Линейная Алгебра

Коченюк Анатолий

20 декабря 2020 г.

0.1 Введение

Трифанов Александр Игоревич

Два модуля: аналитическая геометрия, линейная алгебра

Отчётность: дз, кр, лабы, рубежное тестирование, экзамен

дз (16 штук(8 в модуль) по 2 баллв)

кр (4 (2 в модуль) 5 баллов)

лаба (1-2 по 5 баллов)

рубежный тест (1)

Глава 1

I курс

1.1 Матрицы и операции над ними

Определение 1. Матрица – прямоугольная таблицв чисел

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots, \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$a_{i,j} \in \mathbb{R}$ – элементы матрицы

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ – строка 1

$a_{12}, a_{22}, a_{32}, \dots, a_{m2}$ – столбец 2

a_{ij} – элемент на пересечении i-той строки и j-того столбца

В матрице выше m строк и n столюцов. $A_{m\times n}$ – обозначение

Замечание. $n = m \implies A_{n\times n}$ – квадратная матрица

$\{a_{ii}\}_{i=1}^{n}$ – диагональ матрицы $A_{n\times n}$

Замечание. $A = \|a_{ij}\|$ $B = \|b_{ij}\|$

Замечание. $A = B \iff$

- одинаковые размеры
- $\forall i, j a_{ij} = b_{ij}$

Операции с матрицами:

1. Умножение на число:

   $B = \alpha \cdot A \iff \forall i, j \quad b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$

2. Сложение:

   Пусть A, B – одинакового размера

   $A + B = C : \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \forall i, j$

   Замечание. $\triangleleft \mathbb{O} : \mathbb{O} + A = A + \mathbb{O} = A$

   $\mathbb{O}$ – полностью состоит из нулей

Свойства:

- коммутативность сложения (следует из коммутативности сложения чисел) $A + B = B + A$
- ассоциативность (–||–) $(A + B) + C = A + (B + C)$
- дистрибутивность $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $\forall A \quad -A = -1 \cdot A : \quad A + (-A) = \mathbb{O}$ противоположный элемент по сложению

3 Умножение матриц

   Пусть $A_{m \times l}, B_{l \times n}$

   $C = A \cdot B \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} \cdot b_{kj} = C_{m \times n}$

Замечание. $A \cdot B \neq B \cdot A$

Для квадратных матриц вводится такое понятие, как коммутатор

$[AB] = A \cdot B - B \cdot A$

Пример. $A \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Замечание. $\triangleleft I : A \cdot I = I \cdot A = A$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Свойства:

- некоммутативность $A \cdot B \neq B \cdot A$
- ассоциативность $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

- дистрибутивность1 $A(B+C) = AB + AC$
- дистрибутивность2 $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Определение 2. $\lhd N \neq \mathbb{O}: \quad N^k = N \cdot N \cdot \ldots \cdot N = \mathbb{O}$

N – нильпотентная матрица, k – её порядок нильпотентности

Пример. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Определение 3. Идемпотентной матрица называется, если $N^k = I$

k – порядок идемпотентности

Пример. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

4 Транспонирование

$A_{m\times n} = \|a_{ij}\|$ Пусть $B = A^T = \|b_{ij}\| \implies b_{ij} = a_{ji}$

Свойства:

- $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T \cdot A^T$ – проверить для себя

Замечание. $A: \quad A = A^T$ – симметричная/симметрическая матрица.Любая квадратная матрица с симметричными относительно диагонали элементами.

$A: \quad A = -A^T$ – антисимметричная матрица. На главной диагонали стоят нули

$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix}$ – верхняя треугольная. Транспонированная – нижняя треугольная матрица

1.2 Определитель

$$\sqsupset A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n_1} & a_{n_2} & .. & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Определение 4. Определитель – это число

$\sqsupset A_{1x1} = (a_{11}) \qquad \det A \equiv |A| = a_{11}$

$\sqsupset A_{2x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

$\sqsupset A_{3x3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$

Мнемоническое правило для случая с тремя:

берём диагонали в одну сторону с + в другую с -.

Пример. $\sqsupset A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

$\det A = -28 - 18 + 4 - (-21 + 4 - 24) = -1$

$\lhd \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m_1} & a_{m_2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix}$

Определение 5. Дополнительный минор элемента a_{ij} – определитель матрицы, полученной из исходно1 вычёркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Обозначение: M_{ij}

Утверждение 1 (Рекуррентная формула вычисления определителя)**.** $\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i+j} \cdot M_{ij}$, где j – номер любого столбца. Эта формула называется разложением определителя по j-ому столбцу.

$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$ – разложение по i-ой строке

$\lhd (-1)^{i+j} M_{ij} = \mathcal{A}_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}

Пример. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} = A$

$\det A = (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} =$

$= 25 - 22 - 4 = -1$

Пример.
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$$
$\dots$

Пример. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

В нижних (верхних) треугольных матрицах определитель – просто произведение элементов

Свойства определителя:

1. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$

2. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \alpha_1 \cdot a_1 + b_1 & \alpha_2 \cdot a_2 + b_2 & \dots & \alpha_n \cdot a_n + b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$

4. $\det(A^T) = \det(A)$ (всё, что работает со строчками, работает и со столбцами)

5. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} + c_1 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} + c_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & c_1 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & c_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$

   $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

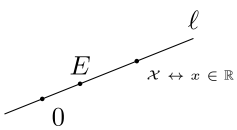
6. $\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_1 & \alpha a_2 & \dots & \alpha a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$

Пример. $\begin{matrix} 1280 \\ 2848 \\ 1184 \\ 3072 \end{matrix} \Bigg| \vdots\, 32$

TODO —–

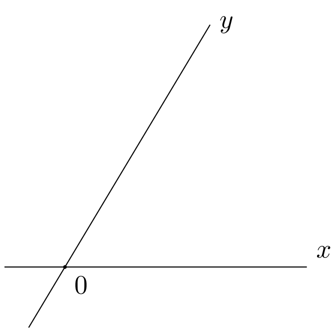
1.3 Лекция 1 - Метод аналитической геометрии

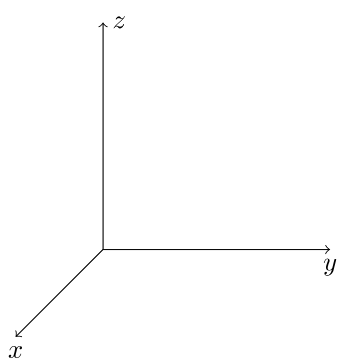
метод – метод координат.



– координатная линия

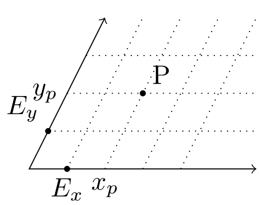
Замечание. Система координат на плоскости – две координатные линии





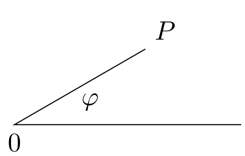
Определение 6. Система координат называется декартовой, если

1. Углы между координатными линиями прямые
2. Масштабы на осях одинаковые



(x_p, y_p) – координаты точки P.

Полярная система координат:



(TODO) ——————————————-

1.4 Практика 3

1.4.1 Обратная матрица

$\sqsupset A, B$ – квадратные матрицы $n \times n$

Матричная алгебра:

1. $A + B$
2. $\lambda \cdot A$
3. $A \cdot B$

Определение 7 (Обратная матрица)**.** $A^{-1} \qquad A^{-1}A = AA^{-1} = I$

Утверждение 2. Обратная к A матрица существует, если и только если $\det A \neq 0$

Задача 1. $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} =?$

1. Метод союзной матрицы $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^T$

   Определение 8. $\tilde{A}$ союзная матрица – матрица алгебраических дополнений элементов матрицы A

   $\det A = (-1) \cdot 7 + 3 \cdot 11 + 1 \cdot 12 = 38$

   $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -7 & -20 \\ -7 & 11 & -12 \\ 5 & 3 & 14 \end{bmatrix}$

   $A^{-1} = \frac{1}{38} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 \\ -7 & 11 & 3 \\ -20 & -12 & 14 \end{bmatrix}$

   $\lhd A \cdot A^{-1} = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 \\ -7 & 11 & 3 \\ -20 & -12 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Метод Гаусса $[A|I] \sim [I|A^{-1}]$

Элементарные преобразования:

(a) Умножение на число $\lambda \neq 0$ одной строчки

(b) Перестановка двух любых строк

(c) Составление линейной комбинации строк

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -20 & 7 & 0 & -8 & 1 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -140 & 30 & 10 & -50 & 0 \\ 0 & -140 & 49 & 0 & -56 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & -10 & -6 & 7 \end{array}\right] \sim \dots$$

Системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = -5 \\ x + 3y - 6z = 2 \\ 3x - 2y + 2z = 9 \end{cases}$$

Заметим, что стандартный способ решения таких систем: упрощение, складывание строк, домножение на число строк, их комбинация – напоминают элементарные преобразования. Т.е. элементарные преобразования – преобразования, приводящие к эквивалентной системе.

1. Метод Гаусса $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & -5 & 16 & -9 \\ 0 & -11 & 20 & 3 \end{array}\right] \sim$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & -55 & 176 & -99 \\ 0 & -55 & 100 & 15 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & -5 & 16 & -9 \\ 0 & 0 & -76 & 114 \end{array}\right]$$
$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 2 & x = 2 \\ -5y + 16z = -9 & y = -3 \\ -76z = 114 & z = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

2. Метод Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -6 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6) + 1 \cdot (-20) + 4 \cdot (-11) = -12 - 20 - 44 = -76$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -6 \\ 9 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (-5) \cdot (-6) - 1 \cdot 58 + 4 \cdot (-22) = -152$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-152}{-76} = 2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & -6 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

3. метод обратной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$AX = B \quad X = A^{-1}B$

$$A^{-1} = -\frac{1}{76}\begin{bmatrix} -6 & 20 & -11 \\ -10 & -8 & 7 \\ -18 & 16 & 5 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{76}\begin{bmatrix} 6 & 10 & 18 \\ -20 & 8 & -16 \\ 11 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

$A^{-1}B = X$

1.5 Лекция 3

$V/\sim = W$

$\vec{a} + \vec{b}$

Напоминание:

1. $\exists -(\vec{a})$
2. $\exists \vec{0}$
3. $\lambda\vec{a} \quad \lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

1.5.1 Проекция вектора на ось

Определение 9. Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось γ называется класс эквивалентности $a_l^{\|\gamma}$, содержащий вектор, начало которого совпадает с точкой пересечения оси l и прямой парралельной γ и проходящей через начало вектора $\vec{a}$, а конец – с точкой пересечения оси l и прямой, параллельной γ и проходящей через конец вектора $\vec{a}$

Свойства проекции:

1. $(\vec{a}+\vec{b})_l^{\|\gamma} = \vec{a}_l^{\|\gamma} + \vec{b}_l^{\|\gamma}$
2. $(\lambda\vec{a})_l^{\|\gamma} = \lambda\vec{a}_l^{\|\gamma}$

$\underline{\lim}$: $\left(\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i\vec{a}_i\right)_l^{\|\gamma} = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i\vec{a}_{i_l}^{\|\gamma}$

$\sqsupset \vec{e}$ – вектор, параллельный l. Положим $|\vec{e}| = 1 \implies$ орт оси l

$\lessdot \vec{a}_l^{\|\gamma} = \alpha \cdot \vec{e} \quad \alpha = (\text{Пр}_l^{\|\gamma}\vec{a}) \cdot \vec{e} \qquad \alpha$ – длина проекции $\vec{a}_l^{\|\gamma}$ на ось l.

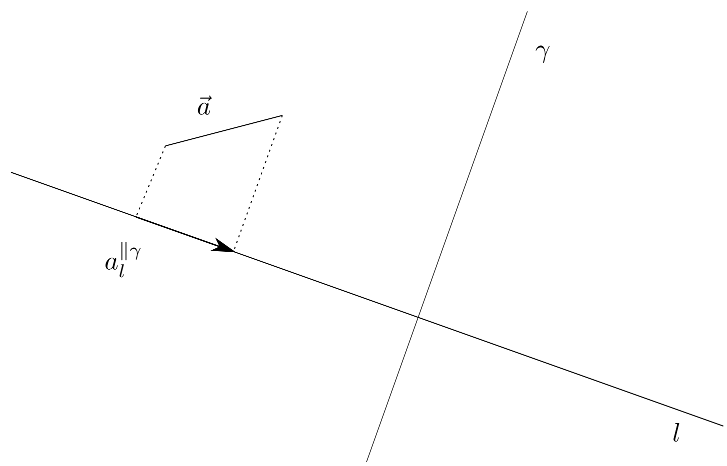


Рис. 1.1: Проекция

Лемма 1. $\text{Пр}_l^{\|\gamma}\left[\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i\right] = \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{Пр}_l^{\|\gamma} \vec{a}_i$

Доказательство. $\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i\right)_l^{\|\gamma} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_{i_l}^{\|\gamma}$

$\text{Пр}_l^{\|\gamma}\left[\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i\right] = \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{Пр}_l^{\|\gamma} \vec{a}_i \vec{e}$ ■

$\mathbb{R}^1$

$\forall \vec{a} \qquad \vec{a} = x_a \vec{e} \quad x_a$ – координата вектора $\vec{a}$ на ось l

$\mathbb{R}^2$

$\vec{a} = \vec{a}_x^{\|y} + \vec{a}_y^{\|x} = \text{Пр}_y^{\|x} \vec{a} \vec{e}_1 + \text{Пр}_y^{\|x} \vec{a} \vec{e}_2 = x_x \vec{e}_1 + a_y \vec{e}_2$

Определение 10. Говорят, что в базисе $\{e_1, e_2\}$ вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\vec{a}(a_x, a_y)$

$\mathbb{R}^3$

$\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$

Замечание. Если угол между осью l и прямой γ прямой ($l \perp \gamma$) $\implies \vec{a}_l^{\|\gamma} = \vec{a}_l^{\perp} = \text{Пр}_l^{\perp} \vec{a} \cdot \vec{e}$

$l \perp \Gamma \implies \vec{a} + l^{\perp \Gamma} = \vec{a}_l^{\perp} = -||-$

Рис. 1.2: r1

В декартовой системе координат орты координатных осей обозначаются следующим образом:

x $\vec{e}_1 = \vec{i}$

y $\vec{e}_2 = \vec{j}$

z $\vec{e}_3 = \vec{k}$

Замечание. $\vec{a}(1,2,3) \implies \vec{a} = 1 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k}$

Лемма 2. $\left(\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{a}_i\right)_x = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{a}_{i_x}$

1.6 Лекция 4

1.6.1 Скалярное произведение

$W = V/\sim$

Определение 11. $(\vec{a}\vec{b}) = |\vec{a}| \,\text{Пр}^{\perp}_{\vec{a}} \vec{b}$

Замечание. $(\vec{a}\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos gamma$

Алгебраические свойства:

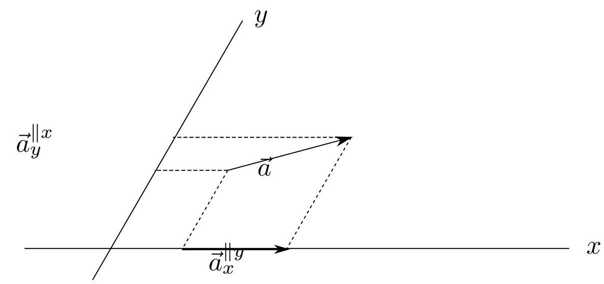


Рис. 1.3: r2

1. $\left(\vec{a}\vec{b}\right) = \left(\vec{b}\vec{a}\right)$
2. $\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right) = (\vec{a},\vec{c}) + \left(\vec{b},\vec{c}\right)$

   Доказательство. $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = |\vec{c}|\,\text{Пр}^{\perp}_{\vec{a}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = |\vec{c}|\left(\text{Пр}^{\perp}_{\vec{c}}\,\vec{a}\right)$ ■

3. $(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \lambda(\vec{a},\vec{b})$

Геометрические свойства:

1. $\vec{a}\perp\vec{b} \quad \vec{a}\neq\vec{0}\neq\vec{b} \implies (\vec{a},\vec{b}) = 0$
2. $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2$
3. $\sqsupset |\vec{a}| = 1 \implies (\vec{a},\vec{b}) = \text{Пр}^{\perp}_{\vec{a}}\vec{b}$

   Замечание. $\text{Пр}^{\perp}_{\vec{i}}\vec{b} = (\vec{i},\vec{b})$

Скалярное произведение в координатах:

- Декартова Прямоугольная Система Координат.

