Математический анализ, 3 семестр

Коченюк Анатолий

7 декабря 2021 г.

Глава 1

Анализ нескольких переменных. Функциональные ряды. Теория меры, Криволинейные интегралы.

литература – Виноградов, Виноградов-Громов

1.1 Вспоминаем

$O \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое, $f : O \to R, f \in C^{N+1}(O), N \in \mathbb{N}$

$[a, x]$ – замкнутый отрезок $\subset O, a \neq x \implies \exists x \in (a, x) :$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{N} \frac{d_a^k f(x-a)}{k!}}_{\text{Тейлоровский многочлен порядка N}} + \frac{d_c^k f(x-a)}{(N+1)!}$$

$T_{N,a,f}$

Определение 1. $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ – пространство мультииндексов

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

$\alpha! = \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n$

$f_{(a)}^{(\alpha)} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_n} x_n \dots \partial^{\alpha_1} x_1}$

$h = (h_1, \dots, h_n) \quad d_a^k f(h) = \sum\limits_{\substack{\alpha \in (Z_+)^n \\ |\alpha| = k}} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha$

1.2 Полиномиальная форма Ньютона

$N \in \mathbb{N} \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$(x_1 + \dots + x_n)^N = \sum\limits_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha| = N}} \frac{N!}{\alpha!} x^\alpha$

Доказательство. $p(x) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^N$

$p'_{x_1} = N\,(x_1 + \dots + x_n)^{N-1} = p'_{x_2} = \dots = p'_{x_n}$

$p^\alpha = N(N-1)\dots(N - |\alpha| + 1)\,(x_1 + \dots + x_n)^{N - |\alpha|}$

$|\alpha| \leqslant N + 1 \implies p^{(\alpha)} \equiv 0$

$|\alpha| < N \implies p^{(\alpha)}(0) = 0$

Ноль получается, только если $|\alpha| = N \quad p^{(\alpha)}(0) = N!$

Если подставить, то получим:

$\sum \frac{N!}{\alpha!} x^\alpha \quad h = x - a = x - 0$ ■

1.3 Оценка однородных многочленов

Определение 2. $\sum\limits_{\substack{\alpha \in (Z_+)^n \\ |\alpha| = N}}^{n} b_\alpha x^\alpha$ – однородный многочлен степени N

В более широком смысле $b_\alpha \in \mathbb{R}^m$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad p\,(tx) = t^N p(x)$, т.е. однородный многочлен является однородной функцией.

Утверждение 1. $\exists\ p(x) = \sum\limits_{\substack{\alpha\in(Z_+)^n \\ |\alpha|=N}} \frac{N!}{\alpha!} C_\alpha x^\alpha \quad C_\alpha \in \mathbb{R}^m, \exists\ M : \|C_\alpha\| \leqslant M$

Тогда $\|p(x)\| \leqslant M\left(\sqrt{n}\|x\|\right)^N$

Доказательство. $\|p(x)\| \leqslant \sum\limits_{\substack{\alpha\in(Z_+)^n \\ |\alpha|=N}} \frac{N!}{\alpha!}|x^\alpha|\underbrace{\|C_\alpha\|}_{\leqslant M} \leqslant M \sum\limits_{\substack{\alpha\in(Z_+)^n \\ |\alpha|=N}} \frac{N!}{\alpha!} \underbrace{|x^\alpha|}_{|x_1|^{\alpha_1}\dots|x_n|^{\alpha_n}} = M\cdot(|x_1|+\ldots+|x_n|)^N \leqslant M\left(\sqrt{n}\|x\|\right)^N$

$\sum\limits_{k=1}^n |x_k|\cdot 1 \leqslant \sqrt{\sum\limits_{k=1}^n x_k^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{k=1}^n 1} = \|x\|\sqrt{n}$ – неравенство Коши, что сумма скаларяных произведений меньше произведения норм ∎

Формула Тейлора-Лагранжа на отображения буквально не переносится $f \in C^1(O) \quad f(x) - f(a) = d_c f(x-a)$

для отображений нарушается

$f(t) = \begin{pmatrix}\cos t \\ \sin t\end{pmatrix} a = 0,$ “x”$= 2\pi \quad f(x) - f(a) = 0$

$f'(t) = \begin{pmatrix}-\sin t \\ \cos t\end{pmatrix}$

Теорема 1. Открытое $O \subseteq \mathbb{R}^n, n, m \in \mathbb{N} \quad N \in \mathbb{Z}_+, f \in C^{N+1}(O \to \mathbb{R}^m)$

$[a,x] \in O, a \neq x$

Тогда $f(x) - T_{N,a,f}(x)$ – остаточный член, который оценивается так:

$\|f(x) - T_{N,a,f}(x)\| \leqslant \frac{1}{(N+1)!}\sup_{x\in(a,x)}\|d_c^{N+1}f(x-a)\|$

$\sum\limits_{\substack{\alpha\in(\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha|\leqslant N}} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha$

1.4 Отступление

$f, g : O \to \mathbb{R}^m$, дифференцируемые в O

$d\langle f, g\rangle = \langle df, g\rangle + \langle f, dg\rangle$

$d\langle f, g\rangle(h) = \langle df(h), g\rangle + \langle f, dg(h)\rangle$

$d^2\langle f, g\rangle = \left\langle d^2 f, g\right\rangle + 2\langle df, dg\rangle + \left\langle f, d^2 g\right\rangle$

$d^N \langle f, g\rangle = \sum\limits_{k=0}^{N} C_N^k \left\langle d^k f d^{N-k} g\right\rangle$ (проверка как в одномерном случае)

Тогда, если $v \in \mathbb{R}^m, v = const$

$d^N \langle f, v\rangle = \left\langle d^N f, v\right\rangle$

Доказательство теоремы 1. Если $v \in \mathbb{R}^m, v$ – фиксирована

$g(x) = \langle f(x), v\rangle : O \to \mathbb{R}, g \in C^{N+1}\left(O \to \mathbb{R}\right)$

$g(x) - T_{N,a,g}(x) = \frac{1}{(N+1)!} d_c^{N+1} g(x-a)$ по уже установленной теореме Тейлора-Лагранжа для функций

$T_{N,a,g}(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{\left\langle d^k f, v\right\rangle (x-a)}{k!}$

$\left\langle f(x) - \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{d^k f(x-a)}{k!}, v\right\rangle = \frac{1}{(N+1)!} \underbrace{\left\langle d_c^{N+1} f(x-a), v\right\rangle}_{\leqslant \|d_c^{N+1} f \ldots\| \|v\|}$

$|\text{левая часть}| \leqslant \underbrace{\dfrac{1}{(N+1)!} \sup\limits_{c \in [a,x]} \|d_c^{N+1} f(x-a)\|}_{\text{не зависит от выбора } v} \cdot \|v\|$

Если мы возьмём v остаточным членом, то мы получим оценку остаточного члена, не зависящую от v

$v = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{d^k f(x-a)}{k!}$

$\|v\|^{\cancel{2}} \leqslant \frac{1}{(N+1)!} \sup \ldots \cancel{\|v\|}$ (сократили на $\|v\|$)

$\|f - T_{N,a,f}\| \leqslant \frac{1}{(N+1)!} \sup \ldots.$ ■

1.5 Частный случай: формула конечных приращений

$O \subseteq \mathbb{R}^n, f \in C^1\left(O \to \mathbb{R}^m\right), [a, x] \subseteq O \quad a \neq x$, тогда

$$\|f(x) - f(a)\| \leqslant \sup_{c \in [a,x]} \|d_c f\| \|x - a\|$$

Следствие 1. Пусть $f \in C^1\left(O \to \mathbb{R}^m\right)$, где O – открытое множество. Пусть K – выпуклый компакт, $K \subseteq O$. Тогда

$$\forall a, b \in K \quad \|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_{c \in K} \|d_c f\| \|b - a\|$$

1.6 Об оценке нормы дифференциала

$p(x) = \sum\limits_{\substack{\alpha\in(\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha|\neq N}} \frac{N!}{\alpha!} C_\alpha x^\alpha \quad \forall\alpha\ \|C_\alpha\| \leqslant M$

$\|p(x)\| \leqslant M\left(\sqrt{n}\|x\|\right)^N$

$d_c^N f = \sum \frac{N!}{\alpha!} \underbrace{\frac{f^{(\alpha)}}{N!}}_{=C_\alpha} x^\alpha$

$M = \max\limits_{\substack{\alpha\in(Z_+)^n \\ c\in[a,x] \\ |\alpha|=N}} \|\frac{f^\alpha(x)}{N!}\| \implies \|d_c^N f(x-a)\| \leqslant M\left(\sqrt{n}\|x-a\|\right)^N$

Пусть $O \subseteq \mathbb{R}^n$ открыто, $f \in C^1\left(O \to \mathbb{R}^m\right)$

K – компактно в $O \implies f$ липшецево на K, т.е.

$$\exists C \in \mathbb{R} : \|f\left(x'\right) - f\left(x''\right)\| \leqslant C\|x' - x''\|\ \forall x', x'' \in K$$

Следует из формулы конечных приращений и оценки дифференциала и теоремы Вейерштрасса: $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \in C(K)$

$\implies \exists x_1 : \quad \|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\| \leqslant C_1 \forall x \in K$

$M = C_1, \implies \forall x', x'' \in K \quad \|d_c f\left(x' - x''\right)\| \leqslant M\left(\sqrt{n}\|x' - x''\|\right) \quad C = M\sqrt{n}$

1.7 Экстремум функции нескольких переменных

Определение 3. $\sqsupset O \subseteq \mathbb{R}^n \quad f : O \to \mathbb{R}$

$a \in O \quad a$ называется точкой (локального) максимума, если $\exists$ окрестность $V_a : \forall x \in V_a \cap O \quad f(x) \leqslant f(a)$

Экстремум – максимум или минимум

Утверждение 2 (Необходимое условие экстремума (безусловного))**.** Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^n \quad f$, такое что $E \to \mathbb{R}$. $a \in \operatorname{Int} E$ – точка локального экстремума для f, f дифференцируема в точке a. Тогда

$$d_a f = \mathbb{O}\left(\iff \nabla f = \mathbb{O} \iff \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0\right)$$

.

Доказательство. Пусть a — точка максимума. Фиксируем $h \in \mathbb{R}^n \quad g(t) = f(a+th), t \in \mathbb{R}$. Для g точка 0 это точка максимума. Существует окрестность нуля $V'(0)$: $\forall t \in V'(0) \quad g(t) \geqslant g(0) = f(a)$, g дифференцируема в 0 как композиция, 0 – внутренний для $D(g) \implies g'(0) = 0$.

$g(t) = f\left(\varphi(t)\right)$.

$g'(t) = f'\left(\varphi(t)\right) \cdot \varphi'(t)$.

$0 = \langle \nabla f, h \rangle = \left(f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_n}\right) \begin{pmatrix} h_1 \\ \ldots \\ h_n \end{pmatrix}$. ■

1.8 Квадратичные формы

Если $Q(x)$ допускает представление в виде $Q(x) \equiv \sum\limits_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j, \quad c_{i,j} \in \mathbb{R}$. Тогда $Q(x)$ называется квадратичной формой в $\mathbb{R}^n$.

Замечание. Любая квадратичная форма есть однородная функция степени 2.

Замечание. Не умаляя общности, матрицу коэффициентов c_{ij} можно считать симметричной. Если это не так, можно перейти в такой форме $c'_{ij} = c'_{ji} = \frac{c_{ij}+c_{ji}}{2}$.

Определение 4. Квадратичная форма $Q(x)$ в $\mathbb{R}^n$ называется положительно-определённой (положительной) (Q > 0), если

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad Q(x) > 0.$$

неотрицательно определённой, если неравенство нестрогое.

$Q \geqslant 0 \quad \ldots Q < 0, Q \leqslant 0$

неопределённая, если $Q \gtreqless 0 \quad \exists x^1 x^2 \in \mathbb{R}^n : Q\left(x^1\right) > 0, Q\left(x^2\right) < 0$

Пример. 1. $n = 2$ $Q(x) = 2x_1^2 - 3x_2^2 \gtreqless 0$

$Q(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 > 0$

$Q(x) = Ax_1^2 + 2Bx_1^2 x_2^2 + Cx_2^2$, если $B^2 - AC$, то форма знакопеременная

Если $A \geqslant 0 \quad B^2 - AC \leqslant 0$, то $Q \geqslant 0$

$A \leqslant 0 \ldots$

Лемма 1. $\sqsupset Q(x)$ – положительная квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$

Тогда $\exists \gamma > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad Q(x) \geqslant \gamma \|x\|^2$

Доказательство. $\gamma = \min_{\|x\|=1} Q(x) = Q(x_0) > 0 \quad \|x_0\| = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\, Q(x) = Q\left(\|x\| \frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\|^2 \cdot Q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geqslant \gamma \|x\|^2$ ∎

Утверждение 3 (Достаточое условие экстремума)**.** $\sqsupset f : E \to \mathbb{R}, \quad \underline{a \in \operatorname{Int} E}, d_a f = 0 \quad \exists d_a^2 f$

Тогда, если $d_a^2 f > 0$ (положительная квадратичная форма как функция дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_n$), то a это точка минимума (строгого)

Если $d_a^2 f < 0 \ldots.$

Если $d_a^2 f \gtrless$, то a <u>не</u> точка экстремума

Это не все случаи, есть нестрогие, в которых ДУЭ не применимо

Пример. $f(x, y) = x^4 - y^4$

$g(x, y) = x^4 + y^4$

для f точка $(0, 0)$ не точка экстремума, а для g – да

$\nabla f = \left(4x^3, -4y^3\right) = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$

Доказательство. ДУЭ. Пеано в точке a:

$f(x) = f(a) + d_a f(x - a) + \frac{1}{2} d_a^2 f(x - a) + o\left(\|x - a\|^2\right)$

$f(x) - f(a) = \frac{1}{2} d_a^2 f(x - a) + \underbrace{\varepsilon(x)}_{\to 0, x \to a} \|x - a\|$

Если $Q > 0$, то по лемме $\exists \gamma > 0 : Q(x - a) \geqslant \gamma \|x - a\|^2$

Т.к. $\varepsilon(x) \to 0, x \to a$, то $\exists V(a) : |\varepsilon(x)| < \frac{\gamma}{8} \forall x \in V(a) \implies \forall x \in V(a) \quad f(x) - f(a) \geqslant \frac{1}{2}\gamma \|x - a\|^2 - \frac{\gamma}{8}\|x - a\|^2 = \|x - a\|^2 \left(\frac{3}{8}\gamma\right) > 0 \quad x \neq a \implies a$ – точка строгого минимума

$Q < 0$, рассмотреть $-f$

$Q \gtrless 0 \implies \exists h_+, h_- \in \mathbb{R}^n : Q\left(h_+\right) > 0 \quad Q\left(h_-\right) < 0$, не умаляя общности $\|h_+\| = \|h_-\| = 1$

$\delta = \min\left\{\left|Q\left(h_+\right)\right|, \left|Q\left(h_-\right)\right|\right\}$

Т.к. $\varepsilon(x) \to 0, x \to a$, то $\exists$ окрестность $V_r(a) : |\varepsilon(x)| < \frac{\delta}{4}$

$|t| < r \quad f\left(a + th_+\right) - f(a) = \frac{1}{2} t^2 Q\left(x_+\right) + \varepsilon(x) t^2 \geqslant \frac{1}{2} t^2 \cdot \delta - \cdot \frac{\delta}{4} t^2 = t^2 \frac{\delta}{4} > 0$

$|Q(h_-)| \geqslant \delta$

$Q(h_-) = -|Q(h_-)| \leqslant -\delta$

$f\left(a + th_-\right) - f(a) \leqslant -\frac{\delta}{2} tse + \frac{\delta}{4} t^2 \leqslant -\frac{\delta}{2} t^2 < 0$

Таким образом в любой окрестности точки a $f(x)-f(a)$ знакопеременная

■

1.9 Практика. Теорема о существовании

Теорема 2 (Теорема о неявной функции)**.** $F(x,y,z)=0$

$(x_0,y_0,z_0):$ $F(x_0,y_0,z_0)=0$ $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ и все функции непрерывны в (x_0,y_0,z_0)

$\implies$ $\exists z = z(x,y)$ $z_0=z(x_0,y_0)$ $F(x,y,z(x,y))=0$ в окрестности (x_0,y_0)

Пример. $x^2+y^2-1=0$

$F(x,y)$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $y=\sqrt{1-x^2}$

$F'_y=2y$ $F'_y(x_0,y_0)=\sqrt{2}\neq 0$

$y=y(x)$ $y_0=y(y_0)$ $x^2+y^2(x)-1=0$

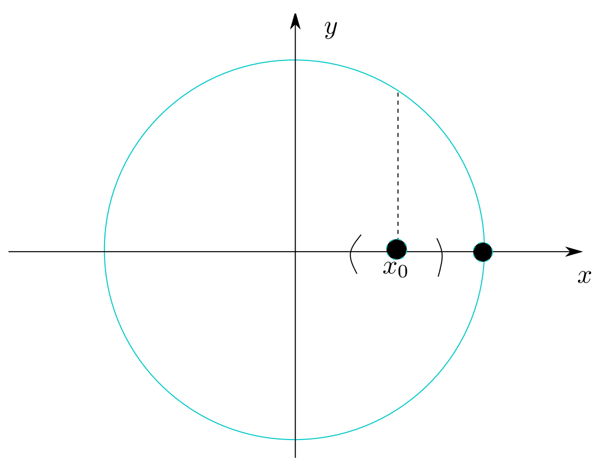

Рис. 1.1: exex

$F(x,y,z)$ И все условия выполняются. как найти $\frac{\partial}{\partial x}z(x,y)$

$F(x,y,z(x,y))=0$

$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,z(x,y))=0$

$$\begin{cases} F'_x+F'_z\cdot\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=0\\ F'_y+F'_z\cdot\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=0\end{cases}$$

Отсюда выражается

Определение 5. Многозначная функция f – соответствие $x \mapsto f(x)$ – множество

Пример. $x \mapsto \pm\sqrt{1-x^2} = \left\{\sqrt{1-x^2}, -\sqrt{1-x^2}\right\}$

$x^{\frac{1}{2}} = y \qquad x = y^2$ – задаёт неявную функцию $y(x)$

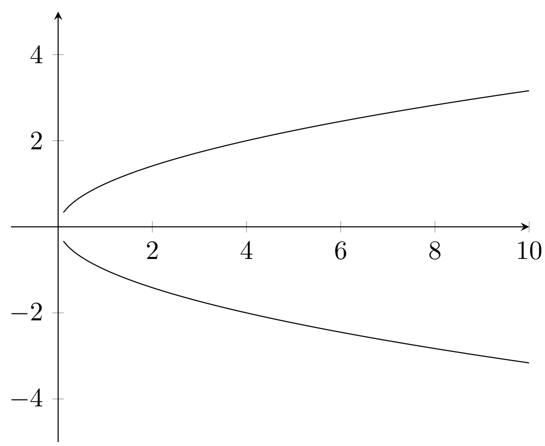

Рис. 1.2: $x = y^2$

Пусть $y(x)$ – многозначная функция. Тогда выбор единственного $y \in y(x)$ для $\forall x$ задаёт явную функцию (однозначная функция)

Каждый такой выбор задаёт однозначную функцию называемую ветвью. Ветви могут быть непрерывными, например в $x = y^2$ бесконечность ветвей. Чтобы уточнить, нужно проговаривать непрерывная ветвь. дифференцируемая ветвь и т.д.

