

Конспект по линейной алгебре  
II семестр

Коченюк Анатолий

4 июля 2021 г.



# Глава 1

## Дополнительные главы линейной алгебры

### 1.1 Полилинейная формы

**Замечание** (вспомним). Линейное отображение  $\varphi(x + \alpha y) = \varphi(x) + \alpha \cdot \varphi(y)$

**Определение 1.**  $\triangleleft X$  – ЛП,  $\dim X = n$

$X^*$  – сопряжённое к  $X$  пространство.

Полилинейной формой (ПЛФ) называется отображение:

$$U : X \times X \times \dots \times X \times X^* \times X^* \times \dots \times X^* \rightarrow K,$$

обладающее свойством линейности по каждому аргументу.

$$\square x_1, x_2, x_3, \dots, x_p \in X \quad y^1, y^2, \dots, y^q \in X^*$$

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x'_i + \alpha x''_i, \dots, x_p, y^1, y^2, \dots, y^q) = \\ = (x_1, x_2, \dots, x'_i, \dots, x_p, y^1, y^2, \dots) + \alpha u(x_1, x_2, \dots, x''_i, \dots, x_p, y^1, y^2, \dots, y^q) \end{aligned}$$

**Замечание.** Пара чисел  $(p, q)$  называется валентностью полилинейной формы

**Пример.**  $\mathbb{R}^n \quad f : \mathbb{R} \rightarrow K$  – ПЛФ  $(1, 0)$

$\hat{x} : \mathbb{R}^{n*} \rightarrow K$  – ПЛФ  $(0, 1)$

Скалярное произведение  $u(x_1, x_2) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  – ПЛФ  $(2, 0)$

Смешанное произведение  $w(x_1, x_2, x_3) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$  – ПЛФ  $(3, 0)$

$\square u, w$  – две полилинейные формы валентности  $(p, q)$

**Определение 2.**

1.  $u = w \iff$

$$u(x_1, \dots, x_p, y^1, \dots, y^q) = w(x_1, \dots, x_p, y^1, \dots, y^q) \quad \forall x_1 \dots x_p y^1 \dots y^q$$

2. Нуль форма  $\Theta \quad \Theta(x_1, \dots, x_p, y^1, \dots, y^q) = 0$

3. Суммой ПЛФ валентностей  $(p, q) \quad u + v$  называется такое отображение  $\omega$ , что  $\omega(x_1, \dots, x_p, y^1, \dots, y^q) = u(x_1, \dots, x_p, y^1, \dots, y^q) + v(x_1, \dots, x_p, y^1, \dots, y^q)$

**Лемма 1.**  $w$  – ПЛФ  $(p, q)$

$$w(\dots, x'_i + \alpha x''_i, \dots) = w(\dots, x'_i, \dots) + \alpha w(\dots x''_i \dots)$$

4. Произведением полилинейной формы на число  $\lambda$  называется отображение  $\lambda u$ , такое что:

$$(\lambda u)(x_1, \dots, x_p, y^1, \dots, y^q) = \lambda \cdot u(x_1, \dots, x_p, y^1, \dots, y^q).$$

**Лемма 2.**  $\lambda u$  – ПЛФ  $(p, q)$

$\square \Omega_p^q$  – множество ПЛФ  $(p, q)$

**Утверждение 1.**  $\Omega_p^q$  – ЛП

$\square \{e_j\}$  – базис  $X \quad \square \{f^k\}$  – базис  $X^*$

$x_1 = \sum_{j_1=1}^n \xi_1^{j_1} e_{j_1} = \xi_1^{j_1} e_{j_1}$ . Далее значок суммы писаться не будет (иначе помрём) (соглашение о немом суммировании).

$$x_2 = \xi_2^{j_2} e_{j_2} \quad \dots \quad x_p = \xi_p^{j_p} e_{j_p}$$

4 ГЛАВА 1. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

---


$$\begin{aligned}
y^1 &= \eta_{k_1}^1 f^{k_1} & y^2 &= \eta_{k_2}^2 f^{k_2} & \dots & & y^1 &= \eta_{k_q}^q f^{k_q} \\
w(x_1, x_2, \dots, x_p, y^1, y^2, \dots, y^q) &= w\left(\xi_1^{j_1} e_{j_1}, \xi_2^{j_2} e_{j_2}, \dots, \xi_p^{j_p} e_{j_p}, \eta_{k_1}^1 f^{k_1}, \eta_{k_2}^2 f^{k_2}, \dots, \eta_{k_q}^q f^{k_q}\right) \\
&= \xi_1^{k_1} \xi_2^{j_2} \dots \xi_p^{j_p} \eta_{k_1}^1 \eta_{k_2}^2 \dots \eta_{k_q}^q \underbrace{w(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_p}, f^{k_1}, f^{k_2}, \dots, f^{k_q})}_{\omega_{j_1 j_2 \dots j_p}^{k_1 k_2 \dots k_q} - \text{тензор ПЛФ}} \\
&= \xi_1^{k_1} \xi_2^{j_2} \dots \xi_p^{j_p} \eta_{k_1}^1 \eta_{k_2}^2 \dots \eta_{k_q}^q \omega_{j_1 j_2 \dots j_p}^{k_1 k_2 \dots k_q}.
\end{aligned}$$

**Лемма 3.** Задание полилинейной формы эквивалентно заданию её тензора в известном базисе

$$w \longleftrightarrow \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = \omega_i^{\vec{j}}.$$

*Доказательство.* (выше) ■

**Лемма 4.**  $v \longleftrightarrow v_i^{\vec{j}} \quad w \longleftrightarrow \omega_i^{\vec{j}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} w + v \longleftrightarrow v_i^{\vec{j}} + \omega_i^{\vec{j}} \\ \alpha v \longleftrightarrow \alpha v_i^{\vec{j}} \end{cases}$$

**Замечание.**  $\omega_{t_1 t_2 \dots t_q}^{s_1 s_2 \dots s_p} w$  – индексация базиса  $\Omega_p^q$

$$\omega_{t_1 t_2 \dots t_q}^{s_1 s_2 \dots s_p} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$$

$$\omega_{t_1 t_2 \dots t_q}^{s_1 s_2 \dots s_p} w(x_1, x_2, \dots, x_p, y^1, y^2, \dots, y^q) = \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} \dots \xi_p^{s_p} \eta_{t_1}^1 \eta_{t_2}^2 \dots \eta_{t_q}^q$$

**Замечание.**  $\omega_{t_1 t_2 \dots t_q}^{s_1 s_2 \dots s_p} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = \omega_{t_1 t_2 \dots t_q}^{s_1 s_2 \dots s_p} w(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}, f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q})$   
 $= \delta_{i_1}^{s_1} \delta_{i_2}^{s_2} \dots \delta_{i_p}^{s_p} \delta_{t_1}^{j_1} \delta_{t_2}^{j_2} \dots \delta_{t_q}^{j_q}$

**Пример.**  $\mathbb{R}_2^2$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad a_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = {}^{11} a_1 \quad a_2 = {}^{12} a_2 \quad a_3 = {}^{21} a_3 \quad a_4 = {}^{22} a_4$$

**Теорема 1.** Набор  $\left\{ \omega_{t_1 t_2 \dots t_q}^{s_1 s_2 \dots s_p} W \right\}_{s_1 s_2 \dots s_p}^{t_1 t_2 \dots t_p}$  – образует базис в  $\Omega_q^p$

*Доказательство.*

ПН  $\triangleleft u \in \Omega_q^p$

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_p, y^1, y^2, \dots, y^q) &= \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_p^{i_p} \eta_{j_1}^1 \eta_{j_2}^2 \dots \eta_{j_q}^q u_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = \\ &=_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} w(x_1, x_2, \dots, x_p, y^1, y^2, \dots, y^q) u_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_p, y^1, y^2, \dots, y^q. \end{aligned}$$

$$\implies u =_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} w \cdot u_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$$

ЛНЗ  $_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} W \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = \Theta$  Посчитаем на наборе  $e_{s_1}, e_{s_2}, \dots, e_{s_p}, f^{t_1}, f^{t_2}, \dots, f^{t_q}$

$$\delta_{s_1}^{i_1} \delta_{s_2}^{i_2} \dots \delta_{j_1}^{t_1} \delta_{j_2}^{t_2} \dots \delta_{j_q}^{t_q} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = 0$$

$$\alpha_{s_1 s_2 \dots s_p}^{t_1 t_2 \dots t_q} = 0 \quad \forall s_1 \dots s_p t_1 \dots t_q \implies \text{ЛНЗ (альфа 0 на всех, значит она все нули)}$$

■

**Замечание.** Размерность пространства полилинейных форм  $\dim \Omega_q^p = n^{p+q}$

## 1.2 Симметричные и антисимметричные ПЛФ

$$\triangleleft \Omega_0^p \quad u(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

$\triangleleft \sigma$  – перестановка чисел от 1 до  $p$ .  $\sigma(1, 2, \dots, p) = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(p))$

**Определение 3.** Полилинейная форма  $u$  называется симметричной, если

$$u(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = u(x_1, x_2, \dots, x_p).$$

**Лемма 5.** Симметричные полилинейные формы валентности  $(p, 0)$  образуют подпространство  $\Sigma^p$  линейного пространства  $\Omega_0^p$

*Доказательство.*  $\square u, v \in \Sigma^p$

$$\begin{aligned} \triangleleft (u+v)(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}) &= u(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}) + v(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \\ &= u(x_1, x_2, \dots, x_p) + v(x_1, x_2, \dots, x_p) = (u+v)(x_1, x_2, \dots, x_p) \end{aligned}$$

Так же с умножением на число. ■

**Определение 4.** Полилинейная форма  $u$  валентности  $(p, 0)$  называется антисимметричной, если:

$$u(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = (-1)^{[\sigma]} u(x_1, x_2, \dots, x_p).$$

---

**Лемма 6.** Антисимметричные полилинейные формы валентности  $(p, 0)$  образуют подпространство  $\Lambda^p$  линейного пространства  $\Omega_0^p$

**Лемма 7.** Полилинейная форма  $u \in \Lambda^p \iff u = 0$  при любых двух совпадающих аргументах.

*Доказательство.*

$$\implies \square u \in \Lambda^p \text{ и } x_i = x_j \quad i \neq j$$

$$a = \angle u(\dots x_i \dots x_j \dots) = -u(\dots x_j \dots x_i \dots) = -a \implies a = 0$$

$$\iff \text{Известно, что если } x_i = x_{j \neq i}, \text{ то } u(\dots x_i \dots x_j \dots) = 0 \quad \forall i, j$$

Докажем, что  $u$  принадлежит  $\Lambda^p$

$$x_i = x_j = x'_i + x''_i$$

$$u(\dots x_i \dots x_j \dots) = u(\dots x'_i + x''_i \dots x'_i + x''_i \dots) = u(\dots x'_i \dots x'_i) + u(x'_i \dots x''_i) + u(\dots x''_i \dots x'_i) + u(\dots x''_i \dots x''_i)$$

Правая часть равна 0. В левой части первое и последнее слагаемые тоже нули, а значит получаем

$$u(\dots x'_i \dots x''_i) = -u(\dots x''_i \dots x'_i).$$

■

**Лемма 8.** Полилинейная форма  $u \in \Lambda^p \iff u(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$  лишь только  $\{x_i\}_{i=1}^p - \text{ЛЗ}$

*Доказательство.*

$$\implies \square \{x_i\}_{i=1}^p - \text{ЛЗ} \implies x_k = \sum_{j \neq k} \beta^j x_j = \beta^1 x_1 + \beta^2 x_2 + \dots + \beta^p x_p$$

$$\angle u(x_1, \dots, x_k, \dots, x_p) = u(x_1, \dots, \beta^1 x_1 + \beta^2 x_2 + \dots + \beta^p x_p, \dots, x_p) = 0$$

При раскрытии будут выносятся коэффициенты и получится образ от совпадающих аргументов (хотя бы двух), который 0 по пред. лемме, а значит всё выражение, как сумма нулей, будет нулём.

$$\iff u(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0, \text{ когда } \{x_i\}_{i=1}^n - \text{ЛЗ} \implies u \in \Lambda^p$$

ГЛАВА 1. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ 7

---


$$\begin{aligned}
 u(x_1, x_2, \dots, x_p) &= u(x_1 + \sum \alpha^i x_i, \dots, x_p + \sum \alpha^i x_i) = u(x_1, x_2, \dots, x_p) + \\
 &u(x_1, \dots, \sum \alpha^i x_i) + u(\sum \alpha^i x_i, \dots, x_p) = u(x_1, x_2, \dots, x_p) + \sum_{j=2}^p \alpha^j u(x_1, \dots, x_j) + \\
 &\sum_{i=1}^{p-1} \alpha^i u(x_i, \dots, x_p)
 \end{aligned}$$

■

## 1.3 Практика 02.12

### 1.3.1 Тензоры

$$\omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$$



**Определение 5** (Соглашение об упорядочивании индексов). Слева направо сверху вниз:  $(p, q)$  –  $r = p + q$  – ранг тензора, сколько значков.

$r = 0$  – число  $\omega$ , инвариант

$$r = 1: a_i - \text{строчка} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \quad b^j - \text{столбик} \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix}$$

$r = 2: a_{ij} \quad b_j^i \quad c^{ij}$  – первый индекс всегда строка, второй всегда столбец

$$a_{ij} \longleftrightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$b_j^i \longleftrightarrow B = \begin{bmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 \end{bmatrix}$$

$r = 3: a_{ijk} \quad b_{jk}^i \quad c_k^{ij} \quad d^{ijk}$

1й – строка, 2й – столбец, 3й – слой

$$a_{ijk} \longleftrightarrow A = \left[ \begin{array}{cc|cc} a_{111} & a_{121} & a_{112} & a_{122} \\ a_{211} & a_{221} & a_{212} & a_{222} \end{array} \right]$$

**Пример.** Построить тензор  $\varepsilon_k^{ij} = \begin{cases} -1 & (i, j, k) - \text{чётная} \\ 1 & (i, j, k) - \text{нечётная} \\ 0 & (i, j, k) - \text{не перестановка} \end{cases}$

$r = 4$  : строка, столбец, слой, сечение

$a_{ijkl} \quad b_{jkl}^i \quad c_{kl}^{ij} \quad d_l^{ijk} \quad e^{ijkl}$  – последний тензор типа 4,0 (число вверху, число внизу)

$$c_{kl}^{ij} \longleftrightarrow C = \left[ \begin{array}{cc|cc} c_{11}^{11} & c_{11}^{12} & c_{12}^{11} & c_{12}^{12} \\ c_{11}^{21} & c_{11}^{22} & c_{12}^{21} & c_{12}^{22} \\ \hline c_{21}^{11} & c_{21}^{12} & c_{22}^{11} & c_{22}^{12} \\ c_{21}^{21} & c_{21}^{22} & c_{22}^{21} & c_{22}^{22} \end{array} \right]$$

**Пример.**  $c_{kl}^{ij} = \begin{cases} 1 & i = k \neq j = l \\ -1 & i = l \neq j = k \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

### 1.3.2 Операции с тензорами

1. Линейные операции:

$$\omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} \quad v_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$$

$$u = v + \omega \quad u_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = (v + \omega)_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = v_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} + \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} - \text{матричное сложение.}$$

$$(\lambda v)_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = \lambda \cdot v_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$$

2. Произведение:

$$u_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} \quad v_{s_1 s_2 \dots s_{p_2}}^{t_1 t_2 \dots t_{q_2}}$$

$$\omega = u \cdot v \quad \omega_{i_1 i_2 \dots i_{p_1} s_1 s_2 \dots s_{p_2}}^{j_1 j_2 \dots j_{q_1} t_1 t_2 \dots t_{q_2}} = u_{i_1 i_2 \dots i_{p_1}}^{j_1 j_2 \dots j_{q_1}} \cdot v_{s_1 s_2 \dots s_{p_2}}^{t_1 t_2 \dots t_{q_2}}$$

$$\vec{l} = \vec{j} \vec{t} = j_1 \dots j_{q_1} t_1 \dots t_{q_2}$$

$$\vec{l} = \vec{i} \vec{s} = i_1 \dots i_{p_1}, s_1 \dots s_{p_2}$$

**Пример.**  $a_j^i \longleftrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$b_k \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$a_j^i b_k = \omega_{jk}^i. \text{ То же самое можно записать как } a \otimes b = \omega$$

$$\omega \longleftrightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -3 & -4 \end{array} \right]$$

$$v = b \otimes a \quad v_{kj}^i = b_k \cdot a_j^i \longleftrightarrow V = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 4 & -4 \end{array} \right]$$