  $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

  $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

  $(\vec{a}\vec{b}) = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$

  $\cos\varphi = \frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

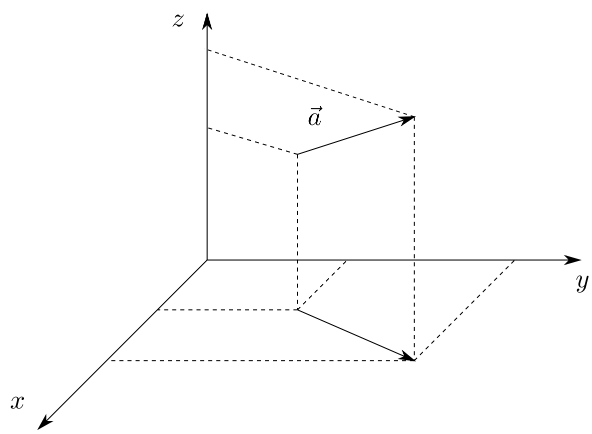


Рис. 1.4: r3

- Произвольная Система Координат.

  $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \sum_{j=1}^{3} a_j\vec{e}_j$

  $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3 = \sum_{k=1}^{3} b_k\vec{e}_k$

  $(\vec{a}, \vec{b}) = \left(\sum_{j=1}^{3} a_k\vec{e}_j \cdot \sum_{k=1}^{3} b_k\vec{e}_k\right) = \sum_{j,k=1}^{3} a_j b_k(\vec{e}_j\vec{e}_k)$ – достаточно знать скалярное произведение базисных векторов. $g_{jk} = \vec{e}_j\vec{e}_k$ называется метрическим тензором.

  $(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{j,k=1}^{3} a_j b_k g_{jk}$

  Замечание. В ДПСК $g_{jk} = \delta jk = \begin{cases} 0 & ,j \neq k \\ 1 & ,j = k \end{cases}$ $\quad\delta$ – символ Кронекера

  $g_{jk} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$ – матрица Грама

  $a^T \cdot g \cdot b = (\vec{a}, \vec{b})$

1.6.2 Векторное произведение

$W = V/\sim$

$\vec{a}, \vec{b} \in W$

$\vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a}\vec{b}\right] = \vec{c}$ – вектор:

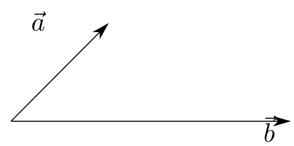


Рис. 1.5: скалярное произведение

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi = |\vec{a}_\perp| \left|\vec{b}\right| = |\vec{a}| \left|\vec{b}_\perp\right|$
2. $\vec{c} \perp \vec{a} \quad \vec{c} \perp \vec{b} \quad \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – правая тройка (Буравчик, штопор)

Алгебраические свойства:

1. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}\right]$
2. $\left[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right] = [\vec{a}, \vec{c}] + \left[\vec{b}, \vec{c}\right]$

   Доказательство. $[\vec{a}, \vec{c}] = \left[\vec{a}_\perp, \vec{b}\right]$

   $\left[\vec{a}_\perp + \vec{b}_\perp, \vec{c}\right] = [\vec{a}_\perp, \vec{c}] + \left[\vec{b}_\perp, \vec{c}\right]$

   Если нарисовать картиночку, там будут углы с перпендикулярными сторонами и всё будет хорошо. ■
3. $\left[\alpha\vec{a}, \vec{b}\right] = \alpha \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$

   Доказательство. $\vec{m} = \left[\alpha\vec{a}, \vec{b}\right] \quad \vec{n} = [\vec{a},]vecb]$

   $|\vec{m}| = |\alpha| \, |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \sin(\alpha\vec{a}, \vec{b}) \qquad |n| = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \sin(\vec{a}, \vec{b})$

   Если $\alpha < 0$, то у одного другая ориентация тройки, а у другого отрицательный множитель ■

Геометрические свойства:

1. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Longleftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}$

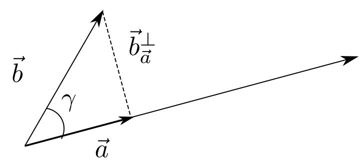


Рис. 1.6: note

2. $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi = S_{\square}$

Замечание. $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = k\times\vec{k} = \vec{0}$

$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k} \quad \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j} \quad \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$

$[\vec{a},\vec{b}] = (a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}) = (a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}$

Можно упростить запоминание: $a_xb_y-a_yb_x = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_x \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

Хотя формально так делать плохо, потому что в матрице объекты разной природы: скаляры и векторы.

Общий случай:

$\vec{a} = \sum_{m=1}^{3} a_m\vec{e}_m$

$\vec{b} = \sum_{n=1}^{3} b_n\vec{e}_n$

Точно: $e_m\times e_m = \vec{0}\forall m$

$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{e}_1\times\vec{e}_2 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{e}_1\times\vec{e}_3 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{e}_2\times\vec{e}_3$

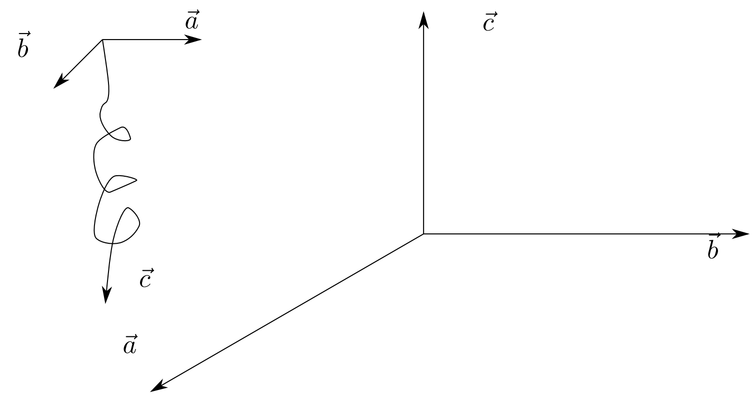


Рис. 1.7: shtopor

$\vec{e}_1\vec{e}_2 = \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_i e_i$

1.7 Практика 4: Векторная Алгебра

Пример. $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{n}{m}$

$\vec{r}_C = ?$

$\vec{r}_C = \frac{n}{m+n}\left(\vec{r}_B - \vec{r}_A\right) + \vec{r}_A$

п1 Скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \operatorname{Pr}^{\perp}_{\vec{a}} \vec{b}$

Пример. $\sqsupset |\vec{a}| = 1 \quad \left|\vec{b}\right| = 2 \qquad (\vec{a} - \vec{b})^2 + (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = 20$

$|\vec{a}|^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + \left|\vec{b}\right|^2 + |\vec{a}|^2 + 4(\vec{a}, \vec{b}) + 4\left|\vec{b}\right|^2 = 20$

$2(\vec{a}, \vec{b}) = -2 \implies (\vec{a}, \vec{b}) = -1 \quad \cos\varphi = -\frac{1}{2} \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}$

Пример. $\vec{a}(1, 2, 1) \quad \vec{b}\,(2, 3, 1,)$

$\operatorname{Pr}_{\vec{a}}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{Pr}_{\vec{a}} \vec{a} + \operatorname{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |a| + \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|}$

Теперь посчитаем то же самое. но пусть вектора заданы в косоугольном базисе.

$\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n} \quad \vec{b} = 3\vec{m} - 2\vec{n} \qquad |\vec{m}| = 2 \quad |\vec{n}| = 3 \quad \angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$

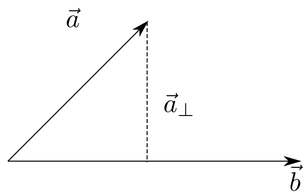


Рис. 1.8: couple

Проекция и скалярное произведение не зависят от базиса.

$|\vec{a}|^2 = (2\vec{m} + 2\vec{n})^2 = 4\vec{|}m|^2 + 4(\vec{m}, \vec{n}) + \vec{|}n|^2$

Пример. $\vec{AB} = 2\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 \quad \vec{AC} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \quad |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1 \quad \angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \frac{\pi}{2}$

$\cos\alpha = \frac{(\vec{AB}, \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = 0 \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$

Аналогично остальные, вектор третеьй стороны можно выразить из двух других, как радиус векторов из A

Пример. $A(1, 2, 3) \quad B(1, 1, 1) \quad C(1, 0, 1)$ – три точки параллелограмма

$O(1, 1, 2) \quad \overrightarrow{OB}(0, 0, -1) \quad \overrightarrow{OC}(0, -1, -1) \quad \cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)}{\left|\overrightarrow{OB}\right|\left|\overrightarrow{OC}\right|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}}$

Пример. $\vec{a} = \alpha\vec{m} + \beta\vec{n} \quad \vec{b} = \gamma\vec{m} + \delta\vec{n} \quad \vec{a} \not\parallel \vec{b} \quad |\vec{n}|, |\vec{m}|, |\vec{m}\vec{n}|$ – знаем

$\cos\varphi = \frac{|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{|\vec{a}+\vec{b}| \cdot |\vec{a}-\vec{b}|}$

$|\vec{a}|^2 = (\vec{a}, \vec{a}) = (\alpha\vec{m} + \beta\vec{n})^2$, для $\vec{b}$ так же

Проверка того, что параллелограмм $\frac{\alpha}{\gamma} \neq \frac{\beta}{\delta}$

Пример. $\vec{x}(1, 2, 2) \quad \vec{e}_1(1, -1, 1) \quad \vec{e}_2(-2, 0, 1)$

$\vec{x}' = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$

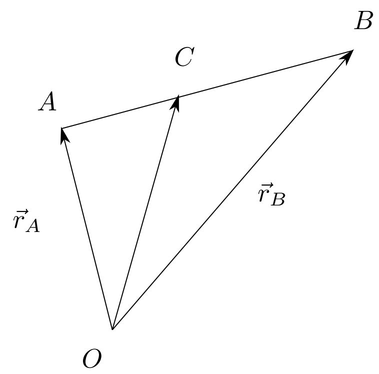


Рис. 1.9: vec

$\vec{x} = \vec{x}' + \vec{z}$

$\vec{x} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \vec{z}$ $\quad \begin{cases} (\vec{x}, \vec{e}_1) = \alpha(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + \beta(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \\ (\vec{x}, \vec{e}_2) = \alpha(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + \beta(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \end{cases}$

$\begin{cases} 3\alpha - \beta = 1 \\ -\alpha + 5\beta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{5}{14} \\ \beta = \frac{1}{14} \end{cases}$

1.7.1 Векторное произведение

$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin(\varphi)$

При векторном произведении можно не учитывать компоненту

Пример. $[\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}] = [\vec{a}, \vec{a}] + [\vec{a}, \vec{b}] - [\vec{b}, \vec{a}] + [\vec{b}, \vec{b}] = 0 + [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{b}] + 0 = 2[\vec{a}, \vec{b}]$

Получается площадь образуемого параллелограмма.

Пример.

1.8 Лекция 5

1.8.1 Смешанное произведение

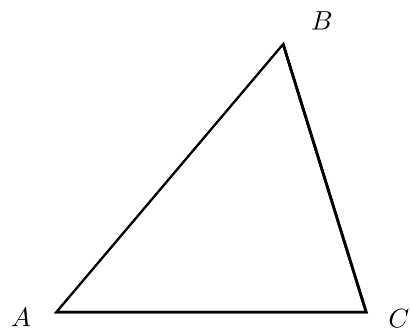


Рис. 1.10: trive

Определение 12. $\sqsupset \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число w

$$w = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]).$$

w – псевдоскаляр

Замечание. Алгебраические свойства:

1. Общие свойства векторного и скалярного произведений
2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны $\iff (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = 0$
3. $\left(\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right) = |\vec{a}| \left|\left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right| \cdot \cos\left(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]\right) = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| |\vec{c}| \sin(\vec{b}, \vec{c}) \cos\left(\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right)$

   получается объём следующего параллелограмма (рисунок)

   Замечание. $V_{\text{Пар}}$ – ориентированный объём

   $$\begin{cases} V > 0 & , (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ – правая тройка} \\ V < 0 & , (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ – левая тройка} \end{cases}$$

4. $\lhd \left([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$

   $\lhd(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = \left(\left[\vec{b}, \vec{c}\right], \vec{c}\right) = -\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$

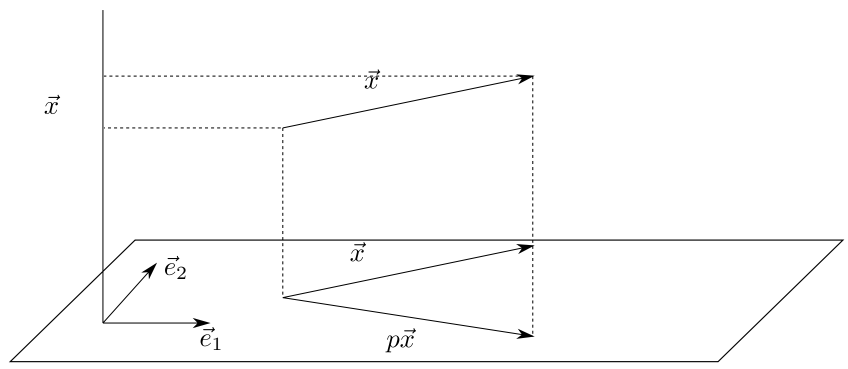


Рис. 1.11: pr

1.8.2 Смешанное произведение а координатах

1. Базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \quad \vec{i}\vec{j}\vec{k} = 1$

   $\vec{a}(a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b}(b_x, b_y, b_z) \quad \vec{c}(c_x, c_y, c_z)$

   $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right)\left(c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}\right) = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\left(\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}\vec{k} - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}\vec{i}\right) = a_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}(\vec{i}\vec{j}\vec{k})$ – число элементарных объёмов, которые помещаются в задаваемый параллелепипед

2. Произвольный базис. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

   $\vec{a}(a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b}(b_1, b_2, b_3) \quad \vec{c}(c_1, c_2, c_3)$

   $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)(c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \cdot (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, где $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ – объём параллелепипеда для меры

1.8.3 Двойное векторное произведение

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \quad \vec{v} = \left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right]$

$\vec{v} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$

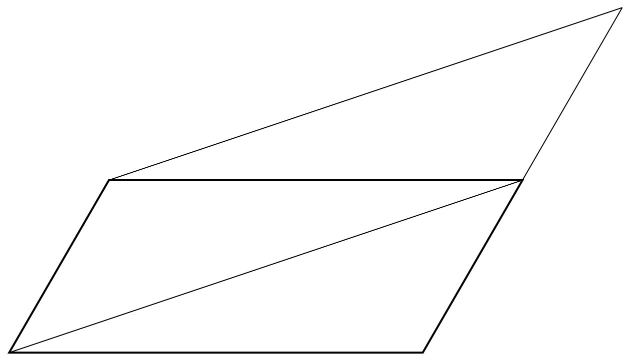


Рис. 1.12: paral

1. $\vec{v}=\vec{b}\,(\vec{a}\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\vec{b})$

   Доказательство. $\left[\vec{b},\vec{c}\right]=(b_y b_z-c_y c_z)\vec{i}-(b_x c_z-c_x b_z)\,\vec{j}+(b_y c_z-c_y b_z)\,\vec{k}$

   $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]=(a_y(b_x c_y-c_x b_y)+a_z\,(b_x c_z-c_x b_z))\,\vec{i}-(a_x\,(b_x c_y-c_x b_y)-a_z\,(b_y c_z-b_z c_y))\,\vec{j}+$ $(a_x\,(b_z c_x-c_z b_x)-a_y\,(b_y c_z-b_z c_y))\,\vec{k}$

   $v_x=b_x\,(a_x c_x+a_y c_y+a_z c_z)-c_x\,(a_x b_x+a_y b_y+a_z c_z)$

   $\lhd a_y b_x c_y-a_y c_x b_y+a_z b_x c_z-a_z c_x b_z=b_x(a_y c_y+a_z c_z)-c_x\,(a_y b_y+a_z b_z)+$ $a_x b_x c_x-a_x b_x c_x=\vec{v}_x$

   Дальше то же самое для второй и третьей компонент (Упражнение: дома проделать для одной из оставшихся координат) ■

Теорема 1 (Тождество Бьянки)**.** $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]+\left[\vec{b},[\vec{c},\vec{a}]\right]+\left[\vec{c},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right]=\vec{0}$

Доказательство. $\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\vec{b})+\vec{c}(\vec{b}\vec{a})-\vec{a}(\vec{b}\vec{c})-\vec{b}(\vec{c}\vec{a})=\vec{0}$ ■

$d(f,g)=(df)(g)+(f)(dg)$

$\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right]\vec{c}\right]+\left[\vec{b},[\vec{a},\vec{c}]\right]$

Позволяет считать двойное векторное произведение некоторым аналогом дифференцирования.

