Дифференциальные уравнения

Коченюк Анатолий

2 декабря 2021 г.

Связь по: mvbabushkin@itmo.ru — просьба писать именно на почту 30 — экзамен 70 — практика (будет уточняться)

Литературу пришлю

0.1 Введение

0.1.1 Уравнения первого порядка

Допустим, y — неизвестная величина. Заметим, что это не просто число, а некоторая зависимость (например, температура, зависящая от времени), то есть это некоторая искомая функция. Ну, и часто непосредственно, нам не написать чему она равна; явно эту функцию просто так не напишешь, но можно написать некую взаимосвязь между этой функцией и переменной, возможно еще и производной и т.п.

Определение 1. Такая взаимосвязь называется **дифференциальным уравнением**.

Пример. Допустим, у нас есть кролики, заведем таблицу и будем считать кроликов каждый день.

Предположем, мы смотрели на эксперемент и обнаружили такую зависимость: Прирост примерно пропорционален текущему клличеству и времени замерки.

$$y_{k+1} - y_k \approx \alpha y_k(t_{k+1} - t_k)$$

Так же заметим, что если узмельчатьь шаг времени, то зависимость будет все более и более точная.

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{t_{k+1} - t_k} = \alpha y_k$$

Тогда слева производная.

$$y'(t) = \alpha y(t) - g \cdot y$$

Как же получать такие формулы? Все-таки мы не привели ни одного аргумента, что эта формула верна... Пусть этим занимаются физики, мы лишь будем решать используя эти формулы.

Попробуем поугадывать решения:

$$\varphi(t) = \alpha t \implies (\alpha t)' = \alpha(\alpha t) \implies \alpha = \alpha^2 t \implies t = \frac{1}{\alpha}$$

$\varphi(t) = e^{\alpha t} \implies (e^{\alpha t})' = \alpha e^{\alpha t} \implies \alpha e^{\alpha t} \equiv \alpha e^{\alpha t} \text{на } \mathbb{R} \implies \varphi(t) = Ce^{\alpha t}$ – все решения

Задача 1. Пусть дано $m(0) = 25\text{г}$, $m(30) = 42\text{г}$, $m(t_2) = 2m(0)$, t_2–?

То есть нам нужно найти точку на плоскости (здесь был рисунок), но она может быть где угодно, так что предположем, что у нас есть еще какие-то данные:

$$m'(t) = \alpha m(t) \ \&\ m(t) = Ce^{\alpha t}$$

Решение.

$$25 = m(0) = C \quad 42 = m(30) = 25e^{\alpha\cdot 30} \implies \alpha = \frac{1}{30}\ln\frac{42}{25} \implies 50 = m(t_2) = 25e^{\frac{1}{30}\ln\frac{42}{25}} \implies t_2 \approx 40$$

■

0.1.2 Второй закон Ньютона

$$F = ma \implies a = \frac{F(t,x,v)}{m} \implies x'' = \frac{F(t,x,x')}{m}$$

Так что дифференциальные уравнение встречаются очень часто — мотивируйтесь их решать.

0.2 Уравнения первого порядка и его решения

Определение 2. Дифференциальное уравнение первого порядка — это уравнение вида:

$$F(x,y,y') = 0$$

Определение 3. Функция φ, если:

1. $\varphi \in C^1(a,b)$
2. $F(x,\varphi(x),\varphi'(x)) \equiv 0,\ x \in\in (a,b)$

Пример. $y' = -\dfrac{1}{x^2}$

$y = \dfrac{1}{x} + C,\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$y = \begin{cases} \frac{1}{x} + A, x < 0 \\ \frac{1}{x} + B, x > 0 \end{cases}$$

Сейчас одна точка разрыва, а если их больше, то было бы больше независимых констант... Поэтому, решениями являются функции на отрезке.

Определение 4. Интегральная кривая — это график его решения.

<!– Опять рисунок –>

Определение 5. Общее множество решений для дифференциального уравнения — это множество всех его решений.

Определение 6. $F(x, y, c) = 0$

Общий интеграл — это такой интеграл при некотором значении константы в решении которого, соотношение неявно задает все решения.

Определение 7. Уравнение в неявной форме:

$$y' = f(x, y)$$

Для такого мы определим **область задания** — это аналог ОДЗ.

Определение 8. Область задания — это множество $\operatorname{Dom} f$ (domain) — множество, где уравнение имеет смысл.

Пример. $y' = -\dfrac{1}{x^2},\ f(x, y) = -\dfrac{1}{x^2},\ \operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$

Задача 2. $\lhd y' = x + y$. Пусть φ — решение. У нас есть такая связь: $\varphi'(x) = x + \varphi(x)$, в частности, в точке $(2, 3)$.

$\lhd(2,3) \quad \varphi'(2) = 2 + 3 = 5 = f(2,3)$

То есть, если там проходит наша функция, то она проходит там под углом $\operatorname{arctg} 5$.

$\lhd(4,3) \quad \varphi'(4) = 4 + 3 = 7 = f(4,3)$

Никто не мешает нам взять какую-то сетку, и в каждой точке этой сетки мы поймем, как примерно ведут себя интегральные кривые. То есть, можно не решая уравнения, можно построить такое поле и увидеть, как ведут себя интегральные кривые.

Определение 9. То есть, задать уравнение — это значит увидеть, как ведет себя поле направлений.

Из этого геометрического смысла, мы можем сделать еще один вывод.

Возьмем какую-то точку (потом научимся их находить), посчитаем в ней угол, пойдем по этому направлению, новая точка — новое направление, и т. д. Чем мельче шаг, тем ближе ломаная к интегральной кривой.

$$x_{k+1} = x_k + h$$
$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h$$
$$\frac{\delta y_k}{\delta x_k} = f(x_k, y_k)$$

Так определяется **ломаная Эйлера**.

0.2.2 Уравнение в дифференциалах

Давайте запишем производную, как отношение дифференциалов, и перепишем уравнение 7.

$$dy = f(x, y)dx$$
$$f(x, y)dx - dy = 0$$

Определение 10. Уравнение в дифференциалах: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

Определение 11. Функция φ — это решение 10, если:

- $\varphi \in C^1(a, b)$
- $P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0, \ x \in (a, b)$

Определение 12. Область определения 10 — это множество $\operatorname{Dom} P \cap \operatorname{Dom} Q$

Пример. Пусть $xdx + ydy = 0 \qquad \operatorname{Dom} P \cap \operatorname{Dom} Q = \mathbb{R}^2$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2},\ x \in (-R, R) \quad xdx + \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \left(-\frac{2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} \right) dx = 0$$

В чем еще одна идея такого вида уравнения? В том, что x и y здесь равноправны, то есть $x = ky$ — это тоже *конечное* решения.

Определение 13. Пара или вектор-функция $r(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ — это параметрическое решение уравнения 10, если:

- $\varphi, \psi \in C^1(\alpha, \beta), r'(t) \neq 0,\ \forall t \in (\alpha, \beta)$ — второе условие, чтобы не было изломов у функции (как у модуля)
- $P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(x) \equiv 0$

Пример. $xdx + ydy = 0 \implies (R\cos t, R\sin t),\ t \in \mathbb{R}$ — параметрическое решение.

$$P(\varphi, \psi)\varphi' + Q(\varphi, \psi)\psi'(x) \equiv 0 \implies (P, Q) \cdot (\varphi', \psi') = 0$$

$$F = (P, Q) \quad r = (\varphi, \psi) \quad F \perp r'$$

<!– Рисунок –>

И здесь у нас никакие направления не исключаются, в отличии от поля, где исключались вертикальные направления.

0.3 Задача Коши и уравнения с разделяющимися переменными

0.3.1 Задача Коши (ЗК)

Определение 14. Задачей Коши или начальной задачей называется задача отыскания решения уравнения в нормальной форме $y' = f(x, y)$, которая удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = y_0$

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

(x_0, y_0) – начальные данные

Вопросы: есть ли решение и может ли их быть несколько?

Теорема 1 (Теорема о существовании для уравнений 1-го порядка)**.** G – область (открытое связное множество), $f \in C(G)$, $(x_0, y_0) \in G \implies \exists$ решение задачи Коши в некоторой окрестности точки x_0

Пример. $y' = f(x,y) \quad f(x,y) = \begin{cases} 1 & , y > 0 \\ 0, & y \leqslant 0 \end{cases}$

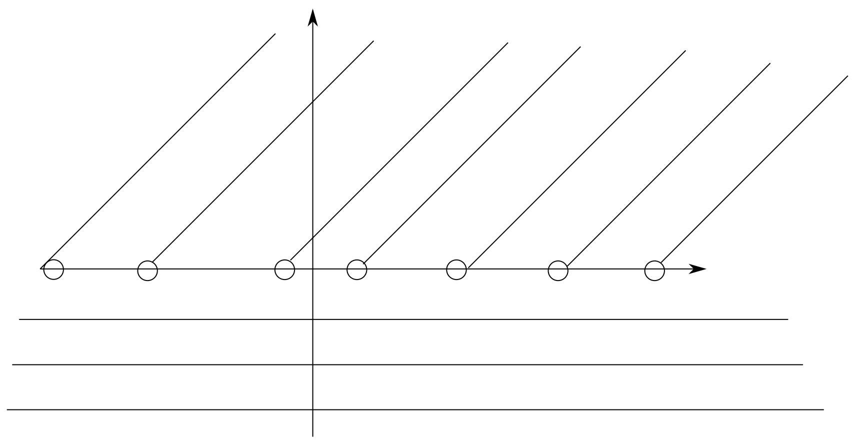

Рис. 1: legko

Теорема 2 (Теорема единственности для уравнения 1-го порядка)**.** G – область, $f, g'_y \in C(G), (x_0, y_0) \in G, \varphi_1, \varphi_2$ – решения ЗК на $(\alpha, \beta) \implies \varphi_1 \equiv \varphi_2$ на (α, β)

Пример. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$

$f(x,y) = 3\sqrt[3]{y^2}$ – непрерывна везде, $G = \mathbb{R}^2$

По теореме о существовании через любую точку проходит хотя бы одна интегральная кривая.