**Лемма 9.**  $\square \{x_i\}_{i=1}^p - \text{ДЗ}$

$$\text{Доказательство. } u(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$$

$$u(\alpha x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$$

$$u\left(\sum_{i=1}^{p-1} \alpha^i x_i, x_2, \dots, x_p\right) = 0 - \text{равные } x_p \text{ и первый аргумент} \quad \blacksquare$$

$\Omega_0^p$  – хотим делать из произвольной формы симметричную

$$\square u \in \Omega_0^p$$

---

**Определение 6.**  $u^{(s)}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} u(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)})$  – симметричная форма, образованная из  $u$   
 $u^{(s)}$  называю симметризацией  $u$  и пишут  

$$u^{(s)} = Sym\ u.$$

**Замечание.**  $u^{(s)} \in \Sigma^p$

*Доказательство.*  $\square \tilde{\sigma}$  – другая перестановка

$$u^{(s)}(x_{\tilde{\sigma}(1)}, \dots, x_{\tilde{\sigma}(pa)}) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (x_{\sigma \circ \tilde{\sigma}(1)}, \dots, x_{\sigma \circ \tilde{\sigma}(p)}) = u^{(s)}(x_1, x_2, \dots, x_p) \quad \blacksquare$$

**Замечание.** Деление на  $p!$  нужно, чтобы выполнялось

$$Sym\ u = u.$$

, если  $u$  уже симметричная форма

**Замечание.**  $Sym(\alpha u + \beta v) = \alpha Sym\ u + \beta Sym\ v$

**Определение 7.**

$$u^{(a)} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} u(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}).$$

Эта операция называется антисимметризацией или альтернированием

$$u^{(a)} = Asym\ u.$$

**Замечание.**  $u^{(a)} \in \Lambda^p$

**Замечание.**

$$(\alpha u + \beta v)^{(a)} = \alpha u^{(a)} + \beta v^{(a)}.$$

**Замечание.**  $Sym\ Sym = Sym$

$$Asym\ Asym = Asym$$

$$Sym\ Asym = 0 \quad Asym\ Sym = 0$$

**Задача 1.**  $\Omega_0^p$

Найдём базис  $\Lambda^p$

---

*Доказательство.*  $\triangleleft \{^{s_1, s_2, \dots, s_p} W\}_{\vec{s}}$  – базис

$$\triangleleft^{s_1, s_2, \dots, s_p} F = p! \cdot Asym(^{s_1, s_2, \dots, s_p} W)$$

**Лемма 10.** Некоторые формы будут повторяться.

$$s_1 \dots s_i \dots s_j \dots s_p F = -s_1 \dots s_j \dots s_i \dots s_p F$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} s_1 \dots s_i \dots s_j \dots s_p F(x_1 \dots x_i \dots x_j \dots x_p) &= s_1 \dots s_j \dots s_i \dots s_p F(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots x_p) \\ &= -s_1 \dots s_j \dots s_p F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots x_p) \\ &= -s_1 \dots s_j \dots s_i \dots s_p F(x_1 \dots x_i \dots x_j \dots x_p) \end{aligned}$$

■

**Замечание.** Ненулевых  $C_n^p$  штук

Упорядочивание  $\{^{s_1 s_2 \dots s_p} F\}_{1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_p \leq n}$  – ненулевой набор. Докажем, что он базис

■

**Теорема 2.** Набор  $\{^{s_1 s_2 \dots s_p} F\}_{1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_p \leq n}$  образует базис в  $\Lambda^p$

*Доказательство.*

Полнота  $\square u \in \Lambda^p$

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_p) &= \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_p^{i_p} u_{i_1 i_2 \dots i_p} \\ &= {}^{i_1 i_2 \dots i_p} W(x_1, x_2, \dots, x_p) u(i_1 i_2 \dots i_p) \end{aligned}$$

$$\text{То же самое: } u = {}^{i_1 i_2 \dots i_p} W \cdot u_{i_1 i_2 \dots i_p}$$

.

---


$$\begin{aligned}
Asym u &= Asym (i_1 i_2 \dots i_p W \cdot u_{i_1 i_2 \dots i_p}) \\
u &= Asym (i_1 i_2 \dots i_p W) \cdot u_{i_1 i_2 \dots i_p} \\
&= \frac{1}{p!} i_1 i_2 \dots i_p F \cdot u_{i_1 i_2 \dots i_p} \\
&= \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \sum_{\sigma} \sigma(i_1) \sigma(i_2) \dots \sigma(i_p) F \cdot u_{\sigma(i_1) \sigma(i_2) \dots \sigma(i_p)} \\
&= \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma] i_1 i_2 \dots i_p} F \cdot (-1)^{[\sigma]} u_{i_1 i_2 \dots i_p} \\
&= \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < n} p! i_1 i_2 \dots i_p F u_{i_1 i_2 \dots i_p}
\end{aligned}$$

**Лемма 11.**  $u \in \Lambda^p \implies \forall \sigma u_{\sigma(i_1) \sigma(i_2) \dots \sigma(i_p)} = (-1)^{[\sigma]} u_{i_1 i_2 \dots i_p}$

Тензоры это значение  $u$  на  $e_{i_1} \dots e_{i_p}$ . А тогда оно выполняется просто по определению антисимметричной формы

Линейная независимость  $\langle \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} i_1 i_2 \dots i_p F \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0$ . Подействуем на  $e_{s_1} e_{s_2} \dots e_{s_p}$

$$i_1 i_2 \dots i_p F (e_{s_1}, e_{s_2}, \dots, e_{s_p}) \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0$$

$$p! [Asym i_1 i_2 \dots i_p] (e_{s_1} e_{s_2} \dots e_{s_p}) \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0$$

$$p! \cdot \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma] i_1 i_2 \dots i_p} W (e_{\sigma(s_1)}, e_{\sigma(s_2)}, \dots, e_{\sigma(s_p)}) \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0$$

$$\sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \delta_{\sigma(s_1)}^{i_1} \delta_{\sigma(s_2)}^{i_2} \dots \delta_{\sigma(s_p)}^{i_p} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0$$

$$\sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \alpha_{\sigma(s_1) \sigma(s_2) \dots \sigma(s_p)} = 0$$

$$p! \alpha_{s_1 s_2 \dots s_p} = 0 \forall s_1 s_2 \dots s_p \implies \alpha = 0, \text{ если } \alpha \text{ антисимметричный тензор}$$

■

**Замечание.**  $\dim \Lambda^p = C_n^p$

$$1. p = 0 \implies C_n^0 = 1 \implies K$$

$$2. p = 1 \implies C_n^1 = n \implies X^*$$

$$3. p = 2 \implies C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

---


$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

$$\text{n } p = n - 1 \implies C_n^{n-1} = C_n^1 = n$$

$$\text{n+1 } C_n^n = 1$$

$$\triangleleft \Lambda^n$$

$$\{^{i_1 i_2 \dots i_n} F\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} = \{^{123 \dots n} F\}$$

$$\sqsupset u \in \Lambda^n \implies \exists \alpha \quad u = \alpha^{123 \dots n} F$$

$$\begin{aligned} \triangleleft^{123 \dots n} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= p! \cdot [Asym^{123 \dots n} W](x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]^{123 \dots n}} W(x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}) = \\ &= (-1)^{[\sigma]} \xi_{\sigma(1)}^1 \xi_{\sigma(2)}^2 \dots \xi_{\sigma(n)}^n \triangleq \\ &= \det\{x_i\} \end{aligned}$$

**Лемма 12.**  $\forall u \in \Lambda^n \quad u = \alpha(^{123 \dots n} F)$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_n^{i_n} u_{i_1 i_2 \dots i_n} \\ &=^{i_1, i_2, \dots, i_n} W(x_1, x_2, \dots, x_n) u_{i_1 i_2 \dots, i_n} \\ &=^{123 \dots n} F(x_1, x_2, \dots, x_n) \underbrace{u_{12 \dots n}}_{\alpha} \end{aligned}$$

■

## 1.4 Произведение полилинейных форм

$$\sqsupset \Omega_p^q$$

**Определение 8.**  $u \in \Omega_{q_1}^{p_1}, v \in \Omega_{q_2}^{p_2}$

$$\begin{aligned} \triangleleft \omega(x_1, x_2, \dots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+p_2}, y^1, \dots, y^{q_1}, y^{q_1+1}, \dots, y^{q_1+q_2}) = \\ = u(x_1, x_2, \dots, x_{p_1}, y^1, y^2, \dots, y^{q_1}) \cdot v(x_{p_1+1}, x_{p_1+2}, \dots, x_{p_1+p_2}, y^{q_1+1}, \dots, y^{q_1+q_2}) \end{aligned}$$

Такая форма называется консолидированной формой  $u$  и  $v$

$$u_{j_1 i_2 \dots i_{p_1}}^{i_1} \cdot v_{t_1 t_2 \dots t_{q_2}}^{s_1 s_2 \dots s_{p_2}} = \omega_{j_1 \dots j_{q_1} t_1, \dots, t_{q_2}}^{i_1 \dots i_p, s_1, \dots, s_{p_2}}$$

---

**Замечание.**  $\omega$  – ПЛФ  $(p_1 + p_2, q^1 + q^2)$

$$\omega = u \cdot v \subseteq \Omega_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}$$

$\triangleleft \Omega = \dot{+} \sum_{i,j} \Omega_{q_j}^{p_i}$  – линейное пространство

$(\Omega, +, \cdot, \lambda, \cdot)$  Новое умножение называется внешним

**Свойство 1.** 1.  $u \cdot (v \cdot w) = (u * v) \cdot w$

2.  $u \cdot v \neq v \cdot u$

3.  $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$

4.  $\mathbb{O} \quad u \cdot \mathbb{O} = \mathbb{O}$  – получившийся нооль из бОльшого пространства

5.  $u(\alpha v) = (\alpha u) \cdot v$

**Определение 9.**  $\Omega$  – внешняя алгебра полилинейных форм

## 1.5 Практика №2

### 1.5.1 Свёртки

**Пример.**  $\omega_i^j \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$

$$w_i^j = \sum_i = \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3$$

**Пример.**  $w_k^{ij} \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 8 & 9 \\ 5 & -1 & 10 & 3 \end{array} \right)$

$$w_i^{ij} = \alpha^j \quad \alpha^0 = 1 + 10 = 11 \quad \alpha^1 = 2 + (-3) = -1$$

$$\omega_i^{ij} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**Пример.**  $\omega_{kl}^{ij} \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & -3 & 11 \\ -3 & 4 & 13 & 17 \\ 6 & 5 & 19 & 23 \end{array} \right)$

$$\omega_{ki}^{ij} = \alpha_k^j \sim \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 16 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\omega_{ji}^{ij} = \sum_j \sum_i \omega_{ji}^{ij} = \sum_k \alpha_k^k = \alpha_0^0 + \alpha_1^1 = 27$$

---

**Замечание.** Сложную свёртку можно считать как последовательность единичных

### 1.5.2 Транспонирование

$$\omega_{jk}^i = \left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 6 \\ -3 & -2 & -1 & 9 & 8 & 7 & -7 & 11 & -13 \\ 2 & 19 & 17 & 14 & 12 & 9 & 21 & 17 & -1 \end{array} \right)$$

$$\psi_{jk}^i = \omega_{kl}^i$$

$$\psi_{jk}^i \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 7 & 4 & 2 & 8 & 5 & 3 & 9 & 6 \\ -3 & 9 & -7 & -2 & 8 & 11 & -1 & 7 & -13 \\ 2 & 14 & 21 & 19 & 12 & 17 & 17 & 9 & -1 \end{array} \right)$$

$$\omega_{kl}^{ij} \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 14 & 1 & 1 & 3 \\ -8 & 2 & -7 & -1 \\ 18 & 16 & 9 & 11 \\ -14 & -3 & 17 & 19 \end{array} \right)$$

$$\omega_{kl}^{ij} \sim \left( \begin{array}{cc|c} 14 & & 18 \\ & & \\ 1 & 3 & 9 \\ & & 17 \end{array} \right)$$

### 1.5.3 Свёртка и тензорное произведение

$$a^{ij} \sim \begin{pmatrix} 8 & 9 & 1 \\ 7 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_l^k \sim \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 8 & 4 & 5 \\ 11 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a \otimes b = \omega_l^{ijk} \implies \omega_j^{ijk} = \beta^{ik}$$

$$\beta^{ik} = a^{ij} b_l^k = \begin{pmatrix} 44 & \\ & 56 \end{pmatrix}$$

$$\beta^{00} = a^{00} b_0^0 + a^{01} b_1^0 + a^{02} b_2^0 =$$

$$a_k^{ij} \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & -1 & -7 \\ 2 & 2 & 8 & 11 \end{array} \right)$$

$$b_{m,n} \sim \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$a \otimes b = \omega_{kmn}^{ij} \implies \omega_{kji}^{ij} = \beta_k \sim \begin{pmatrix} 9 \\ -94 \end{pmatrix}$$



---


$$\omega \in \Omega_0^2 \quad \omega(x, y) \in \mathbb{R} \quad x, y \in X$$

$$\omega \sim a_{ij} \quad x \sim \xi^k \quad y \sim \eta^l$$

$$\omega(x, y) = a_{ij} \xi^i \eta^j = (a \otimes x \otimes y)_{ij}^{ij}$$

#### 1.5.4 Симметризация и асимметризация тензоров

$$\omega_{ij} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -1 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{sym}(\omega_{i_1, \dots, i_p}) = a_{j_1 \dots j_p} = \sum_{\sigma} \omega_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(p)}}$$

$$a_{ij} = w_{(ij)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 8 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \frac{1}{2!}(\omega_{ij} + \omega_{ji})$$

$$\omega_{ijk} \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & -7 & 8 & 1 & 9 & 3 & 13 \\ 3 & -4 & 5 & 11 & -7 & 13 & 1 & 4 & 2 \\ 8 & 9 & 7 & 5 & 6 & 11 & -7 & 8 & -1 \end{array} \right)$$

$$a_{ijk} = \frac{1}{6}(\dots)$$

$$a_{ijk} \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{20}{3} & -\frac{2}{3} & 5 & 4 & \frac{20}{3} & 4 & \frac{13}{3} \\ -\frac{2}{3} & 5 & 4 & 5 & -7 & \frac{23}{3} & 4 & \frac{23}{3} & 7 \\ \frac{20}{3} & 4 & \frac{13}{3} & 4 & \frac{23}{3} & 7 & \frac{13}{3} & 7 & -1 \end{array} \right)$$

#### 1.6 Свойства произведения полилинейных форм

$$1. \quad u \cdot v \cdot w = u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w$$

$$2. \quad u \cdot v \neq v \cdot u$$

$$\text{Пример (Контрпример)}. \quad \sqsupset u = f^1 \quad v = f^2 \quad u, v \in \Omega_0^1$$

$$(u \cdot v)(x_1, x_2) = (f^1 f^2)(x_1, x_2) = f^1(x_1) \cdot f^2(x_2) \neq f^2(x_1) \cdot f^1(x_2) = (f^2 f^1)(x_1, x_2) = (v \cdot u)(x_1, x_2)$$

$$3. \quad \forall p, q \exists \in \Omega_q^p \forall u \in \Omega_{q_1}^{p_1} \quad u \cdot \mathbb{0} = \mathbb{0} \cdot u = \mathbb{0} \in \Omega_{q_1+q}^{p_1+p}$$

$$4. \quad u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$

$$5. \quad u(\alpha v) = (\alpha u)v = \alpha(uv)$$

$$6. \quad \exists \{f^k\}_{k=1}^n - \text{базис } X^*$$

$$\sqsupset \{f^{s_1 s_2 \dots s_p} W\} - \text{базис } \Omega_0^p$$

$$f^{s_1 s_2 \dots s_p} W = f^{s_1} f^{s_2} \dots f^{s_p}$$

---

*Доказательство.*  $\square x_1, x_2, \dots, x_p \in X$

$$\begin{aligned} s_1 s_2 \dots s_p W(x_1, x_2, \dots, x_p) &= \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} \dots \xi_p^{s_p} \\ &= f^{s_1}(x_1) \cdot f^{s_2}(x_2) \dots f^{s_p}(x_p) \\ &= f^{s_1} f^{s_2} \dots f^{s_p}(x_1, x_2, \dots, x_p) \end{aligned}$$

■

**Замечание.**  $\left\{ \frac{s_1 s_2 \dots s_p}{t_1 t_2 \dots t_q} W \right\}$  – базис  $\Omega_q^p$

$$\frac{s_1 s_2 \dots s_p}{t_1 t_2 \dots t_q} W = f^{s_1} f^{s_2} \dots f^{s_p} \hat{e}_{t_1} \hat{e}_{t_2} \dots \hat{e}_{t_q}$$

$$\hat{e}_y(y^k) = y^k(e_t)$$

$$7. \operatorname{Sym}(u \cdot v) = \operatorname{Sym}(\operatorname{Sym} u \cdot v) = \operatorname{Sym}(u \cdot \operatorname{Sym} v) \operatorname{Asym}(u \cdot v) = \operatorname{Asym}(\operatorname{Sym} u \cdot v) = \operatorname{Asym}(u \cdot \operatorname{Asym} v)$$

