

Дифференциальные уравнения

Коченюк Анатолий

15 ноября 2021 г.

Связь по: mvbabushkin@itmo.ru — просьба писать именно на почту 30 — экзамен 70 — практика (будет уточняться)

Литературу пришлю

0.1 Введение

0.1.1 Уравнения первого порядка

Допустим, y — неизвестная величина. Заметим, что это не просто число, а некоторая зависимость (например, температура, зависящая от времени), то есть это некоторая искомая функция. Ну, и часто непосредственно, нам не написать чему она равна; явно эту функцию просто так не напишешь, но можно написать некую взаимосвязь между этой функцией и переменной, возможно еще и производной и т.п.

Определение 1. Такая взаимосвязь называется **дифференциальным уравнением**.

Пример. Допустим, у нас есть кролики, заведем таблицу и будем считать кроликов каждый день.

Предположем, мы смотрели на эксперимент и обнаружили такую зависимость: Прирост примерно пропорционален текущему количеству и времени замеры.

$$y_{k+1} - y_k \approx \alpha y_k (t_{k+1} - t_k)$$

Так же заметим, что если ущемлять шаг времени, то зависимость будет все более и более точная.

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{t_{k+1} - t_k} = \alpha y_k$$

Тогда слева производная.

$$y'(t) = \alpha y(t) - g \cdot y$$

Как же получать такие формулы? Все-таки мы не привели ни одного аргумента, что эта формула верна. . . Пусть этим занимаются физики, мы лишь будем решать используя эти формулы.

Попробуем поугадывать решения:

$$\varphi(t) = \alpha t \implies (\alpha t)' = \alpha(\alpha t) \implies \alpha = \alpha^2 t \implies t = \frac{1}{\alpha}$$

$\varphi(t) = e^{\alpha t} \implies (e^{\alpha t})' = \alpha e^{\alpha t} \implies \alpha e^{\alpha t} \equiv \alpha e^{\alpha t} \text{ на } \mathbb{R} \implies \varphi(t) = Ce^{\alpha t} - \text{все решения}$

Задача 1. Пусть дано $m(0) = 25\text{г}$, $m(30) = 42\text{г}$, $m(t_2) = 2m(0)$, $t_2 - ?$

То есть нам нужно найти точку на плоскости (здесь был рисунок), но она может быть где угодно, так что предположем, что у нас есть еще какие-то данные:

$$m'(t) = \alpha m(t) \text{ \& } m(t) = Ce^{\alpha t}$$

Решение.

$$25 = m(0) = C \quad 42 = m(30) = 25e^{\alpha \cdot 30} \implies \alpha = \frac{1}{30} \ln \frac{42}{25} \implies 50 = m(t_2) = 25e^{\frac{1}{30} \ln \frac{42}{25} \cdot t_2} \implies t_2 \approx 40$$

■

0.1.2 Второй закон Ньютона

$$F = ma \implies a = \frac{F(t, x, v)}{m} \implies x'' = \frac{F(t, x, x')}{m}$$

Так что дифференциальные уравнение встречаются очень часто — мотивируйтесь их решать.

0.2 Уравнения первого порядка и его решения

Определение 2. Дифференциальное уравнение первого порядка — это уравнение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

Определение 3. Функция φ , если:

1. $\varphi \in C^1(a, b)$
2. $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0, x \in (a, b)$

Пример. $y' = -\frac{1}{x^2}$

$$y = \frac{1}{x} + C, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$y = \begin{cases} \frac{1}{x} + A, x < 0 \\ \frac{1}{x} + B, x > 0 \end{cases}$$

Сейчас одна точка разрыва, а если их больше, то было бы больше независимых констант... Поэтому, решениями являются функции на отрезке.

Определение 4. Интегральная кривая — это график его решения.

<!-- Оять рисунок -->

Определение 5. Общее множество решений для дифференциального уравнения — это множество всех его решений.

Определение 6. $F(x, y, c) = 0$

Общий интеграл — это такой интеграл при некотором значении константы в решении которого, соотношение неявно задает все решения.

Определение 7. Уравнение в неявной форме:

$$y' = f(x, y)$$

Для такого мы определим **область задания** — это аналог ОДЗ.

Определение 8. Область задания — это множество $\text{Dom } f$ (domain) — множество, где уравнение имеет смысл.

Пример. $y' = -\frac{1}{x^2}$, $f(x, y) = -\frac{1}{x^2}$, $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$

Задача 2. $y' = x + y$. Пусть φ — решение. У нас есть такая связь: $\varphi'(x) = x + \varphi(x)$, в частности, в точке $(2, 3)$.

$$\angle(2, 3) \quad \varphi'(2) = 2 + 3 = 5 = f(2, 3)$$

То есть, если там проходит наша функция, то она проходит там под углом $\arctg 5$.

$$\angle(4, 3) \quad \varphi'(4) = 4 + 3 = 7 = f(4, 3)$$

Никто не мешает нам взять какую-то сетку, и в каждой точке этой сетки мы поймем, как примерно ведут себя интегральные кривые. То есть, можно не решая уравнения, можно построить такое поле и увидеть, как ведут себя интегральные кривые.

Определение 9. То есть, задать уравнение — это значит увидеть, как ведет себя поле направлений.

Из этого геометрического смысла, мы можем сделать еще один вывод.

Возьмем какую-то точку (потом научимся их находить), посчитаем в ней угол, пойдем по этому направлению, новая точка — новое направление, и т. д. Чем мельче шаг, тем ближе ломаная к интегральной кривой.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + h \\ y_{k+1} &= y_k + f(x_k, y_k)h \\ \frac{\delta y_k}{\delta x_k} &= f(x_k, y_k) \end{aligned}$$

Так определяется **ломаная Эйлера**.

0.2.2 Уравнение в дифференциалах

Давайте запишем производную, как отношение дифференциалов, и перепишем уравнение 7.

$$\begin{aligned} dy &= f(x, y)dx \\ f(x, y)dx - dy &= 0 \end{aligned}$$

Определение 10. Уравнение в дифференциалах: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

Определение 11. Функция φ — это решение 10, если:

- $\varphi \in C^1(a, b)$
- $P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0, \quad x \in (a, b)$

Определение 12. Область определения 10 — это множество $\text{Dom } P \cap \text{Dom } Q$

Пример. Пусть $xdx + ydy = 0$ $\text{Dom } P \cap \text{Dom } Q = \mathbb{R}^2$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in (-R, R) \quad xdx + \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \left(-\frac{2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} \right) dx = 0$$

В чем еще одна идея такого вида уравнения? В том, что x и y здесь равноправны, то есть $x = ky$ — это тоже *конечное* решения.

Определение 13. Пара или вектор-функция $r(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ — это параметрическое решение уравнения 10, если:

- $\varphi, \psi \in C^1(\alpha, \beta), r'(t) \neq 0, \forall t \in (\alpha, \beta)$ — второе условие, чтобы не было изломов у функции (как у модуля)
- $P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \equiv 0$

Пример. $xdx + ydy = 0 \implies (R \cos t, R \sin t), t \in \mathbb{R}$ — параметрическое решение.

$$P(\varphi, \psi)\varphi' + Q(\varphi, \psi)\psi'(x) \equiv 0 \implies (P, Q) \cdot (\varphi', \psi') = 0$$

$$F = (P, Q) \quad r = (\varphi, \psi) \quad F \perp r'$$

<!-- Рисунок -->

И здесь у нас никакие направления не исключаются, в отличие от поля, где исключались вертикальные направления.

0.3 Задача Коши и уравнения с разделяющимися переменными

0.3.1 Задача Коши (ЗК)

Определение 14. Задачей Коши или начальной задачей называется задача отыскания решения уравнения в нормальной форме $y' = f(x, y)$, которая удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = y_0$

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

(x_0, y_0) — начальные данные

Вопросы: есть ли решение и может ли их быть несколько?