$f'_y = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{y}} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$

На прямой $y = 0$ нарушаются условия теоремы об единственности, значит в этих точках могут (но не факт, что будут) проходить несколько интегральных кривых.

$$dy = 2\sqrt[3]{y^2}dx$$
$$y = (x-c)^3$$

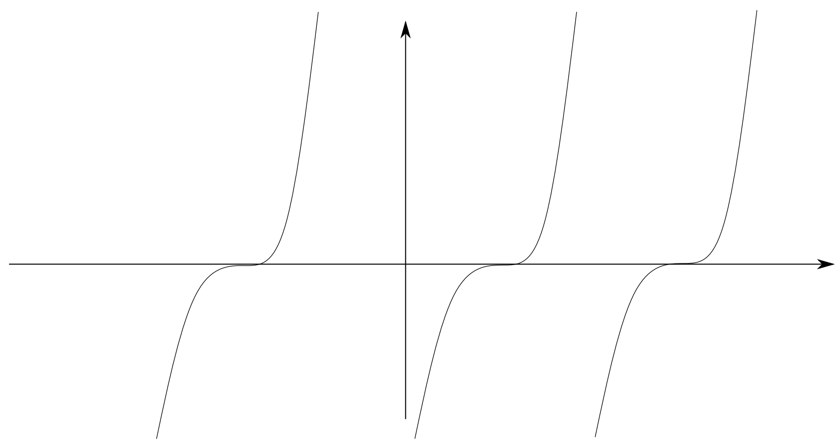

Рис. 2: uzhas

Ответ: $y = (x-C)^3 \quad C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

$y = 0, x \in \mathbb{R}$ – особое решение. Имеются составные решения

Определение 15. Решение φ на (a,b) уравнения $y' = f(x,y)$ называется особым, если

$$\forall x_0 \in (a,b)\ \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi_1 - \text{решение задачи}, y' = f(x,y) \quad y(x_0) = \varphi(x_0)$$

на (α, β), где $\beta - \alpha < \varepsilon, x_0 \in (\alpha, \beta)$, но $\varphi_1 \not\equiv \varphi$ на (α, β)

0.3.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 16 (Уравнения с разделёнными переменными)**.**

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

Теорема 3 (Общее решение уравнения с разделёнными переменными).
$P \in C(a,b) \quad Q \in C(c,d) \quad (\alpha,\beta) \subset (a,b)$

Тогда функция $y = \varphi(x)$ – решение на $(\alpha,\beta) \iff$:

1. $\varphi \in C^1(\alpha,\beta)$
2. $\exists C \in \mathbb{R}$, т.ч. φ неявно задаётся уравнением $\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Дано, что φ – решение $\implies$ автоматически выполняется первый пункт.

$\sqsupset x_0 \in (\alpha,\beta)$ – прозвольно. $y_0 := \varphi(x_0)$, тогда пункт 2 запишется как:

$$\int_{x_0}^{x} P(x)dx + C_1 + \int_{y_0}^{y} Q(t)dt + C_2 = C$$

$$\int_{x_0}^{x} P(x)dx + \int_{y_0}^{\varphi} Q(t)dt = A \quad \forall x \in (\alpha,\beta)$$

Пусть $t = \varphi(\tau) \implies$ л.ч.

$$\int_{x_0}^{x} P(t)dt + \int_{x_0}^{x} Q\left(\varphi(\tau)\,\varphi'(\tau)dt = \int_{x_0}^{x} \left(P(\tau) + Q\left(\varphi(\tau)\,\varphi'(\tau)\right)dt \equiv 0 \text{ на } (\alpha,\beta)\right.$$

$\Longleftarrow$ Дано: $\varphi \in C^1(\alpha,\beta)$ и $\int P(x)dx + \left[\int Q(y)dy\right]_{y=\varphi(x)} \equiv C$ на (α,β)

продиффиренцируем наше тождество (законно, потому что φ непрерывно дифференцируемо)

$P(x) + Q\left(\varphi(x)\right) \cdot \varphi'(x) \equiv 0$ на (α,β)

■

Пример. $xdx + ydy = 0$

$$\int xdx + \int ydy = C$$
$$x^2 + y^2 = 2C$$
$$x^2 + y^2 = A$$

$$A > 0 \quad \begin{array}{ll} y = \pm\sqrt{A - x^2} & x \in (-\sqrt{A}, \sqrt{A}) \\ x = \pm\sqrt{A - y^2} & , y \in \left(-\sqrt{A}, \sqrt{A}\right) \end{array}$$

Определение 17. Уравнение с разделяющимися переменными:

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)y_2(y)dy = 0$$

$p_2(x_0) = 0 \implies x \equiv x_0$ – решение

$q_1(t_0) = 0 \implies y \equiv y_0$ – решение

Далее отдельно рассматриваем на каждой из областей (4 здесь):

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx + \frac{q_2(y)}{q_1(y)}dy = 0$$

Пример.

$$2ydx - xdy = 0$$

$x = 0, y = 0$ – решения. Нужно отдельно смотреть все четверти

$$\frac{2dx}{x} = \frac{dy}{y}$$
$$2\ln|x| = \ln|y| + C$$
$$y = Ax^2, A > 0, x > 0$$

В остальных четвертях аналогично. Они все стыкуются в нуле и общее решение – всевозможные стыковки.

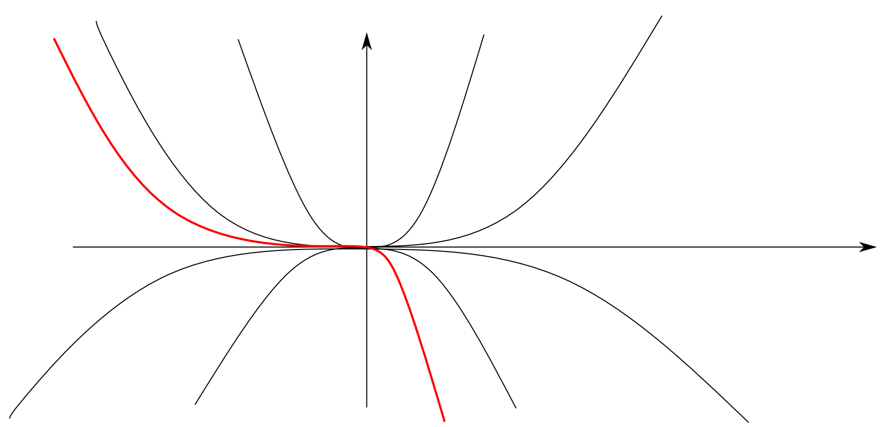

Рис. 3: gohan1

Пример.

$$ydx - xdy = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} + C$$
$$\ln|x| = \ln|y| + C$$
$$y = Ax$$

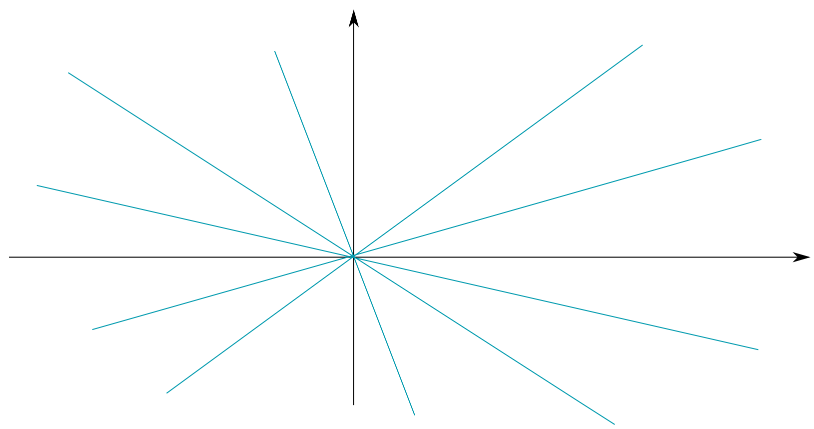

Рис. 4: gohan2

Определение 18. Два уравнения называют <u>эквивалентными</u>, если они имеют одинаковую область задания и одинаковый набор интегральных кривых.

Замечание.

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0$$

не экивалентно

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx + \frac{q_1(y)}{q_2(y)}dy = 0$$

Теорема 4 (Теорема о существовании и единственности для уравнений с разделёнными переменными). $P \in C(a,b) \quad Q \in C(c,d)$

(x_0, y_0) – не особая точка уравнения (т.е. $P(x_0) \neq 0, Q(y_0) \neq 0$) $\implies$ уравнение

$$\int_{x_0}^{x} P(t)dt + \int_{y_0}^{y} Q(t)dt = 0$$

)

определяет единственное решение в некоторой окрестности точки x_0

0.4 Некоторые типы уравнений, интегрируемых в квадратурах

решение уравнения – конечное число арифметических действий, суперпозиции и взятия интегралов от обеих частей

0.4.1 Линейные уравнения

Определение 19. $y' = p(x)y + q(x)$ – линейное уравнения (ЛУ)

$y' = p(x)y$ – однородное линейное уравнения (ЛОУ)

Лемма 1 (Общее решение линейного однороднго уравнения). $\sqsupset p \in C(a,b) \implies y = Ce^{\int p}, C \in \mathbb{R}, x \in (a,b)$ – Общая запись решения ЛОУ

Доказательство. $dy = p(x)ydx$

$y = 0$ – решение

$\int \frac{dy}{y} = \int p(x)dx + C$

$\ln |u| = \int p + C$

При $y > 0 \quad y = Ae^{\int p}, A > 0$

При $y < 0 \quad y = Ae^{\int p}, A < 0$

$y = 0$ не особое по теореме об единственности из прошлой секции. ■

Теорема 5 (Общее решение линейного уравнения). $\sqsupset p, q \in C(a,b)$

$\implies y = \left(C + \int qe^{-\int p}\right) e^{\int p} \quad C \in \mathbb{R} \quad x \in (a,b)$

Доказательство. Подстановкой убеждаемся, что все эти функции – решения.

Пусть есть ещё решения φ – решение ЛУ на (α, β), и оно не задаётся формулой из условия теоремы.

Возьмём любую точку, через которую проходит это решение, $(x_0, \varphi(x_0))$. Подставим в общую формулу эту точку, то выразим C

$y_0 = (C + E(x_0))F(x_0) \quad C = \frac{y_0}{F(x_0)} - E(x_0)$

По теореме об единственности новое решение совпадает с решение с константой C везде, где оба определены – на (α, β), а тогда φ задаётся формулой, противоречие ■

0.4.2 Метод вариации постоянной или Метод Лагранжа

1. вместо ЛУ решаем соответствующее ЛОУ

   $yy' = p(x)y \quad t = Ce^{\int p}$

2. заменяя C на $C(x)$ и подставляем $y = C(x)e^{\int p}$ в исходное ЛУ уравнение

$$\left(Ce^{\int p}\right)' = pCe^{\int p} + q$$
$$C'e^{\int p} + Ce^{\int p} \cdot p = pCe^{\int p} + q$$
$$C' = qe^{-\int p}$$

3. находим $C = \int qe^{-\int p} + C_1$

4. Подставляем $C(x)$ вместо C в решение (ЛОУ)

   $y = \left(C_1 + \int qe^{-\int p}\right)e^{\int p}$

0.4.3 Уравнение Бернулли

Определение 20. $y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha} \quad \alpha \notin \{0, 1\}$

Замена на $z = y^{1-\alpha}$ сводит его к ЛУ

$$\frac{y'}{y^\alpha} = p(x)y^{1-\alpha} + q(x)$$
$$z' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^\alpha}$$
$$z' = (1-\alpha)p(x)z + (1-\alpha)q\,(x)$$
$$f(x,y) = py + qy^\alpha$$
$$f'_y = p + qy^{\alpha-1}$$

$\alpha \geqslant 1 \implies$ непрерывна, следовательно по теореме об единственности $y = 0$ – не особое

0.4.4 Уравнение Риккати

Определение 21. $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$ – квадратичная функция от y

Утверждение 1 (Лиувилль)**.** Уравнение

$$y' = y^2 + x^\alpha$$

интегрируется в квадратурах $\iff \frac{\alpha}{2\alpha+4} \in \mathbb{Z}$ или $\alpha = -2$

Если известно решение φ, то подставновка $y = z + \varphi$ сводится к уравнению Бернулли

0.4.5 Уравнение в полных дифференциалах

Определение 22.

