

CHƯƠNG

I

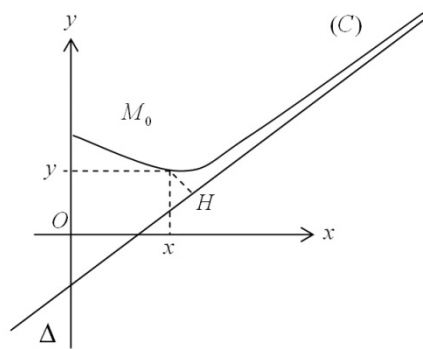
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ



LÝ THUYẾT.

1. Nhánh vô cực của đường cong $(C): y = f(x)$



Gọi $M(x; y) \in (C)$.

Ta nói: (C) có nhánh vô cực $\Leftrightarrow \begin{cases} x \rightarrow +\infty \text{ hay } x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow +\infty \text{ hay } y \rightarrow -\infty \end{cases}$

VD1: Đồ thị (C) của hàm số $y = x^2$ có nhánh vô cực

VD2: Đồ thị (C) của hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$ không có nhánh vô cực

vì $M(x; y) \in (C) \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$ và $0 \leq y \leq 2$.

2) Tiệm cận của đường cong

Cho đường cong $(C): y = f(x)$ và $M(x; y) \in (C)$, H là hình chiếu vuông góc của M lên (Δ) .

Đường thẳng (Δ) được gọi là tiệm cận của (C) khi và chỉ khi khoảng cách MH từ M đến (Δ) tiến về 0 khi M vẽ nên nhánh vô cực của (C) .

Như vậy: (Δ) tiệm cận của $(C) \Leftrightarrow \lim_{M \rightarrow \infty} MH = 0$

3) Định nghĩa đường TCD và TCN của đồ thị hàm số

a) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

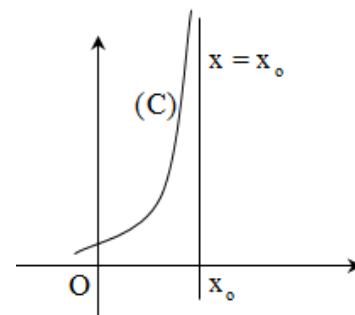
Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng**

(TCD) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu thỏa mãn ít nhất

một trong các điều kiện sau:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$



b) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

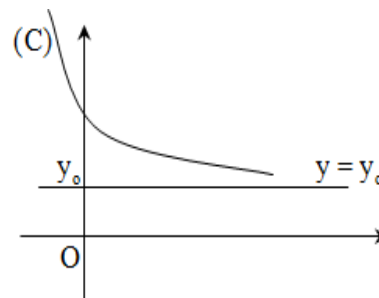
Cho hàm số $y = f(x)$ có xác định trên một khoảng vô hạn

là khoảng có một trong các dạng $(a, +\infty)$; $(-\infty, a)$; $(-\infty, +\infty)$

.Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là **đường TCN** (hay TCN)

của đồ thị nếu thỏa mãn ít nhất một trong các điều kiện sau:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$$



☞ **Lưu ý:**

i) Hàm $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $ac \neq 0$ có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$; tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.

ii) Hàm $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ với $f(x), g(x)$ là những hàm đa thức

+) Nếu bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu thì có tiệm cận ngang $y = 0$.

+) Nếu bậc tử bằng bậc mẫu thì có tiệm cận ngang $y = \frac{a_n}{b_n}$ với a_n, b_n là hệ số của lũy thừa

cao nhất trên tử và dưới mẫu.

+) Nếu bậc tử lớn hơn bậc mẫu thì không có tiệm cận ngang.

$$+) x = x_0 \text{ là tiệm cận đứng} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x_0) = 0; f(x_0) \neq 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} g(x_0) = f(x_0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty \end{array} \right. \end{cases}$$

iii) Ứng dụng máy tính CASIO để tìm tiệm cận đứng hoặc tiệm cận ngang

Để tìm tiệm cận đứng hoặc tiệm cận ngang của một hàm số thông qua máy tính CASIO, ta sử dụng phím CALC trên máy.

Một số lưu ý về kết quả và cách bấm:

Giới hạn	Thao tác trên máy tính
$x \rightarrow x_0^+$	CALC $x_0 + 10^{-10}$
$x \rightarrow x_0^-$	CALC $x_0 - 10^{-10}$
$x \rightarrow +\infty$	CALC 10^{10}
$x \rightarrow -\infty$	CALC -10^{10}



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: TÌM TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x-3}{x+2}$. Tìm tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Lời giải

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là $y = 2$.

Vì $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng $x = -2$.

Do đó đồ thị hàm số có tổng số 2 tiệm cận kể cả đứng và ngang.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2020x-2021}{1-x}$. Tìm tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x-5}{|x|-2}$. Tìm tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x+1}$. Tìm tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x-6}}{x-1}$. Tìm tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$. Tìm tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2-x-6}{x^2+3x+2}$. Tìm tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x+3}-3x}{2x-4}$. Tìm tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{5x-\sqrt{x^2+3x+2}}{2-x}$. Tìm tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

DẠNG 2: TÌM TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ BIẾT BBT CỦA HÀM SỐ, ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ ĐÓ HOẶC HÀM SỐ LIÊN QUAN

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	x_4	$+\infty$			
y'	+	0	-		+	0	-		-
y		5			10				$+\infty$
	$-\infty$		2	1		2			3

Tìm tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Lời giải

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 3$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là $y = 3$.

Vì $\lim_{x \rightarrow x_4^+} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng $x = x_4$.

Do đó đồ thị hàm số có tổng số 2 tiệm cận kể cả đứng và ngang.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1		x_2		x_3		x_4	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-		+	0	-		-
$f(x)$			5			10		$+\infty$		
	$-\infty$			0			2			3

Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$?

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	2

Tìm phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho?

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$	
y'		-		+	0	-
y	$+\infty$				2	
		-1		$-\infty$		$-\infty$

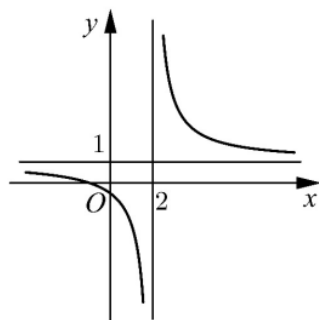
Hỏi đồ thị hàm số trên có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và ngang?

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		-1		$+\infty$
	2			m

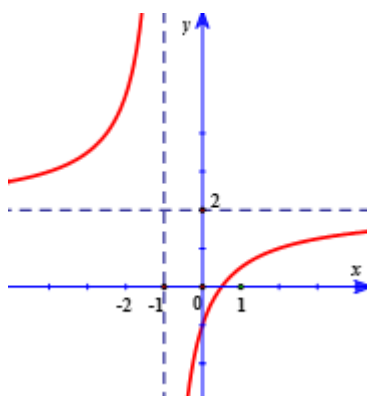
Tìm các giá trị nguyên của $m \in [0; 5)$ để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng và ngang?

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm phương trình các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số trên.

Câu 7. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Đồ thị có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?



CHUYÊN ĐỀ I – GIẢI TÍCH 12 - ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ
DẠNG 3: TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ HÀM HỢP

Các dạng trong chủ đề: Cho hàm số $y = f(x)$ biết bảng biến thiên hoặc đồ thị. Tìm các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị $y = g(x)$ thuộc một trong các dạng sau

- 1) $y = f(u(x))$,
- 2) $y = g(f(x))$,
- 3) $y = g(f(u(x)))$,
- 4) $y = g(x, f(x))$,
- 5) $y = g(x, f(u(x)))$.

Phương pháp giải: Gọi (G) là đồ thị hàm số $y = g(x)$.

1) Tìm tiệm cận ngang.

Xét hàm số dạng $g(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Một dấu hiệu thường dùng để nhận biết (G) có tiệm cận ngang:

- + Hàm số $y = g(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$ hoặc trên $(-\infty; a)$.
- + Bậc của $u(x) \leq$ Bậc của $v(x)$.
- + $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = y_0 \Rightarrow$ Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của (G) .

2) Tìm tiệm cận đứng.

Xét dạng hàm số $g(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Một dấu hiệu thường dùng để nhận biết đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của (G) :

- + $v(x_0) = 0$ và $u(x_0) \neq 0$, $g(x)$ xác định trên $(a; x_0)$ hoặc $(x_0; b)$.
 - + Ít nhất một trong hai giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x)$ là giới hạn vô cực.
- \Rightarrow Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của (G) .

Trong chủ đề này, các dấu hiệu nhận biết ở trên dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	-	0	+
y	1	\searrow -3 \nearrow	1

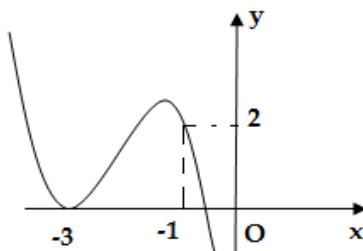
Tìm số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	2	$+\infty$	3	$-\infty$	$-\infty$

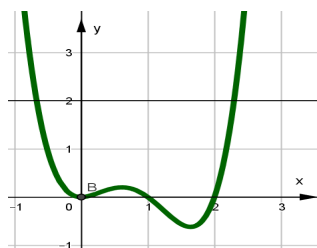
Tìm số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{1}{2f(x)-3}$

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ.



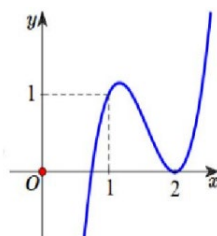
Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{(f(x))^2 - 2f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

Câu 4. Cho đồ thị hàm đa thức bậc bốn $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới .



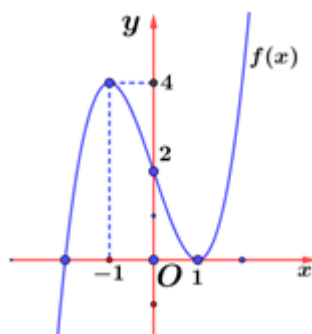
Hỏi đồ thị của hàm số $g(x) = \frac{(x^6 + 1)(x^2 - 5x) \cdot \sqrt{x^2 - 2x}}{[f^2(x) - 2f(x)](2x - 10)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ là hàm số đa thức với hệ số thực, có đồ thị (C) như hình vẽ bên.



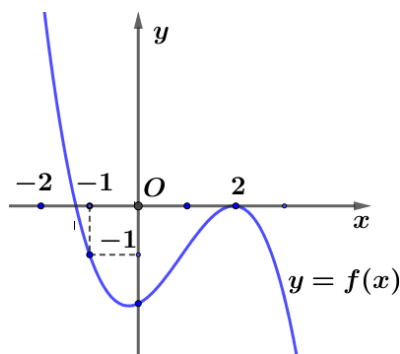
Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{(x+1)[f^2(x) - f(x)]}$.

Câu 6. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{(x+1)(x^2-1)}{f^2(x)-2f(x)}$.

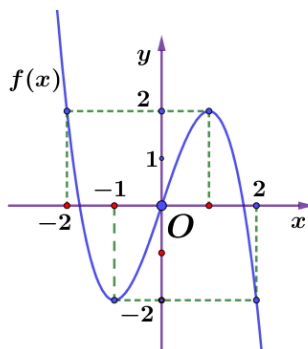
Câu 7. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$) có đồ thị như hình dưới đây



Tìm số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$$y = g(x) = \frac{(x^2 + 2x - 3)\sqrt{x}}{(x^2 - x)[(f(x))^2 + f(x)]}.$$

Câu 8. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



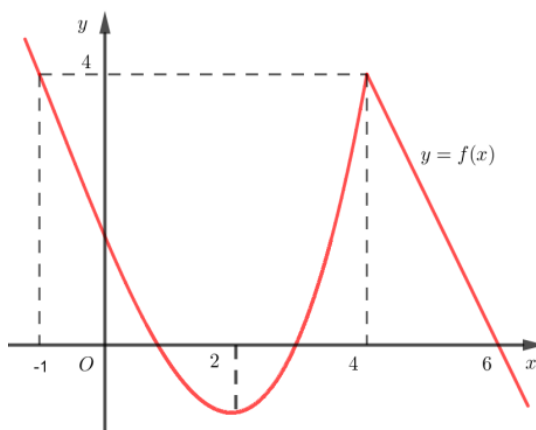
Tìm số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{x+2}{f(x)+1}$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	2	$+\infty$	3	$-\infty$	$-\infty$

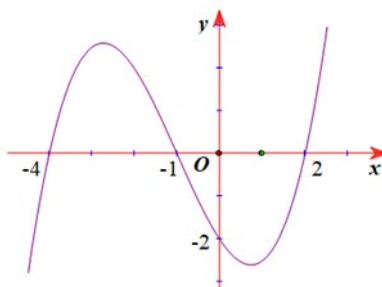
Tìm số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 2x - 2)$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình dưới đây



Tìm số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x) = f\left(\frac{2-x}{x+1}\right)$

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình dưới đây



Tìm số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{f(x)-1}$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-3	1	$-\infty$	

Tìm số tiệm cận ngang và số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{3}{f(x^3 + x + 1) - 1}$.

DẠNG 3: MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ TIỆM CẬN CHỨA THAM SỐ

- Câu 1.** Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx+7}{mx-1}$ có tiệm cận đứng đi qua điểm $A(1;-2)$.
- Câu 2.** Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x-2}{x^2+x+m}$ có ba đường tiệm cận.
- Câu 3.** Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{(m+1)x-5m}{2x-m}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.
- Câu 4.** Tìm các tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+mx+4}$ có đúng hai đường tiệm cận?
- Câu 5.** Cho hàm số $y = \frac{2mx+m}{x-1}$. Với giá trị nào của m thì đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích là 8?
- Câu 6.** Biết đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đi qua điểm $A(-1;7)$ và giao điểm hai tiệm cận của (C) là điểm $I(-2;3)$. Biết c là số nguyên dương và a, c là các số nguyên tố cùng nhau. Tìm các số a, b, c, d .
- Câu 7.** Cho hàm số $y = \frac{x-m}{x^2+3x-4}$. Giá trị nào của m để đồ thị hàm số đã cho có đúng 1 tiệm cận đứng?
- Câu 8.** Cho hàm số $y = \frac{2x+m}{x-m}$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình vuông

Lời giải

Ta có đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 2$

Với $2.m-1.m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ thì đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = m$

Để 2 đường tiệm cận cùng với 2 trục tọa độ tạo thành một hình vuông thì $|m| = 2 \Leftrightarrow m = \pm 2$

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{1-x}{x^2-2mx+4}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có đúng ba đường tiệm cận.

Câu 10. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là $x = 2$ và tiệm cận ngang là $y = 3$. Tìm a, b .

Câu 11. Tính tổng bình phương tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \sqrt{2x^2-3x+5} + mx - 6$ có tiệm cận ngang.

CHƯƠNG

I

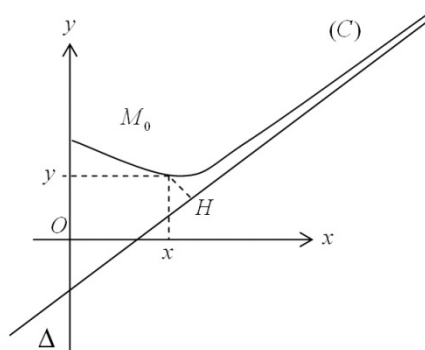
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ



LÝ THUYẾT.

1. Nhánh vô cực của đường cong $(C): y = f(x)$



Gọi $M(x; y) \in (C)$.

Ta nói: (C) có nhánh vô cực $\Leftrightarrow \begin{cases} x \rightarrow +\infty \text{ hay } x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow +\infty \text{ hay } y \rightarrow -\infty \end{cases}$

VD1: Đồ thị (C) của hàm số $y = x^2$ có nhánh vô cực

VD2: Đồ thị (C) của hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$ không có nhánh vô cực

vì $M(x; y) \in (C) \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$ và $0 \leq y \leq 2$.

2) Tiệm cận của đường cong

Cho đường cong $(C): y = f(x)$ và $M(x; y) \in (C)$, H là hình chiếu vuông góc của M lên (Δ) .

Đường thẳng (Δ) được gọi là tiệm cận của (C) khi và chỉ khi khoảng cách MH từ M đến (Δ) tiến về 0 khi M vẽ nên nhánh vô cực của (C) .

Như vậy: (Δ) tiệm cận của $(C) \Leftrightarrow \lim_{M \rightarrow \infty} MH = 0$

3) Định nghĩa đường TCD và TCN của đồ thị hàm số

a) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

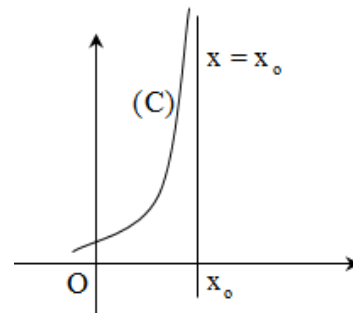
Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng**

(TCD) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu thỏa mãn ít nhất

một trong các điều kiện sau:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$



b) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

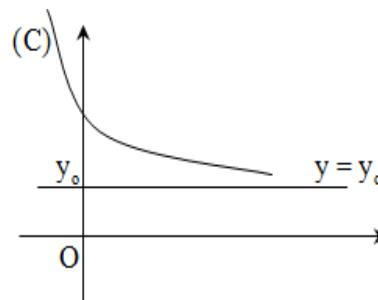
Cho hàm số $y = f(x)$ có xác định trên một khoảng vô hạn

là khoảng có một trong các dạng $(a, +\infty)$; $(-\infty, a)$; $(-\infty, +\infty)$

.Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là **đường TCN** (hay TCN)

của đồ thị nếu thỏa mãn ít nhất một trong các điều kiện sau:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$$



☞ Lưu ý:

i) Hàm $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $ac \neq 0$ có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$; tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.

ii) Hàm $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ với $f(x), g(x)$ là những hàm đa thức

+) Nếu bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu thì có tiệm cận ngang $y = 0$.

+) Nếu bậc tử bằng bậc mẫu thì có tiệm cận ngang $y = \frac{a_n}{b_n}$ với a_n, b_n là hệ số của lũy thừa

cao nhất trên tử và dưới mẫu.