Теорема 1 (Теорема о существовании для уравнений 1-го порядка). G – область (открытое связное множество), $f \in C(G)$, $(x_0, y_0) \in G \implies \exists$ решение задачи Коши в некоторой окрестности точки x_0

Пример. $y' = f(x, y)$ $f(x, y) = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$

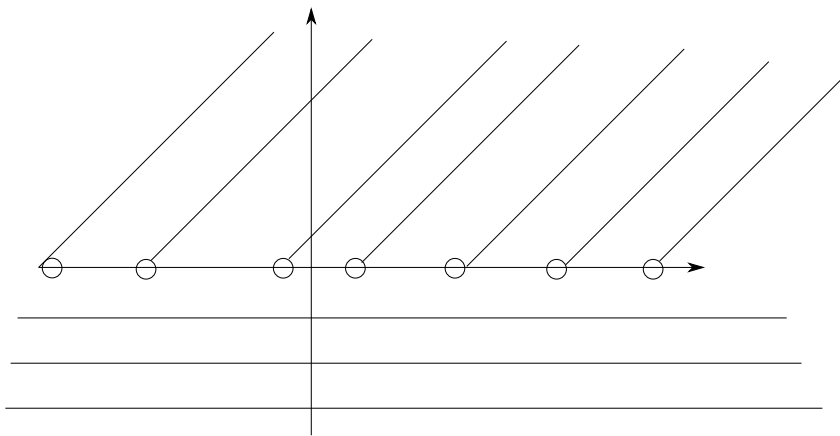


Рис. 1: легко

Теорема 2 (Теорема единственности для уравнения 1-го порядка). G – область, $f, g'_y \in C(G)$, $(x_0, y_0) \in G$, φ_1, φ_2 – решения ЗК на $(\alpha, \beta) \implies \varphi_1 \equiv \varphi_2$ на (α, β)

Пример. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$

$f(x, y) = 3\sqrt[3]{y^2}$ – непрерывна везде, $G = \mathbb{R}^2$

По теореме о существовании через любую точку проходит хотя бы одна интегральная кривая.

$$f'_y = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{y}} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$$

На прямой $y = 0$ нарушаются условия теоремы об единственности, значит в этих точках могут (но не факт, что будут) проходить несколько интегральных кривых.

$$dy = 2\sqrt[3]{y^2}dx$$

$$y = (x - c)^3$$

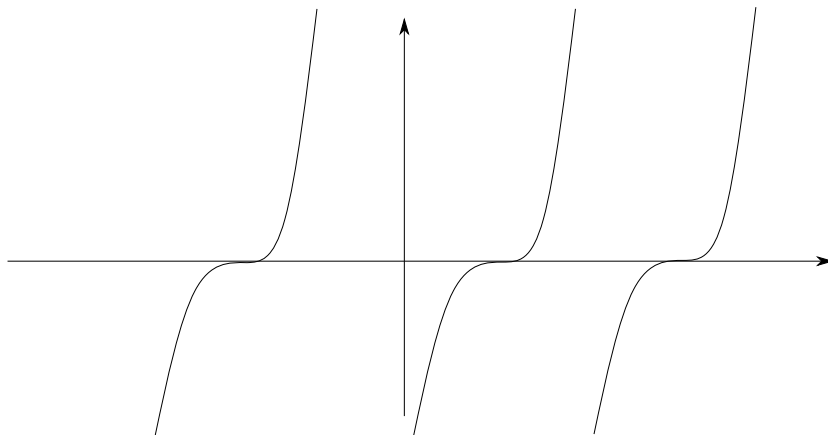


Рис. 2: uzhas

Ответ: $y = (x - C)^3$ $C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

$y = 0, x \in \mathbb{R}$ – особое решение. Имеются составные решения

Определение 15. Решение φ на (a, b) уравнения $y' = f(x, y)$ называется особым, если

$$\forall x_0 \in (a, b) \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi_1 - \text{решение задачи, } y' = f(x, y) \quad y(x_0) = \varphi(x_0)$$

на (α, β) , где $\beta - \alpha < \varepsilon, x_0 \in (\alpha, \beta)$, но $\varphi_1 \not\equiv \varphi$ на (α, β)

0.3.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 16 (Уравнения с разделёнными переменными).

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

Теорема 3 (Общее решение уравнения с разделёнными переменными).
 $P \in C(a, b) \quad Q \in C(c, d) \quad (\alpha, \beta) \subset (a, b)$

Тогда функция $y = \varphi(x)$ – решение на $(\alpha, \beta) \iff$:

1. $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$
2. $\exists C \in \mathbb{R}$, т.ч. φ неявно задаётся уравнением $\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$

Доказательство.

\implies Дано, что φ – решение \implies автоматически выполняется первый пункт.

$\sqsupset x_0 \in (\alpha, \beta)$ – произвольно. $y_0 := \varphi(x_0)$, тогда пункт 2 запишется как:

$$\int_{x_0}^x P(x)dx + C_1 + \int_{y_0}^y Q(t)dt + C_2 = C$$

$$\int_{x_0}^x P(x)dx + \int_{y_0}^{\varphi} Q(t)dt = A \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

Пусть $t = \varphi(\tau) \implies$ л.ч.

$$\int_{x_0}^x P(t)dt + \int_{x_0}^x Q(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau)dt = \int_{x_0}^x (P(\tau) + Q(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau)) dt \equiv 0 \text{ на } (\alpha, \beta)$$

\Leftarrow Дано: $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$ и $\int P(x)dx + [\int Q(y)dy]_{y=\varphi(x)} \equiv C$ на (α, β)

продифференцируем наше тождество (законно, потому что φ непрерывно дифференцируемо)

$$P(x) + Q(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \equiv 0 \text{ на } (\alpha, \beta)$$

■

Пример. $xdx + ydy = 0$

$$\int xdx + \int ydy = C$$

$$x^2 + y^2 = 2C$$

$$x^2 + y^2 = A$$

$$A > 0 \quad \begin{matrix} y = \pm\sqrt{A-x^2} & x \in (-\sqrt{A}, \sqrt{A}) \\ x = \pm\sqrt{A-y^2} & , y \in (-\sqrt{A}, \sqrt{A}) \end{matrix}$$

Определение 17. Уравнение с разделяющимися переменными:

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)y_2(y)dy = 0$$

$$p_2(x_0) = 0 \implies x \equiv x_0 - \text{решение}$$

$$q_1(t_0) = 0 \implies y \equiv y_0 - \text{решение}$$

Далее отдельно рассматриваем на каждой из областей (4 здесь):

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx + \frac{q_2(y)}{q_1(y)}dy = 0$$

Пример.

$$2ydx - xdy = 0$$

$x = 0, y = 0$ – решения. Нужно отдельно смотреть все четверти

$$\begin{aligned}\frac{2dx}{x} &= \frac{dy}{y} \\ 2 \ln |x| &= \ln |y| + C \\ y &= Ax^2, A > 0, x > 0\end{aligned}$$

В остальных четвертях аналогично. Они все стыкуются в нуле и общее решение – всевозможные стыковки.

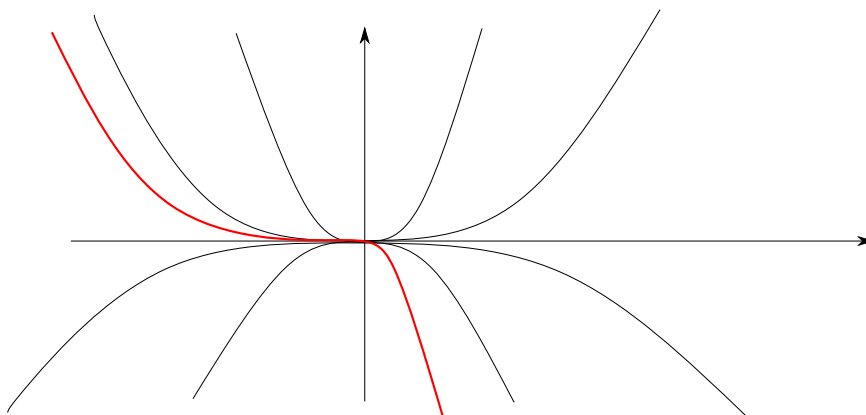


Рис. 3: gohan1

Пример.

$$ydx - xdy = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} + C$$

$$\ln |x| = \ln |y| + C$$

$$y = Ax$$

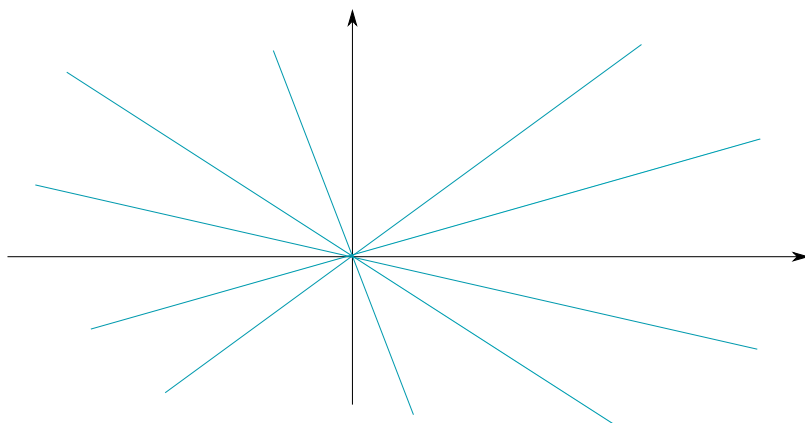


Рис. 4: gohan2

Определение 18. Два уравнения называют эквивалентными, если они имеют одинаковую область задания и одинаковый набор интегральных кривых.