Пример. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$

Задаёт многозначную функцию. Определить для каких x она будет 1-, 2-, 3-, 4-значной

1.10 Лекция 2

$$d_a^2 f \longleftrightarrow \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(a) & f''_{x_1x_2}(a) & f''_{x_1x_3}(a) & \dots \\ f''_{x_2x_1}(a) & f''_{x_2x_2}(a) & f''_{x_2x_3}(a) & \dots \\ f''_{x_2x_1}(a) & f''_{x_2x_2}(a) & f''_{x_2x_3}(a) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Теорема 3 (Критерий Сильвестра). • Если все главные миноры положительны, то соответствующая квадратичная форма положительна (a – точка минимума).

- Если $\Delta_1 < 0 \quad \Delta_2 > 0 \quad \Delta_3 < 0 \ldots$, то квадратичная форма отрицательна (a – точка максимума)
- $\Delta_k \neq 0$, и не реализуется ни первый случай, ни второй, то квадратичная форма неопределённая (т.е. экстремума нет)

Замечание. $Q(h) = d_a^2 f(h)$. $Q(h) = \langle A \cdot h, h \rangle \quad A = \left(f''_{x_i x_j}\right)_{ij}$

Задача 1. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ – исследовать на экстремум

Доказательство. Необходимое условие экстремума $z'_x = 0 \quad z'_y = 0$.

$z'_x = 2x - y - 2 \quad z'_y = -x + 2y + 1$

$(x, y) = (1, 0)$, других нет, потому что определитель хороший.

Достаточное условие экстремума: $z''_{xx} = 2, \quad z''_{xy} = -1, \quad z''_{yy} = 2$. $\left[d^2_{(1,0)} f\right] \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$\Delta_1 = 2 > 0 \quad \Delta_2 = 2 * 2 - (-1)^2 = 3 > 0$, таким образом $(1, 0)$ — строгий минимум. ■

Замечание. $d^2_{(1,0)} f = 2dx^2 + 2(-1)dxdy + 2dy^2 = dx^2 + dy^2 + (dx - dy)^2 > 0$, если $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$d^2 f > 0$

Задача 2 (без привлечения $d^2 f$). $z = x^2y^3(6-x-y)$ – исследовать на экстремум.

$$\begin{cases} 0 = z'_x = y^3(6x^2 - x^3 - yx^2)'_x = y^3(12x - 3x^2 - 2yx) = xy^3(12 - 3x - 2y) \\ 0 = z'_y = x^2(6y^3 - xy^3 - y^4)'_y = x^2(18y^2 - 3xy^2 - 4y^3) = x^2y^2(18 - 3x - 4y) \end{cases}$$

Либо $x = 0$, либо $y = 0$, либо $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$ – $(2, 3)$.

$\{(0,t)\}_{\{t<0\}\cup\{t>6\}}$ – максимум (нестрогий)

$\{(0,t)\}_{\{t\in(0,6)\}}$ – максимум (нестрогий)

$(0, 6)$ – не экстремум

$\triangleleft K = \{(x,y)|x \geqslant 0 \quad y \geqslant 0 \quad x+y \leqslant 6\}$ – компакт

По теореме Больцано-Вейерштрасса существует $(x_\pm, y_\pm) \in K$

$f(x_+, y_+) = \max\limits_K f$

$f(x_-, y_-) = \min\limits_K f$

из распределения знаков следует, что точки границы – точки минимума. Тогда $(x_+, y_+) \in \operatorname{Int} K$, значит (x_+, y_+) удовлетворяет необходимому условии экстремума. Такая точка у нас одна — $(x_+, y_+) = (2, 3)$.

1.11 Экстремумы и замена переменных

Определение точки экстремума непосредственно переносится на случай метрических пространств

Лемма 2. Пусть $(X, \rho_X)), (Y, \rho_y)$ – метрические пространства и $f : X \to \mathbb{R}$. Пусть $g(b) = a \quad g$ непрерывна в точке b. a – точка максимума (минимума) для f. Тогда b – точка максимума (минимума) для $f \circ g$.

Доказательство. По условию a – точка локального максимума, т.е. существует окрестность $U(a) \subseteq X : \quad f(x) \leqslant f(a) \ \forall x \in U(a)$. По определению непрерывности существует окрестность $V(b) \subseteq Y$:

$$g(y) \in U(a) \forall y \in V(b) \implies f(g(y)) \leqslant f(a) = f(g(b)).$$

∎

Следствие 2. Если в условии леммы g – гомеоморфизм X на Y, то a – точка максимума (минимума) для $f \circ g$.

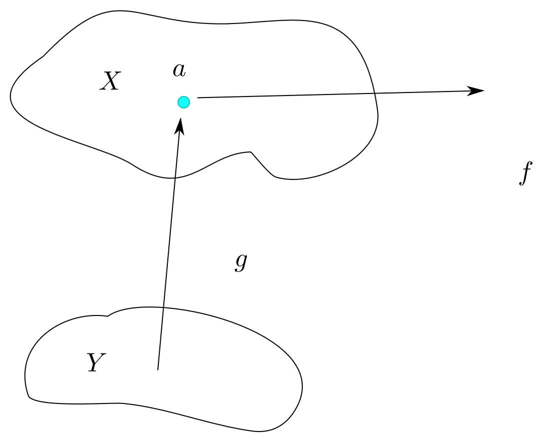

Рис. 1.3: kartinkalemmi

Следствие 3. Если g – локальный гомеоморфизм (существует окрестность $V(b)$, такая что в точке b сужение $g|_{V(b)}$ – гомеоморфизм на образ $(\ g(V(b))))$, то сохраняется вывод предыдущего следствия.

Задача 3. $z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (a, b > 0)$ — исследовать на экстремум.

Доказательство. $z(x, y) = -z(-x, y) = -z(x, -y)$

z – нечётная по x и по y. Значит достаточно рассматривать функцию только в первой четверти.

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\alpha \\ y = b\rho\sin\alpha \end{cases}$$

$(\rho, \varphi) \to (x, y)$

$(0, 1) \times (0, \frac{\pi}{2}) \to \operatorname{Int} K$ – гомеоморфизм $\left(\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

$z(\rho, \varphi) = ab\rho^2\cos\varphi\sin\varphi\sqrt{1 - \rho^2} \overset{\rho^2 = t}{=} \frac{ab}{2}\sin 2\varphi t \cdot \sqrt{1 - t}$

Необходимое условие экстремума: $\begin{cases} \frac{2}{ab}z'_\varphi = 0 = 2\cos 2\varphi \cdot t\sqrt{1 - t} \\ \frac{2}{ab}z'_t = 0 = \sin 2\varphi\left(\sqrt{1 - t} - \frac{1}{2}\frac{t}{\sqrt{1 - t}}\right) = \frac{\sin 2\varphi(2(1 - t) - t))}{2\sqrt{1 - t}} \end{cases}$

$\begin{cases} \cos 2\varphi \cdot t\sqrt{1-t} = 0 \\ \sin 2\varphi \cdot \frac{(2-3t)}{\sqrt{1-t}} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos 2\varphi = 0 \quad \varphi \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 3t = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{4} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases} \iff$
$\begin{cases} x = a \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}b}{9} \\ y = b \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}b}{9} \end{cases}$

■

Задача 4. $f : \underbrace{O}_{\subseteq \mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$

$E = \{\varphi_1(x) = 0, \dots, \varphi_n(x) = 0\}$

Исследование f_E на экстремум называется задачей об условном экстремуме

Пример. $f(x, y) = x + y \quad E = \{x + 2y = 1\}$

Доказательство. $x = 1 - 2y$

$f = 1 - 2y + y = 1 - y$

$\widetilde{f}(x, y) = x^2 + y^2 \quad E = \{x + y = 1\}$ ■

Пример. $f = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \quad E = \left\{x^2 + y^2 = 1\right\}$

$\begin{cases} x = \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{cases}$

1.12 Дифференцирование обратного отображения

$x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

$$f(x) = y$$

$x \in \mathbb{R}^n \quad y \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = y \quad A \cdot x = y, \ A = [f]$ – линейна

$f(x) = y$ имеет единственное решение $\forall y \in \mathbb{R}^n \iff \det A \neq 0$

Теорема 4 (об обратной функции для случая одной переменной)**.** $f : (A, B) \to \mathbb{R}, f \in C^1((A, B)), a \in (A, B), f'(a) \neq 0$, тогда существует окрестность $V(a)$:

1. $\forall x \in V(a) \quad f'(x) \neq 0$ – локальная новорожденность производной
2. $f|_{(A,B)}$ – инъекция. – локальная обратимость
3. $f(V(a))$ - откр. – локальная открытость отображения
4. $\left(f|_{V(a)}\right)^{-1}$ дифференцируема в точке $f(a)$ и $\left(\left(f|_{V(a)}\right)^{-1}\right)' = \frac{1}{f'(a)}$ – дифференцируемость локально обратного

Определение 6. $f : (X, \Omega_X) \to (Y, \Omega_Y)$

Если для любого $O \in \Omega_X \quad f(O) \in \Omega_Y$, то f называется открытым отображением

Пример. $f(x) = x^2$ не открытое на $(-1, 1) \to [0, 1)$, но открыто на $(-1, 0) \cup (0, 1)$, потому что нет точек, где $f'(x) = 0$

доказательство теоремы. По следствию теоремы Дарбу, если $f'(a) > 0(< 0)$, то существует окрестность $V(a) : \forall x \in V(a) \quad f'(x) > 0(< 0)$

$\sqsupset f'(x) > 0$ всюду на $V(a)$, то f строго возрастает, значит $f|_{V(a)}$ – инъекция

$V(a) = (a - \delta, a + \delta) \implies f(a - \delta, a + \delta) = (f(a - \delta), f(a + \delta))$

$4 \Longleftarrow$ теоремы о дифференцируемости обратимой функции ■

Теорема 5 (об обратном отображении)**.** Пусть $\underbrace{O}_{\text{открытое}} \subseteq \mathbb{R}^n \quad f : O \to \mathbb{R}^n$ и $\forall x \in O \quad d_x f$ – обратим (якобиан не обращается в ноль в O)

Тогда f – открытое отображение

Доказательство. См. доказательства утверждения 3 в теореме о дифференцировании обратного отображения в книжке Виноградов-Громов. ■

Теорема 6 (теорема об обратном отображении)**.** $n \in \mathbb{N}$, O – открытое, $O \subseteq \mathbb{R}^n$

$f \in C^1(O \to \mathbb{R}^n)$ $a \in O$. Пусть $d_a f$ обратим ($\iff \mathcal{J}_a f \neq 0$) , тогда существует окрестность $V(a)$:

1. $\forall x \in V(a) \quad d_x f$ обратим – локальная новорожденность производной
2. $f|_{(A,B)}$ – инъекция. – локальная обратимость
3. $f(V(a))$ - откр. – локальная открытость отображения
4. $\left(f|_{V(a)}\right)^{-1}$ дифференцируема в точке $f(a)$ и $d_{f(a)}\left(f|_{V(a)}\right)^{-1} = (d_a f)^{-1}$ – дифференцируемость локально обратного

Лемма 3. Пусть $n \in \mathbb{N}, O \subseteq \mathbb{R}^n$ открыто, $f : O \to \mathbb{R}^n, f \in C^1(O), a \in O$ и $d_a f$ обратим. Тогда $\forall \sigma > 0$ существует окрестность $V(a)$:

1. $\forall x \in V(a)$
$$\|d_x f - d_a f\| < \sigma$$
2. $\forall p, q \in V(a)$
$$\|f(p) - f(a) - d_a f(p-q)\| \leqslant C_1 \|p - q\|$$
3. $\forall p, q \in V(a)$
$$C_3\|p-q\| \leqslant \|f(p) - f(q)\| \leqslant C_2\|p-q\|$$
, такое свойство называется билипшецевость.

Здесь конкретно $C_2 = \|d_a f\| + \sigma \qquad C_3 = \frac{1}{\|(d_a f)^{-1}\|} - \sigma$

Доказательство. $f \in C^1(a) \implies$ существует окрестность $V(a)$: 1 верно

$\lhd F(x) = f(x) - d_a f(x) : O \to \mathbb{R}^n$

$d_x F(h) = d_x f(h) - d_a f(h), \quad F \in C^1(O)$

$\|f(p) - f(q) - d_a d(p-q)\| = \|F(p) - F(q)\| \leqslant \underbrace{\sup_{c \in V(a)} \|d_c F\|}_{\leqslant \sigma}$ по теореме о конечных приращениях, т.к. $V(a)$ выпуклое

$\|d_c F\| = \|\underbrace{d_C f - d_a f}_{<\sigma}\|$

$\forall p, q \in V(a)$

$\|f(p) - f(q)\| \leqslant \sup\limits_{c \in V(a)} \|d_c f\| \|p - q\|$

$\|d_c f\| = \|d_a f + (d_c f - d_a f)\| \leqslant \|d_a f\| + \underbrace{\|d_c f - d_a f\|}_{<\sigma \text{в силу } 1} \leqslant C_2$

$\|f(p) - f(q)\| = \|d_a f(p-1) - (f(p) - f(q) - d_a f(p-q))\| \geqslant \underbrace{\|d_a f(p-q)\|}_{\geqslant \frac{1}{\|(d_a f)^{-1}\|}\|p-q\|} - \underbrace{\|f(p) - f(q) - d_a f(p-q)\|}_{\leqslant C_1 \|p-q\|}$

$C_3 \|p - q\|$ ■

доказательство (часть) теоремы об обратном отобржаении. Существует $(d_x f)^{-1} \iff \mathcal{J} f \neq 0$, но $\mathcal{J} f \in C(O \to \mathbb{R}) \underset{\text{по неперывности}}{\Longrightarrow}$ существует окрестность $V(a) : \forall x \in V(a) \quad \mathcal{J}_x f! + 0 \implies 1$

$C_0 = \frac{1}{\|(d_a f)^{-1}\|}, \quad \sigma = \frac{C_0}{4}$, применим лемму к такому σ

Не умаляя общности $V(a) \subseteq V_0(a)$. Т.к. $\sigma < C_0 \quad \forall p, q \in V(a)$ в силу неравенства 3 из леммы $f(p) \neq f(q)$ ($f|_{V(a)}$ – инъекция. $\implies f|_{V(a)}$ – биекция на $f(V(a))$, т.е. $g = f|_{V(a)}$ обратимо и 4 $\impliedby$ правило дифференцирования обратного отображения ■

1.13 Практика

Теорема 7. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке P

f достигает экстремума в точке $P \implies \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = 0$

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^2 f$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Теорема 8. Если $H(f)$ положительно определена в точке P, то P – точка минимума. Если она отрицательно определена, то это точка максимума.

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(dx_1)^2 + \frac{\partial^2 d}{\partial x_1 \partial x_2} + \ldots = \lambda_1 (dy_1)^2 + \ldots + \lambda_n (dy_n)^2$$

$$f(dx_1 \ldots dx_n) = f(0) + \underbrace{= 0}\, f'(0) dx + d^2 f + o()$$

$$f(dx_1 \ldots dx_n) - f(0) = d^2 f + o()$$

$$x^T A x > 0 \forall x \neq 0 \overbrace{def} \iff$$

$$(x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} & \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} \sum a_{1i}x_i \\ \sum a_{2i}x_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \sum a_{ji}x_jx_i$$

– квадратичная форма

Пусть Q – квадратичная форма. $Q = \sum a_{ji}x_jx_i$, где $a_{ij} = a_{ji} \forall i,j \quad Q = x^TAx$, где $A^T = A$

Такая матрица A называется матрицей квадратичной формы Q

$x = Cy \quad Q = (Cy)^T ACy = y^T \underbrace{B}\left(C^TAC\right)y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$

Утверждение 4. Симметричная матрица подобна диагональной матрице.

Доказательство. $A = A^T$

Пример. $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Докажем, что существует собственный вектор.

   Пусть $Q = x^TAx = \sum\limits_{ij} a_{ij}x_ix_j$

   Рассмотрим Q на сфере $x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0$

   Q диффрецнируема на сфере $\implies$ достигает максимума в точке $(v_1, \dots, v_n)$

   Q, максимум с ограничением $F = 0$, то $\triangleleft \mathcal{L} := Q - \lambda F$

   У $\mathcal{L}$ частные производные равны 0 в максимуме

   $\frac{\partial}{\partial x_1} Q = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum\limits_j a_{ij}x_ix_j + \sum\limits_{k \neq i} a_{kj}x_kx_j \right) = \sum\limits_j aijx_j + \sum\limits_j a_{ji}x_j = 1 \sum a_{ij}x_j$

   $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 2x_i \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{L} = 2\sum\limits_j a_{ij}x_j - \lambda 2xi = 0 \forall i$ для $x_j = v_j$

   $Av = \lambda v \implies v$ – вещественный собственный вектор

   Так мы для симметричной матрицы нашли вещественный собственный вектор

2. Достроим наш вектор v до базиса $(v, e_2, e_3, \ldots, e_n)$

   Запишем A в этом базисе: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$. Дальше делаем по индукции

   Следовательно существует базис из собственных векторов, где на диагонали стоят собственные числа

Итого, любую квадратичную форму Q можно заменой переменных свести к каноническому виду $Q = \sum\limits_i \lambda_i y_i^2$ ■

1.14 Лекция

Макаров, Подкорытов: Гладкие отображения и функции

Теорема 9 (Об открытом отображении)**.** $\sqsupset O \subseteq \mathbb{R}^n$ – открыток, $f \in C^1(O \to \mathbb{R}^n)$, $\quad \forall a \in O \ d_a f$ обратим. Тогда $f(O)$ – открыто.