+) Nếu bậc tử lớn hơn bậc mẫu thì không có tiệm cận ngang.

$$+) x = x_0 \text{ là tiệm cận đứng} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x_0) = 0; f(x_0) \neq 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} g(x_0) = f(x_0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty \end{array} \right. \end{cases}$$

iii) Ứng dụng máy tính CASIO để tìm tiệm cận đứng hoặc tiệm cận ngang

Để tìm tiệm cận đứng hoặc tiệm cận ngang của một hàm số thông qua máy tính CASIO, ta sử dụng phím CALC trên máy.

Một số lưu ý về kết quả và cách bấm:

Giới hạn	Thao tác trên máy tính
$x \rightarrow x_0^+$	CALC $x_0 + 10^{-10}$
$x \rightarrow x_0^-$	CALC $x_0 - 10^{-10}$
$x \rightarrow +\infty$	CALC 10^{10}
$x \rightarrow -\infty$	CALC -10^{10}



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: TÌM TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x-3}{x+2}$. Tìm tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Lời giải

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là $y = 2$.

Vì $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng $x = -2$.

Do đó đồ thị hàm số có tổng số 2 tiệm cận kể cả đứng và ngang.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2020x-2021}{1-x}$. Tìm tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x-5}{|x|-2}$. Tìm tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x+1}$. Tìm tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x-6}}{x-1}$. Tìm tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$. Tìm tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2-x-6}{x^2+3x+2}$. Tìm tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x+3}-3x}{2x-4}$. Tìm tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{5x-\sqrt{x^2+3x+2}}{2-x}$. Tìm tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

DẠNG 2: TÌM TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ BIẾT BBT CỦA HÀM SỐ, ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ ĐÓ HOẶC HÀM SỐ LIÊN QUAN

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	x_4	$+\infty$			
y'	+	0	-		+	0	-		-
y		5			10				$+\infty$
	$-\infty$		2	1		2			3

Tìm tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Lời giải

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 3$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là $y = 3$.

Vì $\lim_{x \rightarrow x_4^+} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng $x = x_4$.

Do đó đồ thị hàm số có tổng số 2 tiệm cận kể cả đứng và ngang.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1		x_2		x_3		x_4	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-		+	0	-		-
$f(x)$			5			10			$+\infty$	
	$-\infty$			0			2			3

Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$?

Lời giải

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{1}{3}$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y = 0$ và $y = \frac{1}{3}$.

Từ bảng biến thiên, ta có $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x = x_2$ và $x = a \in (-\infty; x_1)$.

Dễ thấy $\lim_{x \rightarrow a^+} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow x_2^+} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng là $x = x_2$ và $x = a$.

Do đó đồ thị hàm số có tổng số 4 đường tiệm cận kể cả đứng và ngang.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	2

Tìm phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho?

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Do đó $y = 2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-		+ 0 -	
y	$+\infty$			$-\infty$

Diagram illustrating the behavior of a function y as x approaches various limits. The horizontal axis represents x with values $-\infty$, 0, 1, and $+\infty$. The vertical axis represents y with values $+\infty$, $-\infty$, and 2. The derivative y' is indicated by signs: negative for $x < 0$, positive for $0 < x < 1$, and negative for $x > 1$.

Key points and limits shown:

- As $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow +\infty$.
- As $x \rightarrow 0^-$, $y \rightarrow -1$.
- As $x \rightarrow 0^+$, $y \rightarrow -\infty$.
- As $x \rightarrow 1^-$, $y \rightarrow 2$.
- As $x \rightarrow 1^+$, $y \rightarrow 2$.
- As $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow -\infty$.

Hỏi đồ thị hàm số trên có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và ngang?

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0$ là đường tiệm cận đứng duy nhất của đồ thị hàm số.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-
$f(x)$	2	-1		$+\infty$

Tìm các giá trị nguyên của $m \in [0; 5)$ để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng và ngang?

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ta có

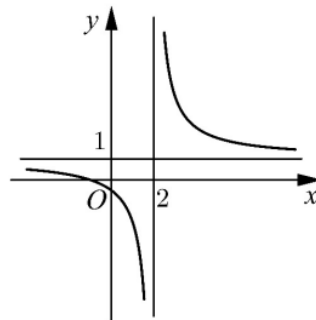
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ là đường tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m \Rightarrow y = m$ là đường tiệm cận ngang.

Do đó, để đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận thì $m \neq 2$, mà $m \in [0; 5)$ nên $m \in \{0; 1; 3; 4\}$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm phương trình các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số trên.

Lời giải

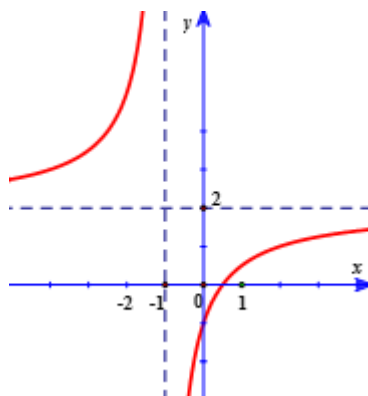
Nhìn vào đồ thị, ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$. Do đó, đồ thị có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$.

CHUYÊN ĐỀ 1 – GIẢI TÍCH 12 - ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Theo đồ thị, ta cũng có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Do đó, đồ thị có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

Vậy đồ thị có tiệm cận đứng $x = 2$ tiệm cận ngang $y = 1$.

Câu 7. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Đồ thị có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?



Lời giải

Nhìn vào đồ thị, ta có: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$. Do đó, đồ thị có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.

Theo đồ thị, ta cũng có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Do đó, đồ thị có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

Vậy đồ thị 2 đường tiệm cận là: tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = 2$.

CHUYÊN ĐỀ I – GIẢI TÍCH 12 - ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ
DẠNG 3: TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ HÀM HỢP

Các dạng trong chủ đề: Cho hàm số $y = f(x)$ biết bảng biến thiên hoặc đồ thị. Tìm các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị $y = g(x)$ thuộc một trong các dạng sau

- 1) $y = f(u(x))$,
- 2) $y = g(f(x))$,
- 3) $y = g(f(u(x)))$,
- 4) $y = g(x, f(x))$,
- 5) $y = g(x, f(u(x)))$.

Phương pháp giải: Gọi (G) là đồ thị hàm số $y = g(x)$.

1) *Tìm tiệm cận ngang.*

Xét hàm số dạng $g(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Một dấu hiệu thường dùng để nhận biết (G) có tiệm cận ngang:

- + Hàm số $y = g(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$ hoặc trên $(-\infty; a)$.
- + Bậc của $u(x) \leq$ Bậc của $v(x)$.
- + $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = y_0 \Rightarrow$ Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của (G) .

2) *Tìm tiệm cận đứng.*

Xét dạng hàm số $g(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Một dấu hiệu thường dùng để nhận biết đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của (G) :

- + $v(x_0) = 0$ và $u(x_0) \neq 0$, $g(x)$ xác định trên $(a; x_0)$ hoặc $(x_0; b)$.
 - + Ít nhất một trong hai giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x)$ là giới hạn vô cực.
- \Rightarrow Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của (G) .

Trong chủ đề này, các dấu hiệu nhận biết ở trên dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	-	0	+
y	1	-3	1

Tìm số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Phương trình $2f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \\ x = x_2 \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \end{cases}.$

Do $\lim_{x \rightarrow x_1^+} y = \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{1}{2f(x) - 1} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow x_1^-} y = \lim_{x \rightarrow x_1^-} \frac{1}{2f(x) - 1} = +\infty$ nên $x = x_1$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x) - 1}$.

Do $\lim_{x \rightarrow x_2^+} y = \lim_{x \rightarrow x_2^+} \frac{1}{2f(x) - 1} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow x_2^-} y = \lim_{x \rightarrow x_2^-} \frac{1}{2f(x) - 1} = -\infty$ nên $x = x_2$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x) - 1}$.

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2f(x) - 1} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2f(x) - 1} = 1$ nên $y = 1$ là một tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x) - 1}$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x) - 1}$ có 2 đường tiệm cận đứng là $x = x_1; x = x_2$ và 1 tiệm cận ngang là $y = 1$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	2	$+\infty$	3	$-\infty$	$-\infty$

Tìm số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{1}{2f(x) - 3}$

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Phương trình $2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (1; 2) \\ x = x_2 \in (2; +\infty) \end{cases}.$

• $\lim_{x \rightarrow x_1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{1}{2f(x) - 3} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_1^-} \frac{1}{2f(x) - 3} = -\infty \Rightarrow$ Đường thẳng $x = x_1$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x) - 3}$.

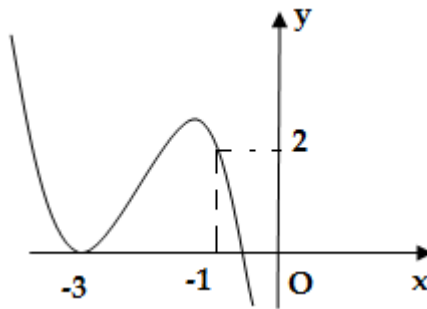
• $\lim_{x \rightarrow x_2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_2^+} \frac{1}{2f(x) - 3} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_2^-} \frac{1}{2f(x) - 3} = +\infty \Rightarrow$ Đường thẳng $x = x_2$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x) - 3}$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2f(x)-3} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2f(x)-3} = 0 \Rightarrow$ Đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận

ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-3}$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-3}$ có 2 đường tiệm cận đứng là $x = x_1; x = x_2$ và 1 tiệm cận ngang là $y = 0$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in R$) có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{(f(x))^2 - 2f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \\ f(x) \neq 2 \end{cases}$

Ta có $g(x) = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{(f(x))^2 - 2f(x)} = \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{(f(x))^2 - 2f(x)}$,

Xét phương trình $(f(x))^2 - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$.

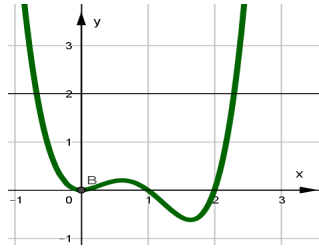
Với $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = x_1 \in (-1; 0) \end{cases}$ (l) trong đó $x = -3$ là nghiệm nghiệm kép, nên mẫu sẽ có nhân tử $(x+3)^2$ do đó $x = -3$ là một tiệm cận đứng.

Với $f(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = x_2 \in (-3; -1) \\ x = x_3 \in (-\infty; -3) \end{cases}$, ba nghiệm này là nghiệm đơn, nên

$f(x) - 2 = k(x+1)(x-x_2)(x-x_3)$, ta thấy trong $g(x)$ thì $(x+1)$ sẽ bị rút gọn nên có thêm $x = x_2 \in (-3; -1)$ và $x = x_3 \in (-\infty; -3)$ là tiệm cận đứng.

Vậy tóm lại đồ thị có 3 tiệm cận đứng là $x = -3; x = x_2; x = x_3$.

Câu 4. Cho đồ thị hàm đa thức bậc bốn $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hỏi đồ thị của hàm số $g(x) = \frac{(x^6 + 1)(x^2 - 5x) \cdot \sqrt{x^2 - 2x}}{[f^2(x) - 2f(x)](2x - 10)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$.

Giả sử $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{-1}{2a^2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{2a^2}$ nên đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 tiệm cận ngang $y = \pm \frac{1}{2a^2}$

Dễ thấy $[f^2(x) - 2f(x)](2x - 10) = 0 \Leftrightarrow f(x)[f(x) - 2] \cdot 2 \cdot (x - 5) = 0$ có các nghiệm

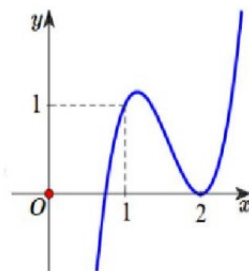
$x = 0; x = 1; x = 2; x = 5; x = x_1 \in (-1; 0); x = x_2 \in (2; 3)$

So sánh với điều kiện của căn và bội của nghiệm ta thấy đồ thị $g(x)$ có các đường tiệm cận đứng là:

$x = 0; x = 2; x = x_1; x = x_2$

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 6 đường tiệm cận kể cả ngang và đứng

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ là hàm số đa thức với hệ số thực, có đồ thị (C) như hình vẽ bên.



Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x - 1}}{(x + 1)[f^2(x) - f(x)]}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 1$

$$(x + 1)[f^2(x) - f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ f^2(x) - f(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (loại)} \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{cases}.$$

Dựa vào đồ thị ta có

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = x_1 \in (1; 2) \\ x = x_2 \in (2; +\infty) \end{cases} \Rightarrow f(x) - 1 = a(x-1)(x-x_1)(x-x_2).$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_3 \in (0; 1) \\ x = 2 \end{cases} \text{ và } f(x) = a(x-x_3)(x-2)^2.$$

Hàm số có tập xác định $D = (1; +\infty) \setminus \{x_1; x_2; 2\}$.

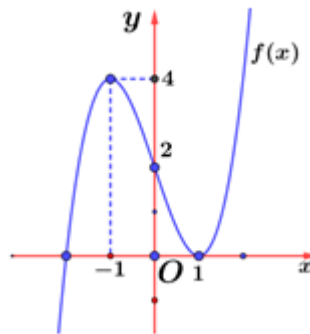
$$g(x) = \frac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{(x+1)a(x-1)(x-x_1)(x-x_2)a(x-x_3)(x-2)^2} = \frac{\sqrt{x-1}}{a^2(x+1)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-2)}$$

Tại các điểm $x = x_1, x = 2, x = x_2$ mẫu của $g(x)$ nhận giá trị bằng 0 còn tử nhận các giá trị dương. Và do hàm số xác định trên mỗi khoảng $(1; x_1), (x_1; 2), (2; x_2), (x_2; +\infty)$ nên giới hạn một bên của hàm số $y = g(x)$ tại các điểm $x = x_1, x = 2, x = x_2$ là các giới hạn vô cực.

Do đó, đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 tiệm cận đứng, đó là các đường thẳng $x = x_1, x = 2, x = x_2$.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng.

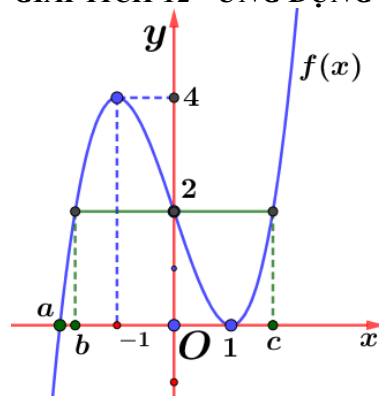
Câu 6. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{(x+1)(x^2-1)}{f^2(x)-2f(x)}$.

Lời giải

Ta có: $f^2(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 2 & (2) \end{cases}$.



Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy:

(1) có nghiệm $x_1 = a < -1$ (nghiệm đơn) và $x_2 = 1$ (nghiệm kép) $\Rightarrow f(x) = k(x-a)(x-1)^2$ ($k \neq 0$)

(2) có nghiệm ba nghiệm đơn x_1, x_2, x_3 với $x_1 = b < -1 < x_2 = 0 < 1 < x_3 = c$

$\Rightarrow f(x) - 2 = k(x-b)x(x-c)$ ($k \neq 0$).

\Rightarrow Hàm số $y = g(x)$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{a; b; 0; 1; c\}$

+) Tìm tiệm cận ngang:

Vì $g(x) = \frac{(x+1)(x^2-1)}{f^2(x)-2f(x)} = \frac{(x+1)(x^2-1)}{f(x)[f(x)-2]} = \frac{(x+1)^2}{k^2(x-1)(x-b)x(x-c)(x-a)}$ nên $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = g(x)$ nhận đường thẳng $y = 0$ làm tiệm cận ngang.

+) Tìm tiệm cận đứng:

Tại các điểm $x = a, x = b, x = 0, x = 1, x = c$ mẫu của $g(x)$ nhận giá trị bằng 0 còn tử nhận các giá trị dương. Và do hàm số xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{a; b; 0; 1; c\}$ nên giới hạn một bên của hàm số

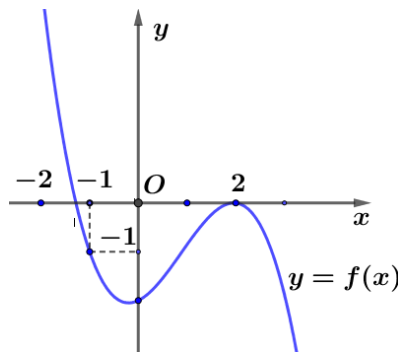
$y = g(x)$ tại các điểm $x = a, x = b, x = 0, x = 1, x = c$ là các giới hạn vô cực. Do đó, đồ thị hàm số

$y = g(x)$ có 5 tiệm cận đứng, đó là các đường thẳng $x = a, x = b, x = 0, x = 1, x = c$. Vậy đồ thị

hàm số $y = g(x)$ có 6 đường tiệm cận: 1 tiệm cận ngang $y = 0$ và 5 tiệm cận đứng

$x = a, x = b, x = 0, x = 1, x = c$.

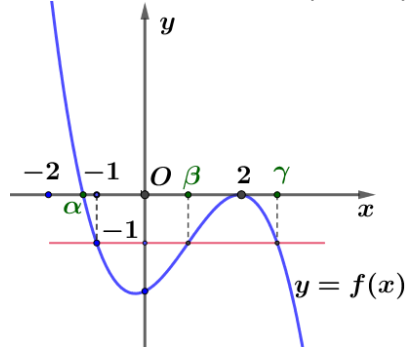
Câu 7. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$) có đồ thị như hình dưới đây



Tìm số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$$y = g(x) = \frac{(x^2 + 2x - 3)\sqrt{x}}{(x^2 - x)\left[(f(x))^2 + f(x)\right]}.$$

Lời giải



Trước hết, ta cần tìm $x \geq 0$ để $(x^2 - x)[(f(x))^2 + f(x)] = 0$.

