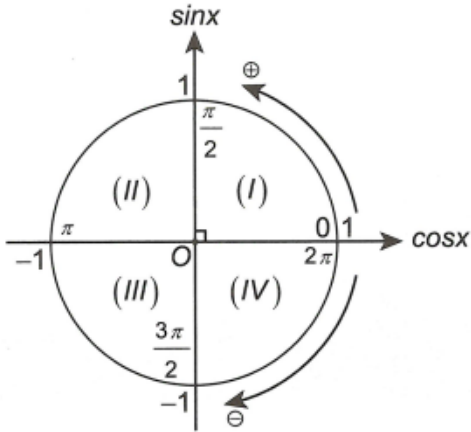


BÀI GIẢNG HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1. Đường tròn lượng giác và dấu của các giá trị lượng giác



Góc	I	II	III	IV
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+
$\tan x$	+	-	+	-
$\cot x$	+	-	+	-

2. Công thức lượng giác cơ bản

$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$
-------------------------------------	-------------------------------------	---	---

3. Cung liên kết

Cung đối nhau	Cung bù nhau	Cung phụ nhau
$\cos(-a) = \cos a$	$\sin(\pi - a) = \sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$
$\sin(-a) = -\sin a$	$\cos(\pi - a) = -\cos a$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$
$\tan(-a) = -\tan a$	$\tan(\pi - a) = -\tan a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a$
$\cot(-a) = -\cot a$	$\cot(\pi - a) = -\cot a$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \tan a$

Góc hơn kém π	Góc hơn kém $\frac{\pi}{2}$	Cách nhớ: <i>cos đối</i> <i>sin bù</i> <i>phụ chéo</i> <i>tang và cotang</i> <i>hơn kém nhau pi</i>
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$	
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$	
$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$	
$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$	

4. Công thức cộng cung

$\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b$	$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b$
$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \cdot \tan b}$	$\cot(a \pm b) = \frac{\cot a \cdot \cot b \mp 1}{\cot a \pm \cot b}$

5. Công thức nhân đôi, nhân ba và hạ bậc

Nhân đôi	Hạ bậc
$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$	$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$
$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$	$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$
$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$	$\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$
$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$	$\cot^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$
Nhân ba	Hạ bậc
$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$	$\sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$
$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$	$\cos^3 \alpha = \frac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}$
$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$	

6. Góc chia đôi

Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$	$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$	$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$
-----------------------------	--------------------------------	-----------------------------

7. Công thức biến đổi tổng thành tích

$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$	$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$
$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$	$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$
$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$	$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b}$
$\cot a + \cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \cdot \sin b}$	$\cot a - \cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \cdot \sin b}$

8. Công thức biến đổi tích thành tổng

$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$
$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$
$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$

MỘT SỐ CÔNG THỨC THƯỜNG DÙNG

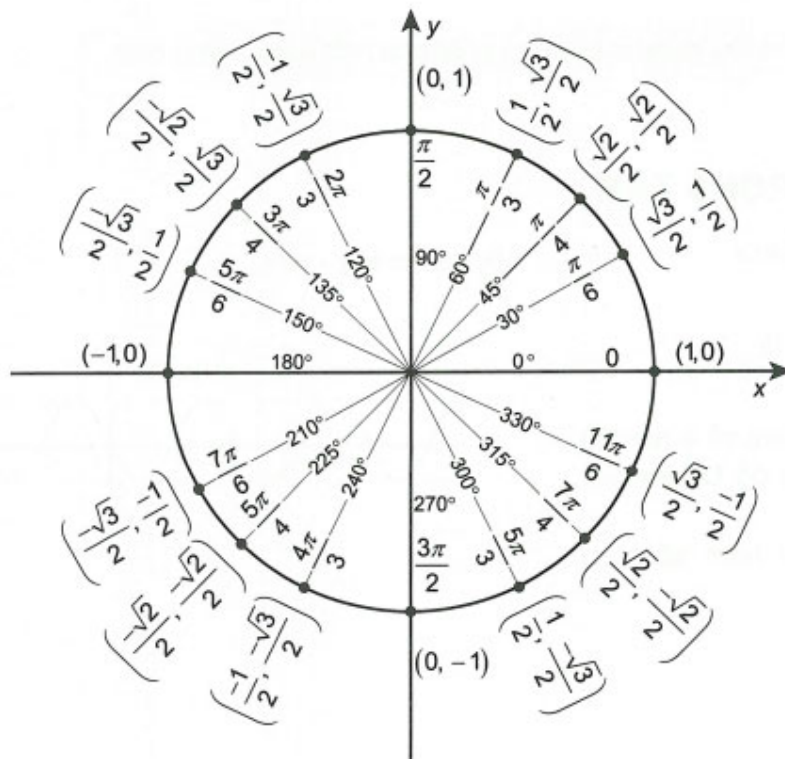
- $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$; $1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2$.
- $1 + \sin x = \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2$; $1 - \sin x = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2$.
- $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$; $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$.
- $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$; $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$.
- $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.
- $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
- $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.
- $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.
- $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{3 + \cos 4x}{4}$.
- $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{5 + 3 \cos 4x}{8}$.

BẢNG GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT SỐ GÓC ĐẶC BIỆT

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	1

$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	\parallel	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	0
$\cot \alpha$	\parallel	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	\parallel	\parallel

Một điểm M thuộc đường tròn lượng giác sẽ có tọa độ $M (\cos \alpha; \sin \alpha)$



HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Mục tiêu

- Nêu rõ tính chất 4 hàm lượng giác cơ bản $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$.
- Phân biệt được tập xác định, tập giá trị, tính tuần hoàn và đồ thị của các hàm lượng giác.

❖ Kiến thức

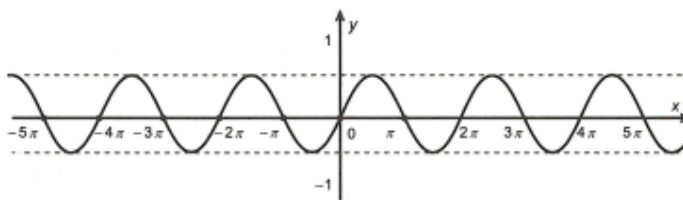
- + Tìm được tập xác định của hàm lượng giác.
- + Xác định được chu kì của các hàm lượng giác.
- + Vẽ được đồ thị của các hàm lượng giác.
- + Biết xác định giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một hàm lượng giác.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Hàm số $y = \sin x$

Đồ thị hàm số $y = \sin x$

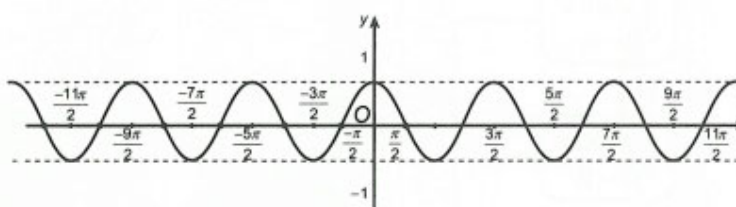
- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị $[-1, 1]$, tức là
 $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.



Hàm số $y = \cos x$

Đồ thị hàm số $y = \cos x$

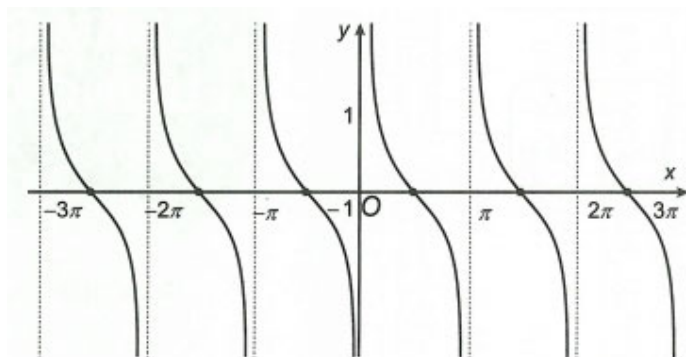
- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị $[-1, 1]$, tức là
 $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.



Hàm số $y = \tan x$

Đồ thị hàm số $y = \tan x$

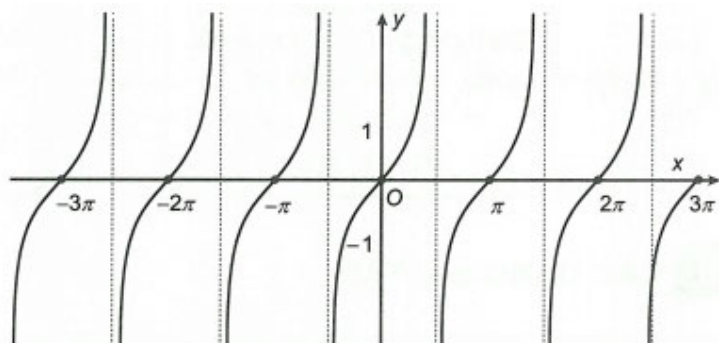
- Tập xác định
 $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Tập giá trị \mathbb{R} .
- Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- Hàm số $y = \tan x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.