**Утверждение 2.**  $\operatorname{Asym}(u \cdot v) = \operatorname{Asym}(\operatorname{Asym} u \cdot v)$

*Доказательство.*

$$\operatorname{Asym}(\operatorname{Asym} u \cdot v)$$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{Asym} \left\{ \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} u(x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(p)}) \cdot v(x_{p+1} \dots x_{p+q}) \right\} \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \operatorname{Asym} \left[ \underbrace{u(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p)}) \cdot v(x_{p+1} \dots x_{p+q})}_{w(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p)} x_{p+1} \dots x_{p+q})} \right] \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} (-1)^{[\sigma]} \operatorname{Asym} w(x_1, x_2, \dots, x_{p+q}) \\ &= \frac{1}{p!} p! \operatorname{Asym} w(x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) \\ &= \operatorname{Asym}(u \cdot v)(x_1 \dots x_{p+q}) \end{aligned}$$

■

## 1.7 Внешнее произведение ассиметричных полилинейных форм

$$\square u \in \Lambda^{p_1} \quad v \in \Lambda^{p_2}$$

---


$$\triangleleft u \cdot \notin \Lambda^{p_1+p_2}$$

$$\triangleleft u \wedge v = \frac{(p_1+p_2)!}{p_1!p_2!} \text{Asym}(u \cdot v)$$

$$\begin{aligned} \text{Asym}(u \wedge v) &= \text{Asym} \left( \frac{(p_1+p_2)!}{p_1!p_2!} \text{Asym}(u \cdot v) \right) \\ &= \frac{(p_1+p_2)!}{p_1!p_2!} \cdot \frac{1}{(p_1+p_2)!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} u(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p_1)}) v(x_{\sigma(p_1+1)} \dots x_{\sigma(p_1+p_2)}) \\ &= \sum_{\sigma'} (-1)^{[\sigma]} u(x_{\sigma'(1)} \dots x_{\sigma'_{p_1}}) \cdot v(x_{\sigma(p_1+1)} \dots x_{\sigma'(p_1+p_2)}) \end{aligned}$$

$$\sigma'(j) > p_1 \quad j \leq p_1$$

$$\sigma'(j) \quad j > p_1$$

Свойства операции  $u \wedge v$ :

1.  $u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$
2.  $(\alpha u) \wedge v = u \wedge (\alpha v) = \alpha(u \wedge v)$
3.  $u \wedge v \wedge w = u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w$

**Замечание.**

$$\begin{aligned} (u \wedge v) \wedge w &= \frac{(p_1+p_2)!}{p_1!p_2!} \text{Asym}(u \cdot v) \wedge w \\ &= \frac{\cancel{(p_1+p_2)!}}{p_1!p_2!} \frac{(p_1+p_2+p_3)!}{\cancel{(p_1+p_2)!}p_3!} \text{Asym}(\text{Asym}(u \cdot v)w) \\ &= \frac{(p_1+p_2+p_3)!}{p_1!p_2!p_3!} \text{Asym}(u \cdot v \cdot w) \\ &= u \wedge v \wedge w \end{aligned}$$

$$4. \quad u \wedge v \stackrel{?}{=} v \wedge u$$

**Замечание.**  $u \wedge v = (-1)^{p_1 p_2} v \wedge u$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
& \triangleleft [u \wedge v] (x_1, x_2, \dots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+p_2}) = \\
& = \frac{(p_1 + p_2)!}{p_1! p_2!} \frac{1}{(p_1 + p_2)!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} u(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p_1)}) v(x_{\sigma(p_1+1)} \dots x_{\sigma(p_1+p_2)}) = \\
& = \frac{(p_1 + p_2)!}{p_1! p_2!} \frac{(-1)^{p_1 p_2}}{(p_1 + p_2)!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} v(x_{\sigma(p_1)} \dots x_{\sigma(p_1+p_2)}) \cdot u(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p_1)}) = \\
& = (-1)^{p_1 p_2} (v \wedge u)(x_1, \dots, x_{p_1+p_2})
\end{aligned}$$

■

**Замечание.**  $\square f, g \in \Lambda^1 \quad f \wedge g = -g \wedge f$

$$5. \exists \mathbf{0} \in \Lambda^p \quad u \wedge u \in \Lambda^p = u \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0} \in \Lambda^{p+q}$$

$$6. u \in \Lambda^p \quad v \in \Lambda^q$$

$$\square p + q > n = \dim X \implies u \wedge v = \mathbf{0}$$

$$7. \{f^k\}_{k=1}^n - \text{базис } X^*$$

$$\square \{f^{s_1 s_2 \dots s_p} F\} - \text{базис } \Lambda^p$$

$$\implies f^{s_1 s_2 \dots s_p} = f^{s_1} \wedge f^{s_2} \wedge \dots \wedge f^{s_p}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
f^{s_1 s_2 \dots s_p} F &= p! \text{Asym}(f^{s_1 s_2 \dots s_p} W) \\
&= p! \text{Asym}(f^{s_1} f^{s_2} \dots f^{s_p}) \\
&= p! \text{Asym}(\text{Asym}(f^{s_1} f^{s_2}) \dots f^{s_p}) \\
&= p! \text{Asym} \frac{1}{2!} (f^{s_1} \wedge f^{s_2} \dots f^{s_p}) \\
&= p! \text{Asym} \frac{1}{2!} (\text{Asym}(f^{s_1} \wedge f^{s_2} \dots f^{s_3}) \dots f^{s_p}) \\
&= p! \text{Asym} \frac{1}{3!} (f^{s_1} \wedge f^{s_2} \dots f^{s_3} \dots f^{s_p}) \\
&= \dots \\
&= f^{s_1} \wedge f^{s_2} \dots f^{s_p}
\end{aligned}$$

■

$$8. \triangleleft \Lambda^n \quad \dim \Lambda^n = 1$$

$f^{123 \dots n}$  – единственный базисный элемент

$$\implies f^{123 \dots n} = f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n$$

$$\begin{aligned} \triangleleft^{12\dots n} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= n! \operatorname{Asym} [^{12\dots n} W] (x_1, x_2, \dots, x_n) = n! \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} ^{12\dots n} W (x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}) = \\ \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \xi_{\sigma(1)}^1 \xi_{\sigma(2)}^2 \dots \xi_{\sigma(n)}^n &\triangleq \det \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} f^1 (x_{\sigma(1)}) f^2 (x_{\sigma(2)}) f^n (x_{\sigma(n)}) = \\ (f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n) (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

## 1.8 Основы теории определителей

$\square X$  – ЛП  $\dim X = n$

$\{e_j\}_{j=1}^n$  – базис  $X$      $\{f^k\}_{k=1}^n$  – базис  $X^*$

$\{x_i\}_{i=1}^n$  – набор векторов из  $X$

**Определение 10.**

$$\begin{aligned} \det \{x_1, x_2, \dots, x_n\} &= ^{12\dots n} F (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n) (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \left\langle x_k = \sum_{j=1}^n \xi_k^j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \xi_{\sigma(1)}^1 \xi_{\sigma(2)}^2 \dots \xi_{\sigma(k)}^k \end{aligned}$$

**Определение 11.**  $k$ -мерным параллелепипедом в  $X$ , построенном на векторах  $\{x_i\}_{i=1}^k$  называется следующее множество:

$$T = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha^i x_i, \quad \alpha^i \in [0, 1] \right\}.$$

**Определение 12.** Формой объёма в ЛП  $X$  называется отображение  $\omega^i(n)$  удовлетворяющее следующим свойствам:

1.  $\omega^{(n)}(T_n)$  – число  $= \omega^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$
2.  $\omega^{(n)}$  – полилинейное отображение
3.  $\omega^{(n)}$  – ассиметричное отображение

**Лемма 13.**  $\omega^{(n)} \in \Lambda^n \iff \omega^{(n)} = \alpha \cdot ^{12\dots n} F$

## 1.9 Практика

$$\text{Задача 2. } a_{ijk} \longrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

Доказательство.  $\triangleleft a_{i(jk)}$

$$i = 1 \quad a_{1jk} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{S} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 3 & 5 & 7 & 5 & 7 & 9 \\ 9 & 7 & 5 & 7 & 5 & 3 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{array} \right] \quad \blacksquare$$

## 1.10 Определитель, продолжение

Пример.  $i_1 i_2 \dots i_p = f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \dots \wedge f^{i_p}$

Свойства:

$$\{e_j\}_{j=1}^k - \text{базис } X \implies x_i = \sum_{j=1}^n \xi_i^j e_j$$

$$\triangleleft M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \begin{bmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \dots & \xi_n^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \dots & \xi_n^n \end{bmatrix}$$

$$\square \det \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \det M$$

$$1. \det M^T = \det M$$

$$\text{Доказательство. } \det M = \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \xi_2^{\sigma(2)} \dots \xi_n^{\sigma(n)}$$

$$\triangleleft \det M^T = \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \xi_{\sigma(1)}^1 \xi_{\sigma(2)}^2 \dots \xi_{\sigma(n)}^n = \sum_{\sigma^{-1}} (-1)^{[\sigma^{-1}]} \xi_1^{\sigma^{-1}(1)} \dots \xi_n^{\sigma^{-1}(n)} = \det M \quad \blacksquare$$

$$\text{Лемма 14. } \sigma \in S_n \implies [\sigma] = [\sigma^{-1}]$$

Доказательство.  $\sigma \circ \sigma^{-1} = e$  – чётная перестановка.

Чётность при композиции складывается, значит у  $\sigma$  и  $\sigma^{-1}$  равная чётность (если разная, то  $e$  – нечётная ???)  $\blacksquare$

$$2. \det \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n\} = -\det \{x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n\}$$

*Доказательство.* Основное свойство антисимметричной формы ■

$$3. \det \left\{ x_1 + \sum_{i=2}^n \alpha^i x_i, x_2, \dots, x_n \right\} = \det \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$4. \{x_i\}_{i=1}^n - \text{ЛЗ} \implies \det \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = 0$$

$$5. \det \{\alpha x_1, x_2, \dots, x_n\} = \alpha \det \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$6. \text{Доказательство. } M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \begin{bmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \dots & \xi_m^1 & \dots & \xi_n^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_m^2 & \dots & \xi_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \dots & \xi_m^n & \dots & \xi_n^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \triangleleft \det \{x_1, x_2, \dots, x_n\} &= f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n \left( x_1, x_2, \dots, \sum_{j=1}^n \xi_m^j e_j, \dots, x_n \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \xi_m^j f^1 \wedge \dots \wedge f^n (x_1, x_2, \dots, e_j, \dots, x_n) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{|m-j|} \xi_m^j f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge \underbrace{f^j(e_j)}_1 \wedge \dots \wedge f^n (x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_{m+1}, \dots, x_n) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{|m-j|} \xi_m^j \underbrace{f^1 \wedge \dots \wedge f^n (x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_{m+1}, \dots, x_n)}_{M_j^m - \text{дополнительный минор элемента } \xi_n^j} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{|m-j|} \xi_n^j M_j^m = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-m} \xi_m^j M_j^m \\ &= \dots = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \dots \sum_{j_k} (-1)^{j_1-m} (-1)^{j_2-m} \dots (-1)^{j_k-m+k} \underbrace{\xi_{m_1}^{j_1} \xi_{m_2}^{j_2} \dots \xi_{m_k}^{j_k}}_L M_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{m_1, m_2, \dots, m_k} \\ &= (-1)^{j_1-m_1+j_2-m_2+\dots+j_k-m_k} L_{m_1, m_2, \dots, m_k}^{j_1, j_2, \dots, j_k} M_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{m_1, m_2, \dots, m_k} \end{aligned}$$

**Теорема 3** (Лапласа).  $\det \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = (-1)^{j_1+\dots+j_n-m_1-\dots-m_n} L_{m_1, \dots, m_n}^{j_1, j_2, \dots, j_n} M_{j_1, j_2, \dots, j_n}^{m_1, m_2, \dots, m_n}$

**Пример.**  $\det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1 + \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot 2 \cdot (-1)^7 + \det \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$   
 $1 - 3 = 2$

---


$$\text{Пример. } \det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

■

$$\text{Пример. } \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^n \det A_{jj}$$

## 1.11 Ранг матрицы

$\sqsubset \{x_i\}_{i=1}^k$  – набор векторов в  $X$  ( $\dim X = n \geq k$ )

**Лемма 15.**  $\{x_i\}_{i=1}^k$  – ЛЗ  $\iff \forall \omega \in \Lambda^k \quad \omega(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$

*Доказательство.*

$\implies \sqsubset \{x_i\}_{i=1}^n$  – ЛЗ

$$\begin{aligned} \triangleleft \omega(x_1, x_2, \dots, x_k) &= \omega \left( \underbrace{x_1 + \sum_{i=2}^k \alpha_i^x}_{\simeq x_k = \beta x_k}, x_2, \dots, x_k \right) = \beta \omega(x_1, x_2, \dots, x_k) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\Leftarrow \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \quad \forall \omega \in \Lambda^k \omega(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0 \stackrel{?}{\implies} \text{ЛЗ}$

Допустим обратное. Тогда мы можем достроить этот набор до базиса  $X$   $\{x_1, x_2, \dots, x_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ . К нему есть сопряжённый базис  $\{f^1, f^2, \dots, f^n\}$

$$\triangleleft f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge (x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} f^{\sigma(1)} f^{\sigma(2)} \dots f^{\sigma(k)}(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad (1.1)$$

$$= \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} f^{\sigma(1)}(x_1) f^{\sigma(2)} \dots f^{\sigma(k)} \neq 0 \quad (1.2)$$

$$(1.3)$$

■



**Замечание.**  $\forall \omega \in \Lambda^p \quad \omega = i_1 i_2 \dots i_k F \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}$

$$\Leftarrow (\{x_i\}_{i=1}^n - \text{ЛЗ} \iff i_1 i_2 \dots i_k F(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0 \forall i_1 \dots i_k)$$

$$\Delta B = \begin{bmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \dots & \xi_n^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \dots & \xi_n^n \end{bmatrix} \quad \det B = 0 \implies x_1, x_2, \dots, x_n - \text{ЛЗ. Но нам}$$

хочется узнать, а сколько там независимых

$\Lambda^n \quad \Lambda^{n-1} \quad i_1 i_2 \dots i_{n-1} F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ . Если найдётся такой минор, который не равен 0, то у нас есть  $n-1$  ЛНЗ векторов. Если все равны 0, то значит их меньше. Мы уменьшаем число и смотрим дальше, а там тоже выбор из двух.

