

# 连续介质力学讲义

固体力学部分

2014-9-1 第二版

中国科学技术大学

主讲教师：黄建华



# 献给 固物的师弟子妹

0920801 全体师兄师姐敬上

## 目录

代序：献给固物的师弟师妹.....	7
第一章 绪论 .....	8
§1.1 连续介质力学的研究对象 .....	8
<I> 力学.....	8
<II> 连续介质力学.....	8
<III> 连续介质力学的研究对象.....	10
§1.2 弹性力学的理论基础和基本假定.....	10
<I> 理论基础 .....	10
<II> 基本假定.....	10
§1.3 数学准备.....	11
<I> 张量理论中的常用符号和公约.....	12
<II> 张量的定义.....	15
<III> 张量的数学定义.....	19
<IV> 张量的代数运算.....	23
第二章 应力分析 .....	27
§2.1 外力与内力，体力与面力 .....	27
§2.2 欧拉——柯西应力原理 .....	28
§2.3 一点的应力状态——应力张量.....	29
§2.4 动量方程和角动量方程.....	32
<I> 动量方程 .....	32
<II> 角动量方程.....	33
<III> 应力矢量互换定律.....	34
§2.5 主应力、主应力方向、应力张量不变量 .....	35
<I> 问题的提法和结论 .....	35
§2.6 最大剪应力 .....	38
§2.7 应力圆（莫尔 Mohr 圆） .....	42
<I> 平面应力状态及两维应力圆 .....	42
<II> 三维应力圆 .....	49
§2.8 应力张量的分解 .....	52
§2.9 八面体上的正应力与剪应力.....	53
§附录.....	54
<I> （2-7-8）（2-7-9a）式推导过程 .....	54
<II> 三维莫尔应力圆演示程序源代码.....	55
第三章 应变分析 .....	57
§3.1 位移场 .....	57
§3.2 应变张量和旋转张量 .....	57
<I> 弹性体上任意两个临近点在变形时相对位置的变化 .....	58
<II> 应变分量 $\epsilon_{ij}$ 的几何意义 .....	59
<III> 应变张量的性质 .....	64
<IV> 旋转张量的性质 .....	67
<V> 平面应变的应变花理论 .....	69
<VI> 应变圆与最大剪应力.....	71

<VII> 应变球张量和偏张量.....	71
§3.3 应变协调方程.....	72
<I> 问题的提出（从数学角度出发）.....	72
<II> 应变协调方程的导出.....	73
§3.4 有限变形——非线性问题.....	74
第四章 应力应变关系.....	77
§4.1 本构方程（Constitutive Equation）的研究.....	77
<I> 问题的提出.....	77
<II> 寻求本构关系的方法.....	77
§4.2 虎克定律及其推广.....	78
§4.3 形变热力学.....	80
§4.4 线性弹性体的应变能.....	84
§4.5 各向同性体的广义虎克定律.....	85
<I> 正交各向异性体的弹性系数只有九个独立.....	86
<II> 从一点上沿两个相互垂直的方向，弹性性质不变.....	88
<III> 各向同性体只有两个独立的弹性系数.....	90
§4.6 弹性常数的测定及相互关系.....	91
<I> 单轴拉伸（压缩）实验.....	91
<II> 纯剪实验.....	93
<III> 各向均匀压缩实验.....	94
<IV> 广义虎克定律的实验验证.....	95
§4.7 体积和形状改变定律.....	95
第五章 弹性力学问题的建立及一般原理.....	99
§5.1 弹性力学问题的完整提法.....	99
<I> 问题的提法.....	99
<II> 关于方程组的几点说明.....	100
§5.2 弹性力学问题的求解途径.....	102
<I> 以位移为未知函数的运动方程——拉梅方程.....	102
<II> 以应力张量为未知函数的运动方程——拜尔托拉密·密迺尔方程（亦称应力协调方程）.....	103
<III> 以体胀系数 $\theta$ 和应力张量第一不变量 $I_1$ 为未知函数的运动方程——调和函数.....	104
<IV> 弹性静力学中的双调和函数.....	105
§5.3 弹性力学问题的边界条件.....	106
<I> 三种常见的边值类型.....	107
<II> 三种常见的边值问题.....	108
<III> 边界条件的变换.....	108
§5.4 边界条件的简化——Saint-Venant（圣维南）原理（局部影响原理）.....	108
<I> 问题的提出.....	108
<II> 圣维南的发现（1855年）.....	109
§5.5 弹性力学问题的初始条件.....	110
§5.6 弹性力学的一般原理.....	110
<I> 应变能定理（克拉贝隆定理）.....	110
<II> 迭加原理.....	112

<III> 唯一性定理.....	114
<IV> 功的互等定理 (Betti 互易定理) .....	115
<V> 最小势能定理 .....	117
<VI> 最小余能定理、虚功原理.....	121
第六章 弹性力学问题的求解.....	122
§6.1 解题方法简介.....	122
<I> 位移正解法的例子 .....	122
<II> 位移逆解法的例子.....	126
<III> 位移半逆解法的例子.....	128
<IV> 数值方法.....	130
§6.2 以应力为未知函数时, 无体力静力平衡方程的形式解——Maxwell 及 Morera 应力函数.....	130
<I> 问题的提出.....	130
<II> Maxwell 应力函数.....	130
<III> Morera 应力函数.....	131
§6.3 以位移为未知函数时, 无体力静力平衡问题的形式解 .....	132
<I> 位移场的势函数 (Stokes 分解和 Helmholtz 分解) .....	132
<II> 位移为未知函数时, 无体力静力平衡问题的形式解 (波西涅斯克·伽辽金通解) .....	133
<III> 纳维-巴伯考维齐通解.....	135
<IV> 有体力、静力平衡问题的通解 (纳维-巴伯考维齐通解+开尔文特解) .....	136
§6.4 平面问题.....	138
<I> 平面应变问题 .....	138
<II> 平面应力问题.....	142
<III> 平面应变与应力问题的比较.....	144
<IV> 体力为常数时的平面问题.....	145
<V> 无体力平面问题.....	146
<VI> 平面应力问题的近似性 .....	153
<VII> 直角坐标系下的平面问题 (多项式形式的 Airy 函数) .....	158
<VIII> 直角坐标系下的平面问题 (傅里叶级数形式的 Airy 函数) .....	165
<IX> 极坐标下的平面问题的基本公式.....	167
<X> 应力与极角无关的平面问题 (轴对称的平面问题) .....	171
<XI> 极坐标系下的平面问题的通解 .....	177

## 代序：献给固物的师弟师妹

这份来之不易的连续介质力学讲义，由 09 级固物全体 31 位师兄师姐一同整理而成。09 级以前，每届的固物同学在学习这门课时，均是由黄老师板书，同学们抄写。师生一同费神费力，老师没法讲授很多知识，同学的笔记更是多有疏漏，很是不便。我们自己辛苦还自罢了，但怎么能让以后一届又一届的师弟师妹们也这样呢？为了让黄老师今后不再受累，也为了以后的师弟师妹们着想，从 2011 年 9 月 6 号，那个周二下午开始，我们每节课后都向黄建华老师借来他上课用的讲义，每人分担一点，一字一字，一个公式一个公式，手打出来。历时四个月，依靠我们这 31 双手，硬是打出了这份十万字的讲义。希凭此回报恩师教导之恩，更希望借此略尽学长学姐之责，为师弟师妹做一些贡献。

当你们接过这件凝结着师兄师姐心血、汗水、爱心、热心的艺术品时，当你们阅读着这份干净整洁、内容翔实的讲义时，请不要忘记那些曾经默默奉献过的人的名字。陈余宽、辛卫峰、吕尧学长，他们主动承担了大量的文字、公式的手打录入工作，并且在 12 月份里作为编辑，在繁忙的期末考试期间，依旧坚持进行了大量的最繁重的讲义汇总与整理工作。他们是出力最多的人，也是最最辛苦的人；陆洲、沈智超、张亚运、裘鸿瑞、张介文、罗彬、李启华、胡晓临、高超、罗恒、毛伟、詹启伟、张旭阳、王俊超、何新骥、赵露杨学长，他们在整个学期里，奉献出了自己宝贵的时间与精力，热情承担了绝大多数的公式与部分文字录入工作。他们中，有很多人在学期中参加 GRE 考试。但即便是在紧张准备 GRE 考试期间，依然承担了超过 9 成的公式录入工作量；葛楠、郭彬、付深尧、龙雨学长，十万字里超过 6 成的文字录入工作由他们完成；还有尹健行、陈箫翰、林创欣学长以及陈易平、胡昶、秦蕾学姐与少年班的杨洋、贾哲学长，他们也参与期间，完成了很多很多的工作。

我在此怀着一颗谦卑的心，再次向我们这些可爱的学长学姐们致敬。没有你们的辛苦，就没有这份讲义；没有你们的热心，就没有师弟师妹们的便利。我一直觉得，09 级的地空是最有人情味的一个班级，它最欢乐，也最活泼，也最热情，也最聪明。这份连续介质力学讲义，抑或说是一件我们共同创作的艺术珍品，字里行间流露出的是 09 地空热情、团结与共享的精神。一字一句、一个符号、一个公式，都显得那么可爱，那么有生命力。她是我们共同缔造的无价之宝，她是师兄师姐献给你们最珍贵的礼物。

我欣赏着她，就像欣赏一件自己亲手参与缔造的艺术珍品一样。我们谨将她，将这件我们全体 31 位师兄师姐四个月以来同心协力创作出来的艺术珍品，献给你们。我们谨希望能以此为师弟师妹们的学习进步略尽绵薄之力。希望地空的团结与共享精神，能随着这份讲义，代代流传，永不止息。

这便是我们最大的希冀。

0920801 全体师兄师姐 敬上

## 第一章 绪论

### § 1.1 连续介质力学的研究对象

在说明什么是连续介质力学之前，首先回顾一下什么是力学。

#### <I> 力学

关于力学，我们以前已多次接触过。力学就是研究自然界物质运动，以及引起该运动的力的学科（例： $\vec{F} = m\vec{a}$ ，即力 $\vec{F}$ ，物质 $m$ 和运动 $\vec{a}$ ）。

自然界的物质及其运动是多样的、复杂的。

首先，物质存在的形态有：固、气、液、等离子和液晶态。其中固、气、液、等四种物态统称聚集态。

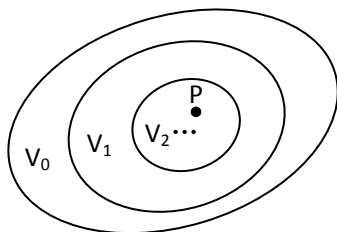
其次，物质的运动形式也是多样和复杂的。暂且不说高级的生命活动，就是机械运动，虽然只是物体间在空间的相对位置随时间的变化，但是它的变化形式也有多种。如有平动、转动、流动、波动和形变（包括物体的形状和体积两种变化）等运动形式。

人们在观察和研究错综复杂的物质运动时，根据研究对象及其运动的特性划分为许多的学科。其中力学就是研究最简单最普遍的机械运动规律性的科学。例如：当研究对象可看做一个抽象的几何点时，用牛顿质点力学取得了极大的成功。当研究对象不可用几何点描述，但可视为在运动过程中绝对不发生形变时，我们用刚体力学。这些大家都已非常熟悉。当研究物体受力后的流动特性、弹性特性、塑性特性、粘弹性特性等力学特性时，又发展了流体力学、弹性力学、塑性力学等，统称为可变形连续介质力学（简称连续介质力学）。

当我们对自然界存在的多种多样物体的多种多样的运动有了全面的认识后，就可根据所研究的问题的要求选用适当的力学来解决。例如：研究地球绕太阳运行的轨道问题，就可采用牛顿质点力学。而研究固体受力形变及其运动规律，就必须采用连续介质力学的分支力学——弹性力学来处理。

#### <II> 连续介质力学

连续的概念来自数学，我们知道，实数系是一个连续集。即在任意两个不同的实数之间，有另一个不同的实数。因此在任何两个不同的实数之间就有无穷多个实数。我们习惯地把时间用一个实数系 $t$ 来表示，把三维空间用三个实数系 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 来表示。这样，我们把时间和空间看成一个四维的连续集。



将连续集的概念推广到自然界物质。假设有一定的物质充满了一定的空间 $V_0$ （见上图），我们来考虑该物质的密度。看看在什么条件下该物质的密度这个物理量在空间 $V_0$ 是连续分布的。考察 $V_0$ 中一点 $P$ ，以及收敛于 $P$ 的子空间序列 $V_0$ 、 $V_1$ 、 $V_2$ ……

$$V_n \subset V_{n-1}, P \in V_n \quad n = 1, 2, \dots$$



令 $V_n$ 中所含有的物质的质量是 $M_n$ 。对比值 $\frac{M_n}{V_n}$ ，当 $n \rightarrow \infty, V_n \rightarrow 0$ 时， $\frac{M_n}{V_n}$ 的极限存在的话，则定义此极限为P点处质量分布的密度，用 $\rho(P)$ 表示：

$$\rho(P) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ V_n \rightarrow 0}} \frac{M_n}{V_n}$$

条件：若在 $V_0$ 内任意点都能这样定义密度（即 $V_0$ 内各点都有质量），就可以说这种物质的质量在 $V_0$ 内是连续分布的。我们可用类似的方法定义其他物理量。

定义：如果一种物质的质量、动量、能量密度等物理量在数学意义上存在，亦即可用实数系来描述物质分布，则这种物质构成的物体就是一个连续介质体。

连续介质力学就是研究连续介质体的机械运动规律的学科。

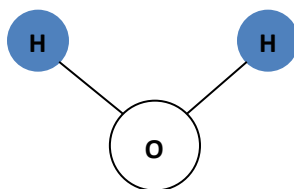
连续介质力学已经广泛地用于很多物理问题。但由于它是一种数学的抽象，所以它的适用性问题需要仔细考虑。

现代物理和化学都已经证实，任何物质在微观上都是由离散的基本粒子构成的，也就是说，客观存在的一切物质在构造上是不连续的，我们把微观上这种不连续的物质构造称为物质原型。

注\*：若 $V_n$ 取的与一个分子体积大小相当，则会出现：若 $V_n$ 内含有一个分子，则 $\rho$ 值就很大；若 $V_n$ 内不含任何粒子，则 $\rho = 0$ 。亦即， $\rho$ 是随P点位置改变而剧烈跳跃的函数，不是数学上的连续集。

为了将这种粒子观点和连续介质观点统一起来，我们假定：令 $V_n$ 变得愈来愈小，但总是保持如此大，使得在其中含有很多数目的粒子。在此假定下，若比值 $\frac{M_n}{V_n}$ 的极限存在，则定义该极限为物质的密度。也就是说，对应于真实的物体，我们假定是由无穷多个含有很多数目粒子的分子团（质元）（这些质元的尺度远比所研究的物体的尺度小，而远大于物体的微观尺度，即所谓：宏观小，微观大）连续布满构成的。这样我们定义了一个连续介质的数学模型。

按钱学森提出：若所讨论问题的运动尺度为 $l$ ，分子间距离为 $d$ ，当 $\frac{l}{d} > 100$ 时可以使用连续介质模型。例如对于水，只要永远不考虑小于 $10^{-6}\text{cm}$ 尺度的运动，就完全可以安全地把水当作一种连续介质来处理。



水分子尺度  $10^{-8}\text{cm}$

使用连续介质模型，使我们可以避免去考虑物体的微观结构，并充分运用建立在连续函数基础上的数学分析工具。但必须注意其使用条件。例如当我们考虑极高频率的波动时，如

果波长与物质原子间距同量级，则连续体模型显然就不再适用，而必须计及微观结构的影响了。

### <III> 连续介质力学的研究对象

连续介质力学的研究对象顾名思义就是研究连续介质力学性质和受力后的运动规律。人类对地球内部结构的认识，主要依赖地震波。通过观测由地震产生的弹性波在地球内部各界面上的折射和反射而发现：地球的主要组成部分是（以大陆结构为例）最外层约几十公里厚（对大陆结构平均为 35 公里）的固态地壳、一个固态的地幔（约 2850 公里厚）、一个液态的外核（约 2269 公里厚）和一个固态的内核（半径 1217 公里）。（注：大陆和海洋结构在各层上厚度有差别）。

所以地球介质的主体是固体。实验证明：固体岩石在一定的受力条件下会产生弹性变形和传播波动。另一方面，大量的观测及实验表明，地幔物质在长期力的作用下可视为一种高粘度的粘性流体。本课程中，将地球介质视为连续介质，主要研究地球介质的弹性特性和流变特性等力学特性以及它们的宏观运动规律。

我们的课程分弹性力学部分与流体力学部分，首先介绍弹性力学理论。

## § 1.2 弹性力学的理论基础和基本假定

本课程以阐述弹性力学和流体力学的基础理论为主。弹性力学和流体力学是连续介质力学的两个分支学科，它们之间既有相同之处又有区别。它们的理论基础和基本假设多是相同的（例如：两者都假定为连续体介质）。应力与应变分析也是原则上相同的。这些相同点将在以后的讨论中看到。但是，流体力学侧重于流动的分析，基本上不讨论形变和波动，而弹性力学则侧重于形变和波动的分析。

### <I> 理论基础

连续介质力学实际上就是牛顿质点力学与具体的介质物性相结合的产物（这一点我们将在后面的讨论中清楚的看到）。所以它的理论基础就是我们已经认识的有关自然界的一些普适的自然法则。即：

- i、质量守恒
- ii、动量和动量矩守恒
- iii、能量守恒
- iv、熵原理（热力学第一、第二定律）等

本课程将从这些自然法则为依据和出发点，把牛顿质点力学推广到连续介质体上。

### <II> 基本假定

我们知道：科学研究的最大特点就是运用科学抽象。在实际中，为了正确反映客观事物或现象的本质，更有成效地解决实际问题，我们常采用抽象的理论模型来研究。例如在质点力学和刚体力学中我们采用质点、质点组、刚体等抽象的理论模型。所有这些理论模型都是在一定假设前提下真实物质的一种近似。

下面我们把在以后的弹性理论推演中用到的各种假定系统地罗列出来。

#### ①连续性假定（实质性假定）

假定物质质元是：a>宏观小、微观大的大量分子体系；b>质元的诸物理量是该大量分子体系的物理量的统计平均值；c>物体是这种物质元无空隙地集合在一起组成的。在此假设下，

所有物理量都是物体所占空间和时间的连续函数，物体受力形变后，其上的点与变形前物体上的点一一对应。这就是介质的连续性假设。

有了连续性假设我们就能够利用以连续函数为基础的一系列数学分析方法，例如微分、积分、偏微分和偏微分方程等有力工具，从而便于更深刻地揭示连续介质的运动规律。

#### ②弹性假设（实质性假定）

弹性力学假设：所研究的物体是弹性的。即所研究物体的应力和应变之间是单值函数关系，且当除去使物体产生变形的外力或其它因素后，物体完全恢复原状。特别地，本课程只讨论线性弹性体（即所谓虎克体），不讨论非线性弹性体。线性弹性指的是物体在变形过程中服从虎克定律。

#### ③小形变假设（实际上就是线性弹性假设）（实质性假定）

假定弹性体上任意两邻近点因变形时产生的位移差远小于两点间的距离。

后面我们将看到：小形变假设使物体变形的几何描述（在一级近似下）大大简化，小形变假设与弹性假设结合就得到应力~应变关系的一级近似公式——广义虎克定律，从而使应力~应变关系化为简单的线性关系。

在连续性、弹性两个假设下得到的一般形式的弹性理论太复杂，首先，方程就是非线性的。引入小形变假设后，方程虽然线性化了，但仍然相当复杂，不便实用。好在实际工程技术上所用的材料或科研问题中所研究的介质有许多是可以看作是各向同性、均匀的介质。所以，我们可以进一步作如下假设：

#### ④各向同性假定

假定物体上每一点都满足：这个点沿各个不同方向上，其弹性性质都是一样的。也就是从各个不同方向看，应力和应变的关系是一样的。（详见 § 4.5 各向同性体的广义虎克定律。注意：各向同性是一个点上的性质，同一物体不同点上弹性性质可以不同）

#### ⑤均匀性假定

假定物体上各点描述应力与应变关系的弹性系数都是相等的。

#### ⑥无预应力假设

假定物体没有受力作用前处于自然状态，即其上处处的应力和应变初始为零。

后面可看到：由<④><⑤>两假设保证了弹性系数为两个常数。<⑥>只是为了简化公式，对线弹性理论并无实质性影响。因此，线弹性理论可以用来处理有预应力的问题。

### § 1.3 数学准备

在讨论连续介质受力或其它因素产生应力、应变等问题之前，为了方便不太熟悉张量理论的同学，我们先来对本课程中将要广泛采用的数学工具——张量及有关符号做简要介绍。

在质点力学和刚体力学中，我们采用标量和矢量来描述其中的物理量就够了。但在本课程中，仅用标量和矢量还不够，还要用到张量。用张量表述弹性和流体力学的基本方程，不仅使方程的书写高度简练，而且物理意义也非常鲜明。

我们只限于讨论建立在三维笛卡尔直角坐标系中的“笛卡尔张量”。因为它对于本课程够用了。

我们在下面的讨论中，记三个互相垂直方向的坐标基单位矢量为 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 。  
在给出张量的严格数学定义之前，先介绍张量理论中常用的符号和公约。

### <I> 张量理论中的常用符号和公约

#### ①自由标、哑标和求和公约

以牛顿第二定律为例来阐述。

矢量方程： $\vec{F} = m\vec{a}$ ，对应的标量方程组为 $F_i = ma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )

自由标：规定在方程的每一项中只出现一次，并从 1 到 3 取值的指标称为自由标。

注\*：一个方程中的自由标个数不作限定。例如公式

$$\frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u_{jk}}{\partial x_i \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_{il}}{\partial x_j \partial x_k}$$

由上式可见：每项含有四个自由标 $i, j, k, l$ 。因此该公式表示 $3^4 = 81$ 个方程。可见：利用自由标可以大大简化方程的书写。

牛顿第二定律 $F_i = ma_i$ 中每项只有 1 个自由标，因此表示 $3^1 = 3$ 个方程。

哑标与求和约定：若方程中任何一项中，只要有一个指标重复出现一次，那么就称这个指标为哑标。如： $\vec{F} = m\vec{a} = \sum_{i=1}^3 ma_i \vec{e}_i$ ，方程中的指标“ $i$ ”就是哑标。并且，我们可以把求和号 $\sum$ 省去，将其简写成 $\vec{F} = ma_i \vec{e}_i$ ，心知肚明是对哑标“ $i$ ”从 1 到 3 连续求和。这就是求和约定。

注\*：(1) 哑标可以用其它指标替换而不改变原式的含意。例： $\vec{F} = ma_i \vec{e}_i = ma_k \vec{e}_k = \dots$

(2) 替换的新哑标不能与该项中已有的指标相同。换句话说：一项中不允许一个指标重复出现两次以上。

例： $a_i b_i c_i$ 在求和约定范围内是没有意义的。所以对形为 $\sum_{i=1}^n a_i b_i c_i$ 的式子，必须保留求和号 $\sum$ ！

(3) 每一项中对哑标的数目不作限制，例如： $A_{ij}B_{ij} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{ij}B_{ij} = \sum_{i=1}^3 (\sum_{j=1}^3 A_{ij}B_{ij})$ 表示一个 9 项之和。

(4) 自由标和哑标的区别：

公式： $\frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u_{jk}}{\partial x_i \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_{il}}{\partial x_j \partial x_k}$ 是 81 个方程的简写。而： $\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} = 81$ 是 81 项之和，结果仅为一项。

### 易错点：

初学者很容易在哑标的运算中出错。在运算或推导过程中，注意不能破坏哑标所代表的求和关系。举两个典型的错误例子：

#### 典型错误 1：

$n_j = \sigma_{ji} T_i$  移项后变为  $\frac{n_j}{\sigma_{ji}} = T_i$ 。这种移项是错误的，原因在于 $\sigma_{ji} T_i$ 本质是哑标  $i$  的求和： $\sigma_{j1} T_1 + \sigma_{j2} T_2 + \sigma_{j3} T_3$ ，移项后求和关系被破坏，所得到的式子与原来的式子是不等价的。

#### 典型错误 2：

$n_j = \sigma_{ji} T_i$  两边同乘以  $m_i$ 。这样的运算也是错误的，因为哑标  $i$  已经是一个求和关系，再多乘一个  $i$  进去，不仅破坏了求和关系，而且在数学上也没有任何意义。

但是上式两边同时乘以  $m_j$  是可以的： $m_j n_j = m_j \sigma_{ji} T_i$ 。乘上 $m_j$ 之后，原先的自由标  $j$

变成了哑标，算式中实际上包含了两组求和关系。

②克罗内克符号  $\delta_{ij}$  (Kronecker symbol)

定义：

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

即：

$$\begin{cases} \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1 \\ \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0 \end{cases}$$

在三维空间， $\delta_{ij}$ 由 $3^2 = 9$ 个元素构成，用矩阵表示即为：

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

显然 $\delta_{ij}$ 是一个单位矩阵。

特别： $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$ （求和约定结果）

$\delta_{ij}$ 的主要用途之一是简化书写。

例：线弹性理论的本构方程：

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{11} & \sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12} & \sigma_{13} &= 2\mu\varepsilon_{13} \\ \sigma_{22} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{22} & \sigma_{21} &= 2\mu\varepsilon_{21} & \sigma_{23} &= 2\mu\varepsilon_{23} \\ \sigma_{33} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{33} & \sigma_{31} &= 2\mu\varepsilon_{31} & \sigma_{32} &= 2\mu\varepsilon_{32} \end{aligned}$$

用 $\delta_{ij}$ 可简写为：

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

$\delta_{ij}$ 的一个重要运算法则：方程中某项若有 $\delta_{ij}$ 符号，则当 $\delta_{ij}$ 的一个指标与该项任一其它一个符号的某个指标重复时，可把它 $\delta_{ij}$ 略去，同时把该符号的与 $\delta_{ij}$ 重复的那一个指标换成 $\delta_{ij}$ 中另一个不重复的指标。

例： $\delta_{ij}A_j = A_i$

证： $\delta_{ij}A_j = \delta_{i1}A_1 + \delta_{i2}A_2 + \delta_{i3}A_3 = A_i$

特别地有： $\delta_{ik}\delta_{kj} = \delta_{ij}$ ； $\delta_{im}\delta_{mn}\delta_{nj} = \delta_{ij}$

对正交坐标基单位矢 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 有： $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

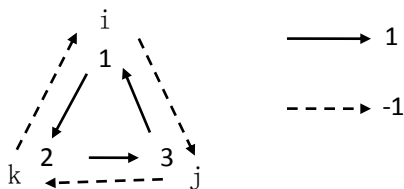
③列维-奇维塔符号  $\epsilon_{ijk}$  (Levi-Civita symbol 常用来表示叉乘运算)

定义：

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{当} ijk \text{中有两个以上指标相同} \\ 1 & \text{当} ijk \text{按} 123 \text{的顺序循环} \\ -1 & \text{当} ijk \text{按} 321 \text{的顺序循环} \end{cases}$$

即：

$$\begin{cases} \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 \\ \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = -1 \\ \epsilon_{111} = \epsilon_{112} = \epsilon_{113} = \dots = 0 \end{cases}$$



或：  $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj}$

按  $\epsilon_{ijk}$  的特性，对于正交坐标基单位矢  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  的叉乘，显然有：

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \epsilon_{ijk} \vec{e}_k$$

另外可以证明： $\delta_{ij}$ 与 $\epsilon_{ijk}$ 之间有如下关系（留作熟悉求和公约和上述符号的练习）

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ist} = \delta_{js} \delta_{kt} - \delta_{jt} \delta_{ks}$$

记忆：前对前、后对后；减去两边夹中间。

$\epsilon_{ijk}$ 常用来表示叉乘。

例：  $\vec{A} \times \vec{B} = \epsilon_{ijk} A_j B_k \vec{e}_i$

证：令  $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$  则有：

$$C_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2 ; C_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3 ; C_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1$$

再令：

$$\epsilon_{ijk} A_j B_k \vec{e}_i = \vec{D} = D_i \vec{e}_i$$

则：

$$D_1 = \epsilon_{1jk} A_j B_k = \epsilon_{123} A_2 B_3 + \epsilon_{132} A_3 B_2 = A_2 B_3 - A_3 B_2$$

同上作法可得：  $D_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3 ; D_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1$

可见：  $D_i = C_i \Rightarrow \vec{D} = \vec{C}$  原式得证。

$$\begin{aligned} \text{例： } \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= \epsilon_{rsi} A_s \epsilon_{ijk} B_j C_k \vec{e}_r = \epsilon_{rsi} \epsilon_{ijk} A_s B_j C_k \vec{e}_r \\ &= (\delta_{rj} \delta_{sk} - \delta_{rk} \delta_{sj}) A_s B_j C_k \vec{e}_r \\ &= A_k B_r C_k \vec{e}_r - A_j B_j C_r \vec{e}_r \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \end{aligned}$$

此结果是我们熟知的。

**易错点：**

在处理包含上述两种符号的式子时，初学者常常因为没有区别清楚哑标和自由标而产生错误。例如： $\epsilon_{ijk} V_j V_k$ ，不少初学者会误认为等于  $(V_2 V_3 - V_3 V_2) + (V_3 V_1 - V_1 V_3) +$

$(V_1 V_2 - V_2 V_1)$ 。这个式子中  $i$  是自由标,  $jk$  是哑标。只能对  $jk$  求和, 不能对  $i$  求和。总之, 拿到一个算式时, 首先应该先分清哪些是哑标, 哪些是自由标, 然后再严格按照规则进行计算。

## <II> 张量的定义

### ①张量的物理特性

我们在实际中, 经常碰到过的两种类型的物理量是: 标量和矢量。在连续介质力学中我们将广泛采用一类更复杂的物理量——张量。在这节中, 我们来讨论张量的物理特性, 并给出张量的物理定义和数学定义。

在讨论张量的物理特性之前, 我们先来复习一下标量和矢量的概念。

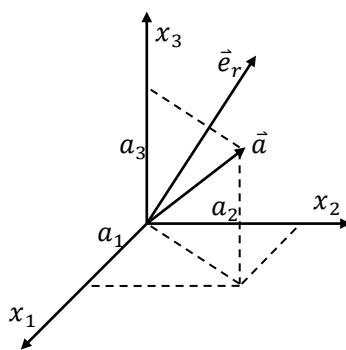
标量是一种最简单的量。它的特点是只有大小, 没有方向性。例如数学上的数, 物理上的质量、温度、电量等都是标量。

矢量比标量要更复杂一些: ①矢量具有方向性。沿不同的方向, 它可以取不同的值(标量)。比如物体运动的速度就是一个矢量。从不同方向观察物体运动, 看到它的运动速度是不同的。②矢量沿不同方向所取的不同的值(标量), 并不是乱七八糟没有联系的一堆数, 它们之间有十分确定、十分紧密的联系。即: 只要知道一个矢量沿三个相互垂直的方向上的值(均是标量), 就能完全确定它沿任意方向的值。具体来说: 设  $ox_1x_2x_3$  是空间中任意一个直角坐标系,  $a_1, a_2, a_3$  是矢量  $\vec{a}$  沿  $x_1x_2x_3$  轴方向(可是正方向, 亦可是负方向)的值, 则  $\vec{a}$  沿任意  $\vec{e}_r$  方向的值, 都可按下式计算:

$$a_r = a_1 \cos \alpha + a_2 \cos \beta + a_3 \cos \gamma$$

注:  $\alpha, \beta, \gamma$  分别是  $\vec{e}_r$  与  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  轴的夹角。

..... (1-3-1)



证: 这是因

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \quad ; \quad a_r = \vec{a} \cdot \vec{e}_r = a_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_r + a_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_r + a_3 \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_r$$

而:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_r = \cos \alpha, \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_r = \cos \beta, \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_r = \cos \gamma$$

如果一个量具备上述两个特性, 它就是一个矢量。在数学上通常用矢量沿三个相互垂直方向上的值构成一组数来表示矢量, 记为:



$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

这三个数中的每一个数，称为矢量 $\vec{a}$ 的一个分量或坐标。按(1-3-1)式求得值 $a_r$ ，叫做矢量 $\vec{a}$ 在方向 $\vec{e}_r = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 上的投影。我们知道：数学中的有向线段，物理中的速度、力、加速度、电磁场强度等都具备矢量的两个特性，所以它们都是矢量。

在本课程中，我们将涉及的应力和应变等一类物理量，他们也具有方向性。不过，与矢量不同的是，这类物理量在各个方向上取的值，不是标量，而是一个矢量。从物理角度来看，这类物理量也具有两个特点：①在不同的方向上，它可以取不同的矢量作为它的值。②它沿不同方向所取的不同矢量之间，也有十分紧密的联系。即：只要知道它沿三个相互垂直的方向上的值（此值是矢量），就能完全确定它沿任意方向的值（也是矢量）。具体来说：设 $ox_1x_2x_3$ 是空间中任意一个直角坐标系， $\vec{a}_1$ 、 $\vec{a}_2$ 、 $\vec{a}_3$ 是这类物理量沿 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 轴方向的值，则它沿任意方向 $\vec{e}_r = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 的值，可按下式计算：

$$\vec{a}_r = \vec{a}_1 \cos\alpha + \vec{a}_2 \cos\beta + \vec{a}_3 \cos\gamma \quad \dots (1-3-2)$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是 $\vec{e}_r$ 相对 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 的方向余弦。

我们把具备以上两个特点的这类物理量称为二阶张量。

二阶张量怎样表示呢？与矢量类似，自然想到，二阶张量可以用它沿三个相互垂直方向上的值（即三个矢量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ ）来表示。每一个矢量由三个数构成：

$$\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}) \quad \vec{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}) \quad \vec{a}_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$$

所以：一个二阶张量由 9 个数构成。我们通常用这 9 个元素排成的矩阵来表示二阶张量，记为：

$$\vec{\vec{a}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

矩阵的每个行向量，都是二阶张量 $\vec{\vec{a}}$ 沿一个方向所取的值。张量的每一个元素可用 $a_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ 来表示，称为二阶张量的分量。

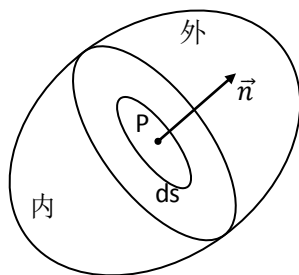
以上我们是从物理角度出发来描述标量、矢量和二阶张量的。

下面我们举几个二阶张量的例子。实际上，二阶张量的概念和物理特性就是从很多这类具体例子中概括出来的。

例一：应力张量

现实物体中，各部分之间常常有作用力存在。例如，地球介质的各部分之间，就有作用力存在，地震正是由这种作用力引起的。一般来说，物体各部分之间的作用力，在物体内的分布是不均匀的。怎样描述物体在某点处所受的这种作用力呢？





如图，设  $P$  是物体中一点。 $d\vec{S} = dS\vec{n}$  是  $P$  点处一个有向面积元， $\vec{n}$  是  $dS$  的正法向单位矢量。这一有向平面将物体分为两部分。 $\vec{n}$  指向的一部分称为外部；另一部分称为内部。在面积元  $dS$  处，内部物体在单位面积上所受到外部物体的作用力（是一矢量），称为物体在  $P$  点处沿  $\vec{n}$  方向所受的应力。（需特别注意的是： $d\vec{S}$  面上的应力矢量一般不与  $\vec{n}$  平行。即应力矢量的方向一般不与  $\vec{n}$  同向。）因此，物体在某点沿一定方向所受的应力，是一个矢量。一般情况下，不断改变  $d\vec{S}$  的方向  $\vec{n}$ ，可得到物体在  $P$  点处沿各种不同方向所受的应力。显然如果知道物体在某点沿每一个方向的应力（是一矢量），那么物体在该点的受力状况就完全清楚了。因此，物体在某点的受力状态，可用应力这个概念来描述。

注意区别：物体在某点所受的力——应力张量，物体在某点沿某一方向所受的力——应力矢量。

应力是怎样的物理量呢？首先，应力有方向性。沿不同方向，物体在一点所受应力矢量的大小和方向都不同。这正是二阶张量的第一个特点。应力也完全具备二阶张量的第二个特点，即：设  $ox_1x_2x_3$  是空间中任意一个直角坐标系， $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3$  是物体在  $P$  点沿  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  轴正方向为面元法方向的面元上的应力矢量，则对任意一个方向  $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ ，物体在  $P$  点沿  $\vec{n}$  向面元上的应力矢量  $\vec{\sigma}_n$  为：

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_1 \cos\alpha + \vec{\sigma}_2 \cos\beta + \vec{\sigma}_3 \cos\gamma \quad \dots\dots (1-3-3)$$

结论：所以物体在某点所受的应力（又称物体在该点的应力状态）是一个二阶张量，表示为：

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = (\sigma_{ij})$$

关于应力张量  $\vec{\sigma}$  的第二个特点，我们将在张量的数学定义中证明。

## 例二：向量函数的导数

我们知道：多元标量函数  $u(x_1, x_2, x_3)$  的导数是一个矢量。它具有矢量的二个特点。即：①沿不同方向， $u(x_1, x_2, x_3)$  的方向导数具有不同的值（是一个标量）。②对任意方向  $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ ，沿  $\vec{n}$  向的方向导数为：

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial x_3} \cos\gamma \quad \dots\dots (1-3-4)$$

多元标量函数 $u(x_1, x_2, x_3)$ 沿 $\vec{n}$ 的方向导数称为 $u$ 的梯度，记为：

$$\text{grad } u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3} \right)$$

对多元向量函数 $\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$ 也可以计算它沿任意方向 $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 的方向导数 $\frac{\partial \vec{u}}{\partial n}$ ，其表达式与（1-3-4）相似，为：

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} \cos\alpha + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_2} \cos\beta + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_3} \cos\gamma$$

..... (1-3-5)

所以，多元向量函数的导数也具备二阶张量的两个特点，因此也是一个二阶张量，记为：

$$\vec{\vec{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

其中 $u_1, u_2, u_3$ 是向量函数 $\vec{u}$ 的三个分量： $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 。

例三：应变张量

我们在连续介质力学中将涉及物体运动的第三种形式——变形（包括物体的形状改变和体积改变）。我们将用应变张量来描述物体运动过程中的形体改变。设物体运动时，物体上各点的位移 $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 在空间构成一个位移矢量场。由例二知： $\vec{u}$ 的方向导数是一个二阶张量：

$$\vec{\vec{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

由线性代数理论知：任意一个  $n$  阶矩阵可唯一地分解成一个对称与一个反对称矩阵（两者也均是  $n$  阶的）之和：

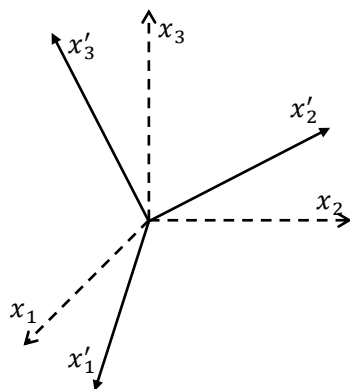
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3}) \\ -\frac{1}{2}(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}) & 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}) \\ -\frac{1}{2}(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3}) & -\frac{1}{2}(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}) & 0 \end{pmatrix}$$

其中等式右边第一项的对称矩阵，就是描述物体运动过程中形体变化的应变张量，记为  $\vec{\varepsilon}$ 。

### <III> 张量的数学定义

#### ① 矢量的坐标变换（坐标变换有两种基本类型：平移、旋转）

我们知道空间一点 P 在不同的坐标基下有不同的坐标。在弹性力学中，我们常常关心物体中一点 P 的受力情况，而该点受力情况的完全确定，等价于过该点沿任意方向的应力矢量都被确定。而要知道过 P 点沿任意方向的应力矢量，实际是研究当坐标基绕 P 点旋转变换时，应力矢量的坐标按什么规律变化。



设空间有两个笛氏坐标系  $OX_1X_2X_3$  和  $OX'_1X'_2X'_3$ ，其中  $OX'_1X'_2X'_3$  是  $OX_1X_2X_3$  绕 O 点旋转任一角度而来。坐标基矢分别为  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  和  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ 。我们将  $\vec{e}'_i$  用  $\vec{e}_j$  来表示，称为坐标基变换，如将  $\vec{e}'_i$  视为  $OX_1X_2X_3$  系中的一个矢量（单位矢量）则由矢量加法的三角形法则，有如下坐标基矢变换公式：

$$\vec{e}'_i = \cos(\vec{e}'_i, \vec{e}_j) \vec{e}_j = \alpha_{ij} \vec{e}_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad \dots (1-3-6)$$

这里记  $\cos(\vec{e}'_i, \vec{e}_j) = \alpha_{ij}$ ，称为坐标基变换系数矩阵。

由线性代数理论知： $\alpha_{ij}$  是一个正交矩阵，即有：

$$\alpha_{ij} \alpha_{kj} = \delta_{ik} \quad \dots (1-3-7)$$

由此可得坐标基矢的反变换公式为：

$$\vec{e}_k = \alpha_{ik} \vec{e}_i' \quad \dots\dots (1-3-8)$$

设在  $ox_1x_2x_3$  系中有一矢量  $\vec{r}(x_1, x_2, x_3) = x_i \vec{e}_i$ ，其在  $ox_1'x_2'x_3'$  系中表示为  $\vec{r}(x_1', x_2', x_3') = x_k' \vec{e}_k'$ ，则由坐标基矢变换公式可得矢量  $\vec{r}$  在  $ox_1x_2x_3$  和  $ox_1'x_2'x_3'$  系中的变换公式：

$$x_i' = \alpha_{ij} x_j \quad \dots\dots (1-3-9)$$

反变换为：

$$x_j = \alpha_{kj} x_k' \quad \dots\dots (1-3-10)$$

注\*：因  $x_i \vec{e}_i = x_k' \vec{e}_k' \xrightarrow{\text{两边点乘 } \vec{e}_j} x_i \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = x_k' \vec{e}_k' \cdot \vec{e}_j = x_k' \vec{e}_k' \cdot \alpha_{lj} \vec{e}_l' = x_k' \alpha_{lj} \vec{e}_k' \cdot \vec{e}_l' = x_k' \alpha_{lj} \delta_{kl} = x_k' \alpha_{kj}$ ，即：  
 $x_i \delta_{ij} = x_k' \alpha_{kj}$ ，亦即： $x_j = \alpha_{kj} x_k'$ 。

上式就是矢量  $\vec{r}$  在新、旧坐标系下的坐标变换公式，也就是矢量的数学定义。其中  $x_k$  是矢量  $\vec{r}$  在旧系中的坐标， $x_i'$  是矢量  $\vec{r}$  在新系中的坐标。

上两式完全包含了矢量的两个物理特性。

## ②二阶张量的坐标变换

设二阶张量  $\vec{\sigma}$  在旧、新系中分别为：

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad \dots\dots (1-3-11)$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}' & \sigma_{12}' & \sigma_{13}' \\ \sigma_{21}' & \sigma_{22}' & \sigma_{23}' \\ \sigma_{31}' & \sigma_{32}' & \sigma_{33}' \end{pmatrix} \quad \dots\dots (1-3-12)$$

其中：

$$\vec{\sigma}_1 = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}), \vec{\sigma}_2 = (\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}), \vec{\sigma}_3 = (\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}) \quad \dots\dots (1-3-13)$$

是  $\vec{\sigma}$  在旧系中沿三个坐标轴的值。

而：

$$\vec{\sigma}_1' = (\sigma_{11}', \sigma_{12}', \sigma_{13}'), \vec{\sigma}_2' = (\sigma_{21}', \sigma_{22}', \sigma_{23}'), \vec{\sigma}_3' = (\sigma_{31}', \sigma_{32}', \sigma_{33}') \quad \dots\dots (1-3-14)$$

是  $\vec{\sigma}$  在新系中沿三个坐标轴  $ox_1', ox_2', ox_3'$  方向的值。

显然， $\vec{\sigma}_i$  与  $\vec{\sigma}_j'$  一般是不同的，这是张量的第一个物理特征。

另外,  $\vec{\sigma}_i$  是旧系中的沿  $\vec{e}_i$  轴方向的应力矢量,  $\vec{\sigma}_k'$  是新系中的沿  $\vec{e}_k'$  轴方向的应力矢量。

并且,  $\vec{\sigma}_k'$  在新坐标系中的坐标  $\sigma'_{k1}, \sigma'_{k2}, \sigma'_{k3}$  与它在旧坐标系中的坐标  $\sigma''_{k1}, \sigma''_{k2}, \sigma''_{k3}$  按矢量的坐标变换公式有:

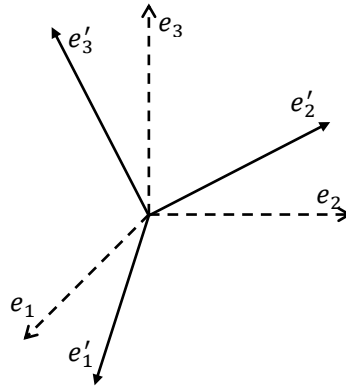
$$\begin{aligned}\sigma'_{k1} &= \alpha_{11}\sigma''_{k1} + \alpha_{12}\sigma''_{k2} + \alpha_{13}\sigma''_{k3} \\ \sigma'_{k2} &= \alpha_{21}\sigma''_{k1} + \alpha_{22}\sigma''_{k2} + \alpha_{23}\sigma''_{k3} \\ \sigma'_{k3} &= \alpha_{31}\sigma''_{k1} + \alpha_{32}\sigma''_{k2} + \alpha_{33}\sigma''_{k3} \\ (k &= 1, 2, 3)\end{aligned}$$

.... (1-3-15)

简写为:

$$\sigma'_{kl} = \alpha_{lj}\sigma''_{kj} \quad k, l = 1, 2, 3$$

.... (1-3-16)



另一方面, 由坐标基矢变换公式  $\vec{e}_i' = \alpha_{ij}\vec{e}_j$  可知, 坐标基矢变换系数矩阵  $\alpha_{ij} =$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \text{ 的三个行向量, 正是新系的三个坐标基矢 } \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3' \text{ 在旧系中的分量表达式。}$$

按照式:

$$\vec{\sigma}_k = \vec{\sigma}_1\alpha_{k1} + \vec{\sigma}_2\alpha_{k2} + \vec{\sigma}_3\alpha_{k3}$$

注\*: (例 1: 应力张量中所述)

注\*: 上式即表明, 沿任意方向  $\vec{k} = (\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \alpha_{k3})$  的应力矢量  $\vec{\sigma}_k$  可由三个相互垂直方向上的应力矢量  $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3$  来表示。这是张量的第二个物理特性。

那么张量  $\vec{\sigma}$  沿这三个坐标基矢  $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$  的值  $\vec{\sigma}_1', \vec{\sigma}_2', \vec{\sigma}_3'$  可表示为:

$$\vec{\sigma}_k' = \vec{\sigma}_1\alpha_{k1} + \vec{\sigma}_2\alpha_{k2} + \vec{\sigma}_3\alpha_{k3} \quad (k = 1, 2, 3)$$

.... (1-3-17)

因为:

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_1\alpha_{k1} + \vec{\sigma}_2\alpha_{k2} + \vec{\sigma}_3\alpha_{k3} &= (\sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{12}\vec{e}_2 + \sigma_{13}\vec{e}_3)\alpha_{k1} \\ &\quad + (\sigma_{21}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{23}\vec{e}_3)\alpha_{k2} \\ &\quad + (\sigma_{31}\vec{e}_1 + \sigma_{32}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3)\alpha_{k3}\end{aligned}$$

而 $\vec{\sigma}'_k$ 在旧系中表示为 $\vec{\sigma}'_k = \sigma''_{k1}e_1 + \sigma''_{k2}e_2 + \sigma''_{k3}e_3$   
从而可得：

$$\begin{aligned}\sigma''_{k1} &= \sigma_{11}\alpha_{k1} + \sigma_{21}\alpha_{k2} + \sigma_{31}\alpha_{k3} \\ \sigma''_{k2} &= \sigma_{12}\alpha_{k1} + \sigma_{22}\alpha_{k2} + \sigma_{32}\alpha_{k3} \\ \sigma''_{k3} &= \sigma_{13}\alpha_{k1} + \sigma_{23}\alpha_{k2} + \sigma_{33}\alpha_{k3}\end{aligned}$$

简写为：

$$\sigma''_{kj} = \sigma_{1j}\alpha_{k1} + \sigma_{2j}\alpha_{k2} + \sigma_{3j}\alpha_{k3} = \sigma_{ij}\alpha_{ki} \quad (k, j = 1, 2, 3, i \text{ 是哑标})$$

.... (1-3-18)

将上式代入(1-3-16)式，从而有：

$$\sigma'_{kl} = \alpha_{lj}\alpha_{ki}\sigma_{ij} = \alpha_{ki}\alpha_{lj}\sigma_{ij}$$

.... (1-3-19)

上式就是二阶张量 $\vec{\sigma}$ 在新、旧坐标系中的坐标变换关系式。它表明，如已知二阶张量 $\vec{\sigma}$ 在旧系中的九个数 $\sigma_{ij}$ ，则对任意的正交坐标变换：

$$x'_i = \alpha_{ij}x_j$$

$\vec{\sigma}$ 在新系 $ox'_1x'_2x'_3$ 中的各个分量 $\sigma'_{kl}$ 可由此式完全确定。这个公式与我们在第<II>节中所述的二阶张量的两个物理特性是完全等价的。所以这个公式就是二阶张量的数学表述或数学定义。

### ③二阶张量的数学定义

二阶张量定义：设给定一个空间笛卡尔坐标系 $ox_1x_2x_3$ 及与此坐标系相联系的数量 $\sigma$ ，它有 $3^2 = 9$ 个分量 $\sigma_{lm} (l, m = 1, 2, 3)$ ，当坐标系 $ox_1x_2x_3$ 按 $x'_i = \alpha_{ij}x_j$ 变换成另一笛氏坐标系 $ox'_1x'_2x'_3$ 时， $\sigma_{lm}$ 按下式变换：

$$\sigma'_{ij} = \alpha_{il}\alpha_{jm}\sigma_{lm}$$

则称 $\sigma$ 为一个二阶张量。记为 $\vec{\sigma}$ 。每个 $\sigma_{ij}$ 称为 $\vec{\sigma}$ 在 $ox_1x_2x_3$ 系中的一个分量或坐标。

推广开来有：

$n$ 阶张量定义：设 $ox_1x_2x_3$ 是一笛氏坐标系， $\sigma_{i_1i_2\dots i_n}$ 是与它相应的 $3^n$ 个数。当 $ox_1x_2x_3$ 按 $x'_i = \alpha_{ij}x_j$ 旋转为另一笛氏坐标系 $ox'_1x'_2x'_3$ 时， $\sigma_{i_1i_2\dots i_n}$ 按下式

$$\sigma'_{i_1i_2\dots i_n} = \alpha_{i_1j_1}\alpha_{i_2j_2}\dots\alpha_{i_nj_n}\sigma_{j_1j_2\dots j_n}$$

变换成另外 $3^n$ 个数 $\sigma'_{i_1i_2\dots i_n}$ ，就称此 $3^n$ 个数构成的数组 $\sigma_{i_1i_2\dots i_n}$ 为一个  $n$  阶张量。数组中的每个元素，称为此  $n$  阶张量在坐标系 $ox_1x_2x_3$ 中的一个分量或坐标。

**要想证明任何一个量是张量，必须严格根据张量的数学定义去证明。**

不难看出，张量的阶数由 $3^n$ 中的  $n$  确定，所以：矢量（ $3^1 = 3$  个分量）是一阶张量。标量（ $3^0 = 1$  个分量）是零阶张量。

物理上，二阶张量最常见，三、四阶张量也会碰到（例如 $\varepsilon_{ijk}$ 和弹性系数 $C_{ijkl}$ ），再高阶的就不常见了。所以我们主要研究二阶张量。

#### <IV> 张量的代数运算

注意：张量的代数运算在同一坐标系中进行，因为其分量形式与坐标系有关。

##### ①张量加法

同阶相加 $\rightarrow$ 对应分量相加 $\xrightarrow{\text{得}}$ 同阶张量。

例： $\vec{T} + \vec{T}' = \vec{T}'' \rightarrow T_{ij} + T'_{ij} = T''_{ij}$ （注意：这里用“ $\vec{\phantom{x}}$ ”和“ $\vec{\phantom{x}}'$ ”区别不同张量，而不是表示不同坐标系。）

满足：

$$\text{交换律：}\vec{T} + \vec{T}' = \vec{T}' + \vec{T}$$

$$\text{结合律：}(\vec{T} + \vec{T}') + \vec{T}'' = \vec{T} + (\vec{T}' + \vec{T}'')$$

##### ②张量的外乘（并矢）

两个一阶张量 $A_l, B_k$ 它们的外乘定义为：

$$\vec{A}\vec{B} = A_l B_k = C_{lk}$$

注\*：并矢无“ $\cdot$ ”亦无“ $\times$ ”。

$$\text{例如：}\vec{A} = (1 \quad 2 \quad 3), \vec{B} = (4 \quad 5 \quad 6), \vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \times 4 & 1 \times 5 & 1 \times 6 \\ 2 \times 4 & 2 \times 5 & 2 \times 6 \\ 3 \times 4 & 3 \times 5 & 3 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

可以证明 $C_{lk}$ 是一个二阶张量。

因为：矢量 $A_l, B_k$ 有坐标变换关系：

$$A'_i = \alpha_{il} A_l, B'_j = \alpha_{jk} B_k$$

若记 $A'_i B'_j = C'_{ij}$

显然有：

$$C'_{ij} = A'_i B'_j = \alpha_{il} A_l \alpha_{jk} B_k = \alpha_{il} \alpha_{jk} A_l B_k = \alpha_{il} \alpha_{jk} C_{lk}$$

可见两个一阶张量外乘（并矢），结果为一个二阶张量。

推论：任意两个张量，若一个  $p$  阶，一个  $q$  阶，其外乘积为一个  $p+q$  阶张量。

例： $T_{ij} S_{klm} = W_{ijklm}$ ，即简单地将它们的自由标并列顺排。

但是注意并非所有的张量都能表示成外乘的形式。例如单位矩阵  $\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。假

如  $\delta_{ij} = A_i B_j$ ，则  $\delta_{11} = A_1 B_1 = 1$ ， $\delta_{12} = A_1 B_2 = 0$ ，说明  $B_2 = 0$ 。但是  $\delta_{22} = A_2 B_2 = 1$ ，与  $B_2 = 0$  矛盾。

特例：标量  $\lambda$  与  $n$  阶张量相乘，是用  $\lambda$  与该张量的每一个分量相乘，结果仍是  $n$  阶张量。即有：

$$\lambda(T_{i_1 i_2 \dots i_n}) = (\lambda T)_{i_1 i_2 \dots i_n}$$

外乘满足：

$$\text{结合律：} (\vec{\vec{T}} \vec{\vec{T}}') \vec{\vec{T}}'' = \vec{\vec{T}} (\vec{\vec{T}}' \vec{\vec{T}}'')$$

$$\text{分配律：} \vec{\vec{T}} (\vec{\vec{T}}' + \vec{\vec{T}}'') = \vec{\vec{T}} \vec{\vec{T}}' + \vec{\vec{T}} \vec{\vec{T}}''$$

一般不满足交换律，即  $\vec{\vec{T}} \vec{\vec{T}}' \neq \vec{\vec{T}}' \vec{\vec{T}}$

证：

$$A_i B_j = C_{ij} \neq B_i A_j \quad \because A_1 B_2 = C_{12} \neq B_1 A_2$$

### ③张量的内乘（点乘）

张量的内乘规定为：两个张量先做外乘运算，再从外乘积的自由标结合处开始成对地把它们依次变为哑标（即按求和约定对它们求和），经过这样复合的运算，就得到降了阶的一个新张量，称为内乘积。这个过程，称为张量的内积。内乘的符号为“ $\cdot$ ”，所以内乘又称点乘。

例如：三阶张量  $\vec{\vec{S}} = (S_{ijk})$  和五阶张量  $\vec{\vec{T}} = (T_{lmnpq})$  点乘，即  $\vec{\vec{S}} \cdot \vec{\vec{T}}$

第一步将  $\vec{\vec{S}}$  与  $\vec{\vec{T}}$  作外乘，得外乘积  $\vec{\vec{W}} = (W_{ijklmnpq})$  为一个八阶张量。即： $\vec{\vec{S}} \cdot \vec{\vec{T}} = \vec{\vec{W}} \Rightarrow S_{ijk} T_{lmnpq} = W_{ijklmnpq}$ 。

第二步从外乘积  $W_{ijklmnpq}$  自由标结合处  $kl$  开始作为第一对， $jm$  作为第二对， $in$  作为第三对，……依次将它们变为哑标，变一对称为一次点乘，变两对成为二次点乘，两次点乘的符号为“ $:$ ”。张量每点乘一次得到比其外乘积低二阶的新张量。即：

$$\vec{\vec{S}} \cdot \vec{\vec{T}} = S_{ijk} T_{kmnpq} = R_{ijmnpq}$$

$$\vec{\vec{S}} : \vec{\vec{T}} = S_{ijk} T_{kjnpq} = V_{inpq}$$

张量的内乘又称为张量的“缩并”。一个  $r$  阶和一个  $s$  阶张量内乘或缩并一次，结果为  $(r+s-2)$  阶张量。

例：

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i \vec{e}_i \cdot B_j \vec{e}_j = A_i B_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = A_i B_j \delta_{ij} = A_i B_i (\text{标量})$$



二阶张量判别定理：设 $T_i, n_j$ 是一阶张量，假如 $\sigma_{ij}$ 与 $n_j$ 的内乘积满足下列关系：

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad (\text{坐标变换前}), \quad T'_i = \sigma'_{ij} n'_j \quad (\text{坐标变换后})$$

