CHƯƠNG I

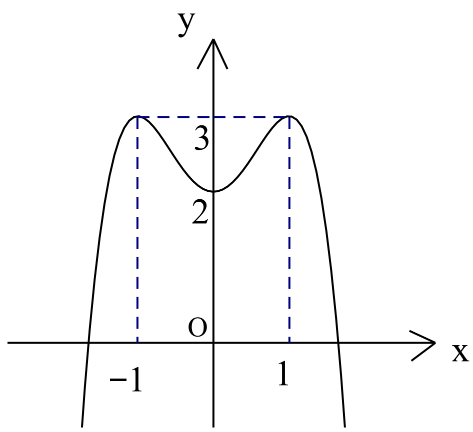
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 6. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ

III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

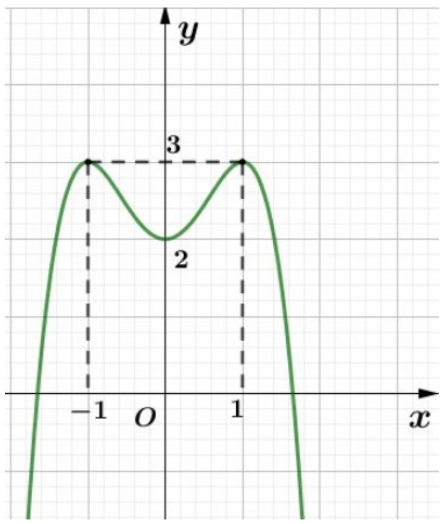
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

Câu 1: **(MĐ 101-2022)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f(x)=1$ là



A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 2: **(MĐ 102-2022)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=1$ là



A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

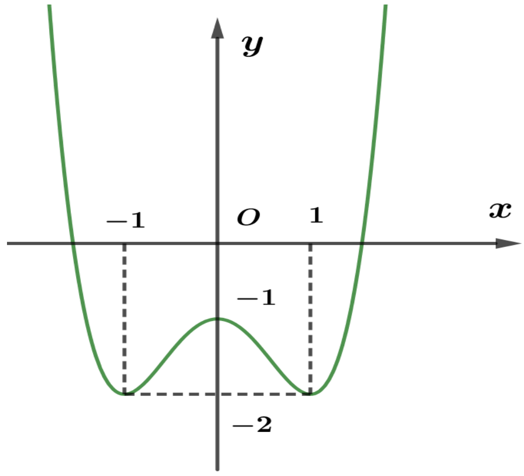
Câu 3: **(MĐ 103-2022)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và đường thẳng $y=1$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 4: **(MĐ 103-2022)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2;5]$ của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có đúng hai nghiệm phân biệt?



A. 1. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 5.

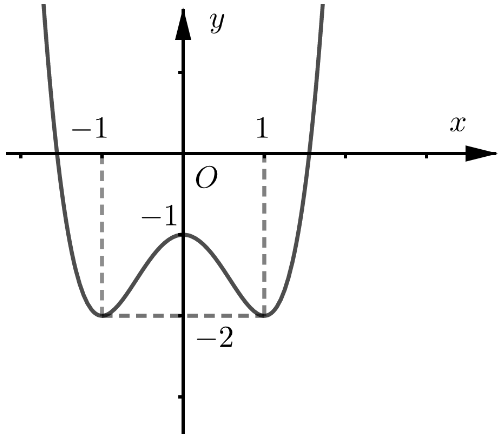
Câu 5: **(MĐ 104-2022)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và đường thẳng $y=1$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 6: **(MĐ 104-2022)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2;5]$ của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt?



A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 7: **(TK 2020-2021)** Đồ thị của hàm số $y=x^3-3x+2$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** −2.

Câu 8: **(MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1)** Đồ thị của hàm số $y=-x^4+4x^2-3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng.

A. 0. **B.** 3. **C.** 1 **D.** -3.

Câu 9: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Đồ thị hàm số $y=-x^4-2x^2+3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

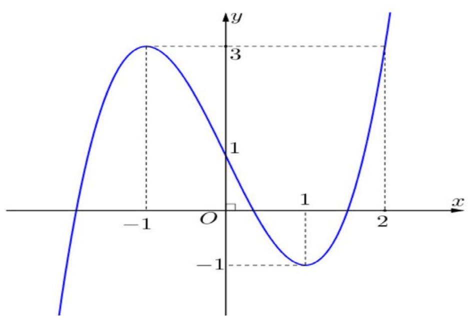
Câu 10: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Đồ thị của hàm số $y=-x^3+2x^2-1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 0.

Câu 11: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Đồ thị của hàm số $y=-2x^3+3x^2-5$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. -5. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 2.

Câu 12: **(MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên

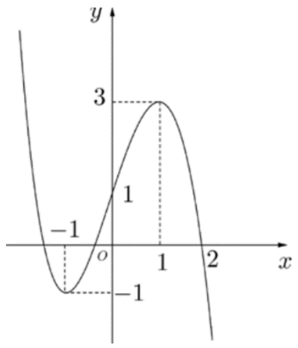


.

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x))=1$ là

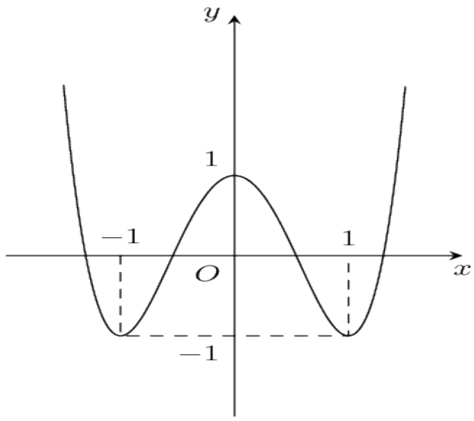
A. 9. **B.** 3. **C.** 6 **D.** 7.

Câu 13: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số bậc ba $y = f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right) = 1$ là



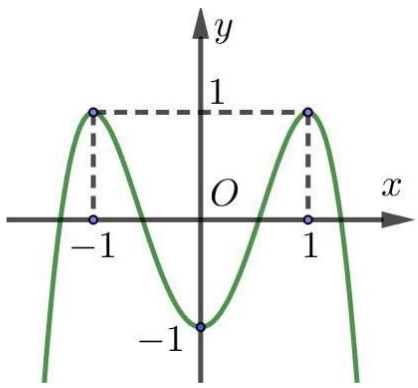
A. 9. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 14: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số bậc bốn $y = f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right) = 0$ là:



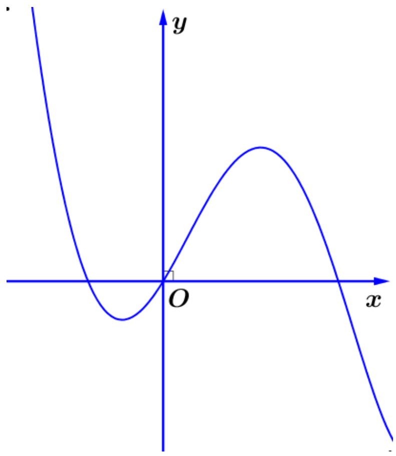
A. 4. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 8.

Câu 15: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số bậc bốn $y = f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right) = 0$ là



A. 12. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 4.

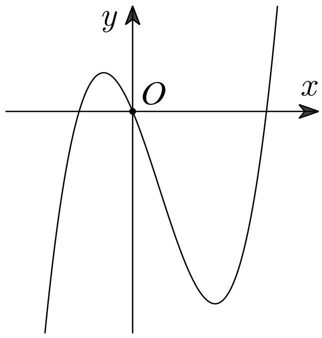
Câu 16: **(MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2\ (a,b,c\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như trong hình bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $3f(x)+4=0$ là

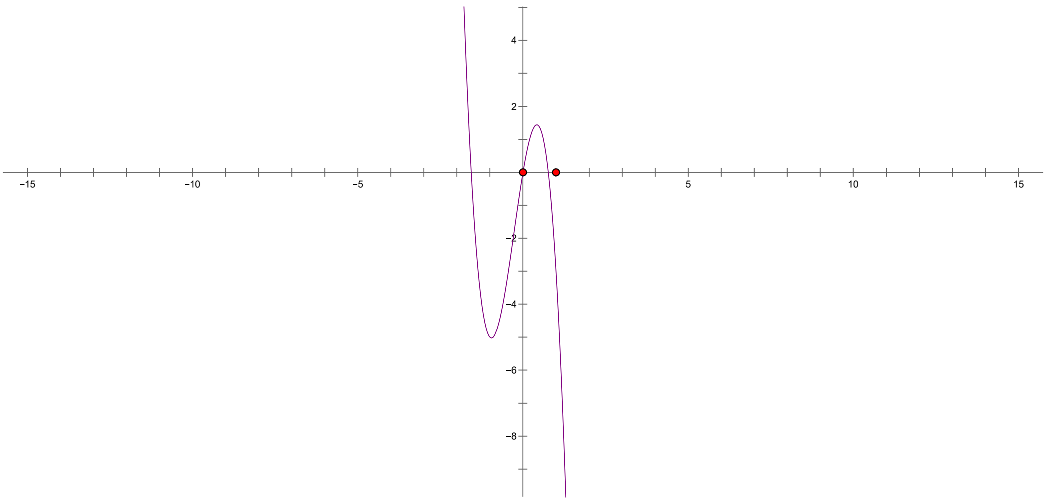
A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 17: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2\ (a,b,c\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $3f(x)-4=0$ là



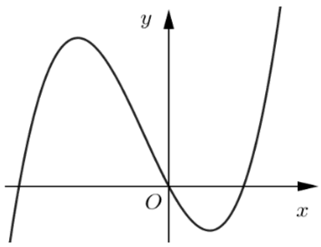
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 18: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $f(x)=a.x^4+bx^3+cx^2, a,b,c\in R$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2f(x)+3=0$ là



A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Câu 19: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2 (a,b,c\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2f(x)-3=0$



A. 2.
B. 3.
C. 1.
D. 4.

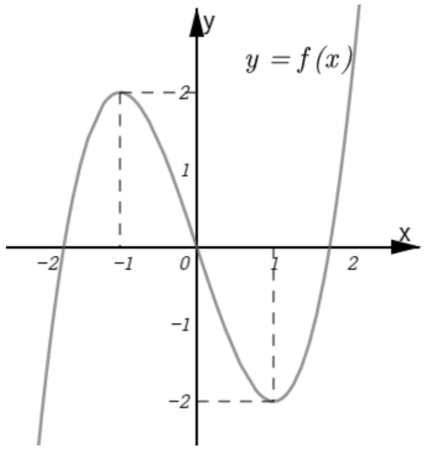
Câu 20: **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $3f(x)-2=0$ là

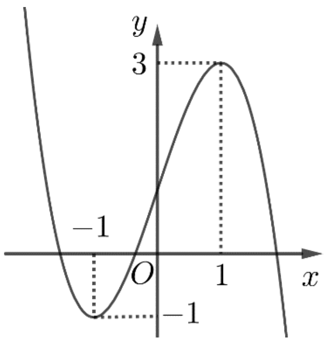
A. 2.
B. 0.
C. 3.
D. 1.

Câu 21: **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=-1$ là:



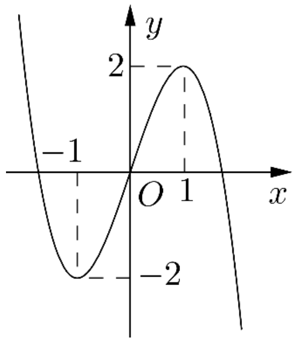
A. 3.
B. 1.
C. 0.
D. 2.

Câu 22: **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=1$ là



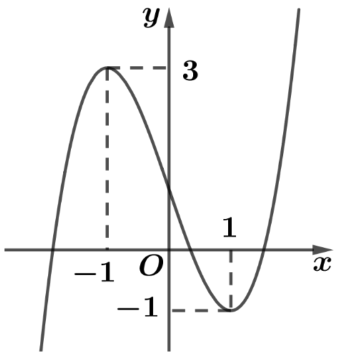
A. 0.
B. 3.
C. 1.
D. 2.

Câu 23: **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=1$ là



A. 1. **B.** 0.
C. 2. **D.** 3.

Câu 24: **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=2$ là:

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

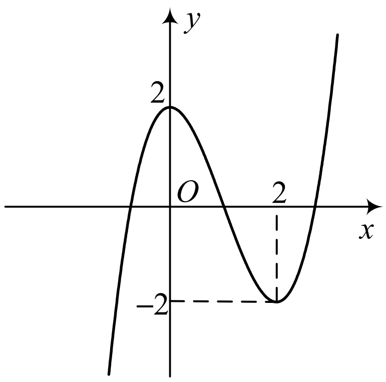
Câu 25: **(Mã 101 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f\left(x\right)-3=0$ là

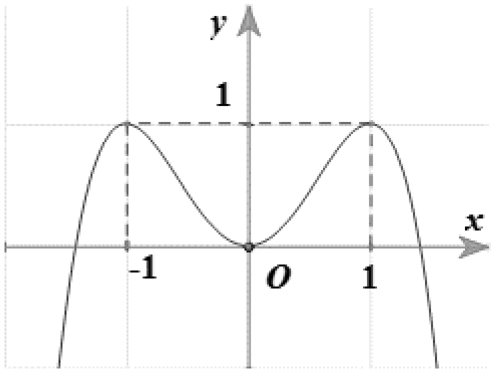
A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 26: **(Mã 101 2018)** Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ $\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$. Đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f\left(x\right)+4=0$ là



A. 2 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 3

Câu 27: **(Mã 102 2018)** Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c\left(a,b,c\in\mathbb{R}\right)$. Đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ bên.



Số nghiệm của phương trình $4f\left(x\right)-3=0$ là

A. 2 **B.** 0 **C.** 4 **D.** 3

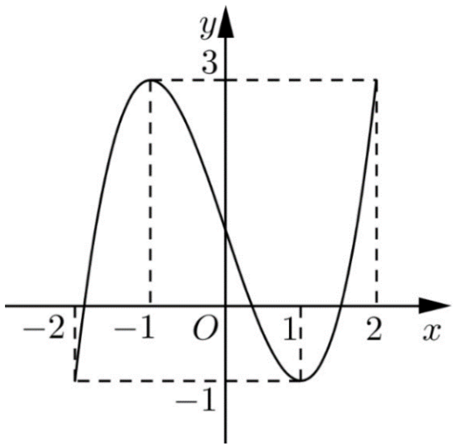
Câu 28: **(Mã 103 2019)** Cho hàm số $f(x)$ bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	0		0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	2	↘	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-3=0$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 29: **(Mã 103 2018)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-2;2\right]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f\left(x\right)-4=0$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$ là



A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 30: **(Mã 102 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	-∞		-2		0		2		+∞
f'(x)		−	0	+	0	−	0	+	
f(x)	+∞	↘	-1	↗	2	↘	-1	↗	+∞

Số nghiệm thực của phương trình $3f\left(x\right)-5=0$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

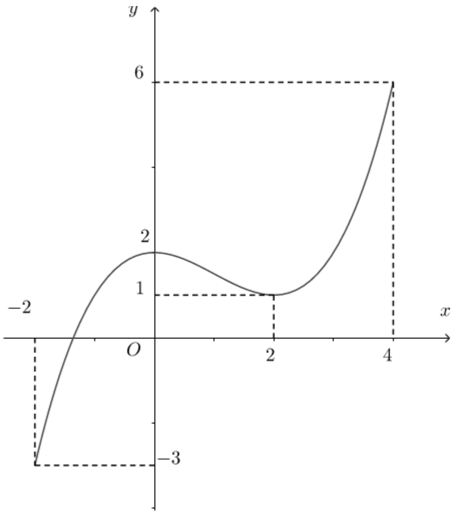
Câu 31: **(Mã 104 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)+3=0$ là

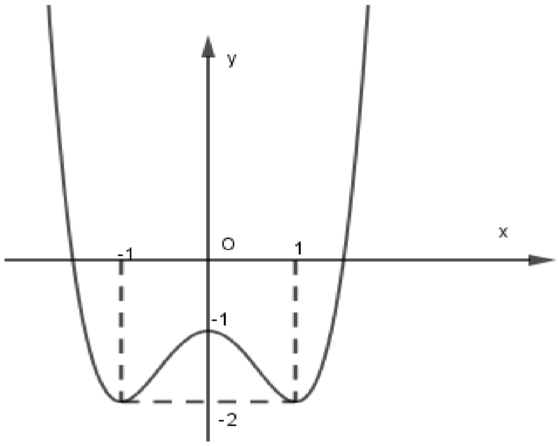
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 32: **(Mã 104 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)-5=0$ trên đoạn $[-2;4]$ là



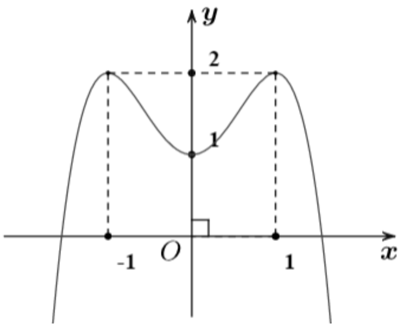
A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3

Câu 33: **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = -\frac{3}{2}$ là



A. 4 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

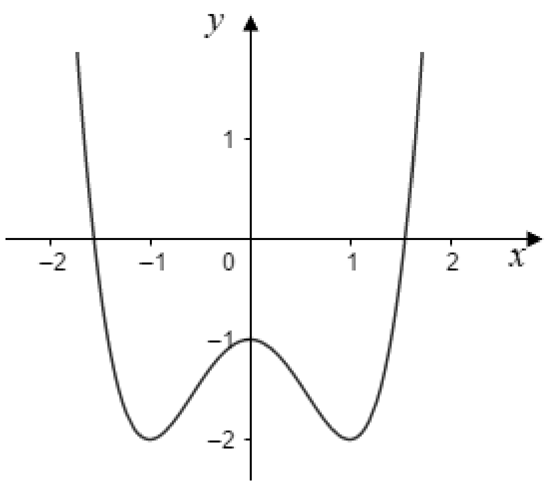
Câu 34: **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ là



A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

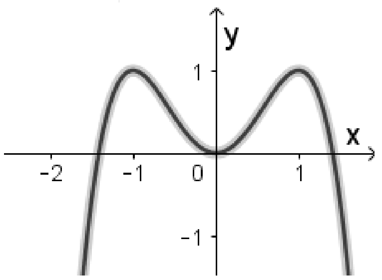
Câu 35: **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm của phương trình $f(x) = -\frac{1}{2}$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** $x = 1$.

Câu 36: **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ là



A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 37: **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ và trục hoành là

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 38: **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2$ và đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 3x$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 39: **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 40: **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2$ và đồ thị hàm số $y = x^2 + 5x$

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 41: **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^2 + 3x$ và đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3

Câu 42: **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 7x$ với trục hoành là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 43: **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x$ với trục hoành là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 44: **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 6x$ với trục hoành là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 45: **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 5x$ với trục hoành là:

A. 3 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 1

Câu 46: **(Mã 105 2017)** Cho hàm số $y=(x-2)(x^2+1)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (C) cắt trục hoành tại một điểm. **B.** (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

C. (C) cắt trục hoành tại hai điểm. **D.** (C) không cắt trục hoành.

Câu 47: **(Đề Minh Họa 2017)** Biết rằng đường thẳng $y=-2x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+x+2$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0

A. $y_0=4$ **B.** $y_0=0$ **C.** $y_0=2$ **D.** $y_0=-1$

Câu 48: **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho hàm số $y=x^3-3x$ có đồ thị (C). Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

A. 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

Câu 49: **(Mã 123 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=mx-m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+x+2$ tại ba điểm A,B,C phân biệt sao $AB=BC$

A. $m\in\left(-\frac{5}{4};+\infty\right)$ **B.** $m\in(-2;+\infty)$

C. $m\in\mathbb{R}$ **D.** $m\in(-\infty;0)\cup[4;+\infty)$

Câu 50: **(Mã 101 2019)** (Mã đề 001) Cho hai hàm số $y=\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}$ và $y=|x+2|-x+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $[2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2]$.

Câu 51: **(Mã 103 2019)** Cho hai hàm số $y=\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}$ và $y=|x+2|-x-m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2)$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $(-2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2]$. **C.** $[-2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Câu 52: **(Mã 102 2019)** Cho hai hàm số $y=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+3}{x+4}$ và $y=|x+1|-x+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt là

A. $(-\infty;3]$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $[3;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 53: **(Mã 104 2019)** Cho hai hàm số $y=\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}$ và $y=|x+1|-x-m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $(-\infty;-3)$. **B.** $[-3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-3]$. **D.** $(-3;+\infty)$.

Câu 54: **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x)+3=0$ là

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 8.

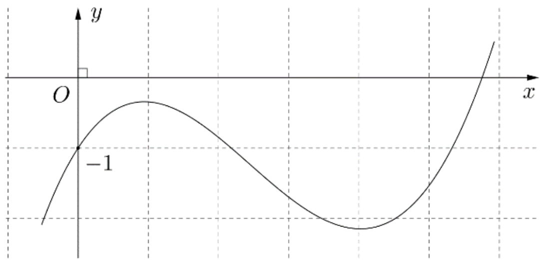
Câu 55: **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x)=1$ là

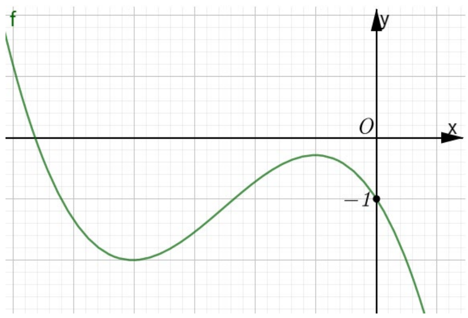
A. 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 56: **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3f(x)\right)+1=0$ là



A. 8. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

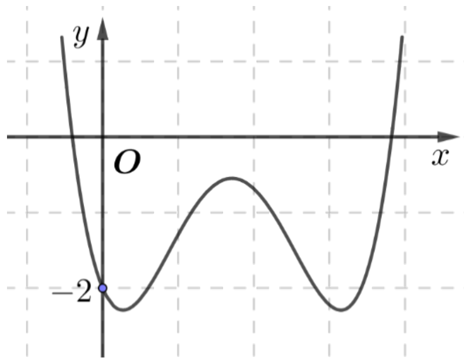
Câu 57: **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3f(x)\right)+1=0$ là

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 8.

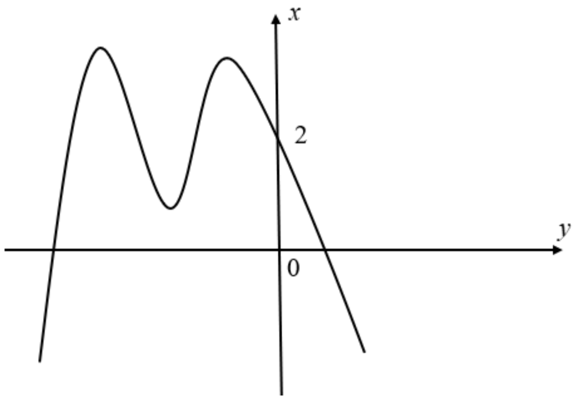
Câu 58: **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^2 f(x)\right)+2=0$ là

A. 8. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 9.

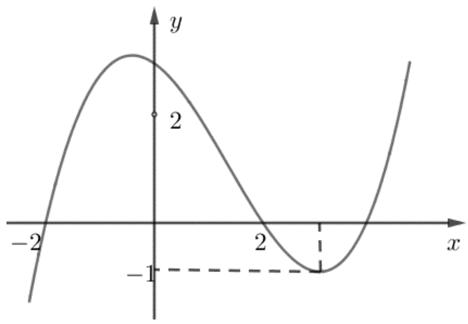
Câu 59: **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x^2 f\left(x\right)\right)=2$ là:

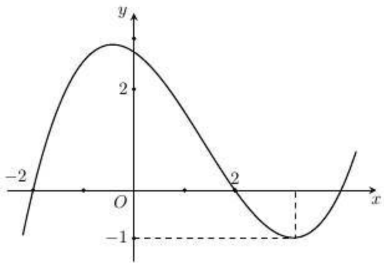
A. 6. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 60: **(Mã 103 2019)** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\dfrac{3}{2}$ là



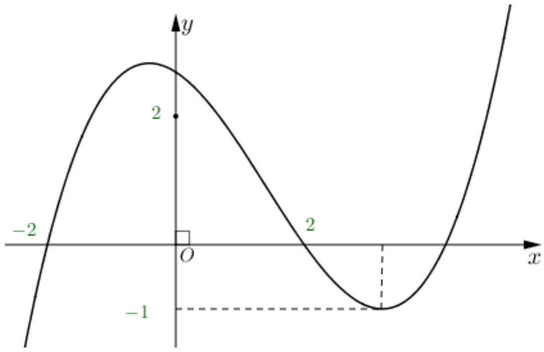
A. 7. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 61: **(Mã 104 2019)** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\dfrac{2}{3}$ là



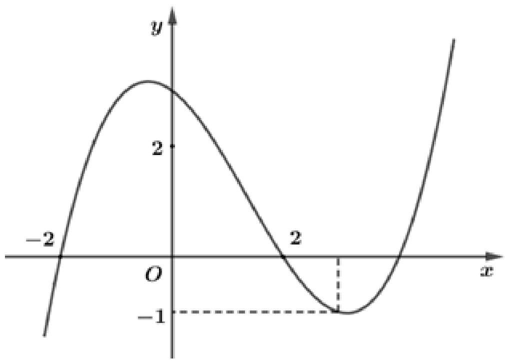
A. 10 **B.** 3 **C.** 9 **D.** 6

Câu 62: **(Mã 101 2019)** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\dfrac{4}{3}$ là



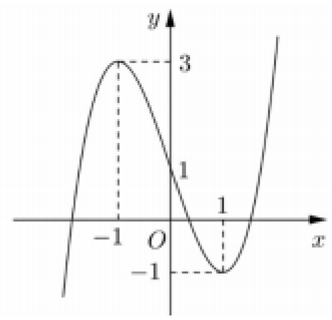
A. 7. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 8.

Câu 63: **(Mã 102 2019)** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\dfrac{1}{2}$



A. 6. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 3.

Câu 64: **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ là



A. $(-1;3)$ **B.** $[-1;1)$ **C.** $[-1;3)$ **D.** $(-1;1)$

Câu 65: **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↘	-2	↗	2	↘	-3	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

A. 25. **B.** 30. **C.** 29. **D.** 24.

Câu 66: **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	-3	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

A. 15. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 13.

Câu 67: **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	-3	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $5f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(0;+\infty\right)$

A. 24. **B.** 21. **C.** 25. **D.** 20.

Câu 68: **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $\left(0;+\infty\right)$?

A. 16. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 17.

CHƯƠN I

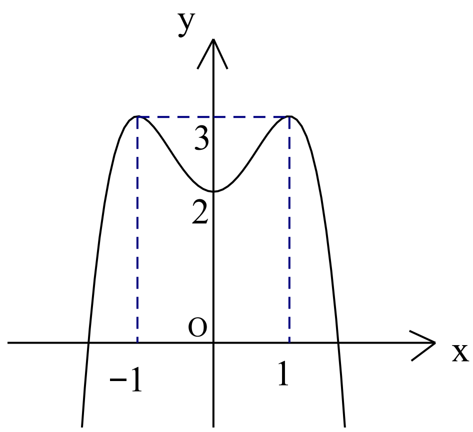
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 6. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

Câu 1: **(MĐ 101-2022)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f(x)=1$ là

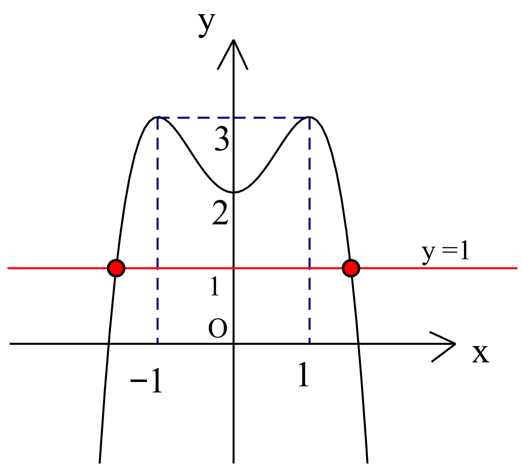


A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

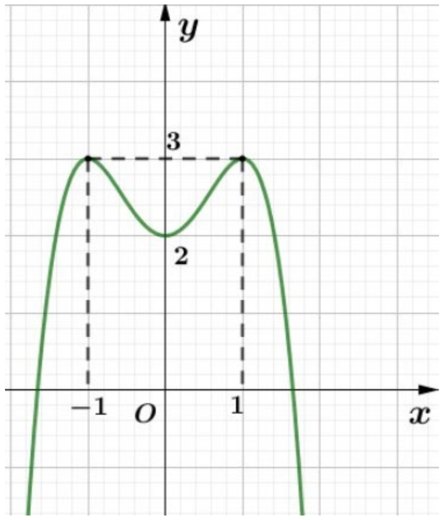
Chọn B

Ta có số nghiệm của phương trình $f(x)=1$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=1$.



Từ hình vẽ, ta có đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=1$ có hai giao điểm nên phương trình $f(x)=1$ có 2 nghiệm.

Câu 2: **(MĐ 102-2022)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=1$ là

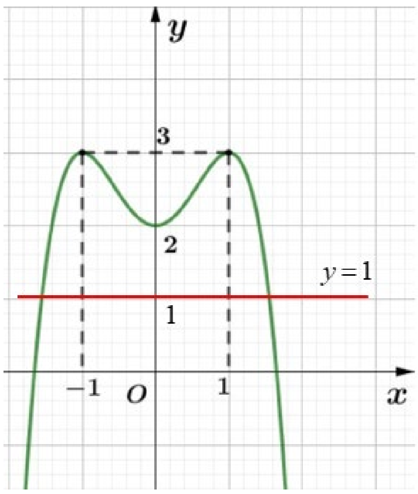


A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có số nghiệm của phương trình $f(x)=1$ bằng số giao điểm của đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $(d): y=1$.



Theo đồ thị ta có, đường thẳng (d) cắt (C) tại 2 điểm nên phương trình $f(x)=1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 3: **(MĐ 103-2022)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và đường thẳng $y=1$ là

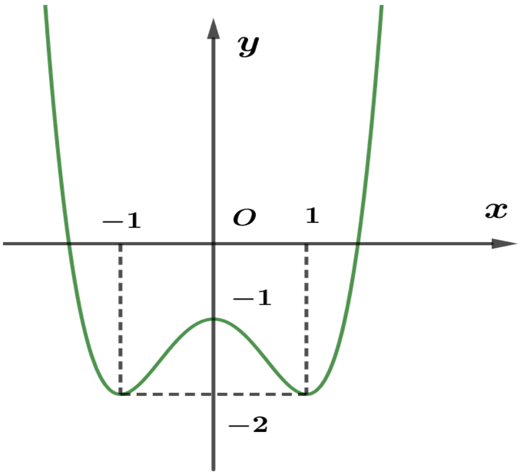
A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Nhìn bảng biên thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 1$ tại 3 điểm phân biệt.

Câu 4: **(MĐ 103-2022)** Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2;5]$ của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có đúng hai nghiệm phân biệt?



A. 1. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $d : y = m$ $\left(d \overset{//}{\equiv} Ox\right)$

Dựa vào đồ thị ta có phương trình $f(x) = m$ có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m > -1. \end{array}\right.$

Mặt khác $m \in [-2;5] \Rightarrow m \in \{-2;0;1;2;3;4;5\}$.

Suy ra có 7 giá trị thỏa mãn yêu cầu.

Câu 5: **(MĐ 104-2022)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và đường thẳng $y = 1$ là

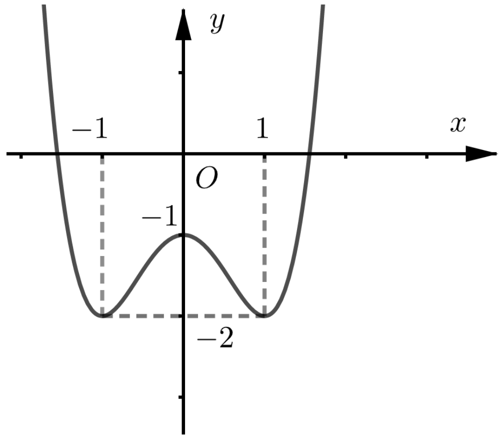
A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và đường thẳng $y=1$ là 3.

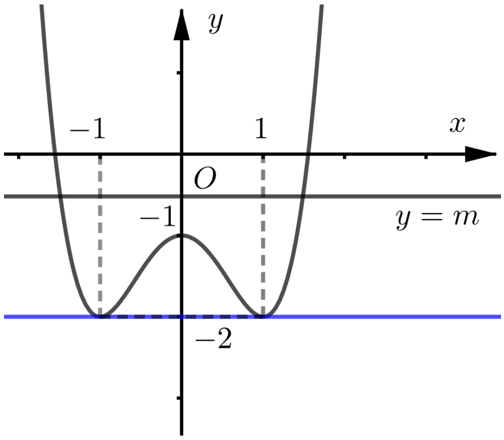
Câu 6: **(MĐ 104-2022)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2;5]$ của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt?



A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A



Số nghiệm của phương trình $f(x)=m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m$. Dựa vào đồ thị, phương trình $f(x)=m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $m=-2$ hoặc $m>-1$. Do $m\in\mathbb{Z}\cap[-2;5]$ nên $m\in\{-2;0;1;2;3;4;5\}$.

****

Câu 7: **(TK 2020-2021)** Đồ thị của hàm số $y=x^3-3x+2$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** −2.

Lời giải

Để tìm tọa độ của giao điểm với trục tung, ta cho $x=0\Rightarrow y=-2$.

Câu 8: **(MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1)** Đồ thị của hàm số $y=-x^4+4x^2-3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng.

A. 0. **B.** 3. **C.** 1 **D.** -3.

Lời giải

Trục tung có phương trình: $x=0$.

Thay $x=0$ vào phương trình $y=-x^4+4x^2-3$ ta có: $y=-3$.

Vậy đồ thị của hàm số $y=-x^4+4x^2-3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3.

Câu 9: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Đồ thị hàm số $y=-x^4-2x^2+3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y=-x^4-2x^2+3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3.

Câu 10: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Đồ thị của hàm số $y=-x^3+2x^2-1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 0.

Lời giải

Đồ thị của hàm số $y=-x^3+2x^2-1$ cắt trục tung tại điểm có hoành độ $x=0$ nên tung độ bằng $y(0)=-0^3+2.0^2-1=-1$.

Câu 11: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Đồ thị của hàm số $y=-2x^3+3x^2-5$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

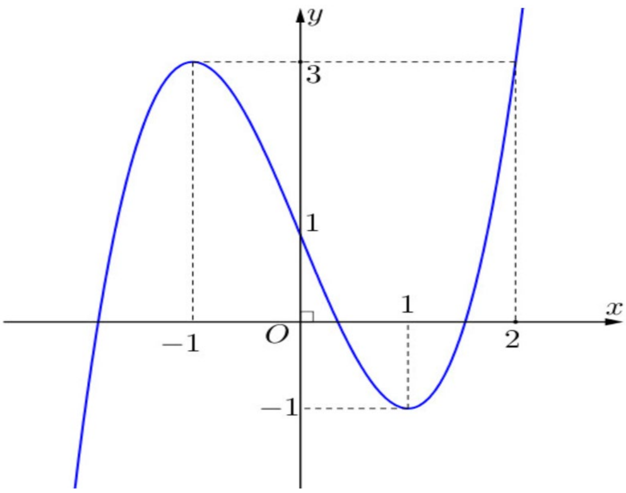
A. -5. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải

Gọi $M(x_0;y_0)$ là giao điểm của đồ thị hàm số $y=-2x^3+3x^2-5$ và trục tung, ta có:

$x_0=0\Rightarrow y_0=-2.0^3+3.0^2-5=-5$.

Câu 12: **(MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình

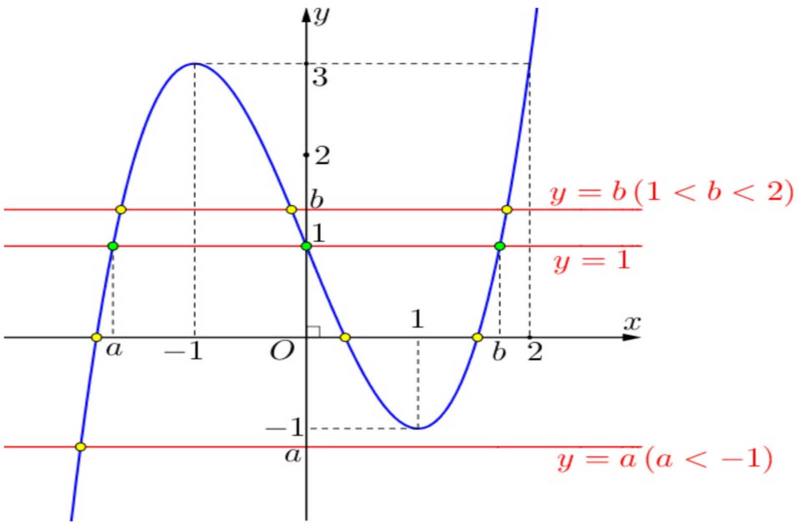


bên.

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x))=1$ là

A. 9. **B.** 3. **C.** 6 **D.** 7.

Lời giải



Căn cứ vào đồ thị hàm số đã cho ta thấy:

$$f\left(f\left(x\right)\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=a\ \left(a<-1\right)\\ f\left(x\right)=0\\ f\left(x\right)=b\ \left(1<b<2\right)\end{array}\right..$$

Căn cứ vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có:

+ Với $a<-1$, phương trình $f\left(x\right)=a$ có 1 nghiệm.

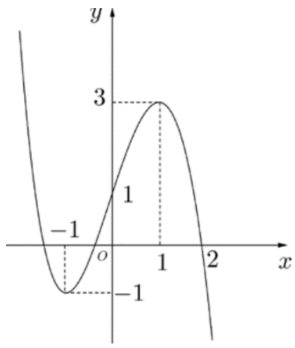
+ Phương trình $f\left(x\right)=0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

+ Với $1<b<2$, phương trình $f\left(x\right)=b$ có ba nghiệm thực phân biệt.

Các nghiệm của các phương trình $f\left(x\right)=a$; $f\left(x\right)=0$; $f\left(x\right)=b$ là các nghiệm phân biệt.

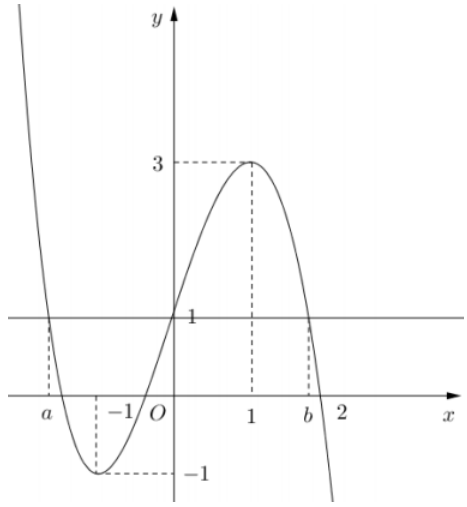
Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm thực phân biệt.

Câu 13: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=1$ là



A. 9. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải



Dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có: $f\left(f\left(x\right)\right)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=a\left(a<-1\right) \\ f\left(x\right)=1 \\ f\left(x\right)=b\left(1<b<2\right) \end{array}\right.$.

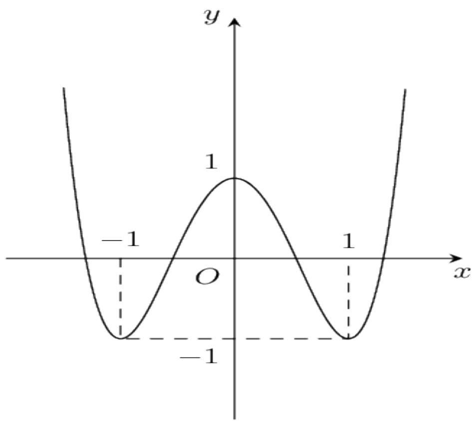
Phương trình $f\left(x\right)=a\left(a<-1\right)$ có 1 nghiệm thực.

Phương trình $f\left(x\right)=1$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

Phương trình $f\left(x\right)=b\left(1<b<2\right)$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

Các nghiệm trên phân biệt nên phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=1$ có 7 nghiệm thực phân biệt.

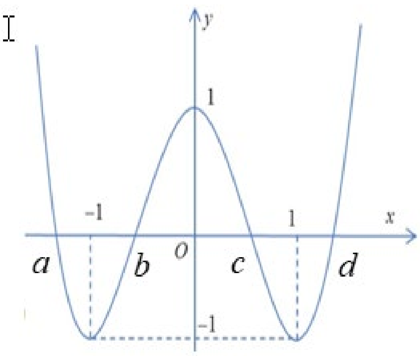
Câu 14: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=0$ là:



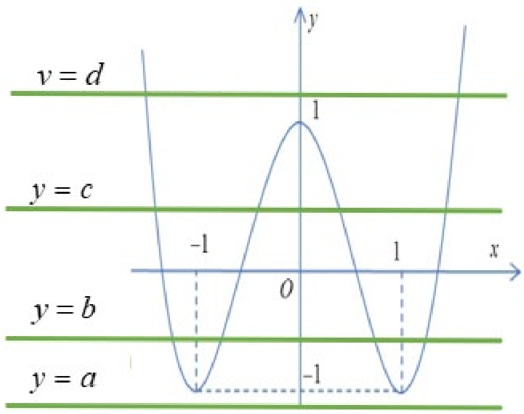
A. 4. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 8.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có:



$$f(f(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x)=a, & a<-1 \\ f(x)=b, & -1<b<0 \\ f(x)=c, & 0<c<1 \\ f(x)=d, & 1<d \end{array}\right.$$



Phương trình $f\left(x\right)=a$ vô nghiệm (vì đường thẳng $y=a$ không có điểm chung với đồ thị hàm số $f\left(x\right)$).

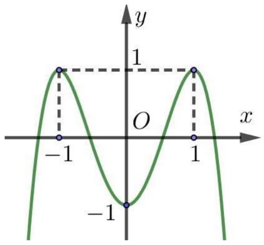
Phương trình $f\left(x\right)=b$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f\left(x\right)=c$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f\left(x\right)=d$ có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm.

Câu 15: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=0$ là

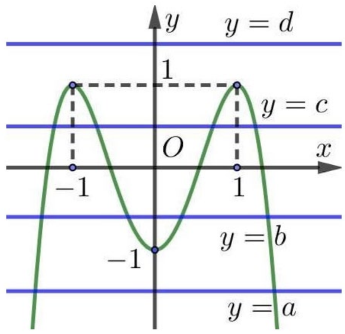


A. 12. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

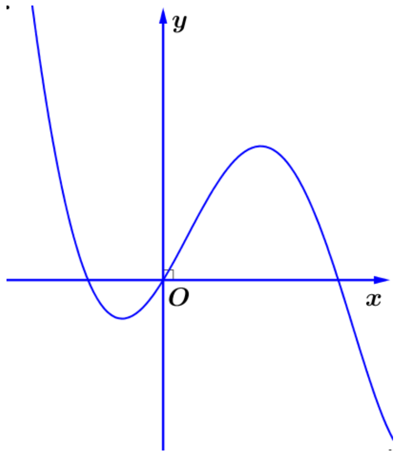
Ta có $f\left(f\left(x\right)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f\left(x\right)=a, & a<-1 \\ f\left(x\right)=b, & -1<b<0 \\ f\left(x\right)=c, & 0<c<1 \\ f\left(x\right)=a, & d>1 \end{array}\right.$

Từ giả thiết ta có:



Vậy số nghiệm của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=0$ là $2+4+4+0=10$ nghiệm.

Câu 16: **(MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2\left(a,b,c\in\mathbb{R}\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như trong hình bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $3f\left(x\right)+4=0$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $3f\left(x\right)+4=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=-\dfrac{4}{3}$.

Ta có $f'\left(x\right)=4ax^3+3bx^2+2cx=x\left(4ax^2+3bx+2c\right)$.

$$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\4ax^2+3bx+2c=0\left(1\right)\end{array}\right.$$

Từ đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ suy ra:

+) $\lim\limits_{x\to-\infty}f'\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4ax^3+3bx^2+2cx\right)=+\infty\Rightarrow a<0$

+) Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ âm, dương, bằng 0 nên phương trình (1) sẽ có hai nghiệm $x_1<0<x_2$. Khi đó ta có bảng biến thiên như sau:

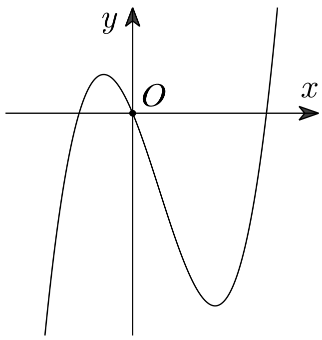
x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	$-\infty$

$y = -4/3$

Từ bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y=-\dfrac{4}{3}$ tại hai điểm phân biệt.

Do đó phương trình $3f(x)+4=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 17: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2\ (a,b,c\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $3f(x)-4=0$ là



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $f'(x)=4ax^3+3bx^2+cx$. Dựa vào đồ thị ta thấy $a>0$.

Lại có $f(0)=0$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Giả sử hoành độ giao điểm của $f'(x)$ với trục hoành lần lượt là x_1, 0, x_2 với $x_1<0<x_2$.

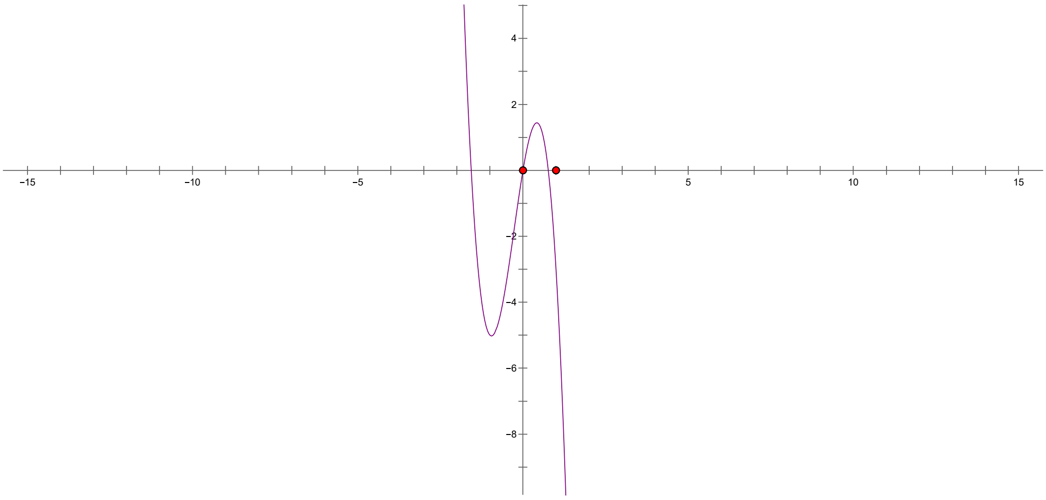
Ta lập được bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $3f(x)-4=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{4}{3}$ (1)

Dựa vào bảng biến thiên ở trên thì phương trình (1) có 2 nghiệm.

Câu 18: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $f(x) = a.x^4 + bx^3 + cx^2, a, b, c \in R$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là



A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Lời giải

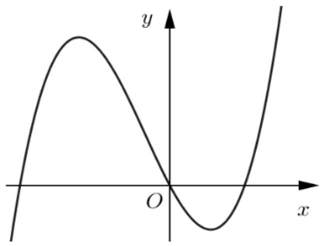
Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$		m		0		n		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘	0	↗		↘	$-\infty$

Ta có phương trình $2f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -3/2$

Từ bảng biến thiên ta suy ra đường thẳng $y = -3/2$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt suy ra phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt.

Câu 19: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 (a, b, c \in \mathbb{R})$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2f(x) - 3 = 0$



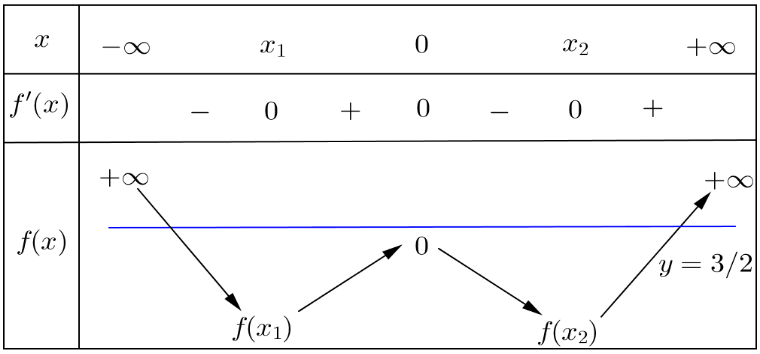
A. 2. **B.** 3.
C. 1. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{3}{2}$ do đó số nghiệm phương trình đã cho là số giao điềm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \dfrac{3}{2}$.

Với $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 \Rightarrow f(0) = 0$.

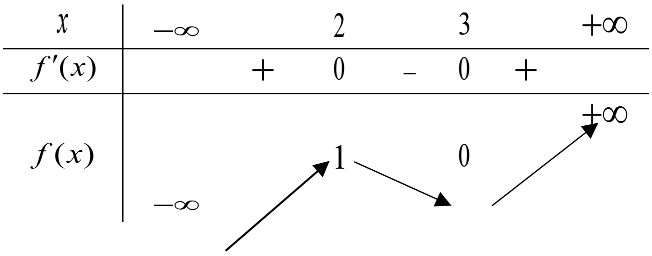
Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1;\ x = 0;\ x = x_2$. Ta lập được bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau:



Từ bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại hai điểm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt.

Câu 20: **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau



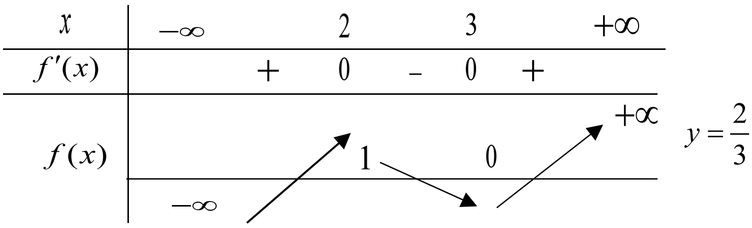
Số nghiệm của phương trình $3f(x)-2=0$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

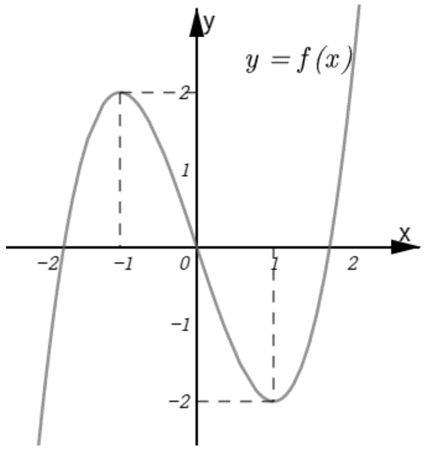
Chọn C

Ta có $3f(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2}{3}$



Căn cứ vào bảng biến thiên thì phương trinh $3f(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2}{3}$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 21: **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=-1$ là:

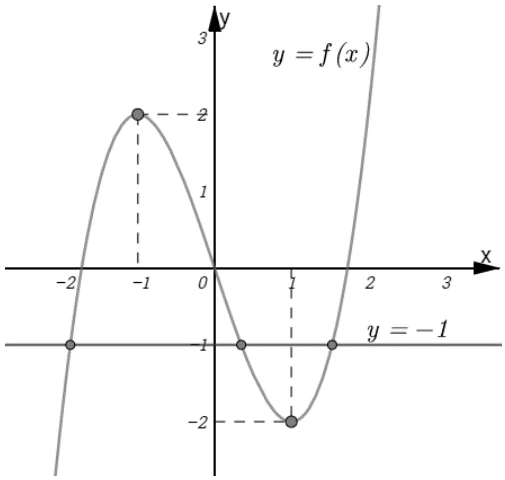


A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

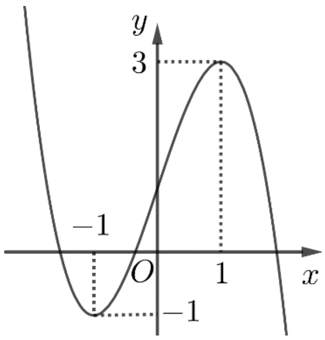
Chọn A

Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = -1$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -1$.



Từ hình vẽ suy ra 3 nghiệm.

Câu 22: **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là



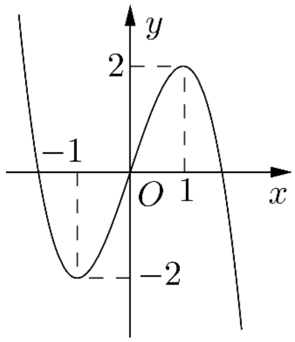
A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = 1$ có 3 nghiệm.

Câu 23: **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là



A. 1. **B.** 0.

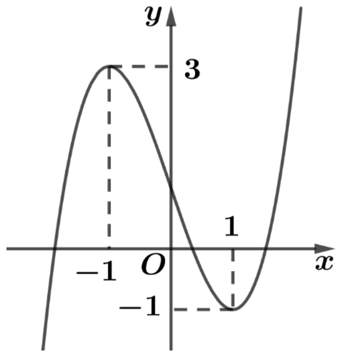
C. 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số ta có số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là 3.

Câu 24: **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 2$ là:

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = 2$.

Dựa vào đồ thị ta có phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Câu 25: **(Mã 101 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

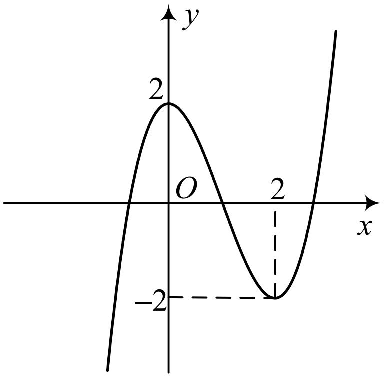
Chọn C

Ta có $2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{3}{2}$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \dfrac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên của $f(x)$ ta có số giao điểm của đồ thị

Câu 26: **(Mã 101 2018)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)+4=0$ là



A. 2 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 3

Lời giải

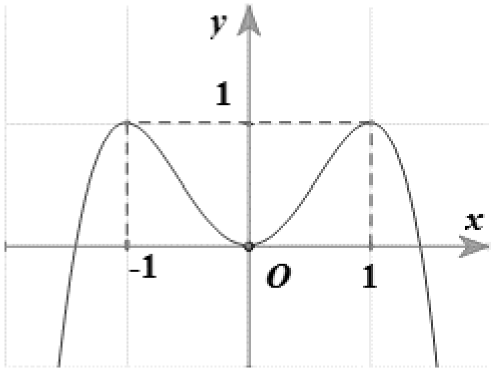
Chọn D

Ta có: $3f(x)+4=0 \Leftrightarrow f(x)=-\frac{4}{3}$ $(*)$

$(*)$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-\frac{4}{3}$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy $(*)$ có 3 nghiệm.

Câu 27: **(Mã 102 2018)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c(a,b,c\in\mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên.



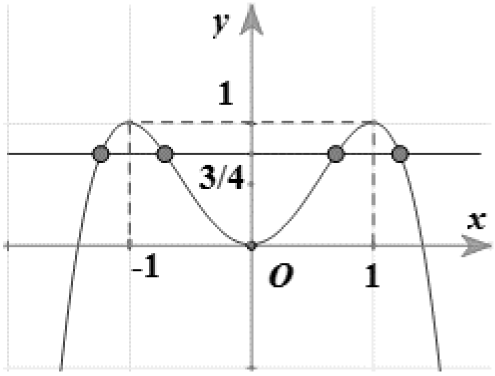
Số nghiệm của phương trình $4f(x)-3=0$ là

A. 2 **B.** 0 **C.** 4 **D.** 3

Lời giải

Chọn C

Ta có $4f(x)-3=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{3}{4}$



Đường thẳng $y=\dfrac{3}{4}$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại 4 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 28: **(Mã 103 2019)** Cho hàm số $f(x)$ bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	0		0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-3=0$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

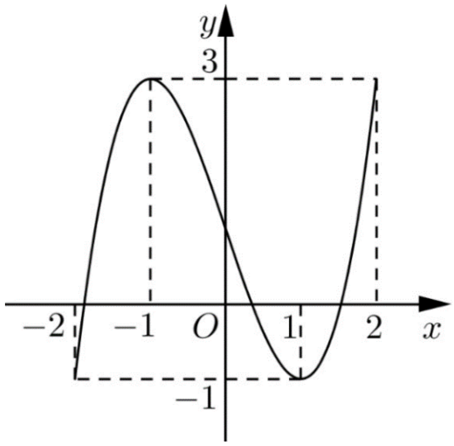
Ta có $2f(x)-3=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{3}{2}$ (1).

Số nghiệm thực của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$.

Từ bảng biến thiên đã cho của hàm số $f(x)$, ta thấy đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

Do đó phương trình (1) có ba nghiệm thực phân biệt.

Câu 29: **(Mã 103 2018)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-2;2\right]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f\left(x\right)-4=0$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$ là



A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

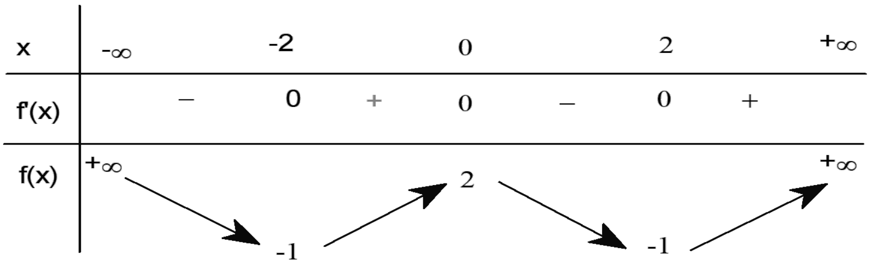
Lời giải

Chọn B

Ta có $3f(x)-4=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{4}{3}$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy đường thẳng $y=\dfrac{4}{3}$ cắt $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 30: **(Mã 102 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau



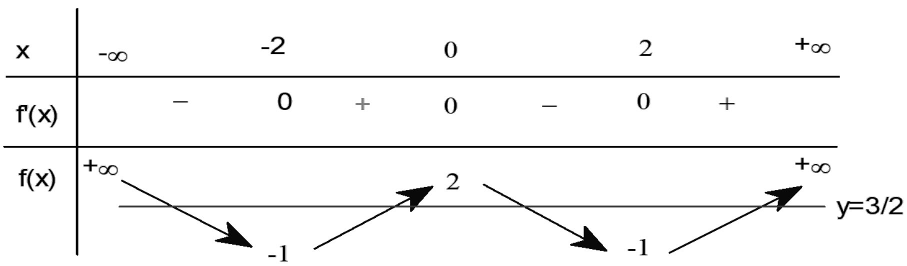
Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)-5=0$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Bảng biến thiên



Xét phương trình $3f(x)-5=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{5}{3}$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $(C): y=f(x)$ và đường thẳng $d: y=\dfrac{3}{2}$. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt.

Câu 31: **(Mã 104 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f\left(x\right)+3=0$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

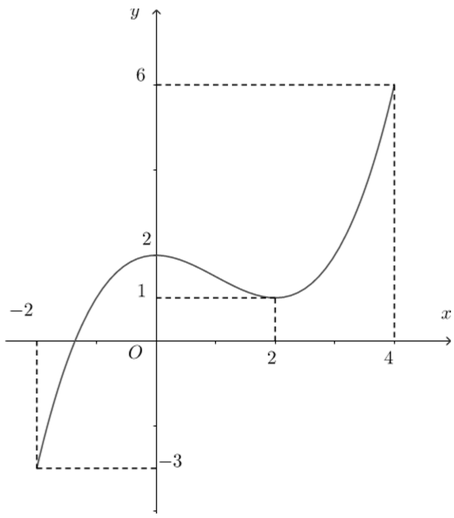
x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$y=-\frac{3}{2}$

Ta có $2f\left(x\right)+3=0 \Leftrightarrow f\left(x\right)=-\dfrac{3}{2}$.

Nhìn bảng biến thiên ta thấy phương trình này có 3 nghiệm.

Câu 32: **(Mã 104 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[-2;4\right]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)-5=0$ trên đoạn $\left[-2;4\right]$ là



A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

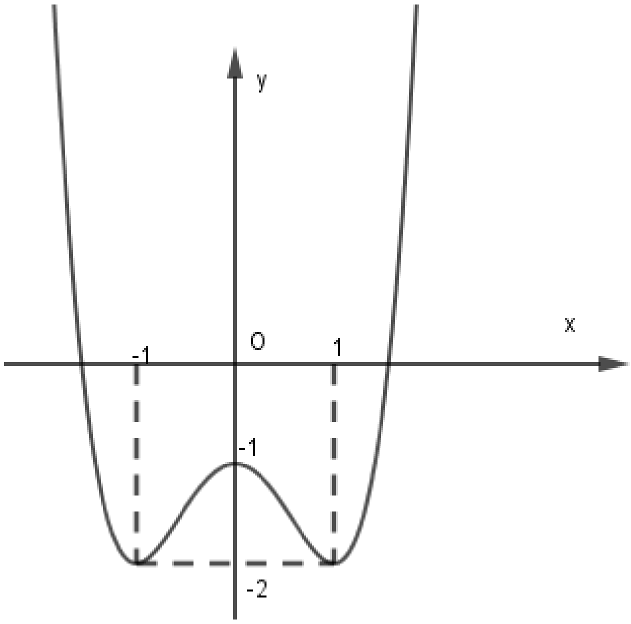
Ta có $3f(x)-5=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{5}{3}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y=\dfrac{5}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại ba điểm phân biệt thuộc đoạn $\left[-2;4\right]$.

Do đó phương trình $3f(x)-5=0$ có ba nghiệm thực.