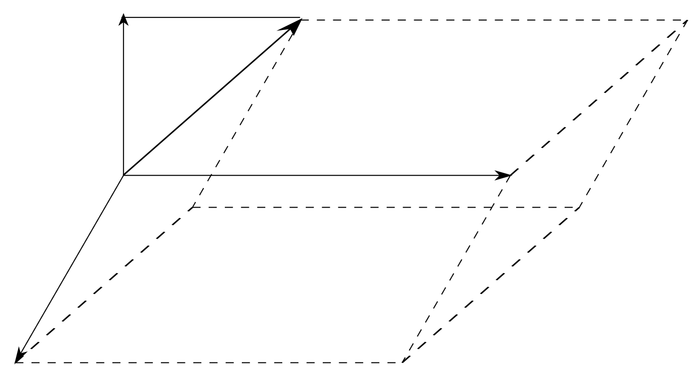


Рис. 1.13: mixed

1.9 Лекция 6

1.9.1 Аналитическая геометрия

Прямые и плоскости

1. Прямая на плоскости.

   P_1, P_2 – произвольные различные точки на плоскости.

   Прямая – геометрическое место точек, равноудалённых от этих двух.

   $|PP_1| = |PP_2|$

   Пусть O – точка отсчёта. $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP}_1, \vec{r}_2 = \overrightarrow{OP}_2$ – два радиус вектора

   $|\vec{r} - \vec{r}_1|^2 = |\vec{r} - \vec{r}_2|$

   $|\vec{r}_2| - 2\,(\vec{r}\vec{r}_1) + |\vec{r}_1|^2 = |\vec{r}| - 2\,(\vec{r}\vec{r}_2) + |\vec{r}_2|^2$

   $2\,(\vec{r}, -\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = |\vec{r}_2|^2 - |r_1|^2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_2 + \vec{r}_1)$

   $\left(\vec{r} - \frac{\vec{r}_2+\vec{r}_1}{2}, \vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) = 0 \iff \vec{r} - \underbrace{\frac{\vec{r}_2 + \vec{r}_1}{2}}_{\vec{r}_0} \perp \underbrace{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}_{\vec{n}}$

   $\vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{n} \quad (\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$
   $(\vec{r}, \vec{n}) = (\vec{r}_0, \vec{n})$ – нормальное уравнение прямой

   $$(\vec{r}\vec{n}) = (\vec{r}_0\vec{n})\,.$$

   Способы задания:

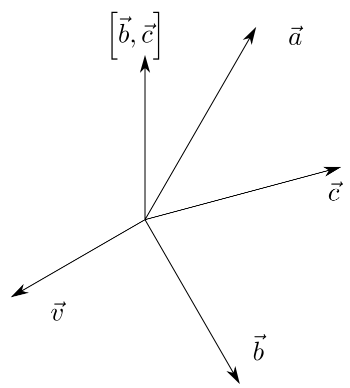


Рис. 1.14: dvec

(a) В ДПСК $\vec{r}(x, y), \vec{n}(a, b), \vec{r}_0(x_0, y_0)$

$$ax + by = ax_0 + by_0 = -c \qquad a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$
$$ax + by + c = 0.$$

Последнее – общее уравнение прямой.

(b) $\vec{r} - \vec{r}_0 \parallel \vec{s} \implies \exists t : \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{s}t$

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t \quad \vec{s}$ – направляющий вектор, любой ненулевой, смотрящий вдоль прямой

(c) $\vec{z}(x, y) \quad \vec{r}_0(x_0, y_0) \quad \vec{s}(\alpha, \beta)$

$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$ – параметрическое уравнение прямой.

(d) $\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}$ – каноническое уравнение прямой.

Пример. $l : \quad 2x + 3y - 1 = 0$ Рассмотрим $A(1, 1)$, которая не лежит на прямой

$l' : \quad 2(x - 1) + 3(y - 1) = 0$ – уравнение прямой, проходящей через A параллельно ℓ

$l'' : \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3}$ – уравнение прямой, проходящей через A перпендикулярно ℓ (её направляющая – нормаль изначальной)

Пример. $\frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{4} \quad A(1, 1)$

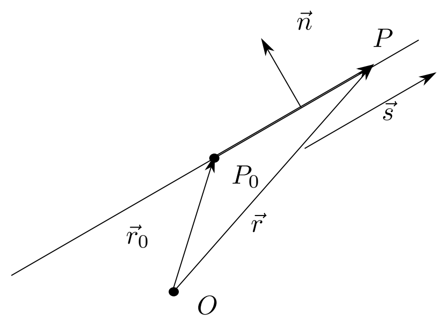


Рис. 1.15: line

$l' : \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4}$

$l'' : 2(x-1) + 4(y-1) = 0$

2. Уравнение прямой с произвольным параметром

   $ax + by + c = 0 \quad | \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

   $Ax + By + C = 0$

   $C = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = -(\vec{r}_0, \vec{n}^0)$

   C – прицельный параметр – (по модулю) расстояние от прямой до начала координат.

3. Уравнение прямой в отрезках.

   $$ax + by = -c.$$

   $\frac{ax}{-c} + \frac{by}{-c} = 1$

   $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$

4. Уравнение с угловыми коэффициентами.

   $\frac{a}{b}x + y = -\frac{c}{b}$

   $y = kx + l$

   $\operatorname{tg}\varphi = k$

5. Уравнение прямой через две точки

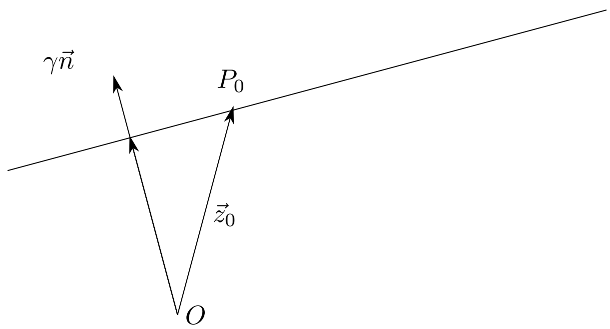


Рис. 1.16: radvec

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

$\vec{r} = \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)t$

Взаимное расположение прямых:

1. Найти угол между прямыми:

   $l_1: \quad (\vec{r}\vec{n}_1) = D_1$

   $l_2: \quad (\vec{r}, \vec{n}_2) = D_2$

   $\angle(l_1, l_2) = \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \varphi$

   $\cos\varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

2. Точка пересечения $(\vec{r}_1, \vec{n}_1) = D_1$

   $(\vec{r}_2, \vec{n}_2) = D_2$

   $\vec{n}_1(a_1, b_1) \quad \vec{n}_2\,(a_2, b_2) \quad \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

   $\vec{r}_0$ – радиус вектор токи пересечения прямых

   $a_1x + b_1y = D_1 \quad a_2x + b_2y = D_2$

   $\triangle = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

   $\triangle_x = D_1b_2 - b_1D_2$

   $\triangle_y = a_1D_2 - a_2D_1$

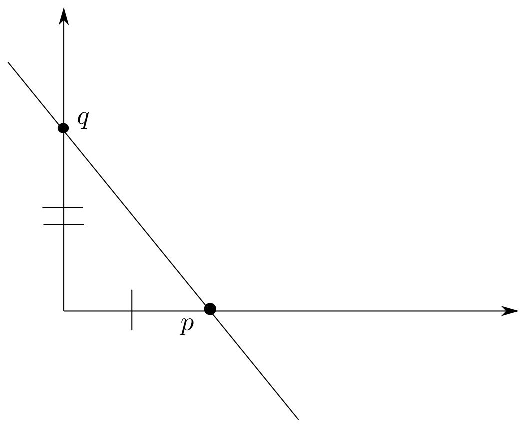


Рис. 1.17: отрезок

$x = \frac{D_1 b_2 - b_1 D_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$

$y = \frac{a_1 D_2 - a_2 D_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$

Подойдём с другой стороны:

$l_1 : \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{s}_1 t$

$l_2 : \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{s}_2 t$

$\vec{s}_1 \not\parallel s_2 \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \neq \frac{\beta_1}{\beta_2}$

$\vec{r}_1 + \vec{s}_1 t = \vec{r}_2 + \vec{s}_2 t$

$\vec{s}_1 t - \vec{s}_2 t = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$\alpha_1 t_1 - \alpha_2 t_1 = x_2 - x_1$

$\beta_1 t_1 - \beta_2 t_1 = y_2 - y_1$

$\triangle = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0$

3. Есть прямая ℓ и точка $P \notin \ell$

   $(\vec{r}, \vec{n}) = D = (\vec{r}_0, \vec{n}) \quad \ell, P_0$

   $\vec{r}_p \quad P$

   Сначала найдём ортогональную проекцию точки P – точку Q

   $\vec{r}_Q = \vec{r}_P + \overrightarrow{PQ} = \vec{r}_P - \alpha \vec{n}$

   $|QP| = (\overrightarrow{P_0 P}, \vec{n}_0) = \frac{\left(\overrightarrow{P_0 P}, \vec{n}\right)}{|\vec{n}|}$

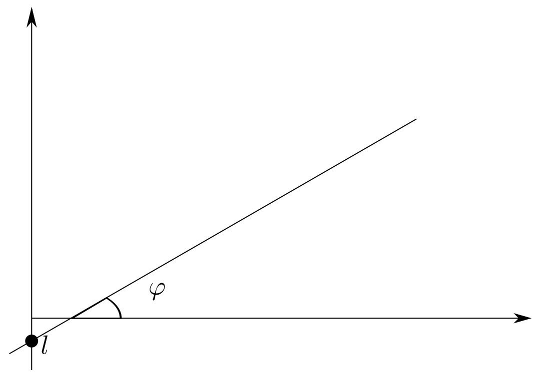


Рис. 1.18: coeff

$\overrightarrow{QP} = |QP|\,\vec{n} = \frac{\left(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n}\right)}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = \frac{(\vec{r}_p - \vec{r}_0, \vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n}\ \vec{r}_q = \vec{r}_p - \overrightarrow{QP} = \vec{r}_p - \frac{(\vec{r}_p, \vec{n}) - D}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$

$II: \quad (\vec{r}_q, \vec{n}) = (\vec{r}_p, \vec{n}) - \alpha\,|\vec{n}|^2$

$D = (\vec{r}_p, \vec{n}) - \alpha\,|\vec{n}|^2 \implies \alpha = \frac{(\vec{r}_0, \vec{n}) - D}{|\vec{n}|}$

Расстояние от P до ℓ $\quad \rho(P, \ell) = \left|\overrightarrow{QP}\right| = \frac{(\vec{r}_p, \vec{n}) - D}{|\vec{n}|}$

В координатах: $\rho(P, \ell) = \frac{ax_p + by_p - D}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Плоскость – множество точек пространство, равноудалённых от фиксированных точек.

$|P_1P| = |P_2P|$

$\left(\vec{r}_0 - \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}, \vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = 0$

$(\vec{r}, \vec{n}) = (\vec{r}_0, \vec{n}) = D$ – нормальное векторное уравнение плоскости

ДПСК: $\vec{n}(A, B, C)$

$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0 \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

$(\vec{r}, \vec{n}) = D \quad Ax + By + Cz = D$ – общее уравнение плоскости

Параметрическое уравнение плоскости

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{P_0P} = \vec{r}_0 + \alpha\vec{m} + \beta\vec{q}$ – векторное параметрическое уравнение плоскости

ДПСК: $\begin{cases} x = x_0 + \alpha m_1 + \beta q_1 \\ y = y_0 + \alpha m_2 + \beta q_2 \\ z = z_0 + \alpha m_2 + \beta q_3 \end{cases} \qquad \vec{m}(m_1, m_2, m_3) \quad \vec{q}(q_1, q_2, q_3)$

Плоскость можно задать через три точки. P_1, P_2, P_3

Если нам нужна нормаль, образуем два вектора $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad \vec{r}_3 - \vec{r}_1$

$\vec{n} = [\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1] \quad \vec{r}_0 = \vec{r}_1$

$(\vec{r}, \vec{n}) = (\vec{r}_1, \vec{n})$

$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{n})$

$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0$

ДПСК: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_1 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$

Для паремтрического уравнения: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \alpha\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) + \beta\left(\vec{r}_3 - \vec{r}_1\right)$

Уравнение плоскости с прицельным параметром. $Ax + By + Cz + D = 0 \quad \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z + \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0 \quad \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ – прицельный параметр

$D = (\vec{r}_0, \vec{n})$ Прицельный параметр: $(\vec{r}_0, \vec{n}) \,/\, |\vec{n}|$

Взаимное расположение плоскостей: $(\vec{r}, \vec{n}_1) = D_1 \quad (\vec{r}, \vec{n}_2) = D_2$ – две плоскости

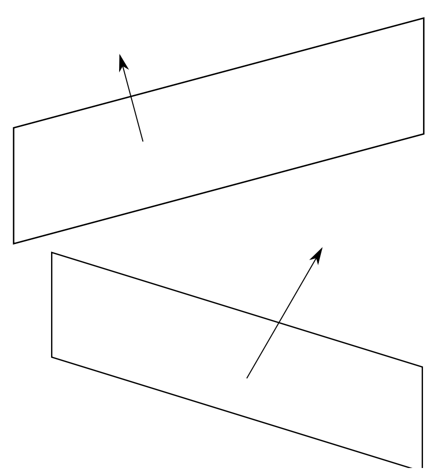


Рис. 1.19: плоскости

1. Угол

   $\angle(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) = \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$

2. Пересечение

   $[\vec{n}_1, \vec{n}_2] \neq 0$

3. Параллельность

   $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \implies \vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1$

   $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{n}) = 0 \quad (\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{n}_1) = (\vec{r}_2, \vec{n}_1) - D = \frac{D_2}{\lambda} - D_1 \left(= \frac{|\vec{n}_1|}{|\vec{n}_2|} D_2 - D_1 \neq 0 \right)$

   $(\vec{r}, \lambda \vec{n}_1) = D_2 \quad D_1 = \frac{D_2}{\lambda} \quad \lambda = \frac{D_2}{D_1} = \frac{|\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|}$

4. Совпадение $\frac{D_2}{|\vec{n}_2|} = \frac{D_1}{|\vec{n}_1|}$

Пример. Даны плоскость и точка, не лежащая на плоскости. найдём точку проекции.

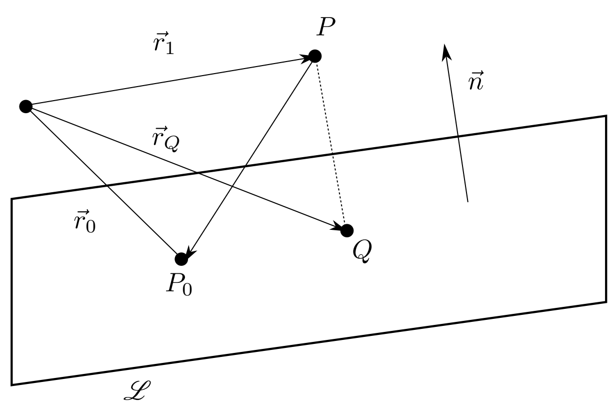


Рис. 1.20: проекция

$\mathscr{L} \quad (\vec{r}, \vec{n}) = D$

$P \quad \vec{r}_1$

$\vec{r}_Q - ?$

$\vec{r}_Q = \vec{r}_1 + \overrightarrow{PQ} = \vec{r}_1 + \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_1, \vec{n})}{|\vec{n}|^2} \vec{n} = \vec{r}_1 + \frac{D - (\vec{r}_1, \vec{n})}{|\vec{n}|^2} \vec{n}$

$\rho(P, \mathscr{L}) = \left| \overrightarrow{PQ} \right| = \left| \frac{D - (\vec{r}, \vec{n})}{|\vec{n}|^2} \right|$

Прямая в пространстве.

Три точки задают прямую, равноудалённую от них всех

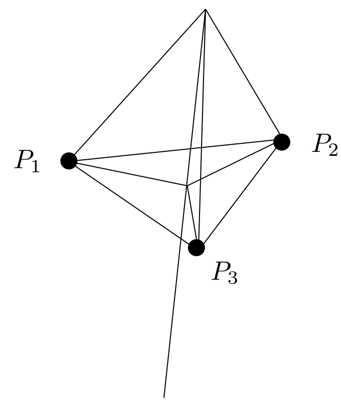


Рис. 1.21: прямая-через-3-точки

$|PP_1| = |PP_2| = |PP_3|$

(вывод будет позже)

$\vec{s}$ – нормаль к плоскости, образованной тремя точками.