Ta có:

$$(x^2 - x)[(f(x))^2 + f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = -1 \end{cases}$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy

$$\bullet f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \in (-2; -1) \\ x = 2 \end{cases} \text{ và } f(x) = a(x - \alpha)(x - 2)^2.$$

$$\bullet f(x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \beta \in (0; 2) \\ x = \gamma \in (2; +\infty) \end{cases} \Rightarrow f(x) + 1 = a(x + 1)(x - \beta)(x - \gamma).$$

Vậy hàm số $y = g(x)$ có tập xác định là $D = (0; +\infty) \setminus \{\beta; 1; 2; \gamma\}$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} y = g(x) &= \frac{(x-1)(x+3)\sqrt{x}}{x(x-1)f(x)[f(x)+1]} = \frac{x+3}{\sqrt{x}a(x-\alpha)(x-2)^2a(x+1)(x-\beta)(x-\gamma)} \\ &= \frac{x+3}{a^2\sqrt{x}(x+1)(x-2)^2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} \end{aligned}$$

+) **Tìm tiệm cận ngang:** Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ (do bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu) $\Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

+) **Tìm tiệm cận đứng:**

$$g(x) = \frac{x+3}{a^2\sqrt{x}(x+1)(x-2)^2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}$$

Mẫu thức của $g(x)$ có 6 nghiệm phân biệt là $\alpha; -1; 0; \beta; 2; \gamma$.

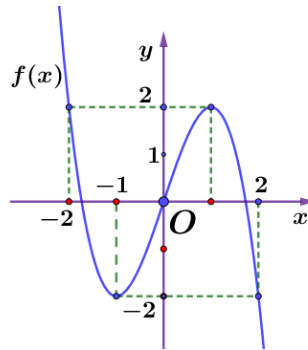
* Tại $x = \alpha \in (-2; -1)$ và $x = -1$ các giới hạn một bên của $g(x)$ không tồn tại nên $x = \alpha; x = -1$ không phải tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

* Tại $x = 0$ ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+3}{a^2 \sqrt{x}(x+1)(x-2)^2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} = +\infty$ nên $x = 0$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

* Tại $x = \beta; x = 2$ và $x = \gamma$ các giới hạn một bên của $g(x)$ đều là giới hạn vô cực (vì mẫu thức bằng 0 còn tử thức khác 0 tại các điểm đó) nên $x = \beta; x = 2$ và $x = \gamma$ là các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

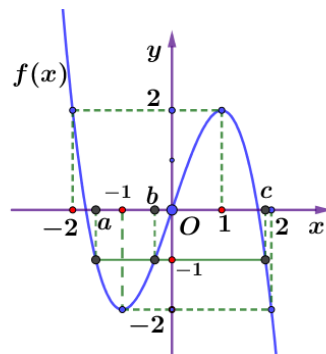
Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 1 đường tiệm cận ngang là $y = 0$ và 4 đường tiệm cận đứng là $x = 0; x = \beta; x = 2$ và $x = \gamma$.

Câu 8. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{x+2}{f(x)+1}$.

Lời giải



Từ đồ thị ta thấy

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-2; -1) \\ x = b \in (-1; 0) \\ x = c \in (1; 2) \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ nên $x = a$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

$\lim_{x \rightarrow b} g(x) = -\infty$ nên $x = b$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = +\infty$ nên $x = c$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 tiệm cận đứng.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	2	$+\infty$	3	$-\infty$	$-\infty$

Tìm số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 2x - 2)$.

Lời giải

Ta có $x^2 - 2x - 2 \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$. Vậy hàm số $y = g(x)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta có:

Do $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x^2 - 2x - 2) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x^2 - 2x - 2) = -\infty$ nên

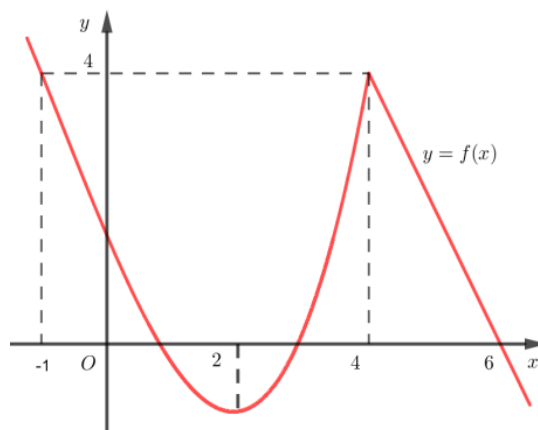
$x = -1$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

Do $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x^2 - 2x - 2) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x^2 - 2x - 2) = +\infty$ nên $x = 3$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x^2 - 2x - 2) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x^2 - 2x - 2) = -\infty$ nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ không có tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 2x - 2)$ có 2 đường tiệm cận đứng là $x = -1; x = 3$ và không có tiệm cận ngang.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình dưới đây



Tìm số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x) = f\left(\frac{2-x}{x+1}\right)$

Lời giải

Hàm số $y = g(x)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

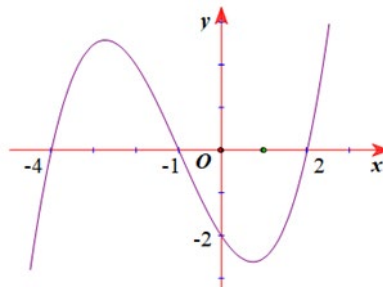
Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta có:

Do $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f\left(\frac{2-x}{x+1}\right) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f\left(\frac{2-x}{x+1}\right) = +\infty$ nên $x = -1$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2-x}{x+1}\right) = 4$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{2-x}{x+1}\right) = 4$ nên $y = 4$ là một tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x) = f\left(\frac{2-x}{x+1}\right)$ có 1 đường tiệm cận đứng là $x = -1$ và có 1 tiệm cận ngang là $y = 4$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình dưới đây

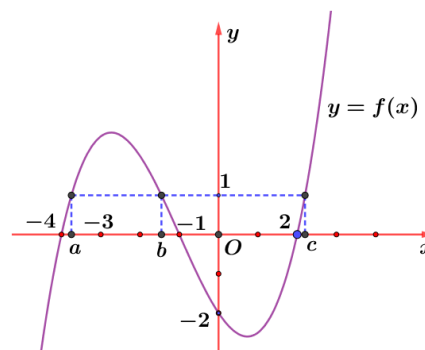


Tìm số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{f(x)-1}$.

Lời giải

$$\text{ĐKXD: } \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$$

$$\bullet f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq -1 \\ x \geq 2 \end{cases}$$



$$\bullet f(x) \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq a \in (-4; -3) \\ x \neq b \in (-3; -1) \\ x \neq c \in (2; +\infty) \end{cases}$$

Hàm số $y = g(x)$ có tập xác định là $D = [-4; a) \cup (a; b) \cup (b; -1] \cup [2; c) \cup (c; +\infty)$.

+) **Tìm tiệm cận ngang:** Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ (do bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu) $\Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

+) **Tìm tiệm cận đứng:**

Mẫu thức của $g(x)$ có 3 nghiệm phân biệt là $a; b; c$, và tại các điểm này các giới hạn một bên của $g(x)$ đều là giới hạn vô cực (vì mẫu thức bằng 0 còn tử thức khác 0 tại các điểm đó) nên $x = a; x = b; x = c$ là các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 1 đường tiệm cận ngang là $y = 0$ và 3 đường tiệm cận đứng là

$$x = a; x = b; x = c.$$

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-3	1	$-\infty$	

Tìm số tiệm cận ngang và số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{3}{f(x^3 + x + 1) - 1}$.

Lời giải

x	$-\infty$	a	-1	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$			1		

The diagram illustrates a piecewise linear function $y(x)$ defined on the interval $[-\infty, +\infty]$. The function is composed of several linear segments connecting the following points: $(-\infty, 1)$, $(a, -3)$, $(-1, 1)$, $(1, -\infty)$, and $(+\infty, -\infty)$. A green dashed line connects the points $(-\infty, 1)$ and $(1, 1)$, indicating a horizontal segment at $y=1$ for $x < 1$. The arrows indicate the direction of the function segments.

Từ bảng biến thiên ta thấy

$$f(x^3 + x + 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x^3 + x + 1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x + 1 = 1 \\ x^3 + x + 1 = a, a < -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 + x + 1 = a, a < -1 \end{cases} \quad (2)$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $h(x) = x^3 + x + 1$ ta thấy với $a < -1$ thì phương trình $x^3 + x + 1 = a$ có nghiệm duy nhất $x_0 < -1$

x	$-\infty$	x_0	-1	$+\infty$
$3x^2 + 1$			$+$	
$x^3 + x + 1$	$-\infty$	a	-1	$+\infty$

Suy ra hàm số $y = g(x)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{0; x_0\}$, $x_0 < -1$.

+) **Tìm tiệm cận ngang:**

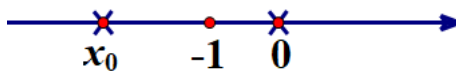
Đặt $t = x^3 + x + 1$. Khi $x \rightarrow +\infty$ thì $t \rightarrow +\infty$ và khi $x \rightarrow -\infty$ thì $t \rightarrow -\infty$.

$$\text{Do đó, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x^3 + x + 1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{f(x^3 + x + 1) - 1} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x^3 + x + 1) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{f(x^3 + x + 1) - 1} = 0.$$

Suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 1 tiệm cận ngang đó là đường thẳng $y = 0$.

+) Tìm tiệm cận đứng:



$$g(x) = \frac{3}{f(x^3 + x + 1) - 1}$$

Tại xác điểm $x = 0$, $x = x_0$ mẫu của $g(x)$ nhận giá trị bằng 0 còn tử luôn nhận giá trị bằng 3.

Và do hàm số xác định trên mỗi khoảng $(-\infty; x_0)$, $(x_0; 0)$, $(0; +\infty)$ nên giới hạn một bên của hàm số $y = g(x)$ tại các điểm $x = 0$, $x = x_0$ là các giới hạn vô cực.

Do đó, đồ thị hàm số $y = g(x)$ có hai tiệm cận đứng, đó là các đường thẳng $x = 0$, $x = x_0$

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 đường tiệm cận: 1 tiệm cận ngang $y = 0$ và 2 tiệm cận đứng $x = 0$, $x = x_0$.

CHUYÊN ĐỀ I – GIẢI TÍCH 12 - ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ
DẠNG 3: MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ TIỆM CẬN CHỨA THAM SỐ

Câu 1. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx+7}{mx-1}$ có tiệm cận đứng đi qua điểm $A(1;-2)$.

Lời giải

Để đường tiệm cận đứng đi qua $A(1;-2)$ thì đường tiệm cận đứng phải có phương trình $x = 1$.

Khi đó $x = 1$ là nghiệm của $mx - 1 = 0$. Suy ra $m = 1$.

Thử lại: với $m = 1$ thì đồ thị hàm số $y = \frac{x+7}{x-1}$ có đường tiệm cận đứng $x = 1$ đi qua $A(1;-2)$.

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 2. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x-2}{x^2+x+m}$ có ba đường tiệm cận.

Lời giải

Ta thấy $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y = 0$.

Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x-2}{x^2+x+m}$ có ba đường tiệm cận $\Leftrightarrow x^2+x+m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\text{khác } 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4m > 0 \\ 2^2+2+m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{4} \\ m \neq -6 \end{cases}.$$

Câu 3. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{(m+1)x-5m}{2x-m}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

Lời giải

Ta có:

Tiệm cận ngang của hàm số $y = \frac{(m+1)x-5m}{2x-m}$ là:

$$y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(m+1)x-5m}{2x-m} = \frac{m+1}{2} = 1 \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy $m = 1$.

Câu 4. Tìm các tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+mx+4}$ có đúng hai đường tiệm cận?

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{m}{x} + \frac{4}{x^2}} = 0.$$

Nên đồ thị hàm số luôn có một đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

Do đó đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận thì đồ thị hàm số cần có đúng một đường tiệm cận đứng. Hay phương trình: $f(x) = x^2 + mx + 4 = 0$ có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng 1.

Ta có $\Delta = m^2 - 4.1.4 = m^2 - 16$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} m^2 - 16 = 0 \\ m^2 - 16 > 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -4 \\ \begin{cases} m^2 - 16 > 0 \\ m = -5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -4 \\ m = -5 \end{cases}.$$

Vậy $m \in \{-4; 4; -5\}$.

Câu 5. Cho hàm số $y = \frac{2mx+m}{x-1}$. Với giá trị nào của m thì đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích là 8?

Lời giải

Để đồ thị hàm số tồn tại tiệm cận đứng thì $ad - bc \neq 0 \Leftrightarrow -3m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị lần lượt là các đường thẳng $x = 1$ và $y = 2m$.

Khi đó diện tích hình chữ nhật tạo thành là: $|1.2m| = 8 \Leftrightarrow |m| = 4 \Leftrightarrow m = \pm 4$.

Câu 6. Biết đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đi qua điểm $A(-1;7)$ và giao điểm hai tiệm cận của (C) là điểm $I(-2;3)$. Biết c là số nguyên dương và a, c là các số nguyên tố cùng nhau. Tìm các số a, b, c, d .

Lời giải

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là $x = -\frac{d}{c}$ và tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c}$ với điều kiện $ad - bc \neq 0$

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} -\frac{d}{c} = -2 \\ \frac{a}{c} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2c \\ a = 3c \end{cases} \xrightarrow[c \in \mathbb{N}^*]{(a,c)=1} c = 1 \Rightarrow \begin{cases} d = 2 \\ a = 3 \end{cases} \Rightarrow (C): y = \frac{3x+b}{x+2}.$$

$$\text{Do } A(-1;7) \in (C) \Rightarrow 7 = \frac{-3+b}{-1+2} \Leftrightarrow b = 10.$$

Câu 7. Cho hàm số $y = \frac{x-m}{x^2+3x-4}$. Giá trị nào của m để đồ thị hàm số đã cho có đúng 1 tiệm cận đứng?

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = \frac{x-m}{x^2+3x-4} = \frac{x-m}{(x-1)(x+4)}.$$

*) Với $m = 1$

$$\text{Thì } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+4)} = \frac{1}{5}; \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{(x-1)(x+4)} = \frac{1}{5} \text{ và } \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+4)} = +\infty$$

\Rightarrow Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là $x = -4$

*) Với $m = -4$

$$\text{Thì } \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x+4}{(x-1)(x+4)} = \frac{-1}{5}; \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{x+4}{(x-1)(x+4)} = \frac{-1}{5} \text{ và } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+4}{(x-1)(x+4)} = +\infty$$

\Rightarrow Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là $x = 1$

*) Với $m \neq 1, -4$ thì đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng là $x = 1, x = -4$

Vậy $m = 1, m = -4$ thì đồ thị hàm số đã cho có đúng 1 tiệm cận đứng.

Câu 8. Cho hàm số $y = \frac{2x+m}{x-m}$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình vuông

Lời giải

Ta có đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 2$

Với $2.m - 1.m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ thì đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = m$

Để 2 đường tiệm cận cùng với 2 trục tọa độ tạo thành một hình vuông thì $|m| = 2 \Leftrightarrow m = \pm 2$

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{1-x}{x^2-2mx+4}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có đúng ba đường tiệm cận.

Lời giải

$$\text{Xét đồ thị hàm số } y = \frac{1-x}{x^2-2mx+4} \quad (C)$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Để đồ thị hàm số (C) có ba đường tiệm cận thì đồ thị hàm số (C) có hai đường tiệm cận đứng.

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ 1 - 2m + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Vậy với $m < -2$ hoặc $m > 2, m \neq \frac{5}{2}$ thì đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận

Câu 10. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là $x = 2$ và tiệm cận ngang là $y = 3$. Tìm a, b .

Lời giải

Để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng thì $b \neq 0$.

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là $x = \frac{2}{b}$ và tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{b}$.

Theo bài ra ta có:
$$\begin{cases} \frac{2}{b} = 2 \\ \frac{a}{b} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Vậy: $a = 3; b = 1$.

Câu 11. Tính tổng bình phương tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 3x + 5} + mx - 6$ có tiệm cận ngang.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Có } \lim_{x \rightarrow +\infty} y &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{2x^2 - 3x + 5} - \sqrt{2}x + (m + \sqrt{2})x - 6 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-3x + 5}{\sqrt{2x^2 - 3x + 5} + \sqrt{2}x} - 6 + (m + \sqrt{2})x \right] \end{aligned}$$

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow m + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow m = -\sqrt{2}$

$$\left(\text{do } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x + 5}{\sqrt{2x^2 - 3x + 5} + \sqrt{2}x} - 6 \right) = \frac{-3}{2\sqrt{2}} - 6 \text{ hữu hạn} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Có } \lim_{x \rightarrow -\infty} y &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{2x^2 - 3x + 5} + \sqrt{2}x + (m - \sqrt{2})x - 6 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-3x + 5}{\sqrt{2x^2 - 3x + 5} - \sqrt{2}x} - 6 + (m - \sqrt{2})x \right] \end{aligned}$$

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi $x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow m - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$

$$\left(\text{do } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-3x + 5}{\sqrt{2x^2 - 3x + 5} - \sqrt{2}x} - 6 \right) = \frac{3}{2\sqrt{2}} - 6 \text{ hữu hạn} \right)$$

Vậy tổng bình phương tất cả các giá trị của m thỏa mãn bằng $(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4$.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM
ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC
CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

Câu 1: (MĐ 101-2022) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{2x+4}$ là đường thẳng có phương trình:

- A. $x = -2$. B. $x = 1$. C. $y = 1$. D. $y = -2$.

Câu 2: (MĐ 102-2022) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{2x+4}$ là đường thẳng có phương trình:

- A. $y = -2$. B. $x = -2$. C. $x = 1$. D. $y = 1$.

Câu 3: (MĐ 103-2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$		-	-
$f(x)$	-1	$+\infty$	-1

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình:

- A. $x = -1$. B. $y = -1$. C. $y = -2$. D. $x = -2$.

Câu 4: (MĐ 104-2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$		-	-
$f(x)$	-1	$+\infty$	-1

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình:

- A. $y = -1$. B. $y = -2$. C. $x = -2$. D. $x = -1$.

Câu 5: (TK 2020-2021) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+4}{x-1}$ là đường thẳng:

- A. $x = 1$. B. $x = -1$. C. $x = 2$. D. $x = -2$.

Câu 6: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình

- A.** $x = 1$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = \frac{1}{2}$.

Câu 7: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình

- A.** $x = -1$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 1$.

Câu 8: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình

- A.** $x = 2$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = \frac{-1}{2}$. **D.** $x = -1$.

Câu 9: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ là đường thẳng có phương trình?

