Математический анализ, 3 семестр

Коченюк Анатолий

19 сентября 2021 г.

Глава 1

Анализ нескольких переменных. Функциональные ряды. Теория меры, Криволинейные интегралы.

литература – Виноградов, Виноградов-Громов

1.1 Вспоминаем

$O \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое, $f : O \to R, f \in C^{N+1}(O), N \in \mathbb{N}$

$[a, x]$ – замкнутый отрезок $\subset O, a \neq x \implies \exists x \in (a, x) :$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{N} \frac{d_a^k f(x-a)}{k!}}_{\text{Тейлоровский многочлен порядка N}} + \tfrac{d_c^k f(x-a)}{(N+1)!}$$

$T_{N,a,f}$

Определение 1. $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ – пространство мультииндексов

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

$\alpha! = \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n$

$f_{(a)}^{(\alpha)} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_n} x_n \dots \partial^{\alpha_1} x_1}$

$h = (h_1, \dots, h_n) \quad d_a^k f(h) = \sum\limits_{\substack{\alpha \in (Z_+)^n \\ |\alpha| = k}} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha$

1.2 Полиномиальная форма Ньютона

$N \in \mathbb{N} \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$(x_1 + \dots + x_n)^N = \sum\limits_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha| = N}} \frac{N!}{\alpha!} x^\alpha$

Доказательство. $p(x) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^N$

$p'_{x_1} = N (x_1 + \dots + x_n)^{N-1} = p'_{x_2} = \dots = p'_{x_n}$

$p^\alpha = N(N-1)\dots(N - |\alpha| + 1) (x_1 + \dots + x_n)^{N - |\alpha|}$

$|\alpha| \leqslant N + 1 \implies p^{(\alpha)} \equiv 0$

$|\alpha| < N \implies p^{(\alpha)}(0) = 0$

Неноль получается, только если $|\alpha| = N \quad p^{(\alpha)}(0) = N!$

Если подставить, то получим:

$\sum \frac{N!}{\alpha!} x^\alpha \quad h = x - a = x - 0$ ■

1.3 Оценка однородных многочленов

Определение 2. $\sum\limits_{\substack{\alpha \in (Z_+)^n \\ |\alpha| = N}}^{n} b_\alpha x^\alpha$ – однородный многочлен степени N

В более широком смысле $b_\alpha \in \mathbb{R}^m$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad p(tx) = t^N p(x)$, т.е. однородный многочлен является однородной функцией.

Утверждение 1. $\sqsupset p(x) = \sum\limits_{\substack{\alpha\in(Z_+)^n\\|\alpha|=N}} \frac{N!}{\alpha!} C_\alpha x^\alpha \quad C_\alpha \in \mathbb{R}^m, \sqsupset M : \|C_\alpha\| \leqslant M$

Тогда $\|p(x)\| \leqslant M\left(\sqrt{n}\|x\|\right)^N$

Доказательство. $\|p(x)\| \leqslant \sum\limits_{\substack{\alpha\in(Z_+)^n\\|\alpha|=N}} \frac{N!}{\alpha!}|x^\alpha| \underbrace{\|C_\alpha\|}_{\leqslant M} \leqslant M \sum\limits_{\substack{\alpha\in(Z_+)^n\\|\alpha|=N}} \frac{N!}{\alpha!} \underbrace{|x^\alpha|}_{|x_1|^{\alpha_1}\ldots|x_n|^{\alpha_n}} = M\cdot(|x_1|+\ldots+|x_n|)^N \leqslant M\left(\sqrt{n}\|x\|\right)^N$

$\sum\limits_{k=1}^n |x_k|\cdot 1 \leqslant \sqrt{\sum\limits_{k=1}^n x_k^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{k=1}^n 1} = \|x\|\sqrt{n}$ – неравенство Коши, что сумма скаларяных произведений меньше произведения норм ■

Формула Тейлора-Лагранжа на отображения буквально не переносится $f \in C^1(O) \quad f(x) - f(a) = d_c f(x-a)$

для отображений нарушается

$f(t) = \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} a = 0$, “x”$= 2\pi \quad f(x) - f(a) = 0$

$f'(t) = \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$

Теорема 1. Открытое $O \subseteq \mathbb{R}^n, n, m \in \mathbb{N} \quad N \in \mathbb{Z}_+, f \in C^{N+1}(O \to \mathbb{R}^m)$

$[a, x] \in O, a \neq x$

Тогда $f(x) - T_{N,a,f}(x)$ – остаточный член, который оценивается так:

$\|f(x) - T_{N,a,f}(x)\| \leqslant \frac{1}{(N+1)!}\sup_{x\in(a,x)}\|d_c^{N+1} f(x-a)\|$