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

Если $\exists u : u'_x = P \quad u'_y = Q$

Теорема 6 (Общее решение УПД)**.** $P, Q \in C(G) \quad G \subseteq \mathbb{R}^2$ – область, $u'_x = P, u'_y = Q$

$y = \varphi(x)$ – решение УПД на $(a,b) \iff$

1. $\varphi \in C^1(a,b)$
2. $\exists C : \quad U(x,\varphi(x)) \equiv C$ на (a,b) (т.е. φ неявно задано уравнением $u(x,y) = C$)

Доказательство.

$\Longrightarrow$ 1. Выполняется по определению решения

2. Имеем $P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$

$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) = (u(x, \varphi(x)))' = 0 \implies u(x, \varphi(x)) = C$

$\Longleftarrow$ Имеем $u(x, \varphi(x)) \equiv C$, дифференцируем:

$$u'_x(x, \varphi(x)) + u'_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$$
$$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$$

■

Предположим $u \in C^2(G) \quad u'_x = P \quad u'_y = Q \quad P'_y = u'_{xy} = u'_{yx} = Q'_x$

Утверждение 2. Условие $P'_y = Q'_x$ – достаточное для того, чтобы уравнение было УПД, если G – односвязная область

Определение 23. Область односвязна, если любая замкнутая кривая стягивается в точку (гомотопна точке)

Определение 24. Функция $u: \quad u'_x = P, u'_y = Q$ называется потенциалом уравнения в полных дифференциальных (= потенциал поля (P, Q))

Потенциал УПД находится по формуле:

$u(x, y) = C + \int_\gamma P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

Если кривая $\gamma \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t \in [\alpha, \beta] \end{cases} \implies \int_\gamma P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_\alpha^\beta (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))\, dt$

0.4.6 Интегрирующий множитель

Определение 25. $\exists\, \mu(x, y) \neq 0 \quad \forall x, y$ и

$$\mu P dx + \mu Q dy = 0$$

– УПД $\implies \mu$ – интегральный множитель уравнения $Pdx + Qdy = 0$

Утверждение 3 (Необходимое условие)**.** (если $\mu \in C^1(G)$)

$$(\mu P)'_y = (\mu Q)'_x$$

)

Пример.

$$y' = p(x)y + q(x) = 0$$
$$(p(x)y + q(x))\,dx - dy = 0$$
$$P'_y = p(x) \quad Q'_x = 0$$

Будем искать μ в виде $\mu = \mu(x) \implies 0 \cdot P + \mu P = \mu'(-1) + 0 \implies \mu' = -\mu p$

$\mu = Ce^{-\int p}$, пусть $C = 1 \quad \mu = e^{-\int p}$

Умножим исходное уравнение на $\mu = e^{-\int p}$

$$y'e^{-\int p} = pye^{-\int p} + qe^{-\int p}$$
$$y'e^{-\int p} - pye^{-\int p} = qe^{\int p}$$
$$\left(ye^{-\int p}\right)' = qe^{-\int p}$$
$$ye^{-\int p} = \int qe^{-\int p} + C$$
$$y = \left(C + \int qe^{-\int p}\right)e^{\int p}$$

0.5 Уравнения неразрешённые относительно производной

Определение 26. $F(x, y, y') = 0$ – разрешённые относительно производной

0.5.1 Уравнения разрешимые относительно производной

Пример. $(y' - f_1(x, y))\,(y' - f_2(x, y)) = 0$

Если φ – решение $y' = f_1(x, y)$ или $y' = f_2(x, y)$, то φ – решение исходного

Обратное неверно

Пример. $y'^2 - 4x^2 = 0$

$$(y' - 2x)\,(y' + 2) = 0$$
$$y' = 2x \implies y = x^2 + C$$
$$y' = -2x \implies -x^2 + C$$
$$.$$

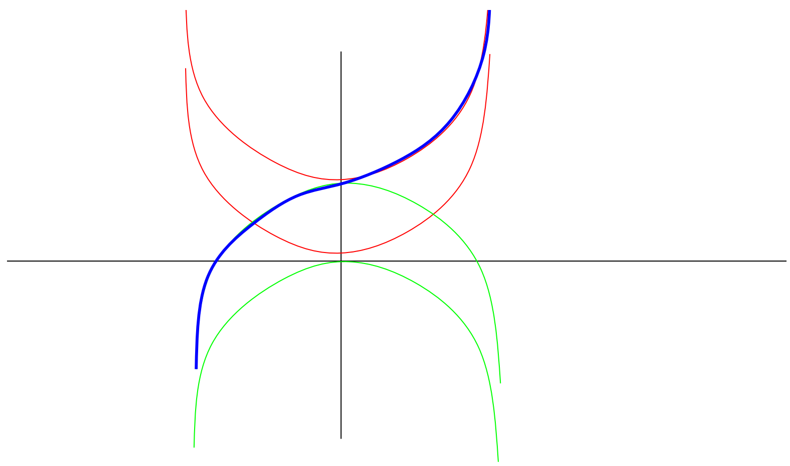

Рис. 5: obrnev

Есть составные решения, где интегральные уравнения стыкуются в точках $(x_0, y_0) \quad f_1'(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0)$.

0.5.2 Метод введения параметра

$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t) \quad t \in (\alpha, \beta)$

$\exists \varphi^{-1} \implies$ функция $\psi \circ \varphi^{-1}$ задана параметрически

Неполные уравнения

$\lhd F(x, y') = 0$ – уравнения множества на плоскости $\mathbb{R}^2_{x,y'}$

Пусть $x = \varphi(t) \quad y' = \psi(t)$ – гладкая параметризация γ и $\exists \varphi^{-1}$

Утверждение 4. $x = \varphi(t), y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt$ – параметрически заданное решение $F(x, y') = 0$

Доказательство. $F(x, y_x'(x)) = F(\varphi(t), \frac{(\int \psi(t)\varphi'(t)dt + C)'}{\varphi'(t)} = F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$ ∎

Правило нахождения решений (некоторых) уравнения $F(x, y') = 0$:

1. Подобрать параметризацию множества $F(x, y')$ в $\mathbb{R}^2_{x,y'}$

$$x = \varphi(t) \quad y' = \psi(t) \quad t \in (\alpha, \beta)$$

2. В основном соотношении метода введения параметризации

$$dy = y'_x dx$$

сделать подстановки

$$dy = y'_t dt \quad y'_x = \psi(t) \quad dx = x'_t dt = \varphi^{-1} dt$$

$$\begin{aligned} \implies y'_t dt &= \psi(t)\varphi'(t)dt \\ y'_t &= \psi(t)\varphi'(t) \\ \implies y &= \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C \\ x &= \varphi(t) \\ &. \end{aligned}$$

Так мы получили решения, заданное параметрически

Пример. $e^{y'_x} + y'_x = x$

Пусть $y'_x = t$

$x = e^t + t$

$\lhd dy = y'_x dx$, заменим:

$$\begin{gathered} dy = t'_t dt \\ t'_x = t \\ dx = x'_t dt = (e^t + 1)dt \\ \implies y'_t = t\left(e^t + 1\right) \\ \implies y = \int t\left(e^t + 1\right)dt = e^t\left(t - 1\right) + \frac{t^2}{2} + C \end{gathered}$$

Ответ: $\begin{cases} x = t + e^t \\ y = e^t\left(t - 1\right) + \frac{t^2}{2} + C \end{cases}$

$\lhd F(y, y') = 0$

Сделать подстановки

$$
\begin{aligned}
dy &= y' dt = \varphi' dt \\
y'_x &= \psi(t) \\
dx &= x'_t dt \\
\implies \varphi'(t) dt &= \psi(t) x'_t dt \\
\varphi'(t) &= \psi(t) x'_t \\
x'_t &= \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} \\
x &= \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C \\
\implies &\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'}{\psi} + C \\ y = \varphi \end{cases}.
\end{aligned}
$$

– решение заданное параметрически

0.5.3 Полное уравнение

$F(x, y, y') = 0$ –уравнение множества σ в пространстве $\mathbb{R}^3_{x,y,y'}$.

Пусть $\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ y' = \chi(u, v) \end{cases}$ – гладкая параметризация σ

Правило нахождения решений (некоторых) полного уравнения:

1. Подобрать параметризацию множества $F(x, y, y') = 0$ в $\mathbb{R}^3_{x,y,y'}$
2. В основном соотношении $dy = y'_x dx$ поставить $\begin{cases} dy = y'_u du + y'_v dv = \psi'_u du + \psi'_v dv \\ y'_x = \chi(u, v) \\ dx = x'_u du + x'_v dv = \varphi'_u du + \varphi'_v dv \end{cases}$

   (Цель – получить уравнение, содержащее только u, v)

   $$\psi'_u du + \psi'_v dv = \chi \cdot (\varphi'_u du + \varphi'_v dv)$$

3. Если $v = g(u, C)$ – решение уравнения сверху, то $\begin{cases} x = \varphi(u, g(u, C)) \\ y = \psi(u, g(u, C)) \end{cases}$

   – решение исходного уравнения, заданное параметрически

Пример. $xy' - y = \frac{y'}{2} \ln \frac{y'}{2}$

Доказательство. Пусть $\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = uv - \frac{v}{2} \ln \frac{v}{2} \end{cases}$

$\triangleleft$ основное соотношение $dy = y'_x dx$

$$dy = y'_u du + y'_v dv = vdu + \left(u - \frac{1}{2}\ln\frac{v}{2} - \frac{1}{2}\right)dv$$
$$y'_x = v$$
$$dx = x'_u du + x'_v dv = du$$

$$vdu + \left(u - \frac{1}{2}\ln\frac{v}{2} - \frac{1}{2}\right)dv = vdu$$

.

$\triangleleft$ 2 уравнения:

$$u - \frac{1}{2}\ln v_2 - \frac{1}{2} = 0$$
$$dv = 0$$

.

$$v = 2e^{2u-1}$$
$$v = c$$

.