Câu 33: **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực của

phương trình $f(x)=-\dfrac{3}{2}$ là

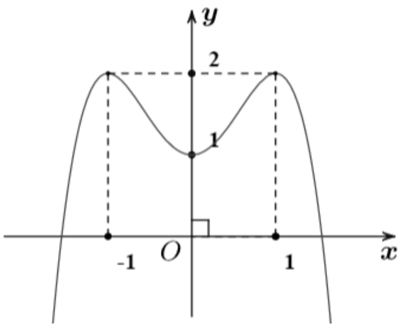


A. 4 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Lời giải

Từ đồ thị ta $f(x)=-\dfrac{3}{2}$ có 4 nghiệm phân biệt

Câu 34: **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$ là

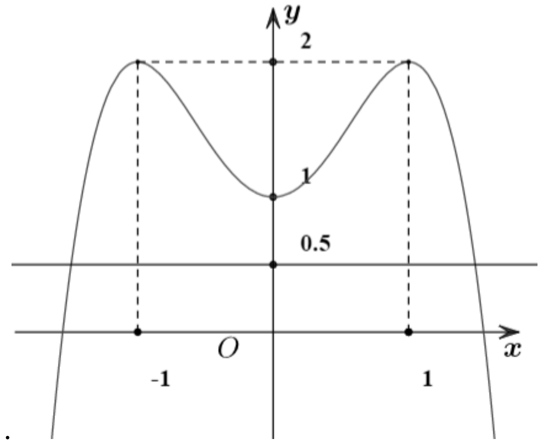


A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

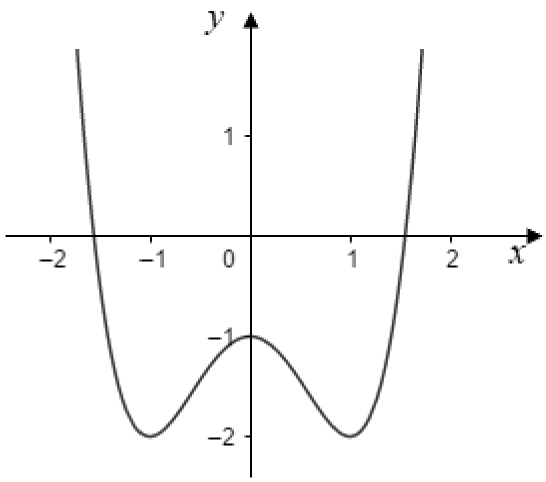
Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ với đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$



Dựa vào hình trên ta thấy đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ với đường thẳng $y=\frac{1}{2}$ có 2 giao điểm.

Vậy phương trình $f\left(x\right)=\frac{1}{2}$ có hai nghiệm.

Câu 35: **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=-\frac{1}{2}$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** $x=1$.

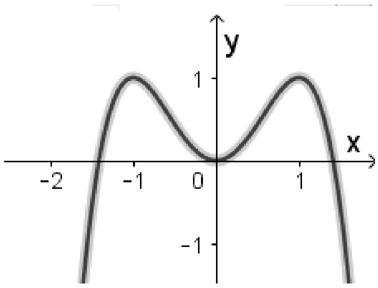
Lời giải

Số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=-\frac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=-\frac{1}{2}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy: đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=-\frac{1}{2}$ cắt nhau tại 2 điểm.

Nên phương trình $f\left(x\right)=-\frac{1}{2}$ có 2 nghiệm.

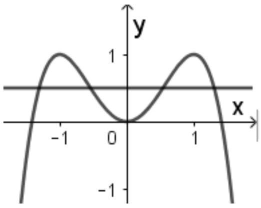
Câu 36: **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=\frac{1}{2}$ là



A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A



Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=\frac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đường thẳng $y=\frac{1}{2}$ và có đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Ta thấy đường thẳng $y=\frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số tại 4 điểm nên phương trình $f(x)=\frac{1}{2}$ có 4 nghiệm.

Câu 37: **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ và trục hoành là

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-3=3(x^2-1)$; $y'=0\Leftrightarrow x=\pm1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$y'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$y(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Câu 38: **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ và đồ thị hàm số $y=3x^2+3x$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$$x^3+3x^2=3x^2+3x\Leftrightarrow x^3-3x=0\Leftrightarrow x(x^2-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt{3}\\x=-\sqrt{3}\end{array}\right..$$

Hai đồ thị đã cho cắt nhau tại 3 điểm.

Câu 39: **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-x^2$ và đồ thị hàm số $y=-x^2+5x$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-x^2$ và đồ thị hàm số $y=-x^2+5x$ chính là số nghiệm thực của phương trình $x^3-x^2=-x^2+5x \Leftrightarrow x^3-5x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Câu 40: **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+x^2$ và đồ thị hàm số $y=x^2+5x$

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3+x^2=x^2+5x \Leftrightarrow x^3-5x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Vậy số giao điểm của 2 đồ thị là 3.

Câu 41: **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^2+3x$ và đồ thị hàm số $y=x^3-x^2$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x^3-x^2=-x^2+3x \Leftrightarrow x^3-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$

.

Câu 42: **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+7x$ với trục hoành là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành là: $-x^3+7x=0$

$\Leftrightarrow x\left(x^2-7\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{7} \end{array}\right.$.

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+7x$ với trục hoành bằng 3.

Câu 43: **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x$ với trục hoành là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành dộ giao điểm $-x^3+3x=0 \Leftrightarrow x(-x^2+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Vậy có 3 giao điểm.

Câu 44: **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+6x$ với trục hoành là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+6x$ với trục hoành là nghiệm của phương trình $-x^3+6x=0$ (*) $\Leftrightarrow -x\left(x^2-6\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{6} \end{array}\right.$.

Phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt, do đó đồ thị hàm số $y=-x^3+6x$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

Câu 45: **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+5x$ với trục hoành là:

A. 3 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 1

Lời giải

Chọn A

Ta có $-x^3+5x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{5} \\ x=-\sqrt{5} \\ x=0 \end{array}\right.$

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+5x$ với trục hoành là 3

Câu 46: **(Mã 105 2017)** Cho hàm số $y=(x-2)\left(x^2+1\right)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (C) cắt trục hoành tại một điểm. **B.** (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

C. (C) cắt trục hoành tại hai điểm. **D.** (C) không cắt trục hoành.

Lời giải

Chọn A

Dễ thấy phương trình $(x-2)\left(x^2+1\right)=0$ có 1 nghiệm $x=2 \Rightarrow (C)$ cắt trục hoành tại một điểm.

Câu 47: **(Đề Minh Họa 2017)** Biết rằng đường thẳng $y=-2x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+x+2$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0

A. $y_0=4$ **B.** $y_0=0$ **C.** $y_0=2$ **D.** $y_0=-1$

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-2x+2=x^3+x+2 \Leftrightarrow x^3+3x=0 \Leftrightarrow x=0$

Với $x_0=0 \Rightarrow y_0=2$.

Câu 48: **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho hàm số $y=x^3-3x$ có đồ thị (C). Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

A. 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành: $x^3-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$

Vậy số giao điểm của (C) và trục hoành là 3.

Câu 49: **(Mã 123 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=mx-m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+x+2$ tại ba điểm A,B,C phân biệt sao $AB=BC$

A. $m\in\left(-\frac{5}{4};+\infty\right)$ **B.** $m\in(-2;+\infty)$

C. $m\in\mathbb{R}$ **D.** $m\in(-\infty;0)\cup[4;+\infty)$

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là: $x^3-3x^2+x+2=mx-m+1 \Leftrightarrow x^3-3x^2+x-mx+m+1=0 \quad (1)$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-m-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x-m-1=0 \end{array}\right.$.Để đường thẳng cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt thì phương trình $x^2-2x-m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.Hay $\begin{cases} 1+m+1>0 \\ 1-2-m-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-2 \\ m\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m>-2$.Với $m>-2$ thì phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt là $1,x_1,x_2$ (x_1,x_2 là nghiệm của $x^2-2x-m-1=0$). Mà $\frac{x_1+x_2}{2}=1$ suy ra điểm có hoành độ x=1 luôn là trung điểm của hai điểm còn lại. Nên luôn có 3 điểm A,B,C thoả mãn $AB=BC$

Vậy $m>-2$.

Câu 50: **(Mã 101 2019)** (Mã đề 001) Cho hai hàm số $y=\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}$ và $y=|x+2|-x+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $[2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2]$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}=|x+2|-x+m$

$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}-|x+2|+x=m\,(1)$

Hàm số

$$p(x)=\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}-|x+2|+x=\begin{cases}\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}-2 & \text{khi } x\ge -2\\ \frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+2x+2 & \text{khi } x<-2\end{cases}$$

.

Ta có $p'(x)=\begin{cases}\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}>0, \forall x\in(-2;+\infty)\setminus\{-1;0;1;2\}\\ \frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+2>0, \forall x<-2\end{cases}$

nên hàm số $y=p(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;+\infty)$.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x)=-\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$+$	$+$	$+$	$+$	
$g(x)$	$-\infty \nearrow$	$\frac{49}{12} \nearrow$	$+\infty$ || $-\infty \nearrow$	$+\infty$ || $-\infty \nearrow$	$+\infty$ || $-\infty \nearrow$	$+\infty$ || $-\infty \nearrow$	2

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có 4 nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=p(x)$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m\ge 2$.

Câu 51: **(Mã 103 2019)** Cho hai hàm số $y=\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}$ và $y=|x+2|-x-m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2)$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $(-2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2]$. **C.** $[-2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm

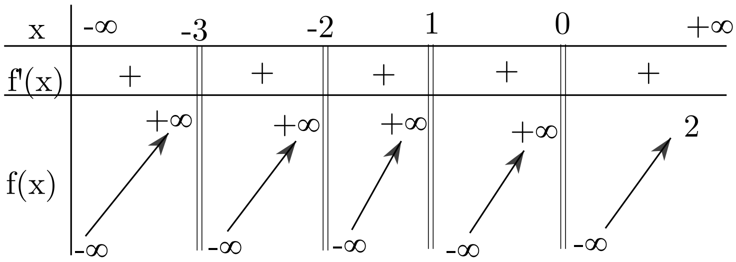
$$\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}=|x+2|-x-m \Leftrightarrow \frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}-|x+2|+x=-m \ (1)$$

Xét $f(x)=\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}-|x+2|+x, x\in D=\mathbb{R}\setminus\{-3;-2;-1;0\}$

Ta có $f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}-2, x\in(-2;+\infty)\cup D=D_1\\ \frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+2x+2, x\in(-\infty;-2)\cup D=D_2\end{cases}$

Có $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x+3)^2}, \forall x\in D_1\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x+3)^2}+2, \forall x\in D_2\end{cases}$

Dễ thấy $f'(x)>0, \forall x\in D_1\cup D_2$, ta có bảng biến thiên



Hai đồ thị cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biện khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 4 nghiệm phân biệt, từ bảng biến thiên ta có: $-m\geq 2\Leftrightarrow m\leq -2$.

Câu 52: **(Mã 102 2019)** Cho hai hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{x+3}{x+4}$ và $y=|x+1|-x+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt là

A. $(-\infty;3]$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $[3;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x\neq -1;\ x\neq -2;\ x\neq -3$ và $x\neq -4$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+3}{x+4}=|x+1|-x+m$$

$$\left(1-\frac{1}{x+1}\right)+\left(1-\frac{1}{x+2}\right)+\left(1-\frac{1}{x+3}\right)+\left(1-\frac{1}{x+4}\right)=|x-1|-x+m$$

$$\Leftrightarrow x-|x+1|+4-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right)=m$$

Đặt tập $D_1=(-1;+\infty)$ và $D_2=(-\infty;-4)\cup(-4;-3)\cup(-3;-2)\cup(-2;-1)$.

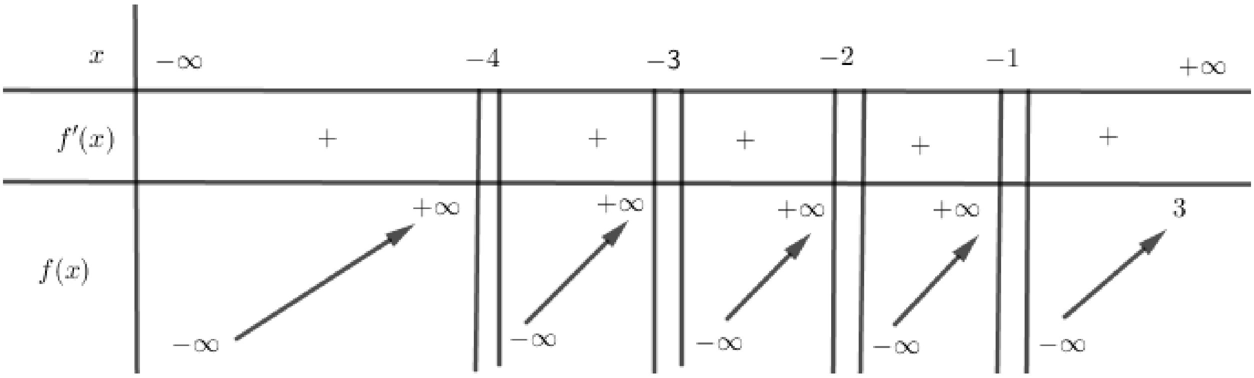
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}\right)=m, \quad \text{khi } x\in D_1\\ 2x+5-\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}\right)=m, \text{ khi } x\in D_2\end{array}\right.$$

Đặt $f(x)=\begin{cases}3-\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}\right), & \text{khi } x\in D_1\\ 2x+5-\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}\right), & \text{khi } x\in D_2\end{cases}$.

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x+3)^2}+\dfrac{1}{(x+4)^2}\right)>0, & \text{khi } x\in D_1\\ 2+\left(\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x+3)^2}+\dfrac{1}{(x+4)^2}\right)>0, & \text{khi } x\in D_2\end{cases}.$$

Vậy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ nên ta có bảng biến thiên



Do đó để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $m\ge 3\Rightarrow m\in[3;+\infty)$.

Câu 53: **(Mã 104 2019)** Cho hai hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}$ và $y=|x+1|-x-m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $(-\infty;-3)$. **B.** $[-3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-3]$. **D.** $(-3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ

$$\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}=|x+1|-x-m\Leftrightarrow\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}-|x+1|+x=-m\ (1)$$

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của

$$F(x)=\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}-|x+1|+x=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}-1 & ,x>-1\\ \dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+2x+1, & x<-1\end{cases}$$

Ta có $F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}, x\in(-1;+\infty)\setminus\{0;1\}\\ \dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+2, x\in(-\infty;-1)\setminus\{-2\}\end{cases}.$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=3$

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to-2^+}F(x)=+\infty;\ \lim_{x\to-2^-}F(x)=-\infty;\ \lim_{x\to-1^+}F(x)=-\infty;\ \lim_{x\to-1^-}F(x)=+\infty\\&\lim_{x\to0^+}F(x)=-\infty;\ \lim_{x\to0^-}F(x)=+\infty;\ \lim_{x\to1^+}F(x)=-\infty;\ \lim_{x\to1^-}F(x)=+\infty\end{aligned}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	||	$+$	||	$+$	||	$+$	||	$+$	
$F(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Để phương trình có 4 nghiệm thì $-m \le 3 \Leftrightarrow m \ge -3$.

Câu 54: **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x)+3=0$ là

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sin x$. Do $x\in[-\pi;2\pi]$ nên $t\in[-1;1]$.

Khi đó ta có phương trình $2f(t)+3=0 \Leftrightarrow f(t)=-\dfrac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(t)=-\dfrac{3}{2}$ có 2 nghiệm $t=a\in(-1;0)$ và $t=b\in(0;1)$.

Trường hợp 1: $t=a\in(-1;0)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(-1;0)$ thì phương trình có 4 nghiệm $-\pi<x_1<x_2<0<\pi<x_3<x_4<2\pi$.

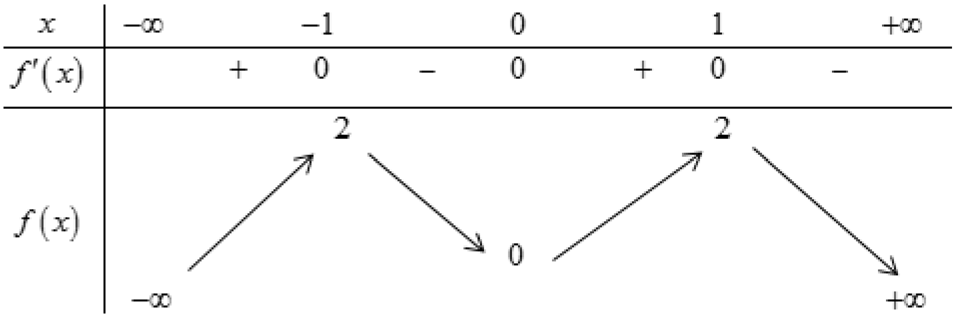
Trường hợp 2: $t=b\in(0;1)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(0;1)$ thì phương trình có 4 nghiệm $0<x_5<x_6<\pi$.

Hiển nhiên cả 6 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$

Câu 55: **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x)=1$ là

A. 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sin x$, $x\in\left[0;\frac{5\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in[-1;1]$

Khi đó phương trình $f(\sin x)=1$ trở thành $f(t)=1,\forall t\in[-1;1]$

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y=f(t)$ và đường thẳng $y=1$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(t)=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=a\in(-1;0)\\ t=b\in(0;1)\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $t=a\in(-1;0)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(-1;0)$ thì phương trình $\sin x=t$ có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $\pi<x_1<x_2<2\pi$.

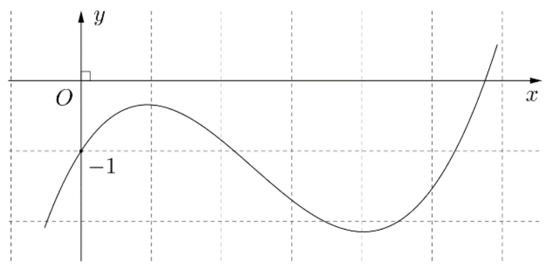
Trường hợp 2: $t=b\in(0;1)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(0;1)$ thì phương trình có 3 nghiệm x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $0<x_3<x_4<\pi;\ 2\pi<x_5<\frac{5\pi}{2}$;

Hiển nhiên cả 5 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{5\pi}{2}\right]$.

Câu 56: **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3f(x)\right)+1=0$ là

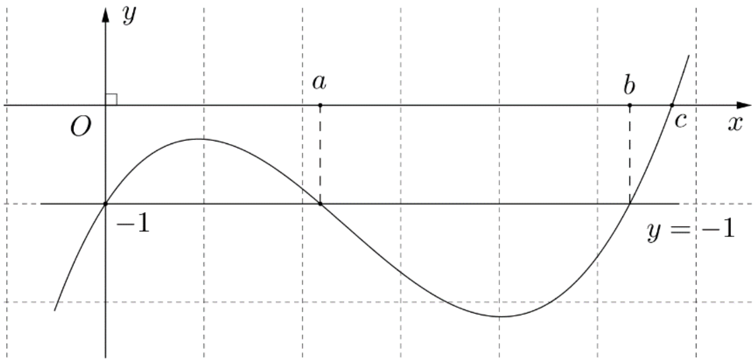


A. 8. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

$$f\left(x^3f(x)\right)+1=0 \Leftrightarrow f\left(x^3f(x)\right)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3f(x)=0 \\ x^3f(x)=a>0 \\ x^3f(x)=b>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \\ f(x)=\dfrac{a}{x^3} (\text{do } x\neq 0) \\ f(x)=\dfrac{b}{x^3} (\text{do } x\neq 0) \end{array}\right.$$



□ $f(x)=0$ có một nghiệm dương $x=c$.

□ Xét phương trình $f(x)=\dfrac{k}{x^3}$ với $x\neq 0,\ k>0$.

Đặt $g(x)=f(x)-\dfrac{k}{x^3}$.

$g'(x)=f'(x)+\dfrac{3k}{x^4}$.

□ Với $x>c$, nhìn hình ta ta thấy $f'(x)>0 \Rightarrow g'(x)=f'(x)+\dfrac{3k}{x^4}>0$

$\Rightarrow g(x)=0$ có tối đa một nghiệm.

Mặt khác $\begin{cases} g(c)<0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \end{cases}$ và $g(x)$ liên tục trên $(c;+\infty)$

$\Rightarrow g(x)=0$ có duy nhất nghiệm trên $(c;+\infty)$.

□ Với $0<x<c$ thì $f(x)<0<\dfrac{k}{x^3} \Rightarrow g(x)=0$ vô nghiệm.

□ Với $x<0$, nhìn hình ta ta thấy $f'(x)>0 \Rightarrow g'(x)=f'(x)+\dfrac{3k}{x^4}>0$

$\Rightarrow g(x)=0$ có tối đa một nghiệm.

Mặt khác $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)>0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty \end{cases}$ và $g(x)$ liên tục trên $(-\infty;0)$.

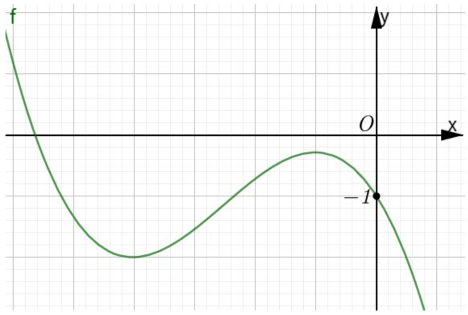
$\Rightarrow g(x)=0$ có duy nhất nghiệm trên $(-\infty;0)$.

Tóm lại $g(x)=0$ có đúng hai nghiệm trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Suy ra hai phương trình $f(x)=\dfrac{a}{x^3}$, $f(x)=\dfrac{b}{x^3}$ có 4 nghiệm phân biệt khác 0 và khác c.

Vậy phương trình $f\left(x^3f(x)\right)+1=0$ có đúng 6 nghiệm.

Câu 57: **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3 f(x)\right)+1=0$ là

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị, ta thấy $f\left(x^3 f(x)\right)+1=0 \Leftrightarrow f\left(x^3 f(x)\right)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3 f(x)=a\in(-6;-5) & (1) \\ x^3 f(x)=b\in(-3;-2) & (2) \\ x^3 f(x)=0 & (3) \end{array}\right.$

+ Phương trình (3) tương đương $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=x_1,\ (-6<x_1<a<-5) \end{array}\right.$.

+ Các hàm số $g(x)=\dfrac{a}{x^3}$ và $h(x)=\dfrac{b}{x^3}$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$, và nhận xét rằng $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình (1) nên:

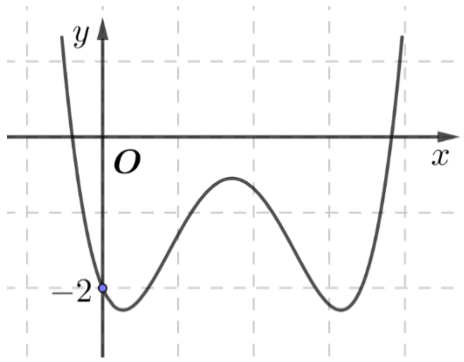
$(1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=h(x) \end{array}\right.$.

+ Trên khoảng $(-\infty;0)$, ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to0^-} h(x)=+\infty \end{cases}$ nên các phương trình $f(x)=g(x)$ và $f(x)=h(x)$ có nghiệm duy nhất.

+ Trên khoảng $(0;+\infty)$, ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+} h(x)=-\infty \end{cases}$ nên các phương trình $f(x)=g(x)$ và $f(x)=h(x)$ có nghiệm duy nhất.

Do đó, phương trình $f\left(x^3 f(x)\right)+1=0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 58: **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.

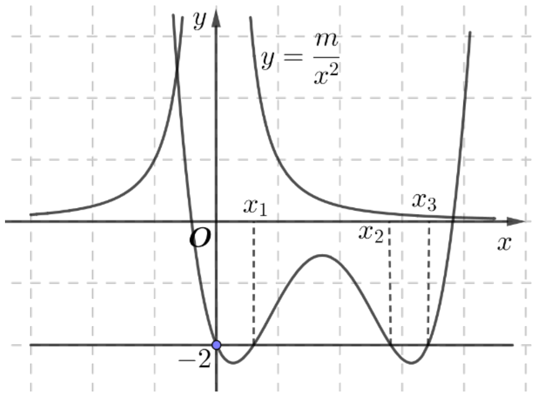


Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^2 f(x)\right)+2=0$ là

A. 8. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D



$$f\left(x^2 f(x)\right)+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 f(x)=0 \\ x^2 f(x)=a(1) \\ x^2 f(x)=b(2) \\ x^2 f(x)=c(3) \end{array}\right. \text{ với } 0<a<b<c.$$

Xét phương trình $f(x)=\frac{m}{x^2}(1) \quad (m>0)$.

Gọi α,β là hoành độ giao điểm của $(C): y=f(x)$ và Ox ; $\alpha<0<\beta$.

$(1) \Leftrightarrow f(x)-\frac{m}{x^2}=0$. Đặt $g(x)=f(x)-\frac{m}{x^2}$

Đạo hàm $g'(x)=f'(x)+\frac{2m}{x^3}$.

Trường hợp 1: $x<\alpha; f'(x)<0; \frac{2m}{x^3}<0 \Rightarrow g'(x)<0$

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty, g(\alpha)=-\frac{m}{\alpha^2}<0$. Phương trình $g(x)=0$ có một nghiệm thuộc $(-\infty;\alpha)$.

Trường hợp 2: $\alpha<x<\beta$

$f(x)<0$, $\frac{m}{x^2}>0$ suy ra $g(x)<0 \quad \forall x\in(\alpha,\beta)$.

Trường hợp 3: $x>\beta; f'(x)>0; \quad \frac{2m}{x^3}>0 \Rightarrow g'(x)>0$

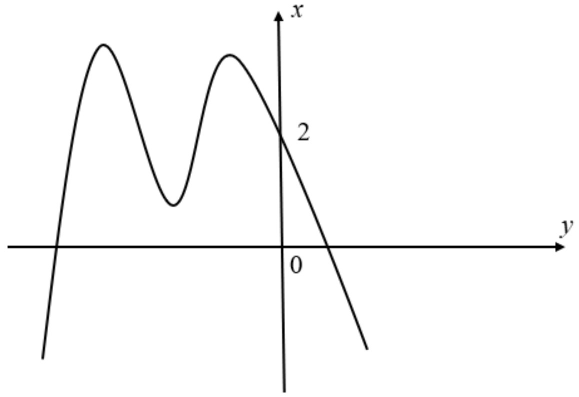
Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty, g(\beta)=-\frac{m}{\beta^2}<0$. Phương trình $g(x)=0$ có một nghiệm thuộc $(\beta;+\infty)$.

Vậy phương trình $f(x)=\frac{m}{x^2}$ có hai nghiệm $\forall m>0$.

Ta có: $x^2 f(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee f(x)=0$: có ba nghiệm.

Vậy phương trình (1) có 9 nghiệm.

Câu 59: **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x^2 f(x)\right)=2$ là:

A. 6. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f\left(x^2 f(x)\right)=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 f(x)=0 \\ x^2 f(x)=a<0 \\ x^2 f(x)=b<0 \\ x^2 f(x)=c<0 \end{array}\right.$.

Xét phương trình: $x^2 f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right.$ mà $f(x)=0$ có hai nghiệm $\Rightarrow x^2.f(x)=0$ có ba nghiệm.

Xét phương trình: $x^2 f(x)=a<0$

Do $x^2\ge 0$; $x=0$ không là nghiệm của phương trình $\Rightarrow f(x)=\frac{a}{x^2}<0$

Xét $g(x)=\frac{a}{x^2} \Rightarrow g'(x)=\frac{-2a}{x^3}$

Bảng biến thiên:

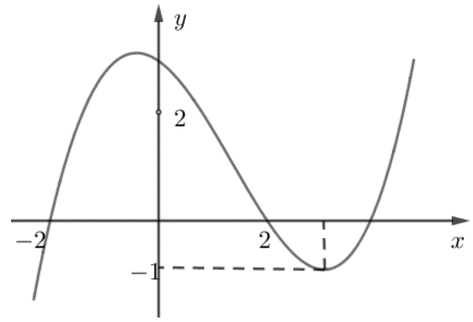
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	||	$+$
$g(x)$	$0 \searrow -\infty$	||	$-\infty \nearrow 0$

Từ bảng biến thiên với $f(x)<0 \Rightarrow f(x)=\frac{a}{x^2}$ có 2 nghiệm.

Tương tự: $x^2 f(x)=b$ và $x^2 f(x)=c$ $(b,c<0)$ mỗi phương trình cũng có hai nghiệm.

Vậy số nghiệm của phương trình $f\left(x^2 f\left(x\right)\right)=2$ là 9 nghiệm.

Câu 60: **(Mã 103 2019)** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\frac{3}{2}$ là

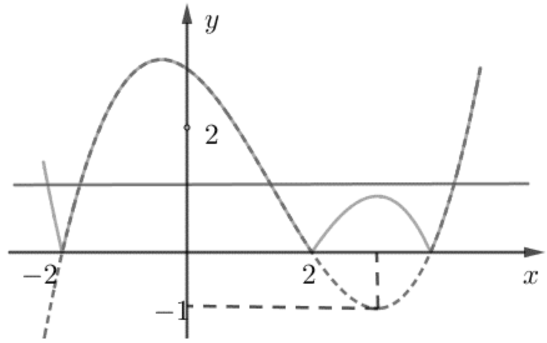


A. 7. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=x^3-3x$ ta có phương trình $\left|f\left(t\right)\right|=\frac{3}{2}$ $(*)$.



Từ đồ thị hàm số $y=\left|f\left(t\right)\right|$ và đường thẳng $y=\frac{3}{2}$ ta suy ra phương trình $(*)$ có 4 nghiệm $t_1<-2<t_2<0<t_3<2<t_4$

Xét hàm $t=x^3-3x$. Ta có $t'=3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$ Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
t'		+			-			+	
t	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Với $t_1<-2$ phương trình: $t_1=x^3-3x$ cho ta 1 nghiệm.

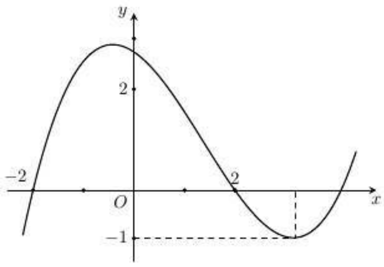
Với $-2<t_2<0$ phương trình: $t_2=x^3-3x$ cho ta 3 nghiệm.

Với $0<t_3<2$ phương trình: $t_3=x^3-3x$ cho ta 3 nghiệm.

Với $2<t_4$ phương trình: $t_4=x^3-3x$ cho ta 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có tất cả 8 nghiệm. **Chọn C**

Câu 61: **(Mã 104 2019)** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\dfrac{2}{3}$ là



A. 10 **B.** 3 **C.** 9 **D.** 6

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=g\left(x\right)=x^3-3x$ (1)

Ta có $g'\left(x\right)=3x^2-3=0\Leftrightarrow x\pm1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'\left(x\right)$		+	0	-	0	+	
$g\left(x\right)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có với $t\in\left(-2;2\right)$ cho ta 3 giá trị x thỏa mãn (1)

$t\in\left\{-2;2\right\}$ cho ta 2 giá trị x thỏa mãn (1)

$t\in\left(-\infty;-2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$ cho ta 1 giá trị x thỏa mãn (1).

Phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\dfrac{2}{3}$ (2) trở thành

$$\left|f\left(t\right)\right|=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(t\right)=\dfrac{2}{3}\\ f\left(t\right)=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

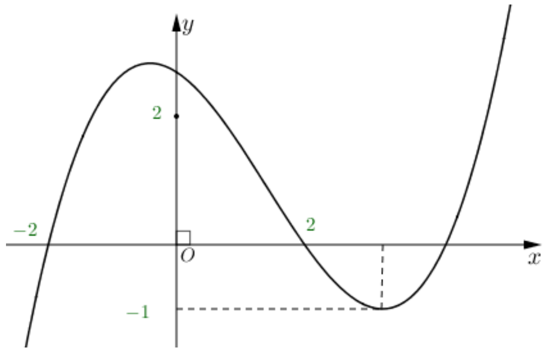
Dựa vào đồ thị ta có:

+ Phương trình $f\left(t\right)=\dfrac{2}{3}$ có 3 nghiệm thỏa mãn $-2<t_1<t_2<2<t_3\Rightarrow$ có 7 nghiệm của phương trình (2).

+ Phương trình $f\left(t\right)=-\dfrac{2}{3}$ có 3 nghiệm thỏa mãn $t_4<-2<2<t_5<t_6\Rightarrow$ có 3 nghiệm của phương trình (2).

Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm.

Câu 62: **(Mã 101 2019)** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\dfrac{4}{3}$ là



A. 7. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 8.

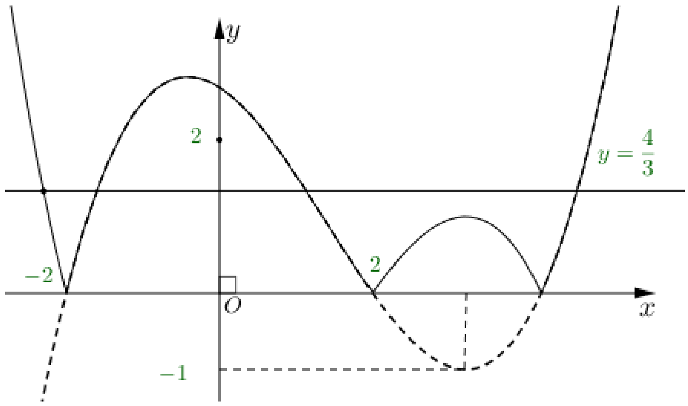
Lời giải

Chọn D

Đặt $t = x^3 - 3x \Rightarrow t' = 3x^2 - 3$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó $\left|f(t)\right| = \dfrac{4}{3}$ (1)



Dựa vào đồ thị hàm số $\left|f(t)\right|$ ta thấy phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $t_1 < -2,\ -2 < t_2 < 0,$ $0 < t_3 < 2$, $t_4 > 2$.

Mỗi nghiệm t của phương trình (1), ta thay vào phương trình $t = x^3 - 3x$ để tìm nghiệm x.

Khi đó

+ $t_1 < -2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm.

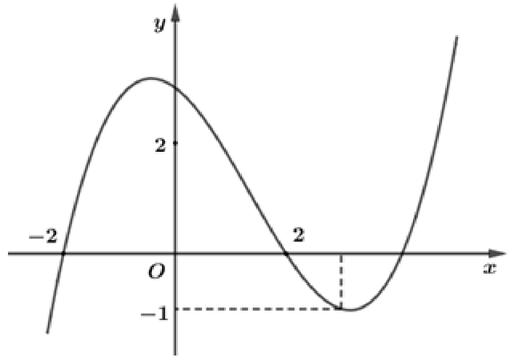
+ $-2 < t_2 < 0 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm.

+ $0 < t_3 < 2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm.

+ $t_4 > 2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình $\left|f\left(x^3 - 3x\right)\right| = \dfrac{4}{3}$ có 8 nghiệm.

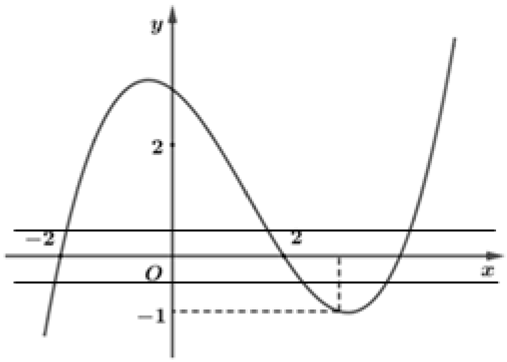
Câu 63: **(Mã 102 2019)** Cho hàm số bậc ba $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3 - 3x\right)\right| = \frac{1}{2}$



A. 6. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\left|f\left(x^3 - 3x\right)\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f\left(x^3 - 3x\right) = \frac{1}{2} & (1) \\ f\left(x^3 - 3x\right) = -\frac{1}{2} & (2) \end{array}\right.$

+) $(1) \Leftrightarrow f\left(x^3 - 3x\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 - 3x = \alpha_1\left(-2 < \alpha_1 < 0\right) \\ x^3 - 3x = \alpha_2\left(0 < \alpha_2 < 2\right) \\ x^3 - 3x = \alpha_3\left(\alpha_3 > 2\right) \end{array}\right.$

+) $(2) \Leftrightarrow f\left(x^3 - 3x\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 - 3x = \alpha_4\left(x_4 < -2\right) \\ x^3 - 3x = \alpha_5\left(\alpha_5 > 2\right) \\ x^3 - 3x = \alpha_6\left(\alpha_6 > 2\right) \end{array}\right.$

Xét hàm số $y = x^3 - 3x,\ D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = 3x^2 - 3$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

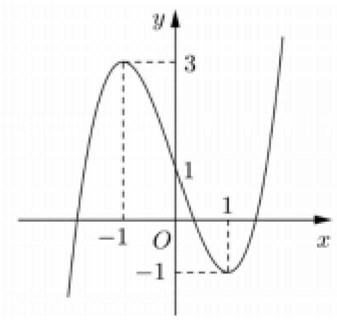
Phương trình: $x^3-3x=\alpha_1$ có 3 nghiệm.

Phương trình: $x^3-3x=\alpha_2$ có 3 nghiệm.

Mỗi phương trình $x^3-3x=\alpha_3$, $x^3-3x=\alpha_4$, $x^3-3x=\alpha_5$, $x^3-3x=\alpha_6$ đều có một nghiệm

Từ đó suy ra phương trình $\left|f\left(x^2-3x\right)\right|=\dfrac{1}{2}$ có 10 nghiệm.

Câu 64: **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\sin x\right)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$ là



A. $\left(-1;3\right)$ **B.** $\left[-1;1\right)$ **C.** $\left[-1;3\right)$ **D.** $\left(-1;1\right)$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sin x\Rightarrow\forall x\in\left(0;\pi\right)\Rightarrow t\in\left(0;1\right]$

Vậy phương trình trở thành $f\left(t\right)=m$. Dựa và đồ thị hàm số suy ra $m\in\left[-1;1\right)$.

Câu 65: **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $\left(0;+\infty\right)$?

A. 25. **B.** 30. **C.** 29. **D.** 24.

Lời giải

Chọn B

Ta đặt: $g\left(x\right)=f\left(x^2-4x\right)$.

$g'(x)=(2x-4)f'(x^2-4x)$

$=2(x-2)(x^2-4x+4)(x^2-4x+2)(x^2-4x)$ (dựa vào bảng biến thiên)

$=2(x-2)^3(x^2-4x+2)x(x-4)$.

Mặt khác:

$g(0)=f(0)=-3$;

$g(2-\sqrt{2})=g(2+\sqrt{2})=f(-2)=2$;

$g(2)=f(-4)=-2$;

$g(4)=f(0)=-3$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta được: yêu cầu bài toán tương đương $-3<\dfrac{m}{6}\le 2$

$\Leftrightarrow -18<m\le 12$.

Vậy có tất cả 30 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 66: **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f(x^2-4x)=m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

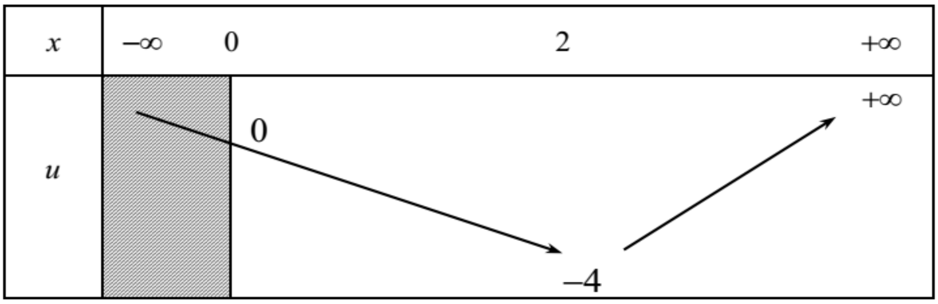
A. 15. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 13.

Lời giải

Chọn A

Đặt $u=x^2-4x$ (1)

Ta có BBT sau:



Ta thấy:
+ Với $u < -4$, phương trình (1) vô nghiệm.
+ Với $u = -4$, phương trình (1) có một nghiệm $x = 2 > 0$.
+ Với $-4 < u < 0$, phương trình (1) có hai nghiệm $x > 0$.
+ Vơi $u \geq 0$, phương trình (1) có một nghiệm $x > 0$

Khi đó $3f\left(x^2 - 4x\right) = m \Rightarrow f\left(u\right) = \frac{m}{3}$ (2), ta thấy:

+ Nếu $\frac{m}{3} = -3 \Leftrightarrow m = -9$, phương trình (2) có một nghiệm $u = 0$ nên phương trình đã cho có một nghiệm $x > 0$.

+ Nếu $-3 < \frac{m}{3} < -2 \Leftrightarrow -9 < m < -6$, phương trình (2) có một nghiệm $u > 0$ và một nghiệm $u \in \left(-2;0\right)$ nên phương trình đã cho có ba ngiệm $x > 0$.

+ Nếu $\frac{m}{3} = -2 \Leftrightarrow m = -6$, phương trình (2) có một nghiệm $u = -4$, một nghiệm $u \in \left(-2;0\right)$ và một nghiệm $u > 0$ nên phương trình đã cho có bốn nghiệm $x > 0$.

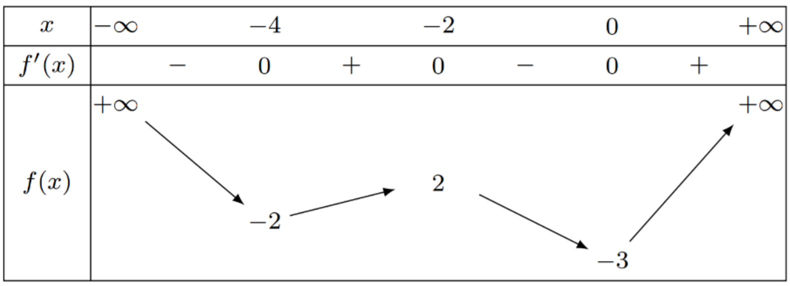
+ Nếu $-2 < \frac{m}{3} < 2 \Leftrightarrow -6 < m < 6$, phương trình (2) có một nghiệm $u < -4$, hai nghiệm $u \in \left(-4;0\right)$ và một nghiệm $u > 0$ nên phương trình đã cho có năm nghiệm $x > 0$.

+ Nếu $\frac{m}{3} = 2 \Leftrightarrow m = 6$, phương trình (2) có một nghiệm $u < -4$, một nghiệm $u = -2$ và một nghiệm $u > 0$ nên phương trình đã cho có ba nghiệm $x > 0$.

+ Nếu $\frac{m}{3} > 2 \Leftrightarrow m > 6$, phương trình (2) có một nghiệm $u < -4$ và một nghiệm $u > 0$ nên phương trình đã cho có một nghiệm $x > 0$.

Vậy $-9 < m \leq 6 \Rightarrow$ có 15 giá trị m nguyên thỏa ycbt.

Câu 67: **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $5f\left(x^2 - 4x\right) = m$ có ít nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(0;+\infty\right)$

A. 24. **B.** 21. **C.** 25. **D.** 20.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = x^2 - 4x$. Ta có $t' = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Bảng biến thiên

x	0		2		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	
t	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Với $t = x^2 - 4x$.

x	0				2						$+\infty$
t	0	$\searrow$	-2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f(t)$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $-3 < \dfrac{m}{5} \le 2 \Leftrightarrow -15 < m \le 10$. Vì m nguyên nên $m \in \{-14;-13;....;10\}$. Do đó có 25 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 68: **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

A. 16. **B.** 19. **<u>C</u>.** 20. **D.** 17.

Lời giải

Chọn C

Ta có $4f(x^2 - 4x) = m \Leftrightarrow f(x^2 - 4x) = \dfrac{m}{4}$

Đặt $t = x^2 - 4x \Rightarrow t' = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Vì $x \in (0;+\infty) \Rightarrow t \ge -4$

Ta có $f\left(t\right)=\frac{m}{4}$

Phương trình đã cho có ít nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(0;+\infty\right)$

$\Rightarrow -3<\frac{m}{4}\le 2 \Leftrightarrow -12<m\le 8$ mà m nguyên nên $m\in\left\{-11;-10;...;0;1;...;8\right\}$

Vậy có 20 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

CHƯƠN I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

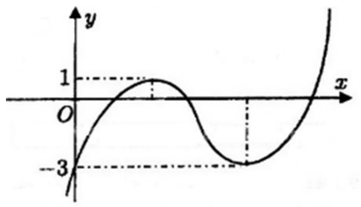
BÀI 6. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ THÔNG QUA ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN

Nghiệm của phương trình $af\left(x\right)+b=0$ là số giao điểm của đường thẳng $y=\frac{-b}{a}$ với đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$

Câu 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



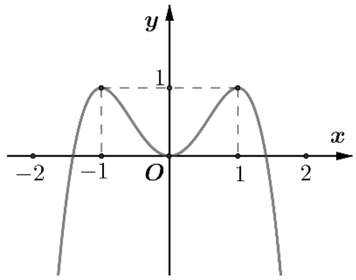
Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=2$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $1-2.f(x)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 4 **B.** 3

C. Vô nghiệm **D.** 2



Câu 3: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên sau đây.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hỏi phương trình $2.f\left(x\right)-5=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 4: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình bên.

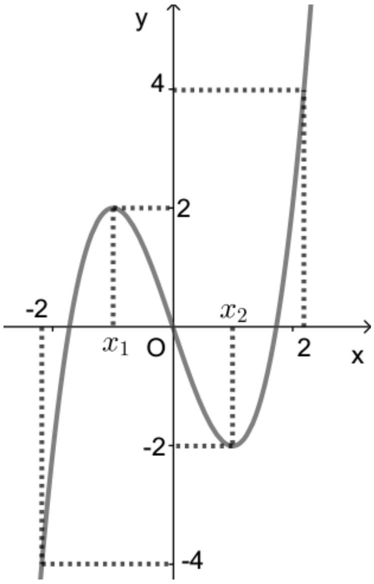
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)-3=0$ là

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[-2;2\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình $\left|f(x)\right|=1$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$.

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.



DẠNG 2. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ THÔNG QUA HÀM SỐ CHO TRƯỚC

Cho hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=g(x)$.

Bước 1. Giải phương trình $f(x)=g(x)$.

Bước 2. Tìm

●Số giao điểm?

●Hoành độ giao điểm?

●Tung độ giao điểm?

Câu 6: Gọi P là số giao điểm của hai đồ thị $y=x^3-x^2+1$ và $y=x^2+1$. Tìm P.

A. $P=0$. **B.** $P=2$. **C.** $P=1$. **D.** $P=3$.

Câu 7: Cho hàm số $y=x^4-3x^2$ có đồ thị $\left(C\right)$. Số giao điểm của đồ thị $\left(C\right)$ và đường thẳng $y=2$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 8: Biết rằng đường thẳng $y=4x+5$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2x+1$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0=10$. **B.** $y_0=13$. **C.** $y_0=11$. **D.** $y_0=12$.

Câu 9: Đồ thị của hàm số $y=-x^4-3x^2+1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bao nhiêu

A. -3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 10: Số giao điểm của đường cong $y=x^3-2x^2+2x+1$ và đường thẳng $y=1-x$ là

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Câu 11: đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2+1$ và đồ thị hàm số $y=-2x^2+7$ có bao nhiêu điểm chung?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 12: Cho hàm số $y=-2x^3+5x$ có đồ thị (C) Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 13: Cho hàm số $y=(x-3)(x^2+2)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (C) cắt trục hoành tại hai điểm. **B.** (C) cắt trục hoành tại một điểm.

C. (C) không cắt trục hoành. **D.** (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

Câu 14: Biết rằng đường thẳng $y=x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+x+4$ tại điểm duy nhất, kí hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0=1$. **B.** $y_0=3$. **C.** $y_0=-2$. **D.** $y_0=4$.

Câu 15: đồ thị hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?

A. $y=\frac{x-1}{x-3}$. **B.** $y=\frac{x+1}{x+4}$. **C.** $y=\frac{x-1}{x+2}$. **D.** $y=\frac{2x-1}{x+5}$.

Câu 16: Gọi M,N là giao điểm của đường thẳng $y=x+1$ và đường cong $y=\frac{2x+4}{x-1}$. Khi đó hoành độ x_I của trung điểm I của đoạn MN bằng bao nhiêu?

A. $x_I=2$. **B.** $x_I=1$. **C.** $x_I=-5$. **D.** $x_I=-\frac{5}{2}$.

Câu 17: Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-3}$ có đồ thị (C) và các đường thẳng $d_1:y=2x$, $d_2:y=2x-2$, $d_3:y=3x+3$, $d_4:y=-x+3$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng trong bốn đường thẳng d_1,d_2,d_3,d_4 đi qua giao điểm của (C) và trục hoành.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 18: Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x^4-4}+5$ và đường thẳng $y=x$

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

DẠNG 3. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC 3

Bài toán tổng quát: Tìm các giá trị của tham số m để để đường thẳng $d: y = px + q$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tại 3 điểm phân biệt thỏa điều kiện K ?

Phương pháp giải:

Bước 1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $ax^3 + bx^2 + cx + d = px + q$

Đưa về phương trình bậc ba và nhẩm nghiệm đặc biệt $x = x_o$ để chia Hoocner được:

$$(x - x_o)\cdot(ax^2 + b'x + c') = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_o \\ g(x) = ax^2 + b'x + c' = 0 \end{array}\right..$$

Bước 2. Để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác $x_o \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{g(x)} > 0 \\ g(x_o) \neq 0 \end{cases}\cdot$ Giải hệ này, tìm được giá trị $m \in D_1$.

Bước 3. Gọi $A(x_o; px_o + q)$, $B(x_1; px_1 + q)$, $C(x_2; px_2 + q)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của $g(x) = 0$.

Theo Viét, ta có: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b'}{a}$ và $x_1x_2 = \dfrac{c'}{a}$

Bước 4. Biến đổi điều kiện K về dạng tổng và tích của x_1, x_2

Thế vào sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến là m. Giải chúng sẽ tìm được giá trị $m \in D_2$.

Kết luận: $m \in D_1 \cap D_2$.

Một số công thức tính nhanh " thường gặp " liên quan đến cấp số

- **Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.**

Điều kiện cần:

Giả sử x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Khi đó: $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, đồng nhất hệ số ta được $x_2 = -\dfrac{b}{3a}$

Thế $x_2 = -\dfrac{b}{3a}$ vào phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ta được điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số.

Điều kiện đủ:

Thử các điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số để phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

- **Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số nhân.**

Điều kiện cần:

Giả sử x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Khi đó: $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, đồng nhất hệ số ta được $x_2 = \sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}$

Thế $x_2=\sqrt[3]{-\frac{d}{a}}$ vào phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ta được điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số.

Điều kiện đủ:

Thử các điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số để phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 19: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+2m$. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 20: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ (C) cắt đường thẳng $d: y=m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt x_1,x_2,x_3.

A. $m>-2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m>-3$. **D.** $m=-3$.

Câu 21: Đường thẳng Δ có phương trình $y=2x+1$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-x+3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ trong đó $x_B<x_A$. Tìm x_B+y_B?

A. $x_B+y_B=-5$ **B.** $x_B+y_B=-2$ **C.** $x_B+y_B=4$ **D.** $x_B+y_B=7$

Câu 22: Cho hàm số $y=x^3+3mx^2-m^3$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $d: y=m^2x+2m^3$. Biết rằng $m_1,m_2\ (m_1>m_2)$ là hai giá trị thực của m để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1,\ x_2,\ x_3$ thỏa mãn ${x_1}^4+{x_2}^4+{x_3}^4=83$. Phát biểu nào sau đây là ***đúng*** về quan hệ giữa hai giá trị $m_1,\ m_2$?

A. $m_1+m_2=0$. **B.** ${m_1}^2+2m_2>4$. **C.** ${m_2}^2+2m_1>4$. **D.** $m_1-m_2=0$.

Câu 23: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ cắt đường thẳng $y=m$ tại ba điểm phân biệt.

A. $m\in(-\infty;-4)$. **B.** $m\in(-4;0)$.

C. $m\in(0;+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$.

Câu 24: Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+(m^2-2)x+2m^2+4$ cắt các trục tọa độ $Ox,\ Oy$ lần lượt tại $A,\ B$ sao cho diện tích tam giác OAB bằng 8 là

A. $m=\pm2$. **B.** $m=\pm1$. **C.** $m=\pm\sqrt{3}$. **D.** $m=\pm\sqrt{2}$.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3+3x^2-2=m$ có ba nghiệm phân biệt.

A. $m\in(2;+\infty]$. **B.** $m\in(-\infty;-2]$. **C.** $m\in(-2;2)$. **D.** $m\in[-2;2]$.

Câu 26: Đường thẳng Δ có phương trình $y=2x+1$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-x+3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ trong đó $x_B<x_A$. Tìm x_B+y_B ?

A. $x_B+y_B=-5$ **B.** $x_B+y_B=-2$ **C.** $x_B+y_B=4$ **D.** $x_B+y_B=7$

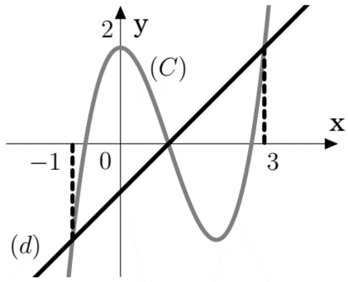
Câu 27: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3 - 3x^2 = 2m + 1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{3}{2}$. **C.** $-\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2m\text{x}^2 + 3(m-1)x + 5$ tại 3 điểm phân biệt.

A. $\left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m \leq 1 \end{cases} \\ m \geq 2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m < 1 \end{cases} \\ m > 2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{array}\right.$.

Câu 29: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ, đường thẳng d có phương trình $y = x - 1$. Biết phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm $x_1 < x_2 < x_3$. Giá trị của $x_1 x_3$ bằng



A. -3. **B.** $-\frac{7}{3}$. **C.** -2. **D.** $-\frac{5}{2}$.

Câu 30: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2019]$ để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 3$ và đường thẳng $y = 3x + 1$ có duy nhất một điểm chung?

A. 1. **B.** 2019. **C.** 4038. **D.** 2018.

Câu 31: Phương trình $x^3 - 6mx + 5 = 5m^2$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng khi

A. $m = 0$. **B.** $m = -1 \vee m = 1$. **C.** $m = 1$. **D.** $m \in \varnothing$.

Câu 32: Tính tổng tất cả các giá trị của m biết đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ và đường thẳng $y = x + 4$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C sao cho diện tích tam giác IBC bằng $8\sqrt{2}$ với $I(1;3)$.

A. 3. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 5.

Câu 33: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2019]$ để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 3$ và đường thẳng $y = 3x + 1$ có duy nhất một điểm chung?

A. 1. **B.** 2019. **C.** 4038. **D.** 2018.

Câu 34: Đường thẳng d có phương trình $y = x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;4)$, B và C sao cho diện tích của tam giác MBC bằng 4, với $M(1;3)$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

A. $m = 3$. **B.** $m = 2$ hoặc $m = 3$.

C. $m = -2$ hoặc $m = -3$. **D.** $m = -2$ hoặc $m = 3$

Câu 35: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=-x+5$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+5$ tại ba điểm phân biệt.

A. $\left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m\neq\dfrac{2}{3} \\ m\leq 1 \end{cases} \\ m\geq 2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m\neq\dfrac{2}{3} \\ m<1 \end{cases} \\ m>2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\leq 1 \\ m\geq 2 \end{array}\right.$.

Câu 36: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3-3x^2=2m+1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{3}{2}$. **C.** $-\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 37: Giá trị lớn nhất của m để đường thẳng $(d): y=x-m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2(m-2)x^2+(8-5m)x+m-5$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2+x_3^2=20$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Câu 38: Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y=-2x^3-3m^2x^2+(m^3+2m)x+2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 39: Tìm m để đồ thị (C)của $y=x^3-3x^2+4$ và đường thẳng $y=mx+m$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt $A(-1;0)$, B, C sao cho ΔOBC có diện tích bằng 64.

A. $m=14$. **B.** $m=15$. **C.** $m=16$. **D.** $m=17$.

Câu 40: Cho hàm số $y=x^3-8x^2+8x$ có đồ thị (C) và hàm số $y=x^2+(8-a)x-b$ có đồ thị (P). Biết đồ thị hàm số (C) cắt (P) tại ba điểm có hoành độ nằm trong $[-1;5]$. Khi a đạt giá trị nhỏ nhất thì tích ab bằng

A. -729. **B.** 375. **C.** 225. **D.** -384.

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y=-mx+m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+mx^2+m$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $-1<x_1+x_2+x_3<3$?.

A. 6. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 42: Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ (C_m). Tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y=x+4$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ với điểm $K(1;3)$ là:

A. $m=\dfrac{1+\sqrt{137}}{2}$. **B.** $m=\dfrac{\pm1+\sqrt{137}}{2}$. **C.** $m=\dfrac{1\pm\sqrt{137}}{2}$. **D.** $m=\dfrac{1-\sqrt{137}}{2}$.

Câu 43: Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3-3x^2-m^3+3m^2=0$ có ba nghiệm phân biệt. Tổng tất cả các phần tử của T bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 44: Cho đồ thị hàm số $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}+\dfrac{1}{f'(x_3)}$.

A. $P=3+2b+c$. **B.** $P=0$. **C.** $P=b+c+d$. **D.** $P=\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{c}$.

Câu 45: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị đi qua điểm $A(1;1), B(2;4), C(3;9)$. Các đường thẳng AB, AC, BC lại cắt đồ thị lần lượt tại các điểm M, N, P (M khác A và B, N khác A và C, P khác B và C. Biết rằng tổng các hoành độ của M, N, P bằng 5, giá trị của $f(0)$ là

A. -6. **B.** -18. **C.** 18. **D.** 6.

Câu 46: Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ cắt đường thẳng $d: y=m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_2^2>5$.

A. $m\ge -3$. **B.** $m\ge -2$ **C.** $m>-3$. **D.** $m>-2$.

Câu 47: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+2m+1$ và trục Ox có đúng hai điểm chung phân biệt. Tính tổng T của các phần tử thuộc tập S

A. $T=-10$. **B.** $T=10$. **C.** $T=-12$. **D.** $T=12$.

DẠNG 4. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐỒ THỊ HÀM SỐ NHẤT BIẾN

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị (C). Tìm tham số m để đường thẳng $d: y=\alpha x+\beta$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ thỏa mãn điều kiện K?

Phương pháp giải

 Bước 1.

Lập phương trình hoành độ giao điểm giữa d và (C): $\dfrac{ax+b}{cx+d}=\alpha x+\beta$

$\Leftrightarrow g(x)=\alpha cx^2+(\beta c+\alpha d-a)x+\beta d-b=0,\ \forall x\neq -\dfrac{d}{c}$.

- Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x)=0$ có nghiệm nghiệm phân biệt $\neq -\dfrac{d}{c}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c\alpha\neq 0;\ \Delta>0 \\ g\left(-\dfrac{d}{c}\right)\neq 0\end{cases}$. Giải hệ này, ta sẽ tìm được $m\in D_1\ (i)$

-Gọi $A(x_1;\alpha x_1+\beta),\ B(x_2;\alpha y_2+\beta)$ với x_1,x_2 là 2 nghiệm của $g(x)=0$ Theo Viét: $S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta c+\alpha d-a}{c\alpha};\ P=x_1x_2=\dfrac{\beta d-b}{\alpha c}\ (ii)$

 Bước 2.

-Biến đổi điều kiện K cho trước về dạng có chứa tổng và tích của $x_1,x_2\ (iii)$

-Thế (ii) vào (iii) sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến số là m. Giải nó sẽ tìm được $m\in D_2\ (*)$

-Từ $(i),(*)\Rightarrow m\in(D_1\cap D_2)$ và kết luận giá trị m cần tìm.

Một số công thức tính nhanh " thường gặp " liên quan đến tương giao giữa đường thẳng $y=kx+p$ và đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

Giả sử $d: y=kx+p$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ tại 2 điểm phân biệt M,N.

Với $kx+p=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ cho ta phương trình có dạng: $Ax^2+Bx+C=0$ thỏa điều kiện $cx+d\neq 0$, có $\Delta=B^2-4AC$. Khi đó:

1). $M(x_1;kx_1+p),N(x_2;kx_2+p)\Rightarrow \overrightarrow{MN}=(x_2-x_1;k(x_2-x_1))\Rightarrow MN=\sqrt{(k^2+1)\dfrac{\Delta}{A^2}}$

Chú ý: khi $\min MN$ thì tồn tại $\min\Delta, k=const$

2). $OM^2+ON^2=(k^2+1)(x_1^2+x_2^2)+(x_1+x_2)2kp+2p^2$

3). $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=(x_1.x_2)(1+k^2)+(x_1+x_2)kp+p^2$

4). $OM=ON\Leftrightarrow (x_1+x_2)(1+k^2)+2kp=0$

Câu 48: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $\left[-2020;2020\right]$ của tham số m để đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt?

A. 4036. **B.** 4040. **C.** 4038. **D.** 4034.

Câu 49: Đường thẳng $y=x+2m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

A. $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>3 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 3 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>1 \end{array}\right.$. **D.** $-3<m<1$.

Câu 50: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=2x+m$ cắt đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

A. $m\in(-\infty;+\infty)$. **B.** $m\in(-1;+\infty)$. **C.** $m\in(-2;4)$. **D.** $m\in(-\infty;-2)$.

Câu 51: Gọi A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng

A. $4\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 52: Cho hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}\left(C\right)$ và đường thẳng $d: y=-x+m$. Gọi S là tập các số thực m để đường thẳng d cắt đồ thị $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác OAB (O là gốc tọa độ) có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $2\sqrt{2}$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 8.

Câu 53: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{1-x}$ $\left(C\right)$ và đường thẳng $d: y=x+m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt đồ thị $\left(C\right)$ tại 2 điểm phân biệt

A. $m>-1$. **B.** $-5<m<-1$.

C. $m<-5$. **D.** $m<-5$ hoặc $m>-1$.

Câu 54: Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ có đồ thị $\left(C\right)$ và đường thẳng $d: y=x-m$, với m là tham số thực. Biết rằng đường thẳng d cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho điểm $G\left(2;-2\right)$ là trọng tâm của tam giác OAB (O là gốc toạ độ). Giá trị của m bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** -9. **D.** 5.