Замечание.

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0$$

не эквивалентно

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx + \frac{q_1(y)}{q_2(y)}dy = 0$$

Теорема 4 (Теорема о существовании и единственности для уравнений с разделёнными переменными). $P \in C(a, b)$ $Q \in C(c, d)$

(x_0, y_0) – не особая точка уравнения (т.е. $P(x_0) \neq 0, Q(y_0) \neq 0$) \implies уравнение

$$\int_{x_0}^x P(t)dt + \int_{y_0}^y Q(t)dt = 0$$

)

определяет единственное решение в некоторой окрестности точки x_0

0.4 Некоторые типы уравнений, интегрируемых в квадратурах

решение уравнения – конечное число арифметических действий, суперпозиции и взятия интегралов от обеих частей

0.4.1 Линейные уравнения

Определение 19. $y' = p(x)y + q(x)$ – линейное уравнения (ЛУ)

$y' = p(x)y$ – однородное линейное уравнения (ЛОУ)

Лемма 1 (Общее решение линейного однородного уравнения). $\exists p \in C(a, b) \implies y = Ce^{\int p}, C \in \mathbb{R}, x \in (a, b)$ – Общая запись решения ЛОУ

Доказательство. $dy = p(x)ydx$

$y = 0$ – решение

$$\int \frac{dy}{y} = \int p(x)dx + C$$

$$\ln |u| = \int p + C$$

При $y > 0$ $y = Ae^{\int p}, A > 0$

При $y < 0$ $y = Ae^{\int p}, A < 0$

$y = 0$ не особое по теореме об единственности из прошлой секции. ■

Теорема 5 (Общее решение линейного уравнения). $\exists p, q \in C(a, b)$

$$\implies y = \left(C + \int qe^{-\int p} \right) e^{\int p} \quad C \in \mathbb{R} \quad x \in (a, b)$$

Доказательство. Подстановкой убеждаемся, что все эти функции – решения.

Пусть есть ещё решения φ – решение ЛУ на (α, β) , и оно не задаётся формулой из условия теоремы.

Возьмём любую точку, через которую проходит это решение, $(x_0, \varphi(x_0))$. Подставим в общую формулу эту точку, то выразим C

$$y_0 = (C + E(x_0))F(x_0) \quad C = \frac{y_0}{F(x_0)} - E(x_0)$$

По теореме об единственности новое решение совпадает с решением с константой C везде, где оба определены – на (α, β) , а тогда φ задаётся формулой, противоречие ■

0.4.2 Метод вариации постоянной или Метод Лагранжа

1. вместо ЛУ решаем соответствующее ЛОУ

$$yy' = p(x)y \quad t = Ce^{\int p}$$

2. заменяя C на $C(x)$ и подставляем $y = C(x)e^{\int p}$ в исходное ЛУ уравнение

$$\begin{aligned} (Ce^{\int p})' &= pCe^{\int p} + q \\ C'e^{\int p} + Ce^{\int p} \cdot p &= pCe^{\int p} + q \\ C' &= qe^{-\int p} \end{aligned}$$

3. находим $C = \int qe^{-\int p} + C_1$

4. Подставляем $C(x)$ вместо C в решение (ЛОУ)

$$y = \left(C_1 + \int qe^{-\int p} \right) e^{\int p}$$

0.4.3 Уравнение Бернулли

Определение 20. $y' = p(x)y + q(x)y^\alpha \quad \alpha \notin \{0, 1\}$

Замена на $z = y^{1-\alpha}$ сводит его к ЛУ

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y^\alpha} &= p(x)y^{1-\alpha} + q(x) \\ z' &= (1-\alpha)\frac{y'}{y^\alpha} \\ z' &= (1-\alpha)p(x)z + (1-\alpha)q(x) \\ f(x, y) &= py + qy^\alpha \\ f'_y &= p + qy^{\alpha-1}\end{aligned}$$

$\alpha \geq 1 \implies$ непрерывна, следовательно по теореме об единственности $y = 0$ – не особое

0.4.4 Уравнение Риккати

Определение 21. $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$ – квадратичная функция от y

Утверждение 1 (Лиувилль). Уравнение

$$y' = y^2 + x^\alpha$$

интегрируется в квадратурах $\iff \frac{\alpha}{2\alpha+4} \in \mathbb{Z}$ или $\alpha = -2$

Если известно решение φ , то подстановка $y = z + \varphi$ сводится к уравнению Бернулли

0.4.5 Уравнение в полных дифференциалах

Определение 22.

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Если $\exists u : u'_x = P \quad u'_y = Q$

Теорема 6 (Общее решение УПД). $P, Q \in C(G) \quad G \subseteq \mathbb{R}^2$ – область, $u'_x = P, u'_y = Q$

$y = \varphi(x)$ – решение УПД на (a, b) \iff

1. $\varphi \in C^1(a, b)$
2. $\exists C : \quad U(x, \varphi(x)) \equiv C$ на (a, b) (т.е. φ неявно задано уравнением $u(x, y) = C$)

Доказательство.

\Rightarrow 1. Выполняется по определению решения

2. Имеем $P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$

$$\frac{P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x)}{C} = (u(x, \varphi(x)))' = 0 \Rightarrow u(x, \varphi(x)) = C$$

\Leftarrow Имеем $u(x, \varphi(x)) \equiv C$, дифференцируем:

$$u'_x(x, \varphi(x)) + u'_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$$

$$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$$

■

Предположим $u \in C^2(G)$ $u'_x = P$ $u'_y = Q$ $P'_y = u'_{xy} = u'_{yx} = Q'_x$

Утверждение 2. Условие $P'_y = Q'_x$ – достаточное для того, чтобы уравнение было УПД, если G – односвязная область

Определение 23. Область односвязна, если любая замкнутая кривая стягивается в точку (гомотопна точке)

Определение 24. Функция $u : u'_x = P, u'_y = Q$ называется потенциалом уравнения в полных дифференциальных (= потенциал поля (P, Q))

Потенциал УПД находится по формуле:

$$u(x, y) = C + \int_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

$$\text{Если кривая } \gamma \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t \in [\alpha, \beta] \end{cases} \Rightarrow \int_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt$$

0.4.6 Интегрирующий множитель

Определение 25. $\square \mu(x, y) \neq 0 \quad \forall x, y$ и

$$\mu Pdx + \mu Qdy = 0$$

– УПД $\Rightarrow \mu$ – интегральный множитель уравнения $Pdx + Qdy = 0$

Утверждение 3 (Необходимое условие). (если $\mu \in C^1(G)$)

$$(\mu P)'_y = (\mu Q)'_x$$

)

Пример.

$$\begin{aligned} y' &= p(x)y + q(x) = 0 \\ (p(x)y + q(x)) dx - dy &= 0 \\ P'_y &= p(x) \quad Q'_x = 0 \end{aligned}$$

Будем искать μ в виде $\mu = \mu(x) \implies 0 \cdot P + \mu P = \mu'(-1) + 0 \implies \mu' = -\mu p$

$\mu = Ce^{-\int p}$, пусть $C = 1$ $\mu = e^{-\int p}$

Умножим исходное уравнение на $\mu = e^{-\int p}$

$$\begin{aligned} y'e^{-\int p} &= pye^{-\int p} + qe^{-\int p} \\ y'e^{-\int p} - pye^{-\int p} &= qe^{-\int p} \\ (ye^{-\int p})' &= qe^{-\int p} \\ ye^{-\int p} &= \int qe^{-\int p} + C \\ y &= \left(C + \int qe^{-\int p} \right) e^{\int p} \end{aligned}$$