- A.** $x = 2$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = -2$. **D.** $x = 1$.

Câu 10: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 2) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{4x-1}{x+1}$ là đường thẳng có phương trình:

- A.** $y = -4$. **B.** $y = 1$. **C.** $y = 4$. **D.** $y = -1$.

Câu 11: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 2) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{5x-1}{x+1}$ là đường thẳng có phương trình:

- A.** $y = 5$. **B.** $y = 1$. **C.** $y = -5$. **D.** $y = -1$.

Câu 12: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ là đường thẳng có phương trình:

- A.** $y = 1$. **B.** $y = -1$. **C.** $y = 2$. **D.** $y = -2$.

Câu 13: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{x+1}$ là đường thẳng có phương trình:

- A.** $y = -3$. **B.** $y = -1$. **C.** $y = 3$. **D.** $y = 1$.

Câu 14: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1}$ là

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 15: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ là

- A.** $y = -2$. **B.** $y = 1$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = 2$.

- Câu 16:** (Mã 101 - 2020 Lần 1) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{4x+1}{x-1}$ là
- A. $y = \frac{1}{4}$. B. $y = 4$. C. $y = 1$. D. $y = -1$.
- Câu 17:** (Mã 102 - 2020 Lần 1) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{5x+1}{x-1}$ là
- A. $y = 1$. B. $y = \frac{1}{5}$. C. $y = -1$. D. $y = 5$.
- Câu 18:** (Mã 103 - 2020 Lần 1) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ là:
- A. $y = \frac{1}{2}$. B. $y = -1$. C. $y = 1$. D. $y = 2$.
- Câu 19:** (Mã 104 - 2020 Lần 1) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-1}$ là:
- A. $y = \frac{1}{3}$. B. $y = 3$. C. $y = -1$. D. $y = 1$.
- Câu 20:** (Mã 101 – 2020 Lần 2) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ là
- A. $x = 2$. B. $x = -2$. C. $x = 1$. D. $x = -1$.
- Câu 21:** (Mã 102 - 2020 Lần 2) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x-3}$ là
- A. $x = -3$. B. $x = -1$. C. $x = 1$. D. $x = 3$.
- Câu 22:** (Mã 103 - 2020 Lần 2) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-2}{x+1}$ là
- A. $x = -2$. B. $x = 1$. C. $x = -1$. D. $x = 2$.
- Câu 23:** (Mã 104 - 2020 Lần 2) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x+3}$ là
- A. $x = -1$. B. $x = 1$. C. $x = -3$. D. $x = 3$.
- Câu 24:** (Đề minh họa 1, Năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?
- A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
 B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
 C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.
 D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.
- Câu 25:** (Đề minh họa 1, Năm 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang.
- A. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.
 B. $m < 0$.
 C. $m = 0$.
 D. $m > 0$.
- Câu 26:** (Đề minh họa 2, Năm 2017) Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$?

- A. $x=1$. B. $y=-1$. C. $y=2$. D. $x=-1$.

Câu 27: (Đề minh họa 2, Năm 2017) Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}.$$

- A. $x=-3$ và $x=-2$. B. $x=-3$. C. $x=3$ và $x=2$. D. $x=3$.

Câu 28: (Đề minh họa 3, Năm 2017) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
y'			+		-
y					

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 29: (Mã 101, Năm 2017) Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là:

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 30: (Mã 102, Năm 2017) Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 31: (Mã 103, Năm 2017) Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây có tiệm cận đứng?

- A. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. B. $y = \frac{1}{x^2+x+1}$. C. $y = \frac{1}{x^4+1}$. D. $y = \frac{1}{x^2+1}$.

Câu 32: (Mã 104, Năm 2017) Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-4}$ có mấy tiệm cận.

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 33: (Đề minh họa, Năm 2018) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

- A. $y = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$. B. $y = \frac{x^2}{x^2+1}$. C. $y = \sqrt{x^2-1}$. D. $y = \frac{x}{x+1}$.

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 34: (Mã 102, Năm 2018) Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 35: (Mã 103, Năm 2018) Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+x}$ là

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Câu 36: (Mã 104, Năm 2018) Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ là

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 37: (Đề minh họa, Năm 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$-$		$-$	0	$+$
y	2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Diagram illustrating the behavior of the function y as x approaches the critical points 0 and 1 . Arrows indicate the direction of the function's values:




- As $x \rightarrow 0^-$, $y \rightarrow -4$.
- As $x \rightarrow 0^+$, $y \rightarrow +\infty$.
- As $x \rightarrow 1^-$, $y \rightarrow -2$.
- As $x \rightarrow 1^+$, $y \rightarrow +\infty$.
- As $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow +\infty$.

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	$-$	0	$+$
y	0		2		$+\infty$

Arrows indicate the mapping from x to y : $-\infty \rightarrow -\infty$, $0 \rightarrow -2$, and $1 \rightarrow +\infty$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
y'	$-$		$- \quad 0 \quad +$	
y	1 		2 	3 
	$-\infty$		-3	

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
y'	-		- 0 +	
y	0	$+\infty$	-3	3

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM
ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC
CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

Câu 1: (MĐ 101-2022) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{2x+4}$ là đường thẳng có phương trình:

A. $x = -2$.B. $x = 1$.C. $y = 1$.D. $y = -2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$ nên tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{2x+4}$ là đường thẳng có phương trình $y = 1$.

Câu 2: (MĐ 102-2022) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{2x+4}$ là đường thẳng có phương trình:

A. $y = -2$.B. $x = -2$.C. $x = 1$.D. $y = 1$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{2x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{4}{x}} = 1$$

$$\text{và: } \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{2x+4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{4}{x}} = 1$$

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{2x+4}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng có phương trình: $y = 1$.

Câu 3: (MĐ 103-2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	-		
$f(x)$	-1	$+\infty$	-1

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình:

- A. $x = -1$. B. $y = -1$. C. $y = -2$. D. $x = -2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} y = -\infty$.

Vậy tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng $x = -2$.

Câu 4: (MĐ 104-2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	-		
$f(x)$	-1	$+\infty$	-1

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình:

- A. $y = -1$. B. $y = -2$. C. $x = -2$. D. $x = -1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

Câu 5: (TK 2020-2021) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+4}{x-1}$ là đường thẳng:

- A. $x = 1$. B. $x = -1$. C. $x = 2$. D. $x = -2$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+4}{x-1} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+4}{x-1} = +\infty$ nên $x = 1$ là tiệm cận đứng.

Câu 6: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình

- A. $x = 1$. B. $x = -1$. C. $x = 2$. D. $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{x-1} = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

- Câu 7:** (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình
- A. $x = -1$. B. $x = -2$. C. $x = 2$. D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn C

Từ $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$ nên suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 2$.

- Câu 8:** (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình
- A. $x = 2$. B. $x = 1$. C. $x = \frac{-1}{2}$. D. $x = -1$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{x-1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+1}{x-1} = -\infty$.

Vậy tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = 1$.

- Câu 9:** (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ là đường thẳng có phương trình?
- A. $x = 2$. B. $x = -1$. C. $x = -2$. D. $x = 1$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng.

- Câu 10:** (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 2) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{4x-1}{x+1}$ là đường thẳng có phương trình:
- A. $y = -4$. B. $y = 1$. C. $y = 4$. D. $y = -1$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 4$.

Vậy tiệm cận ngang đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình: $y = 4$.

- Câu 11:** (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 2) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{5x-1}{x+1}$ là đường thẳng có phương trình:
- A. $y = 5$. B. $y = 1$. C. $y = -5$. D. $y = -1$.

Lời giải

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{5x-1}{x+1}$ là đường thẳng có phương trình $y = 5$

Câu 12: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ là đường thẳng có

phương trình:

A. $y = 1$.

B. $y = -1$.

C. $y = 2$.

D. $y = -2$.

Lời giải

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ là đường thẳng: $y = 2$.

Câu 13: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{x+1}$ là đường thẳng có

phương trình:

A. $y = -3$.

B. $y = -1$.

C. $y = 3$.

D. $y = 1$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x-1}{x+1} = 3$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{x+1}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$.

Câu 14: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$y = \frac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Tiệm cận ngang:

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2-4x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(5 - \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 5$ nên đồ thị

hàm số có một tiệm cận ngang $y = 5$.

Tiệm cận đứng:

Cho $x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2-4x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x+1}{x+1} = \frac{6}{2} = 3$ nên $x = 1$ không là tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{5x^2 - 4x - 1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{1}{x+1} \cdot \frac{5x^2 - 4x - 1}{x-1} \right) = -\infty$$

$$\text{vì} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{x+1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x-1} = -4 < 0 \end{cases}.$$

Khi đó, đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x = -1$.

Tổng cộng đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

- Câu 15: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ là
- A.** $y = -2$. **B.** $y = 1$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+1} = 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x+1} = 1$$

Suy ra $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

- Câu 16: (Mã 101 - 2020 Lần 1)** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{4x+1}{x-1}$ là
- A.** $y = \frac{1}{4}$. **B.** $y = 4$. **C.** $y = 1$. **D.** $y = -1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Tiệm cận ngang } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{4}{1} = 4$$

- Câu 17: (Mã 102 - 2020 Lần 1)** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{5x+1}{x-1}$ là
- A.** $y = 1$. **B.** $y = \frac{1}{5}$. **C.** $y = -1$. **D.** $y = 5$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+1}{x-1} = 5 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x+1}{x-1} = 5 \end{cases} \Rightarrow y = 5 \text{ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.}$$

- Câu 18: (Mã 103 - 2020 Lần 1)** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ là:
- A.** $y = \frac{1}{2}$. **B.** $y = -1$. **C.** $y = 1$. **D.** $y = 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 2$. Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 2$.

Câu 19: (Mã 104 - 2020 Lần 1) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-1}$ là:

- A. $y = \frac{1}{3}$. B. $y = 3$. C. $y = -1$. D. $y = 1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x-1} = 3$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{x-1} = 3$ nên $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 20: (Mã 101 – 2020 Lần 2) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ là

- A. $x = 2$. B. $x = -2$. C. $x = 1$. D. $x = -1$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$, suy ra đồ thị có tiệm cận đứng là $x = 1$.

Câu 21: (Mã 102 - 2020 Lần 2) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x-3}$ là

- A. $x = -3$. B. $x = -1$. C. $x = 1$. D. $x = 3$.

Lời giải.

Chọn D

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-1}{x-3} = -\infty$. Suy ra tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 3$.

Câu 22: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-2}{x+1}$ là

- A. $x = -2$. B. $x = 1$. C. $x = -1$. D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-2}{x+1} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x-2}{x+1} = +\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 23: (Mã 104 - 2020 Lần 2) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x+3}$ là

A. $x = -1$.

B. $x = 1$.

C. $x = -3$.

D. $x = 3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim_{x \rightarrow -3^+} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -3^-} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = -3$ làm tiệm cận đứng.

Câu 24: (Đề minh họa 1, Năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.

Lời giải

Chọn C

Câu 25: (Đề minh họa 1, Năm 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm

$$số y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$$
 có hai tiệm cận ngang.

A. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

B. $m < 0$.

C. $m = 0$.

D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \frac{-\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{m + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{m}}$$

$$\text{và } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{m + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

Vậy hàm số có hai tiệm cận ngang là : $y = \frac{1}{\sqrt{m}}; y = -\frac{1}{\sqrt{m}} \Rightarrow m > 0$

Câu 26: (Đề minh họa 2, Năm 2017) Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{2x+1}{x+1}?$$

A. $x = 1$.

B. $y = -1$.

C. $y = 2$.

D. $x = -1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+1}{x+1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x+1}{x+1} = +\infty$ suy ra đường thẳng $x = -1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

Câu 27: (Đề minh họa 2, Năm 2017) Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}.$$

- A.** $x = -3$ và $x = -2$. **B.** $x = -3$. **C.** $x = 3$ và $x = 2$. **D.** $x = 3$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x-1)^2 - (x^2+x+3)}{(x^2-5x+6)(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x-1)^2 - (x^2+x+3)}{(x^2-5x+6)(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(3x+1)}{(x-3)(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})} = -\frac{7}{6} \end{aligned}$$

Tương tự $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = -\frac{7}{6}$. Suy ra đường thẳng $x = 2$ **không** là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = +\infty; \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = -\infty.$$

Suy ra đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 28: (Đề minh họa 3, Năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-2		0		$+\infty$
y'			+		-	
y			$-\infty$	$+\infty$	1	0

- A.** 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} y = -\infty \Rightarrow \text{TCD: } x = -2; \lim_{x \rightarrow 0^-} y = +\infty \Rightarrow \text{TCD: } x = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \Rightarrow \text{TCN: } y = 0.$$

- Câu 29: (Mã 101, Năm 2017)** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là:
- A. 3. B. 2. C. 0. **D. 1.**

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số: $D = [-9; +\infty) \setminus \{0; -1\}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = -\infty$.

\Rightarrow TCD: $x = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{(x^2+x)(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{1}{6}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{(x^2+x)(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{1}{6}.$$

$\Rightarrow x = 0$ không là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

- Câu 30: (Mã 102, Năm 2017)** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là
- A. 3. B. 0. C. 2. **D. 1.**

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số: $D = [-4; +\infty) \setminus \{0; -1\}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0} y = \frac{1}{4}$.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = -\infty$$

\Rightarrow TCD: $x = -1$.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

- Câu 31: (Mã 103, Năm 2017)** Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây có tiệm cận đứng?
- A.** $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. B. $y = \frac{1}{x^2+x+1}$. C. $y = \frac{1}{x^4+1}$. D. $y = \frac{1}{x^2+1}$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ có tiệm cận đứng là $x = 0$.

Đồ thị các hàm số ở các đáp án B, C, D đều không có tiệm cận đứng do mẫu vô nghiệm.

- Câu 32: (Mã 104, Năm 2017)** Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-4}$ có mấy tiệm cận.
- A. 0. B. 3. C. 1. **D. 2.**

Lời giải

Chọn D

Ta có $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) = \frac{1}{4}$ nên đường thẳng $x = 2$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{1}{x+2} = -\infty$, nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy có đồ thị có hai đường tiệm cận.

Câu 33: (Đề minh họa, Năm 2018) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

- A. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$. B. $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$. C. $y = \sqrt{x^2 - 1}$. **D. $y = \frac{x}{x + 1}$.**

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x+1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 34: (Mã 101, Năm 2018) Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

- A. 3. B. 2. C. 0. **D. 1.**

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số: $D = [-9; +\infty) \setminus \{0; -1\}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = -\infty$.

\Rightarrow TCD: $x = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{(x^2+x)(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{1}{6}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{(x^2+x)(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{1}{6}.$$

$\Rightarrow x = 0$ không là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Câu 35: (Mã 102, Năm 2018) Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

- A. 3. B. 0. C. 2. **D. 1.**

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số: $D = [-4; +\infty) \setminus \{0; -1\}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0} y = \frac{1}{4}$.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = -\infty$$

\Rightarrow TCD: $x = -1$.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Câu 36: (Mã 103, Năm 2018) Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+x}$ là

- A. 2. B. 0. **C. 1.** D. 3.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = [-25; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$. Biến đổi $f(x) = \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+25}+5)}$.

Vì $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+25}+5)} = +\infty$ nên đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng

$x = -1$.

Câu 37: (Mã 104, Năm 2018) Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ là

- A. 0. B. 3. C. 2. **D. 1.**

Lời giải

Chọn D

Tập xác định hàm số $D = [-16; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x+1)(\sqrt{x+16}+4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+16}+4)} = \frac{1}{8}.$$

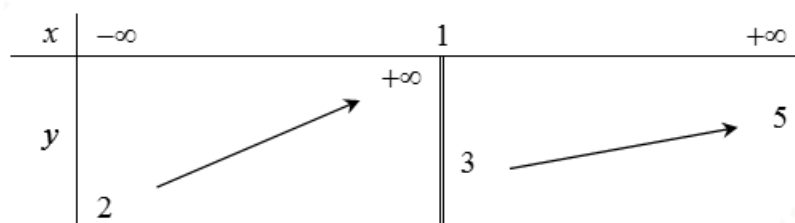
$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+16}+4)} = +\infty.$$

vì $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (\sqrt{x+16}+4) = \sqrt{15}+4 > 0$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+1) = 0$ và $x \rightarrow (-1)^+$ thì $x > -1 \Rightarrow x+1 > 0$.

$$\text{Tương tự } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+16}+4)} = -\infty.$$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là $x = -1$.

Câu 38: (Đề minh họa, Năm 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn C

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5 \Rightarrow$ đường thẳng $y = 5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \Rightarrow$ đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

KL: Đồ thị hàm số có tổng số ba đường tiệm cận.

Câu 39: (Mã 101, Năm 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-	-	0	+
y	2	$+\infty$	-2	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bản biến thiên ta có

$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là 2.

Câu 40: (Mã 102, Năm 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-	-	0	+
y	0	2	-2	$+\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ đồ thị hàm số không tồn tại tiệm cận ngang khi $x \rightarrow +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang $y = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = 0$.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và ngang là 2.

Câu 41: (Mã 103, Năm 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
y'	-		- 0 +	
y	1 ↘ -∞	2 ↘ -3	↗ 3	

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 3 \Rightarrow y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là 3.

