

Математический анализ

Коченюк Анатолий

19 сентября 2021 г.

Оглавление

0.1	Введение	4
0.2	Баллы	4
1	Множества, отображения, \mathbb{R}	5
1.1	Множества	5
1.2	Отображения	8
1.3	Вещественные числа	11
1.3.1	Аксиоматическое определение вещественных чисел . .	11
1.4	Модуль	13
1.5	Комплексные числа	14
1.6	Дополнение к разделу “Действия над множествами”	16
1.7	Принцип математической индукции	16
1.8	Метрические пространства	18
1.9	Равномощные множества	22
1.10	Предел числовой последовательности	26
1.11	Топологические свойства множеств в метрических простран- ствах	37
1.12	Компактность, сходимость в себе, полнота пространств	43
1.13	Супремум и инфимум. Монотонная последовательность . . .	51
1.14	Предел отображения, предел функции	59
1.15	Символы \sim, O, o	65

0.1 Введение

Преподаватель — Семёнова Ольга Львовна. Почта: o_semenova@mail.ru

Литература:

1. Виноградов О.Л. Курс Математического анализа
2. Виноградов, Громов —||—
3. Фихтенгольц (курс)
4. Зорич (курс, двухтомник)
5. Кудрявцев (сборник задач, 1 том из трёх)
6. Виноградова, Олехник, Саровничий (1 том из двух)

0.2 Баллы

Практика — 70/100. Теория — 30/100 — 2-4 теста по теории (3 балла за присутствие на ~всех лекциях).

Если меньше 18/30 баллов, то всю теорию нужно будет пересдавать. Иначе можно воспользоваться этим как баллами за экзамен.

Глава 1

Множества, отображения, \mathbb{R}

1.1 Множества

”Множество” – неопределяемое слово. Синонимы: набор, совокупность, класс. Множество состоит из элементов.

$$M = \{1, 3, 7, 9\}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+.$$

Способы описания:

- явное описание $\{1, 2, 3\}$
- через некоторое свойство
 $M = \{x : P(x)\}$: — читается как ”таких что”. Тот же смысл имеет $|$.
 $P(x)$ обозначает какое-то свойство.
 $M = \{x : xx \text{ — человек и } x \text{ 2002 г.р.}\}$

Кванторы:

- \forall – ”для любого”, любой, каждый, всякий ...
- \exists – ”существует”.

Пример: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \dots$

Для любого положительного эпсилон существует положительное число дельта, т.ч. ...

Обозначения:

- \Longleftrightarrow — равносильно
- \wedge — ”и”
- \vee — ”или”
- \square — пусть

-
- \triangleleft — допустим, рассмотрим

Замечание. Множество всех множеств не существует.

\neg — отрицание

$\neg\exists$ — не существует

\emptyset — пустое множество

$x \in M \iff x$ — элемент множества M

$A \subseteq B \iff (x \in A \implies x \in B)$

$B \supseteq A$ — то же самое

\forall множества $M \quad \emptyset \subseteq M$

$A = B \iff (x \in A \iff x \in B) \iff \begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{cases}$

A, B — множества

$A \cup B = \{x : (x \in A \vee x \in B)\}$

$A \cap B = \{x : (x \in A \wedge x \in B)\}$

$x \in A \cap B \iff \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$

$A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$

$A \subset C$

$A^c = X \setminus A$ — дополнение A в X

Определение 1. A, X_α — множества, $\forall \alpha \in A$

$\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство множеств

A — индексное множество

$\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x : \exists \alpha \in A \quad x \in X_\alpha\}$

$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x : \forall \alpha \in A \quad x \in X_\alpha\}$

Пример. $\{(x-1, x+1)\}_{x \in (0;1)}$

$\bigcup_{x \in (0;1)} (x-1, x+1) = (-1, 2), \quad \bigcap_{x \in (0;1)} (x-1, x+1) = (0;1)$

Определение 2 (Формула Де Моргана). $A, B \subseteq X$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$\{A_i\}$ – семейство

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap A_i^c$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup A_i^c$$

Замечание. $A^{cc} = A$ – проверить-упражнение

Доказательство. $x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c \iff x \notin \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \iff \forall i \in I, x \notin A_i \iff$
 $\forall i \in I, x \in A_i^c \iff x \in \bigcap_{i \in I} A_i^c$

$$(\bigcap A_i)^c = (\bigcap A_i^{cc})^c = (\bigcup A_i^c)^{cc} = \bigcup A_i \quad \blacksquare$$

Определение 3 (упорядоченная пара). A, B

(a, b) – упорядоченная пара, $a \in A, b \in B$. В этой паре важен порядок.

$\{a, b\}$ – неупорядоченная пара (двухэлементное множество), если $a \neq b$.

$\{a, a\} = \{a\}$ (в множестве не различаются копии).

Пример: координаты точек плоскости.

$X_1, \dots, X_m \quad x_1 \in X_1 \dots x_m \in X_m \quad (x_1, \dots, x_m)$ – упорядоченная пара

Определение 4 (Декартово произведение). $X_1 \times \dots \times X_m = \{(x_1, \dots, x_m) : x_k \in X_k \quad k = 1 : m\}$

$$R^m = (R)^m$$

Пример. $X = \{1, 2\}$

$$Y = \{3, 5\}$$

$$Z = \{0\}$$

$$X \times Y \times Z = \{(1, 3, 0), (2, 3, 0), (2, 3, 0), (2, 5, 0)\}$$

1.2 Отображения

Формальное определение, которое не будет использовано или потребовано нигде (в том числе на экзамене).

Определение 5. X, Y – множества

Если $R \subset X \times Y$ и $(x, y_1) \in R \vee (x, y_2) \in R \iff y_1 = y_2$, R называется отображением или графиком.

Определение 6. Отображение – это тройка (X, Y, f) , где X, Y – множества, а f – некое правило, по которому каждому элементу $x \in X$ сопоставляется некоторый единственный элемент $y \in Y$.

$f : X \rightarrow Y$ – синоним. читают ” f действует из X в Y ”

X – множество определения отображения

Y – множество значений

$\{y \in Y : \exists x \in X f(x) = y\} \subset Y$ (т.е. Y – необязательно точное множество значений)

Пример. $x \in \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$

Если $y = f(x)$, то y называется образом элемента x при отображении f .

$A \subseteq X \quad f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ – образ множества A под действием f .

$B \subseteq Y \quad f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}$

$f^{-1}(\{y\})$ – необязательно одноэлементное.

Упражнения:

1. $f(A \cup B), f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B), f(A) \cap f(B) \quad y \in f(A \cap B) \implies \exists x \in A \cap B : f(x) = y. x \in A, x \in B, y \in f(A), y \in f(B) \implies y \in f(A) \cap f(B)$
 $f(x) = \text{const} \quad f(A) \cap f(B) \neq \emptyset, f(A \cap B) = \emptyset$, если $A \cap B = \emptyset$
3. $f^{-1}(A \cup B), f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
4. $f(A \cap B), f(A) \cap f(B)$

Определение 7. Если $f : X \rightarrow Y, g : X_1 \rightarrow Y \quad X_1 \subseteq X$ и $\forall x \in X_1 \quad g(x) = f(x)$, то g называется сужением f на X_1 .

Обозначение: $g = f|_{X_1}$. При этом f называется продолжением g с X_1 на X .

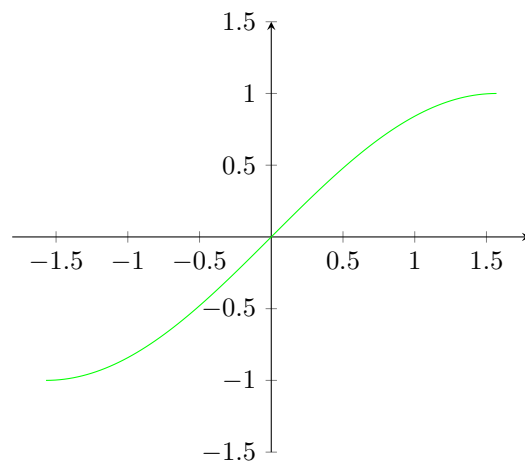


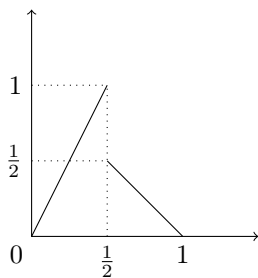
Рис. 1.1: sinus

Пример. $f(x) = \sin x$ $f|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$

Определение 8. Если $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, то $g \circ f : X \rightarrow Z$.
 $g \circ f(x) = g(f(x)) \forall x \in X$.
 $g \circ f$ называется композицией f и g .

Пример. Изобразить эскизы графиков функций для всех случаев

1. $f(x) = \sin x, g(x) = x^2$
2. $f(x) = x^2, g(x) = \sin x$
3. $f(x) = g(x)$



Построить $f^{(2)}, f^{(3)}, f^{(4)}$ без формул.

Определение 9. Функция $f : X \rightarrow Y$ называется инъекцией, если

$$\begin{cases} f(x_1) = y \\ f(x_2) = y \end{cases} \implies x_1 = x_2$$

Пример. $f(x) = kx + b$ – инъекция, $k \neq 0$

$f(x) = \sin x$ – не инъекция

$f(x) \mid_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ – инъекция

Определение 10. $f : X \rightarrow Y$ называется сюръекцией, если

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X : f(x) = y.$$

Пример. $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – не сюръекция

$\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ – сюръекция

$y = kx + b, k \neq 0$ – сюръекцией

Определение 11 (биективность). $f : X \rightarrow Y$ – инъекция и сюръекция $\implies f$ называется биекцией

Пример. $y = kx + b, k \neq 0$ – биекция

Определение 12. $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$. g называется обратным к f отображением, если $f(x) = y \iff x = g(y)$. Обозначается: $g = f^{-1}$

Замечание. Обратимая функция должна быть биективной:

1. Инъективной – обратная иначе не будет функцией.
2. Сюръективной – обратная иначе не будет определена на всём Y .

Замечание. $f^{-1}(A)$ – обычно прообраз A под действием f , а не образ обратной функции (которая может не существовать).

Пример. $\arcsin = (\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1}$

$\log_a(x) = (a^x)^{-1}$

$\sqrt{x} = (x^2|_{[0, +\infty)})^{-1}, \sqrt[3]{x} = (x^3)^{-1}$

1.3 Вещественные числа

1.3.1 Аксиоматическое определение вещественных чисел

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ – множество, две операции и отношение порядка, удовлетворяющие следующим 16 аксиомам:

Аксиомы поля:

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a + b = b + a$ (коммутативность сложения)
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)
3. \exists нейтральный элемент 0 по сложению $\forall a \in \mathbb{R} \quad a + 0 = a$ (существование нейтрального элемента по сложению)
4. Существует обратный элемент по сложению.
 $\forall a \in \mathbb{R} \exists (-a) \in \mathbb{R} : \quad a + (-a) = 0$
5. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность умножения)
6. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность умножения)
7. $\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 1 = a$
8. $\forall a \neq 0 \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$
9. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (дистрибутивность)

примеры: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \{0, 1\}$ ($1 + 1 = 0$, остальное как обычно).

Элементарные следствия:

- $\forall a \in K$ – поля, обратный по сложению единственный. Если b, b' – два обратных, то $b = b + (a + b') = (b + a) + b' = b'$
- обратный по умножению, нейтральные – все единственны.

Аксиомы порядка:

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \leq b \vee b \leq a$
2. $a \leq b, b \leq c \implies a \leq c$ (транзитивность)
3. $a \leq b, b \leq a \implies a = b$
4. $a \leq b, c \in \mathbb{R} \implies a + c \leq b + c$
5. $a \geq 0, b \geq 0$, то $a \cdot b \geq 0$

$$0 \cdot x + x \cdot x = (0 + x) \cdot x = x \cdot x \implies 0 \cdot x = 0$$

Упражнения:

1. $-x = (-1) \cdot x$
2. $(-a)(-b) = a \cdot b$

3. $1 \geq 0$

Определение 13. Индуктивным множеством в упорядоченном поле $(K, +, \cdot, \leq)$ называется множество N :

1. $1 \in N$

2. $\forall x \in N \implies x + 1 \in N$

\mathbb{N} – наименьшее индуктивное множество. $\mathbb{N} = \bigcap_{N - \text{индуктивное}, N \subseteq \mathbb{R}} N$

Замечание. $x > b \iff \begin{cases} x \geq b \\ x \neq b \end{cases}$

Аксиома Архимеда: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x > 0, y > 0 \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$.

Аксиома вложенных промежутков:

$\forall \{[a_n, b_n]\}_{n \in \mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N} [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n] \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$

В аксиоме о вложенных промежутках предполагается, что

$\forall n \in \mathbb{N}, [a_n, b_n] \neq \emptyset \iff a_n \leq b_n$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ – замкнутый отрезок, промежуток, сегмент, замкнутый промежуток

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ – интервал, открытый промежуток

$[a, b), [a, b]$ – полуоткрытый промежуток

$< a, b >$ – некоторый промежуток $a \leq b, < a, b > \neq \emptyset$

Замечание (Расширенная вещественная прямая). $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

$\forall a \in \mathbb{R} \quad a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$

$a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

$(+\infty) + (-\infty), (-\infty) + (+\infty)$ – не определены

$\forall a > 0$

- $(+\infty) \cdot a = a \cdot (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) \cdot a = a \cdot (-\infty) = -\infty$
- $\pm\infty \cdot (-1) = \mp\infty$
- $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

- $(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$
- $(\pm\infty) \cdot 0, 0 \cdot (\pm\infty)$ – не определены

$\forall a \in \mathbb{R}$

- $+\infty \geq a \geq -\infty$

$$[a, +\infty] = [a, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

В “ $+\infty$ ” иногда $+$ опускают, но подразумевают её, если рассматривается $\overline{\mathbb{R}}$

1.4 Модуль

$$a \in \mathbb{R} \quad |a| = \begin{cases} a & , \text{если } a \geq 0 \\ -a & , \text{если } a < 0 \end{cases}$$

$$\text{Свойство 1. } b = |a| \iff \begin{cases} b \in \{a, -a\} \\ b \geq 0 \end{cases}$$

Элементарные свойства модуля:

1. $\forall a \in \mathbb{R} \quad |-a| = |a|$
2. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \pm a \leq |a|$
3. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
4. $\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \left(\left|\frac{a}{b}\right|\right) = \frac{|a|}{|b|}$
5. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad ||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

Замечание. $a - b := a + (-b), \quad \frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}, b \neq 0.$

Замечание. $a \leq b \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad a + c \leq b + c$

$$a \leq b \quad b \leq c \implies a \leq c$$

$$a \leq b, c \leq d \quad a + c \stackrel{?}{\leq} b + d$$

$$a + c \leq b + c \quad b + c \leq b + d \implies a + c \leq b + d$$

Доказательство. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad ||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

$\pm a \leq |a|, \pm b \leq |b| \quad \pm(a + b) \leq |a| + |b|$ (аксиома порядка 4)

$$\implies |a + b| \leq |a| + |b| \implies |a - b| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$$

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$$

$$|a| - |b| \leq |a - b| \quad |b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$$

$$||a| - |b|| = \pm(|a| - |b|) \leq |a - b|$$

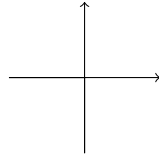
■

Замечание. $|+\infty| := +\infty \quad |-\infty| := +\infty$

1.5 Комплексные числа

\mathbb{C} – обозначение для множества комплексных чисел.

$$\mathbb{C} = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$



Удобно представлять на плоскости.