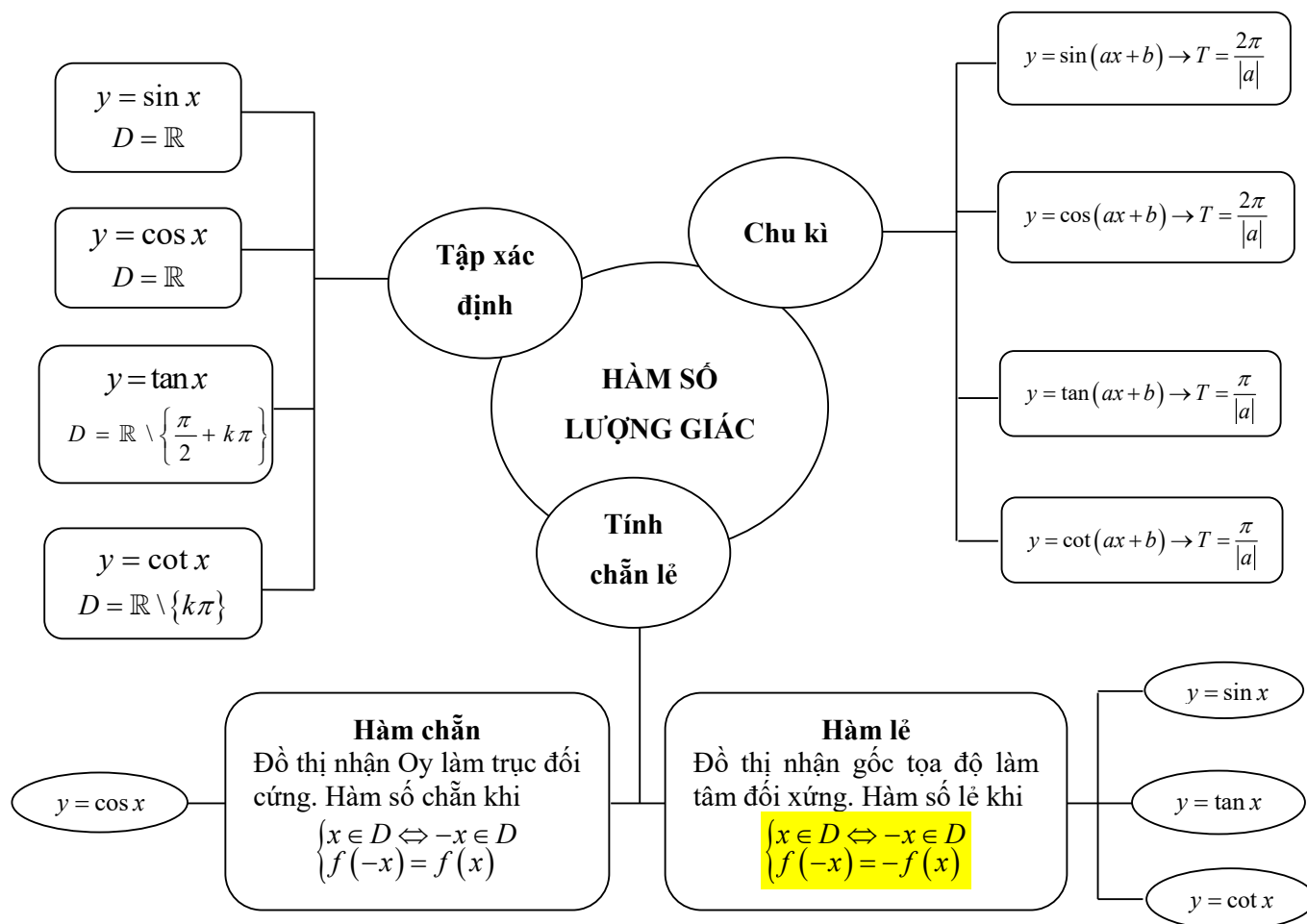
Hàm số $y = \cot x$

Đồ thị hàm số $y = \cot x$

- Tập xác định
 $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Tập giá trị \mathbb{R} .



- Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- Hàm số $y = \cot x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \pi$



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm tập xác định của hàm lượng giác

Phương pháp giải

Tập xác định của các hàm phân thức, căn thức

1. Hàm số phân thức

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} \xrightarrow{DKXD} Q(x) \neq 0.$$

2. Hàm số chứa căn thức

$$y = \sqrt[n]{P(x)} \xrightarrow{DKXD} P(x) \geq 0.$$

3. Hàm số chứa căn thức dưới mẫu số

$$y = \frac{P(x)}{\sqrt[n]{Q(x)}} \xrightarrow{DKXD} Q(x) > 0.$$

Tập xác định của một số hàm lượng giác cơ bản

1. $y = \sin[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định.

2. $y = \cos[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định.

3. $y = \tan[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

4. $y = \cot[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 1: Tìm tập xác định của hàm số

$$y = \sqrt{2 - \sqrt{3} \cos x}.$$

Hướng dẫn giải

Vì $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$-\sqrt{3} \leq \cos x \leq \sqrt{3}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 2 - \sqrt{3} \cos x > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

Ví dụ 2: Tìm tập xác định của hàm số

$$y = \sin\left(\frac{1}{x^2 - 4}\right)$$

Hướng dẫn giải

Hàm số $y = \sin\left(\frac{1}{x^2 - 4}\right)$ xác định

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq \pm 2.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ. Tìm tập xác định của hàm số $y = \cot(2018x + 1)$.

Hướng dẫn giải

Hàm số $y = \cot(2018x + 1)$ xác định $\Leftrightarrow 2018x + 1 \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi - 1}{2018}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi - 1}{2018}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y = \sin \frac{1}{x} + 2x$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$. B. $D = [-1; 1] \setminus \{0\}$. C. $D = \mathbb{R}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 2: Tập xác định của hàm số $y = 2 \cot x + \sin 3x$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$. C. $D = \mathbb{R}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}$.

Câu 3: Tập xác định của hàm số $y = \cos \sqrt{x}$ là

- A. $D = [0; 2\pi]$. B. $D = [0; +\infty)$. C. $D = \mathbb{R}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 4: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\cos x}{2 \sin x - 1}$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi \right\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k \frac{\pi}{2} \right\}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi \right\}$.

Câu 5: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\cos x}{2 \cos x - \sqrt{3}}$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \right\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k \frac{\pi}{2} \right\}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \right\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi \right\}$.

Câu 6: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\cot x}{\sin x - 1}$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k \frac{\pi}{2} \right\}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi; k\pi \right\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \frac{\pi}{2} \right\}$.

Câu 7: Tập xác định của hàm số $y = 2016 \tan^{2017} 2x$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k \frac{\pi}{2} \right\}$.
C. $D = \mathbb{R}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right\}$.

Câu 8: Tập xác định của hàm số $y = 3 \tan x + 2 \cot x + x$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k \frac{\pi}{2} \right\}$. C. $D = \mathbb{R}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right\}$.

Câu 9: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin x}{\tan x - 1}$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k \frac{\pi}{4} \right\}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi \right\}$.

Câu 10: Tập xác định của hàm số $y = \frac{2017 \tan 2x}{\sin^2 - \cos^2 x}$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k \frac{\pi}{2} \right\}$.

C. $D = \mathbb{R}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right\}$.

Câu 11: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan x}{\sin x - 1}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right\}$.

Câu 12: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{4} \right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi \right\}$.

Câu 13: Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\sin 2x + 1}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$.

B. $D = \mathbb{R}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$.

Câu 14: Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1 - \cos 2017x}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$.

B. $D = \mathbb{R}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$.

Câu 15: Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin 2x}}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$.

B. $D = \mathbb{R}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$.

Câu 16: Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2 - \cos 6x}}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$.

B. $D = \mathbb{R}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$.

Câu 17: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan x}{\sqrt{15 - 14\cos 13x}}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$.

B. $D = \mathbb{R}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$.

Câu 18: Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{2 + \sin x}{1 - \cos x}}$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}$. C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}\right\}$.

Câu 19: Để tìm tập xác định của hàm số $y = \tan x + \cos x$, một học sinh giải theo các bước sau

Bước 1. Điều kiện để hàm số có nghĩa là $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$.

Bước 2. $\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq m\pi \end{cases} (k, m \in \mathbb{Z})$.

Bước 3. Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, m\pi\right\} (k, m \in \mathbb{Z})$.

Bài giải của bạn đó đã đúng chưa? Nếu sai, thì sai bắt đầu từ bước nào?

- A. Bài giải đúng. B. Sai từ bước 1. C. Sai từ bước 2. D. Sai từ bước 3.

Câu 20: Hàm số nào sau đây có tập xác định là \mathbb{R} ?

- A. $y = \sin \sqrt{x}$. B. $y = \tan 2x$. C. $y = \cot 2x$. D. $y = x + \sin x$.

