Конспект по линейной алгебре
II семестр

Коченюк Анатолий

20 февраля 2021 г.

Глава 1

Дополнительные главы линейной алгебры

1.1 Полилинейная формы

Замечание (вспомним)**.** Линейное отображение $\varphi(x+\alpha y) = \varphi(x)+\alpha\cdot\varphi(y)$

Определение 1. $\lhd X$ – ЛП, $\dim X = n$

X^* – сопряжённое к X пространство.

Полилинейной формой (ПЛФ) называется отображение:

$$U : X \times X \times \ldots \times X \times X^* \times X^* \times \ldots \times X^* \to K,$$

обладающее свойством линейности по каждому аргументу.

$\sqsupset x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p \in X \quad y^1, y^2, \ldots, y^q \in X^*$

$u\left(x_1, x_2, \ldots, x_i' + \alpha x_i'', \ldots, x_p, y^1, y^2, \ldots, y^q\right) =$
$= \left(x_1, x_2, \ldots, x_i', \ldots, x_p, y^1, y^2, \ldots\right) + \alpha u\left(x_1, x_2, \ldots, x_i'', \ldots, x_p, y^1, y^2, \ldots, y^q\right)$

Замечание. Пара чисел (p, q) называется валентностью полилинейной формы

Пример. $\mathbb{R}^n \quad f : \mathbb{R} \to K$ – ПЛФ $(1, 0)$

$\hat{x} : \mathbb{R}^{n*} \to K$ – ПЛФ(0,1)

Скалярное произведение $u(x_1, x_2) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ – ПЛФ(2,0)

Смешанное произведение $w(x_1, x_2, x_3) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ – ПЛФ(3,0)

$\sqsupset u, w$ – две полилинейные формы валентности (p, q)

Определение 2.

1. $u = w \iff$

$$u(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^q) = w(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^q) \quad \forall x_1 \ldots x_p y^1 \ldots y^1$$

2. Нуль форма $\Theta \quad \Theta\left(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^q\right) = 0$
3. Суммой ПЛФ валентностей $(p, q) \quad u + v$ называется такое отображение ω, что $\omega(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^1) = u\left(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^1\right) + v\left(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^1\right)$

Лемма 1. w – ПЛФ (p, q)

$w\left(\ldots, x_i' + \alpha x_i'', \ldots\right) = w\left(\ldots, x_i', \ldots\right) + \alpha w\left(\ldots x_i'' \ldots\right)$

4. Произведением полилинейной формы на число λ называется отображение λu, такое что:

$$(\lambda u)\left(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^1\right) = \lambda \cdot u\left(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^1\right).$$

Лемма 2. λu – ПЛФ (p, q)

$\sqsupset \Omega_p^q$ – множество ПЛФ (p, q)

Утверждение 1. Ω_p^q – ЛП

$\sqsupset \{e_j\}$ – базис $X \quad \sqsupset \{f^k\}$ – базис X^*

$x_1 = \sum\limits_{j_1=1}^{n} \xi_1^{j_1} e_{j_1} = \xi_1^{j_1} e_{j_1}$. Дальше значок суммы писаться не будет (иначе помрём) (соглашение о немом суммировании).

$x_2 = \xi_2^{j_2} e_{j_2} \quad \ldots \quad x_p = \xi^{j_p} e_{j_p}$

$y^1 = \eta^1_{k_1} f^{k_1} \quad y_2 = \eta^2_{k_2} f^{k_2} \quad \dots \quad y^1 = \eta^q_{k_q} f^{k_q}$

