\sqrt[3]{3x+1}-(x+1)+(x+1)-\sqrt{2x+1}}{x^2}}{\dfrac{2\sin^2 x}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{3x+1}-x-1}{x^2}}{\dfrac{2\sin^2 x}{x^2}}+\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{x+1-\sqrt{2x+1}}{x^2}}{\dfrac{2\sin^2 x}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-x^3-3x^2}{x^2\left(\left(\sqrt[3]{3x+1}\right)^2+(x+1)\sqrt[3]{3x+1}+(x+1)^2\right)}}{\dfrac{2\sin^2 x}{x^2}}+\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{x^2\left(x+1+\sqrt{2x+1}\right)}}{\dfrac{2\sin^2 x}{x^2}}$$

$$=\frac{-1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}\Rightarrow a=1;b=4\Rightarrow a+b=5.$$

Câu 15.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-2+2-\sqrt[3]{8-x}}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-2}{\sin 3x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt[3]{8-x}}{\sin 3x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2x}{1+\sqrt{1+x}}}{3x\dfrac{\sin 3x}{3x}}+\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{4+2\sqrt[3]{8-x}+\left(\sqrt[3]{8-x}\right)^2}}{3x\dfrac{\sin 3x}{3x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{1+\sqrt{1+x}}}{3\dfrac{\sin 3x}{3x}}+\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{4+2\sqrt[3]{8-x}+\left(\sqrt[3]{8-x}\right)^2}}{3\dfrac{\sin 3x}{3x}}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{36}=\frac{13}{36}=\frac{a}{b}\Rightarrow a+b=49.$$