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Замечание. \mathbb{C} – поле

Аксиомы для сложения очевидны.

$$0 = (0, 0), \quad 1 = (1, 0)$$

$$-(x, y) = (-x, -y)$$

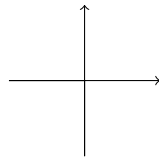
$$(x, y) \cdot (1, 0) = (x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$i = (0, 1) \quad i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$$

$\mathbb{R} \leftrightarrow \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ (именно такие пары, потому что так сохраняются операции)

$F : \mathbb{R} \rightarrow \{(x, 0)\}$ F сохраняет $+$ и сохраняет \cdot .

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \quad (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$$



Оси: вещественная(x) и мнимая(y)

$$(0, y)^2 = (-y^2, 0) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$(x, y) = x + iy$ $i = (0, 1)$ – мнимая единица. Алгебраическая форма записи комплексных чисел.

$z = x + iy$ x – вещественная часть z , y – мнимая часть z

$Re z = x, \quad Im z = y$ иногда встречается rp, ip – real/imaginary part.

Замечание (Комплексное сопряжение). $z = x + iy \quad \bar{z} = x - iy$ – отражённое от оси x , если смотреть на плоскость.

$Re z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad Im z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ – вещественные числа!

Замечание (Модуль и аргумент). $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2$$

$$r = |z|$$

Аргумент – угол (ориентированный) между осью Ox и \vec{Oz} .

Аргументов много $Arg z, z \neq 0$ – совокупность всех аргументов.

Если $\varphi_0 \in Arg(z)$, то $Arg z = \{\varphi_0 + 2\pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Если $\begin{cases} \varphi_0 \in Arg z \\ \varphi_0 \in (-\pi, \pi] \end{cases}$, то φ_0 называется главным значением аргумента $\varphi_0 = arg(z)$.

$z = (x, y) = (r, \varphi)$, r – длина радиус-вектора, φ – аргумент.

(r, φ) – полярные координаты, совмещённые с прямоугольными

Замечание. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$x > 0 \quad arg z = \arctg \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$y > 0 \quad arg z = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$y < 0 \quad arg z = -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad arg z = \arctg \frac{y}{x} + \pi$$

остальное – упражнение

Изобразить кривую заданную в полярных координатах:

1. $r = 3$
2. $r = \varphi$ – спираль Архимеда
3. $r = e^\varphi$
4. $r = \frac{1}{\cos \varphi}$

$$5. r = \frac{2}{\sin \varphi}$$

$$6. r = \frac{3}{\cos \varphi + \sin \varphi}$$

$$7. r = 1 + \cos \varphi$$

$(0, 0)$ – полюс

$r(\varphi) \uparrow$ – удаление от полюса

$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ – в скобках точка на единичной окружности с аргументом таким же, что и у z .

Это называется тригонометрической формой записи числа.

$$-\frac{1}{2}(\cos \varphi_0, \sin \varphi_0) = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\varphi_0 + \pi) + i \sin(\varphi_0 + \pi))$$

$$e^{i\varphi} := \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

$r \cdot e^{i\varphi}$ – экспоненциальная (показательная) форма числа.

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Если $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$, то $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ (см. курс алгебра).

$n \in \mathbb{N} \quad z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$ – формула Муавра.

1.6 Дополнение к разделу “Действия над множествами”

Утверждение 1. Пусть B – множество, $\{A_i\}_{i \in I}$ – семейство множеств.

$$B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$$

$$\begin{aligned} \text{Доказательство. } x \in B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) &\iff \begin{cases} x \in B \\ x \in \bigcup_{i \in I} A_i \end{cases} \iff \begin{cases} x \in B \\ \exists i : x \in A_i \end{cases} \iff \\ \exists i : \begin{cases} x \in B \\ x \in A_i \end{cases} &\iff \exists i : x \in B \cap A_i \iff x \in \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.7 Принцип математической индукции

P_n – утверждение, зависящее от n

$$\begin{cases} P_1 - \text{верно} \\ P_n \rightarrow P_{n+1} \end{cases} \implies \forall n \in \mathbb{N} \quad P_n - \text{верно.}$$

$$\{n : P_n - \text{верно}\} - \text{индуктивно} \implies \mathbb{N} \subseteq \{n : P_n - \text{верно}\}$$

Первый шаг (проверка P_1) называется базой индукции, а второй – переходом

Пример. $2^n \geq n^2 \quad \forall n \geq 4, n \in \mathbb{N}$

$P_4 \quad 2^4 \geq 4^2 \quad 16 \geq 16$ – верно

$\square P_n$ – верно

$P_{n+1} : \quad 2^{n+1} \geq (n+1)^2$

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \geq n^2 \cdot 2 \stackrel{?}{\geq} (n+1)^2 \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \leq 2$$

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{4}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leq \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \leq 2$$

Определение 14. $\forall n \in \mathbb{N} \quad n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$

$0! := 1$ – соглашение

$$(n+k)! = n! \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+k)$$

$n!! = n \cdot (n-2) \cdot \dots$ (заканчивается либо 1, либо 2)

n – чётно, $n!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$

n – нечётно, $n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n$

Определение 15 (биномиальный коэффициент). $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальный коэффициент, число сочетаний из n по k

$$\binom{n}{k}$$

Элементарные свойства биномиальных коэффициентов:

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$
2. $C_n^0 = C_n^n = 1$
3. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
4. $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{k!(n+1-k)!} \cdot (n+1-k+k) = C_{n+1}^k$$

1

1 1

1 2 1

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

Утверждение 2. $\forall a, b \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$ – бином Ньютона.

Замечание. $\sum_{k=1}^N a_k := a_1 + a_2 + \dots + a_N$

$$\sum_{k=m}^{m+p} a_k := a_m + a_{m+1} + \dots + a_{m+p}$$

$$\prod_{k=m}^{m+p} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_{m+p}$$

Замечание. $x^0 := 1 \quad \forall x \in \mathbb{C}$ – определили функцию

Доказательство бинома по индукции. База: $n = 1 \quad (a+b)^1 = \sum_{k=0}^1 C_1^k a^k b^{1-k} = C_1^0 a^0 b^1 + C_1^1 a^1 b^0 = a + b$

Переход: Пусть верно для n . Докажем для $n + 1$:

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} \right) \cdot (a+b) = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k+1} \stackrel{(j=k+1)}{=} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n+1-k} \stackrel{k=j}{=} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n+1-k} = \\ &= C_n^n a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n (C_n^{k-1} a^k b^{n+1-k} + C_n^k a^k b^{n+1-k}) + C_n^0 a^0 b^{n+1} = \\ &= C_{n+1}^{n+1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k a^{n+1} b^{n+1-k} + C_{n+1}^0 a^0 b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

что и требовалось доказать ■

1.8 Метрические пространства

Определение 16. Пусть X — любое множество, а $\rho : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$.

Тогда пара (X, ρ) называется метрическим пространством, если функция ρ удовлетворяет аксиомам метрики:

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$ (невырожденность)
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность)
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \forall x, y, z \in X$ (неравенство треугольника)

Тогда ρ называется метрикой или расстоянием на X .

Пример. 1. (X, ρ_D) — метрическое пространство

$$\rho_D(x, y) = \begin{cases} 0 & , \text{если } x = y \\ 1 & , \text{если } x \neq y \end{cases}$$

2. $X = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|$

$$x - y = a, y - z = b \quad \rho(x, z) = |a - b| \leq |a| + |b| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

Обычная или Евклидова метрика

≈ 2 $X = \mathbb{C} \quad \rho(z, w) = |z - w|$ (аксиома 3 будет проверена позже)

≈ 2 $X = \mathbb{R}^n, x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \quad \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$.

$$v = (v_1, \dots, v_n) \quad \|v\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n v_k^2} - \text{евклидова норма вектора } v.$$

3. $\sqsubset (X, \rho)$ — метрическое пространство

$$\sqsubset X_1 \subseteq X \quad \rho_1 = \rho|_{X_1 \times X_1}$$

Тогда (X_1, ρ_1) — есть метрическое пространство, а ρ_1 называется индуцированной метрикой.

4. X — множество станций метрополитена г. Санкт-Петербурга. Пусть между соседними станциями расстояние — 2 минуты. $\rho(u, v) = \min$ длин путей из u в v

ρ — метрика

Определение 17. Открытый шар с центром в точке a радиусом R в метрическом пространстве (X, ρ) :

$$B_R(a) = \{x \in X : \rho(x, a) < R\}$$

$$B_R[a] = \{x \in X : \rho(x, a) \leq R\}$$

Пример. 1. $(0 \vee 1) B_R(a) = \begin{cases} \{a\} & , \text{если } R \leq 1 \\ X & , \text{если } R > 1 \end{cases}$

2. $(a - R, a + R)$

3. круг (без окружности)

4. n -мерный шар

в \mathbb{R}^n $\|v\|_1 = \sum_{k=1}^n |v_k|$ $\|v\|_\infty = \max_{k=1:n} |v_k|$

Определение 18. $E \subseteq \mathbb{R}, \begin{cases} M \in E \\ \forall x \in E \quad M \geq x \end{cases} \implies M := \max E$

$\rho(x, y) = \|x - y\|$

$\rho_1(x, y) = \|x - y\|_1$ $\rho_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty$

Упражнение: проверить, что ρ_1, ρ_∞ – метрики, нарисовать шар в \mathbb{R}^2 относительно ρ_1, ρ_∞ .

Определение 19. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. $E \subseteq X$, E называется ограниченным, если

$$\exists a \in X, \exists R > 0 : E \subseteq B_R(a)$$

Замечание. Эквивалентное определение: те же слова, но $B_R[a]$.

Определение 20. Пусть $E \subseteq \mathbb{R}$. E называется ограниченным сверху, если

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in E \quad x \leq m.$$

При этом такое число m называется мажорантой. Говорят: m мажорирует E

Аналогичное определение для ограниченности снизу. Соответствующее m называется минорантой.

Утверждение 3. Пусть $E \subseteq \mathbb{R}$.

$$E \text{ – ограничено} \iff \begin{cases} E \text{ – ограничено сверху} \\ E \text{ – ограничено снизу} \end{cases}.$$

Доказательство. \implies : по условию $\exists a : E \subseteq (a - R, a + R)$.

$M := a + R$ – мажоранта $\implies E$ ограничено сверху. Снизу – аналогично.

$\Leftarrow : E$ – ограничено сверху $\implies \exists M \in R : \forall x \in E \quad x \leq M$.

$\dots \exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in E \quad x \geq m$

$-x \leq -m \leq |m| \implies |x| = \max\{x, -x\} \leq \max\{|M|, |m|\} = R$

$\implies x \in B_R[0]$. Т.к. это верно $\forall x \in E$, то $E \subseteq B_R[0]$

■

Замечание. Если $E \subseteq \mathbb{R}$, то

E – ограничено $\iff \exists R : \forall x \in E \quad |x| \leq R$.

Определение 21. $E \subseteq \mathbb{R}, M \in E$, тогда

$$M = \max E \iff \forall x \in E \quad x \leq M.$$

$\min E$ аналогично.

Утверждение 4. $\forall E \subseteq \mathbb{R} : E$ – конечно и $E \neq \emptyset \implies \exists \max E, \min E$

Определение 22. E конечно, если $\exists m \in \mathbb{N}$ и \exists биекция $\varphi : E \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$

Доказательство утверждения. Индукцией по числу элементов в E .

База: $m = 1 \quad E = \{x\} \quad \max E = \min E = x$

Переход: $m \rightarrow m + 1$

Индукционное предположение: любое конечное множество из M элементов имеет \max и \min .

Пусть E содержит $m + 1$ элементов. $E = \{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}\} = \tilde{E} \cup \{x_{m+1}\}$.

$M = \max\{\max \tilde{E}, x_{m+1}\}$.

$$\begin{cases} M \in \tilde{E} & \subseteq E \\ M = x_{m+1} & \in E \end{cases} \implies M \in E$$

$$\begin{cases} M \geq x_{m+1} \\ M \geq x \forall x \in \tilde{E} \end{cases} \implies M \geq x \forall x \in E, \text{ т.о. } M = \max E$$

■

Следствие 1. Пусть $E \subseteq \mathbb{Z}$, E – ограничено сверху (снизу).
Тогда $\exists \max(\min)E$.

Доказательство. По условию существует $M \in \mathbb{R} : \forall x \in E \quad x \leq M, \exists M \geq M$.

$$\exists n \in E \quad \triangleleft \tilde{E} = \{x \in E : n \leq x \leq \tilde{M}\}$$

В \tilde{E} не более $\tilde{M} - n + 1$ элементов, оно конечно \implies (по утверждению)
 $\exists \max \tilde{E} = C$

$$\forall x \in E^x < n \vee x \geq n$$

$$x < n \quad n \in \tilde{E} \implies n \leq C \implies x \leq C$$

$$x \geq n \quad x \in \tilde{E} \implies x \leq C \quad \blacksquare$$

Следствие 2. Пусть $E \subseteq \mathbb{N}$ $E \neq \emptyset$. Тогда $\exists \min E$ (вытекает из следствия 1, т.к. \mathbb{N} ограничено снизу).

$\lfloor x \rfloor$ – целая часть числа. $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ (Существует по следствию 1)

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Утверждение 5. \mathbb{Q} плотно в \mathbb{R} , т.е. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \quad \exists c \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$

$$\text{Доказательство. } b - a > 0 \implies \frac{1}{b-a} > 0$$

$$\exists N \in \mathbb{N} : N > \frac{1}{b-a} \iff b - a > \frac{1}{N}$$

$$c = \frac{\lfloor Na \rfloor + 1}{N} \in \mathbb{Q}$$

$$Na - 1 < \lfloor Na \rfloor \leq Na \implies a = \frac{Na}{N} < c \leq \frac{Na+1}{N} = a + \frac{1}{N} < a + b - a = b$$

$$\implies c \in (a, b) \quad \blacksquare$$

1.9 Равномощные множества

Определение 23. Пусть A, B – множества. A равномощно B , если \exists биекция между A и B . Пишут $A \sim B$.

Пример. 1. $(a, b), a < b \sim (0, 1) \quad f(x) = a + (b - a) \cdot x, x \in (0, 1)$

$\bar{1} \quad \forall (a, b) \text{ и } (c, d) \text{ равномошны}$

2. $a < b \implies (a, b) \sim [a, b] \sim [a, b]$

3. $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R} \quad (\text{tg})$

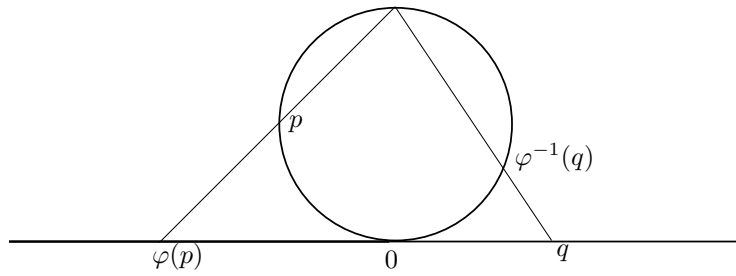


Рис. 1.2: circ

Замечание. (равномошность) \sim – отношение эквивалентности.

1. $X \sim X \quad id(x) \equiv x$ – тождественное отображение id_X

2. $X \sim Y \implies Y \sim X$

3. $X \sim Y \quad Y \sim Z \implies X \sim Z$

Определение 24. Множество, равномошное \mathbb{N} , называется счётным

Пример. • $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$ – счётно. $f(x) = x^2$

• $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4\}$ – считаем их натуральными числами в таком порядке.