Câu 42: (Mã 104, Năm 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
y'	-		- 0 +	
y	0 ↘ -4	+∞ ↘ -3	↗ 3	

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 3 \Rightarrow y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là 3.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM
ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG. XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TIỆM CẬN THÔNG QUA BẢNG BIẾN THIÊN, ĐỒ THỊ

1.1.1 Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn. Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$

1.1.2 Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

Lưu ý: Với đồ thị hàm phân thức dạng $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0$; $ad - bc \neq 0$) luôn có tiệm cận ngang là

$$y = \frac{a}{c} \text{ và tiệm cận đứng } x = -\frac{d}{c}.$$

Câu 1: Cho hàm số có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	$+$	$-$	$+$	
y	-4	$+\infty$	2	$-\infty$	-1

Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	1	3

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

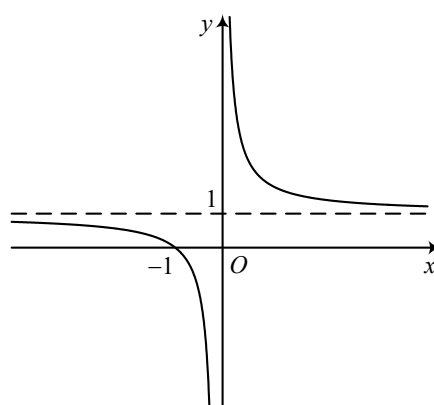
Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	-5	1	-5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4 B. 2 C. 3 D. 1

Câu 4: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$, tiệm cận ngang $y = 1$.
 B. Hàm số có hai cực trị.
 C. Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.
 D. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$
y	0	2	3	5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+		+	
y	2		$+\infty$		2
			$-\infty$		

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2		0		$+\infty$
y'		-		+		-
y	$+\infty$		1		$+\infty$	0
			$-\infty$			

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho bằng

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
y'		-	0	+		+
y	1		$-\sqrt{2}$		$+\infty$	
					$-\infty$	-1

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến như sau:

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
y'		+		+		+	
y	0		$+\infty$		$+\infty$		0
			$-\infty$		$-\infty$		

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là:

- A. 3 B. 1. C. 4. D. 2.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-	-
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỒ THỊ HÀM SỐ THÔNG HÀM SỐ CHO TRƯỚC

1 Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x)$ có TXD: D

Điều kiện cần: D phải chứa $+\infty$ hoặc $-\infty$

Điều kiện đủ:

Dạng 1. $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Nếu $\deg P(x) > \deg Q(x)$: thì không có tiệm cận ngang

Nếu $\deg P(x) = \deg Q(x)$: TCN $y = 0$

Nếu $\deg P(x) < \deg Q(x)$: $y = k$

Dạng 2: $y = f(x) = u - \sqrt{v}$: Nhân liên hợp $\Rightarrow y = f(x) = \frac{u^2 - v}{u + \sqrt{v}}$

2 Đường tiệm cận đứng

Cho hàm số $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ có TXD: D

Điều kiện cần: giải $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ là TCD khi thỏa mãn đk đủ

Điều kiện đủ:

Điều kiện 1: x_0 làm cho $P(x)$ và $Q(x)$ xác định.

Điều kiện 2: - x_0 không phải nghiệm $P(x) \Rightarrow x = x_0$ là TCD

- x_0 là nghiệm $P(x) \Rightarrow x = x_0$ là TCD nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

Câu 11: Đồ thị hàm số $y = \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 3 B. 0 C. 2 D. 1

Câu 12: Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$.

- A. $x = 3$ và $x = 2$. B. $x = 3$. C. $x = -3$ và $x = -2$. D. $x = -3$.

Câu 13: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

- Câu 14:** Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?
- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.
- Câu 15:** Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}$ là?
- A. 1 B. 3 C. 2 D. 4
- Câu 16:** Cho hàm số $y = \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?
- A. 4. B. 5. C. 3. D. 6.
- Câu 17:** Hàm số $y = \frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x^3+x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?
- A. 1 B. 3 C. 2 D. 4
- Câu 18:** Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}$ là
- A. 4 B. 1 C. 3 D. 2
- Câu 19:** Cho hàm số $y = \frac{5\sqrt{x^2+6}+x-12}{4x^3-3x-1}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?
- A. Đồ thị (C) của hàm số không có tiệm cận.
 B. Đồ thị (C) của hàm số chỉ có một tiệm cận ngang $y = 0$.
 C. Đồ thị (C) của hàm số có một tiệm cận ngang $y = 0$ và hai tiệm cận đứng $x = 1; x = -\frac{1}{2}$.
 D. Đồ thị (C) của hàm số chỉ có một tiệm cận ngang $y = 0$ và một tiệm cận đứng $x = 1$
- Câu 20:** Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?
- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.
- Câu 21:** Đồ thị hàm số $y = \frac{1-\sqrt{4-x^2}}{x^2-2x-3}$ có số đường tiệm cận đứng là m và số đường tiệm cận ngang là n . Giá trị của $m+n$ là
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0
- Câu 22:** Gọi n, d lần lượt là số đường tiệm cận ngang và số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. $n = 0, d = 2$. B. $n = d = 1$. C. $n = 1, d = 2$. D. $n = 0, d = 1$.
- Câu 23:** Đồ thị hàm số $y = \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 24:** Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$.

D. 0.

Câu 25: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

D. 6.

Câu 26: Đồ thị hàm số $y = \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

D. 3.

Câu 27: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-6x+2m}}$ có hai đường tiệm cận đứng. Số phần tử của S là

D. 13.

Câu 28: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-8x+m}$ có 3 đường tiệm cận?

D. 16.

Câu 29: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

D. 4037.

Câu 30: Có bao nhiêu số nguyên của m thuộc đoạn $[-100; 100]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{(x-m)\sqrt{2x-x^2}}$ có đúng hai đường tiệm cận?

D. 0.

Câu 31: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng hai đường tiệm cận.

D. $m \in \{-1; -4\}$

Câu 32: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = \frac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$ có đúng một đường tiệm cận?

D. Vô số.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 2mx + 4}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị có ba đường tiệm cận

- A. $m > 2$ B. $\begin{cases} m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$ C. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$ D. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$

Câu 34: Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \frac{(n-3)x + n - 2017}{x + m + 3}$ (m, n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m + n$.

- A. 0 B. -3 C. 3 D. 6

Câu 35: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{mx^2 - 8x + 2}}$ có đúng bốn đường tiệm cận?

- A. 8 B. 6 C. 7 D. Vô số

Câu 36: Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$ có tiệm cận ngang.

- A. $m = 1$ B. $m = -1$ C. $m = \pm 1$ D. Không có m

Câu 37: Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$. Tìm a, b để đồ thị hàm số có $x = 1$ là tiệm cận đứng và $y = \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

- A. $a = -1; b = 2$. B. $a = 4; b = 4$. C. $a = 1; b = 2$. D. $a = -1; b = -2$.

Câu 38: Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-10; 10]$ sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{2x^2 + 6x - m - 3}$ có hai đường tiệm cận đứng?

- A. 19. B. 15. C. 17. D. 18.

Câu 39: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 4}}{x + 2}$ bằng 3?

- A. 4. B. 2. C. Vô số. D. 3.

Câu 40: Tổng các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x-1}{x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 2}$ có đúng một tiệm cận đứng.

- A. $-\frac{1}{2}$. B. 2. C. -3. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 41: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6; 6]$ của tham số m để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận?

- A. 12. B. 9. C. 8. D. 11.

- Câu 42:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x + m}{x - m}$ không có tiệm cận đứng.
- A. $m = 1$. B. $m > 1$. C. $m = 1$ và $m = 0$. D. $m \neq 0$.
- Câu 43:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2017; 2017]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - 4x + m}}$ có hai tiệm cận đứng.
- A. 2019. B. 2021. C. 2018. D. 2020.
- Câu 44:** Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2019m$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2020m^4$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có duy nhất một tiệm cận ngang?
- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.
- Câu 45:** Cho hàm số $y = \frac{1}{[x^2 - (2m+1)x + 2m]\sqrt{x-m}}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.
- A. $\begin{cases} 0 < m < 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$. B. $\begin{cases} m < 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$. C. $m > 1$. D. $\begin{cases} 0 \leq m \leq 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$.
- Câu 46:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = \frac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$ có đúng 1 đường tiệm cận?
- A. 0. B. 2. C. 1. D. Vô số.
- Câu 47:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x + \sqrt{mx^2 + 1}$ có tiệm cận ngang.
- A. $0 < m < 1$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. $m > 1$.
- Câu 48:** Cho hàm số $y = \frac{x-2}{mx^2-2x+4}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận?
- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.
- Câu 49:** Gọi S là tập các giá trị nguyên của m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{2019x}{\sqrt{17x^2-1-m}|x|}$ có bốn đường tiệm cận. Tính số phần tử của tập S .
- A. Vô số B. 3 C. 5 D. 4
- Câu 50:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3+mx+1} - \sqrt[3]{x^4+x+1+m^2x}}$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó tổng các phần tử của S bằng
- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $-\frac{1}{3}$.

- Câu 51:** Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}$ có đúng ba đường tiệm cận?
A. 12. **B.** 11. **C.** 0. **D.** 10.
- Câu 52:** Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019;2019]$ của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}$ có đúng hai đường tiệm cận.
A. 2007. **B.** 2010. **C.** 2009. **D.** 2008.
- Câu 53:** Cho hàm số $y = \frac{x-1}{mx^2-2x+3}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận.
A. 2 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 1
- Câu 54:** Cho hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x^3-3x^2+m-1}}$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 4 đường thẳng tiệm cận.
A. $1 < m < 5$. **B.** $-1 < m < 2$. **C.** $m < 1$ hoặc $m > 5$. **D.** $m > 2$ hoặc $m < -1$.
- Câu 55:** Hàm số $y = \frac{\sqrt{3x+1}+ax+b}{(x-1)^2}$ không có tiệm cận đứng. Khi đó hiệu $a-b$ bằng:
A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{3}{4}$. **C.** $-\frac{5}{4}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.
- Câu 56:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{-x^2+2016x+2017}-24\sqrt{7}}{x-m}$ có tiệm cận đứng?
A. vô số. **B.** 2. **C.** 2017 **D.** 2019.
- Câu 57:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1+m^2x}}$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó tổng các phần tử của S bằng
A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.
- Câu 58:** Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}$ có đúng ba đường tiệm cận?
A. 12. **B.** 11. **C.** 0. **D.** 10.
- Câu 59:** Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}$ có đúng một đường tiệm cận.
A. $-1 \leq m < 0$. **B.** $-1 \leq m \leq 0$. **C.** $m < -1$. **D.** $m > 0$.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM
ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG. XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TIỆM CẬN THÔNG QUA BẢNG BIẾN THIÊN, ĐỒ THỊ

1.1.1 Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn. Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$

1.1.2 Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

Lưu ý: Với đồ thị hàm phân thức dạng $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0$; $ad - bc \neq 0$) luôn có tiệm cận ngang là

$$y = \frac{a}{c} \text{ và tiệm cận đứng } x = -\frac{d}{c}.$$

Câu 1: Cho hàm số có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	$+$	$-$	$+$	
y	-4	$+\infty$	2	$-\infty$	-1

Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -4$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -1 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y = -1$ và $y = -4$.

$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = -\infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

Nên đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	3

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ ta được tiệm cận ngang $y = 3$

$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = +\infty$ ta được tiệm cận đứng $x = -2$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	-5	1	-5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4 B. 2 C. 3 D. 1

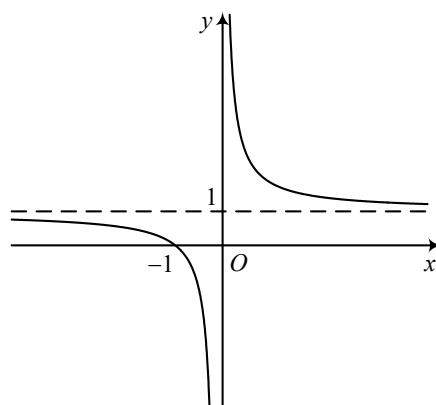
Lời giải

Từ bảng biến thiên ta có:

+ Tiệm cận ngang $y = -5$

+ Tiệm cận đứng $x = 2$.

Câu 4: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$, tiệm cận ngang $y = 1$.

B. Hàm số có hai cực trị.

C. Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.

D. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y	0	2	$-\infty$	5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ là một tiệm cận ngang

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5 \Rightarrow y = 5$ là một tiệm cận ngang

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 1$ là một tiệm cận đứng

Vậy đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận là 3.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	$-\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ là một tiệm cận ngang

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 1$ là một tiệm cận đứng

Vậy đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận là 2.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'	-	+	-	
y	$+\infty$	1	$-\infty$	0

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho bằng

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Ta có

$\lim_{x \rightarrow -2^+} y = -\infty \Rightarrow x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = +\infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tổng đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là 3.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$+$
y	1	$-\sqrt{2}$	$+\infty$	-1

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Do $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty \Rightarrow$ TCD: $x = 1$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1 \Rightarrow$ đồ thị có 2 tiệm cận ngang là $y = \pm 1$

Vậy, đồ thị hàm số đã cho có tổng số TCD và TCN là 3.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến như sau:

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
y'	$+$	$+$	$+$	$+$
y	0	$+\infty$	$+\infty$	0

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là:

A. 3

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên của hàm số ta có:

CHUYÊN ĐỀ I – GIẢI TÍCH 12 - ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

+ $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang.

+ $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} y = -\infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = -3$ là tiệm cận đứng.

+ $\lim_{x \rightarrow 3^-} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} y = -\infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng.

Vậy số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là 3.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-	-
$f(x)$	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chon C

Ta có:

□ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$

•

□ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ nên đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận ngang khi $x \rightarrow +\infty$.

□ $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

□ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là 3 tiệm cận.

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TIÊM CÂN ĐỒ THỊ HÀM SỐ THÔNG HÀM SỐ CHO TRƯỚC

1 Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x)$ có TXD: D

Điều kiện cần: D phải chứa $+\infty$ hoặc $-\infty$

Điều kiện đủ:

Dạng 1. $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Nếu $\deg P(x) > \deg Q(x)$: thì không có tiệm cận ngang

Nếu $\deg P(x) > \deg Q(x)$: TCN $y = 0$

Nếu $\deg P(x) = \deg Q(x): y = k$

Dạng 2: $y = f(x) = u - \sqrt{v}$: Nhân liên hợp $\Rightarrow y = f(x) = \frac{u^2 - v}{u + \sqrt{v}}$

2 Đường tiệm cận đứng

Cho hàm số $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ có TXD: D

Điều kiện cần: giải $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ là TCD khi thỏa mãn đk đủ

Điều kiện đủ:

Điều kiện 1: x_0 làm cho $P(x)$ và $Q(x)$ xác định.

Điều kiện 2: - x_0 không phải nghiệm $P(x) \Rightarrow x = x_0$ là TCD

- x_0 là nghiệm $P(x) \Rightarrow x = x_0$ là TCD nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

Câu 11: Đồ thị hàm số $y = \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3

B. 0

C. 2

D. 1

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = [-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} - \sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}}{1 + \frac{2}{x}} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ là đường tiệm cận ngang}$$

của đồ thị hàm số.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(5x+1)^2 - x - 1}{(x^2+2x)(5x+1+\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{25x^2+9x}{(x^2+2x)(5x+1+\sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{25x+9}{(x-2)(5x+1+\sqrt{x+1})} = \frac{-9}{4}$$

$\Rightarrow x = 0$ **không** là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 1 đường tiệm cận.

Câu 12: Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$.

A. $x = 3$ và $x = 2$.

B. $x = 3$.

C. $x = -3$ và $x = -2$.

D. $x = -3$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x-1)^2 - (x^2+x+3)}{(x^2-5x+6)(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})} \\&= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x-1)^2 - (x^2+x+3)}{(x^2-5x+6)(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})} \\&= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(3x+1)}{(x-3)(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})} = -\frac{7}{6}\end{aligned}$$

Tương tự $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = -\frac{7}{6}$. Suy ra đường thẳng $x = 2$ **không** là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = -\infty$. Suy ra đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 13: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

- A.** 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

TXĐ: $D = [-4; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = -\infty$

Nên đường thẳng $x = -1$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(x+1)(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{4}$$

Nên đường thẳng $x = 0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng $x = -1$.

Câu 14: Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

- A.** 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

$$\text{TH1: } x < -1 \Rightarrow x+1 < 0. \text{ Khi đó } f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{-\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Suy ra hàm số TCN $y = -1$, không có TCD.

$$\text{TH2: } x > 1 \Rightarrow x+1 > 0. \text{ Khi đó } f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Suy ra hàm số TCN $y = 1$, TCD $x = 1$.

Vậy hàm số có 2 TCN và 1 TCN

- Câu 15:** Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x(4x+6)} - 2}{x+2}$ là?
- A. 1 B. 3 C. 2 D. 4

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x(4x+6)} - 2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{6}{x}} - \frac{2}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x(4x+6)} - 2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4 + \frac{6}{x}} - \frac{2}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^{\pm}} \frac{\sqrt{x(4x+6)} - 2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^{\pm}} \frac{(x+2)(4x-2)}{(x+2)(\sqrt{x(4x+6)} + 2)} = \lim_{x \rightarrow -2^{\pm}} \frac{4x-2}{\sqrt{x(4x+6)} + 2} = \frac{-5}{2}$$

Vậy hàm số có hai tiệm cận ngang $y = \pm 2$.

- Câu 16:** Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?
- A. 4. B. 5. C. 3. D. 6.

Lời giải

Điều kiện: $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-1; 1) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

$$\text{Do } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^4}}} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ là đường tiệm cận}$$

ngang của đồ thị hàm số.

Có $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng.

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x+1)(x+2)}{\sqrt{(x+1)(x+\sqrt{2})(x-1)(x-\sqrt{2})}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{(x+1)(x+2)}}{\sqrt{(x+\sqrt{2})(x-1)(x-\sqrt{2})}} = 0 \text{ nên}$$

đường thẳng $x = -1$ không là đường tiệm cận đứng.

Có $\lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^+} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = \sqrt{2}$ là đường tiệm cận đứng.

Có $\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^-} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = -\sqrt{2}$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận (1 tiệm cận ngang, 3 tiệm cận đứng).

Câu 17: Hàm số $y = \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x^3 + x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1

B. 3

C. 2

D. 4

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = 0$$

\Rightarrow TCN: $y = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty \Rightarrow$ TCD: $x = 0$.

Câu 18: Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}$ là

A. 4

B. 1

C. 3

D. 2

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đkxđ: } \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x^2-3x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 2, x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2} \right) = +\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2} \right) = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 19: Cho hàm số $y = \frac{5\sqrt{x^2+6}+x-12}{4x^3-3x-1}$ có đồ thị (C) . Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. Đồ thị (C) của hàm số không có tiệm cận.

