

Конспект по дискретной математике
II семестр

Коченюк Анатолий

20 февраля 2021 г.

Глава 1

Дискретная теория вероятностей

1.1 Введение

Определение 1 (Вероятностное пространство).

Ω – элементарные исходы, неделимые дальше.

p – дискретная плотность вероятности.

$$p : \Omega \rightarrow [0, 1] \quad \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

Замечание. В случае дискретного вероятностного пространства $|\Omega|$ – не более, чем счётное.

Пример (Честная монета). $\Omega = \{0, 1\}$ $p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$

Пример (Нечестная монета). $\Omega = \{0, 1\}$ $p(1) = p, p(0) = q$ – различные числа. $p + q = 1$

Ещё одно название – распределение Бернулли

Пример (Честная игральная кость). $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $p(\omega) = \frac{1}{6}$

Определение 2. Событие, случайное событие – $A \subseteq \Omega$

Замечание. Неправильное определение – то, что может произойти, а может не произойти.

$\emptyset \subseteq \Omega \quad \Omega \subseteq \Omega$ – примеры, когда никогда не происходит и всегда происходит

Замечание. Для не дискретного случая неверно, что любое подмножество Ω это событие

Определение 3. Вероятность события $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$
 p берёт элементарные исходы. P, \mathbb{P} – вероятность события

Пример. Событие $E = \{2, 4, 6\} \quad P(E) = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
 $O = \{1, 3, 5\}$

Замечание. Не существует вероятностного пространства с бесконечным числом равновероятных исходов

$$p(\omega) = 0 \quad \sum = 0$$

$$p(\omega) = a > 0 \quad \sum = a \cdot (+\infty) = +\infty$$

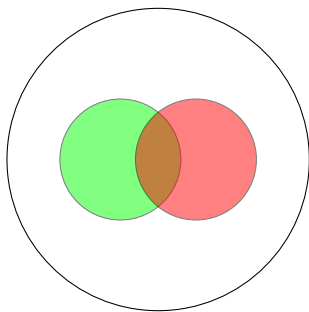
Пример. Событие $B(IG) = \{4, 5, 6\} \quad P(B) = \frac{1}{2}$

Определение 4 (Независимое событие). События A, B независимы, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Пример. $E \cap O = \emptyset \quad B \cap E = \{4, 6\}$

$$P(E \cap O) = 0 \quad P(O) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \neq 0$$

$$P(B) \cdot P(E) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3} = P(B \cap E)$$



$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(\Omega)}$$

Определение 5 (Условная вероятность). $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Замечание. Альтернативное определение независимости, не поддерживающее 0: $P(A|B) = P(A)$

$$V = \{5, 6\}$$

$$P(V \cap E) = \frac{1}{6}$$

$$P(V) = \frac{1}{3} \quad P(E) = \frac{1}{2} \quad P(V) \cdot P(E) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = P(V \cap E)$$

Определение 6 (Произведение вероятностных пространств).

$$\Omega_1, p_1 \quad \Omega_2, p_2$$

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$$

$$p(\langle \omega_1, \omega_2 \rangle) = p_1(\omega_1) \cdot p_2(\omega_2)$$

Теорема 1. $\forall A_1 \subseteq \Omega_1$ и $\forall A_2 \subseteq \Omega_2$

$A_1 \times \Omega_2$ и $\Omega_1 \times A_2$ – независимы

$$\begin{aligned} \text{Доказательство. } P(A_1 \times \Omega_2 \cap \Omega_1 \times A_2) &= P(A_1 \times A_2) = \sum_{\substack{a \in A_1 \\ b \in A_2}} p(\langle a, b \rangle) = \\ &= \sum_{a \in A_1} \sum_{b \in A_2} p_1(a) \cdot p_2(b) = \sum_{a \in A_1} p_1(a) \left(\sum_{b \in A_2} p_2(b) \right) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Определение 7. A_1, A_2, \dots, A_n

1. Попарно независимые A_i и A_j независимы

2. Независимы в совокупности $\forall I \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \quad P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

Пример. Кидаем две монеты $\Omega = \{00, 01, 10, 11\}$

$A_1 = \{10, 11\}$ $A_2 = \{01, 11\}$ $A_3 = \{01, 10\}$ – независимы попарно, но не в совокупности

Определение 8 (Формула полной вероятности).