• $\{m, m + 1, m + 2, \dots\}, m \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = m + x - 1$

Теорема 1. Любое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

Доказательство. Пусть X — бесконечное множество. $\implies \exists a_1 \in X \quad X \setminus \{a_1\} \neq \emptyset$ (Иначе $X = \{a_1\}$!!!) $\implies \exists a_2 \in X \setminus \{a_1\} \quad a_2 \neq a_1$

Так можно продолжать для любого n . $X \setminus \{a_1, \dots, a_n\} \neq \emptyset$ (иначе X конечно) $\implies \exists a_{n+1} \in X \setminus \{a_1, \dots, a_n\}, \quad a_{n+1} \notin \{a_1, \dots, a_n\}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi : n \rightarrow a_n \quad A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \varphi$ — инъекция по построению. A — счётное ■

Определение 25. Если X — конечно $\vee X$ — счётно, то X называется не более чем счётным (нбчс).

Замечание (уточнение понятие конечного).

$$X \text{ конечно} \iff \begin{cases} X \sim \{1, \dots, n\} \\ X = \emptyset \end{cases}$$

Теорема 2. \forall счётного E , если $X \subseteq E$, X — бсконечно, то X — счётно.

Замечание. Любое подмножество счётного не более чем счётно.

Доказательство. E — счётно по условию $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \dots\}$. В данном наборе есть элементы из X . Пронумеруем их в порядке возникновения в наборе (*). ■

Теорема 3. Произведение счётных множеств счётно.
 A, B — счётны $\implies A \times B$ — счётно

Доказательство. Если $A = B = \mathbb{N}$, то \mathbb{N}^2 счётно.

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \dots \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \dots \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \text{ — нумеруем по диагоналям.}$$

$$A \times B = \{(a_K, b_j)\}_{K,j \in \mathbb{N}} \quad l \rightarrow (k, j) \quad = \{(k, j)_l\}_{l \in \mathbb{N}} \quad \blacksquare$$

Замечание. Любое конечное произведение $\underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}_m = (\mathbb{N}^m) \sim \mathbb{N}$ не более чем счётно

Теорема 4. Объединение счётного количества счётных множеств счётно.

$\{\{A_j\}_{j \in J} : J - \text{не более чем счётно} \quad \forall j \in J \quad A_j \text{ не более чем счётно}\}$

$\bigcup_{j \in J} A_j$ — не более чем счётно. Не умаляя общности (н.у.о.)

$J = \mathbb{N} \vee J = \{1, 2, \dots, n\}$

Элементы A_1, A_2, \dots (счётных!) множеств можно занумеровать.

$A_1 : \quad a_{11}, a_{12} \dots$

$A_2 : \quad a_{21}, a_{22} \dots$

$A_3 : \quad a_{31}, a_{32} \dots$

Перенумеруем по диагоналям лишь те, который встречаем в первый раз

Следствие 3. 1. \mathbb{Q} счётно. $\mathbb{Q} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_N \quad \mathbb{Q}_N = \{\frac{p}{n}\}_{p \in \mathbb{Z}}$

2. $A = \{x : \exists \text{ полином с целыми коэффициентами } P(\cdot) : P(x) = 0\}$

$\mathbb{P}_n = \{p(x) = a_0 + \dots + a_n x^n : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\} \quad \mathbb{P}_n \hookrightarrow \mathbb{Z}^{n+1}$

$A_n = \{x : \exists p \in \mathbb{P}_n : p(x) = 0\} \quad A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

Задача 1. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots$ — несчётно

Теорема 5. Сегмент несчётен ($\forall a, b : a < b \quad [a, b]$ — не является счётным)

Доказательство. Доказательство от противного.

$\square [a, b] - \text{счётен} \implies [a, b] = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}.$

\triangleleft три замкнутые “трети” $\Delta = b - a \quad [a, a + \frac{\Delta}{3}], [a + \frac{\Delta}{3}, a + \frac{2\Delta}{3}], [a + \frac{2\Delta}{3}, b]$

$x_1 \notin$ одной из третей. Эту треть назовём I_1 . Повторим действие для I_1 и x_2

$I_2 \subseteq I_1 \subseteq I_0, x_1 \notin I_1, x_2 \notin I_2$

$I_n \subseteq I_{n-1} \subseteq \dots \subseteq I_2 \quad x_n \notin I_n$

По аксиоме № 16 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset \quad \square x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \implies c \in [a, b] \implies \exists n : c = x_n \notin$

$I_n \implies c \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n !!!$

Т.о. $[a, b]$ — несчётно ■

Следствие 4. несчётные: $\mathbb{R}, (a, b), \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
 $a < b$

$X \sim [0, 1]$, то говорят, что X – мощности континуум (мощности \mathbb{C})

Задача 2. 1. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$

2. Если X – множество, то $X \not\sim 2^X$ $2^X = \{A : A \subseteq X\}$

$$X = \emptyset \quad 2^X = \{\emptyset\}$$

$$X = \{a\} \quad 2^X = \{\emptyset, \{a\}\}$$

3. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim [0, 1]$

Определение 26. Пусть X – любое множество. Отображение из \mathbb{N} в X называется последовательностью в X .

Вместо $f(n), n \in \mathbb{N}$ $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ используют $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ или $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ $n \rightarrow x_n \in X$

1.10 Предел числовой последовательности

Определение 27. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность вещественных чисел. $x_+ \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n := x_+ \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad |x_n - x_+| < \varepsilon.$$

В метрическом пространстве (X, ρ) шар $B_R(a)$ называется также R -окрестностью точки a .

Определение 28 (Определение предела на языке окрестностей).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_* \iff \forall \text{ окрестности } U \text{ точки } x_* \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad x_n \in U$$

Пример. $x_n = \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N} \quad x_* = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad n > \frac{1}{\varepsilon} \quad N := \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$$

Замечание. Определение предела на “языке окрестностей” справедливо в случае последовательностей в метрическом пространстве.

$$x_n \rightarrow x_* \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad \rho(x_n, x_*) < \varepsilon.$$

Утверждение 6. Пусть X – метрическое пространство и $c \in X$. Если $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = c$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$.

Доказательство. $x_* = c \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \rho(x_n, x_*) = 0 < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$N = 1$ ■

Замечание. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательности в метрическом пространстве X и $\exists m \in \mathbb{N} \quad x_n = y_n \quad \forall n \geq m$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ совпадают (если существует один, то существует другой и равны при существовании).

Утверждение 7 (единственность предела). Пусть (X, ρ) , $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$, $y, z \in X$. Если $x_n \rightarrow y$ и $x_n \rightarrow z$, то $y = z$.

Доказательство. Если $y \neq z$, то $\rho(y, z) = \Delta > 0 \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{2}$

Т.к. $x_n \rightarrow y, x_n \rightarrow z$, то $\exists N_1, N_2 :$

$\forall n > N_1 \quad \rho(x_n, y) < \varepsilon$

$\forall n > N_2 \quad \rho(x_n, z) < \varepsilon$

$\forall n \geq \max\{N_1, N_2\} \quad \begin{cases} \rho(x_n, y) < \varepsilon \\ \rho(x_n, z) < \varepsilon \end{cases} \implies \Delta = \rho(y, z) \leq \rho(y, x_n) + \rho(x_n, z) < 2\varepsilon = \Delta \implies \Delta < \Delta !!!$ ■

Пример. $x_n = (-1)^{-1} \forall n \in \mathbb{N} \not\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1}$

Если бы $\exists x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1}$, то для $\varepsilon = 1 \exists N$

$n = 2N \quad |(-1)^{n-1} - x_*| = |-1 - x_*| < 1$

$n = 2N + 1 \quad |(-1)^{n-1} - x_*| = |1 - x_*| < 1$

$2 = |1 - (-1)| \leq |1 - x_* + x_* - (-1)| \leq |1 - x_*| + |x_* - (-1)| < 2$

Определение 29. Ограниченной называется такая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что ограничено множество её значений $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Определение 30. В метрическом пространстве сходящейся последовательностью называется последовательность, у которой существует предел (в этом пространстве).

Теорема 6. Сходящаяся в метрическом пространстве последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – сходящаяся в метрическом пространстве (X, ρ) последовательность, т.е. $\exists x^* \in X \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \quad \rho(x_n, x^*) < \varepsilon$

$$\square \varepsilon = 1, \square N = N(\varepsilon), \text{ т.е. } \forall n > N \quad \rho(x_n, x^*) < 1$$

$$R = \max\{\rho(x_1, x^*), \rho(x_2, x^*), \dots, \rho(x_N, x^*), 1\} \implies \forall n \in \mathbb{N} x_n \in B_r[x^*] \implies \{x_n\} \text{ – ограничена} \quad \blacksquare$$

Теорема 7 (предельный переход в неравенствах). Пусть $\{x_n\}, \{y_n\}$ – вещественные последовательности. $x_n \rightarrow x_*, y_n \rightarrow y_* \quad x_*, y_* \in \mathbb{R} \quad \forall n \quad x_n \leq y_n \implies x_* \leq y_*$

Отметим, что из $x_n < y_n$ НЕ следует, что $x_* < y_*$.

Пример: $x_n = 0, y_n = \frac{1}{n}, x_* = y_* = 0$, но при этом $x_n < y_n \forall n \in \mathbb{N}$

Доказательство. от противного. $\square x_* > y_* \quad \varepsilon = \frac{x_* - y_*}{2}$

Т.к. $x_n \rightarrow x_*$, то $\exists N_1 (= N(\varepsilon)) : \forall n \in \mathbb{N}, n > N_1 \quad |x_n - x_*| < \varepsilon$

$\exists N_2 (= N(\varepsilon)) \forall n > N_2 \quad |y_n - y_*| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} \text{Если } N = \max\{N_1, N_2\} \text{ и } n \in \mathbb{N} \quad n > N &\implies \begin{cases} |x_n - x_*| < \varepsilon \\ |y_n - y_*| < \varepsilon \end{cases} \implies \\ \begin{cases} x_n - x_* > -\varepsilon \\ y_n - y_* > -\varepsilon \end{cases} \implies \begin{cases} x_n > x_* - \varepsilon = x_* - \frac{x_* - y_*}{2} = \frac{x_* + y_*}{2} \\ y_n < y_* + \varepsilon = y_* - \frac{x_* - y_*}{2} = \frac{x_* + y_*}{2} \end{cases} \implies y_n < x_n \end{aligned} \quad \blacksquare$$

!!!

Частные случаи(следствия): Пусть $\{x_n\}$ – вещественная последовательность

$$1. \square \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq b, b \in \mathbb{R} \text{ и } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq b$$

$$2. \dots \geq a \dots \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq a$$

$$3. \square n \in \mathbb{N} \quad x_n \in [a, b] \text{ и } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in [a, b]$$

Теорема 8 (о зажатой последовательности, “Принцип двух милиционеров”). Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ – вещественные последовательности, и $\forall n \in \mathbb{N} x_n \leq y_n \leq z_n$.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ (и пределы существуют), то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ и $a = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0$

Т.к. $x_n \rightarrow a$, то $\exists N_1 \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \implies |x_n - a| < \varepsilon$.

Т.к. $z_n \rightarrow a$, то $\exists N_2 \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}, n > N_2, |z_n - a| < \varepsilon$.

$N = \max\{N_1, N_2\}$, тогда $n \in \mathbb{N} \quad n > N$.

$$\begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon \\ |z_n - a| < \varepsilon \end{cases} \implies \begin{cases} x_n > a - \varepsilon \\ y_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon \implies |y_n - a| < \varepsilon \implies y_n \rightarrow a \quad \blacksquare$$

Определение 31. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – числовая последовательность.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется бесконечно малой, если $x_n \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$.

Замечание. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – б.м. $\iff \{|x_n|\}_{n=1}^{\infty}$ – б.м.

$\{x_n\}$ – б.м. $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} n > N \quad |x_n| < \varepsilon \implies |x_n|$ – б.м. ($||x_n| - 0| < \varepsilon$).

Определение 32. Число N из определения предела последовательности x_n называется ε -допуском этой последовательности, $D(\varepsilon)$ – набор всех ε -допусков для данной последовательности

Пример. Найти (какой-нибудь) ε -допуск для последовательности $\sqrt{\frac{n+1}{n}} = x_n$ для $\varepsilon > 0$

Доказательство. Найти $N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} n > N \quad \left| \sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 \right| < \varepsilon$
 $\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 < \varepsilon \iff \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \quad n > \frac{1}{\varepsilon^2} \quad N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1 \quad \blacksquare$

Определение 33. (X, K) — X — множество, K — поле ($K = \mathbb{R} \vee K = \mathbb{C}$)

“+” определено в X , \cdot на элемент K

$$\forall x, y \in X \quad x + y \in X \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot k \in X$$

(X, K) называется векторным (линейным) пространством, если

1. $\forall x, y \in X \quad x + y = y + x$
2. $\forall x, y, z \in X \quad (x + y) + z = z + (y + z)$
3. $\exists 0 \in X \quad x + 0 = x$
4. $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in X \quad \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$
5. $\forall \alpha, \beta \in K \quad \forall x \in X \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
6. $\forall \alpha \in K \forall x, y \in X \quad \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
7. $\forall x \in X \quad 1 \cdot x = x$

Пример. 1. $X = \mathbb{R} = K \quad X = \mathbb{C} = K \quad X = \mathbb{C}, K = \mathbb{R}$

2. $X = \mathbb{R}^n, K = \mathbb{R}$ — основной пример векторного пространства.

3. $X = \{f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}\}, K = \mathbb{R} \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x) \forall \alpha \in K, \forall f \in X$
 $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$
 $\mathbf{0}(x) := 0$

Определение 34. Пусть (X, K) — векторное пространство.

$p : X \rightarrow [0, +\infty)$ называется нормой на X , если

1. $p(x) = 0 \iff x = \mathbf{0}$ (невырожденность)
2. $\forall \alpha \in K \forall x \in X \quad p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ (положительная однородность)
3. $\forall x, y \in X \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (неравенство треугольника)

Функция $p : X \rightarrow [0, +\infty)$ и обладает свойствами 2, 3 называется полунормой.

Элементарные свойства полунормы:

1. $\forall x, y \in X \forall \alpha, \beta \in K \quad p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha| p(x) + |\beta| p(y)$
2. $\forall x \in X \quad p(-x) = p(x)$
3. $p(x - y) \geq |p(x) - p(y)|$
 $p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y)$
 $p(x) - p(y) \leq p(x - y) \quad p(y) - p(x) \leq p(y - x) = p(x - y)$

Замечание. Норма порождает метрику. (X, p) , X – векторное пространство.

$$\rho(x, y) = p(x - y) \leq p(x - z) + p(z - y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

Замечание. “Обычное” обозначение нормы $\|x\|$ вместо $p(x)$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \text{ – евклидова норма, } x \in \mathbb{R}^n$$

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$$

$$\|x\|_\infty = \max_{k=1:n} |x_k|$$

$$\|x\|_p = (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}, p \in [1, +\infty) \text{ – норма (проверка позже).}$$

Пример. $F(x)$ – строго монотонно возрастает, $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\rho_F(x, y) = |F(x) - F(y)| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$|F(x) - F(z)| = |F(x) - F(y) + F(y) - F(z)| \leq |F(x) - F(y)| + |F(y) - F(z)| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

“ $\|x\|$ ” = $\rho(x, 0)$ – не обязательно положительно однородна, т.е не всякая метрика порождена нормой.

Забегаая вперёд: $C[a, b] = \{f \text{ – непрерывная на } [a, b], f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}$ $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} \{|f(x)|\}$. Упражнение: доказать, что это норма.

Определение 35. Пусть (X, K) – векторное пространство.

$\langle x, y \rangle: X \times Y \rightarrow K$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ называется скалярным произведением на X , если

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ и $\forall x \in X \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
2. $\forall x, y, z \in X \forall \alpha, \beta \in K \quad \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$
3. $\forall x, y \in X \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Элементарные следствия:

1. $\langle z, \alpha x + \beta y \rangle = \bar{\alpha} \langle z, x \rangle + \bar{\beta} \langle z, y \rangle$
 $\langle z, \alpha x + \beta y \rangle = \overline{\langle \alpha x + \beta y, z \rangle} = \overline{\alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle} = \bar{\alpha} \overline{\langle x, z \rangle} + \bar{\beta} \overline{\langle y, z \rangle} = \bar{\alpha} \langle z, x \rangle + \bar{\beta} \langle z, y \rangle$
- 2.