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{P_0P} = \vec{r}_0 + \vec{s}t$ – векторное параметрическое уравнение прямой

ДПСК: $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases} \qquad \vec{s}\,(\alpha, \beta, \gamma) \quad \vec{r}_0\,(x_0, y_0, z_0) \quad \vec{r}\,(x, y, z)$

Векторное уравнение: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t \quad \times\,\vec{s}$

$[\vec{r}, \vec{s}] = [\vec{r}_0, \vec{s}] = \vec{b}$

$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}$ – каноническое уравнение прямой (выразили t и приравняли)

Через две точки $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$

Через две пересекающиеся плоскости. $\begin{cases} (\vec{r}, \vec{n}_1) = D_1 \\ (\vec{r}, \vec{n}_2) = D_2 \end{cases} \qquad [\vec{n}_1, \vec{n}_2] \neq 0$

$\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$

Прямая(взаимное расположение)

$\ell_1 \quad [\vec{r}, \vec{s}_1] = \vec{b}_1$

$\ell_2 \quad [\vec{r}, \vec{s}_2] = \vec{b}_2$

1. $\ell_1 \parallel \ell_2$

   $[\vec{s}_1, \vec{s}_2] = 0 \implies \vec{s}_2 = \lambda \vec{s}_1$

   $[\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{s}] \neq 0$

2. $\ell_1 = \ell_2$

   $[\vec{s}_1, \vec{s}_2] = 0$

   $[\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{s}] = 0$

   Плоскость через $\ell_1 \parallel \ell_2$

   $\vec{n} = [\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{s}]$

   $(\vec{r}, \vec{n}) = (\vec{r}_0, \vec{n})$

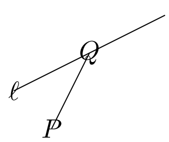
   $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{s}) = 0$ – уравнение плоскости

3. Скрещивание $\ell_1 \times \ell_2$

   $(\vec{n} =) \, [\vec{s}_1, \vec{s}_2] \neq 0$

   $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{n}) \neq 0 \quad (\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2) \neq 0$

Пример. Есть прямая, есть точка. Найти отогональную проекцию этой точки на прямую.



$[\vec{r}, \vec{s}] = \vec{b}$

$\vec{r}_p \quad P$

$\vec{r}_Q$–?

$\vec{r}_Q = \vec{r}_p + \overrightarrow{PQ}$

$(\vec{r}, \vec{s}) = (\vec{r}_p, \vec{s})$ – плоскость

$[\vec{s}, [\vec{r}, \vec{s}]] = \vec{r}(\vec{s}\vec{s}) - \vec{s}(\vec{s}\vec{r}) = \left[\vec{b}, \vec{s}\right]$

$\vec{r}_Q \, |\vec{s}|^2 - \vec{s} \, (\vec{r}_p \vec{s}) - \left[\vec{b}, \vec{s}\right]$

1.10 Практика

Пример. Даны две прямые, заданные параметрическими уравнениями:

$l_1: \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \end{cases}$

$l_2: \quad \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 + t \end{cases}$

1. Параллельны ли они?

   Набавляющие вектора $\vec{s}_1(2, -1) \quad \vec{s}_2(-1, 1) \implies \vec{s}_1 \not\parallel s_2 \implies$ пересекаеются

2. Найти точку пересечения

   $1 + 2t = 2 - t \implies t = \frac{1}{3} \implies x = \frac{5}{3}$

   $1 - t = 2 + t \implies t = -\frac{1}{2} \implies y = \frac{3}{2}$

   $l_1: \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} \quad \begin{cases} x + 2y = +3 \\ x + y = 4 \end{cases}$

   $l_2: \quad \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{1}$

   $y = -1, x = 5$ – точка пересечение. верхний способ не работает, там разные t

Пример. $l_1: \quad 2x + y + 2 = 0$
$l_2: 4x + y + 1 = 0$

$A(1, 2) \quad AB = AC \quad l = ?$, чтобы проходила через BC

Можно найти точку пересечения прямых $O = l_1 \cap l_2$

$\begin{cases} 2x + y = -2 \\ 4x + y = -1 \end{cases} \implies 2x = 1 \quad x = \frac{1}{2} \quad y = -3 \quad O(\frac{1}{2}, -3) \quad OA(\frac{1}{2}, 5) \implies$
$O'(\frac{3}{2}, 7)$

$2(x - \frac{3}{2}) + (y - 7) = 0$

$2x + y - 10 = 0$

$C = l' \cap l_2 \quad \begin{cases} 2x + y = 10 \\ 4x + y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{11}{2} \\ y = 21 \end{cases} \implies l: \frac{x-1}{-\frac{11}{2}-1} = \frac{y-2}{21-2}$ – ответ

Пример. $A(1, 3) \quad B(2, 5)$ – две вершины треугольника. $H(1, 4)$ – точка пересечения высот этого треугольника. Найти треться точку треугольника C

$\overrightarrow{AB} = (1,2) \implies l = 1(x-1) + 2(y-4) = 0 \quad x + 2y = 3$

$\overrightarrow{AH}(0,1) \implies l' : y = 5$

$C = l \cap l' \implies C(-1,5)$

Плоскости:

$(\vec{r}\vec{n}) = (\vec{r}_0, \vec{n}) = \alpha$

$Ax + By + Cz + \alpha = 0 \quad \vec{r} = \vec{r}_0 +]alpha\vec{q} + \beta\vec{m}$

Пример. $A(1,1,1) \quad B(2,3,-1) \quad \vec{a}(0,-1,2)$

$\overrightarrow{AB}(1,2,-2)$

$\vec{r} = \vec{r}_a + \alpha\vec{a} + \beta\overrightarrow{AB}$

Пример. $A(1,1,-1)$

$\alpha_1 : 2x - y + 5z + 3 = 0$
$\alpha_2 : x + 3y - z - 7 = 0$

$\alpha : \alpha \perp \alpha 1, \alpha \perp \alpha_2 \quad A \in \alpha \quad \alpha?$

$\vec{n}_1(2,-1,5) \quad \vec{n}_2(1,3,-1) \implies \vec{n}_1 \not\parallel \vec{n}_2 \implies \vec{r} = \vec{r}_a + \alpha\vec{n}_1 + \beta\vec{n}_2$

Пример. $\alpha : 2x + 3y + 6z - 12 = 0$

Вычислить объём фигуры, ограниченной тремя координатными и заданной плоскостями.

$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1 \implies$ Знаем пересечения плоскости с координатными плоскостями.

$V = 8$

Пример. $L = \begin{cases} x + 2y - 3z - 5 = 0 \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$ – уравнение прямой через пересечение непараллельных плоскостей.

Найти каноническое уравнение прямой.

$\vec{n}_1(1,2,-3) \quad \vec{n}_2(2,-1,1)$

$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - u\vec{j} - 5\vec{k}$$

$\sqsupset z = 0 \quad \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2 + -y = -2 \end{cases} \quad - 5y = -12 \quad \begin{cases} y = \frac{12}{5} \\ x = \frac{1}{5} \end{cases}$

$\frac{x-\frac{1}{5}}{-1} = \frac{y-\frac{12}{5}}{-7} = \frac{z-0}{-5}$

Пример. $L: \quad \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-3}{-1} (= t) \quad \alpha : x + +2y + 3z + 3 = 0$

$\sqsupset P = L \cap \alpha \quad P-?$

$\vec{s}(1, -2, -1) \quad \vec{n}(1, 2, 3)$

$\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$ – вставляем в урвавнение для плоскости

$t + 2(3 - 2t) + 3(3 - t) + 3 = 0$

$-6t = -18 \implies t = 3 \implies \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \\ z = 0 \end{cases}$

Пример. $L: \quad \frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-5}{4}$

$\alpha : x - 3y + 2z - 7 = 0$

Найти проекцию прямой L на плоскость α

$\vec{n} \times \vec{s}$

1.11 Практика: Кривые второго порядка на плоскости

Определение 13. Эллипс – геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до выбранных точек (называемых фокусами) постоянна.

F_1, F_2 – фокусы

a – длина большой полуоси

b – длина малой полуоси

c – фокусное расстояние $c^2 = a^2 - b^2$

В Декартовой системе координат. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\varepsilon = \frac{c}{a} \in [0, 1]$ – эксцентриситет

$\varepsilon = 0 \implies$ окружность $a^2 = b^2 = R^2$

$\varepsilon = 1 \implies a = c$

Уравнение касательной в точке (x_0, y_0)

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Директриса эллипса $x = \pm d = \pm\frac{a}{\varepsilon}$

Пример. Фокусы эллипса $(\pm 1, 0)$

$M(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \in E$

Построить уравнение эллипса E

Доказательство. $c = 1 = a^2 - b^2$

$\frac{3}{a^2} + \frac{3}{4*b^2} = 1$

Два уравнения с двумя неизвестными $\implies b = \sqrt{3} \quad a = 2 \qquad \implies \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ∎

Пример. Директрисы $x = \pm 4$

Фокусы всесте с верхней и нижней точкой образуют квадрат

Найти уравнение эллипса

Доказательство. $b = c \implies a^2 - b^2 = c^2 \quad a^2 = 2c^2 \quad a = \sqrt{2}c$

$d = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a^2}{c} = \frac{2c^2}{c} = 4 \implies c = 2 \implies b = 2 \quad a = 2\sqrt{2}$

$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ ∎

Определение 14. Гипербола – геометрическое место точек, (модуль) разность расстояний от которой до заданных точек есть число постоянное

$||F_1P| - |F_2P|| = const$

F_1, F_2 – фокусы гиперболы

Уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$c^2 = a^2 + b^2$

Уравнение асимптот $y = \pm\frac{b}{a}x$

Уравнение касательной в точке (x_0, y_0)

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Уравнение директрисы $x = \pm d = \frac{a}{\varepsilon}$

$\varepsilon = \frac{c}{a} \in [1, \infty)$

$\varepsilon = 1 \implies a = c$

$\varepsilon \to \infty \implies b \to \infty$ – две прямые, проходящие через фокусы вертикально.

Пример. Доказать, что отрезок касательной к гиперболе, заключённый между её асимптотами точкой касания делится пополам.

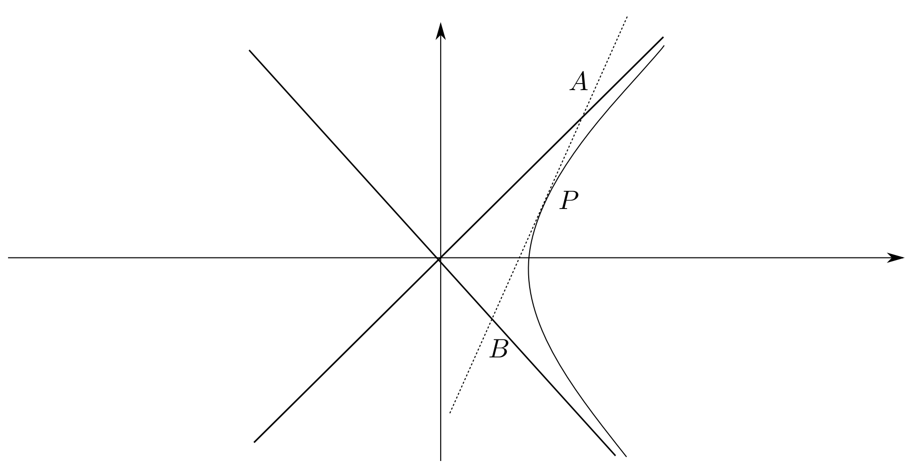


Рис. 1.22: zodacha

$|AP| = |BP|$

Доказательство. $\begin{cases} \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \\ y = \pm\frac{b}{a}x \end{cases}$

$$A: \quad \frac{x_A x_0}{a^2} - \frac{b}{a}\frac{x_A y_0}{b^2} = 1 \implies x_A = \frac{1}{\frac{x_0}{a^2} - \frac{y_0}{ab}} = \frac{a^2 b}{x_0 b - y_0 a}.$$

$$B: \quad \frac{x_B x_0}{a^2} + \frac{b}{a}\frac{x_b y_0}{b^2} = 1 \implies x_B = \frac{a^2 b}{x_0 b + y_0 a}.$$

$x_A + x_B = a^2 b \frac{2x_0 b}{x_0^2 b^2 - y_0^2 a^2} = \frac{2x_0}{\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}} = 2x_0$ ■

Определение 15. Парабола – геометрическое место точек, равноудалённых от заданной прямой и точки

$\rho(l, F) = |PF|$

F – фокус параболы Уравнение $y^2 = 2px$

Уравнение касательной $yy_0 = p(x + x_0)$

Пример. $y^2 = 4.5x$

$M : \rho(l, M) = 9.125$

$|OM|$ –?

Доказательство. $\frac{p}{2} = 1.125$

$M_x = 8 \implies M_y = 36$

$|OM|^2 = x_M^2 + y_M^2 = 36 + 64 = 100$ ■

Пример. Найти касательную к параболе $y^2 = 16x$, проходящую через точку $(1, 5)$

Доказательство. $\begin{cases} yy_0 = p(x + x_0) \\ y_0^2 = 2px \end{cases}$

$yy_0 = p\left(x + \frac{y_0^2}{2p}\right)$

$y_M y_0 = p\left(x_M + \frac{y_0^2}{2p}\right) \implies y_0 = \dots$ ■

1.12 Лекция

1.12.1 Параллельный перенос

1.12.2 Поворот

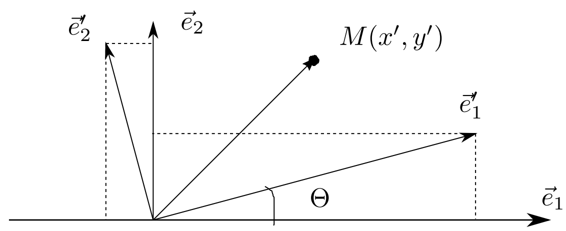


Рис. 1.23: rotation

$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$

Замечание. Сохраняем длины и углы:

$|\vec{e}_1'| = |\vec{e}_2'| = 1 \quad (\vec{e}_1', \vec{e}_2') = 0$

$\vec{e}_1' = \vec{e}_1 \cos\Theta + \vec{e}_2 \sin\Theta$

$\vec{e}_2' = -\vec{e}_1 \sin\Theta + \vec{e}_2 \cos\Theta$

$\vec{r}_m = x'\vec{e}_1' + y'\vec{e}_2' = x'(\vec{e}_1 \cos\Theta + \vec{e}_2 \sin\Theta) + y'(-\vec{e}_1 \sin\Theta + \vec{e}_2 \cos\Theta) = \vec{e}_1\,(x'\cos\Theta - y'\sin\Theta) + \vec{e}_2\,(x'\sin\Theta + y'\cos\Theta)$

$\vec{r}_M = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$

$\Longrightarrow \begin{cases} x = x'\cos\Theta - y'\sin\Theta \\ y = x'\sin\Theta + y'\cos\Theta \end{cases}$ – прямое преобразование

$\begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{e}_1 \cos\Theta + \vec{e}_2 \sin\Theta \\ \vec{e}_2' = -\vec{e}_1 \sin\Theta + \vec{e}_2 \cos\Theta \end{cases}$ – обратное преобразование

Замечание. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \setminus py \end{bmatrix} \quad X = T_\Theta X'$

Более общий вид: $T_\Theta \to T = \begin{bmatrix} t_1^1 & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 \end{bmatrix}$ $\begin{cases} \vec{e}_1' = t_1^1\vec{e}_1 + t_1^2\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2' = t_2^1\vec{e}_1 + t_2^2\vec{e}_2 \end{cases}$

$(\vec{e}_1'\vec{e}_2') = 0 \implies (t_1^1\vec{e}_1 + t_1^2\vec{e}_2)(t_2^1\vec{e}_1 + t_2^2\vec{e}_2) = t_1^1t_2^1 + t_1^2t_2^2 = 0$ Т.е. в общем виде, матрица, преобразующая оси с сохранением углов, это такая матрица, у которой столбики ортогональны.

Чтобы сохранялись длины нужно $\begin{cases} (t_1^1)^2 + (t_1^2)^2 = 1 \\ (t_2^1)^2 + (t_2^2)^2 = 1 \end{cases}$

$T_\Theta^T T_\Theta = I$ – условие на матрицу поворота

$T^T T = diag \lambda_1^+ \lambda_2^+$

$\begin{bmatrix} t_1^1 & t_1^2 \\ t_2^1 & t_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1^1 & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^+ & 0 \\ 0 & \lambda_2^+ \end{bmatrix}$, где λ_1^+, λ_2^+ – положительные числа.

