Линейная Алгебра

Коченюк Анатолий

12 ноября 2020 г.

0.1 Введение

Трифанов Александр Игоревич

Два модуля: аналитическая геометрия, линейная алгебра

Отчётность: дз, кр, лабы, рубежное тестирование, экзамен

дз (16 штук(8 в модуль) по 2 баллв)

кр (4 (2 в модуль) 5 баллов)

лаба (1-2 по 5 баллов)

рубежный тест (1)

Глава 1

I курс

1.1 Матрицы и операции над ними

Определение 1. Матрица – прямоугольная таблицв чисел

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots, \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$a_{i,j} \in \mathbb{R}$ – элементы матрицы

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ – строка 1

$a_{12}, a_{22}, a_{32}, \dots, a_{m2}$ – столбец 2

a_{ij} – элемент на пересечении i-той строки и j-того столбца

В матрице выше m строк и n столюцов. $A_{m\times n}$ – обозначение

Замечание. $n = m \implies A_{n\times n}$ – квадратная матрица

$\{a_{ii}\}_{i=1}^{n}$ – диагональ матрицы $A_{n\times n}$

Замечание. $A = \|a_{ij}\|$ $B = \|b_{ij}\|$

Замечание. $A = B \iff$

- одинаковые размеры
- $\forall i, j a_{ij} = b_{ij}$

Операции с матрицами:

1. Умножение на число:

   $B = \alpha \cdot A \iff \forall i, j \quad b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$

2. Сложение:

   Пусть A, B – одинакового размера

   $A + B = C : \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \forall i, j$

   Замечание. $\lhd \mathbb{O} : \mathbb{O} + A = A + \mathbb{O} = A$

   $\mathbb{O}$ – полностью состоит из нулей

Свойства:

- коммутативность сложения (следует из коммутативности сложения чисел) $A + B = B + A$
- ассоциативность (–||–) $(A + B) + C = A + (B + C)$
- дистрибутивность $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $\forall A \quad -A = -1 \cdot A : \quad A + (-A) = \mathbb{O}$ противоположный элемент по сложению

3 Умножение матриц

   Пусть $A_{m \times l}, B_{l \times n}$

   $C = A \cdot B \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} \cdot b_{kj} = C_{m \times n}$

Замечание. $A \cdot B \neq B \cdot A$

Для квадратных матриц вводится такое понятие, как коммутатор

$[AB] = A \cdot B - B \cdot A$

Пример. $A \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Замечание. $\lhd I : A \cdot I = I \cdot A = A$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Свойства:

- некоммутативность $A \cdot B \neq B \cdot A$
- ассоциативность $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

- дистрибутивность1 $A(B+C) = AB + AC$
- дистрибутивность2 $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Определение 2. $\lhd N \neq \mathbb{O}: \quad N^k = N \cdot N \cdot \ldots \cdot N = \mathbb{O}$

N – нильпотентная матрица, k – её порядок нильпотентности

Пример. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Определение 3. Идемпотентной матрица называется, если $N^k = I$

k – порядок идемпотентности

Пример. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

4 Транспонирование

$A_{m \times n} = \|a_{ij}\|$ Пусть $B = A^T = \|b_{ij}\| \implies b_{ij} = a_{ji}$

Свойства:

- $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T \cdot A^T$ – проверить для себя

Замечание. $A: \quad A = A^T$ – симметричная/симметрическая матрица.Любая квадратная матрица с симметричными относительно диагонали элементами.

$A: \quad A = -A^T$ – антисимметричная матрица. На главной диагонали стоят нули

$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix}$ – верхняя треугольная. Транспонированная – нижняя треугольная матрица

1.2 Определитель

$$\sqsupset A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n_1} & a_{n_2} & .. & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Определение 4. Определитель – это число

$\sqsupset A_{1x1} = (a_{11}) \qquad \det A \equiv |A| = a_{11}$

$\sqsupset A_{2x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

$\sqsupset A_{3x3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$

Мнемоническое правило для случая с тремя:

берём диагонали в одну сторону с + в другую с -.

Пример. $\sqsupset A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

$\det A = -28 - 18 + 4 - (-21 + 4 - 24) = -1$

$\lhd \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m_1} & a_{m_2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix}$

Определение 5. Дополнительный минор элемента a_{ij} – определитель матрицы, полученной из исходно1 вычёркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Обозначение: M_{ij}

Утверждение 1 (Рекуррентная формула вычисления определителя)**.** $\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i+j} \cdot M_{ij}$, где j – номер любого столбца. Эта формула называется разложением определителя по j-ому столбцу.

$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$ – разложение по i-ой строке

$\lhd (-1)^{i+j} M_{ij} = \mathcal{A}_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}

Пример. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} = A$

$\det A = (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} =$

$= 25 - 22 - 4 = -1$

Пример.
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$$
$\ldots$

Пример. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

В нижних (верхних) треугольных матрицах определитель – просто произведение элементов

Свойства определителя:

1. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0$

2. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \alpha_1 \cdot a_1 + b_1 & \alpha_2 \cdot a_2 + b_2 & \ldots & \alpha_n \cdot a_n + b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$

4. $\det(A^T) = \det(A)$ (всё, что работает со строчками, работает и со столбцами)

5. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} + c_1 & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} + c_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & c_1 & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & c_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$

   $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

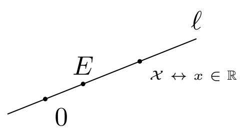
6. $\begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha a_1 & \alpha a_2 & \ldots & \alpha a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$

Пример. $\left. \begin{matrix} 1280 \\ 2848 \\ 1184 \\ 3072 \end{matrix} \right| \vdots \, 32$

TODO —

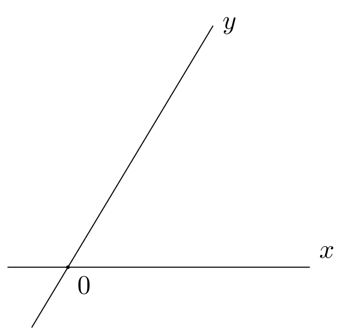
1.3 Лекция 1 - Метод аналитической геометрии

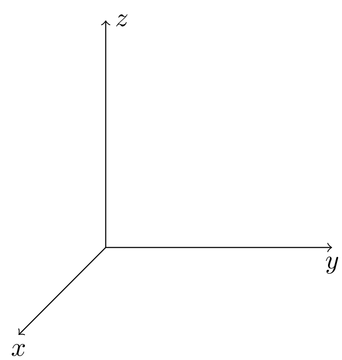
метод – метод координат.



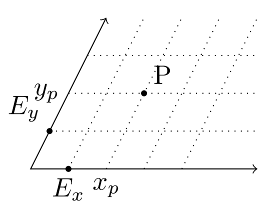
– координатная линия

Замечание. Система координат на плоскости – две координатные линии



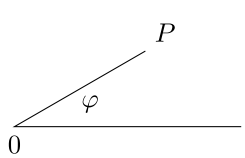


> **Определение 6.** Система координат называется декартовой, если
>
> 1. Углы между координатными линиями прямые
> 2. Масштабы на осях одинаковые



(x_p, y_p) – координаты точки P.