Утверждение 8. Если (X, K) – векторное пространство, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение, то $\forall x, y \in X \quad |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$.

Доказательство. 1. $y = 0, y = 0 \cdot 0 \quad \langle x, y \rangle = \langle x, 0 \cdot 0 \rangle = 0$

2. $y \neq 0 \implies \langle y, y \rangle \neq 0 \quad z = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \in K$

$$0 \leq \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle - \bar{\alpha} \langle x, y \rangle - \alpha \langle x, y \rangle + \alpha \cdot \bar{\alpha} \langle y, y \rangle$$

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \operatorname{Re} \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \cdot \langle x, y \rangle + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle}$$

3. $2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle \cdot \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

■

Утверждение 9 (неравенство Коши-Буняковского-Шварца).

$$x = (x_1, \dots, x_n) \quad y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$\langle x, y \rangle_2 = \sum x_k y_k$$

$$\langle x, x \rangle = \|x\|_2^2$$

$$\langle y, y \rangle = \|y\|_2^2$$

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$$

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$$

Теорема 9 (О связи пределов и арифметических действий в нормированных пространствах). Пусть (X, K) — нормированное векторное пространство (векторное пространство, снабжённое нормой).

$\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty$ последовательности в X , $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ в K .

$x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y, x, y \in X \quad \alpha_n \rightarrow \alpha \in K$ Тогда

$$1. \quad x_n \pm y_n \rightarrow x \pm y$$

$$2. \quad \alpha_n \cdot x_n \rightarrow \alpha x$$

$$3. \quad \|x_n\| \rightarrow \|x\|$$

$$4. \quad \text{Если } X = \mathbb{R} \vee X = \mathbb{C}, K = X, y \neq 0, \forall n y_n \neq 0, \text{ то } \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{x}{y}$$

Доказательство. 1. $x_n + y_n \rightarrow x + y$?

$\forall \varepsilon > 0 \exists \varepsilon$ -допуск для $x_n + y_n$

$$\sqsupset N_1 \in \mathcal{D}(\frac{\varepsilon}{2}, \{x_n\})$$

$$\sqsupset N_2 \in \mathcal{D}(\frac{\varepsilon}{2}, \{y_n\})$$

$N = \max\{N_1, N_2\}$, если $n \in \mathbb{N}, n > N$

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ т.о. } N \in \mathcal{D}(\varepsilon, \{x_n + y_n\})$$

Для разности аналогично.

Лемма 1. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty$ – числовые последовательности, $\{a_n\}$ – ограничена, $\{b_n\}$ – б.м. $\implies \{a_n b_n\}$ – б.м.

Доказательство леммы. $\{a_n\}$ – ограничено $\implies \exists R > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq R$

b_n – б.м. \implies для $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \left(\frac{\varepsilon}{2}, \{b_n\} \right)$, т.е. $|b_n| < \frac{\varepsilon}{R} \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N$.
Тогда $|a_n b_n| = |a_n| |b_n| < R \cdot \frac{\varepsilon}{R} = \varepsilon \implies N \in \mathbb{N}(\varepsilon, \{a_n b_n\}) \implies a_n b_n \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$ ■

Доказательство теоремы:

$$2. \alpha_n x_n - \alpha x = \alpha_n x_n - \alpha x_n + \alpha x_n - \alpha x = (\alpha_n - \alpha) x_n + \alpha(x_n - x)$$

$$\|(\alpha_n - \alpha) \cdot x_n\| = |\alpha_n - \alpha| \|x_n\| \quad \|\alpha(x_n - x)\| = |\alpha| \|x_n - x\|$$

В каждой один из множителей ограничен, а другой бесконечно малый

$$\implies \|\alpha_n x_n - \alpha x\| \text{ – б.м. } \implies \alpha_n x_n - \alpha x \rightarrow 0 \implies \alpha_n x_n \rightarrow \alpha x$$

$$3. |||x_n|| - ||x||| \leq \|x_n - x\| \text{ – б.м.}$$

$$4. \frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} = x_n \cdot \frac{1}{y_n} \rightarrow x \cdot \frac{1}{y} \iff (2), \text{ если } \frac{1}{y_n} \rightarrow \frac{1}{y} \iff \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y} \text{ – б.м.}$$

$$\frac{y - y_n}{y y_n} = (y - y_n) \frac{1}{y} \frac{1}{y_n}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}|y| > 0 \quad \sqsubset N \in \mathbb{N}(\varepsilon, \{y_n\}) \quad n > N \implies |y_n - y| < \varepsilon$$

$$m = \min\{|y_1|, |y_2|, \dots, |y_n|, \varepsilon\} \text{ и } m > 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \leq N \vee n > N \quad |y_n| \geq m \vee |y_n| \geq |y| - |y_n - y| = 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon \geq m$$

$$m \implies \left| \frac{1}{y_n} \right| \leq \frac{1}{m} \implies \left\{ \frac{1}{y_n} \right\} \text{ – ограничено.}$$

■

Определение 36. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ – вещественная последовательность.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > N \quad x_n > M$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > N \quad x_n < M$$

$$\sqsubset \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > N \quad |x_n| > M$$

Замечание. 1. $x_n \rightarrow \infty \iff |x_n| \rightarrow +\infty$

$$2. x_n \rightarrow +\infty \vee x_n \rightarrow -\infty \implies x_n \rightarrow \infty \text{ (обратное неверно: } x_n = (-1)^n \cdot n \text{)}$$

Определение 37. Последовательности $x_n : x_n \rightarrow \infty$ называются бесконечно большими.

Замечание. $\{x_n\}$ – б.б. \implies неограничена (обратное неверно: $x_n = (1 + (-1)^n) \cdot n$ – неограничена и не б.б.).

Лемма 2 (О связи бесконечно больших и бесконечно малых). Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ – числовая последовательность и $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \neq 0$. Тогда x_n – б.б. $\iff \frac{1}{x_n}$ – б.м.

x_n – б.м. $\iff \frac{1}{x_n}$ – б.б.

Доказательство. x_n – б.б. $\iff \forall M > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} n > N \quad |x_n| > M \iff \frac{1}{x_n} < \frac{1}{M} \quad M = \frac{1}{\varepsilon}$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \dots \dots \left| \frac{1}{x_n} \right| < \varepsilon$ ■

$\{x_k\}_{k=1}^\infty, n \in \mathbb{N} \quad \{x_k\}_{n=k}^\infty$ – хвост последовательности x_k

Если $\{x_k\}_{k=1}^\infty$, то последняя лемма применима к некоторому хвосту этой последовательности.

Замечание. $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Теорема 10 (Арифметические действия над бесконечно большими). Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательности.

Замечание. $x_n \rightarrow \pm\infty$ имеет смысл тогда и только тогда, когда $x_n \in \mathbb{R}$.

- I) Если $x_n \rightarrow +\infty$, $\{y_n\}$ ограничено снизу, то $x_n + y_n \rightarrow +\infty$
- II) Если $x_n \rightarrow -\infty$, $\{y_n\}$ ограничена сверху, то $x_n + y_n \rightarrow -\infty$
- III) Если $x_n \rightarrow \infty$, $y_n \rightarrow a \in \mathbb{C}$ ограничено снизу, то $x_n + y_n \rightarrow \infty$
- IV) Если $x_n \rightarrow +\infty(-\infty)$ и $\exists \delta > 0 : y_n > \delta \ \forall n \in \mathbb{N}$, то $x_n \cdot y_n \rightarrow +\infty(-\infty)$
- V) Если $x_n \rightarrow +\infty(-\infty)$ и $\exists \delta > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \ y_n < -\delta$, то $x_n \cdot y_n \rightarrow -\infty(+\infty)$
- VI) Если $x_n \rightarrow \infty$ и $\exists \delta > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \ |y_n| > \delta$, то $x_n \cdot y_n \rightarrow \infty$
- VII) Если $x_n \rightarrow a \in \mathbb{C}$, $y_n \rightarrow \infty$ & $\forall n \in \mathbb{N} \ y_n \neq 0$, то $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$
- VIII) Если $x_n \rightarrow a \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, $y_n \rightarrow 0$, то $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$.
- IX) Если $x_n \rightarrow \infty$ и $\forall n \in \mathbb{N} \ y_n \neq 0 \ y_n \rightarrow a \in \mathbb{C}$, то $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$

Доказательство. (III) $z_n \rightarrow \infty \iff \forall M > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, n \in \mathbb{N} \ |z_n| > M$

$\triangleleft \forall M > 0$ По условию $y_n \rightarrow a \in \mathbb{C} \implies \exists C : \forall n \in \mathbb{N} \ |y_n| \leq C$

Т.к. $\{x_n\} \rightarrow \infty$, $\exists N' \in \mathbb{N} : x_n > M + C \ \forall n > N', n \in \mathbb{N}$.

$$a_n = |x_n + y_n| \geq |x_n| - |y_n| > M + C - C = M$$

$$N = N'$$

(V) $\forall M > 0 \exists N \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, n > N \ x_n y_n < -M$

Т.к. $x_n \rightarrow +\infty$, то для $\frac{M}{\delta} \exists N' \in \mathbb{N} : \forall n > N' \ n \in \mathbb{N} \ x_n > \frac{M}{\delta} \implies x_n y_n < \frac{M}{\delta} \cdot (-\delta) = -M, \ N = N'$

(IX) $y_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

1. $a \neq 0 \implies \frac{1}{y_n} \rightarrow \frac{1}{a}, \exists \delta > 0 : \left| \frac{1}{y_n} \right| > \delta$ (см теорему об арифметических действиях над сх. последовательностями) $\implies \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$ (по пункту VI)

■

$$\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Окрестность точки ∞ в $\hat{\mathbb{R}}$ – множество вида $\{\infty\} \cup \{x \in \mathbb{R} : |x| > R\}$.

Замечание. $x_n \rightarrow a \quad a \in \hat{\mathbb{C}}, a \in \overline{\mathbb{R}}, a \in \hat{\mathbb{R}} \iff \forall$ окрестности U_a в пространстве $X \exists$ окрестность $V_{+\infty} : \forall n \in \mathbb{N} \cap V_{+\infty} \implies x_n \in U_a$ (ещё одна формулировка на языке окрестностей).

Замечание (замечание к теореме). $x_n \rightarrow \pm\infty(\infty), y_n \rightarrow \pm\infty(\infty) \quad -\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty \cdot 0, +\infty + (-\infty), \infty + (\infty)$ – неопределённость, т.е. нет универсального утверждения про предел.

Пример. $\frac{\infty}{\infty}$

1. $x_n = n = y_n \rightarrow \infty \quad \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 1$
2. $x_n = n^2, y_n = n \rightarrow \infty \quad \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$
3. $x_n = n, y_n = n^2 \rightarrow \infty \quad \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$
4. $x_{2n} = 2n, x_{2n+1} = n^2 \quad y_{2n} = x_{2n+1}, y_{2n+1} = x_{2n}$
 $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ – упражнение.

Продолжение доказательства неравенства Коши-Буняковского-Шварца. $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \quad \forall$ скалярного произведения

Пример (Примеры скалярных произведений). $C([a, b]) = \{f : f \text{ непрерывна на } [a, b]\} \quad f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$\ell^2 = \{(x_1, x_2, \dots) : x_k \in \mathbb{C} \quad \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2} < +\infty\} \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

$$y = 0 \implies \langle x, y \rangle = \langle x, \mathbf{0} \rangle = \langle x, 0 \cdot \mathbf{0} \rangle = 0 \cdot \langle x, \mathbf{0} \rangle = 0 \quad \langle y, y \rangle = 0 \implies \text{КБШ верно}$$

$$y \neq 0 \implies \langle y, y \rangle > 0 \quad \lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

$$0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle - \lambda \langle y, x \rangle - \langle x, \lambda y \rangle + \langle \lambda x, \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle - \lambda \langle y, x \rangle - \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \cdot \bar{\lambda} \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \implies \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle - |\langle x, y \rangle|^2 \geq 0$$

$$\text{Равенство в КБШ} \iff x - \lambda y = 0 \quad x = \lambda y \quad (x \text{ коллинеарен } y)$$

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$|\sum_{k=1}^n x_k y_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$$

$$x \in \mathbb{C}^n, y \in \mathbb{C}^n \quad (|x_1|, \dots, |x_n|), (|y_1|, \dots, |y_n|)$$

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n |y_k|^2} \quad \blacksquare$$

Утверждение 10. Пусть (X, \mathcal{K}) — векторное пространство над полем $\mathcal{K} (= \mathbb{R}, \mathbb{C})$, в котором определено скалярное произведение $\langle x, y \rangle$. Тогда $p(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ есть норма на X .

$$\text{Доказательство. } p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad \lambda \in \mathcal{K}$$

$$\sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \cdot \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$$

$$p^2(x + y) \stackrel{?}{\leq} (p(x) + p(y))^2 = p^2(x) + p^2(y) + 2p(x)p(y) = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$$

$$p^2(x + y) = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$$

$$2\operatorname{Re} \langle x, y \rangle \leq 2|\langle x, y \rangle| \leq 2\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} \quad \blacksquare$$

Неравенство КБШ через норму: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \|x\| = P(x)$ для любой нормы порождённой скалярным произведением.

Утверждение 11. Пусть (X, \mathcal{K}) — векторное пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Если $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X \quad x, y \in X \quad x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \quad n \rightarrow +\infty$, то $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle, n \rightarrow +\infty$.

$$\text{Доказательство. } \langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle \rightarrow 0$$

$$(\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle) + (\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle) = \langle x_n, y_n - y \rangle + \langle x_n - x, y \rangle \rightarrow 0$$

Потому что $|\langle x_n, y_n - y \rangle| \leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| = \text{огр.} \cdot (\rightarrow 0) \rightarrow 0$. И аналогично со вторым. \blacksquare

1.11 Топологические свойства множеств в метрических пространствах

Определение 38. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. $E \subset X, a \in E$

a называется внутренней для $E \quad (a \in \operatorname{Int} E)$ если $\exists R > 0 : B_E(a) \subset E$.

Определение 39. Множество в метрическом пространстве называется открытым, если $E = \text{Int } E$.

Для “Остальных” множеств верно $\text{Int } E \subset E$.

Пример. 1. $E = X$, $X = \text{Int } E$, X - открыто

2. \emptyset – открыто

3. $(0, 1)$ – открытое множество $R = \min\{1 - a, a\}$

Утверждение 12. В любом метрическом пространстве открытый шар является открытым множеством.