Пример. $x = (x_1, \ldots, x_n) \quad f(x) = x_1$ – необратимое, схлопывает шар и там нет открытости

Доказательство. $\sqsupset \sigma$: в лемме: $C_3 > 0, \sigma = \frac{1}{2} \frac{1}{\|(d_a f)^{-1}\|}$

δ – это половины от "δ из леммы"

$$\|f(p) - f(q)\| \geqslant C_3 \|p - q\| \quad \forall p, q \in B_\delta[a]$$

$r = \frac{1}{2} C_3 \cdot \delta \quad ? : B_r(b) \subset f(O) \iff \forall y \in B_r(b) \exists x \in O : f(x) = y$

$\lhd \varphi(x) = \|f(x) - y\| \in C * (O \to \mathbb{R}$

$\varphi(a) = \|f(a) - y\| = \|b - y\| \leqslant r$

Если $\|x - a\| = \delta$, то $\varphi(x) = \|f(x) - b\| = \|f(x) - f(a) + f(a) - y\| \geqslant \underbrace{\|f(x) - f(a)\|}_{\geqslant C_3 \|x - a\| = 2r} - \underbrace{\|f(a) - y\|}_{< r} > 2r - r = r$

По теореме Вейерштрасса $\varphi(x)$ достигает на $B_\delta[a]$ своего минимума

Из оценки $\varphi(x)$ следует, что $\min B_\delta[a] \varphi$ Достигается внутри шара

$\psi(x) = \varphi^2(x) = \|f(x) - y\|^2$. У функции $\psi(x)$ экстремумы в тех же точках, что и у $\varphi(x)$

Необходимое условие экстремума $\exists x_* \in B_\delta(a) : \quad f_{x_*} \psi = \mathbb{O}$

$\varphi(x) = \langle f(x) - y, f(x) - y \rangle$

$d\psi_{x_*} = 2 \left\langle \underbrace{d(f(x) - y)}_{d_{x_*} f}, f(x) - y \right\rangle$

Т.к. df обратим в $B_\delta(a) \implies f(x_*) - y = 0 \implies f(x_*) = y_0$

$\blacksquare$

Теорема 10 (теорема об обратном отображении)**.** $\sqsupset$ открытое $O \subseteq \mathbb{R}^n \quad f \in C^1(O \to \mathbb{R}^n), a \in O, d_a f$ обратим

Тогда существует окретстность $V(a)$:

I $\forall x \in V(a) \quad d_x f$ обратим

II $f_{V(a)}$ – инъекуий (т.е. обратимо как отображение из $V(a)$ в $f(V(a))$

III $f(V(a))$ – открыто

IV $\left(f_{V(a)}\right)^{-1} \in C^1\left(f(V(a)) \to \mathbb{R}^n\right)$

$\left(f|_{V(a)}\right)'(f(a)) = (f')(a)$ (или $d\left(f_{V(a)}\right)^{-1} = (d_a f)^{-1}$

$\|B - A\| < \varepsilon \quad \|B^{-1} - A^{-1}\| < \varepsilon C(A)$

$\|(d_a f)^{-1} - (d_x f)^{-1}\| < \varepsilon C \cdot (d_a f) \implies (d_x f)^{-1}$ непрерывно зависит от x

второе объяснение: элементы матрицы $(d_x f)^{-1}$ – результат арифметических действий над частными производными отображения $f; f \in C^1(O) \implies$ элементы $[(d_x f)^{-1}] \in C(0)$

По аналогичным рассуждения, если в условии теоремы $f \in C^r(O \to \mathbb{R})$, то локально обратное также из C^r

Определение 7. $\sqsupset r \in Z_+ \quad O \subseteq \mathbb{R}^n, O$ – открытое, $f \in C^r(O \to \mathbb{R}^n)$

f Называется диффеоморфизмом класса C^r, если:

1. f – биекция на $f(O)$
2. $f(O)$ – открытое
3. обратное отображение $f^{-1} \in C^r(f(O) \to O)$

Определение 8. r, O –||–, $a \in O \quad f$ называется локальным диффеоморфизмом в точке a, если существует такая окрестность $V(a)$, что $f_{V(a)}$ – гомеоморфзим

Пример. $y = e^x$ – диффеоморфизм (глобальный)

$y = x^2$ – локальный диффеорморфизм отдельно либо на положительных, либо на отрицательных числах

$y = \sin x$ – локальный диффеоморфизм в точках не вида $\frac{\pi}{2} + \pi k$

Теорема 11 (Об обратном отображении "на языке диффеоморфизмов")**.** Открытое $O \subseteq \mathbb{R}^n, f \in C^r\,(O \to \mathbb{R}^n)$

1. Если $a \in O \quad d_a f$ обратим, тогда f локальный диффеоморфизм в точке a класса C^r
2. Если f – инъекция и $d_a x f$ Обратим всюду в O, то f – глобальный диффеоморфизм

Пример. $f(x, y) = \begin{pmatrix} e^y \cos x \\ e^y \sin x \end{pmatrix}$

$f' = \begin{pmatrix} -\sin x e^y & e^y \cos x \\ \cos x e^y & e^y \sin x \end{pmatrix}$

$\det f' = e^{2y}(-1) \neq 0$

$f(0, y) = f(2\pi k)$

В каждой точке невырожденный дифференциал, но глобальный инъективности нет

Пример (Важные примеры локальных диффеоморфизмов)**.**

1. Полярные координаты $\phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$

   $\phi : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

   $\phi' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$

   $\det \phi = \cos \varphi \cdot r \cos \varphi - \sin \varphi\,(-r \sin \varphi) = r > 0$ в O, значит ϕ – локальный ддиффеоморфзм в O класса C^∞

   но не глобальный! $\phi(r, \varphi + 2\pi k) \equiv \phi(r, \varphi)$

   $O_1 = (0, +\infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \phi$ – инъекция d в $O_1 \implies \phi$ глобальный диффеоморфизм в O_1

   $r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

2. Цилиндрические координаты.

   $x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad z = t$

$$\phi' = \begin{pmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_t \\ & \nabla y & \\ & \nabla z & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r$$

Таким образом ϕ – локальный диффеорморфизм в области $(0,+\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

глобальный диффеоморфизм в областях $(0,+\infty) \times (-\pi,\pi) \times x\mathbb{R}$ И $(0,+\infty) \times (0,2\pi) \times \mathbb{R}$

$x^2 + y^2 = R \quad r = |R|$

$x^2 + y^2 = z^2 C \leftrightarrow r^2 = Ct^2 \quad \pm r = \widetilde{C} = t$

3. Сферические координаты

меряем широту и долготу. $\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi \\ y = r\sin\varphi\cos\psi \\ z = r\sin\psi \end{cases}$

$(r,\varphi,\psi) \to (x,y,z) \quad C^\infty : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_3$

$$|\psi| = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\cos\psi & -r\cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi & r\cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{pmatrix} = r^2\cos\psi \left(\sin^2\psi \begin{pmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi \\ cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix} + \cos^2\psi \begin{pmatrix} \cos\varphi & - \\ \sin\varphi & c \end{pmatrix} \right.$$

$r^2\cos\psi$

ϕ локальный диффеоморфизм в $(0,+\infty) \times \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

глобальный в $(0,+\infty) \times (-\pi,\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \leftrightarrow r = R$

Задача 5. Записать уравнение сферы $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R$ в сферических координатах

$x^2 + y^2 = Cz^2$ тоже.

Задача 6. В области $x > 0, y > 0$ $u = \frac{y}{x} \quad v = xy$

$\psi : (x,y) \to (u,v)$

Вопросы:

(a) $\psi(O) = ?$

(b) являетсяли ψ диффеоморфизмом или локальным диффеоморфизмом

(c) Выписать явно функции для обратного к ψ или локально обратного

1.15 Теорема о неявном отображении

Если у нас есть явное выражение $x = g(y)$, то можно явно исследовать функцию от одной переменной $f_E = f\left(h(y), y\right)$

Определение 9. Говорят, что уравнение $f(x,y) = 0$ неявно задаёт функцию $y = g(x)$ или $x = h(y)$, если условия $F(x,y) = 0$ и $\begin{cases} x \in D(g) \\ y = g(x) \end{cases}$ равносильны.

Определение 10. $F : E \to \mathbb{R} \quad D \subseteq E$

F задаёт $y = g(x)$ или $x = h(y)$ в D, если

$$\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ (x,y) \in D \end{cases} \iff \begin{cases} x \in D(g) \\ y = g(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1\left(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m\right) = 0 \\ \vdots \\ F_m\left(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m\right) = 0 \end{cases} \iff F(x,y) = 0 \quad \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_k) \\ y = (y_1, \dots, y_m) \\ F - (F_1, \dots, F_m) \end{cases}$$

$$\text{“}y = g(x)\text{”} \quad \begin{cases} y_1 = g_1\left(x_1, \dots, x_k\right) \\ \vdots \\ y_m = g_m\left(x_1, \dots, x_k\right) \end{cases}$$

Теорема 12 (Теорема о неявном отображении)**.** $\sqsupset$ O – открытое в $\mathbb{R}^{k+m}$, $F \in C^1\left(O \to \mathbb{R}^k\right)$

$(a,b) \in O \quad \left(a = (a_1, \ldots, a_k), b = (b_1, \ldots, b_k)\right)$ и

1. $F(a,b) = 0$
2. $\det F'_y(a,b) \neq 0$

$$F'_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial} \end{pmatrix}$$

Тогда:

I Существует открытое множество $U \times V$ в $\mathbb{R}^{k+m}$, где U – окрестность a, а V – окрестность b: в $U \times V$ уравнение $F(x,y) = 0$ неявно задаёт единственную функцию $y = g(x)$

II g дифференцируема в точке a

III $g'(x) = -\left(F'_y(a,b)\right)^{-1} \cdot F'_x(a,b)$

1.16 Практика

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \varphi_1, \ldots, \varphi_n$

$$S = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \mid \begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_n(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \right\}$$

Задача – найти экстремум f на S

Теорема 13 (Необходимое условие)**.** Пусть для $\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}$ ранга m

$L := f + \sum \lambda_i \varphi_i$

Тогда x^* – условный экстремум, если $\begin{cases} \varphi_i(x^*) = 0 \forall i = 1, \ldots, m \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 \forall i = 1, \ldots, n \end{cases}$

$f(x) - f(P) = (x-P)^T D^2 f(x-P) + o(\ldots)$

В случае поиска на поверхности, рассматриваем касательные к поверхности, если она гладкая

Теорема 14 (Достаточное условие)**.** Пусть $f, \varphi_i = C_2(x^* \in U)$

$\sum\limits_k \frac{\partial\varphi_i(x^*)}{\partial x_k} dx_k = 0 \quad \forall i \quad \sum(dx_k)^2 > 0$

$d^2\Lambda(x^*)$ знакоопределна для dx_k, то x^* – экстремум

Если $\gtrless 0$, то экстремума нет

1.17 Лекция

Теорема 15 (О неявном отображении)**.** $F(x,y) = \mathbb{O} \iff \begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_m) = 0 \end{cases}$

$x = (x_1,\dots,x_k), y = (y_1,\dots,y_m), F = (F_1,\dots,F_m)$

Если $F \in C^r(O), O$ – открытое в $\mathbb{R}^{k+m}$

$(r \in \mathbb{Z}^+)$

1. $F(x^0,y^0) = 0$
2. $F'_y(x^0,y^0)$ – обратима $(\det F'_y \neq 0)$

Тогда $\exists$ открытое U_{x_0} и V_{y_0} и $g : U_{x_0} \to V_{y_0}$:

I $\begin{cases} (x,y) \in U_{x_0} \times V_{y_0} \\ F(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in U_{x_0} \\ y = g(x) \end{cases}$

II $g \in C^r(U_{x_0})$

III $g'(X) = \left(F'_y(x,y)\right)^{-1} \cdot F'(x,y)$

Определение 11 (Уточнение определения функции (отображения), заданной уравнением неявно)**.** $\sqsupset D \subseteq R^k \quad g : D \to \mathbb{R}^m$ Скажем, что отображение g задаётся уравнением

1. $F(x^0,y^0) = 0$
2. $F'_y(x^0,y^0)$ – обратима $(\det F'_y \neq 0)$

неявно, если

$$F(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in D$$

(аналогично для $x = h(y)$)

Пример. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad a > 0$

$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad z = -\sqrt{a^2 - x^2 - z^2} \quad y = \sqrt{a^2 - x^2 - z^2} \quad \dots$

$$\begin{cases} z'_x = ? \\ z''_{xy} = ? \end{cases}$$

$x^2 + y^2 + z(x, y) \equiv a^2$

$g(x, y) = z(x, y) \quad F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$

$F'_z = 2z \neq 0 \iff x^2 + y^2 < a^2$

$2\left(x + z \cdot z'_x\right) = 0 \implies z'_x = -\frac{x}{z}$

$0 + z'_y \cdot z'_x + z \cdot z''_{xy} = 0 \qquad z'_y = -\frac{y}{z} \implies z''_{xy} = -\frac{z'_y \cdot z'_x}{z} = -\frac{xy}{z^3} = -\frac{xy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}^3}$

Примеры нарушения условия 2 теоремы

Пример. $x = y^3 \quad F(x, t) = x - y^3$

$F'_y = -3y^2 = 0 \quad y = 0$

Пример. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = x^2 - y^2 \quad \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$r^4 = r^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) \quad r = \sqrt{\cos 2\varphi}$

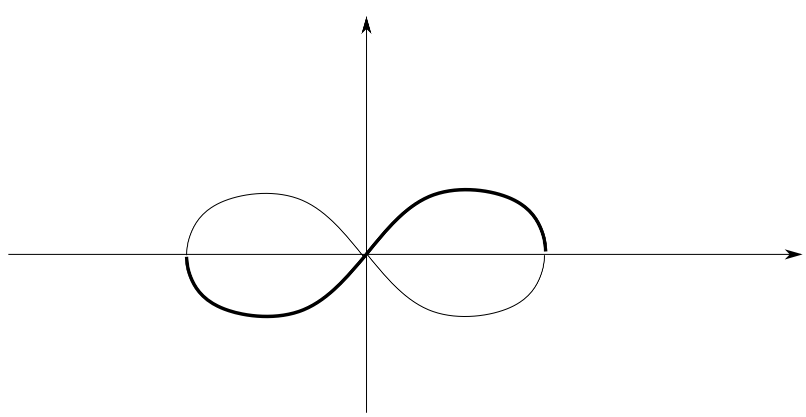

Рис. 1.4: lemniscat

$F(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)^2 - (x^2 - y^2)$

$F'_y = 2\left(x^2 + y^2\right) \cdot 2y + 2y = 2y\left(2(x^2 + y^2) + 1\right)$

$F'_y = 0 \iff y = 0$

$\int g(x) = y$ – функция, график которой – график F в I-III четвертях

$$\begin{cases} y = r(\varphi)\sin\varphi \\ x = r(\varphi)\cos\varphi \end{cases}$$

$\varphi = \frac{\pi}{4}$

$x'_\varphi = r'\cos\varphi + r\sin\varphi$

$$x'(\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(r'+r) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\underbrace{\frac{-\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}}_{\text{не опр. при}\varphi=\frac{\pi}{4}} + \sqrt{\cos 2\varphi}\right)$$

Замечание. Если $f \in C([a,b])$ и $\exists \lim\limits_{x\to a+} f'(a)$, то $\exists f'(a)$, и $f'(a) = \lim\limits_{x\to a+} f'(x)$

Пример. $y(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$

$\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

$y'_x = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = \frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi} = \frac{\left(-\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\cdot\sin\varphi + \sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\cos\varphi\right)}{-\frac{\sin\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\cdot\cos\varphi - \sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi} \to \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \implies y'_x(x_{\varphi=\frac{\pi}{4}})$

$y'_+(0) = 1$

1.18 Поверхности в $\mathbb{R}^n$ (k-мерные)

Способы задания поверхности:

1. Поверхность уровня

   $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad C \in \mathbb{R}$

   $\{x \in D(F) : \quad F(x) = C\}$ – линия уровня C

   $F : D$ – открытое $\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \quad F = (F_1, \dots, F_k), C \in \mathbb{R}^k$

   $(x \in D(F) : F(x) = C)$ – поверхность уровня C

Определение 12. $\sqsupset f : O \to \mathbb{R}^m \quad O$ – открытое в $\mathbb{R}^k \quad k, n \in \mathbb{N}$

f называется регулярным в O, если f Дифференцируема в O и в каждой точке $x \in O \quad f'(x)$ Имеет максимальный ранг ($\operatorname{rang} f'(x) = \min(k, n)$)

Определение 13. $\sqsupset C \in \mathbb{R}^m \quad F \in C^r(O \to \mathbb{R}^m), O$ – открытое в $\mathbb{R}^n$

$r \in \mathbb{Z}_+$

F регулярно в O, тогда поверхность уровня C называется r-гладкой (класса C^r) $n-m$-мерной поверхностью

Пример. $x^2+y^2+z^2=a^2, a>0$

$F(x,y,z)=a^2 \quad m=1 \quad n=3 \quad F'=(2x,2y,2z)$

$S - 3-1=2$-мерная поверхность

2 Поверхности-графики

$\sqsupset g : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m \quad k<n \quad n=k+m$

$\Gamma_g = \{(x,y) : x \in D, y = g(x)\} \in \mathbb{R}^n$

Если D Ограничено в $\mathbb{R}^k \quad g \in C^r\,(D \to \mathbb{R}^m)$, то говорят о графике отображения гладкости r (класса C^r)

Пример. Сфера – объединение бесконечно гладких графиков

3 Параметрическое задание

$\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$

Если D – открытое, $\Phi \in C^r(D)$ и Φ Регулярна в D, то $\Phi(D)$ – k-мерная поверхность с параметризацией класса C^r (параметризованной поверхности)

Пример. $S \cap \{x>0, y>0, z>0\} = \left\{ (x,y,z) : \begin{matrix} x = a\cos\varphi\cos\psi \\ y = a\sin\varphi\cos\psi \\ z = a\sin\psi \end{matrix} \quad \varphi,\psi \in (0, \frac{\pi}{2} \right\}$

$\Phi : (\varphi, \psi) \to (x,y,z)$

Теорема 16 (О способах задания гладких поверхностей)**.** $\sqsupset r \in \mathbb{Z}_+, m,k \in \mathbb{N} n = m+k$

$S \subseteq \mathbb{R}^n \quad a \in S$. Следующие утверждения равносильны:

1. $\exists$ окрестность $U_a : U_a \cap S$ – k-мерный график класса C^r
2. $\exists$ окрестность $U_a : U_a \cap S$ – k-мерная поверхность уровня класса C^r
3. $\exists$ окрестность $U_a : U_a \cap S$ – k-мерная поверхность класса C^r заданная параметрически

Доказательство.