Полярная система координат:



(TODO) ——————————————-

1.4 Практика 3

1.4.1 Обратная матрица

$\sqsupset A, B$ – квадратные матрицы $n \times n$

Матричная алгебра:

1. $A + B$
2. $\lambda \cdot A$
3. $A \cdot B$

Определение 7 (Обратная матрица)**.** $A^{-1} \qquad A^{-1}A = AA^{-1} = I$

Утверждение 2. Обратная к A матрица существует, если и только если $\det A \neq 0$

Задача 1. $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = ?$

1. Метод союзной матрицы $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A}^T$

   Определение 8. $\widetilde{A}$ союзная матрица – матрица алгебраических дополнений элементов матрицы A

   $\det A = (-1) \cdot 7 + 3 \cdot 11 + 1 \cdot 12 = 38$

   $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -7 & -20 \\ -7 & 11 & -12 \\ 5 & 3 & 14 \end{bmatrix}$

   $A^{-1} = \frac{1}{38} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 \\ -7 & 11 & 3 \\ -20 & -12 & 14 \end{bmatrix}$

   $\lhd A \cdot A^{-1} = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 \\ -7 & 11 & 3 \\ -20 & -12 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Метод Гаусса $[A|I] \sim [I|A^{-1}]$

Элементарные преобразования:

(a) Умножение на число $\lambda \neq 0$ одной строчки

(b) Перестановка двух любых строк

(c) Составление линейной комбинации строк

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}5 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 8 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 5 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 8 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -14 & 3 & 1 & -5 & 0\\ 0 & -20 & 7 & 0 & -8 & 1\end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -140 & 30 & 10 & -50 & 0\\ 0 & -140 & 49 & 0 & -56 & 7\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -14 & 3 & 1 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 19 & -10 & -6 & 7\end{array}\right] \sim \dots$$

Системы уравнений:

$$\begin{cases}2x + y + 4z = -5\\ x + 3y - 6z = 2\\ 3x - 2y + 2z = 9\end{cases}$$

Заметим, что стандартный способ решения таких систем: упрощение, складывание строк, домножение на число строк, их комбинация – напоминают элементарные преобразования. Т.е. элементарные преобразования – преобразования, приводящие к эквивалентной системе.

1. Метод Гаусса $\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 4 & -5\\ 1 & 3 & -6 & 2\\ 3 & -2 & 2 & 9\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & -6 & 2\\ 2 & 1 & 4 & -5\\ 3 & -2 & 2 & 9\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & -6 & 2\\ 0 & -5 & 16 & -9\\ 0 & -11 & 20 & 3\end{array}\right] \sim$

   $$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & -6 & 2\\ 0 & -55 & 176 & -99\\ 0 & -55 & 100 & 15\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & -6 & 2\\ 0 & -5 & 16 & -9\\ 0 & 0 & -76 & 114\end{array}\right]$$

   $$\begin{cases}x + 3y - 6z = 2 & x = 2\\ -5y + 16z = -9 & y = -3\\ -76z = 114 & z = -\frac{3}{2}\end{cases}$$

2. Метод Крамера

   $$\Delta = \begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & 3 & -6\\ 3 & -2 & 2\end{vmatrix} = 2 \cdot (-6) + 1 \cdot (-20) + 4 \cdot (-11) = -12 - 20 - 44 = -76$$

   $$\Delta_x = \begin{vmatrix}-5 & 1 & 4\\ 2 & 3 & -6\\ 9 & -2 & 2\end{vmatrix} = (-5) \cdot (-6) - 1 \cdot 58 + 4 \cdot (-22) = -152$$

   $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-152}{-76} = 2$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & -6 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

3. метод обратной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$AX = B \quad X = A^{-1}B$

$$A^{-1} = -\frac{1}{76} \begin{bmatrix} -6 & 20 & -11 \\ -10 & -8 & 7 \\ -18 & 16 & 5 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{76} \begin{bmatrix} 6 & 10 & 18 \\ -20 & 8 & -16 \\ 11 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

$A^{-1}B = X$

1.5 Лекция 3

$V/\sim = W$

$\vec{a} + \vec{b}$

Напоминание:

1. $\exists - (\vec{a})$
2. $\exists \vec{0}$
3. $\lambda \vec{a} \quad \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$

1.5.1 Проекция вектора на ось

Определение 9. Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось γ называется класс эквивалентности $a_l^{\|\gamma}$, содержащий вектор, начало которого совпадает с точкой пересечения оси l и прямой парралельной γ и проходящей через начало вектора $\vec{a}$, а конец – с точкой пересечения оси l и прямой, параллельной γ и проходящей через конец вектора $\vec{a}$

Свойства проекции:

1. $(\vec{a} + \vec{b})_l^{\|\gamma} = \vec{a}_l^{\|\gamma} + \vec{b}_l^{\|\gamma}$
2. $(\lambda \vec{a})_l^{\|\gamma} = \lambda \vec{a}_l^{\|\gamma}$

$\underline{\lim}$: $\left(\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{a}_i \right)_l^{\|\gamma} = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{a}_{i_l}^{\|\gamma}$

$\sqsupset \vec{e}$ – вектор, параллельный l. Положим $|\vec{e}| = 1 \implies$ орт оси l

$\sphericalangle \vec{a}_l^{\|\gamma} = \alpha \cdot \vec{e} \quad \alpha = (\text{Пр}_l^{\|\gamma} \vec{a}) \cdot \vec{e} \qquad \alpha$ – длина проекции $\vec{a}_l^{\|\gamma}$ на ось l.

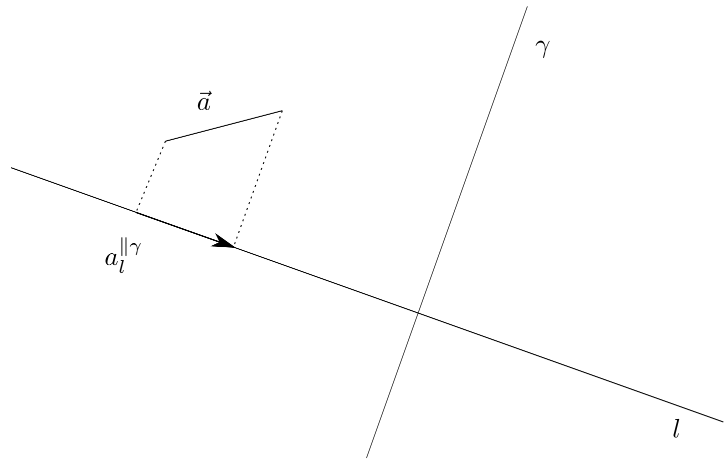


Рис. 1.1: Проекция

Лемма 1. $\text{Пр}_l^{\|\gamma}\left[\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i\right] = \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{Пр}_l^{\|\gamma} \vec{a}_i$

Доказательство. $\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i\right)_l^{\|\gamma} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_{i_l}^{\|\gamma}$

$\text{Пр}_l^{\|\gamma}\left[\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i\right] = \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{Пр}_l^{\|\gamma} \vec{a}_i \vec{e}$ ■

$\mathbb{R}^1$

$\forall \vec{a} \qquad \vec{a} = x_a \vec{e} \quad x_a$ – координата вектора $\vec{a}$ на ось l

$\mathbb{R}^2$

$\vec{a} = \vec{a}_x^{\|y} + \vec{a}_y^{\|x} = \text{Пр}_y^{\|x} \vec{a} \vec{\vec{e}}_1 + \text{Пр}_y^{\|x} \vec{a} \vec{e}_2 = x_x \vec{e}_1 + a_y \vec{e}_2$

Определение 10. Говорят, что в базисе $\{e_1, e_2\}$ вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\vec{a}(a_x, a_y)$

$\mathbb{R}^3$

$\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$

Замечание. Если угол между осью l и прямой γ прямой ($l \perp \gamma$) $\implies$ $\vec{a}_l^{\|\gamma} = \vec{a}_l^{\perp} = \text{Пр}_l^{\perp} \vec{a} \cdot \vec{e}$

$l \perp \Gamma \implies \vec{a} + l^{\perp\Gamma} = \vec{a}_l^{\perp} = -||-$

Рис. 1.2: r1

В декартовой системе координат орты координатных осей обозначаются следующим образом:

x $\vec{e}_1 = \vec{i}$

y $\vec{e}_2 = \vec{j}$

z $\vec{e}_3 = \vec{k}$

Замечание. $\vec{a}(1, 2, 3) \implies \vec{a} = 1 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k}$

Лемма 2. $\left(\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{a}_i\right)_x = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{a}_{i_x}$

1.6 Лекция 4

1.6.1 Скалярное произведение

$W = V/\sim$

Определение 11. $(\vec{a}\vec{b}) = |\vec{a}| \, \text{Пр}^{\perp}_{\vec{a}} \vec{b}$

Замечание. $(\vec{a}\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos gamma$

Алгебраические свойства:

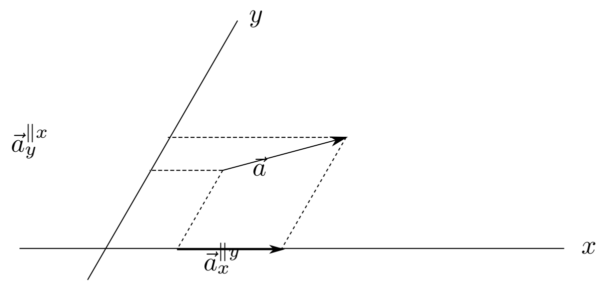


Рис. 1.3: r2

1. $\left(\vec{a}\vec{b}\right) = \left(\vec{b}\vec{a}\right)$
2. $\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right) = (\vec{a},\vec{c}) + \left(\vec{b},\vec{c}\right)$

   Доказательство. $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = |\vec{c}|\,\text{Пр}^{\perp}_{\vec{a}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = |\vec{c}|\left(\text{Пр}^{\perp}_{\vec{c}}\,\vec{a}\right)$ ■

3. $(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \lambda(\vec{a},\vec{b})$

Геометрические свойства:

1. $\vec{a} \perp \vec{b} \quad \vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b} \implies (\vec{a},\vec{b}) = 0$
2. $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2$
3. $\sqsupset |\vec{a}| = 1 \implies (\vec{a},\vec{b}) = \text{Пр}^{\perp}_{\vec{a}}\,\vec{b}$

   Замечание. $\text{Пр}^{\perp}_{\vec{i}}\,\vec{b} = (\vec{i},\vec{b})$

Скалярное произведение в координатах:

- Декартова Прямоугольная Система Координат.

  $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

  $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

  $(\vec{a}\vec{b}) = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$

  $\cos\varphi = \frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

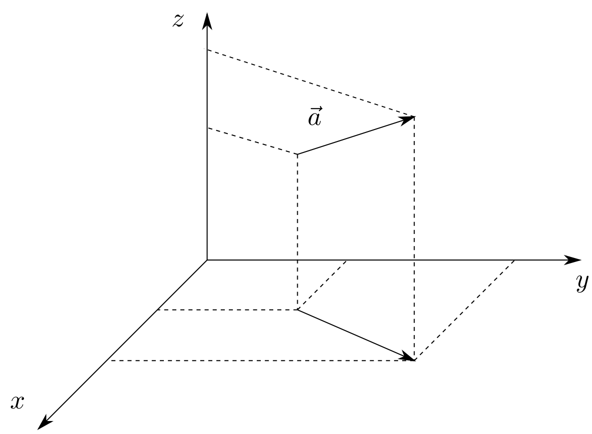


Рис. 1.4: r3

- Произвольная Система Координат.

  $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \sum_{j=1}^{3} a_j\vec{e}_j$

  $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3 = \sum_{k=1}^{3} b_k\vec{e}_k$

  $(\vec{a}, \vec{b}) = \left(\sum_{j=1}^{3} a_k\vec{e}_j \cdot \sum_{k=1}^{3} b_k\vec{e}_k\right) = \sum_{j,k=1}^{3} a_j b_k(\vec{e}_j\vec{e}_k)$ – достаточно знать скалярное произведение базисных векторов. $g_{jk} = \vec{e}_j\vec{e}_k$ называется метрическим тензором.

  $(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{j,k=1}^{3} a_j b_k g_{jk}$

  Замечание. В ДПСК $g_{jk} = \delta jk = \begin{cases} 0 & ,j \neq k \\ 1 & ,j = k \end{cases}$ δ – символ Кронекера

  $g_{jk} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$ – матрица Грама

  $a^T \cdot g \cdot b = (\vec{a}, \vec{b})$

1.6.2 Векторное произведение

$W = V/\sim$

$\vec{a}, \vec{b} \in W$

$\vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a}\vec{b}\right] = \vec{c}$ – вектор:

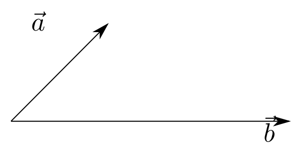


Рис. 1.5: скалярное произведение

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi = |\vec{a}_\perp| \left|\vec{b}\right| = |\vec{a}| \left|\vec{b}_\perp\right|$

2. $\vec{c} \perp \vec{a} \quad \vec{c} \perp \vec{b} \quad \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – правая тройка (Буравчик, штопор)

Алгебраические свойства:

1. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}\right]$

2. $\left[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right] = [\vec{a}, \vec{c}] + \left[\vec{b}, \vec{c}\right]$

   Доказательство. $[\vec{a}, \vec{c}] = \left[\vec{a}_\perp, \vec{b}\right]$

   $\left[\vec{a}_\perp + \vec{b}_\perp, \vec{c}\right] = [\vec{a}_\perp, \vec{c}] + \left[\vec{b}_\perp, \vec{c}\right]$

   Если нарисовать картиночку, там будут углы с перпендикулярными сторонами и всё будет хорошо. ■

3. $\left[\alpha\vec{a}, \vec{b}\right] = \alpha\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$

   Доказательство. $\vec{m} = \left[\alpha\vec{a}, \vec{b}\right] \qquad \vec{n} = [\vec{a},]vecb]$

   $|\vec{m}| = |\alpha|\,|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin(\alpha\vec{a}, \vec{b}) \qquad |n| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin(\vec{a}, \vec{b})$

   Если $\alpha < 0$, то у одного другая ориентация тройки, а у другого отрицательный множитель ■

Геометрические свойства:

1. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Longleftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}$

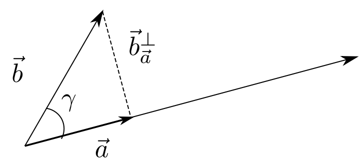


Рис. 1.6: note

2. $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi = S_{\square}$

Замечание. $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = k\times\vec{k} = \vec{0}$

$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k} \quad \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j} \quad \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$

$[\vec{a},\vec{b}] = (a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}) = (a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}$

Можно упростить запоминание: $a_xb_y-a_yb_x = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_x \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

Хотя формально так делать плохо, потому что в матрице объекты разной природы: скаляры и векторы.

Общий случай:

$\vec{a} = \sum_{m=1}^{3} a_m\vec{e}_m$

$\vec{b} = \sum_{n=1}^{3} b_n\vec{e}_n$

Точно: $e_m\times e_m = \vec{0}\forall m$

$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{e}_1\times\vec{e}_2 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{e}_1\times\vec{e}_3 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{e}_2\times\vec{e}_3$

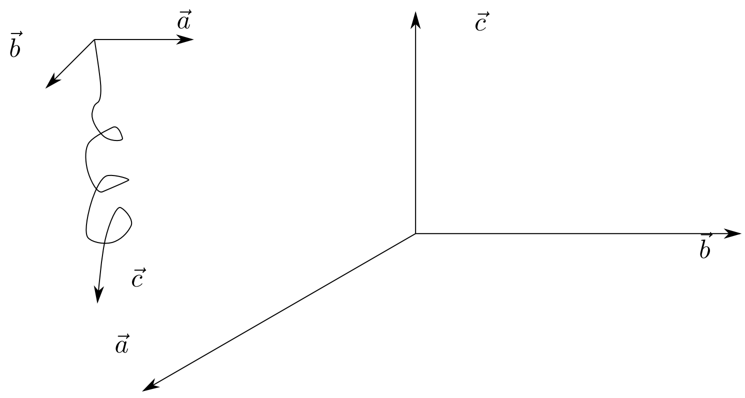


Рис. 1.7: shtopor

$\vec{e}_1 \vec{e}_2 = \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_i e_i$

1.7 Практика 4: Векторная Алгебра

Пример. $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{n}{m}$

$\vec{r}_C = ?$

$\vec{r}_C = \frac{n}{m+n} \left(\vec{r}_B - \vec{r}_A\right) + \vec{r}_A$

п1 Скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \operatorname{Pr}^{\perp}_{\vec{a}} \vec{b}$

Пример. $\sqsupset |\vec{a}| = 1 \quad \left|\vec{b}\right| = 2 \qquad (\vec{a} - \vec{b})^2 + (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = 20$

$|\vec{a}|^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + \left|\vec{b}\right|^2 + |\vec{a}|^2 + 4(\vec{a}, \vec{b}) + 4\left|\vec{b}\right|^2 = 20$

$2(\vec{a}, \vec{b}) = -2 \implies (\vec{a}, \vec{b}) = -1 \quad \cos\varphi = -\frac{1}{2} \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}$

Пример. $\vec{a}(1, 2, 1) \quad \vec{b}\,(2, 3, 1,)$

$\operatorname{Pr}_{\vec{a}}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{Pr}_{\vec{a}} \vec{a} + \operatorname{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |a| + \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|}$

Теперь посчитаем то же самое. но пусть вектора заданы в косоугольном базисе.