1.12.3 Общий вид преобразования плоскости

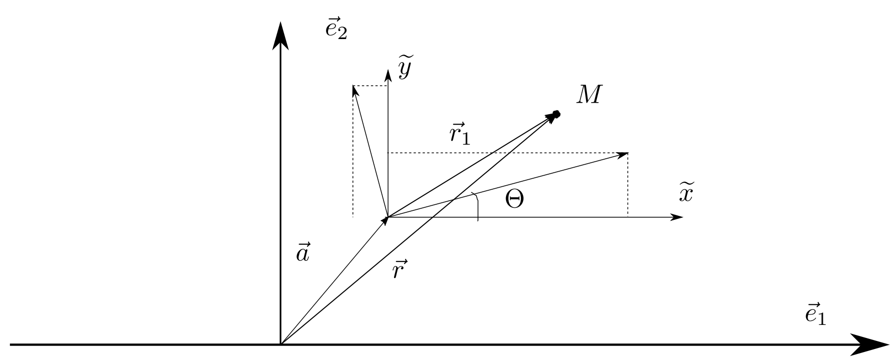


Рис. 1.24: general

$(x, y) \to (\widetilde{x}, \widetilde{y})$

$\vec{r} = \vec{a} + \vec{r}_1$

$\vec{r}(x, y) \quad \vec{r}_1(\widetilde{x}, \widetilde{y})$

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \widetilde{x}\vec{e}_1' + \widetilde{y}\vec{e}_2' \\ &= \widetilde{x}(t_1^1\vec{e}_1 + t_1^2\vec{e}_2) + \widetilde{y}(t_2^2\vec{e}_1 + t_2^2\vec{e}_2) \\ &= \vec{e}_1(t_1^1\widetilde{x} + t_2^1\widetilde{y}) + \vec{e}_2\left(t_1^2\widetilde{x} + t_2^2\widetilde{y}\right). \end{aligned}$$

Подставим $\vec{r}_1$

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{e}_1(t_1^1\widetilde{x} + t_2^1\widetilde{y}) + \vec{e}_2\left(t_1^2\widetilde{x} + t_2^2\widetilde{y}\right).$$

В координатах $\vec{a}(\alpha, \beta)$

$$\begin{cases} x = \alpha + t_1^1\widetilde{x} + t_2^1\widetilde{y} \\ y = \beta + t_1^2\widetilde{x} + t_2^2\widetilde{y} \end{cases}$$

В матричной форме $X = A + T\widetilde{X}$ $\quad A$ - параллельный перенос, T – поворот, масштаб и инверсия.

Частные случаи:

1. $T = I$ – параллельный перенос
2. $T = T_\Theta, A = 0$ – поворот
3. $T = diag\{\lambda_1^+\lambda_2^+\}, A = 0$ – изменение масштаба
4. $T = diag\{1, -1\}$ – инверсия OY

1.12.4 Уравнение прямой при преобразовании координат

$ax + by + c = 0$

В матричном виде: $N^TX + c = 0 \quad N = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad N^T = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$

В новой системе: $N^T(A + T\widetilde{X}) + c = 0$

$$N^TT\widetilde{X} + \underbrace{N^TA + c}_{\widetilde{c}} = 0$$

$$\widetilde{N^T}\widetilde{X} + \widetilde{c} = 0 \begin{cases} \widetilde{c} = N^TA + c \\ \widetilde{N} = T^TN \end{cases}$$

.

1.12.5 Каноническое уравнение кривой II-го порядка

$$F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

$\lhd P = \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} \quad R = f$

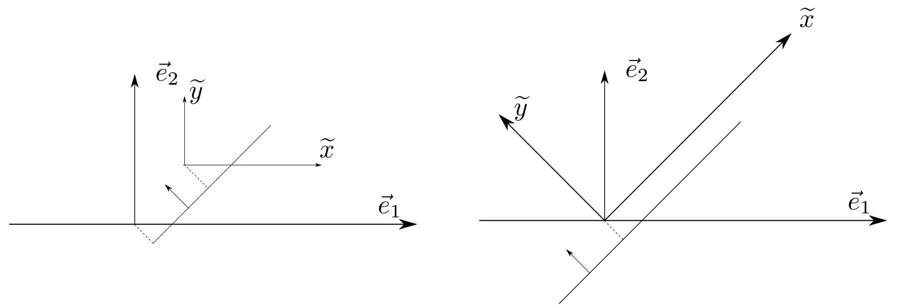


Рис. 1.25: linetr

$X^T PX = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{bmatrix} = ax^2 + bxy + byxcy^2 = ax^2 + 2bxy + xy^2$

$Q^T X = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = dx + ey$

$$\implies F(x, y) = X^T PX + Q^T X + R.$$

Теперь преобразуем систему координат $(x, y) \to (\widetilde{x}, \widetilde{y})$

Замечание. Много раз будет использовано свойство $(AB)^T = B^T A^T$

$$\begin{aligned} F(\widetilde{x}, \widetilde{y}) &= (A + T\widetilde{X})^T P(A + T\widetilde{X}) + Q^T (A + T\widetilde{X}) + R \\ &= \underline{A^T PA} + (T\widetilde{X})^T PA + (T\widetilde{X})^T PT\widetilde{X} + A^T PT\widetilde{X} + \underline{Q^T A} + Q^T T\widetilde{X} + \underline{R} \\ &= \widetilde{X}^T \underbrace{T^T PT}_{\widetilde{P}} \widetilde{X} + ((PA)^T T\widetilde{X})^T + A^T PT\widetilde{X} + Q^T T\widetilde{X} + \underbrace{A^T PA + Q^T A + R}_{\widetilde{R}} \\ &= \widetilde{X}^T \widetilde{P}\widetilde{X} + (A^T P^T T\widetilde{X})^T + A^T PT\widetilde{X} + QT\widetilde{X} + \widetilde{R} \end{aligned}$$

.

Замечание. $P^T = P$

$(A^T P^T T\widetilde{X})^T = (A^T PT\widetilde{X})^T = A^T PT\widetilde{X}$

Последнее равенство, потому что это число (матрица 1×1)

$$= \widetilde{T}^T \widetilde{P} \widetilde{X} + (2A^T P + Q^T) T \widetilde{X} + R$$

.

1. $\widetilde{P} = T^T P T \overset{?}{=} diag\{\lambda_1, \lambda_2\}$ – можно всегда

   $\begin{bmatrix} \widetilde{x} & \widetilde{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{bmatrix} = \lambda_1 \widetilde{x}^2 + \lambda_2 \widetilde{y}^2 \qquad \begin{cases} \lambda_1\lambda_2 > 0 & \text{эллиптический} \\ \lambda_1\lambda_2 < 0 & \text{гиперболический} \\ \lambda_1\lambda_2 = 0 & \text{параболический} \end{cases}$

   Замечание. $\det(AB) = \det A \det B$ (будем доказано позже)

   $\det \widetilde{P} = \det T^T \det P \det T = \det(T^T T) \det P = \Delta \det P = \lambda_1 \lambda_2$

   $\sphericalangle \det P = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\Delta} \begin{cases} < 0 & \text{эллиптический} \\ < 0 & \text{гиперболический} \\ = 0 & \text{параболический} \end{cases}$

   $\det P = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2$

2. $\widetilde{Q}^T = (2A^T P + Q^T) T = 0$ (хочется, чтобы было нулевой строчкой)

   $2A^T P = -Q^T$

   $A^T = -\frac{1}{2} Q^T P^{-1} \implies A = -\frac{1}{2} P^{-1} Q^T$

   $$\widetilde{X}^T \widetilde{P} \widetilde{X} + \underbrace{\widetilde{Q}^T \widetilde{X}}_{=0 \text{ хочу}} + \widetilde{R} = 0 \implies \widetilde{X}^T \widetilde{P} \widetilde{X} + \widetilde{R} = 0.$$

   Замечание. P^{-1} не всегда существует. конкретно в случае параболы. Это можно понять, если пропадает коэффициент при x^2 или y^2

   $\det P = 0$ – рассмотреть дома

   $\lambda_1 \widetilde{x}^2 + \lambda_2 \widetilde{y}^2 = -\widetilde{R}$

1.12.6 Поверхности второго порядка

Определение 16. Алгебраическая поверхность второго порядка – геометрическое место точек уравнения $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ – целый алгебраический полином второго порядка.

Способы задания:

1. Выражение, разрешённо относительно одной из координат $x = f(y, z)$

2. Параметрическое: $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$

Типы поверхностей:

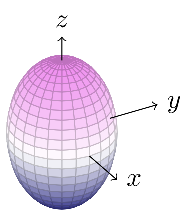
1. Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

   Метод сечений. $z = C \implies \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{C^2}{c^2}$

   $|C| < c$ – эллипс

   $|C| > c$ – $\emptyset$ (мнимый эллипс) $|C| = c$ – точка $(0, 0, C)$



2. гиперболоиды

   $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ – однополостный

   $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ – двуполостный

3. Параболоиды

   $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad p, q > 0$ – эллиптический

   $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ –

4. Конусы $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

5. Цилиндры $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллиптический

1.13 Лекция

1.13.1

1.13.2 Группа

Определение 17. Множество $G = \{g_k\}$ называется группой, если на G определён закон композиции элементов, обладающий следующими свойствами:

1. Ассоциативность: $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z) \forall x, y, z \in G$
2. Существование нейтрального $\exists e : e \circ g = g \circ e = g \forall g \in G$
3. Существование обратного $\forall g \in G \quad \exists g^{-1} : g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = e$

Пример. $(\mathbb{Z}, +)$ – аддитивная группа.

$(\mathbb{Q}_+, \cdot)$ – мультипликативная группа.

Пример. $\mathbb{Z}^n = \{z = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T, \xi_i \in \mathbb{Z}\}$

$(\mathbb{Z}^n, +)$ – группа

$$e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi^{-1} = \begin{pmatrix} -\xi_1 \\ -\xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

Пример. $\mathbb{R}^n_n = \{z : \det z \neq 0\}$

$(\mathbb{R}^n_n, \cdot)$ – группа (General Linear Group, $GL(n)$)

$A, B \in GL(n) \quad AB = BA$

Определение 18. Группа называется абелевой, если выполняется ещё одно условие: коммутативность $\forall a, b \in G \quad a \circ b = b \circ a$

Лемма 3. нейтральный элемент – единственный

Доказательство. Пусть существует два нейтральных элементов e_1, e_2. Рассмотрим их композицию:

$e_1 \circ e_2 = e_1$, потому что e_2 – нейтральный элемент и $e_2 \circ g = g \forall g \in G$

$e_1 \circ e_2 = e_2$, потому что e_1 – нейтральный элемент и $g \circ e_2 = g \forall g \in G$

$e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2 \implies e_1 = e_2$ ∎

Лемма 4. Обратный элемент единственный

Доказательство. Аналогично: пусть есть два обратных элемента g_1^{-1}, g_2^{-1} к элементу g

$g_1^{-1} = g_1^{-1} \circ e = g_1^{-1} \circ (g \circ g_2^{-1}) = (g_1^{-1} \circ g) \circ g_2^{-1} = e \circ g_2^{-1} = g_2^{-1} \implies g_1^{-1} = g_2^{-1}$ ■

1.13.3 Кольцо

Определение 19. Множество R называется кольцом, если на R согласованно заданы два закона элементов $+$, $-$, так что:

1. $(R, +)$ – абелева группа
2. $(R, \cdot)$ – полугруппа
3. Согласованность: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

   $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Пример. $(Z, +, \cdot)$ – коммутативное кольцо

1.13.4 Поле (Тело)

Определение 20. Множество K называется полем, если на K согласованно заданы два закона композиции ($+$, $-$), так что:

1. $(K, +)$ – абелева группа
2. $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ – мультипликативная группа

   Если она абелева, то структура называется <u>полем</u>

   Если она не абелева, то структура называется <u>телом</u>
3. $x \cdot (y + z) = z \cdot y + x \cdot z$

   $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$

Пример. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ – (лучшее) поле

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ – поле (получающееся топологическим замыканием поля $\mathbb{Q}$)

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ – поле (алгебраическое замыкание поля $\mathbb{Q}$)

Определение 21. Элемент Θ называется поглощающим элементом относительно закона композиции , если $\forall x \in S \quad x \circ \Theta = \Theta \cdot x = \Theta$

Замечание. Представим себе структуру S с двумя законами композиции: $\circ, \cdot$, и имеет место следующее: $x \cdot (y \circ z) = (x \cdot y) \circ (x \cdot z)$

$\lhd x \cdot y = x \cdot (e \circ y) = (x \cdot e) \circ (x \cdot y) \implies (x \cdot e)$

$\forall x \quad x \cdot e = e \implies e$, который был нейтральным для $\circ$ также является поглощающим для $\cdot$

$\cdot$ = умножение

$\circ$ – сложение

$e = 0$

1.13.5 Сложные алгебраические структуры

S, G, R, K – полугруппы, группы, кольца, поля – структуры нулевого уровня

1.13.6 Модуль над кольцом

Пусть у нас есть кольцо R и коммутати

Определение 22. R-модулем (или модулем над кольцом R) называется абелева группа $(G, +)$ с заданной бинарной операцией: $R \times G \to G \quad (r, g) \to rg \in G \quad r \in R, g \in G$ с законами согласования:

1. $(r_1 + r_2)g = r_1 g + r_2 g$ – здесь два разных плюса: один из группы G, другой из кольца R
2. $r(g_1 + g_2) = rg_1 + rg_2 \quad \forall r \in R \forall g_1, g_2 \in R$
3. $(r_1 \cdot r_2)g = r_1(r_2 g)$

Пример. $\sqsupset (G, +)$ – абелева группа

$\sqsupset g \in G \quad \lessdot g + g + \ldots + g = ng$ – используем структуру Z-модуля для коэффициентов

$\lessdot \alpha g_1 + \beta g_2 + \ldots$ – какие-то коэффициенты из некоторого кольца

Замечание. Хотелось бы решат задачу: получить g ищ $\alpha g = \widetilde{g}$, но у α не гарантирован обратный элемент в кольце

Задачи:

- Составлять $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \ldots + \alpha_k g_k$
- Решать $\alpha g = \widetilde{g}$

Определение 23. Линейным пространством X над полем K называется модель над кольцом , имеющим также алгебраическую структуру поля.

$\sqsupset \alpha, \beta, \gamma, \ldots \in K$

$\sqsupset x, y, z, \ldots \in G$

1. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$
2. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
3. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$
4. $1x = x \forall x$

Пример. $X^n = \{x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T, \xi \in \mathbb{R}\}$ – линейное пространство над $\mathbb{R}$ – арифметическое пространство

$$\alpha \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$$

То же самое можно над полем $\mathbb{C}$

Пример. $\overline{S_n}$ – многочлены $deg \leqslant n$ – Линейное пространство над $\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{Q})$

$\alpha p(x) + \beta q(x)$

Лемма 5. $\alpha 0_X = 0_X$

Доказательство. $\forall y \in X \quad \alpha 0_X + y = y$

$\alpha 0_X = \alpha \cdot (0 \cdot x) = 0 \cdot x = 0_X$ ■

Лемма 6. $0x = 0_X \implies 0 \cdot x + y = y$

Доказательство. $\lhd 0 \cdot x + y = 0x + 0_X + y = 0 \cdot x + x + (-x) + y = (0+1)x + (-x) + y = x + (-x) + y = 0_X + y = y \forall y$ ■

Лемма 7. $-1 \cdot x = -x$

Доказательство. $-1x = -1x + 0_X = -1x + x + (-x) = (-1+1)x + (-x) = 0x + (-x) = 0_X + (-x) = -x$ ■

1.13.7 Линейная зависимость

Замечание. Условимся называть элементы линейных пространств векторами – элементы группы

$X(K)$: X – группа (живут векторы) K – поле (живут скаляры / коэффициенты)

$\sqsupset \{x_i\}_{i=1}^n$ – набор векторов из $X(\mathbb{R})$

Определение 24. Объект вида $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ называется линейной комбинацией векторов x_i с коэффициентами $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ из поля K

Определение 25. Набор $\{x_i\}_{i=1}^n$ называется лийнейно зависимым (ЛЗ), если существует нетривиальный (хотя бы один ненулевой) набор $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, такой что: $\sum \alpha_i x_i = 0_X$ (дальше будем писать просто 0)

Определение 26. Набор $\{x_i\}_{i=1}^n$ Называется линейно независимым, если $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$ реализуется только если $\{\alpha_i\}$ – тривиальный набор (все α_i равны 0)

Пример. $X = \mathbb{R}^n = \{x = \big(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T, \xi_i \in \mathbb{R}\big)\}$

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_1^2 \\ \vdots \\ \xi_1^n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \xi_2^1 \\ \xi_2^2 \\ \vdots \\ \xi_2^n \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} \xi_n^1 \\ \xi_n^2 \\ \vdots \\ \xi_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 \xi_1^1 + \alpha_2 \xi_2^1 + \ldots + \alpha_n \xi_n^1 = 0 \\ \alpha_1 \xi_1^2 + \alpha_2 \xi_2^2 + \ldots + \alpha_n \xi_n^2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 \xi_1^n + \alpha_2 \xi_2^n + \ldots + \alpha_n \xi_n^n = 0 \end{cases}$$

Пример. $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \ldots x_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ – линейно независимый набор, из системы уравнений получается $\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 0 \ldots \alpha_n = 0$

Пример. $\overline{S_n} \quad \{1, t, t^2, t^3, \ldots, t^n\}$ – ЛНЗ?