$\sum\limits_{\substack{\alpha\in(\mathbb{Z}_+)^n\\|\alpha|\leqslant N}} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha$

1.4 Отступление

$f, g : O \to \mathbb{R}^m$, дифференцируемые в O

$d\langle f, g\rangle = \langle df, g\rangle + \langle f, dg\rangle$

$d\langle f, g\rangle(h) = \langle df(h), g\rangle + \langle f, dg(h)\rangle$

$d^2\langle f, g\rangle = \left\langle d^2 f, g\right\rangle + 2\langle df, dg\rangle + \left\langle f, d^2 g\right\rangle$

$d^N \langle f, g\rangle = \sum\limits_{k=0}^{N} C_N^k \left\langle d^k f d^{N-k} g\right\rangle$ (проверка как в одномерном случае)

Тогда, если $v \in \mathbb{R}^m, v = const$

$d^N \langle f, v\rangle = \left\langle d^N f, v\right\rangle$

Доказательство теоремы 1. Если $v \in \mathbb{R}^m, v$ – фиксирована

$g(x) = \langle f(x), v\rangle : O \to \mathbb{R}, g \in C^{N+1}\left(O \to \mathbb{R}\right)$

$g(x) - T_{N,a,g}(x) = \frac{1}{(N+1)!} d_c^{N+1} g(x-a)$ по уже установленной теореме Тейлора-Лагранжа для функций

$T_{N,a,g}(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{\left\langle d^k f, v\right\rangle (x-a)}{k!}$

$\left\langle f(x) - \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{d^k f(x-a)}{k!}, v\right\rangle = \frac{1}{(N+1)!} \underbrace{\left\langle d_c^{N+1} f(x-a), v\right\rangle}_{\leqslant \|d_c^{N+1} f \ldots\| \|v\|}$

$|\text{левая часть}| \leqslant \underbrace{\frac{1}{(N+1)!} \sup\limits_{c\in[a,x]} \|d_c^{N+1} f(x-a)\|}_{\text{не зависит от выбора } v} \cdot \|v\|$

Если мы возьмём v остаточным членом, то мы получим оценку остаточного члена, не зависящую от v

$v = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{d^k f(x-a)}{k!}$

$\|v\|^{\cancel{2}} \leqslant \frac{1}{(N+1)!} \sup \ldots \cancel{\|v\|}$ (сократили на $\|v\|$)

$\|f - T_{N,a,f}\| \leqslant \frac{1}{(N+1)!} \sup \ldots .$ ■

1.5 Частный случай: формула конечных приращений

$O \subseteq \mathbb{R}^n, f \in C^1\left(O \to \mathbb{R}^m\right), [a, x] \subseteq O \quad a \neq x$, тогда

$$\|f(x) - f(a)\| \leqslant \sup_{c\in[a,x]} \|d_c f\| \|x - a\|$$

Следствие 1. Пусть $f \in C^1\left(O \to \mathbb{R}^m\right)$, где O – открытое множество. Пусть K – выпуклый компакт, $K \subseteq O$. Тогда

$$\forall a, b \in K \quad \|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_{c\in K} \|d_c f\| \|b - a\|$$

1.6 Об оценке нормы дифференциала

$p(x) = \sum\limits_{\substack{\alpha\in(\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha|\neq N}} \frac{N!}{\alpha!} C_\alpha x^\alpha \quad \forall\alpha \, \|C_\alpha\| \leqslant M$

$\|p(x)\| \leqslant M \left(\sqrt{n}\|x\|\right)^N$

$d_c^N f = \sum \frac{N!}{\alpha!} \underbrace{\frac{f^{(\alpha)}}{N!}}_{=C_\alpha} x^\alpha$

$M = \max\limits_{\substack{\alpha\in(Z_+)^n \\ c\in[a,x] \\ |\alpha|=N}} \|\frac{f^\alpha(x)}{N!}\| \implies \|d_c^N f(x-a)\| \leqslant M \left(\sqrt{n}\|x-a\|\right)^N$

Пусть $O \subseteq \mathbb{R}^n$ открыто, $f \in C^1 \left(O \to \mathbb{R}^m\right)$

K – компактно в $O \implies f$ липшецево на K, т.е.

$$\exists C \in \mathbb{R} : \|f\left(x'\right) - f\left(x''\right)\| \leqslant C\|x' - x''\| \; \forall x', x'' \in K$$

Следует из формулы конечных приращений и оценки дифференциала и теоремы Вейерштрасса: $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \in C(K)$