Câu 55: Cho hàm số $y=\dfrac{3x-2m}{mx+1}$ với m là tham số. Biết rằng với mọi $m\neq 0$, đồ thị hàm số luôn cắt đường thẳng $d: y=3x-3m$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tích tất cả các giá trị của m tìm được để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại C, D sao cho diện tích ΔOAB bằng 2 lần diện tích ΔOCD bằng

A. $-\dfrac{4}{9}$. **B.** -4. **C.** -1. **D.** 0.

Câu 56: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đường thẳng $y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho trọng tâm tam giác OAB (O là gốc tọa độ) thuộc đường thẳng $x-2y-2=0$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 57: Giả sử $m=-\dfrac{b}{a}$, $a,b\in\mathbb{Z}^{+}$, $(a,b)=1$ là giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta: x-2y-2=0$, với O là gốc toạ độ. Tính $a+2b$.

A. 2. **B.** 5. **C.** 11. **D.** 21.

Câu 58: Cho hàm số $y=\dfrac{3x+2}{x+2}$, (C) và đường thẳng $d: y=ax+2b-4$. Đường thẳng d cắt tại A, B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O, khi đó $T=a+b$ bằng

A. $T=2$. **B.** $T=\dfrac{5}{2}$. **C.** $T=4$. **D.** $T=\dfrac{7}{2}$.

Câu 59: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:\ y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm ΔOAB thuộc đường thẳng $\Delta:\ x-2y-2=0$, với O là gốc tọa độ.

A. $m=-\dfrac{11}{5}$. **B.** $m=-\dfrac{1}{5}$. **C.** $m=0$. **D.** $m=-2$.

Câu 60: Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm tập hợp tất cả các giá trị $a\in\mathbb{R}$ để qua điểm $M(0;a)$ có thể kẻ được đường thẳng cắt (C) tại hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua điểm M.

A. $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$.

Câu 61: Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $MN\le 10$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 62: Cho là đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. Tìm k để đường thẳng $d: y=kx+2k+1$ cắt tại hai điểm phân biệt A,B sao cho khoảng cách từ A đến trục hoành bằng khoảng cách từ B đến trục hoành.

A. 1. **B.** $\dfrac{2}{5}$ **C.** -3. **D.** -2.

Câu 63: Tìm điều kiện của m để đường thẳng $y=mx+1$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

A. $(-\infty;0]\cup[16;+\infty)$ **B.** $(16;+\infty)$ **C.** $(-\infty;0)$ **D.** $(-\infty;0)\cup(16;+\infty)$

Câu 64: Gọi $M\left(a\,;\,b\right)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x}$ sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $d:y=2x+6$ nhỏ nhất. Tính $\left(4a+5\right)^2+\left(2b-7\right)^2$.

A. 162. **B.** 2. **C.** 18. **D.** 0.

Câu 65: Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x}{1-x}$ cắt đường thẳng $y=x-m$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60^0?

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

Câu 66: Để đường thẳng $d:y=x-m+2$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$ $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài AB ngắn nhất thì giá trị của m thuộc khoảng nào?

A. $m\in\left(-4;-2\right)$ **B.** $m\in\left(2;4\right)$ **C.** $m\in\left(-2;0\right)$ **D.** $m\in\left(0;2\right)$

Câu 67: Biết rằng đường thẳng $y=2x+2m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt *A*, *B* với mọi giá trị của tham số *m*. Tìm hoành độ trung điểm của *AB*?

A. $m+1$ **B.** $-m-1$ **C.** $-2m-2$ **D.** $-2m+1$

Câu 68: Gọi $\left(H\right)$ là đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$. Điểm $M\left(x_0\,;y_0\right)$ thuộc $\left(H\right)$ có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất, với $x_0<0$ khi đó x_0+y_0 bằng

A. -1. **B.** -2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 69: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $d:y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB\le 2\sqrt{2}$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. -6. **B.** -27. **C.** 9. **D.** 0.

Câu 70: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-m^2}{x+1}$ có đồ thị $\left(C_m\right)$, trong đó m là tham số thực. Đường thẳng $d:y=m-x$ cắt $\left(C_m\right)$ tại hai điểm $A\left(x_A;y_A\right),B\left(x_B;y_B\right)$ với $x_A<x_B$; đường thẳng $d':y=2-m-x$ cắt $\left(C_m\right)$ tại hai điểm $C\left(x_C;y_C\right),D\left(x_D;y_D\right)$ với $x_C<x_D$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $x_A.x_D=-3$. Số phần tử của tập S là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

DẠNG 5. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG

. **Bài toán tổng quát**: Tìm *m* để đường thẳng $d: y=\alpha$ cắt đồ thị $(C): y=f(x;m)=ax^4+bx^2+c$ tại *n* điểm phân biệt thỏa mãn điều kiện *K* cho trước?

Phương pháp giải:

Bước 1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $ax^4+bx^2+c-\alpha=0$

Đặt $t=x^2\ge 0$ thì $(1)\Leftrightarrow at^2+bt+c-\alpha=0$

Tùy vào số giao điểm *n* mà ta biện luận để tìm giá trị $m\in D_1$. Cụ thể:

- Để $d\cap(C)=n=4$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow(1)$ có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow(2)$ có 2 nghiệm $t_1,\ t_2$ thỏa điều kiện: $0<t_1<t_2\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ S>0\Rightarrow m\in D_1.\\ P>0\end{cases}$

- Để $d\cap(C)=n=3$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow(1)$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow(2)$ có nghiệm $t_1,\ t_2$ thỏa điều kiện: $0=t_1<t_2\Leftrightarrow\begin{cases}c-\alpha=0\\ \dfrac{b}{a}<0\end{cases}\Rightarrow m\in D_1.$

- Để $d\cap(C)=n=2$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow(1)$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow(2)$ có 2 nghiệm trái dấu hoặc có nghiệm kép dương $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}ac<0\\ \begin{cases}\Delta=0\Rightarrow m\in D_1.\\ S>0\end{cases}\end{array}\right.$

- Để $d\cap(C)=n=1$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow(1)$ có đúng 1 nghiệm

$\Leftrightarrow(2)$ có nghiệm kép $=0$ hoặc $\begin{cases}t_1<0\\ t_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=0\\ c-\alpha=0\end{cases}\vee\begin{cases}c-\alpha=0\\ \dfrac{b}{a}>0\end{cases}\Rightarrow m\in D_1.$

Bước 2. Biến đổi điều kiện K về dạng có chứa tổng và tích của $t_1,\ t_2$

Thế biểu thức tổng, tích vào sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến số là *m*. Giải chúng ta sẽ tìm được $m\in D_2$.

Kết luận: $m\in D_1\cap D_2$.

Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Ta có: $ax^4+bx^2+c=0$ (1), *đặt* $t=x^2\ge 0$, *thì có:* $at^2+bt+c=0$ (2)

Để (1) *có* 4 *nghiệm phân biệt thì* (2) *có hai nghiệm phân biệt dương, tức là:* $\begin{cases}\Delta>0\\ t_1+t_2>0\\ t_1.t_2>0\end{cases}$

Khi đó (1) *có* 4 *nghiệm phân biệt lần lượt là* $-\sqrt{t_2};-\sqrt{t_1};\sqrt{t_1};\sqrt{t_2}$ *lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi:* $\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}=\sqrt{t_1}-(-\sqrt{t_1})\Leftrightarrow\sqrt{t_2}=3\sqrt{t_1}\Leftrightarrow t_2=9t_1$. *Theo định lý Vi – et* $t_1+t_2=-\dfrac{b}{a}$ *suy ra*

$t_1=-\frac{b}{10a};t_2=-\frac{9b}{10a}$, *kết hợp* $t_1.t_2=\frac{c}{a}$ *nên có:* $9ab^2=100a^2c$

Tóm lại: Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ *cắt trục hoành tại* 3 *điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng, thì điều kiện cần và đủ là:* $\begin{cases} b^2-4ac>0 \\ -\frac{b}{a}>0 \\ \frac{c}{a}>0 \\ 9ab^2=100a^2c \end{cases}$

Câu 71: Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4-4x^2+3+m=0$ có 4 nghiệm phân biệt là

A. $(-1;3)$. **B.** $(-3;1)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(-3;0)$.

Câu 72: Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4-2mx^2+(2m-1)=0$ có 4 nghiệm thực phân biệt là

A. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\backslash\{1\}$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 73: Cho hàm số $y=x^4-3x^2-2$. Tìm số thực dương m để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O, trong đó O là gốc tọa độ.

A. $m=2$. **B.** $m=\frac{3}{2}$. **C.** $m=3$. **D.** $m=1$.

Câu 74: Đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-x^2$ tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi

A. $-\frac{1}{4}<m<0$. **B.** $0<m<\frac{1}{4}$. **C.** $m>0$. **D.** $m>-\frac{1}{4}$

Câu 75: Một đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ là 0, 1, m, n. Tính $S=m^2+n^2$.

A. $S=1$. **B.** $S=0$. **C.** $S=3$. **D.** $S=2$.

Câu 76: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=x^4-4x^3+(m-2)x^2+8x+4$ cắt trục hoành tại đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn 1.

A. 8. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 77: Cho hàm số $f(x)=-4x^4+8x^2-1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình $f(x)=m$ có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

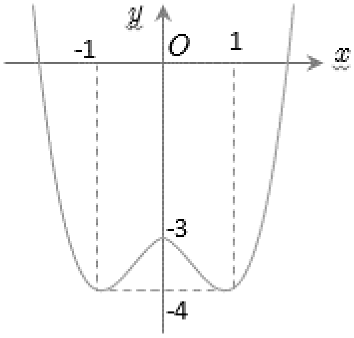
Câu 78: Cho hàm số $y=x^4+2mx^2+m$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y=-3$ tại bốn điểm phân biệt, trong đó có một điểm có hoành độ lớn hơn 2 còn ba điểm kia có hoành độ nhỏ hơn 1, là khoảng $(a;b)$. Khi đó, $15ab$ nhận giá trị nào sau đây?

A. -63. **B.** 63. **C.** 95. **D.** -95.

Câu 79: Đường thẳng $y = m^2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 - 10$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông (O là gốc tọa độ). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m^2 \in (5;7)$. **B.** $m^2 \in (3;5)$. **C.** $m^2 \in (1;3)$. **D.** $m^2 \in (0;1)$.

Câu 80: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Với giá trị nào của m thì phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 = 2m - 4$ có 2 nghiệm phân biệt.



A. $\left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m = \frac{1}{2} \end{array}\right.$. **B.** $m \le \frac{1}{2}$. **C.** $0 < m < \frac{1}{2}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Câu 81: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 + 3 + 2m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $-2 \le m \le -\frac{3}{2}$. **B.** $-\frac{3}{2} < m < 2$. **C.** $-2 < m < -\frac{3}{2}$. **D.** $3 < m < 4$.

Câu 82: Tất cả các giá trị thực của tham số m, để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(2-m)x^2 + m^2 - 2m - 2$ không cắt trục hoành.

A. $m \ge \sqrt{3} + 1$. **B.** $m < 3$. **C.** $m > \sqrt{3} + 1$. **D.** $m > 3$.

Câu 83: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = (m+1)x^4 - 2(2m-3)x^2 + 6m + 5$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có các hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3 < 1 < x_4$.

A. $m \in \left(-1; \frac{-5}{6}\right)$. **B.** $m \in (-3;-1)$. **C.** $m \in (-3;1)$. **D.** $m \in (-4;-1)$.

Câu 84: Cho hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để đường thẳng $d: y = -1$ cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

A. $-\frac{1}{3} < m < 1$ và $m \ne 0$ **B.** $-\frac{1}{2} < m < 1$ và $m \ne 0$

C. $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$ và $m \ne 0$ **D.** $-\frac{1}{3} < m < \frac{1}{2}$ và $m \ne 0$

CHƯƠNG I ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

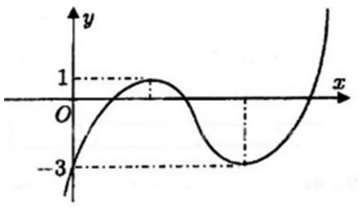
BÀI 6. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ THÔNG QUA ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN

Nghiệm của phương trình $af\left(x\right)+b=0$ là số giao điểm của đường thẳng $y=\frac{-b}{a}$ với đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$

Câu 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=2$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

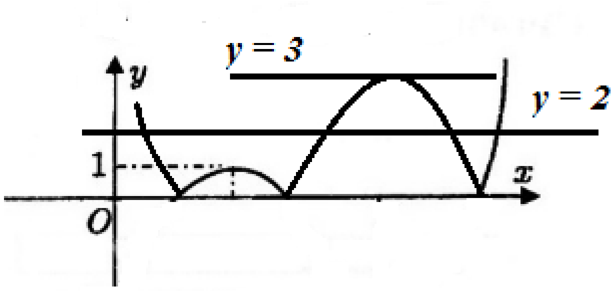
Lời giải

*Đồ thị $y=\left|f\left(x\right)\right|$

- Bước 1: Giữ nguyên phần đồ thị của $y=f\left(x\right)$ nằm phía trên Ox

- Bước 2: Lấy đối xứng phần đồ thị của $y=f\left(x\right)$ nằm phía dưới Ox qua trục hoàn.

- Bước 3: Xóa phần đồ thị của $y=f\left(x\right)$ nằm phía dưới trục hoành

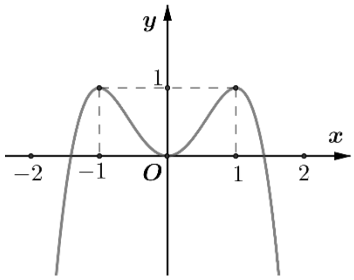


Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=2$ cũng chính là số giao điểm cũng đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ và đường thẳng $y=2$. Dựa vào hình vẽ trên, ta thấy có 4 giao điểm.

Cách giải khác:

$\left|f\left(x\right)\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=2\\f(x)=-2\end{array}\right.$, dựa vào đồ thị suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $1 - 2.f(x) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?



A. 4 **B.** 3

C. Vô nghiệm **D.** 2

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình: $1 - 2.f(x) = 0 (1) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) (C) \\ y = \frac{1}{2} (d) \end{cases}$

Số giao điểm của đường thẳng (d) và đường cong (C) ứng với số nghiệm của phương trình (1). Theo hình vẽ ta có 4 giao điểm => phương trình (1) sẽ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau đây.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Hỏi phương trình $2.f(x) - 5 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Phương trình $2.f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{2} (*)$.

Số nghiệm của phương trình $(*)$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{5}{2}$. Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy 2 đồ thị $y = f(x)$ và $y = \frac{5}{2}$ có 3 điểm chung.

Vậy phương trình $2.f(x) - 5 = 0$ có 3 nghiệm thực.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x)-3=0$ là

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

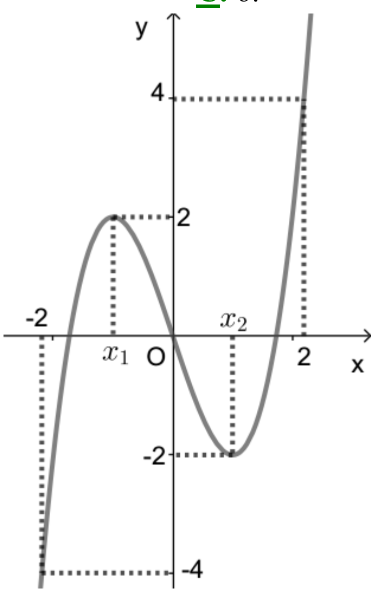
Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x)-3=0 \Leftrightarrow f(x)=3$, theo bảng biến thiên ta có phương trình có 3 nghiệm.

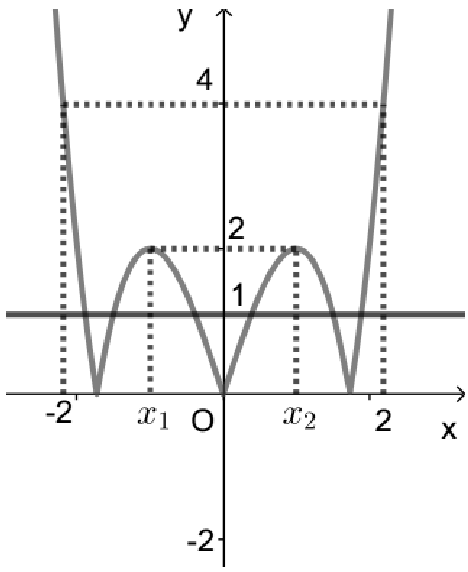
Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình $|f(x)|=1$ trên đoạn $[-2;2]$.

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.



Lời giải

Ta có số nghiệm của phương trình $|f(x)|=1$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ với đường thẳng $y=1$.



Từ hình vẽ ta thấy đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ tại 6 điểm. Vậy số nghiệm của phương trình $|f(x)|=1$ là 6.

DẠNG 2. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ THÔNG QUA HÀM SỐ CHO TRƯỚC

Cho hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=g(x)$.

Bước 1. Giải phương trình $f(x)=g(x)$.

Bước 2. Tìm

●Số giao điểm?

●Hoành độ giao điểm?

●Tung độ giao điểm?

Câu 6: Gọi P là số giao điểm của hai đồ thị $y=x^3-x^2+1$ và $y=x^2+1$. Tìm P.

A. $P=0$. **B.** $P=2$. **C.** $P=1$. **D.** $P=3$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y=x^3-x^2+1$ và $y=x^2+1$:

$$x^3-x^2+1=x^2+1 \Leftrightarrow x^3-2x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Với $x=0 \Rightarrow y=1$.

Với $x=2 \Rightarrow y=5$.

Nên hai đồ thị trên có hai giao điểm là $(0;1)$ và $(2;5)$.

Vậy $P=2$.

Câu 7: Cho hàm số $y=x^4-3x^2$ có đồ thị (C). Số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y=2$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y=2$ là số nghiệm của phương trình sau:

$$x^4-3x^2=2 \Leftrightarrow x^4-3x^2-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \\ x^2=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}}.$$

Phương trình hoành độ giao điểm có 2 nghiệm nên số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng là 2.

Câu 8: Biết rằng đường thẳng $y=4x+5$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2x+1$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0=10$. **B.** $y_0=13$. **C.** $y_0=11$. **D.** $y_0=12$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^3+2x+1=4x+5 \Leftrightarrow x^3-2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$

Với $x=2 \Rightarrow y=13$. Vậy $y_0=13$

Câu 9: Đồ thị của hàm số $y=-x^4-3x^2+1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bao nhiêu

A. -3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Trục tung có phương trình: $x=0$. Thay $x=0$ vào $y=-x^4-3x^2+1$ được: $y=1$.

Câu 10: Số giao điểm của đường cong $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ và đường thẳng $y = 1 - x$ là

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 1 - x$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3x = 0$

$\Leftrightarrow x\left(x^2 - 2x + 3\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Câu 11: đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$ và đồ thị hàm số $y = -2x^2 + 7$ có bao nhiêu điểm chung?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Pthdgd:

$x^4 - 3x^2 + 1 = -2x^2 + 7 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 3 \\ x^2 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

Do pt có 2 nghiệm nên đồ thị hai hàm số có 2 điểm chung.

Câu 12: Cho hàm số $y = -2x^3 + 5x$ có đồ thị (C) Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Pthd của (C) và trục hoành là:

$-2x^3 + 5x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}} \end{array}\right.$ có 3 giao điểm.

Chú ý: Ở bài toán này hoàn toàn có thể giải trực tiếp bằng Casio với phương trình $-2x^3 + 5x = 0$, nhưng chắc chắn thao tác bấm máy sẽ chậm hơn việc tính tay. Vì vậy, Casio là điều không cần thiết với câu hỏi này.

Câu 13: Cho hàm số $y = (x-3)\left(x^2+2\right)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (C) cắt trục hoành tại hai điểm. **B.** (C) cắt trục hoành tại một điểm.

C. (C) không cắt trục hoành. **D.** (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

Lời giải

Chọn B

Pthd của (C) và trục hoành là:

$(x-3)\left(x^2+2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x^2 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 3$ nghĩa là (C) cắt trục hoành tại một điểm

Câu 14: Biết rằng đường thẳng $y = x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + x + 4$ tại điểm duy nhất, kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0 = 1$. **B.** $y_0 = 3$. **C.** $y_0 = -2$. **D.** $y_0 = 4$.

Lời giải

Chọn A

Pthdgd:

$x+2=x^3-x^2+x+4 \Leftrightarrow x^3-x^2+2=0 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y_0=1$.

Câu 15: đồ thị hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?

A. $y=\dfrac{x-1}{x-3}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x+4}$. **C.** $y=\dfrac{x-1}{x+2}$. **D.** $y=\dfrac{2x-1}{x+5}$.

Lời giải

Chọn C

Trục tung có phương trình $x=0$, ta thay $x=0$ lần lượt vào các phương án thì chỉ có phương án C cho ta $y=-\dfrac{1}{2}<0$.

Câu 16: Gọi M,N là giao điểm của đường thẳng $y=x+1$ và đường cong $y=\dfrac{2x+4}{x-1}$. Khi đó hoành độ x_I của trung điểm I của đoạn MN bằng bao nhiêu?

A. $x_I=2$. **B.** $x_I=1$. **C.** $x_I=-5$. **D.** $x_I=-\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Pthdgd $\dfrac{2x+4}{x-1}=x+1\left(x\neq 1\right) \Leftrightarrow x^2-2x-5=0$

Khi đó $x_I=\dfrac{x_M+x_N}{2}=1$.

Chú ý: có thể giải , tìm được $x_M=1+\sqrt{6}, x_N=1-\sqrt{6} \Rightarrow x_I=1$

Câu 17: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-3}$ có đồ thị $\left(C\right)$ và các đường thẳng $d_1: y=2x$, $d_2: y=2x-2$, $d_3: y=3x+3$, $d_4: y=-x+3$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng trong bốn đường thẳng d_1,d_2,d_3,d_4 đi qua giao điểm của $\left(C\right)$ và trục hoành.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left(C\right)$ cắt trục hoành $\left(y-0\right)$ tại điểm $M\left(-1;0\right)$.

Trong các đường thẳng d_1,d_2,d_3,d_4 chỉ có $M\in d_3$, có nghĩa là có 1 đường thẳng đi qua $M\left(-1;0\right)$.

Câu 18: Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x^4-4}+5$ và đường thẳng $y=x$

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Cách 1: Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x^4-4}+5=x \Leftrightarrow \sqrt{x^4-4}=x-5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 5 \\ x^4-4=(x-5)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 5 \\ x^4-x^2+10x-29=0 \ \ (*) \end{cases}$$

Do $x \ge 5$ nên $x^4 - x^2 = x^2(x^2-1) > 0$ và $10x - 29 > 0$. Vì vậy (*) vô nghiệm

Như vậy phương trình $\sqrt{x^4-4}+5 = x$ vô nghiệm hay đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^4-4}+5$ và đường thẳng $y = x$ không có giao điểm nào.

Cách 2:

Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x^4-4}+5 = x$. Ta có điều kiện xác định $\left[\begin{array}{l} x \ge \sqrt{2} \\ x \le -\sqrt{2} \end{array}\right.$

Với điều kiện trên ta có $\sqrt{x^4-4}+5 = x \Leftrightarrow \sqrt{x^4-4}+5-x = 0$

Xét hàm số $h(x) = \sqrt{x^4-4}+5-x$. Ta có $h'(x) = \dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4-4}} - 1$;

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 = \sqrt{x^4-4}$

Với $x \ge \sqrt{2}$ ta có $2x^3 > \sqrt{x^4-4}$. Với $x \le -\sqrt{2}$ ta có $2x^3 < \sqrt{x^4-4}$

Ta có Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	‖		‖	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$5+\sqrt{2}$ ‖		‖ $5-\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^4-4}+5 = x$ là số giao điểm của đồ thị $y = h(x) = \sqrt{x^4-4}+5-x$ và trục hoành $y = 0$. Dựa vào BBT ta thấy phương trình $\sqrt{x^4-4}+5 = x$ vô nghiệm hay đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^4-4}+5$ và đường thẳng $y = x$ không có giao điểm nào.

DẠNG 3. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC 3

🕮 **Bài toán tổng quát**: Tìm các giá trị của tham số m để để đường thẳng $d: y = px+q$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = ax^3+bx^2+cx+d$ tại 3 điểm phân biệt thỏa điều kiện K?

✍ **Phương pháp giải**:

Bước 1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $ax^3+bx^2+cx+d = px+q$

Đưa về phương trình bậc ba và nhẩm nghiệm đặc biệt $x = x_o$ để chia Hoocner được:

$$(x-x_o)\cdot(ax^2+b'x+c') = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_o \\ g(x) = ax^2+b'x+c' = 0 \end{array}\right..$$

Bước 2. Để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác $x_o \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{g(x)} > 0 \\ g(x_o) \ne 0 \end{cases}$. Giải hệ này, tìm được giá trị $m \in D_1$.

Bước 3. Gọi $A(x_o; px_o+q)$, $B(x_1; px_1+q)$, $C(x_2; px_2+q)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của $g(x) = 0$.

Theo Viét, ta có: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b'}{a}$ và $x_1x_2 = \dfrac{c'}{a}$

Bước 4. Biến đổi điều kiện K về dạng tổng và tích của $x_1,\ x_2$

Thế vào sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến là m. Giải chúng sẽ tìm được giá trị $m\in D_2$.

Kết luận: $m\in D_1\cap D_2$.

Một số công thức tính nhanh " thường gặp " liên quan đến cấp số

□ **Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.**

Điều kiện cần:

Giả sử x_1,x_2,x_3 là nghiệm của phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$

Khi đó: $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, đồng nhất hệ số ta được $x_2=-\dfrac{b}{3a}$

Thế $x_2=-\dfrac{b}{3a}$ vào phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ta được điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số.

Điều kiện đủ:

Thử các điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số để phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

□ **Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số nhân.**

Điều kiện cần:

Giả sử x_1,x_2,x_3 là nghiệm của phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$

Khi đó: $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, đồng nhất hệ số ta được $x_2=\sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}$

Thế $x_2=\sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}$ vào phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ta được điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số.

Điều kiện đủ:

Thử các điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số để phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 19: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+2m$. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3mx^2+2m=0$ $(*)$

Phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có ba nghiệm lập thành cấp số cộng $\longrightarrow$ phương trình có một nghiệm $x_0=-\dfrac{b}{3a}$.

Suy ra phương trình $(*)$ có một nghiệm $x=m$.

Thay $x=m$ vào phương trình $(*)$, ta được $m^3-3m.m^2+2m=0\Leftrightarrow -2m^3+2m=0\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm 1\\ m=0\end{array}\right.$.

Thử lại:

● Với $m=1$, ta được $x^3-3x^2+2=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\sqrt{3} \\ x=1 \\ x=1+\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Do đó $m=1$ thỏa mãn.

● Với $m=-1$, ta được $x^3+3x^2-2=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1+\sqrt{3} \\ x=-1 \\ x=-1-\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Do đó $m=-1$ thỏa mãn.

● Với $m=0$, ta được $x^3=0 \Leftrightarrow x=0$.

Do đó $m=0$ không thỏa mãn.

Vậy $m=\pm 1$ là hai giá trị cần tìm.

Câu 20: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ (C) cắt đường thẳng $d: y=m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt x_1, x_2, x_3.

A. $m>-2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m>-3$. **D.** $m=-3$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$x^3-3x^2+2=m(x-1)$ (1)

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^3-3x^2-mx+2+m=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-m-2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ f(x)=x^2-2x-m-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f(x)=x^2-2x-m-2=0 \quad (2) \end{array}\right.$

Phương trình (1) luôn có nghiệm $x=1$, vậy để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt thì phương trình (2) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta'=1+m+2>0 \\ f(1)\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m>-3 \\ m\neq -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow m>-3$.

Vậy $m>-3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 21: Đường thẳng Δ có phương trình $y=2x+1$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-x+3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ trong đó $x_B<x_A$. Tìm x_B+y_B?

A. $x_B+y_B=-5$ **B.** $x_B+y_B=-2$ **C.** $x_B+y_B=4$ **D.** $x_B+y_B=7$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và $y=x^3-x+3$:

$x^3-x+3=2x+1 \Leftrightarrow x^3-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \Rightarrow y=-3 \\ x=1 \Rightarrow y=3 \end{array}\right.$

Vậy $A(1;3); B(-2;-3) \Rightarrow x_B+y_B=-5$

Câu 22: Cho hàm số $y=x^3+3mx^2-m^3$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $d: y=m^2x+2m^3$. Biết rằng $m_1, m_2\ (m_1>m_2)$ là hai giá trị thực của m để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1,\ x_2,\ x_3$ thỏa mãn $x_1^4+x_2^4+x_3^4=83$. Phát biểu nào sau đây là ***đúng*** về quan hệ giữa hai giá trị $m_1,\ m_2$?

A. $m_1+m_2=0$. **B.** $m_1^2+2m_2>4$. **C.** $m_2^2+2m_1>4$. **D.** $m_1-m_2=0$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C_m)

$$x^3+3mx^2-m^3=m^2x+2m^3$$
$$\Leftrightarrow x^3+3mx^2-m^2x-3m^3=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^3-m^2x\right)+\left(3mx^2-3m^3\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x\left(x^2-m^2\right)+3m\left(x^2-m^2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+3m)\left(x^2-m^2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3m \\ x=m \\ x=-m \end{array}\right.$$

Để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1,x_2,x_3 \Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó, $x_1^4+x_2^4+x_3^4=83 \Leftrightarrow m^4+(-m)^4+(-3m)^4=83$

$\Leftrightarrow 83m^4=83 \Leftrightarrow m=\pm 1$

Vậy $m_1=1, m_2=-1$ hay $m_1+m_2=0$.

Câu 23: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ cắt đường thẳng $y=m$ tại ba điểm phân biệt.

A. $m\in(-\infty;-4)$. **B.** $m\in(-4;0)$.

C. $m\in(0;+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=x^3-3x^2 \Rightarrow y'=3x^2-6x;\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			0				$+\infty$
	$-\infty$	↗		↘	-4	↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ cắt đường thẳng $y=m$ tại ba điểm phân biệt khi $-4<m<0$

Câu 24: Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+\left(m^2-2\right)x+2m^2+4$ cắt các trục tọa độ $Ox,\ Oy$ lần lượt tại $A,\ B$ sao cho diện tích tam giác OAB bằng 8 là

A. $m=\pm 2$. **B.** $m=\pm 1$. **C.** $m=\pm\sqrt{3}$. **D.** $m=\pm\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục tung là $B\left(0;2m^2+4\right)$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị đã cho với trục hoành là:

$$x^3+\left(m^2-2\right)x+2m^2+4=0 \Leftrightarrow (x+2)\left(x^2-2x+m^2+2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ (x-1)^2+m^2+1=0 \quad (vn) \end{array}\right.$$

Giao điểm của đồ thị đã cho với trục hoành là $A(-2;0)$.

Diện tích tam giác ABC là: $S=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.2.\left(2m^2+4\right)=8 \Rightarrow m=\pm\sqrt{2}$.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3+3x^2-2=m$ có ba nghiệm phân biệt.

A. $m\in(2;+\infty]$. **B.** $m\in(-\infty;-2]$. **C.** $m\in(-2;2)$. **D.** $m\in[-2;2]$.

Lời giải

Xét hàm số $y=x^3+3x^2-2$, $y'=3x^2+6x$.

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $x^3+3x^2-2=m(*)$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-2$ và đường thẳng $y=m$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra PT có 3 nghiệm phân biệt khi $-2<m<2$.

Câu 26: Đường thẳng Δ có phương trình $y=2x+1$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-x+3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A\left(x_A;y_A\right)$ và $B\left(x_B;y_B\right)$ trong đó $x_B<x_A$. Tìm x_B+y_B ?

A. $x_B+y_B=-5$ **B.** $x_B+y_B=-2$ **C.** $x_B+y_B=4$ **D.** $x_B+y_B=7$

Lời giải

Chọn C

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình: $x^3-x+3=2x+1$

Giải phương trình ta được $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Vì $x_B<x_A$ Vậy $x_B=1; y_B=3 \Rightarrow x_B+y_B=4$

Câu 27: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3-3x^2=2m+1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{3}{2}$. **C.** $-\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Xét hàm số: $y=2x^3-3x^2 \Rightarrow y'=6x^2-6x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của hai đồ thị:

$$\begin{cases}(C): y = 2x^3 - 3x^2 \\ d: y = 2m+1\end{cases}$$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy: Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2m+1=-1 \\ 2m+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1 \\ m=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow S=\left\{-1;-\dfrac{1}{2}\right\}.$$

Vậy tổng các phần tử của S bằng $-1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{-3}{2}$.

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=-x+5$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+5$ tại 3 điểm phân biệt.

A. $\left[\begin{array}{l}m<1 \\ m>2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\neq\dfrac{2}{3} \\ m\leq 1\end{cases} \\ m\geq 2\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\neq\dfrac{2}{3} \\ m<1\end{cases} \\ m>2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m\leq 1 \\ m\geq 2\end{array}\right.$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm chung là: $x^3+2mx^2+3(m-1)x+5=-x+5$

$$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+(3m-2)x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0 \\ x^2+2mx+3m-2=0\ (1)\end{array}\right.$$

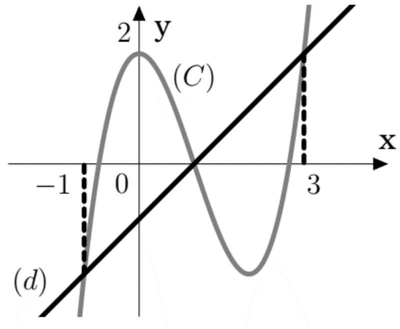
Đường thẳng $y=-x+5$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+5$ tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta' = m^2-3m+2>0 \\ 3m-2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>2 \\ m<1\end{array}\right. \\ m\neq\dfrac{2}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\neq\dfrac{2}{3} \\ m<1\end{cases} \\ m>2\end{array}\right..$$

Câu 29: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ, đường thẳng d có phương trình $y=x-1$. Biết phương trình $f(x)=0$ có ba nghiệm $x_1<x_2<x_3$. Giá trị của x_1x_3 bằng

A. -3. **B.** $-\dfrac{7}{3}$. **C.** -2. **D.** $-\dfrac{5}{2}$.



Lời giải

+Ta có: $f(x)=x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

$f(x)$ là hàm bậc ba nên $f(x)-(x-1)=a(x+1)(x-1)(x-3)$

$\Rightarrow f(x)=a(x+1)(x-1)(x-3)+x-1$; $f(0)=2 \Leftrightarrow a=1$.

$\Rightarrow f(x)=(x+1)(x-1)(x-3)+x-1$.

$+f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1=x_2 \\ (x+1)(x-3)+1=0\ (2) \end{array}\right.$.

x_1, x_3 là các nghiệm của (2) nên ta có $x_1x_3=-2$.

thẳng $y=\dfrac{5}{2}$ nên từ đồ thị ta có phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 30: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018;2019]$ để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+3$ và đường thẳng $y=3x+1$ có duy nhất một điểm chung?

A. 1. **B.** 2019. **C.** 4038. **D.** 2018.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3-3mx+3=3x+1 \Leftrightarrow x^3-3x+2=3mx \Leftrightarrow 3m=\dfrac{x^3-3x+2}{x}$.

Xét hàm $f(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x}=x^2-3+\dfrac{2}{x}$; $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2x^3-2}{x^2}$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Khi đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m<0$. Mà m nguyên và $m \in [-2018;2019]$ nên có 2018 giá trị thỏa mãn.

Câu 31: Phương trình $x^3-6mx+5=5m^2$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng khi

A. $m=0$. **B.** $m=-1 \vee m=1$. **C.** $m=1$. **D.** $m \in \varnothing$.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương: $x^3-6mx+5-5m^2=0$.

Đặt $y=f(x)=x^3-6mx+5-5m^2$ có $f'(x)=3x^2-6m$; $f''(x)=6x$.

PT đã cho có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $f(x_1).f(x_2)<0$.

3 nghiệm đó lập thành cấp số cộng nên $x_2-x_1=x_3-x_2$.

Suy ra, x_2 là hoành độ của tâm đối xứng hay là nghiệm của $f''(x)=0$.

Cho $f''(x)=0 \Rightarrow 6x=0 \Leftrightarrow x=0$.

Với $x=0$ ta có: $5-5m^2=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$.

Thử lại:

• Với $m=1$ thì ta có $x^3-6x+5=5 \Leftrightarrow x(x^2-6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{6} \end{array}\right.$

•Với $m=-1$ thì ta có: $x^3+6x+5=5 \Leftrightarrow x(x^2+6)=0 \Leftrightarrow x=0$

Câu 32: Tính tổng tất cả các giá trị của m biết đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ và đường thẳng $y=x+4$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C sao cho diện tích tam giác IBC bằng $8\sqrt{2}$ với $I(1;3)$.

A. 3. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

+) Gọi đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ là (C_m) và đồ thị hàm số $y=x+4$ là (d).

+) Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và (d) là

$x^3+2mx^2+(m+3)x+4=x+4 \Leftrightarrow x^3+2mx^2+(m+2)x=0\,(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+2mx+m+2=0 \end{array}\right.$

+) Gọi $g(x)=x^2+2mx+m+2$.

+) (d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_g>0 \\ g(0)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m-2>0 \\ m+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right. \\ m\neq -2 \end{cases} \quad (a)$

+) $x=0$ là hoành độ điểm A, hoành độ điểm B, C là hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình $g(x)=0$

+) $BC^2=(x_2-x_1)^2+\left[(x_2+4)-(x_1+4)\right]^2=2(x_2-x_1)^2$ Viết phương trình đường thẳng (d) dưới dạng $x-y+4=0$, ta có

$d(I,(d))=\dfrac{|1-3+4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

+) $S_{IBC}=8\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}BC.d(I,(d))=8\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}BC^2.\left[d(I,(d))\right]^2=128$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}8(m^2-m-2).2=128$

$\Leftrightarrow m^2 - m - 34 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1+\sqrt{137}}{2} \\ m = \dfrac{1-\sqrt{137}}{2} \end{array}\right.$

+) Vậy tổng tất cả các giá trị m là 1.

Câu 33: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2019]$ để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 3$ và đường thẳng $y = 3x + 1$ có duy nhất một điểm chung?

A. 1. **B.** 2019. **C.** 4038. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn D

+ Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3mx + 3 = 3x + 1 \Leftrightarrow 3mx = x^3 - 3x + 2$. (1)

+ Dễ thấy $x = 0$ không thỏa.

+ $(1) \Leftrightarrow 3m = x^2 - 3 + \dfrac{2}{x} = f(x)$.

+ $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty \searrow$		$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

+ Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 3$ và đường thẳng $y = 3x + 1$ có duy nhất một điểm chung $\Leftrightarrow 3m < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

+ Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-2018; 2019]$ nên có 2018 giá trị.

Câu 34: Đường thẳng d có phương trình $y = x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;4)$, B và C sao cho diện tích của tam giác MBC bằng 4, với $M(1;3)$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

A. $m = 3$. **B.** $m = 2$ hoặc $m = 3$.

C. $m = -2$ hoặc $m = -3$. **D.** $m = -2$ hoặc $m = 3$

Lời giải

Chọn A

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình

$x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = x + 4 \Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (m+2)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + 2mx + (m-2) = 0 \ (*) \end{array}\right.$.

Đường thẳng d cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm phân biệt khi phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right. \\ m \neq -2 \end{cases}$.

Giả sử $B(x_1;x_1+4)$; $C(x_2;x_2+4)$ với $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình khi đó

$BC=\sqrt{2(x_1-x_2)^2}=\sqrt{2(x_1+x_2)^2-8x_1.x_2}=\sqrt{8m^2-8m-16}$.

$S_{MBC}=\dfrac{1}{2}BC.d(M,d)=\dfrac{1}{2}.BC.\dfrac{|1-3+4|}{\sqrt{2}}=4\Rightarrow BC=4\sqrt{2}$.

Ta có $m^2-m-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=3\end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện ta có $m=3$.

Câu 35: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=-x+5$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+5$ tại ba điểm phân biệt.

A. $\left[\begin{array}{l}m<1\\m>2\end{array}\right.$.
B. $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\neq\dfrac{2}{3}\\m\le 1\end{cases}\\m\ge 2\end{array}\right.$.
C. $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\neq\dfrac{2}{3}\\m<1\end{cases}\\m>2\end{array}\right.$.
D. $\left[\begin{array}{l}m\le 1\\m\ge 2\end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn C

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $x^3+2mx^2+3(m-1)x+5=-x+5$

$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+(3m-2)x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2+2mx+3m-2=0\ (1)\end{array}\right.$.

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, khác 0.

$\Leftrightarrow\begin{cases}0^2+2m.0+3m-2\neq 0\\\Delta'=m^2-3m+2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq\dfrac{2}{3}\\\left[\begin{array}{l}m>2\\m<1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\neq\dfrac{2}{3}\\m<1\end{cases}\\m>2\end{array}\right.$.

Câu 36: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3-3x^2=2m+1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

A. $-\dfrac{1}{2}$.
B. $-\dfrac{3}{2}$.
C. $-\dfrac{5}{2}$.
D. $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số: $y=2x^3-3x^2\Rightarrow y'=6x^2-6x\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=0\vee x=1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của hai đồ thị:

$\begin{cases}(C):y=2x^3-3x^2\\d:y=2m+1\end{cases}$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy: Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2m+1=-1\\2m+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\m=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow S=\left\{-1;-\frac{1}{2}\right\}$.

Vậy tổng các phần tử của S bằng $-1+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-3}{2}$.

Câu 37: Giá trị lớn nhất của m để đường thẳng $(d): y=x-m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2(m-2)x^2+(8-5m)x+m-5$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2+x_3^2=20$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình

$x^3+2(m-2)x^2+(8-5m)x+m-5=x-m+1$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[x^2+(2m-2)x-m+3\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_3=2\\x^2+(2m-2)x-m+3=0\ (1)\end{array}\right.$.

Đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=(m-1)^2+(m-3)>0\\4+(2m-2).2-m+3\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>2\end{array}\right.\\m\neq -1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m<-1\\m>2\end{array}\right.$.

Khi đó, $\begin{cases}x_1+x_2=-(2m-2)\\x_1x_2=-m+3\end{cases}$.

Theo giả thiết $x_1^2+x_2^2+x_3^2=20 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2+x_3^2=20$

$\Leftrightarrow (2m-2)^2+2(m-3)+4=20 \Leftrightarrow 2m^2-3m-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=3\\m=-\frac{3}{2}\end{array}\right.$).

Vậy giá trị lớn nhất của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 3.

Câu 38: Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y=-2x^3-3m^2x^2+(m^3+2m)x+2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là nghiệm của phương trình

$-2x^3-3m^2x^2+(m^3+2m)x+2=0.\ (*)$

Giả sử đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ $x_1,\ x_2,\ x_3$.

Khi đó ta có

$y=-2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=-2x^3+2(x_1+x_2+x_3)x^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x+2x_1x_2x_3$.

Đồng nhất thức ta được

$$\begin{cases}2\left(x_1+x_2+x_3\right)=-3m^2\\-2\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)=m^3+2m\\2x_1x_2x_3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-\dfrac{3m^2}{2} & (1)\\x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-\dfrac{m^3+2m}{2} & (2)\\x_1x_2x_3=1 & (3)\end{cases}$$

Vì $x_1,\ x_2,\ x_3$ lập thành cấp số nhân nên $x_1x_3=x_2^2$. (4)

Từ (2) và (3): $x_2=1$. Thay vào phương trình $(*)$ rút ra được $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=1\\m=2\end{array}\right.$.

Với $m=0\Rightarrow$ phương trình $(*)$: $-2x^3+2=0\Leftrightarrow x=1$.

Với $m=1\Rightarrow$ phương trình $(*)$: $-2x^3-3x^2+3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-2\\x_2=1\\x_3=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Với $m=2\Rightarrow$ phương trình $(*)$: $x^3+6x^2-6x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{-7-\sqrt{45}}{2}\\x_2=1\\x_3=\dfrac{-7+\sqrt{45}}{2}\end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn.

Câu 39: Tìm m để đồ thị (C)của $y=x^3-3x^2+4$ và đường thẳng $y=mx+m$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt $A(-1;0)$, B, C sao cho ΔOBC có diện tích bằng 64.

A. $m=14$. **B.** $m=15$. **C.** $m=16$. **D.** $m=17$.

Lời giải

Chọn C

$d\left(O,BC\right)=\dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}}$

$BC=\sqrt{\left(x_B-x_C\right)^2+\left(y_b-y_c\right)^2}=\sqrt{\left(m^2+1\right)\left(x_B-x_C\right)^2}$

$=\sqrt{\left(m^2+1\right)\left[\left(x_B+x_C\right)^2-4x_Bx_C\right]}=\sqrt{\left(m^2+1\right)4m}$

$\Rightarrow S_{\Delta OBC}=\dfrac{1}{2}d\left(O,BC\right).BC=m\sqrt{m}=64\Leftrightarrow m=16.$

Cách 2:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3-3x^2+4=mx+m\Leftrightarrow(x+1)\left(x^2-4x+4-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\(x-2)^2=m(*)\end{array}\right.$

Để d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-1\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\m\neq 9\end{cases}$

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2-\sqrt{m} \Rightarrow B\left(2-\sqrt{m};3m-m\sqrt{m}\right) \\ x = 2+\sqrt{m} \Rightarrow C\left(2+\sqrt{m};3m+m\sqrt{m}\right) \end{array}\right.$$

$\overrightarrow{OB} = \left(2-\sqrt{m};3m-m\sqrt{m}\right), \overrightarrow{OC} = \left(2+\sqrt{m};3m+m\sqrt{m}\right)$

$\Rightarrow S_{\Delta OBC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right| = m\sqrt{m} = 64 \Rightarrow m = 16.$

Câu 40: Cho hàm số $y = x^3 - 8x^2 + 8x$ có đồ thị (C) và hàm số $y = x^2 + (8-a)x - b$ có đồ thị (P). Biết đồ thị hàm số (C) cắt (P) tại ba điểm có hoành độ nằm trong $[-1;5]$. Khi a đạt giá trị nhỏ nhất thì tích ab bằng

A. -729. **B.** 375. **C.** 225. **D.** -384.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^3 - 8x^2 + 8x = x^2 + (8-a)x - b \Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + ax + b = 0$.

Gọi m,n,p là 3 nghiệm của phương trình ta có $\begin{cases} m+n+p = 9 \\ mn+np+pm = a \\ mnp = -b \end{cases}$

Do (C) cắt (P) tại ba điểm có hoành độ nằm trong $[-1;5]$ nên

$\begin{cases} (m+1)(n+1)(p+1) \geq 0 \\ (5-m)(5-n)(5-p) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mnp + (mn+np+pm) + (m+n+p) + 1 \geq 0 \\ -mnp + 5(mn+np+pm) - 25(m+n+p) + 125 \geq 0 \end{cases}$

Cộng vế theo vế của hệ phương trình trên ta có $6(mn+np+pm) - 24(m+n+p) - 124 \geq 0 \Leftrightarrow mn+np+pm \geq 15 \Rightarrow a \geq 15$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} mnp \geq -25 \\ mnp \leq -25 \end{cases} \Leftrightarrow mnp = -25 \Rightarrow b = 25$

Vậy tích $ab = 375$.

Cách 2: Phương trình hoành độ giao điểm là $x^3 - 8x^2 + 8x = x^2 + (8-a)x - b \Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + ax + b = 0$.

Khi đó phương trình có 3 nghiệm nằm trong $[-1;5]$.

Đặt $f(x) = x^3 - 9x^2 + ax + b$ suy ra $f'(x) = 3x^2 - 18x + a$. Để phương trình có 3 nghiệm nằm trong $[-1;5]$ thì $f'(x) = 3x^2 - 18x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[-1;5] \Leftrightarrow$ $a = -3x^2 + 18x$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[-1;5]$.

Xét hàm số $g(x) = -3x^2 + 18x$ suy ra $g'(x) = -6x + 18$, ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Bảng biến thiên của $y = g(x)$

x	-1		3		5
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	21	$\nearrow$	27	$\searrow$	15

Từ BBT ta có $15 \leq a < 27$ suy ra giá trị nhỏ nhất của a bằng 15 khi $x = 5$, khi đó $b = 25$.

Vậy tích $ab = 375$.

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y=-mx+m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+mx^2+m$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $-1<x_1+x_2+x_3<3$?.

A. 6. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

$(d)\, y=-mx+m$, $(C)\, y=x^3+mx^2+m$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C): $x^3+mx^2+mx=0$ (1).

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+mx+m=0\ (2) \end{array}\right.$$

Gọi x_1,x_2 là 2 nghiệm của phương trình (2), $x_3=0$.

(1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm x_1,x_2 phân biệt và khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0, \Delta=m^2-4m \\ m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty).$$

(1) có 3 nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 thỏa $-1<x_1+x_2+x_3<3$, với $x_1+x_2=-m$, $x_3=0$.

$\Leftrightarrow -1<-m<3$

$\Leftrightarrow -3<m<1$, mà $m\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$, $m\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow m\in\{-2;-1\}$. Vậy có 2 giá trị m.

Câu 42: Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ (C_m). Tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y=x+4$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ với điểm $K(1;3)$ là:

A. $m=\dfrac{1+\sqrt{137}}{2}$. **B.** $m=\dfrac{\pm1+\sqrt{137}}{2}$. **C.** $m=\dfrac{1\pm\sqrt{137}}{2}$. **D.** $m=\dfrac{1-\sqrt{137}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và (d) là:

$$x^3+2mx^2+(m+3)x+4=x+4 \quad (1)$$

$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+(m+2)x=0$

$\Leftrightarrow x.\left[x^2+2mx+(m+2)\right]=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=4 \\ x^2+2mx+m+2=0\ \ (2) \end{array}\right..$$

(d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow (1)$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 0^2 + 2m.0 + m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -1 \end{array} \right. \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ \begin{cases} m < -1 \\ m \neq -2 \end{cases} \end{array} \right. .$$

Khi đó, (2) có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 tương ứng cũng là hoành độ của B và C.

$\Rightarrow B(x_1; x_1 + 4)$ và $C(x_2; x_2 + 4)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{KB} = (x_1 - 1; x_2 + 1)$ và $\overrightarrow{KC} = (x_2 - 1; x_2 + 1)$.

$$\Rightarrow S_{\Delta KBC} = \frac{\left|(x_1 - 1)(x_2 + 1) - (x_2 - 1)(x_1 + 1)\right|}{2} = |x_1 - x_2|.$$

Theo đề bài: $S_{\Delta KBC} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 128 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 128$

$$\Leftrightarrow (-2m)^2 - 4(m + 2) = 128 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{137}}{2}.$$

Vậy tất cả các giá trị m thỏa đề là $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{137}}{2}$.

Câu 43: Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Tổng tất cả các phần tử của T bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

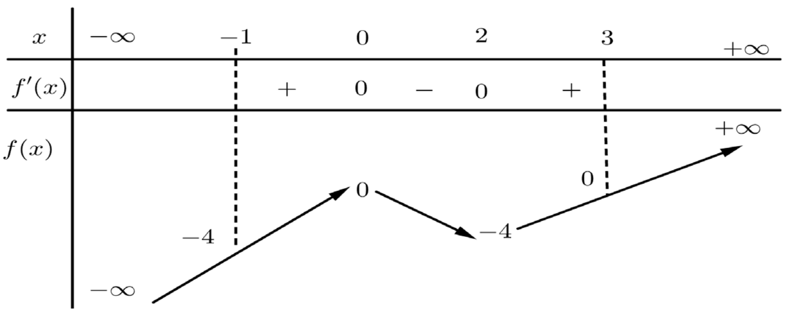
Cách 1: Ta có $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = m^3 - 3m^2 \Leftrightarrow f(x) = f(m)$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array} \right. .$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array} \right. .$$

$$f(x) = -4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array} \right. .$$



Dựa vào bảng biến thiên, suy ra có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4 < f(m) < 0$ $\begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Suy ra $T = \{1\}$. Vậy tổng tất cả các phần tử của T bằng 1.

Cách 2: Ta có $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - m^3) - 3(x^2 - m^2) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - m)\left[x^2 + (m - 3)x + m^2 - 3m\right] = 0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x^2 + (m-3)x + m^2 - 3m = 0 \ (*) \end{array}\right.$

Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt, khác m

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-3)^2 - 4(m^2 - 3m) > 0 \\ m^2 + (m-3)m + m^2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)(-3m-3) > 0 \\ 3m^2 - 6m \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Rightarrow m = 1$.

Suy ra $T = \{1\}$. Vậy tổng tất cả các phần tử của T bằng 1.

Câu 44: Cho đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{1}{f'(x_1)} + \dfrac{1}{f'(x_2)} + \dfrac{1}{f'(x_3)}$.

A. $P = 3 + 2b + c$. **B.** $P = 0$. **C.** $P = b + c + d$. **D.** $P = \dfrac{1}{2b} + \dfrac{1}{c}$.

Lời giải

Chọn B

Vì x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình bậc ba $f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Ta có $f'(x) = (x - x_1)(x - x_2) + (x - x_2)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_3)$.

Khi đó: $\begin{cases} f'(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \\ f'(x_2) = (x_2 - x_3)(x_2 - x_1) \\ f'(x_3) = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \end{cases}$

Suy ra $P = \dfrac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \dfrac{1}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} + \dfrac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$.

$= \dfrac{(x_2 - x_3) - (x_1 - x_3) + (x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} = 0$.

Câu 45: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị đi qua điểm $A(1;1), B(2;4), C(3;9)$. Các đường thẳng AB, AC, BC lại cắt đồ thị lần lượt tại các điểm M, N, P (M khác A và B, N khác A và C, P khác B và C. Biết rằng tổng các hoành độ của M, N, P bằng 5, giá trị của $f(0)$ là

A. -6. **B.** -18. **C.** 18. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thuyết bài toán ta giả sử $f(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + x^2 \ (a \neq 0)$

Ta có: $AB: y = 3x - 2$, $AC: y = 4x - 3$, $BC: y = 5x - 6$.

Khi đó:

Hoành độ của M là nghiệm của phương trình: $a(x_M - 1)(x_M - 2)(x_M - 3) + {x_M}^2 = 3x_M - 2$

$\Leftrightarrow a(x_M - 1)(x_M - 2)(x_M - 3) + (x_M - 1)(x_M - 2) = 0 \Leftrightarrow a(x_M - 3) + 1 = 0 \Leftrightarrow x_M = 3 - \dfrac{1}{a}$.

Hoành độ của N là nghiệm của phương trình: $a(x_N-1)(x_N-2)(x_N-3)+x_N{}^2=4x_N-3$

$\Leftrightarrow a(x_N-1)(x_N-2)(x_N-3)+(x_N-1)(x_N-3)=0 \Leftrightarrow a(x_N-2)+1=0 \Leftrightarrow x_N=2-\frac{1}{a}$.

Hoành độ của P là nghiệm của phương trình: $a(x_P-1)(x_P-2)(x_P-3)+x_P{}^2=5x_P-6$

$\Leftrightarrow a(x_P-1)(x_P-2)(x_P-3)+(x_P-2)(x_P-3)=0 \Leftrightarrow a(x_P-1)+1=0 \Leftrightarrow x_P=1-\frac{1}{a}$.

Từ giả thuyết ta có; $x_M+x_N+x_P=5 \Leftrightarrow 6-\frac{3}{a}=5 \Leftrightarrow a=3$.

Do đó: $f(x)=3(x-1)(x-2)(x-3)+x^2$

$f(0)=-18$.

Câu 46: Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ cắt đường thẳng $d: y=m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_2^2>5$.

A. $m\ge -3$. **B.** $m\ge -2$ **C.** $m>-3$. **D.** $m>-2$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3-3x^2+2=m(x-1) \Leftrightarrow x^3-3x^2-mx+m+2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-m-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ g(x)=x^2-2x-(m+2)=0\ (*) \end{array}\right.$.

Để hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ g(1)\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1^2+(m+2)>0 \\ 1-2-m-2\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-3 \\ m\ne -3 \end{cases} \Leftrightarrow m>-3$.

Gọi x_2, x_3 là hai nghiệm phương trình $(*)$.

Theo định lý Viét ta có $\begin{cases} x_2+x_3=2 \\ x_2.x_3=-(m+2) \end{cases}$.

Theo bài ta có $x_1^2+x_2^2+x_3^2>5 \Leftrightarrow 1+x_2^2+x_3^2>5 \Leftrightarrow x_2^2+x_3^2>4$

$\Leftrightarrow (x_2+x_3)^2-2x_2x_3>4 \Leftrightarrow 4+2(m+2)>4 \Leftrightarrow m>-2$.

So sánh với điều kiện ở trên suy ra $m>-2$.

Kết luận: $m>-2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 47: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+2m+1$ và trục Ox có đúng hai điểm chung phân biệt. Tính tổng T của các phần tử thuộc tập S

A. $T=-10$. **B.** $T=10$. **C.** $T=-12$. **D.** $T=12$.

Lời giải

Chọn C

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+2m+1$ và trục Ox là nghiệm của phương trình : $x^3+3x^2-9x+2m+1=0 \Leftrightarrow -x^3-3x^2+9x=2m+1$.

Xét hàm số $f(x)=-x^3-3x^2+9x$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$f'(x)=-3x^2-6x+9,\ f'(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-27	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+2m+1$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y=2m+1$ cắt đồ thị hàm số $f(x)=-x^3-3x^2+9x$ tại hai điểm phân biệt.

Từ bảng biến thiên suy ra : $\left[\begin{array}{l} 2m+1=5 \\ 2m+1=-27 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-14 \end{array}\right. \Rightarrow S=\{-14;2\}$.

Tổng của các phần tử thuộc tập S là : $T=-14+2=-12$.

DẠNG 4. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐỒ THỊ HÀM SỐ NHẤT BIẾN

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị (C). Tìm tham số m để đường thẳng $d: y=\alpha x+\beta$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ thỏa mãn điều kiện K?

Phương pháp giải

□ **Bước 1**.

Lập phương trình hoành độ giao điểm giữa d và (C): $\dfrac{ax+b}{cx+d}=\alpha x+\beta$

$\Leftrightarrow g(x)=\alpha cx^2+(\beta c+\alpha d-a)x+\beta d-b=0,\ \forall x\neq -\dfrac{d}{c}$.

- Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x)=0$ có nghiệm nghiệm phân biệt $\neq -\dfrac{d}{c}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c\alpha \neq 0;\ \Delta>0 \\ g\left(-\dfrac{d}{c}\right)\neq 0 \end{cases}$. Giải hệ này, ta sẽ tìm được $m\in D_1\ \ (i)$

-Gọi $A(x_1;\alpha x_1+\beta),\ B(x_2;\alpha y_2+\beta)$ với x_1,x_2 là 2 nghiệm của $g(x)=0$ Theo Viét: $S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta c+\alpha d-a}{c\alpha};\ P=x_1x_2=\dfrac{\beta d-b}{\alpha c}\ \ (ii)$

□ **Bước 2**.

-Biến đổi điều kiện K cho trước về dạng có chứa tổng và tích của $x_1,x_2\ \ (iii)$

-Thế (ii) vào (iii) sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến số là m. Giải nó sẽ tìm được $m\in D_2\ \ (*)$

-Từ $(i),(*)\Rightarrow m\in(D_1\cap D_2)$ và kết luận giá trị m cần tìm.

Một số công thức tính nhanh " thường gặp " liên quan đến tương giao giữa đường thẳng

$y = kx + p$ ***và đồ thị hàm số*** $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Giả sử $d: y = kx + p$ *cắt đồ thị hàm số* $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ *tại* 2 *điểm phân biệt* M, N.

Với $kx + p = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ *cho ta phương trình có dạng:* $Ax^2 + Bx + C = 0$ *thỏa điều kiện* $cx + d \neq 0$, *có* $\Delta = B^2 - 4AC$. *Khi đó:*

1). $M(x_1; kx_1 + p), N(x_2; kx_2 + p) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1; k(x_2 - x_1)) \Rightarrow MN = \sqrt{(k^2+1)\dfrac{\Delta}{A^2}}$

Chú ý: khi $\min MN$ *thì tồn tại* $\min \Delta, k = const$

2). $OM^2 + ON^2 = (k^2+1)(x_1^2 + x_2^2) + (x_1 + x_2)2kp + 2p^2$

3). $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = (x_1.x_2)(1+k^2) + (x_1 + x_2)kp + p^2$

4). $OM = ON \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(1+k^2) + 2kp = 0$

Câu 48: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ của tham số m để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt?

A. 4036. **B.** 4040. **C.** 4038. **D.** 4034.

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = x + m$ và đường cong $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$

$x + m = \dfrac{2x-3}{x-1} \Leftrightarrow (x+m)(x-1) = 2x - 3 \; (x \neq 1)$.

$\Leftrightarrow x^2 + mx - x - m = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 + (m-3)x - m + 3 = 0 \quad (*)$

Ta có $\Delta = (m-3)^2 - 4(-m+3) = m^2 - 6m + 9 + 4m - 12 = m^2 - 2m - 3$.

Để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 1^2 + (m-3).1 - m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 3 > 0 \\ 1 \neq 0 \quad (lđ) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3 \end{array}\right..$$

Theo giả thiết: $-2020 \le m \le 2020$ và $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3 \end{array}\right.$ nên $\left[\begin{array}{l} -2020 \le m < -1 \\ 3 < m \le 2020 \end{array}\right.$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $-2020 \le m < -1$, suy ra có $\dfrac{-2-(-2020)}{1} + 1 = 2019$ giá trị nguyên m.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $3 < m \le 2020$, suy ra có $\dfrac{2020-4}{1} + 1 = 2017$ giá trị nguyên m.

Tóm lại có tất cả $2019 + 2017 = 4036$ giá trị nguyên của tham số m.

Câu 49: Đường thẳng $y = x + 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

A. $\left[\begin{matrix} m<-1 \\ m>3 \end{matrix}\right.$. **B.** $\left[\begin{matrix} m\le -1 \\ m\ge 3 \end{matrix}\right.$. **C.** $\left[\begin{matrix} m<-3 \\ m>1 \end{matrix}\right.$. **D.** $-3<m<1$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho

$\dfrac{x-3}{x+1}=x+2m \Leftrightarrow \begin{cases}(x+2m)(x+1)=x-3 \\ x\ne -1\end{cases} \Leftrightarrow x^2+2mx+2m+3=0\ (*)$. .