Dạng 2: Tính chẵn – lẻ của hàm số lượng giác

Phương pháp giải

1. Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D gọi là hàm số chẵn nếu $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$.

2. Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D gọi là hàm số lẻ nếu $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$.

Chú ý:

+ Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

+ Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ $O(0;0)$ làm tâm đối xứng.

Ví dụ: Xét tính chẵn - lẻ của hàm số $y = \sin 2x$.

Hướng dẫn giải

Hàm số $y = \sin 2x$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đặt $f(x) = y = \sin 2x$.

Ta có $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = \sin(-2x) = -f(x) \end{cases}$

Suy ra hàm số $y = \sin 2x$ là hàm số lẻ.

Đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ $O(0;0)$ làm tâm đối xứng.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Xét tính chẵn - lẻ của hàm số $y = f(x) = \tan x + \cot x$.

Hướng dẫn giải

Hàm số có nghĩa khi $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq l\pi \end{cases} \text{ (với } k, l \in \mathbb{Z} \text{)}.$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, l\pi \mid k, l \in \mathbb{Z}\right\}$ là tập đối xứng.

Do đó $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

Ta có $f(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = -\tan x - \cot x = -(\tan x + \cot x) = -f(x)$.

Vậy $f(x)$ là hàm số lẻ. Đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

Ví dụ 2. Xét tính chẵn – lẻ của hàm số $y = \sin \sqrt{x^2 - 4}$.

Hướng dẫn giải

Hàm số có nghĩa khi $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Tập xác định $D = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ là tập đối xứng.

Do đó $\forall x \in D$ thì $-x \in D$

Ta có $f(-x) = \sin \sqrt{(-x)^2 - 4} = \sin \sqrt{x^2 - 4} = f(x)$.

Vậy $f(x)$ là hàm số chẵn. Đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Ví dụ 3. Xét tính chẵn – lẻ của hàm số $y = \sin^{2018} 2x + \cos 2019x$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ là tập đối xứng.

Do đó $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

Ta có $f(-x) = \sin^{2018}(-2x) + \cos(-2019x) = \sin^{2018} 2x + \cos 2019x = f(x)$.

Vậy $f(x)$ là hàm số chẵn. Đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Ví dụ 4. Xét tính chẵn – lẻ của hàm số $y = f(x) = \sin\left(5x + \frac{2017\pi}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ là tập đối xứng.

Do đó $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

Ta có $f(x) = \sin\left(5x + \frac{2017\pi}{2}\right) = \sin\left(5x + \frac{\pi}{2} + 1008\pi\right) = \sin\left(5x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 5x$.

Lại có $f(-x) = \cos(-5x) = \cos 5x = f(x)$.

Vậy $f(x)$ là hàm số chẵn. Đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Ví dụ 5. Xét tính chẵn – lẻ của hàm số

$$y = f(x) = \sin^3(4x + 9\pi) + \cot(11x - 2018\pi).$$

Hướng dẫn giải

Ta có $y = f(x) = \sin^3(4x + 9\pi) + \cot(11x - 2018\pi) = -\sin^3 4x + \cot 11x$.

Hàm số có nghĩa khi $\sin 11x \neq 0 \Leftrightarrow 11x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{11}, k \in \mathbb{Z}$.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{11}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ là tập đối xứng.

Do đó $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

$$\begin{aligned} \text{Lại có } f(-x) &= -\sin^3(-4x) + \cot(-11x) = \sin^3 4x - \cot 11x \\ &= -(-\sin^3 4x + \cot 11x) = -f(x). \end{aligned}$$

Vậy $f(x)$ là hàm số lẻ. Đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ $O(0;0)$ làm tâm đối xứng.

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Hàm số $y = \sin x \cdot \cos x$ là

- A. hàm số không lẻ.
- B. hàm số chẵn.
- C. hàm số không chẵn.
- D. hàm số lẻ.

Câu 2: Hàm số $y = \sin x + \tan 2x$ là

- A. hàm số lẻ.
- B. hàm số chẵn.
- C. hàm số vừa chẵn, vừa lẻ.
- D. hàm số không chẵn, không lẻ.

Câu 3: Hàm số $y = \sin x + \cos x$ là

- A. hàm số lẻ.
- B. hàm số chẵn.
- C. hàm số vừa chẵn, vừa lẻ.
- D. hàm số không chẵn, không lẻ.

Câu 4: Hàm số $y = 2x - \sin 3x$ là

- A. hàm số vừa chẵn, vừa lẻ.
- B. hàm số không chẵn, không lẻ.
- C. hàm số chẵn.
- D. hàm số lẻ.

Câu 5: Hàm số $y = 1 + 2x^2 - \cos 3x$ là

- A. hàm số lẻ.
- B. hàm số chẵn.
- C. hàm số không chẵn, không lẻ.
- D. hàm số vừa chẵn, vừa lẻ.

Câu 6: Hàm số nào là hàm số lẻ trong các hàm số sau?

- A. $y = \sqrt{\sin x}$.
- B. $y = \frac{\cot x}{\cos x}$.
- C. $y = \sin^2 x$.
- D. $y = \frac{\tan x}{\sin x}$.

Câu 7: Hàm số $y = |x| \cos 2x$ là

- A. hàm số vừa chẵn, vừa lẻ.
- B. hàm số không chẵn, không lẻ.
- C. hàm số chẵn.
- D. hàm số lẻ.

Câu 8: Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. Hàm số $y = \sin x \cdot \cos 3x$ là hàm số lẻ.
- B. Hàm số $y = \cos x - \sqrt{2} \sin x$ là hàm số chẵn.
- C. Hàm số $y = 3(\cot^2 x + \cos x)$ là hàm số lẻ.
- D. Cả 3 mệnh đề trên đều sai.

Câu 9: Hàm số $y = \frac{2\sin x - 4\tan x}{5 + \cos x}$ là

- A. hàm số vừa chẵn, vừa lẻ.
C. hàm số lẻ.

- B. hàm số chẵn.
D. hàm số không chẵn, không lẻ.

Câu 10: Xét hai mệnh đề

- (I) Hàm số $y = \tan x + \cos x$ là hàm số lẻ.
(II) Hàm số $y = \tan x + \sin x$ là hàm số lẻ.

Mệnh đề nào **sai**?

- A. Chỉ (I) sai. B. Chỉ (II) sai.

- C. Cả 2 sai. D. Không có mệnh đề sai.

Câu 11: Hàm số $y = \sin x \cos^2 x + \tan x$ là

- A. hàm số vừa chẵn, vừa lẻ.
C. hàm số không chẵn, không lẻ.

- B. hàm số chẵn.
D. hàm số lẻ.

Câu 12: Hàm số $y = x^2 \tan 2x - \cot x$ là

- A. hàm số không chẵn – lẻ.
C. hàm số không lẻ.

- B. hàm số chẵn.
D. hàm số lẻ.

Câu 13: Hàm số $y = 2 - \sin x \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 2x\right)$ là

- A. hàm số vừa chẵn, vừa lẻ.
C. hàm số chẵn.

- B. hàm số không chẵn, không lẻ.
D. hàm số lẻ.

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = \sin 2x$ và $g(x) = \tan^2 x$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.
C. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số chẵn.

- B. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.
D. $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số lẻ.

Câu 15: Hàm số $y = \frac{|x|\sin 2x}{\cos^3 2x}$ là

- A. hàm số lẻ.
C. hàm số vừa chẵn, vừa lẻ.

- B. hàm số chẵn.
D. hàm số không chẵn, không lẻ.

Câu 16: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A. $y = 1 - \sin^2 x$.

- B. $y = |\cot x| \cdot \sin^2 x$.

- C. $y = x^2 \tan 2x - \cot x$.

- D. $y = 1 + |\cot x + \tan x|$.

Câu 17: Hàm số $y = \tan x - 2\cos 3x$ là

- A. hàm số lẻ.
C. hàm số vừa chẵn, vừa lẻ.

- B. hàm số chẵn.
D. hàm số không chẵn, không lẻ.

Câu 18: Hàm số $y = 1 + \cos x \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right)$ là

- A. hàm số vừa chẵn, vừa lẻ.

- B. hàm số chẵn.

C. hàm số không chẵn, không lẻ.

D. hàm số lẻ.

Câu 19. Cho hai hàm số $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x}$ và $g(x) = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x}$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f(x)$ lẻ và $g(x)$ chẵn.

B. $f(x)$ và $g(x)$ chẵn.

C. $f(x)$ chẵn và $g(x)$ lẻ.

D. $f(x)$ và $g(x)$ lẻ.

Câu 20. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y = x^4 + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

B. $y = x^{2017} + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

C. $y = 2015 + \cos x + \sin^{2018} x$.

D. $y = \tan^{2017} x + \sin^{2018} x$.

Dạng 3. Tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

Phương pháp giải

Sử dụng một số bất đẳng thức sau

1. Bất đẳng thức lượng giác

$$-1 \leq \sin x; \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$-A + B \leq A \sin x + B \leq A + B, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$-A + B \leq A \cos x + B \leq A + B, \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Bất đẳng thức về điều kiện có nghiệm hàm số bậc nhất.

$$-\sqrt{A^2 + B^2} \leq A \sin x + B \cos x \leq \sqrt{A^2 + B^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. Bất đẳng thức Bunhiacopxki.

$$|ax + by| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$.