$$
\begin{aligned}
w\left(x_1, x_2, \dots, x_p, y^1, y^2, \dots, y^q\right) &= w\left(\xi_1^{j_1} e_{j_1}, \xi_2^{j_2} e_{j_2}, \dots, \xi_p^{j_p} e_{j_p}, \eta^1_{k_1} f^{k_1}, \eta^2_{k_2} f^{k_2}, \dots, \eta^q_{k_q} f^{k_q}\right) \\
&= \xi_1^{k_1} \xi_2^{j_2} \dots \xi_p^{j_p} \eta^1_{k_1} \eta^2_{k_2} \dots \eta^q_{k_q} \underbrace{w\left(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_p}, f^{k_1}, f^{k_2}, \dots, f^{k_q}\right)}_{\omega^{k_1 k_2 \dots k_q}_{j_1 j_2 \dots j_p} \text{ – тензор ПЛФ}} \\
&= \xi_1^{k_1} \xi_2^{j_2} \dots \xi_p^{j_p} \eta^1_{k_1} \eta^2_{k_2} \dots \eta^q_{k_q} \omega^{k_1 k_2 \dots k_q}_{j_1 j_2 \dots j_p}.
\end{aligned}
$$

Лемма 3. Задание полилинейной формы эквивалентно заданию её тензора в известном базисе

$$w \longleftrightarrow \omega^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} = \omega^{\vec{j}}_{\vec{i}}.$$

Доказательство. (выше) ■

Лемма 4. $v \longleftrightarrow v^{\vec{j}}_{\vec{i}} \quad w \longleftrightarrow \omega^{\vec{j}}_{\vec{i}}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} w + v \longleftrightarrow v^{\vec{j}}_{\vec{i}} + \omega^{\vec{j}}_{\vec{i}} \\ \alpha v \longleftrightarrow \alpha v^{\vec{j}}_{\vec{i}} \end{cases}$$

Замечание. ${}^{s_1 s_2 \dots s_p}_{t_1 t_2 \dots t_q} w$ – индексация базиса Ω^q_p

${}^{s_1 s_2 \dots s_p}_{t_1 t_2 \dots t_q} w^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$

${}^{s_1 s_2 \dots s_p}_{t_1 t_2 \dots t_q} w\left(x_1, x_2, \dots, x_p, y^1, y^2, \dots, y^q\right) = \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} \dots \xi_p^{s_p} \eta^1_{t_1} \eta^2_{t_2} \dots \eta^q_{t_q}$

Замечание. $\lhd {}^{s_1 s_2 \dots s_p}_{t_1 t_2 \dots t_q} w^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} = {}^{s_1 s_2 \dots s_p}_{t_1 t_2 \dots t_q} w\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}, f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q}\right)$
$= \delta^{s_1}_{i_1} \delta^{s_2}_{i_2} \dots \delta^{s_p}_{i_p} \delta^{j_1}_{t_1} \delta^{j_2}_{t_2} \dots \delta^{j_q}_{t_q}$

Пример. $\mathbb{R}^2_2$

$a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad a_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$a_1 =^{11} a_1 \quad a_2 =^{12} a_2 \quad a_3 =^{21} a_3 \quad a_4 =^{22} a_4$

Теорема 1. Набор $\left\{{}^{s_1 s_2 \dots s_p}_{t_1 t_2 \dots t_q} W\right\}^{t_1 t_2 \dots t_p}_{s_1 s_2 \dots s_p}$ – образует базис в Ω^p_q

Доказательство.

ПН $\lhd u \in \Omega^p_q$

$$u\left(x_1, x_2, \dots, x_p, y^1, y^2, \dots, y^q\right) = \xi^{i_1}_1 \xi^{i_2}_2 \dots \xi^{i_p}_p \eta^1_{j_1} \eta^2_{j_2} \dots \eta^q_{j_q} u^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} =$$
$$= {}^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} w\left(x_1, x_2, \dots, x_p, y^1, y^2, \dots, y^q\right) u^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_p, y^1, y^2, \dots, y^q.$$

$$\implies u = {}^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} w \cdot u^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$$

ЛНЗ ${}^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} W \alpha^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} = \Theta$ Посчитаем на наборе $e_{s_1}, e_{s_2}, \dots, e_{s_p}, f^{t_1}, f^{t_2}, \dots, f^{t_q}$

$\delta^{i_1}_{s_1} \delta^{i_2}_{s_2} \dots \delta^{t_1}_{j_1} \delta^{t_2}_{j_2} \dots \delta^{t_q}_{j_q} \alpha^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0$