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$$

Совокупность таких A -шек называется полной системой событий.

Дано: вероятности $P(A_i)$ $P(B|A_i)$ Найти: $P(B)$

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

– формула полной вероятности

Найти: $P(A_j|B)$

A_1 – болен, A_2 – здоров, B – положительный результат теста

$P(A_2|B)$

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$

– формула Байеса

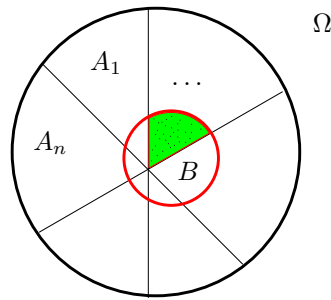


Рис. 1.1: В

1.2 Случайные величины

Замечание. Неправильное (наивное) определение – величина, принимающая случайное значение.

Она может быть константой. Что такое величина?

Определение 9 (Случайная величина). $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} - \mathbb{R}$ -значная функция

Ω, p – вероятностное пространство.

Пример. Если взять случайные текст длиной 1Кб. Вариантов текста очень много и бессмысленно их рассматривать отдельно, интересует какое-то свойство, величина.

Графы, $2^{\binom{n}{2}}$ штук. Но нас интересует какая-то (численная) характеристика элементарного исхода.

Пример. $D(ice) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\Omega = D^2 \quad p(\langle i, j \rangle) = \frac{1}{36}$$

$$\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \xi(\langle i, j \rangle) = i + j$$

Пример (Случайные графы). $G(4, \frac{1}{2})$ – случайный граф, 4 вершины, каждое ребро существует с вероятностью $\frac{1}{2}$

$$\Omega = \mathbb{B}^6 \quad p(G) = \frac{1}{64}$$

$\xi(G)$ = количество компонент связности

Пример. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\xi(w) = w$

Пример. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $E = \{2, 4, 6\}$

$$\chi_E(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in E \\ 0, & \omega \notin E \end{cases} - \text{индикаторная случайная величина}$$

Определение 10. Ω, p, ξ

$$[\xi = i] = \{\omega | \xi(\omega) = i\} \subseteq \Omega$$

$$P([\xi = i]) = P(\xi = i) = f_\xi(i) \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$f_\xi(i) = P(\xi = i)$ – дискретная плотность вероятности случайной величины ξ

$$F_\xi(i) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = P(\xi \leq i) - \text{функция распределения}$$

Замечание. Непрерывная vs Дискретная вероятность

Пример.

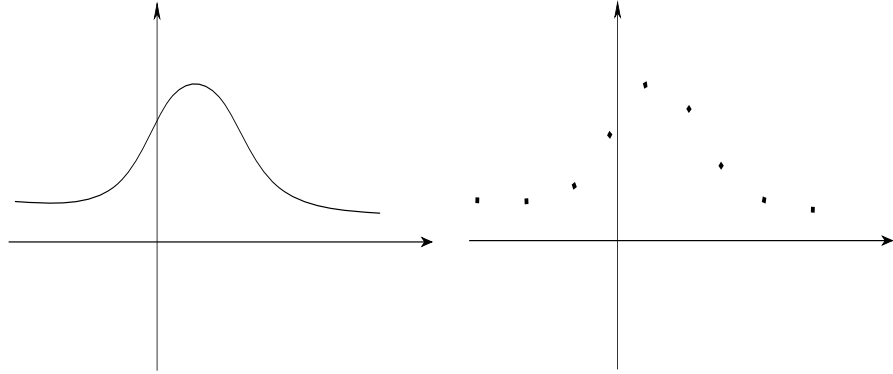


Рис. 1.2: непрерывная и дискретная вероятность

Замечание. $\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$f_{\xi}(i) = P(\xi = i) \quad f_{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xi}(x) = F_{\xi}(i)$$