则 $\sigma_{ij}$ 是一个二阶张量。（证明作为习题留给大家）

#### ④张量的自由标置换

把一个张量的自由标改变顺序，也是对张量的一种运算，成为自由标置换。置换结果仍是一个同阶张量。例如对三阶张量 $a_{ijk}$ 三个自由标任意置换得到 $a_{jik} \ a_{jki} \ a_{ikj} \ a_{kij} \ a_{kji}$ 五个不同的三阶张量。

自由标置换可看成矩阵转置运算的推广。二阶张量 $T_{ij}$ 置换后得 $T_{ji}$ ，如用矩阵表示，则矩阵 $T_{ji}$ 就是 $T_{ij}$ 矩阵的转置。

在应变张量中，我们就碰到自由标置换运算。由前面“<II> 张量的定义”中例2知，位移矢量函数 $\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$ 的导数 $a_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 是一个二阶张量。对 $a_{ij}$ 作自由标置换得到一个新的

二阶 $a_{ji} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ ，将 $a_{ij}$ 与 $a_{ji}$ 相加，再乘以标量 $\frac{1}{2}$ ，就得到应变张量 $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ 。

#### ⑤张量的微分运算

若一个 $n$ 阶张量 $\vec{T}$ 在某一空间域 $V$ 和某一时间域 $[t_1, t_2]$ 上有定义，则称这一张量函数为该时空域中的张量场，记为：

$$\vec{T}(\vec{r}, t) = [T_{i_1 i_2 \dots i_n}(\vec{r}, t)] \quad \vec{r} \in V \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

其中 $i_1 i_2 \dots i_n$ 共有 $n$ 个自由标，它满足坐标变换：

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_n}(\vec{r}', t) = \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \dots \alpha_{i_n j_n} T_{j_1 j_2 \dots j_n}(\vec{r}, t)$$

其中 $j_1 j_2 \dots j_n$ 亦为 $n$ 个自由标。

##### (1) 对时间的偏导数

设 $\alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \dots \alpha_{i_n j_n}$ 与时间无关，则上式两边取对 $t$ 的任意 $m$ 次偏导数，得：

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} [T'_{i_1 i_2 \dots i_n}(\vec{r}', t)] = \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \dots \alpha_{i_n j_n} \frac{\partial^m}{\partial t^m} [T_{j_1 j_2 \dots j_n}(\vec{r}, t)]$$

按张量定义，对时间偏导的结果仍为 $n$ 阶张量。

##### (2) 对坐标的偏导数

对 $n$ 阶张量 $\vec{T}$ 的坐标变换式两边求对坐标的偏导，这时应注意坐标变换公式：

$$x'_i = \alpha_{ij} x_j \quad \text{or} \quad x_l = \alpha_{kl} x'_k$$

和

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \alpha_{ij}, \quad \frac{\partial x_l}{\partial x'_k} = \alpha_{kl}$$

即：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'_k} [T'_{i_1 i_2 \dots i_n}(\vec{r}', t)] &= \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \dots \alpha_{i_n j_n} \frac{\partial}{\partial x'_k} [T_{j_1 j_2 \dots j_n}(\vec{r}, t)] \\ &= \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \dots \alpha_{i_n j_n} \frac{\partial}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial x'_k} [T_{j_1 j_2 \dots j_n}(\vec{r}, t)] \\ &= \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \dots \alpha_{i_n j_n} \alpha_{kl} \frac{\partial}{\partial x_l} [T_{j_1 j_2 \dots j_n}(\vec{r}, t)] \end{aligned}$$

根据张量定义可知：该偏导数是比原张量高一阶的张量，而且是三项的偏导数之和（因上式中等号右边项中， $l$ 是哑标）。

下面给出笛卡尔坐标系中，标量场的梯度（一阶张量），矢量场的散度（零阶张量）和旋度（一阶张量）的符号表示法，即：

$$\nabla \varphi(\vec{r}, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \vec{e}_i \quad \nabla \cdot \vec{u}(\vec{r}, t) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad \nabla \times \vec{u}(\vec{r}, t) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \vec{e}_i$$

另外：引入简记符号

① “ $,i$ ” 表示  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  ——  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i$  哈密顿算符

② “ $,ii$ ” 表示  $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \nabla^2$  —— 拉普拉斯算符

从而有：

$$\begin{aligned} \nabla \varphi(\vec{r}, t) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \vec{e}_i = \varphi_{,i} \vec{e}_i \\ \nabla \cdot \vec{u}(\vec{r}, t) &= \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = u_{i,i} \\ \nabla \times \vec{u}(\vec{r}, t) &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \vec{e}_i = \varepsilon_{ijk} u_{k,j} \vec{e}_i \end{aligned}$$

高斯定理：

$$\int_V A_{i,i} dV = \oint_S A_i n_i dS \Leftrightarrow \int_V \text{div} \vec{A} dV = \oint_S \vec{n} \cdot \vec{A} dS$$

斯托克斯定理：

$$\int_S \varepsilon_{ijk} A_{k,j} n_i dS = \oint_C A_i dx_i \Leftrightarrow \int_S \vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{A}) dS = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{x}$$

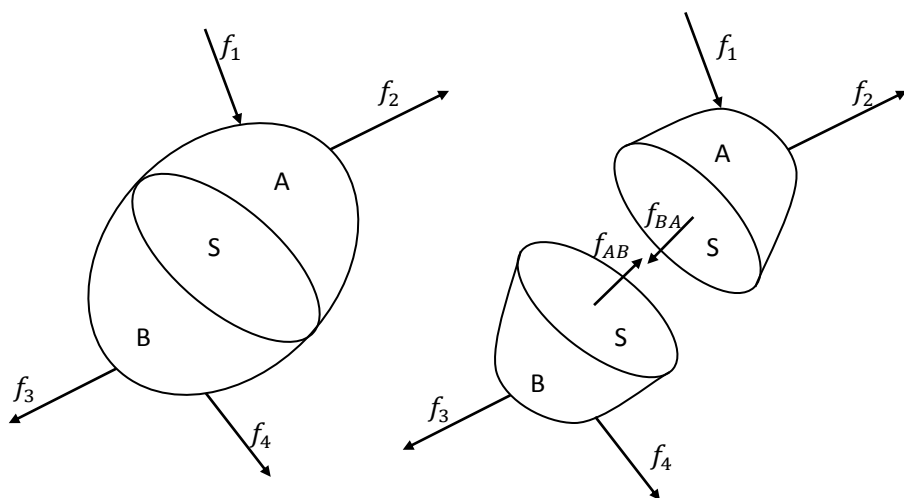
其中： $A_i$ 为矢量 $\vec{A}$ 的第  $i$  个分量， $n_i$ 为面积元 $dS$ 的法方向单位矢量的第  $i$  个分量， $V$  表示体积， $dx_i$ 表示回路  $C$  上的弧元的第  $i$  个分量。

## 第二章 应力分析

### § 2.1 外力与内力，体力与面力

弹性力学是研究物体受力后产生变形和运动的力学性质。对所研究的物体，由外界因素产生并作用在物体上的力称为外力。在外力作用下，物体发生变形，为阻碍变形，物体内部各部分响应（产生）出一种恢复力（阻碍变形的力），称为内力。

特定条件下，外力与内力是可以互相转化的。例如，对如图所示的物体， $f_1, f_2, f_3, f_4$ 是外力，在外力作用下物体将发生变形，为了研究物体中的内力，常常用假想的截面将物体截开（如图，截面 $S$ 将物体截成 $A$ 、 $B$ 两部分），那么 $A$ 部分通过截面 $S$ 对 $B$ 部分的作用力 $f_{AB}$ ，对于整个物体来讲属于内力，但对于 $B$ 部分来讲，则可看作外力。



特别需要请大家注意的是：弹性力学中物体的受力分析与在理论力学中刚体的受力分析是截然不同的。首先，弹性体受力后会变形，从而产生内力，这是与刚体的一个本质区别。其次，作用在弹性体上的外力，一般不能简单地归结为作用在相应点上的一个合力和一对力偶（亦即不能简单地用力沿其作用线滑移，来构成合力），而必须老老实实地写成与外力分布相应的分布函数。至于如何表示内力，这个问题是牛顿质点力学推广到连续介质力学的关键之一。我们下面讨论。

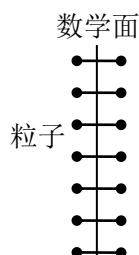
以上是按力的作用对象来分，有内、外力两类。此外，按力的作用方式来分，又可分为体（积）力和面（积）力两种。体力是连续作用在物体各体积微元上的力。如重力、离心力等。在本课程中今后用：

$$\vec{f} = f_i \vec{e}_i \quad \dots (2-1-1)$$

表示体力，其量纲为 $[\text{力}/\text{长度}^3]$ ，代表单位体积受到的力。而经典力学中常用的是单位质量受到的力，本课程中用大写的 $\vec{F}$ 表示。两者的关系是： $\vec{f} = \rho \vec{F}$ ，在后面章节的公式推导中请注意两者的区别。

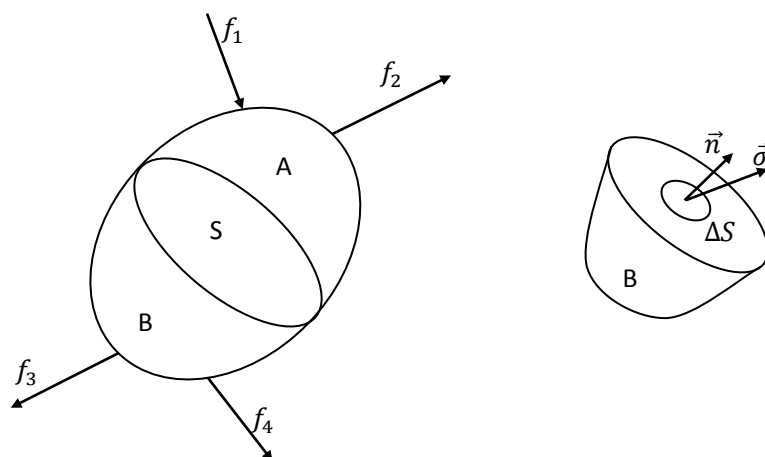
面力是作用在物体中任意一个数学面（包括物体的边界面）上的力。它是由邻近这个数学面的、粒子间的相互作用力所产生的（实质是粒子间的键力，如离子键、共价键、分子键、金属键和氢键），量纲为 $[\text{力}/\text{长度}^2]$ 。作用于物体边界面的力通常有压力、接触力等。

体力通常又称长程力，面力通常又称短程力。



## § 2.2 欧拉——柯西应力原理

任一物体，受到外力的作用都将产生变形。考察如图所示的弹性体 $V$ ，用一个截面 $S$ 将 $V$ 切开，取其 $B$ 部分来研究。一般来讲， $A$ 部分通过截面 $S$ 对 $B$ 部分的作用力不是均匀分布的（即 $S$ 面上各点的力一般是不同的），所以我们再在 $S$ 面上一点 $P$ 的周围取一个微小面元 $\Delta S$ 来考察。设 $\Delta S$ 的法线方向为 $\vec{n}$ ，它上面的应力主矢量为 $\Delta \vec{\sigma}$ ，相对于 $P$ 点的合力偶为 $\Delta \vec{G}$ ，显然， $\Delta \vec{\sigma}$ 与 $\Delta \vec{G}$ 的大小和方向与 $\Delta S$ 的大小与取向 $\vec{n}$ 有关。



欧拉——柯西提出：

$$\text{存在: } \begin{cases} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\sigma}}{\Delta S} = \frac{d\vec{\sigma}}{dS} = \vec{\sigma}^{(n)} \\ \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{G}}{\Delta S} = 0 \end{cases}$$

..... (2-2-1)

这就是欧拉——柯西应力定理。根据这一定理推导出的小形变下的弹性理论，经实践检验是合理的。

我们称 $\vec{\sigma}^{(n)}$ 为过 $P$ 点，以 $\vec{n}$ 为法向量的平面上 $P$ 点的应力矢量。这个应力矢量在弹性体内，不仅随着点的不同而变化，就是在同一个点上，也随着面元 $\Delta S$ 的法方向的变化而改变。所以，如果说物体内“某点的应力矢量为若干”是没有意义的，还必须同时指明过该点截面的法方向。

一般情况下， $\vec{\sigma}^{(n)}$ 与 $\vec{n}$ 不相重合。对 $\vec{\sigma}^{(n)}$ 的常用分解形式有两种：

<i> 直角坐标系中分解:

$$\vec{\sigma}^{(n)} = \sigma_i \vec{e}_i \quad \dots (2-2-2)$$

其中 $\sigma_i$ 为 $\vec{\sigma}^{(n)}$ 在第 $i$ 个轴上的分量。

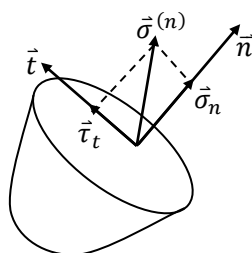
<ii> 沿 $\vec{n}$ 和与 $\vec{n}$ 垂直方向 $\vec{t}$ 分解:

$$\vec{\sigma}^{(n)} = \vec{\sigma}_n + \vec{\tau}_t \quad \dots (2-2-3)$$

其中:  $\vec{\sigma}_n = (\vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{n})\vec{n}$  称为正应力

$\vec{\tau}_t = (\vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{t})\vec{t}$  称为剪应力

这里 $\vec{t}$ 是与 $\vec{\sigma}^{(n)}$ 、 $\vec{n}$ 共面, 且与 $\vec{n}$ 垂直, 并在 $\Delta S$ 面内的单位矢量。



应力矢量 $\vec{\sigma}^{(n)}$ 的含义是单位面积上的作用力, 单位与压强的单位相同。在国际单位制(SI制)中为牛顿/米<sup>2</sup>, 在 cgs 单位制中为达因/厘米<sup>2</sup>。

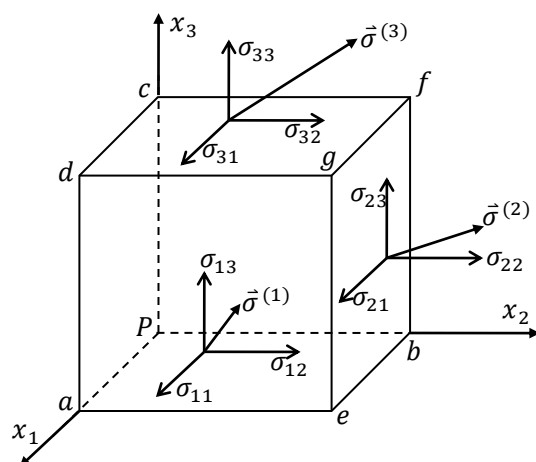
$$\text{单位换算} \left\{ \begin{array}{l} \text{cgs 制: } 1 \text{ 巴 (bar)} = 10^6 \text{ 达因/厘米}^2 \\ \text{SI 制: } 1 \text{ 牛顿/米}^2 = 1 \text{ 帕 (Pascal)} \end{array} \right.$$

$$1 \text{ 兆帕} = 10^6 \text{ 帕} = 10^6 \text{ 牛顿/米}^2 = 10 \text{ 巴} \quad \text{因为 } 1 \text{ 牛顿} = 10^5 \text{ 达因, } 1 \text{ m}^2 = 10^4 \text{ cm}^2$$

### §2.3 一点的应力状态——应力张量

我们知道: 物体中某点受力状态的完全确定, 意味着过该点沿任意一个方向的应力矢量已知。

下面我们将推出一个结论: 若已知物体中过任一点 $P$ 的三个微小正交面上的九个应力分量, 则过该点任一有向面元上的应力矢量均可求出来。



我们从受力物体中过一点 $P$ 截取一个微小的正六面体（如图），则每个面上都有应力矢量存在。考察以 $\vec{e}_i$ 为法方向的三个正交微面元  $aegd$ 、 $begf$  和  $cdgf$  上的应力矢量 $\vec{\sigma}^{(1)}$ 、 $\vec{\sigma}^{(2)}$ 和 $\vec{\sigma}^{(3)}$ ，按如图所取的坐标系，在该坐标系中将这三个应力矢量按应力矢量第一种分解形式分解有：

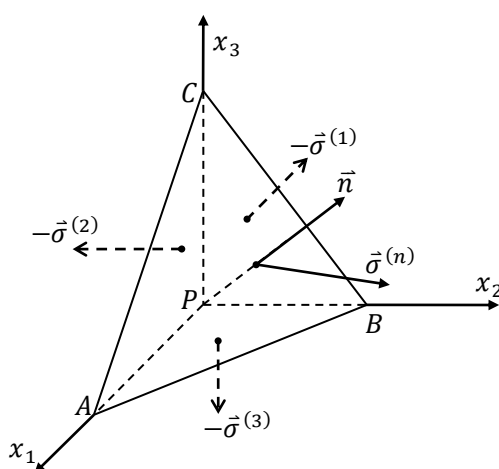
$$\begin{cases} \vec{\sigma}^{(1)} = \sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{12}\vec{e}_2 + \sigma_{13}\vec{e}_3 \\ \vec{\sigma}^{(2)} = \sigma_{2j}\vec{e}_j \\ \vec{\sigma}^{(3)} = \sigma_{3j}\vec{e}_j \end{cases}$$

简写为

$$\vec{\sigma}^{(i)} = \sigma_{ij}\vec{e}_j$$

..... (2-3-1)

其中： $\vec{\sigma}^{(i)}$ 表示以 $\vec{e}_i$ 为法方向的微面元上的应力矢量。 $\sigma_{ij}$ 表示 $\vec{e}_i$ 方向微面元上的应力矢量在 $\vec{e}_j$ 方向上的分量。当 $i = j$ 时， $\sigma_{ij}$ 称为正应力， $i \neq j$ 时， $\sigma_{ij}$ 称为剪应力。对正应力规定拉应力为正（这与岩石力学中的规定正好相反），压应力为负。对剪应力规定：面元法向 $\vec{n}$ 与 $\vec{e}_i$ 同向，则 $\sigma_{ij}$ 与 $\vec{e}_j$ 同向为正，反向为负；若面元法向 $\vec{n}$ 与 $\vec{e}_i$ 反向，则 $\sigma_{ij}$ 与 $\vec{e}_j$ 反向为正，同向为负。



下面再考察以 $P(\vec{r})$ 为顶点的微小四面体（如图）。设截面  $ABC$  的面积为 $dS$ ，法方向为 $\vec{n}$ ，则 $\vec{e}_j$ 方向上的截面面积为：

$$dS_j = d\vec{S} \cdot \vec{e}_j = n_j dS$$

其中 $n_j$ 为单位矢量 $\vec{n}$ 的第 $j$ 个分量，或 $\vec{n}$ 相对于 $\vec{e}_j$ 的方向余弦。设作用在 $dS$ 面上的应力矢量为 $\vec{\sigma}^{(n)}$ ，作用在小四面体 $dV$ 上的体力为 $\vec{f}$ ，在静力平衡下，由牛顿第二定律得小四面体的平衡方程为：

$$\vec{\sigma}^{(n)} dS - \vec{\sigma}^{(i)} dS_i + \vec{f} dV = 0$$

（其中： $dV = \frac{1}{3} h dS$ ， $h$ 为 $P$ 点到 $dS$ 面的垂直距离）

方程中 $i$ 为求和指标。 $\vec{\sigma}^{(i)}$ 前引入负号是因为三个正交的截面 $dS_i$ 的外法线方向与坐标轴正向相反。各项顶端的“ $\bar{\phantom{x}}$ ”表示平均值。只要 $dV$ 足够小，以至于在 $dV$ 的线度范围内，各物理量的变化小于精度要求，即可用各种平均值代替相应的分布函数。

由上式推出：

$$\vec{\sigma}^{(n)} dS - \vec{\sigma}^{(i)} n_i dS + \vec{f} \cdot \frac{1}{3} h dS = 0$$

当 $h \rightarrow 0$ 时， $dV \rightarrow 0$ ， $dS \neq 0$ ，则得到（注意：上式第三项是 $h \rightarrow 0$ 时的高阶小量，且还需保证 $h \rightarrow 0$ 时， $P(\vec{r}) \in dV$ ，以及 $dS$ 的方向 $\vec{n}$ 不变）：

$$\vec{\sigma}^{(n)} = n_i \vec{\sigma}^{(i)} = n_i \sigma_{ij} \vec{e}_j \quad \dots\dots (2-3-2)$$

将 $\vec{\sigma}^{(n)}$ 沿三个坐标轴方向分解有：

$$\vec{\sigma}^{(n)} = \sigma_1 \vec{e}_1 + \sigma_2 \vec{e}_2 + \sigma_3 \vec{e}_3 = \sigma_j \vec{e}_j \quad \dots\dots (2-3-3)$$

比较（2-3-2）与（2-3-3）式可得：

$$\sigma_j = n_i \sigma_{ij} \xrightarrow{\text{由}\sigma_{ij}=\sigma_{ji}} \sigma_{ij} n_j = \sigma_i \quad \dots\dots (2-3-4)$$

（2-3-4）式就是著名的柯西（Cauchy）公式。

柯西公式告诉我们：过弹性体上一点 $P$ 的任意有向面元 $d\vec{S}$ 上的应力矢量 $\vec{\sigma}^{(n)}$ 均可由过该点的三个正交面元上的九个应力分量和 $d\vec{S}$ 的法向单位矢量的三个分量来确定。

对于（2-3-4）式，根据“§ 1.3 数学准备”给出的张量判别定理可知： $\sigma_{ij}$ 是一个二阶张量，称为应力张量。所以有张量坐标变换关系式：

$$\sigma'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} \sigma_{kl} \quad \dots\dots (2-3-5)$$

其中 $\alpha_{ik}$ 、 $\alpha_{jl}$ 是新、旧坐标系之间的坐标变换系数（矩阵）。

上式表明：若一点在旧坐标系下的应力张量的分量 $\sigma_{ij}$ 知道了，则在新的坐标系下的应力张量的分量便可完全确定。

必须注意：坐标变换后，应力张量的各分量都改变了（即 $\sigma'_{ij} \neq \sigma_{kl}$ ），但这九个应力分量作为一个“整体”所描绘的一点的应力状态是不会因坐标变换而改变的。就像矢量的模不因坐标变换而改变一样。

## §2.4 动量方程和角动量方程

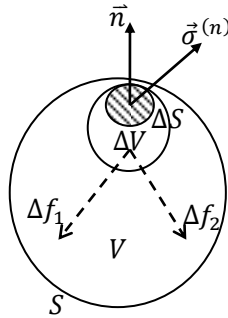
### <I> 动量方程

力学的一般原理在弹性力学中仍是有效的，只不过要将它们改写成弹性体所适用的形式。在质点力学中，动量定理表述为：

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

其中 $m\vec{v}$ 是质点线动量。

即：在惯性系中，质点（或质点集合）的线动量的时间变化率等于作用在其上的合外力。



为了将质点力学中的动量定理推广到连续体情形，我们在变形物体中任取一体积为 $V$ ，表面面积为 $S$ 的单元体（如上图）。设周围介质对此单元体上 $\Delta S$ 面元（法向为 $\vec{n}$ ）的表面力为 $\vec{\sigma}^{(n)} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\sigma}}{\Delta S} = \frac{d\vec{\sigma}}{dS}$ （柯西公式 $\sigma_i^{(n)} = n_j \sigma_{ji}$ 是分量形式）。设单元体上 $\Delta V$ 质元所受体力为 $\vec{f} =$

$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta V}$ ，分量形式为 $f_i = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta f_i}{\Delta V} = \frac{df_i}{dV}$ ，其中 $\Delta f_i$ 为作用在 $\Delta V$ 上体力的第 $i$ 个分量。

那么作用于单元体 $V$ 上的合外力是上述面力与体力之和，即为：

$$\oint_S \sigma_i^{(n)} dS + \int_V f_i dV$$

如果用 $\rho$ 表示质量密度， $v_i$ 表示质元 $\Delta V$ 的速度第 $i$ 个分量，则 $V$ 内质元 $\Delta V$ 的线动量为 $\rho v_i$ ，整个 $V$ 内质量的线动量为：

$$\int_V \rho v_i dV$$

动量定理可表述为：



$$\oint_S \sigma_i^{(n)} dS + \int_V f_i dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV \quad \dots (2-3-6)$$

应用高斯定理于上式左端，并注意到柯西公式  $\sigma_i^{(n)} = n_j \sigma_{ji} = \sigma_{ij} n_j$  ( $n_j$  是方向余弦)，则有：

$$\oint_S \sigma_i^{(n)} dS = \oint_S \sigma_{ij} n_j dS = \oint_S \sigma_{ij} dS_j = \oint_S \vec{\sigma}^{(i)} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{\sigma}^{(i)}) dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ji} dV$$

则 (2-3-6) 式可改写为：

$$\int_V \left( f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ji} \right) dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV$$

因  $V$  是任取的，所以有：

$$f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ji} = f_i + \sigma_{ji,j} = \frac{d}{dt} (\rho v_i) \quad \dots (2-3-7)$$

上式即为弹性力学中描述物体运动的重要方程之一——动量方程，亦称为运动方程。

在弹性静力学中常常要计算静力平衡下物体受力变形或物体内的应力分布，所以要用到平衡方程。当静力平衡时，则由和外力等于零（也就是物体上点点的位移不随时间变化，亦即：  $v_i = \frac{du_i}{dt} = 0$ ）给出：

$$\oint_S \sigma_i^{(n)} dS + \int_V f_i dV = 0$$

亦即：

$$f_i + \sigma_{ji,j} = 0 \quad \dots (2-3-8)$$

上式即为弹性力学平衡方程，亦称纳维叶（Navier）方程。

## <II> 角动量方程

对质点力学，角动量定理表述为：

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}, \quad \text{角动量 } \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

为了把这个定理表述成连续体所适用的形式，我们在受力物体内部任取一体积为  $V$ ，表面面积为  $S$  的单元体，设  $\vec{r} = x_i \vec{e}_i$  为  $V$  内体积元  $dV$  相对某固定点（如坐标原点）的矢径， $\vec{v}_k$  表示  $dV$  的运动速度，则单元体  $V$  的总角动量变化率的第  $i$  个分量为

$$\frac{dL_i}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V (\vec{r} \times \rho \vec{v})_i dV = \frac{d}{dt} \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k dV \quad \dots (a)$$

而作用在  $V$  上合外力矩的第  $i$  个分量为：

$$M_i = \oint_S (\vec{r} \times \vec{\sigma}^{(n)})_i dS + \int_V (\vec{r} \times \vec{f})_i dV$$

或

$$M_i = \oint_S \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_k dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j f_k dV \quad \dots (b)$$

利用柯西公式 ( $\sigma_k = n_l \sigma_{lk}$ ) 和高斯定理, 上式右边第一项表示为:

$$\begin{aligned} \oint_S \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_k dS &= \int_V (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk})_{,l} dV = \int_V (\varepsilon_{ijk} \delta_{jl} \sigma_{lk} + \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk,l}) dV \\ &= \int_V (\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk,l}) dV \quad \dots (c) \end{aligned}$$

联立 (a) (b) (c), 即得连续体所适用的角动量定理为:

$$\frac{d}{dt} \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k dV = \int_V (\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk,l}) dV + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j f_k dV \quad \dots (d)$$

又上式左边为:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k dV &= \int_V \left( \varepsilon_{ijk} v_j \rho v_k + \varepsilon_{ijk} x_j \frac{d(\rho v_k)}{dt} \right) dV \\ &\xrightarrow{\text{用习题一的结果: } \varepsilon_{ijk} v_j \rho v_k = 0} \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \frac{d(\rho v_k)}{dt} dV \end{aligned}$$

注意上面利用了  $(\vec{v} \times \vec{v})_i = \varepsilon_{ijk} v_j v_k \equiv 0$  这一结果。

所以 (d) 式化为:

$$\int_V \varepsilon_{ijk} x_j \left[ f_k + \sigma_{lk,l} - \frac{d}{dt} (\rho v_k) \right] dV + \int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0 \quad \dots (e)$$

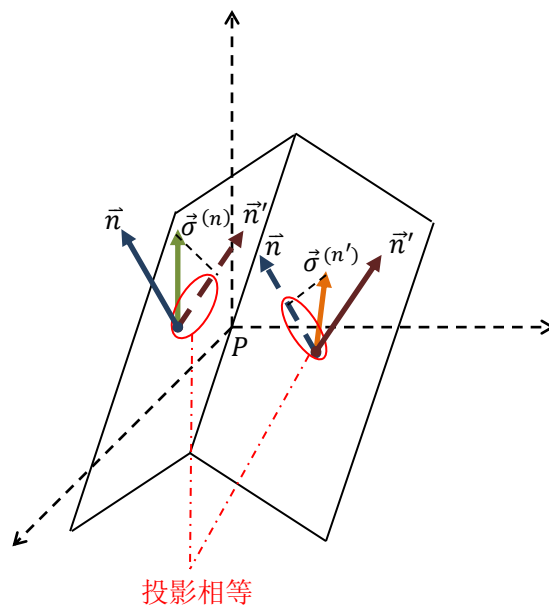
由运动方程, 上式左边第一项为零, 又因  $V$  是任取的, 所以有:

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \xrightarrow{\text{由习题中的结果}} \sigma_{kj} = \sigma_{jk} \quad \dots (2-3-9)$$

上式表明: 两相互垂直的截面上相应的剪应力分量彼此相等。这一结论称为剪应力互等定律。这个结果表明: 角动量定理要求应力张量是对称张量。所以应力张量的九个分量只有六个是独立的, 亦即一点的应力状态只需要六个独立的应力分量就可以完全表述了。

### <III> 应力矢量互换定律

设过物体上任一点  $P$  的两个微面元, 其法方向分别为  $\vec{n}$  和  $\vec{n}'$ , 相应的应力矢量为  $\vec{\sigma}^{(n)}$  和  $\vec{\sigma}^{(n')}$ , 可以证明: 第一个微面元上的应力矢量  $\vec{\sigma}^{(n)}$  在第二个微面元的法方向投影  $\vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{n}'$ , 等于第二个微面元上的应力矢量  $\vec{\sigma}^{(n')}$  在第一个微面元的法方向的投影  $\vec{\sigma}^{(n')} \cdot \vec{n}$ 。



即：

$$\vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{n}' = \vec{\sigma}^{(n')} \cdot \vec{n}$$

..... (2-3-10)

证：

$$\because \vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{n}' = \sigma_i^{(n)} n'_i = n_j \sigma_{ji} n'_i$$

而：

$$\vec{\sigma}^{(n')} \cdot \vec{n} = \sigma_i^{(n')} n_i = n'_j \sigma_{ji} n_i \xrightarrow{\text{由应力张量对称性}} n'_j \sigma_{ij} n_i \xrightarrow{\text{由注}} n_i \sigma_{ij} n'_j \xrightarrow{\text{交换哑标}} n_j \sigma_{ji} n'_i = \vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{n}'$$

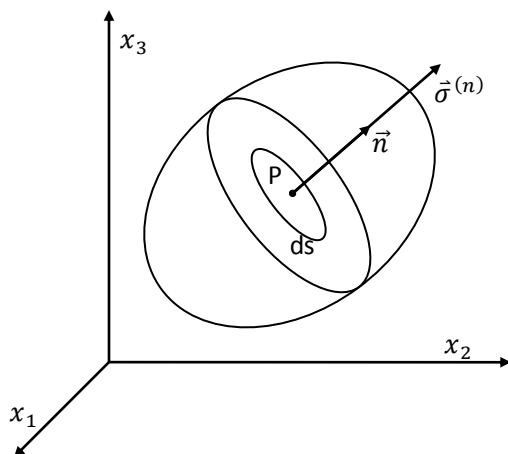
[注：  $n'_j \sigma_{ij} n_i = n_i \sigma_{ij} n'_j$  ]，这里  $\sigma_{ij}$  是  $P$  点的应力张量。

剪应力互等定律 (2-3-9) 是应力互换定律的一个特殊情形。

## §2.5 主应力、主应力方向、应力张量不变量

### <I> 问题的提法和结论

一般说来，物体中一点  $P$  沿任一方向为  $\vec{n}$  的截面上的应力矢量  $\vec{\sigma}^{(n)}$  与  $\vec{n}$  方向不一致。现在我们要问：一点的应力状态中，是否存在这样的面元，在这个面元上的应力矢量正好等于这个面元上的正应力，亦即该面元上剪应力为零。如若存在，我们就称这样的截面为主应力面，相应的方向称为主应力方向，而相应的应力矢量称为主应力。



用数学语言来描述，这个问题归结为方程组：

$$\begin{cases} \sigma_i^{(n)} = \sigma n_i = \sigma n_j \delta_{ij} \\ n_j n_j = 1 \end{cases}$$

.... (2-5-1)

是否有解。这里 $\sigma$ 记为主应力值， $n_i$ 为主应力面法方向。

由柯西公式  $\sigma_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j$ , 上方程组化为：

$$\begin{cases} (\sigma_{ji} - \delta_{ji} \sigma) n_j = 0 \\ n_j^2 = 1 \end{cases}$$

.... (2-5-2)

这是一个关于 $n_j$ 的线性方程组。由线性代数理论知，要该方程组有不全为零（即非零）解，则要求系数行列式等于零，即：

$$|\sigma_{ji} - \delta_{ji} \sigma| = 0 \text{ 或 } \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

.... (2-5-3)

将上行列式展开后得应力状态特征方程，这是一个关于 $\sigma$ 的三次多项式

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

.... (2-5-4)

式中：

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ I_2 &= \frac{1}{2} (\sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ji}) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \\ I_3 &= \det(\sigma_{ij}) = \varepsilon_{ijk} \sigma_{1i} \sigma_{2j} \sigma_{3k} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

.... (2-5-5)

是特征方程(2-5-4)的三个系数,它们是 $\sigma_{ij}$ 的函数。在实际工作中,通常并不用(2-5-5)式计算这三个系数,我们只要直接展开应力状态特征方程就能得到。

设 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ 为方程(2-5-4)的三个根,则(2-5-4)式可改写成:

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0 \quad \dots (2-5-6)$$

将(2-5-6)展开并与(2-5-4)比较系数可得:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \quad \dots (2-5-7)$$

因为应力张量 $\sigma_{ij}$ 是对称的,并且每个元素都是实数,根据线性代数理论,特征方程(2-5-4)的三个根必为实数。

并且,如果 $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ ,则将 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ 分别代入(2-5-2)后解出的三个主应力方向相互正交。关于这一点我们可用如下张量推证法加以证明:

当 $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ 时(三个主应力互不相等时),可以证明相应的三个主方向互相垂直。

证:设相应与 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$ 的主方向为 $\vec{n}^{(1)}$ 和 $\vec{n}^{(2)}$ ,则由方程(2-5-2)有:

$$(\sigma_{ji} - \delta_{ij}\sigma_1)n_i^{(1)} = 0 \quad \dots (a)$$

$$\text{和} (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_2)n_j^{(2)} = 0 \quad \dots (b)$$

将(a)乘 $n_j^{(2)}$ , (b)乘 $n_i^{(1)}$ 得:  $(\sigma_{ji} - \delta_{ij}\sigma_1)n_i^{(1)}n_j^{(2)} = 0$ ,  $(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_2)n_j^{(2)}n_i^{(1)} = 0$

上两式相减得:  $\delta_{ij}(\sigma_1 - \sigma_2)n_i^{(1)}n_j^{(2)} = (\sigma_1 - \sigma_2)n_j^{(1)}n_j^{(2)} = 0$

因 $\sigma_1 \neq \sigma_2$ , 则必有 $n_j^{(1)}n_j^{(2)} = 0 \rightarrow \vec{n}^{(1)} \perp \vec{n}^{(2)}$ 。

同理可证 $\vec{n}^{(1)} \perp \vec{n}^{(3)}$ 、 $\vec{n}^{(2)} \perp \vec{n}^{(3)}$  ( $\vec{n}^{(i)}$ 是相应于 $\sigma_i$ 的主方向)。

结论:任一点的应力状态中存在主应力、主应力方向。如果给定一点的六个独立的应力分量 $\sigma_{ij}$ ,则通过(2-5-4)(2-5-5)求出三个应力值 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ ;再利用(2-5-2)式可求出相应的三个主应力方向。

## <II> 主应力的性质、应力张量不变量

(1). 过一点关于主方向平面的主应力就是该平面上的正应力,而这时该平面上的剪应力为零。

(2). 当三个主应力值互不相等时,则得出唯一确定的三个相互垂直的主应力方向。

(3). 当 $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$ 时,只有相应 $\sigma_1$ 的主方向是确定的,而垂直于此方向的任一方向都可以是主应力方向。

(4). 当 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ 时,则任何方向都是主应力方向。

(5). 若特定地取三个主方向为坐标轴,则根据应力张量和主应力方向的定义可知,这时的应力张量(坐标原点这一点上的)简化为:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

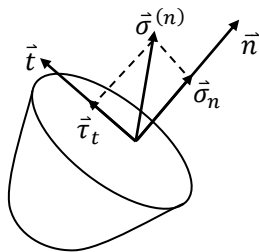
这时的三个坐标轴称为应力张量主轴，相应的主应力值称为应力张量的主值。

(6). 由于张量的主值代表了一点上应力状态的性质，其在系统稳定后，就确定了，与坐标系的选取无关。亦即 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ 不随坐标系的变换而变换。由(2-5-7)式可见： $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 也不因坐标系的变换而变换。因此， $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 称为应力张量的**第一、第二和第三不变量**。

可以证明，二阶张量的对称性和反对称性是独立于坐标系的（即与坐标系无关）。

## §2.6 最大剪应力

我们知道：一点的应力状态中，存在主应力面。在此面上正应力方向与面元法方向一致，亦即在主应力面上，剪应力为零。那么是否存在这样的面元，其上的剪应力的绝对值取到最大？下面我们就来解决这个问题。



我们知道：任一法向为 $\vec{n}$ 的面元上的剪应力的平方为：

$$\tau_t^2 = \left( \sigma_i^{(n)} \right)^2 - \sigma_n^2 \quad \dots (2-6-1)$$

为简单起见：将坐标轴选为主应力轴，设三个主应力为 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ ，则应力张量为：

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

在主轴系下，由柯西公式知，法向为 $\vec{n}$ 的面元上的应力矢量各分量为：

$$\sigma_i^{(n)} = n_j \sigma_{ij} \rightarrow \vec{\sigma}^{(n)} = (n_1 \ n_2 \ n_3) \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = (n_1 \sigma_1 \ n_2 \sigma_2 \ n_3 \sigma_3)$$

$n_1 \sigma_1$ 、 $n_2 \sigma_2$ 、 $n_3 \sigma_3$ 是 $\vec{\sigma}^{(n)}$ 分别在三个主轴方向的分量。

因此：

$$\left( \sigma_i^{(n)} \right)^2 = \sigma_i^{(n)} \cdot \sigma_i^{(n)} = (n_1 \sigma_1)^2 + (n_2 \sigma_2)^2 + (n_3 \sigma_3)^2$$

.... (a)

而正应力为:

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_n &= (\vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{n})\vec{n} = [(n_1\sigma_1\vec{e}_1 + n_2\sigma_2\vec{e}_2 + n_3\sigma_3\vec{e}_3) \cdot (n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3)]\vec{n} \\ &= (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)\vec{n}\end{aligned}$$

即:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= |\vec{\sigma}_n| = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \\ \sigma_n^2 &= (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2\end{aligned}$$

.... (b)

把 (a)、(b) 带入 (2-6-1) 知:  $\tau_t$  是法方向分量  $n_1, n_2, n_3$  的函数, 即:

$$\begin{cases} \tau_t^2 = (\sigma_i^{(n)})^2 - \sigma_n^2 = [(n_1\sigma_1)^2 + (n_2\sigma_2)^2 + (n_3\sigma_3)^2] - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases}$$

....(2-6-2)

现在的问题是: 当  $n_1, n_2$  或  $n_3$  取何值时,  $\tau_t^2$  取到极值?

以  $n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$  代入 (2-6-2) 中, 消去  $n_3^2$  得:

$$\tau_t^2 = [(\sigma_1^2 - \sigma_3^2)n_1^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2)n_2^2 + \sigma_3^2] - [(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 + \sigma_3]^2$$

....(2-6-3)

可见:  $\tau_t$  是  $n_1$  和  $n_2$  的函数, 其极值条件是:

$$\frac{\partial(\tau_t^2)}{\partial n_1} = 0, \quad \frac{\partial(\tau_t^2)}{\partial n_2} = 0$$

对 (2-6-3) 式用上述求极值条件的得到下列方程组:

$$\begin{aligned}n_1(\sigma_1 - \sigma_3) \left[ (\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \right] &= 0 \\ n_2(\sigma_2 - \sigma_3) \left[ (\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \right] &= 0\end{aligned}$$

..... (2-6-4)

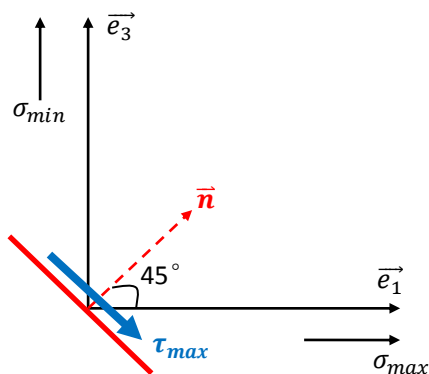
讨论:

<i> 当  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  互不相等时, 由 (2-6-4) 和 (2-6-2) 可解出如下三组解(见表一), 当  $n_1 n_2 n_3$  轮换被消去时, 类似上述步骤可解出 6 组关于法向方向的解和相应的  $\tau$  的极值, 见表二。

表一	I	II	III
$n_1$	0	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
$n_2$	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$n_3$	$\pm 1$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\tau_{max} \tau_{min}$	0	$\pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$	$\pm \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)$

表二	I	II	III	IV	V	VI
$n_1$	0	0	$\pm 1$	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
$n_2$	0	$\pm 1$	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
$n_3$	$\pm 1$	0	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$\tau_{max} \tau_{min}$	0	0	0	$\pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$	$\pm \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)$	$\pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$

其中前三组解对应的三个主应力方向，在主应力面上剪应力取到极小值 $\tau_{min} = 0$ 。后三组解对应三个剪应力极大值 $\tau_{max}$ 。而最大剪应力对应主应力之差最大的那一组。并且可以看出，最大剪应力相应的面元的法方向与最大主应力、最小主应力在同一平面内，且与主应力的方向成  $45^\circ$  角（见下图）。



这是显然的。例如取 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ，则 $\tau_{max} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)$ ，这时 $\tau_{max}$ 所在平面法向 $\vec{n} = (n_1 \ n_2 \ n_3) = (\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \ 0 \ \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ ，这表明 $\vec{n}$ 与 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_3$ 方向夹角为  $45^\circ$ ，与 $\vec{e}_2$ 方向夹角为  $90^\circ$ 。而 $\vec{e}_1$ 就是 $\sigma_1$ 轴， $\vec{e}_3$ 就是 $\sigma_3$ 轴，所以说 $\vec{n}$ 与 $\sigma_1$ 、 $\sigma_3$ 在同一平面内，且与这两个主应力的方向成  $45^\circ$  角。

<ii> 当主应力有两个相等时，例如， $\sigma_1 = \sigma_3 \neq \sigma_2$ ，则（2-6-4）式中的第一式已经被满足，第二式化为：

$$n_2(\sigma_2 - \sigma_3) \left[ (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \right] = 0$$

即： $n_2 = 0$ 或 $n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 是上式的根。

当 $n_2 = 0$ 时，由（2-6-3）式解得： $\tau_t^2 = 0$ （这不是极值）。

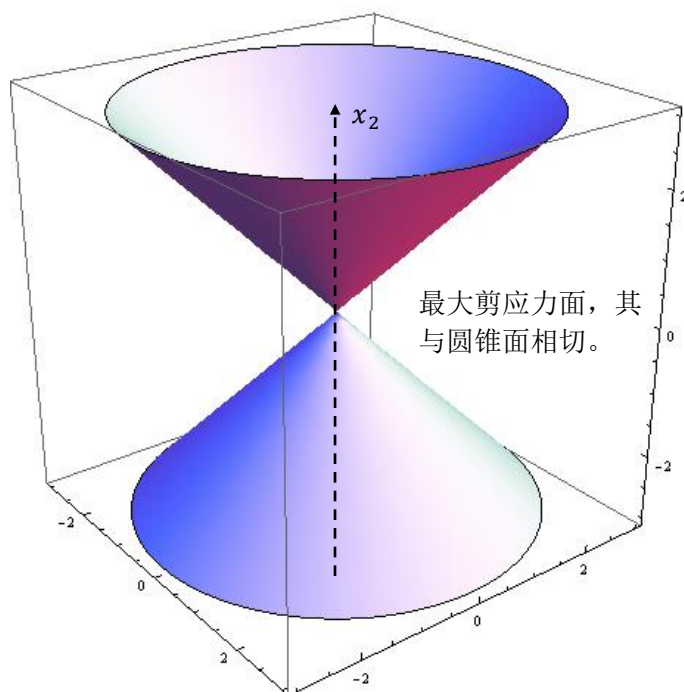


当 $n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，由（2-6-3）式解得：

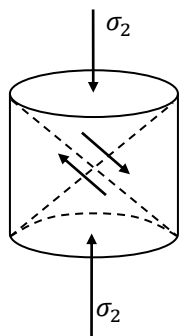
$$\tau_t^2 = \left[ \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \right]^2 \quad (\text{这是最大剪应力})$$

由 $n_j^2 = 1 \rightarrow n_1^2 + n_3^2 = 1 - n_2^2 = \frac{1}{2}$ ，可见： $n_1$ 的变化区间由 0 到 $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，而 $n_3$ 的变化区间由 $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 到 0。

所以最大剪应力对应的面元的法方向 $\vec{n}$ 组成了与 $\sigma_2$ 轴（亦即 $x_2$ 轴）成 $45^\circ$ 的圆锥面（见下图）。即：当 $\sigma_1 = \sigma_3 \neq \sigma_2$ 时，法向与 $x_2$ 轴（亦即 $\sigma_2$ 轴）成 $45^\circ$ 的任一面元上的剪应力都取到最大值 $\pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$ 。当然所有这些面元的法方向即构成了与 $x_2$ 轴成 $45^\circ$ 的圆锥面。实验结果证实了这个理论结论。



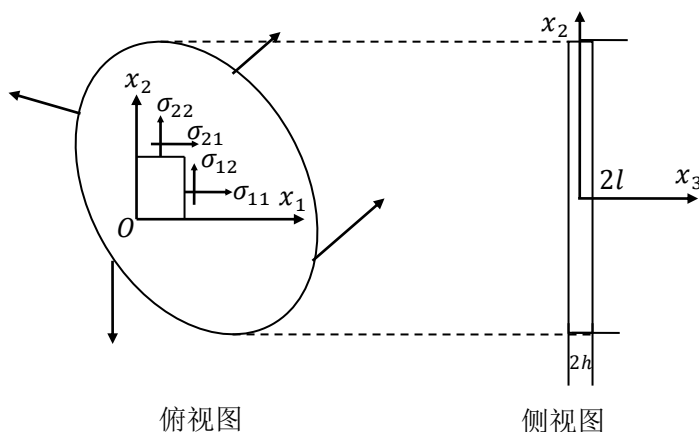
在岩石力学的实验中，对岩石样品的单轴压缩试验，其结果就是样品的破裂面基本与压力轴成 $45^\circ$ 角。为什么说是基本与压力轴成 $45^\circ$ 呢，因为对各种不同的岩石，其断裂面上有摩擦阻力的作用，所以一般在单轴压下，其破裂面与压力轴的夹角不正好是 $45^\circ$ 。例如：干花岗岩加压而产生破裂，其破裂面的法向与最大主应力轴的夹角在 $25^\circ - 30^\circ$ 之间，与理论推导的结果相符。



<iii>当三个主应力相等时，即 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 > 0$ （或者 $< 0$ ）由（2-6-3）式可见，剪应力处处为0。这又回到了均匀拉伸或压缩应力状态。

## §2.7 应力圆（莫尔 Mohr 圆）

### <I> 平面应力状态及两维应力圆



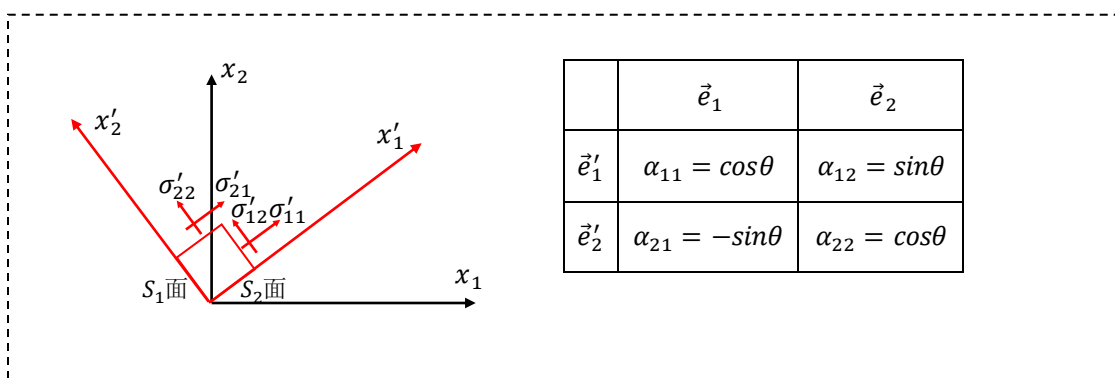
考虑一个简化的物理模型。一薄板( $h \ll l$ )边缘受拉力（作用力位于板平面内），板的两端面自由（即不受力），如图。这种情况下可认为在整个板上有：

$$\sigma_{i3} = \sigma_{3i} = 0 \quad \dots (2-7-1)$$

这时应力张量呈如下形式：

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots (2-7-2)$$

我们称有由（2-7-2）式表述的应力状态为平面应力状态。关于平面应力问题我们将在第六章中讨论。这里我们只讨论在平面应力状态下，不同坐标系中应力分量之间的关系，研究这种关系具有很大的实际意义，关于这一点大家可以在今后的专业课学习中逐步体会到。



注意：下面各式的 $\sigma'_{11}$ 就是坐标系旋转后以 $x'_1$ 为法向的平面的 $S_1$ 上的正应力 $\sigma_n$ ； $\sigma'_{12}$ 实际就是剪应力 $\tau$ 。 $\sigma'_{22}$ 实际就是坐标系旋转后以 $x'_2$ 为法向的平面 $S_2$ 上的正应力。

我们先来考虑坐标系的旋转（如上图），当 $ox_1x_2$ 旋转 $\theta$ 角到 $ox'_1x'_2$ 时，按应力张量的坐标变换关系式：

$$\sigma'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}\sigma_{kl} \quad \dots\dots (2-7-3)$$

得：

$$\begin{cases} \sigma'_{11} = \sigma_{11}\cos^2\theta + \sigma_{22}\sin^2\theta + 2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta \\ \sigma'_{22} = \sigma_{11}\sin^2\theta + \sigma_{22}\cos^2\theta - 2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta \\ \sigma'_{12} = \sigma'_{21} = (-\sigma_{11} + \sigma_{22})\sin\theta\cos\theta + \sigma_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{cases} \quad \dots\dots (2-7-4)$$

利用三角关系： $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ ， $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ 可将上面三个式子改写为：

$$\begin{cases} \sigma'_{11} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\cos 2\theta + \sigma_{12}\sin 2\theta \\ \sigma'_{22} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\cos 2\theta - \sigma_{12}\sin 2\theta \\ \sigma'_{12} = \sigma'_{21} = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\sin 2\theta + \sigma_{12}\cos 2\theta \end{cases} \quad \dots\dots (2-7-5)$$

由（2-7-5）式可见：

$$\sigma'_{11} + \sigma'_{22} = \sigma_{11} + \sigma_{22} \quad \dots\dots (2-7-6)$$

这表明：正应力之和是坐标变换不变量。

另外，还可见：

$$\frac{\partial \sigma'_{11}}{\partial \theta} = 2\sigma'_{12} \quad , \quad \frac{\partial \sigma'_{22}}{\partial \theta} = -2\sigma'_{12} \quad \dots\dots (2-7-7)$$

这表明：正应力 $\sigma'_{11}$ 对 $\theta$ 的偏导数与正应力 $\sigma'_{22}$ 对 $\theta$ 的偏导数互为相反数。

对（2-7-5）式，若令： $\sigma'_{12} = \sigma'_{21} = 0$ ，则由 $\tan 2\theta = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}$ 所给定的 $\theta$ 角（我们记为 $\theta'$ ）

对应的 $ox'_1x'_2$ 系即为主轴坐标系。将 $\tan 2\theta = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}$ 代入（2-7-5）式的第一、二两式可得相应的主应力为：

$$\begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{cases} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \quad \dots (2-7-8)$$

通常取  $\sigma_1 > \sigma_2$ ，所以由  $\sigma_1 > \sigma_2$  来确定正负号的选定。

再对 (2-7-5) 式的第三式用极值条件  $\frac{\partial \sigma'_{12}}{\partial \theta} = 0$ ，可得使剪应力取极大的  $\theta$  角（我们记为  $\theta''$ ）为：

$$\tan 2\theta = -\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}}\right)$$

相应的最大剪应力为：

$$\tau_{max} = \sigma'_{12}|_{\theta=\theta''} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \quad \dots (2-7-9a)$$

用  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  表示为：

$$\tau_{max} = \pm \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \quad \dots (2-7-9b)$$

又由：

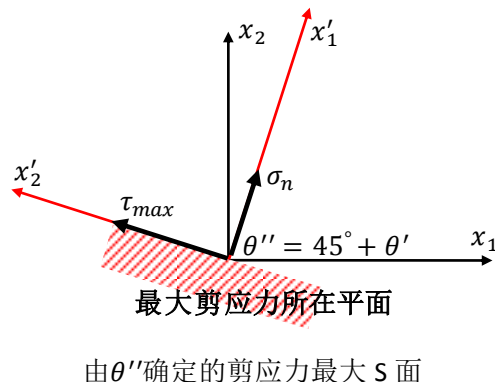
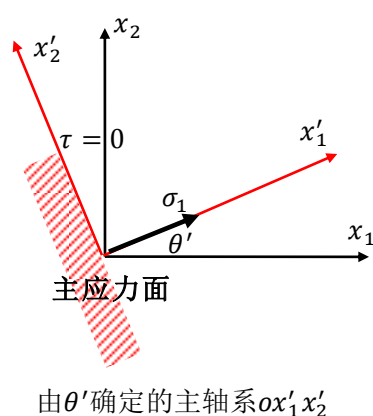
$$\tan 2\theta' \cdot \tan 2\theta'' = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \cdot \left[-\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}}\right)\right] = -1 \quad \dots (2-7-10)$$

亦即：若记  $2\theta'' = 90^\circ + 2\theta'$ （此式表明  $\theta'$  与  $\theta''$  相差  $45^\circ$ ），则有：

$$\tan 2\theta'' = \tan(90^\circ + 2\theta') = -\cot 2\theta' = -\frac{1}{\tan 2\theta'}$$

这正是 (2-7-10) 式。

(2-7-10) 式表明：最大剪应力所在的面与主应力面的夹角为  $45^\circ$ 。这与在 § 2.6 节中所得到的结论完全一样。



由上面的讨论可见：对平面应力状态，若已知一点的应力张量（即  $\sigma_{11}$ ， $\sigma_{22}$ ， $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  三个分量），则可用解析的方法分析这一点的应力状态（包括求主应力  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、主方向  $\theta'$  和最大剪应力  $\tau_{max}$  及方向  $\theta'' = 45^\circ + \theta'$ ）

Mohr 在 1900 年提出一种分析平面应力的几何方法。通过几何图形把非常重要的公式 (2-7-8) 和 (2-7-9) 表述出来, 从而使我们对于平面应力状态下介质中一点的应力如何变化有了更加直观的认识。这几何图形就是所谓的 Mohr 应力圆。

下面我们将把下图 a 中所示的  $ox_1x_2$  系中以任意  $\vec{n}$  为法向的应力矢量  $\vec{\sigma}^{(n)}$  分解成  $O\sigma_n\tau$  平面上的正应力  $\sigma_n$  和剪应力  $\tau$  (即把  $\vec{\sigma}^{(n)}$  用  $O\sigma_n\tau$  平面上的一个点  $(\sigma_n, \tau)$  来表示)。

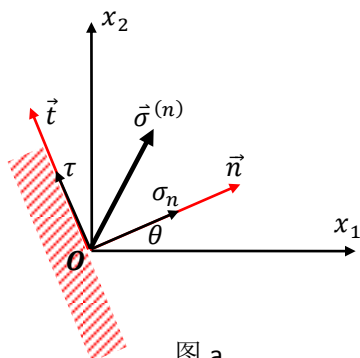


图 a

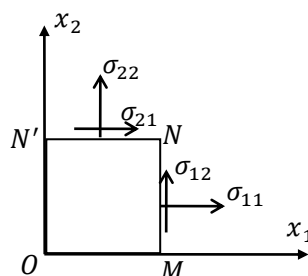


图 b

首先, 我们按给定的  $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$  在  $O\sigma_n\tau$  平面 (即 Mohr 平面) 上找到点  $A(\sigma_{11}, \sigma_{12})$ , A 点代表上图 b 中法向为  $x_1$  的截面 MN 上的应力 (其中  $\sigma_{11}$  就是 MN 面上的正应力,  $\sigma_{12}$  就是 MN 面上的剪应力  $\tau$ )。用与 MN 垂直的面  $NN'$  上的应力  $(\sigma_{22}, \sigma_{21})$  在 Mohr 平面上画出  $A'(\sigma_{22}, -\sigma_{21})$  点。连接  $AA'$  交横轴于 C 点, 以 C 点作圆心, 以 AC 为半径画圆 (如图 c), 这个圆就称为 Mohr 圆。