$\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n} \quad \vec{b} = 3\vec{m} - 2\vec{n} \qquad |\vec{m}| = 2 \quad |\vec{n}| = 3 \quad \angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$

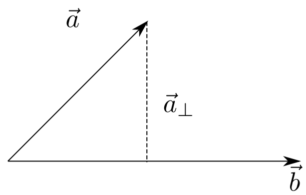


Рис. 1.8: couple

Проекция и скалярное произведение не зависят от базиса.

$|\vec{a}|^2 = (2\vec{m} + 2\vec{n})^2 = 4\vec{|}m|^2 + 4(\vec{m}, \vec{n}) + \vec{|}n|^2$

Пример. $\vec{AB} = 2\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 \quad \vec{AC} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \quad |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1 \quad \angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \frac{\pi}{2}$

$\cos\alpha = \frac{(\vec{AB}, \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = 0 \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$

Аналогично остальные, вектор третеьй стороны можно выразить из двух других, как радиус векторов из A

Пример. $A(1,2,3) \quad B(1,1,1) \quad C(1,0,1)$ – три точки параллелограмма

$O(1,1,2) \quad \overrightarrow{OB}(0,0,-1) \quad \overrightarrow{OC}(0,-1,-1) \quad \cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)}{\left|\overrightarrow{OB}\right| \left|\overrightarrow{OC}\right|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}}$

Пример. $\vec{a} = \alpha\vec{m} + \beta\vec{n} \quad \vec{b} = \gamma\vec{m} + \delta\vec{n} \quad \vec{a} \not\parallel \vec{b} \quad |\vec{n}|, |\vec{m}|, |\vec{m}\vec{n}|$ – знаем

$\cos\varphi = \frac{|\vec{a}|^2 - \left|\vec{b}\right|^2}{\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \cdot \left|\vec{a} - \vec{b}\right|}$

$|\vec{a}|^2 = (\vec{a}, \vec{a}) = (\alpha\vec{m} + \beta\vec{n})^2$, для $\vec{b}$ так же

Проверка того, что параллелограмм $\frac{\alpha}{\gamma} \neq \frac{\beta}{\delta}$

Пример. $\vec{x}(1,2,2) \quad \vec{e}_1(1,-1,1) \quad \vec{e}_2(-2,0,1)$

$\vec{x}' = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$

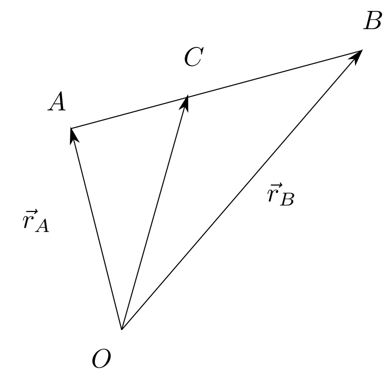


Рис. 1.9: vec

$\vec{x} = \vec{x}' + \vec{z}$

$\vec{x} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \vec{z} \quad \begin{cases} (\vec{x}, \vec{e}_1) = \alpha(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + \beta(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \\ (\vec{x}, \vec{e}_2) = \alpha(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + \beta(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \end{cases}$

$\begin{cases} 3\alpha - \beta = 1 \\ -\alpha + 5\beta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{5}{14} \\ \beta = \frac{1}{14} \end{cases}$

1.7.1 Векторное произведение

$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin(\varphi)$

При векторном произведении можно не учитывать компоненту

Пример. $[\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}] = [\vec{a}, \vec{a}] + [\vec{a}, \vec{b}] - [\vec{b}, \vec{a}] + [\vec{b}, \vec{b}] = 0 + [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{b}] + 0 = 2[\vec{a}, \vec{b}]$

Получается площадь образуемого параллелограмма.

Пример.

1.8 Лекция 5

1.8.1 Смешанное произведение

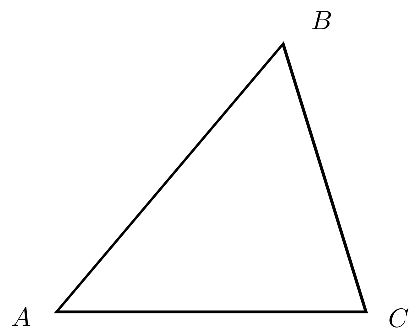


Рис. 1.10: trive

Определение 12. $\sqsupset \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число w

$$w = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]).$$

w – псевдоскаляр

Замечание. Алгебраические свойства:

1. Общие свойства векторного и скалярного произведений
2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны $\iff (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = 0$
3. $\left(\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right) = |\vec{a}| \left|\left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right| \cdot \cos\left(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]\right) = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| |\vec{c}| \sin(\vec{b}, \vec{c}) \cos\left(\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right)$

   получается объём следующего параллелограмма (рисунок)

   Замечание. $V_{\text{Пар}}$ – ориентированный объём

   $\begin{cases} V > 0 & , (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ – правая тройка} \\ V < 0 & , (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ – левая тройка} \end{cases}$

4. $\lhd \left([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$

   $\lhd(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = \left(\left[\vec{b}, \vec{c}\right], \vec{c}\right) = -\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$

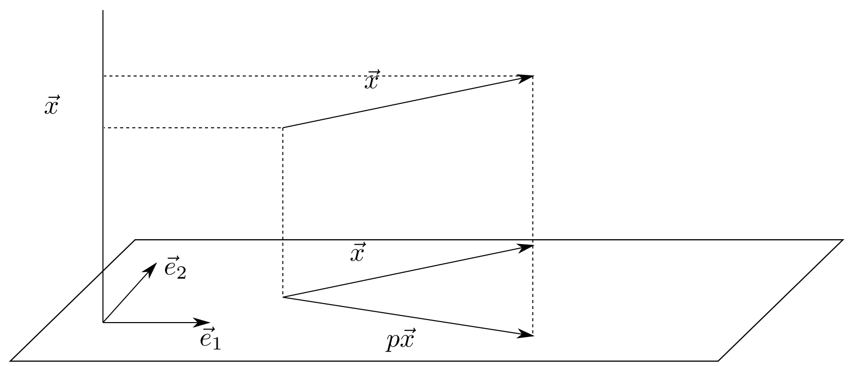


Рис. 1.11: pr

1.8.2 Смешанное произведение а координатах

1. Базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \quad \vec{i}\vec{j}\vec{k} = 1$

   $\vec{a}(a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b}(b_x, b_y, b_z) \quad \vec{c}(c_x, c_y, c_z)$

   $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right)\left(c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}\right) = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\left(\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}\vec{k} - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}\vec{i}\right) = a_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}(\vec{i}\vec{j}\vec{k})$ – число элементарных объёмов, которые помещаются в задаваемый параллелепипед

2. Произвольный базис. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

   $\vec{a}(a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b}(b_1, b_2, b_3) \quad \vec{c}(c_1, c_2, c_3)$

   $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)(c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \cdot (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, где $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ – объём параллелепипеда для меры

1.8.3 Двойное векторное произведение

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \quad \vec{v} = \left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right]$