$$f_{\xi}(x) = \sum_i P(\xi = i) f(x - i)$$

Пример. $\Omega = \mathbb{B}^{1000} \quad p(\omega) = \frac{1}{2^{1000}}$

$\xi(w) = \text{число } 1 \text{ в } \omega$

$$|\text{множество значений } \xi| = 1001 \quad p(\xi = i) = \frac{\binom{1000}{i}}{2^{1000}}$$

Замечание. Случайные числа обозначаются строчными греческими или заглавными латинскими из конца алфавита (X, Z)

Замечание (Что можно делать со случайными величинами). ξ, η – функции

$\xi^2 \quad 2\xi \quad \xi + \eta \quad \xi \cdot \eta \quad \xi^\eta \quad \sin \xi \quad e^\eta \quad \frac{1+\xi}{\eta}$ (всё то же, что мы можем делать с функциями).

Пример. $\Omega = D^2 \quad \xi_1(\langle i, j \rangle) = i \quad \xi_2(\langle i, j \rangle) = j$ – одинаково распределённые случайные величины

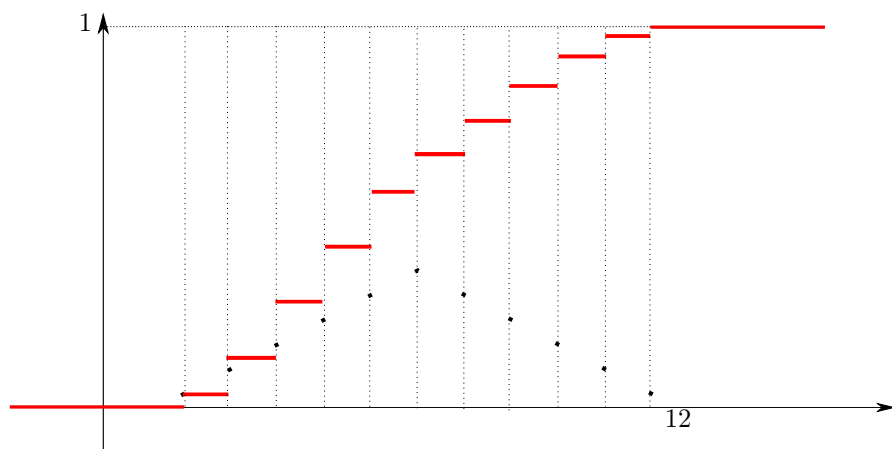


Рис. 1.3: Два-кубика (функция распределения)

Пример. $\Omega = F$ $id(\omega) = \omega$

$1, 2, \dots, 6$ – каждый с вероятностью $\frac{1}{6}$. Другое вероятностное пространство относительно предыдущего примера, но всё равно одинаковое распределение.

$\xi = (i + j) = \xi_1 + \xi_2$ $\xi = (i + j) \% 6 + 1$ – у второй то же распределение, что у верхних, но она уже совсем другая.

Определение 11. Математическое ожидание

$$E_{\xi} = \sum_{\omega} p(\omega) \xi(\omega).$$

Утверждение 1. $E_{\xi} = \sum_i i p(\xi = i)$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 E_{\xi} &= \sum_{\omega} p(\omega) \xi(\omega) \\
 &= \sum_i \sum_{\omega: \xi(\omega)=i} p(\omega) \cdot \xi(\omega) \\
 &= \sum_i \sum_{\omega: \xi(\omega)=i} p(\omega) \cdot i \\
 &= \sum_i i \sum_{\omega: \xi(\omega)=i} p(\omega) \\
 &= \sum_i iP(\xi = i)
 \end{aligned}$$

