АиСД_дз9

CovarianceMomentum

1term

1

Храним массивы:

- arr$[n]$, собственно, наша последовательность.
- lastPosition$[n]$, для которого lastPosition$[i]$ это индекс последнего вхождения элемента i в последовательность. Изначально все его члены равны -1;
- seq$[n]$, который будет пересчитываться динамически. В элементе seq$[i]$ хранится количество последовательностей, заканчивающихся в этом элементе.
- pref$[n]$, который будет пересчитываться динамически. В элементе pref$[i]$ хранится $\sum\limits_{k=0}^{i} seq[k]$.

Опишем пересчёт динамики при переходе $i \to i + 1$. Посмотрим, что лежит в lastPosition$\left[\text{arr}[j+1] - 1\right]$:

- Если там -1, значит, такое число никогда ещё не встречалось, следовательно, к любой из существующих последовательностей можно дописать его в конец, а также взять его само как отдельную последовательность из одного символа — присваиваем seq$[j + 1]$ значение pref$[j] + 1$.
- Если там индекс k, значит, такое число уже встречалось, следовательно, ко всем последовательностям, которые мы посчитали ДО его предыдущего вхождения, мы уже приписывали это число. Однако к последовательностям, которые заканчивались в элементах с индексами больше или равными k и меньшими $j+1$, мы не приписывали этого числа. Их количество будет равно pref$[j]-$pref$[k-1]$. Присвоим его seq$[j + 1]$.

После подсчёта seq$[j + 1]$ посчитаем pref$[j + 1] =$ pref$[j] +$ seq$[j + 1]$. Таким образом, переместились в следующее положение динамики. Ответом будет значение в pref$[n - 1]$.

Так как алгоритм делает всего $\mathcal{O}(n)$ шагов, то и арифметических и других действий тоже будет $\mathcal{O}(n)$.

2

Пойдём от противного — предположим, что у a и a^r наибольшая общая подпоследовательность s, не равная по размеру наибольшему подпалиндрому p строки a. Тогда есть два варианта:

- $|s| < |p|$. На самом деле такого быть не может, так как если развернуть p, то он останется самим собой, а значит, будет являться общей подпоследовательностью a и a^r, значит, её длина не меньше $|p|$.
- $|s| > |p|$. Значит, есть какая-то подпоследовательность в a, такая, что она же есть в a^r. хмммммм кажецца мы нашли подпалиндром. А если точнее, то это значит, что существует такие две последовательности индексов $i_1, i_2, \ldots, i_|s|$ и $j_1, j_2, \ldots, j_|s|$, что $\forall k : \ a_{i_k} = a^r_{j_k}$. Тогда рассмотрим минимальное l такое, что $i_{l+1} \geq |a| - j_{l+1} + 1$. Заметим, что если в строке a рассмотреть последовательность с индексами $i_{1,2}, \ldots, i_l, |a| - j_l + 1, |a| - j_{l-1} + 1, \ldots, |a| - j_1 + 1$, то она очевидно будет определять подпалиндром строки a. По аналогичным причинам, последовательность $|a| - j_|s| + 1, |a| = j_{|s|-1}, \ldots, |a| - j_{l+1} + 1, i_{l+1}, i_l, \ldots, i_{|s|}$ тоже определяет подпалиндром. Заметим, что хоть одна из них содержит в себе не меньше $|s|$ членов. А по предыдущей части доказательства их оказывается ровно $|s|$.

3