$x = \varphi\left(u, (u, C)\right) = u$

$y = \psi\left(u, g(u, C)\right) = u\cdot\left(2e^{2u-1}\right) - \left(\frac{2e^{2u-1}}{2}\right)\ln\frac{2e^{2u-1}}{2} = 2ue^{2u-1} - e^{2u-1}(2u-1) = e^{2u-1} = y = e^{2x-1}$ – решение

$$x = u$$
$$y = u\cdot C - \frac{C}{2}\ln\frac{C}{2}$$
$$\Longrightarrow y = Cx - \frac{C}{2}\ln\frac{C}{2}$$

.

– решение ■

0.5.4 Задача Коши для уравнения, разрешимого относительно производной

Определение 27. Задачей Коши для этого уравнения называются задачу нахождения его решений, удовлетворяюих начальным условиям: $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$

Чтобы задача Коши имела хотя бы одно решение необходимо $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$ (согласование начальных данных)

Теорема 7 (существование и единственность решени уравнения, разрешимого относительно производной)**.** $G \subset \mathbb{R}^3$ – область

$F \in C^1(G) \quad (x_0, y_0, y'_0) \in G \quad F(x_0, y_0, y'_0) = 0 \quad F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0$

$\implies$ в некоторой окрестности точки $x_0 \exists!$ решение задачи Коши.

$$F(x, y, y') = 0 \quad y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y'_0$$

Определение 28. Решение φ на (a, b) уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется <u>особым</u>, если $\forall x_0 \in (a, b) \quad \exists \psi$ – решение

$$F(x, y, y') = 0 \quad y(x_0) = \varphi(x_0) \quad y'(x_0) = \varphi^{-1}(x_0)$$

, отличающееся от φ в $\forall$ сколь-угодно малой окрестности x_0

Определение 29. Множество $D = \left\{(x, y) | \exists y' \in \mathbb{R} \quad F(x, y, y') = 0 \text{ и } F'_{y'}(x, y, y') = 0\right\}$ называется дискриминанной кривой

Алгоритм нахождения особого решения:

1. найти общий интеграл
2. Найти дискриминантную кривую D, исключив y' из системы $\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ F'_y(x, y, y') = 0 \end{cases}$
3. Найти интегральные кривые, проходящие внутри.
4. Проверить найденное решение на соответствие определению особого решения

Пример (Продолжение)**.** 1. $y = e^{2x-1} \quad y = Cx - \frac{C}{2} \ln \frac{C}{2}$

2. $\begin{cases} xy' - y - \frac{y'}{2} \ln \frac{y'}{2} = 0 \\ x - \frac{1}{2} \ln \frac{y'}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$

   $\ldots \implies t = e^{2x-1} \implies D = \left\{(x, y) | y = e^{2x-1}\right\}$

3. Интегральная кривая $y = e^{2x-1}$ лежит в D

4. Возьмём $x_0 \in \mathbb{R} \quad \exists ?C \begin{cases} Cx_0 - \frac{C}{2} \ln \frac{C}{2} = e^{2x_0-1} \\ C = 2e^{2x_0-1} \end{cases} \implies \psi = 2e^{2x_0-1}x - e^{2x_0-1}(2x_0-1)$

   $\psi \not\equiv e^{2x-1}$

0.6 Уравнения высшего порядка

0.6.1 Основные понятия

Определение 30 (Уравнение n-го порядка)**.**

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)} = 0$$

Определение 31. Функция φ на интервале (a, b) – решение такого уравнения, если:

1. $\varphi \in C^n(a, b)$
2. Подстановка обращает уравнение в тождество

   $$F(x, \varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n)}) \equiv 0$$

   на (a, b)

Определение 32 (Каноническое уравнение n-го порядка)**.**

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{n-1}\right)$$

Определение 33. Задаче Коши для канонического уравнения n-го порядка называют задачу нахождения его решения, удовлетворяющего начальным условиям: $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y\left(x_0\right) = y_1 \\ \vdots \\ y\left(x_0\right) = y_{n-1} \end{cases}$

Числа $\left(x_0, y_0, \dots, y_0^{n-1}\right)$ – начальные данные

Замечание (Геометрический смысл задачи Коши на уравнениях второго порядка). $\begin{cases} y'' = f\left(x, y, y'\right) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$

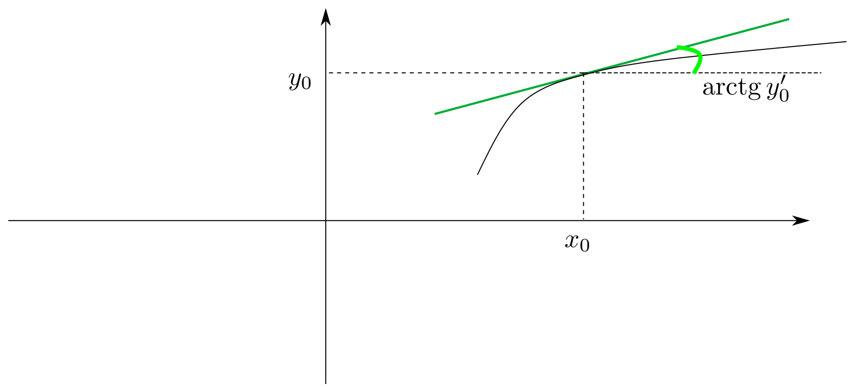

Рис. 6: geokasha

Замечание (Механический смысл). x – координата точки, t – время

$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$

$$\begin{cases} \ddot{x} = f\left(t, x, \dot{x}\right) \\ x\left(t_0\right) = x_0 \\ \dot{x}\left(t_0\right) = v_0 \end{cases}$$

Теорема 8 (Сущетсвование решения Задачи Коши для канонического уравнения n-го порядка). G – область в $\mathbb{R}^{n+1}$ $\quad f \in C(G) \quad \left(x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}\right) \implies$ в некоторой окрестности точки x_0 $\exists$ решение

Теорема 9 (Единственность решения Задачи Коши для канонического уравнения n-го порядка). G – область в $\mathbb{R}^{n+1}_{x,y,y',\ldots,y^{n-1}}$

$f, f'_y, f'_{y'}, \ldots, g'_{y^{(n-1)}} \in C(G) \quad \left(x_0, y_0, \ldots, y_0^{n-1}\right) \in G$

φ_1, φ_2 – решение Задачи Коши на $(a, b) \implies \varphi_1 \equiv \varphi_2$ на (a, b)

Определение 34. Решение φ на (a,b) называется особым, если для любой точки $x_0 \in (a,b)$ найдётся другое решение ψ, т.ч.

$$\psi(x_0) = \varphi(x_0) \quad \psi'(x_0) = \varphi'(x_0), \ldots, \psi^{(n-1)}(x_0) = \varphi^{n-1}(x_0)$$

, при этом $\varphi \neq \psi$ в любой сколько угодно малой окрестности x_0

0.6.2 Методы понижения

1. $F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)} = 0$ (нет $y, y', \ldots, y^{(k-1)}$)

   Простейший случай $y^{(n)} = f(x) \quad \left(y^{(n-1)}\right)' = f(x) \implies y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C$

   Пример.
   $$y'' = \sin x$$

   $$y' = \int \sin x dx + C_1 = -\cos x + C_1 - \text{первый интеграл}$$
   $$y = \int \left(-\cos x + C_1\right) dx + C_2 = -\sin x + C_1 x + C_2 - \text{второй интеграл}$$

   В общем случае делаем замену $z = y^{(k)}$, понижаем порядок уравнения на k единиц

2. $$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

   (нет x) Подстановка $y' = z(y)$ понижает порядок уравнения на 1

   Допустим y – решение такого уравнения и сущесвует $y^{-1} \implies y'(x) = y'\left(y^{-1}\left(y(x)\right)\right)$, т.е. $y'(x) = z(y(x)) \quad z = y' \circ y$

   Получим уравнение, которому удовлетворяет функция z. Далее не пишем x для краткости

   $y' = z(y) \quad y'' = z(y)' = z'(y)y' \implies y^{(3)} = \ldots = z''(y) \cdot z(y)^2 + \left(z'(y)\right)^2 \cdot z(y)$

   $F(y, z(y), z'(y)z(y), z''(y)z(y)^2 + z'(y)^2 z(y)) \equiv 0$ при $x \in (a,b)$ или при $y \in (A,B)$

   Таким образом z – решение уравнения $F(y, z, z'z, z''z^2 + z'^2 z = 0$

   Пример. $y'' + yy' = 0 \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = -2$

   решаем $y'' = -yy'$

т.е. $f(x,y,y') = -yy'$

$f \in C\left(\mathbb{R}^3_{x,y,y'}\right) \implies \forall$ Задачи Коши имеется решение

$f'_y = -y' \quad f'_{y'} = -y$

$f'_y, f'_{y'} \in C\left(\mathbb{R}^3_{x,y,y'}\right) \implies \forall$ Задачи Коши имеет единственно решение

Сделаем подстановку $y' = z(y) \implies y'' = z'(y)y' = z'z \implies z'z + yz = 0 \quad z\left(z' + y\right) = 0$

$z = 0$, т.е. $y' = 0$ не даёт решения Задачи Коши

$\lhd z' = -y \quad z = \int(-y)dy + C = -\frac{y^2}{2} + C_1$

Воспользуемся начальными данными:

$y'(0) = \frac{-y_0^2}{2} + C_1 \quad -2 = -\frac{2^2}{2} + C_1 \implies C_1 = 0$

$y' = -\frac{y^2}{2}$ и $y = 0$ – не решение, $-\int \frac{2dy}{y^2} = \int dx \implies \frac{2}{y} = x + C_2$

начальные данные $\implies \frac{2}{2} = 0 + C_2 \implies C_2 = 1$

$y = \frac{2}{x+1}$

0.6.3

Определение 35.

$$F(x,y,y',\ldots,y^{(n)}) = 0$$

– уравнение однородное отночительно $y,\ldots,y^{(n)}$, если $\forall t \quad F(x,ty,ty',\ldots,ty^{(n)} = t^\alpha F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})$

Замена $z = \frac{y'}{y}$ понижает порядок уравнения

0.6.4 Уравнение в точных производных

Определение 36. Уравнение $F(x,y,y',\ldots,y^{(n)}) = 0$ – уравнение в точных производных, если $\exists \phi = \phi(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}$, что

$$\frac{d}{dx}\phi(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}) = F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)$$

Утверждение 5. Пусть $F(x,y,\ldots,y^{(n)})$ – уравнение в точных производных и функция ϕ удовлетворяет определению. Тогда y – решение

$$\iff \exists C: \quad \phi\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right) = C$$

0.7 Системы дифферецниальных уравнений

Определение 37 (Нормальная система дифферецниальных уравнений порядка n)**.**

$$\begin{cases} y_1' = f_1\left(x, y_1, \ldots, y_n\right) \\ y_2' = f_2\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right) \\ \ldots \\ y_n' = f_n\left(x, y_1, \ldots, y_n\right) \end{cases}$$