Доказательство. \triangleleft открытый шар $B_R(a)$ в метрическом пространстве (X, ρ) .

$$\triangleleft \forall b \in B_R(a) \implies \rho(b, a) < r < R$$

$$\delta = R - r > 0 \quad \triangleleft B = B_\delta(b)$$

$$\sqsupset c \in B \implies \rho(c, a) \leq \rho(c, b) + \rho(b, a) < \delta + r = R - r + r = R$$

$$\text{Т.о. } b \in \text{Int}(B_R(a)) \implies B_R(a) - \text{открытое.} \quad \blacksquare$$

Замечание. Свойство внутренней точки (и внутренности) зависит от объемлющего пространства.

$$E \subseteq X, \quad E \subseteq Y, \quad \text{Int}_X E \neq \text{Int}_Y E \quad (\text{может оказаться неравным}).$$

Пример. $E = [0, 1]$, $X = \mathbb{R}$, $Y = E$ $\text{Int}_X [0, 1] = (0, 1)$, $\text{Int}_E E = [0, 1]$

Теорема 11 (свойства открытых множеств в метрических пространствах). Пусть (X, ρ) – произвольное метрическое пространство. Тогда

(I) \emptyset, X – открыты

$$(II) \quad \forall \{O_i\}_{i \in I} - \text{открытых} \implies \bigcup_{i \in I} O_i$$

$$(III) \quad \forall n \in \mathbb{N} \forall \{O_1, \dots, O_n\} - \text{открытых} \implies O_1 \cap \dots \cap O_n \text{ открыто}$$

Замечание. $O_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n = \{0\}$ – не открыто

Доказательство. (II) $\sqsupset x \in \bigcap_{i \in I} O_i \implies \exists i \in I : x \in O_i \quad O_i - \text{открыто}$

$$\implies x \in \text{Int } O_i \implies \exists \delta > 0 : B_\delta(x) \subseteq O_i \implies B_\delta(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i \implies$$

$$x \in \text{Int} \left(\bigcup_{i \in I} O_i \right) \implies \bigcup O_i - \text{открыто.}$$

$$\begin{aligned}
(\text{III}) \quad & \bigcap_{i \in I} O_i \implies \forall i = 1 : n \quad x \in O_i \implies \forall i = 1 : N \quad \exists \delta_i > 0 : \\
& B_{\delta_i}(x) \subseteq O_i \\
& \delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\} > 0 \implies B_\delta(x) \subseteq O_i \implies B_\delta(x) = \bigcap_{i=1}^N O_i \implies x \in \\
& \text{Int} \bigcap_{i=1}^N O_i \implies \bigcap_{i=1}^N O_i - \text{открыто}.
\end{aligned}$$

■

Определение 40.

X — множество, $\Omega \subseteq 2^X$. Ω называется топологической структурой (или топологией) на X , если

1. $\emptyset, X \in \Omega$
2. $\forall \{O_i\}_{i \in I} \subseteq \Omega \implies \bigcup_{i \in I} O_i \in \Omega$
3. $\forall N \in \mathbb{N} \forall O_1, \dots, O_N \in \Omega \implies O_1 \cap \dots \cap O_N \in \Omega$

При этом (X, Ω) называют топологическим пространством. Элементы Ω называют открытыми множествами в X (в (X, Ω)).

Т.о. любое метрическое пространство является топологическим.

Пример. 1. X — любое множество $\Omega = \{\emptyset, X\}$ — антидискретная (не метризуемо, если состоит больше, чем из одной точки).

2. X — любое множество, $\Omega = 2^X$ — дискретная топология.

3. $X = \mathbb{R}, \Omega = \{\mathbb{R} \setminus A : A - \text{конечное множество}\}$ или $\Omega_2 = \{\mathbb{R} \setminus A : A - \text{не более, чем счётное множество}\}$ или $\Omega_2 = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$.

Определение 41. Пусть (X, Ω) — топологическое пространство, $E \subseteq X, a \in X$.

a называется предельной для R (или точкой сгущения, $a \in E'$) $\iff \forall$ открытого $O : \overline{a \in O} \quad O \setminus \{a\} \cap E \neq \emptyset$.

“Открытая окрестность” точки a в топологическом пространстве X — это любое открытое, содержащее точку a .

$\dot{U}(a) = U \setminus \{a\}$ — проколота окрестность точки a .

Утверждение 13. Пусть $E \subseteq X, (X, \rho)$ — метрическое пространство.

$a \in E' \iff \exists \{x_n\} \subseteq E \setminus \{a\} : x_n \rightarrow a, n \rightarrow +\infty$

Доказательство. \Leftarrow : из определения.

$$\begin{aligned} \Rightarrow : \triangleleft B_{\frac{1}{n}}(a) \setminus \{a\} \cap E \neq \emptyset &\implies \exists x_n \in (B_{\frac{1}{n}} \setminus \{a\}) \cap E & \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \rightarrow \\ 0, n \rightarrow +\infty &\implies x_n \rightarrow a \end{aligned}$$

■

Определение 42. Множество E в топологическом пространстве (X, Ω) называется замкнутым, если $E' \subseteq E$.

Пример. 1. $E = (0, 1] \quad E' = [0, 1]$

2. $E = \{\frac{1}{k}\}_{k \in \mathbb{N}}, E' = \{0\}$

3. $E = \mathbb{R}, E' = \mathbb{R}$

Теорема 12. В любом топологическом пространстве множество открыто тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто.

Доказательство. Пусть (X, Ω) – топологическое пространство и $O \subseteq X$.

O – открыто. $F = X \setminus O$ – замкнуто?.

$\triangleleft a \in F', a \in F$?

Пусть нет, тогда $a \in O \implies (O \setminus \{a\}) \cap F = \emptyset \implies a \in F \implies F$ – замкнуто.

Пусть F – замкнуто $\implies ?$ $O = X \setminus F$ – открыто. Если $O = \emptyset$, то O – открыто.

Если $O \neq \emptyset$, $\triangleleft a \in O \implies a \notin F \implies a \notin F' \implies \exists$ окрестность U точки a : $(U \setminus \{a\}) \cap F = \emptyset \implies U \cap F = \emptyset$ (т.к. $a \notin F$) $\implies U \subset O = X \setminus F \implies X \in U \subseteq O \implies x \in \text{Int}O \implies (a - \forall)O$ – открытое. ■

Следствие 5. 1. Пусть (X, Ω) – топологическое пространство. Тогда

I) \emptyset, X – замкнутые

II) \forall семейства $\{F_i\}_{i \in I}$ замкнутых $\implies \bigcap_{i \in I} F_i$ – замкнуто

III) $\forall N \in \mathbb{N}, \forall \{F_1, \dots, F_N\}$ замкнутых $F_1 \cup \dots \cup F_N$ – замкнуто.

Определение 43. Пусть (X, Ω) – топологическое пространство и $E \subseteq X, a \in E$.

a называется изолированной точкой E , если \exists окрестность U точки a : $U \cap E = \{a\}$.

Определение 44. Пусть (X, Ω) – топологическое пространство и $E \subseteq X, a \in X$.

a называется точкой прикосновения E ($a \in Cl E$), если \forall окрестности U точки a $U \cap E \neq \emptyset$.

$Cl E$ – замыкание множества E $E \subseteq Cl E$.

Теорема 13 (О замыкании). Пусть $E \subseteq X, (x, \rho)$ – топологическое пространство. Тогда

- (I) $Cl E = E \cup E' = E' \cup (E \setminus E')$ – последнее является множеством изолированных точек.
- (II) $Cl E = \cap \{F : F \text{ – замкнуто}, E \subseteq F\}$
- (III) $Cl E$ – минимальное (по включению) замкнутое, содержащее E
(Если F – замкнуто, и $E \subseteq F$, то $Cl E \subseteq F$)
- (IV) Если X – метрическое пространство, то $x \in Cl E \iff \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n \rightarrow x$.

Доказательство. (I) $x \in Cl E \iff \begin{cases} x \in E \\ x \notin E \quad \forall \text{ окрестности } U \text{ точки } x : U \cap E \neq \emptyset \end{cases} \iff$
 $\begin{cases} x \in E \\ x \in E' \end{cases} \iff x \in E \cup E'$

(II) $x \in Cl E \iff F \text{ – замкнуто: } E \subseteq F \implies x \in F \implies x \in \text{Пр.ч (правой части)}$

$\supset x \in \text{Пр.ч.} = F$, если $x \notin Cl E \implies \exists$ окрестность U точки x : $U \cap E = \emptyset$

$\supset F_1 = F \setminus U$ – замкнуто, $F_1 \supseteq$, т.к. $E \subseteq F$ $E \cap U \neq \emptyset$, $F = F_1 \cap \dots$ $x \in F = F_1, x \notin F_1!!!$

III F – правая часть равенства в II. F – замкнуто как пересечение и для любого замкнутого $F_1 : E \subseteq F_1 \implies F \subseteq F_1$ (по определению пересечения)

$$\text{IV } ?x \in \text{Cl } E \iff \begin{cases} x \text{ изолированная для } E & x_n \equiv x \\ x \text{ предельная для } E & \text{тогда по характеристике предельной точки} \end{cases}$$

■

Задача 3. 1. $\text{Int } E \subseteq E$ $\text{Int}(\text{Int}(E)) = \text{Int } E$

2. $(\text{Int } E)^c = \text{Cl}(E^c)$

3. $\text{Cl}(\text{Cl}(E)) = \text{Cl}(E)$

4. $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$

$\text{Cl}(A \cup B) = \text{Cl}(A) \cup \text{Cl}(B)$

$\text{Int}(A \cup B) \neq \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$

$\text{Cl}(A \cap B) = \dots$

Замечание. $\text{Int } O$ — наибольшее открытое множество, содержащееся в O .

Определение 45. Пусть (X, Ω) — топологическое пространство, $E \subseteq X$ $a \in X$.

a называется граничной точкой для E , если \forall окрестности U точки a $U \cap E \neq \emptyset$ и $U \cap (E^c) \neq \emptyset$.

$\text{Fr } E = \{x : x \text{ — граничная для } E\} = \partial E$

Пример. 1. $X = \mathbb{R}, E = [0, 1]$ $\text{Int } E = (0, 1)$. $\text{Cl } E = [0, 1]$ $\text{Fr } E = \{0, 1\}$

2. $X = \mathbb{R}^2, E = \{(x, 0) : x \in [0, 1]\}$ $\text{Int } E = \emptyset, \text{Cl } E = E, \text{Fr } E = E$.

3. $X = [0, 1], E = [0, 1]$ $\text{Int } E = E, \text{Cl } E = E, \text{Fr } E = \emptyset$

Замечание. Если (X, ρ) — метрическое пространство.

$$\Omega = \left\{ \exists \text{ семейство открытых шаров } \{B_i\}_{i \in I} : O = \bigcup_{i \in I} B_i \right\}$$

$$(\forall O = \bigcup_{x \in O} B_{r(x)}(x))$$

Утверждение 14. $\sqsupset (X, \rho)$ — м.п., $Y \subseteq X$ Тогда Ω_Y совпадает с топологией, порождённой индуцированной метрикой.

Доказательство. $\Omega_{\rho,Y} = \{O : \exists \text{ открытые шары в } Y \{B_i\}_{i \in I} : O = \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup (\overline{B_i} \cap Y)\}$

$\overline{B_i}$ – шар с тем же центром и радиусом, но в X ■

Замечание. $Y \subseteq X$ O открыто в $Y \iff \exists \overline{O}$ открыто в $X : O = \overline{O} \cap Y$
 $\square F \subseteq Y$ F – замкнуто (в Y) $\iff \exists$ замкнутое \overline{F} в X $F = \overline{F} \cap Y$

Доказательство. F – замкнуто в $Y \iff Y \setminus F \in \Omega_Y \iff Y \setminus F = \overline{O} \cap Y$, (где $\overline{O} \in \Omega \iff X \setminus \overline{O}$ – замкнуто)

$F = Y \setminus (Y \setminus F) = Y \setminus (\overline{O} \cap Y) = Y \setminus \overline{O} = Y \cap (X \setminus \overline{O})$ ■

Пример. Примеры:

1. $X = \mathbb{R}^2$ $Y = B_1(0) \cup \{(2, 0)\} \cup \{(x, y) : xy = 1, x > 0, y > 0\}$

$B_1[0] = B_1(0)$

$B_{\frac{1}{2}}[2] = \{(2, 0)\} \cup \{(x, \frac{1}{x}) : (x - 2)^2 + \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{4}\}$

2. Y – график $y(x) = \sin \frac{1}{x}, x \neq 0$

$\text{Cl } E = Y \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$

Замечание. Если X – метрическое пространство $E \subseteq X$

$a \in E' \iff \forall$ открытой окрестности U точки a $\dot{U} \cap E$ бесконечно

1.12 Компактность, сходимость в себе, полнота пространств

Определение 46. $\square (X, \Omega)$ – т.пр. $\square E \subseteq X, \{A_i\}_{i \in I} \subseteq X$

Если $E \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, то говорят, что $\{A_i\}_{i \in I}$ образует покрытие множества E

Определение 47. $\square (X, \Omega)$ – т.п. $K \subseteq X$

K – называется компактным (в X), если \forall покрытия $\{O_i\}_{i \in I}$ множества K открытыми можно извлечь конечное подпокрытие: $\exists N : \exists i_1, i_2, \dots, i_n : K \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \dots \cup O_{i_n}$

Элементарные свойства компактных множеств:

Утверждение 15. Если K – компактно (в (X, Ω)) и $F \subseteq K$ и F – замкнуто, то F – компактно (в (X, Ω))

Доказательство. \triangleleft открытое покрытие $\{O_i\}_{i \in I}$ множества F

$\triangleleft O = X \setminus F$ – открытое $\implies \{O_i\}_{i \in I} \cup \{O\}$ – покрытие K

K – компакт $\implies \exists i_1, \dots, i_n : K \subseteq O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_n} \cup O$

$F \subseteq O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_n} \implies$ (покрытие $-\forall$) F – компакт ■

Утверждение 16. $\sqsupset (X, \Omega)$ – топ. пр-во $K \subseteq X$. Тогда следующие утверждения равносильны

$$K \text{ комп. в } X \quad (1.1)$$

$$K \text{ комп. в себе (комп в } (K, \Omega_K)) \text{.} \quad (1.2)$$

Доказательство.

1.1 \rightarrow 1.2 $\sqsupset \{G_i\}_{i \in I}$ – открытое покрытие K в $K \implies \forall i \in I \exists$ открытое в X $O_i : G_i = O_i \cap K \implies K \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i \implies \exists i_1, \dots, i_N : K \subseteq$

$\bigcup_{j=1}^N O_{i_j} \implies K \subseteq \left(\bigcup_{j=1}^N O_{i_j} \right) \cap K = \bigcup_{j=1}^N (O_{i_j} \cap K) = \bigcup_{j=1}^N G_{i_j}$, т.о. $\{G_{i_j}\}$ – конечное подпокрытие K в K

1.2 \rightarrow 1.1 $\triangleleft \forall$ открытое покрытие $\{O_i\}_{i \in I}$ K в X . $\sqsupset G_i = O_i \cap K$ – открытые в K

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i \implies K \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} O_i \right) \cap K = \bigcup_{i \in I} G_i$$

Т.к. K компактно в K , то $\exists i_1, \dots, i_N : K \subseteq G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_N} \implies K \subseteq O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_N}$ ($G_{i_1} \subseteq O_{i_1} \dots$). Т.о. $\{O_{i_1}, \dots, O_{i_N}\}$ – конечное покрытие ■

Следствие 6. $K \subseteq Y \subseteq X$ (X, Ω) – т.п. Тогда K компактно в $Y \iff K$ компактно в X

Замечание. $(0, 1) = \bigcup_{n=2}^{\infty} (\frac{1}{n}, 1)$ – не извлекается конечное подпокрытие

Утверждение 17. $\sqsupset (X, \rho)$ – м.п., K – компактно в X . Тогда K замкнуто и ограничено (в X)

Доказательство. $\sqsupset a \in X \quad \{B_n(a)\}_{n \in \mathbb{N}} \implies K \subseteq X \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(a)$

Если K компактно, то $\exists n_1, \dots, n_m : K \subseteq \bigcup_{k=1}^m B_{n_k}(a) = B_N(a), N = \max\{n_1, \dots, n_m\}$, т.е. K ограничено

K – замкнуто? $\iff X \setminus K$ – открыто

$\forall p \in X \setminus K$

$\forall q \in K \quad 0 < \frac{\rho(q,p)}{2} = r_q \implies B_{r_q}(q) \cap B_{r_q}(p) = \emptyset$

$\rho(x, y) > \rho(p, q) - \rho(p, y) - \rho(q, x) > 2r_q - r_q - r_q = 0$

$\{B_{r_q}(q)\}_{q \in K}$ – открытое покрытие $K \implies (K \text{ – компакт}) \exists q_1, \dots, q_N : K \subseteq \bigcup_{j=1}^N B_{r_{q_j}}(q_j), r = \min\{r_{q_1}, \dots, r_{q_N}\}$