B. Đồ thị (C) của hàm số chỉ có một tiệm cận ngang $y = 0$.

C. Đồ thị (C) của hàm số có một tiệm cận ngang $y = 0$ và hai tiệm cận đứng $x = 1; x = -\frac{1}{2}$.

D. Đồ thị (C) của hàm số chỉ có một tiệm cận ngang $y = 0$ và một tiệm cận đứng $x = 1$

Lời giải

Chọn D

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{1; -\frac{1}{2}\right\}$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một TCD là $x = 1$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một TCN là $y = 0$

Câu 20: Đồ thị hàm số $y = \frac{2x + \sqrt{x^2 - x}}{3x + 1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y = \frac{2x + \sqrt{x^2 - x}}{3x + 1}$ có tập xác định $D = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty) \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}^-} \frac{2x + \sqrt{x^2 - x}}{3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}^-} \frac{3x^2 + x}{(3x + 1)(2x - \sqrt{x^2 - x})} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}^-} \frac{x}{2x - \sqrt{x^2 - x}} = \frac{1}{4};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x + \sqrt{x^2 - x}}{3x + 1} = 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + \sqrt{x^2 - x}}{3x + 1} = \frac{1}{2} \text{ nên đồ thị không có tiệm cận đứng.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - x}}{3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{2x - x\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{2 - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{3},$$

$$\text{và } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - x}}{3x + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{2x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{3x + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{2 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{3 + \frac{1}{x}} = 1 \text{ nên đồ thị có hai tiệm cận ngang}$$

là $y = \frac{1}{3}$ và $y = 1$.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả hai đường tiệm cận.

Câu 21: Đồ thị hàm số $y = \frac{1 - \sqrt{4 - x^2}}{x^2 - 2x - 3}$ có số đường tiệm cận đứng là m và số đường tiệm cận ngang là n . Giá trị của $m + n$ là

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0

Lời giải

Chọn A

$$D = [-2; 2] \setminus \{-1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1 - \sqrt{4 - x^2}}{x^2 - 2x - 3} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{1 - \sqrt{4 - x^2}}{x^2 - 2x - 3} = -\infty$$

$\Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang.

Vậy $m + n = 1$.

Câu 22: Gọi n, d lần lượt là số đường tiệm cận ngang và số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}. \text{ Khẳng định nào sau đây là đúng?}$$

A. $n = 0, d = 2$.

B. $n = d = 1$.

C. $n = 1, d = 2$.

D. $n = 0, d = 1$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = (0; 1)$.

Từ tập xác định suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang. $n = 0$.

$$+) \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{1-x}\sqrt{x}} = -\infty$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{\sqrt{1-x}\sqrt{x}} = -\infty$$

Suy ra đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng, $d = 2$.

Câu 23: Đồ thị hàm số $y = \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số là $D = [-1; 0) \cup (2; +\infty)$. Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{25x^2 + 9x}{(x^2 - 2x)(5x + 1 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{25x + 9}{(x-2)(5x + 1 + \sqrt{x+1})} = -\frac{9}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} - \sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}}{1 - \frac{2}{x}} = 0.$$

Vậy đồ thị của hàm số có hai đường tiệm cận có phương trình $x=2$ và $y=0$.

Câu 24: Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$.

- A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right) \setminus \{1\}$

$$+ \text{ Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(4\sqrt{3x+1}+3x+5)}{-9(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4\sqrt{3x+1}+3x+5}{-9(x-1)} = -\infty$$

do đó đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$+ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{4\sqrt{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-3-\frac{5}{x}} = -\frac{1}{3} \text{ do đó đường thẳng } y = -\frac{1}{3} \text{ là đường}$$

tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 25: Cho hàm số $y = \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A.** 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

□ Tập xác định $D = (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-1; 1) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

$$\square \lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^-} y = \lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (1)^-} y = +\infty.$$

\Rightarrow Các đường tiệm cận đứng của đồ thị là $x = \pm\sqrt{2}$, $x = \pm 1$.

$$\square \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1 \Rightarrow \text{đồ thị có một tiệm cận ngang } y = 1.$$

Câu 26: Đồ thị hàm số $y = \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A.** 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-8}{x\sqrt{1-\frac{3}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5-\frac{8}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}} = 5$$

\Rightarrow Đường thẳng $y=5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x-8}{-x\sqrt{1-\frac{3}{x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5-\frac{8}{x}}{-\sqrt{1-\frac{3}{x}}} = -5$$

\Rightarrow Đường thẳng $y = -5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = -\infty$$

Dạng 2: $y = f(x) = u - \sqrt{v}$: Nhân liên hợp $\Rightarrow y = f(x) = \frac{u^2 - v}{u + \sqrt{v}}$

2 Đường tiệm cận đứng

Cho hàm số $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ có TXĐ: D

Điều kiện cần: giải $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ là TCD khi thỏa mãn đk đủ

Điều kiện đủ:

Điều kiện 1: x_0 làm cho $P(x)$ và $Q(x)$ xác định.

Điều kiện 2: - x_0 không phải nghiệm $P(x) \Rightarrow x = x_0$ là TCD

- x_0 là nghiệm $P(x) \Rightarrow x = x_0$ là TCD nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

- Câu 27:** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-6x+2m}}$ có hai đường tiệm cận đứng. Số phần tử của S là
- A.** vô số. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 13.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2-6x+2m > 0 \end{cases}$$

Để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng thì phương trình $x^2-6x+2m=0$ có hai nghiệm

$$\text{phân biệt } x_1, x_2 \text{ lớn hơn } -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9-2m > 0 \\ x_1 + x_2 > -2 \\ (-2)^2 - 6 \cdot (-2) + 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{2} \\ 3 > -2 \\ 4+12+2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{2} \\ m > -8 \end{cases}$$

Do đó tập $S = \{-7; -6; -5; \dots; 4\}$ có 12 giá trị.

- Câu 28:** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-8x+m}$ có 3 đường tiệm cận?
- A.** 14. **B.** 8. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2-8x+m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2-8x+m} = 0$ nên hàm số có một tiệm cận ngang $y = 0$.

Hàm số có 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi hàm số có hai đường tiệm cận đứng \Leftrightarrow phương trình $x^2 - 8x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 16 - m > 0 \\ m - 7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 16 \\ m \neq 7 \end{cases}$.

Kết hợp với điều kiện m nguyên dương ta có $m \in \{1; 2; 3; \dots; 6; 8; \dots; 15\}$. Vậy có 14 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 29: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc

đoạn $[-2020; 2020]$ để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

A. 4039.

B. 4040.

C. 4038.

D. 4037.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận ngang.

Do đó đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi nó có 3 tiệm cận đứng (*).

Có $x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = (x - m)(x^2 - 2mx + 1)$

$$x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 - 2mx + 1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

(*) $\Leftrightarrow x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 3.

$\Leftrightarrow m \neq 3$ và (2) có 2 nghiệm phân biệt khác m và khác 3.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2 - 2m \cdot m + 1 \neq 0 \\ 3^2 - 2m \cdot 3 + 1 \neq 0 \\ \Delta'_2 = m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3, m \neq \frac{5}{3} \\ \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases} \end{cases}$$

Do đó tập tất cả giá trị nguyên của m thỏa ycbt là $\{-2020; -2019; \dots; -2; 2; 4; 5; \dots; 2020\}$.

Vậy có 4037 giá trị m thỏa ycbt.

Câu 30: Có bao nhiêu số nguyên của m thuộc đoạn $[-100; 100]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{(x-m)\sqrt{2x-x^2}}$

có đúng hai đường tiệm cận?

A. 200.

B. 2.

C. 199.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có điều kiện xác định là $\begin{cases} x \neq m \\ x \in (0; 2) \end{cases}$, khi đó đồ thị hàm số sẽ không có tiệm cận ngang.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \infty$

Suy ra $x = 0$, $x = 2$ là hai đường tiệm cận đứng

Vậy để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 2 \end{cases}$, theo bài m thuộc đoạn $[-100; 100]$

. Vậy có 200 số nguyên của m thỏa mãn đầu bài.

Câu 31: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. $m = -1$

B. $m \in \{1; 4\}$

C. $m = 4$

D. $m \in \{-1; -4\}$

Lời giải

$$y = \frac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x^2 + m}{(x-1)(x-2)}.$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng hai đường tiệm cận \Leftrightarrow đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng \Leftrightarrow pt $x^2 + m = 0$ nhận nghiệm $x = 1$ hoặc $x = 2$.

Khi đó: $\begin{cases} m = -1 \\ m = -4 \end{cases}.$

Với $m = -1$ có một tiệm cận đứng $x = 2$.

Với $m = -4$ có một tiệm cận đứng $x = 1$.

Vậy $m \in \{-1; -4\}$.

Câu 32: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = \frac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$ có đúng một đường tiệm cận?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

Kí hiệu (C) là đồ thị hàm số $y = \frac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}.$

* Trường hợp 1: $m = 0$.

Khi đó $y = \frac{6x-3}{(-6x+3)(9x^2+1)}$. Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Do đó chọn $m = 0$.

* Trường hợp 2: $m \neq 0$.

Xét phương trình $(mx^2 - 6x + 3)(9x^2 + 6mx + 1) = 0$ (1)

Nhận thấy: (C) luôn có một đường tiệm cận ngang $y = 0$ và phương trình (1) không thể có duy nhất một nghiệm đơn với mọi m .

Do đó (C) có đúng một đường tiệm cận khi và chỉ khi (C) không có tiệm cận đứng \Leftrightarrow (1) vô

$$\text{nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 3m < 0 \\ 9m^2 - 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ -1 < m < 1 \end{cases},$$

Kết hợp các trường hợp ta được $m = 0$.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 2mx + 4}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị có ba đường tiệm cận

- A. $m > 2$ B. $\begin{cases} m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$ C. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$ D. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Để đồ thị có ba đường tiệm cận thì $x^2 - 2mx + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\neq -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (-1)^2 - 2m(-1) + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}.$$

Câu 34: Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \frac{(n-3)x + n - 2017}{x + m + 3}$ (m, n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m + n$.

- A. 0 B. -3 C. 3 D. 6

Lời giải

Chọn A

Theo công thức tìm nhanh tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ta có

$$\text{Đồ thị hàm số nhận } x = -\frac{d}{c} = -m - 3 = 0 \text{ làm TCD} \Rightarrow m = -3$$

$$\text{Đồ thị hàm số nhận } y = \frac{a}{c} = n - 3 = 0 \text{ làm TCN} \Rightarrow n = 3.$$

Vậy $m + n = 0$.

Câu 35: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{mx^2 - 8x + 2}}$ có đúng bốn đường tiệm cận?

A. 8

B. 6

C. 7

D. Vô số

Lời giải

TH1: $m < 0$ suy ra tập xác định của hàm số là $D = (x_1; x_2)$, ($x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $mx^2 - 8x + 2 = 0$). Do đó $m < 0$ không thỏa yêu cầu của bài toán.

TH2: $m = 0 \Rightarrow y = \frac{x-1}{\sqrt{-8x+2}}$ suy ra tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; 4)$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 4^-} y = -\infty$. Khi đó ta có $x = -4$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Do đó $m = 0$ không thỏa yêu cầu của bài toán

TH3: $m > 0$ suy ra tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ ($x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $mx^2 - 8x + 2 = 0$). Do đó đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận khi phương trình $mx^2 - 8x + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác

$$1 \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 2m > 0 \\ m > 0; m \in \mathbb{Z} \\ m - 8 + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 8 \\ m > 0; m \in \mathbb{Z} \\ m \neq 6 \end{cases} \Rightarrow m = \{1; 2; 3; 4; 5; 7\}. \text{ Suy ra có tất cả 6 giá trị nguyên của}$$

tham số m thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Câu 36: Với giá trị nào của hàm số m để đồ thị hàm số $y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$ có tiệm cận ngang.

A. $m = 1$

B. $m = -1$

C. $m = \pm 1$

D. Không có m

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang

\Rightarrow Hàm số xác định trên một trong các miền $(-\infty; a), (-\infty; a], (a; +\infty)$ hoặc $[a; +\infty)$

$$m \geq 0$$

TH1: $m = 0 \Rightarrow y = x - \sqrt{-3x + 7}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ đồ thị không có tiệm cận ngang

TH2: $m > 0, y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$

Khi $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x \sqrt{m - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}} \right) = \frac{3}{2}$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi và chỉ khi $m = 1$.

Vậy $m = 1$

Cách trắc nghiệm:

Thay $m = 1 \Rightarrow y = x - \sqrt{x^2 - 3x + 7} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 3x + 7} \right) = \frac{3}{2}$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 3x + 7} \right) = -\infty$ không có tiệm cận ngang.

Thay $m = -1 \Rightarrow y = x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7} \right)$ không xác định.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7})$ không xác định.

Vậy $m = 1$

Câu 37: Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$. Tìm a, b để đồ thị hàm số có $x = 1$ là tiệm cận đứng và $y = \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

- A.** $a = -1; b = 2$. **B.** $a = 4; b = 4$. **C.** $a = 1; b = 2$. **D.** $a = -1; b = -2$.

Lời giải

Chọn C

+ $b = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{-2}$ không có tiệm cận.

+ $b \neq 0$, tập xác định của hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{b} \right\}$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax+1}{bx-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a + \frac{1}{x}}{b - \frac{2}{x}} = \frac{a}{b}.$$

\Rightarrow đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = 2a$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{b}^+} y = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{b}^+} \frac{ax+1}{bx-2} = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}.$$

\Rightarrow đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = \frac{2}{b} \Rightarrow \frac{2}{b} = 1 \Leftrightarrow b = 2 \Rightarrow a = 1$.

Vậy $a = 1; b = 2$.

Câu 38: Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-10; 10]$ sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{2x^2+6x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng?

- A.** 19. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn C

Ta có đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{2x^2+6x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng khi phương trình

$$2x^2 + 6x - m - 3 = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^2 - 2(-m-3) > 0 \\ 2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{15}{2} \\ m \neq 5 \end{cases}$$

Từ đó ta suy ra tập các giá trị nguyên của m thỏa mãn là

$\{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Vậy có 17 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 39: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ bằng 3?

- A.** 4. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 4}}{x + 2}$ có nhiều nhất một tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.

Điều kiện để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 4}}{x + 2}$ có 3 tiệm cận là nó có đúng 1 tiệm cận đứng và 2 tiệm cận ngang.

* Xét điều kiện tồn tại $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$

Trường hợp 1: $g(x) = mx^2 + 3mx + 4 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m > 0 \\ \Delta = 9m^2 - 16m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{16}{9}$

Trường hợp 2: $g(x) = mx^2 + 3mx + 4 \geq 0$ với $\forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ với $x_1; x_2$ là nghiệm

của $g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta = 9m^2 - 16m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{16}{9}$

Vậy $m \geq 0$ thì tồn tại $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$

Khi đó:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 4}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{m + \frac{3m}{x} + \frac{4}{x^2}}}{1 + \frac{2}{x}} = \sqrt{m}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 4}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{m + \frac{3m}{x} + \frac{4}{x^2}}}{1 + \frac{2}{x}} = -\sqrt{m}$$

Vậy điều kiện để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $m > 0$

* Xét trường hợp $x = -2$ là nghiệm của tử số $\Rightarrow x = -2$ là nghiệm của $g(x) = mx^2 + 3mx + 4$

$$\Rightarrow g(-2) = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$\text{Khi đó } y = \frac{\sqrt{2x^2 + 6x + 4}}{x + 2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} y = \frac{\sqrt{2(x+1)(x+2)}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \left[-\sqrt{\frac{2(x+1)}{x+2}} \right] = -\infty$$

\Rightarrow Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x = -2$.

$\Rightarrow m = 2$ thỏa mãn

* Xét trường hợp $x = -2$ không là nghiệm của tử số, để $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị

$$\text{hàm số thì } \begin{cases} g(-2) \neq 0 \\ g(-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow g(-2) > 0 \Leftrightarrow 4 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < 2$$

\Rightarrow đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x = -2$ với $\forall m \in (0; 2]$

Vậy điều kiện để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 4}}{x + 2}$ có 3 tiệm cận là $\forall m \in (0; 2]$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài là $m = 1; m = 2$.

Câu 40: Tổng các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. $-\frac{1}{2}$.

B. 2.

C. -3.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x) = x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 2$

Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng khi và chỉ khi $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x = 1$ hoặc $f(x) = 0$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(1) = 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - (m^2-2) > 0 \\ 1 + 2(m-1) + m^2 - 2 = 0 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m = 1; m = -3 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy tổng các giá trị m thỏa mãn là: $-\frac{1}{2}$.

Câu 41: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6;6]$ của tham số m để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận?

A. 12.

B. 9.

C. 8.

D. 11.

Lời giải

Chọn B

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.

Do đó, đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận khi phương trình $x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $x \neq 3$.

Xét phương trình $x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = 0$ ta có

$$x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = 0 \Leftrightarrow (x-m)(x^2 - 2mx + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 - 2mx + 1 = 0 \end{cases}.$$

Phương trình có ba nghiệm phân biệt $x \neq 3$ khi và chỉ khi $m \neq 3$ và phương trình

$$x^2 - 2mx + 1 = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x \neq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2 - 1 > 0 \\ 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m > 1 \\ m < -1 \\ m \neq \frac{5}{3} \end{cases}.$$

Do m nguyên và $m \in [-6; 6]$ nên $m \in \{-6; -5; -4; -3; -2; 2; 4; 5; 6\}$.

Vậy có 9 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

- Câu 42:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x + m}{x - m}$ không có tiệm cận đứng.
- A.** $m = 1$. **B.** $m > 1$. **C.** $m = 1$ và $m = 0$. **D.** $m \neq 0$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ $\mathbb{R} \setminus \{m\}$.

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow m} \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m} = \lim_{x \rightarrow m} \left(2x + 2m - 3 + \frac{2m^2 - 2m}{x - m} \right).$$

Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì phải tồn tại $\lim_{x \rightarrow m} \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$,

$$\Rightarrow 2m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

Vậy đáp án **C**.

- Câu 43:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2017; 2017]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - 4x + m}}$ có hai tiệm cận đứng.
- A.** 2019. **B.** 2021. **C.** 2018. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn D

Để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - 4x + m}}$ có hai tiệm cận đứng thì phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ 12 + m \neq 0 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2017 \leq m < 4 \\ m \neq -12 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2017; -2016; \dots; 3\} \setminus \{-12\}.$$

Do đó số giá trị nguyên của tham số m thỏa đề bài là: $3 - (-2017) + 1 - 1 = 2020$ giá trị.