$\alpha^{t_1 t_2 \dots t^q}_{s_1 s_2 \dots s_p} = 0 \quad \forall s_1 \dots s_p t_1 \dots t_q \implies$ ЛНЗ (альфа 0 на всех, значит она все нули)

■

Замечание. Размерность пространства полилинейных форм $\dim \Omega^p_q = n^{p+q}$

1.2 Симметричные и антисимметричные ПЛФ

$\lhd \Omega^p_0 \qquad u\left(x_1, x_2, \dots, x_p\right)$

$\lhd \sigma$ – перестановка чисел от 1 до p. $\sigma\left(1, 2, \dots, p\right) = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(p))$

Определение 3. Полилиненйая форма u называется симметричной, если

$$u\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}\right) = u(x_1, x_2, \dots, x_p.$$

Лемма 5. Симметричные полилинейные формы валентности $(p, 0)$ образуют подпространство Σ^p линейного пространства Ω^p_0

Доказательство. $\sqsupset u, v \in \Sigma^p$

$$\lhd (u+v)\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}\right) = u\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}\right) + v\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}\right) =$$

$$= u\left(x_1, x_2, \dots, x_p\right) + v\left(x_1, x_2, \dots, x_p\right) = (u+v)\left(x_1, x_2, \dots, x_p\right)$$

Так же с умножением на число. ■

Определение 4. Полилинейная форма u валентности $(p, 0)$ называется антисимметричной, если:

$$u\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}\right) = (-1)^{[\sigma]} u(x_1, x_2, \dots, x_p).$$

Лемма 6. Антисимметричные полилинейные формы валентности $(p, 0)$ образуют подпространство Λ^p линейного пространства Ω_0^p

Лемма 7. Полилинейная форма $u \in \Lambda^p \iff u = 0$ при любых двух совпадающих аргументах.

Доказательство.

$\Longrightarrow$ $\sqsupset u \in \Lambda^p$ и $x_i = x_j \quad i \neq j$

$a = \lessdot u\left(\ldots x_i \ldots x_j \ldots\right) = -u\left(\ldots x_j \ldots x_i \ldots\right) = -a \implies a = 0$

$\Longleftarrow$ Известно, что если $x_i = x_{j \neq i}$, то $u\left(\ldots x_i \ldots x_j \ldots\right) = 0 \quad \forall i, j$

Докажем, что u принадлежит Λ^p

$x_i = x_j = x_i' + x_i''$

$u\left(\ldots x_i \ldots x_j \ldots\right) = u\left(\ldots x_i' + x_i'' \ldots x_i' + x_i'' \ldots\right) = u\left(\ldots x_i' \ldots x_i'\right) + u\left(x_i' \ldots x_i''\right) + u\left(\ldots x_i'' \ldots x_i' \ldots\right) + u\left(\ldots x_i'' \ldots x_i'' \ldots\right)$

Правая часть равна 0. В левой части первое и последнее слагаемые тоже нули, а значит получам

$$u\left(\ldots x_i' \ldots x_i''\right) = -u\left(\ldots x_i'', \ldots x_i'\right).$$

■

Лемма 8. Полилинейная форма $u \in \Lambda^p \iff u\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) = 0$ лишь только $\{x_i\}_{i=1}^p$ – ЛЗ

Доказательство.

$\Longrightarrow$ $\sqsupset \{x_i\}_{i=1}^p$ – ДЗ $\implies x_k = \sum\limits_{j \neq k} \beta^j x_j = \beta^1 x_1 + \beta^2 x_2 + \ldots + \beta^p x_p$

$\lessdot u\left(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_p\right) = u\left(x_1, \ldots, \beta^1 x_1 + \beta^2 x_2 + \ldots + \beta^p x_p, \ldots, x_p\right) = 0$

При раскрытии будут выносится коэффициенты и получится образ от совпадающих аргументов (хотя бы двух), который 0 по пред. лемме, а значит всё выражение, как сумма нулей, будет нулём.

