АиСД_дз1

CovarianceMomentum

1term

1

$$\frac{n^3}{6} - 7n^2 = \Omega(n^3)$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists\, c > 0,\, \exists N > 0,\, \forall n > N: \ \frac{n^3}{6} - 7n^2 \geq c \cdot n^3$$

Подберём нужные значения:

$$\sphericalangle\, c = \frac{1}{12},\ N = 84:$$
$$\frac{n^3}{6} - 7n^2 \geq \frac{1}{12} \cdot n^3$$
$$\Updownarrow n^3 - 84n^2 \geq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$n - 84 \geq 0$$
$$\Updownarrow$$

$n \geq 84$, что верно по выбранной константе.

2

В этой задаче мы будем крайне активно использовать следующую лемму:

Лемма 2.1. $\forall f(n),\, g(n),\, h(n):\ f(n) = \mathcal{O}(g(n)),\, g(n) = \mathcal{O}(h(n)), \Rightarrow\ f(n) = \mathcal{O}(h(n))$

Все стрелочки в нижеприведённом списке кликабельны, по ним переносит на доказательство.

$$1 \longrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2 \longrightarrow n^{\frac{1}{\log n}} \longrightarrow \log\log n \longrightarrow \sqrt{\log n} \longrightarrow \log^2 n \longrightarrow \sqrt{(2)}^{\log n} \longrightarrow 2^{\log n} \longrightarrow n \longrightarrow n\log n \longrightarrow \log n! \longrightarrow$$
$$n^2 \longrightarrow 4^{\log n} \longrightarrow n^3 \longrightarrow (\log n)! \longrightarrow (\log n)^{\log n} \longrightarrow n^{\log\log n} \longrightarrow n\cdot 2^n \longrightarrow \exp^n \longrightarrow n! \longrightarrow (n+1)! \longrightarrow 2^{2^n} \longrightarrow 2^{2^{n+1}}$$

Пояснение 2.2.
$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \geq 1$$

Пояснение 2.3. *Заменим* $n = 2^k$.
$$n^{\frac{1}{\log(n)}} = \left(2^k\right)^{\frac{1}{k}} = 2$$
$$\frac{9}{8}\cdot 2 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Пояснение 2.4.
$$\log(\log(n)) \geq 1$$
$$\textit{Потому как } \lim_{n\to\infty}\log(\log(n)) = \infty.$$

Пояснение 2.5. *Заменим* $n = 2^{2^k}$.
$$\sqrt{\log n} = \sqrt{2^k} \geq \log\log n = k \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 4^k \geq k^2,\ \textit{а это верно.}$$

Пояснение 2.6. *Заменим* $n = 2^k$.
$$\log^2 n = k^2 \geq \sqrt{k} = \sqrt{\log n}$$

Пояснение 2.7. *Заменим* $n = 2^k$.
$$\sqrt{2}^{\log n} = 2^k \geq k^2 = \log^2 n$$

Пояснение 2.8.
$$2^{\log n} = n \geq \sqrt{n} = \sqrt{2}^{\log n}$$

Пояснение 2.9.
$$n = 2^{\log n}$$

Пояснение 2.10.
$$n\log n \geq n,\ \textit{при любом } n \geq 2$$

Пояснение 2.11. *Смотреть задачу 3.*

Пояснение 2.12.
$$n^2 \geq n\log n$$

Пояснение 2.13.
$$4^{\log n} = n^2$$

Пояснение 2.14.
$$n^3 \geq n^2$$

Пояснение 2.15. *Заменим* $n = 2^k$.
$$(\log n)! = k! > 8^k$$

Пояснение 2.16. *Заменим* $n = 2^k$.
$$(\log n)^{\log n} = k^k \geq k! = (\log n)!$$

Пояснение 2.17.
$$n^{\log \log n} = (\log n)^{\log n}$$

Пояснение 2.18. *Заменим* $n = 2^k$.
$$\begin{gathered} 2^k + k \geq k \log k \Leftrightarrow \\ \frac{2^k + k}{k} \geq \log k \Leftrightarrow \\ 2^{\frac{2^k+k}{k}} \geq k \Leftrightarrow \\ 2^k \cdot 2^{2^k} \geq k^k \Leftrightarrow \\ n \cdot 2^n \geq (\log n)^{\log n} \end{gathered}$$

Пояснение 2.19.
$$\begin{gathered} \exp^n \geq n \cdot 2^n \Leftrightarrow \\ \left(\frac{\exp}{2}\right)^n \geq n \end{gathered}$$

А это верно, так как степенная функция с основанием > 1 *больше линейной с какого-то значения* n.