4. Sử dụng phương pháp đồ thị lượng giác.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } y = \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x.$$

$$\text{Do } 0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \text{ nên } -\frac{3}{4} \cdot 0 \geq -\frac{3}{4} \sin^2 2x \geq -\frac{3}{4}$$

$$1 \geq 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \geq 1 - \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 \geq y \geq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy min } y = \frac{1}{4} \text{ khi } \sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của

hàm số $y = 3 \cos x + 2$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $y = 3 \cos x + 2$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Khi $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ thì $0 \leq \cos x \leq 1$.

Suy ra $2 \leq 3 \cos x + 2 \leq 5 \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 5$.

Vậy min $y = 2$ khi $x = \pm \frac{\pi}{2}$; max $y = 5$ khi $x = 0$.

$$\max y = 1 \text{ khi } \sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \tan^2 x - \tan x + 2020 \text{ trên đoạn } \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right].$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } y = \tan^2 x - \tan x + 2020 = \left(\tan x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{8079}{4}.$$

Hàm số $\tan x$ đồng biến và xác định trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Mà $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \subset \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số $\tan x$ đồng biến và xác định trên $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

$$\text{Do đó } \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \leq \tan x \leq \tan \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -1 \leq \tan x \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 - \frac{1}{2} \leq \tan x - \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq \tan x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \left(\tan x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8079}{4} \leq \left(\tan x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{8079}{4} \leq \frac{9}{4} + \frac{8079}{4} \Leftrightarrow \frac{8079}{4} \leq y \leq 2022.$$

$$\text{Vậy } \min y = \frac{8079}{4} \text{ khi } \tan x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \arctan \frac{1}{2};$$

$$\max y = 2022 \text{ khi } \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 7 - 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ lần lượt là

- A. -2 và 7. B. -2 và 2. C. 5 và 9. D. 4 và 7.

Câu 2. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 4\sqrt{\sin x + 3} - 1$ lần lượt là

- A. $\sqrt{2}$ và 2. B. 2 và 4. C. $4\sqrt{2}$ và 8. D. $4\sqrt{2} - 1$ và 7.

Câu 3. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x - 4 \sin x - 5$ là

- A. -20. B. -8. C. 0. D. 9.

Câu 4. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{2 \sin x + 3}$ là

- A. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 1$. B. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 2\sqrt{5}$.
C. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 2$. D. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 3$.

Câu 5. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{4}{1 + 2 \sin^2 x}$ là

Chú ý: Hàm số $\tan x$ luôn đồng biến trên các khoảng xác định của nó.

A. $\min y = \frac{4}{3}, \max y = 4.$

B. $\min y = \frac{4}{3}, \max y = 3.$

C. $\min y = \frac{4}{3}, \max y = 2.$

D. $\min y = \frac{1}{2}, \max y = 4.$

Câu 6. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 \sin^2 x + \cos^2 2x$ là

A. $\max y = 4, \min y = \frac{3}{4}.$

B. $\max y = 3, \min y = 2.$

C. $\max y = 4, \min y = 2.$

D. $\max y = 3, \min y = \frac{3}{4}.$

Câu 7. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 \sin x + 4 \cos x + 1$ là

A. $\max y = 6, \min y = -2.$

B. $\max y = 4, \min y = -4.$

C. $\max y = 6, \min y = -4.$

D. $\max y = 6, \min y = -1.$

Câu 8. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4 \sin 6x + 3 \cos 6x$ là

A. $\min y = -5, \max y = 5.$

B. $\min y = -4, \max y = 4.$

C. $\min y = -3, \max y = 5.$

D. $\min y = -6, \max y = 6.$

Câu 9. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin 2x$ trên $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ lần lượt là

A. $\frac{1}{2}$ và $\frac{\sqrt{3}}{2}.$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $-\frac{1}{2}.$

D. $\frac{1}{2}$ và $-\frac{1}{2}.$

Câu 10. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{3} \tan x$ trên $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right]$ lần lượt là

A. $\sqrt{3}$ và $-\frac{\sqrt{3}}{3}.$

B. $\sqrt{3}$ và $\frac{\sqrt{3}}{3}.$

C. $\sqrt{3}$ và $-3.$

D. $\sqrt{3}$ và $-1.$

Câu 11. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4 - 3 \cos x$ trên $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ lần lượt là

A. 1 và $-1.$

B. 11 và 5.

C. $\sqrt{3}$ và $-3.$

D. $\frac{11}{2}$ và 1.

Câu 12. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ trên $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ lần lượt là

A. 1 và $-\sqrt{2}.$

B. 1 và $\frac{\sqrt{2}}{2}.$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ và $-1.$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ và $-\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Câu 13. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x}$ là

A. $\min y = 0, \max y = 3.$

B. $\min y = 0, \max y = 4.$

C. $\min y = 0, \max y = 6.$

D. $\min y = 0, \max y = 2.$

Câu 14. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\cos x - 2 \sin x}{2 - \sin x}$ lần lượt là

A. $\frac{-2+\sqrt{19}}{3}$ và $\frac{-2-\sqrt{19}}{3}$.

B. $\sqrt{3}$ và $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\sqrt{3}$ và -3 .

D. $\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{19}}{3}$ và $\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{19}}{3}$.

Câu 15. Giá trị của m để bất phương trình $(3\sin x - 4\cos x)^2 - 6\sin x + 8\cos x \geq 2m - 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ là

A. $m > 0$.

B. $m \leq 0$.

C. $m < 0$.

D. $m \leq 1$.

Câu 16. Kết luận đúng về hàm số $y = \tan^2 x + \cot^2 x + 3(\tan x + \cot x) - 1$ là

A. $\min y = -5$ đạt được khi $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. Không tồn tại giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

C. $\min y = -2$ và $\max y = 5$.

D. Tồn tại giá trị lớn nhất nhưng không tồn tại giá trị nhỏ nhất.

Câu 17. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos^4 x + \sin^4 x$ trên \mathbb{R} lần lượt là

A. 2 và 0.

B. 1 và $\frac{1}{2}$.

C. $\sqrt{2}$ và 0.

D. $\sqrt{2}$ và 1.

Câu 18. Giá trị của m để bất phương trình $\frac{3\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x + 4\cos^2 x + 1} \leq m + 1$ là

A. $m \geq \frac{3\sqrt{5}}{4}$.

B. $m \geq \frac{3\sqrt{5}+9}{4}$.

C. $m \geq \frac{3\sqrt{5}-9}{2}$.

D. $m \geq \frac{3\sqrt{5}-9}{4}$.

Câu 19. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = \frac{\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x}{1 + \sin^2 x}$ lần lượt là

A. 0 và 3.

B. $\sqrt{2}$ và 4.

C. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ và 6.

D. $\frac{2-\sqrt{6}}{4}$ và $\frac{2+\sqrt{6}}{4}$.

Câu 20. Cho $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$. Giá trị lớn nhất của $y = \sqrt{1 + \cos^2 x} + \sqrt{1 + \cos^2 y} + \sqrt{1 + \cos^2 z}$ là

A. $3\sqrt{3}$.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $4\sqrt{3}$.

D. $\sqrt{3}$.

Dạng 4. Tính tuần hoàn và chu kỳ hàm lượng giác

 **Phương pháp giải**

Một số vấn đề cần chú ý

1. Tính tuần hoàn của hàm số

Định nghĩa: Hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D

được gọi là hàm số tuần hoàn nếu có số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \neq 0$ ta có

$$x + T \in D \text{ và } f(x + T) = f(x).$$

Ví dụ: Tìm chu kỳ của hàm số

$$y = \sin\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Số dương T nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên thì hàm số đó được gọi là hàm số tuần hoàn với chu kỳ T .

$$\text{Chu kì của hàm số } T = \frac{2\pi}{\left|\frac{2}{3}\right|} = 3\pi.$$

2. Các hàm số $\begin{cases} y = m \sin(ax+b) \\ y = m \cos(ax+b) \end{cases}$ có chu kỳ $T = \frac{2\pi}{|a|}$;

biên độ $|m|$; cực đại $|m|$; cực tiểu $-|m|$,

3. Hàm số $f(x) = a \sin ux + b \cos vx + c$

(với $u, v \in \mathbb{Z}$) là hàm số tuần hoàn với chu kỳ

$$T = \frac{2\pi}{\left|(u,v)\right|} \text{ ((u,v) là ƯCLN (u,v)).}$$

4. Hàm số $f(x) = a \tan ux + b \cos vx + c$

(với $u, v \in \mathbb{Z}$) hàm số tuần hoàn với chu kỳ

$$T = \frac{2\pi}{\left|(u,v)\right|} \text{ ((u,v) là ƯCLN (u,v)).}$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm chu kỳ cơ sở của hàm số $y = 2 \sin 2x + 3 \cos 3x$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Chu kì hàm số } T = \frac{2\pi}{\left|(2,3)\right|} = 2\pi.$$

Ví dụ 2. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ của hàm số

$$f(x) = \cos x + \cos(\sqrt{3}x).$$

Hướng dẫn giải

Giả sử hàm số đã cho tuần hoàn. Suy ra tồn tại số thực dương T thỏa mãn

$$f(x+T) = f(x) \Leftrightarrow \cos(x+T) + \cos[\sqrt{3}(x+T)] = \cos x + \cos(\sqrt{3}x).$$

$$\text{Chọn } x=0 \text{ ta được } \cos T + \cos(\sqrt{3}T) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos T = 1 \\ \cos(\sqrt{3}T) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = 2n\pi \\ \sqrt{3}T = 2m\pi \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{m}{n} \text{ (vô lí do } m, n \in \mathbb{Z} \text{ nên } \frac{m}{n} \text{ là số hữu tỉ).}$$

Vậy hàm số đã cho không tuần hoàn.