$\Longleftarrow$ $u\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) = 0$, когда $\{x_i\}_{i=1}^n$ – ЛЗ $\implies u \in \Lambda^p$

$$u\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) = u\left(x_1 + \sum \alpha^i x_i, \ldots, x_p + \sum \alpha^i x_i\right) = u(x_1, x_2, \ldots, x_p) +$$
$$u\left(x_1, \ldots, \sum \alpha^i x_i\right) + u\left(\sum \alpha^i x_i, \ldots, x_p\right) = u\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) + \sum_{j=2}^{p} \alpha^i u\left(x_1, \ldots, x_i\right) +$$
$$\sum_{i=1}^{p-1} \alpha^i u(x_i, \ldots, x_p)$$

■

1.3 Практика 02.12

1.3.1 Тензоры

$\omega_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{j_1 j_2 \ldots j_q}$

Определение 5 (Соглашение об упорядочивании индексов)**.** Слева направо сверху вниз: $(p, q) \quad r = p + q$ – ранг тензора, сколько значков.

$r = 0$ – число ω, инвариант

$r = 1$: a_i – строчка $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$ b^j – столбик $\begin{bmatrix} b^2 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix}$

$r = 2$: a_{ij} b^i_j c^{ij} – первый индекс всегда строка, второй всегда столбец

$$a_{ij} \longleftrightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$b^i_j \longleftrightarrow B = \begin{bmatrix} b^1_1 & b^1_2 & b^1_3 \\ b^2_1 & b^2_2 & b^2_3 \\ b^3_1 & b^3_2 & b^3_3 \end{bmatrix}$$

$r = 3 : a_{ijk}$ b^i_{jk} c^{ij}_k d^{ijk}

1й – строка, 2й – столбец, 3й – слой

$$a_{ijk} \longleftrightarrow A = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{111} & a_{121} & a_{112} & a_{122} \\ a_{211} & a_{221} & a_{212} & a_{222} \end{array}\right]$$

Пример. Построить тензор $\varepsilon^{ij}_k = \begin{cases} -1 & (i, j, k) \text{– чётная} \\ 1 & (i, j, k) \text{– чётная} \\ 0 & (i, j, k) \text{ – не перестановка} \end{cases}$

$r = 4$: строка, столбец, слой, сечение

a_{ijkl} b^i_{jkl} c^{ij}_{kl} d^{ijk}_l e^{ijkl} – последний тензор типа 4,0 (число вверху, число внизу)

$$c^{ij}_{kl} \longleftrightarrow C = \left[\begin{array}{cc|cc} c^{11}_{11} & c^{12}_{11} & c^{11}_{12} & c^{12}_{12} \\ c^{21}_{11} & c^{22}_{11} & c^{21}_{12} & c^{22}_{12} \\ \hline c^{11}_{21} & c^{12}_{21} & c^{11}_{22} & c^{12}_{22} \\ c^{21}_{21} & c^{22}_{21} & c^{21}_{22} & c^{22}_{22} \end{array}\right]$$

Пример. $c^{ij}_{kl} = \begin{cases} 1 & i = k \neq j = l \\ -1 & i = l \neq j = k \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

1.3.2 Операции с тензорами

1. Линейные операции:

$\omega^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} \qquad v^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$

$u = v + \omega \quad u^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} = (v+\omega)^{\vec{j}}_{\vec{i}} = v^{\vec{j}}_{\vec{i}} + \omega^{\vec{j}}_{\vec{i}}$ – матричное сложение.

$(\lambda v)^{\vec{j}}_{\vec{i}} = \lambda \cdot v^{\vec{j}}_{\vec{i}}$

2. Произведение:

   $u^{\vec{j}}_{\vec{i}} \quad v^{\vec{t}}_{\vec{s}}$

   $\omega = u \cdot v \quad \omega^{\vec{k}}_{\vec{l}} = u^{\vec{j}}_{\vec{i}} \cdot v^{\vec{t}}_{\vec{s}} = \omega^{j_1 j_2 \dots j_{q_1} t_1 t_2 \dots t_{q_2}}_{i_1 i_2 \dots i_{p_1} s_1 s_2 \dots s_{p_2}}$