Để đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt. Khi đó m phải thoả mãn $\Delta'_{(*)}>0 \Leftrightarrow m^2-2m-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} m<-1 \\ m>3 \end{matrix}\right.$.

Vậy tập hợp các giá trị của tham số m là $\left[\begin{matrix} m<-1 \\ m>3 \end{matrix}\right.$.

Câu 50: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=2x+m$ cắt đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

A. $m\in(-\infty;+\infty)$. **B.** $m\in(-1;+\infty)$. **C.** $m\in(-2;4)$. **D.** $m\in(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{x+3}{x+1}=2x+m$ (*), với điều kiện xác định $x\ne -1$.

Biến đổi về thành: $2x^2+(m+1)x+m-3=0$ (**).

Theo yêu cầu đề bài, phương trình cần có hai nghiệm phân biệt khác -1, tức là:

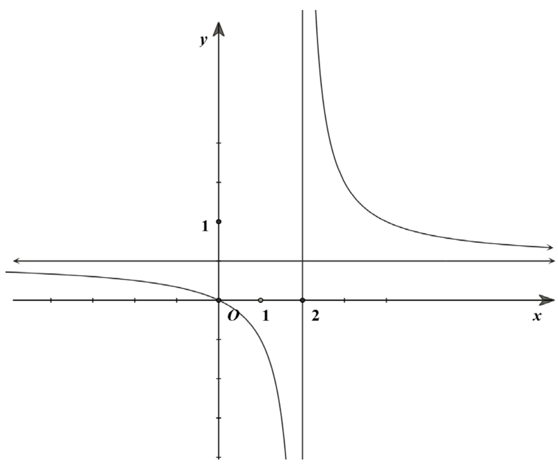
$$\begin{cases}\Delta=(m+1)^2-4.2.(m-3)>0 \\ 2.(-1)^2+(m+1).(-1)+m-3\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-6m+25>0 \\ -2\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow m\in(-\infty;+\infty).$$

Câu 51: Gọi A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng

A. $4\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Hàm số $y=\dfrac{x}{x-2}$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Gọi $A\left(a;\dfrac{a}{a-2}\right)$ và $B\left(b;\dfrac{b}{b-2}\right)$ là hai điểm thuộc hai nhánh của (C) $(a<2<b)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=\left(b-a;\dfrac{b}{b-2}-\dfrac{a}{a-2}\right)=\left(b-a;\dfrac{b-a}{(b-2)(2-a)}\right)$.

Áp dụng BĐT Côsi ta có: $(b-2)(2-a)\le\dfrac{(b-a)^2}{4}$.

Suy ra: $AB^2=(b-a)^2+\dfrac{(b-a)^2}{\left[(b-2)(2-a)\right]^2}\ge(b-a)^2+\dfrac{64}{(b-a)^2}\ge 16$

$\Rightarrow AB\ge 4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=2-\sqrt{2}$ và $b=2+\sqrt{2}$.

Vậy $AB_{\min}=4$.

Câu 52: Cho hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}\,(C)$ và đường thẳng $d:y=-x+m$. Gọi S là tập các số thực m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác OAB (O là gốc tọa độ) có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $2\sqrt{2}$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $\dfrac{x}{x-1}=-x+m,$.

Phương trình tương đương $x^2-mx+m=0$ (1).

Đồ thị (C) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x\ne 1$ điều kiện cần và đủ là $m<0\vee m>4$.

Khi đó hai giao điểm là $A(x_1;-x_1+m)$; $B(x_2;-x_2+m)$.

Ta có $OA=\sqrt{m^2-2m}$; $OB=\sqrt{m^2-2m}$; $AB=\sqrt{2(m^2-4m)}$; $d(O,d)=\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}$.

$S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}.AB.d(O,d)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}.\sqrt{2(m^2-4m)}=\dfrac{OA.OB.AB}{4R}$.

Suy ra $\dfrac{1}{2}.\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}\sqrt{2(m^2-4m)}=\dfrac{(m^2-2m).\sqrt{2(m^2-4m)}}{4.2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow m^2-2m=4|m|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\ (l)\\ m=6\ (n)\\ m=-2\ (n)\end{array}\right.$.

Vậy tổng các phần tử của S bằng 4.

Câu 53: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{1-x}$ (C) và đường thẳng $d:y=x+m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt

A. $m>-1$. **B.** $-5<m<-1$. **C.** $m<-5$. **D.** $m<-5$ hoặc $m>-1$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=\dfrac{2x-1}{1-x}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Lập phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x-1}{1-x}=x+m \quad (x\neq 1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x-1=x+m-x^2-mx\\ x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+(m+1)x-(m+1)=0 \ (*)\\ x\neq 1\end{cases}$

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $x\neq 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ 1^2+(m+1)-(m+1)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2+6m+5>0\\ 1\neq 0 \ (\text{t/m})\end{cases} \Leftrightarrow m<-5$ hoặc $m>-1$.

Câu 54: Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=x-m$, với m là tham số thực. Biết rằng đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho điểm $G(2;-2)$ là trọng tâm của tam giác OAB (O là gốc toạ độ). Giá trị của m bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** -9. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ có $y'=\dfrac{-2}{(x+1)^2}<0$, $\forall x\in D$ và đường thẳng $d: y=x-m$ có hệ số $a=1>0$ nên d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ với mọi giá trị của tham số m.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $\dfrac{x+3}{x+1}=x-m$

$\Leftrightarrow x^2-mx-m-3=0 \quad (x\neq -1)$.

Suy ra x_A, x_B là 2 nghiệm của phương trình $x^2-mx-m-3=0$.

Theo định lí Viet, ta có $x_A+x_B=m$.

Mặt khác, $G(2;-2)$ là trọng tâm của tam giác OAB nên $x_A+x_B+x_O=3x_G$

$\Leftrightarrow x_A+x_B=6$

$\Leftrightarrow m=6$.

Vậy $m=6$ thoả mãn yêu cầu đề bài.

Câu 55: Cho hàm số $y=\dfrac{3x-2m}{mx+1}$ với m là tham số. Biết rằng với mọi $m\neq 0$, đồ thị hàm số luôn cắt đường thẳng $d: y=3x-3m$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tích tất cả các giá trị của m tìm được để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại C, D sao cho diện tích ΔOAB bằng 2 lần diện tích ΔOCD bằng

A. $-\dfrac{4}{9}$. **B.** -4. **C.** -1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Với $m \neq 0$, xét phương trình $\dfrac{3x-2m}{mx+1} = 3x-3m \Leftrightarrow 3x^2-3mx-1=0$.

Gọi tọa độ các giao điểm của d với đồ thị hàm số đã cho là: $A(x_1;3x_1-3m)$, $B(x_2;3x_2-3m)$.

Tọa độ các điểm C, D là $C(m;0)$ và $D(0;-3m)$.

Gọi $h=d_{(O,d)}$ thì h là chiều cao của các tam giác OAB và OCD.

Theo giả thiết: $S_{\vartriangle OAB} = 2S_{\vartriangle OCD} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}AB.h = 2.\dfrac{1}{2}CD.h \Leftrightarrow AB = 2CD \Leftrightarrow AB^2 = 4CD^2$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2 + \left[3(x_1-x_2)\right]^2 = 4\left[m^2+(-3m)^2\right]$

$\Leftrightarrow 10(x_1-x_2)^2 = 40m^2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4m^2$

$\Leftrightarrow m^2 + \dfrac{4}{3} = 4m^2 \Leftrightarrow m^2 = \dfrac{4}{9} \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{2}{3}$.

Vậy tích các giá trị của m là $-\dfrac{4}{9}$.

Câu 56: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đường thẳng $y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho trọng tâm tam giác OAB (O là gốc tọa độ) thuộc đường thẳng $x-2y-2=0$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm: $-3x+m = \dfrac{2x+1}{x-1}$

Với điều kiện $x \neq 1$, $\Rightarrow 3x^2-(m+1)x+m+1=0$

Đường thẳng $y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 1, điều kiện:

$$\begin{cases}(m+1)^2-12(m+1)>0\\3.1^2-(m+1).1+m+1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-10m-11>0\\3\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m<-1\\m>11\end{array}\right..$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $A(x_1;-3x_1+m)$, $B(x_2;-3x_2+m)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt phương trình . Theo Vi-et ta có: $x_1+x_2=\dfrac{m+1}{3}$.

Gọi M là trung điểm AB, ta có: $M\left(\dfrac{m+1}{6};\dfrac{m-1}{2}\right)$. Giả sử $G(x;y)$ là trọng tâm tam giác OAB

, ta có $\overrightarrow{OG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{2}{3}.\dfrac{m+1}{6}\\y=\dfrac{2}{3}.\dfrac{m-1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{m+1}{9}\\y=\dfrac{m-1}{3}\end{cases}$. Vậy $G\left(\dfrac{m+1}{9};\dfrac{m-1}{3}\right)$.

Mặt khác, điểm G thuộc đường thẳng $x-2y-2=0$ nên ta có: $\frac{m+1}{9}-2.\frac{m-1}{3}-2=0$ $\Leftrightarrow m=-\frac{11}{5}$). Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 57: Giả sử $m=-\frac{b}{a}$, $a,b\in\mathbb{Z}^{+}$, $(a,b)=1$ là giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta: x-2y-2=0$, với O là gốc toạ độ. Tính $a+2b$.

A. 2. **B.** 5. **C.** 11. **D.** 21.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x-1}=-3x+m$, $x\neq 1$.

$\Rightarrow 3x^2-(m+1)x+m+1=0\ (*)$.

Để (C) cắt d tại hai điểm phân biệt thì $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1. Suy ra $\begin{cases}(m+1)^2-12(m+1)>0\\ 3.1^2-(m+1).1+(m+1)\neq 0\end{cases}\Rightarrow \left[\begin{array}{l}m+1<0\\ m+1>12\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>11\end{array}\right.$.

Khi đó $A(x_1;-3x_1+m)$, $B(x_2;-3x_2+m)$, với x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình $(*)$ đồng thời thoả mãn $x_1+x_2=\frac{m+1}{3}$.

Gọi G là trọng tâm của ΔOAB, ta có $G\left(\frac{m+1}{9};\frac{m-1}{3}\right)$.

Mà $G\in\Delta$ nên $\frac{m+1}{9}-2\frac{m-1}{3}-2=0\Rightarrow m=-\frac{11}{5}$. Suy ra $\begin{cases}a=11\\ b=5\end{cases}$.

Vậy $a+2b=21$.

Câu 58: Cho hàm số $y=\frac{3x+2}{x+2}$, (C) và đường thẳng $d: y=ax+2b-4$. Đường thẳng d cắt tại A, B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O, khi đó $T=a+b$ bằng

A. $T=2$. **B.** $T=\frac{5}{2}$. **C.** $T=4$. **D.** $T=\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình hoành độ: $\frac{3x+2}{x+2}=ax+2b-4; x\neq -2$.

$\Leftrightarrow ax^2+(2a+2b-7)x-10=0(*)$.

Đường thẳng d cắt tại hai điểm phân biệt A, B khi phương trình có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 0\\ (2a+2b-7)^2-4a(4b-10)>0(2*)\\ 4\neq 0\end{cases}$

Gọi $A(x_1;ax_1+2b-4);B(x_2;ax_2+2b-4)$.

Do A, B đối xứng nhau qua gốc O nên $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ 4b-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=0 \\ b=2 \end{cases}$

Theo Viét của phương trình ta có $x_1+x_2=\dfrac{7-2a-2b}{a}$.

$\Rightarrow \dfrac{7-2a-2b}{a}=0 \Leftrightarrow 7-2a-2b=0 \Rightarrow a=\dfrac{3}{2}$.

Thay $\begin{cases} a=\dfrac{3}{2} \\ b=2 \end{cases}$ vào điều kiện thấy thỏa mãn.

Vậy $a+b=\dfrac{7}{2}$.

Câu 59: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:\ y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm ΔOAB thuộc đường thẳng $\Delta:\ x-2y-2=0$, với O là gốc tọa độ.

A. $m=-\dfrac{11}{5}$. **B.** $m=-\dfrac{1}{5}$. **C.** $m=0$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

Chọn A

Hoành độ hai điểm A, B là nghiệm của phương trình $-3x+m=\dfrac{2x+1}{x-1}$

$\Leftrightarrow (-3x+m)(x-1)=2x+1$.

$\Leftrightarrow 3x^2-(m+1)x+m+1=0$ (*)

Điều kiện: $\Delta>0 \Leftrightarrow (m+1)^2-4.3(m+1)>0 \Leftrightarrow (m+1)(m-11)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>11 \end{array}\right.$.

Khi đó phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_A, x_B thỏa mãn $x_A+x_B=\dfrac{m+1}{3}$.

Gọi $A(x_A;-3x_A+m)$, $B(x_B;-3x_B+m)$ thì trọng tâm của tam giác OAB là $G\left(\dfrac{x_A+x_B}{3};\dfrac{-3(x_A+x_B)+2m}{3}\right)$ hay $G\left(\dfrac{m+1}{9};\dfrac{m-1}{3}\right)$.

$G\in\Delta \Leftrightarrow \dfrac{m+1}{9}-2.\dfrac{m-1}{3}-2=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{11}{5}$.

Câu 60: Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm tập hợp tất cả các giá trị $a\in\mathbb{R}$ để qua điểm $M(0;a)$ có thể kẻ được đường thẳng cắt (C) tại hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua điểm M.

A. $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng có hệ số góc k đi qua điểm $M(0;a)$ có dạng $y=kx+a$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y=kx+a$ là:

$\dfrac{2x}{x-1}=kx+a \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ 2x=kx^2-kx+ax-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ kx^2+(a-k-2)x-a=0\,(*) \end{cases}$.

Ta cần tìm điều kiện của a để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 khác 1 và thỏa mãn $\dfrac{x_1+x_2}{2}=0 \Leftrightarrow x_1+x_2=0$.

Điều kiện này tương đương với $\begin{cases} k\neq 0 \\ (a-k-2)^2+4ka>0 \\ k.1^2+(a-k-2).1-a\neq 0 \\ x_1+x_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 0 \\ (a-k-2)^2+4ka>0 \\ -2\neq 0 \\ \dfrac{k+2-a}{k}=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 0 \\ k=a-2 \\ 4(a-2)a>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2\neq 0 \\ k=a-2 \\ a\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty) \end{cases} \Rightarrow a\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

Câu 61: Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $MN\leq 10$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định của hàm số: $x\neq -1$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x-1}{x+1}=x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(m-1)x+m+1=0 \\ x\neq -1 \end{cases}$.

Đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N khi và chỉ khi phương trình $x^2+(m-1)x+m+1=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ x\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-6m-3>0 \\ 3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<3-2\sqrt{3} \\ m>3+2\sqrt{3} \end{array}\right. \;(*)$.

Gọi $M(x_1;x_1+m)$, $N(x_2;x_2+m)$ là tọa độ giao điểm đường thẳng $y=x+m$ và đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

Theo bài cho $MN\leq 10 \Leftrightarrow \sqrt{2(x_2-x_1)^2}\leq 10 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2\leq 50$

Áp dụng định lí Viét cho phương trình $x^2+(m-1)x+m+1=0$ ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=1-m \\ x_1.x_2=m+1 \end{cases}$.

Ta có $MN\leq 10 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2\leq 50 \Leftrightarrow m^2-6m-53\leq\Leftrightarrow 3-\sqrt{62}\leq m\leq 3+\sqrt{62}$

Kết hợp với thì $m\in\left(3-\sqrt{62};3-2\sqrt{3}\right)\cup\left(3+2\sqrt{3};3+\sqrt{62}\right)$.

Các số nguyên dương m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m=\{7,8,9,10\}$.

Câu 62: Cho là đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. Tìm k để đường thẳng $d: y=kx+2k+1$ cắt tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A đến trục hoành bằng khoảng cách từ B đến trục hoành.

A. 1. **B.** $\dfrac{2}{5}$ **C.** -3. **D.** -2.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{2x+1}{x+1}=kx+2k+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 (ld) \\ kx^2+(3k-1)x+2k=0 \quad (1) \end{cases}.$$

Ycbt tương đương có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $|kx_1+2k+1|=|kx_2+2k+1|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 0 \\ \Delta=k^2-6k+1>0 \\ k(x_1+x_2)+4k+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 0 \\ k^2-6k+1>0 \\ 1-3k+4k+2=0 \Leftrightarrow k=-3 \end{cases} \Leftrightarrow k=-3.$$

Câu 63: Tìm điều kiện của m để đường thẳng $y=mx+1$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

A. $(-\infty;0]\cup[16;+\infty)$ **B.** $(16;+\infty)$ **C.** $(-\infty;0)$ **D.** $(-\infty;0)\cup(16;+\infty)$

Lời giải

Chọn D

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình: $\dfrac{x-3}{x+1}=mx+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=(mx+1)(x+1) \\ x\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2+mx+4=0 \quad (*) \\ x\neq -1 \end{cases}$$

Để đường thẳng $y=mx+1$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác -1 hay $\begin{cases} \Delta>0 \\ m(-1)^2+m(-1)+4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-16m>0 \\ 4\neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m\in(-\infty;0)\cup(16;+\infty)$.

Câu 64: Gọi $M(a;b)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x}$ sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $d: y=2x+6$ nhỏ nhất. Tính $(4a+5)^2+(2b-7)^2$.

A. 162. **B.** 2. **C.** 18. **D.** 0.

Lời giải

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d là: $\frac{x-2}{x}=2x+6$

$\Leftrightarrow 2x^2+5x+2=0\ (x\neq 0)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\frac{-1}{2} \end{array}\right.$.

Suy ra đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $M_1(-2;2)$, $M_2\left(-\frac{1}{2};5\right)$.

Ta có $d(M;d)\geq 0,\forall M\ \Rightarrow \min d(M;d)=0$ khi $M\in d$.

Mà $M\in(C)\ \Rightarrow M=d\cap(C)\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(-2;2) \\ M\left(-\frac{1}{2};5\right) \end{array}\right.$.

Với $M(-2;2)\Rightarrow a=-2,b=2\Rightarrow (4a+5)^2+(2b-7)^2=18$.

Với $M\left(-\frac{1}{2};5\right)\Rightarrow a=-\frac{1}{2},\ b=5\Rightarrow(4a+5)^2+(2b-7)^2=18$.

Câu 65: Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y=\frac{x}{1-x}$ cắt đường thẳng $y=x-m$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60^0?

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x}{1-x}=x-m\Leftrightarrow\begin{cases} x\neq 1 \\ x^2-mx+m=0 \quad (*) \end{cases}$

Để có hia điểm phân biệt A,B thì phương trình phải có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\begin{cases} 1-m+m\neq 0 \\ m^2-4m>0 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<0 \end{array}\right.$

Khi đó phương trình có hai nghiệm phân biết x_1,x_2 thỏa mãn:

$\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=m \end{cases}$

Giả sử $A(x_1;x_1-m),B(x_2;x_2-m)$, suy ra: $\overrightarrow{OA}(x_1;x_1-m),\overrightarrow{OB}(x_2;x_2-m)$

Theo giả thiết góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60^0 suy ra:

$$\cos\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\cos 60^0\Leftrightarrow\frac{|x_1x_2+(x_1-m)(x_2-m)|}{\sqrt{x_1^2+(x_1-m)^2}\sqrt{x_2^2+(x_2-m)^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{|2x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2|}{\sqrt{x_1^2x_2^2+(x_1x_2-mx_2)^2+x_1^2(x_1x_2-m)^2+[(x_1-m)(x_2-m)]^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{|2m-m^2+m^2|}{\sqrt{m^2+(m-mx_2)^2+(m-mx_1)^2+[x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2]^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{|2m|}{\sqrt{m^2+(m-mx_2)^2+(m-mx_1)^2+[m-m^2+m^2]^2}}=\frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{2+(1-x_2)^2+(1-x_1)^2}}=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2+(1-x_2)^2+(1-x_1)^2=16$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2-2(x_1+x_2)=12$

$\Leftrightarrow m^2-4m-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=6 \\ m=-2 \end{array}\right.$

Câu 66: Để đường thẳng $d: y=x-m+2$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài AB ngắn nhất thì giá trị của m thuộc khoảng nào?

A. $m\in(-4;-2)$ **B.** $m\in(2;4)$ **C.** $m\in(-2;0)$ **D.** $m\in(0;2)$

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$\dfrac{2x}{x-1}=x-m+2 \Leftrightarrow x^2-(m+1)x+m-2=0 \quad (*)$.

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt:

$\Leftrightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

$\Leftrightarrow \Delta=(m+1)^2-4(m-2)=(m-1)^2+8>0, \forall m\in\mathbb{R}$.

Theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=m+1 \\ x_1.x_2=m-2 \end{cases}$

Khi đó $A(x_1;x_1-m+2)$, $B(x_2;x_2-m+2)$.

$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(x_2-m+2-x_1+m-2)^2}=\sqrt{2(x_2-x_1)^2}=\sqrt{2}\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_1x_2}$.

$=\sqrt{2}\sqrt{(m-1)^2+8}\geq 4$.

AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB=4 \Leftrightarrow m=1$.

Câu 67: Biết rằng đường thẳng $y=2x+2m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt *A*, *B* với mọi giá trị của tham số *m*. Tìm hoành độ trung điểm của *AB*?

A. $m+1$ **B.** $-m-1$ **C.** $-2m-2$ **D.** $-2m+1$

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$\dfrac{x^2+3}{x+1}=2x+2m \Leftrightarrow x^2+2(1+m)x+2m-3=0 \ (1), (x\neq -1).$$

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=(1+m)^2-(2m-3)>0 \\ (-1)^2+2(1+m).(-1)+2m-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+4>0, \forall m \\ -4\neq 0 \end{cases}$.

Khi đó, gọi $A(x_1;2x_1+2m)$; $B(x_2;2x_2+2m)$

Hoành độ trung điểm của AB là $x_I=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{2+2m}{2}=-m-1$.

Câu 68: Gọi (H) là đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$. Điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc (H) có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất, với $x_0<0$ khi đó x_0+y_0 bằng

A. -1. **B.** -2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Dễ thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $d_1:x=-1$ và tiệm cận ngang $d_2:y=2$.

Do $M\in(H)\Rightarrow M\left(x_0;\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}\right)$.

Xét $d(M,d_1)+d(M,d_2)=|x_0+1|+\left|\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}-2\right|=|x_0+1|+\left|\dfrac{1}{x_0+1}\right|\ge 2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $|x_0+1|=\left|\dfrac{1}{x_0+1}\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=-2\end{array}\right.$.

Theo đề bài, ta có $x_0<0$ nên nhận $x_0=-2\Rightarrow y_0=1$.

Vậy $x_0+y_0=-1$.

Câu 69: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $d:y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB\le 2\sqrt{2}$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. -6. **B.** -27. **C.** 9. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{-2x+1}{x+1}=-x+m$

Điều kiện: $x\ne-1$.

Phương trình $\Rightarrow\dfrac{-2x+1}{x+1}=-x+m$

$\Leftrightarrow -2x+1=(-x+m)(x+1)$

$\Leftrightarrow -x^2+(m+1)x+m-1=0$.

Để đường thẳng $d:y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A,B thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt khác $-1\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\-3\ne0\end{cases}\Leftrightarrow m^2+6m-3>0.$

$\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;-3-2\sqrt{3}\right)\cup\left(-3+2\sqrt{3};+\infty\right)$.

Gọi $A(x_A;-x_A+m),B(x_B;-x_B+m)$ là tọa độ giao điểm:

Theo đề ta có:

$AB \le 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (x_B - x_A)^2} \le 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2(x_B - x_A)^2 = 8 \Leftrightarrow x_B^2 - 2x_A.x_B + x_A^2 - 4 \le 0$

$\Leftrightarrow (x_A + x_B)^2 - 4x_A.x_B - 4 \le 0$.

$\Leftrightarrow (m+1)^2 - 4(1-m) - 4 < 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 6m - 7 < 0 \Leftrightarrow m \in (-7;1)$

Từ và ta có $m \in \left(-7;-3-2\sqrt{2}\right) \cup \left(-3+2\sqrt{2};1\right)$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-6;0\}$

Chọn A

Câu 70: Cho hàm số $y = \dfrac{2x - m^2}{x+1}$ có đồ thị (C_m), trong đó m là tham số thực. Đường thẳng $d: y = m - x$ cắt (C_m) tại hai điểm $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B)$ với $x_A < x_B$; đường thẳng $d': y = 2 - m - x$ cắt (C_m) tại hai điểm $C(x_C;y_C), D(x_D;y_D)$ với $x_C < x_D$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $x_A.x_D = -3$. Số phần tử của tập S là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Hoành độ điểm A và B là nghiệm phương trình: $2x - m^2 = (x+1)(m-x)$

$\Leftrightarrow x^2 + (3-m)x - m^2 - m = 0$ suy ra $x_A.x_B = -m^2 - m; x_A + x_B = m - 3$

Hoành độ điểm C và D là nghiệm phương trình: $2x - m^2 = (x+1)(2-m-x)$

$\Leftrightarrow x^2 + (m+1)x - m^2 + m - 2 = 0$ suy ra $x_C.x_D = -m^2 + m - 2; x_C + x_D = -m - 1$

Mặc khác x_A và x_D là nghiệm của phương trình: $x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = -3 \\ x_D = 1 \end{array}\right.$. Suy ra

$m^2 + 6m + 9 = 5m^2 - 2m + 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

DẠNG 5. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG

. **Bài toán tổng quát**: Tìm m để đường thẳng $d: y=\alpha$ cắt đồ thị $(C): y=f(x;m)=ax^4+bx^2+c$ tại n điểm phân biệt thỏa mãn điều kiện K cho trước?

Phương pháp giải:

<u>Bước 1</u>. Lập phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $ax^4+bx^2+c-\alpha=0$

Đặt $t=x^2\geq 0$ thì $(1)\Leftrightarrow at^2+bt+c-\alpha=0$

Tùy vào số giao điểm n mà ta biện luận để tìm giá trị $m\in D_1$. Cụ thể:

- Để $d\cap(C)=n=4$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm $t_1,\ t_2$ thỏa điều kiện: $0<t_1<t_2\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ S>0\Rightarrow m\in D_1.\\ P>0\end{cases}$

- Để $d\cap(C)=n=3$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (2)$ có nghiệm $t_1,\ t_2$ thỏa điều kiện: $0=t_1<t_2\Leftrightarrow \begin{cases}c-\alpha=0\\ \dfrac{b}{a}<0\end{cases}\Rightarrow m\in D_1.$

- Để $d\cap(C)=n=2$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm trái dấu hoặc có nghiệm kép dương $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}ac<0\\ \begin{cases}\Delta=0\Rightarrow m\in D_1.\\ S>0\end{cases}\end{array}\right.$

- Để $d\cap(C)=n=1$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có đúng 1 nghiệm

$\Leftrightarrow (2)$ có nghiệm kép $=0$ hoặc $\begin{cases}t_1<0\\ t_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=0\\ c-\alpha=0\end{cases}\vee\begin{cases}c-\alpha=0\\ \dfrac{b}{a}>0\end{cases}\Rightarrow m\in D_1.$

<u>Bước 2</u>. Biến đổi điều kiện K về dạng có chứa tổng và tích của $t_1,\ t_2$

Thế biểu thức tổng, tích vào sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến số là m. Giải chúng ta sẽ tìm được $m\in D_2$.

Kết luận: $m\in D_1\cap D_2$.

Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Ta có: $ax^4+bx^2+c=0$ (1), *đặt* $t=x^2\geq 0$, *thì có:* $at^2+bt+c=0$ (2)

Để (1) *có* 4 *nghiệm phân biệt thì* (2) *có hai nghiệm phân biệt dương, tức là:* $\begin{cases}\Delta>0\\ t_1+t_2>0\\ t_1.t_2>0\end{cases}$

Khi đó (1) *có* 4 *nghiệm phân biệt lần lượt là* $-\sqrt{t_2};-\sqrt{t_1};\sqrt{t_1};\sqrt{t_2}$ *lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi:* $\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}=\sqrt{t_1}-(-\sqrt{t_1})\Leftrightarrow\sqrt{t_2}=3\sqrt{t_1}\Leftrightarrow t_2=9t_1$. *Theo định lý Vi – et* $t_1+t_2=-\dfrac{b}{a}$ *suy ra*

$t_1 = -\dfrac{b}{10a}; t_2 = -\dfrac{9b}{10a}$, *kết hợp* $t_1.t_2 = \dfrac{c}{a}$ *nên có:* $9ab^2 = 100a^2c$

Tóm lại: Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ *cắt trục hoành tại* 3 *điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng, thì điều kiện cần và đủ là:* $\begin{cases} b^2 - 4ac > 0 \\ -\dfrac{b}{a} > 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \\ 9ab^2 = 100a^2c \end{cases}$

Câu 71: Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 4x^2 + 3 + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt là

A. $(-1;3)$. **B.** $(-3;1)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(-3;0)$.

Lời giải

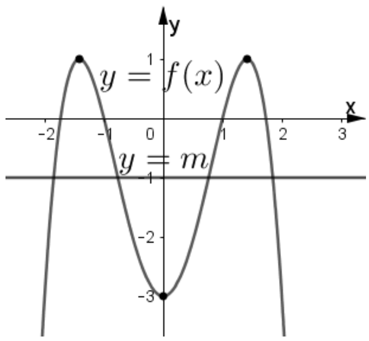
Chọn B

Ta có: $x^4 - 4x^2 + 3 + m = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 4x^2 - 3 = m$.

Xét hàm số $y = -x^4 + 4x^2 - 3$, khi đó:

$y' = -4x^3 + 8x; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{2} \\ x = 0 \end{array}\right.$.

Suy ra $y_{CD} = 1; y_{CT} = -3$.



Vậy để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thì: $-3 < m < 1 \Rightarrow m \in (-3;1)$.

Câu 72: Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2mx^2 + (2m-1) = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt là

A. $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)\backslash\{1\}$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình: $x^4 - 2mx^2 + (2m-1) = 0$.

Đặt $x^2 = t (t \geq 0)$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2mt + (2m-1) = 0$ (*).

Để phương trình ban đầu có bốn nghiệm thực phân biệt thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 1 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall m \neq 1 \\ m > 0 \\ m > \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{cases} \text{ hay } m \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right) \backslash \{1\}.$$

Câu 73: Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 2$. Tìm số thực dương m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O, trong đó O là gốc tọa độ.

A. $m = 2$. **B.** $m = \dfrac{3}{2}$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = 1$.

Lời giải

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình:

$x^4 - 3x^2 - 2 = m \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 2 - m = 0 \quad (1)$.

Vì $m > 0 \Leftrightarrow -2 - m < 0$ hay phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn:

$$x^2 = \frac{3 + \sqrt{4m+17}}{2} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{4m+17}}{2}} \text{ và } x_2 = -\sqrt{\frac{3 + \sqrt{4m+17}}{2}}.$$

Khi đó: $A(x_1; m)$, $B(x_2; m)$.

Ta có tam giác OAB vuông tại O, trong đó O là gốc tọa độ $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_1.x_2 + m^2 = 0$.

$$\Leftrightarrow \frac{3 + \sqrt{4m+17}}{2} = m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - 3 \geq 0 \\ 4m^4 - 12m^2 - 4m - 8 = 0 \end{cases} \xleftrightarrow[2m^2 - 3 \geq 0]{m > 0} m = 2.$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 74: Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2$ tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi

A. $-\dfrac{1}{4} < m < 0$. **B.** $0 < m < \dfrac{1}{4}$. **C.** $m > 0$. **D.** $m > -\dfrac{1}{4}$

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = x^4 - x^2$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 - 2x.$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-x^2$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow -\frac{1}{4}<m<0$.

Câu 75: Một đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ là 0, 1, m, n. Tính $S=m^2+n^2$.

A. $S=1$. **B.** $S=0$. **C.** $S=3$. **D.** $S=2$.

Lời giải

Chọn C

Tọa độ các giao điểm lần lượt là $A(0;0), B(1;-1), C(m;m^4-2m^2)$, $D(n;n^4-2n^2)$.

Đường thẳng qua các điểm A,B,C,D có phương trình: $y=-x$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-2x^2=-x \Leftrightarrow x^4-2x^2+x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x^2+x-1=0\ (*) \end{array}\right.$

Vậy m,n là các nghiệm của phương trình $(*)$.

Khi đó: $S=m^2+n^2=(m+n)^2-2mn=3$.

Câu 76: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=x^4-4x^3+(m-2)x^2+8x+4$ cắt trục hoành tại đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn 1.

A. 8. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4-4x^3+(m-2)x^2+8x+4=0$

Đồ thị hàm số $y=x^4-4x^3+(m-2)x^2+8x+4$ cắt trục hoành tại đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn 1 $\Leftrightarrow$ có đúng hai nghiệm lớn hơn 1.

$(*) \Leftrightarrow x^4-4x^3+8x+4=(2-m)x^2$

$\Leftrightarrow 2-m=x^2-4x+\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}$

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của $(C): y=x^2-4x+\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}\ (x>1)$ với đường thẳng $y=2-m$ song song với trục hoành.

Xét hàm số $y=x^2-4x+\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}\ (x>1)$.

$y'=2x-4-\frac{8}{x^2}-\frac{8}{x^3}=\frac{2x^4-4x^3-8x-8}{x^2}$.

Cho $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\sqrt{3}\ (\text{loại}) \\ x=1+\sqrt{3}\ (\text{nhận}) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	9	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
				$y=2-m$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, ycbt $\Leftrightarrow 0<2-m<9 \Leftrightarrow -7<m<2$.

Vì m nguyên nên $m\in\{-6,-5,...,1\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của m thỏa bài toán.

Câu 77: Cho hàm số $f(x)=-4x^4+8x^2-1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình $f(x)=m$ có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

$$f'(x)=-16x^3+16x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình $f(x)=m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)=-4x^4+8x^2-1\ (C)$ và đường thẳng $y=m$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\m<-1\end{array}\right.$.

Vậy có 1 giá trị nguyên dương của m để phương trình $f(x)=m$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

Câu 78: Cho hàm số $y=x^4+2mx^2+m$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y=-3$ tại bốn điểm phân biệt, trong đó có một điểm có hoành độ lớn hơn 2 còn ba điểm kia có hoành độ nhỏ hơn 1, là khoảng $(a;b)$. Khi đó, $15ab$ nhận giá trị nào sau đây?

A. -63. **B.** 63. **C.** 95. **D.** -95.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^4+2mx^2+m=-3$. Đặt $x^2=t$, $t\ge 0$. Khi đó phương trình trở thành $t^2+2mt+m+3=0$ (1) và đặt $f(t)=t^2+2mt+m+3$.

Để đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y=-3$ tại 4 điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm thỏa mãn $0<t_1<t_2$ và khi đó hoành độ bốn giao điểm là $-\sqrt{t_2}<-\sqrt{t_1}<\sqrt{t_1}<\sqrt{t_2}$.

Do đó, từ điều kiện của bài toán suy ra $\begin{cases}\sqrt{t_2}>2\\ \sqrt{t_1}<1\end{cases}$ hay $0<t_1<1<4<t_2$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}f(0)>0\\ f(1)<0\\ f(4)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m+3>0\\ 3m+4<0\\ 9m+19<0\end{cases} \Leftrightarrow -3<m<-\dfrac{19}{9}$.

Vậy $a=-3$, $b=-\dfrac{19}{9}$ nên $15ab=95$.

Câu 79: Đường thẳng $y=m^2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-x^2-10$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông (O là gốc tọa độ). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m^2\in(5;7)$. **B.** $m^2\in(3;5)$. **C.** $m^2\in(1;3)$. **D.** $m^2\in(0;1)$.

Lời giải

$y'=4x^3-2x=2x(2x^2-1)$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\frac{41}{4}$	↗	-10	↘	$-\frac{41}{4}$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đường thẳng $y=m^2\geq 0$ luôn phía trên trục hoành

Nên nó luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt A, B.

Gọi $A(\sqrt{a};m^2)$ và $B(-\sqrt{a};m^2)$ là giao điểm của hai đồ thị đã cho, với $a>0$

Ta có

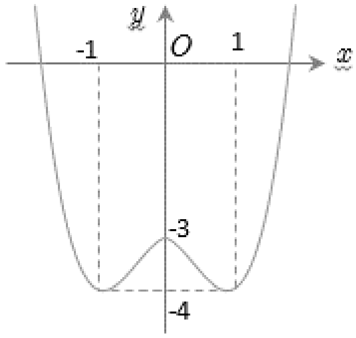
❍ $A\in(C) \Leftrightarrow a^2-a-10=m^2$ (1)

❍ Tam giác OAB cân tại O nên tam giác OAB vuông tại O $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0 \Leftrightarrow m^4=a$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\Leftrightarrow m^8-m^4-m^2-10=0 \Leftrightarrow t^4-t^2-t-10=0$, với $t=m^2>0$.

$\Leftrightarrow (t-2)(t^3+2t^2+3t+5)=0 \Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow m^2=2\in(1;3)$.

Câu 80: Cho hàm số $y=x^4-2x^2-3$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Với giá trị nào của m thì phương trình $x^4-2x^2-3=2m-4$ có 2 nghiệm phân biệt.



A. $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. **B.** $m \leq \dfrac{1}{2}$. **C.** $0<m<\dfrac{1}{2}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m>\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy, phương trình $x^4-2x^2-3=2m-4$ có hai nghiệm phân biệt khi $\left[\begin{array}{l} 2m-4=-4 \\ 2m-4>-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m>\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Câu 81: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $-x^4+2x^2+3+2m=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $-2 \leq m \leq -\dfrac{3}{2}$. **B.** $-\dfrac{3}{2}<m<2$. **C.** $-2<m<-\dfrac{3}{2}$. **D.** $3<m<4$.

Lời giải

- Ta có: $-x^4+2x^2+3+2m=0 \Leftrightarrow x^4-2x^2-3=2m$.
- Lập bảng biến thiên của hàm số $y=x^4-2x^2-3$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

- Số nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2-3$ và đường thẳng $y=2m$.
- Từ BBT ta thấy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-4<2m<-3 \Leftrightarrow -2<m<-\dfrac{3}{2}$.

Câu 82: Tất cả các giá trị thực của tham số m, để đồ thị hàm số $y=x^4-2(2-m)x^2+m^2-2m-2$ không cắt trục hoành.

A. $m \geq \sqrt{3}+1$. **B.** $m<3$. **C.** $m>\sqrt{3}+1$. **D.** $m>3$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^4-2(2-m)x^2+m^2-2m-2=0 \quad (1)$

Đặt $t=x^2 \geq 0$. Phương trình (1) trở thành $t^2-2(2-m)t+m^2-2m-2=0 \quad (2)$

Đồ thị hàm số không cắt trục hoành $\Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow (2)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm âm

Hay $\left[\begin{array}{l}\Delta' = -2m+6<0\\ \begin{cases}\Delta' = -2m+6\ge 0\\ 2-m<0\\ m^2-2m-2>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>3\\ \begin{cases}m\le 3\\ m>2\\ \left[\begin{array}{l}m>1+\sqrt{3}\\ m<1-\sqrt{3}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>3\\ 1+\sqrt{3}<m\le 3\end{array}\right. \Leftrightarrow m>1+\sqrt{3}.$

Câu 83: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=(m+1)x^4-2(2m-3)x^2+6m+5$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có các hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1<x_2<x_3<1<x_4$.

A. $m\in\left(-1;\frac{-5}{6}\right)$. **B.** $m\in(-3;-1)$. **C.** $m\in(-3;1)$. **D.** $m\in(-4;-1)$.

Lời giải

C1: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là

$$(m+1)x^4-2(2m-3)x^2+6m+5=0 \quad (1)$$

Đặt $t=x^2\ge 0$ pt trở thành $(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5=0 \quad (2)$

$g(t)=(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5$

Để pt có 4 nghiệm phân biệt thì pt phải có 2 nghiệm dương phân biệt

Hay $\begin{cases}m+1\ne 0\\ \Delta'>0\\ t_1.t_2>0\\ t_1+t_2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\ne -1\\ (2m-3)^2-(m+1)(6m+5)>0\\ \dfrac{6m+5}{m+1}>0\\ \dfrac{2m-3}{m+1}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\ne -1\\ \dfrac{-23-\sqrt{561}}{4}<m<\dfrac{-23+\sqrt{561}}{4}\\ m<-1\vee m>-\dfrac{5}{6}\\ m<-1\vee m>\dfrac{3}{2}\end{cases} \quad (*)$

Để pt có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1<x_2<x_3<1<x_4$

thì pt phải có 2 nghiệm thỏa $0<t_1<1<t_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases}t_1-1<0\\ t_2-1>0\end{cases} \Leftrightarrow (t_1-1)(t_2-1)<0 \Leftrightarrow t_1t_2-(t_1+t_2)+1<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{6m+5}{m+1}-\dfrac{2(2m-3)}{m+1}+1<0 \Leftrightarrow \dfrac{3m+12}{m+1}<0 \Leftrightarrow -4<m<-1$

Kết hợp với ta có $m\in(-4;-1)$ thỏa yêu cầu bài toán.

C2:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là

$$(m+1)x^4-2(2m-3)x^2+6m+5=0 \quad (1)$$

Đặt $t=x^2\ge 0$ pt trở thành $(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5=0 \quad (2)$

Để pt có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1<x_2<x_3<1<x_4$

thì pt phải có 2 nghiệm thỏa $0<t_1<1<t_2$

Phương trình $\Leftrightarrow m=\dfrac{-t^2-6t-5}{t^2-4t+6}$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{-t^2-6t-5}{t^2-4t+6}$, với $t\in\left(0;+\infty\right)$

Ta có $f\left(t\right)$ liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$ và có

$$f'\left(t\right)=\frac{10t^2-2t-56}{\left(t^2-4t+6\right)^2}$$

$$f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1-\sqrt{561}}{10}<0 \\ t=\dfrac{1+\sqrt{561}}{10}>1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

t	0	1	$\frac{1+\sqrt{561}}{10}$	$+\infty$
$f'\left(t\right)$		$-$	0	$+$
$f\left(t\right)$	$-\frac{5}{6}$ ↘	-4 ↘		↗ -1

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{-t^2-6t-5}{t^2-4t+6}$ tại hai giao điểm có hoàng độ thỏa $0<t_1<1<t_2$ khi $-4<m<-1$.

Câu 84: Cho hàm số $y=x^4-\left(3m+2\right)x^2+3m$ có đồ thị là $\left(C_m\right)$. Tìm m để đường thẳng $d:y=-1$ cắt đồ thị $\left(C_m\right)$ tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

A. $-\dfrac{1}{3}<m<1$ và $m\neq 0$ **B.** $-\dfrac{1}{2}<m<1$ và $m\neq 0$

C. $-\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{1}{2}$ và $m\neq 0$ **D.** $-\dfrac{1}{3}<m<\dfrac{1}{2}$ và $m\neq 0$

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(C_m\right)$ và đường thẳng d là $x^4-\left(3m+2\right)x^2+3m=-1$

$\Leftrightarrow x^4-\left(3m+2\right)x^2+3m+1=0$

Đặt $t=x^2$, $\left(t\geq 0\right)$, phương trình trở thành $t^2-\left(3m+2\right)t+3m+1=0\ \ \left(2\right)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3m+1 \end{array}\right.$$

Đường thẳng $d:y=-1$ cắt đồ thị $\left(C_m\right)$ tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2 khi và chỉ khi phương trình $\left(2\right)$ có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $0<t_1<t_2<4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m+1 \neq 1 \\ 0 < 3m+1 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\dfrac{1}{3} < m < 1 \end{cases}$$

CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 6. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ

MỨC ĐỘ VD – VDC

III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 6. BIỆN LUẬN M ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN K (HÀM SỐ KHÁC)

Câu 1: Cho hai hàm số $y=\frac{x^2-1}{x}+\frac{x^2-2x}{x-1}+\frac{x^2-4x+3}{x-2}+\frac{x^2-6x+8}{x-3}$ và $y=|x+2|-x+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tính tổng tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-15;20)$ của tham số m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại nhiều hơn hai điểm phân biệt.

A. 210. **B.** 85. **C.** 119. **D.** 105.

Câu 2: Cho hai hàm số $y=\frac{x}{x-1}+\frac{x+1}{x}+\frac{x+2}{x+1}$ và $y=e^x+2020+3m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Có bao nhiêu số nguyên m thuộc $(-2019;2020)$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 3 điểm phân biệt?

A. 2692. **B.** 2691. **C.** 2690. **D.** 2693.

Câu 3: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hai hàm số $y=(2x^2+1)\sqrt{x-1}$ và $y=\frac{11}{3x-4}-\frac{1}{2-x}+11+m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-\infty;1]$. **D.** $(-\infty;2]$.

Câu 4: Cho hai hàm số $y=\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}$ và $y=2^{1-x}+2m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2]$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(-\infty;4)$.

Câu 5: Cho hai hàm số $y=\frac{x}{x^2-1}+\frac{x-1}{x^2-2x}+\frac{x-2}{x^2-4x+3}$ và $y=x-|x+1|+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Số các giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-20;20)$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại năm điểm phân biệt là

A. 22. **B.** 39. **C.** 21. **D.** 20.

Câu 6: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình

$m^2x^4-(m+2)x^3+x^2+(m^2-1)x\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Số phần tử của tập S là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 7: Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ để bất phương trình $(x-1)(x+2)(ax^2+bx+2)\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 8: Trong số các cặp số thực $(a;b)$ để bất phương trình $(x-1)(x-a)(x^2+x+b)\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$, tích ab nhỏ nhất bằng

A. $-\dfrac{1}{4}$. **B.** -1. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 1.

Câu 9: Cho 2 hàm số $y=x^7+x^5+x^3+3m-1$ và $y=|x-2|-x-2m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1), (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) cắt (C_2) là

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m\in(2;+\infty)$. **C.** $m\in(-\infty;2)$. **D.** $m\in[2;+\infty)$.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để phương trình $\sqrt{3+x}\left(2\sqrt{3+x}-m\right)+\sqrt{1-x}\left(5\sqrt{1-x}+2m\right)=4\sqrt{-x^2-2x+3}$ có nghiệm thực?

A. 2019. **B.** 4032. **C.** 4039. **D.** 4033.

Câu 11: Tập hợp tất cả các số thực của tham số m để phương trình $x^6+6x^4-m^3x^3+(15-3m^2)x^2-6mx+10=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$ là:

A. $2<m\le\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{5}\le m<3$. **C.** $\dfrac{11}{5}<m<4$. **D.** $0<m<\dfrac{9}{4}$.

Câu 12: Có bao nhiêu m nguyên dương để hai đường cong $(C_1): y=\left|2+\dfrac{2}{x-10}\right|$ và $(C_2): y=\sqrt{4x-m}$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương?

A. 35. **B.** 37. **C.** 36. **D.** 34.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=(x-1).(x-2)...(x-2020)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để phương trình $f'(x)=m.f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt?

A. 2020. **B.** 4040. **C.** 4041. **D.** 2020.

Câu 14: Cho phương trình $4\cos^3x-12\cos^2x-33\cos x=4m+3\sqrt[3]{3\cos^2x+9\cos x+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm duy nhất thuộc $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$.

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Câu 15: Cho hai hàm số $y=\ln\left|\dfrac{x-2}{x}\right|$ và $y=\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{x}+4m-2020$, Tổng tất các các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hai hàm số cắt nhau tại một điểm duy nhất là

A. 506. **B.** 1011. **C.** 2020. **D.** 1010.

Câu 16: Cho hai hàm số $y=(x+1)(2x+1)(3x+1)\left(m+2|x|\right)$; $y=-12x^4-22x^3-x^2+10x+3$ có đồ thị lần lượt là $\left(C_1\right)$, $\left(C_2\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2020;2020]$ để $\left(C_1\right)$ cắt $\left(C_2\right)$ tại 3 điểm phân biệt?

A. 4040. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 4041.

Câu 17: Cho hàm số $y=\dfrac{\left(x^2-2x+m\right)^2-3x-m}{x-3}$ (C) và đường thẳng $(d): y=2x$ (m là tham số thực). Số giá trị nguyên của $m\in[-15;15]$ để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt là

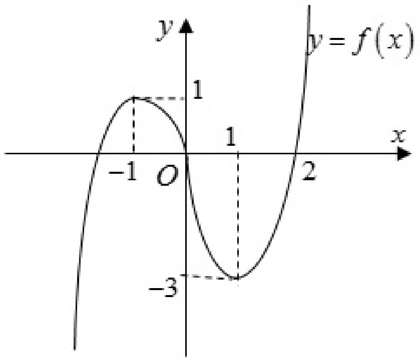
A. 15. **B.** 30. **C.** 16. **D.** 17.

Câu 18: Cho hai hàm số $y=x^6+6x^4+6x^2+1$ và $y=x^3\sqrt{m-15x}\left(m+3-15x\right)$ có đồ thị lần lượt là $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Số phần tử của tập hợp S bằng

A. 2006. **B.** 2005. **C.** 2007. **D.** 2008.

DẠNG 7. TƯƠNG GIAO HÀM HỢP, HÀM ẨN

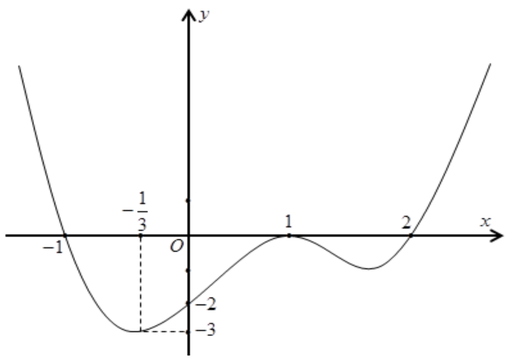
Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau



Số nghiệm của phương trình $f\left(2+f\left(e^x\right)\right)=1$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

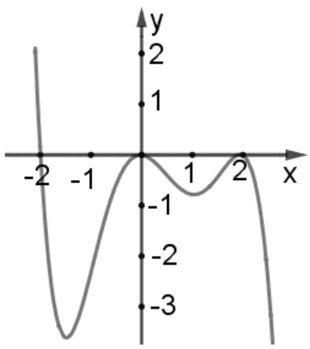
Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



Đặt $g(x)=f\left(f'(x)-1\right)$. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g'(x)=0$. Số phần tử của tập S là

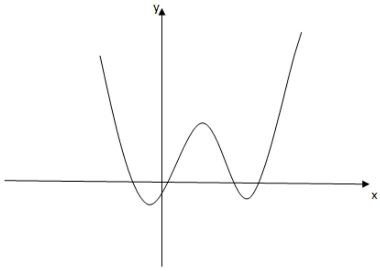
A. 8. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x)=f\left(f(x)\right)$. Hỏi phương trình $g'(x)=0$ có mấy nghiệm thực phân biệt?



A. 14. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 12.

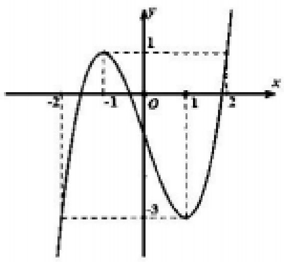
Câu 22: Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ được cho như hình vẽ sau



Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = [f'(x)]^2 - f''(x).f(x)$ và trục Ox là:

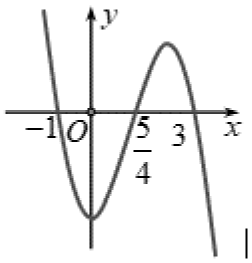
A. 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f(f(x)-1) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

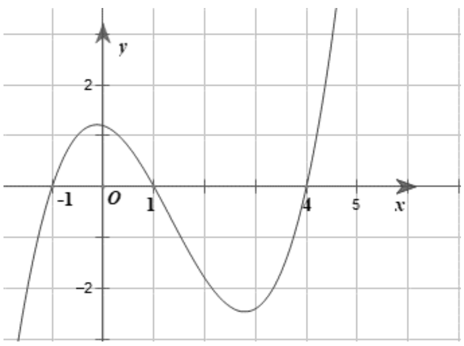
Câu 24: Cho hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$,. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f(x) = r$ có số phần tử là

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

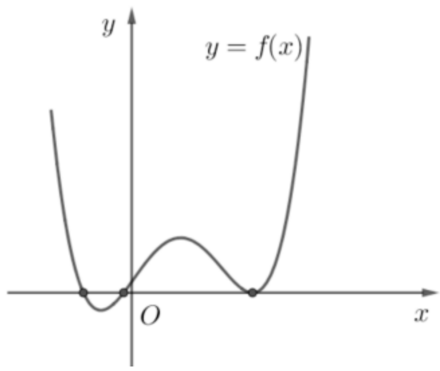
Câu 25: Cho hàm số $y = f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$, trong đó $m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ như hình vẽ dưới.



Tập nghiệm của phương trình $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r$ có tất cả bao nhiêu phần tử.

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

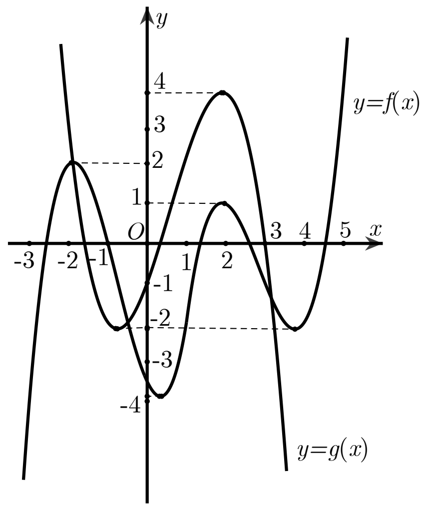
Câu 26: Cho $f(x)$ là một hàm đa thức bậc bốn có đồ thị như hình dưới đây.



Tập nghiệm của phương trình $\left[f'(x)\right]^2 = f(x).f''(x)$ có số phần tử là

A. 1. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 0.

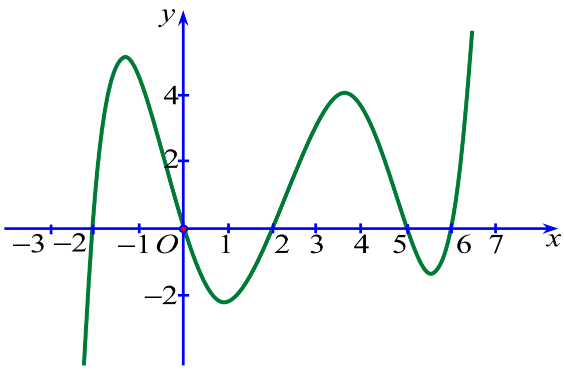
Câu 27: Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị như hình sau:



Khi đó tổng số nghiệm của hai phương trình $f(g(x)) = 0$ và $g(f(x)) = 0$ là

A. 25 . **B.** 22 . **C.** 21 . **D.** 26 .

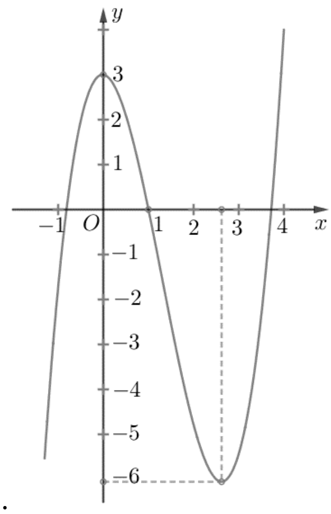
Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số nghiệm thuộc đoạn $[-2;6]$ của phương trình $f(x) = f(0)$ là

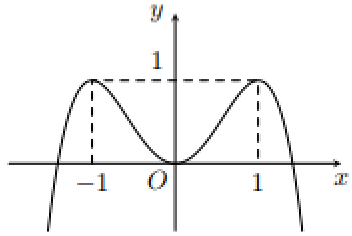
A. 5 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới. Đặt $g(x) = f\left[f(x)\right]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



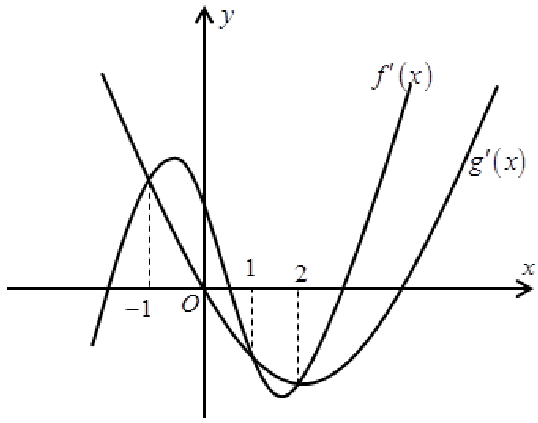
A. 2 **B.** 8 **C.** 4 **D.** 6

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đồ thị như hình vẽ bên đây, trong đó a, b, c, d, e là các hệ số thực. Số nghiệm của phương trình $f\left(\sqrt{f(x)}\right) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0$ là



A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

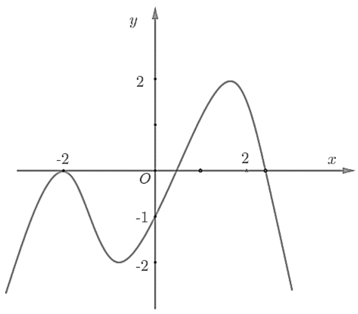
Câu 31: Cho các hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$ và $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(n, n, p, q, r, a, b, c, d \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $f(0) = g(0)$. Các hàm số $f'(x), g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Tập nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ có số phần tử là

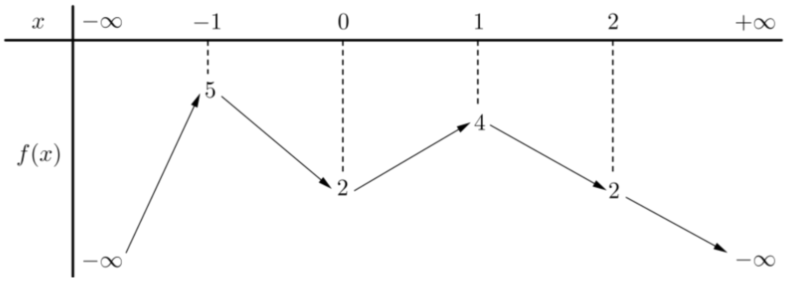
A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp nghiệm của phương trình $f(f(x)) + 1 = 0$ có bao nhiêu phần tử?



A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 9.

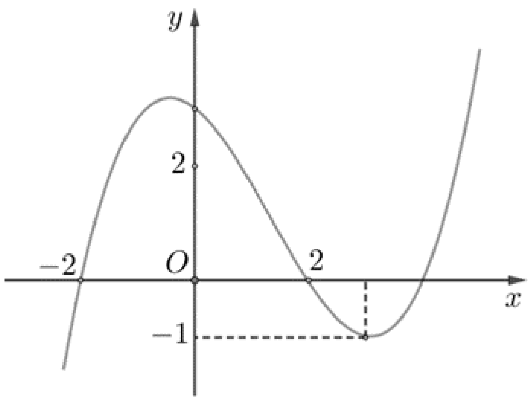
Câu 33: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên



Phương trình $f\left(\sqrt{2x-x^2}\right)=3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

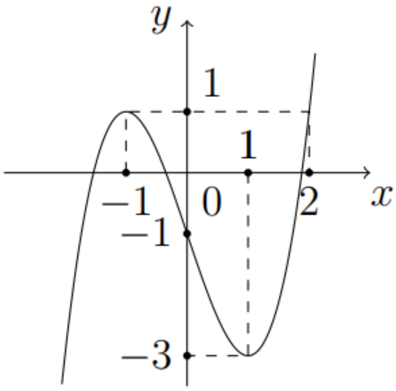
Câu 34: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=1$ là

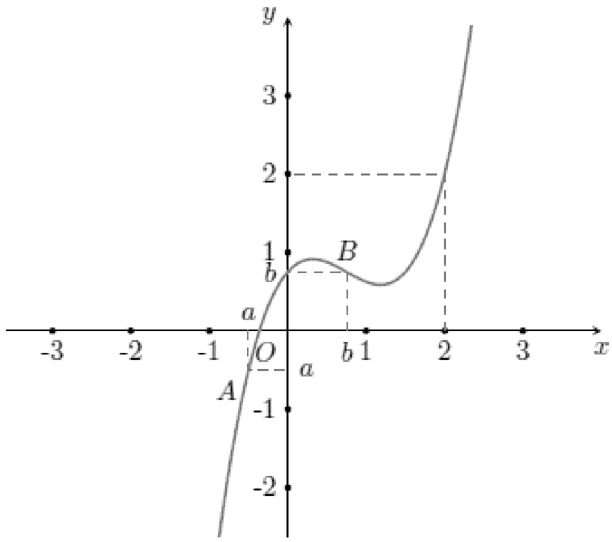
A. 10. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f\left[f(\cos x)-1\right]=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $\left[0;2\pi\right]$?



A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ:



Số nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$ của phương trình $f(\cos x+1)=\cos x+1$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

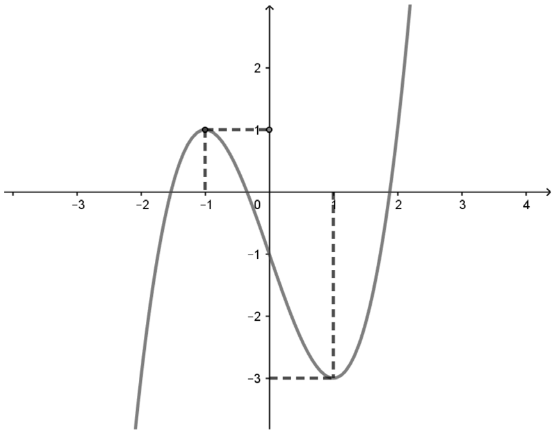
Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc khoảng $(-\infty;\ln 2)$ của phương trình $2019f\left(1-e^x\right)-2021=0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 38: Cho $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc 3 và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f\left(f(\cos x)-1\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $\left[0;3\pi\right]$?