$1 \implies 2$ $U_a \cap S = \{(x,y) : x \in D \quad y = g(x)\}$ (посе перенумерации, если требуется)

$= \{(x,y) : F(x,y) = 0\} \quad F = y - g(x)$

F определена на $D \times \mathbb{R}^m \quad F : D \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad F \in C^r(D \times R^m)$

$F'_y = E_m \quad F'$ содержит E как минор $\implies$ ранг F' максимальный

$2 \implies 1$ $F(x,y) = C \quad C \in \mathbb{R}^m \quad F : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$U_a \cap S = \{(x,y) : (2)\}$

F' имеет максимальный ранг $= m$. С точностью до нумерации координат можно считать, что $\det F'_y(a) \neq 0$. В некоторой окрестности $\det F'_y(x,y) \neq 0 \implies$ по теореме о неявной функции $y = g(x)$

$1 \implies 3$ $S \cap U_a = \{(x, g(x)) : x \in D\}$

$\Phi : x \in D \subseteq \mathbb{R}^k \to (x, g(x)) \in \mathbb{R}^n$

$$\Phi' = \begin{bmatrix} & E_k & \\ g'_{1x_1} & & g'_{1x_k} \\ & & \end{bmatrix} \implies \operatorname{rang} \Phi' = k \implies \Phi \text{ - регулярна в } D$$

$3 \implies 1$ $S \cap U_a = \left\{(x,y) = \Phi(u) : u \in D - \text{открытое в } \mathbb{R}^k\right\} \quad \Phi \in C^r(D), \operatorname{rang} \Phi' = k$ – максимальный

Не умаляя общности $\det \Phi'_x \neq 0 \quad \widetilde{\Phi}(n) = \begin{bmatrix} \Phi_1(u) \\ \vdots \\ \Phi_k(u) \end{bmatrix} \qquad \Phi(n) = \begin{bmatrix} \Phi_1(u) \\ \vdots \\ \Phi_n(u) \end{bmatrix}$

$$\det \begin{bmatrix} \nabla \Phi_1 \\ \vdots \\ \nabla \Phi_k \end{bmatrix} \neq 0$$

$$\widetilde{\Phi'} = \begin{bmatrix} \nabla \Phi_1 \\ \vdots \\ \nabla \Phi_k \end{bmatrix} \text{ – обратима}$$

$\Psi = \widetilde{\Phi}^{-1} \quad \widetilde{\Phi} : (u_1, u_2, \ldots, u_k) \to (x_1, \ldots, x_k)$

$(x,y) = \Phi(u) = \left(\widetilde{\Phi}(u), \widetilde{\widetilde{\Phi}}(u) = (x, \widetilde{\widetilde{\Phi}}(\Psi(x))\right) \in C^r$ по теореме об обратном отображении $\quad u = \Psi(x) \quad \Phi(u) = \Phi(\Psi(x))$

Определение 14. r-гладках k-мерная поверхность – поверхность, для которой справедливо одно из утверждений 1-3 предыдущей теоремы

Пример. $\gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{bmatrix} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$\gamma|_{(a,b)} \quad \gamma \in C^r(a,b)$

$\operatorname{rang} \gamma'$ максимален $\iff \gamma'(t) \neq 0$

Пример. в $\mathbb{R}^n \quad D = \{\langle v_1, x\rangle + v_2 = 0\}$, где $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$

$F' = v_1$. Если $v_1 \neq 0$, то S – $n-1$-мерная поверхность (гиперплоскость, гпернпространство в $\mathbb{R}^n$)

1.19 Условный экстремум функций нескольких переменных

$f : E \subseteq R^n \to \mathbb{R} \quad E_0 \subseteq E$

Условный экстремум f на $E_0 \equiv$ экстремум $f|_{E_0}$

$$\sqsupset E_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} F_1(x) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x) = 0 \end{cases}, m \in \mathbb{N}, m \leqslant n \right\}$$

Эти уравнения называются уравнениями связи , функции F_i называются функциями связи

Экстремум $F|_{E_0} \equiv$ условный экстремум F при условии $\langle$система уравнений$\rangle$ ■

Теорема 17 (Необходимое условие условного экстремума, геометрическая формулировка)**.** $\sqsupset O$ – открыток $\subseteq \mathbb{R}^n \quad f, F_1, \dots, F_m \in C^1(O \to \mathbb{R}), m < n$ и $F = (F_1, \dots, F_m)$ – регулярно в O. $\sqsupset$ a – точка локального условного экстремума для f относительно $F(x) = 0$

Тогда в точке $a \quad \nabla f$ представимо в виде линейной комбинации $\nabla_a F_1, \dots, \nabla F_m \quad (\nabla_1 f \in \mathcal{L}_{in}\{\nabla_a F_1, \dots, \nabla_a f_m)$

Доказательство. случай 1: $m = n-1$

От противного : $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} f'(a) \\ F_1'(a) \\ \vdots \\ F_m'(a) \end{bmatrix} < n \quad \left(\iff \det \begin{bmatrix} f'(a) \\ F_1'(a) \\ \vdots \\ F_{n-1}'(a) \end{bmatrix} \right) = 0 \iff$ $f'(a), \dots, F_{n-1}'(a)$ – линейно зависимы $\implies \exists \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} : \quad \lambda_0 f'(a) + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k F_k'(a) = 0$

Если бы $\lambda_0 = 0 \implies \{F_k'(a)\}_{k=1}^{n-1}$ – линейно зависимо $\operatorname{rang}(F_k'(a))_{k=1}^{n-1} < n-1$ – не максимально

Значит $\lambda_0 \neq 0 \implies f'(a) = -\sum \frac{\lambda_k}{\lambda_0} F_k'(a)$

$\lhd h(x) = \begin{bmatrix} f(x) \\ F_1(x) \\ \vdots \\ F_{n-1}(x) \end{bmatrix} : Oc\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Если неверно, что определитель матрицы производных этого столбца функций равен нулю, то по теореме об обратном отображении $h(U_a)$ – открытое множество $\implies \exists \delta_0 > 0 : \quad \forall \delta \in (0, \delta_0) \quad \begin{bmatrix} f(a) \pm \delta \\ F_1(a) \\ \vdots \\ F_{n-1}(a) \end{bmatrix} \in h(u_n)$

$\implies \forall$ Открытого $\widetilde{U}_a \quad \exists$ точка $x : F_1(x) = F(a) = 0, \dots, F_{n-1} = F_{n-1}(a) = 0 \qquad f(x) > f(a)$ или $f(x) < f(a)$

Противоречие – x – точка условного локального экстремума

$m = 1, \dots, n-2$ F' – максимального ранга $\lhd \widetilde{h}(a) = \begin{bmatrix} f(x) \\ F_1(x) \\ \vdots \\ F_m(x) \end{bmatrix}$ Предположим, что $\operatorname{rang} \widetilde{h'(x)} < m+1$

С точностью до нумерации координат $h'_{\widetilde{x_1, \dots, x_{m+1}}}(a) \neq 0$

$h(x) = \begin{bmatrix} \widetilde{h}(x) \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad h'(a) = \begin{bmatrix} h'_{x_1, \dots, x_{m+1}} & \cdots \\ \mathbb{O} & \\ E_{n-(m+1)} & \end{bmatrix}(a) \implies \exists$ окрестность $U_a \quad h|_{U_a}$

$a\overline{h}\rightarrow \begin{bmatrix} f(a) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{m+2} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$. Т.к. h – открытое, то $\exists \sigma > 0 : \forall y \in \mathbb{R}^n : \|y - b\| < \sigma \implies$ $y \in h(U_a)$

$\lhd y = \begin{bmatrix} f(a) \pm \frac{b}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ o \\ a_{m+2} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \implies \exists x \in U_a : f(x) = y \quad F_1(x) = \ldots = F_m(x) =$ $0 \quad f(x) f(a) \pm \frac{b}{2}$

Противоречие, ранг не меньше максимального

■

1.20 Практика

u – непрерывная функция на компакте – достигает наибольшего и наименьшего значения

1.21 Лекция. Дополнение : теорема об открытом отображении (общение)

Теорема 18. $\sqsupset k, n \in \mathbb{N} \quad k \leqslant n \quad O$ – открытое $\in \mathbb{R}^n \quad F : O \to \mathbb{R}^k$, регулярная ($\in C^1$ ранг матрицы Якоби $= k$)

Тогда F является открытом отображением.

Случай $n = k$ был установлен.

Доказательство. $n < k$

1. F – проекция.

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$$

– очевидно открытое

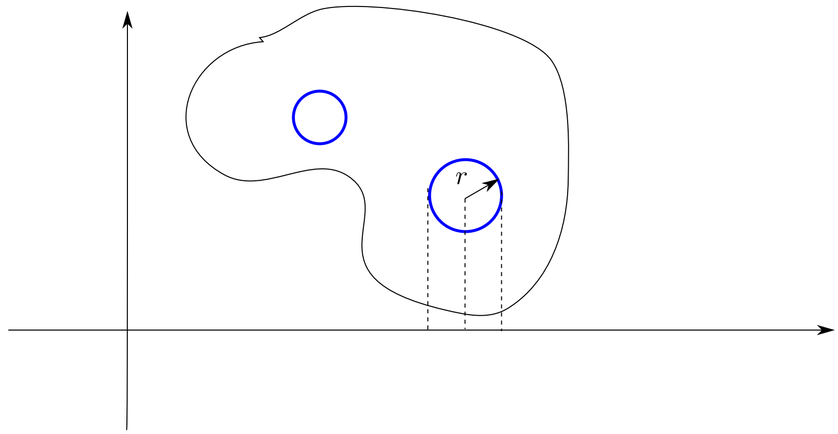

Рис. 1.5: очевидно

$x, a \in \mathbb{R}^n \quad \|x - a\| < r \implies \|F(x) - F(a)\| \leqslant \|x - a\| < r$, т.е. $B_{r(a)} \overset{F}{\to} B_r\left(F(a)\right)$

2. F – регулярно. $F' = \begin{bmatrix} \nabla F_1 \\ \vdots \\ \nabla F_k \end{bmatrix}$, матрица $n \times k$

   После удаления $n-k$ столбцоы возникает ненулевой минор . Не умаляя общности удаляем последние столбцы (иначе перенумеруем переменные $x_1, \ldots, x_n$) $\implies F'_{(x_1,\ldots,x_n)} = \begin{bmatrix} F'_{1x_1} & \ldots & F'_{1x_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ F'_{kx_1} & \ldots & F'_{kx_k} \end{bmatrix} \quad \det F'_{(x_1,\ldots,x_n)} \neq 0$

   $\triangleleft \phi(x) = \left(F_1, F_2, \ldots, F_k, xk+1, \ldots, x_n\right)^T$

   $\phi'(x) = \begin{bmatrix} F'_{(x_1,\ldots,xk)} & F'_{(x_{k+1},\ldots,x_n)} \\ 0 & E_{n-k} \end{bmatrix}$

   $\det \phi'(x) = \det F'_{(x_1,\ldots,x_k)} \cdot \det\left(E_{n-k}\right) \neq 0 \quad \phi$ регулярно в некоторой окрестности фиксированной точки $\implies F = \pi \circ \phi$ – открытое в точке a в силу произвольности $a \implies F$ – открыто

■

Теорема 19 (Необходимое условие условного экстремума (геометрическая формулировка))**.** $\sqsupset k, n \in \mathbb{N} \quad k < n \quad O$ – открытое в $\mathbb{R}^n$

$f, F_1, \dots, F_k \in C^1(O \to \mathbb{R}), \quad F = (F_1, \dots, F_k)$ – регулярно в O

$E = \{x \in O | F(x) = 0\}, a \in E$

Если a – точка условного экстремума для f Относительно

$$F(x) = 0$$

, то

$$\nabla_a f \in \mathcal{L}in\{\nabla_a F_1, \dots, \nabla_a F_k\}$$

В частности, если $k = 1$, то условие $\iff \nabla_a f$ – коллинеарен $\nabla_a F$

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x, y) = (x^2 + (y-1)^2)\sqrt{x^2 + y^2 - 2y}$$

на криволинейном треугольнике – границе множества

$$D = \left\{(x, y) \mid (x+1)^2 + y^2 \geqslant 1, \quad (x-1)^2 + y^2 \geqslant 1, x^2 + y^2 \leqslant 2 \quad y \geqslant 0\right\}$$

$r = x^2 + (y-1)^2$

$f = \underbrace{r \cdot \sqrt{r+1}}_{g(r)}$

$\nabla f = g'(r) \cdot \nabla r$

при $r = \sqrt{2} - 1$ касание окружности уровня границы окружности

Подозрительные точки: вершины. точки $T_1, T_2, T_3: \quad f(T_1) = f(T_2) = f(T_3)$

$g'(r) = \sqrt{r+1} + \frac{r}{2\sqrt{r+1}} = \frac{2(r+1)+r}{2\sqrt{r+1}} = \frac{3r+2}{2\sqrt{r+1}}$ не обращается в ноль при $r \geqslant 0$

K – граница D, компакт $\implies \max, \min$ достижимы

т.к. $g(r)$ стремится вверх и $r(T_1) = r(T_2) = r(T_3) < g(V_1) = g(V_2) = g(V_3) \implies \min_k g = g(T_1) \quad \max_k g = g(V_1)$

Доказательство. Не умаляя общности a – точка глобального условного экстремума для f относительно $F(x) = 0$

Замечание. Если $v, v^1, \dots, v^k \in \mathbb{R}^k$ и набор v, v^1, v^k – линейно зависим, а $v^1, \dots, v^k$ – ЛНЗ, то $v \in \mathcal{L}in\left\{v^1, \dots, v^k\right\}$

$$\implies \exists \lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_k: \quad \lambda v + \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j}_{\neq 0} = 0 \implies \lambda \neq 0 \implies v = -\sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{\lambda} v_j$$

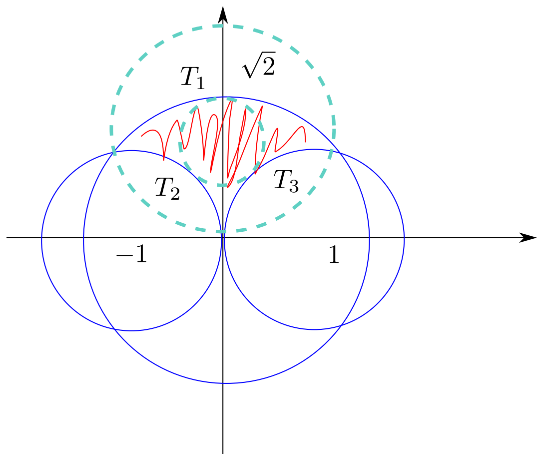

Рис. 1.6: krivoyPrimer

По замечанию достаточно проверить, что $\{\nabla_a f, \nabla_a F_1, \ldots, \nabla_a F_k\}$ – линейно зависим, т.е. $\widetilde{F} = (f, F_1, \ldots, F_k)^T$ – не регулярна в точке a.

От противного: пусть $\widetilde{F}$ – регулряна в точке a, тогда существует окрестность $U(a) : \widetilde{F}$ – регулярно в $U(a)$

По теореме об открытом отображении $\widetilde{F}$ – открыто в $U(a) \implies \exists \varepsilon > 0 :$ $\widetilde{F}(U(a)) \supset B_\varepsilon\left(\widetilde{F}(a)\right) \quad \widetilde{F}(a) = (f(a), F_1(a), \ldots, F_k(a)) = (f(a), 0, \ldots, 0) \quad F_i(a) =$ 0, т.к. a – точка, удовлетворяющая формулам связи.

$y_\pm = \left(f(a) \pm \frac{\varepsilon}{2}, 0, \ldots, 0\right)$

$\|y_\pm - \widetilde{F}(a)\| = \frac{\varepsilon}{2} \implies y_\pm \in B_\varepsilon\left(\widetilde{F}(a)\right) \subseteq \widetilde{F}(U(a)) \implies \exists x_1 \in U(a) : \widetilde{F}(x_\pm) =$ $y_\pm \iff f(x_1) = f(a) \pm \frac{\varepsilon}{2} \quad F_1(x_\pm) = \ldots = F_k(x_\pm) \implies x_\pm \in E?!! \implies$ точка a не экстремум, что противоречит нашем предположению ■

1.22 Функция Лагранжа

Определение 15 (“большая” функция Лагранжа). $\begin{array}{c} f\left(x_1,\ldots,x_n\right) \\ F_1\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ F_k\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0 \end{array}$ $\mathcal{L}\left(x,\lambda\right) = f(x) - \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_i F_j(x) \quad \lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$

$$\nabla_a f = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \nabla_a F_j$$

Теорема 20 (Необходимое условие условного экстремума через дифференациал функции Лагранжа). В условиях последней теоремы $\exists \lambda_1^*,\ldots,\lambda_k^* \in \mathbb{R} \quad \mathrm{d}_{(a,\lambda^*)}\mathcal{J} = 0$

В скалярной записи это запишется как: $\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}\left(a,\lambda^*\right) = f'_{x_1}(a) - \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j F'_{jx_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n}\left(a,\lambda^*\right) = f'_{x_n}(a) - \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j^* F'_{jx_n}(a) \\ \hline \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1}\left(a,\lambda^*\right) = 0 = F_1(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_k}\left(a,\lambda^*\right) = 0 = F_k(a) \end{cases} \iff$

$\begin{cases} \nabla f = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j \nabla_a F_j \end{cases}$

1.23 Примеры приложения необходимого условия условного экстремума

Задача 7. Найти максимум и минимум квадратичной формы на сфере

$$Q(x) = \sum_{ki,j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j$$

– $\forall$ квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$

Продолжаем $[Q] = (q_{ij})_{i,j=1}^n$ – симметричная

$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} \iff \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2 = 1$

$F(x) = \|x\|^2 - 1$

$\mathcal{L}(x, \lambda) = Q(x) - \lambda F(x)$

$\nabla F = 2x$ (F регулярно всюду в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$)

<...>

Вывод: $\max_{x \in S} Q(x) = \max\{\lambda : \lambda_i$ – собственные числа $Q\}$

$\sqsupset E \subseteq \mathbb{R}^n \quad f \in C(\operatorname{Cl} E \to \mathbb{R})$. Тогда $\sup_E f = \sup_{\operatorname{Cl} E}$

Доказательство. $A = \sup_E f \quad B = \sup_{\operatorname{Cl} E} f \implies B \geqslant A$ как sup по большему множеству.

$B \leqslant A$. От противного: существует последовательность $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subseteq f(\operatorname{Cl} E)$

$y_k \to B \implies \exists \{x_k\} \subseteq \operatorname{Cl} E$ и $f(x_k) = y_k$

$\forall k \in \mathbb{N} \exists \widetilde{x}_k \subseteq E \quad \|\widetilde{x}_k - x_k\| < \frac{1}{k}$

<..> вернёмся к этому доказательству позже ■

Утверждение 5. $\sqsupset E$ – замкнутое множество в $\mathbb{R}^n \quad f \in C(E)$ и $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} f = L$

Тогда

$$\sup_E f \times f(E) \cup \{L\}$$

Доказательство. По определению супремума существует $\{y_j\}_{j=1}^\infty \subseteq f(E)$: $y_j' \to \sup_E f \implies \exists$ последовательность $\{x_j\} \subseteq E : f(x_j) = y_j$. В силу обощённого принципа Больцано-Вейерштрасса $\exists$ подпоследовательность $\{x_{j_i}\}_{i=1}^\infty : x_{j_i} \to x_* \in \hat{\mathbb{R}}_r$:

1. Если $x_* = \infty \quad \underbrace{fx_{j_i}}_{\to L} = y_{j_i} \underset{i\to\infty}{\to} \sup_E f$. Теорема о пределе композиции

2. $x_* \neq \infty \quad x_*$ – предельная точка для E, E замкнуто $\implies x_* \in E$

   Т.к. f непрерывно на E

$$f(x_*) = \lim_{i\to\infty} f(x_{j_i} = \lim_{i\to\infty} y_{j_i} = \sup_E f \implies \sup_E f \subseteq f(E)$$

■

1.24 Касательные пространства к поверхностям

$\sqsupset S$ – гладкая k-мерная поверхность пространства $\mathbb{R}^n \quad q \in S$

вектор $\tau \in \mathbb{R}^n$, для которого существует гладкий путь $\gamma : [a,b] \to S$ и существует $c \in [a,b] : \gamma'(c) = \tau$ называется касательным в S в точке q

$$\gamma(c) = q$$

$\mathrm{Tq}\, S$ – набор всех касательных векторов к S в точке q

$\sqsupset \phi$ – гладка локальная параметризация S вблизи a ($\exists$ окрестность $U(0)$ в $\mathbb{R}^n$ и $\exists$ Окрестность $V(q) : \Phi(U(0)) = V(q) \cap S \quad \Phi(0) = q$)

$\gamma^1(t) = (t, 0, \ldots, 0)^T \quad \gamma^2(t) = (0, t, 0, \ldots, 0)^T \quad \gamma^j : [0,1] \to \mathbb{R}^k \quad \widetilde{\gamma}^j = \phi(\gamma^j)$ – гладкий путь в S

$\tau^j = \left(\widetilde{\gamma}^j\right)'_t = \Phi' \cdot \left(\gamma^j\right)' = j$-ый столбец Φ'

$\tau^1, \ldots, \tau^k$ – канонические касательные векторам

Утверждение 6. $\mathrm{Tq}\, S$ – линейное пространство

Локально S также задаётся системой уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x) = 0 \\ \vdots \\ F_{n-k}(x) = 0 \end{cases} \qquad \sqsupset \tau \in Tq(S) \quad \tau = \gamma'(c), \text{ где } \gamma : [a,b] \to S \quad \gamma(c) = q$$

1.25 Лекция

Замечание. $\exists \subseteq \mathbb{R}^n \quad f \in C\left(\mathrm{Cl}\, E \to \mathbb{R}\right)$

Тогда $A := \sup_E f = \inf_{\mathrm{Cl}\, E} f =: B$

Доказательство. Очевидно $A \leqslant B$. $\quad B \leqslant A$?