**Определение 13.** Ранг матрицы – максимальный размер её отличного от нуля минора.

**Определение 14.** Базисные строки – набор ЛНЗ строк в количестве ранга матрицы.

**Теорема 4.** Число ЛНЗ строк матрицы равно  $rg A$  (ранг  $A$ )

## 1.12 Практика. Вычисление определителей

1. Приведение к треугольному виду.
2. Метод выделения линейных множителей

**Определение 15** (Определитель Вандермонда (определитель Того-кого-нельзя-называть)).  $\prod_{i>j} (x_i - x_j)$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

## 1.13 Тензорная алгебра

**Теорема 5.** TODO

*Доказательство.* TODO ■

---


$$\triangleleft W \in \Omega_q^p$$

$$W \quad \underbrace{x_1 x_2 \dots x_p}_{\in X} \underbrace{y^1 y^2 \dots y^q}_{\in X^*} \mapsto K$$

$$\sqsubset \{e_j\}_{j=1}^n - \text{базис } K \quad \{f^i\}_{i=1}^n$$

$$f^k(e_j) = \delta_j^k$$

$$x_1 = \sum_{i=1}^n \xi_1^{i_1} e_{i_1} \quad \dots \quad x_p = \sum_{i=1}^n \xi_p^{i_p} e_{i_p}$$

$$y^1 = \sum_{j=1}^n \eta_{j_1}^1 f^{i_1} \quad \dots \quad y^q = \sum_{j=1}^n \eta_{j_q}^q f^{j_q}$$

$$\begin{aligned} W(x_1 x_2 \dots x_p y^1 y^2 \dots y^q) &= W(\xi_1^{i_1} \dots) \\ &= \xi_1^{i_1} \dots \eta_{j_q}^q W(e_{i_1} e_{i_2} \dots f^{j_1} f^{j_2} \dots) \\ \overline{\Delta} &= \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \eta_{j_1}^1 \eta_{j_2}^2 \dots \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j^1 j^2 \dots j^q} \end{aligned}$$

$$\sqsubset \{\tilde{e}_l\}_{l=1}^n - \text{базис } X \text{ (новый)}$$

$$\tilde{e}_l = \sum_{j=1}^n \tau_l^j e_j \quad \left( \tau = \|\tau_l^j\| \right)$$

$$\sqsubset \{\tilde{f}^m\}_{m=1}^n - \text{базис } X^* \text{ (сопряжённый к новому)}$$

$$\tilde{f}^m = \sum_{j=1}^n \sigma_j^m f^j \quad \left( \sigma_j^m \tau_l^j = \delta_l^m \right)$$

$$\sqsubset \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = W(e_{i_1} \dots e_{i_p} f^{j_1} \dots f^{j_q})$$

$$\begin{aligned} \triangleleft \omega_{s_1 s_2 \dots s_p}^{t_1 t_2 \dots t_q} &= W(\tilde{e}_{s_1} \tilde{e}_{s_2} \dots \tilde{e}_{s_p} \tilde{f}^{t_1} \dots \tilde{f}^{t_q}) \\ &= W\left(\sum_{i_1=1}^n \tau_{s_1}^{i_1} e_{i_1} \dots \sum_{i_p=1}^n \tau_{s_p}^{i_p} e_{i_p}, \sum_{j_1=1}^n \sigma_{j_1}^{t_1} \dots \sum_{j_q=1}^n \sigma_{j_q}^{t_q} f^{j_q}\right) \\ &= \tau_{s_1}^{i_1} \tau_{s_2}^{i_2} \dots \tau_{s_p}^{i_p} \sigma_{j_1}^{t_1} \dots \sigma_{j_q}^{t_q} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j^1 j^2 \dots j^q} \end{aligned}$$

**Замечание.** Вообще аргументы могут идти по-разному и тогда могут писать  $\omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 j_3 \dots j_4 j_5}$

---

**Определение 16.** Тензором типа  $(p, q)$  называется алгебраический объект вида  $\omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$ , где:

$i_1 i_2 \dots i_p$  – ковариантные индексы

$j^1 j^2 \dots j^q$  – контравариантные индексы

и преобразующийся при замене базиса  $(T)$  по закону

$$\tilde{\omega}_{s_1 s_2 \dots s_p}^{t_1 t_2 \dots t_q} = \tau_{s_1}^{i_1} \tau_{s_2}^{i_2} \dots \tau_{s_p}^{i_p} \sigma_{j_1}^{t_1} \dots \sigma_{j_q}^{t_q} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}.$$

**Замечание.** Они, естественно, образуют линейное пространство (можно рассмотреть сложение, домножение на число и доказать свойство)

Операции:

1. Сложение  $\omega_i^{\vec{j}} \quad v_i^{\vec{j}} \in (p, q)$

$$u_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} + v_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$$

$$\tilde{u}_i^{\vec{j}} = \widetilde{\omega + v}_i^{\vec{j}} = \tilde{\omega}_i^{\vec{j}} + v_i^{\vec{j}}$$

2. Умножение на число  $u_i^{\vec{j}} = \alpha \omega_i^{\vec{j}}$

$$\tilde{u}_i^{\vec{j}} = \widetilde{(\alpha \omega)}_i^{\vec{j}} = \alpha \tilde{\omega}_i^{\vec{j}}$$

3. Тензорное произведение.  $\square \omega_i^{\vec{j}}(p_1, q_1) \quad v_i^{\vec{j}}(p_2, q_2)$

$$u = \omega \otimes v(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{s_1 s_2 \dots s_{p_1}}^{t_1 t_2 \dots t_{q_1}} \tilde{v}_{s_{p_1+1} \dots s_{p_1+p_2}}^{t_{p_1+1} \dots t_{p_1+p_2}} &= \\ &= \tau_{s_1}^{i_1} \dots \tau_{s_{p_1+p_2}}^{i_{p_1+p_2}} \sigma_{j_1}^{t_1} \dots \sigma_{j_{q_1+q_2}}^{t_{q_1+q_2}} \underbrace{\omega_{i_1 i_2 \dots i_{p_1}}^{j_1 j_2 \dots j_{q_1}} v_{i_{p_1+1} \dots i_{p_1+p_2}}^{j_{q_1+1} \dots j_{q_1+q_2}}}_{u_{i_1 i_2 \dots i_{p_1+p_2}}^{j_1 j_2 \dots j_{q_1+q_2}}}. \end{aligned}$$

4. Транспонирование. Замена двух индексов тянется до замены двух индексов в преобразовании (просто везде один меняется на другой). А тогда преобразование то же самое. Note: менять можно индексы одного типа

**Замечание.** Если менять индексы разного типа, то нарушится ко(нтра)вариантность и это не будет тензором

---

5. Свёртка.  $\omega_{i_1 i_2 \dots k \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots k \dots j_q}$

$$\omega_{s_1 s_2 \dots m \dots s_p}^{t_1 t_2 \dots m \dots t_q} = \sigma_{j_1}^{t_1} \dots \sigma_k^m \dots \sigma_{j_q}^{t_q} \tau_{s_1}^{i_1} \dots \tau_m^k \dots \tau_m^k \dots \tau_{s_p}^{i_p} \omega_{i_1 i_2 \dots k \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots k \dots j_q}$$

$\sigma_k^m \tau_m^k = 1$  – т.е. эти индексы просто не участвуют в преобразовании.

## 1.14 Практика. Вычисление определителей

1. Метод рекуррентных соотношений

$$D_n = pD_{n-1}$$

$$D_n = p_n D_{n-1}$$

$$D_n = p - qD_{n-1}$$

$$D_n = p_n - q_n D_{n-1}$$

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$$

2. Представление определителя в виде суммы

## 1.15 Ранг матрицы это инвариант

$\square A, B$

$$AB = C \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots \\ b_{21} & b_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots \\ c_{21} & c_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} & & \\ b_{11} & b_{12} & & \end{bmatrix}$$

Если поменять две строчки местами, то они поменяются и у результата.

Если умножить строку на число, в итоге та же строка тоже умножится

Если добавим к одной строке другую, то же произойдёт и с результатом.

Матрицы преобразований:

---


$$\begin{array}{l}
1. \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \\
2. \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \lambda & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \\
3. \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

**Замечание.** Произведение матриц некоммукативно.

$$AB \neq BA \quad (A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2 \quad (A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$$

**Пример.**  $A \quad \text{rg } A = a \quad \text{rg } B = b$

$$\text{rg } AB = \min(m, n).$$

Про ранг суммы нельзя ничего сказать

**Пример.**  $A_{m \times r} \quad B_{r \times n}$

$$\text{rg}(AB) = r \implies \text{rg } A = r \quad \text{rg } B = r$$

**Задача 3.** Сформулировать в терминах рангов необходимое и достаточное условие того, чтобы три точки на плоскости не лежали на одной прямой

$$P(x_1, y_1) \quad Q(x_2, y_2) \quad R(x_3, y_3)$$

$Ax + By + C = 0$  – уравнение прямой

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + C = 0 \\ Ax_2 + By_2 + C = 0 \\ Ax_3 + By_3 + C = 0 \end{cases}$$

Мы требуем нетривиальное решение. Это некрамеровская система, значит

$$\text{rg} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} < 3$$

**Задача 4.** То же самое, только для четырёх точек в пространстве и плоскость через них.

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix}$$

4 – не лежат

3 – на одной плоскости

2 – на одной прямой

**Задача 5.** 
$$\left[ \begin{array}{cc|c} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{array} \right]$$

2, 3 – две прямые параллельны или они пересекаются в трёх разных точках

2, 2 – пересекаются в одной точке

1, 2 – три параллельных прямые, две из которых совпадают

1, 1 – все совпадают

## 1.16 Линейные операторы

**Определение 17.**  $\square X, Y$  – ЛП,  $\dim X = n$   $\dim Y = m$

$\triangleleft \phi : X \rightarrow Y$

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$

$$x \longmapsto y = \varphi(x) = \varphi x$$

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x).$$

**Замечание.**  $\varphi : X \longrightarrow X$

действует на (биекция) – автоморфизм

действует в (сюръекция) – эндоморфизм

**Пример.** 1.  $\mathcal{I} : X \rightarrow X$   $\mathcal{I}x = x$  – тождественный оператор

2.  $\mathcal{O} : X \rightarrow X$   $\mathcal{O}x = 0$  – нулевой оператор

---


$$3. \mathcal{P} : X \rightarrow X \quad X = L_1 \dot{+} L_2 \implies x = x_1 + x_2 \begin{cases} \mathcal{P}_{L_2}^{\|L_2} x = x_1 \\ \mathcal{P}_{L_1}^{\|L_1} x = x_2 \end{cases} \quad - \text{проектор}$$

$$4. \varphi : C'[a, b] \rightarrow C'[a, b] \quad (\varphi f)(t) = \int_a^b f(s)K(s, t)ds$$

$$5. \mathcal{D} : C^\infty(a, b) \rightarrow C^\infty(a, b) \quad (\mathcal{D}f)(t) = \frac{df}{dt}$$

$\square \mathcal{L}(X, Y)$  – множество операторов действующих из  $X$  в  $Y$

$\square \varphi, \psi \in \mathcal{L}(X, Y)$

**Определение 18.** Суммой операторов  $\varphi, \psi$  называется отображение

$$\chi = \varphi + \psi.$$

и определяемое как  $\chi(x) = \varphi(x) + \psi(x)$

**Лемма 16.**  $\chi \in \mathcal{L}(X, Y)$

$$\chi(x + y) = (\varphi + \psi)(x + y) = \varphi(x + y) + \psi(x + y) = (\varphi + \psi)(x) + (\varphi + \psi)(y) = \chi x + \chi y.$$

**Определение 19.** Умножением оператора на число  $\lambda \in K$  называется отображение

$$\omega = \lambda\varphi.$$

$$\omega(x) = (\lambda\varphi)(x) = \lambda \cdot \varphi(x)$$

**Лемма 17.**  $\omega \in \mathcal{L}(X, Y)$

**Теорема 6.**  $\mathcal{L}(X, Y)$  – Линейное Пространство

**Вопрос 1.**  $\dim(X, Y) = ?$

$\square \{e_j\}_{j=1}^n$  – базис  $X$      $\{h_k\}_{k=1}^m$  – базис  $Y$

$$\square x \in X \implies x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j$$

---


$$\begin{aligned}\varphi x &= \varphi \left( \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \right) = \sum_{j=1}^n \xi^j \underbrace{\varphi(e_j)}_{\in Y} \\ &= \sum_{j=1}^n \xi^j \sum_{k=1}^m a_j^k h_k = \sum_{k=1}^m \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n \xi^j a_j^k \right)}_{\eta^k} h_k = \sum_{k=1}^m \eta^k h_k x.\end{aligned}$$

$$* \quad \varphi(e_j) = \sum_{k=1}^m a_j^k h_k$$

**Определение 20.** Набор  $A_\varphi = \|a_j^k\|$  образует матрицу, которая называется матрицей линейного оператора  $\varphi$  в паре базисов  $\{e_j\}$  и  $\{h_k\}$

**Лемма 18.** Задание линейного оператора в пространстве эквивалентно заданию его матрицы при фиксированной паре базисов.

**Замечание.**  $\varphi x = y$

$$A_\varphi \xi = \eta$$

Тождественный оператор имеет единичную матрицу.

Нулевой матрицу из нулей

$$X = L_1 \dot{+} L_2 \quad L_1 \{e_j\}_{j=1}^k \quad L_2 \{e_j\}_{j=k+1}^n$$

$\begin{bmatrix} E & O \\ O & O \end{bmatrix}$  – матрица проектора (единичный квадрат, всё остальное ноль)

$\triangleleft \left\{ \begin{smallmatrix} j \\ k \end{smallmatrix} E \right\}$  – набор в  $\mathcal{L}(X, Y)$

$$\sqsupset x \in X \quad x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \quad \begin{smallmatrix} j \\ k \end{smallmatrix} E x = \xi^j h_k \text{ (единичка в матрице на месте } (j, k))$$

**Теорема 7.** Набор  $\left\{ \begin{smallmatrix} j \\ k \end{smallmatrix} E \right\}$  образует базис  $\mathcal{L}(X, Y)$

*Доказательство.*

- Полнота.  $\sqsupset \varphi \in \mathcal{L}(X, Y)$



$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{j=1}^n \xi^j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^n \xi^j \sum_{k=1}^m a_j^k \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \xi^j a_j^k h_k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m {}^j_k E(x) a_j^k \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$

$$\implies \varphi = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m {}^j_k E a_j^k$$

$$\bullet \text{ Линейная независимость. } \square \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m {}^j_k E \alpha_j^k = \mathcal{O} \quad | e_1$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m {}^j_k E(e_1) \alpha_j^k = \sum_{k=1}^m 1 \cdot \underbrace{h_k}_{\text{ЛНЗ}} \cdot \alpha_1^k = 0 \implies \alpha_1^k = 0$$

$$\alpha_j^k = 0 \forall k, j$$

■

**Замечание.**  $\dim \mathcal{L}(X, Y) = m \cdot n$

$\triangleleft K_n^m$  – пространство  $m \cdot n$

**Лемма 19.**  $\mathcal{L}(X, Y) \simeq K_n^m$

$$\square \{e_j\}_{j=1}^n \quad \{\tilde{e}_k\}_{k=1}^m \text{ – базис } X$$

$$\square \varphi : X \rightarrow X \quad A_\varphi \quad \tilde{A}_\varphi$$

Как преобразуется матрица оператора при переходе между базисами

$$\begin{aligned}\varphi \tilde{e}_s &= \varphi \left( \sum_{j=1}^n \tau_s^j e_j \right) = \sum_{j=1}^n \tau_s^j \varphi(e_j) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \tau_s^j a_j^k e_k \\ &= \sum_{j=1}^n \tilde{a}_s^j \tilde{e}_j = \sum_{j=1}^n \tilde{a}_s^j \sum_{k=1}^m \tau_j^k e_k &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \tilde{a}_s^j \tau_j^k e_k.\end{aligned}$$

$$\implies \sum_{j=1}^n \tau_s^j a_j^k = \sum_{j=1}^n \tilde{a}_s^j \tau_j^k$$

$$A_\varphi T = T \tilde{A}_\varphi$$

**Лемма 20.**  $\tilde{A}_\varphi = S A_\varphi T \quad S = T^{-1}$  – преобразование SAT

$$\square T \quad \det T \neq 0$$

$$\square A \in \mathbb{R}_n^n$$

$A \longrightarrow T^{-1}AT$  – преобразование подобия

$A \sim B \iff B = T^{-1}AT$  – отношение эквивалентности. Разбивается на непересекающиеся классы

$$\square X, Y, Z$$

$$\triangleleft \varphi \in \mathcal{L}(X, Y)$$

$$\triangleleft \psi \in \mathcal{L}(Y, Z)$$

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$$

**Определение 21.** Композицией линейных операторов  $\phi$  и  $\psi$  называется отображение

$$\chi = \psi \circ \varphi,$$

которое действует как

$$\chi(x) = (\varphi \circ \psi)(x) = \pi(\varphi(x)).$$

**Лемма 21.**  $\psi \circ \varphi = \chi \in \mathcal{L}(X, Z)$

*Доказательство.*  $\square x, y \in X$

$$\chi(x+y) = (\psi \circ \varphi)(x+y) = \psi(\varphi(x+y)) = \psi(\varphi x + \varphi y) = \psi(\varphi(x)) + \psi(\varphi(y)) = \chi(x) + \chi(y)$$

$$\chi(\lambda x) = \lambda \chi(x) \quad \blacksquare$$

$$\square \{e_j\}_{j=1}^n - \text{базис } X, \{h_k\}_{k=1}^m - \text{базис } Y, \{g_l\}_{l=1}^s - \text{базис } Z$$

В паре базисов  $\varphi \longleftrightarrow A_\varphi$

В паре базисов  $\psi \longleftrightarrow B_\psi$

Хочется получить матрицу  $\chi \longleftrightarrow C_\chi$

$$\chi(e_j) = \sum_{l=1}^s C_k^l g_l$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}
 &= (\psi \circ \varphi)(e_j) = \psi(\varphi(e_j)) \\
 &= \psi\left(\sum_{k=1}^m a_j^k h_k\right) \\
 &= \sum_{k=1}^m a_j^k \psi(h_k) \\
 &= \sum_{k=1}^m a_j^k \sum_{l=1}^s b_k^l g_l \\
 &= \sum_{l=1}^s \left(\sum_{k=1}^m a_j^k b_k^l\right) g_l
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_j^l = \sum_{k=1}^m a_j^k b_k^l \iff C_\chi = B_\psi \cdot A_\varphi$$

$\triangleleft \mathbb{K}_n^n$  “+” “λ” “.”