$B_r(p) \subseteq B_{r_{q_j}}(p) \quad B_r(p) \cap B_{r_{q_j}}(q_j) \neq \emptyset \quad \forall j = 1 : N \implies B_r(p) \cap K \neq \emptyset \implies B_r(p) \subseteq X \setminus K$

Т.о. $X \setminus K$ – открыто ■

Аксиома о вложенных промежутках справедлива и для “обобщённых замкнутых промежутков” $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ – куб

$Q^{(j)} = \prod_{k=1}^n [a_k^{(j)}, b_k^{(j)}] \quad \forall j \in \mathbb{N} \text{ и } \forall k = 1 : n \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad [a_k^{(j+1)}, b_k^{(j+1)}] \subseteq [a_k^{(j)}, b_k^{(j)}]$

По аксиоме о вложенных промежутках $\forall k = 1 : n \quad \exists c_k \subseteq \bigcap_{j=1}^{\infty} [a_k^{(j)}, b_k^{(j)}] \implies$

$c = (c_1, \dots, c_n) \in \prod_{k=1}^n [a_k^{(j)}, b_k^{(j)}] \forall j \in \mathbb{N}$

Теорема 14 (Гейне-Бореля). В \mathbb{R}^n любой замкнутых куб компактен

$Q = [a_1, a_1 + \delta] \times [a_2, a_2 + \delta] \times \dots \times [a_n, a_n + \delta] \quad \delta$ – длина ребра

Доказательство. От противного $\sqsupset \{O_i\}_{i \in I}$ – открытое покрытие куба Q , из которого нельзя извлечь конечного подпокрытия

$Q_1 = Q$; делением рёбер пополам представим Q виде объединения 2^N кубов со стороной $\frac{\delta}{2}$

Хотя бы один из них – “плохой” (т.е. не имеет конечного подпокрытия в $\{O_i\}$) Назовём O_2, \dots

В результате $\{Q_j\}$ – последовательность кубов

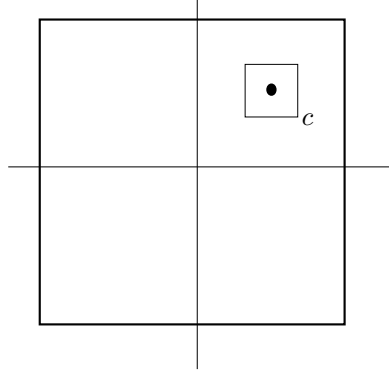


Рис. 1.3: cube

$$x, y \in \overline{O} \quad \overline{O} - \text{куб со стороной } \Delta \implies \|x - y\| \leq \Delta \cdot \sqrt{n} \\ \left(\|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \Delta^2} = \sqrt{n} \Delta \right)$$

$$\text{По предыдущему утверждению } \exists c \in \bigcap_{j=1}^{\infty} Q_j \quad c \in \bigcup_{i \in I} O_i \implies \exists i_c : c \in O_{i_c}$$

$$\{O_i\} - \text{открыто} \implies \exists r > 0 : B_r(c) \subset O_{i_c}/$$

$$\text{Т.к. } \frac{\delta}{2^{j-1}} \rightarrow 0, \text{ то } \exists J : \forall j \geq J \quad \frac{\delta \sqrt{n}}{2^{j-1}} < r$$

$$\text{Тогда } y \in Q_j, \text{ где } j \geq J$$

$$\implies |y - c| \leq \frac{\delta}{2^{j-1}} \cdot \sqrt{n} < r \quad \forall j \geq J \implies Q_j \subseteq B_r(c) \subseteq O_{i_c} \quad \forall j \geq J. Q_j - \\ \text{“плохой”} !!!$$

■

Теорема 15 (критерий компактности в \mathbb{R}^n). $\square K \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда следующие утверждения равносильны:

I: K – замкнуто и ограничено

II: K – компактно

III: K – секвенциально компактно

(из любой последовательности в K можно извлечь сходящуюся в K подпоследовательность)

Определение 48. $\square \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность в топологическом пространстве (X, Ω) .

Если $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ называется подпоследовательностью исходной последовательности

Лемма 3. Если $\{k_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ и строго возрастает, то $\forall j \in \mathbb{N} \quad k_j \geq j$

Теорема 16 (критерий компактности в \mathbb{R}^n). $\square K \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда следующие утверждения равносильны:

I : K – замкнуто и ограничено

II : K – компактно

III : K – секвенциально компактно

(из любой последовательности в K можно извлечь сходящуюся в K подпоследовательность)

Определение 49. $\square \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность в топологическом пространстве (X, Ω) .

Если $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ называется подпоследовательностью исходной последовательности

Лемма 4. Если $\{k_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ и строго возрастает, то $\forall j \in \mathbb{N} \quad k_j \geq j$

Определение 50. $\square \{y_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}$ – последовательность.

$\{y_k\}$ называется возрастающей, если $\forall k \in \mathbb{N} \quad y_{k+1} \geq y_k$ ($\forall k, m, m \geq k$, то $y_m \geq y_k$)

$\{y_k\}$ – строго возрастает $\iff \forall k, m \in \mathbb{N} m > k \implies y_m > y_k$

Определение 51. $\square \{x_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность в т.п. $(X, \Omega), x \in X$
 $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \iff \forall$ открытой окрестности U точки $x \quad \exists N \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}, k \geq N \quad x_k \in U$

$\iff \forall$ открытой окрестности U точки $x \quad \exists$ окрестность $V(+\infty) : \forall k \in V(+\infty) \cap \mathbb{N} \quad x_k \in V$

Пример. $x_k = (-1)^k, k \in \mathbb{N}$

$$x_{2k} \equiv 1 \rightarrow 1$$

$$x_{2k+1} \equiv -1 \rightarrow -1$$

Утверждение 18. Если $\{x_n\}$ сходится (в (X, Ω)), то любая её подпоследовательность сходится, причём к тому же пределу.

Доказательство. $\triangleleft \forall$ подпоследовательность $\{x_{k_j}\}_{j=1}^\infty \quad \square x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \quad \square$
 U, N, x – из определения предела.

Тогда $\forall j \geq N \implies$ по лемме $k_j \geq j \geq N \implies x_{k_j} \in U \implies x_{k_j} \rightarrow x, j \rightarrow +\infty$ ■

Утверждение 19. $\square \{x_k\}$ – последовательность в т.п. (X, Ω)

$\{x_{k_j}\}_{j=1}^\infty \quad \{x_{l_i}\}_{i=1}^\infty$ – подпоследовательности

$$\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{x_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \cup \{x_{l_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$$

$$\square \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{l_i} = x \text{ Тогда } \exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \text{ и } \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$$

Доказательство. Т.к. $x_{k_j} \rightarrow x$, то \forall окрестности $U \exists J = J(U) : \forall j > J \quad x_{k_j} \in U$

Т.к. $x_{l_i} \rightarrow x$, то \forall окрестности $U \exists I = I(U) : \forall i > I \quad x_{l_i} \in U \quad N = \max\{k_J, l_I\}, \forall n > N \quad x_n = \begin{cases} x_{k_j} \implies j > J \\ x_{l_i} \implies i > I \end{cases} \implies x_n \in U \quad \blacksquare$

Пример. $\mathbb{Q} = \{x_k\}_{k=1}^\infty$ (при некоторой нумерации)

Задача 4. $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \exists$ подпоследовательность $\{x_{k_j}\}_{j=1}^\infty : x_{k_j} \rightarrow x, j \rightarrow \infty$

Доказательство критерия компактности в пространстве \mathbb{R}^n .

II \implies I Утверждение 17

I \implies II K – замкнуто и ограничено $\implies K \subseteq B \subseteq Q$ B – шар, Q – куб \implies по 15 K – компакт

III \implies I K – ограничено? от противного. Если K не ограничено $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_k \in K : \|x_k\| > k \quad \|x_k\| \rightarrow +\infty \quad x_k \rightarrow \infty \implies \forall$ подпоследовательность $\{x_{k_i}\} \rightarrow \infty \quad i \rightarrow \infty$

K – замкнуто, $\forall p \in K' \implies p \in K$ От противного $\sqsupset p \in K', p \notin K \implies \exists$ последовательность $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset K : x_k \rightarrow p, k \rightarrow +\infty \implies \forall$ подпоследовательность $\{x_{k_j}\} \rightarrow \notin K, j \rightarrow \infty!!!(III)$. Т.о. K – замкнуто

III \Leftarrow II $\forall \{x_k\}_{k=1}^\infty \times K$

Если $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ – конечно, то $\exists \{k_j\}_{j=1}^\infty \subseteq \mathbb{N}$ – возрастающая $x_{k_j} = \text{const} \implies x_{k_j} \rightarrow x_{k_1}$

Если $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, тогда существует предельная точка в \mathbb{R}^n для $F \implies F$.
Если нет, то F – замкнуто в $\mathbb{R}^n \implies F$ – компакт ($F \subseteq K$)

$\forall x \in F \quad x$ – изолированная точка $\exists \delta_x > 0 : B_{\delta_x}(x) \cap F = \{x\}$

$\cup B_{\delta_x}(x) \supseteq F$, но нельзя извлечь конечное подпокрытие.

Т.о. $\exists p \in F' \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \overset{\circ}{B}_\varepsilon(p) \cap F \neq \emptyset$

$\varepsilon = 1 \quad \sqsupset x_{k_1} \in B_1(p) \cap F \implies k_2 \in \overset{\circ}{B}_{y_2}(p) \cap F \setminus \{x_1, \dots, x_{k_1}\} \neq \emptyset \quad k_2 > k_1$

...

$\exists x_{k_{j+1}} \in \overset{\circ}{B}_{2^j}(o) \cap F \setminus \{x_1, \dots, x_{k_j}\} \neq \emptyset$

$\{x_{k_j}\} \subseteq F, k_i \uparrow \quad \|x_{k_j} - p\| \leq \frac{1}{2^j} \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$

\blacksquare

Следствие 7 (принцип выбора Больцано-Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности в \mathbb{R}^n можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. (последовательность содержится в некотором компакте)

Определение 52. $\square (X, \rho)$ – м.п. $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subseteq X$. $\{x_k\}_k$ называется сходящейся в себе (она же последовательность Коши, она же фундаментальная последовательность), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq N \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

Утверждение 20. Если $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subseteq (X, \rho)$, то она сходится в себе

Доказательство. $\square \{x_k\}$ сходится $\implies \exists x \in X : \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \quad \rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\forall n, m \geq N, n, m \in \mathbb{N} \quad \rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon \implies \{x_k\}_{k=1}^\infty$ сходится в себе \blacksquare

Лемма 5. $\square \{x_n\}$ сходится в себе и $\subseteq (X, \rho)$

Тогда:

1. $\{x_n\}$ ограничена
2. Если существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, то сама последовательность $\{x_n\}$ сходится

Доказательство. $\{x_n\}$ сходится в себе $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N, n, m \in \mathbb{N} \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

$\triangleleft \varepsilon = 1 \quad \square N = N(\varepsilon)$ из определения сходимости в себе.

$$C = \max\{\rho(x_2, x_1), \rho(x_3, x_1), \dots, \rho(x_{N-1}, x_1), \rho(x_N, x_1) + 1\}$$

$$B_C[x_1]$$

$$\triangleleft x_n \implies \begin{cases} n < N \implies \rho(x_n, x_1) \leq C \\ n > N \implies \rho(x_n, x_1) \leq \rho(x_n, x_N) + \rho(x_N, x_1) \leq C \end{cases}$$

Теперь о втором пункте.

$$\square x_{n_k} \rightarrow x \in X, k \rightarrow \infty \quad x_n \rightarrow x?$$

$$\triangleleft \varepsilon > 0 \quad \exists K : \rho(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} \forall k : k \geq K, k \in \mathbb{N}$$

$$x_n \text{ сх. в себе, то } \exists N_1 \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad n, m \geq N \quad \rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$N = \max N_1, K$$

Если $n \geq N$, то $\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{n_N}) + \rho(x_{n_N}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ■

Теорема 17. 1. В произвольном метрическом пространстве любая сходящаяся последовательность фундаментальна

2. В пространствах \mathbb{R}^n сходимость последовательности равносильна её фундаментальности.

Второе утверждение – критерий Коши-Больцано

Доказательство. 1. уже доказано

2. Половина доказана.

$\square \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Надо проверить, что она сходится.

Фундаментальность по лемме \implies ограниченность. По принципу выбора $\implies \exists$ сходящаяся подпоследовательность. По лемме \implies сходимость. ■

Пример. $X = \mathbb{R}$ $F(x) = \frac{x}{1+|x|}$

$x > 0$ и $F(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \uparrow$ на $(0, +\infty)$

$\rho_F(x, y) = |F(x) - F(y)|$

$\rho_F(n, m) = \left| \frac{n}{1+n} - \frac{m}{1+m} \right| = \frac{|n-m|}{(1+n)(1+m)} < \varepsilon \iff N : \frac{1}{N} < \varepsilon \quad m, n > N$

$\{n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна или сходится в себе, но не имеет предела

$F(\pm\infty) = \pm 1$ (заменяли функцию её пределом)

Получаем продолжением метрики на всю $\overline{\mathbb{R}}$ Тогда $\{n\} \rightarrow +\infty$

Определение 53. Метрическое пространство (X, ρ) называется полным, если любая фундаментальная последовательность в нём сходится.

1.13 Супремум и инфимум. Монотонная последовательность

Определение 54. Последовательного вложенных промежутков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$ называется стягивающейся, если $b_n - a_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

Теорема 18. Пусть $\{[a_n, b_n]\}$ – стягивающаяся последовательность промежутков. Тогда:

1. $\exists! C \in \mathbb{R} \quad \{C\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$
2. $a_n \rightarrow C \quad b_n \rightarrow C$

Доказательство. По аксиоме 16 $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$

$$\square c, d \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \implies \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq c \leq b_n \quad a_n \leq d \leq b_n \quad -b_n \leq -d \leq -a_n$$

$$a_n - b_n \rightarrow 0 \leq c - d \leq b_n - a_n \rightarrow 0 \implies c - d \rightarrow 0 \implies c = d$$

$$\begin{aligned} b_n - (b_n - a_n) &= a_n \leq c \\ &\leq c - (b_n - a_n) \rightarrow c. \end{aligned}$$

$$\implies a_n \rightarrow C$$

$$b_n = a_n + (b_n - a_n) \rightarrow c + 0 = c$$

■

Упражнение:

$$C_0 = [0, 1]$$

$$C_1 = [0, 1] \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

$$C_2 = C_1 \setminus \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \setminus \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right), \dots$$

$$\begin{array}{cc} \text{-----} & \text{-----} \\ \text{---} \text{---} & \text{---} \text{---} \\ \text{--} \text{--} & \text{--} \text{--} \end{array}$$

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$$

Проверить, что C несчётно (и $C \sim [0, 1]$)

C – Канторово множества, множество Кантора

Определение 55. $\square E \subseteq \mathbb{R} \quad M \in \overline{\mathbb{R}}$

M называется мажорантой для E , если $\forall x \in E \quad x \leq M$

(миноранта)

Определение 56. $E \subseteq \mathbb{R}$

$$\sup E = \begin{cases} +\infty & , \text{ если } E \text{ не ограничено сверху} \\ \min\{C : C - \text{мажоранта для } E\} & , \text{ если } E \text{ ограничено сверху} \\ -\infty & , E = \emptyset \end{cases}$$

Названия: супремум, точная верхняя граница

$\inf E = \dots$ – инфимум

Замечание. Если $E \neq \emptyset$, то $\exists x \in E : \inf E \leq x \leq \sup E \implies \inf E \leq \sup E$ (кроме случая $E = \emptyset$)

Теорема 19. в $\overline{\mathbb{R}}$ $\sup E, \inf E$ существуют у всякого $E \subseteq \mathbb{R}$. Если E ограничено сверху (снизу), то $\sup E$ конечен ($\inf E$ конечен)

Замечание. $E \subseteq \mathbb{R}, R - \text{огр.} \implies \text{в } \mathbb{R} \exists \sup E, \inf E$

Доказательство. $\triangleleft E \neq \emptyset - \text{огр. сверху. Докажем, что } \sup E \text{ существует и конечен}$

$\square I = [a, b] - \text{отрезок. Назовём } I \text{ “хорошим”, если:}$

1. $I \cap E \neq \emptyset$
2. $I \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$, где \mathcal{M} – множество всех мажорант E

Замечание (Критерий супремумы и инф). $\square E \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}, M \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда $M = \sup E \iff \forall \text{ окр } U(M) \quad U(M) \cap (-\infty, M) \cap E \neq \emptyset \quad (M, +\infty) \cap E = \emptyset$

Т.к. $E \neq \emptyset \exists x \in E$. Т.к. $E - \text{огр сверху, } \exists M \in \mathcal{M} \cap \mathbb{R}$

$I_1 = [x, M] \neq \emptyset, I_1 - \text{хороший}$

$\square c = \frac{x+M}{2}$. Один из отрезков $[x, c]$ или $[c, M]$ – хороший

Если $[c, M] \cap E \neq \emptyset$, то $[c, M]$ – хороший

Если $[c, M] \cap E = \emptyset \implies C \in \mathcal{M} \implies [x, c] - \text{хороший}$

Рассмотрим хорошую половину в качестве I_2 .