A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 39: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $\left|f\left(3x+1\right)-2\right|=5$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

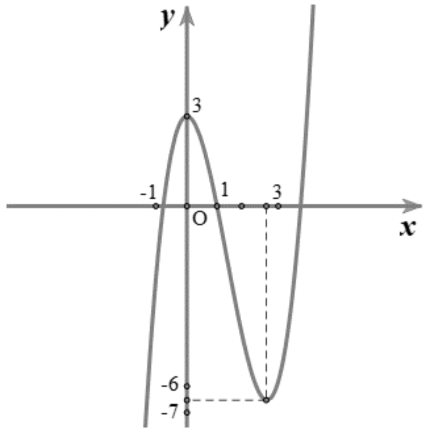
Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{5\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$ của phương trình $3f\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2}}\right)-7=0$ là:

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 41: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Đặt $g\left(x\right)=f\left[f\left(x\right)\right]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'\left(x\right)=0$.



A. 8. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 42: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f\left(x\right)$	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

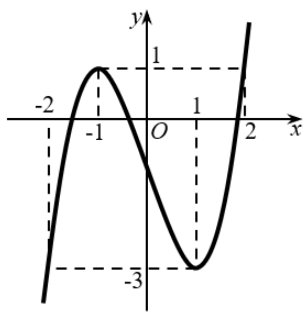
Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f\left(2\sin x+1\right)=1$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 43: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\ \left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f\left(f\left(\sqrt{f\left(x\right)}\right)+f\left(x\right)+2\sqrt{f\left(x\right)}\right)-f\left(1\right)=0$ là

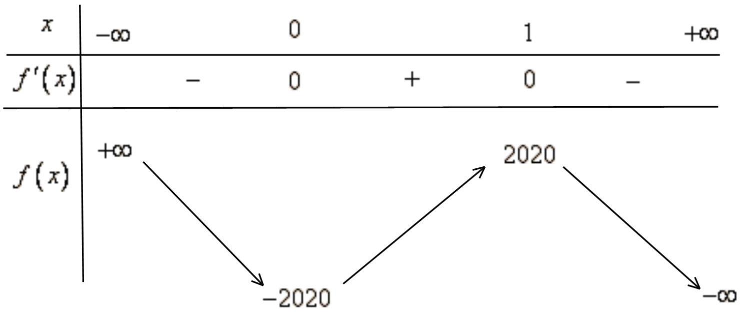
A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 44: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f\left(f\left(x\right)-1\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

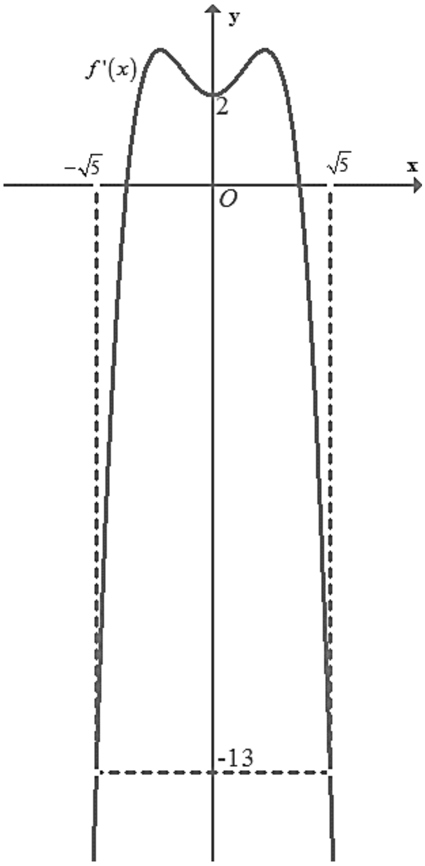
Câu 45: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x+2019\right)-2020\right| = 2021$ là

A. 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 46: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị $y = f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g\left(x\right) = 2f\left(x\right)+2x^3-4x-3m-6\sqrt{5}$ với m là số thực. Để $g\left(x\right) \le 0, \forall x \in \left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ thì điều kiện của m là



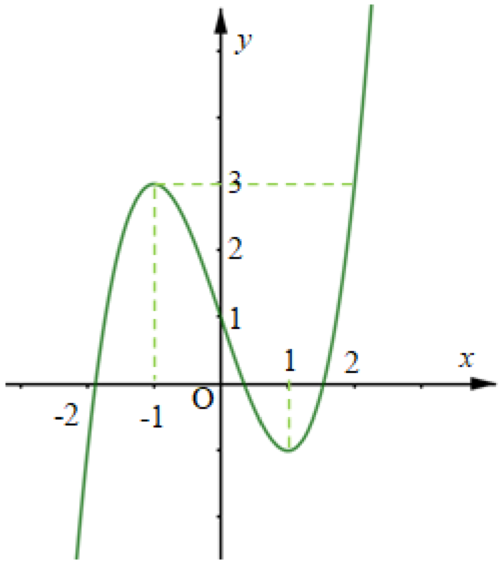
A. $m \ge \frac{2}{3}f\left(-\sqrt{5}\right)-4\sqrt{5}$. **B.** $m \le \frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$.

C. $m \le \frac{2}{3}f\left(0\right)-2\sqrt{5}$. **D.** $m \ge \frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$.

Câu 47: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g\left(x\right) = f\left(f\left(x\right)-1\right)$. Số nghiệm của phương trình $g'\left(x\right) = 0$ là

A. 6. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 8.

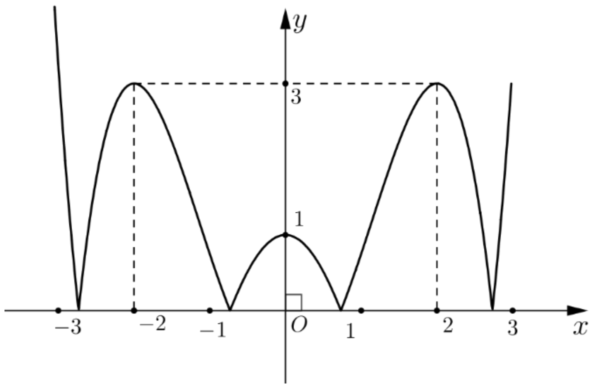
Câu 48: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{7\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(f(\cos x))=0$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 49: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị nhưu hình vẽ bên. Tìm số nghiệm thuộc đoạn $\left[2017\pi;2020\pi\right]$ của phương trình $3f\left(2\cos x\right)=8$.



A. 8. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

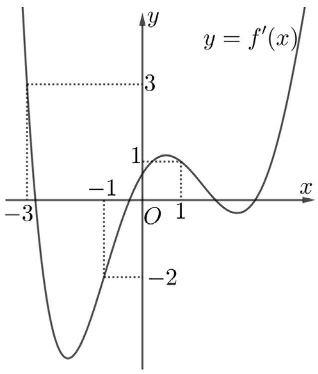
BÀI 6. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ

MỨC ĐỘ VD – VDC

III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 8. BIỆN LUẬN TƯƠNG GIAO HÀM HỢP, HÀM ẨN CHỨA THAM SỐ

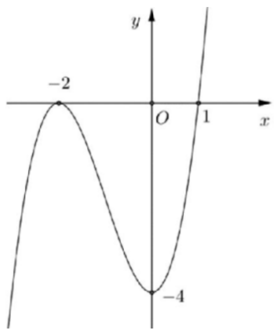
Câu 1: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình sau.



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $2f(\sin x-2)-\dfrac{2\sin^3 x}{3}+\sin x>m+\dfrac{5\cos 2x}{4}$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m\le 2f(-3)+\dfrac{11}{12}$.
B. $m<2f(-1)+\dfrac{19}{12}$.
C. $m\le 2f(-1)+\dfrac{19}{12}$.
D. $m<2f(-3)+\dfrac{11}{12}$.

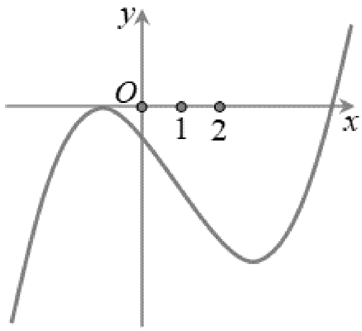
Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình dưới đây



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-5;5)$ để phương trình $f^2(x)-(m+4)|f(x)|+2m+4=0$ có 6 nghiệm phân biệt

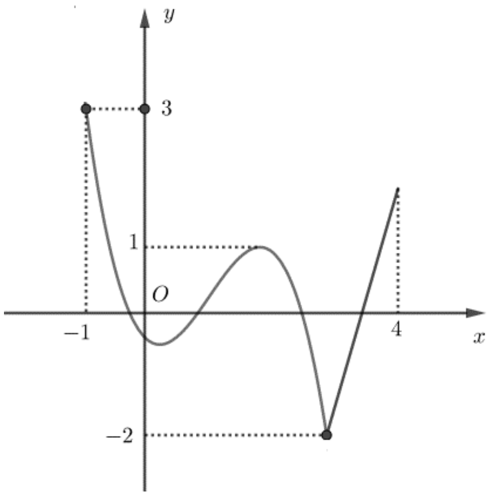
A. 2.
B. 4.
C. 3.
D. 5.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x)>x^2-2x+m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x\in(1;2)$ khi và chỉ khi



A. $m\le f(2)-2$. **B.** $m\le f(1)+1$. **C.** $m\le f(1)-1$. **D.** $m\le f(2)$.

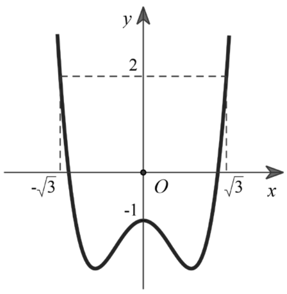
Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10;10]$ để bất phương trình $|f(x)+m|<2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1;4]$.

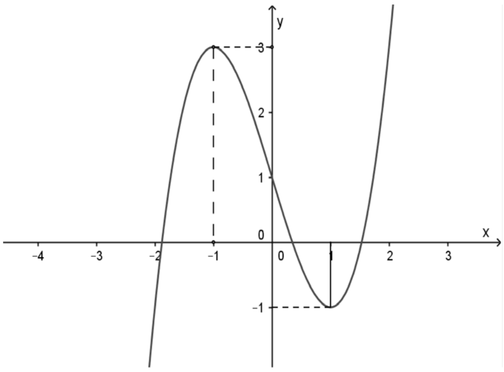
A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Cho bất phương trình $3f(x)\ge x^3-3x+m$ (m là tham số thực). Điều kiện cần và đủ để bất phương trình $3f(x)\ge x^3-3x+m$ đúng với mọi $x\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ là



A. $m\ge 3f(1)$. **B.** $m\ge 3f\left(-\sqrt{3}\right)$. **C.** $m\le 3f(0)$. **D.** $m\le 3f\left(\sqrt{3}\right)$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sin x\right)-m+2=2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$. Tổng các phần tử của S bằng



A. 4. **B.** -1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 7: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+x+2$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3\left(x\right)+f\left(x\right)+m}\right)=-x^3-x+2$ có nghiệm $x\in\left[-1;2\right]$?

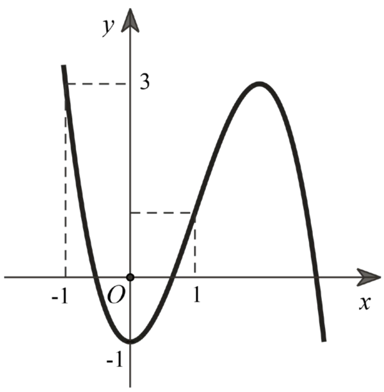
A. 1750. **B.** 1748. **C.** 1747. **D.** 1746.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[2;4\right]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x+2\sqrt{x^2-2x}=m.f(x)$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[2;4\right]$?

x	2	3	$\frac{7}{2}$	4
$f(x)$	4 ↘	3 ↗	$\sqrt{11}$ ↘	2

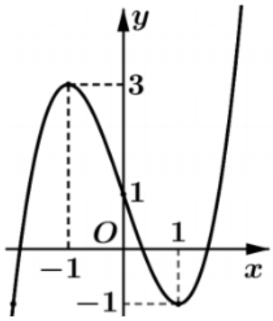
A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 9: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2\left(\cos x\right)+\left(m-2019\right)f\left(\cos x\right)+m-2020=0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[0;2\pi\right]$ là



A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết $f(-1)=1; f\left(-\frac{1}{e}\right)=2$. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $f(x)<\ln(-x)+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-1;\frac{-1}{e}\right)$.



A. $m\geq 2$. **B.** $m\geq 3$. **C.** $m>2$. **D.** $m>3$.

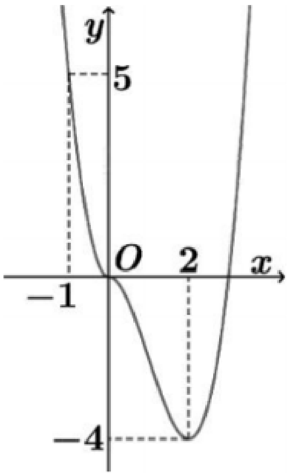
Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-1)=5, f(-3)=0$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Số giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $3f(2-x)+\sqrt{x^2+4}-x=m$ có nghiệm trong khoảng $(3;5)$ là

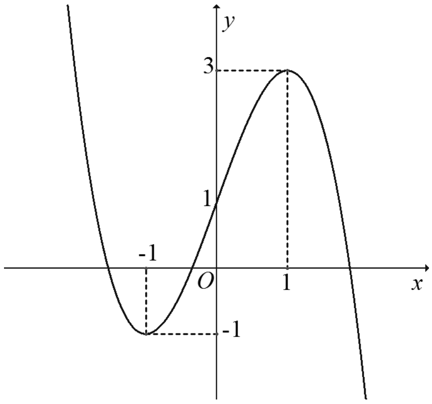
A. 16. **B.** 17. **C.** 0. **D.** 15.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-1)=1,\ f\left(-\frac{1}{e}\right)=2$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Bất phương trình $f(x)<\ln(-x)+x^2+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-1;-\frac{1}{e}\right)$ khi và chỉ khi



A. $m>0$. **B.** $m>3-\frac{1}{e^2}$. **C.** $m\geq 3-\frac{1}{e^2}$. **D.** $m\geq 0$.

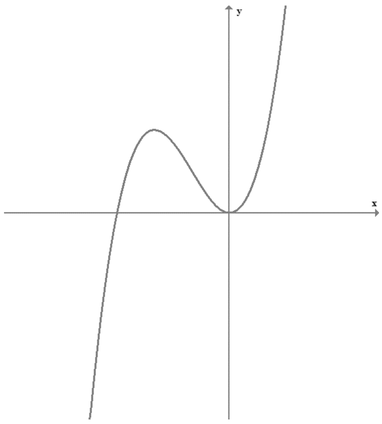
Câu 13: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)\right)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

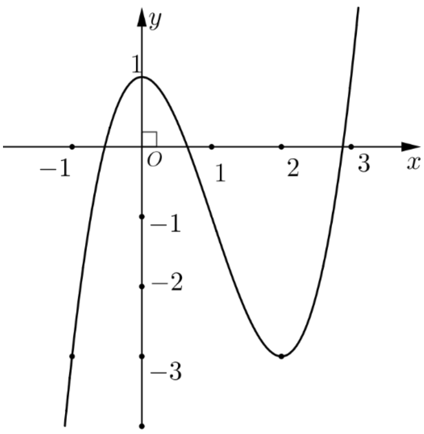
Câu 14: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(2\left|\sin x\right|\right)=f\left(m^2+6m+10\right)$ có nghiệm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 15: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(x^3-3x^2+m\right)+3=0$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-1;2\right]$.

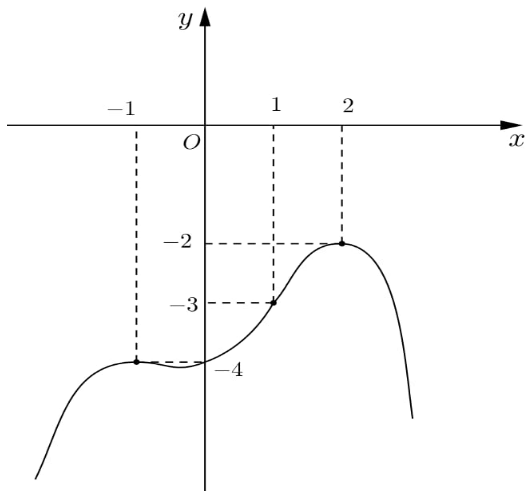


A. 7. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 5.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$16.8^{f(x)} \le (-m^2 + 5m).4^{f(x)} - ((4 - f^2(x)).16^{f(x)}$

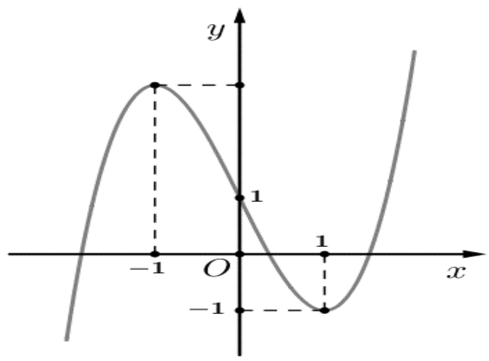
nghiệm đúng với mọi số thực x là



A. 3. **B.** 5.

C. 1. **D.** 4.

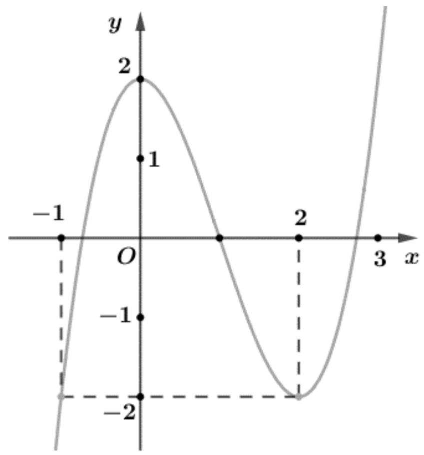
Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $m + e^x < f(x)$ có nghiệm với mọi $x \in (-1;1)$ khi và chỉ khi.



A. $m \le \min\left\{f(1) - e; f(-1) - \frac{1}{e}\right\}$. **B.** $m < f(0) - 1$.

C. $m < \min\left\{f(1) - e; f(-1) - \frac{1}{e}\right\}$. **D.** $m \le f(0) - 1$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn. Biết $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có hình vẽ bên dưới.



Tập nghiệm của phương trình $f(|2\sin x - 1| - 1) = m$ (với m là tham số) trên đoạn $[0;3\pi]$ có tất cả bao nhiêu phần tử?

A. 8. **B.** 20. **C.** 12. **D.** 16.

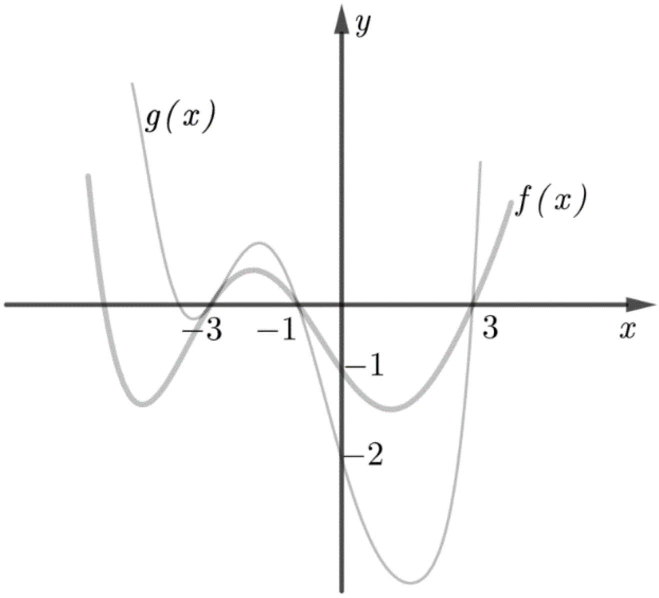
Câu 19: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$. Hàm số $y = f'\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		3		18		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Bất phương trình $e^{\sqrt{x}} \geq m - f\left(x\right)$ có nghiệm $x \in \left[4;16\right]$ khi và chỉ khi:

A. $m < f\left(4\right) + e^2$. **B.** $m \leq f\left(4\right) + e^2$. **C.** $m < f\left(16\right) + e^2$. **D.** $m \leq f\left(16\right) + e^2$.

Câu 20: Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f\left(x\right)$ và $y = g\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây đường đậm hơn là đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$. Biết rằng hai đồ thị tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ là -3 và cắt nhau tại hai điểm nữa có hoành độ lần lượt là -1 và 3. Tìm tập hợp tất các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f\left(x\right) \geq g\left(x\right) + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left[-3;3\right]$.



A. $\left(-\infty;\dfrac{12-10\sqrt{3}}{9}\right]$. **B.** $\left[\dfrac{12-8\sqrt{3}}{9};+\infty\right)$. **C.** $\left[\dfrac{12-10\sqrt{3}}{9};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\dfrac{12-8\sqrt{3}}{9}\right]$.

Câu 21: Cho hàm số $f\left(x\right) = x^5 + 3x^3 - 4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f\left(x\right) + m}\right) = x^3 - m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[1;2\right]$?

A. 18. **B.** 17. **C.** 15. **D.** 16.

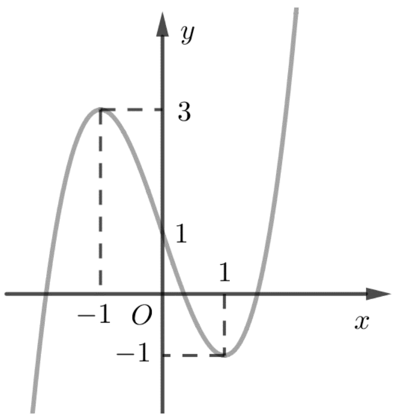
Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-4	2	4	2	$+\infty$

Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x)+(3-m)f(\cos x)+2m-10=0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $y=f(\sin x)=3\sin x+m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



A. -5. **B.** -8. **C.** -6. **D.** -10.

Câu 24: Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên đoạn $[-2;9]$, biết $f(-1)=f(2)=f(9)=3$ và $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	-2		0		6		9
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4		6		-4		3

Tìm m để phương trình $f(x)=f(m)$ có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2;9]$.

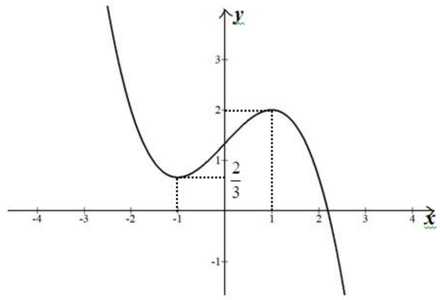
A. $m\in(-2;9]\setminus((-1;2)\cup\{6\})$. **B.** $m\in[-2;9]\setminus((-1;2)\cup\{6\})$.

C. $m\in(-2;9]\setminus\{6\}$. **D.** $m\in[-2;9]\setminus\{-2;6\}$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(x^3-3x\right)=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-1;2\right]$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 7.

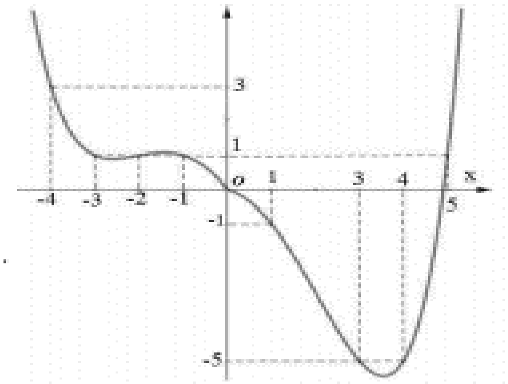
Câu 26: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số giá trị nguyên dương của m để phương trình $f\left(x^2-4x+5\right)+1=m$ có nghiệm là

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 27: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm



A. 13. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 28: hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

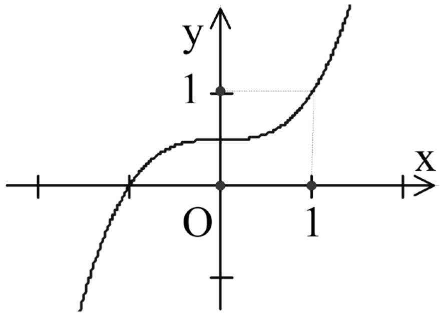
Tìm m để phương trình $f^2\left(2x\right)-2f\left(2x\right)-m-1=0$ có nghiệm trên $\left(-\infty;1\right)$

A. $\left(-1;+\infty\right)$. **B.** $\left[-2;+\infty\right)$. **C.** $\left(-2;+\infty\right)$. **D.** $\left[-1;+\infty\right)$.

Câu 29: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^2-4x+3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2\left(\left|x\right|\right)-\left(m-6\right)f\left(\left|x\right|\right)-m+5=0$ có 6 nghiệm thực phân biệt?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ



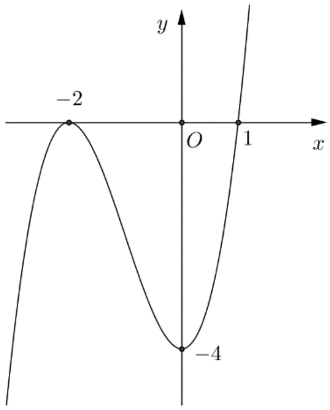
Gọi S là tập hợp các giá trị của $m(m\in\mathbb{R})$ sao cho

$(x-1)\left[m^3f(2x-1)-mf(x)+f(x)-1\right]\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}.$

Số phần tử của tập S là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2 **D.** 1.

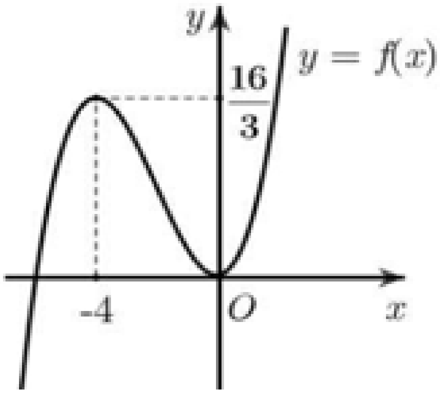
Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên dưới



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(x)-(m+5)\left|f(x)\right|+4m+4=0$ có 7 nghiệm phân biệt?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

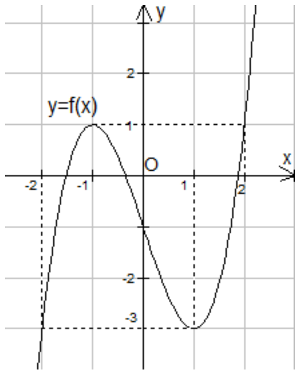
Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|\right)=f\left(m^2+4m+4\right)$ có nghiệm.

A. 4. **B.** 5. **C.** Vô số. **D.** 3.

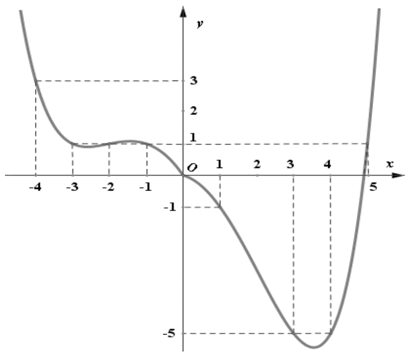
Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình bên.



Phương trình $f(2\sin x) = m$ có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$ khi và chỉ khi

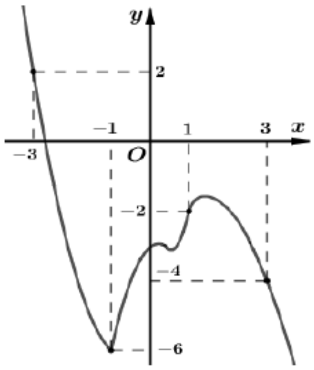
A. $m \in \{-3;1\}$. **B.** $m \in (-3;1)$. **C.** $m \in [-3;1)$.. **D.** $m \in (-3;1]$.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của *m* để phương trình $2.f\left(3-3\sqrt{-9x^2+30x-21}\right) = m-2019$ có nghiệm.



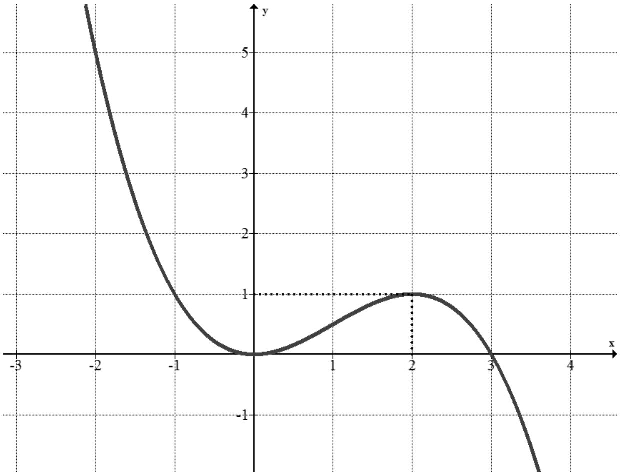
A. 15. **B.** 14. **C.** 10. **D.** 13.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right) = m-3$ có nghiệm.



A. 9. **B.** 17. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ với $(a,b,c,d,e \in \mathbb{R})$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, đạt cực trị tại điểm $O(0;0)$ và cắt trục hoành tại $A(3;0)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5;5]$ để phương trình $f(-x^2 + 2x + m) = e$ có bốn nghiệm phân biệt.



A. 0. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[-2;4]$ và có bảng biến thiên như sau

x	-2		0		1		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	2	↘		↘		↗	6
	-3				$1,5$		1		

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{9}{x^2} - 4 \ge 0 \\ 6f(-2x+1) - 8x^3 + 6x - m = 0 \end{cases}$ có ba nghiệm phân biệt?

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

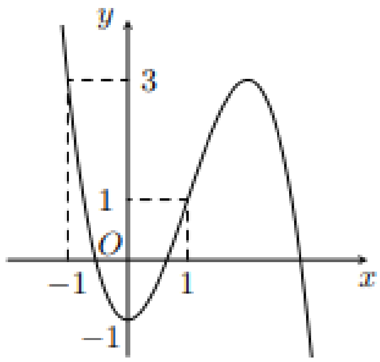
Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và có bảng biến thiên như hình sau:

x	0		1		2		3		5
$f(x)$	4	↘		↗	3	↘		↗	3
			1				1		

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $mf(x) + \sqrt{3x} \le 2019f(x) - \sqrt{10-2x}$ nghiệm đúng với mọi $x \in [0;5]$.

A. 2014. **B.** 2015. **C.** 2019. **D.** Vô số.

Câu 39: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2\left(cosx\right)+\left(m-2018\right)f\left(cosx\right)+m-2019=0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[0;2\pi\right]$ là



A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 40: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

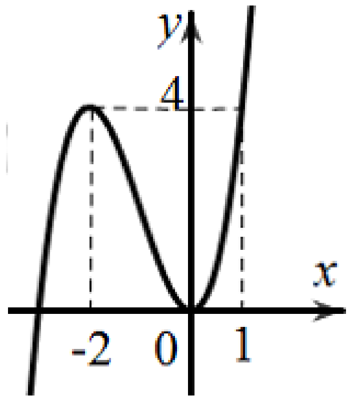
x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	1	↘	-2	↗	$+\infty$

Tìm m để phương trình $2f\left(x+2019\right)-m=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $m\in\left(0;2\right)$. **B.** $m\in\left(-2;2\right)$. **C.** $m\in\left(-4;2\right)$. **D.** $m\in\left(-2;1\right)$.

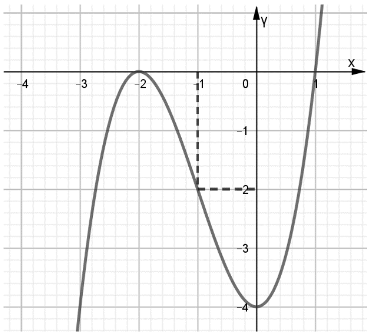
Câu 41: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(x^2+2x-2\right)=3m+1$ có nghiệm thuộc khoảng $\left[0;1\right]$.

.



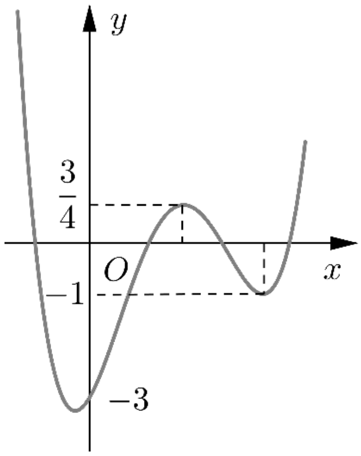
A. $\left[0;4\right]$. **B.** $\left[-1;0\right]$. **C.** $\left[0;1\right]$. **D.** $\left[-\frac{1}{3};1\right]$

Câu 42: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{4x - x^2} - 1\right) = m$ có nghiệm là



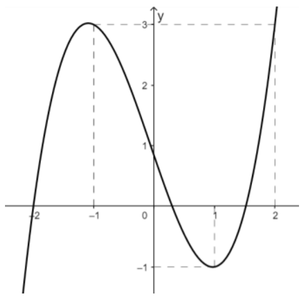
A. $\left[-2;0\right]$. **B.** $\left[-4;-2\right]$. **C.** $\left[-4;0\right]$. **D.** $\left[-1;1\right]$.

Câu 43: Cho hàm số bậc bốn $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|x+m\right|\right) = m$ có 4 nghiệm phân biệt là



A. 2. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 0.

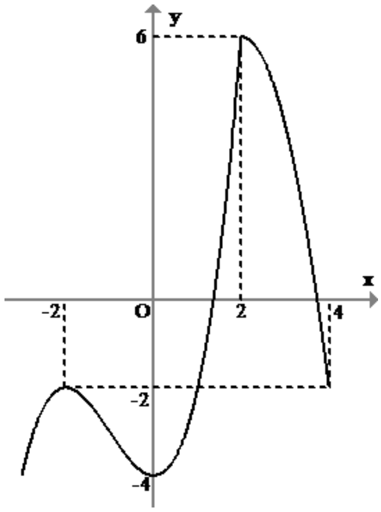
Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sqrt{4 - x^2}) = m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $[-\sqrt{2};\sqrt{3})$ là:

A. $[-1;3]$. **B.** $[-1;f(\sqrt{2})]$. **C.** $(-1;f(\sqrt{2})]$. **D.** $(-1;3]$.

Câu 45: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



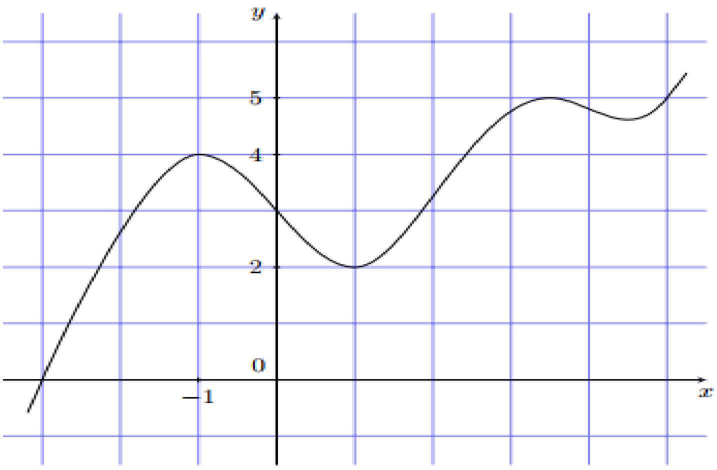
Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right)+x=m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$?

A. 11 **B.** 9 **C.** 8 **D.** 10

Câu 46: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $x^2\left(|x|-3\right)+2-m^2\left(|m|-3\right)=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

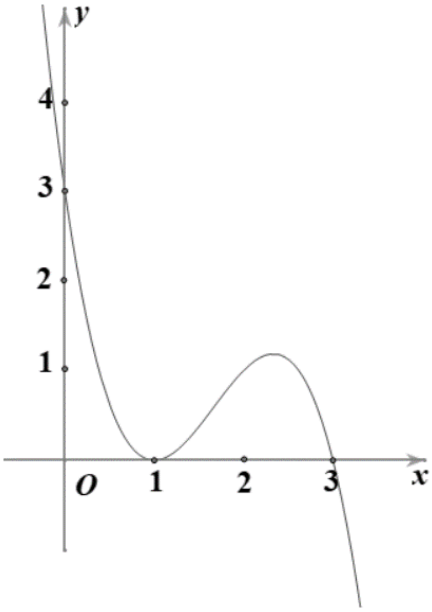
A. 3 **B.** 12 **C.** $T=7$ **D.** 5

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(x^2-2x\right)=m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$.



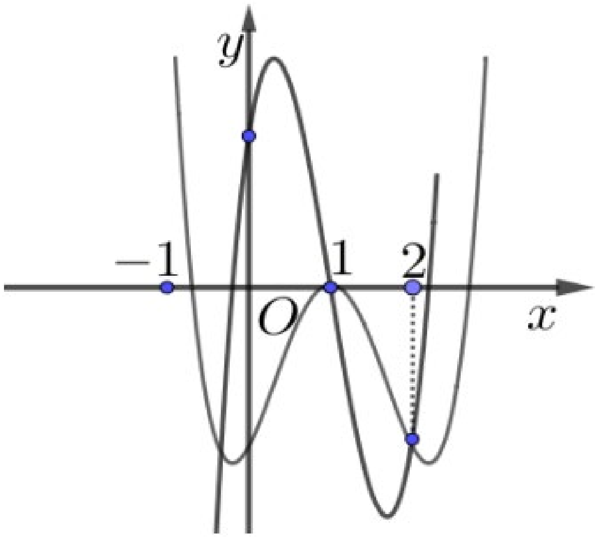
A. 1. **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** 4 .

Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0)=0$ và $f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Phương trình $\left|f(|x|)\right|=m$ (với m là tham số) có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?



A. 8 **B.** 6 **C.** 2 **D.** 4

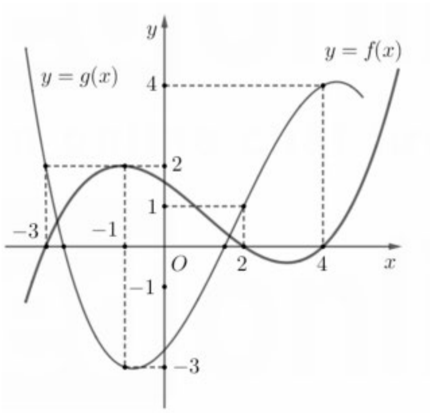
Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức với hệ số thực. Hình vẽ bên dưới là một phần đồ thị của hai hàm số: $y=f(x)$ và $y=f'(x)$.



Tập các giá trị của tham số m để phương trình $f(x)=me^x$ có hai nghiệm phân biệt trên $[0;2]$ là nửa khoảng $[a;b)$. Tổng $a+b$ gần nhất với giá trị nào sau đây?

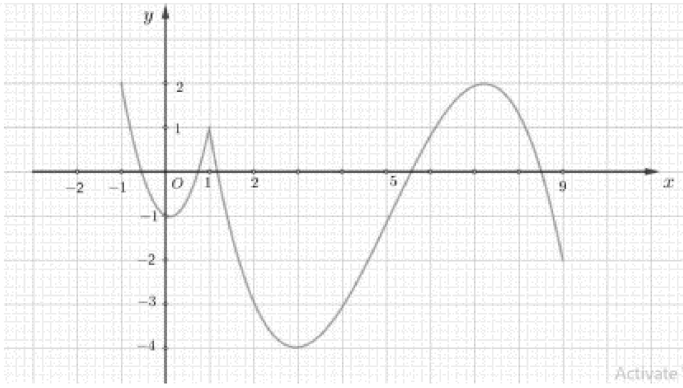
A. -0.81. **B.** -0.54. **C.** -0.27. **D.** 0.27.

Câu 50: Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là các hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên (trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y=f(x)$). Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(1-g\left(2x-1\right)\right)=m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-1;\frac{5}{2}\right]$.



A. 8 **B.** 3 **C.** 6 **D.** 4

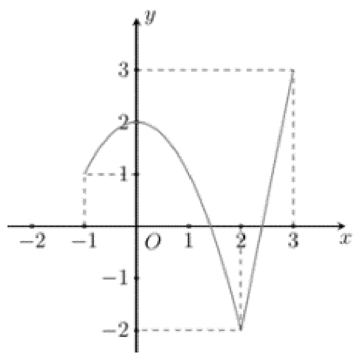
Câu 51: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;9]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $16.3^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].4^{f(x)}\geq\left(m^2-3m\right).6^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi giá trị thuộc $[-1;9]$?

A. 32. **B.** 31. **C.** 5. **D.** 6.

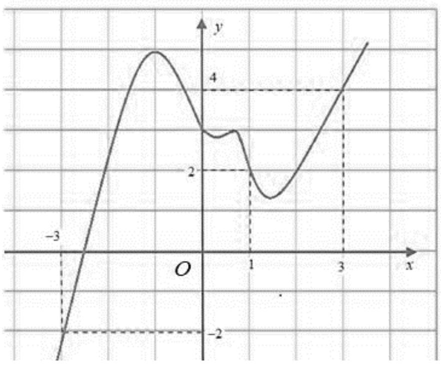
Câu 52: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Bất phương trình $f(x)+\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\geq m$ có nghiệm thuộc $[-1;3]$ khi và chỉ khi

A. $m\leq 7$. **B.** $m\geq 7$. **C.** $m\leq 2\sqrt{2}-2$. **D.** $m\geq 2\sqrt{2}-2$.

Câu 53: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Biết $f(1) = 6$ và $g(x) = f(x) - \frac{(x+1)^2}{2}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

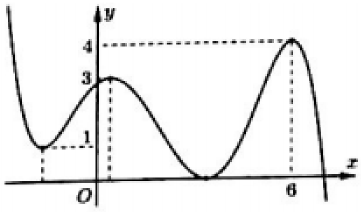
A. Phương trình $g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

B. Phương trình $g(x) = 0$ không có nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

C. Phương trình $g(x) = 0$ có đúng một nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

D. Phương trình $g(x) = 0$ có đúng ba nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

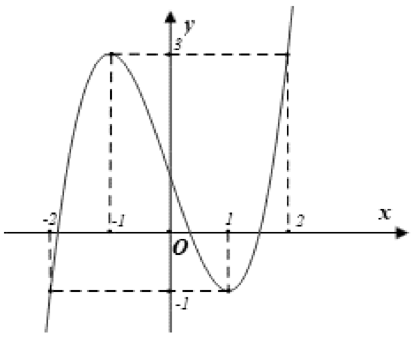
Câu 54: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Các giá trị của tham số m để phương trình $\frac{4m^3 + m}{\sqrt{2f^2(x) + 5}} = f^2(x) + 3$ có ba nghiệm phân biệt là

A. $m = \frac{\sqrt{37}}{2}$. **B.** $m = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m = \pm\frac{\sqrt{37}}{2}$. **D.** $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 55: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ sau đây. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để phương trình $f(f(x)) = m$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?



A. 5. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 56: Cho hàm số $g(x)=2x^3+x^2-8x$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\sqrt{g(g(x)+3)-m}=2g(x)+7$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt

A. 7. **B.** 8. **C.** 24. **D.** 25.

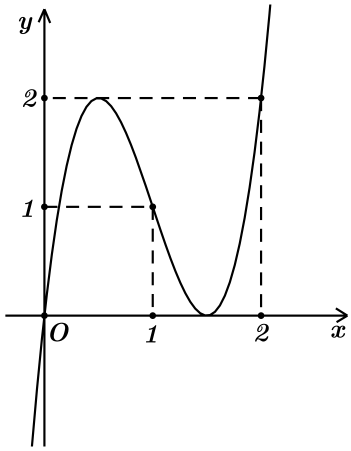
Câu 57: Cho hàm số $f(x)=x^2-4x+3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|)-(m-6)f(|x|)-m+5=0$ có 6 nghiệm thực phân biệt?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 58: Cho hàm số $f(x)=2x^3+x^2-8x+7$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\sqrt{f(f(x)-3)+m}=2f(x)-5$ có 6 nghiệm thực phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

A. 25. **B.** -66. **C.** 105. **D.** 91.

Câu 59: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Bất phương trình $f(2\sin x)-2\sin^2 x<m$ đúng với mọi $x\in(0;\pi)$ khi và chỉ khi

A. $m>f(0)-\frac{1}{2}$. **B.** $m>f(1)-\frac{1}{2}$. **C.** $m\ge f(1)-\frac{1}{2}$. **D.** $m\ge f(0)-\frac{1}{2}$.

Câu 60: Cho hàm số $f(x)=x^5+3x^3-4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right)=x^3-m$ có nghiệm thuộc $[1;2]$?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

CHƯƠN

I ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 6. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ

MỨC ĐỘ VD – VDC

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 6. BIỆN LUẬN M ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN K (HÀM SỐ KHÁC)

Câu 1: Cho hai hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{x}+\dfrac{x^2-2x}{x-1}+\dfrac{x^2-4x+3}{x-2}+\dfrac{x^2-6x+8}{x-3}$ và $y=|x+2|-x+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tính tổng tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-15\,;20)$ của tham số m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại nhiều hơn hai điểm phân biệt.

A. 210. **B.** 85. **C.** 119. **D.** 105.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x^2-1}{x}+\dfrac{x^2-2x}{x-1}+\dfrac{x^2-4x+3}{x-2}+\dfrac{x^2-6x+8}{x-3}=|x+2|-x+m$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{x}+\dfrac{x^2-2x}{x-1}+\dfrac{x^2-4x+3}{x-2}+\dfrac{x^2-6x+8}{x-3}-|x+2|+x=m$ (1).

Đặt $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x}+\dfrac{x^2-2x}{x-1}+\dfrac{x^2-4x+3}{x-2}+\dfrac{x^2-6x+8}{x-3}-|x-2|+x$.

Ta có $g'(x)=4+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{(x-3)^2}+\dfrac{|x-2|-(x-2)}{|x-2|}>0$ với mọi x thuộc các khoảng sau $(-\infty\,;0)$, $(0\,;1)$, $(1\,;2)$, $(2\,;3)$ và $(3\,;+\infty)$ nên hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng đó.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y=g(x)$ tại năm điểm phân biệt nên (C_1) và (C_2) luôn cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt với mọi giá trị của m. Kết hợp điều kiện m nguyên thuộc $(-15;20)$ nên $m\in\{-14;-13;...;18;19\}$. Khi đó tổng tất cả các giá trị m là $S=15+16+17+18+19=85$.

Câu 2: Cho hai hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{x+2}{x+1}$ và $y=e^x+2020+3m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Có bao nhiêu số nguyên m thuộc $(-2019;2020)$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 3 điểm phân biệt?

A. 2692. **B.** 2691. **C.** 2690. **D.** 2693.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{x+2}{x+1}=e^x+2020+3m$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{x+2}{x+1}-e^x-2020=3m$ (1).

Đặt $g(x)=\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{x+2}{x+1}-e^x-2020$.

Ta có $g'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}-e^x<0$ với mọi x thuộc các khoảng sau $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$ và $(1;+\infty)$ nên hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-2017$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$	$\|\|$		
$g(x)$	-2017	$\searrow$	$-\infty \,\|\|\, +\infty$	$\searrow$	$-\infty \,\|\|\, +\infty$	$\searrow$	$-\infty \,\|\|\, +\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có ba nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y=3m$ cắt đồ thị hàm số $y=g(x)$ tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi $3m\ge-2017\Leftrightarrow m\ge-\dfrac{2017}{3}\approx-672,3$.

Do m nguyên thuộc $(-2019;2020)$ nên $m\in\{-672;-671;...;2019\}$. Vậy có tất cả 2692 giá trị m thỏa mãn.

Câu 3: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hai hàm số $y=(2x^2+1)\sqrt{x-1}$ và $y=\dfrac{11}{3x-4}-\dfrac{1}{2-x}+11+m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-\infty;1]$. **D.** $(-\infty;2]$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}=\dfrac{11}{3x-4}-\dfrac{1}{2-x}+11+m \quad (*)$

Điều kiện: $\begin{cases} x-1\ge 0 \\ x\ne \dfrac{4}{3} \\ x\ne 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x\ne \dfrac{4}{3} \\ x\ne 2 \end{cases}$

Ta có:

$(*)\Leftrightarrow \left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}-\dfrac{11}{3x-4}+\dfrac{1}{2-x}-11=m$

Xét hàm số $f(x)=\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}-\dfrac{11}{3x-4}+\dfrac{1}{2-x}-11$ trên $\left[1;+\infty\right)\backslash\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$

Nhận thấy, hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên các khoảng $\left[1;\dfrac{4}{3}\right),\left(\dfrac{4}{3};2\right),\left(2;+\infty\right)$

Ta có, $f'(x)=\left(\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}-\dfrac{11}{3x-4}+\dfrac{1}{2-x}-11\right)'$

$=4x\sqrt{x-1}+\left(2x^2+1\right)\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{33}{\left(3x-4\right)^2}+\dfrac{1}{\left(2-x\right)^2}=\dfrac{10x^2-8x+1}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{33}{\left(3x-4\right)^2}+\dfrac{1}{\left(2-x\right)^2}>0$

với $\forall x\in\left[1;+\infty\right)\backslash\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$

Suy ra, hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)\backslash\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$.

Bảng biến thiên

x	1		$\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	||	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra đồ thị hai hàm số $y=\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}$ và $y=\dfrac{11}{3x-4}-\dfrac{1}{2-x}+11+m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt khi $m\in\left(-\infty;1\right]$.

Câu 4: Cho hai hàm số $y=\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}$ và $y=2^{1-x}+2m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt là

A. $\left(2;+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;2\right]$. **C.** $\left(-\infty;2\right)$. **D.** $\left(-\infty;4\right)$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}=2^{1-x}+2m$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{x+3}{x+4}-2^{1-x}=2m$.

Đặt $g(x)=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{x+3}{x+4}-2^{1-x}$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x+3)^2}+2^{1-x}\ln 2>0$

với mọi x thuộc các khoảng sau $(-\infty;-3)$, $(-3;-2)$ $(-2;-1)$, $(-1;0)$ và $(0;+\infty)$ nên hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng đó

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=4$ và và $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$g(x)$			$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$		4
	$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$		

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có 5 nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y=2m$ cắt đồ thị hàm số $y=g(x)$ tại 5 điểm phân biệt khi và chỉ khi $2m<4\Leftrightarrow m<2$

Câu 5: Cho hai hàm số $y=\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{x-1}{x^2-2x}+\dfrac{x-2}{x^2-4x+3}$ và $y=x-|x+1|+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Số các giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-20;20)$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại năm điểm phân biệt là

A. 22. **B.** 39. **C.** 21. **D.** 20.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{x-1}{x^2-2x}+\dfrac{x-2}{x^2-4x+3}=x-|x+1|+m$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{x-1}{x^2-2x}+\dfrac{x-2}{x^2-4x+3}-x+|x+1|=m$ (1).

Đặt $g(x)=\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{x-1}{x^2-2x}+\dfrac{x-2}{x^2-4x+3}-x+|x+1|$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}+\dfrac{-x^2+2x-2}{(x^2-2x)^2}+\dfrac{-x^2+4x-5}{(x^2-4x+3)^2}-1+\dfrac{x+1}{|x+1|}$

$=\dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}+\dfrac{-(x-1)^2-1}{(x^2-2x)^2}+\dfrac{-(x-2)^2-1}{(x^2-4x+3)^2}+\dfrac{x+1-|x+1|}{|x+1|}<0$

với mọi x thuộc các khoảng sau $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;3)$ và $(3;+\infty)$ nên hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ và và $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$.

Bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	1

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có năm nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại năm điểm phân biệt khi $m \le 1$, do m nguyên thuộc $(-20;20)$ nên $m \in \{-19;-18;...;0;1\}$. Vậy có tất cả 21 giá trị m thỏa mãn.

Câu 6: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x \ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số phần tử của tập S là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x) = m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x$

Ta có $f(x) = m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x = x\left[m^2x^3 - (m+2)x^2 + x + (m^2-1)\right]$. Giả sử $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x) = m^2x^3 - (m+2)x^2 + x + (m^2-1) = 0$ thì hàm số $f(x) = m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x = 0$, nghĩa là $m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x \ge 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó, để yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là $g(x) = m^2x^3 - (m+2)x^2 + x + (m^2-1) = 0$ phải có nghiệm $x = 0$, suy ra $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Điều kiện đủ:

Với $m = 1, f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 3x + 1)$ khi đó $f(1) = -1 < 0$ không thỏa mãn điều kiện $m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x \ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. (loại)

Với $m = 1, f(x) = x^4 - x^3 + x^2 = x^2(x^2 - x + 1) \ge 0,\ x \in \mathbb{R}$.

Vậy $S = \{-1\}$.

Câu 7: Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ để bất phương trình $(x-1)(x+2)(ax^2 + bx + 2) \ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x) = (x-1)(x+2)(ax^2 + bx + 2)$

Giả sử $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x)=(x+2)(ax^2+bx+2)=0$ thì hàm số $f(x)=(x-1)(x+2)(ax^2+bx+2)$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x=1$, nghĩa là $(x-1)(x+2)(ax^2+bx+2)\geq 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Do đó, để yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là $g(x)=(x+2)(ax^2+bx+2)=0$ có nghiệm $x=1$ suy ra $a+b+2=0$ (1)

Lí luận tương tự có $h(x)=(x-1)(ax^2+bx+2)=0$ cũng phải nhận $x=-2$ là nghiệm, suy ra $4a-2b+2=0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases}a+b+2=0\\4a-2b+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$

Điều kiện đủ:

Với $\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$ có $f(x)=(x-1)(x+2)(-x^2-x+2)=-(x-1)^2(x+2)^2\leq 0$, $x\in\mathbb{R}$.

Vậy không tồn tại cặp số thực $(a;b)$ nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8: Trong số các cặp số thực $(a;b)$ để bất phương trình $(x-1)(x-a)(x^2+x+b)\geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$, tích ab nhỏ nhất bằng

A. $-\frac{1}{4}$. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x)=(x-1)(x-a)(x^2+x+b)$ và $g(x)=(x-a)(x^2+x+b)$

Giả sử $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x)=(x-a)(x^2+x+b)=0$ thì hàm số $f(x)=(x-1)(x-a)(x^2+x+b)$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x=1$, nghĩa $(x-1)(x-a)(x^2+x+b)\geq 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Do đó yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là $g(x)=(x-a)(x^2+x+b)=0$ có nghiệm $x=1$ suy ra hoặc $\begin{cases}a=1\\x^2+x+b\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$ hoặc là phương trình $x^2+x+b=0$ có hai nghiệm $x=1$ và $x=a$

Trường hợp 1: $\begin{cases}a=1\\x^2+x+b\geq 0,\forall x\in R\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\1>0\\\Delta=1-4b\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b\geq\frac{1}{4}\end{cases}$

Trường hợp 2: phương trình $x^2+x+b=0$ có hai nghiệm $x=1$ và $x=a$

Ta thay $x=1$ vào phương trình $x^2+x+b=0$ có $1^2+1+b=0\Rightarrow b=-2$. Với $b=-2$ có phương trình $x^2+x+b=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$

Vì $x=a$ cũng là nghiệm của phương trình nên $a=-2$.

Trong trường hợp 1: $\begin{cases}a=1\\b\geq\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow ab\geq\frac{1}{4}$ suy ra tích ab nhỏ nhất khi $ab=\frac{1}{4}$

Và với $a=1, b=\frac{1}{4}$, tích $ab=\frac{1}{4}$ thì bất phương trình đã cho tương đương với

$(x-1)(x-1)\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ thỏa mãn với mọi $x\in\mathbb{R}$ (nhận)

Trong trường hợp 2: Tích $ab=4>\frac{1}{4}$

Vậy tích ab nhỏ nhất khi $ab=\frac{1}{4}$.

Câu 9: Cho 2 hàm số $y=x^7+x^5+x^3+3m-1$ và $y=|x-2|-x-2m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1), (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) cắt (C_2) là

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m\in(2;+\infty)$. **C.** $m\in(-\infty;2)$. **D.** $m\in[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$x^7+x^5+x^3+3m-1=|x-2|-x-2m \Leftrightarrow x^7+x^5+x^3-|x-2|+x=-5m+1$ (1).

Xét hàm số $f(x)=x^7+x^5+x^3-|x-2|+x$.

Ta có $f(x)=\begin{cases} x^7+x^5+x^3+2 & \text{khi } x\in[2;+\infty) \\ x^7+x^5+x^3+2x-2 & \text{khi } x\in(-\infty;2) \end{cases}$.

$f'(x)=\begin{cases} 7x^6+5x^4+3x^2>0 & \text{khi } x\in(2;+\infty) \\ 7x^6+5x^4+3x^2+2>0 & \text{khi } x\in(-\infty;2) \end{cases}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	|	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗		↗ $+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi $m\in\mathbb{R}$. Vậy để (C_1) cắt (C_2) thì $m\in\mathbb{R}$.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để phương trình $\sqrt{3+x}\left(2\sqrt{3+x}-m\right)+\sqrt{1-x}\left(5\sqrt{1-x}+2m\right)=4\sqrt{-x^2-2x+3}$ có nghiệm thực?

A. 2019. **B.** 4032. **C.** 4039. **D.** 4033.

Lời giải

Chọn B

Đk: $x\in[-3;1]$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 11-3x-4\sqrt{(3+x)(1-x)}+m\left(2\sqrt{1-x}-\sqrt{3+x}\right)=0$. (*)

Đặt $t=2\sqrt{1-x}-\sqrt{3+x}=g(x)$, với $x\in[-3;1]\Rightarrow 11-3x-4\sqrt{(3+x)(1-x)}=t^2+4$.

Có $g'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x}}-\frac{1}{2\sqrt{3+x}}<0, \forall x\in(-3;1)$. Suy ra $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$.

$\Rightarrow \min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(1) = -2$: $\max\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-3) = 4 \Rightarrow t \in [-2;4]$.

Từ (*) $\Rightarrow t^2 + mt + 4 = 0$.

Nếu $t = 0 \Rightarrow 0 + 4 = 0$ (vô lí).

Nếu $t \in [-2;4] \setminus \{0\}$, ta có $m = \dfrac{-t^2-4}{t} = -t - \dfrac{4}{t} = f(t)$.

Có $f'(t) = \dfrac{4-t^2}{t^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 2$.

Bảng biến thiên

t	-2		0		2		4
$f'(t)$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(t)$	4	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	-5

Từ bảng biến thiên, suy ra phương trình có nghiệm thực khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m \geq 4 \\ m \leq -4 \end{array}\right.$.

Do đó $\begin{cases} m \in [-2019;2019] \\ \left[\begin{array}{l} m \geq 4 \\ m \leq -4 \end{array}\right. \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2019; -2018; ....; -4; 4; ...; 2018; 2019\}$.

Vậy có $(2019 - 4 + 1).2 = 4032$ giá trị nguyên của tham số thực m.

Câu 11: Tập hợp tất cả các số thực của tham số m để phương trình $x^6 + 6x^4 - m^3x^3 + (15 - 3m^2)x^2 - 6mx + 10 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$ là:

A. $2 < m \leq \dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{5} \leq m < 3$. **C.** $\dfrac{11}{5} < m < 4$. **D.** $0 < m < \dfrac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$x^6 + 6x^4 - m^3x^3 + (15 - 3m^2)x^2 - 6mx + 10 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2+2)^3 + 3(x^2+2) = (mx+1)^3 + 3(mx+1)$

$\Leftrightarrow f(x^2+2) = f(mx+1) (*)$

Với $f(t) = t^3 + 3t$. Do $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nên (*) $\Leftrightarrow x^2 + 2 = mx + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - mx + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{x^2+1}{x}$.

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ trên $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$

Ta có: $g'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên.

x	$\frac{1}{2}$		1		2
g'		$-$	0	$+$	
g	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$ khi và chỉ khi $2<m\le\dfrac{5}{2}$.

Câu 12: Có bao nhiêu m nguyên dương để hai đường cong $(C_1): y=\left|2+\dfrac{2}{x-10}\right|$ và $(C_2): y=\sqrt{4x-m}$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương?

A. 35. **B.** 37. **C.** 36. **D.** 34.

Lời giải.

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x\ne 10 \\ x\ge \dfrac{m}{4} \end{cases}$.

Xét trên $(0;+\infty)\setminus\{10\}$, phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là

$\left|2+\dfrac{2}{x-10}\right|=\sqrt{4x-m}\Leftrightarrow m=4x-\left(\dfrac{2x-18}{x-10}\right)^2$.

Đặt $g(x)=4x-\left(\dfrac{2x-18}{x-10}\right)^2$ với $x\in(0;+\infty)\setminus\{10\}$.

Ta có: $g'(x)=4\left(1+\dfrac{2x-18}{(x-10)^3}\right)$; $g''(x)=\dfrac{-4x+34}{(x-10)^4}$.

$g'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	0		$\frac{17}{2}$		10		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	
$g'(x)$	$4{,}072$	$\nearrow$		$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0

Suy ra phương trình $g'(x)=0$ có một nghiệm duy nhất $\alpha\in\left(\dfrac{17}{2};10\right)$. Lại có $g'(9{,}22)>0$ nên $\alpha\in(9{,}22;10)$. Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0;+\infty)\setminus\{10\}$:

x	0		9		α		10		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$g(x)$	$\frac{-81}{25}$	$\nearrow$	36	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó suy ra phương trình $m=g(x)$ có 3 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $\frac{-81}{25}<m<g(\alpha)$.

Trên khoảng $(9,22;10)$ thì $\begin{cases}4x<40\\ 3<\left(\frac{2x-18}{x-10}\right)^2\end{cases}$ nên $g(x)<37\Rightarrow g(\alpha)\in(36;37)$.

Vậy những giá trị m nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là 1; 2; 3; …; 36 hay có 36 giá trị của m cần tìm.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=(x-1).(x-2)...(x-2020)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để phương trình $f'(x)=m.f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt?

A. 2020. **B.** 4040. **C.** 4041. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn B

Ta có nhận xét: khi $f(x)=0$ thì phương trình $f'(x)=m.f(x)$ vô nghiệm.

Do đó: $f'(x)=m.f(x)\Leftrightarrow m=\frac{f'(x)}{f(x)}$.

Xét hàm số $g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\ldots+\frac{1}{x-2020}$.

Ta có $g'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{-1}{(x-2)^2}+\frac{-1}{(x-3)^2}+\ldots+\frac{-1}{(x-2020)^2}<0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1;2;3...;2020\}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3	$\cdots$	2020		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$\cdots$	$\|\|$	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$	$\cdots$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0

Dựa vào BBT, phương trình $f'(x)=m.f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m>0$ hoặc $m<0$.