0.5 Уравнения неразрешённые относительно производной

Определение 26. $F(x, y, y') = 0$ – разрешённые относительно производной

0.5.1 Уравнения разрешимые относительно производной

Пример. $(y' - f_1(x, y))(y' - f_2(x, y)) = 0$

Если φ – решение $y' = f_1(x, y)$ или $y' = f_2(x, y)$, то φ – решение исходного

Обратное неверно

Пример. $y'^2 - 4x^2 = 0$

$$(y' - 2x)(y' + 2) = 0$$

$$y' = 2x \implies y = x^2 + C$$

$$y' = -2x \implies -x^2 + C$$

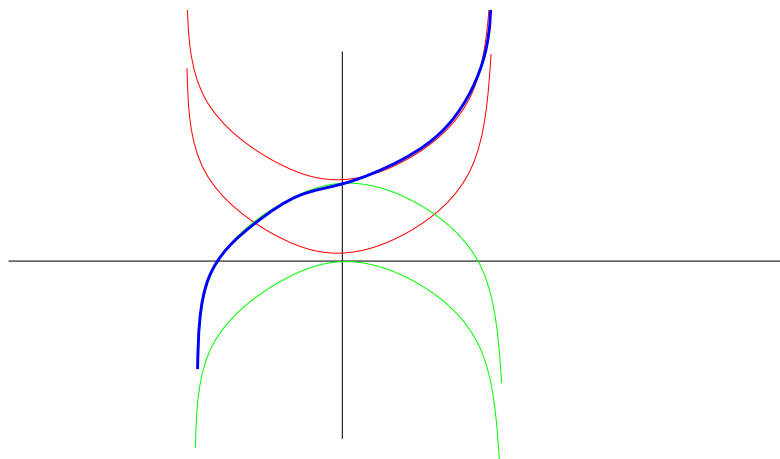


Рис. 5: obrnev

Есть составные решения, где интегральные уравнения стыкуются в точках (x_0, y_0) $f'_1(x_0, y_0) = f'_2(x_0, y_0)$.

0.5.2 Метод введения параметра

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t) \quad t \in (\alpha, \beta)$$

$\exists \varphi^{-1} \implies$ функция $\psi \circ \varphi^{-1}$ задана параметрически

Неполные уравнения

$\triangleleft F(x, y') = 0$ – уравнения множества на плоскости $\mathbb{R}_{x, y'}^2$

Пусть $x = \varphi(t)$ $y' = \psi(t)$ – гладкая параметризация γ и $\exists \varphi^{-1}$

Утверждение 4. $x = \varphi(t), y = \int \psi(t) \varphi'(t) dt$ – параметрически заданное решение $F(x, y') = 0$

Доказательство. $F(x, y'_x(x)) = F(\varphi(t), \frac{(\int \psi(t) \varphi'(t) dt + C)'}{\varphi'(t)}) = F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$ ■

Правило нахождения решений (некоторых) уравнения $F(x, y') = 0$:

1. Подобрать параметризацию множества $F(x, y')$ в $\mathbb{R}_{x,y'}^2$

$$x = \varphi(t) \quad y' = \psi(t) \quad t \in (\alpha, \beta)$$

2. В основном соотношении метода введения параметризации

$$dy = y'_x dx$$

сделать подстановки

$$dy = y'_t dt \quad y'_x = \psi(t) \quad dx = x'_t dt = \varphi^{-1} dt$$

$$\implies y'_t dt = \psi(t) \varphi'(t) dt$$

$$y'_t = \psi(t) \varphi'(t)$$

$$\implies y = \int \psi(t) \varphi'(t) dt + C$$

$$x = \varphi(t)$$

.

Так мы получили решения, заданное параметрически

Пример. $e^{y'_x} + y'_x = x$

Пусть $y'_x = t$

$$x = e^t + t$$

$\triangleleft dy = y'_x dx$, заменим:

$$dy = t'_t dt$$

$$t'_x = t$$

$$dx = x'_t dt = (e^t + 1) dt$$

$$\implies y'_t = t (e^t + 1)$$

$$\implies y = \int t (e^t + 1) dt = e^t (t - 1) + \frac{t^2}{2} + C$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = t + e^t \\ y = e^t (t - 1) + \frac{t^2}{2} + C \end{cases}$$

$$\triangleleft F(y, y') = 0$$

Сделать подстановки

$$\begin{aligned}
 dy &= y' dt = \varphi' dt \\
 y'_x &= \psi(t) \\
 dx &= x'_t dt \\
 \implies \varphi'(t) dt &= \psi(t) x'_t dt \\
 \varphi'(t) &= \psi(t) x'_t \\
 x'_t &= \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} \\
 x &= \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C \\
 \implies \begin{cases} x = \int \frac{\varphi'}{\psi} + C \\ y = \varphi \end{cases} .
 \end{aligned}$$

– решение заданное параметрически

0.5.3 Полное уравнение

$F(x, y, y') = 0$ – уравнение множества σ в пространстве $\mathbb{R}^3_{x,y,y'}$.

Пусть $\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ y' = \chi(u, v) \end{cases}$ – гладкая параметризация σ

Правило нахождения решений (некоторых) полного уравнения:

1. Подобрать параметризацию множества $F(x, y, y') = 0$ в $\mathbb{R}^3_{x,y,y'}$

2. В основном соотношении $dy = y'_x dx$ поставить $\begin{cases} dy = y'_u du + y'_v dv = \psi'_u du + \psi'_v dv \\ y'_x = \chi(u, v) \\ dx = x'_u du + x'_v dv = \varphi'_u du + \varphi'_v dv \end{cases}$
(Цель – получить уравнение, содержащее только u, v)

$$\psi'_u du + \psi'_v dv = \chi \cdot (\varphi'_u du + \varphi'_v dv)$$

3. Если $v = g(u, C)$ – решение уравнения сверху, то $\begin{cases} x = \varphi(u, g(u, C)) \\ y = \psi(u, g(u, C)) \end{cases}$
– решение исходного уравнения, заданное параметрически

Пример. $xy' - y = \frac{y'}{2} \ln \frac{y'}{2}$

Доказательство. Пусть $\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = uv - \frac{v}{2} \ln \frac{v}{2} \end{cases}$

◁ основное соотношение $dy = y'_x dx$

$$dy = y'_u du + y'_v dv = v du + \left(u - \frac{1}{2} \ln \frac{v}{2} - \frac{1}{2}\right) dv$$

$$y'_x = v$$

$$dx = x'_u du + x'_v dv = du$$

$$v du + \left(u - \frac{1}{2} \ln \frac{v}{2} - \frac{1}{2}\right) dv = v du$$

.

◁ 2 уравнения:

$$u - \frac{1}{2} \ln v_2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$dv = 0$$

.

$$v = 2e^{2u-1}$$

$$v = c$$

.

$$x = \varphi(u, (u, C)) = u$$

$$y = \psi(u, g(u, C)) = u \cdot (2e^{2u-1}) - \left(\frac{2e^{2u-1}}{2}\right) \ln \frac{2e^{2u-1}}{2} = 2ue^{2u-1} - e^{2u-1}(2u-1) = e^{2u-1} = y = e^{2x-1} - \text{решение}$$

$$x = u$$

$$y = u \cdot C - \frac{C}{2} \ln \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow y = Cx - \frac{C}{2} \ln \frac{C}{2}$$

.

– решение



0.5.4 Задача Коши для уравнения, разрешимого относительно производной

Определение 27. Задачей Коши для этого уравнения называются задачу нахождения его решений, удовлетворяющих начальным условиям:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

Чтобы задача Коши имела хотя бы одно решение необходимо $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$ (согласование начальных данных)

Теорема 7 (существование и единственность решения уравнения, разрешимого относительно производной). $G \subset \mathbb{R}^3$ – область

$F \in C^1(G) \quad (x_0, y_0, y'_0) \in G \quad F(x_0, y_0, y'_0) = 0 \quad F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0$
 \implies в некоторой окрестности точки $x_0 \exists!$ решение задачи Коши.

$$F(x, y, y') = 0 \quad y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y'_0$$

Определение 28. Решение φ на (a, b) уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется особым, если $\forall x_0 \in (a, b) \quad \exists \psi$ – решение

$$F(x, y, y') = 0 \quad y(x_0) = \varphi(x_0) \quad y'(x_0) = \varphi^{-1}(x_0)$$

, отличающееся от φ в \forall сколь-угодно малой окрестности x_0

Определение 29. Множество $D = \{(x, y) | \exists y' \in \mathbb{R} \quad F(x, y, y') = 0 \text{ и } F'_{y'}(x, y, y') = 0\}$ называется дискриминантной кривой

Алгоритм нахождения особого решения:

1. найти общий интеграл
2. Найти дискриминантную кривую D , исключив y' из системы $\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases}$
3. Найти интегральные кривые, проходящие внутри.
4. Проверить найденное решение на соответствие определению особого решения

Пример (Продолжение). 1. $y = e^{2x-1} \quad y = Cx - \frac{C}{2} \ln \frac{C}{2}$

$$2. \begin{cases} xy' - y - \frac{y'}{2} \ln \frac{y'}{2} = 0 \\ x - \frac{1}{2} \ln \frac{y'}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\dots \implies t = e^{2x-1} \implies D = \{(x, y) | y = e^{2x-1}\}$$

3. Интегральная кривая $y = e^{2x-1}$ лежит в D

4. Возьмём $x_0 \in \mathbb{R}$ $\exists C \begin{cases} Cx_0 - \frac{C}{2} \ln \frac{C}{2} = e^{2x_0-1} \\ C = 2e^{2x_0-1} \end{cases} \implies \psi = 2e^{2x_0-1}x - e^{2x_0-1}(2x_0 - 1)$
 $\psi \neq e^{2x-1}$

0.6 Уравнения высшего порядка

0.6.1 Основные понятия

Определение 30 (Уравнение n -го порядка).