$\vec{v} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$

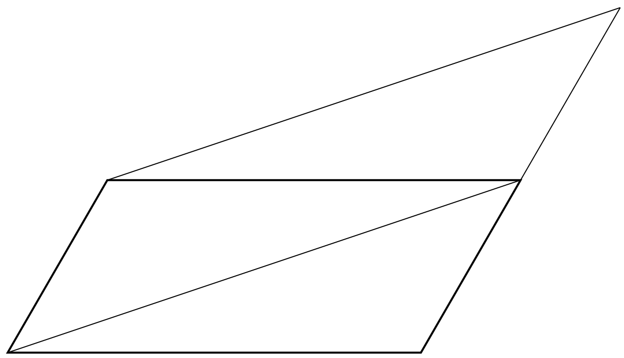


Рис. 1.12: paral

1. $\vec{v} = \vec{b}\,(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$

   Доказательство. $\left[\vec{b}, \vec{c}\right] = (b_y b_z - c_y c_z)\vec{i} - (b_x c_z - c_x b_z)\,\vec{j} + (b_y c_z - c_y b_z)\,\vec{k}$

   $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = (a_y(b_x c_y - c_x b_y) + a_z\,(b_x c_z - c_x b_z))\,\vec{i} - (a_x\,(b_x c_y - c_x b_y) - a_z\,(b_y c_z - b_z c_y))\,\vec{j} + (a_x\,(b_z c_x - c_z b_x) - a_y\,(b_y c_z - b_z c_y))\,\vec{k}$

   $v_x = b_x\,(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_x\,(a_x b_x + a_y b_y + a_z c_z)$

   $\lhd a_y b_x c_y - a_y c_x b_y + a_z b_x c_z - a_z c_x b_z = b_x(a_y c_y + a_z c_z) - c_x\,(a_y b_y + a_z b_z) + a_x b_x c_x - a_x b_x c_x = \vec{v}_x$

   Дальше то же самое для второй и третьей компонент (Упражнение: дома проделать для одной из оставшихся координат) ∎

Теорема 1 (Тождество Бьянки)**.** $\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right] + \left[\vec{b}, [\vec{c}, \vec{a}]\right] + \left[\vec{c}, \left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right] = \vec{0}$

Доказательство. $\vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) + \vec{c}(\vec{b}\vec{a}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c}) - \vec{b}(\vec{c}\vec{a}) = \vec{0}$ ∎

$d(f, g) = (df)(g) + (f)(dg)$

$\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right] = \left[\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\vec{c}\right] + \left[\vec{b}, [\vec{a}, \vec{c}]\right]$

Позволяет считать двойное векторное произведение некоторым аналогом дифференцирования.

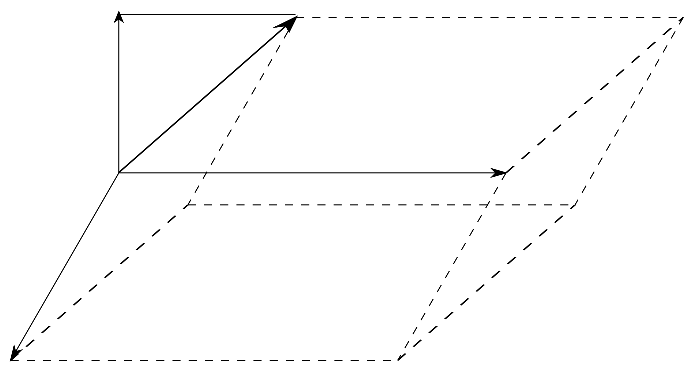


Рис. 1.13: mixed

1.9 Лекция 6

1.9.1 Аналитическая геометрия

Прямые и плоскости

1. Прямая на плоскости.

   P_1, P_2 – произвольные различные точки на плоскости.

   Прямая – геометрическое место точек, равноудалённых от этих двух.

   $|PP_1| = |PP_2|$

   Пусть O – точка отсчёта. $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP}_1, \vec{r}_2 = \overrightarrow{OP}_2$ – два радиус вектора

   $|\vec{r} - \vec{r}_1|^2 = |\vec{r} - \vec{r}_2|$

   $|\vec{r}_2| - 2\left(\vec{r}\vec{r}_1\right) + |\vec{r}_1|^2 = |\vec{r}| - 2\left(\vec{r}\vec{r}_2\right) + |\vec{r}_2|^2$

   $2\left(\vec{r}, -\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = |\vec{r}_2|^2 - |r_1|^2 = \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_2 + \vec{r}_1\right)$

   $\left(\vec{r} - \frac{\vec{r}_2 + \vec{r}_1}{2}, \vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) = 0 \iff \vec{r} - \underbrace{\frac{\vec{r}_2 + \vec{r}_1}{2}}_{\vec{r}_0} \perp \underbrace{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}_{\vec{n}}$

   $\vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{n} \quad \left(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}\right) = 0$
   $\left(\vec{r}, \vec{n}\right) = \left(\vec{r}_0, \vec{n}\right)$ – нормальное уравнение прямой

   $$\left(\vec{r}\vec{n}\right) = \left(\vec{r}_0\vec{n}\right).$$

   Способы задания:

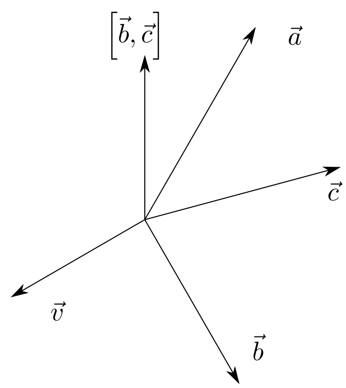


Рис. 1.14: dvec

(a) В ДПСК $\vec{r}(x,y), \vec{n}(a,b), \vec{r}_0(x_0,y_0)$

$$ax + by = ax_0 + by_0 = -c \qquad a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$
$$ax + by + c = 0.$$

Последнее – общее уравнение прямой.

(b) $\vec{r} - \vec{r}_0 \parallel \vec{s} \implies \exists t : \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{s}t$

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t \quad \vec{s}$ – направляющий вектор, любой ненулевой, смотрящий вдоль прямой

(c) $\vec{z}(x,y) \quad \vec{r}_0(x_0,y_0) \quad \vec{s}(\alpha,\beta)$

$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$ – параметрическое уравнение прямой.

(d) $\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta}$ – каноническое уравнение прямой.

Пример. $l: \quad 2x + 3y - 1 = 0$ Рассмотрим $A(1,1)$, которая не лежит на прямой

$l': \quad 2(x-1) + 3(y-1) = 0$ – уравнение прямой, проходящей через A параллельно ℓ

$l'': \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3}$ – уравнение прямой, проходящей через A перпендикулярно ℓ (её направляющая – нормаль изначальной)

Пример. $\frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{4} \quad A(1,1)$

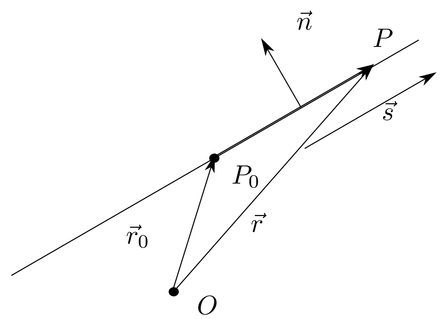


Рис. 1.15: line

$l': \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4}$

$l'': 2(x-1) + 4(y-1) = 0$

2. Уравнение прямой с произвольным параметром

   $ax + by + c = 0 \quad | \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

   $Ax + By + C = 0$

   $C = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = -(\vec{r}_0, \vec{n}^0)$

   C – прицельный параметр – (по модулю) расстояние от прямой до начала координат.

3. Уравнение прямой в отрезках.

$$ax + by = -c.$$

   $\frac{ax}{-c} + \frac{by}{-c} = 1$

   $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$

4. Уравнение с угловыми коэффициентами.