Kết hợp với điều kiện m là số nguyên thuộc $[-2020;2020]$ nên $m\in\{n\in\mathbb{Z}\,|\,-2020\le n\le 2020, n\ne 0\}$.

Vậy có tất cả 4040 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 14: Cho phương trình $4\cos^3 x-12\cos^2 x-33\cos x=4m+3\sqrt[3]{3\cos^2 x+9\cos x+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm duy nhất thuộc $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$.

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\cos x$ với $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]\Rightarrow t\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$, với mỗi $t\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$ chỉ có một $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$

Ta có $4t^3-12t^2-33t=4m+3\sqrt[3]{3t^2+9t+m}$ (1)

Bài toán trở thành tìm m để phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$

Đặt $u=\sqrt[3]{3t^2+9t+m}\Rightarrow\begin{cases}4t^3-12t^2-33t=4m+3u\\u^3=3t^2+9t+m\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4t^3=12t^2+33t+4m+3u\\4u^3=12t^2+36t+4m\end{cases}$

$\Rightarrow 4t^3-4u^3=3u-3t\Leftrightarrow(t-u)\left(4t^2+4ut+4u^2+3\right)=0\Leftrightarrow u=t,\left(4t^2+4ut+4u^2+3>0\right)$

Ta tìm m để phương trình $m=t^3-3t^2-9t$ có nghiệm duy $t\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$

Xét $g(t)=t^3-3t^2-9t\Rightarrow g'(t)=3t^2-6t-9\Rightarrow g'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1(l)\\t=3\ \ (l)\end{array}\right.$

Vậy $g(1)\le m\le g\left(-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow-11\le m\le\frac{29}{8}$ vậy có 15 giá trị nguyên của m.

Câu 15: Cho hai hàm số $y=\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|$ và $y=\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x}+4m-2020$, Tổng tất các các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hai hàm số cắt nhau tại một điểm duy nhất là

A. 506. **B.** 1011. **C.** 2020. **D.** 1010.

Lời giải

Chọn A

+ Phương trình hoành độ điểm chung của hai đồ thị hàm số là

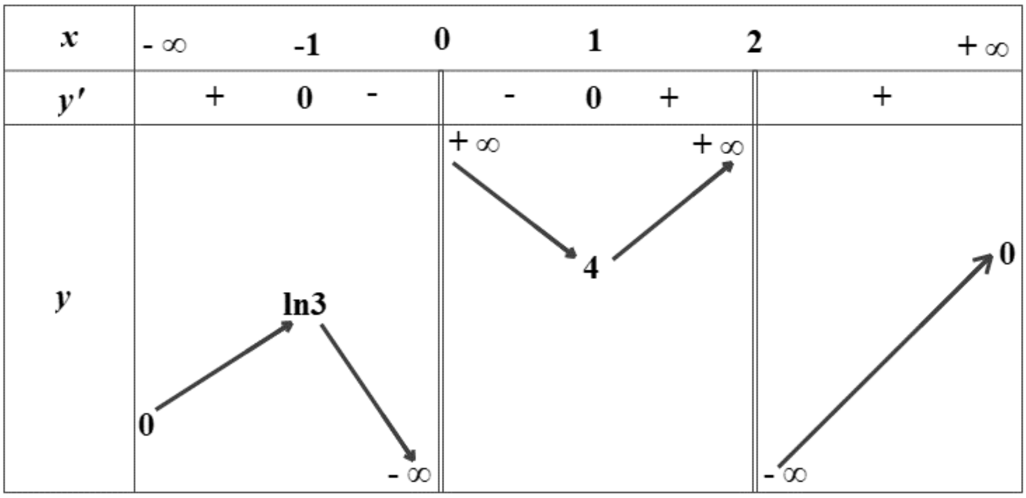
$$\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|=\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x}+4m-2020\Leftrightarrow\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|-\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x}=4m-2020\qquad(*)$$

Đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại một điểm duy nhất khi và chỉ khi (*) có duy nhất một nghiệm.

+ Xét hàm số $y=\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|-\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x}=\begin{cases}g_1(x)=\ln(x-2)-\ln x-\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x} & \text{khi } x>2\\g_2(x)=\ln(2-x)-\ln x-\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x} & \text{khi } 0<x<2\\g_3(x)=\ln(2-x)-\ln(-x)-\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x} & \text{khi } x<0\end{cases}$

Ta có $\begin{cases} g_1'(x)=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } x>2 \\ g_2'(x)=\dfrac{-1}{2-x}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } 0<x<2 \text{, do vậy } y=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right. \\ g_3'(x)=\dfrac{-1}{2-x}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } x<0 \end{cases}$

bảng biến thiên hàm số như sau



+ Qua bảng biến thiên này ta có (*) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} 4m-2020=4 \\ 4m-2020=\ln 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=506\in\mathbb{Z} \\ m=\dfrac{2020+\ln 3}{4}\notin\mathbb{Z} \end{array}\right.$

+ Từ đây yêu cầu bài toán xãy ra khi và chỉ khi $m=506$.

Câu 16: Cho hai hàm số $y=(x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|)$; $y=-12x^4-22x^3-x^2+10x+3$ có đồ thị lần lượt là (C_1), (C_2). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2020;2020]$ để (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt?

A. 4040. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 4041.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2):

$(x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|)=-12x^4-22x^3-x^2+10x+3$ (1)

Để đồ thị (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt thì phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Với $x\in\left\{-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right\}$: Không là nghiệm của phương trình (1).

Với $x\notin\left\{-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right\}$ ta có:

$(1)\Leftrightarrow m=\dfrac{-12x^4-22x^3-x^2+10x+3}{(x+1)(2x+1)(3x+1)}-2|x|\Leftrightarrow m=-2x-2|x|+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{3x+1}$.

Xét hàm số $f(x)=-2x-2|x|+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{3x+1}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right\}$.

Suy ra: $f'(x) = -2 - \dfrac{2x}{\sqrt{x^2}} - \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{2}{(2x+1)^2} - \dfrac{3}{(3x+1)^2}$.

Ta có: $f'(x) = \begin{cases} -4 - \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{2}{(2x+1)^2} - \dfrac{3}{(3x+1)^2} & \text{khi } x \in (0;+\infty) \\ -\dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{2}{(2x+1)^2} - \dfrac{3}{(3x+1)^2} & \text{khi } x \in (-\infty;0) \setminus \left\{-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right\} \end{cases}$ và $f'(x)$ không xác định tại $x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thì $m \ge 0$. Do đó có 2021 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 17: Cho hàm số $y = \dfrac{(x^2-2x+m)^2 - 3x - m}{x-3}$ (C) và đường thẳng $(d): y = 2x$ (m là tham số thực). Số giá trị nguyên của $m \in [-15;15]$ để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt là

A. 15. **B.** 30. **C.** 16. **D.** 17.

Lời giải

Chọn A

Xét pt hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

$$\frac{(x^2-2x+m)^2-3x-m}{x-3} = 2x \Leftrightarrow (x^2-2x+m)^2 - 3x - m = 2x^2 - 6x \ (x \ne 3)$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x+m)^2 = 2x^2 - 3x + m \ (x \ne 3) \quad (*)$$

Đặt: $x^2 - 2x + m = t$ ta được hệ: $\begin{cases} x^2 - 2x + m = t \\ t^2 = 2x^2 - 3x + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - t + m = 0 \\ 2x^2 - t^2 - 3x + m = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow x^2 - t^2 - x + t = 0 \Rightarrow (x-t)(x+t-1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = x \\ t = 1 - x \end{array}\right.$$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + m = x \\ x^2 - 2x + m = 1 - x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + m = 0 \ (1) \\ x^2 - x + m - 1 = 0 \ (2) \end{array}\right.$

YCBT $\Leftrightarrow (*)$ phải có 4 nghiệm phân biệt khác 3 $\Leftrightarrow (1), (2)$ đều phải có hai nghiệm pb khác 3 và các nghiệm của chúng không trùng nhau.

-$(1), (2)$ đều có hai nghiệm pb khác 3 khi: $\begin{cases} 9 - 4m > 0 \\ 3^3 - 3.3 + m \ne 0 \\ 1 - 4(m-1) > 0 \\ 3^2 - 3 + m - 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{9}{4} \\ m \ne 0 \\ m < \dfrac{5}{4} \\ m \ne -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1,25 \\ m \ne 0 \\ m \ne -5 \end{cases} \quad (**)$

-$(1),(2)$ không có nghiệm trùng nhau $\Leftrightarrow$ Hệ: $\begin{cases} x^2-3x+m=0 \\ x^2-x+m-1=0 \end{cases}$ Vô nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ x^2-3x+m=0 \end{cases}$ Vô nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ x^2-3x+m=0 \end{cases}$ Vô nghiệm

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^2-3.\left(\dfrac{1}{2}\right)+m\neq 0$

$\Leftrightarrow m\neq \dfrac{5}{4}\,(***)$

Vậy số giá trị nguyên của $m\in[-15;15]$ đồng thời thỏa mãn $(**)$ và $(***)$ là 15.

Câu 18: Cho hai hàm số $y=x^6+6x^4+6x^2+1$ và $y=x^3\sqrt{m-15x}\,(m+3-15x)$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Số phần tử của tập hợp S bằng

A. 2006. **B.** 2005. **C.** 2007. **D.** 2008.

Lời giải

Chọn A

Ta biết (C_1) cắt (C_2) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^6+6x^4+6x^2+1=x^3\sqrt{m-15x}\,(m+3-15x)$ (1) có hai nghiệm phân biệt.

Điều kiện: $m-15x\geq 0\Leftrightarrow m\geq 15x$ $(*)$.

Nếu $x=0$ thì phương trình (1) vô nghiệm. Suy ra $x\neq 0$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow x^3+6x^2+6x+\dfrac{1}{x^3}=\sqrt{m-15x}\,(m+3-15x)$

$\Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\left(\sqrt{m-15x}\right)^3+3\sqrt{m-15x}$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t$. Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$f'(t)=3t^2+3>0,\forall t\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f(t)=t^3+3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{m-15x}$ (2).

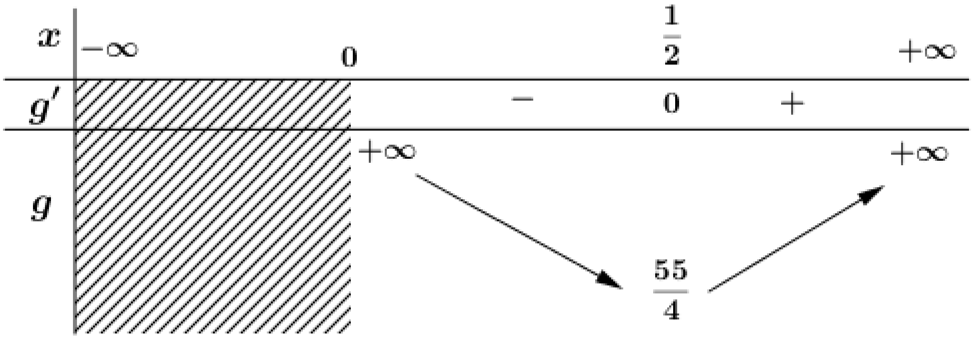
Nếu $x<0\Rightarrow x+\dfrac{1}{x}<0\Rightarrow$ Phương trình (2) vô nghiệm $\Rightarrow x>0$.

Khi đó $\begin{cases} m>0 \\ x+\dfrac{1}{x}>0 \end{cases}$ nên $(2)\Leftrightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}+2=m-15x\Leftrightarrow m=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2+15x$.

Đặt $g(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2+15x, x>0$. $g'(x)=2x-\dfrac{2}{x^3}+15$.

Phương trình $g'(x)=0$ có một nghiệm $x=\dfrac{1}{2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Bảng biến thiên



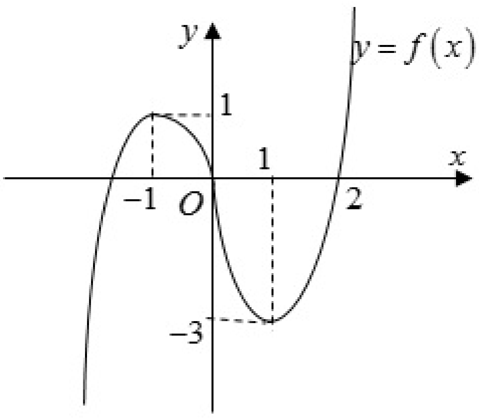
Suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > \frac{55}{4}$ (thỏa $m > 0$).

Kết hợp với m nguyên và $m \in [-2019; 2019]$ ta có được m nguyên và $m \in [14; 2019]$.

Khi đó S có $2019 - 14 + 1 = 2006$ phần tử.

DẠNG 7. TƯƠNG GIAO HÀM HỢP, HÀM ẨN

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau



Số nghiệm của phương trình $f\left(2 + f\left(e^x\right)\right) = 1$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

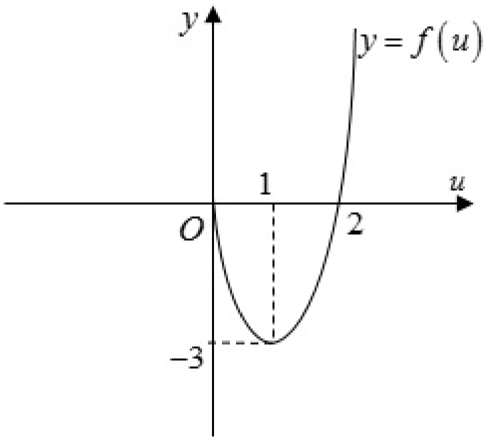
Đặt $u = e^x > 0$, từ đồ thị suy ra: $f(u) \geq -3, \forall u > 0$.

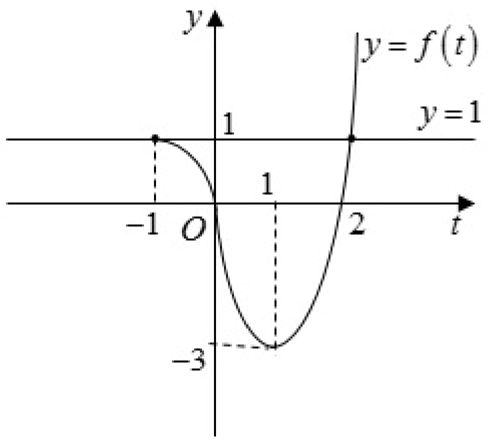
Đặt $t = 2 + f(u)$, $t \geq -1$.

Ứng với mỗi nghiệm $t = -1$, có một nghiệm $u = 1$.

Ứng với mỗi nghiệm $t \in (-1; 2)$, có hai nghiệm $u \in (0; 2)$.

Ứng với mỗi nghiệm $t > 2$, có một nghiệm $u > 2$.

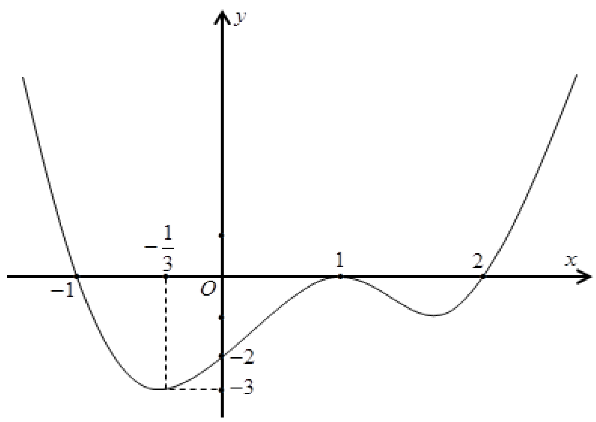




Phương trình $f(t)=1$ có một nghiệm $t=-1$ và một nghiệm $t>2$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



Đặt $g(x)=f(f'(x)-1)$. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g'(x)=0$. Số phần tử của tập S là

A. 8. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ và $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Do đó, tập xác định của hàm số $g(x)$ là $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x)=f''(x).f'(f'(x)-1)$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f''(x)=0 \\ f'(f'(x)-1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{-1}{3} \\ x=1 \\ x=x_0\in(1\,;2) \\ f'(x)-1=-1 \\ f'(x)-1=1 \\ f'(x)-1=2 \end{array}\right.$

Từ đồ thị ta cũng có:

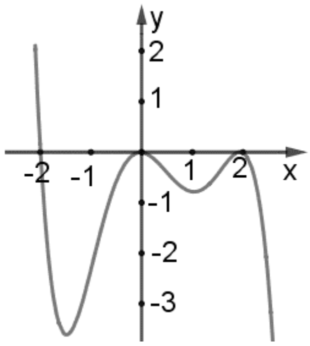
□ $f'(x)-1=-1 \Leftrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

□ $f'(x)-1=1 \Leftrightarrow f'(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \in(-\infty\,;\,\text{-}1) \\ x=x_2 \in(2\,;\,+\infty) \end{array}\right.$.

□ $f'(x)-1=2 \Leftrightarrow f'(x)=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_3 \in(-\infty\,;\,x_1) \\ x=x_4 \in(x_2\,;\,+\infty) \end{array}\right.$.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 9 nghiệm.

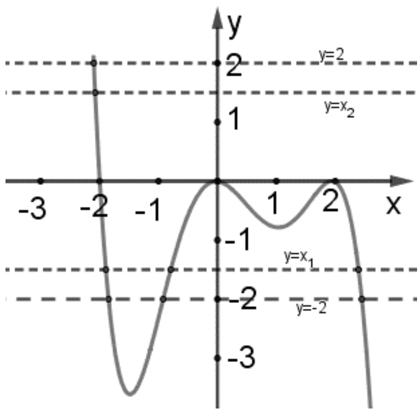
Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x)=f(f(x))$. Hỏi phương trình $g'(x)=0$ có mấy nghiệm thực phân biệt?



A. 14. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 12.

Lời giải

Chọn B



Ta có $g'(x)=f'(f(x)).f'(x)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(f(x))=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right.$$

Có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1,(-2<x_1<-1) \\ x=0 \\ x=x_2,(1<x_2<2) \\ x=2 \end{array}\right.$; $f'(f(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=x_1 \\ f(x)=0 \\ f(x)=x_2 \\ f(x)=2 \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị ta thấy:

$f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt là $x=-2, x=0, x=2$, trong đó có 2 nghiệm trùng với nghiệm của $f'(x)=0$.

$f(x)=x_1$ có 3 nghiệm phân biệt $x_3 \in (-2;-1), x_4 \in (-1;1), x_5 \in (2;+\infty)$.

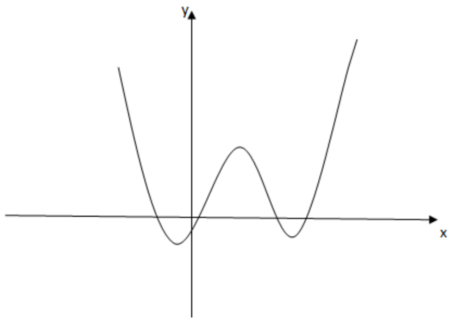
$f(x)=x_2$ có 1 nghiệm duy nhất $x_6 \in (-\infty;-2)$.

$f(x)=2$ có 1 nghiệm duy nhất $x_7 \in (-\infty;-2)$.

Cũng từ đồ thị có thể thấy các nghiệm $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, -2, 0, 2$ đôi một khác nhau.

Vậy $g'(x)=0$ có tổng cộng 10 nghiệm phân biệt.

Câu 22: Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ được cho như hình vẽ sau



Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left[f'(x)\right]^2 - f''(x).f(x)$ và trục Ox là:

A. 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4), a \neq 0, x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.

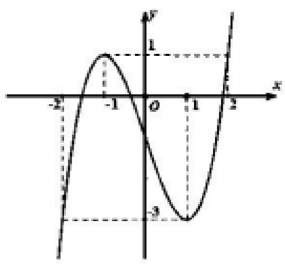
Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left[f'(x)\right]^2 - f''(x).f(x)$ và trục Ox là

$$\left[f'(x)\right]^2 - f''(x).f(x)=0 \Rightarrow \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]'=0 \Rightarrow \left[\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}\right]'=0$$

$$-\frac{1}{(x-x_1)^2}-\frac{1}{(x-x_2)^2}-\frac{1}{(x-x_3)^2}-\frac{1}{(x-x_4)^2}=0$$ vô nghiệm.

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left[f'(x)\right]^2 - f''(x).f(x)$ và trục Ox là 0.

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f\left(f(x)-1\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1\in\left(-2;-1\right) \\ x=x_2\in\left(-1;0\right) \\ x=x_3\in\left(1;2\right) \end{array}\right.$

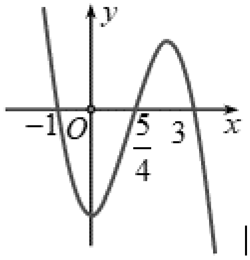
Khi đó: $f\left(f\left(x\right)-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)-1=x_1\in\left(-2;-1\right) \\ f\left(x\right)-1=x_2\in\left(-1;0\right) \\ f\left(x\right)-1=x_3\in\left(1;2\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=1+x_1\in\left(-1;0\right) \\ f\left(x\right)=1+x_2\in\left(0;1\right) \\ f\left(x\right)=1+x_3\in\left(2;3\right) \end{array}\right.$

+ Ta thấy hai phương trình $f\left(x\right)=1+x_1\in\left(-1;0\right)$; $f\left(x\right)=1+x_2\in\left(0;1\right)$ đều có ba nghiệm phân biệt.

Phương trình $f\left(x\right)=1+x_3\in\left(2;3\right)$ có một nghiệm.

Vậy phương trình $f\left(f\left(x\right)-1\right)=0$ có 7 nghiệm.

Câu 24: Cho hàm số $f\left(x\right)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$,. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=r$ có số phần tử là

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'\left(x\right)=4mx^3+3nx^2+2px+q$ $\left(1\right)$

Dựa vào đồ thị $y=f'\left(x\right)$ ta thấy phương trình $f'\left(x\right)=0$ có ba nghiệm đơn là -1, $\frac{5}{4}$, 3.

Do đó $f'\left(x\right)=m\left(x+1\right)\left(4x-5\right)\left(x-3\right)$ và $m\neq 0$. Hay $f'\left(x\right)=4mx^3-13mx^2-2mx+15m$ $\left(2\right)$.

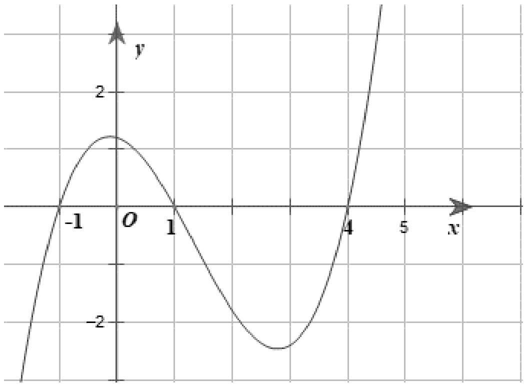
Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra $n=-\frac{13}{3}m$, $p=-m$ và $q=15m$.

Khi đó phương trình $f\left(x\right)=r \Leftrightarrow mx^4+nx^3+px^2+qx=0 \Leftrightarrow m\left(x^4-\frac{13}{3}x^3-x^2+15x\right)=0$

$\Leftrightarrow 3x^4-13x^3-3x^2+45x=0 \Leftrightarrow x\left(3x+5\right)\left(x-3\right)^2=0 \Leftrightarrow x=0\vee x=-\frac{5}{3}\vee x=3$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=r$ là $S=\left\{-\frac{5}{3};0;3\right\}$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$, trong đó $m,n,p,q,r\in\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ như hình vẽ dưới.



Tập nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=16m+8n+4p+2q+r$ có tất cả bao nhiêu phần tử.

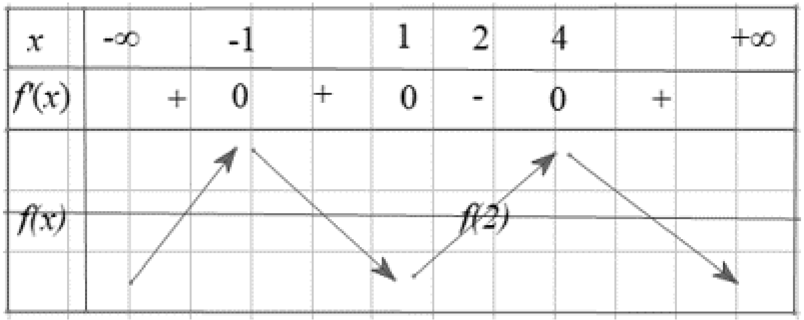
A. 4 . **B.** 3 . **C.** 5 . **D.** 6 .

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta thấy $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=1 \vee x=4$

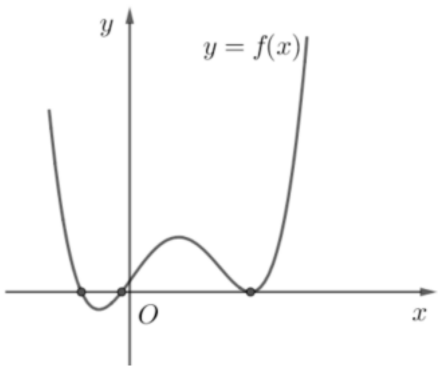
Ta có bảng biến thiên



Phương trình $f\left(x\right)=16m+8n+4p+2q+r \Leftrightarrow f\left(x\right)=f\left(2\right)$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có 4 nghiệm.

Câu 26: Cho $f\left(x\right)$ là một hàm đa thức bậc bốn có đồ thị như hình dưới đây.



Tập nghiệm của phương trình $\left[f'\left(x\right)\right]^2=f\left(x\right).f''\left(x\right)$ có số phần tử là

A. 1. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $\left[f'\left(x\right)\right]^2=f\left(x\right).f''\left(x\right)$ (1)

Do $f\left(x\right)=0$ có ba nghiệm $x_1,x_2,x_2\left(x_1<x_2<x_3\right)$ và $f'\left(x_3\right)=0$ suy ra x_3 là một nghiệm của (1)

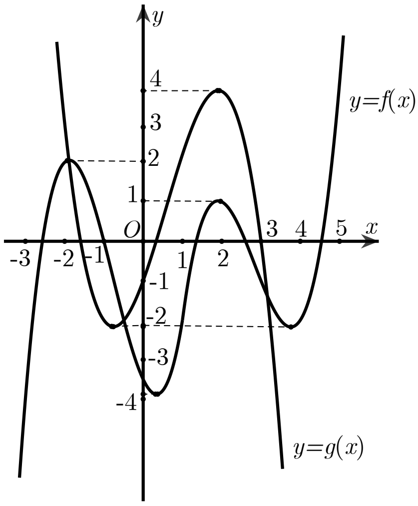
Ta có $f\left(x\right)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)^2,\left(a\neq 0\right)$

Với $x \neq x_3 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)' = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{x-x_1} + \dfrac{1}{x-x_2} + \dfrac{2}{x-x_3}\right)' = 0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{(x-x_1)^2} - \dfrac{1}{(x-x_2)^2} - \dfrac{2}{(x-x_3)^2} = 0$ vô nghiệm.

Vậy, phương trình (1) có đúng một nghiệm $x = x_3$.

Câu 27: Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị như hình sau:



Khi đó tổng số nghiệm của hai phương trình $f(g(x)) = 0$ và $g(f(x)) = 0$ là

A. 25 . **B.** 22 . **C.** 21 . **D.** 26 .

Lời giải

Chọn B

Quan sát đồ thị ta thấy: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1\ (-3 < x_1 < -2) \\ x = -1 \\ x = x_2\ (1 < x_2 < 2) \\ x = x_3\ (2 < x_3 < 3) \\ x = x_4\ (4 < x_4 < 5) \end{array}\right.$.

Do đó: $f(g(x)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) = x_1\ (1) \\ g(x) = -1\ (2) \\ g(x) = x_2\ (3) \\ g(x) = x_3\ (4) \\ g(x) = x_4\ (5) \end{array}\right.$

Phương trình (1) có đúng 1 nghiệm; Phương trình (2) có đúng 3 nghiệm; Phương trình (3) có đúng 3 nghiệm; Phương trình (4) có đúng 3 nghiệm; Phương trình (5) có đúng 1 nghiệm. Tất cả các nghiệm trên đều phân biệt nên phương trình $f(g(x)) = 0$ có đúng 11 nghiệm.

Quan sát đồ thị ta thấy: $g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_5\ (-2 < x_5 < -1) \\ x = x_6\ (0 < x_6 < 1) \\ x = 3 \end{array}\right.$

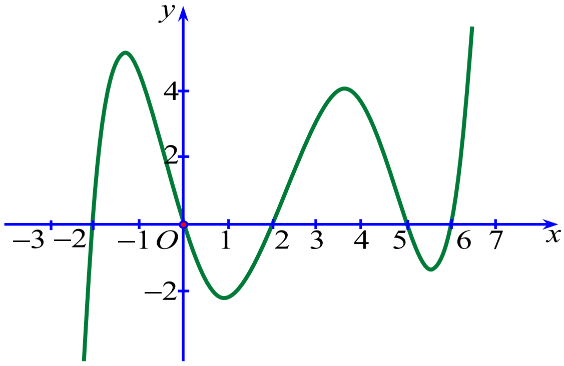
Do đó $g\left(f(x)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=x_5 (6) \\ f(x)=x_6 (7) \\ f(x)=3 (8) \end{array}\right.$

Phương trình (6) có 5 nghiệm; Phương trình (7) có 5 nghiệm; Phương trình (8) có 1 nghiệm.

Tất cả các nghiệm này đều phân biệt nên phương trình $g\left(f(x)\right)=0$ có đúng 11 nghiệm.

Vậy tổng số nghiệm của hai phương trình $f\left(g(x)\right)=0$ và $g\left(f(x)\right)=0$ là 22 nghiệm.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số nghiệm thuộc đoạn $[-2;6]$ của phương trình $f(x)=f(0)$ là

A. 5 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ ta có BBT

x	$-\infty$		-2		0		2		5		6		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(5)$	$\searrow$	$f(6)$	$\nearrow$	$+\infty$

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x); y=0; x=0; x=2$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x); y=0; x=2; x=5$

Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x); y=0; x=5; x=6$

$S_1=-\int_0^2 f'(x)dx=f(0)-f(2)$; $S_2=\int_2^5 f'(x)dx=f(5)-f(2)$;

$S_3=-\int_5^6 f'(x)dx=f(5)-f(6)$

Từ đồ thị ta thấy $S_2>S_1 \Rightarrow f(5)-f(2)>f(0)-f(2) \Rightarrow \boxed{f(5)>f(0)}$

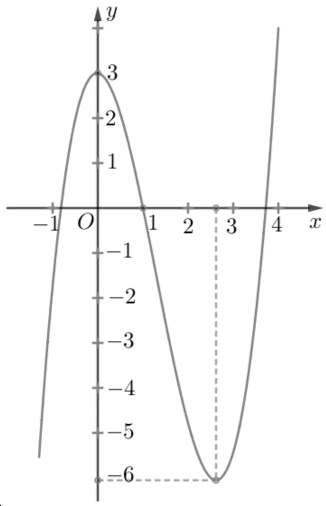
và $S_1+S_3<S_2 \Rightarrow f(0)-f(2)+f(5)-f(6)<f(5)-f(2) \Rightarrow \boxed{f(6)>f(0)}$

Khi đó ta có BBT chính xác (dạng đồ thị chính xác) như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		5		6		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$f(-2)$	↗	$f(0)$	↘	$f(2)$	↗	$f(5)$	↘	$f(6)$	↗	$+\infty$

Vậy phương trình $f(x) = f(0)$ có 2 nghiệm thuộc đoạn $[-2;6]$

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới. Đặt $g(x) = f[f(x)]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



A. 2 **<u>B.</u>** 8 **C.** 4 **D.** 6

Lời giải.

Ta có: $g'(x) = f'(x)f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{array}\right. \ (*)$.

Theo đồ thị hàm số suy ra.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = a_1 \end{array}\right.$, với $2 < a_1 < 3$.

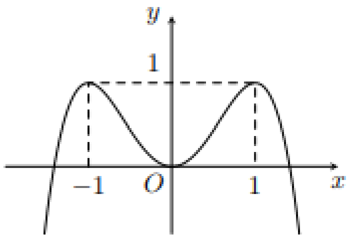
$f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \ ,(1) \\ f(x) = a_1 \ ,(2) \end{array}\right.$.

Phương trình (1): $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khác nghiệm phương trình $(*)$.

Phương trình (2): $f(x) = a_1$ có 3 nghiệm phân biệt khác nghiệm phương trình (1) và phương trình $(*)$.

Vậy phương trình ban đầu có 8 nghiệm phân biệt.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đồ thị như hình vẽ bên đây, trong đó a,b,c,d,e là các hệ số thực. Số nghiệm của phương trình $f\left(\sqrt{f(x)}\right) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0$ là



A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Từ hình vẽ ta có dạng đồ thị của hàm trùng phương nên $b = d = 0 \Rightarrow f(x) = ax^4 + cx^2 + e$

Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 2cx.$

Từ đồ thị $\Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2c = 0 \\ e = 0 \\ a + c + e = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ e = 0 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^4 + 2x^2.$

$\Rightarrow f\left(\sqrt{x}\right) = x^2 + 2x$ và $f\left(\sqrt{f(x)}\right) = f^2(x) + 2f(x).$

Như vậy phương trình $f\left(\sqrt{f(x)}\right) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0.$

$\Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0$ với $f(x) \geq 0.$

Đặt $t = f(x)(t \geq 0)$ ta được phương trình $g(t) = 0$ với $g(t) = t^2 - 3t - 2\sqrt{t} + 1.$

Nhận thấy: Hàm số $g(t)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $g(0).g(1) < 0$

$\Rightarrow g(t) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0;1)$.

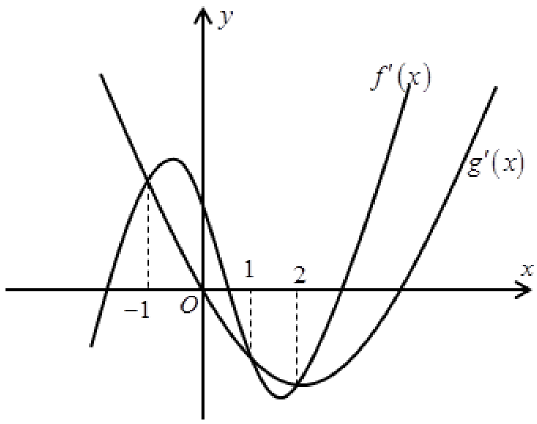
Hàm số $g(t)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và $g(1).g(4) < 0$

$\Rightarrow g(t) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(1;4)$.

Mà $g(t) = 0$ là phương trình bậc hai chỉ có tối hai nghiệm nên $g(t) = 0$ có duy nhất một nghiệm thuộc $(0;1)$. Suy ra $f\left(\sqrt{f(x)}\right) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0$ có duy nhất một nghiệm $f(x) \in (0;1)$.

Suy ra phương trình $f(x) = a$ với $a \in (0;1)$ luôn có 4 nghiệm x phân biệt.

Câu 31: Cho các hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$ và $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(n, n, p, q, r, a, b, c, d \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $f(0) = g(0)$. Các hàm số $f'(x), g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Tập nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ có số phần tử là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

+) Từ giả thiết $f(0)=g(0)$ suy ra $r=d$ do đó phương trình $f(x)=g(x)$ tương đương với:

$$x\left[mx^3+(n-a)x^2+(p-b)x+(q-c)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ mx^3+(n-a)x^2+(p-b)x+(q-c)=0 \end{array}\right.$$

+) Từ đồ thị của các hàm số $f'(x), g'(x)$ suy ra $m\neq 0$ và

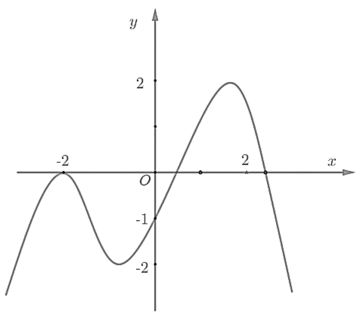
$$\begin{cases} f'(-1)=g'(-1) \\ f'(1)=g'(1) \\ f'(2)=g'(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m+3(n-a)-2(p-b)+q-c=0 \\ 4m+3(n-a)+2(p-b)+q-c=0 \\ 32m+12(n-a)+4(p-b)+q-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n-a=-\dfrac{8}{3}m \\ p-b=-2m \\ q-c=8m \end{cases}.$$

Từ đó ta có phương trình: $mx^3-\dfrac{8}{3}mx^2-2mx+8m=0 \Leftrightarrow x^3-\dfrac{8}{3}x^2-2x+8=0$.

Sử dụng máy tính Casio ta được phương trình có 1 nghiệm và nghiệm đó khác 0.

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ có 2 phần tử.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp nghiệm của phương trình $f(f(x))+1=0$ có bao nhiêu phần tử?



A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta có $f\left(f\left(x\right)\right)+1=0$ $f\left(f\left(x\right)\right)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=a<-2 \\ f\left(x\right)=b\in\left(-2;-1\right) \\ f\left(x\right)=0 \\ f\left(x\right)=c>2 \end{array}\right.$.

+ Với $f\left(x\right)=a<-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1<-2 \\ x=x_2>2 \end{array}\right.$.

+ Với $f\left(x\right)=b\in\left(-2;-1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_3<-2 \\ x=x_4\in\left(-2;-1\right) \\ x=x_5\in\left(-1;0\right) \\ x=x_6>2 \end{array}\right.$.

+ Với $f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_7=-2 \\ x=x_8\in\left(0;1\right) \\ x=x_9\in\left(2;3\right) \end{array}\right.$.

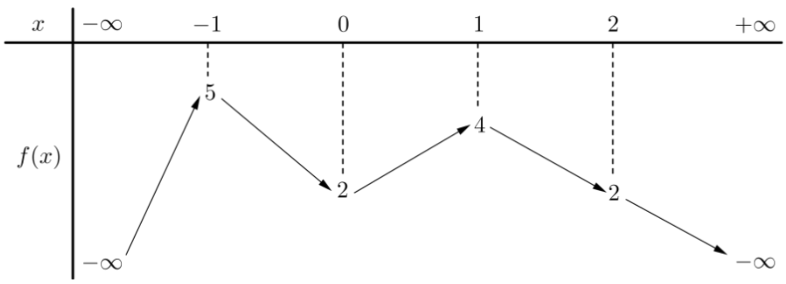
+ Với $f\left(x\right)=c>2$ vô nghiệm.

Ta thấy hàm số $y=f\left(x\right)$ đơn điệu trên $\left(-\infty;-2\right)$, $f\left(x_1\right)=a\neq b=f\left(x_3\right)$ nên $x_1\neq x_3$.

Hàm số $y=f\left(x\right)$ đơn điệu trên $\left(2;+\infty\right)$, $f\left(x_6\right)=b\neq 0=f\left(x_9\right)$ nên $x_6\neq x_9$.

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 33: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên



Phương trình $f\left(\sqrt{2x-x^2}\right)=3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

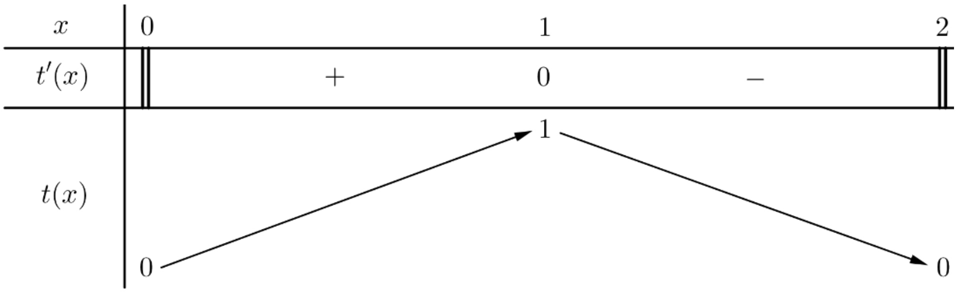
Lời giải

Chọn B

Trước hết, xét hàm số $t=t\left(x\right)=\sqrt{2x-x^2}$, $x\in\left[0;2\right]$.

Ta có $t'\left(x\right)=\dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}$, $x\in\left(0;2\right)$. $t'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=1\in\left(0;2\right)$.

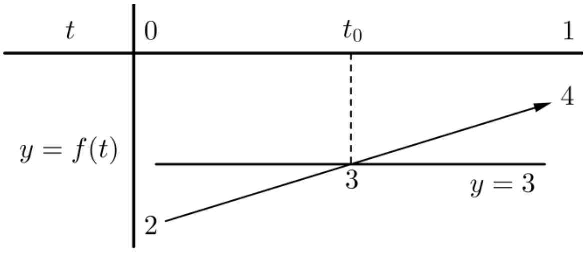
Bảng biến thiên của $t\left(x\right)$:



$\Rightarrow 0 \le t \le 1$, $\forall x \in [0;2]$.

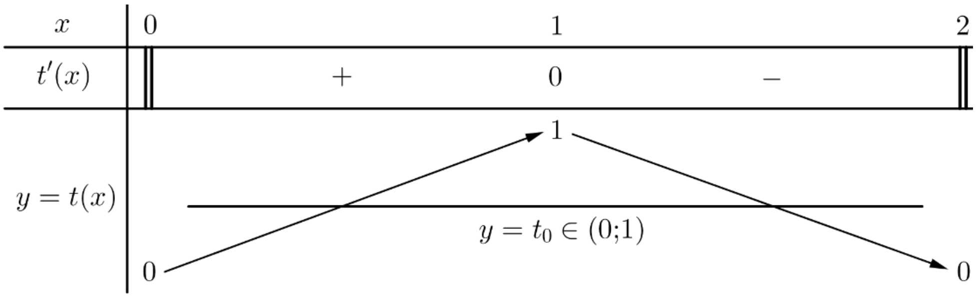
Lúc này, phương trình $f\left(\sqrt{2x-x^2}\right)=3$ trở thành $f(t)=3$ (1) với $t \in [0;1]$.

Theo bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[0;1]$ thì đường thẳng $y=3$ cắt đồ thị hàm số $y=f(t)$ tại đúng 1 điểm có hoành độ thuộc khoảng $(0;1)$ nên phương trình (2) có đúng 1 nghiệm $t=t_0$ với $t_0 \in (0;1)$.



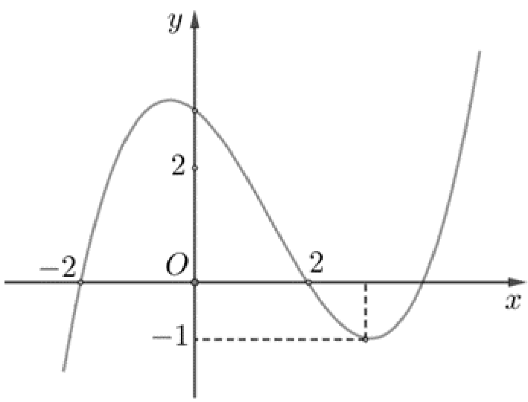
Khi đó, phương trình $(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x-x^2}=t_0$ (2), $t_0 \in (0;1)$.

Mặt khác, theo bảng biến thiên của hàm số $t(x)$, với mỗi $t_0 \in (0;1)$ thì đường thẳng $y=t_0$ cắt đồ thị hàm số $y=t(x)$ tại đúng 2 điểm phân biệt nên phương trình (2) có đúng 2 nghiệm phân biệt.



Vậy phương trình $f\left(\sqrt{2x-x^2}\right)=3$ có đúng 2 nghiệm.

Câu 34: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=1$ là

A. 10. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=1$ (1)

Đặt $t=x^3-3x$, ta có bảng biến thiên của hàm số $t=g\left(x\right)=x^3-3x$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy

+ Với mỗi $t_0>2$ hoặc $t_0<-2$, phương trình $t_0=x^3-3x$ có một nghiệm;

+ Với mỗi $-2<t_0<2$, phương trình $t_0=x^3-3x$ có 3 nghiệm.

Khi đó, (1) trở thành $\left|f\left(t\right)\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(t\right)=1\\f\left(t\right)=-1\end{array}\right.$

* TH 1: $f\left(t\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=t_1\in\left(-2;0\right)\\t=t_2\in\left(0;2\right)\\t=t_3\in\left(2;+\infty\right)\end{array}\right.$

+ Với $t=t_1\in\left(-2;0\right)\Rightarrow$ Phương trình $t_1=x^3-3x$ có 3 nghiệm;

+ Với $t=t_2\in\left(0;2\right)\Rightarrow$ Phương trình $t_2=x^3-3x$ có 3 nghiệm;

+ Với $t=t_3\in\left(2;+\infty\right)\Rightarrow$ Phương trình $t_3=x^3-3x$ có 1 nghiệm;

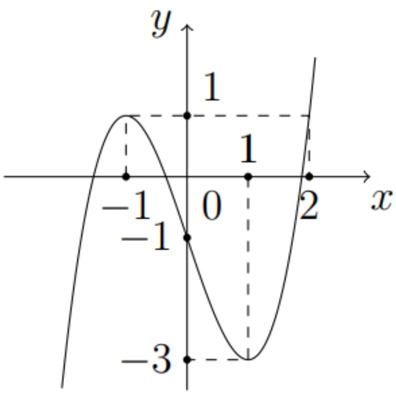
* TH 2: $f\left(t\right)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=t_4\in\left(-\infty;-2\right)\\t=t_5\in\left(2;+\infty\right)\end{array}\right.$

+ Với $t=t_4\in\left(-\infty;-2\right)\Rightarrow$ Phương trình $t_4=x^3-3x$ có 1 nghiệm;

+ Với $t=t_5\in\left(2;+\infty\right)\Rightarrow$ Phương trình $t_5=x^3-3x$ có 1 nghiệm.

Mặt khác, các nghiệm này đều phân biệt. Vậy phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=1$ có 9 nghiệm phân biệt.

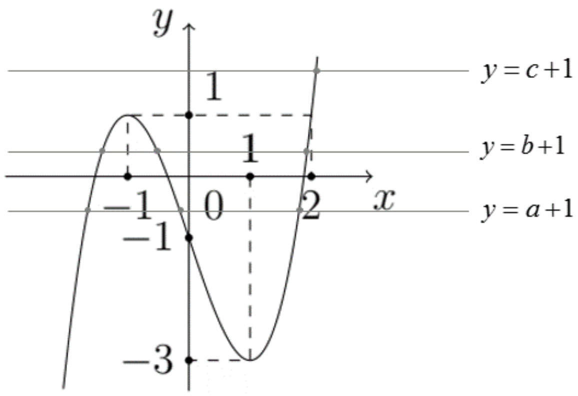
Câu 35: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f\left[f\left(\cos x\right)-1\right]=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $\left[0;2\pi\right]$?



A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy:

$$f\left[f(\cos x)-1\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\cos x)-1=a\in(-2;-1) \\ f(\cos x)-1=b\in(-1;0) \\ f(\cos x)-1=c\in(1;2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\cos x)=a+1\in(-1;0) \\ f(\cos x)=b+1\in(0;1) \\ f(\cos x)=c+1\in(2;3) \end{array}\right.$$

• Xét phương trình $f(\cos x)=a+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x=\alpha_1<-1 & (1) \\ \cos x=\alpha_2\in(-1;0) & (2) \\ \cos x=\alpha_3>1 & (3) \end{array}\right.$

Vì $\cos x\in[-1;1]$ nên phương trình $(1),(3)$ vô nghiệm và phương trình (2) có 2 nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$.

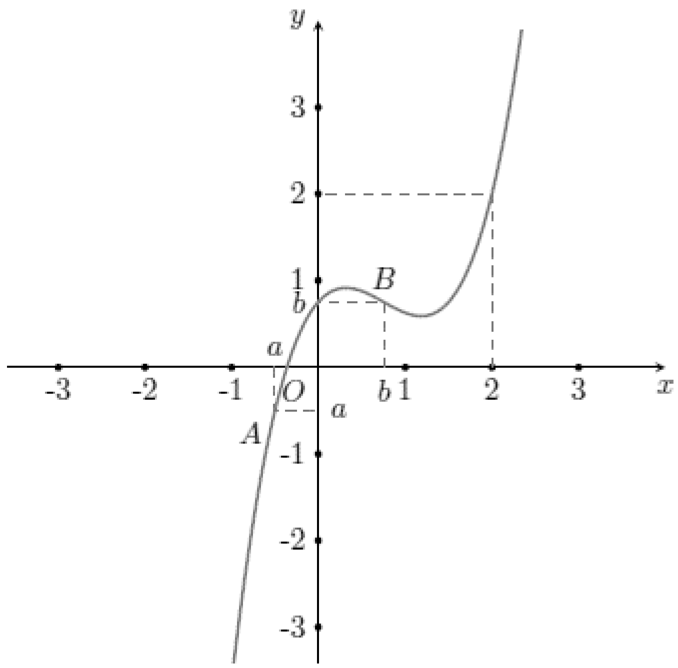
• Xét phương trình $f(\cos x)=b+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x=\beta_1<-1 & (4) \\ \cos x=\beta_2\in(-1;0) & (5) \\ \cos x=\beta_3>1 & (6) \end{array}\right.$

Vì $\cos x\in[-1;1]$ nên phương trình $(4),(6)$ vô nghiệm và phương trình (5) có 2 nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$.

• Xét phương trình $f(\cos x)=c+1 \Leftrightarrow \cos x=t>2$ (vô nghiệm)

Nhận xét hai nghiệm của phương trình (5) không trùng với nghiệm nào của phương trình (2) nên phương trình $f\left[f(\cos x)-1\right]=0$ có 4 nghiệm phận biệt.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ:

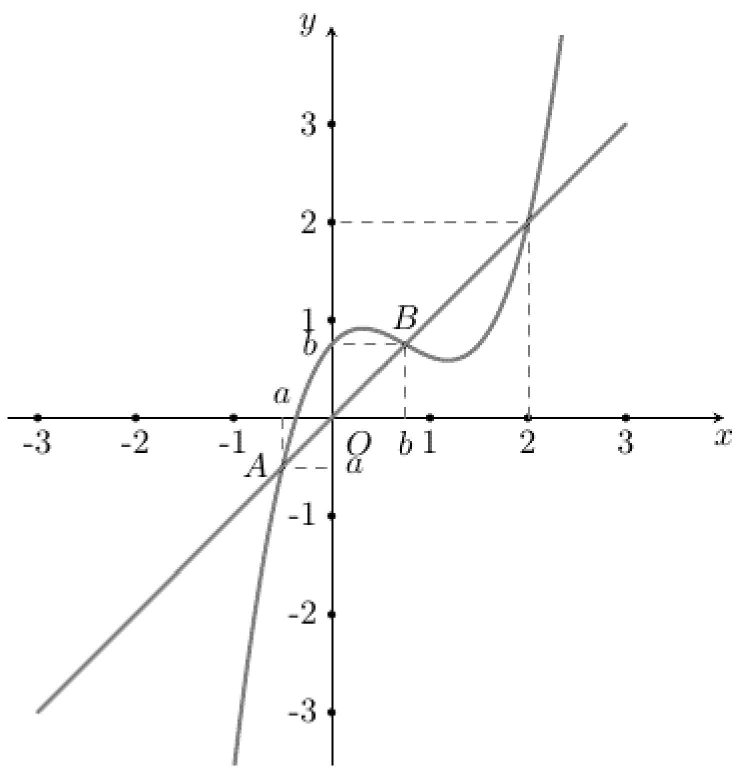


Số nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$ của phương trình $f(\cos x+1)=\cos x+1$ là

A. 2. **B.** 3. **<u>C</u>.** 5. **D.** 4.

Lời giải

<u>Chọn C</u>



Từ đồ thị ta có $f\left(x\right)=x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\in\left(-\infty;0\right)\\x=b\in\left(0;1\right)\\x=2\end{array}\right.$

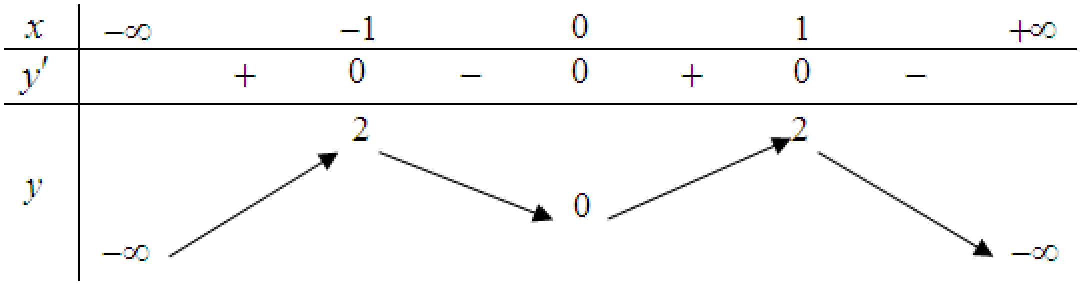
Do đó $f\left(\cos x+1\right)=\cos x+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x+1=a\in\left(-\infty;0\right)\\\cos x+1=b\in\left(0;1\right)\\\cos x+1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\cos x=a-1=t_1\in\left(-\infty;-1\right) & (VN)\\\cos x=b-1=t_2\in\left(-1;0\right) & (1)\\\cos x=1 & (2)\end{array}\right.$

Dựa vào đường tròn lượng giác, phương trình (1) có 3 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$.

Phương trình (2) có 2 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$.

Vậy phương trình ban đầu có tất cả 5 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};3\pi\right)$.

Câu 37: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thuộc khoảng $\left(-\infty;\ln 2\right)$ của phương trình $2019f\left(1-e^x\right)-2021=0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

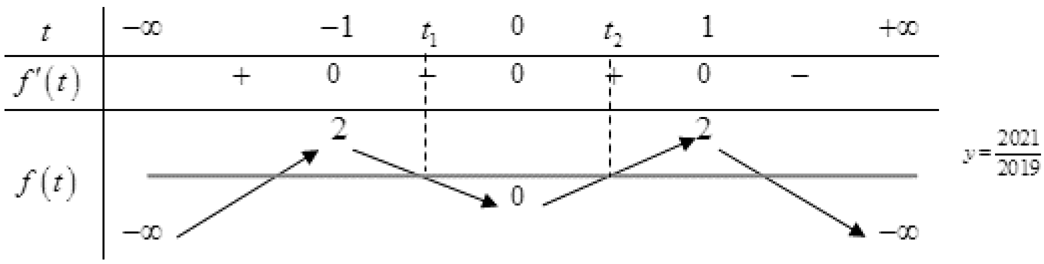
Chọn B

Đặt $t=1-e^x$; $x\in\left(-\infty;\ln 2\right)\Rightarrow t\in\left(-1;1\right)$.

Nhận xét: $x=\ln\left(1-t\right)\Rightarrow$ với mỗi giá trị của $t\in\left(-1;1\right)$ ta được một giá trị của $x\in\left(-\infty;\ln 2\right)$.

Phương trình tương đương: $f\left(t\right)=\frac{2021}{2019}$.

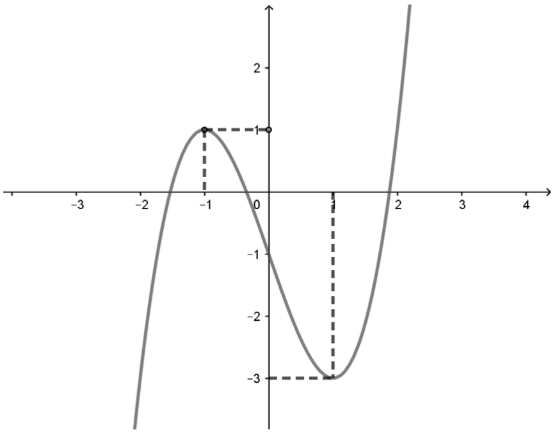
Sử dụng bảng biến thiên của $f\left(x\right)$ cho $f\left(t\right)$ như sau:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f\left(t\right)=\frac{2021}{2019}$ có 2 nghiệm $t_1,t_2\in\left(-1;1\right)$.

Vậy phương trình $2019f\left(1-e^x\right)-2021=0$ có 2 nghiệm $x\in\left(-\infty;\ln 2\right)$.

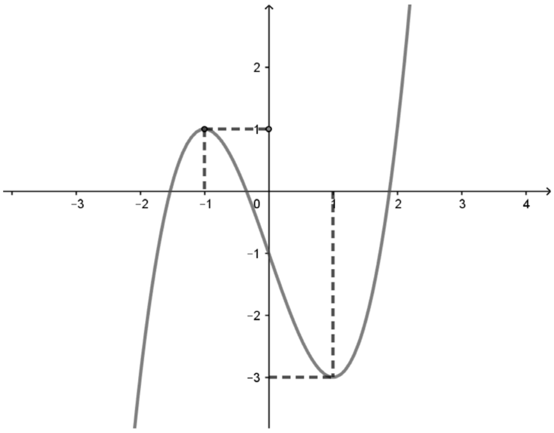
Câu 38: Cho $y=f\left(x\right)$ là hàm số đa thức bậc 3 và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)-1\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $\left[0;3\pi\right]$?



A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D



Đặt $t = \cos x$, với $x \in [0;3\pi] \Rightarrow t \in [-1;1]$.

Với $t = 1$, phương trình $t = \cos x$ có hai nghiệm $x \in [0;3\pi]$.

Với $t = -1$, phương trình $t = \cos x$ có hai nghiệm $x \in [0;3\pi]$.

Với $-1 < t < 1$, phương trình $t = \cos x$ có ba nghiệm $x \in [0;3\pi]$.

Thay $t = \cos x$ vào phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)-1\right) = 0$, ta được phương trình:

$$f\left(f\left(t\right)-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(t)-1=a\in(-2;-1) \\ f(t)-1=b\in(-1;0) \\ f(t)-1=c\in(1;2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(t)=a+1\in(-1;0) & (1) \\ f(t)=b+1\in(0;1) & (2) \\ f(t)=c+1\in(2;3) & (3) \end{array}\right..$$

Từ đồ thị ta có:

+) Phương trình (1) có 1 nghiệm $t \in (-1;0)$, suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm.

+) Phương trình (2) có 1 nghiệm $t \in (-1;0)$, suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm.

+) Phương trình (3) có 1 nghiệm $t > 1$, suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm.

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $\left|f(3x+1)-2\right|=5$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left|f(3x+1)-2\right|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(3x+1)-2=5 \\ f(3x+1)-2=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(3x+1)=7 \quad (1) \\ f(3x+1)=-3\,(2) \end{array}\right.$.

Dựa vào bảng biến thiên,

+ Phương trình (1) có nghiệm duy nhất thỏa mãn $3x+1=a>3 \Leftrightarrow x=\dfrac{a-1}{3}>\dfrac{2}{3}$.

+ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\begin{cases} 3x_1+1=3 \\ 3x_2+1=b<-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{2}{3} \\ x_2=\dfrac{b-1}{3}<-\dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\dfrac{5\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4}\right]$ của phương trình $3f\left(\dfrac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2}}\right)-7=0$ là:

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

$$\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2}}=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$x \in \left[-\frac{5\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right] \Rightarrow x-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{3\pi}{2};\pi\right] \Rightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \in [-1;1]$

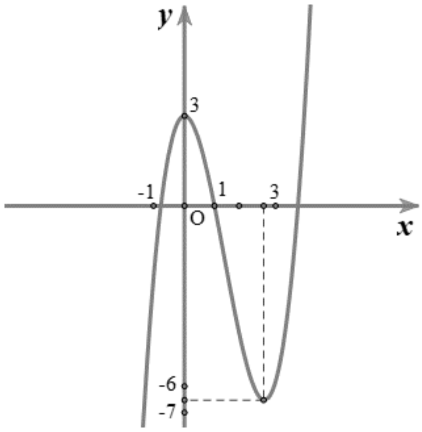
$3f\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2}}\right)-7=0 \Leftrightarrow f\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{7}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=a\in(-1;0)\\ \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=b\in(0;1)\end{array}\right.$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=a\in(-1;0)$ có 2 nghiệm.

$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=b\in(0;1)$ có 3 nghiệm.

Vậy phương trình có 5 nghiệm.

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Đặt $g(x)=f\left[f(x)\right]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.



A. 8. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=f'(x).f'\left[f(x)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ f'\left[f(x)\right]=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ f(x)=0\\ f(x)=m\in(1;3)\end{array}\right.$.

Phương trình $f'(x)=0$ có 2 nghiệm

Phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm

Phương trình $f(x)=m\in(1;3)$ có 3 nghiệm

Vậy phương trình có 8 nghiệm.

Câu 42: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f\left(2\sin x+1\right)=1$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f\left(2\sin x+1\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\sin x+1=-1\\2\sin x+1=a\in\left(1;3\right)\\2\sin x+1=b\in\left(3;+\infty\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sin x=-1 & (1)\\ \sin x=\dfrac{a-1}{2}\in\left(0;1\right) & (2)\\ \sin x=\dfrac{b-1}{2}\in\left(1;+\infty\right) & (3)\end{array}\right.$

(1) có 2 nghiệm trong $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$.

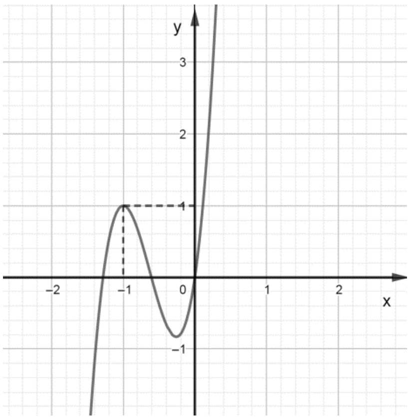
(2) có 5 nghiệm trong $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$.

(3) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm trong $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Câu 43: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\ \left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f\left(f\left(\sqrt{f\left(x\right)}\right)+f\left(x\right)+2\sqrt{f\left(x\right)}\right)-f\left(1\right)=0$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.



Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{f\left(x\right)}$, $t\geq 0$.

Ta có: $f\left(f\left(t\right)+t^2+2t\right)-f\left(1\right)=0$ (*).

Xét $t=0$: (*) $\Leftrightarrow f\left(0\right)-f\left(1\right)=0$ (không thỏa).