Bài tập tự luyện dạng 4

Câu 1. Chu kì của hàm số $y = \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$ là

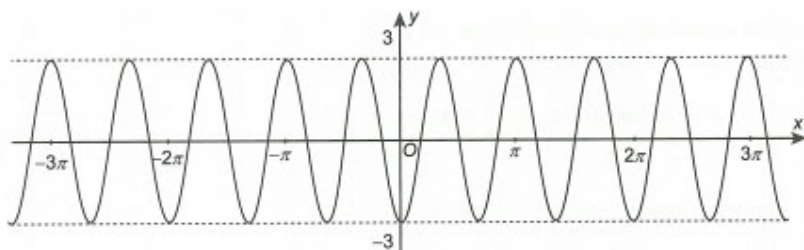
A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{\pi}{3}$.

C. $\frac{2\pi}{3}$.

D. 6π .

Câu 2. Đồ thị trong hình vẽ dưới đây là của hàm số nào?



- A. $y = \cos 3x$. B. $y = 3 \cos 3x$. C. $y = -3 \cos 6x$. D. $y = -3 \cos 3x$.

Câu 3. Hàm số $y = 2 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ

- A. $T = 6\pi$. B. $T = 4\pi$. C. $T = 6$. D. $T = 2\pi$.

Câu 4. Khẳng định nào sau đây **sai** về hàm số $y = 2 + \sin x$?

- A. Đồ thị hàm số không đi qua gốc tọa độ.
B. Đồ thị hàm số nằm ở phía trên trục hoành.
C. Giá trị cực đại của y là 2.
D. Giá trị cực tiểu của y là 1.

Câu 5. Nếu chu kỳ tuần hoàn của hàm số $y = \sin \frac{\pi x}{a}$ là 4 thì

- A. $a = \pm 2$. B. $a = \pm 4$. C. $a = 2$. D. $a = \pm 1$.

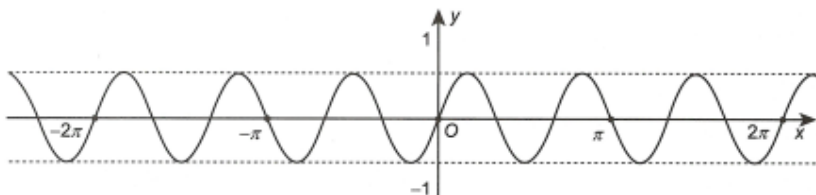
Câu 6. Hàm số $y = \tan x^2$ tuần hoàn với chu kỳ

- A. $T = \pi^2$. B. $T = \sqrt{\pi}$.
C. $T = \pi$. D. Hàm số không có chu kỳ.

Câu 7. Khẳng định nào sau đây đúng với hàm số $y = 2 \cos \frac{x}{2}$?

- A. Biên độ là 2, chu kỳ là π . B. Biên độ là -2, chu kỳ là 180° .
C. Biên độ là 2, chu kỳ là 2π . D. Biên độ là 2, chu kỳ là 4π .

Câu 8. Đồ thị trong hình vẽ dưới đây là của hàm số nào?



- A. $y = \sin 2x$. B. $y = \sin 3x$. C. $y = \cos 2x$. D. $y = \cos 3x$.

Câu 9. Chu kỳ của hàm số sau $y = \sin 3x + 2 \cos 2x$ là

- A. $T_0 = 2\pi$. B. $T_0 = \frac{\pi}{2}$. C. $T_0 = \pi$. D. $T_0 = \frac{\pi}{4}$.

Câu 10. Với $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ thì hàm số $f(x) = \sin \frac{x}{3}$ có giá trị cực đại là

A. 0.

B. 1.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 11. Hàm số $y = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4} - mx\right)$ tuần hoàn có chu kì $T = 3\pi$ khi

A. $m = \pm \frac{3}{2}$.

B. $m = \pm 1$.

C. $m = \pm \frac{2}{3}$.

D. $m = \pm 2$.

Câu 12. Xét đồ thị hàm số $y = \sin x$ với $x \in [\pi, 2\pi]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

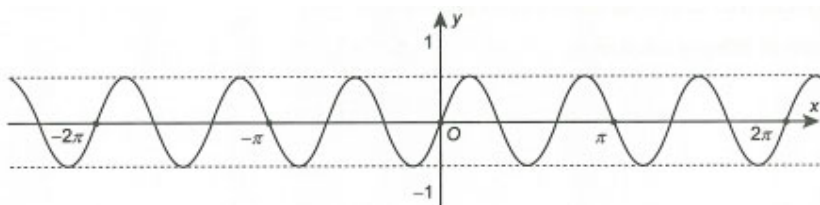
A. Đồ thị hàm số có một cực đại tại $x = \pi$.

B. Đồ thị hàm số có một cực tiểu tại $x = 2\pi$.

C. Đồ thị hàm số có một cực tiểu tại $x = \frac{3\pi}{2}$.

D. Hàm số đồng biến trên $[\pi, 2\pi]$.

Câu 13. Đồ thị trong hình vẽ dưới đây là của hàm số nào?



A. $y = \sin 2x$.

B. $y = \cos 2x$.

C. $y = \cos \frac{x}{2}$.

D. $y = \cos 3x$.

Câu 14. Chu kì của hàm số $y = \sin 2x + \sin x$ là

A. $T = 2\pi$.

B. $T_0 = \frac{\pi}{2}$.

C. $T_0 = \pi$.

D. $T_0 = \frac{\pi}{4}$.

Câu 15. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Hàm số $y = \cot x$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

B. Hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

C. Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và $y = \cot x$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

D. Hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ cùng đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 16. Chu kì của hàm số $y = \tan x + \tan 3x$ là

A. $T = 2\pi$.

B. $T = \pi$.

C. $T = \frac{\pi}{4}$.

D. $T = \frac{\pi}{2}$.

Câu 17. Khẳng định nào sau đây đúng về hàm số $y = 2 \sin\left(\frac{x}{2} - 2017\pi\right)$?

A. Chu kì 2π , biên độ 2.

B. Chu kì 4π , biên độ 2.

C. Chu kì 2π , biên độ 1.

D. Chu kì 4π , biên độ 1.

Câu 18. Chu kì của hàm số $y = \sin 3x + 2017 \cos 2x$ là

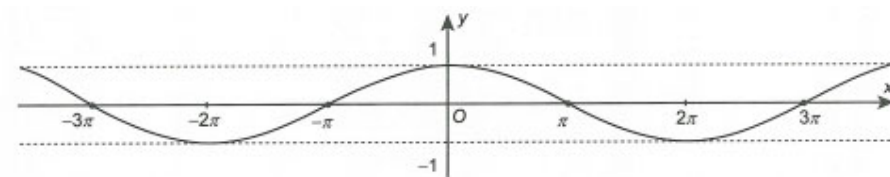
A. $T = \pi$.

B. $T = \frac{\pi}{2}$.

C. $T = 2\pi$.

D. $T = \frac{\pi}{4}$.

Câu 19. Hình vẽ sau là đồ thị của hàm số $y = \sin(ax + \pi b)$. Biết $a \geq 0$ và b nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $P = a + b$ là



A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 20. Chu kì cơ sở (nếu có) của hàm số $y = \sin \sqrt{x}$ là

A. hàm số không có chu kì cơ sở.

B. $T_0 = \frac{\pi}{2}$.

C. $T_0 = \pi$.

D. $T_0 = \frac{\pi}{4}$.

ĐÁP ÁN

Dạng 1: Tìm tập xác định hàm số lượng giác

1 – D	2 – B	3 – B	4 – D	5 – C	6 – C	7 – D	8 – B	9 – C	10 – D
11 – C	12 – A	13 – B	14 – B	15 – D	16 – B	17 – C	18 – B	19 – A	20 – D

Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1.