**Определение 22.** Алгеброй  $\mathcal{A}$  называется линейное пространство, наделённое операцией умножения, так что выполняются следующие требования (аксиомы):

1.  $a_1(a_2 a_3) = (a_1 a_2)a_3 \forall a_1, a_2, a_3$
2.  $a(b + c) = ab + ac$   
 $(a + b)c = ac + bc$
3.  $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$

$\square \mathcal{A}$  – некоторая алгебра  $\square x, y \in \mathcal{A}$

$$\square \{e_j\} - \text{базис } \mathcal{A} \Rightarrow \begin{cases} x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \\ y = \sum_{k=1}^n \eta^k e_k \end{cases}$$

$$x \cdot y = \left( \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^n \eta^k e_k \right) = \sum_{k,j=1}^n \xi^j \eta^k \underbrace{(e_j \cdot e_k)}_{\sum_{l=1}^n m_{jk}^l e_l}$$

$\{m_{jk}^l\}$  – структурные константы алгебры  $\mathcal{A}$

**Пример.**  $\mathbb{C}$

---

|   |   |    |
|---|---|----|
|   | 1 | i  |
| 1 | 1 | i  |
| i | i | -1 |

Такую же для кватернионов можно сделать.

**Задача 6.** Выразить свойство ассоциативности в рамках структурных констант

Сделать то же самое с коммутативностью

**Замечание.** Алгебра это полугруппа (есть ассоциативности)

$\triangleleft \mathcal{A}$  – алгебра  $\square e_L \in \mathcal{A} : \forall x \in \mathcal{A} \quad e_L x = x$  – левая единица

$e_R \in \mathcal{A} : \forall x \in \mathcal{A} \quad x e_R = x$  – правая единица

**Замечание.** Если есть и левая и правая, то они совпадают

Если нет, то может быть несколько одного типа.

$\square x \in \mathcal{A} \quad \square y \in \mathcal{A} : yx = e$ ,  $y$  – левый обратный

$z \in \mathcal{A} \quad xz = e$  – правый обратный

**Замечание.** Если у  $x$  есть правый или левый, то он называется обратимым

Если есть и тот и другой, то они совпадают  $y = z = x^{-1}$

*Доказательство.*  $z = yxz = y$  ■

**Пример.**  $\mathcal{L}(X, X)$  – алгебра операторов ( $\circ$ )

$K_n^n$  – алгебра матриц

**Определение 23.**  $\square x \in \mathcal{A}$

$y : yx = e \implies y$  – левый обратный

$z : xz = e \implies z$  – правый обратный

**Утверждение 3.** Если существует и тот, и другой, то они совпадают и обозначаются  $x^{-1}$

## 1.17 Обратная матрица

$\square A \in K_n^n$

---

**Определение 24.** Матрица  $B \in K_n^n$  называется левой обратной к  $A$ , если

$$BA = E.$$

Матрица  $X \in K_n^n$  называется правой обратной к  $A$ , если

$$AC = E.$$

( $E$  – единичная матрица)

**Лемма 22.** Обратная матрица существует тогда и только тогда, когда её определитель не равен нулю

$$\det A \neq 0 \iff \exists A^{-1} : AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

*Доказательство.*

$$\implies \det A \neq 0 \implies \exists B, C : BA = AC = E$$

$$\square A = \|a_j^i\| \quad c = \|c_j^i\| \quad E = \|\delta_j^i\|$$

$$\begin{matrix} [C] \\ [A] \end{matrix} = [E].$$

$$\sum_{j=1}^n a_j^i c_k^j = \delta_k^i$$

Зафиксируем  $k = k_0$ -ый столбец.  $\implies \delta_{k_0}^i = \beta^i \quad c_{k_0}^j = \xi^j$

$\implies \sum_{j=1}^n a_j^i \xi^j = \beta^i$  – система линейных уравнений. Матрица уравнения – ровно матрица  $A$

Нам нужно единственное решение, чтобы она была Крамеровской  $\implies \det A \neq 0$

**Замечание.** Существования правой ИЛИ левой обратной достаточно, чтобы определитель был не равен нулю.

$$\implies \exists C : AC = E$$

$$\exists B : BA = E$$

$$E^T = E \quad (BA)^T = A^T B^T \quad A^T B^T = E$$

Аналогично нам нужно  $\det A^T \neq 0$ , но  $\det A^T = \det A$ , а значит мы свели к тому же условию

$$\exists B, C \implies \exists B = C = A^{-1}$$

$\Leftarrow$  Можно сказать, что уже сделали. Там также сводим к крамеровской системе, а там определитель не ноль.

■

**Замечание.** Можно вычислять обратную матрицу честно выписывая все уравнения на все члены, но такое матричное произведение у нас определено не случайно, у него уже есть структура и ей следует пользоваться

Методы вычисления обратной матрицы:

1. Метод Гаусса

$$[A \mid E] \sim [E \mid A^{-1}]$$

Мини-описание: делаем прогон, чтобы получить треугольную, потом получаем диагональную, затем домножаем столбцы или строки, чтобы получить  $E$

$$T_n \dots T_2 T_1 A = E \implies T_n \dots T_2 T_1 E = A^{-1} \text{ (не доказательство, просто демонстрация)}$$

2. Союзная матрица.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T$$

$\tilde{A}_j^i$  – вычёркиваем в  $A$  соответствующие столбцы и строки, считаем определитель оставшегося (название получившегося: алгебраическое дополнение)

$$\text{Доказательство. } A = \|\alpha_j^i\| A^{-1} = \|\gamma_j^i\|$$

$$AA^{-1} = E \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j^i \gamma_k^j = \delta_k^i$$

$k = k_0$  – зафиксировали

$$\delta_{k_0}^i = \beta^i \quad \gamma_{k_0}^j = \xi^j \quad \alpha_j^i = a_j \text{ (вектор по } i)$$

$$\sum_{j=1}^n a_j \xi^j = b$$

$$\xi^j = \frac{\Delta_j}{\det A} = \frac{\det(A|a_j \rightarrow b)}{\det A} o$$

$b$  – столбец с нулями и одной единицей на месте  $k_0$ . Можем разложить по столбцу определитель

$$= \frac{A_j^{k_0}}{\det A} \forall k_0$$

$$\xi^j = \gamma_{k_0}^j = \frac{A_j^k}{\det A}$$

$$\implies A^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{\det A}$$

■

---

## 1.18 Операторная алгебра

$$\mathcal{L}(X, X) \simeq K_n^n$$

$$\square \varphi : X \rightarrow X$$

**Определение 25.** Ядром оператора  $\varphi$  называется множество

$$\text{Ker } \varphi = \{x \in X : \varphi x = 0\}.$$

**Лемма 23.**  $\text{Ker } \varphi$  – ЛПП  $X$

**Определение 26.** Образом оператора  $\varphi$  называется множество

$$\text{Im } \varphi = \varphi(X).$$

**Лемма 24.**  $\text{Im } \varphi$  – ЛПП  $X$

**Теорема 8** (О ядре и образе).  $\square \varphi : X \rightarrow X$

$$\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim X.$$

*Доказательство.* Утверждаем, что  $X$  делится на две непересекающиеся части: ядро и образ

$$\dim \text{Ker } \varphi = K \quad (\dim X = n)$$

$$\square \text{Ker } \varphi = \mathcal{L} \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$$

$$X = \mathcal{L} \left\{ \underbrace{e_1, e_2, \dots, e_k}_{\text{Ker } \varphi}, e_{k+1}, \dots, e_n \right\}$$

$$\square x \in X \quad x = \sum_{i=1}^k \xi^i e_i + \sum_{j=k+1}^n \xi^j e_j$$

$$\varphi x = \varphi \left( \sum_{j=k+1}^n \xi^j e_j \right) = \sum_{j=k+1}^n \xi^j \varphi(e_j) \quad \forall x \in X$$

Так образов  $e_{k+1} \dots e_n$  хватает, чтобы разложить образ. Пока что есть только полнота: любой образ раскладывается. Надо доказать следующее:

$$\{\varphi(e_j)\}_{j=k+1}^n - \text{ЛНЗ}$$

$$\triangleleft \sum_{j=k+1}^n \alpha^j \varphi(e_j) = 0 \implies \varphi \left( \underbrace{\sum_{j=k+1}^n \alpha^j e_j}_z \right) = 0 \implies z \in \text{Ker } \varphi \implies z =$$

$\beta^1 e_1 + \dots \beta^k e_k$ . Но тогда есть два разложения по первым  $k$  и одновременно по  $k+1 \dots n$ , но тогда они были бы линейно зависимы, а они выбраны не такими (они базис  $\implies$  есть ЛНЗ в них)

$$\implies \alpha^j = 0 \quad \forall j$$

■

**Замечание.**  $\text{Ker } \varphi \cap \text{Im } \varphi = (0)$

$$\dim \text{Ker } \varphi = k \quad \dim \text{Im } \varphi = n - k$$

$$\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = n = \dim X$$

$$\implies X = \text{Ker } \varphi \dot{+} \text{Im } \varphi$$

$$\square \varphi : X \rightarrow X$$

**Определение 27.** Оператор  $\varphi^{-1}$  называется обратным к  $\varphi$ , если:

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = I.$$

$$\forall x \in X \quad (\varphi^{-1} \circ \varphi)(x) = \varphi^{-1}(\varphi(x))$$

**Теорема 9** (Инвариантное условие существования  $\varphi^{-1}$ ).  $\exists \varphi^{-1} \iff$

$$\begin{cases} \text{Ker } \varphi = \{0\} \\ \text{Im } \varphi = X \end{cases}$$

**Замечание.**  $\varphi(x) = y \implies x = \varphi^{-1}(y)$

$$x \longleftrightarrow \xi^j \quad y \longleftrightarrow \eta^k \quad \varphi \longleftrightarrow \|a_m^i\|$$

$$\eta^k = \sum_{i=1}^n a_i^k \xi^i - \text{в такой записи нужно искать решение системы уравнений}$$

$$\eta = A\xi$$

Нужно, чтобы система была совместна и определена (крамеровская). ш

$\triangleleft \sum_{i=1}^n a_i^k = 0$  : Если существует единственно решение такого, то существует обратный оператор (по теорема Фредгольма)



**Утверждение 4.**  $\exists \varphi^{-1} \iff \text{Ker } \varphi = \{0\}$

*Доказательство теоремы.*  $\exists \varphi^{-1} \implies \forall y \quad \varphi x = y$  имеет решение  $[x = \varphi^{-1}y]$

$\square \text{Ker } \varphi = \{0\} \implies \dim \text{Im } \varphi = n \implies \text{Im } \varphi \simeq X \implies \varphi - \text{сюръекция}$

$$\begin{cases} \varphi(x_1) = y_1 \\ \varphi(x_2) = y_2 \end{cases}$$

$\varphi(x_1 - x_2) = y_1 - y_2 \neq 0 \implies x_1 - x_2 \notin \text{Ker } \varphi \implies x_1 \neq x_2 \implies \text{инъекция}$   
 $\implies \text{биекция}$  ■

## 1.19 Внешняя степень оператора

$$\Lambda^n \quad \dim X = n \quad \dim X = n$$

$$\dim \Lambda^n = C_n^n = 1 \implies \{^{12\dots n}F\}$$

$$^{12\dots n}F = f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n$$

$$\det \{x_1 x_2 \dots x_n\} = ^{12\dots n} (x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \xi_{\sigma(1)}^1 \dots \xi_{\sigma(n)}^n = \det A \quad A = [x_1 x_2 \dots x_n]$$

$\Lambda_n \quad ^{12\dots n} \hat{F} = \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 \wedge \dots \wedge \hat{e}_n = \langle X^{**} = X \rangle = e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$  (под негалочками будем понимать то, что с галочками. формально сняли их)

$$\begin{aligned} \triangleleft x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n &= \xi_1^{i_1} e_{i_1} \wedge \xi_2^{i_2} e_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_n^{i_n} e_{i_n} \\ &= \sum \sigma (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \xi_2^{\sigma(2)} \dots \wedge \xi_n^{\sigma(n)} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \\ &= \det A^T e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \\ &= \det [x_1 x_2 \dots x_n]. \end{aligned}$$

**Лемма 25.**  $\det [x_1 x_2 \dots x_n] = \det \{x_1 x_2 \dots x_n\}$

**Определение 28** (Внешняя степень оператора  $p$ ).  $\square \varphi : X \rightarrow X$

$$\Lambda_p \quad \{_{i_1 i_2 \dots i_p} F = e_{i_1} \dots e_{i_p}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n}$$

$$\triangleleft \varphi^{\Lambda_p} : \Lambda_p \rightarrow \Lambda_p$$

$$\square x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n \in \Lambda_p$$

$$\varphi^{|\text{lambda}^p} (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) = \varphi x_1 \wedge \varphi x_2 \wedge \dots \wedge \varphi x_n$$

---


$$\square p = n \implies \implies \varphi^{\Lambda_n} : \Lambda_n \rightarrow \Lambda_n$$

**Лемма 26.**  $\square z \in \Lambda_n \implies \varphi^{\Lambda_n} z = \alpha z$

*Доказательство.*  $\square z = e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$

$$\begin{aligned} \varphi^{\Lambda_n} z &= \varphi e_1 \wedge \varphi e_2 \wedge \dots \wedge \varphi e_n \\ &= a_1^{j_1} e_{j_1} \wedge a_2^{j_2} e_{j_2} \wedge \dots \wedge a_n^{j_n} e_{j_n} \\ &= \underbrace{\sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} a_1^{\sigma(1)} a_2^{\sigma(2)} \dots a_n^{\sigma(n)}}_{\alpha} \overbrace{e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n}^z = \alpha z. \end{aligned}$$

■

**Определение 29.**  $\alpha \overline{\Delta} = \det \varphi$  – определитель Линейного Оператора

**Замечание.**  $\varphi^{\Lambda_n} (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) = \det \varphi \cdot x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$

$$\begin{aligned} \varphi^{\Lambda_n} (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) &= \varphi x_1 \wedge \varphi x_2 \wedge \dots \wedge \varphi x_n \\ &= \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \dots \xi_n^{\sigma(n)} \varphi (e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) \\ &= \det \varphi \cdot (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) \\ &= \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \dots \xi_n^{\sigma(n)} \cdot \det \varphi \cdot (e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) \end{aligned}$$

$$\square \varphi, x \in \text{End}(X)$$

**Теорема 10.**  $\det (\varphi \circ \chi) = \det \varphi \cdot \det \chi$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} (\varphi \chi)^{\Lambda_n} (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) &= \varphi (\chi x_1) \wedge \varphi (\chi x_2) \wedge \dots \wedge \varphi (\chi x_n) \\ &= \det \varphi \cdot (\chi x_1 \wedge \chi x_2 \wedge \dots \wedge \chi x_n) \\ &= \det \varphi \cdot \det \chi (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) \end{aligned}$$

С другой стороны  $(\varphi \chi)^{\Lambda_n} (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) = \det (\varphi \chi) (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n)$  ■

## 1.20 Практика: ядро и образ

$$\varphi : X \rightarrow Y$$

$$1. \text{Ker } \varphi = \{x \in X \mid \varphi(x) = 0\} - \text{ЛПП } X$$

$$2. \text{Im } \varphi = \varphi(X) = \{y \in Y \mid \exists x \in X \quad \varphi(x) = y\} - \text{ЛПП } Y$$

$$\square Y = X \quad \varphi - \text{эндоморфизм}$$

$$\square \{e_j\}_{j=1}^n - \text{базис } X \quad \varphi \longleftrightarrow A_\varphi = \|a_j^i\| \quad \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^n a_j^i e_i$$

$$x \longleftrightarrow \xi^i \implies \varphi(x) \longleftrightarrow A_\varphi \xi$$

**Задача 7.** Как найти ядро линейного оператора?

*Доказательство.*  $\triangleleft x : \quad \varphi(x) = 0$

но, у нас есть базис, поэтому эквивалентно можно искать  $\xi : \quad A_\varphi \xi = 0 \implies$   
 ФСР – базис  $\text{Ker } \varphi$  ■

**Пример.**  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\varphi [\xi^1 \xi^2 \xi^3]^T = [\xi^2, \xi^1 + \xi^3, \xi^3]$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \implies \text{Ker } \varphi = \{0\}$$

**Пример.**  $D(p) = 2 \cdot \frac{d^2 p}{dt^2} - \frac{dp}{dt}$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_\varphi \xi = 0 \implies \begin{cases} -\xi^2 + 4\xi^3 = 0 \\ -12\xi^3 + 12\xi^4 = 0 \\ -3\xi^4 = 0 \end{cases} \implies \xi^1 - \forall \quad \xi^1 = 1. \text{ Все остальные нули}$$

В  $\text{Ker } \varphi$  лежит  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , а значит там только константы, что соответствует нашему оператору

**Пример.**  $\varphi A = A^T$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det \neq 0 \implies \text{Ker } \varphi = \{0\}$$

**Пример.**  $\varphi: E_3 \rightarrow E_3 \quad \varphi(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{(\vec{x}, \vec{n})}{(\vec{n}, \vec{n})} \vec{n}$

$$\varphi(\vec{x}) = 0 \implies \vec{x} = \frac{(\vec{x}, \vec{n})}{(\vec{n}, \vec{n})} \vec{n} \implies \vec{x} \parallel \vec{n}$$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \xi^3 = 1 \\ \xi^2 = 1 \\ \xi^1 = 1 \end{cases}$$

$$\vec{n} = (1, 1, 1)$$

**Задача 8.** Найти ядро и образ ЛОп

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

.....