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Определение 31. Функция φ на интервале (a, b) – решение такого уравнения, если:

1. $\varphi \in C^n(a, b)$
2. Подстановка обращает уравнение в тождество

$$F(x, \varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n)}) \equiv 0$$

на (a, b)

Определение 32 (Каноническое уравнение n -го порядка).

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{n-1})$$

Определение 33. Задаче Коши для канонического уравнения n -го порядка называют задачу нахождения его решения, удовлетворяющего

начальным условиям:
$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Числа $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1})$ – начальные данные

Замечание (Геометрический смысл задачи Коши на уравнениях второго

порядка). $\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$

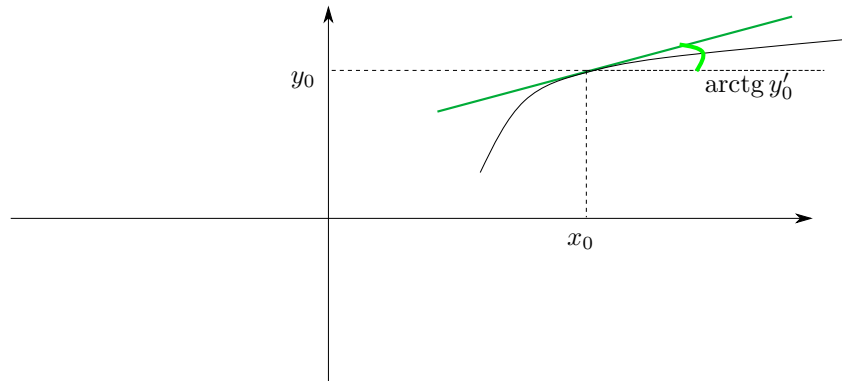


Рис. 6: geokasha

Замечание (Механический смысл). x – координата точки, t – время

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = f(t, x, \dot{x}) \\ x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Теорема 8 (Существование решения Задачи Коши для канонического уравнения n -го порядка). G – область в \mathbb{R}^{n+1} $f \in C(G)$ $(x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in G \implies$ в некоторой окрестности точки $x_0 \exists$ решение

Теорема 9 (Единственность решения Задачи Коши для канонического уравнения n -го порядка). G – область в $\mathbb{R}_{x,y,y',\dots,y^{n-1}}^{n+1}$

$$f, f'_y, f'_{y'}, \dots, g'_{y^{(n-1)}} \in C(G) \quad (x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in G$$

$$\varphi_1, \varphi_2 \text{ – решение Задачи Коши на } (a, b) \implies \varphi_1 \equiv \varphi_2 \text{ на } (a, b)$$

Определение 34. Решение φ на (a, b) называется особым, если для любой точки $x_0 \in (a, b)$ найдётся другое решение ψ , т.ч.

$$\psi(x_0) = \varphi(x_0) \quad \psi'(x_0) = \varphi'(x_0), \dots, \psi^{(n-1)}(x_0) = \varphi^{(n-1)}(x_0)$$

, при этом $\varphi \neq \psi$ в любой сколько угодно малой окрестности x_0

0.6.2 Методы понижения

1. $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ (нет $y, y', \dots, y^{(k-1)}$)

Простейший случай $y^{(n)} = f(x) \quad (y^{(n-1)})' = f(x) \implies y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C$

Пример.

$$y'' = \sin x$$

$$y' = \int \sin x dx + C_1 = -\cos x + C_1 - \text{первый интеграл}$$

$$y = \int (-\cos x + C_1) dx + C_2 = -\sin x + C_1 x + C_2 - \text{второй интеграл}$$

В общем случае делаем замену $z = y^{(k)}$, понижаем порядок уравнения на k единиц

2.

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

(нет x) Подстановка $y' = z(y)$ понижает порядок уравнения на 1

Допустим y – решение такого уравнения и существует $y^{-1} \implies y'(x) = y'(y^{-1}(y(x)))$, т.е. $y'(x) = z(y(x)) \quad z = y' \circ y$

Получим уравнение, которому удовлетворяет функция z . Далее не пишем x для краткости

$$y' = z(y) \quad y'' = z(y)' = z'(y)y' \implies y^{(3)} = \dots = z''(y) \cdot z(y)^2 + (z'(y))^2 \cdot z(y)$$

$$F(y, z(y), z'(y)z(y), z''(y)z(y)^2 + z'(y)^2 z(y)) \equiv 0 \text{ при } x \in (a, b) \text{ или при } y \in (A, B)$$

Таким образом z – решение уравнения $F(y, z, z'z, z''z^2 + z'^2z) = 0$

Пример. $y'' + yy' = 0 \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = -2$

решаем $y'' = -yy'$

т.е. $f(x, y, y') = -yy'$

$f \in C(\mathbb{R}_{x,y,y'}^3) \implies \forall$ Задачи Коши имеется решение

$$f'_y = -y' \quad f'_{y'} = -y$$

$f'_y, f'_{y'} \in C(\mathbb{R}_{x,y,y'}^3) \implies \forall$ Задачи Коши имеет единственно решение

Сделаем подстановку $y' = z(y) \implies y'' = z'(y)y' = z'z \implies z'z + yz = 0$
 $z(z' + y) = 0$

$z = 0$, т.е. $y' = 0$ не даёт решения Задачи Коши

$$\triangleleft z' = -y \quad z = \int (-y) dy + C = -\frac{y^2}{2} + C_1$$

Воспользуемся начальными данными:

$$y'(0) = -\frac{y_0^2}{2} + C_1 \quad -2 = -\frac{2^2}{2} + C_1 \implies C_1 = 0$$

$$y' = -\frac{y^2}{2} \text{ и } y = 0 \text{ – не решение, } -\int \frac{2dy}{y^2} = \int dx \implies \frac{2}{y} = x + C_2$$

$$\text{начальные данные} \implies \frac{2}{2} = 0 + C_2 \implies C_2 = 1$$

$$y = \frac{2}{x+1}$$

0.6.3

Определение 35.

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

– уравнение однородное относительно $y, \dots, y^{(n)}$, если $\forall t \quad F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^\alpha F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$

Замена $z = \frac{y'}{y}$ понижает порядок уравнения

0.6.4 Уравнение в точных производных

Определение 36. Уравнение $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ – уравнение в точных производных, если $\exists \phi = \phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, что

$$\frac{d}{dx} \phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

Утверждение 5. Пусть $F(x, y, \dots, y^{(n)})$ – уравнение в точных производных и функция ϕ удовлетворяет определению. Тогда y – решение

$$\iff \exists C : \quad \phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C$$

0.7 Системы дифференциальных уравнений

Определение 37 (Нормальная система дифференциальных уравнений порядка n).