Hàm số $y = \sin \frac{1}{x} + 2x$ có nghĩa $\Leftrightarrow x \neq 0 \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 2.

Hàm số $y = 2 \cot x + \sin 3x$ có nghĩa $\Leftrightarrow x \neq k\pi \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 3:

Hàm số $y = \cos \sqrt{x}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow D = [0; +\infty)$.

Câu 4.

Hàm số $y = \frac{\cos x}{2 \sin x - 1}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 2 \sin x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

$$\Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi \right\} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 5.

Hàm số $y = \frac{\cos x}{2 \cos x - \sqrt{3}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 2 \cos x - \sqrt{3} \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

$$\Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \right\} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 6.

Hàm số $y = \frac{\cot x}{\sin x - 1}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - 1 \neq 0 \\ x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1 \\ x \neq k\pi \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi; k\pi \right\} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 7:

Hàm số $y = 2016 \tan^{2017} 2x$ có nghĩa $\Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right\} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 8:

Hàm số $y = 3 \tan x + 2 \cot x + x$ có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \right\} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 9: Hàm số $y = \frac{\sin x}{\tan x - 1}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \tan x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x \neq 1 \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 10:

Hàm số $y = \frac{2017 \tan 2x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x - \cos^2 x \neq 0 \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\cos 2x \neq 0 \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right\} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 11:

Hàm số $y = \frac{\tan x}{\sin x - 1}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 12:

Hàm số $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \sin x + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{-\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-\pi}{4} + k\pi \right\} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 13:

Hàm số $y = \sqrt{\sin 2x + 1}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \sin 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \geq -1 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}.$

Câu 14:

Hàm số $y = \sqrt{1 - \cos 2017x}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 1 - \cos 2017x \geq 0 \Leftrightarrow \cos 2017x \leq 1 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}.$

Câu 15:

Hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin 2x}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 1 - \sin 2x > 0 \Leftrightarrow \sin 2x < 1 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 1$

$$\Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 16:

Hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2 - \cos 6x}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 2 - \cos 6x > 0 \Leftrightarrow \cos 6x < 2 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$

Câu 17:

Hàm số $y = \frac{\tan x}{\sqrt{15 - 14 \cos 13x}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} 15 - 14 \cos 13x > 0 \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 13x < \frac{15}{14} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} (k \in \mathbb{Z})$

Câu 18:

Hàm số $y = \sqrt{\frac{2 + \sin x}{1 - \cos x}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 1 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi\} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 19:

Hàm số $y = \tan x + \cot x$ có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\} (k \in \mathbb{Z})$

Vậy bạn học sinh đó giải đúng.

Câu 20:

Hàm số $y = \sin \sqrt{x}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow D = [0; +\infty)$.

Hàm số $y = \tan 2x$ có nghĩa $\Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\}$.

Hàm số $y = \cot 2x$ có nghĩa $\Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}$.

Hàm số $y = x + \sin x$ có $D = \mathbb{R}$.

Dạng 2: Tính chẵn – lẻ của hàm số lượng giác

1 – D	2 – A	3 – D	4 – D	5 – B	6 – B	7 – C	8 – A	9 – C	10 – A
11 – D	12 – D	13 – C	14 – B	15 – A	16 – C	17 – D	18 – B	19 – B	20 – B

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1:**

Hàm số $y = \sin x \cdot \cos x$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Ta có $f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-x) = -\sin x \cdot \cos x = -f(x)$.

Vậy hàm số $y = \sin x \cdot \cos x$ là hàm số lẻ.

Câu 2:

Hàm số $y = \sin x + \tan 2x$ có nghĩa $\Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\}$.

Ta có $f(-x) = \sin(-x) + \tan(-2x) = -\sin x - \tan 2x = -(\sin x + \tan 2x) = -f(x)$.

Vậy hàm số $y = \sin x + \tan 2x$ là hàm số lẻ.

Câu 3:

Hàm số $y = \sin x + \cos x$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x \Rightarrow \begin{cases} f(-x) \neq f(x) \\ f(-x) \neq -f(x) \end{cases}$$

Vậy hàm số $y = \sin x + \cos x$ là hàm số không chẵn, không lẻ.

Câu 4:

Hàm số $y = 2x - \sin 3x$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$

$$\text{Ta có } f(-x) = -2x - \sin(-3x) = -2x + \sin 3x = -(2x - \sin 3x) = -f(x).$$

Vậy hàm số $y = 2x - \sin 3x$ là hàm số lẻ.

Câu 5:

Hàm số $y = 1 + 2x^2 - \cos 3x$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f(-x) = 1 + 2(-x)^2 - \cos(-3x) = 1 + 2x^2 - \cos(3x) = f(x).$$

Vậy hàm số $y = 1 + 2x^2 - \cos 3x$ là hàm số chẵn.

Câu 6:

$$\text{Hàm số } y = \frac{\cot x}{\cos x} \text{ có nghĩa } \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}.$$

$$\text{Ta có } f(-x) = \frac{\cot(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\cot x}{\cos x} = -f(x).$$

Vậy hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x}$ là hàm số lẻ.

Câu 7:

Hàm số $y = |x| \cos 2x$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f(-x) = |-x| \cos(-2x) = |x| \cos 2x = f(x).$$

Vậy hàm số $y = |x| \cos 2x$ là hàm số chẵn.

Câu 8:

Hàm số $y = \sin x \cdot \cos 3x$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-3x) = -\sin x \cdot \cos 3x = -f(x).$$

Vậy hàm số $y = \sin x \cdot \cos 3x$ là hàm số lẻ.

Câu 9:

$$\text{Hàm số } y = \frac{2 \sin x - 4 \tan x}{5 + \cos x} \text{ có nghĩa } \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Ta có } f(-x) = \frac{2 \sin(-x) - 4 \tan(-x)}{5 + \cos(-x)} = \frac{-2 \sin x + 4 \tan x}{5 + \cos x} = -f(x).$$

Vậy hàm số $y = \frac{2 \sin x - 4 \tan x}{5 + \cos x}$ là hàm số lẻ.

Câu 10:

+ Hàm số $y = \tan x + \cos x$ có nghĩa $\Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} (k \in \mathbb{Z})$.

Ta có $f(-x) = \tan(-x) + \cos(-x) = -\tan x + \cos x = \begin{cases} f(-x) \neq f(x) \\ f(-x) \neq -f(x) \end{cases}$.

Vậy hàm số $y = \tan x + \cos x$ là hàm số không chẵn, không lẻ.

+ Hàm số $y = \tan x + \sin x$ có nghĩa $\Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} (k \in \mathbb{Z})$.

Ta có $f(-x) = \tan(-x) + \sin(-x) = -\tan x - \sin x = -f(x)$.

Vậy hàm số $y = \tan x + \sin x$ là hàm số lẻ.

Câu 11:

Hàm số $y = \sin x \cos^2 x + \tan x$ có nghĩa $\Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} (k \in \mathbb{Z})$.

Ta có $f(-x) = \sin(-x) \cos^2(-x) + \tan(-x) = -\sin x \cos^2 x - \tan x = -f(x)$.

Vậy hàm số $y = \sin x \cos^2 x + \tan x$ là hàm số lẻ.

Câu 12:

Hàm số $y = x^2 \tan 2x - \cot x$ có nghĩa

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k\pi \right\} (k \in \mathbb{Z}).$$

Ta có $f(-x) = (-x)^2 \tan(-2x) - \cot(-x) = -x^2 \tan 2x + \cot x = -f(x)$.

Vậy hàm số $y = x^2 \tan 2x - \cot x$ là hàm số lẻ.

Câu 13:

Hàm số $y = 2 - \sin x \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 2x\right)$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Ta có $f(-x) = 2 - \sin(-x) \cos\left(\frac{5\pi}{2} + 2x\right) = 2 - \sin x \cos\left(\pi - \frac{5\pi}{2} - 2x\right)$
 $= 2 - \sin x \cos\left(-\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = 2 - \sin x \cos\left(-\frac{3\pi}{2} - 2x + 4\pi\right) = 2 - \sin x \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 2x\right) = f(x)$.

Vậy hàm số $y = 2 - \sin x \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 2x\right)$ là hàm số chẵn.

Câu 14:

+ Hàm số $f(x) = \sin 2x$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Ta có $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x)$.

Vậy hàm số $f(x) = \sin 2x$ là hàm số lẻ.

+ Hàm số $g(x) = \tan^2 x$ có nghĩa $\Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} (k \in \mathbb{Z})$.

Ta có $g(-x) = \tan^2(-x) = \tan^2 x = g(x)$.

Vậy hàm số $g(x) = \tan^2 x$ là hàm số chẵn.