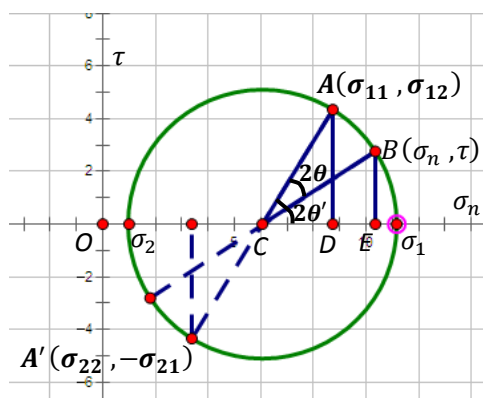


图 c、Mohr 平面 ( $O\sigma_n\tau$ ) 平面

注:  $\angle ACB = 2\theta$   
 $\angle ACE = 2\theta'$   
 $\angle BCE = 2\theta' - 2\theta$

为了得到法线  $\vec{n}$  在逆时针方向与  $x_1$  轴成  $\theta$  角的任意截面 (见图 a、b) 上的应力  $(\sigma_n, \tau)$ , 我们只要从图 c 上的 A 点顺时针沿圆周移动, 扫过圆心角  $2\theta$  后至 B 点, 则 B 点的坐标即为所要求的  $(\sigma_n, \tau)$ 。下面我们由图 c 的几何关系来证明  $(\sigma_n, \tau)$  实为 (2-7-5) 式的第一和第三式。

证: 由图 c 可见: B 点的坐标  $(\sigma_n, \tau)$  的值分别为:

(1) 横坐标  $\sigma_n$ :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \overline{OC} + \overline{CE} = \overline{OC} + \overline{CB} \cos(2\theta' - 2\theta) \\ &= \overline{OC} + \overline{CB} (\cos 2\theta' \cos 2\theta - \sin 2\theta' \sin 2\theta) \end{aligned}$$

注意到:

$$\overline{OC} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \quad (\text{此乃 Mohr 圆的圆心横坐标})$$

$$\overline{CA} = \overline{CB} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \quad (\text{此乃 Mohr 圆的半径})$$

$$\cos 2\theta' = \frac{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}}{\overline{CA}} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\overline{CB}}, \quad \sin 2\theta' = \frac{\sigma_{12}}{\overline{CA}} = \frac{\sigma_{12}}{\overline{CB}}$$

所以:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta$$

此乃 (2-7-5) 式的第一式。

(2) 纵坐标  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \tau &= \overline{CB} \sin(2\theta' - 2\theta) = \overline{CB}(\sin 2\theta' \cos 2\theta - \cos 2\theta' \sin 2\theta) \\ &= \sigma_{12} \cos 2\theta - \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\theta \\ &= -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\theta + \sigma_{12} \cos 2\theta \end{aligned}$$

此乃 (2-7-5) 式的第三式。

由上讨论可知: 在平面应力状态下, 知道一点的应力张量  $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$ , 则可作出

该点的 Mohr 应力圆, 其中圆心坐标为  $\left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, 0\right)$ , 半径为  $\sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$ 。同时, 可确定代表以  $x_1$  轴向为法向的微元面 (MN) 上应力的 A 点。然后如果要求与此微元面成任意夹角  $\theta$  的微元面 ( $M'N'$ ) (即老系  $Ox_1x_2$  逆时针转动  $\theta$  角到新系  $Ox'_1x'_2$ , 以  $x'_1$  为法向的微元面) 上的应力  $(\sigma_n, \tau)$ , 只需在应力圆上由 A 点顺时针转动  $2\theta$  (圆心角) 至 B 点, B 点的坐标就代表所求微元面 ( $M'N'$ ) 上的正应力与剪应力。

用这样的方法分析平面应力状态下一点的应力情况非常直观且方便, 实际用途很广。

**例:** 有一方形板, 承受平面应力为  $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 16000 & 4000 \\ 4000 & 6000 \end{pmatrix}$  [磅/英寸<sup>2</sup>], 如下图所示。试

用 Mohr 圆确定: i>主应力和主平面 (即求  $\theta'$  角); ii>旋转  $\theta = 45^\circ$  板上的应力; iii>最大剪应力和相应平面 (即求  $\theta''$  角)。

解:

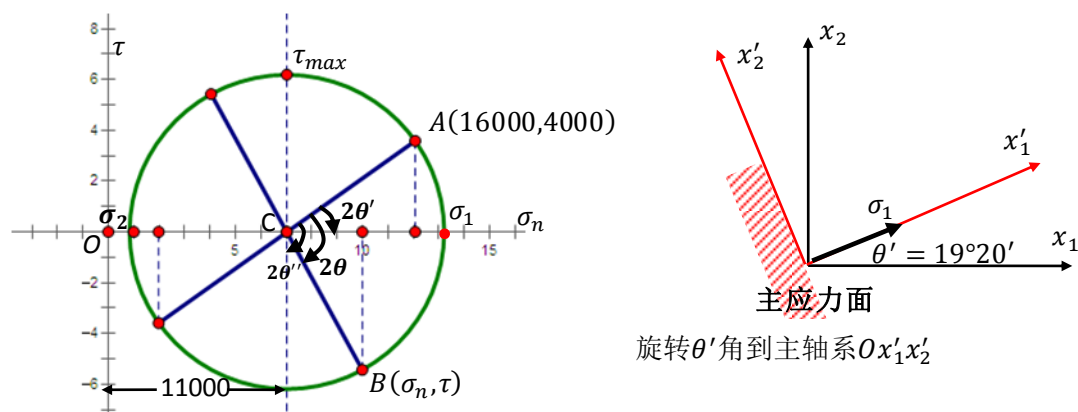
$$(i) \text{ 由 } \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} = \frac{16000 + 6000}{2} = 11000 \text{ [磅/英寸}^2\text{]} \text{ 可得 Mohr 圆的圆心坐标为 } (11000, 0),$$

又由  $\sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = 6400$  [磅/英寸<sup>2</sup>] 可得 Mohr 圆的半径, 从而可在 Mohr 平面上作出此题的 Mohr 圆 (如下图)。同时可在 Mohr 圆上确定代表以  $x_1$  轴向为法向的面元上应力的 A 点。

由 Mohr 圆可得出代数上较大主应力为  $\sigma_1 = 11000 + 6400 = 17400$  [磅/英寸<sup>2</sup>]

相应于主应力  $\sigma_1$  的面元法线与  $x_1$  轴夹角  $\theta'$ , 由上图可见  $\tan 2\theta' = \frac{4000}{16000 - 11000} = \frac{4}{5}$

即:  $\theta' = 19^\circ 20'$



由图可见：代数上较小主应力为  $\sigma_2 = 11000 - 6400 = 4600$  [磅/英寸<sup>2</sup>]  
与  $\sigma_2$  相应的面元法方向为  $\theta' + 90^\circ = 19^\circ 20' + 90^\circ = 109^\circ 20'$ （即与  $x_1$  轴的夹角）。

(ii) 要求旋  $45^\circ$  转后板上的应力，可在 Mohr 圆上从 A 点开始顺时针转过  $2\theta = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$  到 B 点，则 B 点坐标  $(\sigma_n, \tau)$  为：

$$\sigma_n = \overline{OC} + \overline{CB} \cos(2\theta' - 2\theta) = 11000 + 6400 \times \cos(90^\circ - 38^\circ 40') = 15000 \text{ [磅/英寸}^2\text{]}$$

$$\tau = \overline{CB} \sin(2\theta' - 2\theta) = 6400 \times (-\sin(90^\circ - 38^\circ 40')) = -4992 \text{ [磅/英寸}^2\text{]}$$

(iii) 最大剪应力由 Mohr 圆可显而易见为：

$$\tau_{max} = \pm 6400 \text{ [磅/英寸}^2\text{]}$$

相应正应力为：

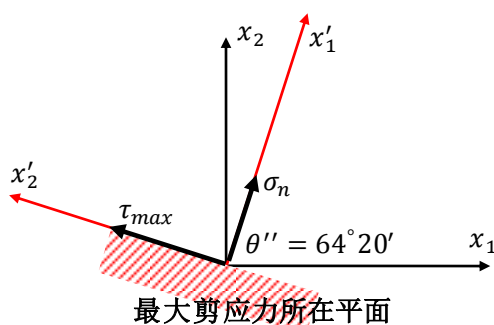
$$\sigma_n = 11000 \text{ [磅/英寸}^2\text{]}$$

设相应的旋转角为  $\theta''$ ，由 Mohr 圆上可直接看出：

$$2\theta'' = 2\theta + 2\theta' = 90^\circ + 38^\circ 40' = 128^\circ 40'$$

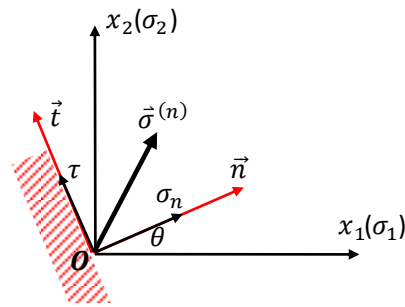
所以：

$$\theta'' = 64^\circ 20'$$



由  $\theta''$  确定的剪应力最大 S 面

下面我们讨论给定主轴系下应力张量时的 Mohr 应力圆。



取 $ox_1x_2$ 系为主轴坐标系

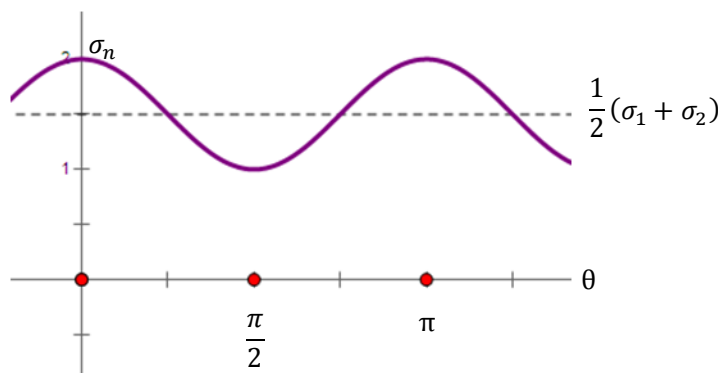
取 $ox_1x_2$ 系为主轴坐标系（如上图所示）。则在主轴坐标系下 Mohr 圆公式简化为：

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta \quad \dots (a)$$

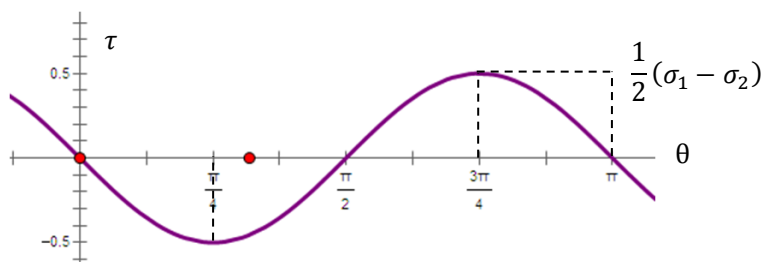
$$\tau = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta \quad \dots (b)$$

由以上两式可得 $\sigma_n$ 和 $\tau$ 随 $\theta$ 变化的图如下。显然，当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3}{4}\pi$ 时，剪应力有最大值

$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$ 。（注意我们取 $\sigma_1 > \sigma_2$ ）



$\sigma_n$ 随 $\theta$ 变化图



$\tau$ 随 $\theta$ 变化图

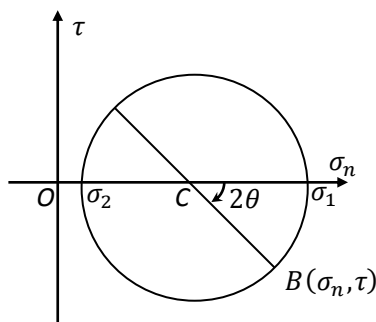
联立 (a) 和 (b) 两式可得主轴坐标系下 $o\sigma_n\tau$ 平面中的 Mohr 圆方程：



$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\right]^2$$

.... (c)

而 $O\sigma_n\tau$ 平面中的 Mohr 圆也简化为:



$O\sigma_n\tau$ 平面上 $(\sigma_n, \tau)$ 点的坐标也简化为:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta, \quad \tau = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta$$

### <II> 三维应力圆

从二维应力圆的研究中, 我们已经看到应力圆是用几何方法分析一点的应力状态的非常有效的工具。对平面应力状态, 我们只需在 $O\sigma_n\tau$ 平面上用一个圆(二维应力圆)就可完全描述; 而与此平面应力状态对应的某点沿各个方向为法方向的平面上的应力矢量的正应力和剪应力可用二维应力圆圆周上的一个点坐标来表示。

三维空间任一点关于任意法方向的平面上的应力分量 $\sigma_n$ 和 $\tau$ 也可用 $O\sigma_n\tau$ 平面上的一点来表示。这就是我们下面要讨论的三维应力圆。我们将看到用三维应力圆这种几何描述法可以巧妙地将三维空间中一点的三维应力状态用二维图解的方法表示。

我们的讨论为方便起见, 仍选用主轴坐标, 设 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 。对任意一个法方向为 $\vec{n}$ 的平面上的应力矢量 $\sigma_i^{(n)}$ , 由柯西公式知:

$$\sigma_i^{(n)} = \sigma_{ij}n_j = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = (\sigma_1 n_1 \quad \sigma_2 n_2 \quad \sigma_3 n_3) = (\sigma_1^{(n)} \quad \sigma_2^{(n)} \quad \sigma_3^{(n)})$$

.... (2-7-11a)

而相应的正应力和剪应力分别为:

$$\begin{cases} \sigma_n = \vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{n} = \sigma_i^{(n)} n_i = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \\ \tau^2 = (\sigma_i^{(n)})^2 - \sigma_n^2 \\ n_j^2 = 1 \end{cases}$$

.... (2-7-12b)

解上联立方程组得:

$$n_1^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

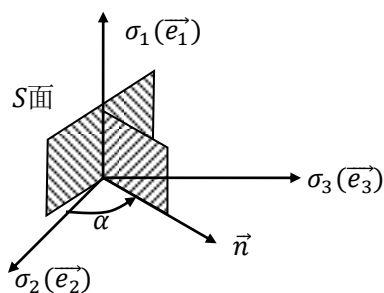
$$n_2^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}$$

$$n_3^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}$$

.... (2-7-13c)

我们先看 (2-7-13) 的第一式。

令  $n_1 = 0$ ，这意味着面元的法向与  $\sigma_1$  轴垂直，且位于  $\sigma_2$  与  $\sigma_3$  轴所构成的平面内，而面元自身则垂直于  $ox_2x_3$  坐标平面（如图所示）。



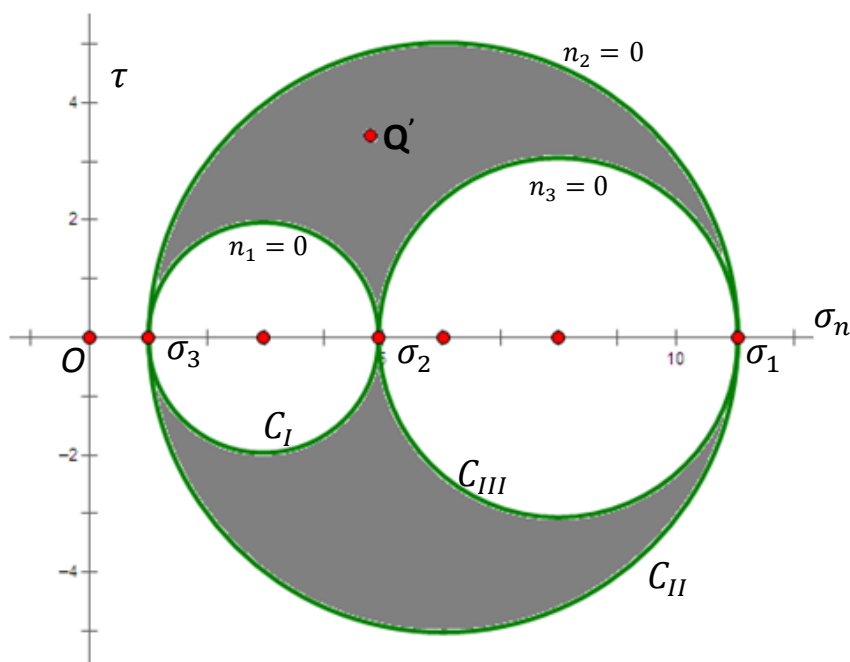
对不同的  $\alpha$  角对应的面元构成了绕  $\sigma_1$  轴旋转的平面族  $S$ 。对  $n_2 = 0$  和  $n_3 = 0$  分别有与此类似的情形。

当  $n_1 = 0$  时 (2-7-13) 的第一式可写成：

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

.... (2-7-14d)

上式表明  $n_1 = 0$  的所有面元上的正应力  $\sigma_n$  和剪应力  $\tau$  在  $\sigma_n\tau$  平面上构成了一个应力圆，其圆心为  $(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0)$ ，半径为  $(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2})$ ，并且通过  $(\sigma_2, 0)$  和  $(\sigma_3, 0)$  两点（见下图中内切的小圆  $C_I$ ）。



同理可得 $n_2 = 0$ 时的应力圆方程为:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 \quad \dots (2-7-15e)$$

它对应于上图中通过 $(\sigma_1, 0)$ 和 $(\sigma_3, 0)$ 两点的圆(外切的大圆 $C_{II}$ )。

而 $n_3 = 0$ 时的应力圆方程为:

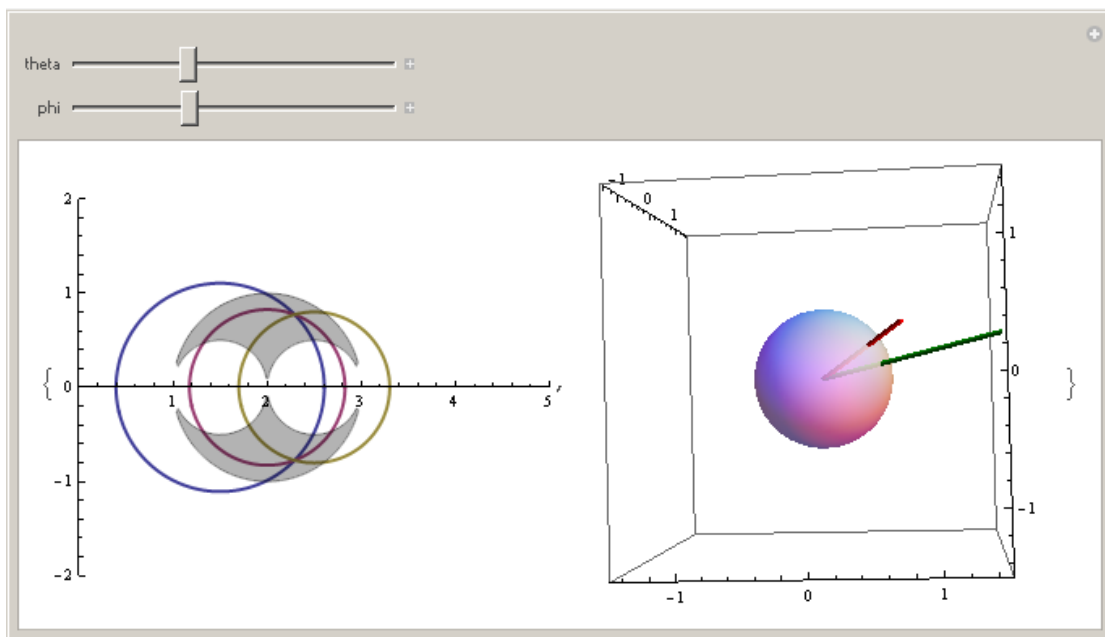
$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \quad \dots (2-7-16f)$$

上式对应摩尔平面上通过 $(\sigma_1, 0)$ 和 $(\sigma_2, 0)$ 两点的圆(图中内切的中号圆 $C_{III}$ )。

进一步考察(2-7-13)式的一般情况, 即 $n_i \neq 0$ 的情况, 这时(2-7-13)式可改写成:

$$\left. \begin{aligned} \tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 + [(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)]n_1^2 \\ \tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 - [(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_2)]n_2^2 \\ \tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + [(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3)]n_3^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots (2-7-17g)$$

显然, 当 $n_i$ 确定后, (2-7-17)式中的三个方程仍是 $\sigma_n - \tau$ 平面上的圆, 与(2-7-14, 15, 16)三个方程比较, 可见其圆心不变, 只是半径(按 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 的规定)增大(即(2-7-17)式中的第1、3两式)或缩小(即(2-7-17)式中的第2式)。



我们利用数值计算软件 mathematica7 来动态模拟空间任一点 P 的应力状态与三维应力圆之间的关系。运行附录中的演示程序，拖动 theta、phi 滑块改变法向量  $\vec{n}$  的空间指向。右图中的红色矢量即法向量  $\vec{n}$ ，绿色矢量为这个面上的应力矢量。可以看到，当  $\vec{n}$  改变时，由(2-7-17)式构造的三个应力圆半径随之改变。三个圆的交点即为  $\sigma_n \tau$  平面上对应的  $(\sigma_n, \tau)$  点。当法向量  $\vec{n}$  遍历整个球面时，三个圆的交点也遍历整个阴影区。

由此可见：式 (2-7-14)、(2-7-15)、(2-7-16) 在 Mohr 应力平面上的几何意义是三个彼此相切的圆。而相应的物理意义是这三个圆围成的阴影区域（包括圆周上）是过空间某一已知点任一法向为  $\vec{n}$  的面元上的应力矢量  $\vec{\sigma}^{(n)} = \sigma_n \vec{n} + \tau_t \vec{t}$  的值域，值域中的每个点对应一组正应力和剪应力。

## §2.8 应力张量的分解

一点的应力张量可以分解成两部分，即（按张量加法法则）

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_0 \end{pmatrix} = \sigma_0 \delta_{ij} + S_{ij} \quad \dots (2-8-1)$$

定义应力球张量：

$$\sigma_0 \delta_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}$$

其中：

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad \dots (2-8-2)$$

称为平均应力。

可以看出：应力球张量是一种三个正应力彼此相等（即： $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_0$ ）的特殊

应力状态。它的三维 Mohr 圆退化为一圆点（因 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$ ）。亦即过该点沿任一方向的截面  $S$  上的应力矢量均相同，只有正应力 $\sigma_0$ ，剪应力为零。换句话说就是任意方向均为主方向。应力球张量可以从任意应力张量中分解出来，它表示物体均匀各向受拉( $\sigma_0 > 0$ )或受压( $\sigma_0 < 0$ )，有时统称之为静水压应力状态（因静止流体中个点的应力状态具有这种特性，是属于 $\sigma_0 < 0$ 的情况）。应力球张量仅改变弹性体的体积，即使体积均匀压缩或膨胀，而不改变它的形状。

定义应力偏（斜）张量：

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_0 \end{pmatrix} \quad \dots (2-8-3)$$

其应力状态特性方程为（仿照应力张量的特性方程）：

$$S^3 - J_1 S^2 + J_2 S - J_3 = 0 \quad \dots (2-8-4)$$

这里 $J_1$ 、 $J_2$ 、 $J_3$ 为应力偏张量的三个不变量，其分别为（仿照 2-5-5 式）：

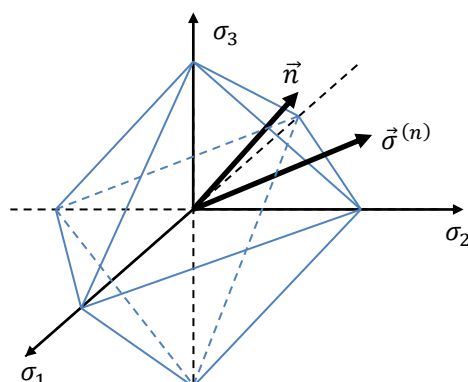
$$\begin{cases} J_1 = S_{ii} = S_{11} + S_{22} + S_{33} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} - 3\sigma_0 = 0 \\ J_2 = I_2 - 3\sigma_0^2 \\ J_3 = I_3 - I_2\sigma_0 + 2\sigma_0^3 \end{cases} \quad \dots (2-8-5)$$

（2-8-4）式中  $S$  为应力偏张量的主应力。可以证明（略）应力偏张量的主应力方向与应力张量的主应力方向相同。

应力偏张量仅决定弹性体的形状改变，而不改变它的体积。在地球内部，每一点都处在一个流体静压（球张量）和一个偏斜应力张量的综合作用之下

## §2.9 八面体上的正应力与剪应力

取主轴坐标系（如图），法线 $\vec{n}$ 与三个主轴夹角相等的截面称为等倾面。



显然有：

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_0$$

$$n_j^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \Rightarrow n_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

在全空间共有八个这样的等倾面，它们组成一个正八面体。由对称性可知此八面体各面上的正应力均相等，记为 $\sigma_0$ 。由主轴系下的柯西公式及正应力公式可得：

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{n} = \sigma_j^{(n)} n_j = n_i \sigma_{ij} n_j = (n_1 \quad n_2 \quad n_3) \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \\ &= \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = n_0^2 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} I_1 \\ &\dots\dots (2-9-1)\end{aligned}$$

上式表明：八面体各面上的正应力正好等于三个主应力的平均值。另外，等倾面上应力矢量 $\vec{\sigma}^{(n)}$ 的模为：

$$(\sigma_i^{(n)})^2 = (\sigma_1 n_1)^2 + (\sigma_2 n_2)^2 + (\sigma_3 n_3)^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$$

所以，等倾面上的剪应力（记为 $\tau_0$ ）为：

$$\begin{aligned}\tau_0^2 &= (\sigma_i^{(n)})^2 - \sigma_0^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \sigma_0^2 = \frac{2}{3} J_2 \\ &\dots\dots (2-9-2)\end{aligned}$$

证：

因为： $\sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ ， $I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3$

所以： $\sigma_0^2 = \frac{1}{9} [(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + 2I_2]$

所以： $\tau_0^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \sigma_0^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9} [(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + 2I_2] = \frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{3} [(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - I_2] \right\}$

因为： $J_2 = 3\sigma_0^2 - I_2 = 3 \cdot \frac{1}{9} [(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + 2I_2] - I_2 = \frac{1}{3} [(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - I_2]$

所以： $\tau_0^2 = \frac{2}{3} J_2$

由上述结果可见：八面体应力（包括正、剪应力）是个很重要的量，其正应力与主轴系下的应力张量的第一不变量 $I_1$ 成正比（2-9-1 式）。剪应力平方与偏张量的第二个不变量 $J_2$ 成正比（2-9-2 式）。它们在连续介质力学的其他分支学科里常被用作重要参数。

## § 附录

### <I> (2-7-8) (2-7-9a) 式推导过程

(2-7-8) 式推导过程

将： $tg 2\theta = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11}-\sigma_{22}}$  化为  $\sin 2\theta = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11}-\sigma_{22}} \cos 2\theta$  代入 (2-7-5) 式中的第一、二式，得：

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma'_{11} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11}-\sigma_{22}} \cos 2\theta \\ &= \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \left( \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2} + \frac{2\sigma_{12}^2}{\sigma_{11}-\sigma_{22}} \right) \cos 2\theta\end{aligned}$$

$$\text{注意到: } \cos 2\theta = \sqrt{\frac{1}{\sec^2 2\theta}} = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 2\theta}} = \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11}-\sigma_{22}}\right)^2}} = \sqrt{\frac{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2}{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(2\sigma_{12})^2}}$$

$$\text{则有: } \sigma_1 = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}, \text{ 即 (2-7-8a)}$$

$$\text{而: } \sigma_2 = \sigma'_{22} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} - \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2} \cos 2\theta - \sigma_{12} \sin 2\theta = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} - \left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2} + \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11}-\sigma_{22}}\right) \cos 2\theta$$

$$\text{则有: } \sigma_2 = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}, \text{ 即 (2-7-8b)}$$

(2-7-9a) 式推导过程

将  $\tan 2\theta = -\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2\sigma_{12}}\right)$  化为  $\sin 2\theta = -\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2\sigma_{12}}\right) \cos 2\theta$  代入 (2-8-5) 式中的第三式得

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \sigma'_{12}|_{\theta=\theta''} = -\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2} \left[-\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2\sigma_{12}}\right) \cos 2\theta\right] + \sigma_{12} \cos 2\theta = \left[\frac{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2}{4\sigma_{12}} + \sigma_{12}\right] \cos 2\theta \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \end{aligned}$$

$$\text{注意到: } \cos 2\theta = \sqrt{\frac{1}{\sec^2 2\theta}} = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 2\theta}} = \sqrt{\frac{1}{1+\left[-\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2\sigma_{12}}\right)\right]^2}} = \sqrt{\frac{(2\sigma_{12})^2}{(2\sigma_{12})^2+(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2}}$$

## <II> 三维莫尔应力圆演示源代码

在 mathematica7 下运行。

```
Clear[d1,d2,d3,c];
d1=3;d2=2;d3=1;(*为主应力赋值*)
c=(*作出阴影图并赋值给 c*)
RegionPlot[
  (x-(d2+d3)/2)^2+y^2>((d2-d3)/2)^2 &&
  (x-(d1+d3)/2)^2+y^2>((d1-d3)/2)^2 &&
  (x-(d2+d1)/2)^2+y^2>((d2-d1)/2)^2,
  {x,d3,d1},{y,(d3-d1)/2,(d1-d3)/2},(*指定阴影区域*)
  PlotRange->{{0,5},{-2,2}},PlotStyle->Opacity[0.3](指定作图范围与透明度*)
];
Manipulate[
  Show[
    ParametricPlot[
      {(*CI 应力圆的参数方程*)
        (((d2-d3)/2)^2+((d1-d2)*(d1-d3))*(Sin[theta]*Sin[phi])^2)^0.5)*Cos[u]+(d2+d3)/2,
        (((d2-d3)/2)^2+((d1-d2)*(d1-d3))*(Sin[theta]*Sin[phi])^2)^0.5)*Sin[u]
      },
      {(*CII 应力圆的参数方程*)
        (((d3-d1)/2)^2+((d2-d3)*(d2-d1))*(Sin[theta]*Cos[phi])^2)^0.5)*Cos[u]+(d1+d3)/2,
        (((d3-d1)/2)^2+((d2-d3)*(d2-d1))*(Sin[theta]*Cos[phi])^2)^0.5)*Sin[u]
      },
      {(*CIII 应力圆的参数方程*)
        (((d1-d2)/2)^2+((d1-d3)*(d2-d3))*(Cos[theta])^2)^0.5)*Cos[u]+(d1+d2)/2,
        (((d1-d2)/2)^2+((d1-d3)*(d2-d3))*(Cos[theta])^2)^0.5)*Sin[u]
      }
    ],
    {u,0,2Pi},
    PlotRange->{{0,5},{-2,2}},
    PlotStyle->{Thick,Thick,Thick}
  ],
  c(*与之前绘制的阴影区合并*)
],
Graphics3D[(*绘制法向量*)
  {Red,Tube[{0,0,0},{Sin[theta]*Sin[phi],Sin[theta]*Cos[phi],Cos[theta]}]},
  (*绘制应力矢量*)
  {Green,Tube[{0,0,0},{d1*SIN[theta]*Sin[phi],d2*SIN[theta]*Cos[phi],d3*COS[theta]}]}],
```

```
{Opacity[0.8],Sphere[{0,0,0},0.6]},  
Axes-> True,  
PlotRange->{{-1.5,1.5},{-1.5,1.5},{-1.5,1.5}}  
},  
{theta,0,Pi},  
{phi,0,2Pi}  
]
```

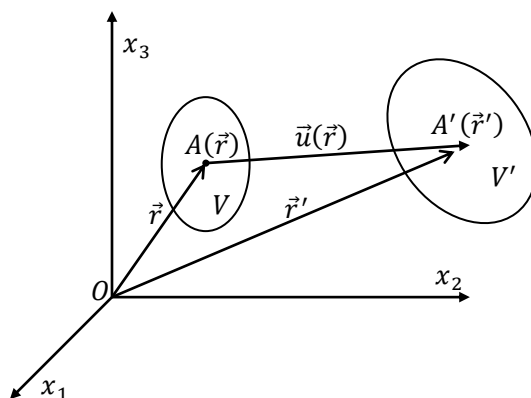


### 第三章 应变分析

在理论力学中,我们研究物体受外力作用运动时,假定物体内点与点之间的距离不改变,即点与点之间是刚性连接,所以称为刚体的运动。在弹性力学中,有别于理论力学的显著特点是:物体受力时,物体上任意两点之间的距离将发生变化——物体发生变形。本章就来研究物体变形的几何性质。本章是纯几何学问题,实际上前一章(应力分析)是纯(静)力学问题。在下一章我们将研究把这两个问题联系起来的物理学问题——弹性力学的本构关系。

#### §3.1 位移场

任一物体的形状改变及其在空间的位置总可以用物体上每一个点在空间的位置来完全描述。设在笛卡尔坐标系 $ox_1x_2x_3$ 中有一个物体 $V$ ,在外力作用下该物体的位置发生移动并且形状发生变化,从而使 $V$ 变成 $V'$ (如图所示), $V$ 内任一点 $A(\vec{r})$ 移到了点 $A'(\vec{r}')$ 。



根据介质的连续性要求,组成 $V$ 的质点集合与组成 $V'$ 的质点集合是一一对应的(即质点不能产生,不能消失),因此 $\vec{r}'$ 应是 $\vec{r}$ 的单值连续函数,即有:

$$\vec{r}' = \vec{r}'(\vec{r}) \quad \vec{r}' \in V', \vec{r} \in V \quad \dots (3-1-1)$$

而物体由 $V$ 到 $V'$ ,其上点点在空间的位移构成一个矢量函数,即:

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{r}'(\vec{r}) - \vec{r} \quad \vec{r} \in V \quad \dots (3-1-2)$$

因此, $\vec{u}(\vec{r})$ 也是 $\vec{r}$ 的单值连续函数,称为位移(矢量)场。

这种用物体变形前,物体上点点的矢径 $\vec{r}$ 为自变量的描述方法称为拉格朗日描述法或称物质描述法。如果不考虑变形过程中物体被撕裂或折叠等特殊情况,那么 $\vec{u}(\vec{r})$ 不仅是 $\vec{r}$ 的单值连续函数,而且除了物体上有限的点、线、面之外,还是 $n$ 次可微的。

显然,知道了物体 $V$ 的位移场 $\vec{u}(\vec{r}) \quad \vec{r} \in V$ ,则物体受力后的位置和形状变化的全貌就清楚了。

#### § 3.2 应变张量和旋转张量

弹性力学着重讨论物体的变形运动。由上一节我们知道,要了解物体 $V$ 的变形需要知道

物体 V 的位移场。实际上，物体上各点位置在变形前后的相对变化，就反映了物体的变形。下面我们就来分析如何表示反映物体变形的、各点之间距离的相对变化。

### <I> 弹性体上任意两个临近点在变形时相对位置的变化

我们来考察物体的变形。设  $A(\vec{r})$ ,  $B(\vec{r} + \overline{d\vec{r}})$  是物体内部相邻的两点，在受力前它们的坐标分别为  $x_i$  和  $x_i + dx_i$ ,  $dx_i$  是个微元矢量。物体受力变形后， $A(\vec{r})$  和  $B(\vec{r} + \overline{d\vec{r}})$  各自移动到新的位置  $A'(\vec{r}')$  和  $B'(\vec{r}' + \overline{d\vec{r}'})$ ，各自的位移为： $\vec{u}(\vec{r})$  和  $\vec{u}(\vec{r} + \overline{d\vec{r}})$ 。

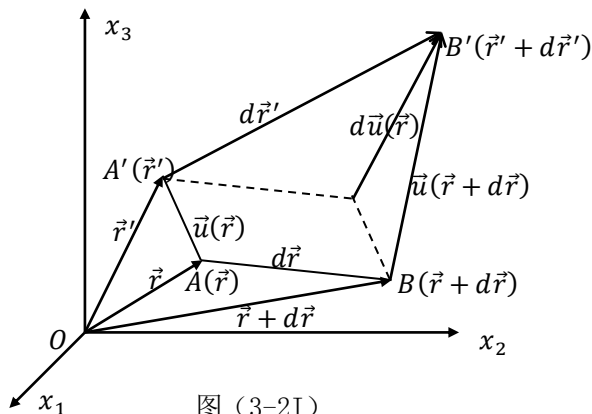


图 (3-2I)

由上图可见：反映物体变形的是两点之间相对位置的变化（即  $d\vec{u}(\vec{r})$ ），也就是两点的位移矢量之差。

$$\text{即： } d\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(\vec{r} + \overline{d\vec{r}}) - \vec{u}(\vec{r})$$

$$\text{或： } du_i(x_j) = u_i(x_j + dx_j) - u_i(x_j)$$

..... (3-2-1)

由于  $\vec{u}(\vec{r})$  是  $n$  次可微的单值、连续函数（连续性假定），且  $\overline{d\vec{r}}$  是无限小量，因此，B 点的位移  $\vec{u}(\vec{r} + \overline{d\vec{r}})$  可用位移函数在 A 点的泰勒展开式表示，其一级近似为：

$$u_i(x_j + dx_j) = u_i(x_j) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = u_i(x_j) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j$$

$$\text{（张量表示法，注意到全微分： } du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \text{）}$$

..... (3-2-2)

其中记：

$$\vec{\vec{D}} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\vec{\vec{R}} = \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

..... (3-2-3)

这里实际已用到了在数学准备中介绍的多元矢量函数的空间导数是一个二阶张量的知识。称  $\vec{\vec{D}}$  为应变张量， $\vec{\vec{R}}$  为旋转张量。将 (3-2-2) 代入 (3-2-1) 得：

$$d\vec{u}(\vec{r}) = \vec{\vec{D}} \cdot \overline{d\vec{r}} + \vec{\vec{R}} \cdot \overline{d\vec{r}} = d\vec{u}_D + d\vec{u}_R$$

$$\text{或: } du_i = \varepsilon_{ij} dx_j + \omega_{ij} dx_j$$

.... (3-2-4)

$$\text{注: 多元矢量函数的空间导数 } \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

上式就是弹性体受力变形时, 弹性体上任意一点  $A(\vec{r})$  与其邻近点  $B(\vec{r})$  (也是任意的) 之间距离的相对变化向量。下面我们将看到  $\vec{D}$  和  $\vec{R}$  分别反映了物体上任意两点 AB 构成的线元  $\vec{dr}$  的变形情况和刚体转动。而  $d\vec{u}_D$  和  $d\vec{u}_R$  分别表示由于微线元  $\vec{dr}$  的变形及刚体转动引起的位移。

### <II> 应变分量 $\varepsilon_{ij}$ 的几何意义

(1) 当  $i=j$  时——线应变

为了讨论应变分量  $\varepsilon_{ii}$  的几何意义, 先分析一下弹性体上任意微线元  $\vec{dr} = dx_i \vec{e}_i$  在变形时的相对伸长 (或缩短)。

相对伸 (缩) 定义为:

$$|\Delta x_i| = \frac{|dx'_i| - |dx_i|}{|dx_i|} = \frac{|dx'_i|}{|dx_i|} - 1$$

.... (3-2-5)

这里  $dx'_i$  是变形后微线元的长度矢量 (见图 (3-2I)), 由图 (3-2I) 可见:

$$dx'_i = dx_i + du_i$$

由式 (3-2-2) 可知:

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$$

所以:

$$\begin{aligned} (dx'_i)^2 &= (dx_i + du_i)^2 = (dx_i)^2 + 2dx_i du_i + (du_i)^2 = (dx_i)^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j dx_i \\ &+ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_l \xrightarrow{\text{改变求和指标}} (dx_i)^2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_j dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} dx_i dx_j \\ &= (dx_i)^2 + \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right] dx_i dx_j = (dx_i)^2 + 2e_{ij} dx_i dx_j \end{aligned}$$

.... (3-2-6)

这里记:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right]$$

.... (3-2-7)

称其为拉格朗日 (或物质) 描述法下的有限应变张量。

定义小应变: 当  $\frac{\partial u_l}{\partial x_i} \ll 1$ , 即位移场随空间的变化很小时, 相应的形变称为小应变。

根据线弹性理论的小应变假设, 我们略去 (3-2-7) 中的二次项, 得:

$$(dx'_i)^2 = (dx_i)^2 + 2\varepsilon_{ij}dx_idx_j \quad \dots (3-2-8)$$

这里 $\varepsilon_{ij}$ 即为小形变下的拉格朗日应变张量，就是我们前面考虑 B 点位移的泰勒展开一级近似所得到的应变张量。

由于 $dx_i$ 的方向余弦为：

$$n_i = \frac{dx_i}{|dx_i|} = \frac{dx_i}{dr} ; \quad n_j = \frac{dx_j}{|dx_j|} = \frac{dx_j}{dr}$$

（由 3-2-8 式）所以有：

$$\frac{(dx'_i)^2}{(dx_i)^2} = \frac{|dx'_i|^2}{|dx_i|^2} = 1 + 2\varepsilon_{ij}n_in_j \quad \dots (3-2-9)$$

即相对伸长为：

$$|\Delta x_i| = \frac{|dx'_i|}{|dx_i|} - 1 = (1 + 2\varepsilon_{ij}n_in_j)^{1/2} - 1 \quad \dots (3-2-10)$$

现在来说明 $\varepsilon_{ii}$ 的几何意义。若特选定微线元矢量 $\vec{dr} = dr\vec{e}_1 = dx_1\vec{e}_1$ ，即 $\vec{dr}$ 变形前沿 $x_1$ 轴方向，则有： $n_1 = 1, n_2 = n_3 = 0$ ，故变形后线元 $|\vec{dr}|$ 在 $x_1$ 方向的相对伸长（或缩短）为：

$$|\Delta x_1| = (1 + 2\varepsilon_{11})^{1/2} - 1 \quad \dots (3-2-11)$$

同理可得变形前沿 $x_2$ 、 $x_3$ 轴向的微线元，变形后在相应方向的相对伸长（或缩短）为：

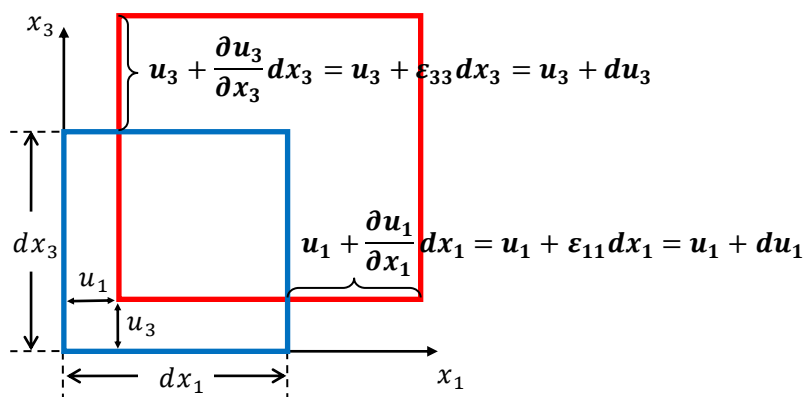
$$|\Delta x_2| = (1 + 2\varepsilon_{22})^{1/2} - 1 \quad \dots (3-2-12)$$

$$|\Delta x_3| = (1 + 2\varepsilon_{33})^{1/2} - 1 \quad \dots (3-2-13)$$

将以上三式作幂级数展开，考虑到小形变，略去 $\varepsilon_{ii}$ 的平方以上项得：

$$|\Delta x_1| = \varepsilon_{11} ; \quad |\Delta x_2| = \varepsilon_{22} ; \quad |\Delta x_3| = \varepsilon_{33} \quad \dots (3-2-14)$$

注： $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots (|x| \leq 1)$ 。记 $2\varepsilon_{11} = x$ ，则 $\sqrt{1+2\varepsilon_{11}}$ 按泰勒展开略去 $\varepsilon_{11}$ 的平方以上项得（3-2-14）。



微元 $dx_1 dx_3$ 线应变前后的几何变化

结论：应变张量 $\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$ 的各主对角元素 $\varepsilon_{11}$ 、 $\varepsilon_{22}$ 、 $\varepsilon_{33}$ 分别（或在小形变

假设下）代表线元 $d\vec{r}$ 在 $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$ 三个坐标轴方向的相对伸长（或缩短），又称线应变。  
（ $d\vec{r} = dx_1\vec{e}_1 + dx_2\vec{e}_2 + dx_3\vec{e}_3$ ，若 $\varepsilon_{ii} > 0$ 则为伸长，反之为缩短）。

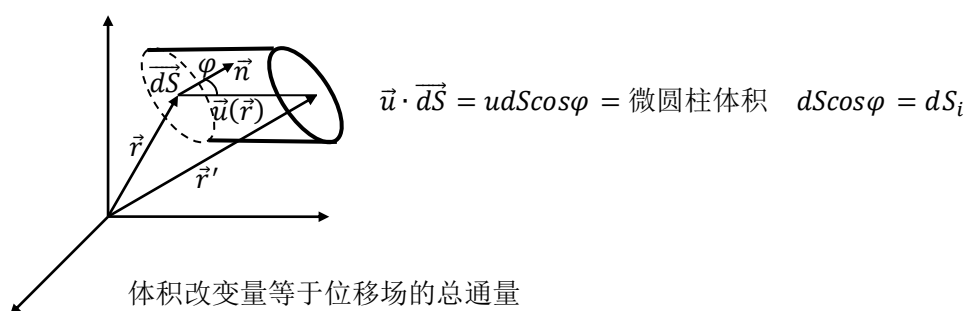
## (2) 体膨胀系数 $\theta(\vec{r})$

体膨胀系数 $\theta(\vec{r})$ 是表示弹性体上一个点的体积胀缩性质的物理量。它定义为：

$$\theta(\vec{r}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{V' - V}{V}$$

•••• (3-2-15)

其中 $V$ 为变形前包含 $A(\vec{r})$ 点的一个任意形状的微体元，它的界面为 $S$ 。而 $V'$ 为变形后该微体元所占据的空间，则体积改变为： $\Delta V = V' - V$ 。



若弹性体变形引起的位移场为 $\vec{u}(\vec{r})$ ，则有：

$$\Delta V = V' - V = \oint_S \vec{u}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

•••• (3-2-16)

即体积改变量等于位移场的总通量。

另外, 由矢量代数理论知, 位移场 $\vec{u}(\vec{r})$ 在点 $\vec{r}$ 处的体积导数 (或空间导数)  $\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{u}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}}{V}$  就等于它的散度 $\nabla \cdot \vec{u}(\vec{r})$ , 即有:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{u}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\iiint_V \nabla \cdot \vec{u}(\vec{r}) dV}{V} = \nabla \cdot \vec{u}(\vec{r}) \quad \dots (3-2-17)$$

注: 当 $V$ 很小时,  $V$ 上的散度 $\nabla \cdot \vec{u}(\vec{r})$ 可视为取平均值 $(\nabla \cdot \vec{u}(\vec{r}))^*$ 的一个常量, 而当 $V$ 向 $A(\vec{r})$ 点收缩时, 有 $V \rightarrow 0, \vec{r} \in V$ , 则有 $\lim_{V \rightarrow 0} (\nabla \cdot \vec{u})^* = \nabla \cdot \vec{u}(\vec{r})$ 。

由 (3-2-15) 和 (3-2-16) 以及 (3-2-17) 得:

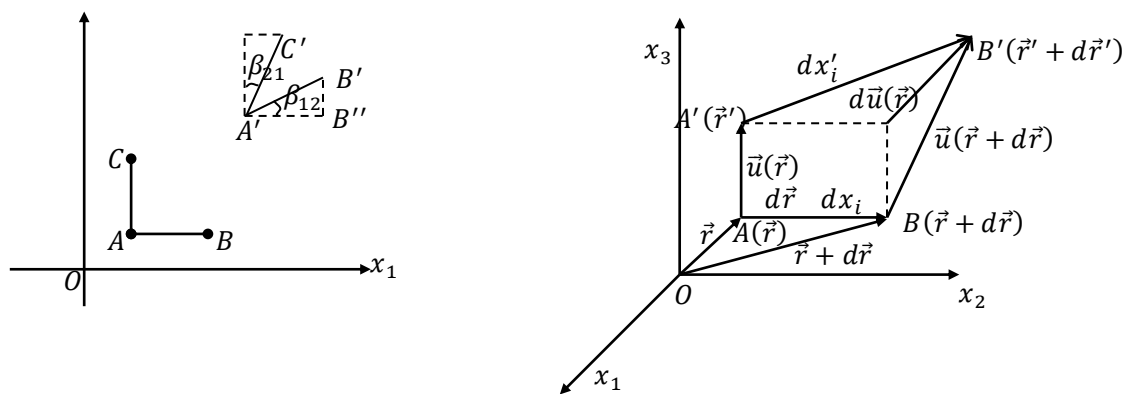
$$\theta(\vec{r}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{V' - V}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{u}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}}{V} = \nabla \cdot \vec{u}(\vec{r}) = \frac{\partial u_i(\vec{r})}{\partial x_i} = \varepsilon_{ii}(\vec{r}) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad \dots (3-2-18)$$

结论: 弹性体内某点的体积膨胀系数等于位于该点上的分别平行于三个坐标轴的微线段的相对伸长 (或缩短) 之代数和。

(3) 当 $i \neq j$ 时——剪应变

我们以 $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$ 为例加以讨论。我们考虑初始时刻沿 $x_1$ 轴方向的微线元

$\overline{AB} = dx_j \vec{e}_j = dx_1 \vec{e}_1$  (如下图所示), 其在受力变形后为 $\overline{A'B'} = dx'_j \vec{e}_j = dx'_1 \vec{e}_1 + dx'_2 \vec{e}_2 + dx'_3 \vec{e}_3$ 。



另外我们由上右图知: 一般情况下, 线元 $\overline{AB} = dx_i \vec{e}_i$ 变形后为 $\overline{A'B'} = dx'_i \vec{e}_i$ , 且由 (3-2-2) 有:

$$dx'_i = dx_i + du_i = dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$$

对于我们现在考虑的特殊情况 (即初始 $\overline{AB} = dx_j \vec{e}_j = dx_1 \vec{e}_1$ , 亦即 $dx_j = (dx_1, 0, 0)$ ), 由上式知变形后线元 $\overline{A'B'} = dx'_i \vec{e}_i$ 在三个坐标轴上的投影为:

$$\begin{cases} dx'_1 = dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 = (1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}) dx_1 \\ dx'_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 \\ dx'_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 \end{cases}$$

•••• (3-2-19)

我们令： $\beta_{12}$ 为初始沿  $X_1$  轴向的线元  $\overrightarrow{AB} = dx_1 \vec{e}_1$  在变形后向  $X_2$  轴转动的角度， $\beta_{21}$ 为初始沿  $X_2$  轴向的线元  $\overrightarrow{AC} = dx_2 \vec{e}_2$  在变形后向  $X_1$  轴转动的角度，（见前左图）。当转角很小时（亦即当为小形变情况下），可略去在  $X_3$  轴方向的位移（ $du_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1$ ）对转角的影响（这在小形变假设下是可行的，见王龙甫书 P33）。

在小形变假设下，分母上的  $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \ll 1$  可略去，因而有：

$$\beta_{12} \approx \tan \beta_{12} = \frac{B''B'}{A'B''} = \frac{dx'_2}{dx'_1} = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1}{(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}) dx_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

•••• (3-2-20)

同理可得：

$$\beta_{21} \approx \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

•••• (3-2-21)

所以：

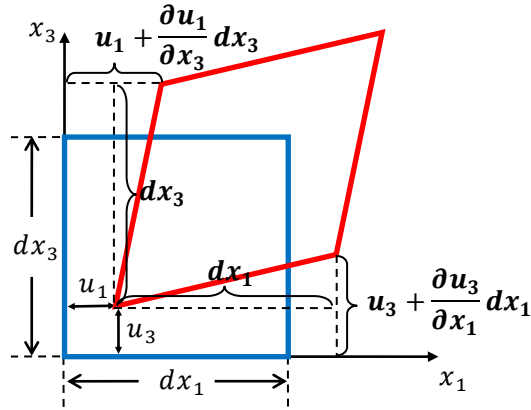
$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} (\beta_{12} + \beta_{21})$$

•••• (3-2-22)

结论： $\varepsilon_{12}$ 为初始成直角的平行于  $X_1$  及  $X_2$  轴的线元在变形后，两线元之间夹角的减小值的一半。成为剪应变或切应变。

仿照上述讨论，我们可对  $\varepsilon_{ij} (i \neq j)$  的其他变量获得与上述相同的结论。

概括而言  $\varepsilon_{ij} (i \neq j)$  代表初始与  $X_i$  及  $X_j$  轴平行且成直角的线元在形变后，两线元之间夹角的减小值的一半。总之， $\varepsilon_{ij}$  (9 个分量) 的全体描述了物体的变形或称应变。



微元 $dx_1 dx_3$ 剪应变前后的几何变化

至此，我们清楚了 (3-2-2) 式： $u_i(x_j + dx_j) = u_i(x_j) + \varepsilon_{ij}dx_j + \omega_{ij}dx_j$  中，右边第一项  $u_i(x_j)$  代表变形时由于  $A(\vec{r})$  点位置的变化而对  $B(\vec{r} + d\vec{r})$  点位移  $u_i(x_j + dx_j)$  的贡献，第二项  $\varepsilon_{ij}dx_j$  代表变形时线元 AB 发生相对变化（即产生应变）而对 B 点位移的贡献。

关于应变张量，还有另一种常用的表述，即

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \gamma_{12}/2 & \gamma_{13}/2 \\ \gamma_{12}/2 & \varepsilon_{22} & \gamma_{23}/2 \\ \gamma_{13}/2 & \gamma_{23}/2 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

其中：

$$\gamma_{ij} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 2\varepsilon_{ij} \quad (i \neq j)$$

为区别  $\varepsilon_{ij}$  和  $\gamma_{ij}$ ，我们将  $\varepsilon_{ij}$  称为剪应变 ( $i \neq j$ )， $\gamma_{ij}$  ( $i \neq j$ ) 称为角应变，两者概念相同，数量上相差一倍。

### <III> 应变张量的性质

#### (1) 应变张量的对称性

由定义  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ ，交换脚标得  $\varepsilon_{ji} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$

显然： $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ ，即应变张量是对称张量。

#### (2) 应变张量的坐标变换式

设有原点重合的两个直角坐标系  $x_i$  和  $x'_k$ ， $x'_k$  是  $x_i$  绕原点旋转后得到的新坐标系。两坐标系的变换关系为：

	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x'_1$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{12}$	$\alpha_{13}$
$x'_2$	$\alpha_{21}$	$\alpha_{22}$	$\alpha_{23}$
$x'_3$	$\alpha_{31}$	$\alpha_{32}$	$\alpha_{33}$

$$\alpha_{ki} = \cos(x'_k, x_i)$$

$\alpha_{ki}$  表示  $x'_k$  轴与  $x_i$  轴之间的方向余弦，也是坐标基矢变换系数矩阵，是一个正交矩阵，



即有  $\alpha_{ki}\alpha_{kj} = \delta_{ij}$ 。

又由矢量的坐标变换式可知：

$$\alpha_{kj} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_k} \quad (\because x_j = \alpha_{kj}x'_k) \quad \dots\dots (3-2-25)$$

所以位移矢量  $u_i(\vec{r})$  在新旧坐标系下的变换式为：

$$u'_k = \alpha_{ki}u_i \quad \dots\dots (3-2-26)$$

将上式代入  $\varepsilon_{ij}$  的定义式，并利用矢量的坐标变换式得：

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{kl} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'_k}{\partial x'_l} + \frac{\partial u'_l}{\partial x'_k} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_l} + \frac{\partial u'_l}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_k} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial (\alpha_{kj}u_j)}{\partial x_i} \alpha_{li} + \frac{\partial (\alpha_{li}u_i)}{\partial x_j} \alpha_{kj} \right) \\ &= \frac{1}{2} \alpha_{kj} \alpha_{li} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \alpha_{kj} \alpha_{li} \varepsilon_{ji} \end{aligned} \quad \dots\dots (3-2-27)$$

上式即为应变张量的坐标变换式，显然其与应力张量的坐标变换式形式是完全一致的。

容易证明  $\varepsilon'_{kl} = \varepsilon'_{lk}$  (证：  $\varepsilon'_{kl} = \alpha_{kj} \alpha_{li} \varepsilon_{ji}$ ，交换  $\alpha_{li}$  与  $\alpha_{kj}$  的位置以及指标  $i, j$ ，并根据  $\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}$  得：  $\varepsilon'_{kl} = \alpha_{kj} \alpha_{li} \varepsilon_{ji} = \alpha_{lj} \alpha_{ki} \varepsilon_{ji} = \varepsilon'_{lk}$ )。

即坐标旋转后应变张量任然是一个对称张量（即应变（应力亦然）张量的对称性是独立与坐标系的）。

结论：应变张量的坐标变换式表明，一点的应变状态的完全确定，只要知道了过此点的三个相互垂直方向上线元的线应变及其剪应变即可。在此前提下，该点沿任意方向的线应变与剪应变均可求出。

另外，由于应力和应变张量的坐标变换式形式完全一致，所以基于应力张量坐标变换式得出的一系列结论（我们在第二章讨论的），都可以从应变张量坐标变换式（3-2-27）出发得到相同的结论。例如与应力曲面对应，在应变分析中有应变曲面，与应力圆相对应有应变圆。此外，如应变张量的不变量，主应变、应变主方向、最大剪应变等都与应力分析中相应的分析完全相似，简单到只要在有关公式中，用  $\varepsilon_{ij}$  替换  $\sigma_{ij}$  即可。下面继续介绍有关应变张量的其他一些重要性质。

### (3) 主应变、主应变方向和应变张量不变量

与应力分析中关于主应力、主应力方向的分析相同，如果物体中某点沿某一方向的线元在变形后，只有线应变，而剪应变为零，则该方向的应变称为主应变，相应的方向称为主应变方向。