$\implies \exists x_1 : \quad \|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\| \leqslant C_1 \forall x \in K$

$M = C_1, \implies \forall x', x'' \in K \quad \|d_c f\left(x' - x''\right)\| \leqslant M\left(\sqrt{n}\|x' - x''\|\right) \quad C = M\sqrt{n}$

1.7 Экстремум функции нескольких переменных

Определение 3. $\sqsupset O \subseteq \mathbb{R}^n \quad f : O \to \mathbb{R}$

$a \in O \quad a$ называется точкой (локального) максимума, если $\exists$ окрестность $V_a : \forall x \in V_a \cap O \quad f(x) \leqslant f(a)$

Экстремум – максимум или минимум

Утверждение 2 (Необходимое условие экстремума (безусловного))**.** Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^n \quad f$, такое что $E \to \mathbb{R}$. $a \in \operatorname{Int} E$ – точка локального экстремума для f, f дифференцируема в точке a. Тогда

$$d_a f = \mathbb{O} \left(\iff \nabla f = \mathbb{O} \iff \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0 \right)$$

.

Доказательство. Пусть a — точка максимума. Фиксируем $h \in \mathbb{R}^n \quad g(t) = f(a+th), t \in \mathbb{R}$. Для g точка 0 это точка максимума. Существует окрестность нуля $V'(0) : \forall t \in V'(0) \quad g(t) \geqslant g(0) = f(a)$, g дифференцируема в 0 как композиция, 0 – внутренний для $D(g) \implies g'(0) = 0$.

$g(t) = f(\varphi(t))$.

$g'(t) = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$.

$0 = \langle \nabla f, h \rangle = \left(f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_n}\right) \begin{pmatrix} h_1 \\ \ldots \\ h_n \end{pmatrix}$. ■

1.8 Квадратичные формы

Если $Q(x)$ допускает представление в виде $Q(x) \equiv \sum\limits_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j, \quad c_{i,j} \in \mathbb{R}$. Тогда $Q(x)$ называется квадратичной формой в $\mathbb{R}^n$.

Замечание. Любая квадратичная форма есть однородная функция степени 2.

Замечание. Не умаляя общности, матрицу коэффициентов c_{ij} можно считать симметричной. Если это не так, можно перейти в такой форме $c'_{ij} = c'_{ji} = \frac{c_{ij}+c_{ji}}{2}$.

Определение 4. Квадратичная форма $Q(x)$ в $\mathbb{R}^n$ называется положительно-определённой (положительной) (Q $>$ 0), если

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad Q(x) > 0.$$

неотрицательно определённой, если неравенство нестрогое.

$Q \geqslant 0 \quad \ldots Q < 0, Q \leqslant 0$

неопределённая, если $Q \gtreqless 0 \quad \exists x^1 x^2 \in \mathbb{R}^n : Q\left(x^1\right) > 0, Q\left(x^2\right) < 0$

Пример. 1. $n = 2$ $Q(x) = 2x_1^2 - 3x_2^2 \gtreqless 0$

$Q(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 > 0$

$Q(x) = Ax_1^2 + 2Bx_1^2 x_2^2 + Cx_2^2$, если $B^2 - AC$, то форма знакопеременная

Если $A \geqslant 0 \quad B^2 - AC \leqslant 0$, то $Q \geqslant 0$

$A \leqslant 0 \ldots$

Лемма 1. $\sqsupset Q(x)$ – положительная квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$

Тогда $\exists \gamma > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad Q(x) \geqslant \gamma \|x\|^2$

Доказательство. $\gamma = \min_{\|x\|=1} Q(x) = Q(x_0) > 0 \quad \|x_0\| = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\, Q(x) = Q\left(\|x\| \frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\|^2 \cdot Q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geqslant \gamma \|x\|^2$ ∎

Утверждение 3 (Достаточое условие экстремума)**.** $\sqsupset f : E \to \mathbb{R}, \quad \underline{a \in \operatorname{Int} E}, d_a f = 0 \quad \exists d_a^2 f$

Тогда, если $d_a^2 f > 0$ (положительная квадратичная форма как функция дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_n$), то a это точка минимума (строгого)

Если $d_a^2 f < 0 \ldots$

Если $d_a^2 f \gtrless$, то a не точка экстремума

Это не все случаи, есть нестрогие, в которых ДУЭ не применимо

Пример. $f(x,y) = x^4 - y^4$

$g(x,y) = x^4 + y^4$

для f точка $(0,0)$ не точка экстремума, а для g – да

$\nabla f = \left(4x^3, -4y^3\right) = 0 \iff (x,y) = (0,0)$

Доказательство. ДУЭ. Пеано в точке a:

$f(x) = f(a) + d_a f(x-a) + \frac{1}{2} d_a^2 f(x-a) + o\left(\|x-a\|^2\right)$

$f(x) - f(a) = \frac{1}{2} d_a^2 f(x-a) + \underbrace{\varepsilon(x)}_{\to 0, x \to a} \|x-a\|$

Если $Q > 0$, то по лемме $\exists \gamma > 0 : Q(x-a) \geqslant \gamma \|x-a\|^2$

Т.к. $\varepsilon(x) \to 0, x \to a$, то $\exists V(a) : |\varepsilon(x)| < \frac{\gamma}{8} \forall x \in V(a) \implies \forall x \in V(a) \quad f(x) - f(a) \geqslant \frac{1}{2}\gamma \|x-a\|^2 - \frac{\gamma}{8}\|x-a\|^2 = \|x-a\|^2 \left(\frac{3}{8}\gamma\right) > 0 \quad x \neq a \implies a$ – точка строгого минимума

$Q < 0$, рассмотреть $-f$

$Q \gtrless 0 \implies \exists h_+, h_- \in \mathbb{R}^n : Q\left(h_+\right) > 0 \quad Q\left(h_-\right) < 0$, не умаляя общности $\|h_+\| = \|h_-\| = 1$

$\delta = \min\left\{\left|Q\left(h_+\right)\right|, \left|Q\left(h_-\right)\right|\right\}$

Т.к. $\varepsilon(x) \to 0, x \to a$, то $\exists$ окрестность $V_r(a) : |\varepsilon(x)| < \frac{\delta}{4}$

$|t| < r \quad f\left(a + th_+\right) - f(a) = \frac{1}{2} t^2 Q\left(x_+\right) + \varepsilon(x) t^2 \geqslant \frac{1}{2} t^2 \cdot \delta - \cdot \frac{\delta}{4} t^2 = t^2 \frac{\delta}{4} > 0$

$|Q(h_-)| \geqslant \delta$

$Q(h_-) = -|Q(h_-)| \leqslant -\delta$

$f\left(a + th_-\right) - f(a) \leqslant -\frac{\delta}{2} tse + \frac{\delta}{4} t^2 \leqslant -\frac{\delta}{2} t^2 < 0$

Таким образом в любой окрестности точки a $\quad f(x)-f(a)$ знакопеременная

$\blacksquare$

1.9 Практика. Теорема о существовании

Теорема 2 (Теорема о неявной функции)**.** $F(x,y,z)=0$

$(x_0,y_0,z_0):\quad F\,(x_0,y_0,z_0)=0\quad F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ и все функции непрерывны в (x_0,y_0,z_0)

$\implies\ \exists z=z(x,y)\quad z_0=z(x_0,y_0)\quad F(x,y,z(x,y))=0$ в окрестности (x_0,y_0)

Пример. $x^2+y^2-1=0$

$F(x,y)\quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\quad y=\sqrt{1-x^2}$

$F'_y=2y\quad F'_y(x_0,y_0)=\sqrt{2}\neq 0$

$y=y(x)\quad y_0=y(y_0)\quad x^2+y^2(x)-1=0$

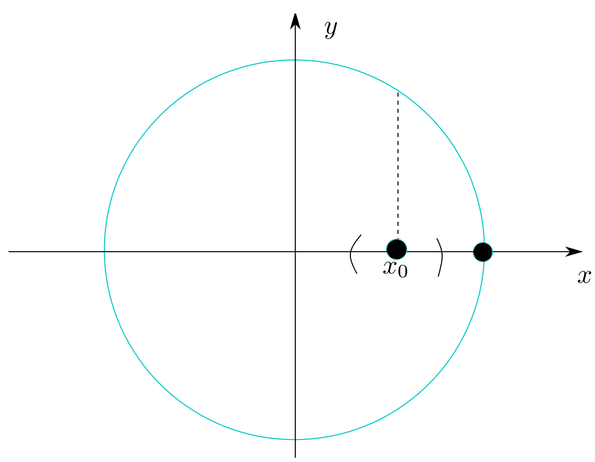

Рис. 1.1: exex

$F(x,y,z)$ И все условия выполняются. как найти $\frac{\partial}{\partial x}z(x,y)$

$F(x,y,z(x,y))=0$

$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,z(x,y))=0$

$$\begin{cases} F'_x+F'_z\cdot\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=0\\ F'_y+F'_z\cdot\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=0\end{cases}$$

Отсюда выражается

> **Определение 5.** Многозначная функция f – соответствие $x \mapsto f(x)$ – множество