Пояснение 2.20. *Рассмотрим, например, значение* $N = 27 > \exp^3$. *Тогда* $n \forall n \geq N: \ n! = 1 \cdot 2 \cdot (3 \cdot 4 \ldots \cdot 27) \cdot (28 \cdot 29 \cdot \ldots \cdot n) > 1 \cdot 2 \cdot (\exp^{27}) \cdot (\exp^{n-27}) > \exp^n$

Пояснение 2.21. $(n+1)! > n!$

Пояснение 2.22. *Докажем по индукции:*

База: $n = 3: \ 2^{2^3} = 2^8 = 256 > 2 = (2)!$.

Переход: *заметим, что* $\forall n > 3: \ n! > n + 1$. *Таким образом, если верно, что* $2^{2^n} > n!$, *то* $2^{2^{n+1}} = (2^{2^n})^2 > (n!)^2 > (n+1)!$. *Доказано.*

Пояснение 2.23. $2^{2^{n+1}} = (2^{2^n})^2 > 2^{2^n}$

3

$$\log(n!) = \Theta(n\log(n))$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} \log(n!) = \mathcal{O}(n\log(n)) \\ \log(n!) = \Omega(n\log(n)) \end{cases}$$

Докажем оба пункта по отдельности. Для этого сформулируем три леммы:

Лемма 3.1. *Для $n \in \mathbb{N}$ верно, что:*

$$2 \,<\, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \,<\, 4$$

Лемма 3.2. *Так как нам в общем и целом не важно основание логарифма, то можно положить верным следующее утверждение:*

$$\log(a) \,<\, \log(b) \,\Leftrightarrow\, a \,<\, b$$

Лемма 3.3. *Для $n \in \mathbb{N}$ и $c > 0$ верно, что:*

$$c \cdot n\log(n) = \log(n^{c \cdot n})$$

Эти леммы будут использоваться по ходу доказательства без упоминаний.

3.1 $\log(n!) = \mathcal{O}(n\log(n))$

$$\log(n!) = \mathcal{O}(n\ \log(n))$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists\, c > 0,\, \exists N > 0,\, \forall n > N:\ \log(n!) \le c \cdot (n\ \log(n))$$

Докажем, что $c = 1$ и $N = 1$ подходят. По свойству логарифма:

$$\log(n!) = \sum_{j=1}^{n} \log(j)$$

Теперь нам надо доказать, что $\forall\, n > 1$:

$$\log(n!) \le n\log(n)$$
$$\Updownarrow$$
$$\sum_{j=1}^{n} \log(j) \,<\, n\log(n)$$

Что верно.

3.2 $\log(n!) = \Omega(n\log(n))$

$$\log(n!) = \Omega(n\ \log(n))$$
$$\Updownarrow$$

$$\exists\, c > 0,\ \exists N > 0,\ \forall n > N:\ \log(n!) \geq c \cdot (n\,\log(n))$$

Докажем, что $c = \dfrac{1}{2}$ и $N = 2$ подходят. Воспользуемся индукцией.

База: $\vartriangleleft\, n = 3$. При таком значении:

$$\log(n!) = \log(6) \geq \frac{1}{2} \cdot n \log(n) = \log(3^{\frac{3}{2}})$$
$$\Updownarrow$$
$$6 > 3^{\frac{3}{2}}$$
$$\Updownarrow$$
$$36 > 27$$

База доказана.

Переход: Пусть для n утверждение верно:

$$\log(n!)\ \geq\ \frac{1}{2} \cdot n \log(n)$$
$$\Updownarrow$$
$$\log(n!)\ \geq\ \log(n^{\frac{n}{2}})$$
$$\Updownarrow$$
$$(n!)^2\ \geq\ n^n$$
$$\Updownarrow$$
$$(n!)^2 \cdot 4\ \geq\ (n!)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\ \geq\ n^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
$$\Updownarrow$$
$$((n+1)!)^2\ \geq\ 4 \cdot (n!)^2 \cdot (n+1)\ \geq\ (n+1)^n \cdot (n+1)\ =\ (n+1)^{n+1}$$
$$\Updownarrow$$
$$2 \cdot \log((n+1)!)\ \geq\ (n+1) \log(n+1)$$
$$\Updownarrow$$
$$\log((n+1)!)\ \geq\ \frac{1}{2} \cdot (n+1) \log(n+1)$$

Переход доказан.