   $\vec{l} = \vec{j}\vec{t} = j_1 \dots j_{q_1} t_1 \dots t_{q_2}$

   $\vec{l} = \vec{i}\vec{s} = i_1 \dots i_{p_1}, s_1 \dots . s_{p_2}$

Пример. $a^i_j \longleftrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$b_k \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$a^i_j b_k = \omega^i_{jk}$. То же самое можно записать как $a \otimes b = \omega$

$\omega \longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -3 & -4 \end{array}\right]$

$v = b \otimes a \quad v^i_{kj} = b_k \cdot a^i_j \longleftrightarrow V = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 4 & -4 \end{array}\right]$

Лемма 9. $\sqsupset \{x_i\}_{i=1}^p$ – ДЗ

Доказательство. $u(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$

$u\,(\alpha x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$

$u\left(\sum\limits_{i=1}^{p-1} \alpha^i x_i, x_2, \dots, x_p\right) = 0$ – равные x_p и первый аргумент ∎

Ω^p_0 – хотим делать из произвольной формы симметричную

$\sqsupset u \in \Omega^p_0$

Определение 6. $u^{(s)}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \frac{1}{p!}\sum\limits_{\sigma} u\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma_p}\right)$ – симметричная форма, образованная из u

$u^{(s)}$ называю симметризацией u и пишут

$$u^{(s)} = Sym\ u.$$

Замечание. $u^{(s)} \in \Sigma^p$

Доказательство. $\sqsupset \widetilde{\sigma}$ – другая перестановка

$u^{(s)}\left(x_{\widetilde{\sigma}(1)}, \ldots, x_{\widetilde{\sigma}(pa)}\right) = \frac{1}{p!}\sum\limits_{\sigma}\left(x_{\sigma\circ\widetilde{\sigma}(1)}, \ldots, x_{\sigma\circ\widetilde{\sigma}(p)}\right) = u^{(s)}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ ∎

Замечание. Деление на $p!$ нужно, чтобы выполнялось

$$Sym\ u = u.$$

, если u уже симметричная форма

Замечание. $Sym\ (\alpha u + \beta v) = \alpha Sym\ u + \beta Sym\ v$

Определение 7.

$$u^{(a)} = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma}(-1)^{[\sigma]} u\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right).$$

Эта операция называется антисимметризацией или альтернированием

$$u^{(a)} = Asym\ u.$$

Замечание. $u^{(a)} \in \Lambda^p$

Замечание.

$$(\alpha u + \beta v)^{(a)} = \alpha u^{(a)} + \beta v^{(a)}.$$

Замечание. $Sym\ Sym = Sym$

$Asym\ Asym = Asym$

$Sym\ Asym = 0 \quad Asym\ Sym = 0$

Задача 1. $Omega_0^p$

Найдём базис Λ^p

Доказательство. $\lhd \left\{ ^{s_1,s_2,\ldots,s_p}W \right\}_{\vec{s}}$ – базис

$\lhd ^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F = p! \cdot Asym \left(^{s_1,s_2,\ldots,s_p}W \right)$

Лемма 10. Некоторые формы будут повторятся.
$^{s_1\ldots s_i\ldots s_j\ldots s_p}F = -^{s_1\ldots s_j\ldots s_i\ldots s_p}F$

Доказательство.

$$\begin{aligned} ^{s1\ldots s_i..s_j\ldots s_p}F\left(x_1\ldots x_i\ldots x_j\ldots x_p\right) &= ^{s_1\ldots s_j\ldots s_i\ldots s_p}\ F\left(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots x_p\right) \\ &= -^{s_1\ldots s_j\ldots s_p} \\ &= -^{s_1\ldots s_j\ldots s_i\ldots s_p}F\left(x_1\ldots x_i\ldots x_j\ldots x_p\right) \end{aligned}$$

■

Замечание. Ненулевых C_n^p штук

Упорядочивание $\left\{ ^{s_1s_2\ldots d_p}F \right\}_{1\leqslant s_1<s_2<\ldots<s_p\leqslant n}$ – ненулевой набор. Докажем, что он базис

■

Теорема 2. Набор $\left\{ ^{s_1s_2\ldots s_p}F \right\}_{1\leqslant s_1<s_2\ldots<s_p\leqslant n}$ образует базис в Λ^p

Доказательство.