Пример. $x \mapsto \pm\sqrt{1-x^2} = \left\{\sqrt{1-x^2}, -\sqrt{1-x^2}\right\}$

$x^{\frac{1}{2}} = y \qquad x = y^2$ – задаёт неявную функцию $y(x)$

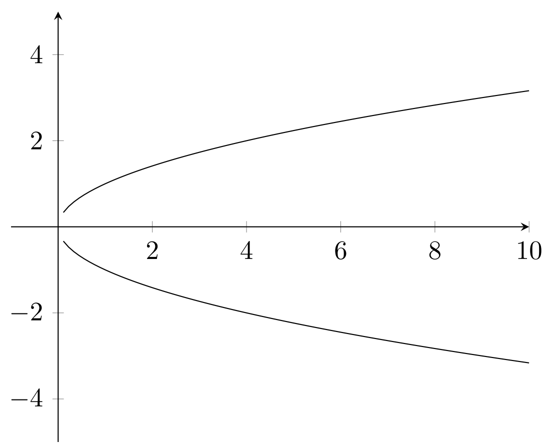

Рис. 1.2: $x = y^2$

Пусть $y(x)$ – многозначная функция. Тогда выбор единственного $y \in y(x)$ для $\forall x$ задаёт явную функцию (однозначная функция)

Каждый такой выбор задаёт однозначную функцию называемую ветвью. Ветви могут быть непрерывными, например в $x = y^2$ бесконечность ветвей. Чтобы уточнить, нужно проговаривать непрерывная ветвь. дифференцируемая ветвь и т.д.

Пример. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$

Задаёт многозначную функцию. Определить для каких x она будет 1-, 2-, 3-, 4-значной

1.10 Лекция 2

$$d_a^2 f \longleftrightarrow \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(a) & f''_{x_1x_2}(a) & f''_{x_1x_3}(a) & \dots \\ f''_{x_2x_1}(a) & f''_{x_2x_2}(a) & f''_{x_2x_3}(a) & \dots \\ f''_{x_2x_1}(a) & f''_{x_2x_2}(a) & f''_{x_2x_3}(a) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Теорема 3 (Критерий Сильвестра).
- Если все главные миноры положительны, то соответствующая квадратичная форма положительна (a – точка минимума).
- Если $\Delta_1 < 0 \quad \Delta_2 > 0 \quad \Delta_3 < 0 \ldots$, то квадратичная форма отрицательна (a – точка максимума)
- $\Delta_k \neq 0$, и не реализуется ни первый случай, ни второй, то квадратичная форма неопределённая (т.е. экстремума нет)

Замечание. $Q(h) = d_a^2 f(h)$. $Q(h) = \langle A \cdot h, h \rangle \quad A = \left(f''_{x_i x_j} \right)_{ij}$

Задача 1. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ – исследовать на экстремум

Доказательство. Необходимое условие экстремума $z'_x = 0 \quad z'_y = 0$.

$z'_x = 2x - y - 2 \quad z'_y = -x + 2y + 1$

$(x, y) = (1, 0)$, других нет, потому что определитель хороший.

Достаточное условие экстремума: $z''_{xx} = 2, \quad z''_{xy} = -1, \quad z''_{yy} = 2$. $\left[d^2_{(1,0)} f \right] \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$\Delta_1 = 2 > 0 \quad \Delta_2 = 2 * 2 - (-1)^2 = 3 > 0$, таким образом $(1, 0)$ — строгий минимум. ■

Замечание. $d^2_{(1,0)} f = 2dx^2 + 2(-1)dxdy + 2dy^2 = dx^2 + dy^2 + (dx - dy)^2 > 0$, если $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$d^2 f > 0$

Задача 2 (без привлечения $d^2 f$)**.** $z = x^2 y^3 (6 - x - y)$ – исследовать на экстремум.

$$\begin{cases} 0 = z'_x = y^3(6x^2 - x^3 - yx^2)'_x = y^3(12x - 3x^2 - 2yx) = xy^3(12 - 3x - 2y) \\ 0 = z'_y = x^2(6y^3 - xy^3 - y^4)'_y = x^2(18y^2 - 3xy^2 - 4y^3) = x^2y^2(18 - 3x - 4y) \end{cases}$$

Либо $x = 0$, либо $y = 0$, либо $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$ – $(2, 3)$.