Положим $Y = \left(y_1 \ldots y_n\right)^T \quad F(x, Y) = \left(f_1(x, Y), \ldots, f_n\left(x, Y\right)\right)^T$

Определение 38 (Нормальное n-мерное уравнение)**.**

$$Y' = F(, Y)$$

Определение 39. Вектор-функция φ называется решением нормального n-мерного уравнения, если

1. $\varphi \in C^1\left((a, b) \to \mathbb{R}^n\right)$
2. $\varphi'(x) \equiv F(x, \varphi(x))$ на (a, b)

Определение 40. Интегральная кривая нормального n-мерного уравнения – графики его решений

Определение 41. Задача Коши для нормального уравнения n-мерного порядка называется задача нахождения его решени, удовлетворяющего начальному условию $Y(x_0) = Y_0 \quad (Y_0 \in \mathbb{R}^n)$

Определение 42. Пусть $\Lambda_n : C^{n-1} \to (C(a, b))^n$

$$\Lambda_n y = \left(y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)^T$$

Теорема 10 (об эквивалентной системе)**.** Пусть φ – решение на (a,b) уравнения

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

Тогда функция $\Phi = \Lambda_n\varphi$ – решение на (a,b) системы $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f\left(x, y_1, \dots, y_n\right) \end{cases}$

И наоборот: Пусть $\Phi = \left(\varphi_1, \dots, \varphi_n\right)^T$ – решение на (a,b) системы уравнений сверху. Тогда φ_1 – решение на (a,b) уравнения

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

Доказательство. Пусть φ – решение уравнения.

$\lhd \varphi_k := \varphi^{(k-1)} \quad k = \overline{1,n}$

Подставсим их в систему: $\begin{cases} \varphi_1' = \varphi' = \varphi_2 \\ \varphi_2' = \left(\varphi'\right)' = \varphi'' = \varphi_3 \\ \dots \\ \varphi_{n-1}' = \left(\varphi^{(n-2)}\right)' = \varphi^{(n-1)} = \varphi_n \\ \varphi_n' = \left(\varphi^{(n-1)}\right)' = \varphi^{(n)} = f\left(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)\right) = f\left(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\right) \end{cases}$

И в обратную сторону: Пусть дано решение системы $\Phi = \left(\varphi_1, \dots, \varphi_n\right)^T \implies$

$$\begin{cases} \varphi_1' = \varphi_2 \\ \varphi_2' = \varphi_3 \\ \dots \\ \varphi_{n-1}' = \varphi_n \\ \varphi_n' = f\left(x, \varphi_1, \dots, \varphi_n\right) \end{cases}$$

$$\varphi_1'' = \varphi_2' = \varphi_3$$
$$\varphi^{(3)} = \varphi_3' = \varphi_4$$
$$\dots$$
$$\varphi^{(n-1)} = \varphi_{n-1}' = \varphi_n$$
$$\varphi^{(n)} = \varphi_n' = f\left(x, \varphi_1, \dots, \varphi_n\right) = f\left(x, \varphi_1, \varphi_1', \varphi_1'', \dots, \varphi_1^{(n-1)}\right)$$

$\implies \varphi_1$ – решение уравнения и $\Phi = \Lambda_n\varphi_1$ ■

0.7.3 Вспомогательные сведения

Определение 43. Пусть $r = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

Тогда $|r| = \max_{i \in [1:n]} |x_i|$

Лемма 2. $f \in C([a,b] \to \mathbb{R}^n) \implies$

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|$$

Доказательство. $\int_a^b f = \left(\int_a^b f_1, \dots, \int_a^b f_n \right)^T$

Левая часть: $\left| \int_a^b f \right| = \max_i \left| \int_a^b f_i \right|$

$\left| \int_a^b f_i \right| \leqslant \int_a^b |f_i|$

Правая часть: $\int_a^b |f(t)|\, dt = \int_a^b \max_j |f_j(t)|\, dt$

Рассмотрим неравенство для левой части для $t \in [a,b] \quad |f_i(t)| \leqslant \max_j |f_j(t)| \implies \int_a^b |f_i(t)|\, dt \leqslant \int_a^b |\max_j |f_j(t)||\, dt = \int_a^b |f| \implies \max_i \int_a^b |f_i(t)| dt \leqslant \int |f|$

$$\max_i \left| \int_a^b f_i \right| \leqslant \max_j \int_a^b |f_i| \leqslant \int_a^b |f|$$

■

Определение 44. пусть $A = (\alpha_{ij}) \in M_{n \times m}(\mathbb{R}) \quad (i \in [1:n] \quad j \in [1:m])$

Тогда $|A| = \max_{ij} |\alpha_{ij}|$

Лемма 3. $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R}) \quad B \in M_{m \times k}(\mathbb{R}) \implies |AB| \leqslant m \cdot |A| \cdot |B|$

Доказательство. $A \cdot B = (\gamma_{ij}) \quad \gamma_[ij] = \sum\limits_{l=1}^{m} \alpha_{il} \cdot \beta_{lj}$

$|\gamma_{ij}| \leqslant \sum\limits_{l=1}^{m} |\alpha_{il}| \cdot |\beta_{lj}| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{m} |A| \cdot |B| = m|A| \cdot |B|$

$|AB| = \max |\gamma_{ij}| \leqslant m \cdot |A| \cdot |B|$ ■

Определение 45. Пусть X, Y – нормированные пространства и дана функция $f : X \to Y$

Тогда $\omega\left(f, h\right) = \sup_{\|x_1 - x_2\|_X \leqslant h} \|f(x_1) - f(x_2)\|_Y$ – модуль (непрерывности) функции f с шагом h

Свойство 1. Пусть X, Y – нормированные пространства. $f : X \to Y$. Тогда:

1. $\omega(f, 0) = 0$
2. $\omega(f, h) \uparrow$ по h
3. f равномерно непрерывна на $X \iff w\left(f, h\right) \to_0 \quad h \to 0$

Определение 46. Множество функций $\{f_n\}$, где $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ равностепенно непрерывное $\iff \sup_n \omega(f_g, h) \to 0 \quad h \to 0$

Замечание. Если $\{f_n\}$ равностепенно непрерывно, то функции в нём равномерно непрерывны

Обратное неверно. $\triangleleft f_k(x) = kx, k > 0$, они равномерно непрерывны, но супремум это ∞

Теорема 11 (Арцела-Асколи)**.** Пусть функции последовательности $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ равностепенно непрерывны ($f_n \in C[a, b]$) и $\exists M \forall n \forall x \quad |f_n(x) \leqslant M|$

Тогда $\exists f \in C[a, b]$ И $\exists \left(f_{n_k}\right)$

$f_{n_k} \rightrightarrows f$ при $k \to \infty$

0.8 Теорема о существовании

0.8.1 Теорема существования

Определение 47. Функция φ – решение на отрезке $[a, b]$ уравнения

$$r(t) = r_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(\tau, r\left(\tau\right)\right) d\tau$$

– Эквивалентное интегральное уравнение

Если:

1. $\varphi \in C\left([a, b] \to \mathbb{R}^n\right)$
2. $\varphi(t) \equiv r_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(\tau, \varphi(\tau)\right) d\tau$ на $[a, b]$

Лемма 4 (О равносильном интегральном уравнении)**.** $f \in C\left(G \to \mathbb{R}^n\right), G$ – область в $\mathbb{R}^{n+1}$

(t_0, r_0)

Тогда φ – решение на $[a, b]$ Задачи Коши

$$\dot{r} = f(t, r) \quad r(t_0) = r_0$$

$\iff$ φ – решение на $[a, b]$ эквивалентного интегрального уравнения

Доказательство.

$\implies$ φ – решение Задачи Коши. Проинтегрируем условие и получаем

$$\int_{t_0}^{t} \dot{\varphi}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t} f\left(\tau, \varphi\left(\tau\right)\right) d\tau$$

$\varphi(t) = \underbrace{\varphi(t_0)}_{r_0} + \int_{t_0}^{t} f\left(\tau, \varphi(\tau)\right) d\tau$ – верно на $[a, b]$

φ – непрерывная, потому что является решением Задачи Коши.

$\impliedby$ φ – решение эквивалентного интегрального уравнения ($\implies$ $\varphi \in C^1\left([a, b] \to \mathbb{R}^n\right)$). Продифференцируем условие и получим $\dot{\varphi}(t) = f\left(t, \varphi(t)\right)$ на $[a, b]$

И кроме того $\varphi(t_0) = r_0 + \int_{t_0}^{t_0} = r_0$

А тогда φ – решение Задачи Коши

∎

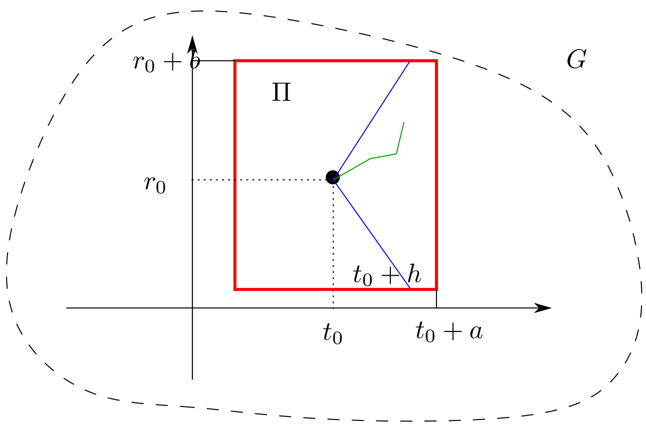

Рис. 7: peano

Определение 48 (Отрезок Пеано)**.** $\Pi \subseteq G \quad M = \max_{(t,r)\in\Pi} |f\,(t,r)|$

$\Pi = \{(t,r) \in G \mid \ |t - t_0| \leqslant a \quad |r - r_0| \leqslant b\} \quad h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$

$[t_0 - h, t_0 + h]$ – отрезок Пеано

Определение 49 (Ломаная Эйлера E_N)**.** $E_N(t_0) = r_0$

$E_N(t) = E(t_K) + f\,(t_K, E_N(t_K))\,(t - t_K)$, если $t \in (t_K, t_{K+1}]$

$t_K = t_0 + \frac{kh}{N}$

Лемма 5 (Свойства E_N)**.** $\sqsupset t \in [t_0, t_0 + h]$

1. E_N определена в t
2. $|E_N(t) - r_0| \leqslant M\,(t - t_0)$

Доказательство. База индукции: Пусть $k = 1 \implies E_N$ определена на $[t_0, t_1]$ и

$$|E_N(t) - r_0| = |f\,(t_0, E_N(t_0)) \cdot (t - t_K)| \leqslant M\,(t - t_0)$$

Переход: Пусть в выполнено на $[t_0, t_K]$ для $k \in [1, N-1]$

$\lhd [t_K, t_{K+1}]$

Верно ли, что $[t_K, E_N(t_K)] \in G$

$$|E_N(t_K) - E_N(t_0)| \leqslant M\,(t_K - t_0)$$

по индукционному предположению

$E_N(t) = E_N(t_K) + f\,(t_K, E_N(t_K))\,(t - t_K)$

$\implies |t_K - t_0| \leqslant h \leqslant a; \quad |E_n(t_K) - E_N(t_0)| \leqslant b \implies (t_K, E_N(t_K) \in \Pi \subseteq G)$

$t \in (t_K, t_{K+1}] \implies$

$$\begin{aligned} |E_N(t) - r_0| \leqslant |E_N(t) = E_N(t_k)| + |E_N(t_K) - r_0| \\ = |f\,(t_K, E_N(t_K)\,(t - t_K)))| + |E_N(t_K) - r_0| \\ \leqslant M\,(t - t_K) + M\,(t_K - t_0) = M\,(t - t_0) \end{aligned}$$

.