由 (3-2-4) 式  $d\vec{u} = \vec{D} \cdot d\vec{r} + \vec{R} \cdot d\vec{r}$ ，我们知道：  $\vec{D} \cdot d\vec{r} = \varepsilon_{ij} dx_j$  反映的是线元  $d\vec{r}$  因变形引起的位移。如果令  $d\vec{r} = \vec{n}$  为单位矢量，则相应的位移矢量（这里不称其为应变矢量（与应力矢量对应）是因为传统的习惯所致）记为  $\vec{\varepsilon}^{(n)}$ ，故有

$$\vec{\varepsilon}^{(n)} = \vec{D} \cdot \vec{n} \text{ 或 } \varepsilon_i^{(n)} = \varepsilon_{ij} n_j \quad \dots\dots (3-2-28)$$

可见与柯西公式 $\sigma_i^{(n)} = \sigma_{ij}n_j$ 形式完全一致。(3-2-28)式表明：只要知道了一点沿三个相互垂直方向上的 6 个应变分量，则该点沿任意方向在形变后产生的位移分量均可求得。

下面我们来讨论主应变。设 $n_j$ 为主应变方向单位矢量， $\varepsilon$ 为主应变，则类似于应力分析中求主应力及主应力方向的方法，问题归结为方程组：

$$\begin{cases} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij})n_j = 0 \\ n_j^2 = 1 \end{cases} \quad \dots (3-2-29)$$

的求解。与应力分析中完全类似的讨论，我们得到以下结果：

① 主应变特征方程为：

$$\varepsilon^3 - I'_1\varepsilon^2 + I'_2\varepsilon - I'_3 = 0 \quad \dots (3-2-30)$$

其中：

$$\begin{cases} I'_1 = \varepsilon_{ii} \\ I'_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}) \\ I'_3 = \det(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{rst}\varepsilon_{r1}\varepsilon_{s2}\varepsilon_{t3} \end{cases} \quad \dots (3-2-31)$$

为应变张量的第一、第二、第三不变量。特别 $I'_1$ 就是所研究的体胀系数 $\theta(\vec{r})$ 。

② 由解出的第三个根，记为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ，即为三个主应变。若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 互不相等，将 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 依次带入(3-2-29)可求得唯一确定的三个相应的主应变方向。可以证明（类似于在应力分析中的证明）这三个主应变方向是互相正交的。若以这三个主应变方向为坐标轴方向，则称为主轴坐标系。

③ 在主轴系中，应变张量化简为 $\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$ ，相应的应变张量不变量为：

$$\begin{cases} I'_1 = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ I'_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}) = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 \\ I'_3 = \det(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \end{cases} \quad \dots (3-2-32)$$

(4) 主应变、主应变方向的性质

- 主应变方向的变形，只有沿该方向的伸缩变形，没有剪切变形、即 $\varepsilon_{ij} = 0$ （当  $i \neq j$ ）。
- 一点上的主应变及其方向是这一应变状态的特征，它们不随坐标系的变换而改变。
- 一点上总有不少于三个相互垂直的主应变方向。
- 一点上的主应变值全为实根，不可能出现复根。
- 一点上的主应变状态有三种可能：
  - $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  互不相等，得到唯一确定的，三个相互垂直的主应变方向。
  - $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$ ，则得到相应 $\varepsilon_3$ 的主方向是确定的，而与 $\varepsilon_3$ 的主方向垂直的任一方向都可以是主应变方向（ $\varepsilon_1$ 或 $\varepsilon_2$ ）。
  - $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ ，则任何方向都是主应变方向，此时物体处于均匀膨胀或均匀收缩

的变形状态。

- f) 任意两个主应变方向之间的夹角，在形变前后保持不变。特别地，一点上的应变主轴方向在变形过程中保持不变。此条由 a) 可立即推出。

#### <IV> 旋转张量的性质

我们下面将看到，旋转张量比较直观简单。

- (1) 旋转张量具有反对称性，是个反对称张量，即：

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} \quad \dots (3-2-33)$$

从这定义可显而易见：

$$\begin{aligned} \because \omega_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \therefore \omega_{ji} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = -\omega_{ij} \end{aligned}$$

又： $\omega_{ij} = 0$  (当  $i=j$ )，所以旋转张量 $\omega_{ij}$ 只有三个独立分量。

- (2) 旋转张量的坐标变换关系式

因为旋转张量是二阶反对称张量，所以也应该满足二阶张量的坐标变换关系：

$$\omega'_{kl} = \alpha_{ki} \alpha_{lj} \omega_{ij} \quad \dots (3-2-34)$$

- (3) 旋转张量的几何意义

由旋转张量的定义 (3-2-3) 式有：

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & 0 & -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{pmatrix}$$

而： $d\vec{r} = (dx_1, dx_2, dx_3)$

另外，由式 (3-2-4) 式  $d\vec{u}(\vec{r}) = \vec{D} \cdot \vec{dr} + \vec{R} \cdot \vec{dr} = d\vec{u}_D + d\vec{u}_R$  知：

$$d\vec{u}_R = \vec{R} \cdot \vec{dr}$$

我们下面将说明 $d\vec{u}_R$ 表示线元 $\vec{dr}$ 作刚性转动而引起的位移。

若令：

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_{32} = -\omega_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \\ \omega_2 &= \omega_{13} = -\omega_{31} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \end{aligned}$$

$$\omega_3 = \omega_{21} = -\omega_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

则:  $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3$  称三维空间中的反对称张量  $\vec{R}$  的对偶矢量。

那么:

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

而:

$$\begin{aligned} d\vec{u}_R &= \vec{R} \cdot d\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \\ &= [(-\omega_3 dx_2 + \omega_2 dx_3) \vec{e}_1 + (\omega_3 dx_1 - \omega_1 dx_3) \vec{e}_2 + (-\omega_2 dx_1 + \omega_1 dx_2) \vec{e}_3] \\ &= \vec{\omega} \times d\vec{r} \end{aligned}$$

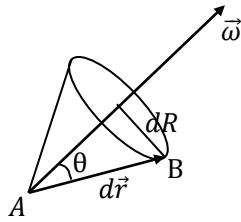
•••• (3-2-35a)

写成分量形式为:

$$(du_R)_i = \varepsilon_{ijk} \omega_j dx_k$$

•••• (3-2-35b)

上式的意义显然代表矢量  $d\vec{r} = \overrightarrow{AB}$  绕空间矢量  $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  的旋转。



$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times d\vec{r} &= \omega dr \sin\theta = \omega dR = \text{圆弧长} \\ \sin\theta &= \frac{dR}{dr} \end{aligned}$$

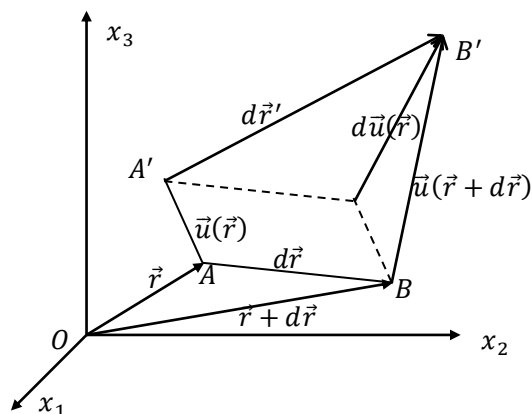
又:  $\vec{\omega} \times d\vec{r}$  的量纲是长度 (因为  $\vec{\omega}$  是无量纲量), 所以旋转张量对相对位移  $d\vec{u}$  的贡献就是  $d\vec{r}$  绕空间矢量  $\vec{\omega}$  旋转一个大小为  $|\vec{\omega} \times d\vec{r}|$  的位移, 这就是旋转张量的几何解释。

另外:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{u}(\vec{r}) &= \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \vec{e}_1 + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \vec{e}_2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \vec{e}_3 \\ &= 2\omega_1 \vec{e}_1 + 2\omega_2 \vec{e}_2 + 2\omega_3 \vec{e}_3 = 2\vec{\omega} \end{aligned}$$

可见: 旋转张量  $\omega_{ij}$  的对偶矢量  $\vec{\omega}$  是弹性体位移场旋度的二分之一。

注意: 根据张量理论, 因为一个三维空间中的反对称张量总对应一个对偶矢量, 而旋转张量  $\vec{R}$  是点点不同的, 即  $\vec{R} = \vec{R}(\vec{r})$ , 所以必有:  $\vec{\omega} = \vec{\omega}(\vec{r})$ 。



总结论：B 点的位移

$u_i(x_i + dx_j) = u_i(x_j) + \varepsilon_{ij} dx_j + \omega_{ij} dx_j$  是由以下三部分构成

- (1)  $u_i(x_j)$ ——A 点的位移贡献
- (2)  $\varepsilon_{ij} dx_j$ —— $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{dr}$  微线元的纯变形贡献
- (3)  $\omega_{ij} dx_j$ —— $\overrightarrow{dr}$  绕  $\vec{\omega}$  刚性转动所产生的位移贡献

其中 (2) (3) 两部分的和，就是 B' 点对 A' 点的相对位移  $d\vec{u}$

#### <V> 平面应变的应变花理论

平面应变定义为： $\varepsilon_{i3} = \varepsilon_{3i} = 0$ ，则应变张量为  $\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix}$ 。因

为  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ ，所以平面应变状态中，应变张量只有 3 个独立的分量。

平面应变理论之一就是下面将要介绍的著名的应变花理论。依照应变花理论可以根据 3 个实验测量结果来确定样品中某一点的平面应变状态。实际应变花理论也适用于平面应力，因平面应力和平面应变的方程形式是相同的，只需将  $\varepsilon$  换为  $\sigma$  即可。

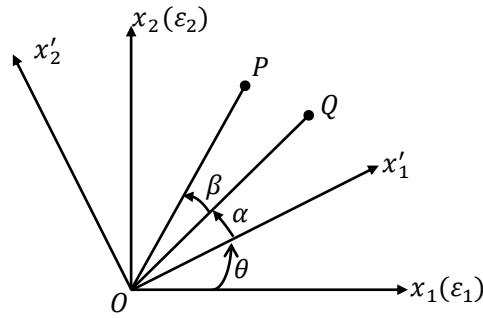
在连续体边界表面上，不承受载荷作用的点，应变状态可局部的视为平面应变。取平面坐标系  $ox_1x_2$  的两轴向为主应变方向（即主轴坐标系），则有：

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

当坐标系旋转  $\theta$  角成  $ox'_1x'_2$  系时，按应变张量的坐标变换公式 ( $\varepsilon'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}\varepsilon_{kl}$ ) 有：

$$\begin{cases} \varepsilon'_{11} = \varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_2 \sin^2 \theta = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos 2\theta \\ \varepsilon'_{12} = -\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2} \sin 2\theta \\ \varepsilon'_{22} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos 2\theta \end{cases}$$

.... (3-2-37)



应变花理论在实际中的应用之一是利用电阻应变片(大家将在岩石力学课的实验中用到电阻应变片), 测量样品上一点在某一方向上的线应变 $\varepsilon'_{ij}(i=j)$ , 为了测得一点的整个平面应变状态 $\varepsilon'_{ij}$ (即 $\varepsilon'_{11}, \varepsilon'_{12}, \varepsilon'_{22}$ ), 需要测量该点在三个不同方向上的线应变。将三片应变片沿上图所示的 $ox'_1, OQ, OP$ 三个方向粘贴在样品的(自由)表面上, 称之为应变花。则按(3-2-37)式的第一式有:

$$\begin{cases} \varepsilon'_{ox'_1} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\cos 2\theta \\ \varepsilon'_{OQ} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\cos 2(\theta + \alpha) \\ \varepsilon'_{OP} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\cos 2(\theta + \alpha + \beta) \end{cases} \dots (3-2-38)$$

$\alpha, \beta$ 是已知的,  $\varepsilon'_{ox'_1}, \varepsilon'_{OQ}, \varepsilon'_{OP}$ 为测量值, 则由(3-2-38)可联立解出 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta$ 三个未知数。从而一点的平面应变状态也就完全测定了。  
常用的 $\alpha, \beta$ 角有两种:

①  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$ , 则由(3-2-38)解得:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon'_{ox'_1} + \varepsilon'_{OP} \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \sqrt{(\varepsilon'_{ox'_1} - 2\varepsilon'_{OQ} + \varepsilon'_{OP})^2 + (\varepsilon'_{ox'_1} - \varepsilon'_{OP})^2} \\ \tan 2\theta = \frac{(\varepsilon'_{ox'_1} - 2\varepsilon'_{OQ} + \varepsilon'_{OP})}{(\varepsilon'_{ox'_1} - \varepsilon'_{OP})} \end{cases} \dots (3-2-39)$$

②  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$ , 则有:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{2}{3}(\varepsilon'_{ox'_1} + \varepsilon'_{OP} + \varepsilon'_{OQ}) \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \sqrt{\frac{4}{3}(\varepsilon'_{OQ} - \varepsilon'_{OP})^2 + \frac{4}{9}(2\varepsilon'_{ox'_1} - \varepsilon'_{OP} - \varepsilon'_{OQ})^2} \\ \tan 2\theta = \frac{\sqrt{3}(\varepsilon'_{OQ} - \varepsilon'_{OP})}{(\varepsilon'_{OQ} + \varepsilon'_{OP} - 2\varepsilon'_{ox'_1})} \end{cases}$$

.... (3-2-40)

### <VI> 应变圆与最大剪应力

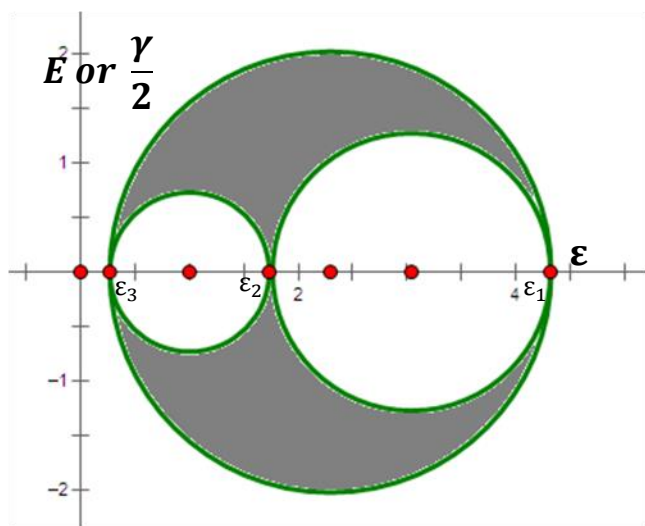
与讨论应力圆类同，在以横坐标为线应变 $\varepsilon$ ，纵坐标为剪应变 $E$ （或角应变 $\gamma$ 的一半 $\frac{\gamma}{2}$ ）的平面坐标系中可作出应变圆（见下图）。由图可见，三个剪应变的极大值分别为（假定 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ ）：

$$E_{12} = \pm \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \quad E_{23} = \pm \frac{1}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \quad E_{31} = \pm \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$$

.... (3-2-41)

其中最大剪应变值为：

$$E_{31} = \pm \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$$



（三维应变圆图）

### <VII> 应变球张量和偏张量

完全类同应力分析中将应力张量分解为应力球张量和偏张量那样，应变张量也可以分解为应变球张量和偏张量，即：

$$(\varepsilon_{ij}) = (\varepsilon_0 \delta_{ij}) + (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij})$$

.... (3-2-42)

其中：

$$\varepsilon_0 \delta_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix}$$

称为应变球张量。

应变球张量的应变特征方程： $\varepsilon^3 - I'_1 \varepsilon^2 + I'_2 \varepsilon - I'_3 = 0$ 。

给定点的平均线应变： $\varepsilon_0 = \frac{1}{3} I'_1 = \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{3} \theta$

而：

$$\varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \varepsilon_0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \varepsilon_0 \end{pmatrix}$$

称为应变偏张量。

如此分解的原因是：应变球张量反映变形体的体积变化。应变偏张量反映变形体的形状变化。

应变偏张量的三个不变量分布用  $J'_1, J'_2, J'_3$  表示。其中第一不变量  $J'_1 = 0$ ，所以应变偏张量不反映体积变化。应变球张量的第一不变量  $I'_1 = \theta(\vec{r})$  就反映了体积的变化。换句话说：应变偏张量与应变球张量是互相独立的，它们分别只反映体积和形状改变，而不互相影响。

注： $J'_1 = (\varepsilon_{11} - \varepsilon_0) + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_0) + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_0) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} - 3\varepsilon_0 = 0$

### § 3.3 应变协调方程

#### <I> 问题的提出（从数学角度出发）

我们知道：空间一个矢量只需要三个标量就可以完全唯一确定，空间一个矢量场只需要三个标量函数就可以表示。三个标量函数  $u_i(\vec{r})$  所表示的弹性位移场完全描述了弹性体的运动和形变。

另外，我们还知道应变张量是由位移场对坐标变量的偏导数定义的，即：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

考虑到  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ ，仍有 6 个独立的应变分量来提供 6 个方程求解三个位移分量函数  $u_1(\vec{r})$ 、 $u_2(\vec{r})$  和  $u_3(\vec{r})$ 。显然，方程数目多余未知的函数的数目，这是一个超定问题，从而使得位移矢量场不确定，亦即解得的三个位移分量函数是不唯一的。所以，要使位移解唯一，必须对 6 个应变分量加以约束，使它们相互协调。体现这 6 个应变分量之间相互协调关系的方程就称为应变协调方程（组）。

从直观的角度上来看，如果位移解  $u_i(\vec{r})$  不是单值函数（不唯一），相当于介质内部产生空隙或连续性遭到破坏。因此要保持物体的连续性，应变分量就不能随意给出，这正是应变协调方程的物理意义。

可以举例说明，六个应变分量不能任意给定。例如，若假定

$$\varepsilon_{11} = 3x_1, \quad \varepsilon_{12} = x_1x_2, \quad \varepsilon_{22} = 2x_2$$

就不能解出合理的位移场，或者说不存在一个位移场能形成这样的应变场。

因为：

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 3x_1 &\Rightarrow u_1 = \frac{3}{2}x_1^2 + f(x_2, x_3) \\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 2x_2 &\Rightarrow u_2 = x_2^2 + g(x_1, x_3) \end{aligned}$$

其中： $f(x_2, x_3)$  是关于  $x_2, x_3$  的任意函数， $g(x_1, x_3)$  是关于  $x_1, x_3$  的任意函数。它们满足



给定的应变分量 $\varepsilon_{11}$ 和 $\varepsilon_{22}$ 。但是：

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial f(x_2, x_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial g(x_1, x_3)}{\partial x_1} \right] = \frac{1}{2} [F(x_2, x_3) + G(x_1, x_3)] \neq x_1 x_2$$

可见给定的应变分量自相矛盾，所以上述应变分量不协调。

### <II> 应变协调方程的导出

推导步骤：从应变分量的定义式 $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ 中消去位移分量 $u_i$ ，即可得应变协调方程（组）。

具体过程为：

首先对 $\varepsilon_{ij}$ 求 $\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}$ 得：

$$\varepsilon_{ij,kl} = \frac{1}{2} (u_{i,jkl} + u_{j,ikl})$$

同理有：

$$\varepsilon_{kl,ij} = \frac{1}{2} (u_{k,lij} + u_{l,kij})$$

$$\varepsilon_{ik,jl} = \frac{1}{2} (u_{i,kjl} + u_{k,ijl})$$

$$\varepsilon_{jl,ik} = \frac{1}{2} (u_{j,lik} + u_{l,jik})$$

由以上四个式子可得（根据连续函数的性质，位移分量的偏导数与求导次序无关）：

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik} \quad \dots (3-3-1)$$

上式是 81 个方程的统一形式，称为应变协调方程（或变形协调方程）。由于应变张量是对称的，即有 $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ ，所以（3-3-1）的 81 个方程中实际只有 6 个是独立的（即其中大部分是重复的或是 $0 \equiv 0$ 的恒等式）：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) \end{array} \right.$$

•••• (3-3-2)

可以证明（略：参见尹祥础《固体力学》P46~P50）：对单连通域，位移场 $u_i(x_j)$ 有唯一单值解的充分必要条件是给定的应变分量满足应变协调方程（3-3-2）式。对于多连通域，如 $n$ 连通域，则可通过加 $(n-1)$ 个割面，使其成为单连通域，这样在割面的两边还需加上位移连续的条件，即：

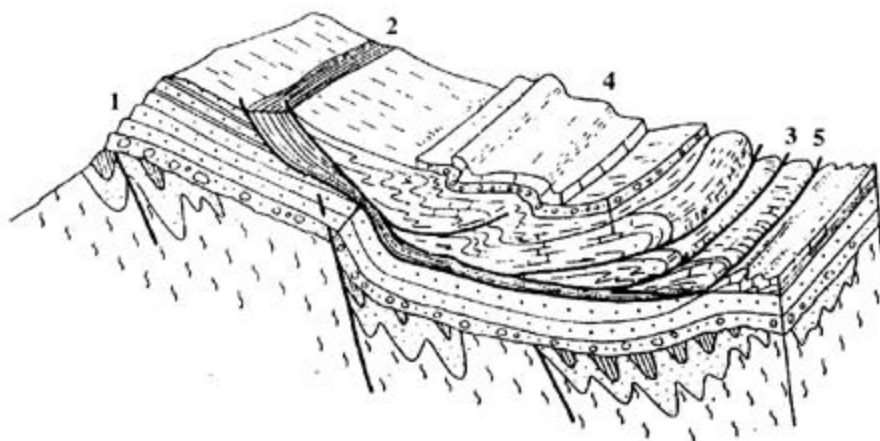
$$u_i^+ = u_i^- \quad (\text{在割面上})$$

•••• (3-3-3)

这里用“+”和“-”的上标表示割面的两侧。

### § 3.4 有限变形——非线性问题

区别于小应变 $(\epsilon_{ij} \ll 1)$ 的变形称为有限变形。对有限变形，则 $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \ll 1$ 不成立了。亦即物体内相邻两点的位移差与两点之间的距离相比不是很小很小了。在近代的许多弹性力学问题中，例如地质问题中的地质过程常常属于有限变形。如图，初始的水平地层在地质年代中，由于构造力的作用使得它变形很大。



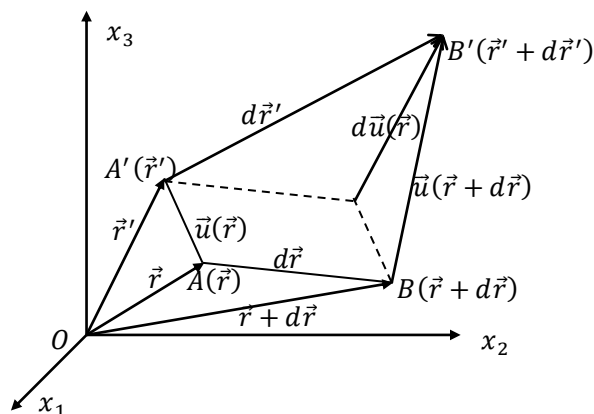
褶皱地质现象

有限变形是一个非线性问题，其理论比较复杂，至今只解决了一些比较简单的问题。更加深入地研究有限变形理论是地球物理学的发展方向之一。

描述物体变形有两种方法。第一种称为拉格朗日（或物质）描述法。它是用物体变形前各点的坐标 $x_i$ 为自变量的。第二种描述法称为欧拉（或空间）描述法，它是用物体变形后各点的坐标 $x'_j$ 为自变量的。

在前面的几节中，我们用了拉格朗日描述法来描述物体上任一点 $A(\vec{r})$ 附近的变形。事实上，在讨论物体受外力作用变形后，当我们关注物体变形过程中某一瞬时的位形时的平衡条件，采用欧拉描述法更合乎逻辑。不过，在弹性力学中，对于小变形情形，这两种描述法所得结果是一致的。但是，对于有限变形，两种描述方法将导致不同的结果。

设物体两邻近点 $A(\vec{r})$ 和 $B(\vec{r} + d\vec{r})$ 在变形后分别移至 $A'(\vec{r}')$ 和 $B'(\vec{r}' + d\vec{r}')$ 。



则有拉式描述:

$$\begin{cases} x'_i = x'_i(x_j) \\ x'_i = x_i + u_i(x_j) \\ dx'_i = dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \end{cases}$$

.... (3-4-1)

欧式描述:

$$\begin{cases} x_i = x_i(x'_j) \\ x_i = x'_i - u_i(x'_j) \\ dx_i = dx'_i - \frac{\partial u_i}{\partial x'_j} dx'_j \end{cases}$$

.... (3-4-2)

实际上, 拉氏描述是依据初始位形确定现时位形; 而欧拉描述则是依据现时位形追溯到初始位形。在连续性假定下, 变形前后物体上的点是一一对应的, 因此, 它们的各阶偏导数都是连续的。

在 § 3.2 节中我们从研究微线元  $|\overline{AB}| = |dx_i|$  的长度入手, 给出了  $d\vec{r}$  在变形后的长度平方为:

$$|dx'_i|^2 = |dx_i|^2 + 2e_{ij}dx_idx_j$$

其中:  $e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right)$  称为拉格朗日有限应变张量。

我们也可以用欧拉描述法讨论微线元  $d\vec{r}$  在变形后的长度平方, 其推导过程与推导拉格朗日描述下的过程一样, 差别只在于所有的量都用 (3-4-2) 式的形式。

略去推导过程可得:

$$|dx'_i|^2 = |dx_i|^2 + 2\tilde{e}_{ij}dx'_idx'_j$$

其中:

$\tilde{e}_{ij} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x'_i} - \frac{\partial u_l}{\partial x'_i} \frac{\partial u_l}{\partial x'_j} \right)$  称为欧拉有限应变张量

注意到:  $x_k = x'_k - u_k(x'_j)$

而:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x'_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x'_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \left( \frac{\partial x'_k}{\partial x'_j} - \frac{\partial u_k}{\partial x'_j} \right) = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \left( \delta_{kj} - \frac{\partial u_k}{\partial x'_j} \right) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x'_j} \doteq \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

注：在小形变 $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \ll 1$ 下忽略二次项

同理：

$$\frac{\partial u_j}{\partial x'_i} \doteq \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

可见：在小形变条件下，拉氏和欧氏描述的结果完全一致。

## 第四章 应力应变关系

### §4.1 本构方程 (Constitutive Equation) 的研究

#### <I> 问题的提出

为什么要研究本构方程？首先，在实践中，人们早就认识到，不同的材料性质的连续介质即使做成完全相同的形状，加上完全相同的外力分布，但是他们所产生的形变情况一般是不相同的。这就说明，物体的形变不仅与所施外力有关，还和其本身的物质构造（即材料性质）有关。另外，在前两章中，我们讨论了应力和应变，并得到了一些基本方程。这些方程包括动量方程（3个），应变与位移关系方程（即应变分量表达式）（6个）。

【注：动量矩方程（3个）和应变协调方程（6个）是约束方程。】

在推导这些方程时，我们只用了连续介质模型（即连续性假设），而对介质的特性未作任何假定（即未涉及介质的性质），因此前两章描述的方法对任何连续介质（如固体、液体、气体）都是适用的。然而只有这些方程还不能解决实际中所遇到的弹性力学问题。这是因为这些方程中所包含的独立变数共有 15 个（即： $u_i$ —3 个， $\sigma_{ij}$ —6 个， $\varepsilon_{ij}$ —6 个），而方程数只有 9 个（即：动量方程—3 个，应变与位移关系方程—6 个）。

显然，方程的个数少于独立变数的个数，因此，在给定外力条件下，把物体受力后的位移场 $u_i(\vec{r})$ 、应力场 $\sigma_{ij}(\vec{r})$ 、和应变场 $\varepsilon_{ij}(\vec{r})$ 求出来，还必须建立另外的一组方程。这组方程就是我们本章要讨论的本构方程。后面我们将看到，本构方程正是我们还缺少的 6 个方程。本构方程是建立应力张量和应变张量之间关系的一组方程，所以又称其为应力应变关系。

需要指出的是：寻求一个对任意连续介质都适用，或对某种介质在任何工作条件下都适用的本构关系是不可能的。这是因为本构关系不仅反映介质的特性（例如：刚性、弹性、压缩性、粘滞性、导热性、扩散性等），而且反映工作条件的约束，即在不同工作条件下得到的本构关系不同。实际上，连续介质力学的分支学科，就是以各学科所采用的本构关系不同来区分的。例如，弹性力学、流体力学、塑性力学、土力学、粘弹性力学等都分别采用不同的本构关系。所以本构关系的研究是连续介质力学最重要的部分之一。

#### <II> 寻求本构关系的方法

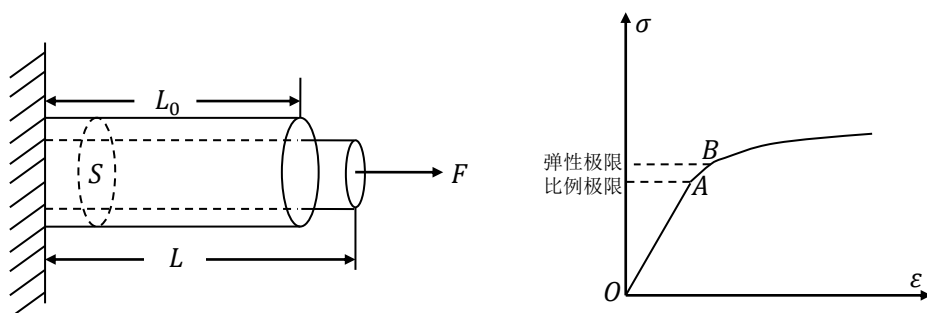
本构关系是一个物理学问题，是一种物理规律。本质上是要从实验和观测中发现，再做归纳、总结和抽象得出。

另一种途径是从物理学基本规律出发，把本构关系作为遵循物理学基本规律的结果推导得出。物理学最基本的规律就是热力学第一和第二定律，亦即：约束应力应变关系的条件是能量守恒定律（因为物体的应变伴随着做功）。

我们下面将采用理论推导和实验测定相结合的方法。先根据热力学基本定律确定本构方程的基本框架，再配合适当的材料实验测定必要的材料特性常数（如杨氏模量、泊松比等），从而得到某类材料在特定工作条件下便于实际应用的本构关系。

## §4.2 虎克定律及其推广

我们考虑如图所示的一个杆状弹性固体，左端固定，右端受力  $F$  作用。这就是所谓弹性杆的单轴拉伸实验。我们取  $\sigma = \frac{F}{S}$  为垂直杆轴平面上的正应力，取沿受力方向的相对伸长（即沿受力方向的线应变）为  $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L-L_0}{L_0}$ ，对不同的正应力测出杆的瞬态响应应变，得如图所示的曲线，称为应力~应变曲线。



由应力~应变曲线图可见：当外力较小时，形变不大，应力和应变有单值线性关系（相当于曲线的直线部分  $\overline{OA}$  段）：

$$\sigma = E\varepsilon$$

即：  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \text{const}$  称为杨氏模量

这一规律称为虎克定律（Huker law）。

在虎克定律范围内，物体产生的形变称为弹性形变。在此范围内，当去掉引起形变的外力，物体可恢复原状。物体的这种性质称为“弹性”。当拉力超过弹性极限后，除去外力后，物体不能恢复原形。虎克定律就是特殊几何形状的物体在简单受力情况下的本构关系（应力~应变关系）。

但是，在一般情况下，物体不是成简单的几何形状，而且加在其上的力也更复杂，通常是空间的分布函数。在这种一般情况下，物体上点点的应力状态和应变状态成何种关系呢？作为虎克定律的自然引伸，认为一般情况下物体上某点 A 的应力状态只由 A 点的应变状态所确定，即同一点的应力与应变是一一对应的单值函数关系：

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl})$$

注：这是 9 个关系式

•••• (4-2-1)

在小形变情况下，我们可以将上式在自然状态（ $\varepsilon_{ij} = 0$ ）点展开为马克劳林级数，以（4-2-1）式中的第一式为例有：

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & (\sigma_{11})_0 + \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{11}}\right)_0 \varepsilon_{11} + \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{12}}\right)_0 \varepsilon_{12} + \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{13}}\right)_0 \varepsilon_{13} + \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{21}}\right)_0 \varepsilon_{21} + \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{22}}\right)_0 \varepsilon_{22} \\ & + \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{23}}\right)_0 \varepsilon_{23} + \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{31}}\right)_0 \varepsilon_{31} + \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{32}}\right)_0 \varepsilon_{32} + \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{33}}\right)_0 \varepsilon_{33} + O(\varepsilon_{ij})^2 + \cdots \end{aligned}$$

•••• (4-2-2)

上式中 “ $\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{kl}}\right)_0$ ” 表示自然状态 ( $\varepsilon_{ij} = 0$ ) 时的值, 一般是空间点的函数。

我们假设物体中没有初应力, 即  $\varepsilon_{ij} = 0$  时,  $\sigma_{ij} = 0$  (无予应力假设), 所以有:

$$(\sigma_{11})_0 = 0$$

在小形变情况下, 略去  $O(\varepsilon_{ij})^2$  及其以上的各值, 则 (4-2-2) 式简化为:

$$\sigma_{11} = \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{kl}}\right)_0 \varepsilon_{kl} \quad \dots (4-2-3)$$

若记:

$$\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}\right)_0 = C_{ijkl} \quad \dots (4-2-4)$$

则 (4-2-1) 式的马克劳林级数展开后的通式为:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \dots (4-2-5)$$

上式表明:  $\sigma_{ij}$  是  $\varepsilon_{kl}$  的线性函数。我们把具有 (4-2-5) 形式的应力~应变关系的物体称为线性弹性体或虎克体。其中  $C_{ijkl}$  是一个四阶张量, 具有 81 个元素, 称为弹性系数张量。

(4-2-5) 式是在小形变、无予应力假设下, 由虎克定律推广得到的物体的应力~应变关系的具体函数形式, 称为广义虎克定律。

物体在小形变下, 是否满足广义虎克定律, 是需要通过实践加以检验的。实际上, 小形变下的线弹性理论已被实践证明是非常成功的。

为了更精细地研究有限变形, 可在马克劳林展开式中取  $\varepsilon_{kl}$  的多次项, 这是非线性弹性力学的研究内容。

关于 81 个弹性系数  $C_{ijkl}$ , 若它们各不相等, 则表明物体是极端各向异性的, 亦即表明物体在每一点沿各个方向上弹性性质是各不相同的。但由于应力张量和应变张量均为对称张量, 即有:

$$\text{由 } \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \Rightarrow C_{ijkl} = C_{jikl} \quad \dots (4-2-6)$$

$$\text{由 } \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} \Rightarrow C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad \dots (4-2-7)$$

所以, 对极端各向异性物体, 81 个弹性系数中只有 36 个是独立的。

下面我们将继续证明,  $C_{ijkl}$  是四阶对称张量, 即有:

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad \dots (4-2-8)$$

所以, 即使是极端各向异性物体, 其弹性系数最多也只有  $\frac{36-6}{2} + 6 = 21$  个是独立的。

特别对各向同性的物体, 其弹性系数将被证明只有 2 个是独立的。

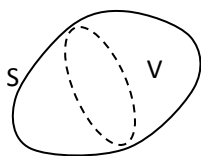
若将广义虎克定律看成一种变换，则其逆变换为：

$$\varepsilon_{ij} = b_{ijkl} \sigma_{kl} \quad \dots (4-2-9)$$

$b_{ijkl}$  称为柔性系数，可以证明（略），在极端各向异性情况下，只有 21 个独立的柔性系数。

### § 4.3 形变热力学

自然界一切物理过程都必须服从基本的物理规律，即热力学第一（能量守恒）定律和第二（熵不等式）定律。作为自然界的物理过程：弹性体受力发生形变的过程，同样应该遵循这两个定律（形变总是伴随着做功）。



考察闭合曲面  $S$  包围的、体积为  $V$  的弹性体。设在  $dt$  时间内，物体发生弹性形变。由于变形，物体的位移场  $\vec{u}(\vec{r})$  产生了  $d\vec{u}(\vec{r})$  的变化，即：

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} dt \quad \dots (4-3-1)$$

由热力学第一定律知：在这  $dt$  时间内，物体位移场变化所造成的物体总能量（动能与内能之和）的增加等于外力（体力和面力）对它所做的功与它吸收（或放出）热量的总和。即有：

$$dK + dU = dA + dQ \quad \dots (4-3-2)$$

这里， $dK$ ：变形过程中物体动能的增加；

$dU$ ：变形过程中物体内能（其中包括分子间的相互作用能和与物体的温度相联系着的分子的动能）的增加；

$dA$ ：变形过程中外力（包括体力和面力）对物体所做的功；

$dQ$ ：变形过程中物体吸收（或放出）的能量。

现在我们来计算在时间  $t$  到  $t+dt$  内以上各项。先计算外力功：  
设弹性体上点点受到：

$$\begin{cases} \text{体力: } f_i(\vec{r}) & \vec{r} \in V \text{ 对应的功记为 } A_1 \\ \text{面力: } \sigma_i(\vec{r}) & \vec{r} \in V \text{ 对应的功记为 } A_2 \end{cases}$$

注意：这里  $f_i$  和  $\sigma_i$  均是力密度

则外力功：



$$\begin{aligned}
 dA &= dA_1 + dA_2 = \iiint_V f_i du_i dV + \oint_S \sigma_i du_i dS \xrightarrow{\text{应用柯西公式与高斯定理}} \\
 &= \iiint_V f_i du_i dV + \iiint_V [\sigma_{ji,j} du_i + \sigma_{ji} du_{i,j}] dV \\
 &= \iiint_V \left[ (f_i + \sigma_{ji,j}) du_i + \sigma_{ji} d\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \right] dV \\
 &\xrightarrow{\text{运动方程以及}\sigma_{ji}=\sigma_{ij}} \iiint_V \left[ \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} du_i + \sigma_{ji} d\varepsilon_{ji} \right] dV \\
 &\dots\dots (4-3-3)
 \end{aligned}$$

注:

(1)  $du_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (du_i) = d\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$ , 因为: 时间和坐标是相互独立的, 所以对  $t$  和对  $x_j$  的微分次序可以交换。

(2) 小形变、低速、小的速度变化率前提下的运动方程为:  $\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i + \sigma_{ji,j}$ 。

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \sigma_{ji} d\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) &= \frac{1}{2} \left[ \sigma_{ji} d\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \sigma_{ji} d\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \right] \xrightarrow{\text{交换哑标不影响结果}} = \frac{1}{2} \left[ \sigma_{ji} d\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \sigma_{ij} d\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \right] \xrightarrow{\sigma_{ji}=\sigma_{ij}} = \\
 \sigma_{ji} d\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] &= \sigma_{ji} d\varepsilon_{ji}
 \end{aligned}$$

再看动能, 在位移不大的情况下, 单位体积内的动能 (动能密度) 为:  $k = \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2$ , 则  $V$  内包含的动能应该为:

$$K = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dV$$

在  $dt$  时间内, 动能的增加为:

$$\begin{aligned}
 dK &= \frac{\partial K}{\partial t} dt = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \iiint_V \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dV \right] dt \xrightarrow{\frac{\partial \rho}{\partial t}=0, \text{质量守恒}} = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \cdot 2 \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dt dV \\
 &\xrightarrow{\text{注意 } du_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} dt} = \iiint_V \left[ \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} du_i \right] dV \\
 &\dots\dots (4-3-4)
 \end{aligned}$$

由 (4-3-3) 和 (4-3-4) 两式可得:

$$dA - dK = \iiint_V \sigma_{ji} d\varepsilon_{ji} dV$$

..... (4-3-5)

由 (4-3-2) 式, 我们有:

$$dA - dK = dU - dQ = \iiint_V \sigma_{ji} d\varepsilon_{ji} dV \quad \dots (4-3-6)$$

形变热力学有两种典型的过程:

① 绝热过程: 物体受力在很短时间内由一种状态变为另一种状态, 在此期间物体中任一部分不得到也不放出热量, 即物体与外界无热交换。因此有:

$$dQ = 0 \quad \dots (4-3-7)$$

由 (4-3-6) 式, 我们有绝热过程的能量守恒关系:

$$dU = \iiint_V \sigma_{ji} d\varepsilon_{ji} dV \quad \dots (4-3-8)$$

设单位体积内的内能 (内能密度) 为  $U_1$ , 即:

$$U_1 = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{U}{V}, \quad U = \iiint_V U_1 dV \Rightarrow dU = \iiint_V dU_1 dV$$

则:

$$dU_1 = \sigma_{ji} d\varepsilon_{ji} \quad \dots (4-3-9)$$

众所周知, 内能  $U_1$  是状态函数, 即对应一个确定的应变状态  $\varepsilon_{ij}$ , 有唯一的内能  $U_1(\varepsilon_{ij})$ , 即  $U_1$  是  $\varepsilon_{ij}$  的单值函数, 所以  $dU_1$  必须是全微分。因此有

$$dU_1 = \frac{\partial U_1}{\partial \varepsilon_{ji}} d\varepsilon_{ji} \quad \dots (4-3-10)$$

比较 (4-3-9) 和 (4-3-10) 得

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial U_1}{\partial \varepsilon_{ji}} \quad \dots (4-3-11)$$

我们记  $U_1(\varepsilon_{ij}) = W_1(\varepsilon_{ij})$ , 则 (4-3-11) 式变为

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon_{ji}} \quad \dots (4-3-12)$$

上式称为格林关系式, 所表示的应力称为广义应力。函数  $W_1(\varepsilon_{ij})$  表示由于变形而储存在单位体积内的弹性势能, 称其为弹性势能函数或应变能密度函数。对于绝热过程, 弹性势能  $W_1(\varepsilon_{ij})$  就是物体的内能  $U_1(\varepsilon_{ij})$ 。

② 等温过程：热力学第二定律告诉我们，在准静态过程中（准静态过程是一个理想的过程，在此过程中，假定系统及其外界都保持热动平衡。只要过程进行地充分缓慢，就可视为是准静态过程。），系统吸收（或放出）热量与系统的绝对温度 $T$ ，以及系统的熵增量 $dS$ 有如下关系：

$$dQ = TdS \quad \dots (4-3-13)$$

对于等温过程有： $T = \text{const}$ ，因此：

$$dQ = d(TS) \quad \dots (4-3-14)$$

所以等温过程的能量关系为：

$$dU - dQ = d(U - TS) \xrightarrow{\text{记为}} dF = \iiint_V \sigma_{ji} d\varepsilon_{ji} dV \quad \dots (4-3-15)$$

这里 $F = U - TS$ 为系统的自由能，它也是一个状态函数，因此也必定存在势能密度函数 $W_1(\varepsilon_{ij})$ ，使得：

$$dW_1 = \sigma_{ji} d\varepsilon_{ji} = dF_1 \quad \dots (4-3-16)$$

这里： $F_1$ 为自由能密度函数（ $F_1 = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{F}{V}$ ）， $dF = \iiint_V dF_1 dV$ 。

所以也有格林关系：

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon_{ji}}$$

对于等温过程，弹性势能就是物体的自由能。

实际的弹性形变过程通常是介于上述两种典型过程之间的可逆过程。由热力学可知，任何可逆过程都可以分解为多个绝热过程与等温过程之和。因此，它仍然必定存在状态函数——弹性势能（或应变能密度）函数 $W_1(\varepsilon_{ij})$ ，即 $W_1$ 是应变分量 $\varepsilon_{ij}$ 的单值函数，且存在格林公式 $\sigma_{ij} = \frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon_{ij}}$ 。因而应力分量 $\sigma_{ij}$ 必为应变分量 $\varepsilon_{ij}$ 的单值函数，反之亦然。换句话说，就是 $\sigma_{ij}$ 与 $\varepsilon_{ij}$ 之间有一一对应关系，而与加载过程及变形过程无关，或者说与历史无关（无记忆性）。这正是弹性变形的最本质的特征。这也证明了我们在§ 4.2 中的引申是正确的。

对于静力学问题，因为 $dK = 0$ ，所以：

$$dW = \iiint_V dW_1 dV = dA \quad \dots (4-3-17)$$

另外，根据格林公式，我们有：

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ji}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ji}} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial \varepsilon_{ji} \partial \varepsilon_{kl}}$$

亦即有：

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ji}}$$

•••• (4-3-18)

由广义虎克定律和 (4-3-18) 式，立可推得：

$$C_{jikl} = C_{klji}$$

•••• (4-3-19)

上式表明：弹性系数张量  $C_{ijkl}$  是对称的。特别有：

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial \varepsilon_{ji} \partial \varepsilon_{kl}} = C_{jikl}$$

•••• (4-3-20)

这样我们证明了在极端各向异性情况下，弹性系数只有 21 个是独立的。

#### § 4.4 线性弹性体的应变能

我们把具有可用广义虎克定律描述其应力~应变关系的物体称为线性弹性体或虎克体。

对于线性弹性体，当其受力变形，则物体内存弹性势能（或应变能），其单位体积内存应变能的增加（在  $dt$  时间内）符合微分形式的形变热力学守恒定律。

$$dW_1 = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

•••• (4-4-1)

将广义虎克定律代入上式，得：

$$dW_1 = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} d\varepsilon_{ij}$$

•••• (4-4-2)

那么由自然状态变形到某一确定的应变状态  $\varepsilon_{ij}$ ，物体单位体积内存存的应变能为：

$$W_1 = \int_0^{\varepsilon_{ij}} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} d\varepsilon_{ij}$$

•••• (4-4-3)

这是一个六元函数（六个独立的应变分量  $\varepsilon_{ij}$ ）的线积分。因为应变能函数  $W_1(\varepsilon_{ij})$  是应变  $\varepsilon_{ij}$  的状态函数，所以上式积分只与初末状态有关，而与积分路径无关。可以选择最简单的积分路径进行积分，得：

$$W_1 = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}$$

•••• (4-4-4)

上式表明：线性弹性体的应变能密度  $W_1$  是应变分量  $\varepsilon_{ij}$  的二次齐次函数。

①由齐次函数的欧拉定理，若 $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 是 $x_i$ 的 $n$ 次齐次函数，则有：

$$nF(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot x_i$$

所以有：

$$2W_1 = \frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon_{ij}} \cdot \varepsilon_{ij} \xrightarrow{\text{由格林关系}} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \Rightarrow W_1 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

②或利用广义虎克定律，也有：

$$W_1 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

•••• (4-4-5)

上式称为克拉贝龙公式，该式的物理意义是很明显的。克拉贝龙公式是计算应变能的重要公式。

另外，我们若将 $\varepsilon_{ij} = b_{ijkl} \sigma_{kl}$ 代入(4-4-5)式，可得

$$W_1 = \frac{1}{2} b_{ijkl} \sigma_{kl} \sigma_{ij}$$

•••• (4-4-6)

所以线性弹性体的应变能也是应力分量的二次齐次函数。

对(4-4-5)式求 $\frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}}$ 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial \sigma_{kl}} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} \sigma_{ij} \right] \xrightarrow{\text{由广义虎克定律}} \frac{1}{2} \left[ C_{ijmn} \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial \sigma_{kl}} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial \sigma_{kl}} \sigma_{mn} \right] \\ &= \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial \sigma_{kl}} \sigma_{mn} \xrightarrow{\text{注意到 } \varepsilon_{ij} = b_{ijkl} \sigma_{kl}, \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial \sigma_{kl}} = b_{mnkl}} b_{mnkl} \sigma_{mn} = \varepsilon_{kl} \end{aligned}$$

•••• (4-4-7)

即有：

$$\varepsilon_{kl} = \frac{\partial W_1}{\partial \sigma_{kl}}$$

•••• (4-4-8)

上式称为卡斯提杨诺公式，由此式表示的应变称为广义应变。它与格林公式形式上很相似。但必须指出的是，二者的适用范围是不同的。格林关系式适用于所有弹性体，而卡斯提杨诺公式只适用于线性弹性体，因为它的推导是以广义虎克定律为前提的。

#### § 4.5 各向同性体的广义虎克定律

自然界中有很多材料，宏观上是各向同性或近似各向同性的。即在物体中任一点，沿各个不同方向上，其弹性性质都是一样的。也就是从各个不同方向看，应力和应变的关系是一样的。下面我们将证明各向同性反映在广义虎克定律中，便是只有两个独立的弹性系数。

我们已经证明了在极端各向异性情况下，弹性系数张量 $C_{ijkl}$ 中只有 21 个独立的元素，根据应力和应变张量的对称性，我们可将广义虎克定律写成如下矩阵形式：

从广义虎克定律： $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ 出发，逐个写出 $\sigma_{11}$ ， $\sigma_{22}$ ， $\sigma_{33}$ ……，有：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2332} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad \dots (4-5-1)$$

上面的矩阵称为刚度矩阵。

因为:  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ,  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ ,  $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ ,  $C_{ijkl} = C_{jikl}$ ,  $C_{ijkl} = C_{klij}$

所以上式弹性系数矩阵主对角线两侧对称元素是相等的。

另外, 为方便书写, 我们将(4-5-1)中的弹性系数矩阵记为:

$$C_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad \text{且有} \quad C_{ij} = C_{ji} \quad \dots (4-5-2)$$

这样, 广义虎克定律可表为如下 6 个方程:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} + C_{14}\varepsilon_{23} + C_{15}\varepsilon_{31} + C_{16}\varepsilon_{12} \\ \sigma_{22} &= C_{21}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} + C_{23}\varepsilon_{33} + C_{24}\varepsilon_{23} + C_{25}\varepsilon_{31} + C_{26}\varepsilon_{12} \\ \sigma_{33} &= C_{31}\varepsilon_{11} + C_{32}\varepsilon_{22} + C_{33}\varepsilon_{33} + C_{34}\varepsilon_{23} + C_{35}\varepsilon_{31} + C_{36}\varepsilon_{12} \\ \sigma_{23} &= C_{41}\varepsilon_{11} + C_{42}\varepsilon_{22} + C_{43}\varepsilon_{33} + C_{44}\varepsilon_{23} + C_{45}\varepsilon_{31} + C_{46}\varepsilon_{12} \\ \sigma_{31} &= C_{51}\varepsilon_{11} + C_{52}\varepsilon_{22} + C_{53}\varepsilon_{33} + C_{54}\varepsilon_{23} + C_{55}\varepsilon_{31} + C_{56}\varepsilon_{12} \\ \sigma_{12} &= C_{61}\varepsilon_{11} + C_{62}\varepsilon_{22} + C_{63}\varepsilon_{33} + C_{64}\varepsilon_{23} + C_{65}\varepsilon_{31} + C_{66}\varepsilon_{12} \end{aligned} \quad \dots (4-5-3)$$

注意: 已经把  $2\varepsilon_{ij} (i \neq j)$  前的系数 2 并入到弹性系数  $C$  中

下面我们分三步来证明对于各向同性体, 弹性系数只有两个是独立的。

### <I> 正交各向异性体的弹性系数只有九个独立

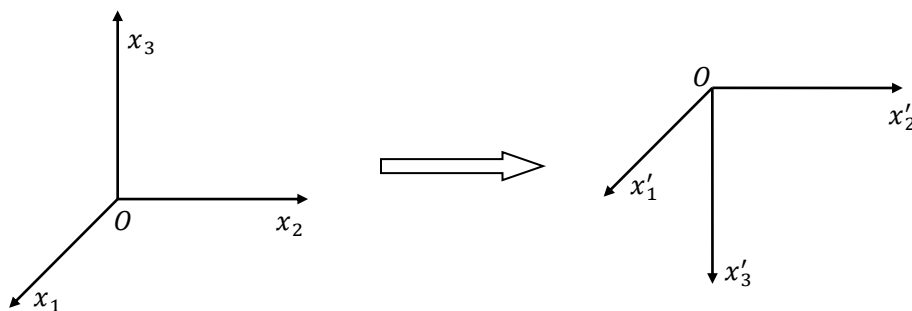
① 设材料的弹性性质是关于  $Ox_1x_2$  平面对称的, 即沿着  $x_3$  方向和  $-x_3$  方向看, 材料的弹性性质不变, 即有:

$$\sigma'_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon'_{kl} \quad (\text{坐标变换不影响弹性性质}) \quad \dots (4-5-4)$$

注意到张量变换关系:

$$x'_i = \alpha_{ij}x_j, \quad u'_i = \alpha_{ij}u_j, \quad \sigma'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}\sigma_{kl}, \quad \varepsilon'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}\varepsilon_{kl}$$

当坐标系  $Ox_1x_2x_3$  变换到  $Ox'_1x'_2x'_3$  (如图) 时, 有:



坐标变换系数矩阵

$\alpha_{ij}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x'_1$	$1(\alpha_{11})$	$0(\alpha_{12})$	$0(\alpha_{13})$
$x'_2$	$0(\alpha_{21})$	$1(\alpha_{22})$	$0(\alpha_{23})$
$x'_3$	$0(\alpha_{31})$	$0(\alpha_{32})$	$-1(\alpha_{33})$

$$\begin{cases} \sigma'_{11} = \sigma_{11} & \sigma'_{22} = \sigma_{22} & \sigma'_{33} = \sigma_{33} \\ \sigma'_{23} = -\sigma_{23} & \sigma'_{31} = -\sigma_{31} & \sigma'_{12} = \sigma_{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon'_{11} = \varepsilon_{11} & \varepsilon'_{22} = \varepsilon_{22} & \varepsilon'_{33} = \varepsilon_{33} \\ \varepsilon'_{23} = -\varepsilon_{23} & \varepsilon'_{31} = -\varepsilon_{31} & \varepsilon'_{12} = \varepsilon_{12} \end{cases}$$

•••• (4-5-5)

显然，要满足坐标变换后弹性系数不变，对 (4-5-3) 式中各式逐个检查，发现必须满足：

$$C_{14} = C_{15} = C_{24} = C_{25} = C_{34} = C_{35} = C_{46} = C_{56} = 0$$

•••• (4-5-6)

② 当材料的弹性性质沿  $x_2$  和  $-x_2$  方向看不变时，即弹性性质关于  $Ox_1x_3$  平面对称，我们有：

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} &= \sigma_{11} & \sigma'_{22} &= \sigma_{22} & \sigma'_{33} &= \sigma_{33} & \sigma'_{31} &= \sigma_{31} & \sigma'_{23} &= -\sigma_{23} & \sigma'_{12} &= -\sigma_{12} \\ \varepsilon'_{11} &= \varepsilon_{11} & \varepsilon'_{22} &= \varepsilon_{22} & \varepsilon'_{33} &= \varepsilon_{33} & \varepsilon'_{31} &= \varepsilon_{31} & \varepsilon'_{23} &= -\varepsilon_{23} & \varepsilon'_{12} &= -\varepsilon_{12} \end{aligned}$$

•••• (4-5-7)

这时要求：

$$C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{45} = 0$$

•••• (4-5-8)

③ 当材料的弹性性质关于  $Ox_2x_3$  平面对称，不再增加对弹性系数的约束。

因此，当材料的弹性性质具有三个互相正交的对称面时，弹性系数只有九个独立的。这种材料称为正交各向异性体。例如，斜方晶系晶体就是正交各向异性体。

对于正交各向异性体，弹性系数矩阵（即刚度矩阵）化为：

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{对称元} & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

•••• (4-5-9)

相应的本构关系为：

$$\begin{cases} \sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} \\ \sigma_{22} = C_{21}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} + C_{23}\varepsilon_{33} \\ \sigma_{33} = C_{31}\varepsilon_{11} + C_{32}\varepsilon_{22} + C_{33}\varepsilon_{33} \\ \sigma_{23} = C_{44}\varepsilon_{23} \\ \sigma_{31} = C_{55}\varepsilon_{31} \\ \sigma_{12} = C_{66}\varepsilon_{12} \end{cases}$$

•••• (4-5-10)

作为一个推论：若所考察点上的应变状态正好使得应变主方向是三个正交弹性对称面的法方向，则此时有：

$$\varepsilon_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad \text{即} \quad \gamma_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

由 (4-5-10) 式可见:

$$\sigma_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

由此可知, 这时该点的主应力方向与主应变方向重合。这种条件下, 正交各向异性体的应力主轴和应变主轴重合。其他点上则不一定重合。换一种应变状态, 即便还是这一点也不再重合。

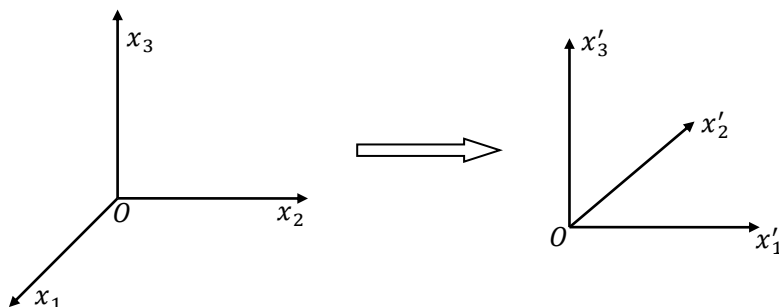
但是, 利用这一推论却很容易推断: 均匀各向同性介质中各点的主应变方向与主应力方向重合。

<II> 从一点上沿两个相互垂直的方向, 弹性性质不变

即有:

$$\sigma'_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon'_{kl} \quad \& \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

① 当  $Ox_1x_2x_3$  绕  $x_3$  轴转  $90^\circ$  成  $Ox'_1x'_2x'_3$  时, 有:



坐标变换系数矩阵

$\alpha_{ij}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x'_1$	$0(\alpha_{11})$	$1(\alpha_{12})$	$0(\alpha_{13})$
$x'_2$	$-1(\alpha_{21})$	$0(\alpha_{22})$	$0(\alpha_{23})$
$x'_3$	$0(\alpha_{31})$	$0(\alpha_{32})$	$1(\alpha_{33})$

$$\begin{cases} \sigma'_{11} = \sigma_{22} & \sigma'_{22} = \sigma_{11} & \sigma'_{33} = \sigma_{33} \\ \sigma'_{23} = -\sigma_{13} & \sigma'_{31} = \sigma_{32} & \sigma'_{12} = -\sigma_{21} \\ \varepsilon'_{11} = \varepsilon_{22} & \varepsilon'_{22} = \varepsilon_{11} & \varepsilon'_{33} = \varepsilon_{33} \\ \varepsilon'_{23} = -\varepsilon_{13} & \varepsilon'_{31} = \varepsilon_{32} & \varepsilon'_{12} = -\varepsilon_{21} \end{cases} \dots (4-5-11)$$