$\{(0, t)\}_{\{t<0\}\cup\{t>6\}}$ – максимум (нестрогий)

$\{(0, t)\}_{\{t\in(0,6)\}}$ – максимум (нестрогий)

$(0, 6)$ – не экстремум

$\lhd K = \{(x, y) | x \geqslant 0 \quad y \geqslant 0 \quad x + y \leqslant 6\}$ – компакт

По теореме Больцано-Вейерштрасса существует $(x_\pm, y_\pm) \in K$

$f\,(x_+, y_+) = \max\limits_K f$

$f\,(x_-, y_-) = \min\limits_K f$

из распределения знаков следует, что точки границы – точки минимума. Тогда $(x_+, y_+) \in \operatorname{Int} K$, значит (x_+, y_+) удовлетворяет необходимому условии экстремума. Такая точка у нас одна — $(x_+, y_+) = (2, 3)$.

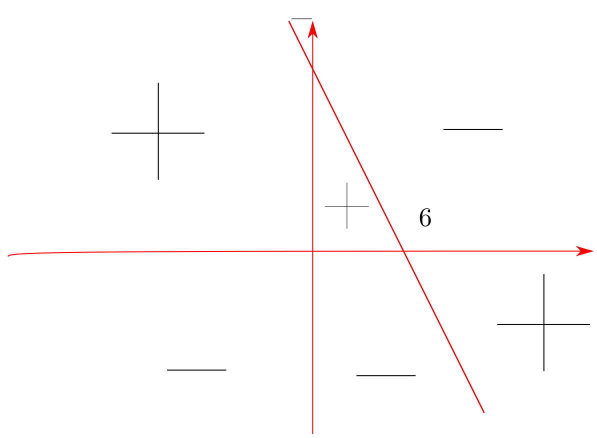

Рис. 1.3: znaki

1.11 Экстремумы и замена переменных

Определение точки экстремума непосредственно переносится на случай метрических пространств

Лемма 2. Пусть $(X, \rho_X))\,, (Y, \rho_y)$ – метрические пространства и $f : X \to \mathbb{R}$. Пусть $g(b) = a \quad g$ непрерывна в точке b. a – точка максимума (минимума) для f. Тогда b – точка максимума (минимума) для $f \circ g$.

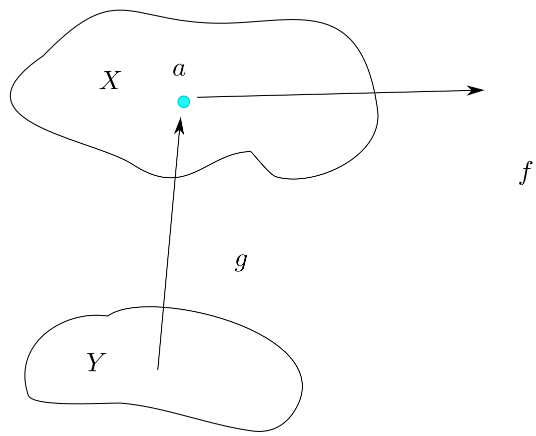

Рис. 1.4: kartinkalemmi

Доказательство. По условию a – точка локального максимума, т.е. существует окрестность $U(a) \subseteq X : \quad f(x) \leqslant f(a)\ \forall x \in U(a)$. По определению непрерывности существует окрестность $V(b) \subseteq Y$:

$$g(y) \in U(a) \forall y \in V(b) \implies f(g(y)) \leqslant f(a) = f(g(b)).$$

■

Следствие 2. Если в условии леммы g – гомеоморфизм X на Y, то a – точка максимума (минимума) для $f \circ g$.

Следствие 3. Если g – локальный гомеоморфизм (существует окрестность $V(b)$, такая что в точке b сужение $g|_{V(b)}$ – гомеоморфизм на образ ($g(V(b))$)), то сохраняется вывод предыдущего следствия.

Задача 3. $z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (a, b > 0)$ — исследовать на экстремум.

Доказательство. $z(x,y) = -z(-x,y) = -z(x,-y)$

z – нечётная по x и по y. Значит достаточно рассматривать функцию только в первой четверти.

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\alpha \\ y = b\rho\sin\alpha \end{cases}$$

$(\rho, \varphi) \to (x, y)$

$(0,1) \times (0, \frac{\pi}{2}) \to \operatorname{Int} K$ – гомеоморфизм $\left(\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

$$z(\rho,\varphi) = ab\rho^2\cos\varphi\sin\varphi\sqrt{1-\rho^2} \overset{\rho^2 = t}{=} \frac{ab}{2}\sin 2\varphi t \cdot \sqrt{1-t}$$