Xét $t>0$: Ta có $f\left(t\right)>0$ và $f\left(t\right)+t^2+2t>0$

Theo đồ thị, hàm $f\left(u\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

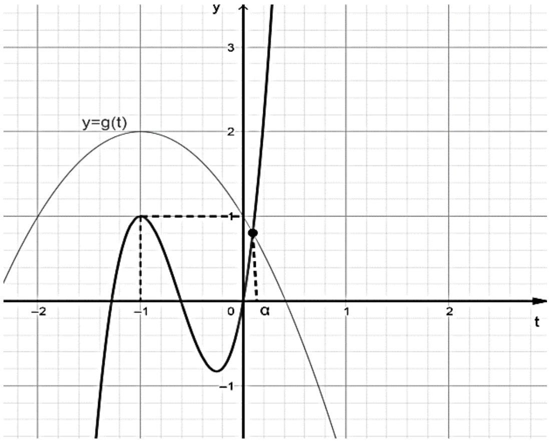
Do đó, (*) $\Leftrightarrow f\left(f\left(t\right)+t^2+2t\right)=f\left(1\right)\Leftrightarrow f\left(t\right)+t^2+2t=1$

$\Leftrightarrow f\left(t\right)=1-t^2-2t$

$\Leftrightarrow f\left(t\right)=g\left(t\right)$ (**)(với $g\left(t\right)=1-t^2-2t, t>0$)

Vì hàm $f(t)$ đồng biến và $g(t)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$ nên phương trình (**) có nghiệm duy nhất $t=\alpha$

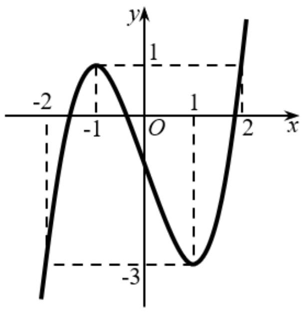
Theo đồ thị hàm $f(t),g(t)$ ta có $\alpha\in(0;1)$.



Khi đó, $t=\alpha\Leftrightarrow f(x)=\alpha^2$, $\alpha^2\in(0;1)$ (***).

Vì đồ thị hàm $f(x)$ cắt đường thẳng $y=\alpha^2$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình (***) có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(f(x)-1)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

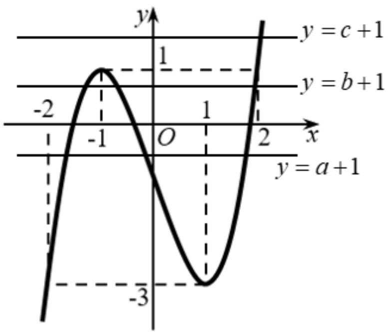
Từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$ suy ra $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\in(-2;-1)\\x=b\in(-1;0)\\x=c\in(1;2)\end{array}\right.$

Suy ra $f(f(x)-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)-1=a\\f(x)-1=b\\f(x)-1=c\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=a+1\\f(x)=b+1\\f(x)=c+1\end{array}\right.$

+ Do $a\in(-2;-1)\Rightarrow a+1\in(-1;0)\Rightarrow$ Phương trình $f(x)=a+1$ có 3 nghiệm phân biệt.

+ Do $b\in(-1;0)\Rightarrow b+1\in(0;1)\Rightarrow$ Phương trình $f(x)=b+1$ có 3 nghiệm phân biệt.

+ Do $c\in(1;2)\Rightarrow c+1\in(2;3)\Rightarrow$ Phương trình $f(x)=c+1$ có 1 nghiệm.



Vậy phương trình $f\left(f\left(x\right)-1\right)=0$ có $3+3+1=7$ nghiệm.

Câu 45: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2020	↗	2020	↘	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x+2019\right)-2020\right|=2021$ là

A. 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có :

$$\left|f\left(x+2019\right)-2020\right|=2021\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x+2019\right)-2020=-2021\\ f\left(x+2019\right)-2020=2021\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x+2019\right)=-1\\ f\left(x+2019\right)=4041\end{array}\right..$$

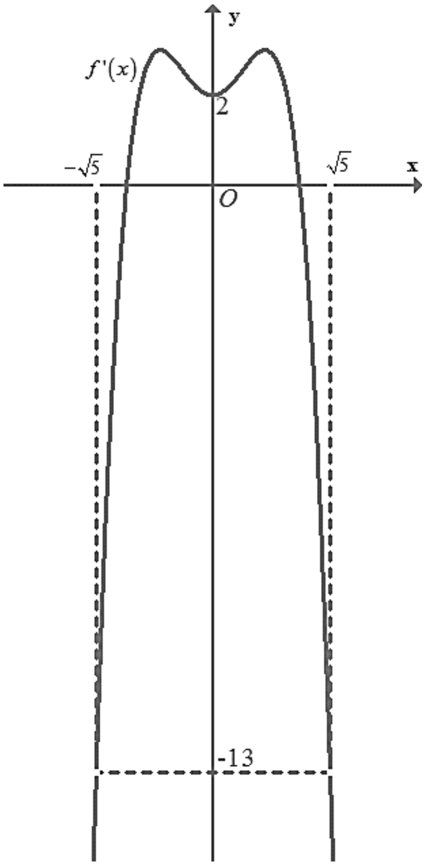
Từ bảng biến thiên suy ra:

+) Phương trình: $f\left(x+2019\right)=-1$ có 3 nghiệm.

+) Phương trình: $f\left(x+2019\right)=4041$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 46: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g\left(x\right)=2f\left(x\right)+2x^3-4x-3m-6\sqrt{5}$ với m là số thực. Để $g\left(x\right)\le 0,\forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ thì điều kiện của m là



A. $m \geq \frac{2}{3}f\left(-\sqrt{5}\right) - 4\sqrt{5}$.

B. $m \leq \frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$.

C. $m \leq \frac{2}{3}f\left(0\right) - 2\sqrt{5}$.

D. $m \geq \frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$.

Lời giải

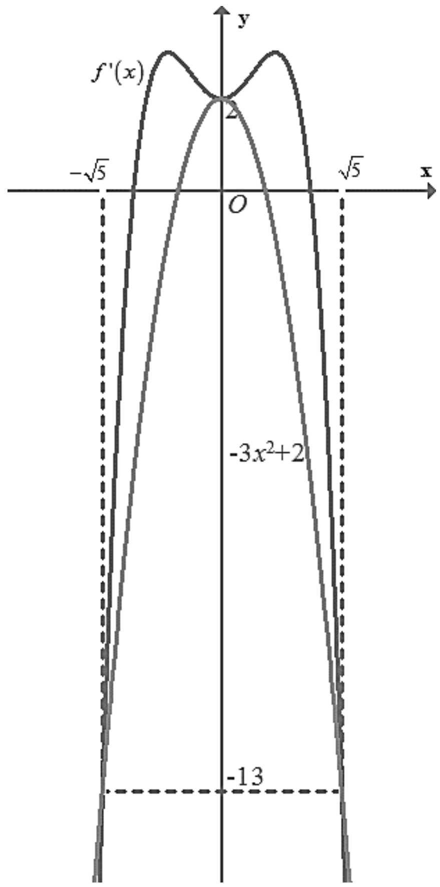
Chọn D

Ta có $g\left(x\right) \leq 0 \Leftrightarrow 2f\left(x\right) + 2x^3 - 4x \leq 3m + 6\sqrt{5}$.

Đặt $h\left(x\right) = 2f\left(x\right) + 2x^3 - 4x$ thì bất phương trình $g\left(x\right) \leq 0 \Leftrightarrow h\left(x\right) \leq 3m + 6\sqrt{5}$

$h'\left(x\right) = 2f'\left(x\right) + 2.3x^2 - 4 = 2\left(f'\left(x\right) - \left(-3x^2 + 2\right)\right)$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = -3x^2 + 2$ trên cùng hệ trục tọa độ với hàm số $y = f'\left(x\right)$.



Ta thấy $f'(x) \geq -3x^2 + 2 \ \forall x \in \left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right]$ nên $h'(x) \geq 0, \forall x \in \left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right]$.

Suy ra $h(x) \leq h\left(\sqrt{5}\right), \forall x \in \left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right]$ hay $\max\limits_{\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]} h(x) = h\left(\sqrt{5}\right) = 2f\left(\sqrt{5}\right) + 6\sqrt{5}$

Do đó $h(x) \leq 3m + 6\sqrt{5}, \forall x \in \left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right] \Leftrightarrow \max\limits_{\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]} h(x) \leq 3m + 6\sqrt{5}$

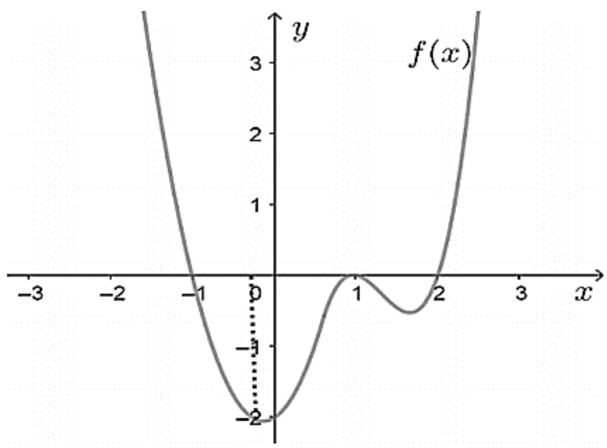
$\Leftrightarrow 2f\left(\sqrt{5}\right) + 6\sqrt{5} \leq 3m + 6\sqrt{5} \Leftrightarrow m \geq \dfrac{2}{3} f\left(\sqrt{5}\right)$

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = f\left(f(x) - 1\right)$. Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là

A. 6. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C



Ta có $g'(x) = f'(x).f'\left(f(x) - 1\right)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x).f'(f(x)-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'(f(x)-1)=0 \end{array}\right.$.

+) $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a_1\left(a_1\in(-1;0)\right) \\ x=1 \\ x=a_2\left(a_2\in(1;2)\right) \end{array}\right.$

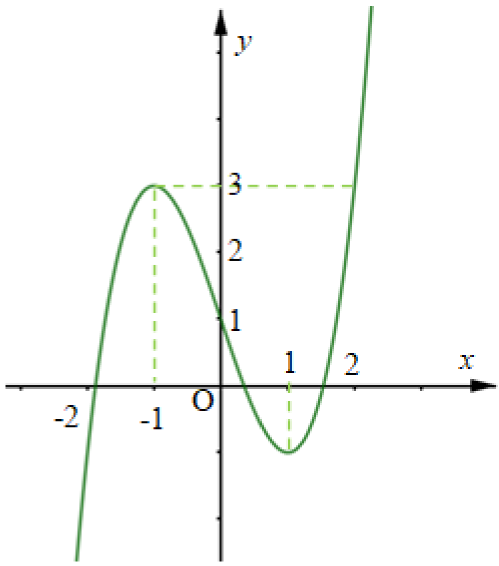
+) $f'(f(x)-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)-1=a_1 \\ f(x)-1=1 \\ f(x)-1=a_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x)=a_1+1\in(0;1) & (1) \\ f(x)=2 & (2) \\ f(x)=a_2+1\in(2;3) & (3) \end{array}\right.$

Từ đồ thị suy ra

- phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $b_1\in(-2;-1);b_2\in(2;3)$
- phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $c_1\in(-2;b_1);c_2\in(b_2;3)$
- phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt $d_1\in(-2;c_1);d_2\in(c_2;3)$

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{7\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(f(\cos x))=0$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(\cos x)=t$ ta được phương trình $f(t)=0$.

Quan sát đồ thị $y=f(x)$ ta suy ra $f(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=t_1\in\in(-2;-1) \\ t=t_2\in(0;1) \\ \mathrm{t}=\mathrm{t}_3\in(1;2) \end{array}\right.$.

* Với $t=t_1$ ta có $f(\cos x)=t_1$. Xét tương giao giữa hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=t_1\in(-2;-1)\Rightarrow f(\cos x)=t_1 \Leftrightarrow \cos x=x_1<-1$ nên phương trình vô nghiệm.

* Với $t=t_2$ ta có $f(\cos x)=t_2$. Xét tương giao giữa hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=t_2\in(0;1)\Rightarrow f(\cos x)=t_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=x_2<-1\\ \cos x=x_3\in(0;1)\\ \cos x=x_4\in(1;2)\end{array}\right.$.

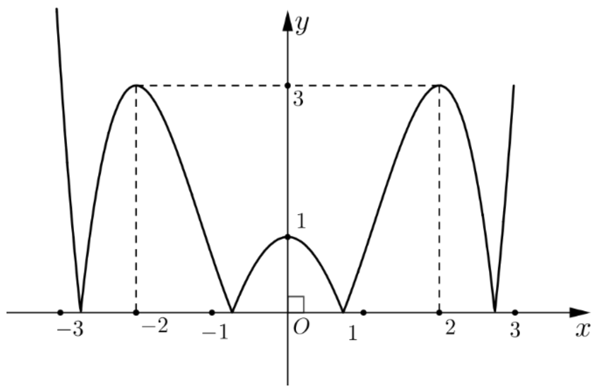
Chỉ có $\cos x=x_3$ thỏa mãn. Khi đó tồn tại 3 giá trị $x\in\left[0;\frac{7\pi}{2}\right]$ tương ứng để $\cos x=x_3$.

* Với $t=t_3$ tương tự ta có $\left[\begin{array}{l}\cos x=x_5<-1\\ \cos x=x_6\in(-1;0)\\ \cos x=x_7>1\end{array}\right.$.

Chỉ có $\cos x=x_6$ thỏa mãn. Khi đó tồn tại 2 giá trị $x\in\left[0;\frac{7\pi}{2}\right]$ tương ứng để $\cos x=x_6$.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{7\pi}{2}\right]$.

Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị nhưu hình vẽ bên. Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[2017\pi;2020\pi]$ của phương trình $3f(2\cos x)=8$.

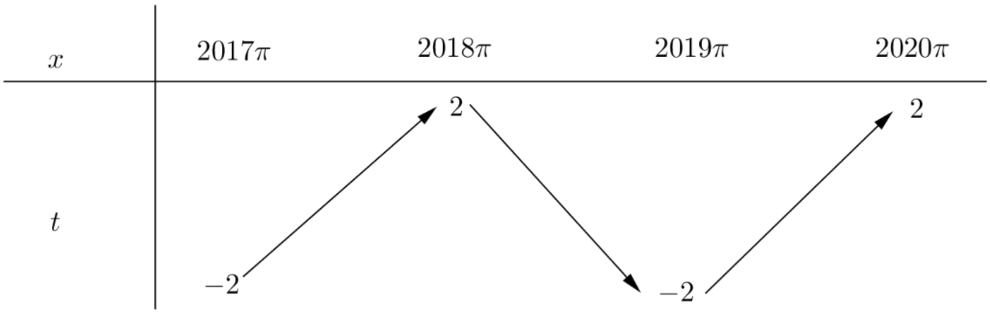


A. 8. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

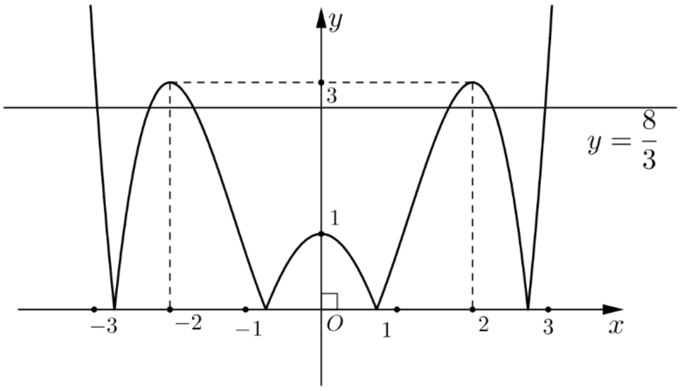
Chọn D

Đặt $t=2\cos x$, ta có bảng biến thiên của t như sau



Khi đó $3f(2\cos x)=8 \Leftrightarrow f(t)=\frac{8}{3}$.

Vẽ thêm đường thẳng $y=\frac{8}{3}$ trên đồ thị $y=f(x)$ đã cho.



Xét trên đoạn $[-2;2]$, đường thẳng $y=\frac{8}{3}$ cắt đồ thị hàm số $f(t)$ tại hai điểm $t_1 \in (-2;-1)$ và $t_2 \in (1;2)$.

Từ bảng biến thiên của t, ứng với giá tị t_1, ta tìm được 3 nghiệm x thỏa $2\cos x = t_1$, tươngtự, ta cũng tìm được 3 nghiệm x thỏa $2\cos x = t_2$.

Vậy phương trình $3f(2\cos x)=8$ có 6 nghiệm x thuộc đoạn $[2017\pi;2020\pi]$

CHƯƠN I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

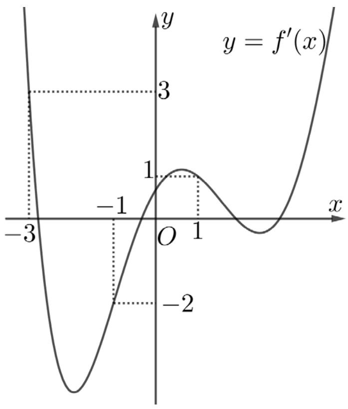
BÀI 6. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ

MỨC ĐỘ VD – VDC

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 8. BIỆN LUẬN TƯƠNG GIAO HÀM HỢP, HÀM ẨN CHỨA THAM SỐ

Câu 1: Cho hàm số $f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình sau.



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $2f\left(\sin x-2\right)-\dfrac{2\sin^3 x}{3}+\sin x>m+\dfrac{5\cos 2x}{4}$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m\le 2f\left(-3\right)+\dfrac{11}{12}$. **B.** $m<2f\left(-1\right)+\dfrac{19}{12}$.

C. $m\le 2f\left(-1\right)+\dfrac{19}{12}$. **D.** $m<2f\left(-3\right)+\dfrac{11}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$2f\left(\sin x-2\right)-\frac{2\sin^3 x}{3}+\sin x>m+\frac{5\cos 2x}{4}$$

$$\Leftrightarrow m<2f\left(\sin x-2\right)-\frac{2\sin^3 x}{3}+\sin x-\frac{5\left(1-2\sin^2 x\right)}{4}$$

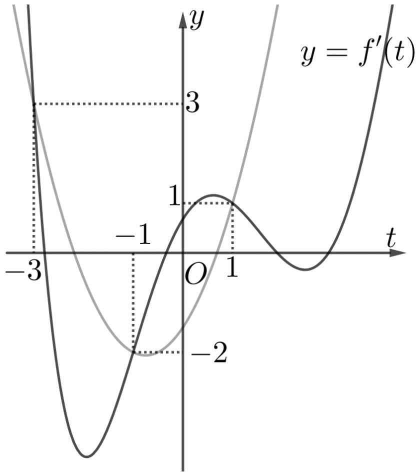
Đặt $t=\sin x-2$ (với $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $t\in\left(-3;-1\right)$, khi đó bất phương trình được viết lại thành:

$$m<2f\left(t\right)-\frac{2\left(t+2\right)^3}{3}+\left(t+2\right)-\frac{5\left[1-2\left(t+2\right)^2\right]}{4}.$$

hay $m < 2f(t) - \frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 3t + \frac{65}{12}$ $(*)$.

Xét hàm số $g(t) = 2f(t) - \frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 3t + \frac{65}{12}$ trên đoạn $[-3;-1]$.

Ta có $g'(t) = 2f'(t) - 2t^2 - 3t + 3$. Do đó $g'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}$.



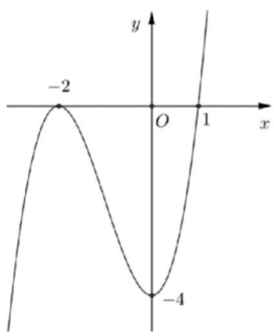
Dựa vào sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và parabol $y = t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}$ trên đoạn $[-3;-1]$ thì $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t \in \{-3;-1\}$.

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(t)$ trên đoạn $[-3;-1]$ như sau:

t	-3		-1
$g'(t)$	0	$-$	0
$g(t)$	$g(-3)$	$\searrow$	$g(-1)$

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với mọi $t \in (-3;-1)$. Điều đó tương đương với $m \le g(-1) = 2f(-1) + \frac{19}{12}$ dựa vào tính liên tục của hàm số $g(t)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới đây



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-5;5)$ để phương trình $f^2(x) - (m+4)|f(x)| + 2m + 4 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

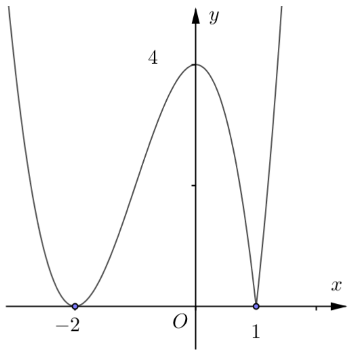
Chọn C

Ta có: $f^2(x)-(m+4)|f(x)|+2m+4=0 \Leftrightarrow |f(x)|^2-m|f(x)|-4|f(x)|+2m+4=0$

$\Leftrightarrow (|f(x)|-2)^2-m(|f(x)|-2)=0 \Leftrightarrow (|f(x)|-2)(|f(x)|-2-m)=0$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}|f(x)|-2=0\\|f(x)|-2-m=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}|f(x)|=2\quad(1)\\|f(x)|=m+2\ (2)\end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ta có đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ như sau:



Dựa vào đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ suy ra phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

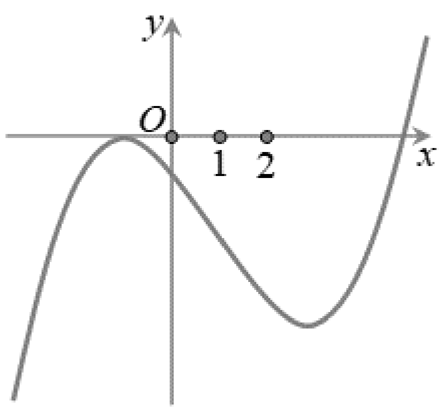
Suy ra phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt (2) có 2 nghiệm phân biệt khác các nghiệm của phương trình (1).

Ta có phương trình (2) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y=|f(x)|$ và $y=m+2$. Số nghiệm phương trình (2) là số giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ và $y=m+2$. Dựa vào hình vẽ đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ ta được phương trình $|f(x)|=m+2$ có 2 nghiệm phân biệt khác các nghiệm của phương trình $|f(x)|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m+2=0\\m+2>4\\m+2\neq 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-2\\m>2\end{array}\right.$

Do $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in(-5;5)\Rightarrow m\in\{-2;3;4\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên $m\in(-5;5)$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

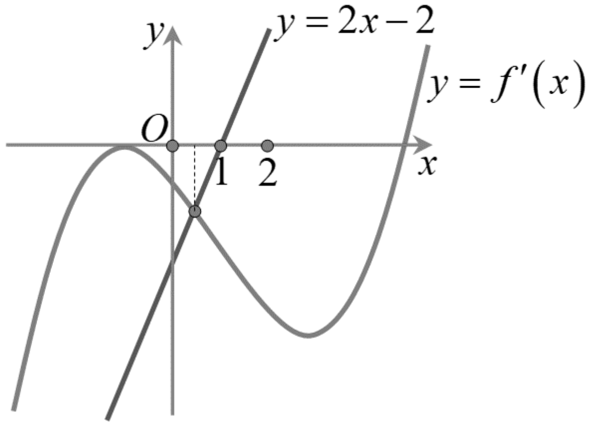
Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x)>x^2-2x+m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x\in(1;2)$ khi và chỉ khi



A. $m\le f(2)-2$. **B.** $m\le f(1)+1$. **C.** $m\le f(1)-1$. **D.** $m\le f(2)$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $f(x) > x^2 - 2x + m\ \left(\forall x \in (1;2)\right) \Leftrightarrow f(x) - x^2 + 2x > m\ \left(\forall x \in (1;2)\right)\ (*)$.

Gọi $g(x) = f(x) - (x^2 - 2x)$

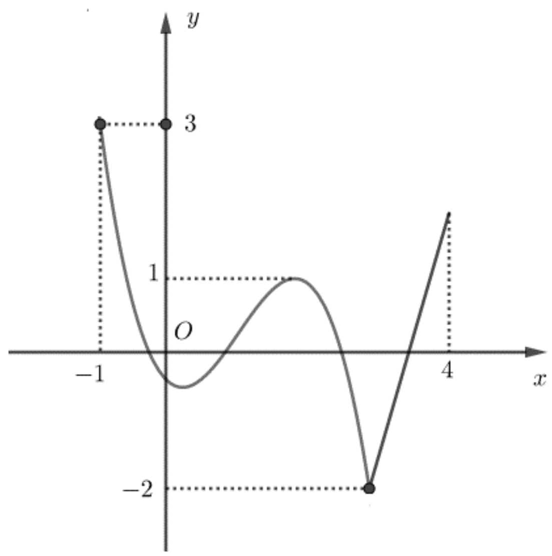
$\Rightarrow\ g'(x) = f'(x) - (2x - 2)$

Theo đồ thị ta thấy $f'(x) < (2x - 2)\ \left(\forall x \in [1;2]\right) \Rightarrow g'(x) < 0\ \left(\forall x \in [1;2]\right)$.

Vậy hàm số $y = g(x)$ liên tục và nghịch biến trên $[1;2]$

Do đó $(*) \Leftrightarrow\ m \le \min\limits_{[1;2]} g(x) = g(2) = f(2)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10;10]$ để bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1;4]$.

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Để bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ có nghiệm ta suy ra điều kiện $m > 0$.

$$|f(x) + m| < 2m \Leftrightarrow -2m < f(x) + m < 2m\ \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -3m \\ f(x) < m \end{cases}.$$

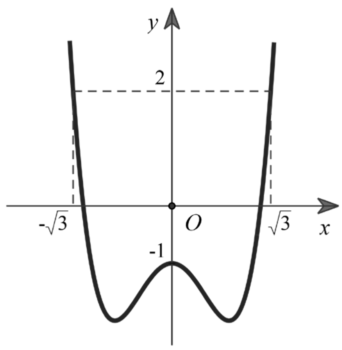
Bất phương trình $|f(x)+m|<2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1;4]$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>-3m \\ f(x)<m \end{cases}$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1;4] \Leftrightarrow \begin{cases} -3m<\min\limits_{[-1;4]} f(x) \\ m>\max\limits_{[-1;4]} f(x) \end{cases}$.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta suy ra $\min\limits_{[-1;4]} f(x)=-2$; $\max\limits_{[-1;4]} f(x)=3$.

$\Rightarrow \begin{cases} -3m<\min\limits_{[-1;4]} f(x) \\ m>\max\limits_{[-1;4]} f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m<-2 \\ m>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>\dfrac{2}{3} \\ m>3 \end{cases} \Leftrightarrow m>3$ (thỏa mãn điều kiện $m>0$)

Vậy trên đoạn $[-10;10]$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Cho bất phương trình $3f(x)\ge x^3-3x+m$ (m là tham số thực). Điều kiện cần và đủ để bất phương trình $3f(x)\ge x^3-3x+m$ đúng với mọi $x\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ là



A. $m\ge 3f(1)$. **B.** $m\ge 3f\left(-\sqrt{3}\right)$. **C.** $m\le 3f(0)$. **D.** $m\le 3f\left(\sqrt{3}\right)$.

Lời giải

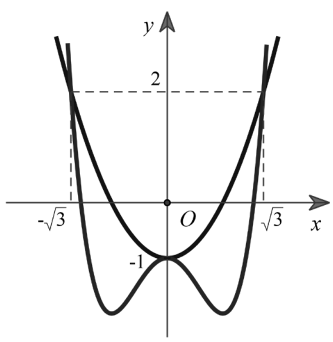
Chọn D

Ta có $3f(x)\ge x^3-3x+m \Leftrightarrow 3f(x)-x^3+3x\ge m$

Đặt $g(x)=3f(x)-x^3+3x$. Tính $g'(x)=3f'(x)-3x^2+3$

Có $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x^2-1$

Nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và parabol $y=x^2-1$



Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $f'(x)=x^2-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{3} \\ x=0 \\ x=\sqrt{3} \end{array}\right.$

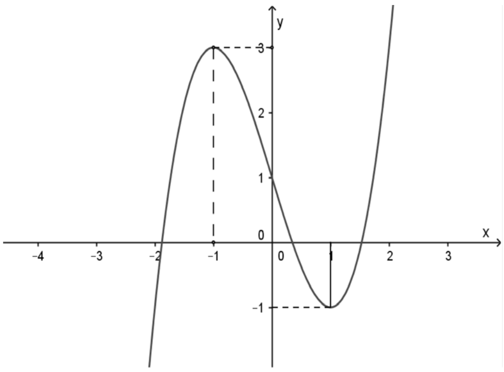
BBT

x	$-\sqrt{3}$		-1		$\sqrt{3}$
$g'(x)$	0	$-$	0	$-$	0
$g(x)$	$g(-\sqrt{3})$	$\searrow$			$g(\sqrt{3})$

Để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ thì $m\le \min\limits_{\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]} g(x)=g\left(\sqrt{3}\right)=3f\left(\sqrt{3}\right)$

.

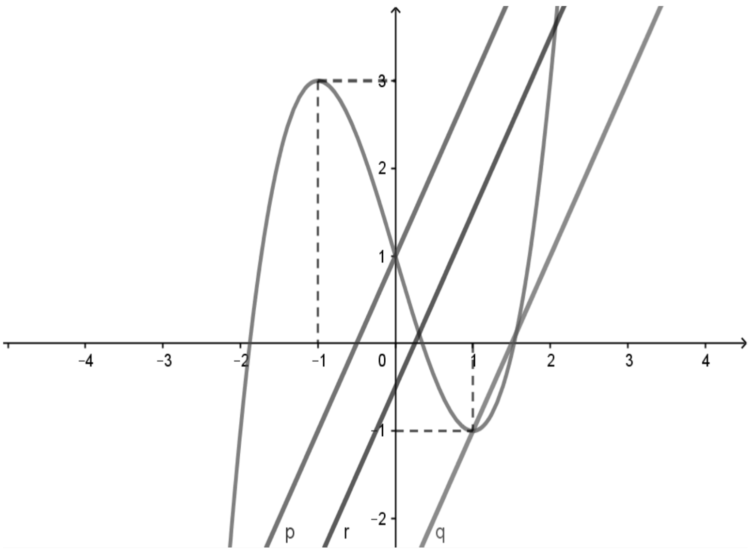
Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x)-m+2=2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



A. 4. **B.** -1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D



Đặt $t=\sin x$, với $x\in(0;\pi)\Rightarrow t\in(0;1]$.

Ta được phương trình: $f(t)-2t=m-2 \Leftrightarrow f(t)=2t+m-2$ (1)

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$ và đường thẳng $y = 2t + m - 2 \ (r)$.

Gọi $(p): y = 2x + 1$ song song với đường thẳng $(\Delta): y = 2t$ và đi qua điểm $A(0;1)$.

Gọi $q: y = 2x - 3$ song song với đường thẳng $(\Delta): y = 2t$ và đi qua điểm $B(1;-1)$.

Để phương trình $f(\sin x) - m + 2 = 2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ thì phương trình (1) phải có nghiệm $t \in (0;1]$, suy ra đường thẳng r nằm trong miền nằm giữa hai đường thẳng q và p (có thể trùng lên q và bỏ p)

$\Rightarrow -3 \le m - 2 < 1 \Leftrightarrow -1 \le m < 3 \Rightarrow m \in \{-1;0;1;2\} \Rightarrow S = \{-1;0;1;2\}$.

Do đó tổng các phần tử là: $-1 + 0 + 1 + 2 = 2$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = x^3 + x + 2$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = -x^3 - x + 2$ có nghiệm $x \in [-1;2]$?

A. 1750. **B.** 1748. **C.** 1747. **D.** 1746.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t + 2$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = f(-x)$

$\Leftrightarrow -x = \sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m} \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) + x^3 + m = 0 \quad (1)$

Xét $h(x) = f^3(x) + f(x) + x^3 + m$ trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có $h'(x) = 3f'(x)\cdot f^2(x) + f'(x) + 3x^2 = f'(x)\left[3f^2(x) + 1\right] + 3x^2$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in [-1;2] \Rightarrow h'(x) > 0, \forall x \in [-1;2]$.

Hàm số $h(x)$ đồng biến trên $[-1;2]$ nên $\min\limits_{[-1;2]} h(x) = h(-1) = m - 1$, $\max\limits_{[-1;2]} h(x) = h(2) = m + 1748$.

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\min_{[-1;2]} h(x) \cdot \max_{[-1;2]} h(x) \le 0 \Leftrightarrow h(-1)\cdot h(2)$$
$$\Leftrightarrow (m-1)(1748+m) \le 0$$
$$\Leftrightarrow -1748 \le m \le 1.$$

Do m nguyên nên tập các giá trị m thỏa mãn là $S = \{-1748; -1747; \ldots; 0; 1\}$.

Vậy có tất cả 1750 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[2;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x + 2\sqrt{x^2 - 2x} = m.f(x)$ có nghiệm thuộc đoạn $[2;4]$?

x	2		3		$\frac{7}{2}$		4
$f(x)$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	$\sqrt{11}$	$\searrow$	2

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\underset{[2;4]}{Min}\, f(x) = f(4) = 2$ và $\underset{[2;4]}{Max}\, f(x) = f(2) = 4$

Hàm số $g(x) = x + 2\sqrt{x^2 - 2x}$ liên tục và đồng biến trên $[2;4]$

Suy ra $\underset{[2;4]}{Min}\, g(x) = g(2) = 2$ và $\underset{[2;4]}{Max}\, g(x) = g(4) = 4 + 4\sqrt{2}$

Ta có $x + 2\sqrt{x^2 - 2x} = m.f(x) \Leftrightarrow \dfrac{x + 2\sqrt{x^2 - 2x}}{f(x)} = m \Leftrightarrow \dfrac{g(x)}{f(x)} = m$

Xét hàm số $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ liên tục trên $[2;4]$

Vì $g(x)$ nhỏ nhất và $f(x)$ lớn nhất đồng thời xảy ra tại $x = 2$ nên

$$\underset{[2;4]}{Min}\, h(x) = \frac{\underset{[2;4]}{Min}\, g(x)}{\underset{[2;4]}{Max}\, f(x)} = \frac{g(2)}{f(2)} = h(2) = \frac{1}{2}$$

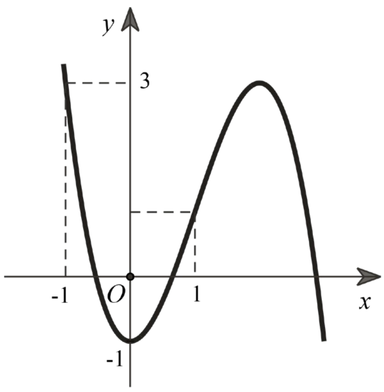
Vì $g(x)$ lớn nhất và $f(x)$ nhỏ nhất đồng thời xảy ra tại $x = 4$ nên

$$\underset{[2;4]}{Max}\, h(x) = \frac{\underset{[2;4]}{Max}\, g(x)}{\underset{[2;4]}{Min}\, f(x)} = \frac{g(4)}{f(4)} = h(4) = 2 + 2\sqrt{2}$$

Từ đó suy ra phương trình $h(x) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{1}{2} \le m \le 2 + 2\sqrt{2}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (m - 2019) f(\cos x) + m - 2020 = 0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;2\pi]$ là



A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

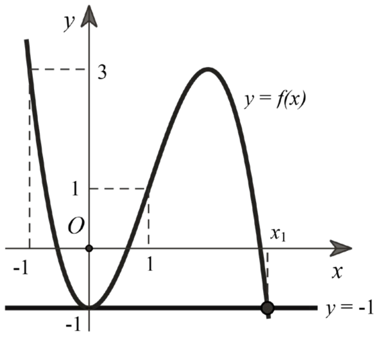
Chọn C

Ta có $f^2(\cos x) + (m - 2019) f(\cos x) + m - 2020 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\cos x) = -1 \\ f(\cos x) = 2020 - m \end{array}\right.$ (1)

* Với $f(\cos x) = -1$

Dựa vào đồ thị ta có $f(\cos x) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = x_1\ \ (x_1 > 1)(VN)\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Vì $x \in [0;2\pi] \Rightarrow x \in \left\{\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right\}$



* Với $f(\cos x) = 2020 - m$

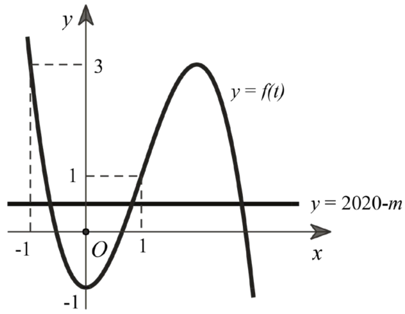
Đặt $t = \cos x\ (t \in [-1;1])$

Với $t \in (-1;1]$ thì phương trình $t = \cos x$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[0;2\pi]$.

Với $t = -1$ thì phương trình $t = \cos x$ có một nghiệm thuộc $[0;2\pi]$

Phương trình trở thành $f(t) = 2020 - m$

Để phương trình (1) có tất cả 6 nghiệm phân biệt thì phương trình $f(\cos x) = 2020 - m$ có 4 nghiệm phân biệt, hay phương trình $f(t) = 2020 - m$ có hai nghiệm $t \in (-1;1]$

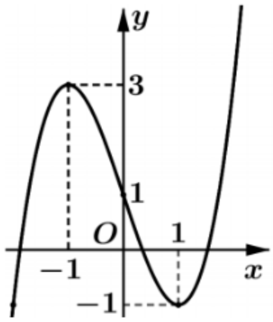


Dựa vào đồ thị ta có để phương trình $f(t) = 2020 - m$ có hai nghiệm $t \in (-1;1]$ thì $-1 < 2020 - m \le 1 \Leftrightarrow 2019 \le m < 2021$

Vì m nguyên nên $m \in \{2019;2020\}$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết $f(-1) = 1; f\left(-\dfrac{1}{e}\right) = 2$. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $f(x) < \ln(-x) + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-1;\dfrac{-1}{e}\right)$.



A. $m \ge 2$. **B.** $m \ge 3$. **C.** $m > 2$. **D.** $m > 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) < \ln(-x) + m \Leftrightarrow m > f(x) - \ln(-x)$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - \ln(-x)$ trên $\left(-1; -\frac{1}{e}\right)$.

Có $g'(x) = f'(x) - \frac{1}{x}$.

Trên $\left(-1; -\frac{1}{e}\right)$ có $f'(x) > 0$ và $\frac{1}{x} < 0$ nên $g'(x) > 0, \forall x \in \left(-1; -\frac{1}{e}\right)$

$\Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(-1; -\frac{1}{e}\right)$.

Vậy nên $f(x) < \ln(-x) + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-1; -\frac{1}{e}\right)$

$\Leftrightarrow m \ge g(x), \forall x \in \left(-1; -\frac{1}{e}\right)$

$\Leftrightarrow m \ge g\left(-\frac{1}{e}\right)$

$\Leftrightarrow m \ge 3$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-1) = 5, f(-3) = 0$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Số giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $3f(2-x) + \sqrt{x^2+4} - x = m$ có nghiệm trong khoảng $(3;5)$ là

A. 16. **B.** 17. **C.** 0. **D.** 15.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x) = 3f(2-x) + \sqrt{x^2+4} - x$ với $x \in (3;5)$.

Ta có: $g'(x) = -3f'(2-x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - 1$.

Với $x \in (3;5)$:

Ta có: $2-x\in(-3;-1)$ nên $f'(2-x)>0$ suy ra $-3f'(2-x)<0$.

Ta có: $\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}<\frac{x}{x}=1$

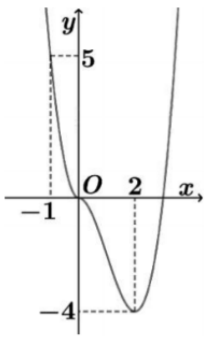
Suy ra $g'(x)=-3f'(2-x)+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}-1<0,\forall x\in(3;5)$ nên hàm số nghịch biến trên $(3;5)$.

Suy ra $\min\limits_{(3;5)} g(x)=g(5)=3f(-3)+\sqrt{5^2+4}-5=\sqrt{29}-5$;

$\max\limits_{(3;5)} g(x)=g(3)=3f(-1)+\sqrt{3^2+4}-3=12+\sqrt{13}$.

Để phương trình $3f(2-x)+\sqrt{x^2+4}-x=m$ có nghiệm thì $\sqrt{29}-5\le m\le 12+\sqrt{13}$ mà m nguyên dương nên $m\in\{1,2,...,15\}$ tức là có 15 giá trị

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-1)=1$, $f\left(-\frac{1}{e}\right)=2$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Bất phương trình $f(x)<\ln(-x)+x^2+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-1;-\frac{1}{e}\right)$ khi và chỉ khi



A. $m>0$. **B.** $m>3-\frac{1}{e^2}$. **C.** $m\ge 3-\frac{1}{e^2}$. **D.** $m\ge 0$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $-x>0\Leftrightarrow x<0$

Bất phương trình đã cho tương đương với $f(x)-\ln(-x)-x^2<m$ (*).

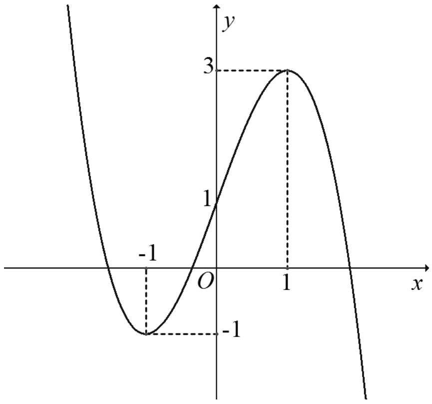
Xét hàm số $g(x)=f(x)-\ln(-x)-x^2$ trên $\left(-1;-\frac{1}{e}\right)$.

Ta có $g'(x)=f'(x)-\frac{1}{x}-2x$. Với $x\in\left(-1;-\frac{1}{e}\right)$ thì $f'(x)>0;-\frac{1}{x}-2x>0$ nên $g'(x)>0$.

Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(-1;-\frac{1}{e}\right)$.

Suy ra (*) nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-1;-\frac{1}{e}\right)$ khi và chỉ khi $m\ge g\left(-\frac{1}{e}\right)=f\left(-\frac{1}{e}\right)-\ln\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}=3-\frac{1}{e^2}$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)\right)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải.

Chọn B

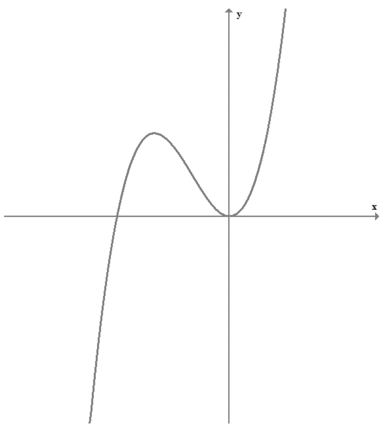
Khi $x\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ thì $\cos x\in\left[-1;0\right)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta thấy khi $\cos x\in\left[-1;0\right)$ thì $f\left(\cos x\right)\in\left[-1;1\right)$; khi đó $f\left(f\left(\cos x\right)\right)\in\left[-1;3\right)$.

Do đó phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)\right)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi $-1\le m<3$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 14: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(2\left|\sin x\right|\right)=f\left(m^2+6m+10\right)$ có nghiệm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

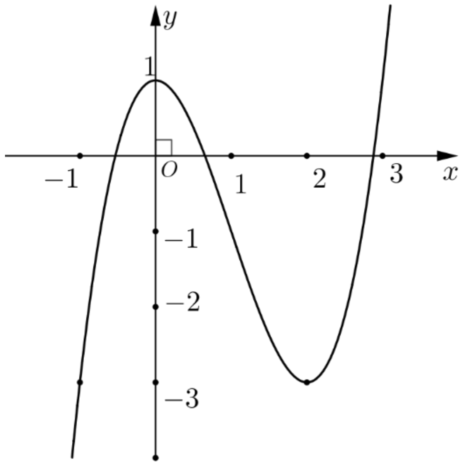
Chọn B

Từ đồ thị suy ra hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$.

Do $2\left|\sin x\right|\ge 0; m^2+6m+10>0$ nên $f\left(2\left|\sin x\right|\right)=f\left(m^2+6m+10\right)\Leftrightarrow 2\left|\sin x\right|=m^2+6m+10$.

Mà $0 \le 2|\sin x| \le 2$ nên yêu cầu bài toán tương đương $0 \le m^2 + 6m + 10 \le 2 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 8 \le 0 \Leftrightarrow -4 \le m \le -2$.
Vậy có 3 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 15: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x^3 - 3x^2 + m) + 3 = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1;2]$.



A. 7. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Từ hình vẽ, ta suy ra được hình vẽ là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

$$f(x^3 - 3x^2 + m) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x^3 - 3x^2 + m) = -3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 - 3x^2 + m = -1 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 - 3x^2 + 1 = -m \\ x^3 - 3x^2 + 1 = -m + 3 \end{array}\right.$$

Để phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $[-1;2]$ thì $\left[\begin{array}{l} -3 \le -m \le 1 \\ -3 \le -m + 3 \le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le m \le 3 \\ 2 \le m \le 6 \end{array}\right.$.

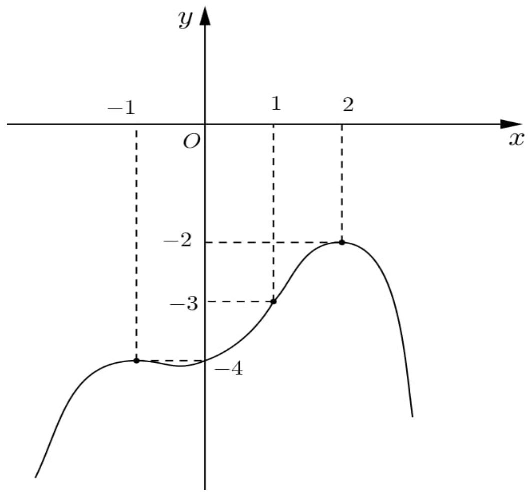
$\Rightarrow m \in [-1;6]$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên có 8 giá trị m để phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$16.8^{f(x)} \le (-m^2 + 5m).4^{f(x)} - ((4 - f^2(x)).16^{f(x)}$

nghiệm đúng với mọi số thực x là



A. 3. **B.** 5.
C. 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

$$16.8^{f(x)} \le (-m^2 + 5m).4^{f(x)} - ((4 - f^2(x)).16^{f(x)} \Leftrightarrow -m^2 + 5m \ge 16.2^{f(x)} + (4 - f^2(x)).4^{f(x)}$$

Vì. nên ta có $16.2^{f(x)} + (4 - f^2(x)).4^{f(x)} \le 16.2^{-2} + 0 = 4\ \forall x \in \mathbb{R}$

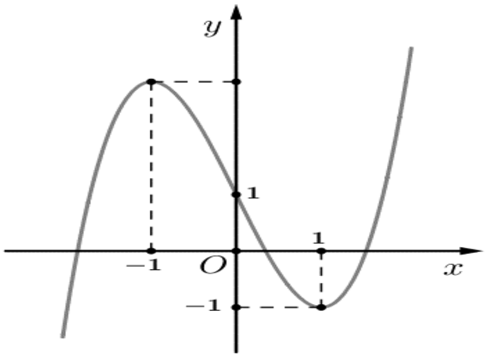
$\Rightarrow -m^2 + 5m \ge 4 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le m \le 4$

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $m + e^x < f(x)$ có nghiệm với mọi $x \in (-1;1)$ khi và chỉ khi.

A. $m \le \min\left\{f(1) - e; f(-1) - \frac{1}{e}\right\}$. **B.** $m < f(0) - 1$.

C. $m < \min\left\{f(1) - e; f(-1) - \frac{1}{e}\right\}$. **D.** $m \le f(0) - 1$.

Lời giải



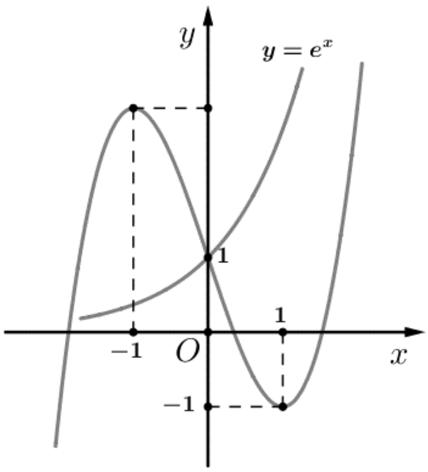
Chọn A

Ta có: $m + e^x < f(x) \Leftrightarrow m < f(x) - e^x$

Xét hàm số $g(x) = f(x) - e^x$ với $x \in (-1;1)$

$g'(x) = f'(x) - e^x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - e^x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = e^x$

Dễ thấy với $x \in (-1;1); f'(0) = 1; e^0 = 1 \Rightarrow x = 0$ là nghiệm của phương trình $f'(x) = e^x$ hơn nữa là nghiệm duy nhất (Minh họa bằng hình vẽ)



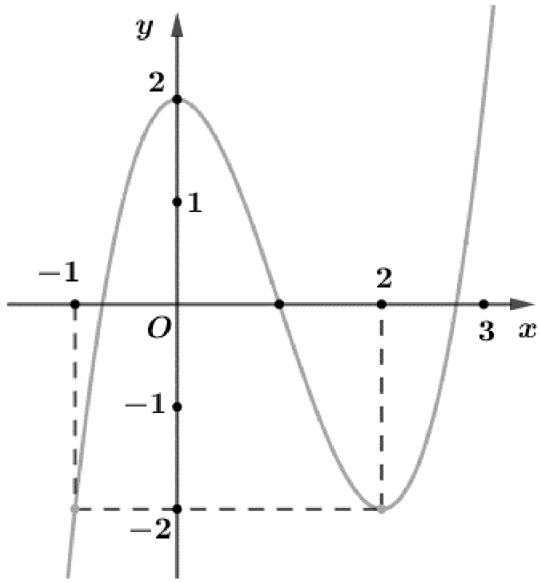
Dựa vào vị trí đồ thị hình vẽ trên ta có bảng biến thiên

x	-1		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$g(1)$

Qua bảng biến thiên và chỉ xét trong khoảng $(-1;1)$

$m < g(x) \Leftrightarrow m \le \min\{g(-1); g(1)\} \Leftrightarrow m \le \min\left\{f(1)-e; f(-1)-\frac{1}{e}\right\}$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn. Biết $f(0)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có hình vẽ bên dưới.



Tập nghiệm của phương trình $f(|2\sin x - 1| - 1) = m$ (với m là tham số) trên đoạn $[0;3\pi]$ có tất cả bao nhiêu phần tử?

A. 8. **B.** 20. **C.** 12. **D.** 16.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị đã cho là đồ thị hàm số bậc ba có hai điểm cực trị $x=0$ và $x=2$ nên có dạng $f'(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Lần lượt thay thế các dữ kiện từ hình vẽ, ta được $\begin{cases} d=2 \\ c=0 \\ 3\cdot a\cdot 2^2 + 2\cdot b\cdot 2 = 0 \\ -a^3 + b + d = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases}$.

Suy ra $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + 2x + C$.

Mà $f(0)=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + 2x$.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1-\sqrt{3} \\ x=1+\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó ta có bảng biến thiên của $f(x-1)$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		2		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x-1)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Vì $-1 \le \sin x \le 1, \forall x \in [0;3\pi]$ nên $0 \le |2\sin x - 1| \le 3$.

Đặt $t = |2\sin x - 1|$, $t \in [0;3]$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra phương trình $f(t-1) = m$ có tối đa 2 nghiệm $t = h$, $t = k$.

Do đó $\left[\begin{array}{l} 2\sin x - 1 = \pm h \\ 2\sin x - 1 = \pm k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{\pm h + 1}{2} \\ \sin x = \dfrac{\pm k + 1}{2} \end{array}\right.$.

Trên $[0;3\pi]$, mỗi phương trình có nhiều nhất 4 nghiệm, do đó phương trình đã cho có nhiều nhất 16 nghiệm.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		3		18		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Bất phương trình $e^{\sqrt{x}} \ge m - f(x)$ có nghiệm $x \in [4;16]$ khi và chỉ khi:

A. $m < f(4) + e^2$. **B.** $m \le f(4) + e^2$. **C.** $m < f(16) + e^2$. **D.** $m \le f(16) + e^2$.

Lời giải

Chọn B

Từ BBT suy ra $f'(x) > 0, \forall x \in [4;16]$. Ta có: $e^{\sqrt{x}} \ge m - f(x) \Leftrightarrow m \le e^{\sqrt{x}} + f(x)$ $(*)$.

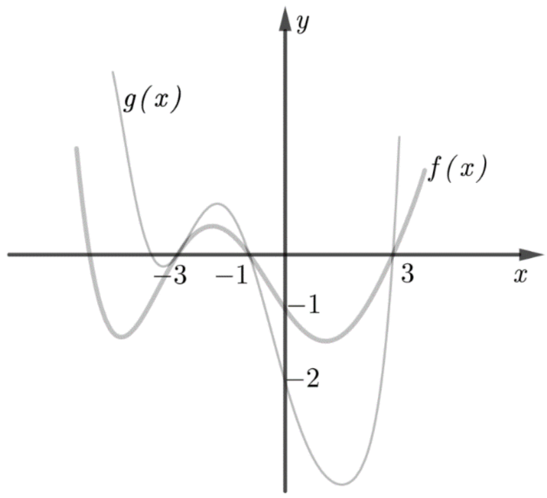
Đặt $g(x) = e^{\sqrt{x}} + f(x)$, $\forall x \in [4;16] \Rightarrow g'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} + f'(x) > 0, \forall x \in [4;16]$

Bảng biến thiên:

x	4		16
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$			$f(16)+e^4$
	$f(4)+e^2$	$\nearrow$	

(*) thỏa mãn khi $m \le \min\limits_{[4;16]} g(x) = f(4)+e^2$.

Câu 20: Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây đường đậm hơn là đồ thị hàm số $y=f(x)$. Biết rằng hai đồ thị tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ là -3 và cắt nhau tại hai điểm nữa có hoành độ lần lượt là -1 và 3. Tìm tập hợp tất các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f(x) \ge g(x)+m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-3;3]$.



A. $\left(-\infty;\dfrac{12-10\sqrt{3}}{9}\right]$. **B.** $\left[\dfrac{12-8\sqrt{3}}{9};+\infty\right)$. **C.** $\left[\dfrac{12-10\sqrt{3}}{9};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\dfrac{12-8\sqrt{3}}{9}\right]$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$.

Vì đồ thị hàm số $f(x)$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $g(x)$ tại điểm có hoành độ -3 và cắt nhau tại hai điểm nữa có hoành độ lần lượt là -1 và 3 suy ra $h(x)=f(x)-g(x)=a(x+3)^2(x+1)(x-3)$.

Nhận xét từ đồ thị khi $x \to \pm\infty$ thì phần đồ thị $f(x)$ nằm dưới $g(x)$ nên $a<0$.

Mặt khác ta có $h(0)=27a=-2-(-1)=-1 \Rightarrow a=\dfrac{-1}{27}$

Xét hàm $y=h(x)=\dfrac{-1}{27}(x+3)^2(x+1)(x-3)=\dfrac{-1}{27}\left(x^4+4x^3-6x^2-36x-27\right)$.

Ta có $y'=h'(x)=\dfrac{-1}{27}\left(4x^3+12x^2-12x-36\right)=\dfrac{-1}{27}(x+3)\left(4x^2-12\right)$.

Suy ra $y'=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x		-3		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		3	
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		
$h(x)$	$-\infty$ ↗	0	↘	$\frac{12-8\sqrt{3}}{9}$	↗	$\frac{12+8\sqrt{3})}{9}$	↘	0	↘ $-\infty$

Vậy tập hợp tất các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f(x) \geq g(x)+m \Leftrightarrow f(x)-g(x) \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-3;3]$ là $m \leq \frac{12-8\sqrt{3}}{9}$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)=x^5+3x^3-4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right)=x^3-m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$?

A. 18. **B.** 17. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right)=x^3-m$ (1)

Đặt $t=\sqrt[3]{f(x)+m}$. Ta có $\begin{cases} f(t)=x^3-m \\ f(x)=t^3-m \end{cases} \Rightarrow f(t)+t^3=f(x)+x^3$ (2)

Xét hàm số $g(u)=f(u)+u^3 \Rightarrow g'(u)=f'(u)+3u^2=5u^4+12u^2 \geq 0, \forall u$.

Khi đó (2) $\Leftrightarrow g(t)=g(x) \Leftrightarrow t=x \Leftrightarrow \sqrt[3]{f(x)+m}=x \Leftrightarrow x^3-f(x)=m \Leftrightarrow x^5+2x^3=3m$

Xét hàm số $h(x)=x^5+2x^3 \Rightarrow h'(x)=5x^4+6x^2 \geq 0, \forall x$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$:

x	$-\infty$		0		1		2
$h'(x)$		$+$	0	$+$		$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗			3	↗	48

Từ bảng biến thiên suy ra để (1) có nghiệm thuộc đoạn $[1;2] \Leftrightarrow 3 \leq 3m \leq 48 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 16$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1;2;3;...;16\}$ suy ra có 16 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-4	↗	2	↗	4	↘	2	↗	$+\infty$

Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x)+(3-m)f(\cos x)+2m-10=0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Xét $f^2(\cos x)+(3-m)f(\cos x)+2m-10=0$. Ta có $\Delta=(m-7)^2$.

Do đó $\left[\begin{array}{ll} f(\cos x)=m-5 & (1) \\ f(\cos x)=2 & (2) \end{array}\right.$.

Với $f(\cos x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=a<-1 \\ \cos x=\frac{1}{2} \\ \cos x=1 \end{array}\right.$.

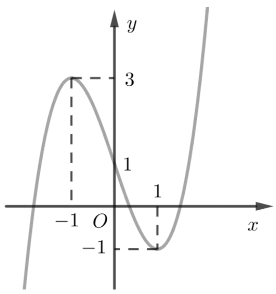
Trường hợp này được 3 nghiệm trong $\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$.

Để phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$ thì (1) có đúng 1 nghiệm trong $\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$ và không trùng với nghiệm của các phương trình $\cos x=\frac{1}{2};\cos x=1$

$\Leftrightarrow f(t)=m-5$ với $t=\cos x$ có đúng 1 nghiệm trong $\left[-1;\frac{1}{2}\right) \Rightarrow -4\le m-5<2 \Leftrightarrow 1\le m<7$.

Do m nguyên nên có 6 giá trị của m thỏa mãn.

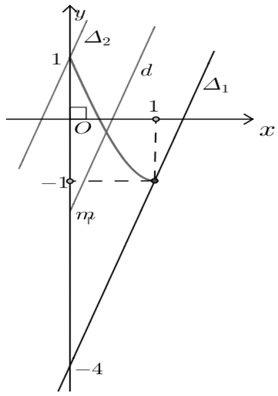
Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $y=f(\sin x)=3\sin x+m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



A. -5. **B.** -8. **C.** -6. **D.** -10.

Lời giải

Chọn D



Đặt $t=\sin x$, $x\in(0;\pi)\Leftrightarrow t\in(0;1]$.

Phương trình $f(\sin x)=3\sin x+m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=3t+m$ có nghiệm thuộc $(0;1]$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $d: y=3x+m$ có điểm chung với hoành độ $x\in(0;1]$.

$\Delta_1: y=3x-4$ là đường thẳng qua điểm $(1;-1)$ và $\Delta_2: y=3x+1$ là đường thẳng qua điểm $(0;1)$

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ trên $(0;1]$ là phần đường cong nằm giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

Vậy phương trình $f(t)=3t+m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(0;1]$ khi và chỉ khi d dao động trong miền giới hạn bởi Δ_1 và Δ_2 (không trùng với Δ_2) khi và chỉ khi $-4\le m<1\Leftrightarrow m\in\{-4;-3;-2;-1;0\}$.

Vậy tổng các giá trị của S bằng -10.

Câu 24: Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên đoạn $[-2;9]$, biết $f(-1)=f(2)=f(9)=3$ và $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	-2		0		6		9
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	$\nearrow$	6	$\searrow$	-4	$\nearrow$	3

Tìm m để phương trình $f(x)=f(m)$ có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2;9]$.

A. $m\in(-2;9]\setminus((-1;2)\cup\{6\})$. **B.** $m\in[-2;9]\setminus((-1;2)\cup\{6\})$.

C. $m\in(-2;9]\setminus\{6\}$. **D.** $m\in[-2;9]\setminus\{-2;6\}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $f(x)=f(m)$ có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2;9]$ khi $-4<f(m)\le 3$.

Trên $(-2;0)$, hàm số $f(x)$ đồng biến và $f(-1)=3$ nên $-4<f(m)\le 3\Leftrightarrow -2<m\le -1$.

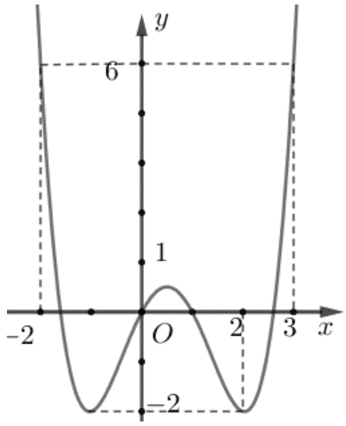
Trên $(0;6)$, hàm số $f(x)$ nghịch biến và $f(2)=3$ nên $-4<f(m)\le 3\Leftrightarrow 6>m\ge 2$.

Trên $(6;9)$, hàm số $f(x)$ đồng biến và $f(9)=3$ nên $-4<f(m)\le 3\Leftrightarrow 6<m\le 9$.

Vậy điều kiện của m là: $m\in(-2;-1]\cup[2;6)\cup(6;9]\Leftrightarrow m\in(-2;9]\setminus((-1;2)\cup\{6\})$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x^3-3x)=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 7.



Lời giải

Chọn B

Đặt $t=g(x)=x^3-3x,\ x\in[-1;2]$

$g'(x)=3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $[-1;2]$

x	-1		1		2
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

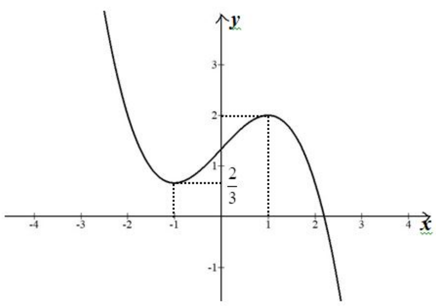
Suy ra với $t=-2$, có 1 giá trị của x thuộc đoạn $[-1;2]$.

$t\in(-2;2]$, có 2 giá trị của x thuộc đoạn $[-1;2]$.