$\sqsupset x \in \operatorname{Cl} E \implies \exists \{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq E : x_j \to x, j \to \infty$

$\forall j \in \mathbb{N} \quad f(x_j) \leqslant A, j \to \infty$

$f(x) = f\left(\lim\limits_{j\to\infty} x_j\right) = \lim\limits_{j\to\infty} f(x_j) \leqslant A$

Перейдём к супремуму по $x : x \in \operatorname{Cl} E \implies B \leqslant A$ ∎

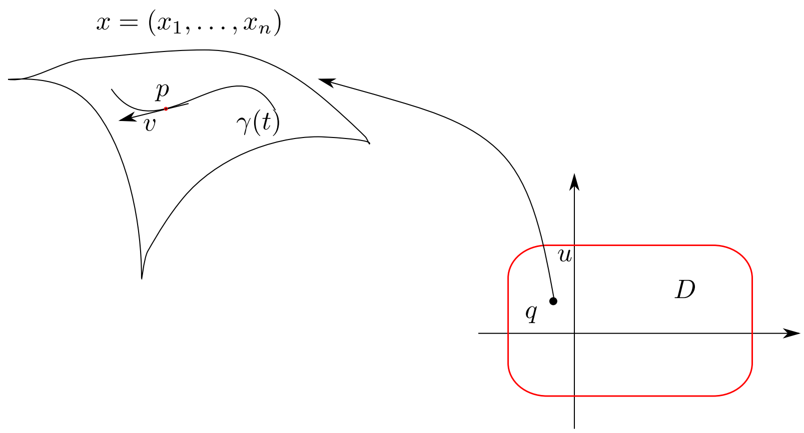

Рис. 1.7: poverh

S-гладкая, k-мерная поверхность. $\gamma : [a, b] \to S$ – гладкий путь в S

$\gamma'(c)$ для $c \in [a, b] \quad \gamma(c) = p$

$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$

$\phi'_{u_1}(q) \quad \phi'_{u_k}(q) \in \operatorname{Tp} S$ – какнонические касательные векторы

$\phi'_{u_j}(q) = d_q\phi(e_j)$

S локально задана как поверхность уровня

$\exists$ окрестность $U(p)$:

$$S \cap (U(p)) = \{x \in U(p) : F_1(x) = 0, \ldots, F_{n-k}(x) = 0\}$$

$F = (F_1, \ldots, F_{n-k})$ – регулярно в $U(p)$

$\forall \tau \in \operatorname{Tp} S \quad \forall j = 1, \ldots, n-k \quad \tau \perp \nabla_p F_j$

Утверждение 7. Если s -гладкая k-мерная поверхность (в $\mathbb{R}^n$), $p \in S$, то $\operatorname{Tp} S$ – линейное подпространство $\mathbb{R}^n$

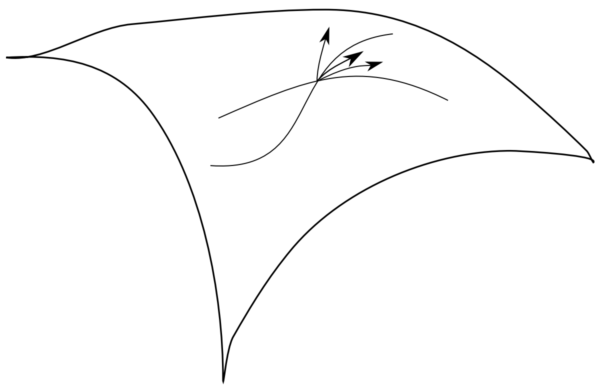

Рис. 1.8: skpoverh

Доказательство. Если $v_1, v_2 \in \operatorname{Tp} S \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \implies v = c_1 v_1 + c_2 v_2 \in \operatorname{Tp} S$

Дополним набор $\nabla_p F_1, .., \nabla_p F_{n-k}$ до базиса ортогонального дополнения к $v \in \mathbb{R}^n$

Добавляем $h^1 \dots, h^{k-1} \quad \forall j \quad g^j \perp v$

$\lhd$ систему $n-1$ уравнений $\begin{cases} F_1(x) = 0 \\ \vdots \\ F_{n-k}(x) = 0 \\ \left\langle x - p, h^1 \right\rangle = 0 \\ \vdots \\ \left\langle x - p, h^{k-1} \right\rangle = 0 \end{cases}$

Матрица $\begin{bmatrix} \nabla_p F_1 \\ \vdots \\ \nabla_p F_{n-k} \\ h^1 \\ \vdots \\ h^{k-1} \end{bmatrix}$ имеет максимальный ранг $\implies$ система задёт (локально) гладкую $n - (n-1) = 1-$мерную поверхность

По теореме о способах задания поверхности $\exists$ параметризация $\gamma : t \in (\alpha, \beta) \to \Gamma \quad 0 \in (\alpha, \beta)]quad\gamma(0) = p$

$\gamma' \perp \nabla_p F_1, \ldots, \nabla_p F_{n-k}, h_1, \ldots, h_{k-1}$

$\implies \gamma'(0)$ коллинеарна v

$\lhd \widetilde{\gamma}(t) = \gamma(\Theta t) \quad \Theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\widetilde{\gamma}'(t) = \Theta\gamma'(\Theta t)$

$\widetilde{\gamma}'(0) = \Theta \cdot \gamma'(0)$

Подбор $\Theta \implies \Theta \cdot \gamma'(0) = v$

$\blacksquare$

Следствие 4. $\dim \operatorname{Tp} S = k$

Т.к. канонические касательные линейно независимы, $\in \operatorname{Tp} S, \implies \dim \operatorname{Tp} S \geqslant k$

С другой стороны $\dim (\operatorname{Tp} S)^{\perp} \geqslant n - k$ (т.к. $\nabla_p F_j \in (\operatorname{Tp} S)^{\perp}$)

$$v \in \operatorname{Tp} S \iff \begin{cases} \langle \nabla_p F_1, v \rangle = 0 \\ \langle \nabla_p F_{n-k}, v \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p)(v_1) + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(p) v_n = 0 \\ \ldots \\ \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_1}(p)(v_1) + \ldots + \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_n}(p) v_n = 0 \end{cases} \iff$$

$d_p F(v) = 0$

Можно считать, что дифференциалы $dx_1, \ldots, dx_n$ на касательном пространстве связаны системой возникающей при формальном дифференцировании системы $F(x) = 0$

$$d_p F = 0 \qquad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p) dx_1 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(p) dx_n = 0 \\ \ldots \\ \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_1}(p) dx_1 + \ldots + \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_n}(p) dx_n = 0 \\ dx_i(v) = v_i \end{cases}$$

Следствие 5. $\operatorname{Tp} S = d_q \Phi \left(\mathbb{R}^k\right)$

Оба объекты линейные подмножества $\mathbb{R}^n$ размерности k и содержат $d_q\Phi(e_1), \ldots, d_q\Phi(e^k)$

Пример. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad S_2(\mathbb{R})$

уравнение касательного пространства $2\,(xdx, ydy, zdz) = 0$

$v \in T_{(x,y,z)} S_2(\mathbb{R}) \iff xv_1, yv_2, zv_3 = 0$

$\mathrm{Tp}\, S$ – касательное линейное пространство

$\mathrm{Lp}\, S$ – афинное касательное пространство $\mathrm{Lp}\, S = \mathrm{Tp}\, S + P$

$x \in \mathrm{Lp}\, S \quad x - p \in \mathrm{Tp}\, S$

$\mathrm{Lp}\, S = \{x \in \mathbb{R}^n : d_p F(x - P) = 0\}$

$$d_p F(x-p) = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(p)(x_n - p_n) = 0 \\ \ldots \\ \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) + \ldots + \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_n}(p)(x_n - p_n) = 0 \end{cases}$$

Если $k = n{-}1$, то $\mathrm{Tp}\, S$ и $\mathrm{Lp}\, S$ называются касательными (гипер)плоскостями

Касательная гиперплоскость к графику функции?

$S = \Gamma_f = \big\{(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) \in \mathbb{R}^n, \quad \big(x_1, .., x_{n-1} \in O \subseteq \mathbb{R}^{n-1}\big)\big\} \quad y = f\,(x_1, \ldots, x_{n-1})$

$f \in C^1(O)$

$F\,(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = f\,(x_1, \ldots, x_{n-1}) - y$

$\lhd F$ в $O \times \mathbb{R}$

$\nabla_{p,y} F = \Big(f'_{x_1}(p), \ldots, f'_{x_{n-1}}(p), -1\Big)$

$x \in \mathrm{Lp}\, \Gamma_f \iff f'_{x_1}(p)(x_1 - p_1) + \ldots + f'_{x_{n-1}}(p)(x_{n-1} - p_{n-1}) - (y - p_y) = 0$

$y = f\,(p_1, \ldots, p_{n-1}) + \big\langle \nabla_{p_1, \ldots, p_{n-1}} f, (x - p_x) \big\rangle$

Утверждение 8 (Достаточное условие условного экстремума)**.** $\sqsupset O$ – открытое в $\mathbb{R}^n$ $\quad f, F_1, \ldots, F_{n-k} \in C^2(O \to \mathbb{R}) \quad F = (F_1, \ldots, F_{n-k}), p$ – решение системы

$$F(x) = 0$$

$\sqsupset$ в точке p выполнено необходимое условие условного экстремума для f относительно $F(x) = 0$. $L(x_1, .., x_n) = \mathcal{L}\left(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_{n-k}^*\right)$

Тогда:

- Короткий вариант

  Если $d_p^2 L > 0$, то p – условный минимум

  Если $d_p^2 L < 0$, то p – условный максимум

  Из $d_p^2 L \gtrless 0$, то НЕ следует, что p не точка условного экстремума

- Подробный вариант:

  Если $d_p^2 L|_{\mathrm{Tp}\, S} > 0$, то p – точка условного минимума

  Если $d_p^2 L|_{\mathrm{Tp}\, S} < 0$, то p – точка условного максимума

  Если $d_p^2 L|_{\mathrm{Tp}\, S} \gtrless$, то p – седловая точка (условного экстремума нет)

Пример. $f(x,y) = x^2 + y^2$ на $x + y = 1$. найти условный экстремум.

1-ый способ: $y = 1 - x \quad g(x) = f(x, 1-x) = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$

$g(x)$ имеет минимум в точке $x = \frac{1}{2}$ (глобальный) $\implies f(x,y)$ имеет условный (глобальный) минимум в точке $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

2-ой способ: $\mathcal{J}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x + y - 1)$

$$\begin{cases} 0 = \mathcal{J}_x' = 2x - \lambda \\ 0 = \mathcal{J}_y' = 2y - \lambda \\ x + y = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = y = \frac{1}{2} \\ \lambda = 2x = 1 \end{cases}$$

$L(x,y) = x^2 + y^2 - (x + y - 1)$

$$L'' \iff \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0^2 & \end{bmatrix}$$

$d^2 L > 0$ по короткому $\quad p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ – условный минимум

Наводящие соображения по достаточному условию условного экстремума:

1. $S = \{x \in O \quad F(x) = 0\}$. Исседуется $f|_S$

   $\mathcal{L}(x) = f(x) - \sum \lambda_k F_k(x)$

   $L = \mathcal{L}(x, \lambda^*)$

$L|_S = f_L$, таким образом условный экстремум $f \leftrightarrow$ условный экстремум L

ϕ – локально гомеомофризм

p – точка условного экстремума для $L|_S \iff$ Для $L \circ \phi$ точка $\phi^{-1}(p) = q$ – безусловный экстремум

$d^2(L \circ \phi) \leftrightarrow d_p^2 L(d_q\phi) + d_p L\left(d_q^2\phi\right)$ – одномерная формула

1.26 О задача отыскания наибольшего и наименьшего значения функции на множестве.

K – компакт, $f \in C(K)$

f_k не имеет экстремума на $K \setminus K^* \implies \max_K f = \max_{K^*} f, \min ..$

Если $K = S_1 \cup \ldots \cup S_N$, где $S_1, \ldots, S_N$ – поверхности различных размерностей, $S_j \cap S_k \neq 0$

$(S_j)_*$ – множество точек, в которых выполняется НУУЭ (необходимое условие условного экстремума) относительно $x \in S_j$ (либо нарушается ранг системы, задающей нашу поверхность S_j)

$K_* = (S_1)_* \cup \ldots \cup (S_N)_*$ – если это конечное множество, то можно их уже просто сравнить

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y, z)$ на компактном множестве K ограниченном поверхностями $z = 1$ и $z = x^2 + y^2$

$S_0 = \operatorname{Int} K \quad S_1 = \left\{z = 1, x^2 + y^2 < 1\right\} \quad S_2 = \left\{(x, y, z) : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 < 1\right\} \quad S_3 = \left\{(x, y, z) : z = 1, x^2 + y^2 = 1\right\}$

на S_0 необходимое условие безусловного экстремума:

$$dF = 0 \iff \begin{cases} 0 = f'_x = y \\ 0 = f'_y = x + z \\ 0 = f'_z = y \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases} \qquad (x, 0, -x) \quad f\,(x, 0, -x) = 0$$

На S_1 $\quad g(x, y) := f\,(x, y, 1) = y(x{+}1) \quad \begin{cases} g'_x = 0 = y \\ g'_y = 0 = x + 1 \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases} \iff (-1, 0)?? \quad \emptyset$

на S_2 $\quad f(x, y, z) = xy + y\left(x^2 + y^2\right) = x^2 y + xy + y^3 = h(x, y) \quad x^2 + y^2 < 1$

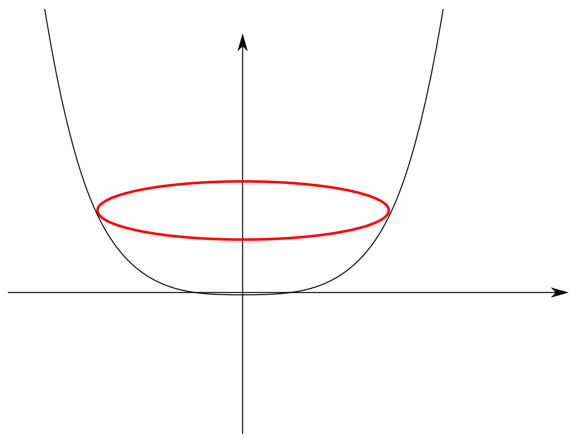

Рис. 1.9: paraplane

$$\begin{cases} h'_x = 0 = 2xy + y \\ h'_y = 0 = x^2 + x + 2y^2 \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$

на S_3 $\quad f = (xy + y)_{x^2+y^2=1} = \sin\varphi\,(\cos\varphi + 1) = \varkappa(\varphi) \quad \varphi \in [-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} \varkappa'(\varphi) &= \cos\varphi\,(\sin\varphi) - \sin^2\varphi \\ &= \cos^2\varphi + \cos\varphi - \left(1 - \cos^2\varphi\right) \\ &= 2\cos^2\varphi + \cos\varphi - 1 \\ &= 2t^2 + t - 1 =: \mu(t) \end{aligned}$$

.

$(2t^2 + t)' = 4t + 1$

$\varkappa(t = -1) = 0 \quad \varkappa(t = \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Подозрительные значения: $0, \pm\frac{\sqrt{12}}{72} \quad \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$\max_K f = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \min_K f = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Пример. Найти $\sup_E f \quad E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad x, y, z > 0\right\}$

$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z)e^{-(x+y+z)}$

$g(t) = te^{-t}$

$f(x, y, z) \leqslant (3x + 3y + 3z)e^{(x+y+z)} = 3g(t) \leqslant 3 \cdot \sup_{t \geqslant 0} g(t) = \frac{3}{e}$

$f(0, 0, 1) = 3 \cdot e^{-1} = \frac{3}{e} \leqslant \sup_{\mathrm{Cl}\, E} f \implies \sup_{\mathrm{Cl}\, E} f = \sup_E f = \frac{3}{e}$

1.27 Функциональная последовательности и ряды

$\exists \subseteq \mathbb{R}^n \quad f : E \to \mathbb{R}$ (или $f : E \to \mathbb{C}$)

$\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}; \quad f_k : E \to \mathbb{C}$

Определение 16. Говорят, что функциональная последовательность $\{f_k(x)\}$ сходиться к $f(x)$ поточечно на множестве E, если $\forall x_0 \in E$ числовая последовательность $\{f_k(x_0)\}$ сходиться к $f(x_0)$

Примеры:

1. $f_k(x) = x^k \quad E = [0, 1] \quad f(x) = \begin{cases} 0, x \in [0, 1) \\ 1, x = 1 \end{cases}$

Определение 17 (Поточечная сходимость)**.** $d_k(x) \to f(x)$ на $E \iff \forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon, x) > 0 : \quad \forall k \geqslant N \quad f_k(x) - f(x) < \varepsilon$

Определение 18 (Равномерная сходимость)**.** $\sqsupset f, f_k : E \to \mathbb{C}$. Говорят, что $\{f_k\}$ сходится к f равномерно, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall k \geqslant N \forall x \in E \quad |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Замечание. $\rho_k = \sup_E |f_k(x|$, то $d_k(x) \rightrightarrows f(x)$ на $\iff \rho_k \to 0$ при $k \to \infty$

Доказательство.

$\implies \forall k \geqslant n \implies \rho_k \leqslant \varepsilon \implies \rho_k \to 0$ при $k \to \infty$

$\impliedby \rho_k \to 0 \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k \geqslant N \quad 0 \leqslant \rho_k < \varepsilon \implies \forall x \in E \quad |f_k(x) - f(x)| \leqslant \rho_k < \varepsilon$

∎

Пример. $f_k(x) = x^k \quad \rho_k = \sup_{x \in [0,1]} |f_k(x) - f(x)| = \max \left\{ \sup_{x \in [0,1)} |f_k - f|, |f_k(0) - f(0)| \right\} = \sup_{x \in [0,1)} |f_k(x) - f(x)| = \sup_{[0,1)} x^k = \sup_{[0,1]} x^k = 1$

$\rho_k \equiv 1 \not\to 0 \implies f_k \not\rightrightarrows f(x)$ на E

Замечание. $f_k \not\rightrightarrows f$ и на $[0,1)$

$E_\delta = [0,\delta], \delta < 1 \quad \rho_k = \sup_{x\in[0,\delta]} |f_k(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,\delta]} x^k = \delta^k \implies \rho_k \to 0, k \to \infty \implies f_k \rightrightarrows f$ на E_δ

Замечание. Если $\forall j \in \mathbb{N} \quad f_k \rightrightarrows f$ на E_j, то из этого не слудет, что $f_k \rightrightarrows f$ на $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$, но это становится верным при конечном количестве E

1.28 Практика

$F(x,y,z) = 0$ – поверхность. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$

$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0$ – уравнение касательной

$\frac{x - x_0}{\partial F/\partial x} = \frac{y - y_0}{\partial F/\partial y} = \frac{z - z_0}{\partial F/\partial z}$ – уравнение нормали

1.29 Лекция

Замечание. Если $f_n \rightrightarrows f$ на E, то $f_n \to f$ поточечно.

$\sqsupset X$ – любое множество. $\ell_\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{R}(\to \mathbb{C}) : f$ – ограничена$\}$

> **Определение 19.** $\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$
>
> $\|\cdot\|_\infty$ – отклонение, равномерная норма, Чебышёвская норма

Проверим, что она норма:

1. 0 только на $f = 0$
2. $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$
3. $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$

   $|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \sup_{\widetilde{x}\in X} |f(\widetilde{x})| + \sup \ldots = \|f\| + \|g\|$

   т.е $\forall x \in X \quad |f(x) + g(x)| \leqslant \|f\| + \|g\|$

   Переходим к $\sup_{x\in X} \implies \|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$

ℓ_∞ – нормированное пространство.