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ y'_n = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Положим $Y = (y_1 \dots y_n)^T$ $F(x, Y) = (f_1(x, Y), \dots, f_n(x, Y))^T$

Определение 38 (Нормальное n -мерное уравнение).

$$Y' = F(x, Y)$$

Определение 39. Вектор-функция φ называется решением нормального n -мерного уравнения, если

1. $\varphi \in C^1((a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n)$
2. $\varphi'(x) \equiv F(x, \varphi(x))$ на (a, b)

Определение 40. Интегральная кривая нормального n -мерного уравнения – графики его решений

Определение 41. Задача Коши для нормального уравнения n -мерного порядка называется задача нахождения его решения, удовлетворяющего начальному условию $Y(x_0) = Y_0$ ($Y_0 \in \mathbb{R}^n$)

Определение 42. Пусть $\Lambda_n : C^{n-1} \rightarrow (C(a, b))^n$

$$\Lambda_n y = (y, y', \dots, y^{(n-1)})^T$$

Теорема 10 (об эквивалентной системе). Пусть φ – решение на (a, b) уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Тогда функция $\Phi = \Lambda_n \varphi$ – решение на (a, b) системы

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \dots \\ y'_{n-1} = y_n \\ y'_n = f(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

И наоборот: Пусть $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ – решение на (a, b) системы уравнений сверху. Тогда φ_1 – решение на (a, b) уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Доказательство. Пусть φ – решение уравнения.

$$\triangleleft \varphi_k := \varphi^{(k-1)} \quad k = \overline{1, n}$$

Подставим их в систему:

$$\begin{cases} \varphi'_1 = \varphi' = \varphi_2 \\ \varphi'_2 = (\varphi')' = \varphi'' = \varphi_3 \\ \dots \\ \varphi'_{n-1} = (\varphi^{(n-2)})' = \varphi^{(n-1)} = \varphi_n \\ \varphi'_n = (\varphi^{(n-1)})' = \varphi^{(n)} = f(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) = f(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \end{cases}$$

И в обратную сторону: Пусть дано решение системы $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T \implies$

$$\begin{cases} \varphi'_1 = \varphi_2 \\ \varphi'_2 = \varphi_3 \\ \dots \\ \varphi'_{n-1} = \varphi_n \\ \varphi'_n = f(x, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \end{cases}$$

$$\varphi''_1 = \varphi'_2 = \varphi_3$$

$$\varphi^{(3)} = \varphi'_3 = \varphi_4$$

...

$$\varphi^{(n-1)} = \varphi'_{n-1} = \varphi_n$$

$$\varphi^{(n)} = \varphi'_n = f(x, \varphi_1, \dots, \varphi_n) = f(x, \varphi_1, \varphi'_1, \varphi''_1, \dots, \varphi_1^{(n-1)})$$

$\implies \varphi_1$ – решение уравнения и $\Phi = \Lambda_n \varphi_1$

■

0.7.3 Вспомогательные сведения

Определение 43. Пусть $r = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

Тогда $|r| = \max_{i \in [1:n]} |x_i|$

Лемма 2. $f \in C([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n) \implies$

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Доказательство. $\int_a^b f = \left(\int_a^b f_1, \dots, \int_a^b f_n \right)^T$

Левая часть: $\left| \int_a^b f \right| = \max_i \left| \int_a^b f_i \right|$

$$\left| \int_a^b f_i \right| \leq \int_a^b |f_i|$$

Правая часть: $\int_a^b |f(t)| dt = \int_a^b \max_j |f_j(t)| dt$

Рассмотрим неравенство для левой части для $t \in [a, b]$ $|f_i(t)| \leq \max_j |f_j(t)| \implies \int_a^b |f_i(t)| dt \leq \int_a^b \max_j |f_j(t)| dt = \int_a^b |f| dt \implies \max_i \int_a^b |f_i(t)| dt \leq \int_a^b |f| dt$

$$\max_i \left| \int_a^b f_i \right| \leq \max_j \int_a^b |f_i| \leq \int_a^b |f|$$

■

Определение 44. пусть $A = (\alpha_{ij}) \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ ($i \in [1 : n]$ $j \in [1 : m]$)

Тогда $|A| = \max_{ij} |\alpha_{ij}|$

Лемма 3. $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ $B \in M_{m \times k}(\mathbb{R}) \implies |AB| \leq m \cdot |A| \cdot |B|$

Доказательство. $A \cdot B = (\gamma_{ij})$ $\gamma_{ij} = \sum_{l=1}^m \alpha_{il} \cdot \beta_{lj}$

$$|\gamma_{ij}| \leq \sum_{l=1}^m |\alpha_{il}| \cdot |\beta_{lj}| \leq \sum_{k=1}^m |A| \cdot |B| = m |A| \cdot |B|$$

$$|AB| = \max |\gamma_{ij}| \leq m \cdot |A| \cdot |B|$$

■

Определение 45. Пусть X, Y – нормированные пространства и дана функция $f : X \rightarrow Y$

Тогда $\omega(f, h) = \sup_{\|x_1 - x_2\|_X \leq h} \|f(x_1) - f(x_2)\|_Y$ – модуль (непрерывности) функции f с шагом h

Свойство 1. Пусть X, Y – нормированные пространства. $f : X \rightarrow Y$. Тогда:

1. $\omega(f, 0) = 0$
2. $\omega(f, h) \uparrow$ по h
3. f равномерно непрерывна на $X \iff \omega(f, h) \rightarrow_0 \quad h \rightarrow 0$

Определение 46. Множество функций $\{f_n\}$, где $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ равномерно непрерывное $\iff \sup_n \omega(f_n, h) \rightarrow 0 \quad h \rightarrow 0$

Замечание. Если $\{f_n\}$ равномерно непрерывно, то функции в нём равномерно непрерывны

Обратное неверно. $f_k(x) = kx, k > 0$, они равномерно непрерывны, но супремум это ∞

Теорема 11 (Арцела-Асколи). Пусть функции последовательности $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ равномерно непрерывны ($f_n \in C[a, b]$) и $\exists M \forall n \forall x \quad |f_n(x)| \leq M$. Тогда $\exists f \in C[a, b]$ и $\exists (f_{n_k})$
 $f_{n_k} \rightrightarrows f$ при $k \rightarrow \infty$

0.8 Теорема о существовании

0.8.1 Теорема существования

Определение 47. Функция φ – решение на отрезке $[a, b]$ уравнения

$$r(t) = r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, r(\tau)) d\tau$$

– Эквивалентное интегральное уравнение

Если:

1. $\varphi \in C([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n)$
2. $\varphi(t) \equiv r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$ на $[a, b]$

Лемма 4 (О равносильном интегральном уравнении). $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$, G – область в \mathbb{R}^{n+1}

(t_0, r_0)

Тогда φ – решение на $[a, b]$ Задачи Коши

$$\dot{r} = f(t, r) \quad r(t_0) = r_0$$

$\Longleftrightarrow \varphi$ – решение на $[a, b]$ эквивалентного интегрального уравнения

Доказательство.

$\Rightarrow \varphi$ – решение Задачи Коши. Проинтегрируем условие и получаем

$$\int_{t_0}^t \dot{\varphi}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

$$\varphi(t) = \underbrace{\varphi(t_0)}_{r_0} + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \text{ – верно на } [a, b]$$

φ – непрерывная, потому что является решением Задачи Коши.

$\Leftarrow \varphi$ – решение эквивалентного интегрального уравнения ($\Rightarrow \varphi \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n)$). Продифференцируем условие и получим $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$ на $[a, b]$

И кроме того $\varphi(t_0) = r_0 + \int_{t_0}^{t_0} = r_0$

А тогда φ – решение Задачи Коши

■

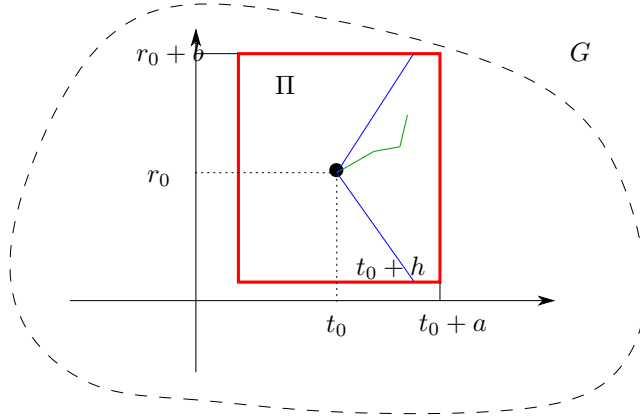


Рис. 7: реано

Определение 48 (Отрезок Пеано). $\Pi \subseteq G$ $M = \max_{(t,r) \in \Pi} |f(t, r)|$

$$\Pi = \{(t, r) \in G \mid |t - t_0| \leq a \quad |r - r_0| \leq b\} \quad h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$$