■

Теорема 12 (Пеано, Существования решения Задачи Коши)**.** $G \subseteq \exists^{n+1}$ – область, $f \in C\,(G \to \mathbb{R}^n) \quad (t_0, r_0) \in G \implies$ Задача Коши

$$\dot{r} = f\,(t, r) \quad r(t_0) = r_0$$

имеет решение на отрезке Пеано

Доказательство. План:

- Последовательность ломанных Эйлера $(E_N)_{N \geqslant 1}$
- По теореме Арцела-Асколи выберем подпоследовательность $E_{N_m} \to \varphi$
- Докажем, что φ – решение эквивалентного интегрального уравнения
- По лемме будет следовать, что φ одновременно и решение задачи Коши

Перенесём точку в начало координат (всегда можно сделать заменой перменной). НУО $t_0 = 0, r_0 = 0$

Также будем рассматривать только правую половину отрезка Пеано. Слева доказательство аналогичное.

На $[0, h]$ построим последовательность $(E_N)_{N \geqslant 1}$ ломанных Эйлера

(E_N) равностепенно ограничены, (E_N) равностепенно непрерывны?

$|E_N(t)| \leqslant |E_N(t) - r_0| + |r_0| \leqslant M\,(t - t_0) + |r_0| \leqslant Mh + 0 = Mh$. Переход к M по лемме.

$|E_N(t_2) - E_N(t_1)| = \left|\int_{t_1}^{t_2} E'_N(\tau) d\tau\right| \leqslant \int_{t_1}^{t_2} |E'_N(\tau)|\,\tau \quad (t_1, t_2 \in [0, h\, t_1 < t_2)$

$E'_N(\tau) = f(t_K, E_N(t_K))$, если $\tau \in (t_K, t_{K+1}) \implies |E'_N(\tau)| \leqslant M$

$\implies \int_{t_1} t_2 |E'_N(\tau)| \, d\tau \leqslant \int_{t_1}^{t_2} M d\tau = M(t_2 - t_1)$

$\implies \omega(E_n, u) \leqslant Mu$

$\implies \sup_{n\in\mathbb{N}} \omega(E_N, u) \leqslant M \cdot u \to 0 \quad u \to 0$

(E_N) – равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, следовательно, по теореме Арцела-Асколи $\exists (E_{N_m})_{m\geqslant 1}: \quad E_{N_m} \rightrightarrows \varphi$ на $[0, h]$

φ непрерывна на $[a, b]$ по теореме Стокса-Зейделя

Надо: $\varphi(t) \equiv \int_0^t f(\tau, f(\tau)) \, d\tau$ на $[a, b]$

Имеем $E_{N_m}(t) = \int_0^t E'_{N_m}(\tau) d\tau$

при $m \to \infty \quad \varphi(t) = \lim\limits_{m\to\infty} \int_0^t E'_{N_m}(\tau) d\tau$

НУО $N_m = m$

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^t E'_N(\tau) d\tau - \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau)) \, d\tau\right| \\
&= \left|\int_0^t (E'_N(\tau) - f(\tau, \varphi(\tau))) \, d\tau\right| \\
&\leqslant \int_0^t |E'_N(\tau) - f(\tau, \varphi(\tau)) \, d\tau| \\
&\leqslant \int_0^h |E'_N(\tau) - f(\tau, \varphi(\tau))| \, d\tau \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_K}^{t_{K+1}} |f(t_K, E_N(t_K)) - f(\tau, \varphi(\tau)))| \, d\tau \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_K}^{t_{K+1}} \omega(f, |(t_K, E_N(t_K)) - (\tau, \varphi(\tau))|) \, d\tau
\end{aligned}$$

.

$$\begin{aligned}
\triangleleft\, |(t_K, E_N(t_K)) - (\tau, \varphi(\tau))| \\
&= |(t_K - \tau, E_N(t_K) - \varphi(\tau))| \\
&= \max\{|t_K - \tau|, |E_N(t_K) - \varphi(t)|\}
\end{aligned}$$

.

$|t_K - \tau| \leqslant \frac{h}{N}$

$|E_N(t_K)-\varphi(\tau)| \leqslant |E_N(t_K)-\varphi(t_K)| + |\varphi(t_K)-\varphi(\tau)| \leqslant \|E_N-\varphi\| + \omega\left(\varphi, \frac{h}{N}\right)$

$\implies |(t_K, E_N(t_K)) - (\tau, \varphi(\tau))| \leqslant \max\left\{\frac{h}{N}, \|E_N-\varphi\| + \omega\left(\varphi, \frac{h}{N}\right)\right\} = S_N \to 0$ при $N \to \infty$

А тогда звершая цепочку

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_K}^{t_{K+1}} \omega\left(f, |(t_K, E_N(t_K)) - (\tau, \varphi(\tau))|\right) d\tau \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_K}^{t_{K+1}} \omega(f, S(N)) d\tau \\
&= \omega\left(f, S(N)\right) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h}{N} \\
&= \omega\left(f, S(N)\right) \cdot h
\end{aligned}
$$

.

f равномерно непрерывна на компакте Π

$\implies \omega\left(f, S(N)\right) \to 0 \quad N \to \infty$, т.к. $S(N) \to 0$ ■

0.8.2 Условие Липшица по части переменных

Определение 50. Полный модуль непрерывности функции $f: G \to \mathbb{R}^n, \quad G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$

$$\omega(f,u,v) = \sup_{\substack{|t_2-t_1|\leqslant u \\ |r_2-r_1|\leqslant v \\ (t_1,r_1),(t_2,r_2)\in G}} |f(t_2,r_2) - f(t_1,r_1)|$$

Определение 51. Частный модуль непрерывности: $\omega(f,0,v) \quad \omega(f,u,0)$

Определение 52. $f \in \mathrm{Lip}_r(G) \iff \exists L \quad \omega(f,0,h) \leqslant Lh$

Определение 53. $f \in \mathrm{Lip}_{r,loc}(G) \iff \forall (t,r) \in G \quad \exists u$ – окрестность точки $(t, r \quad f \in \mathrm{Lip}_r(U \cap G))$

Лемма 6. $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$

$f'_r \in M_n(C(G)), \ f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$

$K \subseteq G$ – выпыклый компакт $\implies \omega(f,0,h) \leqslant h \cdot \|f'_r\| h$

Доказательство. $\lhd g_t(r) = f(t,r)$

При фиксированном t функция g_t удовлетворяет условию предыдущей леммы $\implies \omega\left(g_t, h\right) \leqslant h\|f'_r\|h$

$\sup_t \omega\left(g_t, h\right) = \omega\left(f, 0, h\right)$

$f'_r = \left(g_t\right)'$

(додоказать в качестве упражнения) ■

Лемма 7. $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область, $f'_r \in M_n\left(C(G)\right), f \in C\left(G \to \mathbb{R}^n\right)$
$\implies f_7 in\, \mathrm{Lip}_{r,loc}(G)$

Лемма 8. $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область
$f \in C\left(G \to \mathbb{R}^n\right) \cap \mathrm{Lip}_{r,loc}(G), K \subseteq G$ – компакт $f \in \mathrm{Lip}_r(K)$

0.9 Теорема Единственности

0.9.1 Теорема Единственности

Лемма 9 (Тромуом)**.** $\varphi \in C\left[a,b\right] \quad t_0 \in [a,b] \quad \lambda, \mu \geqslant 0$

$$\forall t \in [a,b] \quad 0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \lambda + \mu \left|\int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau\right|$$

$\implies \forall t \in [a,b] \quad \varphi(t) \leqslant \lambda e^{\mu(t-t_0)}$

Доказательство. Докажем при $t \geqslant t_0$ (при $t < t_0$ аналогично)

$\varphi(t) \leqslant \lambda + \mu \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau =: v(t)$

$v'(t) = \mu\varphi(t) \leqslant \mu v$

$\lambda > 0 \implies v(t) > 0$, разделим неравенство на v

$\frac{v'(t)}{v(t)} \leqslant M$ – проинтегрируем по $[t_0, t]$

$\int_{t_0}^t \frac{v'(\tau)}{v(\tau)} d\tau \leqslant \mu\left(t - t_0\right)$

$\ln \frac{v(t)}{v(t_0)} \leqslant \mu(t - t_0)$

$\frac{v(t)}{v(t_0)} \leqslant e^{\mu(t-t_0)}$

$v(t) \leqslant \lambda e^{\mu(t-t_0)}$

$\varphi(t) \leqslant v(t) \implies \varphi(t) \leqslant \lambda e^{\mu(t-t_0)}$

$\lambda = 0 \quad \varphi(t) \leqslant \mu \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau < \varepsilon + \mu \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau$

$\implies$ по доказанному $\varphi(t) \leqslant \varepsilon e^{\mu(t-t_0)}$

При $\varepsilon \to 0$ будет $\varphi(t) \leqslant 0$ ■

Теорема 13 (Пикар, Существование единственного решения Задачи Коши)**.** $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область, $(t_0, r_0) \in G$

$f \in C\left(G \to \mathbb{R}^n\right) \cap \mathrm{Lip}_{r,loc}(G)$

$\implies$

(i) на отрезке Пеано $\exists$ решение

$$r = f(t, r) \quad r\left(t_0\right) = r_0$$

(ii) ψ_1, ψ_2 – решение Задачи Коши на $(a, b) \implies \psi_1 \equiv \psi_2$ на (a, b)