$f_n \rightrightarrows f$ на $X \iff \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \iff \|f_n - f\|_\infty \to 0$ при $n \to \infty$

> **Утверждение 9.** $\ell_\infty(X)$ является полным нормированным пространством (т.е. в $\ell_\infty(X)$ из сходимости в себе следует сходимость)

Доказательство. $\lhd \{f_n\}$ – сходится в себе в $\ell_\infty(X)$

$\implies \forall \varepsilon \exists N : \forall n, m \geqslant N \quad \|f_n - f_m\| < \varepsilon \quad \sup_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)| = \|f_n - f_m\| \leqslant \varepsilon$

$\iff \forall n, m \geqslant N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon$

Значит $\forall x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ – сходится в себе

Т.к. $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ – полное пространство $\implies \forall x \in X \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, т.о. возникает $f : X \to \mathbb{R}$

1. Почему она ограничена? $\sqsupset N = N(\varepsilon)$ для $\varepsilon = 1$

   $\forall n \geqslant N \quad \|f_n(x)\| \leqslant \|f_N\| + 1$

   $\|f_n - f_N\| \leqslant 1 \forall n \geqslant N \implies \|f_n\| = \|f_N + f_n - f_N\| \leqslant \|f_N\| + \|f_n - f_N\| \leqslant \|f_N\| + 1 = C$

   $\forall x \in X \quad \|f(x)\| \leqslant C$ при $n \to \infty$

   $\|f(x)\| \leqslant C$, переходим к супремуму по x и получаем $\|f\| \leqslant C$

2. $\|f_n - f\| \to 0 \quad b \to \infty$?

   $\lhd \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \quad \|f_n - f)m\| \leqslant \varepsilon \implies \forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)|$

   $\implies \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \iff \|f_n - f\| \leqslant \varepsilon$

   $\implies \|f_n - f\| \to 0$ при $n \to \infty$

■

Если X – компакт, то $C(K) \leqslant \ell_\infty(K)$

Замечание. "Обычная" норма на $C(K)$ это норма из $\ell_\infty(K)$

$\|f\|_{C(K)} = \max_{x\in K} |f(x)|$

Теорема 21. Критерий Коши-Больцано равномерной сходимости в себе для функциональных последовательностей.

$\sqsupset \{f_n\}_{n=1}^{\infty} : X \to \mathbb{C}(\mathbb{R})$

Последовательность $\{f\}$ является равномерно сходящейся на X $\iff$ она равномерно сходится в себе, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m \geqslant N \forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\, (\leqslant \varepsilon)$$

Пример. $X = \mathbb{R} \quad f_n = x + \frac{1}{n} \quad f(x) = x \quad f_n \rightrightarrows f$, но $f_n(x)$ и $f(x) \notin \ell_\infty(\mathbb{R})$

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Если $f_n \rightrightarrows f$ на X, то для $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geqslant N \quad \|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall m \geqslant N \quad \|f_n - f_m\| \leqslant \|f_n - f\| + \|f_m - f\| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon$

$\Longleftarrow$ Существование $f(x): \quad f_n \rightrightarrows f$. Проверяем как в доказательстве полноты $\ell\infty$

$f(x)$ – поточечный предел для $\{f_n\}$

$m- > \infty$ в условии теоремы $\Longrightarrow \forall n \geqslant N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Longrightarrow f_n \rightrightarrows f$ на X

$\blacksquare$

Определение 20. $\sqsupset \{f_n\} : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C}) \quad X$ – любое множество

Говорят, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на X, если последовательность частичных сумм равномерно сходится на X

Теорема 22 (Критерий Коши-Больцано равномерной сходимости для рядов.)**.** $\sqsupset f_n : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на X

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geqslant N \quad \forall p \in \mathbb{Z}_+ \quad \left(\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right) < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geqslant N \quad \forall p \in \mathbb{Z}_+ \quad \| \sum_{k=n}^{n+p} f_k \| < \varepsilon$$

Теорема 23 (Необходимое условие равномерной сходимости ряда)**.** Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на X, то $f_n(x) \rightrightarrows 0$ на X

Пример (необходимое условие не является достаточным)**.** $f_n(x) = \frac{1}{n}$. $f_n(x) \rightrightarrows 0$ на $\mathbb{R}$, но $\sum f_n$ – расходится всюду

Замечание (“Популярный” алгоритм исследования функциональных рядов на равномерную сход
Найти поточечный предел $f(x)$ (Если нет поточечной сходимости хотя бы в одной точке, то нет и равномерной на X)

2. Выяснить $\|f_n(x) - f(x)\|_{\ell_\infty(X)} \to 0$?

Пример. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ на $X = [0, 1]$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$

2. $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[0,1]} f_n(x)$

   $f_n(0) = f_n(1) = 0$

   $f_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = 0$

   $x \in (0,1) \implies x = \frac{n}{n+1}$

   $\|f_n - f\| = \max_{[0,1]} f_n = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^n}{(n+1)^n}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\frac{1}{n+1} \to 0$

   Т.о. $f_n \rightrightarrows 0$ на $[0,1]$

Пример. $f_n(x) = x^n$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \forall x \in (-1,1)\, (\forall x \in \mathbb{C} : |X| < 1)$

$f \not\rightrightarrows 0$ на $(-1,1) \implies$ нет равномерной схоимости ряда

> **Утверждение 10.** $\sqsupset E \subseteq X \quad X$ – метрическое пространство
>
> $\sqsupset \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C\,(\operatorname{Cl} E)$, тогда $\{f_n\}$ равномерно сходится на $E \iff$ она равномерно сходится на замыкании.

Доказательство.

$\Longleftarrow$ Очевидно

$\Longrightarrow$ $\{f_n\}$ равномерно сходится на $E \iff \{f_n\}$ равномерно сходится в себе на $E \iff \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n, m \geqslant N \quad \|f_n - f_m\|_{\ell_\infty(E)} \leqslant \varepsilon$

$\iff \sup_{x\in E} |f_n - f_m| \leqslant \varepsilon$

$\iff \sup_{x\in \operatorname{Cl} E} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon$

$\iff \|f_n - f_m\|_{\ell_\infty(\operatorname{Cl} E)}$

$\iff \{f_n\}$ равномерно сходится в себе на $\operatorname{Cl} E \iff f_n$ равномерно сходится на $\operatorname{Cl} E$

■

Теорема 24 (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда).
$\sqsupset \forall n \quad f_n(x) : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C}) \quad a_n \in \mathbb{R}$

$\forall n \quad \forall x \in X \quad |f_n(x)| \leqslant a_n$

и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на X и абсолютно.

Эквивалентная формулировка: Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\ell_\infty(X)}$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно и абсолютно на X

Доказательство первой формулировки на основе критерия Коши. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N :$ $\forall n \geqslant N \quad \forall p \in \mathbb{Z}_+$

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

$\geqslant \left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} f_k(x)\right| \implies$ ряд $\sum f_n(x)$ равномерно сходится в себе $\implies \sum f_n(x)$ сходится равномерно ■

Пример. $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$– равномерно сходится на $\mathbb{R}$, но не абсолютно

$f(x) = x^n$ – ряд сходится абсолютно (при $x \in [0, 1)$), но не равномерно

Пример. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^p} \quad p > 1 \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^p}$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$

$\left|\frac{\sin kx}{k^p}\right| \leqslant \frac{1}{k^p} \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходится

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{n^5 + x^2}$

$n^5 + x^2 \geqslant 2\sqrt{n^5 x^2} = 2n^{\frac{5}{2}}|x|$

При $x \neq 0 \quad |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$

$x = 0 \quad |f_n(0)| = |0| \leqslant \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$

$a_n = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$

$\sum a_n$ сходится, а значит по признаку Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно

1.30 Преобразование Абеля

$A_0 \in \mathbb{R} \quad A_k = \sum\limits_{j=1}^{k} a_j + A_0 \quad a_k = A_k - A_{k-1}$

$\sum\limits_{k=n}^{m} a_k b_k = \sum\limits_{k=n}^{m} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum\limits_{k=n}^{m} A_k b_k - \sum\limits_{k=n}^{m} A_{k-1} b_k = \sum\limits_{k=n}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_m b_m - A_{n-1} b_n$

Лемма 4. Если b_k монотонно зависит от k при любом x, то:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k(x) b_k(x)\right| \leqslant 4 \cdot \max_{k=n:m} |A_k(x)| \cdot \max\left\{|b_n(x)|, |b_m(x)|\right\}$$

Доказательство. x фиксировано

$\left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k b_k\right| \leqslant \underbrace{\left|\sum\limits_{k=n}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1})\right|}_{\sum} + |A_m||b_m| + |A_{n-1}||b_n| \leqslant \sum + A_* b_* + A_* b_*$

$\sum \leqslant \sum\limits_{k=n}^{m-1} |A_k||b_k - b_{k+1}| \leqslant A_* \sum\limits_{k=n}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| = A_* \left|\sum\limits_{k=n}^{m-1} (b_k - b_{k+1}) = A^* |b_n - b_m|\right| \leqslant 2A. * b_k$ ■

Теорема 25 (Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда)**.** $\sqsupset a_n : X \to \mathbb{C} \quad b_n : X \to \mathbb{R}$

Если:

1. Последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ равномерно ограничена на X
2. $\{b_k(x)\}$ монотонна по k для каждого $x \in X$
3. $b_k \rightrightarrows 0$ на X

, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ сходится равномерно на x

Замечание (Пояснение)**.** 1. $\implies \exists C \neq C(x, N) : \forall x \in X \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \left|\sum\limits_{k=1}^{N} a_k(x) \leqslant C\right|$

Доказательство. $A_0(x) = 0 \quad 0 < A_{**} = C$ из пояснения

Т.к. $b_n(x) \rightrightarrows 0$ на X, то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |b_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{A_{**}}$

$\implies b_* \leqslant \frac{\varepsilon}{A_{**}}$

По лемме $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant 4 \cdot A_{**} \cdot \frac{\varepsilon}{A_{**}} = 4\varepsilon \implies \sum a_k(x)b_k(x)$ сходятся в себе ■

Теорема 26 (Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда)**.** $\sqsupset a_n : X \to \mathbb{C} \quad b_n : X \to \mathbb{R}$

Если:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ сходится равномерно на X
2. $\{b_k(x)\}$ монотонна по k для каждого $x \in X$
3. b_k равномерно ограничена на X

, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ сходится равномерно на x

Замечание. 3. $\implies \exists b_{**} : \quad \forall x \in X \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad |b_k(x)| \leqslant b_{**}$

Доказательство. $A_0(x) = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$

$A_j(x) = \sum\limits_{k=1}^{j} a_k\,(x) + A_0(x) = -\sum\limits_{k=j+1}^{\infty} a_k(x) \rightrightarrows 0$, т.к. $\sum a_k(x)$ сходится равномерно $\implies \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall j \geqslant N \quad \forall x \in X$

$$|A_j(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4 \cdot b_{**}}$$

Тогда для $m \geqslant n > N \quad \left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4b_{**}} \cdot b_{**} = \varepsilon$, значит ряд сходится в себе равномерно $\implies$ сходится равномерно ■

Пример. $x \in \mathbb{R}$

$\sum\limits_{k=1}^{N} e^{ikx} = \sum\limits_{k=1}^{N} q^k = q\frac{1-q^N}{1-q}$

$\sqsupset q = e^{ix} \neq 1$

$\left|\sum\limits_{k=1}^{N} e^{ikx}\right| = \left|e^{ix} \cdot \frac{e^{iNx}-1}{e^{ix}-1}\right| = \left|\frac{e^{\frac{iNx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}}\right| \cdot \left|\frac{e^{\frac{iNx}{2}} - e^{\frac{-iNx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}}\right| = \left|\frac{\sin\frac{Nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$

$\left|\sum\limits_{k=1}^{N} \cos kx\right| = \left|\sum\limits_{k=1}^{N} \Re r^{ikx}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$

$\left|\sum_{k=1}^{N}\sin kx\right| = \left|\Im e^{ikx}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$

$x \in [\delta, 2\pi - \delta] = E_\delta \quad \delta > 0$

$\frac{x}{2} \in [\frac{\delta}{2}, \pi - \frac{\delta}{2}] \implies \sin\frac{x}{2} \geqslant \sin\frac{\delta}{2}$

$A_{**} = \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}} \implies \forall x \in E_\delta \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \left|\sum_{k=1}^{N}\sin kx\right| \leqslant A_{**}$

Пример. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^p}$ сходится на E_δ равномерно по признаку Дирихле при $0 < p \leqslant 1$

$a_k(x) = \sin kx \quad b_k = \frac{1}{k^p}$

Аналогично для $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^p}$

Задача 8. Исследовать на равномерную сходимость $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$ на $[0, \delta]$

1.31 Равномерная сходимость и действия, связанные с предельным переходом

Теорема 27 (Теорема о повторном пределе для функциональных последовательностей)**.** $\sqsupset D \subseteq X \quad X$ – метрическое пространство, $f, \{f_n\} : D \to \mathbb{C}$

$x_0 \in D'$ – предельная точка. Пусть:

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = A_n \in \mathbb{C}$
2. $f_n \rightrightarrows f$ на D

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)}_{A_n} = \lim\limits_{x\to x_0}\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)}_{f(x)}$

Оба конечны и равны между собой.

Теорема 28 (о повторном прелеле для функциональных рядов)**.** $\sqsupset D \subseteq X, X$ – Метрическое пространство

$\{f_n\} : D \to \mathbb{C} \sqsupset x_0 \in D'$ Пусть:

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A_n$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на D

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x)}_{A_n} = \lim\limits_{x \to x_0} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)}_{S(x)}$

Обе части конечны и равны между собой

Замечание. $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$, теорема для рядов вытекает из теоремы для последовательностей.

Теоремы для последовательностей. 1. $\exists \lim\limits_{n \to \infty} A_n \in \mathbb{C}$?

2. Итоговое равенство

Т.к. $f_n \rightrightarrows f$ на D, то $\{f_n\}$ равномерно сходится в себе на D ($\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \quad \forall n, m \geqslant N \quad \forall x \in D \quad |f_n(x) - f_m(x)|$)

$x \to x_0$, перейдём к пределу в этом неравенстве. $|A_n - A_m| \leqslant \varepsilon \forall n, m \geqslant N$

Значит последовательность чисел $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в себе, $\mathbb{C}$ – полно

$\sqsupset A = \lim\limits_{n \to \infty} A_n$

$A_n = \lim\limits_{x \to c_0} f(x)$?

$$\begin{aligned}|A - f(x)| = |A - A_n + A_n - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \leqslant \\ \leqslant |A_n - A| + |f_n(x) - A_n| + |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon?\end{aligned}$$

.

Т.к. $A_n \to A, n \to \infty \quad \exists N_1 : \quad \forall n \geqslant N \quad |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3}$

Т.к. $f_n \rightrightarrows f \quad \exists N_2 : \forall n \geqslant N_2 \forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$

$N = \max N_1, N_2 \quad n = N$

Т.к. $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = A_n$, то $\exists \delta > 0 : \quad \forall x \in D : \quad 0 < \rho(x, x_0) < \delta \quad |f_n(x) - A_n|$

$\implies \forall x \in D : \quad 0 < \rho(x, x_0) < \delta \implies |f(x) - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \cdot 3 = \varepsilon$

$\blacksquare$

Следствие 6 (Для последовательностей)**.** $\sqsupset D \subseteq X$ – м.п., $\{f_n\}, f : D \to \mathbb{C}$

$f_n \rightrightarrows f$ на D.

Если $\{f_n\}$ непрерывны в точке x_0, то и f непрерывна в x_0

Следствие 7 (Для рядов)**.** $\sqsupset D \subseteq X$ – м.п., $x_0 \in D', \{f_n\}_{n=1}^{\infty}, f : D \to \mathbb{C}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на D.

Если $\forall n \quad f_n(x)$ непрерывна в точке x_0, то и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ непрерывно в x_0

Для последовательностей. $x_0 \in D \implies \begin{cases} x_0 \in D' \implies \lim\limits_{n\to\infty} \overbrace{\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)}^{f_n(x_0)} = \lim\limits_{x\to x_0} \overbrace{\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)}^{f(x)} \\ x_0 \text{ – изолированная} \end{cases}$,
но если она изолирована, то в ней все функции непрерывны.

$f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \implies f$ – непрерывна $\blacksquare$

Следствие 8 (теорема Стокса-Зейделя)**.** $D \subseteq X, \quad f_n, f : D \to \mathbb{C} \quad f_n \rightrightarrows f$ на D при $n \to \infty$ и $f_n \in C(D) \implies f \in C(D)$

равномерный предел последовательности непрерывных функций непрерывных

Следствие 9. Сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций непрерывна

Теорема 29 (Дини)**.** $\sqsupset K$ – компакт. $\{f(x)\}$ поточечно сходится к $f(x)$ на K

f_n, f – непрерывны $\in C(K)$

Если $\forall x \in K$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ возрастает (по n).

Тогда $f_n \rightrightarrows f$ равномерно на K

Замечание. Теорема верна для случая убывания $\{f_n(x)\}$ по n

Теорема 30 (Дани для рядов)**.** $\sqsupset f_n, S \in C(K) \quad S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ – ряд сходится на K и $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in X \quad f_n(x) \geqslant 0 \implies$ ряд сходится равномерно

Доказательство. НУО $\{f_n\}$ убывающая, $f(x) = 0$ (иначе рассмотреть $f_n(x) - f(x)$)

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall n \geqslant N \; \forall x \in K \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$?

По условию $f_n(x) \to f(x)$ поточечно. Фиксируем $\varepsilon > 0 \quad \exists N(x) = N(\varepsilon, x) :$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geqslant N$

$U_x = \{\widetilde{x} \in K : \quad |f_n(\widetilde{x}) - f(\widetilde{x})| < \varepsilon\}$ – открытая окрестность точки x

$\{U_x\}_{x \in K}$ – открытое покрытие компакта $K \quad \exists$ конечное подпокрытие $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_m}\} \quad N = \max\{N(x_1), \ldots, N(x_m)\}$

$\forall x \in X \exists$ номер $i : x \in U_i$

$n \geqslant N \quad x \in K \quad f_n(x) \leqslant f_N(x) \leqslant f_{N(x_i)}(x) < \varepsilon$

$\blacksquare$

Пример. $f_n(x) = nx\left(q - x^2\right)^n \to 0$ поточечно на $[0, 1]$

$\int_0^1 f(x) = \int_0^1 nx\left(1 - x^2\right)^n dx = \begin{vmatrix} y = 1 - x^2 \\ dy = -2xdx \end{vmatrix} = \frac{-n}{2} \int_1^0 y^n dy = \frac{n}{2} \frac{y^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{n}{2(n+1)} \to \frac{1}{2}$

$0 = \int_0^1 \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) \neq \lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2}$

Теорема 31 (Об интегрировании предела функциональной последовательности)**.** $\sqsupset f_n \in C([a, b]) \quad f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \in_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(x) dx$$

Теорема 32 (Об интегрировании функционального ряда)**.** $\sqsupset f_n \in C([a, b])$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится равномерно на $[a, b]$. Тогда ряд допускает почленное интегрирование:

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Доказательство. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in C([a,b]) \quad S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$

$\lessdot \varepsilon > 0 \quad \int_a^b S(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)dx$

Т.к. $S_n \rightrightarrows S(x)$, то для $\frac{\varepsilon}{b-a} \exists N : \quad |S(x) - S_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \forall n \geqslant N$

$\left|\int_a^b S(x)dx - \int_a^b S_n(x)dx\right| = \left|\int_a^b (S(x) - S_n(x))\, dx\right| \leqslant \int_a^b |S(x) - S_n(x)|\, dx \leqslant \varepsilon$ ∎

Теорема 33. $\sqsupset \langle a,b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ – промежуток

$\sqsupset f_n : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, Пусть:

1. $\exists x^0 \in \langle a,b\rangle : \quad \left\{f_n(x^0)\right\}$ сходится
2. $\{f_n'(x)\}$ сходится равномерно на $\langle a,b\rangle$ к $g(x)$

Тога $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на $\langle a,b\rangle$,

Если $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, то $f(x)$ дифференцируема на $\langle a,b\rangle$ и $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) \quad \left(\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)\right)$

Теорема 34 (Для рядов)**.** $\sqsupset f_n$ дифференцируема на $\langle a,b\rangle \quad f_n : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$. Пусть:

1. $\exists x_0 \in \langle a,b\rangle \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x^0)$ сходится
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ сходится равномерно на $\langle a,b\rangle$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на $\langle a,b\rangle$, его сумма дифферецнируема на $\langle a,b\rangle$ и

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \quad \forall x \in \langle a,b\rangle$$

Доказательство. Для случая функций класса C^1

$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n = \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt + f_n(x_0)$

$f(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt + \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$

При фиксированном x по предыдущей теореме $\int_{x_0}^{x} f'(t)dt \to \int_{x_0}^{x} g(t)dt$

$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f'_n(t) - g(t)|\, dt + \left| f_n(x_0) - \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) \right|$

По теореме Барроу $f(x)$ дифференцируема на $\langle a, b\rangle$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f'(x) = g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$ ■

1.32 Степенные ряды

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$ – вещественый степенной ряд

$\{C_n\} \subseteq \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$ – комплексный степенной ряд

Лемма 5. $\sqsupset \{x_n\}, \{y_n\}$ – вещественный неотрицательные

Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$

Доказательство. 1. Если $x_n \to 0 \implies x_n y_n$ – б.м. $\implies \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n y_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

2. $x_n \equiv x(const) \quad y = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k}$

   $x \cdot \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} x y_{n_k}$

   $x \cdot y \leqslant \overline{\lim} xy$

   С другой стороны Если xy_{n_k} – $\forall$ подпоследовательность xy_n...