又 (4-5-10) 第二式可见: 坐标变换后仍有:

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} &= C_{11} \varepsilon'_{11} + C_{12} \varepsilon'_{22} + C_{13} \varepsilon'_{33} \\ &\xrightarrow{\text{由(4-5-11)}} = C_{11} \varepsilon_{22} + C_{12} \varepsilon_{11} + C_{13} \varepsilon_{33} = \sigma_{22} \\ &\xrightarrow{\text{再由(4-5-10)第二式}} = C_{21} \varepsilon_{11} + C_{22} \varepsilon_{22} + C_{23} \varepsilon_{33} \end{aligned}$$

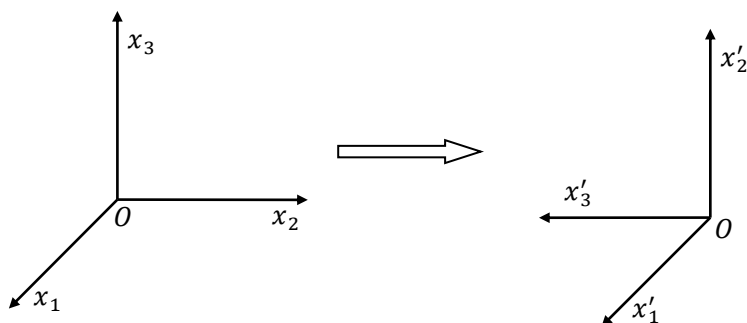
要上式成立, 必须要求:  $C_{11} = C_{22}$ ,  $C_{13} = C_{23} \xrightarrow{\text{由} C_{ij} \text{的对称性}} = C_{31} = C_{32}$

再考察 (4-5-10) 的第二至第六式, 可得:

$$C_{44} = C_{55}$$



②当 $Ox_1x_2x_3$ 绕 $x_1$ 轴转  $90^\circ$  , 成 $Ox'_1x'_2x'_3$ 时, 有:



坐标变换系数矩阵

$\alpha_{ij}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x'_1$	$1(\alpha_{11})$	$0(\alpha_{12})$	$0(\alpha_{13})$
$x'_2$	$0(\alpha_{21})$	$0(\alpha_{22})$	$1(\alpha_{23})$
$x'_3$	$0(\alpha_{31})$	$-1(\alpha_{32})$	$0(\alpha_{33})$

$$\begin{cases} \sigma'_{11} = \sigma_{11}, \sigma'_{22} = \sigma_{33}, \sigma'_{33} = \sigma_{22} \\ \sigma'_{23} = -\sigma_{32}, \sigma'_{31} = -\sigma_{21}, \sigma'_{12} = \sigma_{13} \\ \varepsilon'_{11} = \varepsilon_{11}, \varepsilon'_{22} = \varepsilon_{33}, \varepsilon'_{33} = \varepsilon_{22} \\ \varepsilon'_{23} = -\varepsilon_{32}, \varepsilon'_{31} = -\varepsilon_{21}, \varepsilon'_{12} = \varepsilon_{13} \\ \dots (4-5-12) \end{cases}$$

由 (4-5-10) 第二式有:

$$\begin{aligned} \sigma'_{22} &= C_{21}\varepsilon'_{11} + C_{22}\varepsilon'_{22} + C_{23}\varepsilon'_{33} \\ &= C_{21}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{33} + C_{23}\varepsilon_{22} \\ &= \sigma_{33} = C_{31}\varepsilon_{11} + C_{32}\varepsilon_{22} + C_{33}\varepsilon_{33} \end{aligned}$$

自然要求:  $C_{22} = C_{33}$

又 (4-5-10) 第五式有:

$$\sigma'_{31} = C_{55} \varepsilon'_{31} = C_{55}(-\varepsilon_{21}) = -\sigma_{21} = -C_{66} \varepsilon_{21}$$

显然要求:  $C_{55} = C_{66}$

由 (4-5-10) 第一式有:

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} &= C_{11}\varepsilon'_{11} + C_{12}\varepsilon'_{22} + C_{13}\varepsilon'_{33} \\ &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{33} + C_{13}\varepsilon_{22} \\ &= \sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} \end{aligned}$$

显然要求:  $C_{12} = C_{13}$

再考察第三, 四, 六式不增加新的约束。

③当 $Ox_1x_2x_3$ 绕 $x_2$ 轴转  $90^\circ$  时, 不增加更多约束。

归纳得出: 当沿两个相互垂直的方向, 弹性性质不变, 有(只剩下三个独立的弹性系数):

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} \xrightarrow{\text{记为}} C_1$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} \xrightarrow{\text{记为}} C_2$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} \xrightarrow{\text{记为}} C_3$$

.... (4-5-13)

从而，我们可将广义虎克定律在 (4-5-10) 基础上进一步表为：

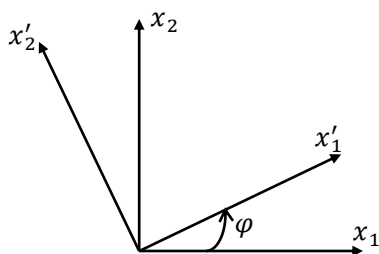
$$\text{刚度矩阵} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ & C_1 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{对称元} & & & C_3 & 0 & 0 \\ & & & & C_3 & 0 \\ & & & & & C_3 \end{pmatrix} \begin{cases} \sigma_{11} = (C_1 - C_2)\varepsilon_{11} + C_2\theta \\ \sigma_{22} = (C_1 - C_2)\varepsilon_{22} + C_2\theta \\ \sigma_{33} = (C_1 - C_2)\varepsilon_{33} + C_2\theta \\ \sigma_{23} = C_3\varepsilon_{23} \\ \sigma_{31} = C_3\varepsilon_{11} \\ \sigma_{12} = C_3\varepsilon_{12} \end{cases}$$

.... (4-5-14)

其中： $\theta = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ ，即是体膨胀系数（亦即应变张量第一不变量）。

### <III> 各向同性体只有两个独立的弹性系数

根据各向同性的要求，在介质中一点沿任意方向，弹性性质不变。因而坐标轴在任意旋转后，新老坐标系中表述的应力应变关系不变。我们来看沿着两个相交成任意角度  $\varphi$  的方向，弹性性质不变（即真正各向同性）的结果。



坐标变换系数矩阵

$\alpha_{ij}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x'_1$	$\cos\varphi$ ( $\alpha_{11}$ )	$\sin\varphi$ ( $\alpha_{12}$ )	$0(\alpha_{13})$
$x'_2$	$-\sin\varphi$ ( $\alpha_{21}$ )	$\cos\varphi$ ( $\alpha_{22}$ )	$0(\alpha_{23})$
$x'_3$	$0(\alpha_{31})$	$0(\alpha_{32})$	$1(\alpha_{33})$

由  $\sigma'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}\sigma_{kl}$  和  $\varepsilon'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}\varepsilon_{kl}$  得：

$$\sigma'_{12} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})\sin 2\varphi + \sigma_{12}\cos 2\varphi$$

.... (1)

$$\varepsilon'_{12} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})\sin 2\varphi + \varepsilon_{12}\cos 2\varphi$$

.... (2)

由 (2) 有：  $\gamma'_{12} = 2\varepsilon'_{12} = (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})\sin 2\varphi + \gamma_{12}\cos 2\varphi$

在老系中：  $\sigma_{12} = C_3\varepsilon_{12}$ ，在新系中应该有：  $\sigma'_{12} = C_3\varepsilon'_{12}$

亦即：

$$\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})\sin 2\varphi + \sigma_{12}\cos 2\varphi = \frac{C_2}{2}[(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})\sin 2\varphi + 2\varepsilon_{12}\cos 2\varphi]$$

.... (3)

又由 (4-5-14) 的第一、二两式得:  $\sigma_{11} - \sigma_{22} = (C_1 - C_2)(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})$ , 且有  $\sigma_{12} = C_3 \varepsilon_{12}$  均代入 (3) 式得:  $C_1 - C_2 = C_3$ 。这就证明了各向同性物体只有两个独立的弹性系数。

令:

$$C_2 = \lambda, \quad C_3 = 2\mu, \text{ 则 } C_1 = \lambda + 2\mu$$

.... (4-5-15)

称  $\lambda$  和  $\mu$  为 Lamé 系数。

所以在各向同性情况下, 刚度矩阵和广义虎克定律表为:

$$\begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{对称元} & & 2\mu & 0 & 0 & \\ & & & 2\mu & 0 & \\ & & & & 2\mu & \end{pmatrix} \begin{cases} \sigma_{11} = 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda\theta \\ \sigma_{22} = 2\mu\varepsilon_{22} + \lambda\theta \\ \sigma_{33} = 2\mu\varepsilon_{33} + \lambda\theta \\ \sigma_{23} = \mu\gamma_{23} = 2\mu\varepsilon_{23} \\ \sigma_{31} = \mu\gamma_{31} = 2\mu\varepsilon_{31} \\ \sigma_{12} = \mu\gamma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} \end{cases}$$

.... (4-5-16)

通式:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\theta\delta_{ij}$$

当介质非均匀时,  $\lambda$  和  $\mu$  均是空间点的函数, 即有  $\lambda = \lambda(\vec{r})$ ,  $\mu = \mu(\vec{r})$ , 从而:

$$\sigma_{ij}(\vec{r}) = 2\mu(\vec{r})\varepsilon_{ij}(\vec{r}) + \lambda(\vec{r})\theta(\vec{r})\delta_{ij}$$

.... (4-5-17)

当介质是均匀的, 则  $\lambda$  和  $\mu$  是常数, 即有:

$$\sigma_{ij}(\vec{r}) = 2\mu\varepsilon_{ij}(\vec{r}) + \lambda\theta(\vec{r})\delta_{ij}$$

.... (4-5-18)

通常以应力表示应变的本构方程也是必须的, 其为:

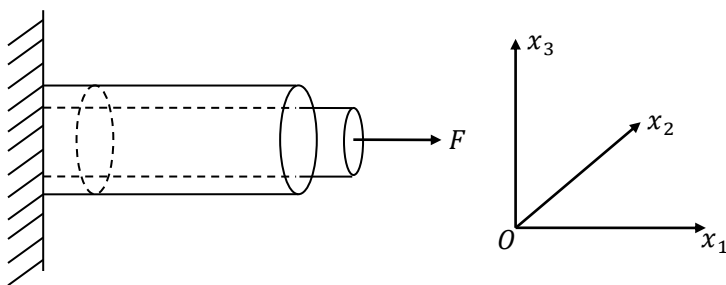
$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}) = \frac{1}{2\mu} \left[ \sigma_{ij}(\vec{r}) - \frac{\lambda}{(3\lambda + 2\mu)} I_1(\vec{r}) \delta_{ij} \right]$$

... (4-5-19)

#### § 4.6 弹性常数的测定及相互关系

前几节中, 我们从热力学基本定律出发, 推导出了线性弹性体本构关系的基本形式, 但对于某一特定的材料 (即使是各向同性、均匀的材料), 仍有两个弹性常数需要确定。下面我们介绍弹性常数的实验测定。

##### <I> 单轴拉伸 (压缩) 实验



不失一般性，我们取 $x_1$ 轴正方向受拉力 $F$ （如图），则有应力状态为：

$$\sigma_{11} = \sigma = \frac{F}{S}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0 \quad \dots (4-6-1)$$

将上式代入（4-5-16）式得：

$$\begin{cases} \sigma_{11} = 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda\theta \\ \sigma_{22} = 2\mu\varepsilon_{22} + \lambda\theta = 0 \\ \sigma_{33} = 2\mu\varepsilon_{33} + \lambda\theta = 0 \end{cases} \quad \dots (4-6-2)$$

将上三式相加得：

$$\theta = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{11} \quad \dots (4-6-3)$$

将上式再代入（4-6-2）式中的第一式得：

$$\sigma_{11} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \varepsilon_{11} \quad \dots (4-6-4)$$

实验发现：在小形变时，轴向应力 $\sigma_{11}$ 与轴向应变 $\varepsilon_{11}$ 之比是一个常数，记为：

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \dots (4-6-5)$$

$E$ 称为杨氏模量（或弹性模量）。

再由（4-6-2）的第二、三两式得：

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu} \theta \quad \dots (4-6-6)$$

由（4-6-3）和（4-6-4）得：

$$\theta = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \varepsilon_{11} \quad \dots (4-6-7)$$

将上式代入（4-6-6）得：

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \varepsilon_{11}$$

•••• (4-6-8)

实验还发现：小变形时，横向应变 $\varepsilon_{22}$ 和 $\varepsilon_{33}$ 与轴向应变 $\varepsilon_{11}$ 之比也是一个常数，记为：

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

•••• (4-6-9)

$\nu$ 称为泊松比。

由(4-6-5)和(4-6-9)可解得：

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

•••• (4-6-10)

可见： $\lambda$ 和 $\mu$ 可通过测量 $E$ 和 $\nu$ 而计算出来。

\*用 $E$ 和 $\nu$ 表示的广义虎克定律也是常用的，即：

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}) = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij}(\vec{r}) - \frac{\nu}{E} I_1(\vec{r}) \delta_{ij}$$

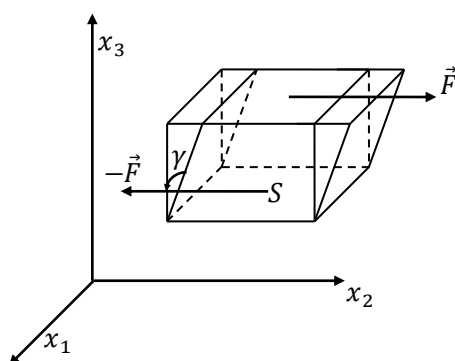
•••• (4-6-11)

分量形式为：

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] & \varepsilon_{23} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{23} \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{33} + \sigma_{11})] & \varepsilon_{31} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{31} \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] & \varepsilon_{12} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{12} \end{cases}$$

•••• (4-6-11')

## <II> 纯剪实验



不失一般性，取如图所示的立方体，再上下两端面作用剪切力 $\vec{F}$ 则应力状态为：

$$\begin{cases} \sigma_{32} = \sigma_{\tau} = \frac{F}{S} \quad (\text{以 } x_3 \text{ 方向为法方向的面上, 沿 } x_2 \text{ 方向的剪切力}) \\ \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \end{cases}$$

•••• (4-6-12)

由 (4-5-16) 式 (即各向同性体的本构关系) 知:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = 0 \\ \varepsilon_{32} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{32} \end{cases}$$

•••• (4-6-13)

实验发现: 当  $\gamma$  很小时 ( $\gamma = 2\varepsilon_{32}$ ), 剪切应力  $\sigma_{32}$  与角应变  $\gamma$  之比是一个常数, 记为:

$$\mu = \frac{\sigma_{32}}{2\varepsilon_{32}} = \frac{\sigma_{32}}{\gamma} = \text{const}$$

•••• (4-6-14)

称  $\mu$  为剪切弹性模量或刚性模量。实际常用圆柱体纯扭转实验来测  $\mu$ 。

### <III> 各向均匀压缩实验

实验时取:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -P \\ \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0 \end{cases}$$

•••• (4-6-15)

则由 (4-5-16) 式中前三式 (即:  $\sigma_{ii}(\varepsilon_{ii})$ ) 之和得:

$$-3P = (2\mu + 3\lambda)\theta$$

•••• (4-6-16)

定义: 体积压缩模量  $K$  为:

$$k = -\frac{P}{\theta} \quad \text{or} \quad k = -\frac{dP}{d\theta}$$

•••• (4-6-17)

由 (4-6-16) 可得:

$$k = \frac{2\mu + 3\lambda}{3} = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

•••• (4-6-18)

小结: 由上述三个实验, 我们又得到三个观测弹性系数  $E, \nu, k$  (通常称为工程弹性系数), 与原有理论推导得出的拉梅 ( $\lambda, \mu$ ) 系数一起共有五个 (对确定的均匀材料, 它们是常数)。但它们中仍只有两个是独立的, 其相互关系为:

$$\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} = \frac{\mu(E-2\mu)}{3\mu-E} = k - \frac{2}{3}\mu = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{3k(3k-E)}{9k-E} = \frac{3k\nu}{1+\nu}$$

$$\mu = \frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu} = \frac{3}{2}(k-\lambda) = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{3k(1-2\nu)}{2(1+\nu)} = \frac{3kE}{9k-E}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} = \frac{\lambda}{3k-\lambda} = \frac{E}{2\mu} - 1 = \frac{3k-2\mu}{2(3k+\mu)} = \frac{3k-E}{6k}$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{\nu} = \frac{9k(k - \lambda)}{3k - \lambda} = 2\mu(1 + \nu) = \frac{9k\mu}{3k + \mu} = 3k(1 - 2\nu)$$

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{\lambda(1 + \nu)}{3\nu} = \frac{2\mu(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)} = \frac{\mu E}{3(3\mu - E)} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

•••• (4-6-19)

另外还有:

$$\frac{\mu}{\lambda + \mu} = 1 - 2\nu \quad \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = \frac{\nu}{1 - \nu}$$

对上述五个弹性系数, 我们可通过测量  $E, \nu, k, \lambda, \mu$  中的任意两个, 利用 (4-6-19) 关系计算出其它三个。

#### <IV> 广义虎克定律的实验验证

下面我们给出一些材料的实验测量数据和理论结果对比, 以此来看广义虎克定律的精确程度。

实 测 值  材 料	$E \times 10^6$ ( $kg/cm^2$ )	$\mu \times 10^6$ ( $kg/cm^2$ )	$\nu$	理论公式 $\nu = \frac{E}{2\mu} - 1$
碳钢	2.0~2.1	8.1	0.24~0.28	0.23~0.30
铸铁	1.15	4.5	0.27	0.28
黄铜	0.91~0.99	3.5	0.32~0.42	0.30~0.41
玻璃	0.56	2.2	0.25	0.27
青铜	1.15	4.2	0.32~0.35	0.36

### § 4.7 体积和形状改变定律

在前两章中, 我们曾讨论了应力张量及应变张量的分解, 即:

$$\text{应力张量: } \sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij} + S_{ij}$$

$$\text{其中: } \sigma_0 = \frac{1}{3}I_1 = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad \text{为平均正应力}$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij} \quad \text{为应力偏张量}$$

$$\text{应变张量: } \varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \delta_{ij} + e_{ij}$$

$$\text{其中: } \varepsilon_0 = \frac{1}{3}\theta = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii} = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad \text{为平均线应变}$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij} \quad \text{为应变偏张量}$$

我们曾说过, 如此分解的物理含义是: 应力球张量引起的是对应于应变球张量描述的物体的体积变化, 而应力偏张量引起的是对应于应变偏张量描述的物体的形状变化。对于各向同性物体两者是相互独立的, 互不干扰。

利用广义虎克定律:

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

和应力张量及应变张量的分解式, 我们有:

$$\sigma_0\delta_{ij} + S_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu(\varepsilon_0\delta_{ij} + e_{ij}) = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_0\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad \dots (4-7-1)$$

由上述独立性, 有 (注意到:  $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \Rightarrow 3\lambda + 2\mu = 3K$ ):

$$\sigma_0\delta_{ij} = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_0\delta_{ij} = 3K\varepsilon_0\delta_{ij} \quad \dots (4-7-2)$$

$$S_{ij} = 2\mu e_{ij} \quad \dots (4-7-3)$$

以上两式分别给出了应力球张量与应变球张量以及应力偏张量与应变偏张量之间的对应关系, 这就是:

(A) 体积改变定律: 应力球张量正比于应变球张量, 比例系数为 $3K$ 。

(B) 形状改变定律: 应力偏张量正比于应变偏张量, 比例系数为 $2\mu$ 。

相应地, 应变能密度 $W_1(\varepsilon_{ij})$ 也可分解为体积改变的应变能 $W_{1v}$ 和形状改变的应变能 $W_{1s}$  (简称畸变能) 两部分, 即:

$$W_1(\varepsilon_{ij}) = W_{1v} + W_{1s} \quad \begin{cases} W_{1v} - \text{Volume Change Energy} \\ W_{1s} - \text{Shape Change Energy} \end{cases} \quad \dots (4-7-4)$$

将 (4-7-2)、(4-7-3) 两式代入克拉贝龙公式, 有

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_0\delta_{ij} + S_{ij})(\varepsilon_0\delta_{ij} + e_{ij}) = \frac{1}{2}(3K\varepsilon_0\delta_{ij} + 2\mu e_{ij})(\varepsilon_0\delta_{ij} + e_{ij}) \\ &= \frac{1}{2}(3K\varepsilon_0^2\delta_{ij}^2 + 3K\varepsilon_0 e_{ij}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_0 e_{ij}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}e_{ij}) = \frac{1}{2}K\theta^2 + \mu e_{ij}e_{ij} \end{aligned} \quad \dots (4-7-5)$$

注:  $e_{ij}\delta_{ij} = e_{ii} = J'_1 = 0$ ;  $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}\theta$

显然:

$$W_{1v} = \frac{1}{2}K\theta^2 \quad \dots (4-7-6)$$

$$W_{1s} = \mu e_{ij}e_{ij} \quad \dots (4-7-7)$$

热力学理论告诉我们, 物体的自然状态是一种稳定状态, 而在稳定状态下, 物体的势能为零, 且必为极小值。即:

$$(W_1)_{min} = 0$$



这说明应变能密度函数 $W_1(\varepsilon_{ij})$ 具有正定性，即

$$W_1 \geq 0 \quad \dots (4-7-8)$$

又因为体积改变与形状改变是相互独立的，所以有

$$W_{1v} \geq 0 \quad \& \quad W_{1s} \geq 0 \quad \dots (4-7-9)$$

从而由(4-7-6)和(4-7-7)可推知

$$K > 0 \quad \& \quad \mu > 0 \quad \dots (4-7-10)$$

由于

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu} \xrightarrow{K>0, \mu>0} E > 0 \quad \dots (4-7-11)$$

又由

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \xrightarrow{K>0, \mu>0, E>0} -1 \leq \nu \leq \frac{1}{2} \quad \dots (4-7-12)$$

但至今为止还没发现 $\nu < 0$ （即 $\nu$ 为负值）的材料，所以我们可以认为

$$0 \leq \nu \leq \frac{1}{2} \quad \dots (4-7-13)$$

再由：

$$\lambda = \frac{3K\nu}{1+\nu} \xrightarrow[\nu>0]{K>0 \text{ 可推知}} \lambda > 0 \quad \dots (4-7-14)$$

对于只有两个独立弹性系数的线性弹性理论，需要完整描述整个介质的性质，需要 $E, \mu, \lambda, \nu, K$ 中的两个。在实际中为了简化问题，经常根据实际情况做一些使参数减少到只有一个独立的假定：

1> 泊松假定： $\lambda = \mu$

在泊松假定下： $K = \frac{5}{3}\mu, E = \frac{5}{2}\mu, \nu = \frac{1}{4} = 0.25$

满足泊松假定的物质体称为泊松体。实际地球介质的相当一部分就是泊松体。对泊松体其横纵波速度比等于 $\sqrt{3}$ ，即：

$$\frac{v_P}{v_S} = \sqrt{3}$$

2> 不可压缩假定： $\lambda = K \rightarrow \infty$

在不可压缩假定下： $\mu = \frac{1}{3}E, \nu = \frac{1}{2}$

### 3> 可压缩流体的极限情况： $\mu \rightarrow 0$

在此情况下，由 $\mu \rightarrow 0$ 可推出： $E \rightarrow 0$ ,  $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$ ,  $\lambda \rightarrow K \rightarrow \frac{\mu}{1-2\nu}$

并且，由  $W_1 = \frac{1}{2}K\theta^2 + \mu e_{ij}e_{ij}$  可见 $K$ 、 $\mu$ 是弹性系数，其反映的是介质本身的特性，与坐标选择无关， $\theta = I'_1$ 是应变张量第一不变量，也与坐标变换无关， $e_{ij}e_{ij}$  = 标量（亦是坐标变换不变量）。

所以，应变能密度函数是坐标变换不变量，即有：

$$W_1(\varepsilon_{ij}) = W_1(\varepsilon'_{kl})$$

本章结语：

至此，我们已经建立起了弹性力学的基本理论。到目前为止，我们已用了所有六个假设（连续性、弹性、小形变、各向同性、均匀性、无预应力假设）。在弹性、小形变假设下，所有方程都是线性的（因为总是略去 $(O)^2$ 以上项），所以又称为线性弹性力学。

## 第五章 弹性力学问题的建立及一般原理

### § 5.1 弹性力学问题的完整提法

#### <I> 问题的提法

在前面的几个章节中，我们分别学习了**应力**（第二章）、**应变**（第三章）、以及**应力应变之间的关系**（第四章）。而本章则是要把前几章学习的知识全部整合起来，把弹性力学问题抽象、归纳为解一组偏微分方程组的**数理方程问题**。

前面几章建立的方程归纳如下：

(1) 力学方程（平衡方程或运动方程）共 3 个：

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 & \left( \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) \\ \text{应力分量约束关系 } \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3$$

•••• (5-1-1)

(2) 几何方程（位移与应变关系）共 6 个：

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \text{另有应变协调方程 } \varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik} \end{cases}$$

•••• (5-1-2)

(3) 物理方程（本构关系）共 6 个

①  $\sigma_{ij}(\varepsilon_{kl})$ 形式

i. 各向异性材料

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{其中 } c_{ijkl} \text{ 只有 21 个是独立的})$$

ii. 各向同性材料

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \theta \delta_{ij}$$

•••• (5-1-3)

其中： $\theta = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ 为体胀系数（应变张量第一不变量）。

②  $\varepsilon_{ij}(\sigma_{kl})$ 形式

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} I_1 \delta_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{3\nu}{E} \sigma_0 \delta_{ij}$$

•••• (5-1-4)

其中： $I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ 为应力张量第一不变量。

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \text{ 为平均正应力。}$$

以上三组方程共包含 15 个方程和 15 个未知函数，即： $u_i, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ 。而  $f_i$  是给定的体力场。 $\lambda, \mu, \nu$  和  $E$  是弹性性质参数，也是已知量（可由实验测定）。 $\rho$  是弹性体的密度分布函数，我们下面讨论它。所以，从数学角度上看，方程数目和未知函数数目相等，从理论上来说，

二阶偏微分方程 (5-1-1) 在给定适当的边界与初始条件下是能求解的。下面给出弹性力学问题的完整提法：对于具体指定了力学性质和形状的弹性体，求解满足给定体力分布和边界条件、初始条件下的弹性体运动（平衡）规律，确定并掌握弹性体上各点的各种物理量在运动（平衡）中随时空的变化情况。

简而言之，弹性力学问题的目标就是解这 15 个偏微分方程，得到 15 个未知函数。本质上就是数理方程问题。

## <II> 关于方程组的几点说明

### (1) 介质的力学性质

对各向同性弹性体，描述介质的力学性质常用 Lamé 系数：

$$\lambda = \lambda(\vec{r}), \quad \mu = \mu(\vec{r})$$

当介质均匀时， $\lambda$  和  $\mu$  是常数。

### (2) 弹性体的形状

理论上可以求解任意形状弹性体的变形与波动问题，或是应力场变化问题等。但是，实际上只有少数简单的形状才有解析解。

在工程问题中，具有重要意义的柱体、板、薄壳等简单形状的弹性体已有了解析解。而弹性全空间、半空间、平行分层半空间、球体等则是我们地球物理问题中的重要模型。以后，我们在实际工作中会遇到这些模型的问题。例如，在研究地球浅部地壳内的应力场时，可忽略地球曲率的影响，而简化为半无限体（弹性半空间），并且认为在地壳这一薄层（相对于地球半径来说，地壳的厚度是很薄的）内，体力  $\rho g$  的变化可以忽略不计。这样就把问题抽象为一个很简单的弹性力学问题——半无限体受均匀体力的应力分布问题（详见《固体力学》，尹祥础.地震出版社.1985. P220）。

弹性力学问题的许多困难其实都是比较复杂的立体几何问题引起的。好在数值解法的不断发展并趋于完善，使我们可以利用诸如有限单元法，边界单元法等等方法去解决许多具有一般形状体和介质分布不均匀的弹性力学问题。

特别值得一提的是：边界面的形状也决定了采用什么样的坐标系才能最方便、最简洁地表达边界条件，进而决定了应该采用什么样的特殊函数作通解。例如，对球体，就可采用球坐标系，相应用球贝塞尔函数作通解。

### (3) 关于各种物理量的说明

反映弹性体运动和变形的物理量很多。对于工程上的问题和科研问题，常用的是位移和应力，偶尔也采用应变。提别是应力和位移，它们是重要的研究对象。因为材料的强度就是与应力直接有关的，构件的位移也是实际应用中关心的问题，是在设计时应该预先估算的量。而弹性体上的应变场、体膨胀系数、旋转张量等比较抽象，实际中很少用。

弹性体的密度  $\rho(\vec{r}, t)$  也是重要的物理量，严格而言它也是随着弹性体的变形和波动，在时、空中变化着的。根据连续性假定和质量守恒定律，可以推导出小形变假定下连续性方程的简化形式：

因为：

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \theta = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{V' - V}{V} = \left( \frac{m}{\rho'} - \frac{m}{\rho} \right) / \frac{m}{\rho} = \frac{\rho(\vec{r})}{\rho'(\vec{r}')} - 1$$

即有：

$$\rho'(\vec{r}') = \frac{\rho(\vec{r})}{\left(1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)} \quad \dots (5-1-5)$$

由小形变假定:  $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \ll 1$ , 可将上式中  $\left(1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^{-1}$  项展开:

$$\left(1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^{-1} = 1 + \frac{-1}{1!} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{-1 \cdot -2}{2!} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2 + \dots$$

略去 2 阶及其以上项得小形变下连续性方程的简化形式:

$$\rho'(\vec{r}') \approx \rho(\vec{r}) \left(1 - \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) \quad \vec{r} \in V, \vec{r}' \in V' \quad \dots (5-1-6)$$

现在来考察动量方程:

$$f_i + \sigma_{ij,j} = \rho'(\vec{r}') u_{i,tt} \quad \dots (a)$$

按动量守恒定理的本意, 方程中的密度分布自然是  $\rho'(\vec{r}')$ , 即弹性体上运动着的每一点时时刻刻遵从动量守恒。把 (5-1-6) 式代入运动方程有:

$$f_i + \sigma_{ij,j} = \rho(\vec{r}) \left(1 - \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) u_{i,tt} \quad \dots (b)$$

考虑到  $\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$  也是一级小量 (小速度变化率), 则  $\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)$  就是二级小量, 略去有:

$$f_i + \sigma_{ij,j} = \rho(\vec{r}) u_{i,tt} \quad \dots (c)$$

因此, 在解运动方程时, 不涉及变化着的密度  $\rho'(\vec{r}')$ , 方程中出现的是给定的初始密度  $\rho(\vec{r})$ , 是个已知量。当然, 在解出位移  $u_i(\vec{r})$  后, 总可按 (5-1-6) 式计算出变形后的密度  $\rho'(\vec{r}')$  的。

#### (4) 弹性静力学问题和动力学问题的区分

静力学一般是指被研究物体受到的外力的合力为零、所受到的外力矩的合力矩为零时, 物体处于静力平衡状态的各种问题。因此, 当弹性体上的任一小体元都始终处于静力平衡状态时, 弹性体上的位移场、应变场、应力场、密度场等都只是位置坐标的函数, 而不随时间变化这类的问题, 自然属于静力学问题。但是, 我们在弹性力学中研究的是物质运动的第三种形式——变性, 所以关心的是弹性体上各点元间产生相对距离变化的问题, 并不关心弹性体作为整体的运动。所以, 弹性体受到不随时间变化的体力时, 由于弹性体整体运动着, 其上的位移场、应变场、应力场、密度场等也因此不仅是空间的函数, 也随时间变化; 但是, 这时弹性体上点点之间的相对距离不随时间变化了, 也就是“变性已确定了”(例: 地球在日月引力下的自转问题)。这类问题依然是弹性静力学问题。那么, 不受外力, 只受到不随时间变化的体力时, 弹性力学问题是不是都属于静力学问题呢? 不一定! 弹性体的自由震荡就是弹性动力学问题, 这时弹性体上的点点之间相对距离是随时间变化的。

弹性动力学问题是研究弹性体上点点之间相对距离随时间变化的问题。一般说, 动力学

问题是研究弹性体受到随时间变化的力之后产生波动的问题,也包括具有非零初始条件或非自然初始位形的自由振荡问题。例如,在太空舱里,宇航员拧扭弹性球——初应力不为零、初位形被迫扭曲。

总之,弹性力学的静、动力学问题的区别在于弹性体上各点之间的相对距离是否随时间变化。

举例来说,弹性体在重力场中自由下落是静力学问题。空中自旋着的弹性体所发生的形变是静力学问题(例:地球自转——离心力与变形后地球介质之间的抵抗变形的联接力平衡)。太空失重状态下弹性体的自由振荡是动力学问题。地球物理学中大地震激发起的地球自由振荡就是一个非常有趣的弹性动力学问题。

## § 5.2 弹性力学问题的求解途径

显而易见,直接求解这 15 个偏微分方程组成的方程组实在过于复杂,基本上是不可能的,因此我们就需要简化这个方程组。

我们采用的简化方法是消去其他的物理量,使剩下的方程只以一种或两种物理量作为未知函数。例如消去应力和应变,留下位移为未知函数,这样得到的简化方程称之为拉梅方程;或者消去位移和应变,留下应力为未知函数,这样得到的简化方程称之为拜尔托拉密·密迺尔方程(或应力协调方程)。

像这样求解以不同的物理量为未知函数表示的泛定方程,称为不同的求解途径。

比较常见的,就是上面介绍的以弹性体上各点的位移 $\vec{u}(\vec{r})$ ,或应力张量 $\sigma_{ij}(\vec{r})$ 作为未知函数的两种途径。

### <I> 以位移为未知函数的运动方程——拉梅方程

拉梅方程的导出步骤:先利用本构关系将运动方程(5-1-1)式中的应力分量化为应变分量表示,再利用几何方程将应变分量化为用位移分量表示。

即:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ &= \theta \delta_{ij} \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_j} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\ &= \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \\ &\xrightarrow{\theta = \varepsilon_{jj} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \\ &\dots (a)\end{aligned}$$

将(a)代入(5-1-1)得非均匀各向同性介质用位移表示的运动方程为:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \dots (5-2-1)$$

当介质均匀时(即 $\lambda, \mu$ 均为常数),上式化为:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

Or

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i + (\lambda + \mu) \theta_{,i} + \mu u_{i,jj}$$

.... (5-2-2)

(5-2-2) 式即为以未知函数表示的泛定方程，称为拉梅方程。

在拉梅方程的推导过程中利用了本构关系、几何关系和力学方程，因此它综合体现了弹性体运动的力学、几何学和物理学的规律性。

### 〈II〉 以应力张量为未知函数的运动方程——拜尔托拉密·密迤尔方程（亦称应力协调方程）

当以应力张量为未知函数时，首先应力张量分量应满足运动方程，但运动方程只包含三个方程而应力张量分量有 6 个独立的，所以未知量的个数多于方程的个数，必须补充方程数。换句话说，由三个方程确定的六个应力分量之间必须相互制约协调。下面我们就来推导拜尔托拉密·密迤尔方程。

首先对 (5-2-2) 式两边求  $\frac{\partial}{\partial x_j}$ ，得：

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

.... (a)

将上式作自由标置换运算，得：

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

.... (b)

将 (a) (b) 两式相加，注意到几何关系  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ ，有：

$$2\rho \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial t^2} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) + 2(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} + 2\mu \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k^2}$$

.... (c)

由本构关系  $\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij} - \lambda \theta \delta_{ij}}{2\mu}$  代入 (c) 式得：

$$\frac{\rho}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial t^2} - \frac{\rho \lambda}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \delta_{ij} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) + 2(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_k^2} - \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k^2} \delta_{ij}$$

.... (d)

再对 (5-2-2) 式两边求  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ （注意到： $\theta = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = u_{i,i}$ ）

得：

$$\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial f_k}{\partial x_k} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k^2}$$

.... (e)

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k^2} = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial f_k}{\partial x_k} = \frac{\rho\nu}{(1-\nu)\lambda} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_k}$$

.... (f)

而体积改变定律为:

$$(\text{由 } \sigma_0 = \frac{1}{3}I_1, \sigma_0 = 3K\varepsilon_0 = K\theta, E = 3K(1-2\nu), \varepsilon_0 = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii} = \frac{1}{3}\theta \text{ 可得})$$

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E} I_1$$

.... (g)

将 (f)、(g) 代入 (d) 式得 :

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial t^2} - \frac{\rho\lambda}{\mu} \cdot \frac{(1-2\nu)}{E} \cdot \frac{\partial^2 I_1}{\partial t^2} \delta_{ij} \\ = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) + 2(\lambda + \mu) \cdot \frac{(1-2\nu)}{E} \cdot \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_k^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \cdot \delta_{ij} \\ - \frac{\rho\nu}{1-\nu} \cdot \frac{(1-2\nu)}{E} \cdot \frac{\partial^2 I_1}{\partial t^2} \delta_{ij} \end{aligned}$$

.... (h)

移项整理 (注意到:  $\frac{1}{\mu} = \frac{2(1+\nu)}{E}$ ,  $\frac{2(\lambda+\mu)(1-2\nu)}{E} = \frac{1}{1+\nu}$ ,  $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\nu}{1-2\nu}$ ) 得 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_k^2} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\rho\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \cdot \delta_{ij} + \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \\ = \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial t^2} - \frac{\rho\nu}{E(1-\nu)} \cdot \frac{\partial^2 I_1}{\partial t^2} \delta_{ij} \end{aligned}$$

.... (5-2-3)

上式即为拜尔托拉密·密迺尔方程, 又称为应力协调方程 (共有 6 个方程)。

无体力或体力为常数时的静力平衡问题, 有相应的应力协调方程组为 :

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

.... (5-2-4)

(5-2-4) 式与平衡方程 (无体力时的):

$$\sigma_{ij,j} = 0$$

.... (5-2-5)

所组成的一组方程, 使我们可以避开一些复杂的变形问题而直接处理应力, 从而可使问题大大简化。

<III> 以体胀系数 $\theta$ 和应力张量第一不变量 $I_1$ 为未知函数的运动方程——调和函数

实际上对 (5-2-2) 式两边求  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ , 并注意到  $\theta = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = u_{i,i}$ , 则得 $\theta$ 所满足的运动方程为:



$$\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial f_k}{\partial x_k} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k^2} \quad \dots (5-2-6)$$

用体积改变定律：

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E} I_1 = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} I_1$$

代入 (5-2-6) 式得  $I_1$  所满足的运动方程为：

$$\frac{\rho}{(3\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^2 I_1}{\partial t^2} = \frac{\partial f_k}{\partial x_k} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{(3\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_k^2} \quad \dots (5-2-7)$$

当静力平衡时 ( $\frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0$ )，若体力为常数或体力场为保守力场 (势函数记为  $\varphi$ )

既有：

$$f_i = \text{const} \text{ or } f_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \varphi = 0$$

因保守力场的势函数满足拉普拉斯方程。所以当体力为常数或体力场是保守力场时， $\theta$  和  $I_1$  满足拉普拉斯方程，即：

$$\begin{cases} \nabla^2 \theta = 0 \\ \nabla^2 I_1 = 0 \end{cases} \quad \dots (5-2-8)$$

所以，此时  $\theta$  和  $I_1$  均为调和函数。

在动力学中：体力在如上相同的条件下， $\theta$  和  $I_1$  满足的方程是：

$$\begin{cases} \nabla^2 \theta = \frac{\rho}{(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \\ \nabla^2 I_1 = \frac{\rho}{(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^2 I_1}{\partial t^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 I_1}{\partial t^2} \end{cases} \quad \dots (5-2-9)$$

(5-2-9) 式是典型的波动方程，它指出弹性伸缩波 (或纵波) 是以：

$$C = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad \dots (5-2-10)$$

的速度传播的。

#### <IV> 弹性静力学中的双调和函数

当体力为常数或体力场为保守力场时，弹性静力 (平衡  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0$ ) 学问题中的位移、应力分量和应变分量都是双调和函数，即有：

$$\begin{cases} \nabla^2 \nabla^2 u_i = \nabla^4 u_i = 0 \\ \nabla^4 \sigma_{ij} = 0 \\ \nabla^4 \varepsilon_{ij} = 0 \end{cases}$$

••• (5-2-11)

所以双调和函数在弹性力学中非常重要。

(5-2-11) 式的推证:

证: 1. 以算符  $\nabla^2$  作用到 (5-2-2) 式两端, 有:

$$\nabla^2 f_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla^2 \theta + \mu \nabla^2 \nabla^2 u_i = 0$$

体力为常数时, 显然有  $\nabla^2 f_i = 0$ ; 体力场有势, 即  $f_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ ,  $\nabla^2 \varphi = 0$ , 所以有  $\nabla^2 f_i =$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \nabla^2 \varphi = 0.$$

又当体力场有势时,  $\theta$  和  $I_1$  是调和函数, 故  $\nabla^2 \theta = 0$ 。

所以有第一式:

$$\nabla^4 u_i = 0$$

2. 以算符  $\nabla^2$  作用到 (5-2-4) 式两端 (注意到  $\nabla^2 I_1 = 0$ ) 得第二式:

$$\nabla^4 \sigma_{ij} = 0$$

3. 用  $\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\theta\delta_{ij}$  代入上式, 注意到  $\nabla^2 \theta = 0$  得第三式:

$$\nabla^4 \varepsilon_{ij} = 0$$

证毕。

### § 5.3 弹性力学问题的边界条件

上节我们讨论了弹性体运动方程, 它是线性、弹性前提下任何弹性体做各种运动和变形所服从的共同规律。在导出这些方程时, 都是选取物体内部、不包括边界的微体元进行分析的。因此, 它是反映了物体内部各部分之间相互作用下产生的运动, 所得的方程是微分形式的, 是弹性体内点点必须服从的方程。这样的方程并没有反映物体通过边界受到外力, 以及物体初始时刻已存在的运动和变形状态对物体保持或继续运动和变形的作用与影响。而实际问题中, 往往需要了解物体通过边界受到已知外力作用下或在已知初始状态下是如何运动的具体过程。

从数学角度看, 表现共同规律的泛定方程是一个偏微分方程组, 它有无穷多的解, 这一点反映在微分方程的通解含有若干任意常数或任意函数。要得到确定的解, 需要用未知函数在边界上给定值或初始时刻, 未知函数在整个弹性体上的给定状态, 即边界条件和初始条件来确定这些待定常数或函数的形式。

边界条件给出的是在弹性体边界上所有点在所有时刻的值, 初始条件给定了弹性体上每一点在指定初始时刻所处的状态。

以下用  $V$  表示弹性体, 其边界面为  $S$ 。

### <I> 三种常见的边值类型

(1) 已知  $u_i^*(\vec{r}, t)$  ( $\vec{r} \in S$ ) 是  $t$  时刻在  $S$  面上给定的位移, 即:

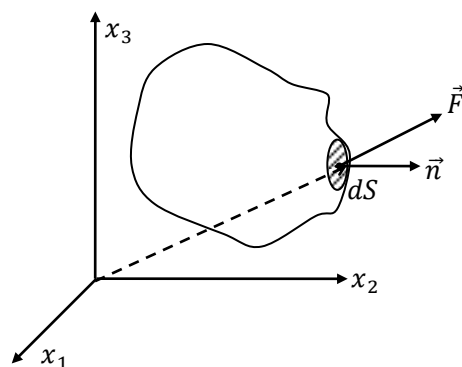
$$u_i(\vec{r}, t) = u_i^*(\vec{r}, t) \quad (\vec{r} \in S) \quad \dots\dots (5-3-1)$$

若  $u_i^*(\vec{r}, t) = 0$ , 则表示界面在所有时刻沿  $i$  轴方向不能移动。

例如  $u_1^*(\vec{r}, t) = 0$ , 即界面沿  $x_1$  轴方向不能移动, 即沿  $x_1$  轴向是固定边界。

(2) 已知  $\sigma_i^*(\vec{r}, t)$  ( $\vec{r} \in S$ ) 是  $t$  时刻在  $S$  面上  $\vec{r}$  点给定的应力矢量, 则其与该点的应力张量分量之间的联系按柯西公式有:

$$\sigma_i^*(\vec{r}, t) = \sigma_{ij}(\vec{r}, t) n_j(\vec{r}, t) \quad \dots\dots (5-3-2)$$



其中:  $\sigma_i^*(\vec{r}, t)$  是面元  $dS$  上作用的外力  $F_i$  与  $dS$  之比——外力应力矢量 (单位面积上的表面力的力矢量)。  $n_j(\vec{r}, t)$  是  $t$  时刻以  $\vec{r}$  点为中心的小边界面元  $dS$  的法向单位矢量。

若:  $\sigma_i^*(\vec{r}, t) = 0$ , 则表示边界面上  $\vec{r}$  点在  $t$  时刻沿  $i$  轴向不受外力。

例如:  $\sigma_1^*(\vec{r}, t) = 0$ , 则表示边界面上  $\vec{r}$  点在  $t$  时刻沿  $x_1$  轴向不受外力, 亦称该点在  $x_1$  轴向是自由的。

(3) 已知  $t$  时刻, 在部分边界上给定位移, 在部分边界上给定应力, 即:

$$\begin{cases} u_i(\vec{r}, t) = u_i^*(\vec{r}, t) & \vec{r} \in S_1 \\ \sigma_i^*(\vec{r}, t) = \sigma_{ij}(\vec{r}, t) n_j(\vec{r}, t) & \vec{r} \in S_2 \\ S_1 + S_2 = S \end{cases} \quad \dots\dots (5-3-3)$$

这实际上就是(1)和(2)的综合。

特别地: 在边界上给定应力边界条件(2)时, 则这时边界面上的表面力矢量  $\sigma_i$  必须满足弹性整体平衡条件。即合力、合力矩等于零。

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_S \sigma_i dS + \int_V f_i dV = 0 \\ \int_S \vec{r} \times \vec{\sigma} dS + \int_V \vec{r} \times \vec{f} dV = 0 \end{array} \right.$$

•••• (5-3-4)

### <II> 三种常见的边值问题

根据给定的边值条件的类型：弹性力学问题可分为如下三类边值问题。

(1) 已知边界位移的问题

已知体积力及表面上各点的位移(5-3-1)时，求解弹性体内各点的位移、应变及应力。

(2) 已知边界应力的问题

已知体积力及作用在弹性体表面上各点的外力(5-3-2)时，求解弹性体内各点的位移、应变及应力。

(3) 混合边值问题

已知体积力及作用在弹性体部分边界 ( $S_\sigma$ ) 上各点的外力、部分边界 ( $S_u$ ) 上位移给定时，求解弹性体内的位移场、应变场及应力场。

混合边值问题也包括弹性支承问题，即边界条件中同时包含位移及外力。

例如：已知  $t$  时刻，边界上  $\vec{r}$  点沿  $x_i$  方向受到的外力与该点沿  $x_i$  方向的位移成正比，而方向相反。

$$\sigma_i(\vec{r}, t) = \sigma_{ij}(\vec{r}, t) n_j(\vec{r}, t) = -k u_i(\vec{r}, t) \quad \vec{r} \in S$$

### <III> 边界条件的变换

在解弹性力学边值问题时，各种求解途径要求用相应的边值类型的边值来定解。如果问题给出的边界条件与所采用的未知函数不统一的话，可以利用本构关系和几何关系等进行变换，以便定解。

(1) 常用的变换是把应力类型的边值变换换成用位移表示的边值，即已知  $\sigma_i(\vec{r}, t) \quad \vec{r} \in S$ ，则：

$$\sigma_i(\vec{r}, t) = \sigma_{ij} n_j = (2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \theta \delta_{ij}) n_j = \left[ \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j$$

•••• (5-3-6)

(2) 若已知位移边界条件，要变换成用应力来表示则需要积分，结果比较复杂，一般不用，但原则上可以通过几何关系式来求积分，得出用应变表示位移的式子：

$$u_i(\vec{r}, t) = u_i(\varepsilon_{kl})$$

再利用本构关系，把被积函数中的  $\varepsilon_{kl}$  全部换成  $\sigma_{ij}$  来表示。

## § 5.4 边界条件的简化——Saint-Venant (圣维南) 原理 (局部影响原理)

### <I> 问题的提出

在静力学问题中，我们的目的是寻求一个空间函数，使它不仅满足平衡方程（即纳维叶方程），同时还要满足边界条件。

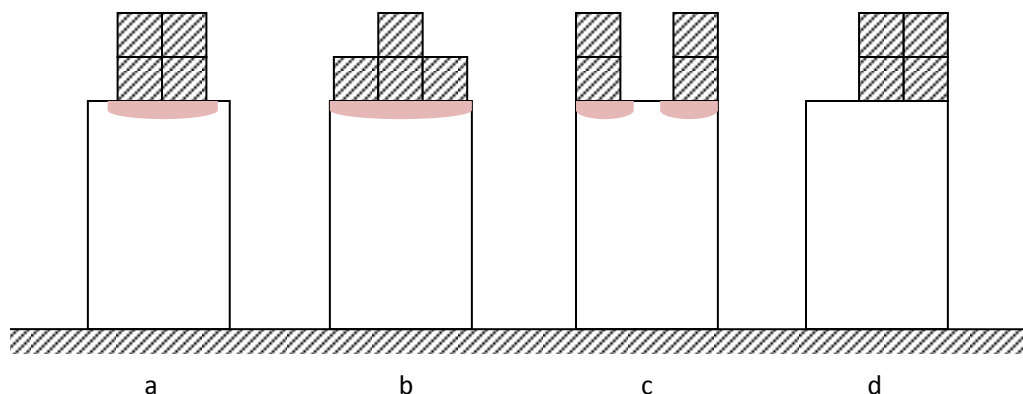
但是在实际问题中，找到一个满足平衡方程的空间函数比较容易，可要它同时完全满足边界条件有时却很困难。所以弹性力学问题有相当大的一部分是数学上的边值问题。

另外在实际中，无论是科研方面还是工程技术方面，既不可能给出边界上准确的函数形式，也不可能求解出复杂的边界问题。因此，我们提出这样的问题：复杂的边界条件是否能做简化，而不严重影响所得到解的精确性？

### <II> 圣维南的发现（1855 年）

圣维南发现：作用在物体表面一块小面积上的外力，只要外力的合力和合力矩不变（即所谓静力等效），无论外力怎样分布，在物体中离外力作用区相当远的地方，各种不同形式的外力分布所引起的位移、应力、应变的分布相差不多。

例如下图所示的长方形弹性柱体立在固定的刚性平面上：



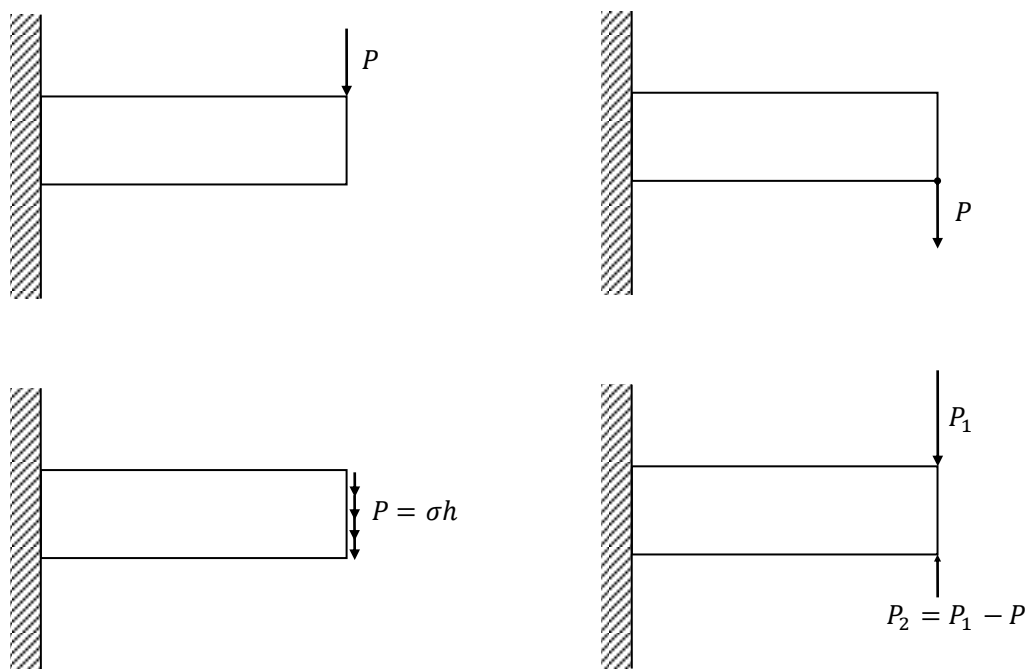
用四块重量与形状相同的重物压在其上端面。则 a、b、c 三种分布分别引起的弹性柱的变形和应力分布在远离力作用区处的情况差别很小。这一点已为理论分析和实际测量所证实。最初这一事实圣维南是从大量实践总结出来的，称为圣维南原理。一百多年后的 1974 年，R. A. Toupin 和 Berdicherskii（前苏联学者）给出了圣维南原理的严格表述和证明（参见 И. М. М., 38 (1974), СТР. 851）。

圣维南原理帮助我们在实际问题中把复杂的边界应力问题加以简化，可以用一个最简单、在局部静力等效的应力分布来代替边界上的复杂应力。但是在应用这一原理时，应当特别注意使用条件：

(1) 不能背离“静力等效”的条件，否则不同的外力系将不仅在其作用区域附近产生差异，而且在整个物体上都有差异。如上图 d 所示的外力分布与 a、b、c 三种分布相比，其合力不是作用在上表面的形心（即主矩不为零），因此，它所引起的位移场、应变场和应力场在整个弹性体中与 a、b、c 三种分布下的情况都不一样。

(2) 只有当外力作用的小块面积小于物体的最小尺寸时，才可应用圣维南原理。对于厚度很薄的物体，应用圣维南原理时就要特别小心。

(3) 所考察的范围应当远离外力的作用区。一个典型的例子是悬臂梁问题：



在离外力作用区的距离大于梁的厚度或高度的区域，应力分布是相同的。

圣维南原理一般不仅适用于弹性和小形变问题，也适用于非弹性及有限变形问题，但不适用于动力学问题。

### § 5.5 弹性力学问题的初始条件

静力平衡问题没有初始条件，未知函数只是空间变量的函数，不含时间变量。弹性动力学问题要求知道弹性体运动的具体过程，即问题的确定解，故需要给出弹性体初始时刻处于什么状态。这一状态一般用  $t = 0$  时的初位移  $u_i(\vec{r}, t)$  ( $\vec{r} \in V$ )，以及初速度  $\frac{\partial u_i}{\partial t} \Big|_{t=0}$  来描述。通常表为：

$$\vec{r} \in V \begin{cases} u_i(\vec{r}, t)|_{t=0} = d_i(\vec{r}) \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_i(\vec{r}) \end{cases} \quad \dots (5-5-1)$$

这里， $d_i(\vec{r})$  为已知的初位移， $v_i(\vec{r})$  为已知的初速度。

### § 5.6 弹性力学的一般原理

在弹性力学问题的求解中，以下几个定理是常用的。

#### <I> 应变能定理（克拉贝隆定理）

定理：一弹性体在体力  $f_i$  和面力  $\sigma_i$  的作用下平衡，并且  $f_i$  和  $\sigma_i$  必须是均匀恒定的力。在这些力作用下产生的位移为  $u_i$ ，则物体的总应变能  $W$  等于外力功  $A$  的一半：

$$W = \frac{1}{2}A$$

•••• (5-6-1)

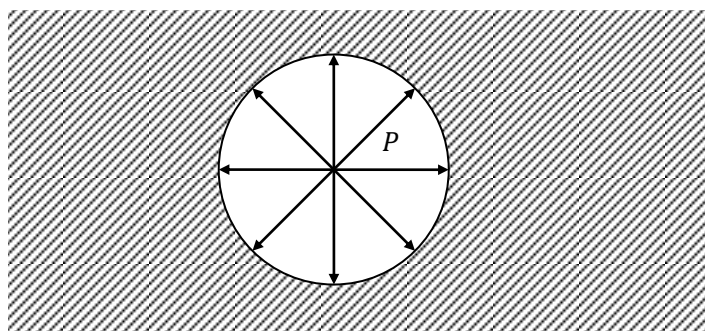
证:

$$\begin{aligned} A &= \iiint_V f_i u_i dV + \iint_S \sigma_i u_i dS \xrightarrow{\text{柯西公式}} \iiint_V f_i u_i dV + \iint_S \sigma_{ij} n_j u_i dS \\ &\xrightarrow{\text{由高斯定理}} \iiint_V f_i u_i dV + \iiint_V (\sigma_{ij} u_i)_{,j} dV \\ &= \iiint_V f_i u_i dV + \iiint_V (\sigma_{ij,j} u_i + \sigma_{ij} u_{i,j}) dV = \iiint_V (\sigma_{ij,j} + f_i) u_i dV + \iiint_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \\ &\xrightarrow{\text{平衡方程 } \sigma_{ij,j} + f_i = 0} 2 \iiint_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = 2 \iiint_V w_1 dV = 2W \end{aligned}$$

即总应变能:  $W = \frac{1}{2}A$ 。

有了克拉贝隆定理, 我们就可以避开计算  $\iiint_V w_1 dV$ , 这个积分对于几何形状复杂的物体, 通常是很难计算的。而往往计算外力功  $A$  是比较容易的。