$x_1, x_2 = \dots$  – пространство размерности 2, ядро

$$\text{Доказательство. } \varphi(X) = \text{Im } \varphi \quad \varphi(x) = y \quad \square y = \begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \\ \eta^4 \\ \eta^5 \end{bmatrix}$$

Если дописать сбоку столбец эт и преобразовывать его вместе с матрицей, то в конце когда слева у нас де строки нулей, справа есть две нулевые комбинации эт. Строим ФСР по этой системе и находим базис Образа оттуда

НО есть способ лучше. Что такое  $A$ ? это матрица образов базисных векторов. Значит они все лежат в образе. Более того, всё сводится к базису, а

значит образ это линейная оболочка векторов из матрицы. Обычно просят найти таки базис образа, а не просто описание, но мы просто приводим её к диагональному виду и выделяем ненулевые строки. ■

**Задача 9.** Найти полный прообраз  $a$ . Это то же самое что найти один прообраз и добавить все линейные комбинации ядра. (потому что по сути мы решаем неоднородную систему линейных уравнений, а она даёт решения в виде многообразия через частное решение и линейную комбинацию

**Задача 10.**  $\varphi : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 6 & -5 \\ 8 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M \subseteq Y \quad \begin{cases} \xi_{61} + \xi^2 = 0 \\ \xi^1 - \xi^3 = 0 \end{cases}$$

$$\square y \in Y \quad y \in M \iff By = 0 \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x \longleftrightarrow \xi$$

$$A_\varphi x = y \in M$$

$$BA_\varphi x = By = 0$$

Таким образом:

- Прообраз элемента это многообразие
- Прообраз линейного пространство это линейное пространство

## 1.21 Алгебра скалярных полиномов

$P_n$  – пространство, множество полиномов.

**Определение 30** (Полином). Формальная запись

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n, \quad a \in K \quad t^k = \underbrace{t \cdot t \cdot \dots \cdot t}_k.$$

$P_n = P_n[K]$  – линейное пространство.

Стандартный базис  $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$   $\dim P_n[K] = n + 1$

Не ввести мультипликативную структуры, замкнутую в полиномах степени  $n$

$$\triangleleft P_\infty[K] = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i t^i \quad \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

1.  $P_\infty[K]$  – линейное пространство

2.  $P_\infty[K]$  – мультипликативный моноид

$$\sqsupset p, q \in P_\infty[K] \quad \triangleleft (p \cdot q)(t) = p(t) \cdot q(t) = q(t) \cdot p(t) = (q \cdot p)(t)$$

$$\implies p \cdot q = q \cdot p \quad \forall p, q \implies \text{коммутативность}$$

$$\triangleleft 1 \in P_\infty[K] \quad 1 \cdot p = p \implies \text{нейтральный элемент моноида}$$

**Замечание.**  $\dim P_\infty[K] = \infty$

**Утверждение 5.**  $P_\infty[K]$  – алгебра (скалярных полиномов)

$$\sqsupset J \subseteq P_\infty[K]$$

**Определение 31.**  $J$  называется идеалом алгебры  $P_\infty[K]$ , если

$$P_\infty[K] \cdot J \subseteq J (\text{левый идеал}).$$

У нас коммутативность, значит идеалы все двусторонние и называются просто идеалами.

Любой идеал это линейное пространство

**Замечание.**  $1 \in P_\infty[K]$ , значит  $\forall a \in J \quad a \in 1 \cdot J \subseteq P_\infty[K] \cdot J \quad a \in P_\infty[K] \cdot J \implies J \subseteq P_\infty[K]J$

$$P_\infty[K] \cdot J = J.$$

**Пример.**  $\sqsupset q \in P_\infty[K] \implies q \cdot P_\infty[K] = J_q$  – идеал  $J_q$

$$1. \quad P_\infty[K] \cdot q \cdot P_\infty[K] = q \cdot P_\infty[K] = J_q$$

$$2. \quad q \in J_q \quad p \in P_\infty[K]$$

$$p \cdot q = q' \in J_q.$$

$$\sqsupset p \in P_\infty[K] \quad r \in J_q \implies r = \tilde{p} \cdot q$$

$$\triangleleft p \cdot r = p \cdot \tilde{p} \cdot q = \hat{p} \cdot q \in q \cdot P_\infty[k]$$

**Пример.**  $\{0\}, \quad P_\infty[K]$

---

**Замечание.** Если в идеале есть единица, то он тривиален и совпадает с  $P_\infty[K]$

**Пример.**  $J_\alpha = \{p \in P_\infty[K] : p(\alpha) = 0\}$  – идеал. (главный идеал)

$J_q = \{p \in P_\infty[K] : \text{имеют тот же набор корней, что и } q\}$

**Определение 32.** Если  $J_q = q \cdot P_\infty[K]$ , то  $q$  – порождающий полином идеала  $J$

**Определение 33.** Суммой идеалов  $J_1$  и  $J_2$  называется множество

$$J_s = \{p \in P_\infty[K] : p = p_1 + p_2, \quad p_1 \in J_1, \quad p_2 \in J_2\}.$$

**Лемма 27.**  $J_s$  – идеал

*Доказательство.*  $\square \quad \tilde{p} \in P_\infty[K], \quad p \in J_s \quad p'_1 \in J_1, \quad p'_2 \in J_2$

$$\triangleleft \tilde{p} \cdot p = \tilde{p}(p_1 + p_2) = \underbrace{\tilde{p}p'_1}_{p'_1 \in J_1} + \underbrace{\tilde{p}p'_2}_{p'_2 \in J_2} \in J_1 + J_2 = J \quad \blacksquare$$

**Определение 34.** Произведением идеалов  $J_1$  и  $J_2$  называется множество

$$J_m = \left\{ \sum_i p_i q_i \mid \{p_i\} \in J_1, \quad \{q_i\} \in J_2 \right\}.$$

**Лемма 28.**  $J_m$  – идеал

**Замечание.** Идеал это:

1. Аддитивный моноид
2. Мультипликативный моноид
3. Дистрибутивность ещё есть

**Определение 35.** Пересечением идеалов  $J_1$  и  $J_2$  называется

$$J_r = \{p \in P_\infty[K] : p \in J_1 \cap J_2\}.$$

Здесь  $J_1 \cap J_2$  в теоретико-множественном смысле. Вообще так называется именно пересечение идеалов

---

**Задача 11** (Домашнее задание).

$$J_1 \cdot J_2 \subseteq J_1 \cap J_2.$$

$$\nexists J \quad \exists p \in J : \deg P = \min$$

**Определение 36.** Полином, обладающий данным свойством называется минимальным полиномом идеала  $J$

**Замечание.**  $P = P_{\min}$

**Лемма 29.** Минимальный полином существует

*Доказательство.*  $p - \min J$

Если  $\dim p = 1$ , то  $J = P_{\infty}[K]$ , а в  $P_{\infty}[K]$  есть 1

Если  $\dim p > 1$

$$P_{\infty}[K] \cdot J = J$$

$$1 \cdot p = p,$$

Так мы нашли минимальный полином в обеих частях равенства из определения, значит всё хорошо  $\Rightarrow$  ■

**Лемма 30.**  $\forall p \in J \Rightarrow p \dot{\vdash} p_{\min}$

*Доказательство.*  $\exists p \in J$ , но  $p \not\dot{\vdash} p_{\min}$

$$\Rightarrow p = q \cdot p_{\min} + r \quad \deg r < \deg p_{\min}$$

$r = p - q \cdot p_{\min}$ , оба слагаемых из идеала  $\Rightarrow r \in J \quad \deg r < \deg p_{\min} \Rightarrow r$  – минимальный полином идеала  $\Rightarrow r = 0$  ■

**Лемма 31.**  $\exists q - \text{порождающий полином идеала } J_q \Rightarrow J_q = q \cdot P_{\infty}[K]$

$\exists p_{\min} - \text{минимальный полином идеала } J_q$

$$\Rightarrow q = \alpha p_{\min} \quad \alpha \in K$$

*Доказательство.* В силу предыдущей леммы  $q \dot{\vdash} p_{\min}$

$$p_{\min} \in J_q \Rightarrow \exists \tilde{p} \in P_{\infty}[K] : p_{\min} = q \cdot \tilde{p} \Rightarrow p_{\min} \dot{\vdash} q$$



---

**Замечание.**  $J_p - p_J$  – минимальный порождающий полином идеала  $J_p$

## 1.22 Практика. Алгебра Скалярных полиномов

Операции:

1. Умножение полиномов
2. Деление. Деление в столбик.

**Замечание.** Алгебру скалярных полиномов  $P_\infty[K]$  будем обозначать как  $\mathcal{A}$

**Лемма 32.**  $J_1, J_2$  – идеалы  $\mathcal{A}$

$$p_1 \leftrightarrow J_1 \quad p_2 \leftrightarrow J_2$$

$$\sqsubset J_1 \subseteq J_2 \implies p_1 \dot{\vdash} p_2$$

*Доказательство.*  $\forall p \in J_1 \quad p \dot{\vdash} p_1$

$$J_1 \subseteq J_2 \implies p \in J_2 \implies p \dot{\vdash} p_2$$

$$p_1 \in J_1 \implies p_1 \in J_2 \implies p_1 \dot{\vdash} p_2 \quad \blacksquare$$

**Лемма 33.**  $p_1 = \min J_1 \quad p_2 = \min J_2$

$$\sqsubset J_r = J_1 \cap J_2 \quad p_r = \min J_r \implies p_r = \text{НОК}(p_1, p_2)$$

*Доказательство.*  $p_r \in J_1 \cap J_2 \implies \begin{cases} p_r \in J_1 \implies p_r \dot{\vdash} p_1 \\ p_r \in J_2 \implies p_r \dot{\vdash} p_2 \end{cases} \implies p_r \sim \text{НОК}(p_1, p_2)$

$$\sqsubset \tilde{p}_r \sim \text{НОК}(p_1, p_2) \implies \tilde{p}_r \dot{\vdash} p_1 \implies p_r \in J_1$$

$$\tilde{p}_r \dot{\vdash} p_2 \implies p_r \in J_2$$

$$\implies p_r \in J_1 \cap J_2$$

Кроме того  $p_r \dot{\vdash} \tilde{p}_r \implies \tilde{p}_r = \min J_r \quad \blacksquare$

---

**Лемма 34.**  $p_1 = \min J_1 \quad p_2 = \min J_2$

$$\triangleleft J_s = J_1 + J_2 \leftrightarrow p_s = \text{НОД}(p_1, p_2)$$

*Доказательство.*  $p_1 \in J_s \implies p_1 \dot{\vdash} p_s$

$$p_2 \in J_s \implies p_2 \dot{\vdash} p_s$$

$$p_3 \sim \text{ОД}(p_1, p_2)$$

$$\sqsubset \tilde{p}_s = \text{НОД}(p_1, p_2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 \dot{\vdash} p_s \\ p_2 \dot{\vdash} p_s \\ p_s = \alpha p_1 + \beta p_2 \dot{\vdash} p_s \implies \underbrace{\tilde{p}_s}_{\min} \in J_s \end{array} \right. \quad \blacksquare$$

**Теорема 11.**  $\sqsubset p_1, p_2 \quad \text{НОД}(p_1, p_2) = 1 \implies \exists q_1, q_2 \in A :$

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = 1.$$

*Доказательство.*  $J_1, J_2$  порождены полиномами  $p_1, p_2$

$$J_1 + J_2 = P_\infty[K] \longleftrightarrow p_s = 1$$

1 лежит в сумме идеалов, значит раскладывается через  $p_1$  и  $p_2$

$$\implies p_1 q_1 + p_2 q_2 = 1 \quad \blacksquare$$

**Замечание.**  $\sqsubset p_1 p_2 \dots p_k \in A \quad \text{НОД}(p_1 \dots p_n) = 1 \implies \exists q_1 q_2 \dots q_k :$

$$\sum_{i=1}^k p_i q_i = 1.$$

*Доказательство.*  $p_i \leftrightarrow J_i$

$$J_1 + \underbrace{J_2 + \dots + J_k}_{J'} = 1 \text{ (свели задачу предыдущей. } J' = J_2 + J'' \dots) \quad \blacksquare$$

**Замечание.**  $\sqsubset p_1 p_2 \dots p_k$  – попарно взаимнопростые ( $\text{НОД}(p_i, p_{j \neq i}) = 1$ )

$$\triangleleft p = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$$

$p'_i = \frac{p}{p_i}$  – не взаимнопростые (дофига общих множителей), но подходит под условие прошлого замечания с общим нодом

$$\implies \exists q_i \in A : \sum_{i=1}^k p'_i q_i = 1$$

## 1.23 Алгебра операторных полиномов

### 1.23.1 Введение

$\square G, G'$  – группы

$$\sigma : g \rightarrow G' \quad \begin{cases} \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y) \\ \sigma(e) = e' \end{cases}$$

$$\text{Ker } \sigma = \{x \in G \mid \sigma(x) = e'\}$$

**Замечание.**  $\text{Ker } \sigma$  – подгруппа  $G$

$\square R, R'$  – два кольца. Есть сложение и умножение

$$\sigma : R \rightarrow R'$$

$$\forall x, y \in R \quad \begin{cases} \sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y) \\ \sigma(0) = 0 \\ \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y) \end{cases}$$

$$\text{?Ker } \sigma = \{x \in R \mid \sigma(x) = 1\}$$

$$\square x, y \in \text{Ker } \sigma \quad \sigma(x+y) \neq 1$$

На самом деле:

$$\text{Ker } \sigma = \{x \in R \mid \sigma(x) = 0\}.$$

$\square x, y \in \text{Ker } \sigma \quad x+y \in \text{Ker } \sigma$  – по сложению всё хорошо (и группы по сложению мы и исходим)

$xy \in \text{Ker } \sigma \quad 1 \notin \text{Ker } \sigma \implies$  Ядро  $\sigma$  это не подкольцо

$\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y) \implies \text{Ker } \sigma$  – идеал (что угодно домножить на элемент из него всё ещё в нём)

$$A = P_\infty[K] \text{ – кольцо}$$

$$\square \varphi : X \rightarrow X \quad X \text{ – ЛШ}$$

$$\triangleleft S_\varphi : P_\infty[K] \rightarrow P_\varphi$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i t^i \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi^i.$$

**Определение 37.**  $P_\varphi$  – множество операторных полиномов

---

**Лемма 35.**  $S_\varphi$  – гомоморфизм колец

*Доказательство.*  $S_\varphi(p+q) = q_1 + q_2 \quad S_\varphi p_i = q_i$

$$S_\varphi(0) = \mathbf{0}$$

$$quad S_\varphi(1) = \mathbb{J}$$

$$S_\varphi(p_1 p_2) = q_1 q_2 \quad \blacksquare$$

**Замечание.**  $S_\varphi(P_\infty[K]) = \text{кольцо}$

**Замечание.**  $S_\varphi(\lambda p) = \lambda q \implies S_\varphi$  – гомоморфизм

**Теорема 12.**  $\exists p_1, p_2 \in P_\infty[K] : \text{НОД}(p_1, p_2) = 1$

$$\implies \exists q_1 q_2 \in P_\infty[K] \quad p_1(\varphi) q_1(\varphi) + p_2(\varphi) q_2(\varphi) = \mathbb{J}$$

*Доказательство.* Из леммы для скалярных полиномов следует:

$\exists q_1, q_2 \quad p_1(t) q_1(t) + p_2(t) q_2(t) = 1$ . Применим к обоим частям гомоморфизм и получается то, что нужно.  $\blacksquare$

**Теорема 13.**  $\exists p(t) = p_1(t) \cdot p_2(t) \quad \text{НОД}(p_1, p_2) = 1$

$$\text{Тогда } \text{Ker } p(\varphi) = \text{Ker } p_1(\varphi) + \text{Ker } p_2(\varphi)$$