Câu 15:

Hàm số $y = \frac{|x|\sin 2x}{\cos^3 2x}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\} (k \in \mathbb{Z})$

Ta có $f(-x) = \frac{|-x|\sin(-2x)}{\cos^3(-2x)} = \frac{-|x|\sin 2x}{\cos^3 2x} = -f(x)$.

Vậy hàm số $y = \frac{|x|\sin 2x}{\cos^3 2x}$ là hàm số lẻ.

Câu 16:

Hàm số $y = x^2 \tan 2x - \cot x$ có nghĩa

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k\pi \right\} (k \in \mathbb{Z})$.

Ta có $f(-x) = (-x)^2 \tan(-2x) - \cot(-x) = -x^2 \tan 2x + \cot x = -f(x)$.

Vậy hàm số $y = x^2 \tan 2x - \cot x$ là hàm số lẻ.

Câu 17:

Hàm số $y = \tan x - 2 \cos 3x$ có nghĩa $\Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

Ta có $f(-x) = \tan(-x) - 2 \cos(-3x) = -\tan x - 2 \cos 3x \Rightarrow \begin{cases} f(-x) \neq f(x) \\ f(-x) \neq -f(x) \end{cases}$.

Vậy hàm số $y = \tan x - 2 \cos 3x$ là hàm số không chẵn, không lẻ.

Câu 18:

Hàm số $y = 1 + \cos x \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right)$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Ta có $f(-x) = 1 + \cos(-x) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 3(-x)\right) = 1 + \cos x \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 3x\right) = 1 + \cos x \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{2} - 3x\right)$
 $= 1 + \cos x \sin\left(-\frac{\pi}{2} - 3x + 2\pi\right) = 1 + \cos x \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right) = f(x)$.

Vậy hàm số $y = 1 + \cos x \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right)$ là hàm số chẵn.

Câu 19:

+ Hàm số $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x}$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Ta có $f(-x) = \frac{\cos(-2x)}{1 + \sin^2(-3x)} = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x} = f(x)$.

Vậy hàm số $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x}$ là hàm số chẵn.

+ Hàm số $g(x) = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

Ta có $g(-x) = \frac{|\sin(-2x)| - \cos(-3x)}{2 + \tan^2(-x)} = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x} = g(x)$.

Vậy hàm số $g(x) = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x}$ là hàm số chẵn.

Câu 20:

Hàm số $y = x^{2017} + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Ta có $f(-x) = (-x)^{2017} + \cos\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) = -x^{2017} + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
 $= -x^{2017} + \cos\left(x - \frac{\pi}{2} + \pi\right) = -x^{2017} - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -f(x)$.

Vậy hàm số $y = x^{2017} + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ là hàm số lẻ.

Dạng 3: Tính giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

1 – C	2 – D	3 – B	4 – A	5 – A	6 – D	7 – C	8 – A	9 – B	10 – D
11 – D	12 – D	13 – D	14 – A	15 – B	16 – A	17 – B	18 – D	19 – D	20 – B

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1:

Hàm số $y = 7 - 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Ta có $-1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 2 \Leftrightarrow 5 \leq 7 - 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 9$.

Vậy $\min y = 5 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$;

$\max y = 9 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = -\pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{-5\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 2:

Hàm số $y = 4\sqrt{\sin x + 3} - 1$ có nghĩa $\Leftrightarrow \sin x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \geq -3 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq \sin x + 3 \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{\sin x + 3} \leq 2$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{2} \leq 4\sqrt{\sin x + 3} \leq 8 \Leftrightarrow 4\sqrt{2} - 1 \leq 4\sqrt{\sin x + 3} - 1 \leq 7.$$

$$\text{Vậy } \min y = 4\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\max y = 7 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 3:

Hàm số $y = \sin^2 x - 4\sin x - 5$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$

$$\text{Ta có } y = \sin^2 x - 4\sin x - 5 = (\sin x - 2)^2 - 9.$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq \sin x - 2 \leq -1 \Leftrightarrow 1 \leq (\sin x - 2)^2 \leq 9 \Leftrightarrow -8 \leq (\sin x - 2)^2 - 9 \leq 0.$$

$$\text{Vậy } \min y = -8 \Leftrightarrow \sin x - 2 = -1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 4:

Hàm số $y = \sqrt{2\sin x + 3}$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}.$

$$\text{Ta có } -1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\sin x \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 2\sin x + 3 \leq 5 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{2\sin x + 3} \leq \sqrt{5}.$$

$$\text{Vậy } \min y = 1 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\max y = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 5:

Hàm số $y = \frac{4}{1 + 2\sin^2 x}$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}.$

$$\text{Ta có } -1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2\sin^2 x \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 1 + 2\sin^2 x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{1 + 2\sin^2 x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq \frac{4}{1 + 2\sin^2 x} \leq 4.$$

$$\text{Vậy } \min y = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\max y = 4 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 6:

Hàm số $y = 2\sin^2 x + \cos^2 2x$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}.$

$$\text{Ta có } y = 2\sin^2 x + \cos^2 2x = 1 - \cos 2x + \cos^2 2x = \left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

$$-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-3}{2} \leq \cos 2x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq \left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leq 3.$$

$$\text{Vậy } \min y = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\max y = 3 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 7:

Hàm số $y = 3 \sin x + 4 \cos x + 1$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Ta có $y = 3 \sin x + 4 \cos x + 1 = 5 \left(\frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x \right) + 1 = 5 \sin(x + \alpha) + 1$ với $\alpha = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) + k2\pi$.

$$-5 \leq 5 \sin(x + \alpha) \leq 5 \Leftrightarrow -4 \leq 5 \sin(x + \alpha) + 1 \leq 6.$$

$$\text{Vậy } \min y = -4 \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = -1 \Leftrightarrow x + \alpha = \frac{-\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\alpha - \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\max y = 6 \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = 1 \Leftrightarrow x + \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\alpha + \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 8:

Hàm số $y = 4 \sin 6x + 3 \cos 6x$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Ta có $y = 4 \sin 6x + 3 \cos 6x = 5 \left(\frac{4}{5} \sin 6x + \frac{3}{5} \cos 6x \right) = 5 \sin(6x + \alpha)$ với $\alpha = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) + k2\pi$.

$$-1 \leq \sin(6x + \alpha) \leq 1 \Leftrightarrow -5 \leq 5 \sin(6x + \alpha) \leq 5.$$

$$\text{Vậy } \min y = -5 \Leftrightarrow \sin(6x + \alpha) = -1 \Leftrightarrow 6x + \alpha = \frac{-\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{-2\alpha - \pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z};$$

$$\max y = 5 \Leftrightarrow \sin(6x + \alpha) = 1 \Leftrightarrow 6x + \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{-\alpha}{6} + \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 9:

Hàm số $y = \sin 2x$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$

$$\text{Khi } x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right] \text{ thì } -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \min y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6}; \max y = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}.$$

Câu 10:

Hàm số $y = \sqrt{3} \tan x$ có nghĩa $\Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

Khi $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right]$ thì hàm số $y = \tan x$ luôn đồng biến.

$$\text{Suy ra } -\sqrt{3} \leq \tan x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \sqrt{3} \tan x \leq \sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } \min y = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3}; \max y = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}.$$

Câu 11:

Hàm số $y = f(x) = 4 - 3 \cos x$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Khi $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ thì $-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-3}{2} \leq 3 \cos x \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq -3 \cos x \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 \leq 4 - 3 \cos x \leq \frac{11}{2}$.

Vậy $\min y = 1 \Leftrightarrow x = 0; \max y = \frac{11}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$.

Câu 12:

Hàm số $y = f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Khi $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ thì $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\min y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4}; \max y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

Câu 13:

Hàm số $y = \sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x}$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\sin^2 x \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq 2 - \sin^2 x \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{2 - \sin^2 x} \leq \sqrt{2}$.

Lại có $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} \leq 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 1 + \sqrt{2}$.

$y = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Vậy $\min y = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

$y = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$2 \sin x \sqrt{2 - \sin^2 x} \leq \sin^2 x + 2 - \sin^2 x \Leftrightarrow 2 \sin x \sqrt{2 - \sin^2 x} \leq 2$

$\Leftrightarrow 2 + 2 \sin x \sqrt{2 - \sin^2 x} \leq 4 \Leftrightarrow y^2 \leq 4 \Leftrightarrow y \leq 2$.