- Câu 44:** Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2019m$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2020m^4$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có duy nhất một tiệm cận ngang?
- A.** 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có duy nhất một tiệm cận ngang

$$\Leftrightarrow 2019m = 2020m^4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \sqrt[3]{\frac{2019}{2020}} \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa bài toán

Câu 45: Cho hàm số $y = \frac{1}{[x^2 - (2m+1)x + 2m]\sqrt{x-m}}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

- A.** $\begin{cases} 0 < m < 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} m < 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$ **C.** $m > 1$. **D.** $\begin{cases} 0 \leq m \leq 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x > m$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\text{Xét phương trình } [x^2 - (2m+1)x + 2m]\sqrt{x-m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 - (2m+1)x + 2m = 0 (*) \end{cases}$$

Để hàm số có 4 đường tiệm cận thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt $m < x_1 < x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 > 0 \\ (x_1-m)(x_2-m) > 0 \\ x_1+x_2 > 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ x_1x_2 - m(x_1+x_2) - m^2 > 0 \\ 2m+1 > 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ m-m^2 > 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ 0 < m < 1 \end{cases}$$

Câu 46: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = \frac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$ có đúng

1 đường tiệm cận?

- A.** 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x) = mx^2 - 6x + 3$ và $g(x) = 9x^2 + 6mx + 1$. Ta xét các trường hợp:

+ Trường hợp 1: $m = 0$ khi đó ta có $y = \frac{6x-3}{(-6x+3)(9x^2+1)}$ đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận

ngang là đường thẳng $y = 0$ do đó $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Trường hợp 2: $m \neq 0$ và cả hai tam thức $f(x)$ và $g(x)$ đều vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_f < 0 \\ \Delta'_g < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9-3m < 0 \\ 9m^2-9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ -1 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

+ Trường hợp 3: Tam thức $g(x)$ nhận $x = \frac{1}{2}$ làm nghiệm $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{13}{12}$ khi đó $f(x)$

luôn có 2 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số đã cho có nhiều hơn 1 đường tiệm cận.

Vậy có 1 giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = \frac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$ có đúng 1

đường tiệm cận

Câu 47: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x + \sqrt{mx^2 + 1}$ có tiệm cận ngang.

- A. $0 < m < 1$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. $m > 1$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện cần và đủ để đồ thị hàm số: $y = x + \sqrt{mx^2 + 1}$ có tiệm cận ngang là tồn tại số thực k

sao cho:
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{mx^2 + 1}) = k \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{mx^2 + 1}) = k \end{cases}$$

Hiển nhiên nếu $m \leq 0$ thì giới hạn $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x + \sqrt{mx^2 + 1})$ không hữu hạn

Nếu $m > 0$ ta có

$$+ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{mx^2 + 1}) = +\infty.$$

$$+ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{mx^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1-m)-1}{x-\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1-m) - \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{m + \frac{1}{x^2}}}$$

Để giới hạn trên hữu hạn khi và chỉ khi $m=1$.

Câu 48: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{mx^2-2x+4}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận?

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải

Chọn D

Với $m = 0$; ta có hàm số $y = \frac{x-2}{-2x+4} = -2 \Rightarrow$ Không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m \neq 0$, ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{mx^2-2x+4} = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận \Leftrightarrow đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow mx^2 - 2x + 4 = 0$ có nghiệm duy nhất hoặc $mx^2 - 2x + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x = 2$.

$$mx^2 - 2x + 4 = 0 \text{ có nghiệm duy nhất} \Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 1 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}.$$

$mx^2 - 2x + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x = 2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 4m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{4} \\ m = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0 \text{ không thỏa mãn điều kiện.}$$

Vậy chỉ có một giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 49: Gọi S là tập các giá trị nguyên của m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{2019x}{\sqrt{17x^2 - 1} - m|x|}$ có bốn đường tiệm cận. Tính số phần tử của tập S .

A. Vô số

B. 3

C. 5

D. 4

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{2019}{m - \sqrt{17}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{2019}{\sqrt{17} - m}.$$

Với $m \neq \sqrt{17}$ thì đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y = \frac{2019}{m - \sqrt{17}}$, $y = \frac{2019}{\sqrt{17} - m}$.

Khi đó đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi phương trình

$$\sqrt{17x^2 - 1} - m|x| = 0 \quad (1) \quad \text{có hai nghiệm phân biệt khác 0.}$$

$$\text{Ta có: } (1) \Leftrightarrow \sqrt{17x^2 - 1} = m|x| \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ 17x^2 - 1 = m^2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ (17 - m^2)x^2 = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khác 0 khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm phân

$$\text{biệt khác 0} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ 17 - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < \sqrt{17}.$$

Suy ra $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Câu 50: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3 + mx + 1} - \sqrt[3]{x^4 + x + 1 + m^2x}}$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó tổng các phần tử của S bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sqrt{x^3 + mx + 1} - \sqrt[3]{x^4 + x + 1 + m^2x}}{x}}.$$

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 + mx + 1} - \sqrt[3]{x^4 + x + 1 + m^2x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{x^3 + mx + 1} - 1}{x} - \frac{\sqrt[3]{x^4 + x + 1} - 1}{x} + \frac{m^2x}{x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^3 + mx}{x(\sqrt{x^3 + mx + 1} + 1)} - \frac{x^4 + x}{x(\sqrt[3]{(x^4 + x + 1)^2} + \sqrt[3]{x^4 + x + 1} + 1)} + m^2 \right].$$

Đồ thị hàm số $f(x)$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(x^2 + m)}{(\sqrt{x^3 + mx + 1} + 1)} - \frac{(x^3 + 1)}{\sqrt[3]{(x^4 + x + 1)^2} + \sqrt[3]{x^4 + x + 1} + 1} + m^2 \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{2} - \frac{1}{3} + m^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow 6m^2 + 3m - 2 = 0 \text{ Vậy } m_1 + m_2 = -\frac{1}{2}.$$

Câu 51: Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-10; 10)$ để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x(x-m)} - 1}{x+2}$

có đúng ba đường tiệm cận?

A. 12.

B. 11.

C. 0.

D. 10.

Lời giải

Chọn A

Xét $g(x) = \sqrt{x(x-m)} - 1$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x(x-m)} - 1}{x+2} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x(x-m)} - 1}{x+2} = -1$. Nên đồ thị hàm số luôn có hai đường tiệm cận ngang $y = 1$ và $y = -1$.

Trường hợp 1: $m = 0$ khi đó hàm số là $y = \frac{|x| - 1}{x+2}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -2$.

Vậy $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Trường hợp 2: $m > 0$. Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $D = (-\infty; 0] \cup [m; +\infty)$.

$x = -2 \in D$. $g(-2) = \sqrt{2(m+2)} - 1 \neq 0$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Vậy $m = 1, m = 2, \dots, m = 9$ thỏa mãn. Nên có 9 giá trị m .

Trường hợp 3: $m < 0$. Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $D = (-\infty; m] \cup [0; +\infty)$.

Để $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì trước hết $x = -2 \in D$ hay $m \geq -2$. Nên chỉ có $m = -2, m = -1$ thỏa mãn

Với $m = -1$ ta có $g(x) = \sqrt{x(x+1)} - 1$, $g(-2) = \sqrt{2} - 1 \neq 0$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Với $m = -2$ ta có $g(x) = \sqrt{x(x+2)} - 1$, $g(-2) = \sqrt{x(x+2)} - 1 = -1 \neq 0$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy 12 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu.

Câu 52: Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}$

có đúng hai đường tiệm cận.

A. 2007.

B. 2010.

C. 2009.

D. 2008.

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x^2+x \neq m \end{cases}$.

Dựa vào điều kiện xác định ta suy ra hàm số đã cho không có giới hạn khi $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m} = 0, \forall m.$$

$\Rightarrow y = 0$ là pt đường tiệm cận ngang.

Xét hàm số $f(x) = x^2 + x$.

$$f'(x) = 2x + 1; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	12	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Khi $m < 12$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Khi $m \geq 12$ thì đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Do đó để hàm số có đúng 2 đường tiệm cận thì $m \in [12; 2019]$.

Vậy có 2008 giá trị nguyên của m .

Câu 53: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{mx^2-2x+3}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận.

A. 2

B. 3

C. 0

D. 1

Lời giải

Chọn B

Nhận xét:

+ $f(x) = mx^2 - 2x + 3$ có bậc ≥ 1 nên đồ thị hàm số luôn có 1 tiệm cận ngang.

+ Do đó: Yêu cầu bài toán 9 đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng.

+ $m = 0$, đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x = \frac{3}{2} \Rightarrow m = 0$ thỏa bài toán.

+ $m \neq 0$, đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $mx^2 - 2x + 3 = 0$

có nghiệm kép hoặc nhận $x = 1$ làm nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_f = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ m = -1 \end{cases}$

+ KL: $m \in \left\{0; \frac{1}{3}; -1\right\}$.

Câu 54: Cho hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + m - 1}}$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 4 đường thẳng tiệm cận.

A. $1 < m < 5$.

B. $-1 < m < 2$.

C. $m < 1$ hoặc $m > 5$. D. $m > 2$ hoặc $m < -1$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + m - 1}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + m - 1}}$ không tồn tại. Suy ra $y = 0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Do đó, để đồ thị hàm số đã cho có 4 đường thẳng tiệm cận thì phương trình $x^3 - 3x^2 + m - 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 + m - 1$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$g'(x) = 3x^2 - 6x; \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	\nearrow		$m-1$	\searrow		$+\infty$
		\nearrow			\searrow		
				$m-5$			

Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình $x^3 - 3x^2 + m - 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m - 5 < 0 < m - 1 \Leftrightarrow 1 < m < 5$.

Câu 55: Hàm số $y = \frac{\sqrt{3x+1} + ax + b}{(x-1)^2}$ không có tiệm cận đứng. Khi đó hiệu $a - b$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{3}{4}$.

C. $-\frac{5}{4}$.

D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Do hàm số không có tiệm cận đứng nên $f(x) = \sqrt{3x+1} + ax + b = (x-1)^2 g(x)$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 2 = 0 \\ a + \frac{3}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = -\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow a - b = \frac{1}{2} \rightarrow \text{đáp án A.}$$

Chú ý: Với $f(x) = (x - x_0)^n g(x)$ thì ta luôn có $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$.

Câu 56: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{-x^2 + 2016x + 2017} - 24\sqrt{7}}{x - m}$ có tiệm cận đứng?

A. vô số.

B. 2.

C. 2017

D. 2019.

Lời giải

Chọn C

Biểu thức: $\sqrt{-x^2 + 2016x + 2017}$ có nghĩa khi $-x^2 + 2016x + 2017 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2017$.

Đặt $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2016x + 2017}$.

Xét $x - m = 0 \Leftrightarrow x = m$. Vậy đồ thị nếu có tiệm cận đứng chỉ có thể là $x = m$, khi đó điều kiện

$$\text{là: } \begin{cases} -1 \leq x \leq 2017 \\ f(m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in [-1; 2017] \\ \sqrt{-m^2 + 2016m + 2017} \neq 24\sqrt{7} (*) \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow m^2 - 2016m + 2015 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2015 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow m \in [-1; 2017] \setminus \{1; 2015\} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}}$ có $2019 - 2 = 2017$ số nguyên m thỏa mãn bài toán \rightarrow đáp án **C**.

Câu 57: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3 + mx + 1} - \sqrt[3]{x^4 + x + 1 + m^2x}}$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó tổng các phần tử của S bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sqrt{x^3 + mx + 1} - \sqrt[3]{x^4 + x + 1 + m^2x}}{x}}.$$

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 + mx + 1} - \sqrt[3]{x^4 + x + 1 + m^2x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{x^3 + mx + 1} - 1}{x} - \frac{\sqrt[3]{x^4 + x + 1} - 1}{x} + \frac{m^2x}{x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^3 + mx}{x(\sqrt{x^3 + mx + 1} + 1)} - \frac{x^4 + x}{x(\sqrt[3]{(x^4 + x + 1)^2} + \sqrt[3]{x^4 + x + 1} + 1)} + m^2 \right].$$

Đồ thị hàm số $f(x)$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + m}{(\sqrt{x^3 + mx + 1} + 1)} - \frac{(x^3 + 1)}{\sqrt[3]{(x^4 + x + 1)^2} + \sqrt[3]{x^4 + x + 1} + 1} + m^2 \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{2} - \frac{1}{3} + m^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow 6m^2 + 3m - 2 = 0 \text{ Vậy } m_1 + m_2 = -\frac{1}{2}.$$

Câu 58: Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-10; 10)$ để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x(x-m)} - 1}{x+2}$

có đúng ba đường tiệm cận?

A. 12.

B. 11.

C. 0.

D. 10.

Lời giải

Chọn A

Xét $g(x) = \sqrt{x(x-m)} - 1$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x(x-m)} - 1}{x+2} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x(x-m)} - 1}{x+2} = -1$. Nên đồ thị hàm số luôn có hai đường tiệm cận ngang $y = 1$ và $y = -1$.

Trường hợp 1: $m = 0$ khi đó hàm số là $y = \frac{|x|-1}{x+2}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -2$.

Vậy $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Trường hợp 2: $m > 0$. Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $D = (-\infty; 0] \cup [m; +\infty)$.

$x = -2 \in D$. $g(-2) = \sqrt{2(m+2)} - 1 \neq 0$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Vậy $m = 1, m = 2, m = 9$ thỏa mãn. Nên có 9 giá trị m .

Trường hợp 3: $m < 0$. Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $D = (-\infty; m] \cup [0; +\infty)$.

Để $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì trước hết $x = -2 \in D$ hay $m \geq -2$. Nên chỉ có $m = -2, m = -1$ thỏa mãn

Với $m = -1$ ta có $g(x) = \sqrt{x(x+1)} - 1$, $g(-2) = \sqrt{2} - 1 \neq 0$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Với $m = -2$ ta có $g(x) = \sqrt{x(x+2)} - 1$, $g(-2) = \sqrt{x(x+2)} - 1 = -1 \neq 0$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy 12 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu.

Câu 59: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}$ có đúng một đường tiệm cận.

A. $-1 \leq m < 0$.

B. $-1 \leq m \leq 0$.

C. $m < -1$.

D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn A

Nếu $m = 0$ thì $y = \frac{1}{x+1}$. Hàm số này có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 0$.

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$.

Vậy với $m = 0$ thì đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

Nếu $m > 0$ thì $mx^2 + 1 > 0$ với mọi x và tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = \sqrt{m}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = -\sqrt{m}. \text{ Suy ra đồ thị hàm}$$

số có hai tiệm cận ngang là $y = \sqrt{m}$ và $y = -\sqrt{m}$.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1} = +\infty \text{ nên } x = -1 \text{ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$$

Vậy $m > 0$ không thỏa mãn.

$$\text{Nếu } m < 0 \text{ thì tập xác định của hàm số là } D = \left[-\sqrt{-\frac{1}{m}}; \sqrt{-\frac{1}{m}} \right] \setminus \{-1\}.$$

Trường hợp này đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang. Để đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có một tiệm cận đứng. Điều này xảy ra khi

$$-\sqrt{-\frac{1}{m}} \leq -1 \Leftrightarrow \sqrt{-\frac{1}{m}} \geq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{m} \geq 1 \Leftrightarrow m \geq -1.$$

Vậy với $-1 \leq m < 0$ thì đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ



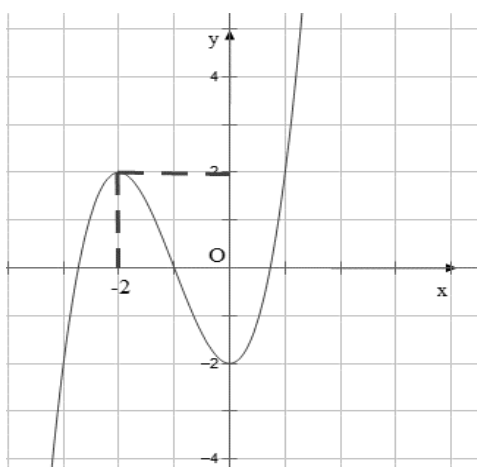
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM. (MỨC 9 – 10)

DẠNG. XÁC ĐỊNH TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ $g(x)$ KHI BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN HÀM SỐ $f(x)$

Câu 1: Cho đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3x-1}{x-1}$. Khi đó đường thẳng nào sau đây là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)-2}$?

- A. $x = 1$. B. $x = -2$. C. $x = -1$. D. $x = 2$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2019}{f(x)-1}$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		-	-
y	2		$+\infty$
	$-\infty$		-2

Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{f(x)+2}$ có duy nhất một tiệm cận ngang.

- A. 1. B. 0. C. 2. D. Vô số.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(\tan x) = \cos^4 x$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2019}{f(x)-m}$ có hai tiệm cận đứng.

- A. $m < 0$. B. $0 < m < 1$. C. $m > 0$. D. $m < 1$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như hình bên dưới:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ là:

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-
$f(x)$	-2	-1	$+\infty$	0

Đồ thị $y = \frac{1}{2f(x)+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	2	$+\infty$	3	$-\infty$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 0. B. 4. C. 2. D. 1.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

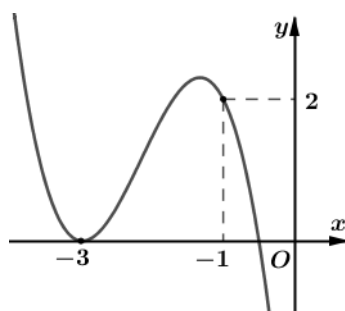
x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	1	-3	1

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 10: Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số

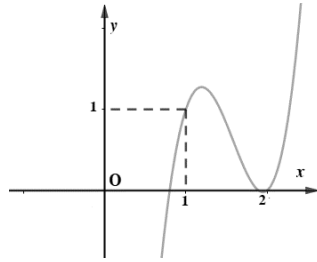
$y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



- A. 2. B. 3. C. 4. D. 6.

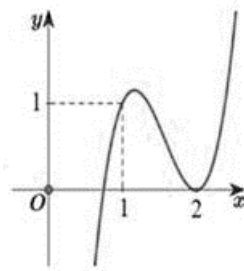
Câu 11: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số

$$g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$$
 có bao nhiêu tiệm cận đứng?



- A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.