Phương trình $f(x^3-3x)=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=m$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(-2;2]$. (1)

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ và m nguyên ta có hai giá trị của m thỏa mãn điều kiện (1) là: $m=0,\ m=-1$.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số giá trị nguyên dương của m để phương trình $f\left(x^2-4x+5\right)+1=m$ có nghiệm là

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x^2-4x+5$. Ta có $t=(x-2)^2+1\geq 1$.

Phương trình $f\left(x^2-4x+5\right)+1=m$ (1) trở thành phương trình $f(t)=m-1$ (2).

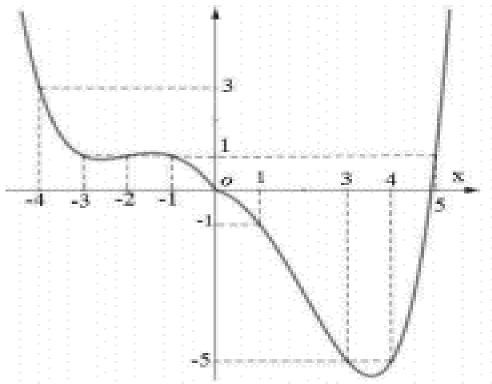
Sử dụng các nhận xét ở trên và đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ta có

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm thuộc $[1;+\infty)$

$\Leftrightarrow m-1\leq 2\Leftrightarrow m\leq 3$

Vậy tập hợp các giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán là $\{1;2;3\}$.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm



A. 13. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $6x-9x^2\geq 0\Leftrightarrow 0\leq x\leq\dfrac{2}{3}$

Đặt $t=3-4\sqrt{6x-9x^2}$; $0\leq x\leq\dfrac{2}{3}$

Ta có: $t'(x)=\dfrac{12(3x-1)}{\sqrt{6x-9x^2}}$; $0<x<\dfrac{2}{3}$; $t'(x)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$ (nhận).

$t(0)=3;t\left(\dfrac{1}{3}\right)=-1;t\left(\dfrac{2}{3}\right)=3.$

Nên $-1\leq t\leq 3$.

Mặt khác: $f(t)=\dfrac{m-3}{2}$, $t\in[-1;3]$ có nghiệm.

Từ đồ thị ta có $-5\leq\dfrac{m-3}{2}\leq 1\Leftrightarrow -7\leq m\leq 5$.

Do m nguyên nên có 13 giá trị m là -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Câu 28: hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Tìm m để phương trình $f^2(2x)-2f(2x)-m-1=0$ có nghiệm trên $(-\infty;1)$

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $[-2;+\infty)$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $[-1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f^2(2x)-2f(2x)-m-1=0 \Leftrightarrow f^2(2x)-2f(2x)-1=m\ (1)$.

Đặt $t=f(x)$, với $x\in(-\infty;1)$ thì $2x\in(-\infty;2)$, ki đó $t=f(2x)\in[0;+\infty)$.

Phương trình (1) trở thành: $t^2-2t-1=m(2)$.

(1) có nghiệm trên $(-\infty;1)$ tương ứng khi và chỉ khi (2) có nghiệm trên $[0;+\infty)$.

Xét $g(t)=t^2-2t-1, t\in[0;+\infty)$, có $g'(t)=2t-2, g'(t)=0 \Leftrightarrow t=1$.

Bảng biến thiên của $g(t)$:

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (2) có nghiệm $t\in[0;+\infty)$ khi và chỉ khi $m\geq -2$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)=x^2-4x+3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|)-(m-6)f(|x|)-m+5=0$ có 6 nghiệm thực phân biệt?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x)=x^2-4x+3$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	3	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=f(|x|)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(\|x\|)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Đặt $t = f\left(\left|x\right|\right) \geq -1 (*)$

Nhận xét:

+ với $t_0 < -1 \xrightarrow{(*)} x \in \varnothing$

+ với $t_0 = -1; t_0 > 3 \xrightarrow{(*)}$ 2 nghiệm

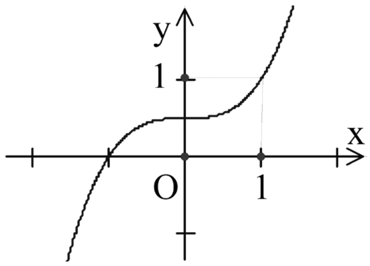
+ với $t_0 = 3 \xrightarrow{(*)}$ 3 nghiệm

+ với $t_0 \in (-1;3) \xrightarrow{(*)}$ 4 nghiệm

Phương trình trở thành $t^2 - (m-6)t - m + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = m-5 \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán suy ra $-1 < m-5 < 3 \Leftrightarrow 4 < m < 8 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{5;6;7\}$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập hợp các giá trị của $m\,(m \in \mathbb{R})$ sao cho

$(x-1)\left[m^3 f(2x-1) - mf(x) + f(x) - 1\right] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

Số phần tử của tập S là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2 **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị ta thấy $f(x)$=1. Đặt $g(x) = m^3 f(2x-1) - mf(x) + f(x) - 1$.

$(x-1)\left[m^3 f(2x-1) - mf(x) + f(x) - 1\right] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$

Từ giả thiết ta có điều kiện cần để có $(*)$ là

$g(1) = 0 \Leftrightarrow m^3 f(1) - mf(1) + f(1) - 1 = 0 \Leftrightarrow m^3 - m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm 1 \end{array}\right.$

Điều kiện đủ:

+)Với $m = 0$ ta có $(*) \Leftrightarrow g(x) = (x-1)\left[f(x) - 1\right] \geq 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó $m = 0$ thỏa mãn.

+)Với $m = 1$ ta có $(x-1)\left[f(2x-1) - 1\right] = \frac{1}{2}\left[(2x-1) - 1\right]\left[f(2x-1) - 1\right] \geq 0 \;\forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $m = 1$ thỏa mãn.

+) Với $m = -1$, $(*) \Leftrightarrow (x-1)\left[-f(2x-1) + 2f(x) - 1\right] \geq 0 \;\; (**)$.

Xét $x>1$ ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x-1)+1}{2f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a(2x-1)^3+b(2x-1)^2+c(2x-1)+d+1}{2(ax^3+bx^2+cx+d)}=4>0$

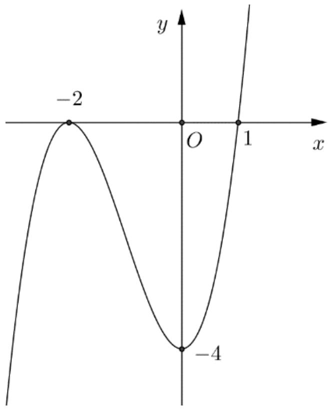
$\Rightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R},\alpha>1: f(2\alpha-1)+1>2f(\alpha)$ hay $2f(\alpha)-f(2\alpha-1)-1<0$

$\Rightarrow(\alpha-1)\left[2f(\alpha)-f(2\alpha-1)-1\right]<0$ (không thỏa mãn $(**)$).

Do đó $m=-1$ không thỏa mãn

Vậy S có 2 phần tử.

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên dưới



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(x)-(m+5)|f(x)|+4m+4=0$ có 7 nghiệm phân biệt?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

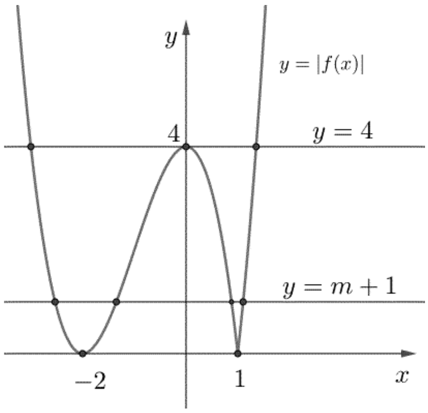
Phương trình tương đương với

$$f^2(x)-5|f(x)|+4-m(|f(x)|-4)=0$$

$$\Leftrightarrow(|f(x)|-4)(|f(x)|-1)-m(|f(x)|-4)=0$$

$$\Leftrightarrow(|f(x)|-4)(|f(x)|-1-m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|f(x)|=4\ \ (1)\\|f(x)|=m+1\ \ (2)\end{array}\right..$$

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta suy ra đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ như sau



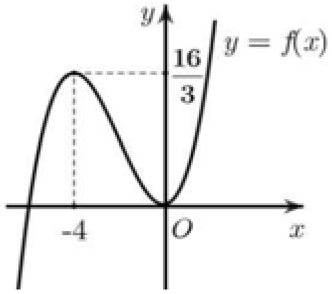
Dựa vào đồ thị hàm số $y=|f(x)|$, suy ra phương trình (1) luôn có 3 nghiệm phân biệt.

Vì vậy, yêu cầu bài toán tương đương với phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt khác 4.

Suy ra $0<m+1<4\Leftrightarrow-1<m<3\Rightarrow m=0,\ 1,\ 2.$

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa bài toán.

Câu 32: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|\right)=f\left(m^2+4m+4\right)$ có nghiệm.

A. 4. **B.** 5. **C.** Vô số. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\left|\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|\geq 0$, $\forall x$ và $m^2+4m+4=\left(m+2\right)^2\geq 0$, $\forall m$. Nhìn vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$ suy ra phương trình đã cho tương đương

$\left|\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|=m^2+4m+4 \quad (1)$

Đặt $P=\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}(*)$

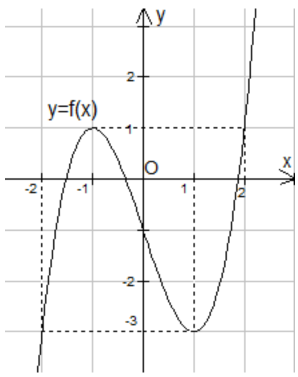
vì $2\cos x-\sin x+4>0$, $\forall x$

nên $(*)\Leftrightarrow\left(3-P\right)\sin x-\left(1+2P\right)\cos x=4P+1 \ (2)$

Phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow\left(4P+1\right)^2\leq\left(3-P\right)^2+\left(1+2P\right)^2\Leftrightarrow\dfrac{-9}{11}\leq P\leq 1\Rightarrow\left|P\right|\leq 1$

Suy ra phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow m^2+4m+4\leq 1\Leftrightarrow m\in\left[-3;-1\right]\Rightarrow$ Có ba giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình bên.



Phương trình $f(2\sin x)=m$ có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\pi;\pi\right]$ khi và chỉ khi

A. $m\in\left\{-3;1\right\}$.. **B.** $m\in\left(-3;1\right)$..

C. $m \in [-3;1)$.. **D.** $m \in (-3;1]$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 2\sin x$ (*), $x \in [-\pi;\pi] \Rightarrow t \in [-2;2]$.

Khi đó phương trình $f(2\sin x) = m$ trở thành $f(t) = m$ (1). Số nghiệm của PT(1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$ và đường thẳng $y = m$.

Nhận thấy:

Với $t \in \{-2;2\}$ thì PT(*) có 1 nghiệm $x \in [-\pi;\pi]$.

Với $t = 0$ thì PT(*) có 3 nghiệm phân biệt $x \in [-\pi;\pi]$.

Với $t \in (-2;2) \setminus \{0\}$ thì PT(*) có 2 nghiệm phân biệt $x \in [-\pi;\pi]$.

Do đó, dựa vào đồ thị đã cho ta có:

+) TH 1: $m < -3$ thì phương trình (1) có một nghiệm $t < -2$. Suy ra $m < -3$ bị loại

+) TH 2: $m = -3$ thì PT(1) có hai nghiệm là $t = 1$ và $t = -2$. Suy ra $m = -3$ là giá trị thỏa mãn.

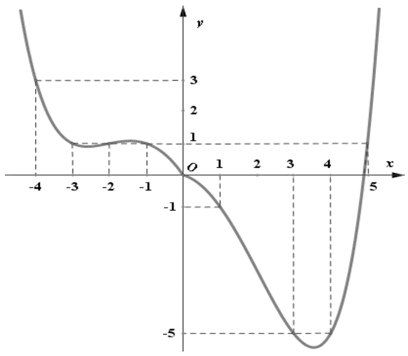
+) TH 3: $-3 < m < 1$ thì phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-2;2)$. Suy ra $-3 < m < 1$ bị loại.

+) TH 4: Xét trường hợp $m = 1$ thì PT(1) có hai nghiệm là $t = -1$ và $t = 2$. Suy ra $m = 1$ là giá trị thỏa mãn.

+) TH 5: $m > 1$ thì phương trình (1) có một nghiệm $t > 2$. Do đó $m > 1$ bị loại.

Vậy các giá trị m cần tìm là $m \in \{-3;1\}$. Chọn. **A.**

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2.f\left(3 - 3\sqrt{-9x^2 + 30x - 21}\right) = m - 2019$ có nghiệm.



A. 15. **B.** 14. **C.** 10. **D.** 13.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\sqrt{-9x^2 + 30x - 21} = \sqrt{4 - (3x-5)^2} \Rightarrow 0 \le \sqrt{-9x^2 + 30x - 21} \le 2$

$\Rightarrow -3 \le 3 - 3\sqrt{-9x^2 + 30x - 21} \le 3$.

Đặt $t = 3 - 3\sqrt{-9x^2 + 30x - 21} \Rightarrow t \in [-3;3]$.

Khi đó, phương trình $2.f\left(3 - 3\sqrt{-9x^2 + 30x - 21}\right) = m - 2019$ (1) $\Leftrightarrow 2f(t) = m - 2019$

$\Leftrightarrow f(t) = \dfrac{m - 2019}{2}$ (2)

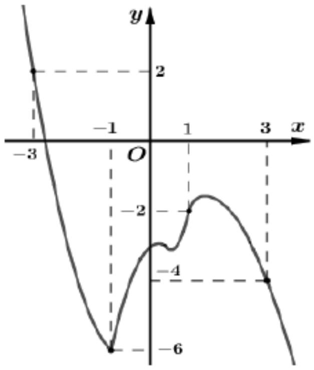
Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t\in[-3;3]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta có, phương trình (2) có nghiệm $t\in[-3;3]$ khi và chỉ khi

$-5\le\dfrac{m-2019}{2}\le 1\Leftrightarrow -10\le m-2019\le 2\Leftrightarrow 2009\le m\le 2021$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{2009,2010,...,2021\}$. Vậy có 13 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm.



A. 9. **B.** 17. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $6x-9x^2\ge 0\Leftrightarrow 0\le x\le\dfrac{2}{3}$.

Đặt $t=3-4\sqrt{6x-9x^2},x\in\left[0;\dfrac{2}{3}\right]$.

Ta có: $t'=-4.\dfrac{6-18x}{2\sqrt{6x-9x^2}}=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{3}\in\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$.

Bảng biến thiên cho $t=3-4\sqrt{6x-9x^2}$ .Vì $x\in\left[0;\dfrac{2}{3}\right]\Rightarrow t\in[-1;3]$

Phương trình trở thành: $2f(t)=m-3\Leftrightarrow f(t)=\dfrac{m-3}{2},t\in[-1;3].\ (*)$

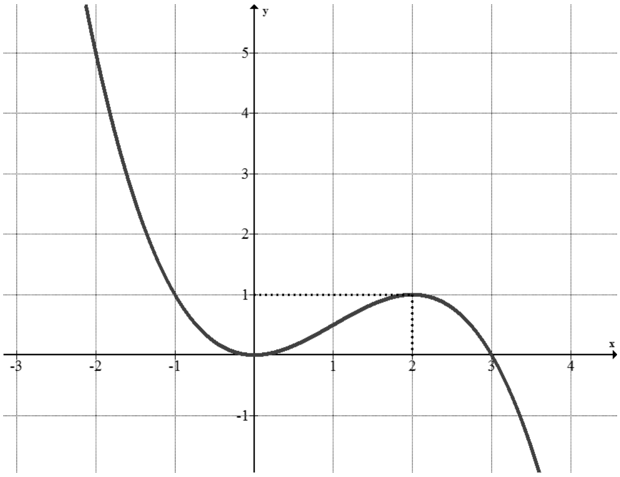
Phương trình $2f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm $\Leftrightarrow f(t)=\dfrac{m-3}{2}$ có nghiệm $t\in[-1;3]$

$\Leftrightarrow -6\le\dfrac{m-3}{2}\le -2+a\Leftrightarrow -12\le m-3\le -4+2a\Leftrightarrow -9\le m\le -1+2a$, với

$\max\limits_{[-1;3]}f(t)=a+2,a\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-9;-8;-7;..;-1\}\Rightarrow$ có 9 giá trị m nguyên thỏa ycbt.

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ với $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, đạt cực trị tại điểm $O(0;0)$ và cắt trục hoành tại $A(3;0)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5;5]$ để phương trình $f\left(-x^2+2x+m\right)=e$ có bốn nghiệm phân biệt.



A. 0. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Theo hình vẽ ta có $y = f'(x)$ là hàm số bậc ba nên $a \neq 0$.

$f'(x) = 4ax^3 + 3b^2x + 2cx + d \Rightarrow f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$.

Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(3) = 0 \\ f''(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ 108a + 27b + 6c + d = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ c = d = 0 \end{cases}$.

$\Rightarrow f(x) = ax^4 - 4ax^3 + e$.

$\Rightarrow f(x) = e \Leftrightarrow ax^4 - 4ax^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array} \right.$.

Khi đó $f(-x^2 + 2x + m) = e \, (1)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2 + 2x + m = 0 \\ -x^2 + 2x + m = 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)^2 = 1 + m \\ (x-1)^2 = m - 3 \end{array} \right.$

PT(1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m > 0 \\ m - 3 > 0 \\ 1 + m \neq m - 3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \cap [-5;5] \Rightarrow m \in \{4;5\}$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa đề bài.

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[-2;4]$ và có bảng biến thiên như sau

x	-2		0		1		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	↗	2	↘	$1,5$	↘	1	↗	6

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{9}{x^2}-4\ge 0 \\ 6f(-2x+1)-8x^3+6x-m=0 \end{cases}$ có ba nghiệm phân biệt?

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\dfrac{9}{x^2}-4\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{9-4x^2}{x^2}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 9-4x^2\ge 0 \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{3}{2}\le x\le \dfrac{3}{2} \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]\backslash\{0\}$.

Xét phương trình $6f(-2x+1)-8x^3+6x-m=0 \Leftrightarrow m=6f(-2x+1)-8x^3+6x$ (1)

Xét hàm số $g(x)=6f(-2x+1)-8x^3+6x$, với $x\in\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]\backslash\{0\}$.

Ta có $g'(x)=-12f'(-2x+1)-24x^2+6=-6\left[2f'(-2x+1)+4x^2-1\right]$

Từ giả thiết ta suy ra $f'(-2x+1)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+1<2 \\ -2x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$;

$f'(-2x+1)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<-2x+1<0 \\ 2<-2x+1<4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{3}{2}<x<-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)=6f(-2x+1)-8x^3+6x$ trên $\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]\backslash\{0\}$.

x	$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$
$f'(-2x+1)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$4x^2-1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
$g(x)$	54	$\searrow$	4	$\nearrow$	9	$\nearrow$	14	$\searrow$	-36

Từ bảng biến thiên ta suy ra hệ có đúng ba nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có đúng ba nghiệm $x\in\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]\backslash\{0\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4<m<14 \\ m\ne 9 \end{cases}$. Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=5;6;7;8;10;11;12;13$. Vậy có 8 số nguyên m.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và có bảng biến thiên như hình sau:

x	0	1	2	3	5
$f(x)$	4 ↘	1 ↗	3 ↘	1 ↗	3

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $mf(x)+\sqrt{3x}\le 2019f(x)-\sqrt{10-2x}$ nghiệm đúng với mọi $x\in[0;5]$.

A. 2014. **B.** 2015. **C.** 2019. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Trên $[0;5]$, ta có: $mf(x)+\sqrt{3x}\le 2019f(x)-\sqrt{10-2x}\Leftrightarrow m\le 2019-\dfrac{\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}}{f(x)}$.

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}$ trên đoạn $[0;5]$.

$$g'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x}}-\frac{1}{\sqrt{10-2x}}=\frac{3\sqrt{10-2x}-2\sqrt{3x}}{2\sqrt{3x}.\sqrt{10-2x}}$$

Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow x=3\in[0;5]$.

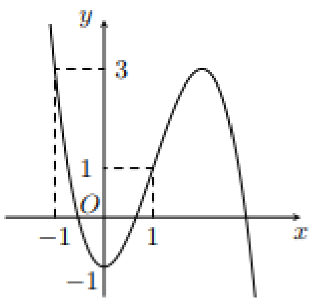
Do $g(0)=\sqrt{10}$, $g(3)=5$ và $g(5)=\sqrt{15}$ nên $\max\limits_{[0;5]} g(x)=g(3)=5$.

Mặt khác $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(3)=1$ nên

$$m\le 2019-\frac{\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}}{f(x)},\ \forall x\in[0;5]$$

$$\Leftrightarrow m\le \min\limits_{[0;5]}\left(2019-\frac{\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}}{f(x)}\right)=2019-\frac{5}{1}=2014.$$

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(cosx)+(m-2018)f(cosx)+m-2019=0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;2\pi]$ là



A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f^2(cosx)+(m-2018)f(cosx)+m-2019=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(cosx)=-1 \\ f(cosx)=2019-m. \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị ta có: $f(cos\,x)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} cos\,x=0 & (1) \\ cos\,x=k>1 & (2) \end{array}\right.$

PT có 2 nghiệm thỏa mãn, PT vô nghiệm.

Yêu cầu: phương trình $f(cosx)=2019-m(2019-m\neq 1)$ có thêm 4 nghiệm thuộc $[0;2\pi]$.

Nhận xét:

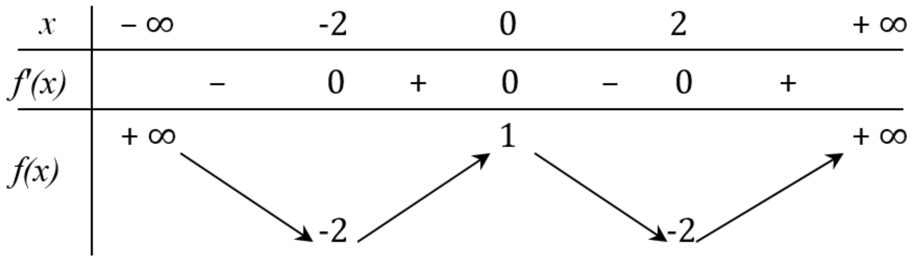
+ Với mỗi $t\notin[-1;1]$, phương trình $cosx=t$ vô nghiệm.

+ Với mỗi $t\in(-1;1]$, phương trình $cosx=t$ có 2 nghiệm $x\in[0;2\pi]$.

+ Với $t=-1$, phương trình $cosx=t$ có đúng 1 nghiệm $x\in[0;2\pi]$.

Như vậy, $-1<2019-m\leq 1 \Leftrightarrow 2018\leq m\leq 2020$.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



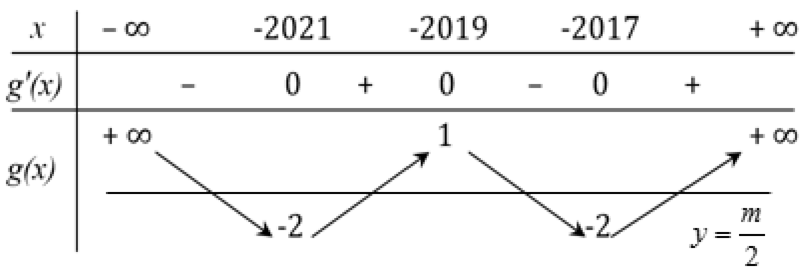
Tìm m để phương trình $2f(x+2019)-m=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $m\in(0;2)$. **B.** $m\in(-2;2)$. **C.** $m\in(-4;2)$. **D.** $m\in(-2;1)$.

Lời giải

$2f(x+2019)-m=0 \Leftrightarrow f(x+2019)=\frac{m}{2}$ $(*)$.

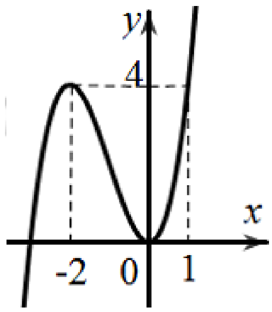
Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)=f(x+2019)$ như sau:



Phương trình $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt khi $-2<\frac{m}{2}<1 \Leftrightarrow -4<m<2$.

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x^2+2x-2)=3m+1$ có nghiệm thuộc khoảng $[0;1]$.

.



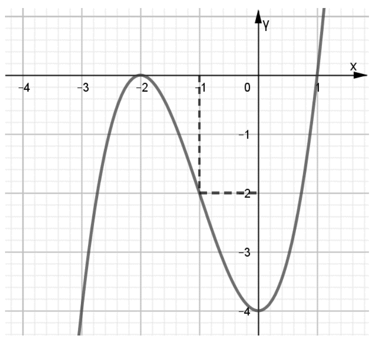
A. $[0;4]$. **B.** $[-1;0]$. **C.** $[0;1]$. **D.** $\left[-\frac{1}{3};1\right]$

Lời giải

Đặt $t=x^2+2x-2$. Với $x\in[0;1]\Rightarrow t\in[-2;1]$

Phương trình $f\left(x^2+2x-2\right)=3m+1$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=3m+1$ có nghiệm thuộc $[-2;1]\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\le m\le 1$.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{4x-x^2}-1\right)=m$ có nghiệm là



A. $[-2;0]$. **B.** $[-4;-2]$. **C.** $[-4;0]$. **D.** $[-1;1]$.

Lời giải

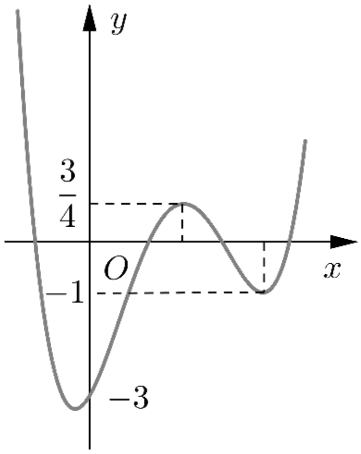
Phương trình $f\left(\sqrt{4x-x^2}-1\right)=m$ có điều kiện $0\le x\le 4$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0		2		4	$+\infty$
$4x-x^2$		0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	

Từ bảng biến thiên suy ra, với $0\le x\le 4$ thì $-1\le\sqrt{4x-x^2}-1\le 1$. Đặt $t=\sqrt{4x-x^2}-1$, $-1\le t\le 1$.(Có thể biến đổi $t=\sqrt{4-(x-2)^2}-1\Rightarrow -1\le t\le 1$).

Phương trình đã cho trở thành $f(t)=m$ (1). Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $t\in[-1;1]\Leftrightarrow -4\le m\le 0$.

Câu 43: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(|x+m|\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt là



A. 2. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Đặt $t=|x+m|\geq 0$

Với $t=0 \Rightarrow x=m$

Với mỗi giá trị $t>0$ sẽ ứng với 2 giá trị x

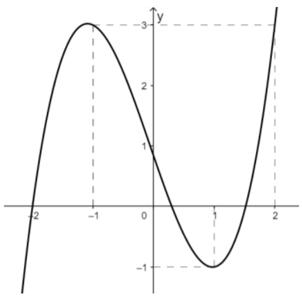
Ta có phương trình : $f(t)=m \quad (t\geq 0) \quad (*)$

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt dương

Từ đồ thị của hàm số $y=f(t)$ trên miền $t\geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{3}{4} \\ m=-1 \end{array}\right.$

Vậy có 1 giá trị nguyên thỏa mãn

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sqrt{4-x^2})=m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $[-\sqrt{2};\sqrt{3})$ là:

A. [-1;3]. **B.** $[-1;f(\sqrt{2})]$. **C.** $(-1;f(\sqrt{2})]$. **D.** (-1;3].

Lời giải

Đặt $t=g(x)=\sqrt{4-x^2}$ với $x\in[-\sqrt{2};\sqrt{3})$.

Suy ra: $g'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0\in[-\sqrt{2};3)$.

Ta có:

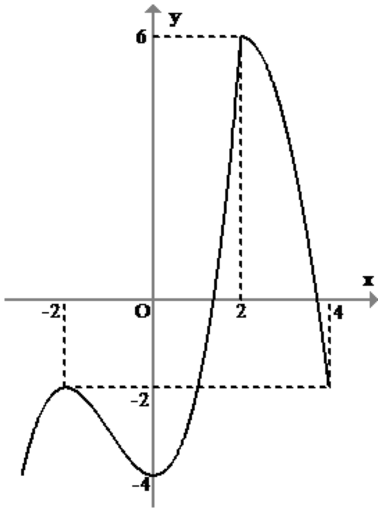
$g(0)=2$, $g(-\sqrt{2})=\sqrt{2}$, $g(\sqrt{3})=1$.

Mà hàm số $g(x)$ liên tục trên $[-\sqrt{2};\sqrt{3})$

Suy ra, $t\in(1;2]$.

Từ đồ thị, phương trình $f(t)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(1;2]$ khi $m\in(-1;3]$.

Câu 45: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right)+x=m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-2;2\right]$?

A. 11 **B.** 9 **C.** 8 **D.** 10

Lời giải

Chọn C

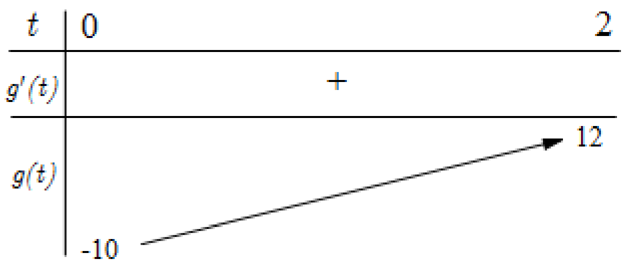
Đặt $t=\frac{x}{2}+1$, khi $-2\le x\le 2$ thì $0\le t\le 2$.

Phương trình đã cho trở thành $\frac{1}{3}f\left(t\right)+2t-2=m \Leftrightarrow f\left(t\right)+6t-6=3m$.

Xét hàm số $g\left(t\right)=f\left(t\right)+6t-6$ trên đoạn $\left[0;2\right]$.

Ta có $g'\left(t\right)=f'\left(t\right)+6$. Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ suy ra hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;2\right)$ nên $f'\left(t\right)>0,\forall t\in\left(0;2\right) \Rightarrow g'\left(t\right)>0,\forall t\in\left(0;2\right)$ và $g\left(0\right)=-10$; $g\left(2\right)=12$.

Bảng biến thiên của hàm số $g\left(t\right)$ trên đoạn $\left[0;2\right]$



Phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $\left[-2;2\right]$ khi và chỉ khi phương trình $g\left(t\right)=3m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;2\right]$ hay $-10\le 3m\le 12 \Leftrightarrow -\frac{10}{3}\le m\le 4$.

Mặt khác m nguyên nên $m\in\left\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\right\}$.

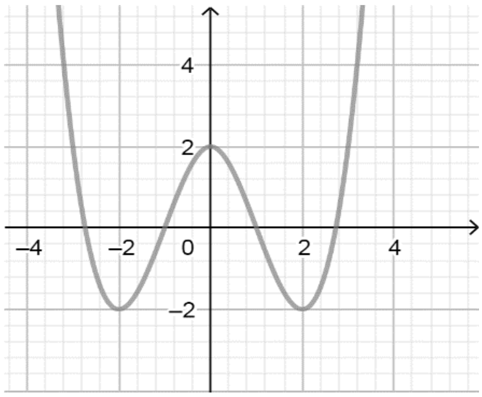
Vậy có 8 giá trị m thoả mãn bài toán.

Câu 46: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $x^2\left(\left|x\right|-3\right)+2-m^2\left(\left|m\right|-3\right)=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. 3 **B.** 12 **C.** $T=7$ **D.** 5

Lời giải

Chọn A



Ta có $x^2(|x|-3)+2-m^2(|m|-3)=0 \Leftrightarrow |x|^3-3|x|^2+2=|m|^3-3|m|^2 \quad (*)$

Xét hàm số: $y=f(x)=|x|^3-3|x|^2+2$ có đồ thị như hình vẽ:

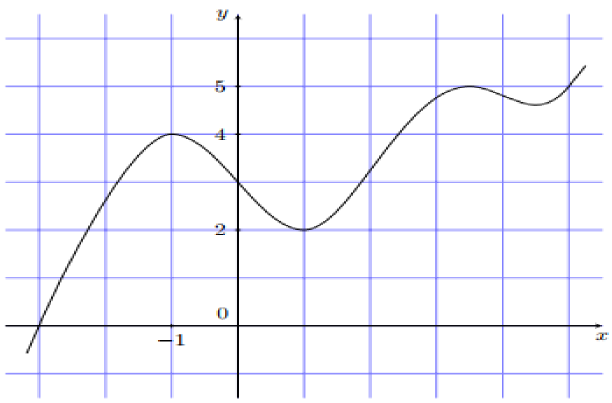
Từ đồ thị của hàm số ta có: Phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow -2<|m|^3-3|m|^2<2$

Mà $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow |m|^3-3|m|^2\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow m^2(|m|-3)\in\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow m^2(|m|-3)\in\{-1;0;1\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |m|=3 \\ m=0 \\ m=1 \quad (l) \\ m=-1 \quad (l) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm 3 \\ m=0 \end{array}\right.$$

Câu 47: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình $f(x^2-2x)=m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{2}\right]$.



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $f(x^2-2x)=m \quad (1)$

Đặt $t=x^2-2x$, với $x\in\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{2}\right]$.

Ta có $t'=2x-2$; $t'=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên của hàm số $t = x^2 - 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}\,;\,\frac{7}{2}\right]$

x	$-\frac{3}{2}$		1		$\frac{7}{2}$
t'		$-$	0	$+$	
t	$\frac{21}{4}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{21}{4}$

.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $t \in \left[-1\,;\,\frac{21}{4}\right]$.

Xét $t = -1$ khi đó phương trình (1) thành $f(-1) = m \Rightarrow 4 = m$.

Với $m = 4$ phương trình $f\left(x^2 - 2x\right) = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = a \end{array}\right.$ $(*)$ với $2 < a < 3$.

Dễ thấy $(*)$ có tối đa 3 nghiệm (không thỏa mãn yêu cầu).

Xét $t_0 \in \left(-1; \frac{21}{4}\right]$.

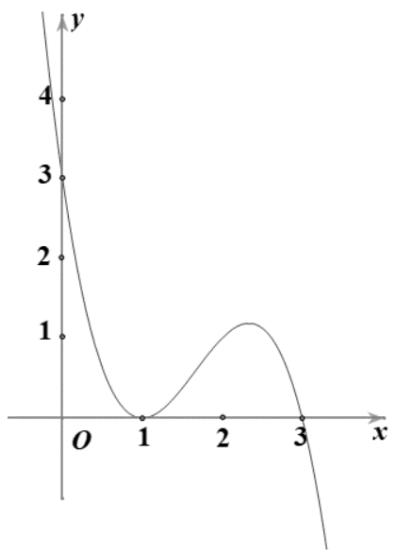
Nhận xét với mỗi $t_0 \in \left(-1; \frac{21}{4}\right]$ thì có 2 giá trị $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$ thỏa mãn $t_0 = x^2 - 2x$.

Do đó phương trình $f\left(x^2 - 2x\right) = m$ có 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$ khi phương trình $f(t) = m$ có 2 nghiệm phân biệt $t \in \left(-1; \frac{21}{4}\right]$. Hay đường thẳng $y = m$ phải cắt đồ thị hàm số $y = f(t)$ tại 2 điểm với $t \in \left(-1; \frac{21}{4}\right]$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có $m = 3; m = 5$ thỏa mãn yêu cầu.

KL: Có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài.

Câu 48: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0) = 0$ và $f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Phương trình $\left|f(|x|)\right| = m$ (với m là tham số) có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

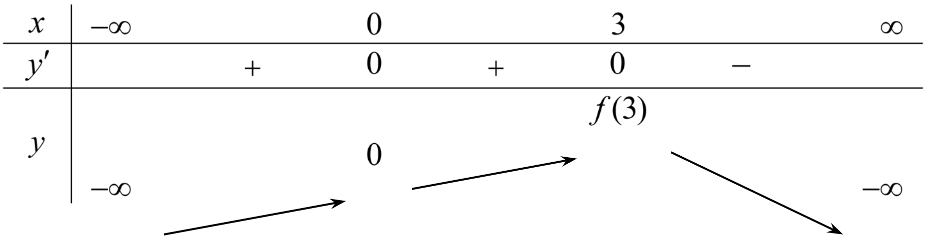


A. 8 **B.** 6 **C.** 2 **D.** 4

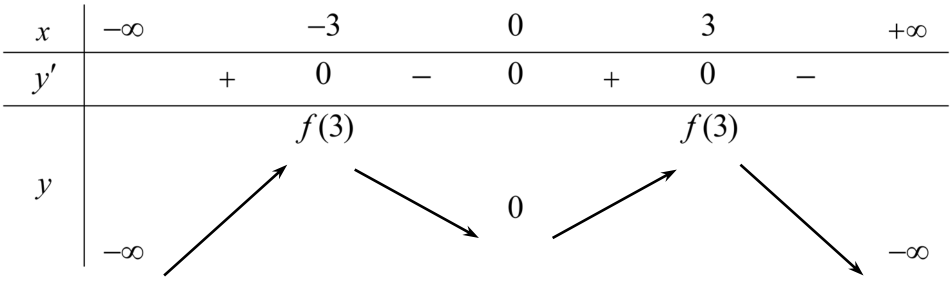
Lời giải

Chọn B

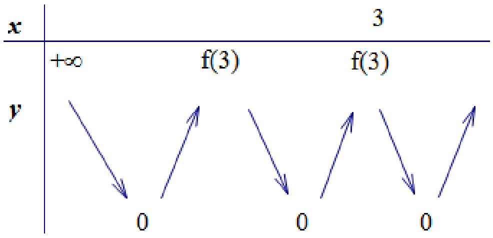
BBT của hàm số $y=f(x)$



BBT của hàm số $y=f(|x|)$

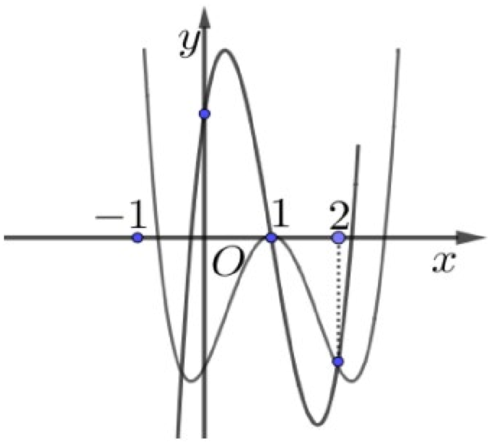


BBT của hàm số $y=|f(|x|)|$



Suy ra phương trình $|f(|x|)|=m$ có nhiều nhất là 6 nghiệm.

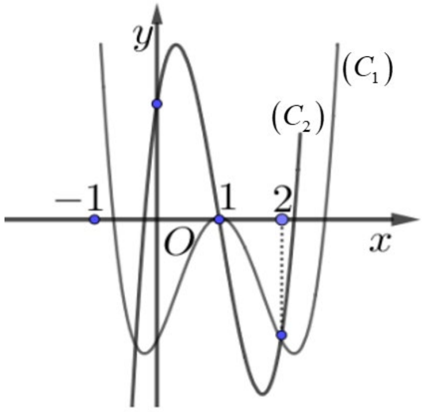
Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức với hệ số thực. Hình vẽ bên dưới là một phần đồ thị của hai hàm số: $y=f(x)$ và $y=f'(x)$.



Tập các giá trị của tham số m để phương trình $f(x)=me^x$ có hai nghiệm phân biệt trên $[0;2]$ là nửa khoảng $[a;b)$. Tổng $a+b$ gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. -0.81. **B.** -0.54. **C.** -0.27. **D.** 0.27.

Lời giải



Nhận xét: Đồ thị hàm $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm x_0 thì x_0 là điểm cực trị của hàm $y=f(x)$. Dựa vào hai đồ thị đề bài cho, thì (C_1) là đồ thị hàm $y=f(x)$ và (C_2) là đồ thị hàm $y=f'(x)$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=me^x$ ta có:

$$f(x)=me^x \Leftrightarrow m=\frac{f(x)}{e^x}.$$

Đặt $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ ta có:

$g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=f(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=x_0\in(-1;0) \end{array}\right. .$$

Dựa vào đồ thị của hai hàm số: $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ ta được:

x	0		1		2
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	$f(0)$	↗	0	↘	$\frac{f(2)}{e^2}$

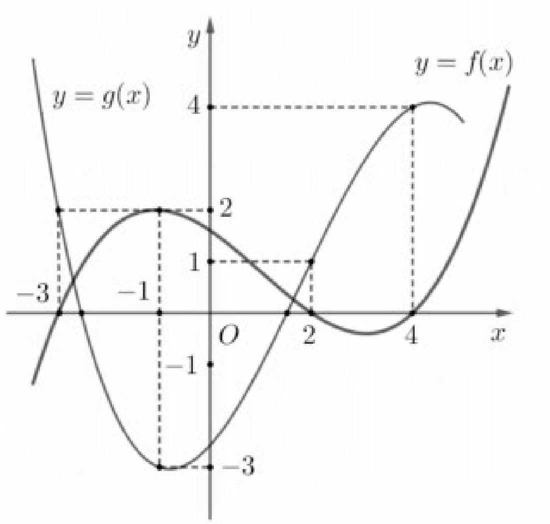
Yêu cầu bài toán ta suy ra: $\frac{f(2)}{e^2}\le m<0$ (dựa vào đồ thị ta nhận thấy $f(0)=f(2)\approx -2$)

$\Leftrightarrow -0,27\le m<0$.

Suy ra: $a=-0,27, b=0$.

Vậy $a+b=-0,27$.

Câu 50: Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là các hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên (trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y=f(x)$). Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(1-g(2x-1))=m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-1;\frac{5}{2}\right]$.



A. 8 **B.** 3 **C.** 6 **D.** 4

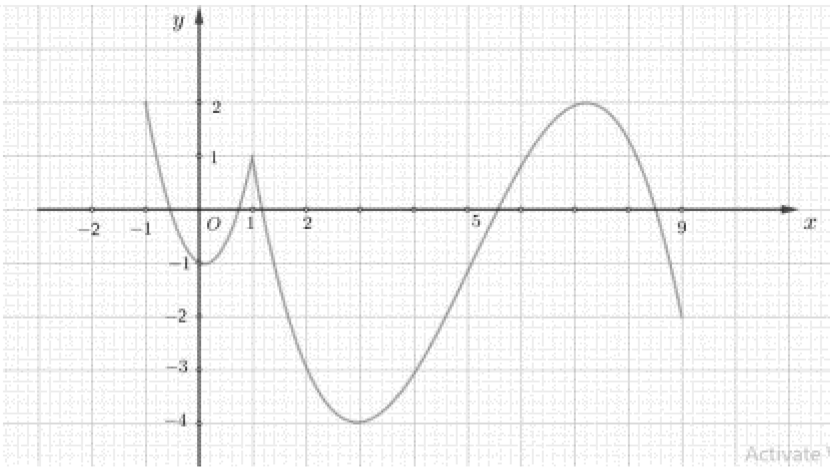
Lời giải

Chọn B

Với $x\in\left[-1;\frac{5}{2}\right]\Rightarrow 2x-1\in[-3;4]\Rightarrow g(2x-1)\in[-3;4]\Rightarrow t=1-g(2x-1)\in[-3;4]$

Vậy ta cần tìm m để phương trình $f(t)=m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-3;4]$ $\Leftrightarrow \min\limits_{[-3;4]} f(t)\le m\le \max\limits_{[-3;4]} f(t)\Leftrightarrow \min\limits_{[-3;4]} f(t)\le m\le 2$ trong đó $\min\limits_{[-3;4]} f(t)\in(-1;0)$. Vậy các số nguyên cần tìm là $a\in\{0,1,2\}$

Câu 51: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;9]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $16.3^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].4^{f(x)}\ge\left(m^2-3m\right).6^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi giá trị thuộc $[-1;9]$?

A. 32. **B.** 31. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Dễ thấy $-4\le f(x)\le 2,\ \forall x\in[-1;9]$ (1) nên $-\left[f(x)+4\right].\left[f(x)-2\right]\ge 0,\ \forall x\in[-1;9]$.

Do đó $-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right]\ge 0,\ \forall x\in[-1;9]$ (2).

Ta có $16.3^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].4^{f(x)}\ge\left(m^2-3m\right).6^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;9]$

$\Leftrightarrow 16.\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].\left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)}\geq m^2-3m$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;9]$

$\Leftrightarrow \alpha=\min\limits_{x\in[-1;9]}\left\{16.\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].\left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)}\right\}\geq m^2-3m$ (3).

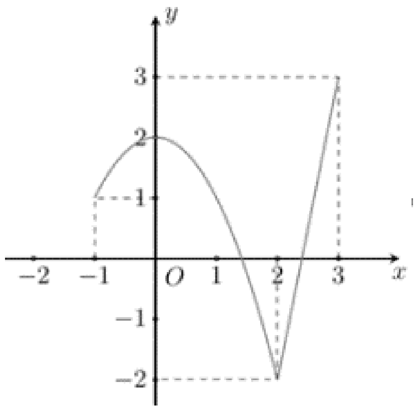
Từ (1) và (2) ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^2$ và $-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].\left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)}\geq 0,\ \forall x\in[-1;9]$.

Suy ra $16.\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].\left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)}\geq 4,\ \forall x\in[-1;9]$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $f(x)=2\Leftrightarrow x=-1\vee x=a\ (7<a<8)$.

Do đó $\alpha=4$ và (3) $\Leftrightarrow 4\geq m^2-3m\Leftrightarrow -1\leq m\leq 4$. Vì m nguyên nên $m\in\{-1;0;1;2;3;4\}$.

Câu 52: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Bất phương trình $f(x)+\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\geq m$ có nghiệm thuộc $[-1;3]$ khi và chỉ khi

A. $m\leq 7$. **B.** $m\geq 7$. **C.** $m\leq 2\sqrt{2}-2$. **D.** $m\geq 2\sqrt{2}-2$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình $f(x)+\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\geq m$ có nghiệm thuộc $[-1;3]$ khi và chỉ khi

$m\leq \underset{[1;3]}{\text{Max}}\left(f(x)+\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\right)$.

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}$ trên đoạn $[-1;3]$.

Ta có $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{7-x}}=\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{7-x}.\sqrt{x+1}}$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{7-x}-\sqrt{x+1}=0\Leftrightarrow x=3$.

$g(-1)=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $g(3)=2+2=4$.

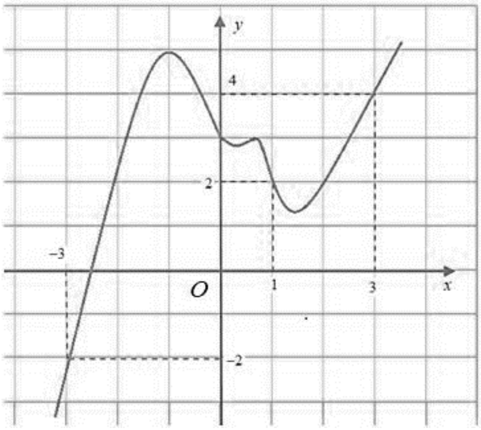
Suy ra $\underset{[-1;3]}{\text{Max}}\, g(x)=4$ tại $x=3$. (1)

Mặt khác, dựa vào đồ thị của $f(x)$ ta có $\underset{[-1;3]}{\text{Max}}\, f(x)=3$ tại $x=3$.(2)

Từ (1) và (2) suy ra $\underset{[1;3]}{\text{Max}}\left(f(x)+\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\right)=7$ tại $x=3$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm thuộc $[-1;3]$ khi và chỉ khi $m\leq 7$.

Câu 53: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Biết $f(1)=6$ và $g(x)=f(x)-\dfrac{(x+1)^2}{2}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

A. Phương trình $g(x)=0$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

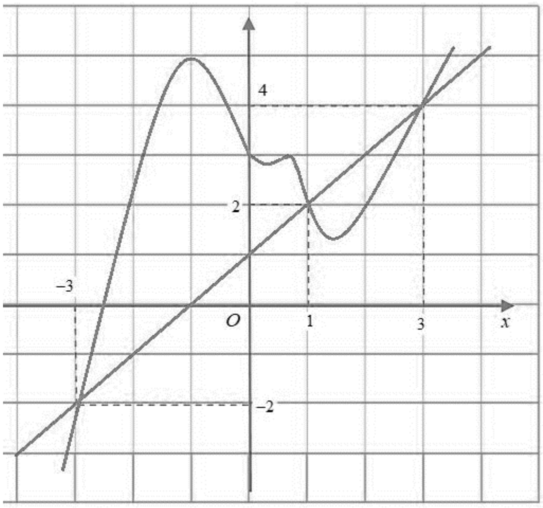
B. Phương trình $g(x)=0$ không có nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

C. Phương trình $g(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

D. Phương trình $g(x)=0$ có đúng ba nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $g(1)=f(1)-\dfrac{(1+1)^2}{2}=f(1)-2=4$ và $g'(x)=f'(x)-(x+1)$. Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $y=x+1$ ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Xét hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f'(x)$; $y=x+1$; $x=-3;x=1$ có diện tích $S_1>4$

$\Leftrightarrow \int_{-3}^{1}\left|f'(x)-(x+1)\right|dx>4 \Leftrightarrow \int_{-3}^{1}\left|g'(x)\right|dx>4 \Leftrightarrow g(1)-g(-3)>4 \Rightarrow g(-3)<g(1)-4=0$.

Xét hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f'(x)$; $y=x+1$; $x=1;x=3$ có diện tích $S_2<4$

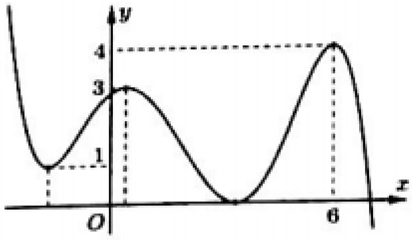
$\Leftrightarrow \int_1^3 \left|f'(x)-(x+1)\right|dx < 4 \Leftrightarrow \int_1^3 \left|g'(x)\right|dx < 4 \Leftrightarrow -g(3)+g(1) < 4 \Rightarrow g(3) > g(1)-4 = 0$.

Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm $y = g(x)$ trên $[-3;3]$

x	-3		1		3
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$g(-3)<0$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$g(3)>0$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $g(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

Câu 54: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Các giá trị của tham số m để phương trình $\dfrac{4m^3+m}{\sqrt{2f^2(x)+5}} = f^2(x)+3$ có ba nghiệm phân biệt là

A. $m = \dfrac{\sqrt{37}}{2}$. **B.** $m = \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m = \pm\dfrac{\sqrt{37}}{2}$. **D.** $m = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\frac{4m^3+m}{\sqrt{2f^2(x)+5}} = f^2(x)+3 \Leftrightarrow 4m^3+m = \left(f^2(x)+3\right)\sqrt{2f^2(x)+5}$$

$$\Leftrightarrow (2m)^3+2m = \left(2f^2(x)+5\right)\sqrt{2f^2(x)+5}+\sqrt{2f^2(x)+5}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3+t, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 3t^2+1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(2m) = f\left(\sqrt{2f^2(x)+5}\right) \Leftrightarrow 2m = \sqrt{2f^2(x)+5}$$

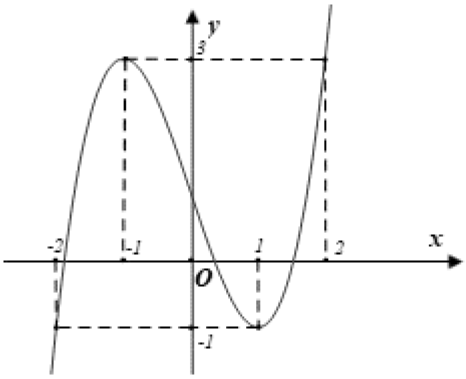
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ f^2(x) = \dfrac{4m^2-5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ f(x) = \pm\sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}} \end{cases}$$

Với $f(x) = -\sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}}$ từ đồ thị ta thấy chỉ có 1 nghiệm.

Vậy để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình

$f(x) = \sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}}$ phải có hai nghiệm $\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}} = 4 \Leftrightarrow m = \dfrac{\sqrt{37}}{2}, (m>0)$.

Câu 55: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ sau đây. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để phương trình $f(f(x))=m$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?



A. 5. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x)=f(f(x))$.

$g'(x)=f'(f(x)).f'(x)$.

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(f(x)).f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'(f(x))=0 \end{array}\right.$

+ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$ (hoành độ các điểm cực trị).

+ $f'(f(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=1 \\ f(x)=-1 \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị, ta có:

+ Khi $f(x)=1 \Leftrightarrow x=0$; $x=a\in(-2;-1)$; $x=b\in(1;2)$.

+ Khi $f(x)=-1 \Leftrightarrow x=1$; $x=-2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		0		1		b		2	$+\infty$
g'		0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
g			↘	-1	↗	3	↘	-1	↗		

Phương trình $f(f(x))=m$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$

$\Leftrightarrow -1<m<3$.

Mà m là số nguyên nên $m\in\{0;1;2\}$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa đề bài.

Câu 56: Cho hàm số $g(x)=2x^3+x^2-8x$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\sqrt{g(g(x)+3)-m}=2g(x)+7$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt

A. 7. **B.** 8. **C.** 24. **D.** 25.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = g(x) + 3 \Rightarrow t = 2x^3 + x^2 - 8x + 3 \Rightarrow t' = 6x^2 + 2x - 8$.

$t' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{4}{3} \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{4}{3}$		1		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{289}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra mỗi giá trị $t \in \left(-2; \dfrac{289}{27}\right)$ sẽ có tương ứng 3 giá trị x.

$$\sqrt{g(g(x)+3) - m} = 2g(x) + 7 \Leftrightarrow \sqrt{g(t) - m} = 2(t+3) + 7 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -\dfrac{1}{2} \\ g(t) - m = (2t+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -\dfrac{1}{2} \\ m = 2t^3 + t^2 - 8t - 4t^2 - 4t - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -\dfrac{1}{2} \\ m = 2t^3 - 3t^2 - 12t - 1 \ (1) \end{cases}.$$

Phương trình đã cho có 6 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt $t \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{289}{27}\right)$.

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 - 12t - 1$ với $t \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{289}{27}\right)$.

$f'(t) = 6t^2 - 6t - 12 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

t	$-\dfrac{1}{2}$		2		$\dfrac{289}{27}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	4	$\searrow$	-21	$\nearrow$	$1979,5$

Từ bảng biến thiên, phương trình đã cho có 6 nghiệm thực phân biệt $m \in (-21; 4]$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-20; -19; -18; \ldots; 4\} \Rightarrow$ có 25 số nguyên thỏa mãn.

Câu 57: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^2-4x+3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2\left(\left|x\right|\right)-\left(m-6\right)f\left(\left|x\right|\right)-m+5=0$ có 6 nghiệm thực phân biệt?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $f\left(x\right)=x^2-4x+3$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(\left|x\right|)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Đặt $t=f\left(\left|x\right|\right)\geq -1\left(*\right)$

Nhận xét:

+ với $t_0<-1\xrightarrow{(*)}x\in\varnothing$ + với $t_0=-1;t_0>3\xrightarrow{(*)}$ 2 nghiệm

+ với $t_0=3\xrightarrow{(*)}$ 3 nghiệm + với $t_0\in\left(-1;3\right)\xrightarrow{(*)}$ 4 nghiệm

Phương trình trở thành $t^2-\left(m-6\right)t-m+5=0$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=m-5\end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán suy ra $-1<m-5<3\Leftrightarrow 4<m<8\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\left\{5;6;7\right\}$

Câu 58: Cho hàm số $f(x)=2x^3+x^2-8x+7$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\sqrt{f(f(x)-3)+m}=2f(x)-5$ có 6 nghiệm thực phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

A. 25. **B.** -66. **C.** 105. **D.** 91.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=f(x)-3$.

* $t=f(x)-3\Leftrightarrow t=2x^3+x^2-8x+4\quad(1)$

Đặt $g(x)=2x^3+x^2-8x+4$; $g'(x)=6x^2+2x-8$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=-1 \\ x=-\frac{4}{3} \Rightarrow y=\frac{316}{27} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
y			$\frac{316}{27}$				$+\infty$
		↗		↘		↗	
	$-\infty$				-1		

Số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=g(x)$ và $y=t$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

+ $t<-1$ hoặc $t>\frac{316}{27}$ thì phương trình (1) có 1 nghiệm.

+ $t=-1$ hoặc $t=\frac{316}{27}$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm.

+ $-1<t<\frac{316}{27}$ thì phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

* Ta có $\sqrt{f(f(x)-3)+m}=2f(x)-5 \Leftrightarrow \sqrt{f(t)+m}=2t+1$ (2)

Điều kiện để phương trình (2) có nghiệm $t \geq -\frac{1}{2}$

$(2) \Leftrightarrow f(t)+m=4t^2+4t+1 \Leftrightarrow m=4t^2+4t+1-f(t) \Leftrightarrow m=-2t^3+3t^2+12t-6$

Đặt $h(t)=-2t^3+3t^2+12t-6$; $h'(\text{t})=-6t^2+6t+12$; $h(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

t	$-\frac{1}{2}$		2		$\frac{316}{27}$
$h'(t)$		+	0	−	
y			14		
		↗		↘	
	-11				$-2660,89$

Số nghiệm của phương trình (2) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=h(t)$ và $y=m$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

+ $m>14$ thì phương trình (2) vô nghiệm.

+ $m=14$ hoặc $m<-11$ thì phương trình (2) có 1 nghiệm.

+ $-11 \leq m<14$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

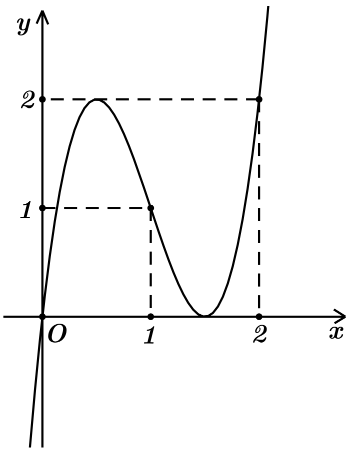
Phương trình $\sqrt{f(f(x)-3)+m}=2f(x)-5$ có 6 nghiệm thực phân biệt khi phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt và phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương $\sqrt{f(f(x)-3)+m}=2f(x)-5$ có 6 nghiệm thực phân biệt khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $-\frac{1}{2}\le t<\frac{316}{27}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta được kết quả là $-11\le m<14$. Suy ra $S=\{1;2;...;13\}$

Tổng các phần tử của $S=1+...+11+12+13=91$.

Câu 59: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Bất phương trình $f(2\sin x)-2\sin^2 x<m$ đúng với mọi $x\in(0;\pi)$ khi và chỉ khi

A. $m>f(0)-\frac{1}{2}$. **B.** $m>f(1)-\frac{1}{2}$. **C.** $m\ge f(1)-\frac{1}{2}$. **D.** $m\ge f(0)-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

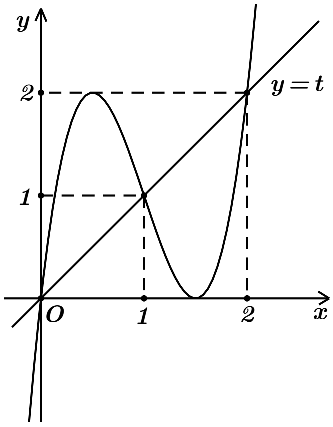
Đặt $2\sin x=t$. Vì $x\in(0;\pi)$ nên $t\in(0;2)$.

Bất phương trình trở thành $f(t)-\frac{t^2}{2}<m$. Đặt $g(t)=f(t)-\frac{t^2}{2}$ với $t\in(0;2)$.

Bất phương trình đúng với mọi $t\in(0;2)$ khi và chỉ khi $\max\limits_{(0;2)} g(t)<m$.

Ta có $g'(t)=f'(t)-t$.

$g'(t)=0\Leftrightarrow f'(t)=t$. Nghiệm phương trình này trên khoảng $(0;2)$ là hoành độ giao điểm của đồ thị $y=f'(t)$ và đường thẳng $y=t$ với $t\in(0;2)$.



Dựa vào đồ thị ta được nghiệm $t=1\in(0;2)$.

Cũng dựa vào đồ thị ta thấy khi $t \in (0;1)$ thì $f'(t) > t \Rightarrow g'(t) > 0$, khi $t \in (1;2)$ thì $f'(t) < t$ $\Rightarrow g'(t) < 0$.

Bảng biến thiên:

t	0		1		2
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		↗	$f(1)-\frac{1}{2}$	↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\max\limits_{(0;2)} g(t) = g(1) = f(1) - \frac{1}{2}$.

Vậy bất phương trình đã cho đúng với mọi $x \in (0;\pi)$ khi và chỉ khi $m > f(1) - \frac{1}{2}$.

Câu 60: Cho hàm số $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right) = x^3 - m$ có nghiệm thuộc $[1;2]$?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sqrt[3]{f(x)+m} \Rightarrow t^3 = f(x)+m$.

Ta có hệ $\begin{cases} t^3 = f(x)+m \\ x^3 = f(t)+m \end{cases} \Rightarrow f(x)+x^3 = f(t)+t^3$.

Xét hàm số $g(x) = f(x)+x^3, x \in [1;2] \Rightarrow g'(x) = f'(x)+3x^2 > 0 \ \forall x \in [1;2]$.

$\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ đồng biến trên đoạn $[1;2]$.

Vì $g(x) = g(t) \Leftrightarrow x = t \ \Rightarrow f(x) = x^3 - m$

$\Leftrightarrow x^5 + 3x^3 - 4m = x^3 - m \Rightarrow 3m = x^5 + 2x^3 \ (1)$

Xét hàm số $h(x) = x^5 + 2x^3, x \in [1;2] \Rightarrow h'(x) = 5x^4 + 6x^2 > 0 \ \forall x \in [1;2]$.

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow h(1) \le 3m \le h(2) \Leftrightarrow 3 \le 3m \le 48 \Leftrightarrow 1 \le m \le 16$.

Do $m \in Z \Rightarrow m \in \{1;2;3;4;...;16\}$.

Vậy có 16 giá trị nguyên của tham số m.