例: 无限大的平板内有一圆孔, 半径为  $R$ 。板厚为 1, 孔壁受有均匀压力  $P$ , 求整个板内的应变能。



解: 这个问题的解为:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\frac{PR^2}{r^2}, & \sigma_{\theta\theta} &= \frac{PR^2}{r^2}, & \sigma_{r\theta} &= 0 \\ u_r &= \frac{PR^2}{2\mu r}, & u_\theta &= 0 \end{aligned}$$

在解已知的情况下, 按:

$$W = \iiint_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV$$

是可求出应变能的，但这样比较麻烦，特别是遇到几何形状复杂的物体更不易计算这个体积分。如果利用克拉贝隆定理，则简单多了。

因：

$$u_r|_{r=R} = \frac{PR^2}{2\mu r} \Big|_{r=R} = \frac{PR}{2\mu}$$

按定理所述有：

$$A = P \cdot S \cdot u_r|_{r=R} = P \cdot 2\pi R \cdot 1 \cdot \frac{PR}{2\mu} = \frac{\pi P^2 R^2}{\mu} = 2W$$

所以：

$$W = \frac{\pi P^2 R^2}{2\mu}$$

## <II> 迭加原理

在小形变假定下，弹性体运动方程和边、初条件都是未知函数的线性方程。因此，弹性力学问题的解服从迭加原理。

迭加原理：若  $u_i(\vec{r}, t)$  和  $v_i(\vec{r}, t)$  是同一弹性体运动（或平衡）方程的解， $f'_i$  和  $f''_i$  为相应的体力，则  $u_i(\vec{r}, t) + v_i(\vec{r}, t)$  也是它的解，相应的体力为  $f'_i + f''_i$ ，相应的边、初条件是  $u_i$  和  $v_i$  的边、初条件的和。

(1) 现以位移为未知函数的情况来证明迭加原理：

按原理所述有：

$$\text{定解问题 I} \begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f'_i + (\lambda + \mu) u_{i,ij} + \mu u_{i,jj} \text{---Lame 方程} \\ u_i(\vec{r}, t) = u'_i(\vec{r}, t) \quad \vec{r} \in S \text{---边界条件} \\ \begin{cases} u_i(\vec{r}, 0) = F'_i(\vec{r}) \\ \left. \frac{\partial u_i}{\partial t} \right|_{t=0} = G'_i(\vec{r}) \end{cases} \quad \vec{r} \in V \text{---初始条件} \end{cases}$$

•••• (5-6-2)

这里， $f'_i$  是弹性体以  $u_i(\vec{r}, t)$  为解时所受的体力，是已知函数； $u'_i$ 、 $F'_i$ 、 $G'_i$  是已知的边、初值。

$$\text{定解问题 II} \begin{cases} \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = f''_i + (\lambda + \mu) v_{i,ij} + \mu v_{i,jj} \\ v_i(\vec{r}, t) = v''_i(\vec{r}, t) \quad \vec{r} \in S \\ \begin{cases} v_i(\vec{r}, 0) = F''_i(\vec{r}) \\ \left. \frac{\partial v_i}{\partial t} \right|_{t=0} = G''_i(\vec{r}) \end{cases} \quad \vec{r} \in V \end{cases}$$

•••• (5-6-3)

这里， $f''_i$  是弹性体相应于解为  $v_i(\vec{r}, t)$  所受的体力，是已知函数， $v''_i$ 、 $F''_i$ 、 $G''_i$  是相应的边、初值。

注意：无论是问题 I 还是问题 II，都是针对同一个弹性体。

因定解问题 I 和 II 的方程和定解条件都是线性的，将它们对应相加得：



$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial^2 (u_i + v_i)}{\partial t^2} = (f'_i + f''_i) + (\lambda + \mu)(u_i + v_i)_{,ij} + \mu(u_i + v_i)_{,jj} \\ v_i(\vec{r}, t) + u_i(\vec{r}, t) = u'_i(\vec{r}, t) + v''_i(\vec{r}, t) \quad \vec{r} \in S \\ \begin{cases} u_i(\vec{r}, 0) + v_i(\vec{r}, 0) = F'_i(\vec{r}) + F''_i(\vec{r}) \\ \left. \frac{\partial (u_i + v_i)}{\partial t} \right|_{t=0} = G'_i(\vec{r}) + G''_i(\vec{r}) \end{cases} \quad \vec{r} \in V \end{array} \right.$$

•••• (5-6-4)

由上式可见:  $(u_i + v_i)$  满足与问题 I 和 II 完全相同的方程——Lame 方程, 所以,  $(u_i + v_i)$  也是 Lamé 方程的解。并且相应的体力是问题 I 和 II 所受体力之和, 相应的边、初条件也是问题 I 和 II 的边、初条件之和。证毕。

## (2) 讨论

- 迭加原理是对线弹性力学中各物理量线性性质的概括。此处我们虽只对以位移为未知函数的情况作了证明, 当其他物理量 (如应力、应变) 作未知函数时, 迭加原理同样是成立的。
- 迭加原理是在小形变假定下证明的, 所以只适用于小形变情况。
- 迭加原理非常有用, 利用它可以把一个所受体力分布或边、初条件比较复杂的问题, 分解成若干简单的、易于求解 (或猜解) 的问题, 在分别求出这若干简单情况下的各个解之后, 迭加起来就得到原先复杂问题的解。
- 迭加原理的推论: 任何弹性力学问题, 都可归结为无体力问题。

证明: 不失一般性, 仍以位移为未知函数的情况来证明。

依推论有:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i + (\lambda + \mu)u_{i,ij} + \mu u_{i,jj} \\ u_i(\vec{r}, t) = u'_i(\vec{r}, t) \quad \vec{r} \in S \\ \begin{cases} u_i(\vec{r}, 0) = F'_i(\vec{r}) \\ \left. \frac{\partial u_i}{\partial t} \right|_{t=0} = G'_i(\vec{r}) \end{cases} \quad \vec{r} \in V \end{array} \right.$$

•••• (5-6-5)

假定现在任意找一个形式解  $v_i(\vec{r}, t)$ , 它满足上面问题的泛定方程, 但不一定满足边、初条件。但  $v_i(\vec{r}, t)$  的具体函数形式已知, 则总可利用它计算出边界上的值和初始时刻的值, 即有:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = f_i + (\lambda + \mu)v_{i,ij} + \mu v_{i,jj} \\ v_i(\vec{r}, t) = v''_i(\vec{r}, t) \quad \vec{r} \in S \\ \begin{cases} v_i(\vec{r}, 0) = F''_i(\vec{r}) \\ \left. \frac{\partial v_i}{\partial t} \right|_{t=0} = G''_i(\vec{r}) \end{cases} \quad \vec{r} \in V \end{array} \right.$$

•••• (5-6-6)

其中,  $v''_i(\vec{r}, t)$ ,  $F''_i(\vec{r})$  和  $G''_i(\vec{r})$  是利用  $v_i(\vec{r}, t)$  的具体函数形式计算出的边、初值。

按迭加原理有:

$$u_i(\vec{r}, t) - v_i(\vec{r}, t) = w_i(\vec{r}, t)$$

•••• (5-6-7)

则 $w_i(\vec{r}, t)$ 是下列问题的解（即(5-6-5)减(5-6-6)）

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) w_{i,jj} + \mu w_{i,jj} \\ w_i(\vec{r}, t) = u'_i(\vec{r}, t) - v_i''(\vec{r}, t) \quad \vec{r} \in S \\ \begin{cases} w_i(\vec{r}, 0) = F'_i(\vec{r}) - F''_i(\vec{r}) \\ \left. \frac{\partial w_i}{\partial t} \right|_{t=0} = G'_i(\vec{r}) - G''_i(\vec{r}) \end{cases} \quad \vec{r} \in V \end{cases}$$

•••• (5-6-8)

可见原先提出的有体力问题(5-6-5)，可以利用迭加原理将其转化为求解无体力问题(5-6-8)。在解出 $w_i(\vec{r}, t)$ 之后，再利用(5-6-7)式就可得到原先有体力问题(5-6-5)的解答。

### <III> 唯一性定理

定理：弹性力学问题的解是唯一的。

证明：不失一般性，仍以位移为未知函数的情况加以证明。

假定边界为 $S$ 的弹性体 $V$ ，在已知体力分布 $f_i(\vec{r}) \quad \vec{r} \in V$ ，以及边值 $u'_i(\vec{r}, t) \quad \vec{r} \in S$ ；初值 $F'_i(\vec{r}) \quad G'_i(\vec{r}) \quad \vec{r} \in V$ 的情况下有两种不同的解： $u_i(\vec{r}, t)$ 和 $v_i(\vec{r}, t)$ 。即要求 $u_i(\vec{r}, t)$ 和 $v_i(\vec{r}, t)$ 满足：

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i + (\lambda + \mu) u_{i,jj} + \mu u_{i,jj} \\ \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = f_i + (\lambda + \mu) v_{i,jj} + \mu v_{i,jj} \\ u_i(\vec{r}, t) = v_i(\vec{r}, t) = u'_i(\vec{r}, t) \quad \vec{r} \in S \\ u_i(\vec{r}, 0) = v_i(\vec{r}, 0) = F'_i(\vec{r}) \quad \vec{r} \in V \\ \left. \frac{\partial u_i}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial v_i}{\partial t} \right|_{t=0} = G'_i(\vec{r}) \quad \vec{r} \in V \end{cases}$$

•••• (5-6-9)

根据迭加原理，可由上述两个解构成一个新解：

$$w_i(\vec{r}, t) = u_i(\vec{r}, t) - v_i(\vec{r}, t)$$

•••• (5-6-10)

它一定满足：

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) w_{i,jj} + \mu w_{i,jj} \\ w_i(\vec{r}, t) = u_i(\vec{r}, t) - v_i(\vec{r}, t) = 0 \quad \vec{r} \in S \\ \begin{cases} w_i(\vec{r}, 0) = u_i(\vec{r}, 0) - v_i(\vec{r}, 0) = 0 \\ \left. \frac{\partial w_i}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial(u_i - v_i)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad \vec{r} \in V \end{cases}$$

•••• (5-6-11)

显然，该定解问题的物理意义是：弹性体内各点不受体力作用（即 $f_i = 0$ ），同时在边界上各点在任何时刻的位移为零，初始时刻弹性体内各点位移为零，各点速度为零。即弹性体处于不受任何外力的自由状态。所以弹性体上点点的位移在任何时刻都恒为零，即：

$$w_i(\vec{r}, t) = u_i(\vec{r}, t) - v_i(\vec{r}, t) \equiv 0$$

•••• (5-6-12)

因此：

$$u_i(\vec{r}, t) \equiv v_i(\vec{r}, t)$$

即两种解必须是相同的，或者说只有唯一解。证毕

注意：以上证明用了迭加原理，所以也只适用于小形变情况。

对于非线性问题和稳定性问题，唯一性定理不成立。

#### <IV> 功的互等定理 (Betti 互易定理)

定理：若边界为  $S$  的弹性体  $V$ ，受到第一组力： $f'_i(\vec{r}, t)$   $\vec{r} \in V$ ； $\sigma'_{ij}(\vec{r}, t)$   $\vec{r} \in S$  引起的第一组位移场、应变场、应力场分别为  $u'_i(\vec{r}, t)$ 、 $\varepsilon'_{ij}(\vec{r}, t)$ 、 $\sigma'_{ij}(\vec{r}, t)$ 。受到第二组力： $f''_i(\vec{r}, t)$   $\vec{r} \in V$ ； $\sigma''_{ij}(\vec{r}, t)$   $\vec{r} \in S$  产生的第二组位移场、应变场、应力场分别为  $u''_i(\vec{r}, t)$ 、 $\varepsilon''_{ij}(\vec{r}, t)$ 、 $\sigma''_{ij}(\vec{r}, t)$ 。则第一组力（包括惯性力）在第二组位移上所做的功等于第二组力（包括惯性力）在第一组位移上所做的功，即有：

$$A_{12} = A_{21} \quad \dots (5-6-13)$$

$$A_{12} = \iiint_V (f'_i - \rho u'_{i,tt}) u''_i dV + \iint_S \sigma'_{ij} n'_j u''_i dS \xrightarrow{\text{柯西公式}} \iiint_V (f'_i - \rho u'_{i,tt}) u''_i dV + \iint_S \sigma'_{ij} n'_j u''_i dS \quad \dots (5-6-14)$$

$$A_{21} = \iiint_V (f''_i - \rho u''_{i,tt}) u'_i dV + \iint_S \sigma''_{ij} n''_j u'_i dS \xrightarrow{\text{柯西公式}} \iiint_V (f''_i - \rho u''_{i,tt}) u'_i dV + \iint_S \sigma''_{ij} n''_j u'_i dS \quad \dots (5-6-15)$$

注意： $n_j$  是边界面元的法向单位矢量，但因 Betti 定理是针对同一弹性体的两组量之间的互易，故有  $n'_j = n''_j = n_j$ 。

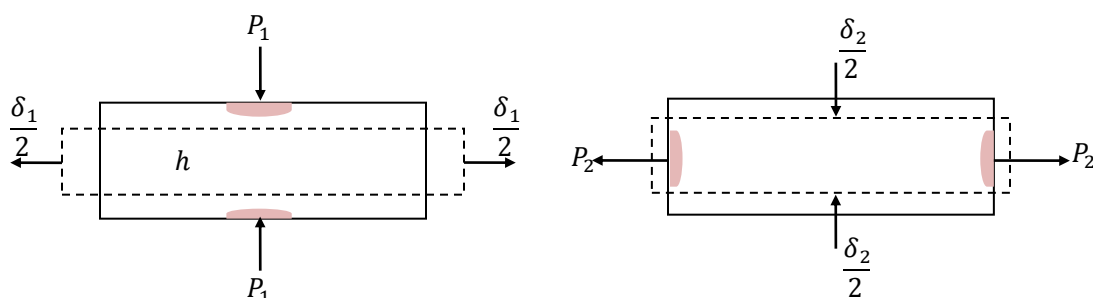
另外，Betti 定理不涉及位移场的初始条件，所以，即使  $u'_i$ 、 $u'_{i,tt}$ 、 $\sigma'_i$ 、 $f'_i$  是在  $t_1$  赋值，而  $u''_i$ 、 $u''_{i,tt}$ 、 $\sigma''_i$ 、 $f''_i$  是在  $t_2$  赋值，定理仍然成立。

证明：将运动方程  $\begin{cases} f'_i - \rho u'_{i,tt} = -\sigma'_{ij,j} \\ f''_i - \rho u''_{i,tt} = -\sigma''_{ij,j} \end{cases}$  代入 (5-6-14) 式，并利用高斯定理：

$$\begin{aligned} A_{12} &= \iiint_V (f'_i - \rho u'_{i,tt}) u''_i dV + \iint_S \sigma'_{ij} n'_j u''_i dS \\ &= - \iiint_V \sigma'_{ij,j} u''_i dV + \iiint_V \sigma'_{ij,j} u''_i dV + \iiint_V \sigma'_{ij} u''_{i,j} dV \\ &= \iiint_V \sigma'_{ij} \varepsilon''_{ij} dV \xrightarrow{\text{本构关系}} \iiint_V C_{ijkl} \varepsilon'_{kl} \varepsilon''_{ij} dV \\ &\xrightarrow{\text{作哑标置换, 并有 } C_{ijkl} = C_{klij}} \iiint_V C_{klij} \varepsilon'_{ij} \varepsilon''_{kl} dV = \iiint_V C_{ijkl} \varepsilon'_{ij} \varepsilon''_{kl} dV \\ &= \iiint_V \sigma''_{ij} \varepsilon'_{ij} dV \xrightarrow{\text{反推回去}} A_{21} \end{aligned}$$

贝蒂定理无论对求解弹性静力学问题还是弹性动力学问题都具有重要意义。利用它可将复杂的问题大大简化。下面举两个静力学问题的实例。

例 1: 一个等截面弹性杆, 在横向受到一对平衡的压力  $P_1$  的作用 (如图)。求杆的总伸长  $\delta_1$ 。设杆宽为  $h$ , 杆截面积为  $A$ , 杨氏模量  $E$  和泊松比  $\nu$  均已知。



解: 记  $P_1$  为第一组力, 在  $P_1$  的作用下, 杆伸长为  $\delta_1$ 。记  $P_2$  为第二组力, 在  $P_2$  的作用下, 力  $P_1$  的作用点处的位移为  $\frac{\delta_2}{2}$ ,  $\delta_2$  可由单轴拉伸实验结果知道为  $\delta_2 = -\frac{\nu h P_2}{AE}$ 。

因:  $\sigma_{11} = E \varepsilon_{11}$ , 而  $\sigma_{11} = \frac{P_2}{A}$   $\varepsilon_{11} = \frac{\Delta L}{L}$  (纵向应变),  $\Delta L$  为长度改变量,  $L$  为原长。横向应变  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{\Delta h}{h} = \frac{\delta_2}{h}$ ,  $\Delta h = \delta_2$  为宽度改变量,  $h$  为原宽度。由泊松比定义, 有:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\delta_2/h}{\sigma_{11}/E} = -\frac{\delta_2 EA}{h P_2} \Rightarrow \delta_2 = -\frac{\nu h P_2}{EA}$$

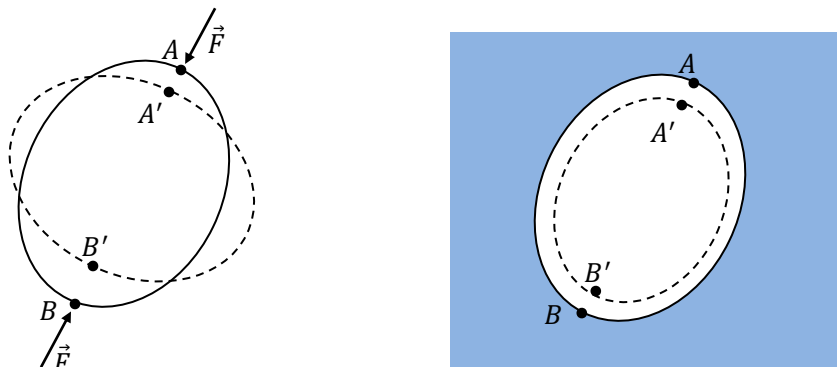
根据贝蒂定理 (对于离散点作用力, 则 Betti 定理中的积分改为求和):

$$-P_1 \cdot \frac{\delta_2}{2} - P_1 \cdot \frac{\delta_2}{2} = P_2 \cdot \frac{\delta_1}{2} + P_2 \cdot \frac{\delta_1}{2}$$

即:

$$P_1 \delta_2 = P_2 \delta_1 \Rightarrow \delta_1 = -\frac{P_1}{P_2} \delta_2 = \frac{\nu h P_1}{EA}$$

例 2: 如图所示的任意形状的统一、各项同性弹性体  $V$ , 受一对平衡的点集中力  $\vec{F}$  作用, 求解弹性体受力后体积的改变量  $\Delta V$ 。



解:

记  $\vec{F}$  力系为第一组体力系, 在  $\vec{F}$  力系的作用下, 弹性体的体积  $V$  的改变为  $\Delta V$ 。

记液体静压力  $P$  为第二组力系，在均匀静水压  $P$  的作用下，弹性体均匀收缩，其在  $\vec{F}$  作用点处的位移就是  $\Delta L$ 。

A、B 为点集中力  $\vec{F}$  的作用点。  $\overline{AB} = L$  ,  $\overline{A'B'} = L'$  , 则  $\Delta L = L' - L < 0$  (因  $L' < L$ )。

因为第二组力系是静水压  $P$ ，所以其在弹性体内的应力状态可用应力球张量表示，即：

$$\sigma_0 \delta_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{体积改变定律}} 3K\varepsilon_0 \delta_{ij}$$

亦即：弹性体内的应变状态为：

$$\varepsilon_0 \delta_{ij} = \frac{1}{3K} \sigma_0 \delta_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{P}{3K} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{P}{3K} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{P}{3K} \end{pmatrix}$$

即：在静水压下，弹性体内各点只有均匀的线应变。因此，  $\overline{AB} = L$  线段的缩短量为  $\Delta L = L\varepsilon_0 = -\frac{LP}{3K}$  (相对伸长 (或缩短)：  $|\Delta x| = \frac{L'-L}{L} = \frac{\Delta L}{L} = \varepsilon_0$ )。

根据贝蒂定理有：

$$A_{12} = F \cdot \Delta L = -P \cdot \Delta V = A_{21} \Rightarrow \Delta V = -\frac{F}{P} \Delta L = \frac{FL}{3K} = \frac{FL(1-2\nu)}{E}$$

### <V> 最小势能定理

#### (1) 定理

在这里我们所需要研究的是：弹性体形变后，其内部和外部载荷达到平衡时，弹性体的总势能。并证明在平衡时的总势能取最小值。

定义弹性体受力变形，达到平衡时弹性体的总势能为：

$$\Pi = W - A$$

这里：W—应变能，A—外力功。

总势能的物理意义可以这样理解：设物体在外力作用下的变形过程是准静态的，即在整个变形过程的每一步都可以看出是静力平衡的。这种情况下。动能和热效应均可忽略不计。于是，在这种变形过程中，外力所做的功全部以应变能的形式储存于物体内。若取参考状态的物体为变形前的状态，并取参考位置的势能为零，则弹性体的总势能可以看成是从物体的已变形状态回复到参考状态的过程中，物体对外界所做的总功。

我们按以下思路去研究这个问题。

首先考虑下述两种位移场相应的应力、应变场及总势能的比较：

1. 即适合方程 (平衡方程)，又适合边界条件的实际位移场，记为  $u_i(\vec{r})$ ，在此我们称其为第一种位移场。

2. 设在实际位移场基础上迭加一个虚位移  $\delta u_i$ ，又称可能位移。 $\delta u_i$  是弹性体的几何约束所允许的位移。如此构成一个近似位移场，记为  $u_i(\vec{r}) + \delta u_i$ ，在此我们称其为第二种位移

场。这个位移场只满足有关位移的边界条件，但不满足平衡方程和有关应力的边界条件。

然后我们证明实际位移场 $u_i(\vec{r})$ 所产生的总势能永远比近似位移场 $u_i(\vec{r}) + \delta u_i$ 小。

这一客观事实用定理表述为：

**最小势能定理：**在适合已知位移边界条件的一切位移解中，以适合平衡方程的位移解（即实际位移）所产生的总势能最小。换言之，凡弹性力学中平衡问题的正确解，其相应的总势能为一切适合边界位移条件和连续条件的其它近似解中的最小者。

一句话：在稳定的平衡状态，体系的总势能最小。

(2) 证明

证：对实际位移场 $u_i(\vec{r})$ ，其相应的应变场、应力场为 $\varepsilon_{ij}(\vec{r})$ 和 $\sigma_{ij}(\vec{r})$ 应变能为：

$$W = \iiint_V w_1 dV = \iiint_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV$$

按定理所述：实际问题的正确解应该为同时满足平衡方程和所有边界条件，即有：

$$\begin{cases} \sigma_{ji,j} + f_i = 0 & \text{平衡方程} \\ \sigma_i^{(n)}(\vec{r}) = \sigma_{ij} n_j & \vec{r} \in S_A \text{ 应力边界条件} \\ u_i(\vec{r}) = u_i^*(\vec{r}) & \vec{r} \in S_B \text{ 位移边界条件} \end{cases}$$

注\*：  $S = S_A + S_B = S_\sigma + S_u$

而对近似位移场 $u_i(\vec{r}) + \delta u_i$ ，其只满足位移边界条件，但不满足平衡方程和应力边界条件，即只在 $S_B$ 边界面上有：

$$u_i(\vec{r}) + \delta u_i = u_i^*(\vec{r}) \quad \vec{r} \in S_B$$

亦即：

$$\delta u_i = 0 \quad \vec{r} \in S_B$$

记相应于 $\delta u_i$ 的应变张量，应力张量为：

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i} \right) \quad ; \quad \delta \sigma_{ij} = 2\mu \delta \varepsilon_{ij} + \lambda \delta \theta \delta_{ij}$$

$$\delta \theta = \delta \varepsilon_{ii} = \delta \varepsilon_{11} + \delta \varepsilon_{22} + \delta \varepsilon_{33}$$

则相应于近似位移场 $u_i(\vec{r}) + \delta u_i$ 的应力，应变场及应变能分别为（按迭加原理）：

$$\sigma_{ij}'' = \sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij} \quad ; \quad \varepsilon_{ij}'' = \varepsilon_{ij} + \delta \varepsilon_{ij} \quad ; \quad W'' = \iiint_V w_1'' dV$$

其中：

$$\begin{aligned}
 W_1'' &= W_1 + \delta W_1 = \frac{1}{2} \sigma_{ij}' \varepsilon_{ij}'' = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij}) (\varepsilon_{ij} + \delta \varepsilon_{ij}) \\
 &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \delta \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \\
 &= W_1(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}) + W_1(\delta \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}) + W_1(\sigma_{ij}, \delta \varepsilon_{ij}) + W_1(\delta \sigma_{ij}, \delta \varepsilon_{ij})
 \end{aligned}$$

注意：\$W\_1''\$ 是 \$\sigma\_{ij}'\$ 与 \$\varepsilon\_{ij}''\$ 的乘积，所以 \$W\_1''\$ 不是简单的 \$W\_1\$ 迭加上 \$\delta u\_i\$ 相应的应变能，还应包括外力在 \$\delta u\_i\$ 上做的功 \$\delta A\$。

由贝蒂互易定理知：

$$W_1(\sigma_{ij}, \delta \varepsilon_{ij}) = W_1(\delta \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij})$$

注意：这里 \$W\_1(\sigma\_{ij}, \varepsilon\_{ij})\$ 是实际位移所产生的应变能密度。\$W\_1(\delta \sigma\_{ij}, \delta \varepsilon\_{ij})\$ 是与 \$\delta u\_i\$ 这部分位移的位形相关的应变能密度。而 \$2W\_1(\sigma\_{ij}, \delta \varepsilon\_{ij})\$ 是外力在 \$\delta u\_i\$ 上做的功，关于这一点稍后就可看清楚。所以第二种位移产生的应变能（密度）是：

$$W_1'' = W_1(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}) + W_1(\delta \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}) + 2W_1(\sigma_{ij}, \delta \varepsilon_{ij})$$

可见：

$$\delta W_1 = W_1(\delta \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}) + 2W_1(\sigma_{ij}, \delta \varepsilon_{ij})$$

我们记：

$$\begin{aligned}
 \Omega &= \iiint_V 2W_1(\sigma_{ij}, \delta \varepsilon_{ij}) dV \\
 &= \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \xrightarrow{(\sigma_{ij}, \delta u_i)_{,j} = \sigma_{ij,j} \delta u_i + \sigma_{ij} \delta u_{i,j}} \iiint_V (\sigma_{ij}, \delta u_i)_{,j} dV - \iiint_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV \\
 &\xrightarrow{\text{运用高斯公式于第一项，平衡方程于第二项}} \iint_{S=S_A+S_B} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS + \iiint_V f_i \delta u_i dV \\
 &\xrightarrow{\text{在 } S_B \text{ 上 } \delta u_i = 0, \text{ 在 } S_A \text{ 上 } \sigma_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j} \iint_S \sigma_i^{(n)} \delta u_i dS + \iiint_V f_i \delta u_i dV
 \end{aligned}$$

显然：\$\Omega = \iint\_S \sigma\_i^{(n)} \delta u\_i dS + \iiint\_V f\_i \delta u\_i dV\$ 正是外力（包括体力和面力）在 \$\delta u\_i\$ 上做的功，

称之为虚功，记为 \$\delta A\$。当有虚位移 \$\delta u\_i\$ 时，认为体积力 \$f\_i\$ 和表面力 \$\sigma\_i^{(n)}\$ 是不变的，因此有：

$$\Omega = \iint_S \sigma_i^{(n)} \delta u_i dS + \iiint_V f_i \delta u_i dV = \delta \left( \iint_S \sigma_i^{(n)} u_i dS + \iiint_V f_i u_i dV \right) = \delta A$$

所以由虚位移 $\delta u_i$ 引起的弹性体总应变能的改变为:

$$\begin{aligned}\delta W &= \iiint_V W_1(\delta \sigma_{ij}, \delta \varepsilon_{ij}) dV + \Omega = W(\delta \sigma_{ij}, \delta \varepsilon_{ij}) + \delta A \\ &= \text{相应于 } \delta u_i \text{ 位形的应变能} + \text{外力在 } \delta u_i \text{ 上做的功} \\ &= \text{形变位能} + \text{力的位能}\end{aligned}$$

根据总势能的定义, 则可知由虚位移 $\delta u_i$ 引起的总势能的改变为:

$$\delta \Pi = \delta W - \delta A = W(\delta \sigma_{ij}, \delta \varepsilon_{ij})$$

而相应于第二种位移场 $u_i(\vec{r}) + \delta u_i$ 的总势能为:

$$\Pi'' = \Pi + \delta \Pi = \Pi + (\delta W - \delta A) = \Pi + W(\delta \sigma_{ij}, \delta \varepsilon_{ij})$$

根据应变能函数的正定性, 有:

$$W(\delta \sigma_{ij}, \delta \varepsilon_{ij}) \geq 0$$

且只有 $\delta \varepsilon_{ij} = 0$  (亦即 $\delta u_i = 0$ ) 时, 才有:  $W(\delta \sigma_{ij}, \delta \varepsilon_{ij}) = 0$ 。所以:

$$\Pi'' > \Pi$$

至此, 我们证明了弹性体处于平衡位置时的总势能取最小值。

### (3) 讨论

1. 在求解弹性力学平衡问题中, 我们的目的是在于求得合适的平衡方程和已知边界条件的正确解。然而, 实际中要直接求得这种正确解并非易事。但我们可根据最小势能定理, 找出对已知外力造成最小总势能的位移场。由变分法 (参见王龙甫书 P297~299) 很容易证明, 对已知外力造成最小总势能的位移, 必定满足平衡方程和边界条件。
2. 但是要从所有合适边界条件的可能位移中, 寻找出适合最小势能的位移, 这件工作本身就非常繁冗, 并且对有些问题来讲 (特别是边界形状复杂的问题), 困难很大。在这种困难的情况下, 最小势能定理为我们提供了一个合理的近似方法。
3. 我们虽然很难从所有适合边界条件的可能位移函数中挑选出那个使总势能最小的正确解, 但我们可以用常理和经验来缩小我们寻找的范围。我们可以在适合边界条件的位移函数中, 挑选几组代入 $\Pi = W - A$ , 把其中能使 $\Pi$ 最小 (可能得到的并非是 $\Pi$ 真正的最小值) 的那一组位移作为这几组解中与正确解最接近的近似值。若我们选择参与试验的位移函数的组数增多, 则求得的近似值更接近于正确解。值得庆幸的是, 计算机的不断更新换代, 使我们得以从原始繁冗的计算工作中解脱出来。

### (4) 里茨(Ritz)法

以最小势能定理为基础发展了一系列直接近似解法。下面取里茨法作简单介绍。



设弹性体平衡时，位移场可用下面的多项式来近似表示：

$$u_1 = \sum_{m=1}^r a_m u_{1m} ; \quad u_2 = \sum_{m=1}^s b_m u_{2m} ; \quad u_3 = \sum_{m=1}^t c_m u_{3m}$$

这里： $u_{1m}$ 、 $u_{2m}$ 、 $u_{3m}$ 都是满足位移边界条件的可能位移（函数）， $a_m$ 、 $b_m$ 、 $c_m$ 是待定的任意常数。

把上述位移代入 $\Pi = W - A$ ，于是我们得到总势能 $\Pi$ ，它是待定常数 $a_m$ 、 $b_m$ 、 $c_m$ 的二次函数（称为泛函——函数的函数，即 $\Pi$ 是函数 $u_i(\vec{r})$ 的函数）。所以，使 $u_i(\vec{r})$ 逼近正确解的问题（即取 $\delta\Pi = 0$ ）就归为二次泛函 $\Pi(a_m^2, b_m^2, c_m^2)$ 的极值问题，即令：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a_m} &= 0 & m = 1, 2 \dots r \\ \frac{\partial \Pi}{\partial b_m} &= 0 & m = 1, 2 \dots s \\ \frac{\partial \Pi}{\partial c_m} &= 0 & m = 1, 2 \dots t \end{aligned}$$

上面是关于 $a_m$ 、 $b_m$ 、 $c_m$ 的 $(r + s + t)$ 个线性方程组，联立求解（用计算机实现）就可得到使 $\Pi$ 取到最小值所相应的 $a_m$ 、 $b_m$ 、 $c_m$ 。代入 $u_1 = \sum_{m=1}^r a_m u_{1m}$ 、 $u_2 = \sum_{m=1}^s b_m u_{2m}$ 、 $u_3 = \sum_{m=1}^t c_m u_{3m}$ 就得到了位移场的近似解。只要函数 $u_{im}$ 选择适当，项数（即 $m = r, s, t$ ）取得愈大愈多，就可得到准确程度愈高的解。实际中，取到两个系数就有足够的准确度。所以里茨法在弹性力学中的应用是很广泛的。它的收敛问题，已由屈列弗滋处理过，但它的误差很难确定，这是该方法的缺点。

#### <VI> 最小余能定理、虚功原理

最小余能定理、虚功原理等，限于课时安排较紧，略去。

实际上最小余能原理是寻求最佳应力解的一种近似求解方法的理论基础。而最小势能原理是寻求最佳位移解的一种近似求解方法的理论基础。虚功原理只是最小势能原理的另一种物理解释，本质是一样的。

总之，弹性力学中的能量原理（包括虚功原理、最小势能原理、最小余能原理等）是弹性力学中近似解法（物理上的近似）的重要理论基础。利用能量原理，我们可以把能量化为用弹性体的位移 $u_i$ ，应力 $\sigma_{ij}$ 等量作自变函数的泛函，把求解弹性力学问题化为泛函求极值的问题（例如前述的里茨法）。

## 第六章 弹性力学问题的求解

### § 6.1 解题方法简介

弹性力学问题的求解，实质上是求解二阶线性偏微分方程组的问题。在第五章中我们给出了这 15 个偏微分方程组成的方程组，以及以不同物理量作为未知函数的简化方程。本章则是要介绍这些方程具体的求解方法。

求解一个弹性力学问题时，首先需要选择适当的简化方程。如果我们选择以位移为未知函数的拉梅方程进行求解，这种方法就称为**位移法**；如果我们选择以应力为未知函数的应力协调方程以及平衡方程构成的方程组进行求解，这种方法就称为**应力法**。

在选择完要解的方程之后，还需要选择具体的求解方法。

原则上，总可以对偏微分方程求积分，用定解条件（边、初条件）来求出解，这样的解法称为**正解法**。举例来说，如果我们先选择拉梅方程，然后再用正解的方法解出位移场，这样的解法就称为**位移正解法**。但是，实际中通过这种正解（或顺解）的方法只能求出极少数简单问题，例如平面问题、球对称问题等。目前，还没有得出弹性力学的一般解。

许多实际问题常常是用修正尝试解的办法得出的。所谓尝试解就是根据问题作些物理分析，猜一猜可能是什么样形式的解；然后将猜得的解代入方程和定解条件逐一验算，如果满足的话，所猜之解就是唯一正确解（唯一性定理作保证）。所以这种解法又称为**逆解法**。举例来说，如果我们用逆解的方法解拉梅方程（猜位移），这样的解法称之为**位移逆解法**；相应的，如果在静力平衡问题中，我们用逆解的方法解应力协调方程和平衡方程组成的方程组（猜应力），这样的解法称之为**应力逆解法**。

如果只给出部分未知函数的形式，这部分函数用逆解法求解；其余部分未知函数则用正解法积分出来，然后通过定解条件定解，这种方法就称为**半逆解法**。在后面我们有一个**位移半逆解法**的例子。

另外，由于求弹性力学问题的精确解比较困难，因此在能量原理的基础上发展的各种近似解法和数值解法。计算机的使用，使数值解法蓬勃发展，弹性力学问题借助有限单元解法（有限差分法）解决了大量的、先前无法解决的问题。

下面，用三个例子介绍这几种方法。

#### <I> 位移正解法的例子

例：求密度均匀的地球，在自身重力场中的变形（忽略日、月的引力和地球自转引起的惯性离心力）。

$$\text{地球重力 } \vec{g}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r}) + \vec{q}(\vec{r}) \quad \begin{cases} \vec{F} \text{ — 万有引力} \\ \vec{q} \text{ — 自传引起的惯性离心力} \end{cases}$$

本题我们选取以位移为未知函数的拉梅方程，积分解出位移。解出位移之后，就可以很容易地通过几何方程和本构方程解出应变场与应力场。这是一个典型的位移正解法的例子。

解：设地球为半径为  $R$ ，密度为  $\rho_0$  的均质正球体，作用在球体各体元上的只有球对称的万有引力。选原点在球心的球坐标。则该问题可表述为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{f} + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \mu\Delta\vec{u} = 0 \quad (\text{矢量形式的拉梅方程}) \\ \text{球表面 } (r = R) \text{ 是自由面——实际忽略了地球的大气压(一个大气压)} \\ \text{球心 } (r = 0) \text{ 变形有限 (物理要求)} \end{array} \right. \quad \dots (a)$$

这里,  $\vec{f}$  为体力密度, 此处为万有引力  $\vec{F}(\vec{r})$ 。

在地表处 ( $r = R$ ), 单位质量的质点受到的地球引力为:

$$\vec{F}(R) = -G \frac{M \cdot 1}{R^2} \vec{e}_r = -\frac{G}{R^2} \rho_0 V \vec{e}_r = -\frac{4}{3} \rho_0 \pi G R \vec{e}_r \quad \dots (b)$$

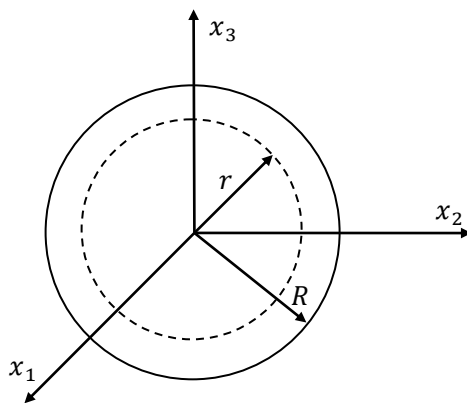
地球体积  $v = \frac{4}{3} \pi R^3$ , 地球密度为  $\rho_0$ 。这里由对称性把地球视为位于球心、质量为  $M$  的质点。在  $r < R$  处, 单位质量的质点受到的地球引力为:

$$\vec{F}(r) = -G \cdot \frac{m}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{4}{3} \rho_0 \pi G r \vec{e}_r = \vec{F}(R) \cdot \frac{r}{R} \quad \dots (c)$$

注意到, 引力场是保守力场, 设其势函数为  $U(r)$ , 则有:

$$\vec{F} = \nabla U(r) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

上式为球坐标下的梯度表达式。



又

$$\vec{f} = \rho_0 \vec{F} = \rho_0 \vec{F}(R) \cdot \frac{r}{R} = \rho_0 F(R) \cdot \frac{r}{R} \vec{e}_r$$

因为  $\vec{f}$  是单位体积上的受的力,  $\vec{F}$  是单位质量上受的力, 所以有  $\vec{f} = \rho_0 \vec{F}$

而对密度均匀的球体,  $U$  仅是  $r$  的函数, 所以:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = F(R) \cdot \frac{r}{R}$$

积分得:  $U(R) = \frac{1}{2}F(R) \cdot \frac{r^2}{R}$

$$\Rightarrow \vec{F} = \nabla U = \nabla \left( \frac{1}{2}F(R) \cdot \frac{r^2}{R} \right) \Rightarrow \vec{f} = \nabla \left( \frac{1}{2}\rho_0 F(R) \cdot \frac{r^2}{R} \right)$$

因位移与应变有关, 应变与应力有关, 而应力只是  $r$  的函数, 则应变和位移也只是  $r$  的函数, 即有:

$$\nabla \times \vec{u}(r) = 0$$

.... (d)

拉梅方程可写成:

$$\vec{f} + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \mu\Delta\vec{u} = \vec{f} + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \mu[\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla \times \nabla \times \vec{u}] = 0$$

利用 (d) 式, 上式化为:

$$\vec{f} + (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) = 0$$

.... (e)

$$\Rightarrow \rho_0 \vec{F} + (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) = \rho_0 \nabla U + (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \left( \nabla \cdot \vec{u} + \frac{\rho_0 F(R) \cdot r^2}{2(\lambda + 2\mu)R} \right) = 0$$

.... (f)

在球对称情况下:

$$\theta = \nabla \cdot \vec{u} = \frac{du_r}{dr} + \frac{2}{r}u_r, \quad \text{且 } A = \frac{\rho_0 F(R)}{2(\lambda + 2\mu)R}$$

则 (f) 式的积分后结果为:

$$\frac{du(r)}{dr} + \frac{2}{r}u(r) + Ar^2 = C_1$$

.... (g)

这里  $C_1$  是积分常数。

方程 (g) 是一个简单的常微分方程, 含积分因子  $r^2$ , 因此 (g) 式可写成:

$$\frac{d}{dr}[r^2 u(r)] = r^2(C_1 - Ar^2)$$

.... (h)

再次积分得:

$$u(r) = -\frac{A}{5}r^3 + \frac{1}{3}C_1 r + \frac{C_2}{r^2}$$

.... (i)

为了使用应力边界条件来确定积分常数, 我们来作边界条件的变换, 即用位移的形式解 (i) 式表示出各个应力分量, 即有:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{\theta\theta} \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{r\theta} = 2\mu\varepsilon_{r\theta} = 0 \\ \sigma_{r\varphi} = 2\mu\varepsilon_{r\varphi} = 0 \\ \sigma_{\theta\varphi} = 2\mu\varepsilon_{\theta\varphi} = 0 \end{cases}$$

注意位移仅是  $r$  的函数，即：  $u(r) = u_r$ ,  $u_\theta = u_\varphi = 0$ 。

另外根据球坐标系下应变张量表达式（参见尹祥础《固体力学》P 193 页）：

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u(r)}{\partial r} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} = \frac{u(r)}{r} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r} \cot \theta + \frac{u_r}{r} = \frac{u(r)}{r} \end{cases}$$

所以：

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r) = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{rr} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda\varepsilon_{\varphi\varphi} = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)C_1 - \frac{4\mu}{r^3}C_2 - \left(\lambda + \frac{6\mu}{5}\right)Ar^2 \\ \sigma_{\theta\theta}(r) = \sigma_{\varphi\varphi}(r) = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{\theta\theta} = 2(\lambda + \mu)\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda\varepsilon_{rr} = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)C_1 + \frac{2\mu}{r^3}C_2 - \left(\lambda + \frac{2\mu}{5}\right)Ar^2 \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\theta\varphi} = 0 \end{cases}$$

至此我们完成了边界条件的转换。

因在  $r=0$ (地心处)时，变形有限  $\Rightarrow$  应力有限  $\Rightarrow C_2 = 0$

在  $r=R$ (地表处)时，为自由界面，即：

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{3}{5} \left( \frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu} \right) AR^2$$

（实际在地表受到一个大气压的压力作用，但其远小于（ $\ll$ ）地球内部的由自身引力场引起的内应力。故可忽略不计，即认为地表是自由界面。）

将  $C_1$ 、 $C_2$  代入应力表达式得

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r) = \frac{A}{5} (5\lambda + 6\mu)(R^2 - r^2) \\ \sigma_{\theta\theta}(r) = \sigma_{\varphi\varphi}(r) = \frac{A}{5} (5\lambda + 6\mu)R^2 - \frac{A}{5} (5\lambda + 3\mu)r^2 \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\theta\varphi} = 0 \end{cases}$$

.... (j)

讨论：

<1> 当  $r=0$  时，

$$\sigma_{rr}(0) = \sigma_{\theta\theta}(0) = \sigma_{\varphi\varphi}(0) = \sigma_{\max} = \frac{A}{5} (5\lambda + 6\mu)R^2$$

即：密度均匀的地球内部的自重应力随  $r \rightarrow 0$ ，达到最大值  $\sigma_{\max}$ ，并且是流体静压状态。

<2> 若把地球视为泊松体的话 ( $\mu = \lambda$ )，则忽略其他天体对地球的引力，以及地球自转产生的惯性离心力等，并把地球视为密度均匀的正球体的情况（当然这是一个非常粗略的地

球模型)下, 我们可以用上面的公式估算地球内部地应力随深度的分布。已知:

$$F(R) \approx g|_{r=R(\text{地表})} = 980 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}, \quad R \approx 6.37 \times 10^8 \text{ cm}, \quad \rho_0 \approx 5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$$

而:

$$\frac{5\lambda + 6\mu}{\lambda + 2\mu} \approx \frac{11}{3} = 3.666$$

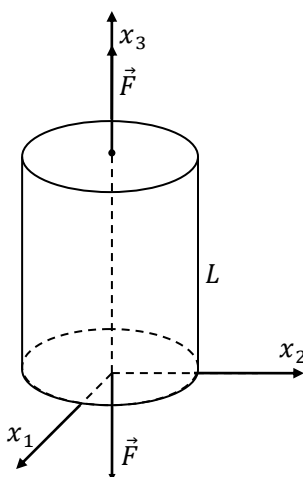
则:

$$\sigma_{\max} = 1.14 \times 10^{12} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} = 1.14 \times 10^{12} \text{ 达因} \cdot \text{cm}^{-2} = 1.14 \times 10^6 \text{ 巴} = 1.14 \text{ 兆巴}$$

这个数值已大大超过目前所实测得到的地球岩石、太空陨铁、陨石的屈服点。可以推想, 地球中大部分的物质, 在自身重力作用下处于塑性的压缩状态。虽然以上计算是应用线弹性理论公式, 但是这一推想还是成立的。

### <II> 位移逆解法的例子

例: 等截面长杆受轴向拉伸, 求杆中的位移分布。如图杆的截面积为  $S$ , 杆长为  $L$ , 拉力为  $\vec{F}$ , 杆处于静力平衡状态。不计体力。



本题是一个很典型的位移逆解法的例子。我们先猜测位移的函数形式, 再代入拉梅方程验证是否满足。如果满足的话, 就说明我们所猜的解是正确的, 然后就可以代入边界条件进行定解了。至于应力逆解法, 解题的思想是类似的, 留在作业中给大家作为习题。

猜: 由对称性, 可设想应力沿  $x_3$  方向线性伸长, 沿  $x_1$  和  $x_2$  方向以相同的收缩率线性收缩, 即有

$$u_1 = -ax_1, \quad u_2 = -ax_2, \quad u_3 = bx_3$$

亦即

$$\vec{u} = -ax_1\vec{e}_1 - ax_2\vec{e}_2 + bx_3\vec{e}_3$$

.... (A)

将所猜之解代入 Lamé 方程验证其是否满足方程。

因所猜之解是关于坐标的一次函数, 而 Lamé 方程:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \mu(\nabla \times \nabla \times \vec{u}) = 0$$

.... (B)

中出现的是对坐标的两次导数, 显然方程是满足的。

由位移解 (A) 可得应变分量, 再由本构方程可得应力分量, 即:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -a = \varepsilon_{22}, & \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = b, \\ \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0, & \theta &= \varepsilon_{ii} = -2a + b\end{aligned}\quad \dots (C)$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{11} = -2a(\lambda + \mu) + b\lambda \\ \sigma_{33} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{33} = (\lambda + 2\mu)b - 2a\lambda \\ \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0 \end{cases} \quad \dots (D)$$

我们曾经说过,求解弹性力学的平衡问题,就是要寻求一个空间函数,使其既满足方程,又满足边界条件。我们还曾经说过,寻求一个满足方程的空间函数是比较容易的,难的是这个空间函数不一定严格满足边界条件。

对眼下这个问题就是这样的。我们所猜的位移解满足平衡方程,但由它求得的应力在边界上是均匀分布的,而真实的边界条件是在上下两个端面受集中力 $\vec{F}$ 作用,所以所得的应力解不严格满足边界条件。

但是,在此问题(长杆问题)中,利用 Saint-Venant 原理,用静力等效的在端面上均匀分布的力替代原集中力 $\vec{F}$ ,所引起的差异只限于受力区域附近的小范围内。所以,边界条件可以改为:

$x_3=L$  端面 (上端面 $\vec{n} = (0, 0, 1) = (n_1, n_2, n_3)$ ):

$$\vec{\sigma}_d = \frac{F}{S} \cdot \vec{e}_3 = \sigma_3 \vec{e}_3 = (\sigma_{13}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3)\vec{e}_3 = [(\lambda + 2\mu)b - 2a\lambda]\vec{e}_3$$

实际上,上、下两个端面的边界条件得到一个相同的关于待定常数 a、b 的方程:

$$(\lambda + 2\mu)b - 2a\lambda = \frac{F}{S} \quad \dots (E)$$

再利用侧面(自由界面)的边界条件:

即由 $\vec{\sigma}_s = 0$ 有:

$$(\sigma_s)_i = \sigma_{ij}n_j = 0$$

亦即:

$$(\sigma_s)_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 = 0$$

$$(\sigma_s)_2 = \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 = 0$$

$$(\sigma_s)_3 = \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 \equiv 0$$

注意到侧面法向  $n_s = (n_1, n_2, n_3) = (n_1, n_2, 0)$ , 而  $n_j^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = n_1^2 + n_2^2 = 1$

由 $(\sigma_s)_1=0$  或  $(\sigma_s)_2=0$ , 可得另一个关于待定常数 a、b 的方程, 即:

$$-2a(\lambda + \mu) + b\lambda = 0 \quad \dots (F)$$

联立 (E)、(F) 可得:

$$a = \frac{\lambda F}{2\mu(3\lambda + 2\mu)S}, \quad b = \frac{(\lambda + \mu)F}{\mu(3\lambda + 2\mu)S}$$

.... (G)

因此, 只要  $a$ 、 $b$  取 (G) 式给出的值, 则所猜之解 (A) 式就既满足方程, 亦满足边界 (圣维南条件), 所以是问题的唯一解。

实际本例就是单轴拉伸实验, 因此, 按杨氏模量和泊松比的物理定义, 即可得出用  $\lambda$  和  $\mu$  表示  $E$  和  $\nu$  的公式:

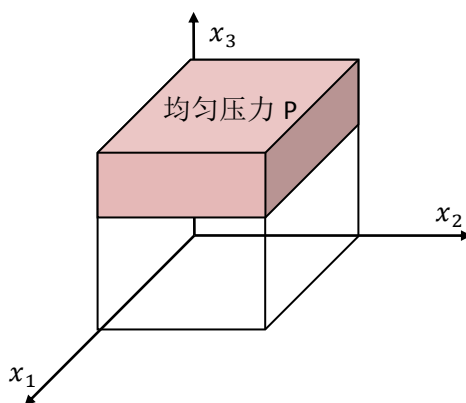
$$E = \frac{\sigma_{33}}{\varepsilon_{33}} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{33}} = \frac{a}{b} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

这与我们在 4.5 节中得到的结果完全相同。

如果位移函数猜的不合适, 就不可能同时满足平衡方程和边界条件, 甚至完全不满足, 这时就得修改所猜之解。猜解的功夫除了对于问题的物理、几何和力学性质理解透彻, 还必须具备长远的经验。

### <III> 位移半逆解法的例子

例: 在一个不变形的正方形刚模中, 压缩充满模体, 且与模壁无摩擦的弹性体。上端加均匀压力  $P$  (如图), 求弹性体中的应力分布。这里仍不计体力。



解: 已知边界条件为 (这是混合边界条件问题)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0, a; u_1 \text{ 和 } \sigma_{12} \text{ 及 } \sigma_{13} \text{ 等于零, 即: } u_1 = 0, \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \\ x_2 = 0, a; u_2 \text{ 和 } \sigma_{21} \text{ 及 } \sigma_{23} \text{ 等于零, 即: } u_2 = 0, \sigma_{21} = \sigma_{23} = 0 \\ x_3 = 0, ; u_3 = 0, \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0 \\ x_3 = c, ; \sigma_{33} = -P, \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0 \end{array} \right.$$

.... (A)

由对称性可知:

在  $x_1 = \frac{a}{2}$  面上,  $u_1 = 0$ ; 在  $x_2 = \frac{a}{2}$  面上,  $u_2 = 0$ 。则以上两个面的交线上的各点有:

$$u_1 = u_2 = 0$$

依次类推, 可以得到无穷多个对分面的交线上都有:

$$u_1 = u_2 = 0$$



亦即沿 $x_3$ 方向，弹性体上点点都有：

$$u_1 = u_2 = 0$$

故我们猜位移解为：

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3 = u_3 \vec{e}_3 = f(x_3) \vec{e}_3 \quad \dots (B)$$

注意：这里只猜了 $u_1$ 和 $u_2$ ，而与 $ox_1x_2$ 平面平行的任一个平面上，各点的 $u_3$ 相等，即 $u_3$ 仅是 $x_3$ 的函数，但仍是待定的函数，所以是半逆解法。

由位移形式解得的应变分量为：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial f(x_3)}{\partial x_3} = \frac{df(x_3)}{dx_3}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0 \\ \theta &= \varepsilon_{ii} = \frac{df(x_3)}{dx_3} = F(x_3) \end{aligned} \right\} \quad \dots (C)$$

代入体力为零的拉梅方程：

$$(\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = 0$$

写开为：

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} F(x_3) + \mu \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) = 0 \quad \dots (I)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} F(x_3) + \mu \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) = 0 \quad \dots (II)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_3} F(x_3) + \mu \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) = 0 \quad \dots (III)$$

显然，(I)、(II)已自动满足，由(III)得：

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 f(x_3)}{\partial x_3^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{d^2 f(x_3)}{dx_3^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 f(x_3)}{dx_3^2} = 0 \quad \dots (IV)$$

(IV)式是一条件方程，即只有(IV)式成立，方能使位移满足泛定方程。解(IV)式得：

$$f(x_3) = Ax_3 + B \quad \dots (D)$$

由边条： $x_3 = 0$ 面上， $u_3 = f(x_3) = 0 \Rightarrow B = 0$

$$x_3 = c \text{ 面上, } \sigma_{33} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{33} = (\lambda + 2\mu)A = -P \Rightarrow A = -\frac{P}{\lambda + 2\mu}$$

..... (E)

即满足泛定方程和边界条件的位移解为：

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} = u_3 \vec{e}_3 = f(x_3) \vec{e}_3 &= -\frac{P}{\lambda + 2\mu} x_3 \vec{e}_3 \\ \theta = \varepsilon_{ii} = \frac{df(x)}{dx_3} &= -\frac{P}{\lambda + 2\mu} \\ \text{应力分量为: } \sigma_{11} = \sigma_{22} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{11} = \lambda\theta &= -\frac{\lambda P}{\lambda + 2\mu}, \quad \sigma_{33} = -P \\ \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

..... (F)

结论：物体中每一点的应变（只有 $\varepsilon_{33} \neq 0$ ，且为常数，此属于单向应变状态）都是相同的。每一点的应力也是常数，即物体处于均匀应力场中，发生的是均匀形变。

另，这道题只猜出了 $u_1 = u_2 = 0$ ，则 $\vec{u}$ 仍是一个待定函数。通过代入拉梅方程，得到一个条件方程，解这个条件方程，即得出位移的形式解；再用边界条件确定待定系数，而得满足方程和边界条件的确定解。

#### <IV> 数值方法

弹性力学问题中要获得既满足方程又满足边界条件的严格的解析解，往往很困难。在许多实际问题中必须运用近似方法求解。

近似解法中主要有基于能量原理的变分法（如里茨法）和有限单元法以及有限差分法。

有限单元法和有限差分法是常有的两种数值方法。

有限单元法是以有限个单元的集合体代替无限多个单元的连续体，作物理上的近似的一种数值方法。

有限差分是用一组有限差分方程代替弹性力学的基本方程和边界条件，作数学上的近似的一种数值解法。

### § 6.2 以应力为未知函数时，无体力静力平衡方程的形式解——Maxwell 及 Morera 应力函数

#### <I> 问题的提出

以应力为未知函数来求解弹性力学问题时，应力分量需要同时满足平衡方程和应力协调方程（即拜尔托拉密-密切尔方程），方程的数目非常多（共 9 个方程）。尽管在无体力静力平衡时，这些方程都是齐次的，但要同时求解仍是相当困难。

为了解决这个问题，我们可以分两步来做。先找出满足平衡方程的形式解，把它代入应力协调方程，构成用形式解表示的协调方程。再解出满足协调方程和边界条件的形式解。因为这个形式解已经满足平衡方程，所以这时不必考虑平衡方程了，从而使解的过程得到简化。

#### <II> Maxwell 应力函数

麦克斯威尔在 1870 年提出下列应力函数：

$$G_i(\vec{r}) \quad i = 1, 2, 3$$

这里 $G_1(\vec{r})$ ， $G_2(\vec{r})$ ， $G_3(\vec{r})$ 是三个相互独立的函数，称为 Maxwell 应力函数。

Maxwell 让：

$$\sigma_{23} = -\frac{\partial^2 G_1}{\partial x_2 \partial x_3} \quad \sigma_{31} = -\frac{\partial^2 G_2}{\partial x_3 \partial x_1} \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 G_3}{\partial x_1 \partial x_2}$$

•••• (6-2-1)

将 (6-2-1) 代入无体力静力平衡方程:

$$\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

•••• (6-2-2)

可以证明: 当  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$  满足:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 G_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial x_3^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 G_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 G_3}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{33} = \frac{\partial^2 G_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial x_1^2}$$

•••• (6-2-3)

则由应力函数的表述的应力形式解 (6-2-1) 与 (6-2-3) 就完全满足无体力静力平衡方程式 (6-2-2) 式。

将应力形式解 (6-2-1) 与 (6-2-3) 代入应力协调方程和边界条件, 使应力协调方程和边界条件都化为用  $G_i(\vec{r})$  表示的形式, 求解应力协调方程并用边界条件定出  $G_1(\vec{r}), G_2(\vec{r}), G_3(\vec{r})$  的确定函数形式, 再由 (6-2-1) 与 (6-2-3) 得到:

$$\text{应力场 } \sigma_{ij} \xrightarrow{\text{本构关系}} \varepsilon_{ij} \xrightarrow{\text{几何关系}} u_{ij}$$