■

Пример. $\Omega = D \quad \xi = id$

$$E_{\xi} = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$$

Пример. $\Omega = D^2 \quad \xi(\langle i, j \rangle) = i + j$

$$E_{\xi} = \frac{1}{36} \cdot (2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 11 \cdot 2 + 12 \cdot 1)$$

– здесь среднее значение оказалось наиболее частым, но так оно не всегда (пример с 3,5)

Теорема 2. $E_{\lambda\xi} = \lambda E_{\xi}$

$$E(\xi + \eta) = E_{\xi} + E_{\eta}$$

Доказательство. $E_{\lambda\xi} = \sum_{\omega} p(\omega) \lambda\xi(\omega) = \lambda E_{\xi}$

$$E(\xi + \eta) = \sum_{\omega} p(\omega) (\xi(\omega) + \eta(\omega)) = E_{\xi} + E_{\eta}$$

■

Утверждение 2. Если ξ и η одинаково распределены, то $E_{\xi} = E_{\eta}$

Пример. Бросим кубик один раз, ξ_1 – что выпало сверху, ξ_2 – что выпало снизу

$E(\xi_1 + \xi_2) = 7$. – не играет роли как числа друг относительно друга расположены.

МАТОЖИДАНИЕ ЛИНЕЙНО ВСЕГДА

Пример. $\Omega = S_n$ $p(\omega) = \frac{1}{n!}$

$\xi(\pi) = |\{i | \pi[i] = i\}|$ $0 \dots n$, кроме $n-1$

$$E_\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j = 1$$

$$\xi_i(\pi) = \begin{cases} 1, & \pi[i] = i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$E_{\xi_i} = \frac{1}{n}$$

$$\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j$$

1.3 Независимые случайные величины

Определение 12 (удобное). Случайные величины ξ и η независимы, если события $[\xi = \alpha]$ и $[\eta = \beta]$ – независимы $\forall \alpha, \beta$

Определение 13 (нормальное). $[\xi \leq \alpha]$ и $[\eta \leq \beta]$ – независимы для $\forall \alpha, \beta$

Пример. $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

$$\xi_1(\langle \omega_1, \omega_2 \rangle) = f(\omega_1)$$

$$\xi_2(\langle \omega_1, \omega_2 \rangle) = g(\omega_2)$$

A и B независимы, χ_A, χ_B – независимы

Теорема 3. ξ, η – независимы $\implies E(\xi \cdot \eta) = E_\xi \cdot E_\eta$

Доказательство. $E\xi \cdot \eta = \sum_{\alpha} \alpha \cdot P(\xi \cdot \eta = \alpha) = \sum_{i,j} \alpha P([\xi = i] \cap [\eta = j]) =$
 $\sum_i \sum_j ij P(\xi = i) P(\eta = j) = E_\xi E_\eta$

$$i \cdot j = \alpha \quad i \in R_\xi \quad j \in R_\eta$$

■

Пример. $\Omega = \{0, 1\}$ $p = \frac{1}{2}$ $\xi(i) = 2i$ $E_\xi = 1$

$\Omega = S_n$ $p = \frac{1}{n!}$ ξ = число неподвижных точек $E_\xi = 1$

Матожидание одно, но ведут себя совершенно по разному.

Определение 14 (Дисперсия). $D_\xi = Var(\xi)$

$$D_{xi} = E(\xi - E_\xi)^2 = E(\xi^2 - 2\xi E_\xi + (E_\xi)^2) = E_{xi}^2 - 2E_\xi E_\xi + (E_\xi)^2 = E_{\xi^2} - (E_\xi)^2$$

Теорема 4. $D_{c\xi} = c^2 D_\xi$

Если ξ и η независимы, то $D_{\xi+\eta} = D_\xi + D_\eta$

Доказательство. Упражнение