Необходимое условие экстремума: $\begin{cases} \frac{2}{ab}z'_\varphi = 0 = 2\cos 2\varphi \cdot t\sqrt{1-t} \\ \frac{2}{ab}z'_t = 0 = \sin 2\varphi\left(\sqrt{1-t} - \frac{1}{2}\frac{t}{\sqrt{1-t}}\right) = \frac{\sin 2\varphi(2(1-t)-t))}{2\sqrt{1-t}} \end{cases}$

$$\begin{cases} \cos 2\varphi \cdot t\sqrt{1-t} = 0 \\ \sin 2\varphi \cdot \frac{(2-3t)}{\sqrt{1-t}} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos 2\varphi = 0 \quad \varphi \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 3t = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{4} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x = a \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}b}{9} \\ y = b \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}b}{9} \end{cases}$$

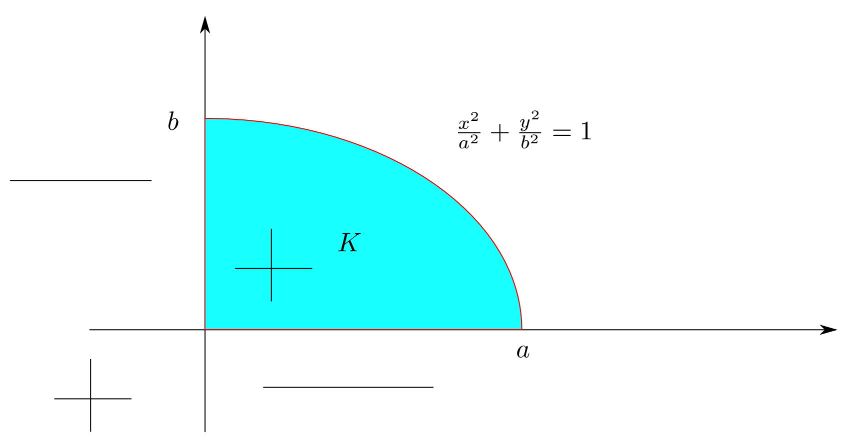

Рис. 1.5: primer

■

Задача 4. $f : \underbrace{O}_{\subseteq \mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$

$E = \{\varphi_1(x) = 0, \ldots, \varphi_n(x) = 0\}$

Исследование f_E на экстремум называется задачей об условном экстремуме

Пример. $f(x, y) = x + y \quad E = \{x + 2y = 1\}$

Доказательство. $x = 1 - 2y$

$f = 1 - 2y + y = 1 - y$

$\widetilde{f}(x, y) = x^2 + y^2 \quad E = \{x + y = 1\}$ ∎

Пример. $f = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \quad E = \left\{x^2 + y^2 = 1\right\}$

$\begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \end{cases}$

1.12 Дифференцирование обратного отображения

$x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

$$f(x) = y$$

$x \in \mathbb{R}^n \quad y \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = y \quad A \cdot x = y,\ A = [f]$ – линейна

$f(x) = y$ имеет единственное решение $\forall y \in \mathbb{R}^n \iff \det A \neq 0$

Теорема 4 (об обратной функции для случая одной переменной)**.** $f : (A, B) \to \mathbb{R}, f \in C^1((A, B)), a \in (A, B), f'(a) \neq 0$, тогда существует окрестность $V(a)$:

1. $\forall x \in V(a) \quad f'(x) \neq 0$ – локальная новорожденность производной
2. $f|_{(A,B)}$ – инъекция. – локальная обратимость
3. $f(V(a))$ - откр. – локальная открытость отображения
4. $\left(f|_{V(a)}\right)^{-1}$ дифференцируема в точке $f(a)$ и $\left(\left(f|_{V(a)}\right)^{-1}\right)' = \frac{1}{f'(a)}$ – дифференцируемость локально обратного

Определение 6. $f : (X, \Omega_X) \to (Y, \Omega_Y)$

Если для любого $O \in \Omega_X \quad f(O) \in \Omega_Y$, то f называется открытым отображением

Пример. $f(x) = x^2$ не открытое на $(-1, 1) \to [0, 1)$, но открыто на $(-1, 0) \cup (0, 1)$, потому что нет точек, где $f'(x) = 0$

доказательство теоремы. По следствию теоремы Дарбу, если $f'(a) > 0 (< 0)$, то существует окрестность $V(a) : \forall x \in V(a) \quad f'(x) > 0 (< 0)$

$\sqsupset f'(x) > 0$ всюду на $V(a)$, то f строго возрастает, значит $f|_{V(a)}$ – инъекция

$V(a) = (a - \delta, a + \delta) \implies f\,(a - \delta, a + \delta) = (f(a - \delta), f(a + \delta))$

4 $\Longleftarrow$ теоремы о дифференцируемости обратимой функции ■

Теорема 5 (об обратном отображении)**.** Пусть $\underbrace{O}_{\text{открытое}} \subseteq \mathbb{R}^n \quad f : O \to \mathbb{R}^n$ и $\forall x \in O \quad d_x f$ – обратим (якобиан не обращается в ноль в O)