   $\frac{a}{b}x + y = -\frac{c}{b}$

   $y = kx + l$

   $\operatorname{tg} \varphi = k$

5. Уравнение прямой через две точки

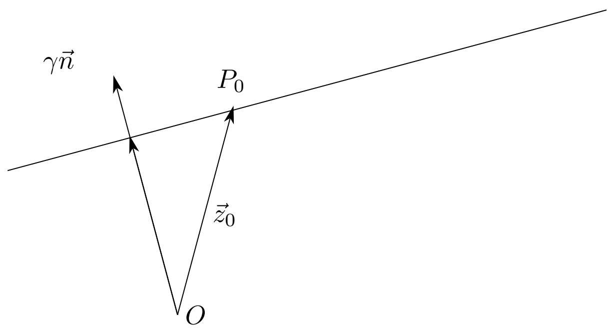


Рис. 1.16: radvec

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

$\vec{r}=\vec{r}_1+(\vec{r}_2-\vec{r}_1)t$

Взаимное расположение прямых:

1. Найти угол между прямыми:

   $l_1: \quad (\vec{r}\vec{n}_1)=D_1$

   $l_2: \quad (\vec{r},\vec{n}_2)=D_2$

   $\angle(l_1,l_2)=\angle(\vec{n}_1,\vec{n}_2)=\varphi$

   $\cos\varphi=\frac{(\vec{n}_1,\vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

2. Точка пересечения $(\vec{r}_1,\vec{n}_1)=D_1$

   $(\vec{r}_2,\vec{n}_2)=D_2$

   $\vec{n}_1(a_1,b_1) \quad \vec{n}_2\,(a_2,b_2) \quad \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$

   $\vec{r}_0$ – радиус вектор токи пересечения прямых

   $a_1x+b_1y=D_1 \quad a_2x+b_2y=D_2$

   $\triangle=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$

   $\triangle_x=D_1b_2-b_1D_2$

   $\triangle_y=a_1D_2-a_2D_1$

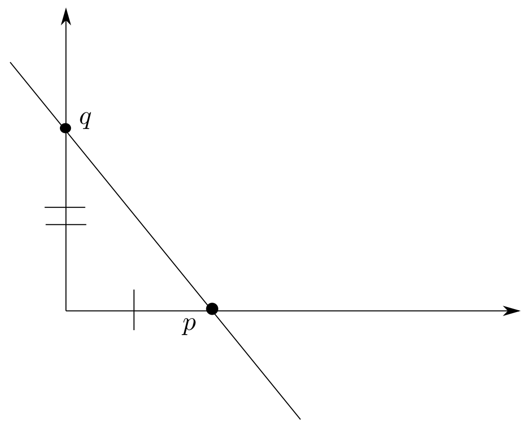


Рис. 1.17: отрезок

$x = \frac{D_1 b_2 - b_1 D_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$

$y = \frac{a_1 D_2 - a_2 D_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$

Подойдём с другой стороны:

$l_1 : \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{s}_1 t$

$l_2 : \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{s}_2 t$

$\vec{s}_1 \not\parallel s_2 \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \neq \frac{\beta_1}{\beta_2}$

$\vec{r}_1 + \vec{s}_1 t = \vec{r}_2 + \vec{s}_2 t$

$\vec{s}_1 t - \vec{s}_2 t = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$\alpha_1 t_1 - \alpha_2 t_1 = x_2 - x_1$

$\beta_1 t_1 - \beta_2 t_1 = y_2 - y_1$

$\triangle = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0$

3. Есть прямая ℓ и точка $P \notin \ell$

   $(\vec{r}, \vec{n}) = D = (\vec{r}_0, \vec{n}) \quad \ell, P_0$

   $\vec{r}_p \quad P$

   Сначала найдём ортогональную проекцию точки P – точку Q

   $\vec{r}_Q = \vec{r}_P + \overrightarrow{PQ} = \vec{r}_P - \alpha \vec{n}$

   $|QP| = (\overrightarrow{P_0 P}, \vec{n}_0) = \frac{\left(\overrightarrow{P_0 P}, \vec{n}\right)}{|\vec{n}|}$

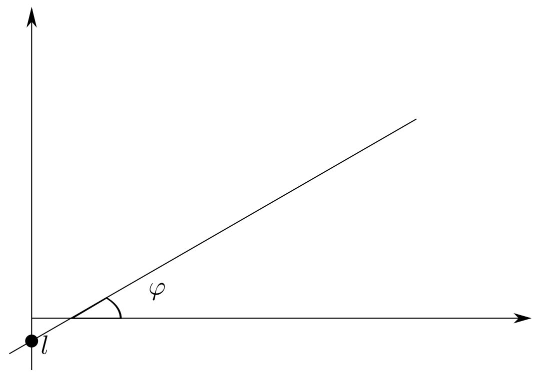


Рис. 1.18: coeff

$\overrightarrow{QP} = |QP|\,\vec{n} = \frac{\left(\overrightarrow{P_0P},\vec{n}\right)}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = \frac{(\vec{r}_p-\vec{r}_0,\vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n}\ \vec{r}_q = \vec{r}_p - \overrightarrow{QP} = \vec{r}_p - \frac{(\vec{r}_p,\vec{n})-D}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$

$II: \quad (\vec{r}_q,\vec{n}) = (\vec{r}_p,\vec{n}) - \alpha\,|\vec{n}|^2$

$D = (\vec{r}_p,\vec{n}) - \alpha\,|\vec{n}|^2 \implies \alpha = \frac{(\vec{r}_0,\vec{n})-D}{|\vec{n}|}$

Расстояние от P до ℓ $\quad \rho(P,\ell) = \left|\overrightarrow{QP}\right| = \frac{(\vec{r}_p,\vec{n})-D}{|\vec{n}|}$

В координатах: $\rho(P,\ell) = \frac{ax_p+by_p-D}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Плоскость – множество точек пространство, равноудалённых от фиксированных точек.

$|P_1P| = |P_2P|$

$\left(\vec{r}_0 - \frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2}, \vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = 0$

$(\vec{r},\vec{n}) = (\vec{r}_0,\vec{n}) = D$ – нормальное векторное уравнение плоскости

ДПСК: $\vec{n}(A,B,C)$

$(\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{n}) = 0 \quad A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0$

$(\vec{r},\vec{n}) = D \quad Ax+By+Cz = D$ – общее уравнение плоскости

Параметрическое уравнение плоскости

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{P_0P} = \vec{r}_0 + \alpha\vec{m} + \beta\vec{q}$ – векторное параметрическое уравнение плоскости

ДПСК: $\begin{cases} x = x_0 + \alpha m_1 + \beta q_1 \\ y = y_0 + \alpha m_2 + \beta q_2 \\ z = z_0 + \alpha m_2 + \beta q_3 \end{cases}$ $\quad \vec{m}(m_1, m_2, m_3) \quad \vec{q}(q_1, q_2, q_3)$

Плоскость можно задать через три точки. P_1, P_2, P_3

Если нам нужна нормаль, образуем два вектора $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad \vec{r}_3 - \vec{r}_1$

$\vec{n} = [\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1] \quad \vec{r}_0 = \vec{r}_1$

$(\vec{r}, \vec{n}) = (\vec{r}_1, \vec{n})$

$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{n})$

$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0$

ДПСК: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_1 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$

Для паремтрического уравнения: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \alpha (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \beta (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)$

Уравнение плоскости с прицельным параметром. $Ax + By + Cz + D = 0 \quad \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} z + \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0 \quad \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ – прицельный параметр

$D = (\vec{r}_0, \vec{n})$ Прицельный параметр: $(\vec{r}_0, \vec{n}) / |\vec{n}|$

Взаимное расположение плоскостей: $(\vec{r}, \vec{n}_1) = D_1 \quad (\vec{r}, \vec{n}_2) = D_2$ – две плоскости

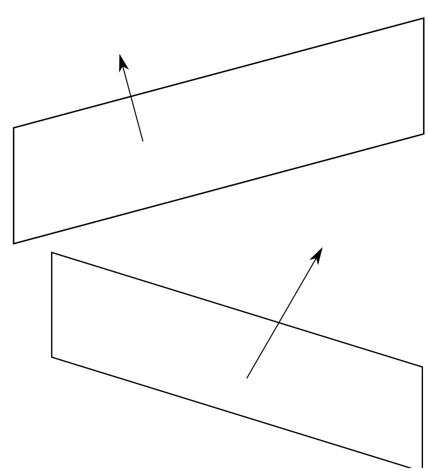


Рис. 1.19: плоскости

1. Угол

   $\angle(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) = \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$

2. Пересечение

   $[\vec{n}_1, \vec{n}_2] \neq 0$

3. Параллельность

   $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \implies \vec{n}_2 = \lambda\vec{n}_1$

   $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{n}) = 0 \quad (\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{n}_1) = (\vec{r}_2, \vec{n}_1) - D = \frac{D_2}{\lambda} - D_1 \left(= \frac{|\vec{n}_1|}{|\vec{n}_2|} D_2 - D_1 \neq 0\right)$

   $(\vec{r}, \lambda\vec{n}_1) = D_2 \quad D_1 = \frac{D_2}{\lambda} \quad \lambda = \frac{D_2}{D_1} = \frac{|\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|}$

4. Совпадение $\frac{D_2}{|\vec{n}_2|} = \frac{D_1}{|\vec{n}_1|}$

Пример. Даны плоскость и точка, не лежащая на плоскости. найдём точку проекции.