4

Для начала нарисуем дерево для этой рекурренты:

Несложно заметить, что в j-ой строке ровно 2^j элеементов и каждый из них будет выполняться за $\dfrac{\left(\frac{n}{2^j}\right)}{\log\left(\frac{n}{2^j}\right)}$.

Таким образом, если просуммиовать все времена выполнения элементов, получится следующее значение:

$$\sum_{j=0}^{\log n-1} 2^j \cdot \left(\frac{\left(\frac{n}{2^j}\right)}{\log\left(\frac{n}{2^j}\right)}\right) = \sum_{j=0}^{\log n-1} \frac{n}{\log\left(\frac{n}{2^j}\right)} = \sum_{j=0}^{\log n-1} \frac{n}{\log n - j} = n \cdot \sum_{j=1}^{\log n} \frac{1}{j}$$

Давайте введём вспомогательную функцию $h(n)$, определяемую так:

$$h(n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j}$$

Тогда утверждается, что $T(n) = \theta(n \cdot h(\log n))$.

Доказательство точного равенства при значении из определения $c = 1$ по индукции:

База: начальные значения задаются любыми, так что верна.

Переход: Пусть $T(\frac{n}{2}) = \theta(\frac{n}{2} \cdot h(\log\frac{n}{2})$. Докажем, что $T(n) = \theta(n \cdot h(\log n))$. Положим $n = 2^k$.

$$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{\log n}$$
$$T\left(2^k\right) = 2 \cdot T\left(2^{k-1}\right) + \frac{2^k}{k}$$
$$T\left(2^k\right) = 2 \cdot 2^{k-1} \cdot h(k-1) + \left(2^k \cdot (h(k) - h(k-1))\right)$$
$$T\left(2^k\right) = 2^k \cdot h(k)$$
$$T(n) = n \cdot h(\log n)$$

Победа.

На самом деле можно приблизить функцию $h(n)$ функцией $\log n$, то есть доказать, что $h(n) = \theta(\log n)$. Будем доказывать по индукции, что при $c_1 = \frac{1}{3}$ и $c_2 = 2$ верно, что $c_1 \cdot \log n \leq h(n) \leq c_2 \cdot \log n$.

База: $\frac{1}{3} \cdot \log 2 = \frac{1}{3} \leq 1 + \frac{1}{2} \leq 2 = 2 \cdot \log 2$.

Переход: Пусть для n уже верно, что $c_1 \cdot \log n \leq h(n) \leq c_2 \cdot \log n$. Докажем это утверждение для $n+1$:

$$c_1 \cdot \log(n+1) \;\le\; h(n+1) \;\le\; c_2 \cdot \log(n+1)$$

$$\Updownarrow$$

$$c_1 \cdot \log(n+1) - c_1 \cdot \log(n) \;\le\; \frac{1}{n+1} \;\le\; c_2 \cdot \log(n+1) - c_2 \cdot \log(n)$$

$$\Updownarrow$$

$$c_1 \cdot \left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \;\le\; 1 \;\le\; c_2 \cdot \left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

Воспользуемся леммой из задачи 3:

$$c_1 \cdot \left(\log 4 + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \;\le\; 1 \;\le\; c_2 \cdot \left(\log 2 + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$c_1 \cdot (\log 4 + \log 2) \;\le\; 1 \;\le\; c_2 \cdot (\log 2 + \log 1)$$

$$\Updownarrow$$

$$c_1 \cdot 3 \;\le\; 1 \;\le\; c_2 \cdot 1$$

Что верно при $c_1 = \dfrac{1}{3}$; $c_2 = 2$. Переход доказан.

Таким образом, имеем:

$$\begin{cases} T(n) = n \cdot h(\log n) \\ h(n) = \theta(\log n) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad T(n) = \theta(n \log\log n)$$

5

5.1 Первый алгоритм

Будем считать одним входным значением алгоритма половину максимальную длину аргумента.

Тогда довольно несложно заметить, что рекуррентную ассимптотику работы алгоритма можно оценить как $T(n) \leq 4T(\frac{n}{2}) + 13n$.

По мастер-теореме, так как $1 < \log_2 4$, то $T(n) = \mathcal{O}(n^2)$.

5.2 Второй алгоритм

Будем считать одним входным значением алгоритма половину максимальную длину аргумента.

Тогда довольно несложно заметить, что рекуррентную ассимптотику работы алгоритма можно оценить как $T(n) \leq 3T(\frac{n}{2}) + 13n$.

По мастер-теореме, так как $1 < \log_2 3$, то $T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_2 3})$.