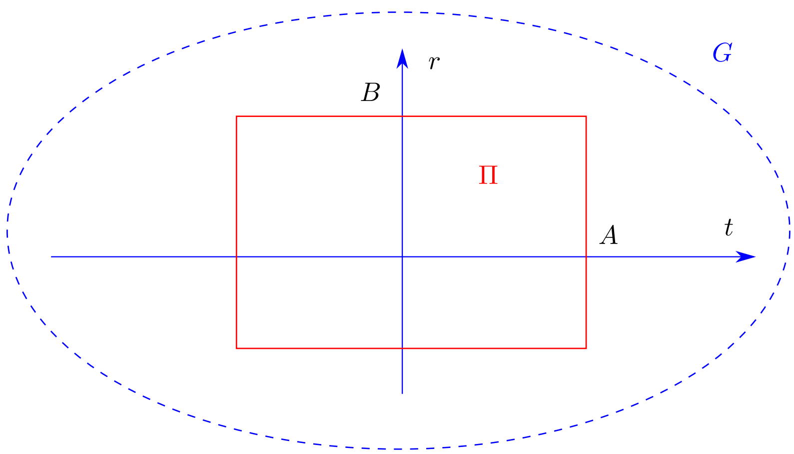

Рис. 8: plankapkan

Доказательство. НУО $(t_0, r_0) = 0$

$\Pi = \{(t, r) \,|\, |t| \leqslant A \quad |r| \leqslant B\}$

$h = \min\left\{A, \frac{B}{\|f\|_{C(\Pi)}}\right\}$

$\|f\|_{C(\Pi)} = \sup_{(t,r)\in\Pi} |f(t, r)|$

Докажем существование на $[a, b]$

$\varphi_0(t) \equiv 0 \quad \varphi_{k+1}(t) = \int_0^t f(\tau, \varphi_k(\tau))\, d\tau, k \in \mathbb{Z}^+$

План:

1. Докажем, что $(t, \varphi_k(t)) \in \Pi \quad \forall k, \forall t \in [0, h]$
2. $\exists \varphi : \quad \varphi_k \rightrightarrows \varphi, k \to \infty$ на $[0, h]$
3. φ – решение Задачи Коши
4. Единственность

1. База: $\varphi_0(t) \in \Pi$ – верно

   Пусть $\forall t \in [0, h] \quad (t, \varphi_k(t)) \in \Pi$

   $t \in [0, h] \implies |t| \leqslant A$

$$
\begin{aligned}
|\varphi_{k+1}(t)| &\leqslant \int_0^t |f(\tau, \varphi_k(\tau))|\, d\tau \\
&\leqslant \int_0^t \|f\| d\tau = \|f\| \cdot t \leqslant \|f\| h \leqslant \\
&\leqslant \|f\| \frac{B}{\|f\|} \leqslant B \implies (t, \varphi_{k+1}(t)) \in \Pi
\end{aligned}
$$

.

2. Докажем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m \geqslant N, k \in \mathbb{N} \quad \|\varphi_{m+k} - \varphi_m\| \leqslant \varepsilon$$

   Докажем индукцией по m, что

$$\forall t \in [0, h] \quad |\varphi_{m+k}(t) - \varphi_m(t)| \frac{\|f\|_{C(\Pi)} L^m t^{m+1}}{(m+1)!}$$

   ($f \in \mathrm{Lip}_r(\Pi)$ по лемме $\implies 7omega\, (f|_\Pi, 0, h) \leqslant Lh$)

   При $m = 0 \quad |\varphi_k(t)| \leqslant \|f\| t$

   $\varphi_k(t) = \int_0^t f(\tau, \varphi_{k-1}(\tau))\, d\tau$

   $|\varphi_k(t)| \leqslant \|f\| \cdot \int_0^t d\tau = \|f\| t$

Пусть при некотором $m \in \mathbb{Z}_+$ верно.

$$\vartriangleleft |\varphi_{m+1+k} - \varphi_{m+1}(t)| =$$
$$= \left| \int_0^t f(\tau, \varphi_{m+k}(\tau))\, d\tau - \int_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau))\, d\tau \right| =$$
$$= \int_0^t |f(\tau, \varphi_{m+k}(\tau)) - f(\tau, \varphi_m(\tau))|\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^t \omega(f, 0, |\varphi_{m+k}(\tau) - \varphi(\tau)|)\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^t L\, |\varphi_{m+k}(\tau) - \varphi_m(\tau)|\, d\tau \leqslant \text{ по индукции}$$
$$\leqslant \int_0^t \frac{L\|f \cdot L^n \tau^{m+1}\|}{(m+1)!} d\tau =$$
$$= \frac{L^{m+1}\|f\| t^{m+1}}{(m+2)!}$$

.

$\implies |\varphi_{m+k}(t) - \varphi_m(t)| \leqslant \frac{\|f\| \cdot L^m h^{m+1}}{(m+1)!}$

$\implies \|\varphi_{m+k} - \varphi_m\| \leqslant \left(\frac{\|f\| h}{m+1}\right) \cdot \frac{(Lh)^m}{m!} -), m \to \infty$

$\implies (\varphi_k)_{k \geqslant 1}$ фундаментальная

$\varphi := \lim\limits_{k \to \infty} \varphi_k \quad \varphi \in C[0, h]$

3. $\varphi_{k+1}(t) \equiv \int_0^t f(\tau, \varphi_k(t))\, d\tau$

$\lim\limits_{k \to \infty} \varphi_{k+1}(t) = \lim\limits_{k \to \infty} \int_0^t f(\tau \varphi_k(\tau)\, d\tau$

$\varphi(t) = \lim\limits_{k \to \infty} \int_0^t f(\tau, \varphi_K(\tau))\, d\tau$

$$\lhd \left| \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \varphi_k(\tau))\, d\tau \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^t |f(\tau, \varphi(\tau) - f(\tau, \varphi_k(\tau)))|\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^t \omega(f, 0, |\varphi(\tau) - \varphi_k(\tau)|)\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^t L\, |\varphi(\tau) - \varphi_k(\tau)|\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \|\varphi - \varphi_k\| \int_0^t L d\tau \leqslant$$
$$\leqslant Lh\|\varphi - \varphi_k\| \to 0, k \to \infty$$

$$\implies \varphi(t) = \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau \text{ эквивалентное интегральное уравнение .}$$

4. ψ_1, ψ_2 – решения на (a, b)

$$\implies \begin{cases} \psi_1(t) = \int_0^t f(\tau, \psi_1(\tau))\, d\tau \\ \psi_2(t) = \int_0^t f(\tau, \psi_2(\tau))\, d\tau \end{cases}$$

$\lhd \chi = |a|$

.....

■

Следствие 1 (Теорема Пикара с простыми условиями)**.** $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область, $(t_0, r_0) \in G$

$f \in C(G \to \mathbb{R}^n)\,, f'_r \in M_n(C(G))$

$\implies$ верно (1), (2) из оригинальной теоремы (существования и единственность)

Доказательство. лемма из пред. раздела + оригинальная теорема ■

Определение 54. Пусть $\varphi_0(t) \equiv r_0 \quad \varphi_{k+1} = r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_k(\tau)) d\tau$

$$\implies (\varphi_k)_{k \geqslant 0} \text{ – приближение Пикара для Задачи Коши } \begin{cases} \dot{r} = f(t, r) \\ z(t_0) = r_0 \end{cases}$$

Следствие 2. В условиях предыдущего следствия: $\|\varphi - \varphi_m\|_{[t_0-h,t_0+h]} \leqslant \frac{\|f\|\left(n\|f_r'\|\right)^m h^{m+1}}{(m+1)!}$, где φ_m – m-е приближение Пикара

$\|\cdot\| = \|\cdot\|_{C(\Pi)}$

Доказательство. В основном неравенстве последней теоремы сделаем предельный переход при $R \to \infty$ и возьмём супремум по t

По лемме можно взять $L = h\|f_r'\|$ ∎

Следствие 3 (Теорема Пикара для n-го порядка.)**.** $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_{x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}}$ – область, $\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right) \in G$

$f \in C(G) \cap \mathrm{Lip}_{\left(y,\ldots,y^{(n-1)}\right),loc(G)}$

$\Longrightarrow$

1. $\exists$ окрестность точки x_0 на которое $\exists$ решение Задачи Коши: $\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$

2. ψ_1, ψ_2 – решение на (a,b) Задачи Коши выше, то $\psi_1 \equiv \psi_2$ на (a,b)

Доказательство. $y_1 := y \quad y_2 := y' \qquad y_n = y^{(n-1)}$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \ldots \\ y_n' = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \end{cases}$$

∎

0.10 Продолжение решений

0.10.1 –||–

Определение 55. $\sqsupset \varphi$ – решение $\dot{r} = f\left(t, r\right)$ на $\langle a, b\rangle$ ψ – на $\langle A, B\rangle$

$\langle a, b\rangle \subsetneq \langle A, B\rangle \quad \psi \equiv \varphi$ на $\langle a, b\rangle$

$\Longrightarrow$ ψ – продолжение φ, а φ – продолжимое решение

Определение 56. Если решение φ не имеет продолжения, то φ – максимальное решение, а $\mathrm{dom}\,\varphi$ – максимальный промежуток задания решения.

Пример. $\dot{x} = 1 + x^2$

$x(t) = \operatorname{tg} t$ – решение на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ – максимальное решение

$x : [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$ – продолжимое решение

Теорема 14 (Критерий продолжимости)**.** $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область, $f \in C\left(G \to \mathbb{R}^n\right)$

φ – решение на $[a, b)$

Тогда φ продолжимо на некотором промежутке $[a, c], b < c \iff$

1. $\exists \varphi\left(b - 0\right) = \widetilde{r}$
2. $(b, \widetilde{r}) \in G$

Доказательство.