$\triangleleft \alpha_1 1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 + \ldots + \alpha_{n+1} t^n = 0(t)$

$t = 0 \quad \alpha_1 = 0$

$0 + \alpha_2 + 2\alpha_3 t + \ldots + n\alpha_{n+1} t^{n-1} = 0(t) \implies \alpha_2 = 0$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

Лемма 8. Если набор содержит 0, то он ЛЗ

Доказательство. Выберем все коэффициенты 0, кроме коэффициенты перед 0_k, в нём выберем ненулвой α_k, тогда получится нетривиальный набор, при котором линейная комбинация обращается в 0 ■

Лемма 9. Набор, содержащий ЛЗ поднабор является ЛЗ

Доказательство. Выберем нетривиальный набор коэффициентов для поднабора, а для остальных зададим нулевые коэффициенты. Тогда всё, что не было в поднаборе обратится в 0, в поднабор обратится в 0 нетривиально, значит в итоге весь набор будет нетривиально обращён в 0 ■

Лемма 10. Любой поднабор ЛНЗ является ЛНЗ

Теорема 2. Набор векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ ЛЗ $\iff$ хотя бы один вектор набора выражается линейной комбинацией остальных

Доказательство.

$\implies \quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k + \ldots + \alpha_n x_n = 0$

$\qquad x_k = \frac{-1}{\alpha_k}(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{k-1} x_{k-1} + \alpha_{k+1} x_{k+1} + \ldots + \alpha_n x_n)$

$\impliedby \quad x_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i x_i \implies \sum_{i \neq k} \alpha_i x_i - x_k = 0$

■

1.14 Базисы в линейных пространствах

Определение 27. Набор, с помощью которого можно выразить любой другой вектор в линейном пространстве называется полным.

Пример. $x = \mathbb{R}^n \quad e_i = ([0_1, 0_2, \ldots, 0_{i-1}, 1_i, 0_{i+1}, \ldots, 0_n)^T$

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots$$

Определение 28. Базисом в линейном пространстве X называется полный и линейно независимый набор векторов.

Пример. $\{e_i\}_{i=1}^n$ – базис в $\mathbb{R}^n$

Пример. $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ – базис в пространстве P_n

Определение 29. Пространство X называется конечномерным, если в нём существует конечный полный набор векторов.

Лемма 11. В любом конечномерном пространстве существует базис.

Доказательство. Т.к. X – конечномерный $\implies$ существует полный набор $\exists\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ – ПН

1. Если он линейно независимый $\implies$ мы нашли базис
2. Если он не линейно независимый, будем совершать процедуру прореживания:
   (a) $\{y_1\}$ – ЛНЗ (Если он не нулевой. Но в полном наборе должен быть хотя бы один ненулевой)
   (b) $\{y_1, y_2\}$. Если ЛЗ, то вычеркнем y_2, иначе оставим.
   (c) $\{y_1 \dots y_3\}$
   $\dots$
   (d) $\{y_1, y_2, \dots y_k\}$ – ПН + ЛН – базис

∎

Лемма 12. В любом конечномерном пространстве любой ЛНЗ набор может быть дополнен до базиса.

Доказательство. X – конечномерное, в нём существует полный набор $\implies$ $\exists\{e_j\}_{j=1}^n$ базис X

$\sqsupset \{x_i\}_{i=1}^m$ – ЛНЗ

1. $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, e_1\}$: ЛЗ – вычёркиваем e_1, иначе оставляем
2. $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, e_2\}$ – задаёмся тем же вопросом и потенциально убираем e_2

   ...

3. $\{x_1, x_2, \ldots., x_m, \ldots, e_n\}$ – тот же вопрос.

Так мы прошли всё. Он линейно независимый (по построению) + ПН (добавляли вектора базиса, если они и так там не выражались) ■

Лемма 13. Число векторов ЛНЗ в КМ ространстве не превосходит число векторов ПН.

$\sqsupset \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ – ЛНЗ набор

$\sqsupset \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ – полный набор

$\implies m \leqslant n$

Доказательство. $\sqsupset n < m \implies$

1. $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ – ЛНЗ + ПН – базис (число базисных меньше, чем линейно независимых??!)
2. $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ – ЛЗ,

$\{x_1 : y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ (идём слева направо прореживанием)

$\{x_1, x_2 : \ldots y_n\}$

...

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – ЛНЗ + ПН – базис. В базисе n элементов, а линейно независимых $m > n$?!! ■

Лемма 14. Количество векторов в двух различных базисах ЛП одинаково.

Доказательство. $\{e_j\} \quad \{e_k\}$ – базисы X

ЛНЗ $\leqslant$ ПН

ПН $\geqslant$ ЛНЗ ■

Определение 30. Размерностью ЛП называется количество векторов его базиса. $\dim X$

Пример. $\dim \mathbb{R}^n = n$

Пример. $\dim P_n = n+1$

Замечание. Если $\{x_i\}_{i=1}^n$ – ЛНЗ в $X \implies k \leqslant \dim X$

Замечание. Набор $x_{i_{i=1}}^n$ образует базис пространства $X \iff \{x_i\}$ – ЛНЗ и $k = \dim X$

Определение 31. $\sqsupset \{e_j\}_{j=1}^n$ – базис ЛП $X \implies \forall x \in X \exists \xi^i \in K Lx = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j$

$\{\xi^j\}_{j=1}^n$ – координаты вектора x в базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$

Лемма 15. Координаты любого вектора в заданном базисе определяются единственным образом.

Доказательство. $x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i$

$x = \sum_{i=1}^n \psi^i e_i$

$\sum_{i=1}^n \left(\xi^i - \psi^i\right) e_i = 0 \implies \xi^i - \psi^i = 0 \forall i \implies \xi^i = \pi^i$ ■

Лемма 16. Координаты линейной комбинации векторов в заданном базисе равны линейным комбинациям соответствующих координат данных векторов.

$x_i = \sum_{k=1}^n \xi_i^k e_k \quad y = \sum_{i=1}^m \alpha^i x_i$

$y = \sum_{j=1}^n \psi^j e_j \implies \psi^j = \sum_{i=1}^m \alpha^i \xi_i^j$

Доказательство. $y = \sum_{i=1}^m \alpha^i x_i = \sum_{i=1}^m \alpha^i \sum_{k=1}^n \xi^k e_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \alpha^i \xi_i^k\right) e_k = \sum_{k=1}^n \psi^k e_k$ ■

1.15 Системы линейных алгебраических уравнений

Определение 32. $\begin{cases} \alpha_1^1 \xi^1 + \alpha_2^1 \xi^2 + \ldots + \alpha_n^1 \xi^n = \beta^1 \\ \alpha_2^1 \xi^1 + \alpha_2^2 \xi^2 + \ldots + \alpha_n^2 \xi^n = \beta^2 \\ \ldots \\ \alpha_2^m \xi^1 + \alpha_2^m \xi^2 + \ldots + \alpha_n^m \xi^n = \beta^m \end{cases}$

α_i^j – коэффициенты. ξ^j – неизвестные, β_i – свободные члены

Способы записи:

1. Матричный $A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^m & \dots & \alpha_n^m \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \vdots \\ \beta^n \end{pmatrix}$ $\implies$

   $AX = B$

2. Геометрический

   $$a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \vdots \\ \alpha_1^n \end{pmatrix} \quad a_n = \begin{pmatrix} \alpha_n^1 \\ \alpha_n^2 \\ \vdots \\ \alpha_n^m \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \vdots \\ \beta^n \end{pmatrix} \implies a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + \ldots + a_n\xi^n = b$$

   Т.е. задача найти коэффициенты линейной комбинации векторов набора $\{a_j\}_{j=1}^n$, которая давала бы вектор b

1. $\sqsupset b = 0$, т.е. $a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + \ldots + a_n\xi^n = 0$

   Очевидное решение $\xi_i = 0 \forall i$ – тривиальное решение. Но есть ли нетривиальные решения?

   Пример. $\begin{cases} r_1 + 2r_2 + 4r_3 - 3r_4 = 0 \\ 3r_1 + 5r_2 + 6r_3 - 4r_4 = 0 \\ 4r_1 + 5r_2 - 2r_3 + 3r_4 = 0 \\ 3r_1 + 8r_2 + 24r_3 - 19r_4 = 0 \end{cases}$

   Метод Гаусса:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & -3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -4 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   r – количество линейно-независимых столбиков в итоге, или количество ненулевых строк. Первые два столбца назовём базисными неизвестными (можно выбрать любые, но ровно r) Оставшиеся столбцы нарвём параметрами .

   $$\begin{cases} r_1 + 2r_2 + 4r_3 - 3r_4 = 0 \\ r_2 + 6r_3 - 5r_4 = 0 \end{cases}$$

   $$\begin{cases} r_1 + 2r_2 = -4r_3 + 3r_4 \\ r_2 = -6r_3 + 5r_4 \end{cases}$$

   Замечание. $a_1r_1 + a_2r_2 + \ldots + a_nr_n = 0$

   Пусть $R' = r_1', r_2', \ldots, r_n'$ – решение

   И пусть $R'' = r_1'', r_2'', \ldots, r_n''$ – другое решение.

Тогда $\forall \gamma, \delta \in K \quad \gamma \cdot R' + \delta \cdot R''$ – линейная комбинация тоже решение.

Таким образом множество решений это линейное пространство.

Пусть $r_3 = 1, r_4 = 0 \implies r_1 + 2r_2 = -4; r_2 = 6 \implies r_1 = 8$

$X_1 = (8, -6, 1, 0)^T$ – одно из решений однородной системы.

$r_3 = 0, r_4 = 1 \implies r_1 = -7, r_2 = 5$

$X_2 = (-7, 5, 0, 1)^T$ – линейно независим с X_1

X_1, X_2 - базис пространства решений.

$X = c_1X_1 + c_2X_2$ – общее решение однородной системы. Окончательная форма решения.

$\{X_1, X_2\}$ – фундаментальная система решений (ФСР)

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Пример. $\begin{cases} r_1 + r_2 - 3r_4 - r_5 = 0 \\ r_1 - r_2 + 2r_3 - r_4 = 0 \\ 4r_1 - 2r_2 + 6r_3 + 3r_4 - 4r_5 = 0 \\ 2r_1 + 4r_2 - 2r_3 + 4r_4 - 7r_5 = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Фиксируем первый, второй и четвёртый столбцы как базисные

$$\begin{cases} r_1 + r_2 - 3r_4 = r_5 \\ -2r_2 + 2r_4 = -2r_3 - r_5 \\ 3r_4 = r_5 \end{cases}$$

Строим ФСР $r_3 = 0, r_5 = 3 \implies X_1 \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}.0, 1, 3\right)^T$

$r_3 = 1, r_5 = 0 \implies X_2 \left(-1, 1, 1, 0, 0\right)^T$

$$X = c_1 \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. $b \neq 0$

   $a_1 r_1 + a_2 r_2 + \ldots + a_n r_n = b$

   Рассмотрим $a_1 r_1 + a_2 r_2 + \ldots + a_n r_n = 0$

   Если есть два решения первого, то их разность это решение второго.

1.16 Лекция 05.12

...

Лемма 17. Пространства различной размерности не могут быть изоморфны.

Доказательство. Пусть $X \sim Y$, $\dim X = n > m = \dim Y$

$\sqsupset \{e_j\}_{j=1}^n$ – базис X

$e_j \leftrightarrow f_j \in Y$

$\lessdot 0_X = \sum_{j=1}^n \alpha^j e_j \leftrightarrow \sum_{j=1}^n \alpha_i f_j = 0_Y$ – только когда $\alpha^j = 0$

$\{f_j\}_{j=1}^n$ – ЛНЗ набор в пространстве $Y \quad \dim Y = m < n$ ■

Лемма 18. $X \sim Y \iff \dim X = \dim Y$

Доказательство. $\sqsupset \{e_j\}_{j=1}^n$ – базис X

$\sqsupset \{f_j\}_{j=1}^n$ – базис Y

$\varphi(e_j) = f_j \quad e_j \leftrightarrow f_j$

$\sqsupset x \in X \quad x = \sum_{j=1}^n \alpha^j e_j \leftrightarrow y = \sum_{j=1}^n \alpha^j f_j$ ■

$X_n \sim \mathbb{R}^n \sim Y_n$

Пространства размерности n удобно рассматривать как арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$

Замечание. Любое конечномерное пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ можно отождествить с пространством $\mathbb{R}^n$

Пример. $\mathbb{C}^n \sim \mathbb{R}^{2n}$

$\mathbb{R}^n_m \sim \mathbb{R}^{nm}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 &) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P_n \sim \mathbb{R}^{n+1}$

1.16.1 Подпространства

Определение 33. Подпространством L Линейного Пространства X называется подмножество X, замкнутое относительно линейных операций, индуцированных их X

Пример. $X, \{0\}$ – тривиальные подпространства X

Прямая и плоскость в E_3 (они должны содержать 0)

$\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n, m < n$

Симметричные матрицы в $\mathbb{R}^n_m$

Лемма 19. $\sqsupset L$ – Линейное подпространство $L \implies \dim L \leqslant \sim X$

Лемма 20. $L = X \iff \sim L = \sim X$

Лемма 21. $\sqsupset L$ – линейное подпространство X. Тогда любой базис L может быть дополнен до базиса X, но не наоборот

Доказательство. $\sqsupset \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ – базис L $\quad \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – базис X

$\{f_1, f_2, \dots, f_k, e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – прореживаем слева направо ∎

Пример (Контрпример)**.** $\sqsupset \{e_1, e_2\}$ – базис X $\quad \{e_1 + e_2\}$ – базис L

1.16.2 Линейная оболочка

Определение 34. Линейное оболочкой набора $\{x_i\}_{i=1}^k$ называется множество $\mathscr{L}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ всех линейных комбинаций векторов x_i :

$$\mathscr{L} = \{x \in X : \quad x = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i x_i\}.$$

Лемма 22. $\mathscr{L}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – линейное подпространство X

Доказательство. $\sqsupset y_1, y_2 \in \mathscr{L} \overset{?}{\Longrightarrow} y_1 + y_2 \in \mathscr{L} \quad \lambda y_1 \in \mathscr{L}$

$y_1, y_2 \in \mathscr{L} \implies y_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_1^i x_i \quad y_2 = \sum_{i=1}^n \alpha_2^i x_i$

$y_1 + y_2 = \sum_{i=1}^n (\alpha_1^i + \alpha_2^i) x_i \implies y_1 + y_2 \in \mathscr{L}$

$\lambda y_1 = \sum_{i=1}^n \lambda \alpha_1^i x_i \implies \lambda y_1 \in \mathscr{L}$ ■

Лемма 23. Линейная оболочка $\mathscr{L}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ является наименьшим Линейным подпространством X, содержащим эти векторы.

Доказательство. $\sqsupset V = \mathscr{L} \setminus \{y\} \quad y \in \mathscr{L} \implies y = \sum_{i=1}^k \alpha^i x_i \in \mathscr{L} \impliedby$ $\{x_i\}$ – полный набор в $\mathscr{L}$

$y = \sum_{i=1}^k \beta^i x_i \in V \implies \{x_i\}$ – НЕ полный набор в $\mathscr{L}$ ■

Определение 35. Линейная оболочка векторов $\{x_i\}_{i=1}^k$ называется подпространством, натянутым на данные вектора.

Определение 36. Линейным многообразием M, параллельным подпространству L Линейного пространства X называется множество

$$M = \{y \in X : \quad y = x_0 + x| \quad x_0 - \text{фикс } x_0 \in X, x \in L\}.$$

Пример. $\{(x_1, y_1 + y_0)\}$ – прямая, не проходящая через 0 в общем случае. Не линейное пространство, но линейное многообразие.