Полнота $\sqsupset u \in \Lambda^p$

$$\begin{aligned} u\left(x_1,x_2,\ldots,x_p\right) &= \xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2}\ldots\xi_p^{i_p}u_{i_1i_2\ldots i_p} \\ &= ^{i_1i_2\ldots i_p}\ W\left(x_1,x_2,\ldots,x_p\right)u\left(i_1i_2\ldots i_p\right) \\ \text{То же самое:}\quad u &= ^{i_1i_2\ldots i_p}\ W\cdot u_{i_1i_2\ldots i_p} \\ &. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Asym\ u &= Asym\left({}^{i_1 i_2 \dots i_p} W \cdot u_{i_1 i_2 \dots i_p}\right) \\
u &= Asym\left({}^{i_1 i_2 \dots i_p} W\right) \cdot u_{i_1 i_2 \dots i_p} \\
&= \frac{1}{p!}\ {}^{i_1 i_2 \dots i_p} F \cdot u_{i_1 i_2 \dots i_p} \\
&= \frac{1}{p!} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_p \leqslant n} \sum_{\sigma} {}^{\sigma(i_1)\sigma(i_2)\dots\sigma(i_n)} F \cdot u_{\sigma(i_1)\sigma(i_2)\dots.\sigma(i_p)} \\
&= \frac{1}{p!} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma] i_1 i_2 \dots i_p} F \cdot (-1)^{[\sigma]} u_{i_1 i_2 \dots i_p} \\
&= \frac{1}{p!} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < n} p!^{i_1 i_2 \dots i_p} F u_{i_1 i_2 \dots i_p}
\end{aligned}
$$

.

> **Лемма 11.** $u \in \Lambda^p \implies \forall \sigma u_{\sigma(i_1)\sigma(i_2)\dots\sigma(i_p) = (-1)^{[\sigma]}} u_{i_1 i_2 \dots i_p}$
>
> Тензоры это значение u на $e_{i_1} \dots e_{i_p}$. А тогда оно выполняется просто по определению антисимметричной формы

Линейная независимость $\lhd \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} \quad {}^{i_1 i_2 \dots i_p} F \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} = .$ Подействуем на $e_{s_1} e_{s_2} \dots e_{s_p}$

${}^{i_1 i_2 \dots i_p} F \left(e_{s_1}, e_{s_2}, \dots, s_{s_p}\right) \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0$

$p! \left[Asym^{i_1 i_2 \dots i_p}\right] \left(e_{s_1} e_{s_2} \dots s_{s_p}\right) \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0$

$p! \cdot \frac{1}{p!} \sum\limits_{\sigma} (-1)^{[\sigma] i_1 i_2 \dots i_p} W \left(e_{\sigma(s_1)}, e_{\sigma(s_2)}, \dots, e_{\sigma(s_p)}\right) \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0$

$\sum\limits_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \delta^{i_1}_{\sigma(s_1)} \delta^{i_2}_{\sigma(s_2)} \dots \delta^{i_p}_{\sigma(s_p)} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p = 0}$

$\sum\limits_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \alpha_{\sigma(s_1)\sigma(s_2)\dots\sigma(s_2)} = 0$

$p! \alpha_{s_1 s_2 \dots s_p} = 0 \forall s_1 s_2 \dots s_p \implies \alpha = 0$, если α антисимметричный тензор

■

Замечание. $\dim \Lambda^p = C_n^p$

1. $p = 0 \implies C_n^0 = 1 \implies K$
2. $p = 1 \implies C_n^1 = n \implies X^*$
3. $p = 2 \implies C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$