$\implies$ $\exists \psi$ – продолжение на $[a, c] \ni b \implies \varphi\left(b - 0\right) = \psi(b - 0)$ – $\exists$, т.к. $\psi \in C[a, c) \implies (1)$

φ – решение на $[a, c)$, то $(b, \psi(b)) \in G \implies (2)$

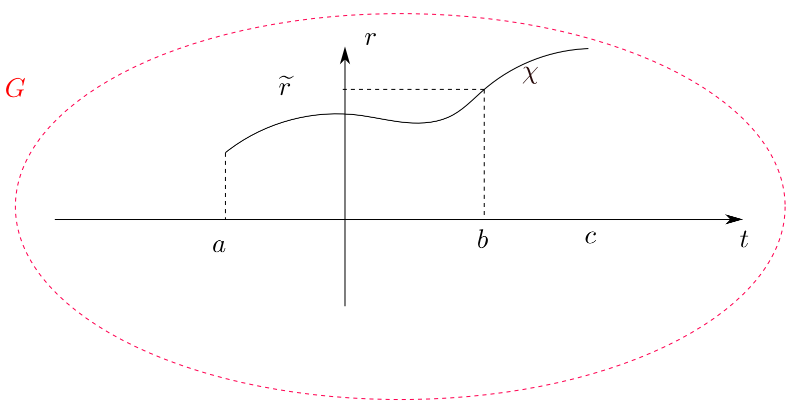

Рис. 9: conti

$\impliedby$ Доопределим φ на $[a, b]$ по непрерывности:

$$\lhd t, t_1 \in [a, b) \quad \varphi \text{ решение} \begin{cases} \dot{r} = f(t, r) \\ r(t_1) = \varphi(t_1) \end{cases} \iff \varphi(t) = \varphi(t_1) + \int_{t_1}^{t} f\left(\tau, \varphi(\tau)\right) d\tau$$

При $t_1 \to b$

$$\varphi(t) = \varphi(b) + \int_b^t f\left(\tau, \varphi(\tau)\right) d\tau$$

$$\iff \begin{cases} \dot{r} = f\left(t, r\right) \\ r(b) = \widetilde{r} \, (= \varphi(b) \end{cases}$$

$\implies \varphi$ – решение на $[a, b]$

По теореме Пеано на отрезке Пеано $[b-h, b+h]$ $\quad\exists$ решение χ задачаи

$$\begin{cases} \dot{r} = f(t, r) \\ r(b) = \widetilde{r} \end{cases}$$

$$\lhd \chi = \begin{cases} \varphi(t) & , t \in [a, b) \\ \chi(t) & , t \in [b, b+h) \end{cases}$$

ψ непрерывно дифференцируема на множестве $[a, b+h] \setminus \{b\}$, т.к. таковы φ и χ

$\psi(b-0) = \varphi(b-0) = \varphi(b) = \widetilde{r} = \chi(b) = \chi(b+0) = \psi(b+0) \implies \psi$ непрерывна в точке b

$\psi'_{-}(b) = \varphi'_{-}(b) = f\left(b, \widetilde{r}\right) = \chi'_{+}(b) = \psi'_{+}(b) \implies \psi$ непрерывно дифференцируема в точке b

$\psi(t) \equiv f(t, \psi(t))$ на $[a, b+h] \setminus \{b\}$, поскольку таковы φ и χ

$\lhd t = b \quad \dot{\psi}(b) = \dot{\chi}(b) = f\left(b, \chi(b)\right) = f\left(b, \psi(t)\right)$

■

Теорема 15 (Существование единственного максимального решения)**.** $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область, $(t_0, r_0) \in G$

$f \in C\left(G \to \mathbb{R}^n\right) \cap \mathrm{Lip}_{r,loc(G)} \implies$

1. Задача $\dot{r} = f\left(t, r\right) \quad r\left(t_0\right) = r_0$ имеет максимальное решение
2. ψ_1, ψ_2 – максимальные решения $\implies \operatorname{dom}\psi_1 = \operatorname{dom}\psi_2 = (a, b)$ и $\psi_1 \equiv \psi_2$ на (a, b)

Доказательство. $\sqsupset \langle a_\varphi, b_\varphi \rangle$ – область определения решения.

S – множество всех решений на промежутках любого типа

$a := \inf_{\varphi \in S} a_\varphi \quad b := \sup_{\varphi \in S} b_\varphi$

На интервалах (a, b) определим функцию ψ :

Пусть $t \in (a, b)$. НУО $t \geqslant t_0$

По определению b $\exists \varphi$, заданное на $\langle a_\varphi, b_\varphi \rangle$, где $t < b_\varphi \implies \varphi$ определено в t

Положим $\psi(t) = \varphi(t)$. По теореме Пикара все такие функцию φ совпадают на общей области определения, поэтому определение в точке t корректно

Таким образом задана $\psi : (a, b) \to \mathbb{R}^n$

Докажем, что ψ – решение

$$\forall \varphi \in S \quad \psi(t_0) = \varphi(t_0) = r_0$$

$\forall t \in (a, b)$ функция ψ совпадает с некоторым $\varphi \in S$ в некоторой оарестности t

$\implies \varphi$ непрерывно дифференцируема в t, поскольку такова φ

По той же причине $\dot{\psi}(t) = f\,(t, \psi(t)) \implies \chi$ – решение на (a, b)

Допустим ψ продолжимо. Тогда ψ продолжимо на <u>интервал</u> (a, c), где $c > b$ (в силу последней теоремы)

$\implies b \neq \sup_{\varphi \in S} b_\varphi$

$\implies \psi$ – максимальное $\implies$ (1)

Пусть ψ_2 ещё одно максимальное. $\implies \psi_2 \in S, \psi_2 : \left(\widetilde{a}, \widetilde{b}\right) \to \mathbb{R}^n$

$\widetilde{b} \leqslant b, \widetilde{a} \geqslant a$ (по определению) $\implies \left(\widetilde{a}, \widetilde{b}\right) \subseteq (a, b) \implies$ имеем решение ψ, ψ_2 на $\left(\widetilde{a}, \widetilde{b}\right)$

Тогда по теореме Пикара $\psi \equiv \psi_2$ на $\left(\widetilde{a}, \widetilde{b}\right)$

Если $\widetilde{>} a, \widetilde{b} < b$, то ψ_2 продолжимо $\implies \widetilde{a} = a, \widetilde{b} = b$ ∎

Теорема 16 (О выходе интегральной прямой за предел компакта). $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область, $f \in C\,(G \to \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Lip}_{r,loc}(G)$

φ – максимальное решение на (a, b) системы $\dot{r} = f(t, r)$ $\quad K$ – компакт, $K \subseteq G$

$\implies \exists \Delta > 0 : \forall t \in (a, a + \Delta) \cup (b - \Delta, b) \quad (t, \varphi(t)) \notin K$

Доказательство. Предположим, что

$$\exists t : (t, \varphi(t)) \in K$$

Пусть ρ – расстояние от K до G. Заметим, что $\rho > 0$ $\quad (\rho(K, \partial G) = \inf_{\substack{r_1 \in K \\ r_2 \in \partial G}} \rho(r_1, r_2)$

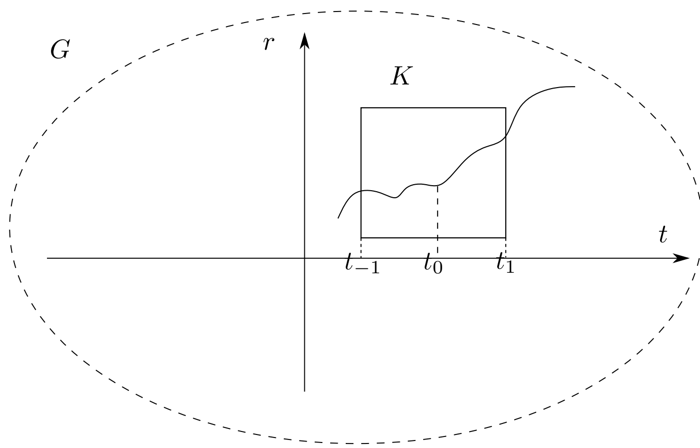

Рис. 10: exit

$c := \frac{\rho}{2}$ (или $c = 1$, если $\rho = \infty$)

Вокруг каждой точки $(t', r') \in K$ построим параллелепипед $\Pi(t', r') = \{(t, r) \in G | \, |t - t'| \leqslant C \quad |r - r'| \leqslant C\}$

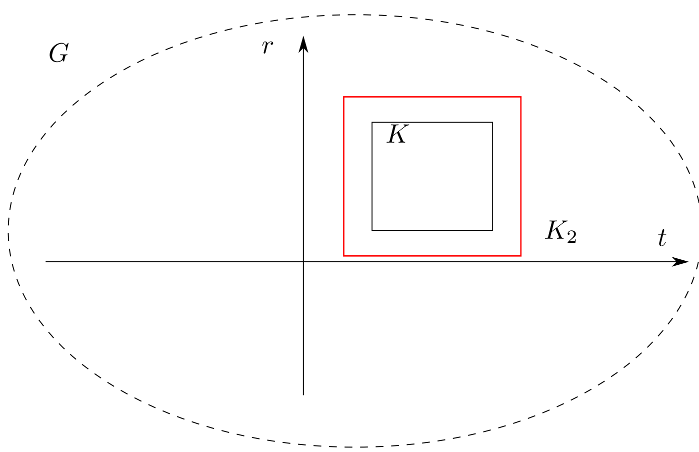

Рис. 11: comp

Заметим, что $\Pi(t', r') \subseteq G$

$K_C := \cup_{(t',r') \in K} \Pi(t', r') \implies K_C \subseteq G$

Докажем, что K_C – компакт $\iff \begin{cases} K_C & \text{ограничено} \\ K_C & \text{замкнуто} \end{cases}$

1. K – ограничена $\implies \exists d: \quad \forall (t,r) \in K \quad |(t,r)| \leqslant d$

   $\sqsupset (t,r) \in K_C \implies \exists (t',r') \quad (t,r) \in \Pi (t',r')$

$$|(t,r)| \leqslant |(t,r) - (t',r')| + |(t',r')|$$
$$\leqslant c + d \implies \text{ ограниченность }.$$

   ..

   $\sqsupset$ (t,r) – предельная точка $K_C \implies \exists$ последовательность точек $(t_m, r_m) \to (t,r) \quad m \to \infty$

   Каждой точке (t_m, r_m) соответствует (t'_m, t'_r) :

$$\begin{aligned} &(t_m, r_m) \in \Pi (t'_m, r'_m) \\ ((t'_m, r'_m))_{m \geqslant 1} \subseteq K \implies \exists \text{ подпоследовательность}: \\ &\left|t_{m_k} - t'_{m_k}\right| \leqslant C \\ &\left|r_{m_k} - r'_{m_k}\right| \leqslant C \\ &k \to \infty \\ \begin{cases} |t - t'| \leqslant C \\ |r - r'| \leqslant C \end{cases} &\implies (t,r) \in \Pi (t', r') \\ &\implies (t,r) \in K_C \implies \text{ замкнуто.} \end{aligned}$$

   Допустим, что $\forall \Delta > 0 \quad \exists t \in (a, a+\Delta) \cup (b - \Delta, b) \quad (t, \varphi(t)) \in K$

   В частности при $\Delta = \frac{h}{2}$, где $h = \max \{\}$

   (...)

∎

Теорема 17 (о системе, сравнимой с линейной)**.** $G = (a,b) \times \mathbb{R} \quad f \in C(G \to \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Lip}_{r,loc}(G)$

$\exists u, v \in C(a,b)$

$$|f(t,r) \leqslant u(t) \cdot |r| + v(t)|$$

$\implies$ Задача Коши для системы $\dot{r} = f(t,r)$ имеет единственное максимальное решение, заданное на (a,b)

Доказательство. Предположим противное: φ – макисмальное решение Задачаи Коши

$$\dot{r} = f(t, r) \quad r(t_0) = r_0$$

определено на (α, β), где не умаляя общности $b < \beta$

задача Коши $\iff \varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$

$\lhd t? = t_0$

$$|\varphi(t)| \leqslant |\varphi(t_0)| + \int_{t_0}^{t} |f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau|\,.$$

∎