Тогда f – открытое отображение

Доказательство. См. доказательства утверждения 3 в теореме о дифференцировании обратного отображения в книжке Виноградов-Громов. ■

Теорема 6 (теорема об обратном отображении)**.** $n \in \mathbb{N}$, O – открытое, $O \subseteq \mathbb{R}^n$

$f \in C^1(O \to \mathbb{R}^n)$ $a \in O$. Пусть $d_a f$ обратим $(\iff \mathcal{J}_a f \neq 0)$, тогда существует окрестность $V(a)$:

1. $\forall x \in V(a) \quad d_x f$ обратим – локальная новорожденность производной
2. $f|_{(A,B)}$ – инъекция. – локальная обратимость
3. $f(V(a))$ - откр. – локальная открытость отображения
4. $\left(f|_{V(a)}\right)^{-1}$ дифференцируема в точке $f(a)$ и $d_{f(a)} \left(f|_{V(a)}\right)^{-1} = (d_a f)^{-1}$ – дифференцируемость локально обратного

Лемма 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $O \subseteq \mathbb{R}^n$ открыто, $f : O \to \mathbb{R}^n, f \in C^1(O), a \in O$ и $d_a f$ обратим. Тогда $\forall \sigma > 0$ существует окрестность $V(a)$:

1. $\forall x \in V(a)$
$$\|d_x f - d_a f\| < \sigma$$

2. $\forall p, q \in V(a)$
$$\|f(p) - f(a) - d_a f(p-q)\| \leqslant C_1 \|p - q\|$$

3. $\forall p, q \in V(a)$
$$C_3 \|p-q\| \leqslant \|f(p) - f(q)\| \leqslant C_2 \|p - q\|$$

, такое свойство называется билипшецевость.

Здесь конкретно $C_2 = \|d_a f\| + \sigma \qquad C_3 = \frac{1}{\|(d_a f)^{-1}\|} - \sigma$

Доказательство. $f \in C^1(a) \implies$ существует окрестность $V(a)$: 1 верно

$\lhd F(x) = f(x) - d_a f(x) : O \to \mathbb{R}^n$

$d_x F(h) = d_x f(h) - d_a f(h), \quad F \in C^1(O)$

$\|f(p) - f(q) - d_a d(p-q)\| = \|F(p) - F(q)\| \leqslant \underbrace{\sup\limits_{c \in V(a)} \|d_c F\|}_{\leqslant \sigma}$ по теореме о конечных приращениях, т.к. $V(a)$ выпуклое

$\|d_c F\| = \|\underbrace{d_C f - d_a f}_{<\sigma}\|$

$\forall p, q \in V(a)$

$\|f(p) - f(q)\| \leqslant \sup\limits_{c \in V(a)} \|d_c f\| \|p - q\|$

$\|d_c f\| = \|d_a f + (d_c f - d_a f)\| \leqslant \|d_a f\| + \underbrace{\|d_c f - d_a f\|}_{<\sigma \text{в силу 1}} \leqslant C_2$

$\|f(p) - f(q)\| = \|d_a f(p-1) - (f(p) - f(q) - d_a f(p-q))\| \geqslant \underbrace{\|d_a f(p-q)\|}_{\geqslant \frac{1}{\|(d_a f)^{-1}\|}\|p-q\|} - \underbrace{\|f(p) - f(q) - d_a f(p-q)\|}_{\leqslant C_1 \|p-q\|}$

$C_3 \|p - q\|$ ∎

доказательство (часть) теоремы об обратном отобржаении. Существует $(d_x f)^{-1} \iff \mathcal{J} f \neq 0$, но $\mathcal{J} f \in C(O \to \mathbb{R}) \underset{\text{по непрерывности}}{\implies}$ существует окрестность $V(a) : \forall x \in V(a) \quad \mathcal{J}_x f ! + 0 \implies 1$

$C_0 = \frac{1}{\|(d_a f)^{-1}\|}, \quad \sigma = \frac{C_0}{4}$, применим лемму к такому σ

Не умаляя общности $V(a) \subseteq V_0(a)$. Т.к. $\sigma < C_0 \quad \forall p, q \in V(a)$ в силу неравенства 3 из леммы $f(p) \neq f(q)$ ($f|_{V(a)}$ – инъекция. $\implies$ $f|_{V(a)}$ – биекция на $f(V(a))$, т.е. $g = f|_{V(a)}$ обратимо и 4 $\impliedby$ правило дифференцирования обратного отображения $\blacksquare$