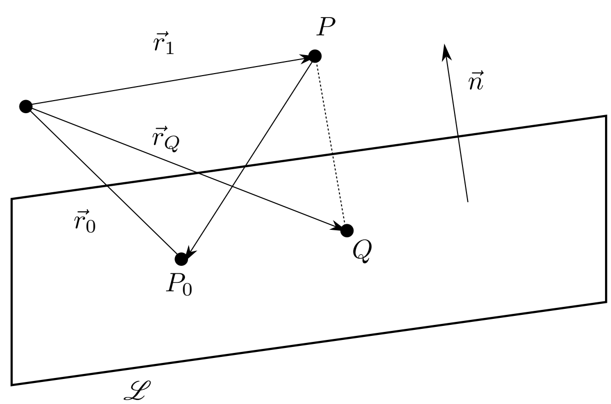


Рис. 1.20: проекция

$\mathscr{L} \quad (\vec{r}, \vec{n}) = D$

$P \quad \vec{r}_1$

$\vec{r}_Q - ?$

$\vec{r}_Q = \vec{r}_1 + \overrightarrow{PQ} = \vec{r}_1 + \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_1, \vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = \vec{r}_1 + \frac{D - (\vec{r}_1, \vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$

$\rho(P, \mathscr{L}) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\frac{D - (\vec{r}, \vec{n})}{|\vec{n}|^2}\right|$

Прямая в пространстве.

Три точки задают прямую, равноудалённую от них всех

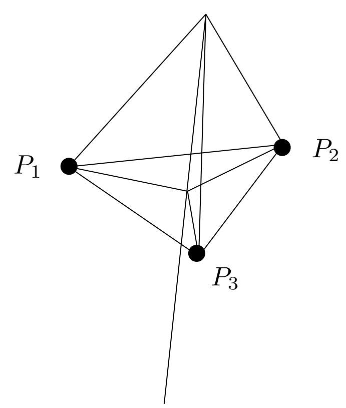


Рис. 1.21: прямая-через-3-точки

$|PP_1| = |PP_2| = |PP_3|$

(вывод будет позже)

$\vec{s}$ – нормаль к плоскости, образованной тремя точками.

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{P_0P} = \vec{r}_0 + \vec{s}t$ – векторное параметрическое уравнение прямой

ДПСК: $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases} \qquad \vec{s}\,(\alpha, \beta, \gamma) \quad \vec{r}_0\,(x_0, y_0, z_0) \quad \vec{r}\,(x, y, z)$

Векторное уравнение: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t \quad \times \vec{s}$

$[\vec{r}, \vec{s}] = [\vec{r}_0, \vec{s}] = \vec{b}$

$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}$ – каноническое уравнение прямой (выразили t и приравняли)

Через две точки $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$

Через две пересекающиеся плоскости. $\begin{cases} (\vec{r}, \vec{n}_1) = D_1 \\ (\vec{r}, \vec{n}_2) = D_2 \end{cases} \qquad [\vec{n}_1, \vec{n}_2] \neq 0$

$\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$

Прямая(взаимное расположение)

$\ell_1 \quad [\vec{r}, \vec{s}_1] = \vec{b}_1$

$\ell_2 \quad [\vec{r}, \vec{s}_2] = \vec{b}_2$

1. $\ell_1 \parallel \ell_2$

   $[\vec{s}_1, \vec{s}_2] = 0 \implies \vec{s}_2 = \lambda \vec{s}_1$

   $[\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{s}] \neq 0$

2. $\ell_1 = \ell_2$

   $[\vec{s}_1, \vec{s}_2] = 0$

   $[\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{s}] = 0$

   Плоскость через $\ell_1 \parallel \ell_2$

   $\vec{n} = [\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{s}]$

   $(\vec{r}, \vec{n}) = (\vec{r}_0, \vec{n})$

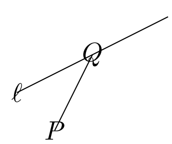
   $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{s}) = 0$ – уравнение плоскости

3. Скрещивание $\ell_1 \times \ell_2$

   $(\vec{n} =) \, [\vec{s}_1, \vec{s}_2] \neq 0$

   $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{n}) \neq 0 \quad (\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2) \neq 0$

Пример. Есть прямая, есть точка. Найти отогональную проекцию этой точки на прямую.



$[\vec{r}, \vec{s}] = \vec{b}$

$\vec{r}_p \quad P$

$\vec{r}_Q$–?

$\vec{r}_Q = \vec{r}_p + \overrightarrow{PQ}$

$(\vec{r}, \vec{s}) = (\vec{r}_p, \vec{s})$ – плоскость

$[\vec{s}, [\vec{r}, \vec{s}]] = \vec{r}(\vec{s}\vec{s}) - \vec{s}(\vec{s}\vec{r}) = \left[\vec{b}, \vec{s}\right]$

$\vec{r}_Q \, |\vec{s}|^2 - \vec{s} \, (\vec{r}_p \vec{s}) - \left[\vec{b}, \vec{s}\right]$

1.10 Практика

Пример. Даны две прямые, заданные параметрическими уравнениями:

$$l_1 : \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \end{cases}$$

$$l_2 : \quad \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 + t \end{cases}$$

1. Параллельны ли они?

   Набавляющие вектора $\vec{s}_1(2,-1) \quad \vec{s}_2(-1,1) \implies \vec{s}_1 \not\parallel s_2 \implies$ пересекаеются

2. Найти точку пересечения

   $1 + 2t = 2 - t \implies t = \frac{1}{3} \implies x = \frac{5}{3}$

   $1 - t = 2 + t \implies t = -\frac{1}{2} \implies y = \frac{3}{2}$

   $l_1 : \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} \quad \begin{cases} x + 2y = +3 \\ x + y = 4 \end{cases}$

   $l_2 : \quad \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{1}$

   $y = -1, x = 5$ – точка пересечение. верхний способ не работает, там разные t

Пример. $l_1 : \quad 2x + y + 2 = 0$
$l_2 : 4x + y + 1 = 0$

$A(1,2) \quad AB = AC \quad l =?$, чтобы проходила через BC

Можно найти точку пересечения прямых $O = l_1 \cap l_2$

$\begin{cases} 2x + y = -2 \\ 4x + y = -1 \end{cases} \implies 2x = 1 \quad x = \frac{1}{2} \quad y = -3 \quad O(\frac{1}{2}, -3) \quad OA(\frac{1}{2}, 5) \implies O'(\frac{3}{2}, 7)$

$2(x - \frac{3}{2}) + (y - 7) = 0$

$2x + y - 10 = 0$

$C = l' \cap l_2 \quad \begin{cases} 2x + y = 10 \\ 4x + y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{11}{2} \\ y = 21 \end{cases} \implies l : \frac{x-1}{-\frac{11}{2}-1} = \frac{y-2}{21-2}$ – ответ

Пример. $A(1,3) \quad B(2,5)$ – две вершины треугольника. $H(1,4)$ – точка пересечения высот этого треугольника. Найти треться точку треугольника C

$\overrightarrow{AB} = (1,2) \implies l = 1(x-1) + 2(y-4) = 0 \quad x + 2y = 3$

$\overrightarrow{AH}(0,1) \implies l' : y = 5$

$C = l \cap l' \implies C(-1,5)$

Плоскости:

$(\vec{r}\vec{n}) = (\vec{r}_0, \vec{n}) = \alpha$

$Ax + By + Cz + \alpha = 0 \quad \vec{r} = \vec{r}_0 +]alpha\vec{q} + \beta\vec{m}$

Пример. $A(1,1,1) \quad B(2,3,-1) \quad \vec{a}(0,-1,2)$

$\overrightarrow{AB}(1,2,-2)$

$\vec{r} = \vec{r}_a + \alpha\vec{a} + \beta\overrightarrow{AB}$

Пример. $A(1,1,-1)$

$\alpha_1 : 2x - y + 5z + 3 = 0$
$\alpha_2 : x + 3y - z - 7 = 0$

$\alpha : \alpha \perp \alpha 1, \alpha \perp \alpha_2 \quad A \in \alpha \quad \alpha?$

$\vec{n}_1(2,-1,5) \quad \vec{n}_2(1,3,-1) \implies \vec{n}_1 \not\parallel \vec{n}_2 \implies \vec{r} = \vec{r}_a + \alpha\vec{n}_1 + \beta\vec{n}_2$

Пример. $\alpha : 2x + 3y + 6z - 12 = 0$

Вычислить объём фигуры, ограниченной тремя координатными и заданной плоскостями.