*Доказательство.*

$$1. \text{Ker } p_1(\varphi) + \text{Ker } p_2(\varphi) \subseteq \text{Ker } p(\varphi)$$

$$\exists x_1 \in \text{Ker } p_1(\varphi) \quad x_2 \in \text{Ker } p_2(\varphi) \implies x_1 + x_2 \in \text{Ker } p_1(\varphi) + \text{Ker } p_2(\varphi)$$

$$\triangleleft p(\varphi)x = p(\varphi)(x_1 + x_2) = p_1(\varphi)x + p_2(\varphi)x + p_1(\varphi)p_2(\varphi)x_2 = 0 + 0 = 0$$

$$2. \text{Ker } p(\varphi) \subseteq \text{Ker } p_1(\varphi) + \text{Ker } p_2(\varphi)$$

$$\exists x \in \text{Ker } p(\varphi) \quad p_1(\varphi) q_1(\varphi) + p_2(\varphi) q_2(\varphi) = \mathbb{J}$$

$$\underbrace{p_1(\varphi) q_1(\varphi) x}_{x_2} + \underbrace{p_2(\varphi) q_2(\varphi) x}_{x_1} = x \quad \forall x \in X$$

$$p_2(\varphi) x_2 = p_2(\varphi) p_1(\varphi) q_1(\varphi) x = 0 \implies p_1(\varphi) q_1(\varphi) x \in \text{Ker } p_2(\varphi)$$

$$p_1(\varphi) x_1 = p_1(\varphi) p_2(\varphi) q_2(\varphi) x = 0 \implies p_2(\varphi) q_2(\varphi) x \in \text{Ker } p_1(\varphi)$$

$$3. \exists z = \text{Ker } p_1(\varphi) \cap \text{Ker } p_2(\varphi)$$

$$\implies p_1(\varphi) z = 0 \quad p_2(\varphi) z = 0$$

$\implies z = p_1(\varphi) q_1(\varphi) z + p_2(\varphi) q_2(\varphi) z = 0 + 0 = 0 \implies$  пространства дизъюнкты и речь идёт о прямой сумме

■

$S_\varphi$  – гомоморфизм колец. Давайте найдём его ядро.

$$\text{Ker } S_\varphi = \{p \in P_\infty[K] \mid p(\varphi) = \mathbb{O}\}$$

**Определение 38.** Полином  $p \in P_\infty[K]$ , такой что

$$p(\varphi) = \mathbb{O}.$$

называется аннулирующим полиномом оператора  $\varphi$

**Лемма 36.** Аннулирующий полином существует

*Доказательство.*  $\dim P_\infty[K] = \infty$

$$\dim \mathcal{L}(X, X) = (\dim X)^2$$

$\varphi^0 \varphi^1 \varphi^2 \varphi^3 \dots \varphi^{n^2}$  – ЛЗ набор (векторов больше чем размерность)

$$\implies \exists \{\alpha_i\}_{i=0}^{n^2} \sum_{i=1}^{n^2} \alpha_i \varphi^i = 0$$

$$p = \sum_{i=1}^{n^2} \alpha_i t^i$$

■

**Лемма 37.**  $\text{Ker } S_\varphi$  – идеал в  $P_\infty[K]$

**Определение 39.** Минимальным аннулирующим полиномом оператора  $\varphi$  называется минимальный полином идеала  $\text{Ker } S_\varphi$

**Замечание.** Обозначать его мы будем как  $p_\varphi$   $p_\varphi(\varphi) = \mathbb{O}$

**Лемма 38.**  $\square p_\varphi(t) = p_1(t)p_2(t) \quad \text{НОД}(p_1, p_2) = 1$

$$\text{Тогда } \underbrace{\text{Ker } p_\varphi(\varphi)}_X = \text{Ker } p_1(\varphi) \dot{+} \text{Ker } p_2(\varphi)$$

$$X = \text{Ker } p_1(\varphi) \dot{+} \text{Ker } p_2(\varphi)$$

---

**Замечание.**  $\square \text{Ker } p_i(\varphi) = L_i$  (назовём так)

$$x_1 = p_2(\varphi) q_2(\varphi) x \in L_1$$

$$x_2 = p_1(\varphi) q_1(\varphi) x \in L_2$$

$$X = L_1 \dot{+} L_2$$

**Лемма 39.**  $\mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} = p_2(\varphi) q_2(\varphi)$   $\mathcal{P}_{L_2}^{\|L_1} = p_1(\varphi) q_1(\varphi)$  – проекторы!

*Доказательство.*  $\mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} \mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} = \mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2}$

$$\mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} \mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} x = p_2(\varphi) q_2(\varphi) p_2(\varphi) q_2(\varphi) x = p_2(\varphi) q_2(\varphi) (\mathbb{J} - p_1(\varphi) q_1(\varphi)) = p_2(\varphi) q_2(\varphi)$$

$$\mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} \mathcal{P}_{L_2}^{\|L_1} = \underline{p_1(\varphi) q_1(\varphi)} \underline{p_2(\varphi) q_2(\varphi)} = \mathbb{O} \quad \blacksquare$$

$$\varphi \rightarrow P_\varphi(t) = p_1(t) p_2(t) \rightarrow X = L_1 \dot{+} L_2$$

**Теорема 14.**  $\square \varphi : X \rightarrow X$

$\square p_\varphi$  – минимальный аннулирующий полином оператора  $\varphi$

$$p_\varphi = p_1 p_2 \dots p_k \quad \text{НОД}(p_i, p_{j \neq i}) = 1$$

$$\implies X = \bigoplus_{i=1}^k L_i \quad L_i = \text{Ker } p'_i(\varphi) \quad p'_i = \frac{p(\varphi)}{p_i}$$

$$\mathcal{P} : X \rightarrow L_i \quad \mathcal{P}_i = p'_i(\varphi) q_i(\varphi)$$

$$\text{где } \sum_{i=1}^k p'_i q_i = 1$$

**Замечание.** Применим  $S_\varphi$  к последней сумме.

$$\sum_{i=1}^k p'_i(\varphi) q_i(\varphi) = \sum_{i=1}^k i = \mathbb{J}.$$

– разложение единицы для оператора  $\varphi$

**Теорема 15** (Вторая теорема о ядре и образе).  $\square \varphi : X \rightarrow X \quad p_\varphi = p_1 p_2 \quad \text{НОД}(p_1 p_2)$

$$\implies \Im p_2(\varphi) = \text{Ker } p_1(\varphi)$$

*Доказательство.*  $\Im p_2(\varphi) \subseteq \text{Ker } p_1(\varphi)$

---


$$\begin{aligned}
\text{let } x \in X &\implies y = p_2(\varphi)x \subseteq \Im p_2(\varphi) \\
\triangleleft p_1(\varphi)y &= p_1(\varphi)p_2(\varphi)x = p_\varphi(\varphi)x = 0 \\
\dim \Im p_2(\varphi) &= \dim \text{Ker } p_1(\varphi) \\
\dim \text{Ker } p_1(\varphi) + \dim \Im \text{Ker } p_1(\varphi) &= n \\
\dim \text{Ker } p_1(\varphi) + \dim \text{Ker } p_2(\varphi) &= n \\
\dim \Im p_1(\varphi) &= \dim \text{Ker } p_2(\varphi) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Замечание.**  $\sum_{i=1}^k \varphi_i x = \mathbb{J}x \forall x$

$$\sum_{i=1}^k \varphi \mathcal{P}_i x = \varphi x$$

$$\sum_{i=1}^k \varphi \mathcal{P}_i = \varphi$$

$$X \overline{\mathcal{P}_i} \longrightarrow L_i \overline{\varphi} \longrightarrow ?$$

$$\sum_{i=1}^k \varphi_i = \varphi$$

## 1.24 BIIG TODO, something Жордана something

## 1.25 Евклидово пространство

$\square M$  – произвольное множество (вообще любое)

**Определение 40.** Метрикой  $\rho$  на  $M$  называется отображение  $M \times M \rightarrow R$ , удовлетворяющее следующим свойствам (аксиомам метрики)  $\forall x, y, z$ :

1.  $\rho(x, y) \geq 0 \quad \rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3.  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

**Пример.** Множество непрерывных функций на  $[a, b]$

$$\rho(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|$$

**Пример.** Шахматная доска

максимальное количество ходов коней, ферзей, ладей, чтобы добраться из одной клетки в другую..

---

**Замечание.**  $(M, \rho)$  – метрическое пространство

### 1.25.1 Норма

**Определение 41.**  $\square L$  – линейное пространство

Нормой называется отображение  $L \rightarrow \mathbb{R}$ , такое что:

1.  $\|x\| \geq 0 \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$  (ноль есть, потому что ЛП)
2.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \alpha \in K$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**Замечание.** Пара  $(L, \|\cdot\|)$  – нормированное пространство

**Замечание.** Нормированное пространство можно метризовать

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

$$x = a - b$$

$$\rho(x, z) = \|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

$$x - y = a, y - z = b$$

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

**Замечание.**  $\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$

Отличное расстояние, метризует любое пространство)

**Пример.**  $L = \mathbb{R} \implies \|x\| = |x|$

$$L = \mathbb{R}^n \implies x = (\xi^1 \dots \xi^n)^T \quad \max_i |\xi^i| - \text{норм норма}$$

$$\|x\| = \sum_i \xi^i - 1\text{-норма}$$

$$\|x\| = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \xi^p} - p\text{-норма (доказывать – убиться)}$$

Аналогично можно сделать с функциями заменив сумму на интеграл.

**Пример.**  $L = \mathcal{P}_n - \sum_{i=1}^m |p(t_i)|$

ненулевой многочлен может дать 0, плохо. Но можно взять  $m > n$  и оно переберет даже  $n$  корней



## 1.26 Скалярное произведение

**Определение 42.**  $\square L$  – ЛП над  $\mathbb{R}$

Скалярным произведением над  $L$  называется отображение  $L \times L \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющее следующим требованиям (аксиомы скалярного произведения):

1.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
2.  $\langle x + \alpha y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \alpha \langle y, z \rangle$
3.  $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

**Замечание.** Пара  $(L, \langle \rangle) = E$  – (вещественное) Евклидово пространство

**Пример.**  $E = \mathbb{R}^n \quad x = [\xi^1 \dots \xi^n]^T \quad y = [\eta^1 \dots \eta^n]^T$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \xi^i \eta^i$$

**Пример.**  $E = C[a, b]$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

**Пример.**  $E = \mathcal{P}$

$$\langle p, a \rangle = \sum_{i=1}^m p(t_i)q(t_i), \quad m > n$$

**Лемма 40.** Любое евклидово пространство можно нормировать

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Первые два свойства очевидны

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

$$(\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\|\|y\| \text{ (неравенство Шварца (Коши-Буняковского-Шварца))}$$

**Лемма 41** (неравенство Шварца).  $\langle x, y \rangle \leq \|x\|\|y\| \implies \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\|\|y\|} \leq 1$   
 $\cos \Theta$

*Доказательство.*  $\|\alpha x + y\|^2 = \langle \alpha x + y, \alpha x + y \rangle = |\alpha|^2 \|x\|^2 + 2\alpha \langle x, y \rangle + \|y\|^2 > 0$  (строго, потому что берём ненулевые)

---

Всегда положительный, нет корней, отрицательный дискриминант  $\frac{D}{4} = \langle x, y \rangle^2 - \|x\|\|y\| < 0 \implies \langle x, y \rangle < \|x\|\|y\|$  ■

**Замечание.** Неравенство Шварца превращается в равенство, когда  $x, y$  линейно зависимы

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\| \iff x, y - \text{ЛЗ}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \Leftarrow \square \quad y &= |\beta x| \quad |\langle x, y \rangle| = |\langle x, \beta x \rangle| = |\beta \langle x, x \rangle| = |\beta| \|x\|^2 = |\beta| \|x\| \|x\| = \\ &= \|x\| |\beta x| = \|x\| \|y\| \\ \Rightarrow \quad \angle \alpha x + y \|^2 &= \alpha^2 \|x\|^2 + 2\alpha \langle x, y \rangle + \|y\|^2 = 0 \quad D = 0 \quad \alpha x + y = 0 \implies \\ &\text{ДЗ} \end{aligned}$$

■

**Замечание** (равенство параллелограмма). Если норма удовлетворяет следующему свойству:

$$\forall x, y \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Сумма квадратов сторон параллелограмма равна сумме квадратов её диагоналей

### 1.26.1 Псевдо-евклидовы пространства

Аксиомы:

1.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
2.  $\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
3.  $\langle x, y \rangle = 0 \forall y \implies x = 0$

**Пример** (пространство Минковского).  $x = [\xi^1 \xi^2 \xi^3]^T \quad y = [\eta^1 \eta^2 \eta^3]^T$

$$\langle x, y \rangle = \xi^1 \eta^1 + \xi^2 \eta^2 - \xi^3 \eta^3 \implies \langle x, x \rangle = |\xi^1|^2 + |\xi^2|^2 - |\xi^3|^2 \quad x = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} 1 \right) \quad \|x\| = 0$$

### 1.26.2 Комплексное евклидово пространство

Аксиомы скалярного произведения:

1.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
2.  $\langle \alpha x + y, z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

1.5-линейность (вместо билинейности в вещественных числах)

---


$$3. \langle x, x \rangle \geq 0 \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$$

$$\langle x, x \rangle = \overline{\langle x, x \rangle} \implies \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

**Замечание.**  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$

*Доказательство.*  $\|\lambda x + y\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 + \lambda \langle x, y \rangle + \bar{\lambda} \langle y, x \rangle + \|y\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\Re \lambda \langle x, y \rangle + \|y\|^2$  ■

**Лемма 42** (Шварц жив! (всё равно работает)).

*Доказательство.*  $\langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle| e^{i\varphi}$

$$\triangleleft z = e^{i\varphi} x$$

$$\langle z, y \rangle = \langle e^{i\varphi} x, y \rangle = e^{-i\varphi} \langle x, y \rangle = e^{-i\varphi} e^{i\varphi} r = r \in \mathbb{R}$$

$$|\langle x, y \rangle| = |\langle z, y \rangle| \leq \|z\| \|y\| = \|e^{i\varphi} x\| \|y\| = |e^{i\varphi}| \|x\| \|y\| = \|x\| \|y\|$$
 ■

### 1.26.3 Метрический тензор

$\square \{e_j\}_{j=1}^n$  базис  $E$

$$x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \quad y = \sum_{k=1}^n \eta^k e_k$$

$$\langle x, y \rangle =$$

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^n \xi^j e_j, \sum_{k=1}^n \eta^k e_k \right\rangle \\ &= \sum_{j,k=1}^n \bar{\xi}^j \eta^k \langle e_j, e_k \rangle \\ &= \sum_{j,k=1}^n \bar{\xi}^j \eta^k g_{jk}. \end{aligned}$$

**Замечание.**  $g_{ik} \longleftrightarrow G = \begin{bmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_2, e_1 \rangle & \dots \\ \langle e_1, e_2 \rangle & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$  – матрица Грама

Свойства  $g_{jk}$ :

$$1. \quad g_{jk} = \langle e_j, e_k \rangle = \overline{\langle e_k, e_j \rangle} = \overline{g_{kj}}$$

$$\overline{G}^{-1} = G \text{ – эрмитовость}$$

$$G^\dagger := \overline{G}^{-1}$$

$$\langle x, y \rangle = \dagger \xi G \eta$$

$$2. \ g_{ii} > 0$$

## 1.27 Ортогональность

□  $E$  – Евклидово пространство

□  $x, y \in E$

**Определение 43.** Элементы  $x, y$  называются ортогональными, если  $\langle x, y \rangle = 0$

**Лемма 43.** □  $\{x_i\}_{i=1}^n$  – набор попарно ортогональных векторов (ненулевых)  
 $\iff \{x_i\}_{i=1}^n$  – ЛНЗ

*Доказательство.*  $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0 \implies$   
 $\sum_{i=1}^n \alpha_i \|x_i\|^2 = 0 = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \|x_i\|^2 = 0$   
 $\implies \alpha_i = 0 \forall i \implies$  ЛНЗ ■

**Теорема 16** (ортогонализация Грама-Шинка). □  $\{x_i\}_{i=1}^k$  – ЛНЗ и  $L = \mathcal{L}\{x_1, \dots, x_k\}$  – подпространство  $E$   
 Можно построить ортогональный базис  $L$

*Доказательство.* Будем строить ортогональный базис  $L = \{e_i\}_{i=1}^k$

$$e_1 = x_1$$

$$e_2 = x_2 - \alpha e_1 \quad (e_1, e_2) = 0 \quad 0 = (x_2, e_1) - \alpha (e_1, e_1) - \text{знаем } \alpha$$

$$e_3 = x_3 - \beta e_2 - \gamma e_1 \quad \text{Домножением на } e_1, e_2 \text{ получаем коэффициенты}$$

$$e_3 = x_3 - \frac{\langle x_3, e_2 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle} e_2 - \frac{\langle x_3, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1$$

...

$$e_m = x_m - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\langle x_m, e_j \rangle}{\langle e_j, e_j \rangle} e_j$$

...