Dấu “=” khi và chỉ khi $\sin x = \sqrt{2 - \sin^2 x} \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $\min y = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}; \max y = 2 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 14:

Hàm số $y = \frac{\cos x - 2 \sin x}{2 - \sin x}$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Ta có $y = \frac{\cos x - 2 \sin x}{2 - \sin x} \Rightarrow 2y - y \sin x = \cos x - 2 \sin x$

$\Leftrightarrow 2y = y \sin x - 2 \sin x + \cos x \Leftrightarrow 2y = (y - 2) \sin x + \cos x \Rightarrow 4y^2 = [(y - 2) \sin x + \cos x]^2$

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$(y-2)^2 + 1^2 \geq 4y^2 \Leftrightarrow 3y^2 + 4y - 5 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2-\sqrt{19}}{3} \leq y \leq \frac{-2+\sqrt{19}}{3}.$$

$$\text{Vậy } \min y = \frac{-2-\sqrt{19}}{3}; \max y = \frac{-2+\sqrt{19}}{3}.$$

Câu 15:

Hàm số $(3\sin x - 4\cos x)^2 - 6\sin x + 8\cos x \geq 2m - 1$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } (3\sin x - 4\cos x)^2 - 2(3\sin x - 4\cos x) + 1 \geq 2m \Leftrightarrow (3\sin x - 4\cos x - 1)^2 \geq 2m$$

Để phương trình có nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $2m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$.

Câu 16:

$$\text{Hàm số } y = \tan^2 x + \cot^2 x + 3(\tan x + \cot x) - 1 \text{ có nghĩa } \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Ta có } y = \tan^2 x + \cot^2 x + 3(\tan x + \cot x) - 1$$

$$= \tan^2 x + 2\tan x \cot x + \cot^2 x + 3(\tan x + \cot x) - 3 = (\tan x + \cot x)^2 + 3(\tan x + \cot x) - 3$$

$$\text{Đặt } \tan x + \cot x = t = \frac{2}{\sin 2x} \Rightarrow |t| \geq 2$$

$$\text{Ta có } y = t^2 + 3t - 3. \text{ Cho } y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{-3-\sqrt{21}}{2} \\ t_2 = \frac{-3+\sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \min y = -5 \Leftrightarrow t = \frac{2}{\sin 2x} = -2 \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; \max y = \emptyset$$

Câu 17:

Hàm số $y = \cos^4 x + \sin^4 x$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y = \cos^4 x + \sin^4 x = (1 - \sin^2 x)^2 + \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x + \sin^4 x = 2\sin^4 x - 2\sin^2 x + 1.$$

$$y = 2(\sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x + 1 = 2\left((\sin^2 x)^2 - \sin^2 x + \frac{1}{2}\right) = 2\left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}.$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \leq \sin^2 x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 \leq 2\left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 2\left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq y \leq 1.$$

$$\text{Vậy } \min y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ \sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z});$$

$$\max y = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 18:

Ta có $\sin 2x + 4\cos^2 x + 1 = \sin 2x + 4 \frac{1 + \cos 2x}{2} + 1 = \sin 2x + 2\cos 2x + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$

$$\frac{3\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x + 2\cos 2x + 3} \leq m + 1 \Leftrightarrow (3 - y)\sin 2x + (1 - 2y)\cos 2x = 3y$$

$$\Leftrightarrow 9y^2 = [(3 - y)\sin 2x + (1 - 2y)\cos 2x]^2$$

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$(3 - y)^2 + (1 - 2y)^2 \geq 9y^2 \Leftrightarrow 2y^2 + 5y - 5 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-5 - 3\sqrt{5}}{4} \leq y \leq \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{4}.$$

Vậy $\max y = \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{4} \leq m + 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{3\sqrt{5} - 9}{4}.$

Câu 19:

Hàm số $y = \frac{\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x}{1 + \sin^2 x}$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}.$

$$y = \frac{\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x}{1 + \sin^2 x} = \frac{\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{2}}{1 + \sin^2 x} = \frac{1 + \cos 2x + \sin 2x}{2 + 2\sin^2 x} = \frac{1 + \cos 2x + \sin 2x}{3 - \cos 2x}$$

Có $y = \frac{1 + \cos 2x + \sin 2x}{3 - \cos 2x} \Leftrightarrow 3y - y\cos 2x = 1 + \cos 2x + \sin 2x \Leftrightarrow (1 + y)\cos 2x + \sin 2x = 3y - 1$

$$\Leftrightarrow (3y - 1)^2 = ((1 + y)\cos 2x + \sin 2x)^2$$

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$(1 + y)^2 + 1 \geq (3y - 1)^2 \Leftrightarrow 1 + 2y + y^2 + 1 \geq 9y^2 - 6y + 1 \Leftrightarrow 8y^2 - 8y - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{6}}{4} \leq y \leq \frac{2 + \sqrt{6}}{4}.$$

Vậy $\min y = \frac{2 - \sqrt{6}}{4}; \max y = \frac{2 + \sqrt{6}}{4}.$

Câu 20:

Theo bài ra $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$\sqrt{1 + \cos^2 x} + \sqrt{1 + \cos^2 y} + \sqrt{1 + \cos^2 z} \leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1 + \cos^2 x + 1 + \cos^2 y + 1 + \cos^2 z}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + \cos^2 x} + \sqrt{1 + \cos^2 y} + \sqrt{1 + \cos^2 z} \leq \sqrt{3} \cdot \sqrt{3 + (\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + \cos^2 x} + \sqrt{1 + \cos^2 y} + \sqrt{1 + \cos^2 z} \leq 2\sqrt{3} \Leftrightarrow y \leq 2\sqrt{3}.$$

Vậy $\max y = 2\sqrt{3}.$

Dạng 4: Tính tuần hoàn và chu kì hàm lượng giác

1 – D	2 – D	3 – B	4 – C	5 – A	6 – D	7 – D	8 – B	9 – A	10 – D
11 – C	12 – C	13 – C	14 – A	15 – B	16 – B	17 – B	18 – C	19 – B	20 – A

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1:**

Hàm số $y = \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Chu kì của hàm số $T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$.

Câu 2:

Tại $x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow$ Loại đáp án **A, B**.

Tại $x = \pi \Rightarrow y = 3 \Rightarrow$ Loại đáp án **C**.

Vậy đồ thị đã cho là của hàm số $y = -3\cos 3x$.

Câu 3:

Hàm số $y = 2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Chu kì của hàm số $T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$.

Câu 5:

Hàm số $y = 2\sin \frac{\pi x}{a}$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Chu kì của hàm số $T = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{a}\right|} = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$.

Câu 6:

Hàm số không có chu kì cơ sở.

Câu 7:

Chu kì của hàm số $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$. Loại đáp án **A, B**. Biên độ của hàm số $A = |2| = 2$.

Câu 8:

Tại $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ Loại đáp án **C, D**.

Chu kì của hàm số $T = \frac{2\pi}{3}$.

Vậy đồ thị đã cho là của hàm số $y = \sin 3x$.

Câu 9:

Hàm số $f(x) = a \sin ux + b \cos vx + c$ (với $u, v \in \mathbb{Z}$) là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{|(u, v)|}$

Hàm số $y = \sin 3x + 2 \cos 2x$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Chu kì của hàm số $T = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$.

Câu 10:

Ta có với $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ thì hàm số $f(x) = \sin \frac{x}{3}$ luôn đồng biến.

Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số là $y_{\max} = \frac{1}{2}$ tại $x = \frac{\pi}{2}$.

Câu 11:

Hàm số $y = 3 \cos \left(\frac{\pi}{4} - mx \right)$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Chu kì của hàm số $T = \frac{2\pi}{|-m|} = 3\pi \Leftrightarrow m = \pm \frac{2}{3}$.

Câu 12:

Hàm số $y = \sin x$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Hàm số nghịch biến trên $\left[\pi, \frac{3\pi}{2} \right]$. Hàm số đồng biến trên $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right]$.

\Rightarrow Đồ thị hàm số có một cực tiểu tại $x = \frac{3\pi}{2}$.

Câu 13:

Tại $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow$ Loại đáp án **A**. Chu kì của hàm số $T = 2.2\pi = 4\pi$.

Vậy đồ thị đã cho là của hàm số $y = \cos \frac{x}{2}$.

Câu 14.

Hàm số $f(x) = a \sin ux + b \sin vx + c$ (với $u, v \in \mathbb{Z}$) là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{|(u, v)|}$.

Hàm số $y = \sin 2x + \sin x$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Chu kì của hàm số $T = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$.

Câu 15.

Ta có hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi \right)$.

Câu 16.

Hàm số $f(x) = a \cdot \tan ux + b \cdot \tan vx + c$ (với $u, v \in \mathbb{Z}$) là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \frac{\pi}{|(u,v)|}$.

Hàm số $y = \tan x + \tan 3x$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Chu kì của hàm số $T = \frac{\pi}{|1|} = \pi$.

Câu 17.

Hàm số $y = 2 \sin\left(\frac{x}{2} - 2017\pi\right)$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Chu kì của hàm số $T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$.

Biên độ của hàm số $A = |2| = 2$.

Câu 18.

Hàm số $y = \sin 3x + 2017 \cos 2x$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Chu kì của hàm số $T = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$.

Câu 19.

Hàm số $y = \sin(ax + \pi b)$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Với $a \geq 0$ chu kì của hàm số $T = \frac{2\pi}{a} = 4\pi \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

Tại $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \sin(\pi b) = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$.

Vậy $a + b = 1$.

Câu 20.

Hàm số không có chu kì cơ sở.