$[t_0 - h, t_0 + h]$ – отрезок Пеано

Определение 49 (Ломаная Эйлера E_N). $E_N(t_0) = r_0$

$$E_N(t) = E(t_K) + f(t_K, E_N(t_K))(t - t_K), \text{ если } t \in (t_K, t_{K+1}]$$

$$t_K = t_0 + \frac{kh}{N}$$

Лемма 5 (Свойства E_N). $\square t \in [t_0, t_0 + h]$

1. E_N определена в t
2. $|E_N(t) - r_0| \leq M(t - t_0)$

Доказательство. База индукции: Пусть $k = 1 \implies E_N$ определена на $[t_0, t_1]$ и

$$|E_N(t) - r_0| = |f(t_0, E_N(t_0)) \cdot (t - t_K)| \leq M(t - t_0)$$

Переход: Пусть в выполнено на $[t_0, t_K]$ для $k \in [1, N - 1]$

$$\triangleleft [t_K, t_{K+1}]$$

Верно ли, что $[t_K, E_N(t_K)] \in G$

$$|E_N(t_K) - E_N(t_0)| \leq M(t_K - t_0)$$

по индукционному предположению

$$E_N(t) = E_N(t_K) + f(t_K, E_N(t_K))(t - t_K)$$

$$\implies |t_K - t_0| \leq h \leq a; \quad |E_N(t_K) - E_N(t_0)| \leq b \implies (t_K, E_N(t_K)) \in \Pi \subseteq G$$

$$t \in (t_K, t_{K+1}] \implies$$

$$\begin{aligned} |E_N(t) - r_0| &\leq |E_N(t) - E_N(t_K)| + |E_N(t_K) - r_0| \\ &= |f(t_K, E_N(t_K))(t - t_K)| + |E_N(t_K) - r_0| \\ &\leq M(t - t_K) + M(t_K - t_0) = M(t - t_0) \end{aligned}$$

■

Теорема 12 (Пеано, Существования решения Задачи Коши). $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ – область, $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$ $(t_0, r_0) \in G \implies$ Задача Коши

$$\dot{r} = f(t, r) \quad r(t_0) = r_0$$

имеет решение на отрезке Пеано

Доказательство. План:

- Последовательность ломанных Эйлера $(E_N)_{N \geq 1}$
- По теореме Арцела-Асколи выберем подпоследовательность $E_{N_m} \rightarrow \varphi$
- Докажем, что φ – решение эквивалентного интегрального уравнения
- По лемме будет следовать, что φ одновременно и решение задачи Коши

Перенесём точку в начало координат (всегда можно сделать заменой переменной). НУО $t_0 = 0, r_0 = 0$

Также будем рассматривать только правую половину отрезка Пеано. Слева доказательство аналогичное.

На $[0, h]$ построим последовательность $(E_N)_{N \geq 1}$ ломанных Эйлера

(E_N) равномерно ограничены, (E_N) равномерно непрерывны?

$|E_N(t)| \leq |E_N(t) - r_0| + |r_0| \leq M(t - t_0) + |r_0| \leq Mh + 0 = Mh$. Переход к M по лемме.

$$|E_N(t_2) - E_N(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} E'_N(\tau) d\tau \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |E'_N(\tau)| \tau \quad (t_1, t_2 \in [0, h], t_1 < t_2)$$

$$E'_N(\tau) = f(t_K, E_N(t_K)), \text{ если } \tau \in (t_K, t_{K+1}) \implies |E'_N(\tau)| \leq M$$

$$\implies \int_{t_1}^{t_2} |E'_N(\tau)| d\tau \leq \int_{t_1}^{t_2} M d\tau = M(t_2 - t_1)$$

$$\implies \omega(E_n, u) \leq Mu$$

$$\implies \sup_{n \in \mathbb{N}} \omega(E_N, u) \leq M \cdot u \rightarrow 0 \quad u \rightarrow 0$$

(E_N) – равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, следовательно, по теореме Арцела-Асколи $\exists (E_{N_m})_{m \geq 1} : E_{N_m} \rightrightarrows \varphi$ на $[0, h]$

φ непрерывна на $[a, b]$ по теореме Стокса-Зейделя

$$\text{Надо: } \varphi(t) \equiv \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \text{ на } [a, b]$$

$$\text{Имеем } E_{N_m}(t) = \int_0^t E'_{N_m}(\tau) d\tau$$

$$\text{при } m \rightarrow \infty \quad \varphi(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^t E'_{N_m}(\tau) d\tau$$

$$\text{НУО } N_m = m$$

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t E'_N(\tau) d\tau - \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \right| \\ &= \left| \int_0^t (E'_N(\tau) - f(\tau, \varphi(\tau))) d\tau \right| \\ &\leq \int_0^t |E'_N(\tau) - f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau \\ &\leq \int_0^h |E'_N(\tau) - f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_K}^{t_{K+1}} |f(t_K, E_N(t_K)) - f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_K}^{t_{K+1}} \omega(f, |(t_K, E_N(t_K)) - (\tau, \varphi(\tau))|) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \triangleleft |(t_K, E_N(t_K)) - (\tau, \varphi(\tau))| \\ &= |(t_K - \tau, E_N(t_K) - \varphi(\tau))| \\ &= \max\{|t_K - \tau|, |E_N(t_K) - \varphi(t)|\} \end{aligned}$$

$$|t_K - \tau| \leq \frac{h}{N}$$

$$\begin{aligned}
|E_N(t_K) - \varphi(\tau)| &\leq |E_N(t_K) - \varphi(t_K)| + |\varphi(t_K) - \varphi(\tau)| \leq \|E_N - \varphi\| + \omega\left(\varphi, \frac{h}{N}\right) \\
\implies |(t_K, E_N(t_K)) - (\tau, \varphi(\tau))| &\leq \max\left\{\frac{h}{N}, \|E_N - \varphi\| + \omega\left(\varphi, \frac{h}{N}\right)\right\} = S_N \rightarrow 0 \\
&\text{при } N \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

А тогда завершая цепочку

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_K}^{t_{K+1}} \omega(f, |(t_K, E_N(t_K)) - (\tau, \varphi(\tau))|) d\tau \\
&\leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_K}^{t_{K+1}} \omega(f, S(N)) d\tau \\
&= \omega(f, S(N)) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h}{N} \\
&= \omega(f, S(N)) \cdot h
\end{aligned}$$

f равномерно непрерывна на компакте Π

$$\implies \omega(f, S(N)) \rightarrow 0 \quad N \rightarrow \infty, \text{ т.к. } S(N) \rightarrow 0$$

■

0.8.2 Условие Липшица по части переменных

Определение 50. Полный модуль непрерывности функции $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G \subseteq \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$

$$\omega(f, u, v) = \sup_{\substack{|t_2 - t_1| \leq u \\ |r_2 - r_1| \leq v \\ (t_1, r_1), (t_2, r_2) \in G}} |f(t_2, r_2) - f(t_1, r_1)|$$

Определение 51. Частный модуль непрерывности: $\omega(f, 0, v) \quad \omega(f, u, 0)$

Определение 52. $f \in \text{Lip}_r(G) \iff \exists L \quad \omega(f, 0, h) \leq Lh$

Определение 53. $f \in \text{Lip}_{r,loc}(G) \iff \forall (t, r) \in G \quad \exists u$ – окрестность точки $(t, r) \quad f \in \text{Lip}_r(U \cap G)$

Лемма 6. $G \subseteq \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$

$$f'_r \in M_n(C(G)), \quad f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$$

$$K \subseteq G \text{ – выпуклый компакт} \implies \omega(f, 0, h) \leq h \cdot \|f'_r\| h$$

Доказательство. $\triangleleft g_t(r) = f(t, r)$

При фиксированном t функция g_t удовлетворяет условию предыдущей леммы $\implies \omega(g_t, h) \leq h \|f'_r\| h$

$$\sup_t \omega(g_t, h) = \omega(f, 0, h)$$

$$f'_r = (g_t)'$$

(доказать в качестве упражнения) ■

Лемма 7. $G \subseteq \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$ – область, $f'_r \in M_n(C(G))$, $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$
 $\implies f \in \text{Lip}_{r,loc}(G)$

Лемма 8. $G \subseteq \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$ – область
 $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n) \cap \text{Lip}_{r,loc}(G)$, $K \subseteq G$ – компакт $f \in \text{Lip}_r(K)$