$C_n^p = C_n^{n-p}$

n $p = n-1 \implies C_n^{n-1} = C_n^1 = n$

n+1 $C_n^n = 1$

$\lhd \Lambda^n$

$\left\{^{i_1 i_2 \ldots i_n} F\right\}_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leqslant n} = \left\{^{123\ldots n} F\right\}$

$\sqsupset u \in \Lambda^n \implies \exists \alpha \quad u = \alpha^{123\ldots n} F$

$\lhd^{123\ldots n} F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = p! \cdot \left[Asym^{123\ldots n} W\right]\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum\limits_{\sigma} (-1)^{[\sigma]_{123\ldots n}} W\left(x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma\right.$

$(-1)^{[\sigma]} \xi^1_{\sigma(1)} \xi^2_{\sigma(2)} \ldots \xi^n_{\sigma(n)} \triangleq \det\{x_i\}$

Лемма 12. $\forall u \in \Lambda^n \quad u = \alpha\left(^{123\ldots n} F\right)$

Доказательство.

$$\begin{aligned} u\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) &= \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \ldots \xi_n^{i_n} u_{i_1 i_2 \ldots i_n} \\ &=^{i_1, i_2, \ldots, i_n} W\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) u_{i_1 i_2 \ldots, i_n} \\ &=^{123\ldots n} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \underbrace{u_{12\ldots n}}_{\alpha} \end{aligned}$$

■

1.4 Произведение полилинейных форм

$\sqsupset \Omega_p^q$

Определение 8. $u \in \Omega_{q_1}^{p_1}, v \in \Omega_{q_2}^{p_2}$

$\lhd \omega\left(x_1, x_2, \ldots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \ldots, x_{p_1+p_2}, y^1, \ldots, y^{q_1}, y^{q_1+1}, \ldots, y^{q_1+q_2}\right) =$
$= u\left(x_1, x_2, \ldots, x_{p_1}, y^1, y^2, \ldots, y^{q_1}\right) \cdot v\left(x_{p_1+1}, x_{p_1+2}, \ldots, x_{p_1+p_2}, y^{q_1+1}, \ldots, y^{q_1+q_2}\right)$

Такая форма называется консолидированной формой u и v

$u_{j_1 j_2 \ldots j_{q_1}}^{i_1 i_2 \ldots i_{p_1}} \cdot v_{t_1 t_2 \ldots t_{q_2}}^{s_1 s_2 \ldots s_{p_2}} = \omega_{j_1 \ldots j_{q_1} t_1, \ldots, t_{q_2}}^{i_1 \ldots i_p, s_1, \ldots, s_{p_2}}$

Замечание. ω – ПЛФ $(p_1 + p_2, q^1 + q^2)$

$\omega = u \cdot v \subseteq \Omega_{q_1+q_2}^{p_1+p_1}$

$\lhd \Omega = \dot{+} \sum\limits_{i,j} \Omega_{q_j}^{p_i}$ – линейное пространство

$(\Omega, +, \cdot\lambda, \cdot)$ Новое умножение называется внешним

Свойство 1.

1. $u \cdot (v \cdot w) = (u * v) \cdot w$
2. $u \cdot v \neq v \cdot u$
3. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
4. $u \cdot \ =$ – получившийся нооль из бОльшего пространства
5. $u(\alpha v) = (\alpha u) \cdot v$

Определение 9. Ω – внешняя алгебра полилинейных форм

1.5 Практика №2

1.5.1 Свёртки

Пример. $\omega_i^j \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$

$w_i^i = \sum\limits_i = \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3$

Пример. $w_k^{ij} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 8 & 9 \\ 5 & -1 & 10 & 3 \end{array} \right)$

$w_i^{ij} = \alpha^j \qquad \alpha^0 = 1 + 10 = 11 \quad \alpha^1 = 2 + (-3) = -1$

$\omega_i^{ij} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \end{pmatrix}$

Пример. $\omega_{kl}^{ij} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & -3 & 11 \\ \hline -3 & 4 & 13 & 17 \\ 6 & 5 & 19 & 23 \end{array} \right)$