---

$e_k$

■

**Замечание.** Почему он не прервётся?

$\square m : \quad e_{m+1} = 0 \implies 0 = x_{m+1} - \sum_{j=1}^m x_j e_j = x_{m+1} - \sum_{j=1}^m \beta_j x_j = 0$ , но  $x$ -ы  
ЛНЗ

**Замечание.** На любом этапе  $\|x_m\| \leq \|e_m\|$

$e_m = x_m + \dots$

$\|e_m\|^2 = \langle x_m, e_m \rangle \leq \|x_m\| \|e_m\| \quad \|e_m\| \leq \|x\|$  (Если есть линейная комбинация, зануляющая  $x_m$ , то занулиться и  $e_m$ )

**Определение 44.** Базис  $\{e_j\}_{j=1}^n$  пространства  $E$  называется ортогональным, если  $\langle e_i, e_{j \neq i} \rangle = 0$

**Замечание.** Ортогональный базис всегда существует

**Определение 45.** Базис называется ортонормированным, если  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$  ОРТН

**Замечание.** В ортогональном базис матрица Грама имеет вид  $G = \text{diag} \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$   
ОРТН  $G = I$

**Теорема 17 (Пифагора).** Пусть  $\{x_i\}_{i=1}^n$  — такой, что  $\langle x_i, x_{j \neq i} \rangle = 0$   
Тогда  $\left\| \sum_{i=1}^m x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^m \|x_i\|^2$

### 1.27.1 Ортогональное дополнение

$L$  — ЛПП  $E$

**Определение 46.** Говорят, что  $x$  ортогонален  $L \iff \langle x, y \rangle = 0 \forall y \in L$

**Определение 47.**  $\{x_i\}_{i=1}^m$  ортогонален  $L$ , если  $x_i$  ортогонален  $L \forall i$

**Лемма 44.** Множество векторов, ортогональных  $L$  образует подпространство  $E$

---

*Доказательство.*  $\square x, y \perp L$

$$x + y \perp L$$

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle = 0 + 0 = 0 \forall z \in L \quad \blacksquare$$

**Замечание.**  $L'$  – ортогональное дополнение пространства  $L$  до  $E$

**Лемма 45.**  $E = L \dot{+} L'$

*Доказательство.*  $E = L + L'$

Выберем базис  $L = \{e_1, e_2, \dots, e_k\} \cup e_{k+1}, \dots, e_n$  – добили базис до базиса всего пространства. дальше ортонормируем базис. Тогда все вектора, что не лежат в  $L$  ортогональны  $L'$ , а тогда получившееся – базис  $E$  – состоит из базисов  $L$  и  $L'$

$$E = L \dot{+} L' \iff L \cap L' = \emptyset$$

$$x \stackrel{!}{=} y + z \quad x = y' + z'$$

$$y - y' = z - z'$$

$$\angle \|y - y'\|^2 = \langle y - y', y - y' \rangle = \langle y - y', z - z' \rangle = 0 \implies y = y' \implies z = z' \quad \blacksquare$$

## 1.28 Ортогональное дополнение

$\square E$  – евклидово

$$L \subseteq E - \text{ЛПП} R \implies L^\perp \triangleq M = \{x \in E : x \perp L\}$$

**Лемма 46.**  $E = L \dot{+} L^\perp$

**Замечание.**  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  – ортогональный базис  $E$

$$E = \dot{+} \sum_{i=1}^k L_i$$

### 1.28.1 Ортогональный проектор

$$E = L \dot{+} L^\perp = L \dot{+} M \iff \forall x \in E \exists x \stackrel{!}{=} \underbrace{y \in L}_y + \underbrace{z \in M}_z$$

$$\angle \mathcal{P}_L^\perp : E \rightarrow L$$

$$\mathcal{P}_L^\perp x = y \in L \quad \mathcal{P}_L^\perp = 0$$

$$\angle \mathcal{P}_M^L : E \rightarrow M$$

$$\mathcal{P}_M^\perp x = z \in M \quad \mathcal{P}_M^\perp = 0$$

---

**Лемма 47.**  $\square \{e_i\}_{i=1}^k$  – ортонормированный базис  $\implies \mathcal{P}_L^\perp x = \sum_{i=1}^k (e_i x) e_i$

*Доказательство.*  $L \rightarrow L^\perp$

$$x = y + z = \underbrace{\mathcal{P}_L^\perp x}_{\text{проекция}} \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \dots + \alpha^k e_k = z$$

$$(e_1 x) = \alpha_1 \quad \dots \quad (e_k x) = \alpha_k \quad (e_i e_{j \neq i}) = 0 \quad (e_i z) = 0$$

$$\implies \mathcal{P}_L^\perp x = \sum_{i=1}^k (e_i x) e_i \quad \blacksquare$$

**Определение 48.**  $y = \mathcal{P}_L^\perp x$  – ортогональная проекция  $x$  на  $L$   
 $z = x - y = x - \mathcal{P}_L^\perp x$  – ортогональная составляющая  $x$  в  $L$

**Замечание.** Нахождение  $y$  и  $z$  для заданного  $x$  называется “задачей о перпендикуляре”

Решение:

1. Заводят Ортогональный базис в  $L$
2. Находим  $\mathcal{P}_L^\perp \implies V = \mathcal{P}_L^\perp \quad z = x - \mathcal{P}_L^\perp$

**Лемма 48.**  $\|\mathcal{P}_L^\perp x\| \leq \|x\|$

*Доказательство.*  $x = y + z \implies \|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle y + z, y + z \rangle = \|y\|^2 + \|z\|^2$$

$$\|x\|^2 = \|\mathcal{P}_L^\perp x\| + \|z\|^2 \implies \|x\|^2 \geq \|\mathcal{P}_L^\perp\| \quad \blacksquare$$

**Лемма 49.**  $\|\mathcal{P}_L^\perp\|^2 = \sum_{i=1}^k \|x^i\|^2 \quad x = \sum_{i=1}^n \alpha^i e_i$

*Доказательство.*  $\|\mathcal{P}_L^\perp x\|^2 = \langle \mathcal{P}_L^\perp x, \mathcal{P}_L^\perp x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n (e_i x) e_i, \sum_{i=1}^n (e_i x) e_i \right\rangle = \sum_{i,j=1}^k (x e_i) (e_j x) \underbrace{\delta_{ij}}_{\text{ортогональность}} (e_i e_j) =$   
 $\sum_{i=1}^k |(e_i x)|^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha^i|^2 \quad \blacksquare$

---

**Определение 49.**  $\alpha^i$  – коэффициенты Фурье вектора  $x$  в  $\{e_i\}_{i=1}^n$

$$\alpha^i = \langle e_i x \rangle.$$

**Теорема 18** (Неравенство Беселя).

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2.$$

**Теорема 19** (Равенство Парсеваля).  $\square E$  – евклидово пространство  
 $\square \{e_i\}_{i=1}^k$  – ортонормированная ЛЗ система векторов

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2 \quad \alpha^i = \langle e_i x \rangle$$

*Доказательство.*

$$\Leftarrow \square \{e_i\}_{i=1}^n \text{ – полная в } E$$

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha^i e_i \implies \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{i,j=1}^k \alpha^i \alpha^j \langle e_i e_j \rangle = \sum_{k=1}^k |\alpha^i|^2$$

$$\implies \|x\|^2 = \sum_{i=1}^k |\alpha^i|^2 \quad \alpha^i = \langle e_i x \rangle$$

$$\text{Допустим противное. } \square \{e_i\}_{i=1}^n \text{ – не полный } \square x = \sum_{i=1}^k \alpha^i e_i$$

$$\triangleleft L = \mathcal{L}(e_i)_{i=1}^k \quad x \in L$$

$$\square z \in E \quad z = x + y$$

$$\|z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$$z = \sum_{i=1}^k \gamma^i e_i + \sum_{i=k+1}^n \gamma^i e_i$$

$$\|z\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^k \gamma^i e_i \right\|^2 + \left\| \sum_{i=k+1}^n \gamma^i e_i \right\|^2 \implies \|y\|^2 = 0 \implies y = 0$$

■

### 1.28.2 Изоморфизм $E$ и $E^*$

$$\square x, y \in E$$

$$\square f \in E^* \quad \triangleleft \langle yx \rangle = \tilde{y}(x)$$



$$g : (x, y) \rightarrow g(x, y) = \langle x, y \rangle$$

$$g : E \times E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$$g_x : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

**Лемма 50.**  $\tilde{y}(x) = \langle yx \rangle \in E^*$  – линейная форма

$$\text{Доказательство. } \tilde{y}(x_1 + x_2) = \langle y, x_1 + x_2 \rangle = \langle yx_1 \rangle + \langle yx_2 \rangle = \tilde{y}(x_1) + \tilde{y}(x_2)$$

$$\tilde{y}(\lambda x) = \langle y, \lambda x \rangle = \lambda \langle yx \rangle = \lambda \tilde{y}(x) \quad \blacksquare$$

**Замечание.**  $g : E \rightarrow E^*$

это ещё не изоморфизм, нужна биективность

$$g^{-1} - ? \sqsubset f \in E^* \implies \tilde{f} \in E : f(x) = \langle \tilde{f}, x \rangle \quad \forall x$$

$$\sqsubset \{e_i\}_{i=1}^n - \text{базис } E \text{ (произвольный)} \quad x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i \quad y = \sum_{j=1}^n \eta^j e_j$$

$$\sqsubset f \in E^* \rightarrow (\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n) - \text{коэффициенты формы в базисе } \{e_i\}$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i \xi^i = \varphi^T \xi$$

$$\langle yx \rangle = \sum_{i,j=1}^n \xi^i \eta^j g_{ij} = \eta^T G \xi$$

$$\implies \xi = G \eta \implies (\exists G^{-1}) \exists g^{-1}$$

**Замечание.**  $g$  – биекция и гомоморфизм  $\Leftarrow$  изоморфизм

$$\sqsubset \{e_i\}_{i=1}^n - \text{базис } E \quad \{f^k\}_{k=1}^n - \text{сопряжённый базис } E^*$$

$$g^{-1} : E^* \rightarrow E \quad g^{-1}(f^k) = e^k \in E$$

**Замечание.**  $\{e^k\}$  – тоже базис  $E$ . Такой называется биортогональным (дуальным) к  $e_j$

Давайте посчитаем коэффициенты одного базиса в другом

$$\triangleleft e_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} e^j \quad \text{Умножим скалярно на } e_k \text{ справа}$$

$$\langle e_i e_k \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \underbrace{f^j(e_k)}_{\delta_k^j} \langle e^j e_k \rangle = \alpha_{ik}$$

$$\langle e_i e_k \rangle = g_{ik}$$

$$\implies \alpha_{ik} = g_{ik} \implies$$

$$e_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} e^j$$

И

$$\langle e^j e_i \rangle = \delta_i^j$$

**Замечание.**  $\triangleleft x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i = \sum_{i=1}^n \xi^i \sum_{j=1}^n g_{ij} e^j = \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{i=1}^n \xi^i g_{ij} \right] e^j = \sum_{j=1}^n \xi_j e^j \quad \tilde{x}_j = g_{ij} \xi^i$

$\xi^j$  – контрвариантная координата вектора  $x$

$\xi_j$  – ковариантная координата вектора  $x$

**Замечание.**  $g \rightarrow g_{ij}$

$$g^{-1} \rightarrow g^{ij}$$

$$\tilde{\eta}^j = g^{ji} \eta_i$$

**Определение 50.** Процедура вычисления координат вектора  $x$  в базисе  $\{e^j\}$  называется процедурой опускания индекса. В обратную сторону – поднятием индекса.

## 1.29 Самосопряжённый унитарный операторы

$\square E$  евклидово,  $\varphi : E \rightarrow E$  – линейный оператор

### 1.29.1 Сопряжённый оператор

$\square x, y \in E$

**Определение 51.** Оператором  $\varphi^*$  сопряжённым оператору  $\varphi$  называется отображение

$$\langle \varphi^* y, x \rangle = \langle y, \varphi x \rangle.$$

**Замечание.**  $\varphi^*(y + z) = ? = \varphi^* y + \varphi^* z$

$$\langle \varphi^*(y + z), x \rangle = \langle y + z, \varphi x \rangle = \langle \varphi^* y, x \rangle + \langle \varphi^* z, x \rangle = \langle \varphi^* y + \varphi^* z, x \rangle$$

**Пример.**  $\mathbb{R}^n \quad \varphi \longleftrightarrow A$

$$\langle y, Ax \rangle = \eta^+ G(A\xi) = \eta^+ GA\xi = \eta^+ GA\xi = \eta^+ GAG^{-1}G\xi = \eta^+ (G^{-1+}A^+G^+)^+ G\xi = (G^{-1}A^+G\eta)^+ G\xi$$

$$\varphi^* \longleftrightarrow G^{-1}A^+G$$

---

**Пример.**  $E_3$   $\varphi(x) = [ax]$   $a \neq 0$

$$\langle y, \varphi x \rangle = (y, [ax]) = (yax) = \langle [ya], x \rangle \implies \varphi^*(y) = [ya] = -[ay]$$

$$\varphi^* = -\varphi$$

**Пример.**  $\varphi(A) = A^T$

$$\varphi^* = ?$$

$$\langle A, \varphi B \rangle = \text{Tr } A^T B^T = \text{Tr } (BA)^T = \text{Tr } BA = \text{Tr } AB = \text{Tr } (A^T)^T B$$

$$\varphi^* A = A^T$$

$$\varphi^* = \varphi$$

**Определение 52.** Оператор  $\varphi$ , обладающий свойством

$$\varphi^* = \varphi$$

называется самосопряжённым

$$\langle yx \rangle = \tilde{y}(x)$$

$$\tilde{y}(\varphi x) = \langle y, \varphi x \rangle = \langle \varphi^* y, x \rangle = [\varphi^* \tilde{y}](x)$$

**Замечание.**  $G^{-1}A^+G = A \implies A^+G = GA$ , если оператор самосопряжённый

**Лемма 51.** Все собственные значения самосопряжённого оператора вещественные

*Доказательство.*  $\square \varphi x = \lambda x$

$$\langle x, \varphi x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$$

$$\langle \varphi x, x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle$$

$$\langle \varphi^* x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$$

$$\langle \varphi x, x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle$$

$$\lambda = \bar{\lambda}$$

■

**Лемма 52.**  $\square \varphi x = \lambda x \quad \square \varphi y = \mu y \quad \lambda \neq \mu \implies \langle x, y \rangle = 0$

*Доказательство.*  $\langle y, \varphi x \rangle = \lambda \langle yx \rangle$

$$\langle x, \varphi y \rangle = \mu \langle xy \rangle = \langle \varphi^* x, y \rangle$$

---


$$\begin{aligned}\langle y, \varphi x \rangle &= \lambda \langle y, x \rangle \\ \langle y, \varphi^* x \rangle &= \mu \langle yx \rangle \\ (\lambda - \mu) \langle y, x \rangle &= 0 \implies \langle yx \rangle = 0\end{aligned}$$

■

**Определение 53.** Пространство  $L \subseteq E$  называется приводимым, если  $L = \text{inv } \varphi$  и  $L^\perp = \text{inv } \varphi$

*Доказательство.* Инвариантное подпространство  $x \in L \implies \varphi x \in L$

$$L = \text{inv } \varphi \implies \forall x \in L \implies \varphi x \in L$$

$$\forall y \in L^\perp \implies \varphi y \in L^\perp$$

$$\langle 0 = \langle y, \varphi x \rangle = \langle \varphi^* y, x \rangle = \langle \varphi y, x \rangle = 0 \implies \varphi y \in L^\perp$$

■

**Теорема 20.** Всякий самосопряжённый оператор это оператор скалярного типа

$\{x_i\}_{i=1}^n$  – Собственные вектора  $\varphi$  – базис в  $E$

*Доказательство.* Допустим противное.  $\{x_i\}_{i=1}^n$  – не базис  $\implies L = \mathcal{L}\{x_i\}$  –  $\text{inv}$  подпространство  $\varphi$

$$E = L + L^\perp, \text{ оба инвариантные. } \varphi' = \varphi|_L \quad \varphi'' = \varphi|_{L^\perp}$$

$\exists$  хотя бы одно собственное значение  $\varphi''$ , существует хотя бы один собственный вектор, мы попадаем в  $L$ .  $\implies L^\perp = 0$

■

**Теорема 21** (Спектральная теорема).

$$\varphi = \sum_{i=1}^k \mathcal{P}_i^\perp \lambda_i \quad \mathcal{P}^\perp * = \langle x_i^* \rangle x_i \sigma_y \in \mathbb{R}.$$