Лемма 24. $M = L \iff x_0 \in L$

Определение 37. $\dim M = \dim L$

Пример. Примеры Линейных многообразий:

1. Прямая $\dim L = 1$
2. Плоскость $\dim L = 2$
3. k -мерная плоскость $\dim L = k$
4. гипер-плоскость $\dim L = \dim X - 1$

1.16.3 Сумма и пересечение подпространств

$\sqsupset X$ – линейное пространство. L_1, L_2 - его линейные подпространства

Определение 38. Пересечением ЛПП L_1, L_2 называется множество L', такое что

$$L' = \{x \in X : \quad x \in L_1 \& x \in L_2\}.$$

Лемма 25. $L' = L_1 \cap L_2$ – ЛПП X

Доказательство. $\sqsupset x_1, x_2 \in L' \implies x_1, x_2 \in L_1 \quad x_1, x_2 \in L_2$

$\lambda x_1 \in L_1, \lambda x_1 \in L_2 \implies \lambda x_1 \in L_1 \cap L_2$ ■

Определение 39. Множество L'' называется суммой ЛПП L_1, L_2, если

$$L'' = \{x \in X : \quad x = x_1 + x_2| \quad x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\}.$$

Лемма 26. $L'' = L_1 + L_2$ – ЛПП X

Доказательство. $x, y \in L'' \quad x = x_1 + x_2 \quad y = y_1 + y_2 \qquad x_1, y_1 \in L_1 \quad x_2, y_2 \in L_2$

$\lessdot x + y = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = z_1 + z_2$

$\lambda x = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2$ ■

Теорема 3 ((первая) Теорема о размерностях)**.** $\sqsupset L_1, L_2$ – ЛПП $X \implies \dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 + L_2) - \dim(L_1 \cap L_2)$

Доказательство. $\lessdot L_1 \cap L_2 \quad e_1, e_2, \ldots, e_m$– базис пересечения

$\lessdot L_1 \quad \{e_1, e_2, \ldots, e_m; f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ – базис L_1

$\lessdot L_1 \quad \{e_1, e_2, \ldots, e_m; g_1, g_2, \ldots, g_p\}$ – базис L_2

$\implies \quad \{e_1, e_2, \ldots, e_m; f_1, f_2, \ldots, f_k; g_1, g_2, \ldots, g_p\}$ – базис $L_1 + L_2$ (должно быть)

- Полнота: $\sqsupset x \in L_1 + L_2 \implies x = x_1 + x_2 \quad x_1 \in L_1 \quad x_2 \in L_2$

  $\implies x_1 = \sum_{i=1}^m \alpha_1^i e_i + \sum_{j=1}^k \beta_1^j f_j$

  $\implies x_2 = \sum_{i=1}^m \alpha_2^i e_i + \sum_{j=1}^k \beta_2^j g_j$

$x = x_1 + x_2 = \sum_{i=1}^{m}(\alpha_1^i + \alpha_2^i)e_i + \sum_{j=1}^{k}\beta_1^j f_j + \sum_{s=1}^{p}\beta_2^s g_s$

- Линейная независимость

  $\alpha^1 e_1 + \ldots + \alpha^m e_m + \beta^1 f_1 + \ldots + \beta^k f_k + \gamma g^1 + \ldots + \gamma^p g_p = 0$

  $\alpha^1 e_1 + \ldots + \alpha^m e_m + \beta^1 f_1 + \ldots + \beta^k f_k = -\gamma g^1 - \ldots - \gamma^p g_p = z \implies x \in L_1 \cap L_2 \implies z = \delta e_1 + \delta_2 e_2 + \ldots + \delta_m e_m$

  $\lhd z - z = \delta e_1 + \delta_2 e_2 + \ldots + \delta_m e_m + \gamma^1 g_1 + \ldots + \gamma^p g_p = 0 \implies \delta_i = \gamma_j = 0 \implies z = 0 \implies \alpha^1 e_1 + \ldots + \alpha^m e_m + \beta_1 f_1 + \ldots + \beta^k f_k = 0 \implies \alpha^i = \beta^j = 0$

■

1.16.4 Прямая сумма подпространств

Определение 40. Сумма линейных подпространства называется прямой, если $\forall x \in L = L_1 + L_2 \quad x = x_1 + x_2$ – единственное представление.

Замечание (Обозначение прямой суммы)**.** $L = L_1 \dot{+} L_2$

Лемма 27. $L = L_1 \dot{+} L_2 \iff L_1 \cap L_2 = \{0\}$

Доказательство.

$\implies$ $\sqsupset L = L_1 \dot{+} L_2 \quad \exists z \in L_1 \cap L_2 : z \neq 0$

$x = x_1 + x_2 = x_1 + x_2 + z - z = (x_1 + z) + (x_2 - z) \quad x_1 \in L_1, x_2 \in L_2 \quad x_1 + z \in L_1, x_2 - \in L_2$

$\impliedby$ $\sqsupset L_1 \cap L_2 = \{0\}$, но $L = L_1 + L_2$ – не прямая сумма

$x = x_1 + x_2 \quad x = y_1 + y_2$

$0 = x - x = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 \implies x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = z \quad z \in L_1 \cap L_2 \implies L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$

■

$\sqsupset X$ – ЛП, L_1, L_2 – ЛПП X

Теорема 4. $X = L_1 \dot{+} L_2 \iff \begin{cases} L_1 \cap L_2 = \{0\} \\ \dim L_2 + \dim L_2 = \dim X \end{cases}$

Доказательство.

$\implies$ 1. Доказано

2. $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 + L_2) = \dim X \implies L_1 + L_2 \sim X$

$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 + L_2)$

$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim X$

$\implies \dim X = \dim(L_1 + L_2)$

$L_1 + L_2 \subseteq X \& \dim X = \dim(L_1 + L_2) \implies L_1 + L_2 \sim X \quad L_1 + L_2 = X \quad L_1 \cap L_2 = \{0\} \implies X = L_1$ ■

Определение 41. $\sqsupset X = L_1 \dotplus L_2 \implies \forall x \in X \quad \overset{!}{=} x_1 + x_2 \quad x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$

В таком случае x_1, x_2 называются компонентами x в L_1, L_2 соответстыенно

x_1 – проекция x на L_1 Параллельно L_2

x_2 – проекция x на L_2 параллельно L_1

L_1 – дополнение L_2 до X и наоборот

Замечание. Дополнение к заданному ЛПП до X определяется не единственным образом

Пример (Контрпример). $\sqsupset X = \mathbb{R}^3 \quad L = \mathscr{L}\{e_1, e_2\} \quad L_2 = \mathscr{L}\{e_2 + \alpha e_1 + \beta e_2\}$

$X = L_1 \dotplus L_2$

Определение 42. Пространство L называется прямой суммой пространств $\{L - i\}_{j=1}^k$, если

$$\forall x \in L \quad x \overset{!}{=} x_1 + x_2 + \ldots + x_k : \quad x_j \in L_j.$$

Теорема 5. $X = \dotplus \sum_{i=1}^k L_i \iff \begin{cases} L_i \cap L_{j \neq i} = \{0\} \\ \dim X = \sum_{i=1}^k \dim L_i \end{cases}$

1.17 ... СЛАУ

1.

2. Геометрическое исследование СЛАУ

$$a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \vdots \\ \alpha_m^2 \end{pmatrix} \quad a_n = \begin{pmatrix} \alpha_n^1 \\ \alpha_n^2 \\ \vdots \\ \alpha_n^m \end{pmatrix} quad \beta_n = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \vdots \\ \beta^m \end{pmatrix} \; (*)$$

$\implies \alpha_1\xi^1 + \alpha_2\xi^2 + \ldots + \alpha_n\xi^n = b \iff \sum_{j=1}^n a_j\xi^j = b$

$\lhd \alpha = \text{ЛО}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

$a_j \in \mathbb{R}^m \quad \dim R^m = m$

Т.к. α $\quad$ ЛПП$\mathbb{R}^m \implies \dim\alpha \leqslant \dim\mathbb{R}^m$

Определение 43. Система * называется системой Крамера, если $n = m$ и набор $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ – ЛНЗ

Теорема 6. Система Крамера совместно и определена

Доказательство. $m = n \implies \dim\alpha = r \leqslant n = m$

$b \in \mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^n \; (m = n)$

$\{a_j\}_{j=1}^n$ – ЛНЗ в $\alpha < \mathbb{R}^n \implies \{a_j\}_{j=1}^n$ – базис $\mathbb{R}^n \implies b \in \alpha$ – совместна и определена ■

$\sqsupset m \neq n \quad \dim\alpha = r \leqslant m$

Применим процедуру прореживания к набору $\{a_j\}_{j=1}^n \implies \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}\}$ – ЛНЗ $\implies$ базис α

Определение 44. Коэффициенты $\{\xi^{i_k}\}_{k=1}^r$ называются базисными или главными неизвестными системы.

Оставшиеся коэффициенты называются свободными или параметрическими.

Замечание. $\xi^{i_1} = \xi^1 \quad x^{i_r} = \xi^3$

$\xi^{i_{r+1}} = \xi^{r+1} \quad \xi^{i_n} = \xi^n$

Перепишем систему *:

$$a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + \ldots + a_r\xi^r = b - a_{r+1}\xi^{r+1} - \ldots - a_n\xi^n.$$

Теорема 7 (Кронекера-Капелли о совместности системы)**.** Чтобы система * была совместна необходимо и достаточно выполнение следующего уловия: $b \in \alpha$

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Пусть * совместна $\Longrightarrow \exists \{\xi^j\}_{j=1}^n$:

$\{b, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – ЛЗ $\Longrightarrow b \in \alpha$

$\Longleftarrow \ \sqsupset b \in \alpha \Longrightarrow b - a_{r+1}\xi^{r+1} - \ldots - a_n\xi^r \in \alpha$

■

Замечание. Если $r = n \Longrightarrow$ * определена

$a_1\xi^1 + \ldots + a_n\xi^n = b + 0$

Если $r < n \Longrightarrow$ * неопределена

$a_1\xi^1 + \ldots + a_r\xi^r = b - a_{r+1}\xi^{r+1} - \ldots - a_n\xi^n = b'$

$a_1\xi^1 + \ldots + a_r\xi^r = b'$ – определена,но! разложение для b' даёт неопределённость

Следствие 1. (a) Однородная система:

- всегда определена
- имеет неоднородные решения, когда $r < n$
- является неопределённой, когда $m < n$

  $\dim \alpha = m < n \Longrightarrow \{a_j\}_{j=1}^n$ – ЛЗ по любому

Теорема 8 (Альтернатива Фредгольма)**.** $\sqsupset m = n$

$\sum\limits_{j=1}^n a_j\xi^j = b \quad (*)$

$$\sum_{j=1}^n a_j\xi^j = 0 \quad (**).$$

(a) Или $**$ имеет только тривиальное решение (а тогда $*$ совместна и опредена)

(b) (Или $**$ имеет нетривиальные решение) система $*$ совместна не при любом b

Доказательство. $**$ имеет нетривиальные ■

3. Фундаментальная систем решений

   $\sqsupset N$ – множество решений системы $**$

Теорема 9. Множество M решений однородной системы СЛАУ является линейным пространством.

Доказательство. $\sqsupset x_1 = \left(\xi_1^1 \quad \xi_1^2, \dots, \xi_1^n\right)$

$\sqsupset x_2 = \left(\xi_2^1 \quad \xi_2^2, \dots, \xi_2^n\right) \quad x_1, x_2, \in M$

$x_1 + x_2 \in M?$

$\sum_{i=1}^n \left(\xi_1^i + \xi_2^i\right) a_i = \sum_{i=1}^n \xi a_1^j a_j + \sum_{i=1}^n \xi_2^j a_j == 0 + 0 = 0 \implies x_1 + x_2 \in M$

$\sum_{i=1}^n (\lambda \xi^h) a_j = \lambda \sum_{i=1}^n \xi^j a_j = \lambda \cdot 0 = 0 \implies \lambda x \in M$ ∎

Теорема 10. $\dim M = n - r$

Доказательство. $\dim M = n - r \iff \simeq \mathbb{R}^{n-r}$

$a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + \dots a_r\xi^r = -a_{r+1}\xi^{r+1} - \dots - a_n\xi^n =: \eta$

Замечание. η имеет единственное разложение по набору $\{a_i\}_{i=1}^r$

$\mathbb{R}^{n-r} \ni \left(\xi^{r+1}\xi^{r+2}\dots\xi^n\right)^T \longleftrightarrow \left(\xi^1\xi^2\dots\xi^r; \xi^{r+1}\dots\xi^n\right)^T$ – биекция

$\sqsupset y_1 = \sum_{k=1r+1}^n \eta_1^k a_k \longleftrightarrow x_1 = \sum_{k=1}^n \xi_1^k a_k$

$\sqsupset y_2 = \sum_{k=1r+1}^n \eta_2^k a_k \longleftrightarrow x_2 = \sum_{k=1}^n \xi_2^k a_k$

$y_1 + y_1 = \sum_{k=r+1}^n \left(\eta_1^k + \eta_2^k\right) a_k = \sum_{k=r+1}^n \eta_1^k a_k + \sum_{k=r+1}^n \eta_2^k a_k \longleftrightarrow \sum_{k=1}^n \xi_1^k a_k + \sum_{k=1}^n \xi_2^k a_k = x_1 + x_2$

$\lambda y = \sum_{k=r+1}^n \lambda\eta^k a_k = \lambda \sum_{k=r+1}^n \eta^k a_k \longleftrightarrow \lambda \sum_{k=1}^n \xi^k a_k$ ∎

Доказали, что M – ЛП размерности $n - r$

$$M \simeq \mathbb{R}^{n-r} \leftarrow \text{базис} \begin{cases} (1, 0, \dots, 0)^T \\ (0, 1, \dots, 1)^T \ \dots \\ (0, 0, \dots, 1)^T \end{cases}$$

$(100\dots{}_0) \in \mathbb{R}^{n-r} \quad \left(\xi_1^1\xi_1^2\dots\xi_1^r; 100\dots0\right)$

$(0100\dots{}_0) \in \mathbb{R}^{n-r} \longleftrightarrow \left(\xi_2^1\xi_2^2\dots\xi_2^r; 010\dots0\right)$

$\dots$

$(000\dots{}_1) \leftrightarrow \left(\xi_{n-r}^1\xi_{n-r}^2\dots\xi_{n-r}^r; 00\dots1\right)$

Справа стоит базис M. Нормальная ФСР $(**)$

$\sqsupset \left(\xi_j^1\xi_j^2\dots\xi_j^r, 00\dots1..0\right) = x_j$

Определение 45. Общим решением системы $**$ называется решение вида

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_{n-r} x_{n-r} = \sum_{i=1}^{n-r} c_i x_i.$$

4. Структура решения неоднородной СЛАУ

$\sqsupset$ $(*)$ – совместна $\implies b \in \alpha \quad \dim \alpha = r$

$\sqsupset$ $\widetilde{M}$ – множество решений $*$

M – множество решений $**$ – ЛПП

Теорема 11. Пусть z' – фиксированное решение $*$. $z' \in \widetilde{M}$, тогда

$$z = z' + x \in \widetilde{M} \quad \forall x \in M.$$

Доказательство. $z' = \{\zeta^1 \zeta^2 \ldots \zeta^n\} \quad x = \{\xi^1 \xi^2 \ldots \xi^n\}$

$\vartriangleleft \sum_{i=1}^n \left(\zeta^i + \xi^i\right) a_i = \sum_{i=1}^n \zeta^i a_i + \sum_{i=1}^n \xi^i a_i = b + 0 = b$

$\vartriangleleft x = z' - z \quad z = \left(\widetilde{\zeta^1} \ldots \widetilde{\zeta^n}\right)^T$

$\sum_{i=1}^n (\widetilde{\zeta^i} - \xi^i) a_i = \sum_{i=1}^n \widetilde{\zeta^i} a_i - \sum_{i=1}^n \xi^i a_i = b - b = 0 = \sum_{i=1}^n \xi^i a_i \implies x \in M$ ■

Замечание. Общее решение неоднородной СЛАУ

$z = z' - x \implies z = z' - \sum_{i=1}^n x_i x_i \qquad \{x_i\}_{i=1}^n$ – ФСР

Замечание. $\widetilde{M}$ имеет структуру линейного многообразия

$\forall z \in \widetilde{M} \quad z = z' + x \quad x \in M \quad z' \notin M$

1.18 Как практика, но на лекции, потому что космос против практики на практике.

Задача 2. $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -4 \end{cases}$

Получить общее решение системы

Доказательство. $\begin{pmatrix}5&4&1&3&-5\\2&1&1&4&2\\3&2&1&1&-3\\1&3&-1&2&-4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&-2&2&-4\\5&4&1&3&-5\\2&1&1&4&2\\3&2&1&1&-3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&-2&2&-4\\0&-11&11&-7&15\\0&-5&5&0&10\\0&-7&7&-5&9\end{pmatrix} \sim$
$\begin{pmatrix}1&3&-2&2&-4\\0&1&-1&0&-2\\0&-11&11&-7&15\\0&-7&7&-5&9\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&-2&2&-4\\0&1&-2&0&-2\\0&0&0&0&-7\\0&0&0&-5&-5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&-2&2&-4\\0&1&-1&0&-2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

1. Решение однородной задачи: $\begin{cases}x_1+3x_2+2x_4=2x_2\\x_2=x_2\\x_4=0\end{cases}$

   x_3 – параметр. Можем взять любой неноль.