$\omega_{ki}^{ij} = \alpha_k^j \sim \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 16 & 27 \end{pmatrix}$

$\omega_{ji}^{ij} = \sum\limits_j \sum\limits_i \omega_{ji}^{ij} = \sum\limits_k \alpha_k^k = \alpha_0^0 + \alpha_1^1 = 27$

Замечание. Сложную свёртку можно считать как последовательность единичных

1.5.2 Транспонирование

$$\omega^i_{jk} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 6 \\ -3 & -2 & -1 & 9 & 8 & 7 & -7 & 11 & -13 \\ 2 & 19 & 17 & 14 & 12 & 9 & 21 & 17 & -1 \end{array}\right)$$

$\psi^i_{jk} = \omega^i_{kl}$

$$\psi^i_{jk} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 7 & 4 & 2 & 8 & 5 & 3 & 9 & 6 \\ -3 & 9 & -7 & -2 & 8 & 11 & -1 & 7 & -13 \\ 2 & 14 & 21 & 19 & 12 & 17 & 17 & 9 & -1 \end{array}\right)$$

$$\omega^{ij}_{kl} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 1 & 1 & 3 \\ -8 & 2 & -7 & -1 \\ 18 & 16 & 9 & 11 \\ -14 & -3 & 17 & 19 \end{array}\right)$$

$$\omega^{ij}_{kl} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 14 & & 18 & \\ & & & \\ 1 & 3 & 9 & \\ & & 17 & \end{array}\right)$$

1.5.3 Свёртка и тензорное произведение

$$a^{ij} \sim \begin{pmatrix} 8 & 9 & 1 \\ 7 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b^k_l \sim \begin{pmatrix} 7 & -1^{-}3 & \\ 8 & 4 & 5 \\ 11 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

$a \otimes b = \omega^{ijk}_l \implies \omega^{ijk}_j = \beta^{ik}$

$$\beta^{ik} = a^{ij} b^k_l = \begin{pmatrix} 44 & & \\ & 56 & \\ & & \end{pmatrix}$$

$\beta^{00} = a^{00} b^0_0 + a^{01} b^0_1 + a^{02} b^0_2 =$

$$a^{ij}_k \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & -1 & -7 \\ 2 & 2 & 8 & 11 \end{array}\right)$$

$$b_{m,n} \sim \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$a \otimes b = \omega^{ij}_{kmn} \implies \omega^{ij}_{kji} = \beta_k \sim \begin{pmatrix} 9 \\ -94 \end{pmatrix}$$

$\omega \in \Omega^2_0 \quad \omega(x, y) \in \mathbb{R} \quad x, y \in X$

$\omega \sim a_{ij} \quad x \sim \xi^k \quad y \sim \eta^l$

$\omega(x,y) = a_{ij}\xi^i\eta^j = (a \otimes x \otimes y)_{ij}^{ij}$

1.5.4 Симметризация и асимметризация тензоров

$\omega_{ij} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -1 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$sym(\omega_{i_1,\ldots,i_p}) = a_{j_1\ldots j_p} = \sum\limits_{\sigma} \omega_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(p)}}$

$a_{ij} = w_{(ij)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 8 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$a_{ij} = \frac{1}{2!}(\omega_{ij} + \omega_{ji})$

$\omega_{ijk} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & -7 & 8 & 1 & 9 & 3 & 13 \\ 3 & -4 & 5 & 11 & -7 & 13 & 1 & 4 & 2 \\ 8 & 9 & 7 & 5 & 6 & 11 & -7 & 8 & -1 \end{array} \right)$

$a_{ijk} = \frac{1}{6}\,(\ldots)$

$a_{ijk} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{20}{3} & -\frac{2}{3} & 5 & 4 & \frac{20}{3} & 4 & \frac{13}{3} \\ -\frac{2}{3} & 5 & 4 & 5 & -7 & \frac{23}{3} & 4 & \frac{23}{3} & 7 \\ \frac{20}{3} & 4 & \frac{13}{3} & 4 & \frac{23}{3} & 7 & \frac{13}{3} & 7 & -1 \end{array} \right)$