### <III> Morera 应力函数

马立拉在 1892 年提出了不同的应力函数:

$$G_i^*(\vec{r}) \quad i = 1, 2, 3$$

这里  $G_1^*(\vec{r}), G_2^*(\vec{r}), G_3^*(\vec{r})$  也是三个相互独立的函数, 称为 Morera 应力函数。

Morera 让:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 G_1^*}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 G_2^*}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad \sigma_{33} = \frac{\partial^2 G_3^*}{\partial x_1 \partial x_2}$$

•••• (6-2-4)

将 (6-2-4) 代入方程 (6-2-2), 可以证明: 当  $\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}$  满足:

$$\begin{cases} \sigma_{23} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{\partial G_1^*}{\partial x_1} + \frac{\partial G_2^*}{\partial x_2} + \frac{\partial G_3^*}{\partial x_3} \right) \\ \sigma_{31} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial G_1^*}{\partial x_1} - \frac{\partial G_2^*}{\partial x_2} + \frac{\partial G_3^*}{\partial x_3} \right) \\ \sigma_{12} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial G_1^*}{\partial x_1} + \frac{\partial G_2^*}{\partial x_2} - \frac{\partial G_3^*}{\partial x_3} \right) \end{cases}$$

•••• (6-2-5)

则由应力函数  $G_i^*(\vec{r})$  表述的应力形式解 (6-2-4) 与 (6-2-5) 就完全满足方程 (6-2-2) 了。

将应力形式解 (6-2-4) 和 (6-2-5) 代入应力协调方程和边界条件, 使应力协调方程和边界条件都化为用  $G_i^*(\vec{r})$  表示的形式, 求解后定出  $G_1^*, G_2^*, G_3^*$ , 再由 (6-2-4) 和 (6-2-5)

得到应力场  $\sigma_{ij} \xrightarrow{\text{本构关系}} \varepsilon_{ij} \xrightarrow{\text{几何关系}} u_i$ 。

### § 6.3 以位移为未知函数时，无体力静力平衡问题的形式解

#### <I> 位移场的势函数 (Stokes 分解和 Helmholtz 分解)

如果知道了物体的应变状态  $\varepsilon_{ij}$ ，通过积分，则可以求出各点的位移。当然各应变分量必须满足应变协调方程；如果知道了物体内各点的体应变  $\theta$  及物体刚性转动矢量  $\vec{\omega}$ ，可以求出位移场。

Stokes 在 1949 年指出位移场  $\vec{u}$  可分解为两部分之和，即：

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}'' \quad \dots (6-3-1)$$

其中  $\vec{u}'$  代表没有转动的纯体积膨胀的位移，即有：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{u}' &= \theta \\ \nabla \times \vec{u}' &= 0 \end{aligned} \quad \dots (6-3-2)$$

而  $\vec{u}''$  代表没有体积膨胀的纯转动位移，即有：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{u}'' &= 0 \\ \nabla \times \vec{u}'' &= 2\vec{\omega} \end{aligned} \quad \dots (6-3-3)$$

Stokes 分解 (6-3-1) 用一句话概括就是：任一在无穷远处收敛的连续矢量场都可分解为一个无旋场和一个无散场之和。

由场论知识可知：一个无旋场总可以表示为一个标量势函数的梯度，设无旋场  $\vec{u}'$  具有标量势  $\phi$ ，则有：

$$\vec{u}' = \nabla \phi \quad \dots (6-3-4)$$

另外，一个无散场总可以表示为一个（无散是对  $\vec{\psi}$  的约束条件）矢量势函数的旋度，设无散场  $\vec{u}''$  具有矢量势  $\vec{\psi}$ ，则有：

$$\vec{u}'' = \nabla \times \vec{\psi} \quad \dots (6-3-5)$$

约束条件：

$$\nabla \cdot \vec{\psi} = 0$$

所以有：

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}'' = \nabla \phi + \nabla \times \vec{\psi} \\ \nabla \cdot \vec{\psi} = 0 \end{cases} \quad \dots (6-3-6)$$

(6-3-6) 式称为 Helmholtz 分解； $\phi$ ， $\vec{\psi}$  称为 Helmholtz 势。

将 (6-3-4) 和 (6-3-5) 代入 (6-3-2) 和 (6-3-3) 可得：

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = \theta \\ \nabla^2 \psi_i = -2\omega_i \end{cases}$$

•••• (6-3-7)

上式表明：如弹性体的体膨胀系数 $\theta$ ，和转动惯量 $\omega_i$ 在弹性体内的各点是已知的，则可确定 $\phi$ 和 $\psi_i$ 。进而可以确定弹性体的位移场。

<II> 位移为未知函数时，无体力静力平衡问题的形式解（波西涅斯克·伽辽金通解）

前面我们给出了 Helmholtz 势表示的位移场：

$$\begin{cases} \vec{u} = \nabla \phi + \nabla \times \vec{\psi} \\ \nabla \cdot \vec{\psi} = 0 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} u_i = \phi_{,i} + \varepsilon_{ijk} \psi_{k,j} \\ \psi_{i,i} = 0 \end{cases}$$

•••• (6-3-8a)

把 (6-3-8a) 写成分量形式为：

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \\ u_2 &= \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} \\ u_3 &= \frac{\partial \phi}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \end{aligned}$$

•••• (6-3-8b)

现在我们来看，当 $\vec{u}$ 满足无体力静力平衡方程：

$$(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u} = 0$$

•••• (6-3-9)

时， $\psi_i$ 和 $\phi$ 是什么函数。

将 (6-3-9) 写开为：

$$(\lambda + \mu) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \vec{e}_3 \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \nabla^2 (u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3) = 0$$

将 (6-3-8 (b)) 代入上式得：

$\vec{e}_1$ 分量为：

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} \right) + \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \right) + \mu \nabla^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \right) = 0 \end{aligned}$$

相消后剩下：

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \nabla^2 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \nabla^2 \left( \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \right) = 0$$

$\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$ 分量分别为：

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left[ \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} \right] &= 0 \\ \nabla^2 \left[ \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \right] &= 0 \end{aligned}$$

为书写方便，简记：

$$A = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}$$

有：

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 \left[ A \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \right] = 0 \\ \nabla^2 \left[ A \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} \right] = 0 \\ \nabla^2 \left[ A \frac{\partial \phi}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \right] = 0 \end{cases} \quad \dots (6-3-10)$$

约束条件：

$$\nabla \cdot \bar{\psi} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} = 0 \quad \dots (6-3-10a)$$

(6-3-10) 和 (6-3-10a) 就是求解四个势函数  $\phi$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$  的四个方程。

不难验证，若取三个任意函数  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  使得：

$$\psi_1 = -\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}, \quad \psi_2 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}, \quad \psi_3 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \quad \dots (6-3-11)$$

则 (6-3-11) 是 (6-3-10a) 的普遍解。

将 (6-3-11) 代入 (6-3-10)，则无体力静力平衡问题变换成求解以下方程组：

$$\begin{cases} \nabla^2 \left[ A \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_3^2} \right] = 0 \\ \nabla^2 \left[ A \frac{\partial \phi}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_3^2} \right] = 0 \\ \nabla^2 \left[ A \frac{\partial \phi}{\partial x_3} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1^2} \right] = 0 \end{cases} \quad \dots (6-3-12)$$

因  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  是任意的，所以总可取：

$$\phi = \frac{1}{A} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \right) \quad \dots (6-3-13)$$

将 (6-3-13) 代入 (6-3-12) 得：

$$\nabla^4 \varphi_1 = 0, \quad \nabla^4 \varphi_2 = 0, \quad \nabla^4 \varphi_3 = 0 \quad \dots (6-3-14)$$

结论：至此可见，我们将求解无体力静力平衡问题化为求解满足边界条件的双调和函数  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ 。

将 (6-3-11) 和 (6-3-13) 代入 (6-3-6a) 得到用  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  表示的位移形式解：

$$u_i(\vec{r}) = -\left(\frac{\lambda + \mu}{\mu}\right) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \nabla^2 \varphi_i \quad \text{or} \quad \begin{cases} u_1 = -\left(\frac{\lambda + \mu}{\mu}\right) \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \nabla^2 \varphi_1 \\ u_2 = -\left(\frac{\lambda + \mu}{\mu}\right) \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \nabla^2 \varphi_2 \\ u_3 = -\left(\frac{\lambda + \mu}{\mu}\right) \frac{\partial \phi}{\partial x_3} + \nabla^2 \varphi_3 \end{cases} \quad \dots (6-3-15)$$

其中:

$$\phi = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \right)$$

(6-3-15) 就是著名的波西涅斯克-伽辽金通解。

由上讨论结果可知: 对求解无体力静力平衡问题, 我们只要从双调和函数中挑选满足边界条件的  $\varphi_i(\vec{r})$ , 就可以由 (6-3-15) 式得到问题的位移解。

下面我们将进一步证明: 弹性静力学问题的解只要去猜满足问题的边界条件的调和函数形式的解即可, 从而使解题进一步简化。这种调和函数形式的解就是纳维-巴伯考维齐通解。

### <III> 纳维-巴伯考维齐通解

上面我们得到的波-伽通解是用双调和函数表示的, 现作变换, 令:

$$B_1 = \nabla^2 \varphi_1, \quad B_2 = \nabla^2 \varphi_2, \quad B_3 = \nabla^2 \varphi_3 \quad \dots (6-3-16)$$

则:

$$\nabla^2 B_1 = \nabla^4 \varphi_1 = 0, \quad \nabla^2 B_2 = 0, \quad \nabla^2 B_3 = 0 \quad \dots (6-3-17)$$

可见:  $B_1, B_2, B_3$  是调和函数。由 (6-3-13) 式可得:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{A} \left( \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} \right) \quad \dots (6-3-18)$$

可以证明:

$$\begin{cases} \phi = \phi_0 + \frac{1}{2A} (x_1 B_1 + x_2 B_2 + x_3 B_3) \\ \nabla^2 \phi_0 = 0 \end{cases} \quad \dots (6-3-19)$$

是 (6-3-18) 的解。

证:

因:

$$\nabla^2 \phi = \nabla^2 \phi_0 + \frac{1}{2A} (B_1 \nabla^2 x_1 + B_2 \nabla^2 x_2 + B_3 \nabla^2 x_3) + \frac{1}{2A} (x_1 \nabla^2 B_1 + x_2 \nabla^2 B_2 + x_3 \nabla^2 B_3) + \frac{1}{A} \left( \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} \right)$$

$$\text{而: } \nabla^2 x_1 = \nabla^2 x_2 = \nabla^2 x_3 \equiv 0, \quad \nabla^2 B_1 = \nabla^2 B_2 = \nabla^2 B_3 = 0, \quad \nabla^2 \phi_0 = 0$$

$$\text{所以: } \nabla^2 \phi = \frac{1}{A} \left( \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{A} \left( \frac{\partial B_i}{\partial x_i} \right)$$

将 (6-3-16) 和 (6-3-19) 代入波-伽通解, 将其化为:

$$u_i(\vec{r}) = -\left(\frac{\lambda + \mu}{\mu}\right) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + B_i \quad \text{or} \quad \begin{cases} u_1 = -\left(\frac{\lambda + \mu}{\mu}\right) \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + B_1 \\ u_2 = -\left(\frac{\lambda + \mu}{\mu}\right) \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + B_2 \\ u_3 = -\left(\frac{\lambda + \mu}{\mu}\right) \frac{\partial \phi}{\partial x_3} + B_3 \\ \dots (6-3-20) \end{cases}$$

其中:  $\phi = \phi_0 + \frac{1}{2A}(x_i B_i)$ , 而  $\phi_0, B_1, B_2, B_3$  均为调和函数。

即有:

$$\nabla^2 \phi_0 = 0, \nabla^2 B_1 = 0, \nabla^2 B_2 = 0, \nabla^2 B_3 = 0$$

从而我们将求解无体力静力平衡问题, 化为挑选满足边界条件的调和函数  $\phi_0, B_1, B_2, B_3$ 。

(6-3-20) 就是用调和函数  $\phi_0, B_1, B_2, B_3$  表示的无体力静力平衡问题的形式解, 也就是著名的纳维-巴博考维奇通解。

从逆解法的观点出发, 可以事先分析各种调和函数形式的解, 了解它们可以满足怎样的边界条件。在熟悉了这些分析结果之后, 就可能按迭加原理进一步组合这些解, 来讨论较复杂的问题。

#### <IV> 有体力、静力平衡问题的通解 (纳维-巴伯考维齐通解+开尔文特解)

这时方程为:

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \mu\nabla^2 \vec{u} + \vec{f} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

这是一个非齐次方程 (体力  $\vec{f}$  即为非齐次项)。

① 方程的特解-Kelvin 解

可以证明: 对齐次方程的通解——纳维·巴伯考维齐解中的  $b_0$  和  $\vec{B}$  作适当修改, 就可以得 Kelvin 解。

对纳-巴通解:

$$\vec{u} = -\frac{\lambda + \mu}{\mu} \nabla \phi + \vec{B}$$

其中:

$$\phi = \phi_0 + \frac{1}{2A}(\vec{r} \cdot \vec{B}), \quad A = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}, \quad \nabla^2 \phi_0 = 0, \quad \nabla^2 \vec{B} = 0$$

可改写为:

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} &= \vec{B} - \frac{1}{4(1-\nu)}(b_0 + \vec{r} \cdot \vec{B}) \\ \text{其中: } b_0 &= 2A\phi_0 \text{ 且: } \nabla^2 b_0 = 0, \nabla^2 \vec{B} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \textcircled{2}$$

很容易验证, ②式是齐次方程:  $(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \mu\nabla^2 \vec{u}$  的通解。

证: 将②代入上式得:

$$(\lambda + \mu)\nabla\left[\nabla \cdot \vec{B} - \frac{1}{4(1-\nu)}\nabla^2(b_0 + \vec{r} \cdot \vec{B})\right] + \mu\nabla^2\left[\vec{B} - \frac{1}{4(1-\nu)}\nabla(b_0 + \vec{r} \cdot \vec{B})\right] = 0$$



因  $\nabla^2 b_0 = 0$ ,  $\nabla^2 \vec{B} = 0$ , 故上式化为:

$$-\frac{\lambda + \mu}{4(1 - \nu)} \nabla^2 [\nabla(\vec{r} \cdot \vec{B})] - \frac{\mu}{4(1 - \nu)} \nabla^2 [\nabla(\vec{r} \cdot \vec{B})] = 0 \Rightarrow \nabla^2 [\nabla(\vec{r} \cdot \vec{B})] = 0$$

因  $\nabla(\vec{r} \cdot \vec{B}) = \vec{B}$ , 所以:  $\nabla^2 [\nabla(\vec{r} \cdot \vec{B})] \equiv 0$ , 上式恒成立, 得证。

可以验证, 只需对②中的  $b_0$  和  $\vec{B}$  作适当修改, 就可以得到非齐次方程①的特解。

修改  $b_0$  和  $\vec{B}$  为: (即将  $b_0$  和  $\vec{B}$  由原满足拉氏方程改为满足 Poisson 方程):

$$\nabla^2 b_0 = \frac{1}{\mu} \vec{r} \cdot \vec{f}, \quad \nabla^2 \vec{B} = -\frac{1}{\mu} \vec{f} \quad \dots \textcircled{3}$$

这两个都是 Poisson 方程。根据数理方程中所熟悉的初等势论, 可取他们的特解为:

$$b_0 = -\frac{1}{4\pi\mu} \iiint_V \frac{\vec{r}' \cdot \vec{f}(\vec{r}')}{R} dV' \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\mu} \iiint_V \frac{\vec{f}(\vec{r}')}{R} dV' \quad \dots \textcircled{5}$$

其中:

$$R = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + (x'_3 - x_3)^2} = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2}$$

$$\Rightarrow \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

将④和⑤代入②得:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{B} - \frac{1}{4(1 - \nu)} \nabla(b_0 + \vec{r} \cdot \vec{B}) \\ &= \frac{1}{4\pi\mu} \iiint_V \frac{\vec{f}}{R} dV' - \frac{1}{16\pi\mu(1 - \nu)} \nabla \left[ \vec{r} \cdot \iiint_V \frac{\vec{f}}{R} dV' - \iiint_V \frac{\vec{r}' \cdot \vec{f}}{R} dV' \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\mu} \iiint_V \frac{\vec{f}}{R} dV' - \frac{1}{16\pi\mu(1 - \nu)} \nabla \iiint_V \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{f}}{R} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\mu} \iiint_V \frac{\vec{f}}{R} dV' - \frac{1}{16\pi\mu(1 - \nu)} \nabla \iiint_V \frac{\vec{R} \cdot \vec{f}}{R} dV' \end{aligned}$$

因:  $\vec{r} - \vec{r}' = \vec{R}$ , 注意到:

$$\nabla \left( \frac{\vec{R} \cdot \vec{f}}{R} \right) = -\frac{\vec{R} \cdot \vec{f}}{R^3} \vec{R} + \frac{1}{R} \vec{f}$$

所以非齐次方程①的特解为：

$$\vec{u} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \iiint_V \frac{\vec{f}}{R} dV' + \iiint_V \frac{\vec{R} \cdot \vec{f}}{R^3} \vec{R} dV' \right] \quad \dots \textcircled{6}$$

式⑥称为 Kelvin 解。

非齐次方程①的通解=纳维巴伯考维齐通解（对应齐次方程的通解）+开尔文特解（非齐次方程的一个特解）。

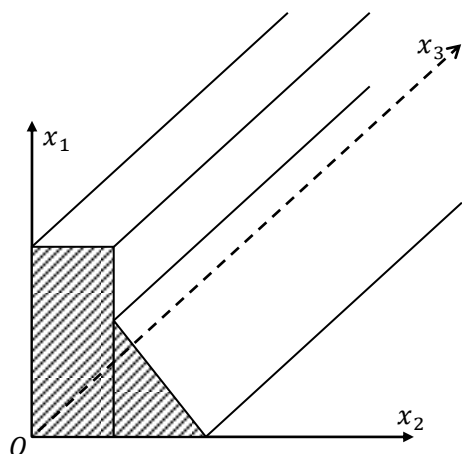
## §6.4 平面问题

一般弹性力学问题都是三维的，即空间问题。但在实际问题中，在一些特定条件下，三维问题可以简化为二维问题。弹性力学的平面问题就是应力或应变限制在同一平面里，而在与此平面垂直的方向上各分量为零。通常把发生应力和应变的面取为  $ox_1x_2$  平面。平面问题分为平面应变和平面应力两类，但这两类平面问题的基本方程相同，这一点我们可以在后面看到。

### <I> 平面应变问题

平面应变问题的典型例子就是水坝，它具有如下一些特征：

- 1、几何条件：横截面形状不变，横截面尺度远小于与其垂直方向的尺度。
- 2、力学条件：体力在横截面垂直方向分力为零，面力沿  $x_3$  方向分布固定不变（即与  $x_3$  无关）。
- 3、边界条件：两端固定（可近似视为刚性固定），端面沿  $x_3$  方向位移为零，即  $u_3|_{\text{端面}} = 0$ 。



#### ① 位移场

平面应变问题的位移，由上述边界条件和对称性可知任意与  $ox_1x_2$  面平行的横截面上每一质点沿  $x_3$  轴向均没有位移，即在整个弹性体内有： $u_3 = 0$ 。

另外，由上述几何条件和力学条件，任一个与 $ox_1x_2$ 平行的截面形状相同，且受力也相同，所以每个截面的变形也应该相同，即弹性体内任一点的位移分量 $u_1$ 和 $u_2$ 与坐标 $x_3$ 无关，仅是 $x_1$ 和 $x_2$ 的函数。概括起来弹性体内位移场为

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2) \\ u_2 = u_2(x_1, x_2) \\ u_3 = 0 \end{cases} \quad \dots (6-4-1)$$

## ② 应变场

由几何关系 $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ 得平面应变问题的弹性体内应变场为：

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_{11}(x_1, x_2), & \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \varepsilon_{12}(x_1, x_2) \\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \varepsilon_{22}(x_1, x_2), & \varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}(x_1, x_2) \\ \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, & \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = 0 \\ \theta = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \theta(x_1, x_2) \end{cases} \quad \dots (6-4-2)$$

可见只有在 $ox_1x_2$ 平面内的应变分量不为零，其余全部为零。

## ③ 应力场

由本构关系 $\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\theta\delta_{ij}$ 得平面应变问题弹性体内应力场为：

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{11} = \sigma_{11}(x_1, x_2) \\ \sigma_{22} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{22} = \sigma_{22}(x_1, x_2) \\ \sigma_{33} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{33} = \lambda\theta = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \sigma_{33}(x_1, x_2) \\ \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} = \sigma_{12}(x_1, x_2) \\ \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0 \end{cases} \quad \dots (6-4-3)$$

可见：三个正应力分量 $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ 只有两个是独立的。所有应力分量也均是 $x_1$ 和 $x_2$ 的函数。式 $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ 表明：如果假想将物体切成无数个与 $ox_1x_2$ 平面平行的薄片，虽各薄片沿 $ox_3$ 轴方向的伸长被阻止，但正是由于各薄片互相挤压的结果，各薄片表面上的沿 $x_3$ 轴的正应力仍是存在的。而且与 $\sigma_{11}$ 和 $\sigma_{22}$ 联系着。

## ④ 平衡方程

将上面的应力分量代入平衡方程 $f_i + \sigma_{ji,j} = 0$ ，得平面应变问题的平衡方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 = 0 \end{cases}$$

•••• (6-4-4)

由 $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{22}$ 均是 $x_1$ ,  $x_2$ 的函数可推断知 $f_1$ 与 $f_2$ 也只是 $x_1$ ,  $x_2$ 的函数。

#### ⑤ 协调方程

将②中的应变分量代入应变协调方程, 除第一个方程外, 其余五个均自动满足。即有:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

•••• (6-4-5)

利用本构关系 ( $\varepsilon_{ij}(\sigma_{ij})$ 形式的):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} I_1 \delta_{ij} \quad , \quad I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

有:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ &= \frac{1}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \xrightarrow{\sigma_{33}=\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})} \frac{1}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} [\sigma_{22} + \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] \\ &= \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22} - \nu^2 \sigma_{11} - \nu^2 \sigma_{22}) = \frac{1-\nu^2}{E} \left( \sigma_{11} - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{22} \right) \end{aligned}$$

记 $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ ,  $\nu' = \frac{\nu}{1-\nu}$ , 可以证明:  $\frac{1+\nu'}{E'} = \frac{1+\nu}{E}$

则 $\varepsilon_{11}$ 可记为:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E'} (\sigma_{11} - \nu' \sigma_{22})$$

同理可得

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E'} (\sigma_{11} - \nu' \sigma_{22}) \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E'} (\sigma_{22} - \nu' \sigma_{11}) \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} = \frac{1+\nu'}{E'} \sigma_{12} \end{array} \right.$$

•••• (6-4-6)

将(6-4-6)代入(6-4-5)可得平面应变问题的应力协调方程为:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} - \nu' \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} - \nu' \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} = 2(1+\nu') \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

•••• (6-4-7a)

为了简化上式, 利用平衡方程(6-4-4)对其第一式求 $\frac{\partial}{\partial x_1}$ , 第二式求 $\frac{\partial}{\partial x_2}$ , 然后两式相加,

得:

$$2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = - \left( \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)$$

代入 (6-4-7a) 可得:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1 + \nu') \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \quad \dots (6-4-7b)$$

记  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$  为二维拉氏算符, 则 (6-4-7b) 可写成:

$$\nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1 + \nu') \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \quad \dots (6-4-7c)$$

(6-4-4) 和 (6-4-7c) 即为求解平面应力问题的三个基本方程。可解出三个未知量  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ , 和  $\sigma_{12}$ 。

#### ⑥ 边界条件

在侧面边界上:  $\vec{n} = (n_1, n_2, 0)$

则:

$$\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 = \sigma_1$$

$$\sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 = \sigma_2$$

$$0 = \sigma_3$$

注:  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  是侧面上的应力矢量的三个分量, 是给定的边界条件。由  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$  均只是  $x_1$  和  $x_2$  的函数, 进而推知  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  也只是  $x_1$  和  $x_2$  的函数。

$\dots (6-4-8a)$

在端面边界上:  $\vec{n} = (0, 0, \pm 1)$

则:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = n_3 \sigma_{33} = \pm \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$\dots (6-4-8b)$

#### ⑦ 平面应变问题的定解问题

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} \in V \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 = 0 \\ \nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1 + \nu') \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \end{array} \right. \\ \vec{r} \in \text{侧面} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 \\ \sigma_2 = \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 \\ \sigma_3 = 0 \end{array} \right. \\ \vec{r} \in \text{端面} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = \pm \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$\dots (6-4-9)$

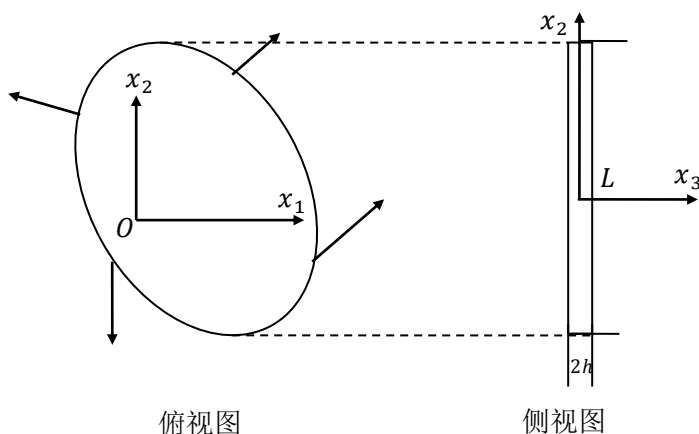
## <II> 平面应力问题

平面应力问题的典型例子是薄板，它具有如下特征：

- 1、几何条件：横截面尺寸  $L$  远大于板的厚度  $2h$ ，且板厚均匀。
- 2、力学条件：体力与  $x_3$  无关（即体力沿厚度方向不变），且没有沿  $x_3$  方向的体力分力。所受面力均匀分布在侧面上，且与  $x_3$  轴垂直。
- 3、边界条件：与  $ox_1x_2$  坐标平面平行的两个端面上不受外力。由静力边界条件：

$$\begin{cases} \sigma_{ij}n_j = 0 \\ \vec{n} = (0, 0, \pm 1) \end{cases}$$

可知，在两个端面上有  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$



注意：在平面应变问题中，我们限定  $u_3|_{\text{端面}} = 0$ （这与实际相符），而在平面应力问题中，我们限定两端面不受力。这是两种平面问题边界条件的区别。而这两种问题的力学条件是相同的。至于几何条件，则正好相反。

那么我们进一步假定：

- 1、在整个板内应力分量  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$ （事实上板内各点不能精确达到这个条件，只是由于板很薄，上述应力很小以至于可以忽略不计）。
- 2、在板上  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$  只是  $x_1$  和  $x_2$  的函数（事实上这些应力分量是随板厚度变化的，只是板很薄时这样的差别可以忽略）。

上述两个假定的数学表述为：

$$\vec{r} \in V \begin{cases} \sigma_{13}(\vec{r}) = \sigma_{23}(\vec{r}) = \sigma_{33}(\vec{r}) = 0 \\ \sigma_{11}(\vec{r}) = \sigma_{11}(x_1, x_2) \\ \sigma_{22}(\vec{r}) = \sigma_{22}(x_1, x_2) \\ \sigma_{12}(\vec{r}) = \sigma_{21}(\vec{r}) = \sigma_{12}(x_1, x_2) \end{cases}$$

后面我们将会看到，这两条假定与协调方程有矛盾（即协调方程两边不恒等），是不合理的。但是在板的厚度  $h \ll b_{\min}$ （端面几何形状的最小尺度）时，上述假定近似成立。

由假定，平面应力问题中的应力分量  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$  与坐标变量  $x_3$  无关，即应力局限在  $ox_1x_2$  平面内，所以称之为平面应力。

在上述两个假定的前提下，平面应力问题的应力场  $\sigma_{ij}(x_1, x_2)$  和应变场  $\varepsilon_{ij}(x_1, x_2)$  分别为：

$$\sigma_{ij} \begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_{11}(x_1, x_2) \\ \sigma_{22} = \sigma_{22}(x_1, x_2) \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{12}(x_1, x_2) \\ \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \end{cases} \quad \dots (6-4-11)$$

$$\varepsilon_{ij} \begin{cases} \varepsilon_{11}(x_1, x_2) = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) \\ \varepsilon_{22}(x_1, x_2) = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) \\ \varepsilon_{33}(x_1, x_2) = \frac{-\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ \varepsilon_{12}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\mu}\sigma_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \end{cases} \quad \dots (6-4-12)$$

将上述 $\sigma_{ij}$ 代入平衡方程，可得如下与平面应变问题完全相同的平衡方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 = 0 \end{cases}$$

将上述 $\varepsilon_{ij}$ 代入应变协调方程得到除第四、第五两式自动满足外，另四个方程如下：

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \textcircled{2} \quad & \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 0 \\ \textcircled{3} \quad & \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} = 0 \\ \textcircled{6} \quad & \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \end{aligned}$$

显然要使②，③，⑥三个方程同时满足，则 $\varepsilon_{33}$ 只能是 $x_1$ 和 $x_2$ 的线性函数，即：

$$\varepsilon_{33} = Ax_1 + Bx_2 + C \quad (A, B, C \text{ 为积分常数})$$

这就使我们所研究的问题受到很大的限制。因此我们假定协调方程也只需满足①式，而近似的认为②，③，⑥三个方程得到了满足。在此假定下我们得到的解虽然是近似解，但是我们后面将证明这个近似解在板很薄时是足够精确的。

将应力应变关系 $\varepsilon_{ij}(\sigma_{kl})$ 代入①式，得应力协调方程：

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[ \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[ \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) \right] = 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[ \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \right]$$

显然这个方程和平面应变问题的应力协调方程完全相似, 所以用与处理平面应变问题同样的方法可得:

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1 + \nu) \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)$$

可见, 相比于平面应变的应力协调方程, 此方程只是用 $\nu$ 代替了 $\nu'$ 而已。

平面应力问题的边界条件:

侧面:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 = \sigma_1(x_1, x_2) \\ \sigma_2 = \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 = \sigma_2(x_1, x_2) \\ \sigma_3 = 0 \end{cases}$$

端面:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0 (\text{自由面})$$

综合可得平面应力问题的定解问题为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} \in V \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 = 0 \\ \nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1 + \nu) \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \end{array} \right. \\ \vec{r} \in \text{侧面} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 \\ \sigma_2 = \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 \\ \sigma_3 = 0 \end{array} \right. \\ \vec{r} \in \text{端面} \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \end{array} \right. \quad \dots (6-4-13)$$

### <III> 平面应变与应力问题的比较

对比上面平面应力问题的定解问题 (6-4-13) 式与平面应变问题的定解问题 (6-4-9) 式:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} \in V \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 = 0 \\ \nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1 + \nu') \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \end{array} \right. \\ \vec{r} \in \text{侧面} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 \\ \sigma_2 = \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 \\ \sigma_3 = 0 \end{array} \right. \\ \vec{r} \in \text{端面} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = \pm \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

总结如下:



	平面应变问题	平面应力问题
边界条件	$u_3 _{\text{端面}} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{33} = 0, \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$	$\sigma_i _{\text{端面}} = 0 \Rightarrow \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$
几何条件	两者相反	
力学条件	相同	相同
弹性系数	$E', \nu'$	$E, \nu$
求解方法	数学上完全相同	数学上完全相同
协调方程	形式完全一致	形式完全一致
解	精确解	近似解

#### <IV> 体力为常数时的平面问题

##### ① 泛定方程

实际情况中，当体力是不随坐标变化的常量时，平面问题就比较简单了。两类平面问题泛定方程简化为相同形式：

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 = 0 \\ \nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0 \end{cases}$$

•••• (6-4-14)

由上可见：两类平面问题的泛定方程组不仅形式完全相同，而且方程组中不含有反映介质性质的弹性系数。由此可以推断，若边界形状相同（物体在  $ox_1x_2$  平面中的形状相同），受到的外力分布相同的话，则不论物体的弹性性质如何，也不论是平面应变下的长柱体或是平面应力下的薄板；由相同方程解出的应力分量  $\sigma_{11}$ 、 $\sigma_{22}$  和  $\sigma_{12}$  的解形式完全相同。这一事实给了工程计算和模拟实验带来了极大地便利。①求解一种构型，所获得的解对相同构型的任何材料都是适用的。②大型工程建筑的构件、机械构件往往需要通过模拟实验来获取有关数据，这时对平面问题我们就可以用廉价、加工方便的材料来代替实验材料。对平面应变状态下的长柱体就可以用相应的平面应力状态下的薄板来做实验、测试。

##### ② 问题的解

由 (6-4-14) 可知：体力为常数时平面问题的平衡方程是一个非齐次的线性偏微分方程组，它的通解等于它的任意一个特解加上相应的齐次方程的通解。

显然：

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_{22} = 0 \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = -f_1 x_2 - f_2 x_1 \end{cases}$$

•••• (6-4-15)

是 (6-4-14) 的有意义的非零特解。

下面再来求相应的齐次方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

.... (6-4-16)

的通解。

我们引入两个函数 $\psi(x_1, x_2)$ 和 $\chi(x_1, x_2)$ 使得:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, & \sigma_{12} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \sigma_{21} = \frac{\partial \chi}{\partial x_2}, & \sigma_{22} = -\frac{\partial \chi}{\partial x_1} \end{cases}$$

.... (6-4-17)

显然, (6-4-17) 是 (6-4-16) 的解。并且有:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{\partial \chi}{\partial x_2}$$

亦即:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial \chi}{\partial x_2} = 0$$

.... (6-4-18)

我们再引入函数 $U(x_1, x_2)$ 使得:

$$\psi = \frac{\partial U}{\partial x_2}, \quad \chi = -\frac{\partial U}{\partial x_1}$$

.... (6-4-19)

显然, (6-4-19) 是 (6-4-18) 的解。从而我们得到了齐次方程 (6-4-16) 的通解为:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}$$

.... (6-4-20)

所以体力为常数时, 平面问题的通解为:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} - (f_1 x_2 + f_2 x_1)$$

这里 $U(x_1, x_2)$ 称为 Airy 应力函数。现在 (6-4-21) 式已经满足平衡方程。下面要考虑的是让用 Airy 应力函数表示的应力形式解 (6-4-21) 去满足应力协调方程。

### ③ Airy 应力函数表示的应力协调方程

将 (6-4-21) 代入应力协调方程, 我们得到以 Airy 应力函数表示的协调方程为:

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \nabla^2(\nabla^2 U) = \nabla^4 U = 0$$

至此, 我们把求解常体力下的平面问题归结为求满足边界条件的双调和函数 $U(x_1, x_2)$ , 即 Airy 应力函数的问题。

### <V> 无体力平面问题

### ① 泛定方程

由上小节讨论结果可知，无体力平面问题的泛定方程为：

$$\nabla^4 U = 0$$

相应的应力形式解为：

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \dots (6-4-23)$$

### ② 边界条件

当体力为常量或不计体力时，平面问题都需要解：

双调和方程：

$$\nabla^4 U = 0 \quad \dots (6-4-24a)$$

边界条件：

$$\sigma_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 \quad \dots (6-4-24b)$$

$$\sigma_2 = \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 \quad \dots (6-4-24c)$$

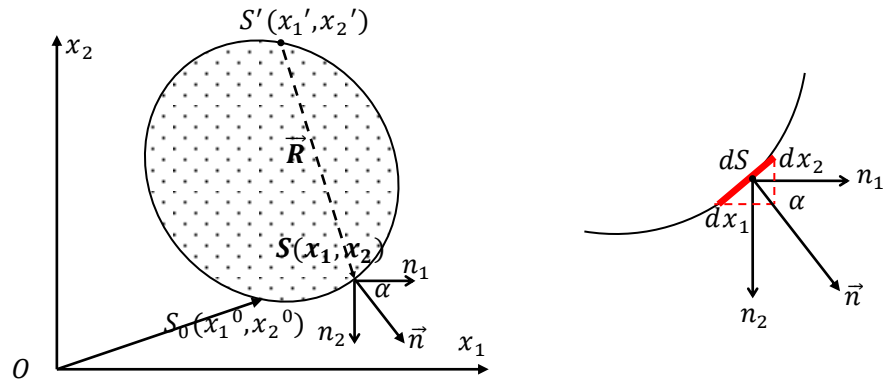
解出  $U(x_1, x_2)$  后，再按下列公式计算应力：

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} \\ \sigma_{12} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} - (f_1 x_2 + f_2 x_1) \quad \text{or} \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (\text{不计体力时}) \end{aligned}$$

因用 Airy 函数表示的上述应力形式解已经满足平衡方程，所以不必再去考虑平衡方程。

为了求出满足边界条件的双调和方程（6-4-24a）的解，则必须将边界条件也用 Airy 函数及其法向导数在边界上的函数表示，即在边界上给定  $U(x_1, x_2)$  和  $\frac{\partial U}{\partial n}$ 。我们还可以根据边界上  $U$  和  $\frac{\partial U}{\partial n}$  的具体形式来作为求解双调和方程时，猜 Airy 应力函数形式的依据。

下面我们来推导用 Airy 函数表示边界条件的方程。



设物体横截面的形态如图所示, 其中 $S_0(x_1^0, x_2^0)$ 点为横截面周界上用来沿周界计算弧长的任意参考点。设周界上任一点 $S(x_1, x_2)$ 的外法向为  $\vec{n} = n_1 \vec{e}_1 + n_2 \vec{e}_2$ , 则由图中可见有:

$$n_1 = \cos(\vec{n}, \vec{e}_1) = \cos \alpha = \frac{dx_2}{dS}, \quad n_2 = \cos(\vec{n}, \vec{e}_2) = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha = -\frac{dx_1}{dS}$$

•••• (6-4-25)

用此和应力形式解, 我们可将边界条件写为:

$$\sigma_1 = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \frac{dx_2}{dS} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{dx_1}{dS} = \frac{d}{dS} \left( \frac{\partial U}{\partial x_2} \right)$$

$$\sigma_2 = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{dx_2}{dS} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} \frac{dx_1}{dS} = -\frac{d}{dS} \left( \frac{\partial U}{\partial x_1} \right)$$

•••• (6-4-26)

现对上式沿边界 $s_0 \widehat{S}'$ 段积分, 得:

$$\left( \frac{\partial U}{\partial x_2} \right)_{S'} = \iint_{s_0}^{S'} \sigma_1 ds + \left( \frac{\partial U}{\partial x_2} \right)_{s_0}$$

$$\left( \frac{\partial U}{\partial x_1} \right)_{S'} = -\iint_{s_0}^{S'} \sigma_2 ds + \left( \frac{\partial U}{\partial x_1} \right)_{s_0}$$

•••• (6-4-27)

显然,  $\left( \frac{\partial U}{\partial x_2} \right)_{S'}$  和  $\left( \frac{\partial U}{\partial x_1} \right)_{S'}$  是积分终点  $S'(x_1', x_2')$  的函数。即终点  $S'$  不同, 积分值不同。而  $\left( \frac{\partial U}{\partial x_1} \right)_{s_0}$

和  $\left( \frac{\partial U}{\partial x_2} \right)_{s_0}$  代表  $\frac{\partial U}{\partial x_1}$  和  $\frac{\partial U}{\partial x_2}$  在参考点  $S_0$  的值。

现在我们来求 Airy 函数  $U(x_1, x_2)$  在终点  $S'(x_1', x_2')$  处的值:

$$U(x_1', x_2') = \iint_{s_0}^{S'} \frac{dU}{dS} ds + U(x_1^0, x_2^0) = \iint_{s_0}^{S'} \left[ \frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dS} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dS} \right] ds + U_0$$

$$\begin{aligned}
 & \xrightarrow{\text{将(6-4-27)式代入}} \iint_{S_0}^{S'} \left\{ \left[ -\iint_{S_0}^{S'} \sigma_2 ds + \left( \frac{\partial U}{\partial x_1} \right)_{S_0} \right] \frac{dx_1}{dS} + \left[ \iint_{S_0}^{S'} \sigma_1 ds + \left( \frac{\partial U}{\partial x_2} \right)_{S_0} \right] \frac{dx_2}{dS} \right\} ds + U_0 \\
 & = \iint_{S_0}^{S'} \left( -\frac{dx_1}{dS} \iint_{S_0}^{S'} \sigma_2 ds + \frac{dx_2}{dS} \iint_{S_0}^{S'} \sigma_1 ds \right) ds + \left( \frac{\partial U}{\partial x_1} \right)_{S_0} (x_1 - x_1^0) + \left( \frac{\partial U}{\partial x_2} \right)_{S_0} (x_2 - x_2^0) + U_0
 \end{aligned}$$

因为应力是关于 $U(x_1, x_2)$ 对坐标的两次偏导数，所以上式中坐标的零点（如 $U_0$ ）和一次项对应力无贡献，可以略去。从而上式表示为：

$$U(x_1', x_2') = \iint_{S_0}^{S'} \left( -\frac{dx_1}{dS} \iint_{S_0}^{S'} \sigma_2 ds + \frac{dx_2}{dS} \iint_{S_0}^{S'} \sigma_1 ds \right) ds$$

对上式作分部积分，得：

$$\begin{aligned}
 U(x_1', x_2') &= \left[ -x_1 \iint_{S_0}^{S'} \sigma_2 ds + x_2 \iint_{S_0}^{S'} \sigma_1 ds \right] \Big|_{S_0}^{S'} - \iint_{S_0}^{S'} [-x_1 \sigma_2 + x_2 \sigma_1] ds \\
 &= -x_1' \iint_{S_0}^{S'} \sigma_2 ds + x_2' \iint_{S_0}^{S'} \sigma_1 ds + \iint_{S_0}^{S'} [x_1 \sigma_2 - x_2 \sigma_1] ds + \iint_{S_0}^{S'} (x_1^0 \sigma_2 - x_2^0 \sigma_1) ds \\
 &= \iint_{S_0}^{S'} [(x_1 - x_1') \sigma_2 - (x_2 - x_2') \sigma_1] ds + \iint_{S_0}^{S'} [x_1^0 \sigma_2 - x_2^0 \sigma_1] ds \\
 &= \iint_{S_0}^{S'} |\vec{R} \times \vec{\sigma}| ds + \iint_{S_0}^{S'} |\vec{R}_0 \times \vec{\sigma}| ds = M + M_0
 \end{aligned}$$

•••• (6-4-28)

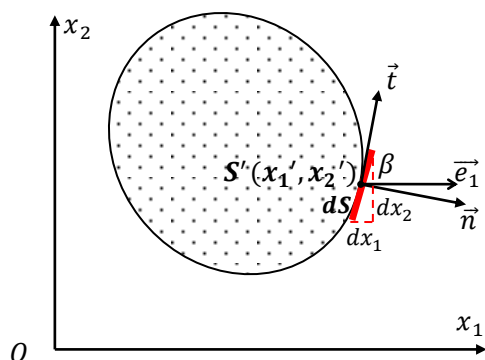
式中：

$$\begin{aligned}
 M &= |\vec{R} \times \vec{\sigma}| = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 - x_1' & x_2 - x_2' & 0 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & 0 \end{vmatrix} \\
 M_0 &= |\vec{R}_0 \times \vec{\sigma}| = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1^0 & x_2^0 & 0 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & 0 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$M$ 为作用于 $s_0\widehat{S'}$ 段的表面力  $\vec{\sigma}(x_1, x_2) = \sigma_1 \vec{e}_1 + \sigma_2 \vec{e}_2$  对积分终点 $S'$ 点的力矩的代数和。而 $M_0$ 为作用于 $s_0\widehat{S'}$ 段的表面力对参考点 $S_0$ 的力矩。这一项可通过坐标系的适当选择而被消除。

注意：图中积分路径 $s_0\widehat{S'}$ 弧逆时针绕边界，规定力矩 $M$ 的方向与弧的绕行方向同时为正，反之为负。

现在我们来计算 Airy 函数在  $S'(x_1', x_2')$  点的法向导数值。



设过 $S'$ 点的切线方向为 $\vec{t}$  (如图), 且沿 $d\vec{s}$  方向, 则有:

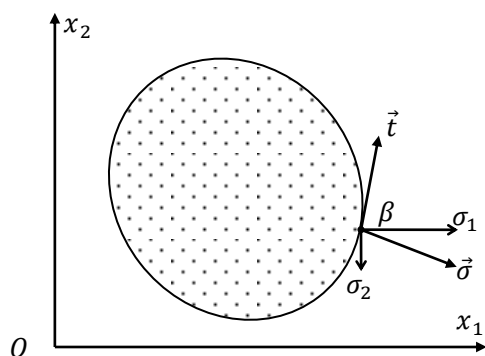
$$\cos \beta = \frac{dx_1}{dS} \quad \sin \beta = \frac{dx_2}{dS}$$

由定义:

$$n_1 = \frac{\partial x_1}{\partial n} = \frac{dx_2}{dS}, \quad n_2 = \frac{\partial x_2}{\partial n} = -\frac{dx_1}{dS}$$

而:

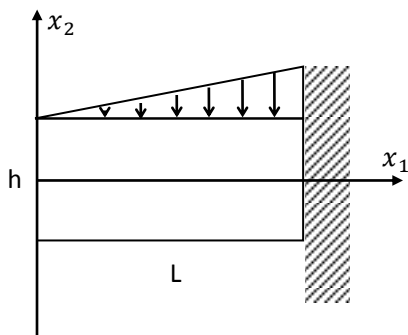
$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)_{S'} &= \left( \frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial n} \right)_{S'} = \left( \frac{\partial U}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} n_2 \right)_{S'} \\ &= \left( - \iint_0^{S'} \sigma_2 ds \right) \left( \frac{\partial x_1}{\partial n} \right)_{S'} + \left( \iint_0^{S'} \sigma_1 ds \right) \left( \frac{\partial x_2}{\partial n} \right)_{S'} \\ &= \left( - \iint_0^{S'} \sigma_2 ds \right) \left( \frac{dx_2}{dS} \right)_{S'} + \left( \iint_0^{S'} \sigma_1 ds \right) \left( - \frac{dx_1}{dS} \right)_{S'} \\ &= - \left[ \cos \beta \iint_0^{S'} \sigma_1 ds + \sin \beta \iint_0^{S'} \sigma_2 ds \right] = -T \end{aligned}$$



上式表明: Airy 函数在 $S'$ 点的法向导数等于参考点到终点这一段边界上表面力在切向的投影的代数和并取负值。

例 1：悬臂梁受如图线性分布力：

$$\begin{cases} \sigma_2 = -\frac{qx_1}{l} \\ \sigma_1 = 0 \end{cases}$$



即：

$$\vec{\sigma} = \sigma_1 \vec{e}_1 + \sigma_2 \vec{e}_2 = -\frac{qx_1}{l} \vec{e}_2$$

则上边界条件为：

$$x_2 = \frac{h}{2}$$

$$\begin{aligned} U(x_1', \frac{h}{2}) &= \iint_0^{s'} [(x_1 - x_1')\sigma_2 - (x_2 - x_2')\sigma_1] ds = \iint_0^{s'} (x_1 - x_1')\sigma_2 ds \\ &= \int_0^{x_1'} (x_1 - x_1') \left(-\frac{qx_1}{l}\right) dx_1 = -\frac{1}{3} \frac{q}{l} x_1'^3 + \frac{1}{2} \frac{q}{l} x_1'^3 = \frac{1}{6} \frac{q}{l} x_1'^3 \end{aligned}$$

$\int_0^{s'}$  是沿上边界顺时针积分，即与规定的沿逆时针绕行正好相反，所以力矩值为负。

即：

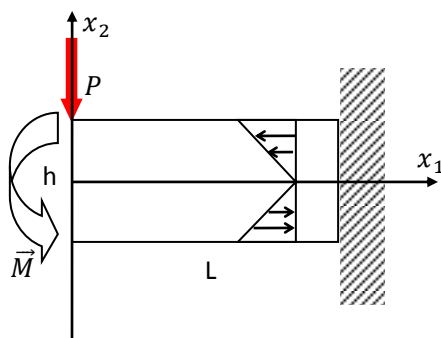
$$U(x_1', \frac{h}{2}) = -\frac{1}{6} \frac{q}{l} x_1'^3$$

这就是线性分布于梁的上边界上的表面力对  $(x_1', h/2)$  点的力矩的代数和。而上边界面上的  $\frac{\partial U}{\partial n}$  为（第一个等号因  $\vec{n} = (n_1, n_2) = (0, 1)$ ）：

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial x_2} = -\left( \sin \beta \iint_0^{s'} \sigma_2 ds + \cos \beta \iint_0^{s'} \sigma_1 ds \right) = 0, \quad \text{因 } \vec{t} // \vec{e}_1 \quad \beta = 0$$

例 2：

薄悬臂梁长为  $l$ ，高为  $h$ ，厚度为单位厚度 1（厚度  $\ll h$ ），如图。在左端  $(0, h/2)$  点作用一集中力  $P$ ，作用力  $P$  在  $ox_1x_2$  平面内。求梁中的应力分布。



解:

因梁很薄, 且外力垂直与  $x_2$  轴。因此可视为平面应力问题。

在如图坐标系下, 我们从分析边界条件入手来猜 Airy 函数的形式。分析如下:

$$x_2 = \frac{h}{2}: U = -Px_1, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0 \quad (\text{外力在切向, 亦即 } x_1 \text{ 方向投影为零}) \quad \dots (a)$$

$$x_2 = -\frac{h}{2}: U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0 \quad \dots (b)$$

$$x_1 = 0: U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial x_1} = -\sin \beta \int_0^{s'} \sigma_2 ds = (-\sin 90^\circ)(-P) = P \quad \dots (c)$$

可见: 条件 (a) 与 (c) 等价, 只取其一即可。

从分析边界条件可见: 在边界上 Airy 应力函数  $U(x_1, x_2)$  为  $x_1$  的一次函数 (条件 (a)), 所以我们猜解为:

$$U(x_1, x_2) = x_1 f(x_2) \quad \dots (d)$$

将 (d) 代入双调和方程:

$$\nabla^4 U = 0$$

得:

$$\nabla^4 U = x_1 \frac{\partial^4 f(x_2)}{\partial x_2^4} = 0 \quad \dots (e)$$

对任意的  $x_1$  要 (e) 式成立必须:

$$\frac{\partial^4 f(x_2)}{\partial x_2^4} = 0 \quad \dots (f)$$

解此条件方程, 得:

$$f(x_2) = Ax_2^3 + Bx_2^2 + Cx_2 + D$$

积分常数 A, B, C, D 可由边界条件确定。

所以满足双调和方程的 Airy 应力函数为:



$$U(x_1, x_2) = x_1(Ax_2^3 + Bx_2^2 + Cx_2 + D) \quad \dots (g)$$

根据边界条件 (a), (b) 可求得:

$$A = \frac{2P}{h^3}, B = 0, C = -\frac{3P}{2h}, D = -\frac{P}{2} \quad \dots (h)$$

进而得:

$$U(x_1, x_2) = x_1\left(\frac{2P}{h^3}x_2^3 - \frac{3P}{2h}x_2 - \frac{P}{2}\right)$$

$$U(x_1, x_2) = x_1\left(-\frac{2P}{h^3}x_2^3 + \frac{3P}{2h}x_2 + \frac{P}{2}\right), \text{ 此对应边界条件为: } U = Px_1, \left(x_2 = \frac{h}{2}\right) \quad \dots (i)$$

应力解为:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = \frac{12Px_1x_2}{h^3}, \sigma_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = 0, \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{6P}{h^3}\left(\frac{h^2}{4} - x_2^2\right)$$

$$\sigma_{11} = -\frac{12Px_1x_2}{h^3}, \sigma_{22} = 0, \sigma_{12} = -\frac{6P}{h^3}\left(\frac{h^2}{4} - x_2^2\right) \quad \dots (j)$$

讨论:

<i>由应力解 (j) 式可知, 在  $x_1 = 0$  的端面上,  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$ ,  $\sigma_{12}$  呈抛物线规律分布。也就是说在  $x_1 = 0$  的端面上, 与  $\sigma_{12}$  平衡的外力应按与  $\sigma_{12}$  一样的抛物线规律分布, 则解才完全满足边界条件 (解才是精确的), 但现在在此端面的外力是集中力  $(-P\bar{e}_2)$ 。不过它与端面剪切应力  $\sigma_{12}$  的合力:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{12} dx_2 = \left[ \frac{3P}{2h}x_2 - \frac{6P}{3h^3}x_2^3 \right] \bigg|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = P \quad \dots (k)$$

是静力等效的。根据圣维南原理: 解答仅在  $x_1 = 0$  端面附近与真正集中力  $(-P\bar{e}_2)$  的结果有畸变, 但在远离端面的区域是足够精确的。通常亦将 (k) 式作为边界条件来确定积分常数。

<ii>解平面问题就是要找出满足边界条件的 Airy 函数  $U(x_1, x_2)$ 。我们知道解析函数的实部和虚部都是调和函数, 因此也都是双调和方程的解。这样的解如此之多, 想用猜调和函数解的途径, 去尝试是否满足边界条件是十分困难的, 且试不胜试。因此, 解题往往从分析边界条件入手来猜 Airy 函数的形式 (如上例), 再去验证是否满足双调和方程, 如不满足, 再进一步修改所猜的形式解, 这种方法是一种“由表及里”的方法。

<iii>要注意到, 这个例子中受力点有两个方向。对  $\vec{n} = -\bar{e}_1$  方向的边界面上有  $x_1 = 0$ ,  $\frac{\partial U}{\partial n} \neq 0$  (即切向力不为零); 对于  $\vec{n} = \bar{e}_2$  的边界面上有  $x_2 = \frac{h}{2}$ ,  $U \neq 0$  (即力矩不为零)。

#### <VI> 平面应力问题的近似性

前面讨论平面应力问题时, 对应变协调方程假定也只需满足一个 (即 (a)) 而其余三个 (即 (b), (c), (f)) 认为近似满足, 而来作考虑。

实际上, 如果坚持要讨论应力局限在  $ox_1x_2$  平面内 (即与  $x_3$  无关) 的“平面应力”问题,

且  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$ ，则必须求解满足四个应变协调方程 ((4) (5) 两个已自动满足)：

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \dots (a)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} = 0 \quad \dots (b)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 0 \quad \dots (c)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad \dots (f)$$

的弹性静力学问题，而不能仅仅满足(a)式。这样的话，问题就复杂了，实用价值也大大降低（因为要使对(b), (c), (f)三式满足，对 $\varepsilon_{33}$ 要求也只能是 $x_1, x_2$ 的线性函数，但是由双调和方程及边界条件求出的解，不一定满足这个要求。例如前面讨论的悬臂梁的例子中 $\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{\nu}{E}\left(\frac{12Px_1x_2}{h^3}\right)$ ）。可见 $\varepsilon_{33}$ 是 $x_1, x_2$ 的混二次函数。

现在我们来考虑这样的一个问题：

是否有这样一组应力解

①它即可以使平衡方程依然是简化了的形式，即仍是：

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

如果有，当然应力函数也就仍只需要一个就可以了。

②它又能使应力协调方程（亦即应变协调方程）：

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

（这是体力为零或常数且静力平衡时的拜尔托拉密-密乞尔方程）

个个都满足呢？

当然，如这两条都满足，则对应的这组方程解就是精确解。前面提出的 Airy 应力函数  $U(x_1, x_2)$  肯定不是这种正确的解，因为它只满足一个应变协调方程，另三个是假定满足的。

现在我们考虑这样一组应力分量吧，它们不是“平面的”。但是，仍有：

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$$

而 $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ 不仅是  $x_1, x_2$  的函数，且也与 $x_3$ 有关。这样代入无体力静力平衡方程之后，

依然得到与从前一样的简化了的平衡方程组，即：

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

因：

$$\sigma_{ij,j} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{因 } \sigma_{13} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{因 } \sigma_{23} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{因 } \sigma_{33} = 0$$

但是，与平面应力的假定 ——  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  仅是  $x_1, x_2$  的函数 —— 不同，在这里  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  是  $x_1, x_2, x_3$  的函数

引进在 Airy 应力函数基础上修正了的、新的应力函数  $\psi(x_1, x_2, x_3)$ ，使得：

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

代入平衡方程得：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \equiv 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} \right) \equiv 0 \end{cases}$$

可见这组新的应力解满足平衡方程。

若取这新的应力函数为以下形式：

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) = U(x_1, x_2) - \frac{\nu x_3^2}{2(1+\nu)} (\nabla_1^2 U)$$

这里：

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

以区别：

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

而  $U(x_1, x_2)$  即原来的 Airy 应力函数，其满足： $\nabla_1^4 U = 0$

我们可以证明  $\psi(x_1, x_2, x_3)$  也是应力协调方程的解，即满足全部应力协调方程。

证：因为：

$$I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \xrightarrow{\sigma_{33}=0} \sigma_{11} + \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = \nabla_1^2 \psi = \nabla_1^2 \left[ U - \frac{\nu x_3^2}{2(1+\nu)} (\nabla_1^2 U) \right]$$

$$= \nabla_1^2 U - \frac{\nu x_3^2}{2(1+\nu)} \nabla_1^4 U \xrightarrow{\nabla_1^4 U=0} \nabla_1^2 U(x_1, x_2)$$

所以:

$$\frac{\partial I_1}{\partial x_3} = 0, \quad \nabla_1^2 I_1 = \nabla_1^4 U = 0$$