■

$\pi = 3 \to \pi$

1.33 Здесь должна была быть лекция

1.34 ...

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k$$

$a \in \mathbb{C}, C_k \in \mathbb{C} \quad \forall z \in B_R(a) \implies C_k = \frac{S^{(k)}(a)}{k!}$ однозначно задаются коэффициенты

Пример. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0 \end{cases} \qquad f \in C(\mathbb{R})$

$\lhd f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{y}{e^{y^2}} = 0$

$f'_{x\neq 0}(x) = f(x) \cdot \left(\frac{2}{x^3}\right) = 2\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} \to 0, x \to 0$

$f''(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^{-\frac{1}{2^2}}}{x^3 x} = \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{2y^4}{e^{y^2}} = 0, ..$

$C_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{0}{k!} = 0$

Ряд Тейлора $\equiv 0 \qquad f(z) = S(z)$ лишь при $x = 0$

Пример. $\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k \quad |z| < 1$

$\frac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \qquad |-x^2| < 1 \quad |x| < 1$

Определение 21. $Hol(O) = \{f : O \to \mathbb{C}, \forall z \in O\ \exists f'(z_0)\}$, т.е. f – $\mathbb{C}$-дифференцируема, O–открытое в $\mathbb{C}$

Теорема 35. Если $f \in Hol\,(B_R(a))\,, a \in \mathbb{C}, R \in (0, +\infty] \implies \exists$ единственный набор $\{C_k\}_{k=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$:

$$\forall z \in B_R(a) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k$$

1.35 exp, cos, sin, ch, sh

Определение 22. $e^z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = (*)$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim\limits_{n\to\infty} n + 1 = +\infty$

$(*)$ сходится на $\mathbb{C}$

$\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\left(z^k\right)'}{k!} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \implies e^z \in Hol(\mathbb{C})$

Определение 23. $\cos z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$

$\sin z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Оба ряда сходятся $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2j+1}}{(2j+1)!)} \\ &= \cos z + i \sin z \end{aligned}$$

.

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i \sin z \\ e^{-iz} &= \cos z - i \sin z \\ \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \operatorname{ch} z & &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ \operatorname{sh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\ \cos z &= \operatorname{ch}(iz) \\ \sin z &= \frac{sh(iz)}{i} \\ \operatorname{ch} z &= \cos(\frac{t}{i}) = \cos(iz) \\ \operatorname{sh} z &= i \sin\left(\frac{z}{i}\right). \end{aligned}$$

Теорема 36 (единственности для $\mathbb{C}$-дифференцируемых функций)**.** $\sqsupset$ $f, g \in Hol(O) \quad \sqsupset E \subseteq O \subseteq C : E' \cap O \neq \emptyset \quad O$ – область (закнутое связное)

Если $f|_E = g|_E \implies f \equiv g$ (в O)

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}.$

Если фиксировать $x_1 \in \mathbb{R} \quad f(z) = e^{x_1+z} = g(z) = e^{x_1}e^z$

Всё это сохраняется на $\mathbb{C}$

По аналогичным причинам все формулы для арифметических действий и тригонометрических функций сохраняются

$$\begin{aligned}
&\sin(\alpha+\beta)\\
&\sin\alpha + \sin\beta\\
&\cos z \equiv \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)\\
&\sin z \equiv \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)\\
\cos(it) = \operatorname{ch}(-t) = \operatorname{ch} t \quad \sin(it) = &\frac{\operatorname{sh}(-t)}{i} = i \operatorname{sh} t\\
&\sin, \cos \text{ неограниченные функции}\\
&e^z = \cos(-iz) + i\sin(-iz)\\
&e^{z+2\pi k\cdot i} = e^z.
\end{aligned}$$

Пример. $\cos z = 2 \quad z = x+iy \iff \begin{cases} \sin x \operatorname{sh} y = 0 \\ \cos x \operatorname{ch} y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ y = \pm\left(\operatorname{ch}_{[0,+\infty)}\right)^{-1}(2) \end{cases}$

e^z не имеет корней на $\mathbb{C}$

$e^z = A \quad A$

Определение 24. $Ln(A) = \{z : \quad e^z = A\} = \{\ln|A| + iArg\ z\}$

$\ln z = \ln|z| + i\arg z \quad \arg z \in (-\pi, \pi]$

Замечание. Все корни косинуса и синуса лежат на вещественной прямой

$(1+z)^p = e^{p\ln(1+z)} \in Gol\,(B_1(0))$

$z = x \in (-1,1) \quad (1+z)^p$ совпадает с прежним определением.

Равенство выше продолжает степенную функцию с $(-1,1)$ в $B_1(0)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} z^k = (1+z)^p \quad \forall z : |z| < 1 \quad \binom{n}{k} = \begin{cases} 1, k = 0 \\ \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}, \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$\left|\frac{\binom{p}{k+1}}{\binom{p}{k}}\right| = \frac{p-k}{k+1} = \frac{|k-p|}{|k+1|} = \frac{k-p}{k+1} < 1 \implies \sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}$– сходиться по признаку Лейбница.

$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^k k!}$

$\sqrt{1+x} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} x^k$

$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$

$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$

$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \operatorname{arctg} x'(t) dt = \int_0^x \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^l t^{2k} dt = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^{2x} dt = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

$\forall x \in [-1,1] \quad \operatorname{arctg} x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$

$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right)$

$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ при $|x| < 1$

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} (-x^2)^k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^{2k}$

$\arcsin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)^2} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 + \ldots$

1.36 Вещественная аналитичность

$O \subseteq \mathbb{R} \quad O$ – область

$f : O \to \mathbb{R} \quad f$ называется (вещественно) аналитичной, если $\forall a \in O \; \exists B_R(a) \quad (R > 0) \; \exists (C_k)_{k=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{R} : \forall x \in B_R(a)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x-a)^k$$

Определение 25 (Комплексная аналитичность)**.** $O \subseteq \mathbb{C} \quad O$ – открытое, $f : O \to \mathbb{C}$

f – $\mathbb{C}$-аналитична $\iff \exists a \in O \; \exists B_R(a), \; R > 0 \; \exists (C_{k=0}^{\infty}) : \forall z \in B_R(a) \quad f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k(t - a(^k$

Замечание. Если $\left\{f^{(k)}(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничено на $\langle a, b \rangle$, тогда функция $f \in C^{\infty}(\langle a, b \rangle)$

1.37 Системы множеств

X – множеств. 2^X – $\{A : A \subseteq X\}$. Вместа множества множеств говорят система множеств.

Определение 26. Система множеств – множества некоторых подмножеств множества X

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subseteq 2^X$

Определение 27. $\sqsupset X$ – множество. $\mathfrak{P} \subseteq 2^X$

$\mathfrak{P}$ называется <u>полукольцом</u>, если:

1. $\emptyset \subseteq \mathfrak{P}$
2. $A, B \in \mathfrak{P} \implies A \cap B \in \mathfrak{P}$
3. $A, B \in \mathfrak{P} \implies \exists C_1, \dots, C_L \in \mathfrak{P} : \quad A \setminus = \coprod_{l=1}^{L} C_l$ – дизъюнктное объединение

Замечание. Вместо (3) можно требовать

3 $A, B \in \mathfrak{P}, B \subseteq A \implies \exists$ диз. $\{C_1, \dots, C_L\} : A \setminus B = \coprod_{l=1}^{L} C_l$

$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$, последнее принадлежит $\mathfrak{P}$ по 2

Пример.

1. 2^X
2. $\{\emptyset\}$
3. $\mathfrak{P}_{1\text{я}} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \leqslant b\}$ – одномерные ячейки
4. $\mathfrak{P}_{1\text{п}} = \{\langle a, b \rangle : a, b \in \mathbb{R}, a \leqslant b\}$ – промежутков

Утверждение 11 (О произведение полуколец)**.** $\sqsupset X, Y$ – множества. $\mathfrak{P}_X, \mathfrak{P}_Y$ – полукольца. Тогда $\mathfrak{P}_X \times \mathfrak{P}_Y = \{A \times B : A \in \mathfrak{P}_X, B \in \mathfrak{P}_Y\}$ – полукольцо на $X \times Y$

Доказательство.

1. верно. $\emptyset \times \emptyset$
2. $\sqsupset A \times B, C \times D \in \mathfrak{P}_X \times \mathfrak{P}_Y \implies (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
3. $\sqsupset A \times B \supseteq C \times D \implies C \subseteq A, B \subseteq D$

   $A \setminus C = \coprod D_j \quad C \setminus D = \coprod E_j$

   $D_0 = C, E_0 = D \implies A = \coprod_{i=0}^{I} D_i, D = \coprod_{j=0}^{J} E_j$

   $A \times B = (\coprod D_i) \times (\coprod E_j) = \coprod (D_i \times E_j) = D_0 \times E_0 \coprod_{i=0 \dots I j=0 \dots J (i,j) \neq (0,0)}$

$\blacksquare$

Определение 28. $\beth$ X – множество. $\mathfrak{A} \subseteq 2^X$. $\mathfrak{A}$ называется $\sigma-$алгеброй, если:

1. $a \in \mathfrak{A} \implies A^C \in \mathfrak{A}$
2. $\{A_i\}$ не более, чем счётный набор элементов $\mathfrak{A} \implies \bigcap\limits_i A_i \in \mathfrak{A}$

Утверждение 12. $\beth$ X – .. множество, $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ – σ-алгебра $\subseteq 2^X$. Тогда:

1. $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \setminus B \in \mathfrak{A}$
2. $\{A_i\}$ – не более, чем счётное. $\{A_i\} \subseteq \mathfrak{A} \implies \bigcup\limits_i A_i \in \mathfrak{A}$
3. $\mathfrak{A}$ есть полукольцо

Доказательство. 1. $A \setminus B = A \cap \left(B^C\right) \in \mathfrak{A}$

2. $\left(\bigcup\limits_i A_i\right)^{CC} = \left(\bigcap\limits_i A_i^C\right)^C \in \mathfrak{A}$
3. $\mathfrak{A} \neq \emptyset \implies \exists A \in \mathfrak{A} \implies A \setminus A = \emptyset \in \mathfrak{A}$

$\blacksquare$

Пример. $\mathfrak{A} = \left\{A \text{ – нбчс или } A^C \text{ нбчс }\right\}$

Если хотя бы одно A_i нбчс, то их пересечение тоже нбчс

Если все нещётны, значит дополнения к ним нбчс. $\left(\bigcap\limits_i A_i\right)^{CC} = \left(\bigcup\limits_i A_i^C\right)^C$

Задача 9. 1. $\mathfrak{A} = \left\{B \text{ – огр или } B^C \text{ – огр }\right\}$, X – метрическое пространство. Является ли это сигма-алгеброй

Утверждение 13. $\beth$ X – множество $\mathfrak{A} \subseteq 2^X$

Тогда существует наименьшая по включению σ-алгебра, содержащая $\mathfrak{A}$

Доказательство. $\mathfrak{A}_* = \bigcap\limits_{\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{A}_0} \mathfrak{A}$ – пересечение таких σ-алгебра

В пересечние входит 2^X, в каждое входит $\emptyset$

Она наименьшая, потому что наименьшая входит в пересечение ■

Лемма 6. Пересечение σ-алгебр – σ-алгебра

Определение 29. Если $\mathfrak{A}_0 \subseteq 2^X \implies$ наименьшая σ-алгебра, содержащая $\mathfrak{A}_0$ называется борелевской оболочкой системы $\mathfrak{A}_0$

Определение 30. $E \in \mathfrak{B}(\Omega)$

Ω – стандартная (Евклидова) топология в $\mathbb{R}^n$

E – борелевское множество.

F_σ - множество – счётное объдинение замкнутых

G_δ-множество – счётное пересечение открытых

Пример. $\{(\cdot)\} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_K(\cdot) \implies$ тип G_δ

в $\mathbb{R}$ $\quad Q - F_\sigma$

$(F_\sigma)_\delta \quad F_{\sigma\delta\sigma\ldots}$

Теорема 37. $\sqsupset O$ – открытое в $\mathbb{R}^n$

Тогда $O = \coprod_{j=1}^{\infty} P_j \quad \{P_j\}$ – кубические ячейки со стороной $\frac{1}{2^k}$

Определение 31. $\sqsupset X$ – множество, $\mathfrak{P} \subseteq 2^X, \mathfrak{P}$ – полукольцо

$\mu : \mathfrak{P} \to [0, +\infty]$ называется объёмом (мерой) на $\mathfrak{P}$, если:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\forall$ конечного (счётного) дизъюнктного объединения семейства $\{P_j\} \subseteq \mathfrak{P}: \quad P = \coprod P_i \in \mathfrak{P}$
$$\mu(P) = \sum_j \mu(P_j)$$
   конечная аддитивность объема, счётная аддитивность меры

Замечание. Из счётной следует конечная, любая мера является объёмом.

Пример. X – любое множество. $\mathfrak{P} = 2^X$

$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, a \in A \\ 0, a \notin A \end{cases}$

Если μ – мера на полукольце $\mathfrak{P} \quad \mathfrak{P} \subseteq 2^X$

$f(x)$ – ступенчатая функция, т.е. $\exists \{E_1, \ldots, E_N\} \in \mathfrak{P}$:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{E_j} \quad \chi_A(p) = \begin{cases} 1 & , p \in A \\ 0 & , p \notin A \end{cases}$$

$$\int_X f d\mu = \sum_{j=1}^{N} c_j \int_X \chi_{E_j} d\mu \quad \int_X \chi_{E_j} d\mu = \mu\left(E_j\right)$$

Пример. $\int_{\mathbb{R}} f(x) d\delta_0 = \int_{\{0\}} f(x) d\mu + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} f(x) d\delta_0 = \chi_{\{0\}} \cdot f(0) + 0 = f(0) \cdot \delta_0\left(\{0\}\right) = f\left(0\right)$

Пример. $\mathfrak{P} = 2^{\mathbb{N}} \ni A$

$$\mu(A) = \begin{cases} \#(A), \text{если конечно} \\ +\infty \end{cases}$$

Замечание. Условие $\mu(\emptyset)$ вытекает из конечной аддитиности, если $\exists A \in \mathfrak{P}: \quad \mu(A) < +\infty$

$(\implies \mu(A) = \mu\left(A \coprod \emptyset\right) = \mu(A) + \mu(\emptyset) \implies 0 = \mu(\emptyset))$

$\mu(P) \equiv +\infty$ – счётная аддитивность есть, а $\mu(\emptyset) = +\infty$

Теорема 38 (Элементарные свойства объёмов и мер)**.** $\sqsupset \mu$ – объём (мера) на полукольце $\mathfrak{P} \subseteq 2^X$

1. Если $\{P_j\} \subseteq \mathfrak{P}$ – конечный (счётный) набор $P \in \mathfrak{P}$

   $\coprod P_j \subseteq P \implies \sum\limits_i \mu(p_j) \leqslant \mu(P)$ – усиленная монотонность

2. $\{P_i\} \subseteq \mathfrak{P}$ – конечный (счётный) набор $P \in \mathfrak{P}$

   $P \subseteq \bigcup\limits_j P_j \implies \mu(P) \leqslant \sum\limits_j \mu(P_j)$ – конечная (счётная) полуаддитивность

Утверждение 14. Если $\mathfrak{P} \subseteq 2^X$ – полукольцо, то:

1. $P \in \mathfrak{P} \quad P_1, \ldots, P_N \in \mathfrak{P}$, то $\exists \{Q_1, \ldots, Q_L\}$– диъюнктный набор $\subseteq P$:
$$¶ \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{N} P_n \right) = \coprod_{l=1}^{L} Q_L$$
2. Если $P_1, \ldots, P_N \in \mathfrak{P}$, то существует Q_{nl}
$$\bigcup_{n=1}^{N} P_n = \coprod_{n=1}^{N} \coprod_{l=1}^{L_n} Q_{nl}$$
Точнее диз. $\{Q_{nl}\}_{\substack{n=1...N \\ l=1..L_N}}$ и $\forall l = 1..L_N \quad Q_{nl} \subseteq P_n$

Доказательство. 1. По индукции по N. Если $N = 1$ утверждение верное по 3-й аксиоме полукольца.

$N \to N + 1$

$$P \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{N+1} P_n \right) = \left(P \setminus \bigcup_{n=1}^{N} \right) \setminus P_{N+1} = \text{ по индукционному предположению}$$
$$= \left(\coprod_{l=1}^{L} Q_l \right) \setminus P_{N+1} =$$
$$= \coprod_{l=1}^{L} (Q_l \setminus P_{N+1}) = \coprod_{e=1}^{L} \coprod_{j=1}^{J_l} Q_{ej}$$
.