Повторим действия, ...

В результате $\{I_n\}$ – последовательность стягивающихся вложенных замкнутых промежутков, потому что длинна $I_n = |I_n| = \frac{M-x}{2^{n-1}} \rightarrow 0$

Следовательно, по теореме о стягивающихся промежутках $\exists c : \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$, и $a_n \rightarrow c, b_n \rightarrow c$, где a_n, b_n – концы I_n

$c = \sup E$?

$\forall n b_n$ – мажоранта. $\forall x \in E \quad x \leq b_n \implies x \leq c \implies c \in \mathcal{M} \quad ? \forall \varepsilon > 0 \quad (c - \varepsilon, c) \cap E \neq \emptyset$

Т.к. $|I_n| \rightarrow 0$, то $\exists N : \forall n \geq N : \quad |I_n| < \varepsilon$

$I_n \cap E \neq \emptyset \implies \exists x_n \in [a_n, b_n] \cap E \implies x_n \in [a_n, c] \cap E$

$x > a_n = b_n - (b_n - a_n) \geq c - (b_n - a_n) > c - \varepsilon \implies c = \sup E$ ■

Замечание. Если $E \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$, то

$$\sup E \leq \sup D.$$

$$\inf E \geq \inf D.$$

Определение 57. $E \subseteq \mathbb{R} \quad f : E \rightarrow \mathbb{R}$

f называется возрастающей на E $\iff \forall x_1, x_2 \in E : \quad x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$

f называется строго возрастающей на E $\iff \forall x_1, x_2 \in E : \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$

Убывающие аналогично

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется возрастающей $\iff \forall n, m \in \mathbb{N} : n \leq m \implies x_n \leq x_m$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется строго возрастающей $\iff \forall n, m \in \mathbb{N} : n < m \implies x_n < x_m$

Замечание. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает (строго возрастает) $\iff \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n < x_{n+1}$)

Определение 58. $\{x_n\}$ – монотонная (строго монотонная) \iff

$$\left[\begin{array}{l} \{x_n\}_n \text{ – возрастающая} \\ \{x_n\}_n \text{ – убывающая} \end{array} \right] \iff \left(\left[\begin{array}{l} \{x_n\}_n \text{ – строго возрастающая} \\ \{x_n\}_n \text{ – строго убывающая} \end{array} \right] \right)$$

Теорема 20. В $\overline{\mathbb{R}}$ предел любой возрастающей (убывающей) последовательности существует и равен её супремуму (инфимуму)

Замечание. Любая ограниченная монотонная вещественная последовательность сходится

$$\sup_E f = \sup f(E)$$

$$\sup\{x_n\} = \sup\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Доказательство. $\square \{x_n\}_{n=1}^\infty$ возрастает. $\square M = \sup\{x_n\} \in (-\infty, +\infty]$

По критерию супремума \forall окр $U(M)$ $\exists x_{n_U} \in U(M) \cap (-\infty, M)$

Тогда $\forall n \geq n_U \quad x_n \geq x_{n_U} \quad x_n \leq M \implies x_n \in U(M)$ Т.о. $x_n \rightarrow M, n \rightarrow \infty$ ■

Утверждение 21. неравенство Бернулли

$$(a+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N} \forall x > -1.$$

Доказательство. Докажем методом мат. индукции.

База: $(1+x)^1 \geq 1+1 \cdot x$

Переход $n \rightarrow n+1$: $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$ ■

Теорема 21. $x_n = \left\{(1 + \frac{1}{n})^n\right\}_{n=1}^\infty$ и $y_n = \left\{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}\right\}_{n=1}^\infty$ сходятся.

(доказательство было на практике)

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$$

$$x_n \leq e \leq y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$e \approx 2,71828182845 \dots$$

Утверждение 22 (формула Герона). $a, x_0 > 0, x_n = \frac{1}{2\left(\frac{a}{x_{n-1}} + x_{n-1}\right)} \forall n \in \mathbb{N}$

\mathbb{N}

Тогда $x_n \rightarrow \sqrt{a}, n \rightarrow \infty$

Доказательство. $x_n = f(x_{n-1})$, где $f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x} + x\right) = \frac{\sqrt{a}}{2} \left(\frac{\sqrt{a}}{x} + \frac{x}{\sqrt{a}}\right)$

$\forall t > 0 \quad t + \frac{1}{t} \geq 2$ Минимум достигается при $t = 1 \implies f$ имеет минимум в $x = \sqrt{a}$

$$x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x_n} + x_n \right) - x_n = \frac{1}{2} \frac{a - x_n^2}{x_n} < 0 \iff x_n > \sqrt{a} \iff x_n = f(x_{n-1}), x_{n-1} > 0 \text{ по индукции}$$

$$f(x) \geq \sqrt{a} \quad \forall x > 0$$

$$\text{Т.о. } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \downarrow \text{ и ограничено снизу } \sqrt{a} \implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L \in \mathbb{R}$$

Перейдём к пределу в рекуррентном соотношении

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{L} + L \right)$$

$$L = \frac{a}{L} \quad L^2 = a \quad L \geq 0, \text{ т.к. } x_n \geq 0 \implies L = \sqrt{a} \quad \blacksquare$$

Утверждение 23. $\square \{x_n\}$ – вещественная последовательность $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L < 1 \implies x_n \rightarrow 0$

Частные случаи:

1. $\frac{n}{a^n} \rightarrow 0 \quad \forall a > 1$
2. $\frac{n^k}{a^n} \rightarrow 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$
3. $\frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$
4. $\frac{n!}{n^n}$

Определение 59. $\square \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N} \overline{x_n} = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2} \dots\}$ (для ограниченной сверху)

$\{\overline{x_n}\}$ – верхняя огибающая последовательности

$\underline{x_n} = \inf\{\dots\}$ (для ограниченной снизу)

Элементарные свойства:

1. $\underline{x_n} \leq x_n \leq \overline{x_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. $\{\overline{x_n}\} \downarrow \quad \{\underline{x_n}\} \uparrow$

Пример. $x_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$

$\overline{x_n}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$

$\underline{x_n}, -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \dots$

Определение 60. $\square \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная вещественная последовательность

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{x_n}, & x_n \text{ ограничена сверху} \\ +\infty & \end{cases} \quad \text{– верхний предел}$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \dots$$

Пример (продолжение примера). $\overline{\lim} x_n = 0 = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty}$

Определение 61. $\square \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность в топологическом пространстве (X, Ω) $l \in X$

l называется частичным пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, если \exists подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty} : x_{n_k} \rightarrow l$

Теорема 22. $\square \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$, тогда

I $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ есть наибольший частичный предел последовательности $\{x_n\}$ в $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{II } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}} \iff \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

В случае существования $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ совпадает с $\overline{\lim}$ и $\underline{\lim}$

Доказательство. $\square L = \overline{\lim} x_n$

Замечание. Если $L = \overline{\lim} x_n \in \mathbb{R}$

$$L \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N & x_n < L + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \forall N : \exists n > N : & x_n > L - \varepsilon \end{cases}$$

$$\triangleleft L \in \mathbb{R} \quad ? : \exists x_{n_k} : x_{n_k} \rightarrow L$$

$$\varepsilon = 1 \quad N_1 = 1 \quad \exists n_1 > N_1 : x_{n_1} > L - 1$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \quad N_2 = n_1 + 1 \quad n_2 \geq N_2 : x_{n_2} > L - \frac{1}{2}$$

...

$$\varepsilon = \frac{1}{k} \quad N_k = n_{k-1} + 1 \quad \exists n_k \geq N_k : x_{n_k} \geq L - \frac{1}{k}$$

Возникает x_{n_k} , что $\overline{x_{n_k}} x_{n_k} > L - \frac{1}{k}$ Обе части стремятся к $L \implies x_{n_k} \rightarrow L$

Если $\{x_{m_j}\}$ – сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x_n\} \implies x_{m_j} \leq \overline{x_{m \leq j}} \rightarrow L, j \rightarrow \infty$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_{m_j} \leq L$$

Т.о. L – наибольший частичный предел

Если $\overline{\lim} x_n = -\infty \implies$ любой частичный предел $\leq -\infty$

Если $\overline{\lim} x_n = +\infty \implies \{x_n\}$ не ограничена сверху \implies (было установлено)
 $\exists \{x_{n_k}\} : x_{n_k} \rightarrow +\infty$

II: Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L \in \mathbb{R} \implies \forall$ подпоследовательности $\{x_{n_j}\} \quad x_{n_j} \rightarrow L, j \rightarrow \infty \implies \overline{\lim} x_n = \max\{\text{частичных}\} = L$ и $\underline{\lim} = \dots = L$

Обратно: $\square \overline{\lim} = \underline{\lim} = l$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underline{x_n} (\rightarrow l) \leq x_n \leq \overline{x_n} \rightarrow l.$$

$$\implies x_n \rightarrow l$$

■

Теорема 23 (Теорема Штольца). $\square \{x_n\} \quad \{y_n\}$ – две вещественные последовательности

1. $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \uparrow$
2. $y_n \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty$
3. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l \in \mathbb{R}$

Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l$

Доказательство. $\square \Delta y_n = y_{n+1} - y_n \quad \Delta x_n = x_{n+1} - x_n$

1. $L \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \quad \left| \underbrace{\frac{\Delta x_n}{\Delta y_n}}_{\alpha_n} - l \right| < \frac{\varepsilon}{10}$$

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} - l = \alpha_n$$

$$x_{n+1} - x_n - l(y_{n+1} - y_n) = \alpha_n(y_{n+1} - y_n)$$

$$x_{N_1+1} - x_{N_1} - l(y_{N_1+1} - y_{N_1}) = \alpha_{N_1}(y_{N_1+1} - y_{N_1})$$

Такие суммы удобно складывать

$$|x_{n+1} - x_{N_1} - l(y_{n+1} - y_{N_1})| = \left| \sum_{k=N_1}^n \alpha_k (y_{k+1} - y_k) \right| \leq \frac{\varepsilon}{10} \sum_{k=N_1}^n |\Delta y_k| = \frac{\varepsilon}{10} \cdot (y_{n+1} - y_{N_1})$$

$$\left| \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \frac{x_{N_1}}{y_{N_1}} - l + l \cdot \frac{y_{N_1}}{y_{n+1}} \right| < \frac{\varepsilon}{10} \left(1 - \frac{y_{N_1}}{y_{n+1}} \right) \leq \frac{\varepsilon}{10}$$

$$\left| \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - l \right| < \frac{\varepsilon}{10} + \left| \frac{x_{N_1}}{y_{n+1}} \right| + l \cdot \left| \frac{y_{N_1}}{y_{n+1}} \right|$$

$$y_n \rightarrow +\infty \quad \exists N_2 : \forall n \geq N_2, n \in \mathbb{N} \quad \left| \frac{x_{n_1}}{x_{n+1}} \right| + l \left| \frac{y_{N_1}}{y_{n+1}} \right| < \frac{\varepsilon}{10} \implies \forall n \geq N_2 \quad \left| \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - l \right| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{10} < \varepsilon$$

2. Если $L = +\infty$ $x_n \uparrow$ с некоторого номера

$$\triangleleft \frac{y_n}{x_n}$$

3. Если $L = -\infty$ – упражнение

■

1.14 Предел отображения, предел функции

Определение 62. $\sqsupset (X, \Omega_X), (Y, \Omega_Y)$ – топологические пространства.

$$f : E \rightarrow Y \quad E \subseteq X, a \in E', A \in Y$$

$$A = \lim_a f \iff \forall \text{ окр. } U(A) \exists \text{ окр. } V(a) : f(\dot{V}(a) \cap E) \subseteq U(A)$$

$$\left(\iff \forall x \in \dot{V}(a) \cap E \implies f(x) \in U(A) \right)$$

Определение 63 (по Коши). $\sqsupset (X, \rho_x), (Y, \rho_y)$ – метрические пространства. $E \subseteq X \quad a \in E'$

$$f : X \rightarrow Y$$

$$A = \lim_a f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E : \rho_x(x, a) < \delta \implies \rho_y(f(x), A) < \varepsilon$$

Определение 64 (опр (по Коши) для функций). $E \subseteq \mathbb{R}, a \in E', f : E \rightarrow \mathbb{R} \quad A \in \mathbb{R}$

$$A = \lim_a f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E, 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

Определение 65 (по Гейне). $\sqsupset (X, \Omega_X), (Y, \Omega_Y)$ – топологические пространства

$$E \subseteq X, a \in R', f : E \rightarrow Y, A \in Y$$

$$\lim_a f = A \iff \forall \text{ последовательности } \{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq E \setminus \{a\} : x_n \rightarrow a, \text{ при } n \rightarrow \infty \implies f(x_n) \rightarrow A, n \rightarrow \infty$$

Замечание. Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ из определения (по Гейне), то назовём $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательностью Гейне для f и точки a

Теорема 24. В метрических пространствах определения предела по Гейне и по Коши равносильны.

$$A = H \lim_a f \iff A = C \lim_a f$$

Доказательство.

$\Leftarrow \square A = C \lim_a f; \triangleleft \{x_n\}$ – последовательность Гейне для f в точке a .

$\triangleleft \forall$ окрестность $U(A) \implies \exists$ окрестность $V(a) : f \left(\dot{V} \cap E \right) \subseteq$

$U(A); x_n \rightarrow a, x_n \neq a \implies \exists N : \forall n \geq N \quad x_n \in \dot{V}(a) \implies f(x_n) \in$
 $U(A) \implies f(x_n) \rightarrow A$

$\implies \square A = H \lim_a f$. От противного $A = C \lim_a f$

$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \quad f \left(\dot{B}_\delta(a) \cap E \right) \not\subseteq B_\varepsilon(A)$

$\exists x_\delta \in \dot{B}_\delta(A) \cap E : \rho(f(x_\delta), A) \geq \varepsilon$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \delta = \frac{1}{n} \quad \{x_{\frac{1}{n}}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq E \setminus \{a\} \quad \rho \left(x_{\frac{1}{n}}, a \right) < \frac{1}{n}$

$x_{\frac{1}{n}} \rightarrow a$, но $\rho(f(x), A) \geq \varepsilon_0 \implies f \left(x_{\frac{1}{n}} \right) \not\rightarrow A, n \rightarrow \infty$, что противоречит наличию предела по Гейне !!!