0.9 Теорема Единственности

0.9.1 Теорема Единственности

Лемма 9 (Тромуом). $\varphi \in C[a, b]$ $t_0 \in [a, b]$ $\lambda, \mu \geq 0$

$$\forall t \in [a, b] \quad 0 \leq \varphi(t) \leq \lambda + \mu \left| \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau \right|$$

$$\implies \forall t \in [a, b] \quad \varphi(t) \leq \lambda e^{\mu(t-t_0)}$$

Доказательство. Докажем при $t \geq t_0$ (при $t < t_0$ аналогично)

$$\varphi(t) \leq \lambda + \mu \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau =: v(t)$$

$$v'(t) = \mu \varphi(t) \leq \mu v$$

$\lambda > 0 \implies v(t) > 0$, разделим неравенство на v

$$\frac{v'(t)}{v(t)} \leq \mu - \text{проинтегрируем по } [t_0, t]$$

$$\int_{t_0}^t \frac{v'(\tau)}{v(\tau)} d\tau \leq \mu(t - t_0)$$

$$\ln \frac{v(t)}{v(t_0)} \leq \mu(t - t_0)$$

$$\frac{v(t)}{v(t_0)} \leq e^{\mu(t-t_0)}$$

$$v(t) \leq \lambda e^{\mu(t-t_0)}$$

$\varphi(t) \leq v(t) \implies \varphi(t) \leq \lambda e^{\mu(t-t_0)}$
 $\lambda = 0 \quad \varphi(t) \leq \mu \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau < \varepsilon + \mu \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau$
 \implies по доказанному $\varphi(t) \leq \varepsilon e^{\mu(t-t_0)}$
 При $\varepsilon \rightarrow 0$ будет $\varphi(t) \leq 0$

■

Теорема 13 (Пикар, Существование единственного решения Задачи Коши). $G \subseteq \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$ – область, $(t_0, r_0) \in G$

$f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n) \cap \text{Lip}_{r,loc}(G)$

\implies

(i) на отрезке Пеано \exists решение

$$r = f(t, r) \quad r(t_0) = r_0$$

(ii) ψ_1, ψ_2 – решение Задачи Коши на $(a, b) \implies \psi_1 \equiv \psi_2$ на (a, b)

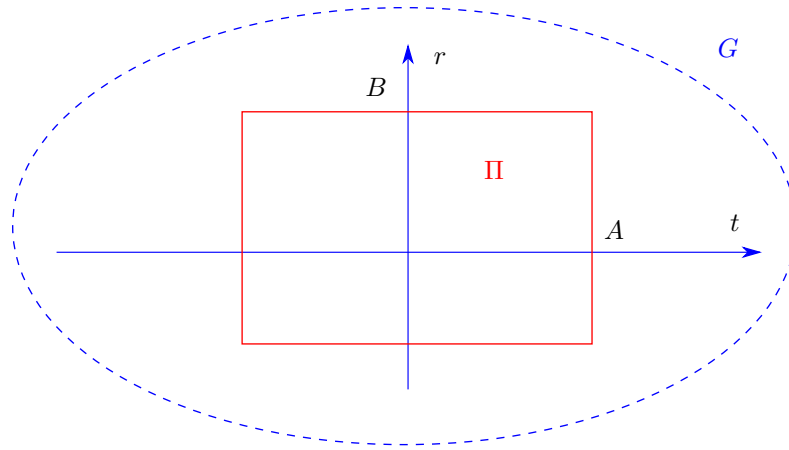


Рис. 8: plankapka

Доказательство. НУО $(t_0, r_0) = 0$

$$\Pi = \{(t, r) \mid |t| \leq A \quad |r| \leq B\}$$

$$h = \min \left\{ A, \frac{B}{\|f\|_{C(\Pi)}} \right\}$$

$$\|f\|_{C(\Pi)} = \sup_{(t,r) \in \Pi} |f(t, r)|$$

Докажем существование на $[a, b]$

$$\varphi_0(t) \equiv 0 \quad \varphi_{k+1}(t) = \int_0^t f(\tau, \varphi_k(\tau)) d\tau, k \in \mathbb{Z}^+$$

План:

1. Докажем, что $(t, \varphi_k(t)) \in \Pi \quad \forall k, \forall t \in [0, h]$
2. $\exists \varphi : \quad \varphi_k \rightrightarrows \varphi, k \rightarrow \infty$ на $[0, h]$
3. φ – решение Задачи Коши
4. Единственность

1. База: $\varphi_0(t) \in \Pi$ – верно

Пусть $\forall t \in [0, h] \quad (t, \varphi_k(t)) \in \Pi$

$$t \in [0, h] \implies |t| \leq A$$

$$\begin{aligned} |\varphi_{k+1}(t)| &\leq \int_0^t |f(\tau, \varphi_k(\tau))| d\tau \\ &\leq \int_0^t \|f\| d\tau = \|f\| \cdot t \leq \|f\| h \leq \\ &\leq \|f\| \frac{B}{\|f\|} \leq B \implies (t, \varphi_{k+1}(t)) \in \Pi \end{aligned}$$

2. Докажем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m \geq N, k \in \mathbb{N} \quad \|\varphi_{m+k} - \varphi_m\| \leq \varepsilon$$

Докажем индукцией по m , что

$$\forall t \in [0, h] \quad |\varphi_{m+k}(t) - \varphi_m(t)| \leq \frac{\|f\|_{C(\Pi)} L^m t^{m+1}}{(m+1)!}$$

$$(f \in \text{Lip}_r(\Pi) \text{ по лемме} \implies \omega(f|_{\Pi}, 0, h) \leq Lh)$$

$$\text{При } m = 0 \quad |\varphi_k(t)| \leq \|f\| t$$

$$\varphi_k(t) = \int_0^t f(\tau, \varphi_{k-1}(\tau)) d\tau$$

$$|\varphi_k(t)| \leq \|f\| \cdot \int_0^t d\tau = \|f\| t$$

Пусть при некотором $m \in \mathbb{Z}_+$ верно.

$$\begin{aligned}
\triangleleft |\varphi_{m+1+k} - \varphi_{m+1}(t)| &= \\
&= \left| \int_0^t f(\tau, \varphi_{m+k}(\tau)) d\tau - \int_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau)) d\tau \right| = \\
&= \int_0^t |f(\tau, \varphi_{m+k}(\tau)) - f(\tau, \varphi_m(\tau))| d\tau \leq \\
&\leq \int_0^t \omega(f, 0, |\varphi_{m+k}(\tau) - \varphi_m(\tau)|) d\tau \leq \\
&\leq \int_0^t L |\varphi_{m+k}(\tau) - \varphi_m(\tau)| d\tau \leq \text{по индукции} \\
&\leq \int_0^t \frac{L \|f \cdot L^n \tau^{m+1}\|}{(m+1)!} d\tau = \\
&= \frac{L^{m+1} \|f\| t^{m+1}}{(m+2)!}
\end{aligned}$$

$$\implies |\varphi_{m+k}(t) - \varphi_m(t)| \leq \frac{\|f\| \cdot L^m h^{m+1}}{(m+1)!}$$

$$\implies \|\varphi_{m+k} - \varphi_m\| \leq \left(\frac{\|f\| h}{m+1} \right) \cdot \frac{(Lh)^m}{m!}, m \rightarrow \infty$$

$$\implies (\varphi_k)_{k \geq 1} \text{ фундаментальная}$$

$$\varphi := \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k \quad \varphi \in C[0, h]$$

$$3. \varphi_{k+1}(t) \equiv \int_0^t f(\tau, \varphi_k(\tau)) d\tau$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{k+1}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t f(\tau, \varphi_k(\tau)) d\tau$$

$$\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t f(\tau, \varphi_k(\tau)) d\tau$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \varphi_k(\tau)) d\tau \right| &\leq \\
&\leq \int_0^t |f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \varphi_k(\tau))| d\tau \leq \\
&\leq \int_0^t \omega(f, 0, |\varphi(\tau) - \varphi_k(\tau)|) d\tau \leq \\
&\leq \int_0^t L |\varphi(\tau) - \varphi_k(\tau)| d\tau \leq \\
&\leq \|\varphi - \varphi_k\| \int_0^t L d\tau \leq \\
&\leq Lh \|\varphi - \varphi_k\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \text{ эквивалентное интегральное уравнение .}$$

4. ψ_1, ψ_2 – решения на (a, b)

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_1(t) = \int_0^t f(\tau, \psi_1(\tau)) d\tau \\ \psi_2(t) = \int_0^t f(\tau, \psi_2(\tau)) d\tau \end{cases}$$

$$\chi = |a|$$

.....

■