2. $\bigcup\limits_{i=1}^{N} P_n = P_1 \vee (P_2 \setminus P_1) \vee (P_3\, (p_1 \cup P_2)) \vee \ldots \vee (P_N \setminus (P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_{N-1}))$

■

Доказательство. 1. $\sum\limits_n \mu(P_n) \leqslant \mu(O)$

$\forall N \quad \sum\limits_{n=1}^{N} \mu(P_n) \leqslant \mu(P)$ если $\coprod_{n=1}^{N} P_n \leqslant P$

В силу теоремы о свойствах полукольца $\exists \{Q_1, \ldots, Q_L\}$ – диз, $\subseteq \mathfrak{P}$: $P \setminus \coprod P_n = Q_l$

$(\coprod P_n) \coprod (\coprod Q_l) = P$

мера левой части $= \sum\limits_{n=1}^{N} \mu(P_n) + \sum\limits_{l=1}^{L} \mu(Q_l) = \mu(P)$

2. $\cup P_j = P_1 \coprod (P_2 \setminus P_1) \coprod \ldots$

   $\coprod P_i \cap P = P$

   $B_j = (P_j \setminus (P_1 \cup \ldots \cup P_{j-1})) \cap P = \coprod \widetilde{Q}_{jl} \cap P = \coprod \left(\widetilde{Q}_{jl} \cap P\right) \cap P$

   $P = \coprod_j \coprod_{l=1}^{L} Q_{jl}$

   $\mu(P) = \sum\limits_{j} \sum\limits_{l=1}^{L} \mu(Q_{jl}) \leqslant +\mu(P_J)$

■

Утверждение 15. $\nu\,(A \times B) = \nu(A) \cdot \nu(B)$

Теорема 39. Классический объём ν_n есьть мера не $\mathcal{P}_n$ (т.е. ν_n – счётно-аддитивна)

Доказательство. По теореме о свойствах объёмов $\coprod_{k=1}^{\infty} P_k \subseteq P \implies \sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu(P_k) \leqslant \nu(P)$

Если $P, P_k \in \mathcal{P}$ и $P = \coprod_{k=1}^{\infty} P_k \implies \mu_n(P) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_n(P_k) A$. Неравенство $\leqslant$ происходит из прошлого абзаца

Свойство в другую сторону называется счётной полуаддитивностью

$\lhd \varepsilon > 0 \quad P = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j) \quad \lhd K = \prod_{j=1}^{n} [a_j, \widetilde{b}_j] \quad \widetilde{P} = \prod_{j=1}^{n} [a_j, \widetilde{b}_j)$, где $\widetilde{b}_j \in (a_j, b_j): \quad \nu(\widetilde{P}) > \nu(P) - \frac{\varepsilon}{2}$

$\widetilde{P}_k = [\widetilde{a}_j, b_j) \quad \widetilde{a}_j < a_j \quad \nu_k(\widetilde{P}_k) < \nu(P_k) + \frac{\varepsilon}{2}$

$O_k = \prod (a_j, b_j) \quad P_k \subseteq O_k \subseteq \widetilde{P}_k \qquad \widetilde{P} \subseteq K \subseteq P = \bigcup P_k \subseteq \cup_k O_k$, т.о. $\{O_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует открытое покрытие компакта K, а значит можно выбрать конечное подпокрытие $\{O_1, \ldots, O_N\}$ – покрытие K

$\widetilde{P} \subseteq K \subseteq \cup_{k=1}^{N} O_k \subseteq \cup_{k=1}^{N} \widetilde{P}_k$. В силу конечной аддитивности $\nu_n(\widetilde{P}) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{N} \nu_n(\widetilde{P}_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu_n(\widetilde{P}_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\nu(P_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu_n(P_k) + \frac{\varepsilon}{2}$

$\nu_n(P) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu_n(P_k) + \varepsilon \quad \varepsilon \to 0 \qquad \nu_n(P) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu_n(P_k)$ ■

Определение 32. λ_n – стандартное продолжение ν_n (с $\mathcal{P}_n$)

$\mathcal{A}_n$ – область определения мер λ_n

$E \in \mathcal{A}_n \overset{\text{def}}{\iff} E$ – измеримо по Лебегу

$\mathcal{N} = \{\}$

...

Определение 33. Если H – гиперплоскость, параллельная координатному подпространству.

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = c\}$$

$\implies \lambda_n(H) = 0$

Доказательство. $H = \cup_j H_j \quad H_j = H \cap [-j, j]^n$

Н.у.о $j = n$. $H = \mathbb{R}^{n-1} \times \{c\}$

$H_j = [-j, j)^{n-1} \times \{c\} = \bigcap\limits_{l=1}^{\infty} [-j, j)^{n-1} \times [c, c + \frac{1}{2}) \implies \lambda_n(H_j) = \lim\limits_{l \to \infty} \lambda_n(H_{jl}) = 0$ ∎

Замечание. μ – полная мера. A – измеримо, e – нуль-множество. $B \triangle A \subseteq e \implies B$ измеримо и $\mu(A) = \mu(B) = \mu(A \cap B)$

$(A \cap B) = A \setminus (A \setminus B)$ – измеримо $\quad B = (A \cap B) \coprod (B \setminus A)$

Утверждение 16. $\Pi = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \ldots \times \langle a_n, b_n \rangle \quad -\infty \leqslant a_k, b_k \leqslant +\infty$

$\implies \Pi \in \mathcal{A}$ и $\lambda_n(\Pi) = \prod (b_k - a_k)$

Утверждение 17. λ_n – σ-конечная мера, $\mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} [-N, N)^n \quad \lambda([-N, N)^n) = (2N)^n < +\infty$

Утверждение 18. $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n \quad \nu_{n*}(E) = \inf \{\lambda_n(G) : G$ – откр. $, E \subseteq G\}$

В частности, если $E \in \mathcal{A}_n$

$$\lambda_n(E) = \inf \{\lambda_n(G) : G \text{ – откр. }, E \subseteq G\}$$

Утверждение 19. $\forall E \in \quad \lambda_n(E) = \sup\{\lambda_n(F) : F$ – замкн$, F \subseteq E\} = \sup\{\lambda_n(K) : K$ – комп $, K \subseteq E\}$

Утверждение 20. $\forall E \in \mathcal{A}_n \exists$ окр $E \subseteq G$:

1.38 Много чего

1.39 Продолжение

Утверждение 21. E – измеримо, то

$$\lambda_n(E) = \inf\{\lambda_n(G) : E \subseteq G,\ G \text{ – откр. }\}$$

Следствие 10. $\forall \varepsilon > 0 \forall$ (измерим) $E \in \mathcal{A}_n \quad \exists$ откр $G : \quad G \supset E$

$$\lambda_n(G \setminus E) < \varepsilon$$

Доказательство. Если $\lambda_n(E) < +\infty \implies \exists$ откр. $G \supset E : \quad \lambda_n(G) < \lambda_n(E) + \varepsilon \qquad \lambda_n(G) = \lambda_n(E) + \lambda_n(G \setminus E)$

$G = E \coprod (G \setminus E)$

Если $\lambda_n(E) = +\infty$

$E_k = E \cap B_0(k)$

$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} = E \cap \left(\coprod\limits_{x=1}^{\infty} B_0(k) \right) = E$

$\lambda_n(E_k) \leqslant \lambda_n(B_0(k)) < +\infty$

$\forall k$ по 1) $\exists$ откр $G_k \supset E_k : \quad \lambda_n(G_k \setminus E_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$

$G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$ – откр $\quad G \supset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k = E$

$\lambda_n(G \setminus E) = \lambda_n\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k \setminus E \right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_n(G_k \setminus E) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_n(G_k \setminus E_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} < \varepsilon$ ■

Следствие 11. $\forall \varepsilon > 0 \forall E \in \mathcal{A} \quad \exists$ замкн. $F \subseteq E$:

$$\lambda_n (E \setminus F) < \varepsilon$$

И $E \in \mathcal{A} \implies \lambda_n(E) = \sup \left\{ \lambda_n (F) : \ F \subseteq E, F = \overline{F} \right\}$

Доказательство. $\lambda_n(E) = \lambda_n(F) + \underbrace{\lambda_n(E \setminus F)}_{<\varepsilon}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad$ для $E^C \quad \exists$ откр. $G : G \supset E^C$ и $\lambda_n \left(G \setminus E^C \right) < \varepsilon$

$F = G^C$ – замкн, $F \subseteq E \quad G \setminus E^C = G \cap \left(E^{\mathbb{C}} \right) = G \cap E$

$E \setminus F = E \cap \left(F^C \right) = E \cap G$ ■

Определение 34. $\sqsupset \mu$ – мера на $\mathcal{A} \quad \mathcal{A} \quad \mathcal{A} \subseteq 2^X$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с мерой

X – топологическое пространство

Определение 35. Если $\forall E \in \mathcal{A}$

$$\mu(F) = \sup \left\{ \mu(F) : \quad F = \overline{F} \quad F \subseteq E \right\} = \inf \left\{ \mu(G) : G - \text{откр} , E \subseteq G \right\}$$

, то мера называется регулярной.

Пример. $E = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \quad \mu = \lambda_1$

$\lambda_1(E) = 0 \quad F = \overline{F} \quad F \supset E \implies \overline{F} \supset \overline{E} = [0, 1]$

$\forall$ замкн $F : \quad F \supset E \quad \lambda_n (F) \geqslant \lambda_n ([0, 1]) = 1$

Следствие 12. $\forall E \in \mathcal{A} \quad \exists F_\sigma$ – множество $F \quad G_\sigma$ – множество G:

$$F \subseteq E \subseteq G \text{ и } \lambda_n (G \setminus F) = 0$$

, т.е.

$\exists$ множества меры нуль e_1, e_2 :

$$E = F \cup e_1 \text{ и } E = G \setminus e_2$$

Доказательство. $\forall k \quad \exists$ замкн F_k и откр $G_k : \quad F_k \subseteq E \subseteq G_k$ и $\lambda_n (G_k \setminus E) < \frac{1}{2k} \quad \lambda_n (E \setminus F_k) < \frac{1}{2k}$

$\implies \lambda_n\left(G_k \setminus F_k\right) \leqslant \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}$

$G = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k \qquad F = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$

$\lambda_n\left(G \setminus F\right) \leqslant \lambda_n\left(G_k \setminus F_k\right) < \frac{1}{k} \quad \forall k$

$\implies \lambda_n\left(G \setminus F\right) = 0$

$e_1 = E \setminus F \subseteq G \setminus F$ ■

Следствие 13. $\forall E \in \mathcal{A}$ $\exists$ возрастающая последовательность компактов $\{K_j\} \quad K_{j+1} \supset K_j \quad \forall j$:

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \cup e \text{ и } e \text{ меру нуль } (\lambda_n(e) = 0)$$

Доказательство. $\sqsupset \{F_k\}$ – из следствия 2, замкнутые, $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \cup e_2$

$F_k = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} F_{kj} \qquad F_{kj} = F \cap \overline{B_j(0)}$ – комп.

$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} F_l$ – объединение компактов ■

Теорема 40 (сохранение измеримости при гладком отображении)**.** $\sqsupset$ $\phi \in C^1\left(O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\right) \quad O$ – откр Если $E \subseteq G$ и $E \in \mathcal{E}$ Тогда $\forall E \subseteq G$

$$\Phi(E) \in \mathcal{E}$$

$\forall e \subseteq G$ и $\lambda_n(e) = 0 \implies \lambda_n\left(\Phi\left(e\right)\right) = 0$

Доказательство. $E \in \mathcal{E} \quad E = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K_j \cup e$

$\Phi(E) = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \cup \Phi(e)$ – объединение объединение компактов и множества меры ноль

переходя ко второму: По теореме о представлении открытых множеств $\exists \quad \{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность кубических ячеек

$G = \cup P_k \quad \forall k\ \overline{P_k} \subseteq G$

1. $e \subseteq P_{k_0}$ для некоторого k_0. Гладкое отображение на компакте $\implies \Phi$ липшецево на $\overline{P}$, т.е. $\exists C: \ \forall x, y \in \overline{P} \quad \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leqslant C \cdot \|x - y\|$

   $\lhd \varepsilon > 0 \quad \exists$ откр $G: \quad G \geqslant e$ и $\lambda_n(G) < \varepsilon$

   По теореме о представлении открытого $\exists$ последовательность кубических ячеек $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty} \quad G = \coprod_{j=1}^{\infty} Q_j \quad \implies \ e \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (Q_j \cap P) \implies$

   $\Phi(e) \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Phi\left(Q_j \cap P\right)$

   $\operatorname{diam}\left(\Phi\left(Q_j \cap P\right)\right) \leqslant C \quad \operatorname{diam}\left(Q_j \cap P\right) \leqslant C \operatorname{diam}\left(Q_j\right) = C\sqrt{n}\left(\lambda_n\left(Q_j\right)\right))$

   Там много возни с ячейками

■

Лемма 7 (об единственности меры на $\mathcal{A}$)**.** $\sqsupset \mu, \nu$ – две регулярные меры на $\mathcal{A}_n$

Если $\forall$ кубических ячеек Q

$$\mu(Q) = \nu(Q)$$

, то μ и ν совпадают (на $\mathcal{A}_n$)

Доказательство. Точно верно на открытых, т.к. открытые можно выразить через кубические ячейки.

Для компакта верно, потому что $K = B \setminus (B \setminus K)$ ■

Следствие 14. Если $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ – инъекция и $\forall E \in \mathcal{A}_m \quad \Phi\left(E\right) \in \mathcal{E}$ и $\exists c \geqslant 0 \quad \forall$ кубической ячейки Q

$$\lambda_n\left(\Phi(Q)\right) = C\lambda_m(Q)$$

Тогда $\forall E \in \mathcal{A}_n$

$$\lambda_n\left(\Phi(E)\right) = C\lambda_m(E)$$

Доказательство. $\mu = c\lambda_n \quad \nu = \lambda n\left(\Phi(E)\right) \forall E \in \mathcal{A}_n$

Первая очевидно мера, вторая мера, потому что Φ биекция ■

Определение 36. $T(x) = x + v$ – сдвиг на $v \quad x, v \in \mathbb{R}^n$

Утверждение 22. Мера Лебега инвариантна относительно любого сдвига.

Доказательство. $\Phi(x) = T_v(x)$

$$\lambda\left(\Phi(Q)\right) = \lambda_n\left(T_v\left(Q\right)\right)$$

Ячейка передвинется поточечно, длины рёбер не изменятся,

А тогда по лемме $\lambda_n\left(T(E)\right) = \lambda_n(E)$ ■

Определение 37. $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется диагональным (относительно стандартного базиса) если в этом базисе, если она представляется как диагональная матрица.

Утверждение 23. Если $l_1, \ldots, l_n > 0$ – числа на диагонали, то

$$\lambda_n\left(D(Q)\right) = l_1 l_2 \ldots l_n \lambda_n(Q)$$

$\implies \lambda_n\left(D(E)\right) = l_1 l_2 \ldots l_n \lambda_n(E)$

Замечание (Напоминание)**.** $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – линейное, сохраняет скалярное произведение $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ называется ортогональным

Или по-другому:

1. U ортогонально
2. U изометрия
3. $U^{-1} = U^T$

Утверждение 24. $\forall$ линейного $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \quad \det A \neq 0 \quad \exists$ ортогональные операторы U_1, U_2 и диагональный $D = diag\left(l_1, \ldots, l_n\right) \quad l_i > 0 :$

$$A = U_2 D U_1$$

Доказательство. $A^T A$ симметричный, положительный

$\left\langle A^T Ax, x\right\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2 \geqslant 0 \quad = 0 \iff x = 0$

Тогда он приводится к диагональному виду. $A^T A = Q\widetilde{D}Q^{-1} \quad Q$ – ортогональный, $\widetilde{D} = diag\left(m_1, \ldots, m_n\right) \quad m_i > 0$ – диагональный

$D = diag\left(\sqrt{m_1}, \ldots, \sqrt{m_n}\right) \quad D \cdot D = \widetilde{D}$

$U_1 = Q^{-1} \quad U_2 = AU_1^{-1}D^{-1}$

$U_2U_2^T = \left(AU_1^{-1}D^{-1}\right)\left(AU_1^{-1}D^{-1}\right)^T = AU_1^{-1}D^{-1}D^{-1T}U_1^{-1T}A^T = AQ\widetilde{D}^{-1}QA^T =$

$\widetilde{D} = Q^TA^TAQ \quad \widetilde{D}^{-1} = Q^TA^{-1}A^{-1T}Q$

$= AQQ^TA^{-1}(A^T)^{-1}QQ^TA^T = Id$ ■

Теорема 41. $\sqsupset L$ – лин из $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Тогда $\forall E \in \mathcal{A}$

$$\lambda_N\left(L(E)\right) = |\det[L]| \cdot \lambda_n(E)$$

Доказательство. 1. Если $\det L \neq 0 \implies$ по лемме $\exists$ ортогональные U_1, U_2 и диаг. $D: \quad L = U_2DU_1$

(a) $L = U$ ортогональное

$C = \frac{\lambda_n(U(Q_*))}{\lambda_n(Q_*)} = \lambda_n\left(U\left(Q_*\right)\right) \qquad Q_* = [0,1]^n$

$\sqsupset Q$ – произвольная кубическая ячейка.

$Q = b \cdot Q_* + a = T_a\left(bQ_*\right)$

$U\left(x+y\right) = U(x) + U(y)$

$U\left(T_y(x)\right) = T_{U(y)}\left(U(x)\right)$ или $U \cdot T_y = T_{U(y)} \cdot U$

$\lambda_n\left(U(Q)\right) = \lambda_n\left(U\left(T_a\left(bQ_*\right)\right)\right) = \lambda_n\left(T_{U(a)}U\left(bQ_*\right)\right) = \lambda_n\left(bU\left(Q_*\right)\right) = b^n\lambda_n\left(U\left(Q_*\right)\right) = b^nC = \lambda_n(Q)C$

$\lambda_n\left(UQ\right) = C\lambda_n\left(Q\right)$

Тогда по лемме $\lambda_n\left(Q(E)\right) \equiv C \cdot \lambda_n(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}_n$

$E = B_R(0) \quad \lambda_n(B) = \lambda_n(U(B)) = C\lambda_n(B) \implies C = 1 \implies \forall$ ортогональное преобразование сохраняет меру.

2. $\det L = 0 \implies L\left(\mathbb{R}^n\right)$ подпространство размерности $k < n$ в $\mathbb{R}^n$

$X = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad x_{k+1} = \ldots = x_n = 0\}$

$\lambda_n(X) = 0 \quad \sqsupset v^1, \ldots v^k$ – базис в $L\left(\mathbb{R}^n\right)$

$v^{k+1}, \ldots, v^n$ – базис $\left(L\left(\mathbb{R}^n\right)\right)^\perp$

$e^k = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ – 1 на k месте

$A : e^k \to v^k; \quad A : X \to L\left(\mathbb{R}^n\right)$ – гладкое отображение, которое переводит множество меры ноль в множество меры ноль $\lambda\left(L\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$

■

1.40 Измеримые множества

$\sqsupset (X, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с мерой

Определение 38. $\sqsupset E \subseteq X \quad f : E \to \overline{R}$

f называется <u>измеримой</u> на множестве $E \quad (f \in S(E))$, если $\forall a \in \mathbb{R}$ измеримы ($\in \mathcal{A}$):

- $E\{f < a\}$
- $E\{f > a\}$
- $E\{f \leqslant a\}$
- $E\{f \geqslant a\}$

Здесь $E\{f < a\} = \{x \in R : \quad f(x) < a\}$

Замечание. Если $S(E) \neq 0$, то $E \in \mathcal{E}$

$E = E\{f < a\} \cup E\{f \geqslant a\}$

Утверждение 25. $\sqsupset E \in \mathcal{A} \quad f : E \to \overline{R}$. Следующие утверждения равносильны:

1. $\forall a \in \mathbb{R} \quad E\{f > a\} \in \mathcal{A}$
2. $\forall a \in \mathbb{R} \quad E\{f \leqslant a\} \in \mathcal{A}$
3. $\forall a \in \mathbb{R} \quad E\{f < a\} \in \mathcal{A}$
4. $\forall a \in \mathbb{R} \quad E\{f \geqslant a\} \in \mathcal{A}$

Кстати, эти множества называется множествами Лебега, если вы ещё не наслышаны о нём.

Замечание. E Неизмеримо $f(x) \equiv +\infty \quad E\{f < a\} = \emptyset \in \mathcal{A} \qquad E\{f > a\} = E \notin \mathcal{A}$

Доказательство.

$1 \implies 2 \;\; E\{f \leqslant a\} = E \setminus E\{f > a\}$

$2 \implies 3 \;\; E\{f < a\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E\left\{f \leqslant a - \frac{1}{k}\right\}$

$4 \implies 2 \;\; E\{\}$

■