■

Замечание. Если $(X, \Omega_x), (Y, \Omega_y)$ – топологические пространства $A \in Y$ и \exists набор окрестностей $\{V_n(a)\}_{n=1}^{\infty} : \forall$ окр. $V(a) \exists N : \forall n \geq N \quad V_n(a) \subseteq V(a)$, теоретически также верно

В случае если $f : E \rightarrow \mathbb{R} \quad E \subseteq \mathbb{R} \quad a \in E', A \in \overline{R}, \widehat{\mathbb{R}}$, используется определение через окрестности.

Варианты определения через параметры:

1. $a = -\infty \quad A \in \mathbb{R} \quad f : E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad E$ – неограниченно снизу

$$A = \lim_{-\infty} f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R} : \forall x < M, x \in E \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

2. $A = \infty, a = \infty \quad \infty = \lim_{\infty} f \iff \forall \mathcal{E} \in \mathbb{R} \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in E : |x| > M \implies |f(x)| > \mathcal{E}$

3. ...

Задача 5. Определения по Коши и по Гейне эквивалентны и в случае $A, a \in \overline{\mathbb{R}}, \hat{\mathbb{R}}$

$$V_n(+\infty) = (n, +\infty) \forall n \in \mathbb{N}$$

Пример. 1. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$

Теорема 25 (единственность предела). $\sqsubset (X, \Omega_X), (Y, \Omega_Y) - \text{м.п. } E \subseteq X, a \in E'$

$$f : E \rightarrow Y \quad A, B \in Y \quad \begin{cases} A = \lim_a f \\ B = \lim_a f \end{cases} \implies A = B$$

Доказательство. $\triangleleft \forall$ последовательность Гейне для f и точки $a \in \{x_n\} \implies$ по определению предела по Гейне $f(x_n) \rightarrow A, f(x_n) \rightarrow B, n \rightarrow \infty \implies A = B$ (по свойствам предела последовательности) ■

Определение 66. $\sqsubset f : X \rightarrow Y, \quad X, Y - \text{м.п. } a \in E'$

f называется локально ограниченной в точке a отображения, если \exists окр. $U(a) : f|_{U(a) \cap E}$ ограничено (т.к. $\exists R > 0 \exists r > 0 \exists B \in Y : f(B(a) \cap E) \subseteq B_r(b)$)

Теорема 26 (локальная ограниченность отображения, имеющего предел). $\sqsubset X, Y - \text{м.п. } E \subseteq X, a \in E' \quad f : E \rightarrow Y, \exists \lim_a f = A \in Y$. Тогда f локально ограничена в точке a

Доказательство. По Коши для $\varepsilon = 1 \exists B(a) : f(B(a) \cap E) \subseteq B_1(A)$

Если $a \in E \implies f(B(a) \cap E) \subseteq B_1(A) \cap B_{\rho(f(a), A)}[A] \subseteq B_R(a)$

$R = \max\{1, 2\rho(f(a), A)\}$ ■

Теорема 27 (для функций). Если $f : E \rightarrow \mathbb{R}, a \in E' \cap \overline{\mathbb{R}}, A \in \mathbb{R}$

$A = \lim_a f$ Тогда \exists окр $U(a)$ и $\exists c > 0 : |f(x)| \leq c \forall x \in U(a) \cap E$

Аналогичное определение для \mathbb{C}

Утверждение 24 (об отделинности от нуля). $\sqsupset E \subseteq \mathbb{R}(\mathbb{C}), f : E \rightarrow \mathbb{R}$
(или \mathbb{C}) $A = \lim_a f$

$A \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ (или $A \in \widehat{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ или $A \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$)

Тогда \exists окр. $U(a) : f(x) \neq 0 \forall x \in U(a) \cap E$

Доказательство. От противного $\sqsupset \forall$ окр. $U(a) \exists x \in U(a) \cap E$

$f(x) = 0$

Тогда $\forall \epsilon \in \mathbb{N} \exists x_n \in U(a) \cap E \quad f(x_n) = 0$

(если a – конечное, $U_n = B_{y_n}(a)$, $\begin{cases} a = +\infty & , U_n = (n, +\infty) \\ a = \infty & , U_n = \{x : |x| > n\} \end{cases}$

$x_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty \quad x_n \neq a \forall n \in \mathbb{N} \implies \{x_n\}$ – последовательность Гейне
 $f(x_n) \rightarrow A \neq 0, n \rightarrow \infty \implies !!!$ ■

Замечание. Кроме “ $\lim_a f = A$ ” используется “ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ” или “ $f(x) \rightarrow A, x \rightarrow a$ ”

Теорема 28 (об арифметических действиях над пределами). $\sqsupset f, g \in X \rightarrow Y$ ($Y, \|\cdot\|$) – нормированное пространство, (X, ρ) – метрическое пространство

$\lambda : E \rightarrow K$ K – поле, отвечающее Y

$a \in E' \quad \exists \lim_a f = A \quad \lim_a g = B \quad A, B \in Y$

$\exists \lim_a \lambda = l \in K$

1. $\exists \lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) \cdot f(x) = l \cdot A$

2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$

4. $Y = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C} \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = AB$

5. $\exists \lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\| = \|A\|$

Доказательство. Всё доказывается через последовательности. ■

Если $Y = \mathbb{R}^n \quad f : E \rightarrow Y \quad E \subseteq X$ – м.п.в

$f(x) = y = (y_1, \dots, y_n)$

$f_k : x \rightarrow y_k \quad f_k$ – k -я координатная функция отображения f

$$A \in Y \quad A = (A_1, \dots, A_n)$$

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f \iff \forall l = 1 : n \quad \lim_{x \rightarrow a} f_k(a) = A_k$$

Замечание. $\{x_n\}$ – п. Гейне для f и точки $a \iff \{x_n\}$ – п. Гейне для a и $f_k \quad \forall k = 1 : n$

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f \iff f(x_m) \rightarrow A, m \rightarrow \infty \forall \text{ п. Гейне } \{x_m\}_{m=1}^\infty \iff \forall k = 1 : n \quad f_k(x_m) \rightarrow A_k, m \rightarrow \infty \iff \forall k = 1 : n \quad A_k = \lim_{x \rightarrow a} f_k(x)$$

Пример. $f(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ xy \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$

$$\lim_{(2,1)} f = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} f \text{ ни в } \overline{\mathbb{R}}^3, \text{ ни в } \widehat{\mathbb{R}}^3$$

Замечание. Теорема об арифметических действиях в случае $Y = \overline{\mathbb{R}}$ (или $\widehat{\mathbb{C}}$) выполнена, если правая часть равенства определена в Y

Теорема 29. $\sqsupset f, g : E \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \quad E \subseteq \mathbb{C}, a \in E'$

$$\sqsupset \forall x \in E \setminus \{a\} \quad f(x) \leq g(x) \text{ и } \exists \lim_a f, \lim_a g \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\text{Тогда } \lim_a f \leq \lim_a g$$

Доказательство. Если $\{x_n\}$ – п. Гейне для f и a , то и для g и a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_n) \leq g(x_n) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x) \quad \blacksquare$$

Теорема 30 (о сжатой функции или теорема “о трёх милиционерах”).

$$\sqsupset f, g, h : E \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \quad a \in E' \quad \forall x \in E \setminus \{a\} \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

$$\text{и } \exists \lim_a f, \lim_a h \text{ и } \lim_a f = \lim_a h = A$$

$$\text{Тогда } \exists \lim_a g \text{ и } \lim_a g = A$$

Доказательство. (доказательство с помощью последовательностей) ■

Замечание. Если $f : E \subseteq X \rightarrow Y$ X, Y – м.п.

\forall посл. Гейне $\{x_n\}$ для f и точки a

$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$, то все такие пределы равны между собой ($\implies \lim_{x \rightarrow a} f(x)$)

(Если $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ – п. Гейне

$f(x_n) \rightarrow A$ $f(y_n) \rightarrow B$ $n \rightarrow \infty$)

$\{z_n\}_n = \{x_1, y_1, x_1, y_2, \dots\}$ – п. Гейне

$f(z_n) \rightarrow A$ $f(z_n) \rightarrow B \implies A = B$

Замечание. $\sqsupset f, g, h : E \subseteq X \rightarrow Y$ X, Y – м.п. $a \in E' \cap E$

$\sqsupset f(x) = g(x) \forall x \in E \setminus \{a\}$

\exists окр $U(a) : f(x) = h(x) \forall x \in \dot{U}(a)$

Тогда $\lim_a f = \lim_a g = \lim_a h$ (если существует один, то существуют два других, в случае существования равны)

Теорема 31. $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ (или в \mathbb{C}) $a \in E'$ $E \subseteq X$ – м.п.

Следующие утверждения равносильны:

1. $\exists \lim_a f \in \mathbb{R}$ (или \mathbb{C})

2. $\forall \varepsilon > 0 \exists$ окр $U(a) : \forall x_1, x_2 \in \dot{U}(a) \cap E \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ – критерий Коши-Больцано для функций

Доказательство.

1 \implies 2 $\sqsupset A = \lim_a f$ – конечный предел

$\forall \varepsilon > 0 \exists U(a) : |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \forall x \in U'(a) \cap E$

Тогда если $x_1, x_2 \in \dot{U}(a) \implies |f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - A + A - f(x_2)| \leq |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \varepsilon$

1 \Leftarrow 2 \triangleleft п Гейне $\{x_n\}$ для f и a $x_n \rightarrow a$

$\forall \varepsilon > 0 \exists$ окр $U(a) : (2)$. Т.к. $x_n \rightarrow a$, то $\exists N \in \mathbb{R} : \forall n \geq N \quad x_n \in \dot{U}(a) \implies \{f(x_n)\}$ – сходится в себе

$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \quad n, m \geq N$

$\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \implies \exists \lim_a f$ (т.к. $\{x_n\}$ – произвольная последовательность)

1.15 Символы \sim, O, o

Определение 67. $\sqsupset f : D_f \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$g : D_g \rightarrow \mathbb{R} \dots$

$\alpha : F_\alpha \rightarrow \mathbb{R} \dots$

$D_f, D_g, D_h \subseteq \mathbb{C} \quad a \in \widehat{\mathbb{C}}, a \in \overline{\mathbb{R}} \quad \exists \text{ окр } U(a) :$

$$\dot{U}(a) \cap D_f = \dot{U}(a) \cap D_g = \dot{U}(a) \cap D_h = D.$$

И $f(x) = \alpha(x) \cdot g(x) \forall x \in D$

Тогда пишут:

- $f \sim h, x \rightarrow a \iff \alpha(x) \rightarrow 1, x \rightarrow a$ (f асимптотически равна или эквивалентна g в окрестности точки a)
- $f = O(g), x \rightarrow a \iff \alpha(x)$ локально ограничено в точке a (f равно O -большому от g)
- $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow a \iff \alpha(x) \rightarrow 0, x \rightarrow a$ (f равно o -малому от g)

Элементарные свойства:

$$1. f \sim g \text{ в точке } a \implies \begin{cases} f = O(g) \\ g = O(f) \end{cases}, x \rightarrow a$$

$$f = o(g) \implies f = O(g)$$

2. Асимптотическое равенство есть отношение эквивалентности:

- $f \sim f$
- $f \sim g \iff g \sim f$
- $f \sim g, g \sim h \implies f \sim h$

Всё в одной точке

$$3. f \sim g, x \rightarrow a \iff f = g + o(g), x \rightarrow a \iff g = f + o(f), x \rightarrow a$$

$$4. \text{ Если } f \rightarrow L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \rightarrow a \quad g(x) \equiv L \forall x \in D_f$$

Тогда $f(x) \sim g, x \rightarrow a$

$$f = \frac{f}{L} \cdot g \rightarrow 1 \cdot L$$

5. Если $f \sim \bar{f}, x \rightarrow a$, то $\lim_{x \rightarrow a} f = \lim_{x \rightarrow a} \bar{f}$

6. Если $f \sim \bar{f} \quad g \sim \bar{g} \implies f \cdot g \sim \bar{f} \cdot \bar{g}$

Если $g(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки $a \implies \frac{f}{g} \sim \frac{\bar{f}}{\bar{g}}$ Если
 $\frac{f}{g} \sim \frac{\bar{f}}{\bar{g}}, x \rightarrow a \not\Rightarrow f \pm g \sim \bar{f} \pm \bar{g}$

Пример. $f(x) = x + 1 \sim \bar{f} = x$

$g(x) = -x \sim \bar{g} = g = -x$

$f(x) + g(x) = 1 \not\sim 0$

$\sin x \sim x$

$-x \sim -x$

$\sin x - x \sim \frac{x^3}{2}$ – упражнение

$x \rightarrow +\infty \quad \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \sim Cx^p \quad p \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$

$= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{x+1}{x}}} \sim \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x}}$

Упражнения: Исходя из $\sin x \sim x, x \rightarrow 0$ выяснить, что $\operatorname{tg} x \sim x, \arcsin x \sim x, \operatorname{arctg} x \sim x, \cos x \sim 1, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1 \quad f(x) = e^x \implies e^x - 1 \sim x, x \rightarrow 0 \quad t \sim \ln(1+t), x \rightarrow 0, t \rightarrow 0$

Достаточные условия: $\square D_g, D_f$ как в определении O, o, \sim

$g \neq 0$ в некоторой окрестности a

Если $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1, x \rightarrow a \implies f(x) \sim g(x)$

Если $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0, x \rightarrow a \implies f(x) = o(g(x))$

Если $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеет конечный предел $\implies f = O(g), x \rightarrow a$

Определение 68. $f \asymp g, x \rightarrow a \iff \begin{cases} f = O(g) \\ g = O(f) \end{cases} \quad x \rightarrow a$
 $(f = \Theta(g), f = \Omega(g))$

Упражнение: $f(x) = \sin x$ найти функцию, которая будет $o(\sin x)$ при $x \rightarrow +\infty$

$x \rightarrow +\infty \quad x^m = O(x^n) \iff m < n$

$x \rightarrow 0 + \quad x^m = o(x^n) \iff m > n$

$$x \rightarrow 0, x^2 = o(x) \quad x^3 = o(x^2)$$

Замечание. 1. $o(f) + o(f) = o(f)$

равенства в одну сторону $f = o(g)$. Возможно более подходящим было бы $f \in o(g)$

(если $g = o(f), h = o(f) \implies f + h = o(f)$)

$$2. o(Cf) = o(f) = C(o(f))$$

$$3. O(o(f)) = o(f)$$

$$4. o(o(f)) = o(f)$$

$$5. O(O(f)) = O(f)$$

$$6. O(f) \cdot O(g) = O(fg)$$

$$7. o(f) \cdot o(g) = o(fg)$$

Замечание. $\forall p \in \mathbb{R}, p = \text{const} \quad (1+x)^p - 1 \sim px, x \rightarrow 0$

Если $p \in \mathbb{N} \quad (1+x)^p - 1 = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \dots + x^p - 1 \sim px$

$$f(x) = (1+x)^p \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = p$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt[3]{1-2x}}{\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}} + \sqrt[5]{1+\frac{x}{2}}} = \frac{C_1}{C_2}$$

Знаменатель $\sim C_1 x$

Числитель $C_2 x$

$$(1+x)^p - 1 \sim px \iff (1+x)^p - 1 = px + o(x)$$

$$\sqrt{1+3x} - 1 = \frac{3}{2}x + o(x) \quad \sqrt[3]{1-2x} - 1 = -\frac{2}{3}x + o(x)$$

$$\text{Числитель } \frac{3}{2}x + o(x) - \left(-\frac{2}{3}x + o(x)\right) = \frac{13}{6}x + o(x) \sim \frac{13}{6}$$