   $\sqsupset x_3=1$

   $\implies x_4=0, x_2=1, x_1=-1 \qquad x_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

   Общее решение ОЗ: $x=c_1x_1$

2. Решение неоднородной задачи

   $\begin{cases}x_1+4x_2+2x_4=-4+2x_3\\x_2=-2+x_3\\x_4=1\end{cases}$

   В неоднородной задаче можно взять параметры вообще любыми (даже 0)

   Частное решение: $x_3=0 \quad x_4=1 \quad x_2=-2 \quad x_1=0$

   $z'=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$

   Общее решение: $z=z'+c_1x_1=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ ✓

■

Пример. $\begin{pmatrix}\lambda&1&1&1&1\\1&\lambda&1&1&1\\1&1&\lambda&1&1\\1&1&1&\lambda&1\end{pmatrix}$

Найти общее решение в зависимости от параметра λ

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \lambda & 1 & & & & \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & 1 & & & & \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 1 \setminus lambda & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ \lambda-1 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0\end{pmatrix} \sim$$

$$(\lambda-1 \neq 0)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1-\lambda & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \lambda & \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2-\lambda & -1\end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3-\lambda & -1\end{pmatrix}$$

$\lambda = -3 \implies$ система несовместна

$\lambda \neq -3 \& \lambda \neq -1 \implies$ единственное решение $x_4 = \frac{1}{\lambda+3} \quad x_3 = \frac{1}{\lambda+3} \quad x_2 = \frac{1}{\lambda+3} \quad x_1 = 1 - \frac{\lambda}{\lambda+3} - \frac{2}{\lambda+3} = \frac{1}{\lambda+3}$

$\lambda = 1 \quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

$x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$

Однородная задача: $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4$

$x_2 = 1 \quad \times x_3 = x_4 = 0 \quad (-1, 1, 0, 0)^T = y_1$

$x_2 = x_3 = 0 \quad x_2 = 1 \quad (-1010)^T = y_2$

$x_2 = x_3 = 0 \quad x_4 = 1 \quad (-1001)^T = y_3$

y_1, y_2, y_3 – ФСР

Неоднородная задача: $x_2 = x_3 = x_4 = 0 \quad x_1 = 1$

Общее решение: $z = \begin{pmatrix}1 \\ 0 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$

II вариант. Когда система будет крамеровского типа? Когда определитель будет отличен от 0

$$\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \setminus \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & & \end{vmatrix} =$$

$$-(1-\lambda)^3 \begin{vmatrix}1 & 1 & 1+\lambda \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix} = -(1-\lambda)^3 \begin{vmatrix}1 & 1 & 1+\lambda \\ 0 & 1 & 2+\lambda \\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 \begin{vmatrix}1 & 2+\lambda \\ -1 & 1\end{vmatrix} =$$

$(\lambda-1)^3(\lambda+3) = 0$

$\lambda = -3 \implies$

$\lambda = 1 \implies$

λ Остальные

1.19 Линейные подпространства

$\mathbb{R}^n, P^n, \mathbb{R}^n_m$

Вспомним:

Определение 46. $L \subseteq X \quad L$ – замкнуто относительно операций индуцированных на X

Пример. $\mathbb{R}^n$

$x \in \mathbb{R}^n \quad x = (\xi, \xi, \dots, \xi)$ –линейное пространство

Пример. $\sum \xi_i = 0$ – линейное пространство

$\sum \xi_i = 1$ – НЕ линейное пространство

Пример. $X = \mathbb{R}^n_n$

x – матрица с нулевой первой строкой. Можество таких x – линейное подпространство

Если заменить на единичную строку, то уже не будет

Пример. Верхние треугольные матрицы – линейное подпространство.

Вспомним также, что в инейном пространстве есть базис.

$$\mathbb{R}^n: \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Пример.

$$x_1 = (-1, 4, 0, 1)^T$$
$$x_2 = (0, 0, 0, 1)^T$$
$$x_3 = (-1, 1, 1, -)^T$$
$$x_4 = (0, 3, -1, 1)^T$$
$$.$$

Найдём линейные зависимости (если они есть) Запишем вектора по строчкам:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$0 = -x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

Пример. $\begin{cases} 3\xi^1 + 3\xi^2 - 4\xi^3 - 3\xi^4 = 0 \\ 6\xi^1 + \xi^3 + \xi^4 = 0 \\ 5\xi^1 + 4\xi^2 + 2\xi^3 + \xi^4 = 0 \\ 2\xi^1 + 3\xi^2 + 3\xi^3 + 2\xi^4 = 0 \end{cases}$

Множество решений – ЛП. Найдём базис и размерность этого пространства.

ФСР $\to$ Базис L

А что если мы хотим наоборот по ФСР восстановить систему. Или подругому: имея базис ЛП составить систему, которая этот базис порождает.

$$\begin{aligned} x_1 &= (2, 0, 1, 3, -1)^T \\ x_2 &= (1, 1, 0, -1, 1)^T \\ x_3 &= (0, -2, 1, 5, -3)^T \\ x_4 &= (1, -3, 2, 9, -5)^T \\ &. \end{aligned}$$

$\implies L = \mathscr{L}(x1, ..., x_n)$

$y \in L \quad \left(\eta^1, \eta^2, \eta^3, \eta^4, \eta^5\right) \implies \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = y$ – совместна

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & \eta^1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & \eta^2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \eta^3 \\ 3 & -1 & 5 & 9 & \eta^4 \\ -1 & 1 & -3 & -5 & \eta^5 \end{array}\right]$$

1.20 Лекция

TODO: дописать

Лемма 28. f, g – линейные форма $\implies$ $f+g$ – линейная форма

Доказательство. $\sqsupset x_1, x_2 \in X$

$$\begin{aligned} h\left(x_1+x_2\right) &= (f+g)(x_1+x_2) \\ &= f(x_1+x_2)+g(x_1+x_2) \\ &= f(x_1)+f(x_2)+g(x_1)+g(x_2) \\ &= (f+g)(x_1)+(f+g)(x_2) \\ &= h(x_1)+h(x_2) \end{aligned}.$$

$$\begin{aligned} h\left(\lambda x\right) &= (f+g)(\lambda x) \\ &= \lambda f(x)+\lambda g(x) \\ &= \lambda(f+g)(x) \\ &= \lambda h(x) \end{aligned}.$$

■

Теорема 12. Линейные формы образуют линейное ространства

Определение 47. Линейное пространство линейных форм над X называется пространством, сопряжённым к X

Замечание. Обозначение: X^*

$\sqsupset \{e_j\}$ – базис X

$\forall x \in X \quad x \longleftrightarrow \xi \quad x=\sum_{j=1}^n \xi^j e_j$

$\sqsupset f \in X^*$

$\lessdot f(x)=f\left(\sum_{j=1}^n \xi^j e_j\right)=\sum_{j=1}^n \xi^j \underbrace{f\left(e_j\right)}_{\phi_j}=\sum_{j=1}^n \xi^j \phi_j$

Определение 48. Коэффициентами линейной формы в базисе $\{e_j\}$ ЛП X называется набор $\{\phi_j\}: \quad \phi_j=f\left(e_j\right)$

Лемма 29. Задание линейной формы над X эквивалентно заданию её коэффициентов на базисных векторах X

Доказательство. Доказательство чуть выше ■

Замечание. $f \longleftrightarrow (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$

$x \longleftrightarrow \left(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n\right)$

$f(x) = \xi^1\phi_1 + \xi^2\phi_2 + \ldots + \xi^n\phi_n$

Если $f(x) = 0 \implies \xi^1\phi_1 + \xi^2\phi_2 + \ldots + \xi^n\phi_n = 0$

Теорема 13 (О базисе X^*)**.** Набор линейных форм $\{f^k\}_{k=1}^n : X \to K$, действующих на X с базисом $\{e_j\}$ следующим образом:

$$f^k(x) = \xi^k \qquad x = \sum_{j=1}^{n} \xi^j e_j.$$

образует базис линейного пространства X^*

Замечание. $\dim X = \dim X^* = n \implies X \simeq X^*$

теоремы. $\{f^k\}_{k=1}^n$ – полный набор.

$\sqsupset g \in X^* \quad x \in X \quad \vartriangleleft g(x) = \sum_{k=1}^n \xi^k g(e_k) = \sum_{k=1}^n \xi^k \phi_k = \sum_{k=1}^n \phi_k f^k(x) = \sum_{k=1}^n \left(\phi_k f^k\right)(x) = \left(\sum_{k=1}^n \phi_k f^k\right)(x)$

$\implies g = \sum_{k=1}^n \phi_k f^k$ – полный набор!

$\{f^k\}_{k=1}^n$ – ЛНЗ

$\vartriangleleft \sum_{k=1}^n \alpha_k f^k = \mathcal{O}$ (ноль-форма) $\alpha_k = 0 \forall k$?

$\mathcal{O}(e_1) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f^k(e_1) = \alpha_1 f^1(e_1) = \alpha_1 = 0$

$\mathcal{O}(e_2) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f^k(e_2) \implies \alpha_2 = 0$

$\ldots$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ ■

Замечание. $\{f^k\}_{k=1}^n : X \to K \quad f^k(x) = \xi^k$

$$f^k(e_j) = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases} = \delta_j^k.$$

Такие базисы называются сопряжёнными. Для такой формы есть спец символ, называемый формой Корнекера

Замечание. $x = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \ldots + \xi^n e_n = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j$

$x = f^1(x)e_1 + f^2(x)e_2 + \ldots + f^n(x)e_n = \sum_{j=1}^n f^j(x)e_j$

Замечание. $f = \sum_{k=1}^n \eta_k f^k \overset{\{f^k\}_{k=1}^n}{\leftarrow} f \in X^* \overset{\{e_j\}_{j=1}^n}{\phi}{}_j = f(e_j)$

$(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \qquad (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$

Если f^k и e_j сопряжены, то эти наборы коэффициентов совпадают ($f^k(e_j) = \delta_j^k$)

Замечание. $X \quad X^* \quad (X^*)^* = X^{**}$?

$(f,x) \quad (f,*) \quad \begin{cases} (f, x_1 + x_2) = (f, x_1) + (f, x_2) \\ (f, \lambda x) = \lambda(f, x) \end{cases} \qquad X \to K$

$(*,x) \quad \begin{cases} (f_1 + f_2, x) = (f_1, x) + (f_2, x) \\ (\lambda f, x) = \lambda(f, x) \end{cases} \qquad X^* \to K$

$X \simeq X^* \simeq X^{**} \implies X \simeq X^{**}$

$(*, x) = (\widetilde{x}, *)$

$X \simeq X^{**}$ – “естественно изоморфны”. $(x \to \widetilde{x}) \iff (\widetilde{x}, f) = (f, x)$

$x_1 + x_2 \longleftrightarrow \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2$

$\lambda x_1 \longleftrightarrow \lambda \widetilde{x}_1$

1.21 Низапная Практика

$$\begin{aligned} x_1 &= (2, 0, 1, 3, -1)^T \\ x_2 &= (1, 1, 0, -1, 1)^T \\ x_3 &= (0, -2, 1, 5, -3)^T \\ x_4 &= (1, -3, 2, 9, -5)^T \end{aligned}$$

.

$\implies L = \mathscr{L}(x1, ..., x_n)$

$y \in L \quad (\eta^1, \eta^2, \eta^3, \eta^4, \eta^5) \implies \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = y$ – совместна

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & \eta^1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & \eta^2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \eta^3 \\ 3 & -1 & 5 & 9 & \eta^4 \\ -1 & 1 & -3 & -5 & \eta^5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & \eta^3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & \eta^1 - 2\eta^3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & \eta^4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & \eta^4 - 3\eta^3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & \eta^4 + \eta^3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & \eta^3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & \eta^1 - 2\eta^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta^2 - \eta^1 + 2\eta^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta^1 - 2\eta^3 + \eta^4 - 3\eta^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta^5 + \eta^3 - \eta^1 + 2\eta^3 \end{array}\right]$$

Для совместности напротив нулей должны быть нули $\Longrightarrow \begin{cases} -\eta^1 + \eta^2 + 2\eta^3 = 0 \\ \eta^! - 5\eta^3 + \eta^4 = 0 \\ -\eta^1 + 3\eta^3 + \eta^5 \end{cases}$

Эта система уравнений даёт нам нужную линейную оболочку четырёх векторов x_1, x_2, x_3, x_4

Пример. $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ $A_4 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ $A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ $A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

Эти матрицы лежат в линейном пространстве симметричных матриц размерности 3×3. Найдём базис их линейной оболочки: $\mathcal{L}\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$

$\lhd$ базис пространства симметричных матриц:

$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 &) \end{bmatrix}$ $E_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $E_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $E_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A_1 = 0E_1 + 0E_2 + 1E_3 + 1E_4 + 0E_5 + 1E_6 \Longrightarrow A_1 \longleftrightarrow (0, 0, 1, 1, 0, 1)$

Так можно переформулировать на язык векторов. А дальше тот же алгоритм.

Пример. $X = P_3^{(e)}$ $\begin{cases} P_1 = (1 + t^2)^2 \\ P_2 = (1 - t^2)^2 \\ P_3 = 1 \end{cases}$

Выберем базис $\{1, t^2, t^4\}$

$P_1 \longleftrightarrow (1, 2, 1)^T$

$P_2 \longleftrightarrow (1, -2, 1)^T$

$P_3 \longleftrightarrow (1, 0, 0)^T$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Longrightarrow$ образуют базис.

Пример. $L_1: \begin{cases} x_1 = (1, 2, -1, -2)^T \\ x_2 = (3, 1, 1, 1)^T \\ x_3 = (-1, 0, 1, -1)^T \end{cases}$ $\quad L_2: \begin{cases} y_1 = (2, 5, -6, -6)^T \\ y_2 = (-1, 2, -7, -3)^T \end{cases}$

$L_1 + L_2$ –? (базис суммы)

$L_1 \cap L_2$ – ? (базис пересечения)

Сумма: $\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -6 & -7 \\ -2 & 1 & -1 & -5 & -3 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 7 & -3 & -1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \Longrightarrow$

$y_1 \in L_1, y_2 \in L_1$

$L_1 + L_2 = L_1 \implies L_2 \subseteq L_1$

Базис суммы совпадает с базисом L_1

Базис пересечения – базис L_2

Пример. $L_1, L_2 \subseteq P_3$

$L_1: \begin{cases} p_1 = 1 + 2t + t^3 \\ p_2 = 1 + t + t^2 \\ p_3 = t - t^2 + t^3 \end{cases}$ $\quad L_2: \begin{cases} q_1 = 1 + t^3 \\ q_2 = 1 + 3t + t^2 \\ q_3 = 3t - t^2 + t^3 \end{cases}$

$L_1 + L_2$ – ? $L_1 \cap L_2$ – ?

Выберем базис P_3 – $\{1, t, t^2, t^3\}$

$p_1 \longleftrightarrow x_1(1, 2, 0, 1)^T$

$p_2 \longleftrightarrow x_2(1, 1, 1, 0)^T$

$p_3 \longleftrightarrow x_3(0, 1, -1, 1)^T$

$q_1 \longleftrightarrow y_1(1, 0, 0, 1)^T$

$q_2 \longleftrightarrow y_2(1, 2, 0, 1)^T$

$q_3 \longleftrightarrow y_3(0, 3, -1, 1)^T$

Найдём базис суммы

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Базис суммы: 1, 2 и 4 столбцы:

$$\begin{cases}(1,2,0,1)^T \leftrightarrow b_1 = 1+2t+t^3\\ (1,1,1,0)^T \leftrightarrow b_2 = 1+t+t^2\\ (1,0,0,1)^T \leftrightarrow b_3 = 1+t^3\end{cases}$$

(Можем взять те же столбцы из начальной матрицы, т.к. Гаусс сохраняет линейные соотношения.

СЛАУ для L_1:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&\xi^1\\2&1&1&\xi^2\\0&1&-1&\xi^3\\1&0&1&\xi^4\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&\xi^1\\0&-1&1&\xi^2-2\xi^1\\0&1&-1&\xi^3\\0&-1&1&\xi^4-\xi^1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&\xi^1\\0&-1&1&\xi^2-2\xi^1\\0&0&0&-2\xi^1+\xi^2+\xi^3\\0&0&0&\xi^1-\xi^2+\xi^4\end{array}\right]$$

$$\begin{cases}-2\xi^1+\xi^2+\xi^3=0\\ \xi^1-\xi^2+\xi^4=0\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&\xi^1\\0&3&3&\xi^2\\0&0&-1&\xi^3\\1&1&1&\xi^4\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&\xi^1\\0&3&3&\xi^2\\0&0&-1&\xi^3\\0&0&1&\xi^4-\xi^1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&\xi^1\\0&3&3&\xi^2\\0&0&-1&\xi^3\\0&0&0&-\xi^1+\xi^3+\xi^4\end{array}\right]$$

$$\begin{cases}-\xi^1+\xi^3+\xi^4=0\end{cases}$$

Базис для $L_1\cap L_2$ – ФСР

$$\begin{cases}-2\xi^1+\xi^2+\xi^3=0\\ \xi^1-\xi^2+\xi^4=0\\ -\xi^1+\xi^3+\xi^4=0\end{cases}$$