Câu 12: Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ sau.



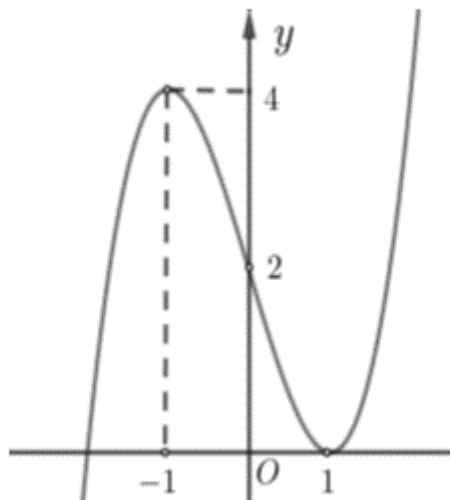
Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{(x+1)[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

- A. 5. B. 4. C. 6. D. 3.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức có đồ thị như hình vẽ dưới đây, đặt

$$g(x) = \frac{x^2 - x}{f^2(x) - 2f(x)}.$$

Hỏi đồ thị hàm số $y = g(x)$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?



- A. 5. B. 3. C. 4. D. 2.

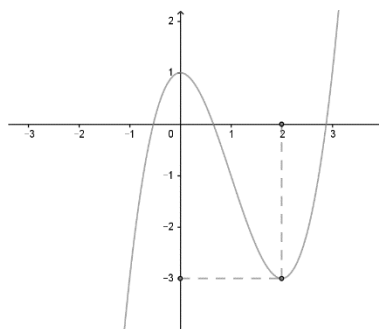
Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x^3 + x) + 3}$ là

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

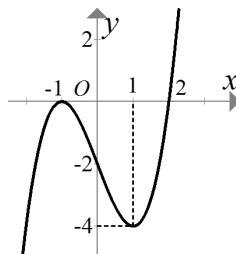
Câu 15: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như bên dưới.



Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{(x-3)[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng

- A. 4. B. 6. C. 3. D. 5.

Câu 16: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$) có đồ thị như hình dưới đây.

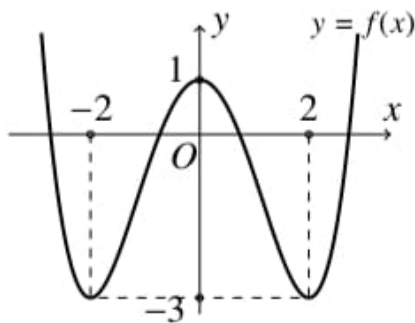


Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2 - 4x + 3)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 17: Cho hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số

$$y = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2x)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}$$
 có tổng cộng bao nhiêu tiệm cận đứng?



A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM. (MỨC 9 – 10)

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

DẠNG. XÁC ĐỊNH TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ $g(x)$ KHI BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN HÀM SỐ $f(x)$

Câu 1: Cho đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3x-1}{x-1}$. Khi đó đường thẳng nào sau đây là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)-2}$?

A. $x = 1$.B. $x = -2$.C. $x = -1$.D. $x = 2$.

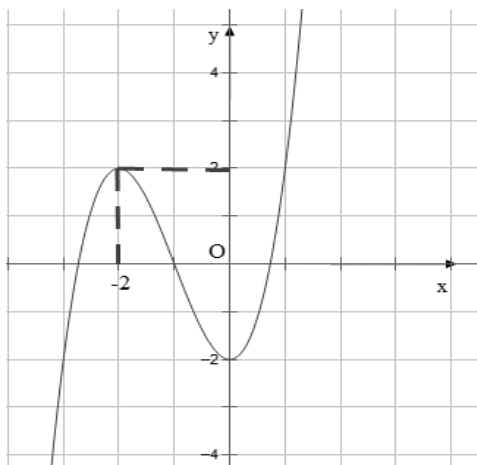
Lời giải

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x-1} = 2 \Rightarrow 3x-1 = 2x-2 \Leftrightarrow x = -1.$$

Với $y = \frac{1}{f(x)-2}$ ta có $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = +\infty$

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)-2}$ có đường tiệm cận đứng $x = -1$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2019}{f(x)-1}$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ suy ra tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $D = \mathbb{R}$

Do đó số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2019}{f(x)-1}$ chính là số nghiệm của phương trình $f(x) = 1$.

Qua đồ thị ta có: Đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = 1$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{2019}{f(x)-1}$ có 3 đường tiệm cận đứng.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		$-$	$-$
y	2		$+\infty$
	\searrow		\searrow
	$-\infty$		-2

Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{2}$.

Suy ra đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$ có hai đường tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{2}$ và $y = -\frac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta thấy: phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < -1 < x_2$.

Khi đó: $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Ta có: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_1^-} f(x) = 0 \\ f(x) > 0 \text{ khi } x \rightarrow x_1^- \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_1^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ và $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_2^-} f(x) = 0 \\ f(x) > 0 \text{ khi } x \rightarrow x_2^- \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_2^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$ có hai tiệm cận đứng là đường thẳng $x = x_1$ và $x = x_2$.

Do đó **Chọn A**

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{f(x)+2}$ có duy nhất một tiệm cận ngang.

- A. 1. B. 0. C. 2. D. Vô số.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)+2} = 1 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$.

TH 1: Nếu $m = -1$ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)+2} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)+2} = 1$ thì đồ thị hàm số có một tiệm cận.

TH 2: Nếu $m \neq -1$

Để đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)+2}$ không có giá trị hữu hạn

$$\Leftrightarrow m+2=0 \Leftrightarrow m=-2.$$

Vậy khi $m \in \{-2; -1\}$ thì đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận ngang.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(\tan x) = \cos^4 x$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2019}{f(x)-m}$ có hai tiệm cận đứng.

- A. $m < 0$. B. $0 < m < 1$. C. $m > 0$. D. $m < 1$.

Lời giải

Chọn B

$$f(\tan x) = \cos^4 x \Leftrightarrow f(\tan x) = \frac{1}{(1+\tan^2 x)^2} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2}$$

$$\text{Hàm số } g(x) = \frac{2019}{f(x)-m} \Rightarrow g(x) = \frac{2019}{\frac{1}{(1+x^2)^2} - m}$$

Hàm số $g(x)$ có hai tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $\frac{1}{(1+x^2)^2} - m = 0$ có hai nghiệm

$$\text{phân biệt } \Leftrightarrow (1+x^2)^2 = \frac{1}{m} > 1 \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như hình bên dưới:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ là:

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Đặt $h(x) = \frac{1}{2f(x)-1}$.

*) Tiệm cận ngang:

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = 0$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = 0$.

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

*) Tiệm cận đứng:

Xét phương trình: $2f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x)=\frac{1}{2}$ có ba nghiệm phân biệt a, b, c thỏa mãn $a < 1 < b < 2 < c$.

Đồng thời $\lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} h(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số $y = h(x)$ có ba đường tiệm cận đứng là $x = a$, $x = b$ và $x = c$.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = h(x)$ là 4.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	-2	-1	$+\infty$	0

Đồ thị $y = \frac{1}{2f(x)+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $y = g(x) = \frac{1}{2f(x)+3}$ có tử số là $1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Ta có $2f(x)+3=0 \Leftrightarrow f(x)=-\frac{3}{2}$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$				

Từ bảng biến thiên có phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 \in (-\infty; 0)$, $x_2 \in (0; 1)$.

Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)+3}$ có 2 đường tiệm cận đứng.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	2	$+\infty$	3	$-\infty$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A.** 0. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $2f(x)-5=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{5}{2}(1)$. Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $x_1, x_2, x_3, x_4 \neq 1$

và giới hạn của hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-5}$ tại các điểm x_1, x_2, x_3, x_4 đều bằng $\pm\infty$.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{1}{2f(x)-5} = 0$ nên $x=1$ không phải tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-5}$ có 4 đường tiệm cận đứng.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	1	-3	1

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ là

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ đúng bằng số nghiệm thực của phương trình

$$2f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}.$$

Mà số nghiệm thực của phương trình $f(x)=\frac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=\frac{1}{2}$.

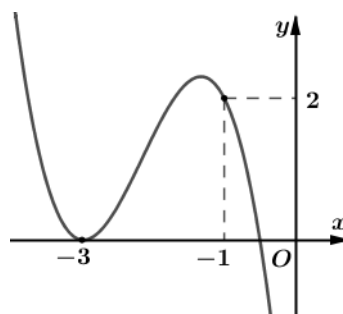
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=\frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 2 điểm phân biệt. Vậy đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2f(x)-1}$ có 2 tiệm cận đứng.

Lại có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = 1 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y=1$.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2f(x)-1}$ là 3.

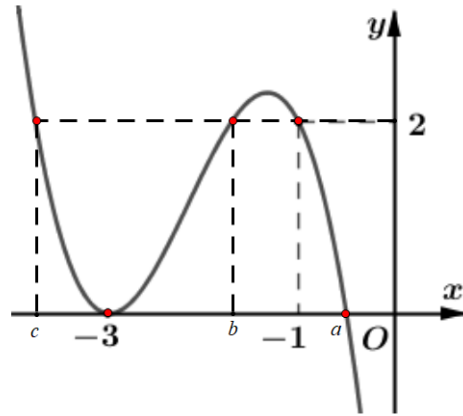
Câu 10: Cho hàm bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số

$$y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$$
 có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



- A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải



$$y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]} = \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]}$$

Điều kiện tồn tại căn $\sqrt{x^2 + x} : \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -1 \end{cases}$.

Xét phương trình $x[f^2(x) - 2f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$.

Với $x = 0$ ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x} \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]} = +\infty$. Suy ra $x = 0$ là

tiệm cận đứng.

Với $f(x) = 0 \Rightarrow x = -3$ hoặc $x = a$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]} = -\infty$ nên $x = -3$ là tiệm cận đứng.

Với $f(x) = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = b (-3 < b < -1) \\ x = c (c < -3) \end{cases}$. Ta có:

$\lim_{x \rightarrow b^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]} = 0 \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]} = 0 \end{cases}$ nên $x = -1$ không là tiệm

cận đứng.

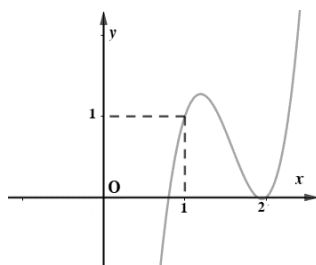
$\lim_{x \rightarrow b^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]} = +\infty$ nên $x = b$ là tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]} = +\infty$ nên $x = c$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 4 tiệm cận đứng.

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số

$$g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$$
 có bao nhiêu tiệm cận đứng?



A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Nhận xét 1: Với $x_0 \geq 1$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x)$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x)$ có kết quả là $+\infty$ hoặc $-\infty$ thì $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

Nhận xét 2: Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta có: $f(x) = a(x - x_1)(x - 2)^2$.

$$\text{Ta có } x[f^2(x) - f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1, 0 < x_1 < 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

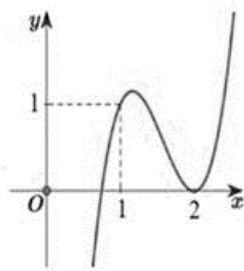
$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = x_2, 1 < x_2 < 2 \\ x = x_3, x_3 > 2 \end{cases} \text{ suy ra } f(x) - 1 = a(x - 1)(x - x_2)(x - x_3).$$

$$\text{Khi đó ta có } g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]} = \frac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{x \cdot f(x)[f(x) - 1]}.$$

$$g(x) = \frac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{x \cdot a(x - x_1)(x - 2)^2 \cdot a(x-1)(x - x_2)(x - x_3)} = \frac{\sqrt{x-1}}{a^2 x(x - x_1)(x - 2)(x - x_2)(x - x_3)}.$$

$x = 0, x = x_1$ không phải tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$ không thỏa mãn điều kiện $x_0 \geq 1$. Đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng là: $x = 2, x = x_2, x = x_3$.

Câu 12: Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{(x+1)[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 5.

B. 4.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } g(x) = \frac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{(x+1)f(x)[f(x)-1]}$$

$$\text{Đkxđ: } \begin{cases} x \geq 1 \\ f(x) \neq 0 \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = x_1 \end{cases} \text{ với } x = 2 \text{ là nghiệm kép, } x_1 \in (0; 1).$$

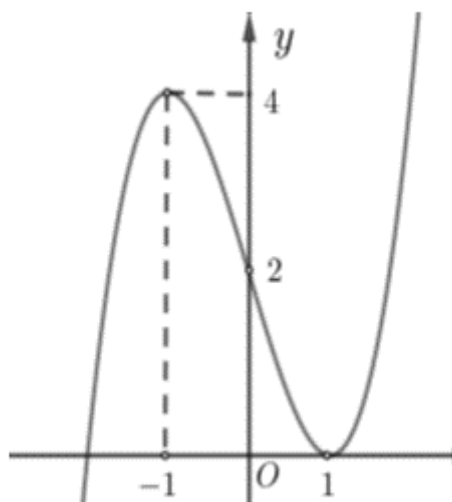
$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \end{cases} \text{ với } x_2 \in (1; 2); x_3 > 2.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } g(x) &= \frac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{a^2(x+1)(x-2)^2(x-x_1)(x-1)(x-x_2)(x-x_3)} \\ &= \frac{\sqrt{x-1}}{a^2(x+1)(x-2)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} \end{aligned}$$

Vậy đồ thị hàm số có 3 TCD $x = 2; x = x_2; x = x_3$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức có đồ thị như hình vẽ dưới đây, đặt

$$g(x) = \frac{x^2 - x}{f^2(x) - 2f(x)}. \text{ Hỏi đồ thị hàm số } y = g(x) \text{ có bao nhiêu tiệm cận đứng?}$$



A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta xét phương trình $f^2(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = x_1 < -1 \\ x = 0 \\ x = x_2 > 1 \\ x = x_3 < -1, x_3 \neq x_1 \end{cases}$. Khi đó

$$g(x) = \frac{x^2 - x}{ax(x-1)^2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} = \frac{1}{a(x-1)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}; (a \neq 0).$$

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x^3 + x) + 3}$ là

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Tính tiệm cận ngang.

$$\text{Ta có } x^3 + x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x^3 + x) + 3} = 0$$

$$x^3 + x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x^3 + x) + 3} = 0$$

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y = 0$.

Tính tiệm cận đứng.

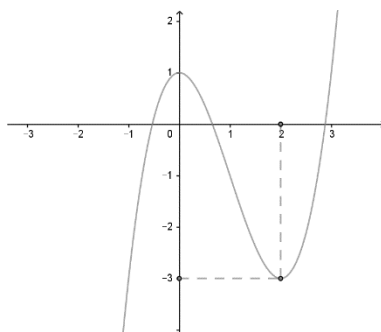
Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là số nghiệm của phương trình $f(x^3 + x) + 3 = 0$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(x^3 + x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x^3 + x) = -3 \Leftrightarrow x^3 + x = x_0; x_0 \in (-\infty; 1)$

Vì hàm số $y = x^3 + x$ đồng biến trên \mathbb{R} do đó $x^3 + x = x_0; x_0 \in (-\infty; 1)$ có một nghiệm duy nhất.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x^3 + x) + 3}$ có 1 tiệm cận đứng.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như bên dưới.



Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{(x-3)[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy hàm số đạt cực trị tại $x = 0$, $x = 2$. Do đó, ta có hệ

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(2) = -3 \\ y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ c = 0 \\ 12a + 4b = 0 \\ 8a + 4b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}.$$

Vậy $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

$$\text{Khi đó } y = \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{(x-3)[f^2(x) - f(x)]} = \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{(x-3)(x^3 - 3x^2 + 1)(x^3 - 3x^2)} = \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3 - 3x^2 + 1)}.$$

$$\text{Ta có } x^2(x-3)^2(x^3-3x^2+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \\ x=x_1 \in (-1;0) \\ x=x_2 \in (0;1) \\ x=x_3 \in (2;3) \end{cases}$$

Hàm số $y = \frac{(x^2-2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3-3x^2+1)}$ có tập xác định $D = (-\infty; 2] \setminus \{0; x_1; x_2\}$.

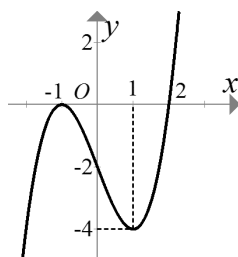
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2-2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3-3x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-2)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3-3x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x-2)\sqrt{2-x}}{x(x-3)^2(x^3-3x^2+1)} = -\infty.$$

Suy ra $x=0$ là đường tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{(x^2-2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3-3x^2+1)} = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_2^+} \frac{(x^2-2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3-3x^2+1)} = +\infty.$$

Suy ra $x=x_1$ và $x=x_2$ cũng là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 16: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$) có đồ thị như hình dưới đây.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2-4x+3)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

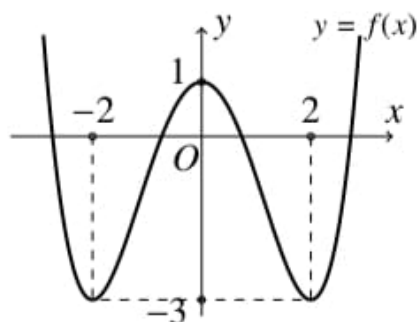
$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ x \neq -1 \\ x^2 - 4x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq -1 \\ x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2-4x+3)} = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2-4x+3)} = -\infty.$$

Vậy đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2-4x+3)}$ có một đường tiệm cận đứng là: $x=3$.

Câu 17: Cho hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số

$$y = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2x)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}$$
 có tổng cộng bao nhiêu tiệm cận đứng?



A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

$$y = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2x)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3} = \frac{x(x+2)^2(x-2)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}$$

$$\text{Ta có: } [f(x)]^2 + 2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m (m < -2) \\ x = 0 \\ x = n (n > 2) \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta thấy các nghiệm $x = 0; x = \pm 2$ là các nghiệm kép và đa thức

$$[f(x)]^2 + 2f(x) - 3 \text{ có bậc là 8 nên } y = \frac{x(x+2)^2(x-2)}{a^2x^2(x+2)^2(x-2)^2(x-m)(x-n)}$$

Vậy hàm số có các tiệm cận đứng là $x = 0; x = 2; x = m; x = n$.