又:

$$\nabla^2 \psi = \left[ \left( \nabla_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \left( U - \frac{\nu x_3^2}{2(1+\nu)} (\nabla_1^2 U) \right) \right] = \nabla_1^2 U - \frac{\nu}{1+\nu} \nabla_1^2 U = \frac{1}{1+\nu} \nabla_1^2 U(x_1, x_2)$$

$$= \frac{1}{1+\nu} I_1$$

(因  $U(x_1, x_2)$  是  $x_1, x_2$  的函数, 故  $\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} U \equiv 0$ , 且  $\nabla_1^4 U = 0$ )

所以当  $(i, j)$  为  $(3, 1), (3, 2), (3, 3)$  时, 由于:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0, \quad \frac{\partial I_1}{\partial x_3} = 0$$

则应力协调方程:

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \sigma_{11} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_1 \partial x_1} = 0 & \dots (1) \\ \nabla^2 \sigma_{22} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_2 \partial x_2} = 0 & \dots (2) \\ \nabla^2 \sigma_{33} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_3 \partial x_3} = 0 & \dots (3) \\ \nabla^2 \sigma_{12} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 & \dots (4) \\ \nabla^2 \sigma_{23} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 & \dots (5) \\ \nabla^2 \sigma_{31} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_3 \partial x_1} = 0 & \dots (6) \end{cases}$$

中 (3), (5), (6) 式恒满足, 而第一式为:

$$\nabla^2 \sigma_{11} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_1 \partial x_1} = \nabla^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} \right) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (\nabla^2 \psi) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_1^2}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( \frac{1}{1+\nu} I_1 \right) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_1^2} = \frac{1}{1+\nu} \nabla_1^2 I_1 \equiv 0$$

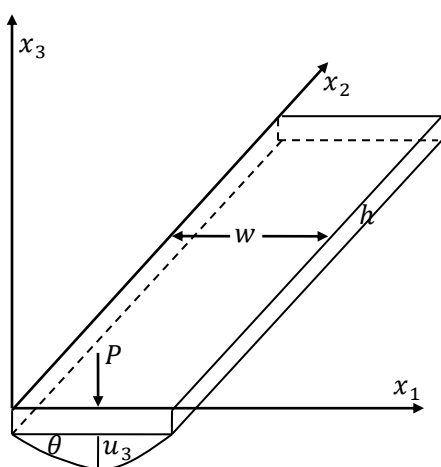
可见(1)式也恒满足。同理可证(2),(4)两式也恒满足。因此,新的应力函数 $\psi(x_1, x_2, x_3)$ 及其表示的应力解才是既满足平衡方程又满足全部协调方程的精确解。当然,对具体问题,还要满足所给定的边界条件。

新的应力函数 $\psi(x_1, x_2, x_3)$ 与原来的 Airy 应力函数 $U(x_1, x_2)$ 的差别仅在于:

$$|\psi(x_1, x_2, x_3) - U(x_1, x_2)| = \left| -\frac{\nu x_3^2}{2(1+\nu)} \nabla_1^2 U \right|$$

为了估计精确解与近似解之间到底差多少,我们来作如下量级分析。

设有一平板,除了在自身平面受力外,还有横向载荷(垂直与板平面)使它弯曲。设板宽为 $w$ ,板厚为 $h$ ,且 $h \ll w$ ,如下图。



因为板厚远小于板的最小尺度 $w$ ,则在载荷 $P$ 的作用下板的变形可按 $w$ 的一半估计,即有:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \approx \tan \theta \approx \frac{u_3 - u_{30}}{\frac{w}{2}} = \frac{2u_3}{w} \approx \frac{u_3}{w}$$

( $u_{30}$ 是初始时,板在 $x_3$ 方向的位移。显然,初始时 $u_{30} = 0$ )

可见:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \approx \frac{1}{w}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \approx \frac{1}{w^2}$$

这给出平衡时,板的弯曲程度的估计值。

若  $w = 10h$ ,  $x_3 = h$ , 则当  $x_1 \approx x_2 \approx w \approx 10h$  时,有:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \approx \frac{\partial}{\partial x_2} \approx \frac{1}{10h} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \approx \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \approx \frac{1}{(10h)^2}$$

所以:

$$|\psi - U| = \left| -\frac{\nu x_3^2}{2(1+\nu)} \nabla_1^2 U \right| \approx \frac{\nu h^2}{2(1+\nu)} \cdot \frac{2U}{(10h)^2} \approx \frac{1}{100} U$$

可见： $\psi$ 和 $U$  在板很薄的情况下两者仅差1%，所以对薄板问题而言：

$$\psi \approx U$$

到目前为止，我们已将解平面问题归结为求解在弹性体内点点满足双调和方程，在边界上满足边界条件的 Airy 应力函数 $U(x_1, x_2)$ 。例如，当体力不计或为常数时，平面问题的定解问题为：

$$\begin{cases} \nabla^4 U = 0 \\ U = M \\ \frac{\partial U}{\partial n} = T \end{cases}$$

相应的应力分量为：

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} \\ \sigma_{12} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \text{或} \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} - f_1 x_2 - f_2 x_1 \quad (\text{体力为常数}) \end{aligned}$$

Airy 应力函数可用不同的方法求得。在实际问题中，半逆解法比较方便（例如我们举的悬臂梁受集中力 P、以及习题 1 等例题）。用从边界条件入手，“由表及里”的方法猜出应力函数的解析形式，而其中的任意系数，用边界条件来确定。

我们知道：弹性力学问题的难易主要取决与边界条件（物体的形状及外力分布情况）的复杂程度。针对这个问题，我们在具体求解时，用不同形式的 Airy 函数来解决一些相应外力分布的平面问题。下面讨论常用的直角坐标和极坐标下的 Airy 函数的数学表示式。

#### <VII> 直角坐标系下的平面问题（多项式形式的 Airy 函数）

对周界形状比较简单的多边形，例如矩形、梯形、三角形等，常用两种方法求解：

①用代数多项式函数表示 Airy 应力函数。

它可以解出边界载荷为连续分布，并且载荷分布可以用代数整函数表示的平面问题。

②用傅里叶级数表示应力函数。

它可以求解边界载荷不是连续分布，并且载荷的分布不能用代数整函数表示的平面问题。

我们先来讨论多项式形式的 Airy 函数。

因为应力是 Airy 应力函数对坐标的二次偏导数，所以用一次多项式表示的 Airy 函数对应力是没有贡献的，或者说用一次多项式表示的 Airy 应力函数对应的是零应力状态。

我们从二次多项式开始讨论：

$$\textcircled{1} \text{取 } U(x_1, x_2) = \frac{1}{2} a x_1^2 + b x_1 x_2 + \frac{1}{2} c x_2^2$$

•••• (1)

上式显然满足双调和方程 $\nabla^4 U = 0$ 。若不计体力，则相应的应力解为：

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = c$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = a$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = -b = \sigma_{21}$$

可见 (1) 式代表的是一种在整个物体内部都均匀的平面应力状态。对如图所示的矩形薄板，按上面的应力解，可画出图示的边界应力情况： $\vec{e}_1$  和  $\vec{e}_2$  方向上受均匀拉应力，在边界面上受均匀剪应力。常系数  $a$ ,  $b$ ,  $c$  可由边界条件确定。

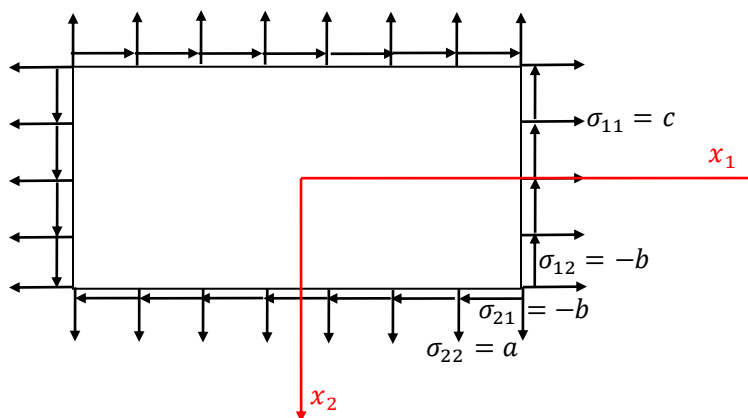


图 1、 $U(x_1, x_2) = \frac{1}{2}ax_1^2 + bx_1x_2 + \frac{1}{2}cx_2^2$  所表示的边界应力情况

②取  $U(x_1, x_2) = \frac{1}{6}ax_1^3 + \frac{1}{2}bx_1^2x_2 + \frac{1}{2}cx_1x_2^2 + \frac{1}{6}dx_2^3$

... (2)

上式没有列入二次项，因为二次项相当于附加常应力。  
显然亦满足应力协调方程  $\nabla^4 U = 0$ 。相应的应力解为：

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = cx_1 + dx_2$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = ax_1 + bx_2$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = -bx_1 - cx_2 = \sigma_{21}$$

这组应力解是坐标  $x_1$ 、 $x_2$  的一次函数。三次多项式形式的应力函数包括许多有实际意义的问题。特别当： $a = b = c = 0$  时，应力解为：

$$\sigma_{11} = dx_2$$

$$\sigma_{22} = 0$$

$$\sigma_{12} = 0$$

这组应力解表示的是纯弯曲应力状态（如图所示）。

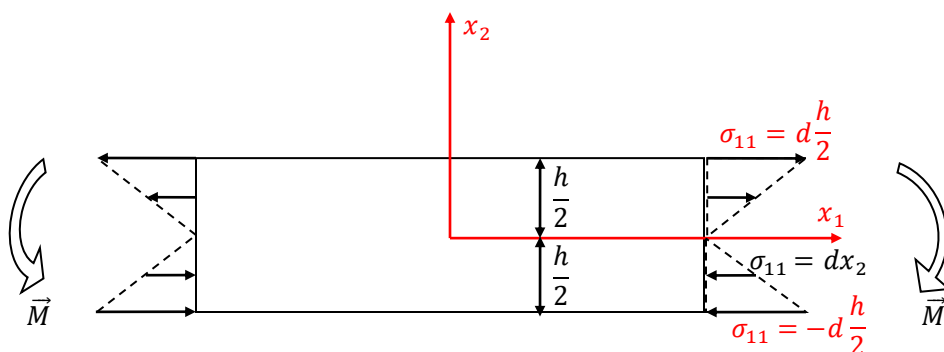


图 2、 $U(x_1, x_2) = \frac{1}{6}dx_2^3$  所表示的产生纯弯曲的表面力分布

若已知作用在矩形梁两端的弯矩  $\vec{M}$ ，则由圣维南条件：

$$M = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_2 \sigma_{11} dx_2 = d \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_2^2 dx_2 = \frac{d}{3} x_2^3 \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{1}{12} dh^3 \Rightarrow d = \frac{12M}{h^3}$$

从而可求出系数  $d$ 。

取应力函数为二次或三次多项式时，对多项式中各项系数数值的选取完全是自由的，即不论这些系数为何值，应力协调方程都是满足的。但是若选取应力函数为四次或四次以上的多项式时，只有系数之间的某些关系被满足时，应力协调方程才能满足。

$$\textcircled{3} \text{ 取 } U(x_1, x_2) = \frac{1}{12}ax_1^4 + \frac{1}{3}bx_1^3x_2 + \frac{1}{2}cx_1^2x_2^2 + \frac{1}{3}dx_1x_2^3 + \frac{1}{12}ex_2^4$$

.... (3)

将上式代入应力协调方程，可以发现，只有当：

$$e = -(a + 2c)$$

时，应力协调方程才被满足。现在  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $e$  五个系数中只有四个是独立的，这样相应的应力分量为：

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = cx_1^2 + 2dx_1x_2 + ex_2^2 = cx_1^2 + 2dx_1x_2 - (a + 2c)x_2^2 \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \\ \sigma_{12} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = -bx_1^2 - 2cx_1x_2 - dx_2^2 \end{aligned}$$



我们对 a、b、c、d 四个独立的系数加以适当的选择，就能符合矩形板上的各种不同的边界载荷条件。例，令 d 以外的其他系数都等于零，得：

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2dx_1x_2 \\ \sigma_{22} &= 0 \\ \sigma_{12} &= -dx_2^2\end{aligned}$$

若  $d > 0$ ，则上面这组应力分布是由矩形板边界上的如下表面力产生的：

<1>在  $x_2 = \pm \frac{h}{2}$  的界面上有均匀分布的剪应力：

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = -\frac{d}{4}h^2$$

<2>在  $x_1 = 0$  的边界上，受按抛物线分布的剪应力：

$$\sigma_{12} = -dx_2^2$$

<3>在  $x_1 = l$  的边界上，受按抛物线分布的剪应力：

$$\sigma_{12} = -dx_2^2$$

和产生弯矩的正应力：

$$\sigma_{11} = 2dlx_2$$

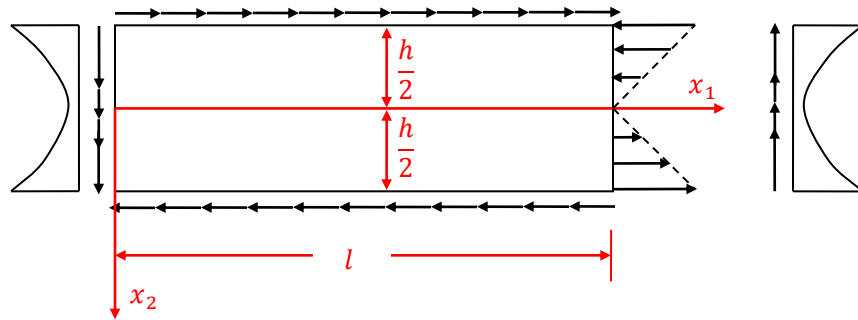


图 3、 $U(x_1, x_2) = \frac{1}{3}dx_1x_2^3$  所表示的边界表面力分布

计算这些在边界上的剪应力所产生的对矩形板中心的力偶矩，有：

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_1 &= \left(x_2 = \frac{h}{2}\right) \text{ 上的力矩} + \left(x_2 = -\frac{h}{2}\right) \text{ 上的力矩} + (x_1 = 0) \text{ 上的力矩} + (x_1 = l) \text{ 上的力矩} \\
 &= \int_0^l \left[ \frac{h}{2} \vec{e}_2 \times |\sigma_{12}| (-\vec{e}_1) \right] dx_1 + \int_0^l \left[ \frac{h}{2} (-\vec{e}_2) \times |\sigma_{12}| \vec{e}_1 \right] dx_1 \\
 &\quad + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \frac{l}{2} (-\vec{e}_1) \times |\sigma_{12}| \vec{e}_2 \right] dx_2 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \frac{l}{2} \vec{e}_1 \times |\sigma_{12}| (-\vec{e}_2) \right] dx_2 \\
 &= \frac{d}{4} h^3 l \cdot \vec{e}_3 - \frac{d}{12} h^3 l \cdot \vec{e}_3 = \frac{d}{6} h^3 l \cdot \vec{e}_3
 \end{aligned}$$

而在  $x_1 = l$  的端面上的正应力  $\sigma_{11} = 2dlx_2$  所产生的力偶矩为:

$$\vec{M}_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_2 \sigma_{11} dx_2 \cdot (-\vec{e}_3) = 2dl \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_2^2 dx_2 \cdot (-\vec{e}_3) = \frac{2}{3} dl x_2^3 \bigg|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cdot (-\vec{e}_3) = \frac{d}{6} h^3 l \cdot (-\vec{e}_3)$$

可见: 由  $U(x_1, x_2) = \frac{1}{3} dx_1 x_2^3$  所表示的边界应力分布中, 所有剪应力对矩形板中心产生的力偶矩与  $x_1 = l$  端面上分布的正应力  $\sigma_{11} = 2dlx_2$  所产生的力偶矩大小相等、方向相反, 所以这些边界上所受外力构成一静力平衡力系。上述结论与坐标系的选取无关。

作为练习, 请大家讨论用五次多项式表示的 Airy 应力函数:

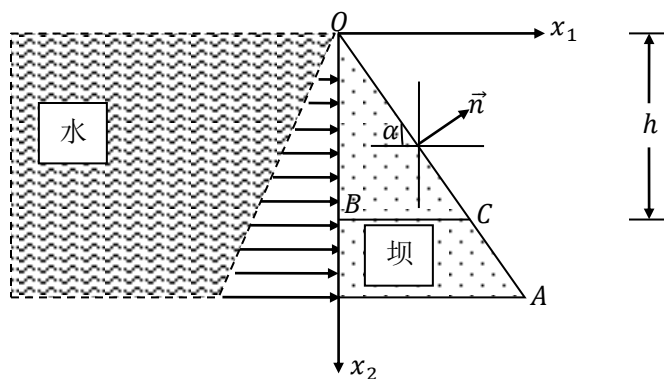
$$U(x_1, x_2) = ax_1^5 + bx_1^4 x_2 + cx_1^3 x_2^2 + dx_1^2 x_2^3 + ex_1 x_2^4 + fx_2^5$$

<i>按上述几种  $U$  的讨论方式, 讨论其满足  $\nabla^4 U = 0$  的系数关系

<ii>写出相应的应力解。

<iii>讨论当  $a = b = c = 0$  时,  $U(x_1, x_2) = dx_1^2 x_2^3 - \frac{1}{5} dx_2^5$  所表示的边界应力分布, 用矩形板作图示。

例: 设有三角形等截面的水坝 (如图), 承受水压力即本身重量。在深度  $x_2$  处的水压力等于  $q = -\gamma x_2$ ,  $\gamma$  为单位体积的水重, 坝的单位体积重量为  $f(\vec{e}_2)$ 。坝身很长, 坝身两端视为刚性固定, 而与  $ox_1 x_2$  坐标平面平行的任意截面中的形变是相同的, 因此这是平面应变问题。求坝体中的应力分布。



解：从分析边界条件入手。在  $x_1 = 0$  边界上（即  $ox_2x_3$  平面）有：

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -\gamma x_2 \\ \sigma_{12} &= 0\end{aligned}\quad \dots (a)$$

在 OA 面上 ( $x_1 = \frac{x_2}{\tan \alpha}$ ) 的边界条件（自由边界）为：

$$\begin{aligned}\sigma_1^{(n)} &= 0 \\ \sigma_2^{(n)} &= 0\end{aligned}\quad \dots (b)$$

从边界受力的情况来看，坝体水平截面上主要受到压力和弯曲的联合作用，对照前面讨论多项式表述的应力函数情况可知，这种边界受力情况下应力将是坐标的线性函数，因此可以选用三次多项式表示的 Airy 应力函数：

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{6}ax_1^3 + \frac{1}{2}bx_1^2x_2 + \frac{1}{2}cx_1x_2^2 + \frac{1}{6}dx_2^3\quad \dots (c)$$

其中 a、b、c、d 为待定常数，可由四个边界条件 (a)、(b) 来确定。  
相应的应力解为：

$$\begin{cases} \sigma_{11} = cx_1 + dx_2 \\ \sigma_{22} = ax_1 + bx_2 \\ \sigma_{12} = -bx_1 - cx_2 - fx_1(\text{体力项}) \end{cases}\quad \dots (d)$$

由条件 (a) 得：

$$\begin{aligned}\sigma_{12} \Big|_{x_1=0} &= -cx_2 = 0 \Rightarrow c = 0 \\ \sigma_{11} \Big|_{x_1=0} &= dx_2 = -\gamma x_2 \Rightarrow d = -\gamma\end{aligned}$$

于是 (d) 式可写成：

$$\begin{cases} \sigma_{11} = -\gamma x_2 \\ \sigma_{22} = ax_1 + bx_2 \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = -(b+f)x_1 \end{cases}$$

.... (e)

另外，在 OA 面上任一点的法方向  $\vec{n} = n_1 \vec{e}_1 + n_2 \vec{e}_2$ ，其中：

$$\begin{cases} n_1 = \cos(\vec{n}, \vec{e}_1) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \\ n_2 = \cos(\vec{n}, \vec{e}_2) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \end{cases}$$

由静力边界条件（柯西公式）有：

$$\begin{cases} \sigma_1^{(n)} = n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{12} = \sigma_{11} \sin \alpha - \sigma_{12} \cos \alpha = 0 \\ \sigma_2^{(n)} = n_1 \sigma_{21} + n_2 \sigma_{22} = \sigma_{21} \sin \alpha - \sigma_{22} \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

.... (f)

将 (e) 代入 (f) 得：

$$\begin{cases} -\gamma x_2 \sin \alpha - (b + f)x_1 \cos \alpha = 0 \\ -(b + f)x_1 \sin \alpha - (ax_1 + bx_2) \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

.... (g)

注意到：  $x_1 = \frac{x_2}{\tan \alpha}$ ，解上述方程组得：

$$\begin{aligned} b &= \gamma \tan^2 \alpha - f \\ a &= f \tan \alpha - 2\gamma \tan^3 \alpha \end{aligned}$$

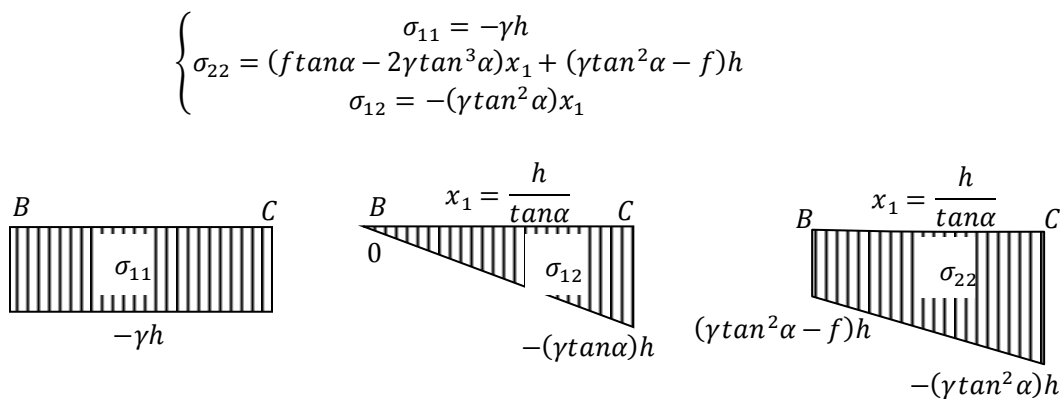
.... (h)

最终得应力解为：

$$\begin{cases} \sigma_{11} = -\gamma x_2 \\ \sigma_{22} = (f \tan \alpha - 2\gamma \tan^3 \alpha)x_1 + (\gamma \tan^2 \alpha - f)x_2 \\ \sigma_{12} = -(\gamma \tan^2 \alpha)x_1 \end{cases}$$

.... (i)

在深度  $x_2 = h$  处，水平截面 BC 上的应力分布为（如图）：

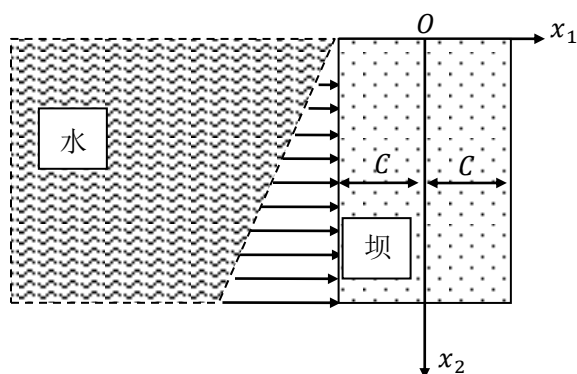


BC 水平截面上各应力分量大小分布图

必须指出：如果坝底面应力 $\sigma_{11}$ 和 $\sigma_{12}$ 是按（i）式分布，则解析解（i）才是正确的。但实际上坝底面与基础相联结，此处应力分布与解（i）不同，因此解析解（i）不适用于接近基础的部分。不过按圣维南原理，基础的影响是局部性的，离基础较远处，这种影响可以略去。但如果坝底宽度与坝高度相当，则这种影响不可忽视。

若选取应力函数 $U(x_1, x_2)$ 为六次多项式，则可以求出矩形截面水坝（如下图）中的应力，其应力解为：

$$\begin{cases} \sigma_{11} = -\frac{\gamma}{2}x_2 + \gamma x_2 \left( \frac{3x_1}{4C} - \frac{x_1^3}{4C^3} \right) \\ \sigma_{22} = -\frac{\gamma x_1 x_2^3}{4C^3} + \frac{\gamma}{4C^3} \left( 2x_1^3 x_2 - \frac{6}{5}C^2 x_1 x_2 \right) - f x_2 \\ \sigma_{12} = \frac{3\gamma x_2^2}{8C^3} (C^2 - x_1^2) - \frac{\gamma}{8C^3} (C^4 - x_1^4) + \frac{3\gamma}{20C} (C^2 - x_1^2) \end{cases}$$



上述解析解满足坝体两侧面（即 $x_1 = -C$ 和 $x_1 = C$ ）上的边界条件。在坝顶面（ $x_2 = 0$ 、自由面）上，满足 $\sigma_{22} = 0$ 的条件，但不满足 $\sigma_{12} = 0$ ，剪应力在坝顶面为：

$$\sigma_{12} = -\frac{\gamma}{8C^3} (C^4 - x_1^4) + \frac{3\gamma}{20C} (C^2 - x_1^2)$$

但这应力很小，按局部影响原理（圣维南原理）其影响是局部性的。

#### <VIII> 直角坐标系下的平面问题（傅里叶级数形式的 Airy 函数）

当边界面上受力比较复杂，甚至不是连续分布的情况时，用傅里叶级数表示的应力函数可解决这一难题。

先考察正弦函数形式的应力函数：

$$U(x_1, x_2) = (\sin \alpha x_1) f(x_2) \quad \dots (1)$$

其中 $\alpha$ 为任意函数， $f(x_2)$ 是 $x_2$ 的任意函数。将（1）代入应力协调方程，得：

$$\sin \alpha x_1 \left[ \frac{d^4 f(x_2)}{dx_2^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 f(x_2)}{dx_2^2} + \alpha^4 f(x_2) \right] = 0$$

对任意的函数 $f(x_2)$ ，上式均要成立的条件是：

$$\frac{d^4 f(x_2)}{dx_2^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 f(x_2)}{dx_2^2} + \alpha^4 f(x_2) = 0$$

这是一个常系数线性微分方程，其通解为：

$$f(x_2) = Ach\alpha x_2 + Bsh\alpha x_2 + Cx_2ch\alpha x_2 + Dx_2sh\alpha x_2$$

其中 A、B、C、D 是积分常数。把上式代入 (1) 式得：

$$U(x_1, x_2) = \sin \alpha x_1 (Ach\alpha x_2 + Bsh\alpha x_2 + Cx_2ch\alpha x_2 + Dx_2sh\alpha x_2) \quad \dots (2)$$

再考察余弦函数形式的应力函数：

$$U(x_1, x_2) = (\cos \alpha' x_1) f'(x_2) \quad \dots (3)$$

同样可得解为：

$$U(x_1, x_2) = \cos \alpha' x_1 (A'ch\alpha' x_2 + B'sh\alpha' x_2 + C'x_2ch\alpha' x_2 + D'x_2sh\alpha' x_2) \quad \dots (4)$$

其中  $A', B', C', D'$  也是积分常数。

因  $\alpha$  和  $\alpha'$  取各种不同的值  $\alpha_m$  和  $\alpha'_m$  时，(3) 和 (4) 式都是应力协调方程  $\nabla^4 U = 0$  的解，所以它们的线性组合亦是应力协调方程的解，即有：

$$U(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} [\sin \alpha_m x_1 (A_m ch\alpha_m x_2 + B_m sh\alpha_m x_2 + C_m x_2 ch\alpha_m x_2 + D_m x_2 sh\alpha_m x_2) + \cos \alpha'_m x_1 (A'_m ch\alpha'_m x_2 + B'_m sh\alpha'_m x_2 + C'_m x_2 ch\alpha'_m x_2 + D'_m x_2 sh\alpha'_m x_2)] \quad \dots (6-4-30)$$

当然，还可以迭加其他应力函数，比如多项式应力函数。可见，有许多应力函数可供凑合去满足边界条件。

用 (6-4-30) 式相应的平面问题的应力解为：

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = & \sum_{m=1}^{\infty} \sin \alpha_m x_1 [A_m \alpha_m^2 ch\alpha_m x_2 + B_m \alpha_m^2 sh\alpha_m x_2 \\ & + C_m \alpha_m (2ch\alpha_m x_2 + \alpha_m x_2 ch\alpha_m x_2) + D_m \alpha_m (2sh\alpha_m x_2 + \alpha_m x_2 sh\alpha_m x_2)] \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \cos \alpha'_m x_1 [A'_m \alpha_m'^2 ch\alpha'_m x_2 + B'_m \alpha_m'^2 sh\alpha'_m x_2 \\ & + C'_m \alpha'_m (2ch\alpha'_m x_2 + \alpha'_m x_2 ch\alpha'_m x_2) + D'_m \alpha'_m (2sh\alpha'_m x_2 + \alpha'_m x_2 sh\alpha'_m x_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} &= \sum_{m=1}^{\infty} [-\alpha_m^2 \sin \alpha_m x_1 (A_m \operatorname{ch} \alpha_m x_2 + B_m \operatorname{sh} \alpha_m x_2 + C_m x_2 \operatorname{ch} \alpha_m x_2 + D_m x_2 \operatorname{sh} \alpha_m x_2)] \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} [-\alpha_m'^2 \cos \alpha_m' x_1 (A_m' \operatorname{ch} \alpha_m' x_2 + B_m' \operatorname{sh} \alpha_m' x_2 + C_m' x_2 \operatorname{ch} \alpha_m' x_2 \\ &\quad + D_m' x_2 \operatorname{sh} \alpha_m' x_2)] \\ \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} &= \sum_{m=1}^{\infty} \{-\alpha_m \cos \alpha_m x_1 [A_m \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m x_2 + B_m \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m x_2 \\ &\quad + C_m (\operatorname{ch} \alpha_m x_2 + \alpha_m x_2 \operatorname{sh} \alpha_m x_2) + D_m (\operatorname{sh} \alpha_m x_2 + \alpha_m x_2 \operatorname{ch} \alpha_m x_2)]\} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \{\alpha_m' \sin \alpha_m' x_1 [A_m' \alpha_m' \operatorname{sh} \alpha_m' x_2 + B_m' \alpha_m' \operatorname{ch} \alpha_m' x_2 \\ &\quad + C_m' (\operatorname{ch} \alpha_m' x_2 + \alpha_m' x_2 \operatorname{sh} \alpha_m' x_2) + D_m' (\operatorname{sh} \alpha_m' x_2 + \alpha_m' x_2 \operatorname{ch} \alpha_m' x_2)]\} \\ &\quad \dots (6-4-31)\end{aligned}$$

(6-4-31) 式表示的应力分量既满足平衡方程, 又满足应力协调方程, 是用三角级数表示的形式解。其中  $A_m$ 、 $B_m$ 、 $C_m$ 、 $D_m$  和  $A_m'$ 、 $B_m'$ 、 $C_m'$ 、 $D_m'$  是待定常数。

讨论:

(1) 为了应用边界条件, 我们可将不连续分布的边界面上的面力载荷函数也展开为三角级数。若载荷在区间上是偶函数, 则载荷函数可展开为只有余弦值的三角级数。若载荷在区间上是奇函数, 则可将载荷函数展开为只有正弦项的三角级数。然后, 利用三角级数的正交性将载荷函数与应力解级数在边界上作对比, 以便确定一系列级数。

(2) 级数解原则上有无穷多项 (即  $m \rightarrow \infty$ ), 但一般情况下三角级数的收敛性较好, 所以只需要取前几项就足够精确了。

(3) 通常, 三角级数解法只适用于狭长条形的矩形梁。如下图所示的狭长条形矩形梁 ( $l \gg h$ ), 长边上受有任意分布的垂直载荷  $q_1(x_1)$  和  $q_2(x_1)$ , 短边上受有正应力  $Q_1$ , 剪应力  $Q_2$ , 以及弯矩  $M_1$  和  $M_2$ 。对此类问题应用三角级数解法的具体做法是让长边上的边界条件精确得到满足, 而短边上的边界条件可以利用圣维南原理, 使外力生成的合力、合力矩和应力解产生的合力、合力矩相等即可。因为是狭长条 ( $l \gg h$ ), 所以我们可以这样处理。

边界条件可以写成:

$$\begin{aligned}x_1 = h \text{ 时, } \sigma_{22} &= q_1(x_1), \quad \sigma_{21} = 0 \\ x_2 = 0 \text{ 时, } \sigma_{22} &= q_2(x_1), \quad \sigma_{21} = 0\end{aligned}$$

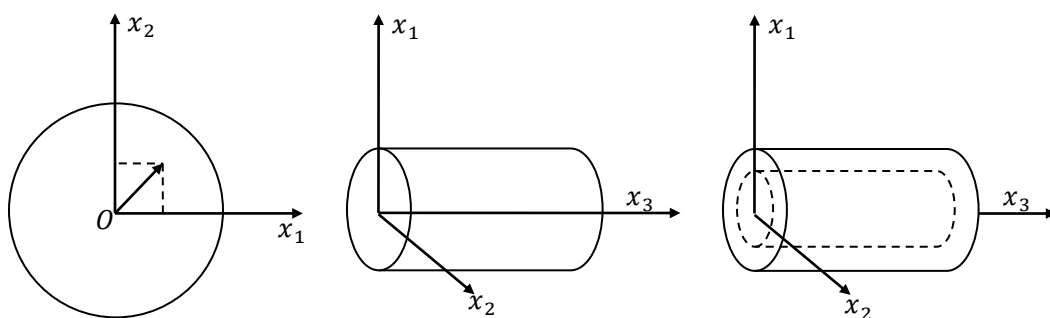
即: 长边上的边界条件要求严格满足

$$\begin{aligned}x_1 = 0 \text{ 时, } \int_0^h \sigma_{11} dx_2 &= N, \quad \int_0^h \sigma_{12} x_2 = Q_1, \quad \int_0^h \sigma_{11} (x_2 - \frac{h}{2}) dx_2 = -M_1 \\ x_1 = l \text{ 时, } \int_0^h \sigma_{11} dx_2 &= N, \quad \int_0^h \sigma_{12} x_2 = Q_2, \quad \int_0^h \sigma_{11} (x_2 - \frac{h}{2}) dx_2 = -M_2\end{aligned}$$

即: 短边上满足圣维南条件。

#### <IX> 极坐标下的平面问题的基本公式

对于边界形状关于坐标原点对称的平面问题, 用极坐标求解就简单多了。典型的例子是圆盘、圆柱和圆管等, 如下图所示:



我们知道极坐标 $(r, \theta)$ 与直角坐标 $(x_1, x_2)$ 的关系为:

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta$$

$$\text{或 } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1}$$

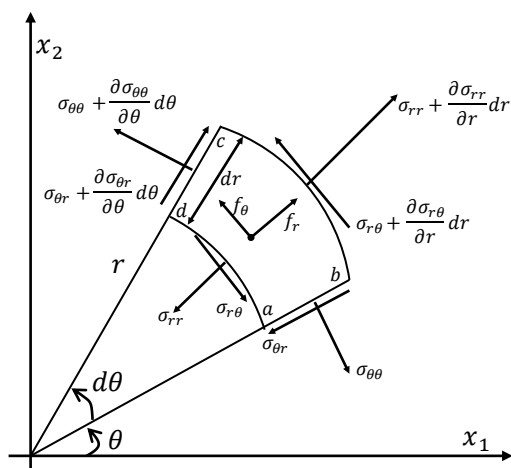
<1>平衡方程

在物体中取如图所示的扇形微元 ( $x_3$ 方向为单位厚度) abcd, 其中心角为 $d\theta$ , 内半径为 $r$ , 外半径为 $r + dr$ . 各边长为:

$$ab = cd = dr$$

$$ad = rd\theta$$

$$bc = (r + dr)d\theta$$



图中所有应力分量均为正, 与直角坐标中应力分量的符号规定相同。

考虑到 $d\theta$ 很小 (扇形微元), 则有:

$$\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \doteq \frac{d\theta}{2}, \quad \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) \doteq 1$$

将图中所示应力乘上其作用的微分面积, 再分别投影到 $r$ 和 $\theta$ 方向上, 考虑平衡时这些



力与体力分量的合力等于零，得：

在 $r$ 方向：

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_{rr} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} dr \right) (r + dr) \cdot d\theta \cdot 1 - \sigma_{rr} \cdot r \cdot d\theta \cdot 1 - \left( \sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) \cdot dr \cdot 1 \cdot \sin \left( \frac{d\theta}{2} \right) \\ & - \sigma_{\theta\theta} \cdot dr \cdot 1 \cdot \sin \left( \frac{d\theta}{2} \right) + \left( \sigma_{r\theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) \cdot dr \cdot 1 \cdot \cos \left( \frac{d\theta}{2} \right) - \sigma_{r\theta} \cdot dr \cdot 1 \cdot \cos \left( \frac{d\theta}{2} \right) \\ & + f_r \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

在 $\theta$ 方向：

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) \cdot dr \cdot 1 \cdot \cos \left( \frac{d\theta}{2} \right) - \sigma_{\theta\theta} \cdot dr \cdot 1 \cdot \cos \left( \frac{d\theta}{2} \right) \\ & + \left( \sigma_{r\theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} dr \right) (r + dr) \cdot d\theta \cdot 1 - \sigma_{r\theta} \cdot r \cdot d\theta \cdot 1 + \left( \sigma_{\theta r} + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta \right) \cdot dr \cdot 1 \cdot \sin \left( \frac{d\theta}{2} \right) \\ & + \sigma_{\theta r} \cdot dr \cdot 1 \cdot \sin \left( \frac{d\theta}{2} \right) + f_\theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

其中， $f_r$ 和 $f_\theta$ 是扇形微元体所受的单位体积的体力分别在 $\vec{e}_r$ 和 $\vec{e}_\theta$ 两个方向的分量。注意到 $\sin(\frac{d\theta}{2}) \doteq \frac{d\theta}{2}$ 、 $\cos(\frac{d\theta}{2}) \doteq 1$ ，并略去三级小量 $drdrd\theta$ 和 $d\theta d\theta dr$ ，则得极坐标下平面问题的平衡方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + f_\theta = 0 \end{cases}$$

•••• (6-4-32) •••• (1)

<2>应变与位移关系（详细推导见尹祥础固体力学 P145-147）

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{2r} \end{cases}$$

•••• (6-4-33) •••• (2)

<3>应力协调方程

引人 Airy 应力函数 $U(r, \theta)$ ，则满足平衡方程（6-4-32）的应力形式解为：

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + V \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + V \\ \sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \end{cases}$$

..... (6-4-34) ..... (3)

其中 $V$ 是体积力 $\vec{f}$ 的势函数, 即 (由极坐标下标量的梯度表达式 $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$ ):

$$f_r = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad f_\theta = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

..... (6-4-35) ..... (4)

若体积力场 $\vec{f}$ 是保守力场, 则有:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0$$

..... (6-4-36) ..... (5)

将 $\sigma_{rr}$ 、 $\sigma_{\theta\theta}$ 代入应力协调方程 $\nabla^2(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = 0$ , 有:

$$\begin{aligned} \nabla^2(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) &= \nabla^2 \left[ \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + V \right) + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + V \right) \right] \\ &= \nabla^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right) + 2\nabla^2 V = 0 \end{aligned}$$

即: (注意极坐标下拉式算符为:  $\nabla^2 = (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2})$ )

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right) = \nabla^2 \nabla^2 U = \nabla^4 U = 0$$

..... (6-4-37) ..... (6)

(6-4-37) 就是用 Airy 应力函数 $U(r, \theta)$ 表示的应力协调方程。

#### 【附注】

由:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{rr} \cos^2 \theta + \sigma_{\theta\theta} \sin^2 \theta - 2\sigma_{r\theta} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_{22} &= \sigma_{rr} \sin^2 \theta + \sigma_{\theta\theta} \cos^2 \theta + 2\sigma_{r\theta} \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

所以:

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0 \Rightarrow \nabla^2(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = 0$$

这表明直角坐标下的应力协调方程与极坐标下的应力协调方程形式完全相同。

<4>应力应变关系 (与直角坐标系中的形式类似)

平面应力情况:

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{1}{E} (\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}) \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}) \\ \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{r\theta} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{r\theta} \end{cases}$$

..... (6-4-38) ..... (7)

平面应变情况:

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{1}{E'} (\sigma_{rr} - \nu' \sigma_{\theta\theta}) \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E'} (\sigma_{\theta\theta} - \nu' \sigma_{rr}) \\ \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{r\theta} = \frac{1+\nu'}{E'} \sigma_{r\theta} \end{cases} \quad \dots (6-4-39) \dots (8)$$

其中,  $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ ,  $\nu' = \frac{\nu}{1-\nu}$

#### <X> 应力与极角无关的平面问题 (轴对称的平面问题)

若应力函数  $U$  与极角  $\theta$  无关, 即  $U = U(r)$ , 则相应的应力分量与应变分量亦与  $\theta$  无关, 这种问题称为轴对称或圆对称问题。又因  $\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)$ , 而  $U = U(r)$ , 所以圆对称问题的剪切应力分量  $\sigma_{r\theta} = 0$ 。对圆对称问题, 应力协调方程简化为:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) U = 0 \quad \dots (6-4-40) \dots (9)$$

展开上式得:

$$\frac{d^4 U}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 U}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dU}{dr} = 0 \quad \dots (6-4-41) \dots (10)$$

这是一个变系数常微分方程, 做变换令  $r = e^t$ , 则  $t = \ln r$  代入上式, 则可将 (6-4-41) 化为常系数常微分方程, 即有:

$$\frac{d^4 U}{dt^4} - 4 \frac{d^3 U}{dt^3} + 4 \frac{d^2 U}{dt^2} = 0 \quad \dots (6-4-42) \dots (11)$$

这个方程的通解为:

$$U = C_1 + C_2 t + C_3 e^{2t} + C_4 t e^{2t} \quad \dots (6-4-43) \dots (12)$$

做反变换得:

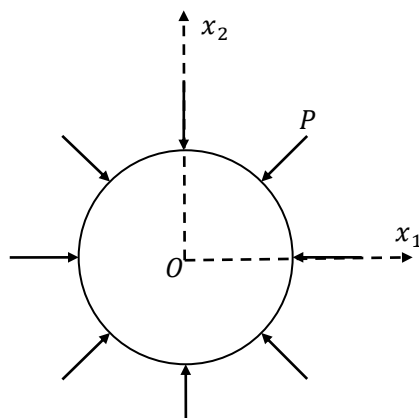
$$U(r) = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D \quad \dots (6-4-44) \dots (13)$$

相应的应力解为:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} = \frac{A}{r^2} + B(2 \ln r + 1) + 2C \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{d^2 U}{dr^2} = -\frac{A}{r^2} + B(2 \ln r + 3) + 2C \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = 0 \end{cases} \quad \dots (6-4-45) \dots (14)$$

分析这组应力解可见：如坐标原点无孔时（即 $r$ 可取零），则常数 $A$ 和 $B$ 必须等于零，否则当 $r \rightarrow 0$ 时， $\sigma_{rr}$ 、 $\sigma_{\theta\theta}$ 将 $\rightarrow \infty$ ，则不符合物理性。因此，当坐标原点无孔时，且无体力时，唯一可能的应力状态是 $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 2C$ ，即为各向均匀拉伸( $C > 0$ )或压缩( $C < 0$ )状态。

例 1：一半径为 $R$ 的圆盘（或圆柱），周边受均匀压应力 $P$ 的作用（如图）。求体内的应力分布。



解：这显然是一个圆对称问题，因形状和载荷都是轴对称的，所以其应力解就是(6-4-45)式当 $A$ 、 $B$ 等于零的情形（因 $r \rightarrow 0$ 时，应力应该为有限值）。

即： $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 2C$

由边界条件： $r = R$ 时， $\sigma_{rr} = -P$ ，可得： $C = -\frac{P}{2}$ 。

所以整个物体内的应力状态为一均匀应力状态，即：

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sigma_{\theta\theta} = -P \\ \sigma_{r\theta} &= \sigma_{\theta r} = 0\end{aligned}$$

在岩石力学实验中，高压容器内的岩石样品受围压 $P$ 的情况下，样品的受力状态就是这个结果（注：圆柱体岩石样品竖直放在容器里，实际不是真正的平面问题，因其在圆柱体轴向受有重力，但重力与围压 $P$ 相比很小，可以忽略，即可近似视其为平面问题）。

受围压 $P$ 的岩石力学实验是所谓假三轴实验，即： $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} \neq \sigma_{zz}$ 。真三轴实验指的是 $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$ 。

例 2：厚壁筒问题——拉梅问题。如图所示的厚壁筒其内半径为 $a$ ，外半径为 $b$ ，内壁受均布压力 $P_1$ ，外壁受均布压力 $P_2$ ，求体内应力分布。

解：这也是一个应力与极角 $\theta$ 无关的圆对称问题，其 Airy 应力函数与极角 $\theta$ 无关，即：

$$\begin{cases} U(r) = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D \\ \sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} = \frac{A}{r^2} + B(2 \ln r + 1) + 2C \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{d^2 U}{dr^2} = -\frac{A}{r^2} + B(2 \ln r + 3) + 2C \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{d^2 U}{dr^2} = -\frac{A}{r^2} + B(2 \ln r + 3) + 2C \end{cases}$$

.... (a)

边界条件为:

$$\begin{cases} r = a \text{ 时, } \sigma_{rr} = -P_1, \sigma_{r\theta} = 0 \\ r = b \text{ 时, } \sigma_{rr} = -P_2, \sigma_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

.... (b)

将边界条件代入应力解表达式 (a) 得:

$$\begin{cases} -P_1 = \frac{A}{a^2} + B(1 + 2\ln a) + 2C \\ -P_2 = \frac{A}{b^2} + B(1 + 2\ln b) + 2C \end{cases}$$

.... (c)

(c) 式中只有两个方程, 不能决定  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三个常数。为确定所有积分常数, 必须进一步研究厚壁筒的变形情况。我们现在已经有了应力解, 则由本构关系可得到应变场, 再根据几何关系, 对应变分量做积分运算就可得到位移场。

首先, 由本构关系有:

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{1}{E}(\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}) = \frac{1}{E}\left[\frac{1+\nu}{r^2}A + 2(1-\nu)B\ln r + (1-3\nu)B + 2(1-\nu)C\right] \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}) = \frac{1}{E}\left[-\frac{1}{r^2}(1+\nu)A + 2(1-\nu)B\ln r + (3-\nu)B + 2(1-\nu)C\right] \\ \varepsilon_{r\theta} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

.... (d)

由 (d) 式可见, 应变分量也与  $\theta$  无关, 即是轴对称的。

再由几何关系 (6-4-33) 式有:

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{E}\left[\frac{1+\nu}{r^2}A + 2(1-\nu)B\ln r + (1-3\nu)B + 2(1-\nu)C\right] \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} = \frac{1}{E}\left[-\frac{1}{r^2}(1+\nu)A + 2(1-\nu)B\ln r + (3-\nu)B + 2(1-\nu)C\right] \\ \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right) = 0 \end{cases}$$

.... (e)

由 (e) 式可见, 位移分量  $u_r$  和  $u_\theta$  在几个方程中相互耦合, 只有 (e) 式中的第一式比较简单。积分 (e) 式中的第一式, 得:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{E}\left[-\frac{(1+\nu)}{r}A + 2(1-\nu)Br \ln r - 2B(1-\nu)r + (1-3\nu)Br + 2(1-\nu)Cr\right] + f(\theta) \\ &= \frac{1}{E}\left[-\frac{(1+\nu)}{r}A + 2(1-\nu)Br \ln r - (1+\nu)Br + 2(1-\nu)Cr\right] + f(\theta) \end{aligned}$$

.... (f)

其中  $f(\theta)$  是积分任意函数, 将  $u_r$  代入 (e) 中的第二式, 得:

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{4B}{E} r - f(\theta)$$

.... (g)

对 $\theta$ 积分得:

$$u_\theta = \frac{4B}{E} r\theta - \int f(\theta) d\theta + f_1(r)$$

.... (h)

其中 $f_1(r)$ 是积分任意函数。再将 (f)、(h) 代入 (e) 中的第三式, 得:

$$\frac{1}{r} \frac{df(\theta)}{d\theta} + \frac{1}{r} \int f(\theta) d\theta + \frac{df_1(r)}{dr} - \frac{1}{r} f_1(r) = 0$$

亦即:

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} + \int f(\theta) d\theta = f_1(r) - r \frac{df_1(r)}{dr}$$

.... (i)

上式是分离变量式, 其左边是独立变量 $\theta$ 的函数, 右边是独立变量 $r$ 的函数, 要此式成立, 唯有等式两边同等于一个常数 $D$ , 即有:

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} + \int f(\theta) d\theta = D$$

.... (j)

$$f_1(r) - r \frac{df_1(r)}{dr} = D$$

.... (k)

对 (j) 式求 $\frac{d}{d\theta}$ 得:

$$\frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2} + f(\theta) = 0$$

.... (l)

解 (k)、(l) 两个方程, 得:

$$f_1(r) = Fr + D$$

.... (m)

$$f(\theta) = H \cos \theta + K \sin \theta$$

.... (n)

再对 (n) 式积分得:

$$\int f(\theta) d\theta = -H \sin \theta + K \cos \theta$$

.... (o)

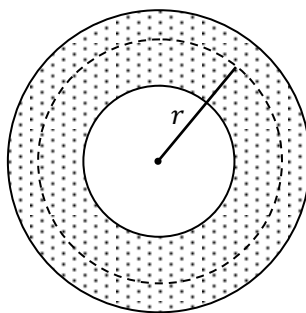
将式 (m)、(n)、(o) 代入式 (f)、(h) 得：

$$u_r = \frac{1}{E} \left[ -\frac{(1+\nu)}{r} A + 2(1-\nu)Br \ln r - (1+\nu)Br + 2(1-\nu)Cr \right] + H \cos \theta + K \sin \theta$$

$$u_\theta = \frac{4B}{E} r \theta + Fr + H \cos \theta - K \sin \theta$$

.... (p)

(p) 式就是应力与极角无关时的平面问题的位移解。其中： $F$ 、 $H$ 、 $K$ 是从偏导数 $\frac{\partial u_r}{\partial r}$ 和 $\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$ 求积分得出 $u_r$ 和 $u_\theta$ 时引进的积分任意常数，这些常数将由问题的约束条件来确定。 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 这些积分常数是原先应力解中的待定常数，要由边界条件来确定。



注意到 $u_\theta$ 的表达式中有 $\frac{4B}{E}r\theta$ 项，当 $r$ 不变，而 $\theta$ 每增加 $2\pi$ （即绕一圈又回到同一点时，如上图）， $u_\theta$ 将不变，即当变形变定后，亦即平衡时，物体上同一点不可能有不同的位移，所以必须要求 $B = 0$ （物理要求）。于是由(c)式可得厚壁筒问题的两个积分常数为：

$$\begin{cases} A = \frac{a^2 b^2 (P_2 - P_1)}{b^2 - a^2} \\ 2C = \frac{P_1 a^2 - P_2 b^2}{b^2 - a^2} \end{cases}$$

.... (q)

对于厚壁筒问题，由于轴对称性，所以位移与 $\theta$ 无关，因此有：

$$H = K = 0$$

在 (p) 式中， $F \cdot r$ 项代表刚性转动位移，可令 $F = 0$ （即不发生转动），则得厚壁筒问题的位移表达式为：

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{E(b^2 - a^2)} \left[ (1-\nu)(P_1 a^2 - P_2 b^2)r - (1+\nu)a^2 b^2 (P_2 - P_1) \cdot \frac{1}{r} \right] \\ u_\theta = 0 \end{cases}$$

.... (r)

上面的位移公式是按平面应力条件推导的，对于平面应变情况，只需将

$$E \rightarrow E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$$

$$\nu \rightarrow \nu' = \frac{\nu}{1 - \nu}$$

即可。

将积分常数 $A$ 、 $C$ 代入应力表达式，的厚壁筒内应力分布为：

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{a^2 b^2 (P_2 - P_1)}{r^2 (b^2 - a^2)} + \frac{P_1 a^2 - P_2 b^2}{b^2 - a^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = -\frac{a^2 b^2 (P_2 - P_1)}{r^2 (b^2 - a^2)} + \frac{P_1 a^2 - P_2 b^2}{b^2 - a^2} \\ \sigma_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

.... (s)

很容易看出：

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 2 \frac{P_1 a^2 - P_2 b^2}{b^2 - a^2} = \text{const}$$

进而由：

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$$

可知，由径向和切向正应力 $\sigma_{rr}$ 和 $\sigma_{\theta\theta}$ 产生的在厚壁筒轴向的伸长是均匀，即圆筒截面在变形后仍维持平面。这和平面应力或平面应变问题的假设是一致的。（摘自钱伟长、叶开源书 P231）。

当 $P_2 = 0$ 时，厚壁筒受内壁面压力 $P_1$ 作用所产生的应力为：

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{a^2 P_1}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{a^2 P_1}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \end{cases}$$

.... (t)

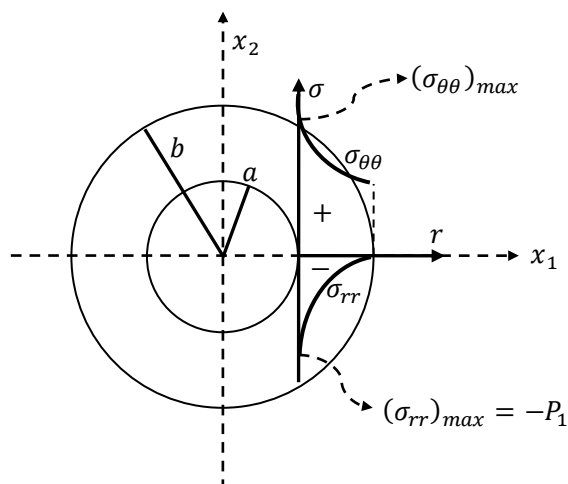
由上式显而易见： $\sigma_{rr} \leq 0, \sigma_{\theta\theta} > 0$ ，即 $\sigma_{rr}$ 是压应力， $\sigma_{\theta\theta}$ 是拉应力。压、拉应力的极大值均产生在内壁面，即在 $r = a$ 处：

$$\begin{cases} (\sigma_{rr})_{\max} = -P_1 \\ (\sigma_{\theta\theta})_{\max} = \frac{P_1 (a^2 + b^2)}{b^2 - a^2} = \frac{P_1 \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right)}{1 - \frac{a^2}{b^2}} \end{cases}$$

.... (u)

由 (t) 式表示的应力分布如下图所示。





由图可见：

当内压  $P_1$  较高时，在内壁处受到很大的压应力  $(\sigma_{rr})_{max} = -P_1$ ，环向受到更大的拉应力  $(\sigma_{\theta\theta})_{max} > |P_1|$ ；因而，其最大剪应力值：

$$\tau_{max} = \left| \pm \frac{1}{2}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \right|_{max} = \frac{P_1}{1 - \frac{a^2}{b^2}}$$

也很大。因而，在内壁处很容易产生塑性变形，甚至进一步发生剪切破坏。究其原因是因为  $P_2 = 0$  所致。所以，要减轻这种现象，可通过减少  $(\sigma_{\theta\theta})_{max}$  的值来实现。实际中，工程技术人员常采用加长套筒的办法，以便产生较大的外壁面压力  $P_2$  来达到减小  $(\sigma_{\theta\theta})_{max}$  值的目的。

特别，当  $P_2 = 0, b \rightarrow \infty$  时，即得无限大平板中有半径为  $a$  的圆孔问题的解为：

应力解：

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -\frac{a^2 P_1}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{a^2 P_1}{r^2} \\ \sigma_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

•••• (v)

位移解：

$$\begin{cases} u_r = \frac{P_1 a^2}{2\mu r} \\ u_\theta = 0 \end{cases}$$

•••• (w)

这正是我们在讨论克拉贝龙原理时，举例引用的结果！

### <XI> 极坐标系下的平面问题的通解

用分离变量法可解出应力协调方程  $\nabla^4 U = 0$  的通解为：

$$\begin{aligned}
 U = & A_1 r^2 + A_2 r^2 \ln r + A_3 \ln r + A_4 \\
 & + (B_1 r^2 + B_2 r^2 \ln r + B_3 \ln r + B_4) \theta \\
 & + \left( C_1 r^3 + C_2 \frac{1}{r} + C_3 r \ln r + C_4 r \right) \cos \theta \\
 & + \left( D_1 r^3 + D_2 \frac{1}{r} + D_3 r \ln r + D_4 r \right) \sin \theta \\
 & + (E_1 r + E_2 r \ln r) \theta \cos \theta + (F_1 r + F_2 r \ln r) \theta \sin \theta \\
 & + \sum_{m=2}^n (G_1 r^{m+2} + G_2 r^m + G_3 r^{-m+2} + G_4 r^{-m}) \cos m \theta \\
 & + \sum_{m=2}^n (H_1 r^{m+2} + H_2 r^m + H_3 r^{-m+2} + H_4 r^{-m}) \sin m \theta
 \end{aligned}$$

•••• (6-4-46)

由(6-4-34)可得相应的应力解

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + V \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + V \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right.$$

适当地选择  $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, G_i, H_i (i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2)$  可得特定问题的应力函数  $U(r, \theta)$ 。

例如:

①对部分圆环纯弯曲问题, 可选通解中除  $A_1, A_2, A_3, A_4$  外, 其余系数均为零的应力函数。(参阅尹书 P157~158)

②对厚壁筒问题, 可选通解中除  $A_1, A_3, A_4$  外, 其余系数均为零的应力函数。(由位移解的单值性, 要求  $A_2 = 0$ )

③对圆孔问题, 可选通解中除  $G_1, G_2, G_3, G_4$  外, 其余系数均为零, 且  $m=2$  的应力函数。(参阅钱伟长、叶开源《弹性力学》P236~239)

有了通解, 更有利于我们对具体问题作物理分析后去猜解。

弹性力学平面问题的复变函数解法, 以及空间问题, 因课时所限, 略去不讲。感兴趣的同学可参阅有关教科书。