$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1 \implies$ Знаем пересечения плоскости с координатными плоскостями.

$V = 8$

Пример. $L = \begin{cases} x + 2y - 3z - 5 = 0 \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$ – уравнение прямой через пересечение непараллельных плоскостей.

Найти каноническое уравнение прямой.

$\vec{n}_1(1,2,-3) \quad \vec{n}_2(2,-1,1)$

$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - u\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\sqsupset z = 0 \quad \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2 + -y = -2 \end{cases} \qquad -5y = -12 \quad \begin{cases} y = \frac{12}{5} \\ x = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$\frac{x-\frac{1}{5}}{-1} = \frac{y-\frac{12}{5}}{-7} = \frac{z-0}{-5}$

Пример. $L: \quad \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-3}{-1} (= t) \quad \alpha : x + +2y + 3z + 3 = 0$

$\sqsupset P = L \cap \alpha \quad P-?$

$\vec{s}(1, -2, -1) \quad \vec{n}(1, 2, 3)$

$\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$ – вставляем в урванение для плоскости

$t + 2(3 - 2t) + 3(3 - t) + 3 = 0$

$-6t = -18 \implies t = 3 \implies \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \\ z = 0 \end{cases}$

Пример. $L: \quad \frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-5}{4}$

$\alpha : x - 3y + 2z - 7 = 0$

Найти проекцию прямой L на плоскость α

$\vec{n} \times \vec{s}$

1.11 Практика: Кривые второго порядка на плоскости

Определение 13. Эллипс – геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до выбранных точек (называемых фокусами) постоянна.

F_1, F_2 – фокусы

a – длина большой полуоси

b – длина малой полуоси

c – фокусное расстояние $c^2 = a^2 - b^2$

В Декартовой системе координат. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\varepsilon = \frac{c}{a} \in [0, 1]$ – эксцентриситет

$\varepsilon = 0 \implies$ окружность $a^2 = b^2 = R^2$

$\varepsilon = 1 \implies a = c$

Уравнение касательной в точке (x_0, y_0)

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Директриса эллипса $x = \pm d = \pm \frac{a}{\varepsilon}$

Пример. Фокусы эллипса $(\pm 1, 0)$

$M(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \in E$

Построить уравнение эллипса E

Доказательство. $c = 1 = a^2 - b^2$

$\frac{3}{a^2} + \frac{3}{4*b^2} = 1$

Два уравнения с двумя неизвестными $\implies b = \sqrt{3} \quad a = 2 \qquad \implies \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ■

Пример. Директрисы $x = \pm 4$

Фокусы всесте с верхней и нижней точкой образуют квадрат

Найти уравнение эллипса

Доказательство. $b = c \implies a^2 - b^2 = c^2 \quad a^2 = 2c^2 \quad a = \sqrt{2}c$

$d = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a^2}{c} = \frac{2c^2}{c} = 4 \implies c = 2 \implies b = 2 \quad a = 2\sqrt{2}$

$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ ■

Определение 14. Гипербола – геометрическое место точек, (модуль) разность расстояний от которой до заданных точек есть число постоянное

$||F_1P| - |F_2P|| = const$

F_1, F_2 – фокусы гиперболы

Уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$c^2 = a^2 + b^2$

Уравнение асимптот $y = \pm\frac{b}{a}x$

Уравнение касательной в точке (x_0, y_0)

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Уравнение директрисы $x = \pm d = \frac{a}{\varepsilon}$

$\varepsilon = \frac{c}{a} \in [1, \infty)$

$\varepsilon = 1 \implies a = c$

$\varepsilon \to \infty \implies b \to \infty$ – две прямые, проходящие через фокусы вертикально.

Пример. Доказать, что отрезок касательной к гиперболе, заключённый между её асимптотами точкой касания делится пополам.

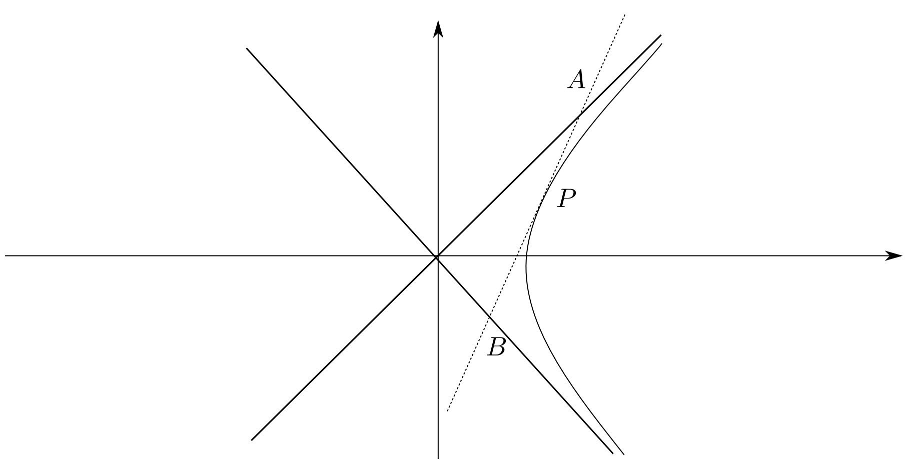


Рис. 1.22: zodacha

$|AP| = |BP|$

Доказательство. $\begin{cases} \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \\ y = \pm \frac{b}{a} x \end{cases}$

$$A: \quad \frac{x_A x_0}{a^2} - \frac{b}{a} \frac{x_A y_0}{b^2} = 1 \implies x_A = \frac{1}{\frac{x_0}{a^2} - \frac{y_0}{ab}} = \frac{a^2 b}{x_0 b - y_0 a}.$$

$$B: \quad \frac{x_B x_0}{a^2} + \frac{b}{a} \frac{x_b y_0}{b^2} = 1 \implies x_B = \frac{a^2 b}{x_0 b + y_0 a}.$$

$x_A + x_B = a^2 b \frac{2x_0 b}{x_0^2 b^2 - y_0^2 a^2} = \frac{2x_0}{\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}} = 2x_0$ ■

Определение 15. Парабола – геометрическое место точек, равноудалённых от заданной прямой и точки

$\rho(l, F) = |PF|$

F – фокус параболы Уравнение $y^2 = 2px$

Уравнение касательной $yy_0 = p(x + x_0)$

Пример. $y^2 = 4.5x$

$M : \rho(l, M) = 9.125$

$|OM| -?$

Доказательство. $\frac{p}{2} = 1.125$

$M_x = 8 \implies M_y = 36$

$|OM|^2 = x_M^2 + y_M^2 = 36 + 64 = 100$ ■

Пример. Найти касательную к параболе $y^2 = 16x$, проходящую через точку $(1, 5)$

Доказательство. $\begin{cases} yy_0 = p(x + x_0) \\ y_0^2 = 2px \end{cases}$

$yy_0 = p\left(x + \frac{y_0^2}{2p}\right)$

$y_M y_0 = p\left(x_M + \frac{y_0^2}{2p}\right) \implies y_0 = \ldots$ ■