Дифференциальные уравнения

Коченюк Анатолий

20 сентября 2021 г.

Связь по: mvbabushkin@itmo.ru — просьба писать именно на почту 30 — экзамен 70 — практика (будет уточняться)

Литературу пришлю

0.1 Введение

0.1.1 Уравнения первого порядка

Допустим, y — неизвестная величина. Заметим, что это не просто число, а некоторая зависимость (например, температура, зависящая от времени), то есть это некоторая искомая функция. Ну, и часто непосредственно, нам не написать чему она равна; явно эту функцию просто так не напишешь, но можно написать некую взаимосвязь между этой функцией и переменной, возможно еще и производной и т.п.

Определение 1. Такая взаимосвязь называется **дифференциальным уравнением**.

Пример. Допустим, у нас есть кролики, заведем таблицу и будем считать кроликов каждый день.

Предположем, мы смотрели на эксперемент и обнаружили такую зависимость: Прирост примерно пропорционален текущему клличеству и времени замерки.

$$y_{k+1} - y_k \approx \alpha y_k (t_{k+1} - t_k)$$

Так же заметим, что если узмельчатьь шаг времени, то зависимость будет все более и более точная.

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{t_{k+1} - t_k} = \alpha y_k$$

Тогда слева производная.

$$y'(t) = \alpha y(t) - g \cdot y$$

Как же получать такие формулы? Все-таки мы не привели ни одного аргумента, что эта формула верна… Пусть этим занимаются физики, мы лишь будем решать используя эти формулы.

Попробуем поугадывать решения:

$$\varphi(t) = \alpha t \implies (\alpha t)' = \alpha(\alpha t) \implies \alpha = \alpha^2 t \implies t = \frac{1}{\alpha}$$

$\varphi(t) = e^{\alpha t} \implies (e^{\alpha t})' = \alpha e^{\alpha t} \implies \alpha e^{\alpha t} \equiv \alpha e^{\alpha t} \text{на } \mathbb{R} \implies \varphi(t) = Ce^{\alpha t}$ – все решения

Задача 1. Пусть дано $m(0) = 25$г, $m(30) = 42$г, $m(t_2) = 2m(0)$, $t_2 -?$

То есть нам нужно найти точку на плоскости (здесь был рисунок), но она может быть где угодно, так что предположем, что у нас есть еще какие-то данные:

$$m'(t) = \alpha m(t) \ \&\ m(t) = Ce^{\alpha t}$$

Решение.

$$25 = m(0) = C \quad 42 = m(30) = 25e^{\alpha \cdot 30} \implies \alpha = \frac{1}{30}\ln\frac{42}{25} \implies 50 = m(t_2) = 25e^{\frac{1}{30}\ln\frac{42}{25}} \implies t_2 \approx 40$$

■

0.1.2 Второй закон Ньютона

$$F = ma \implies a = \frac{F(t,x,v)}{m} \implies x'' = \frac{F(t,x,x')}{m}$$

Так что дифференциальные уравнение встречаются очень часто — мотивируйтесь их решать.

0.2 Уравнения первого порядка и его решения

Определение 2. Дифференциальное уравнение первого порядка — это уравнение вида:

$$F(x,y,y') = 0$$

Определение 3. Функция φ, если:

1. $\varphi \in C^1(a,b)$
2. $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0,\ x \in\in (a,b)$

Пример. $y' = -\dfrac{1}{x^2}$

$y = \dfrac{1}{x} + C,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$y = \begin{cases} \frac{1}{x} + A, x < 0 \\ \frac{1}{x} + B, x > 0 \end{cases}$$

Сейчас одна точка разрыва, а если их больше, то было бы больше независимых констант... Поэтому, решениями являются функции на отрезке.

Определение 4. Интегральная кривая — это график его решения.

<!– Опять рисунок –>

Определение 5. Общее множество решений для дифференциального уравнения — это множество всех его решений.

Определение 6. $F(x, y, c) = 0$

Общий интеграл — это такой интеграл при некотором значении константы в решении которого, соотношение неявно задает все решения.

Определение 7. Уравнение в неявной форме:

$$y' = f(x, y)$$

Для такого мы определим **область задания** — это аналог ОДЗ.

Определение 8. Область задания — это множество $\operatorname{Dom} f$ (domain) — множество, где уравнение имеет смысл.

Пример. $y' = -\dfrac{1}{x^2},\ f(x, y) = -\dfrac{1}{x^2},\ \operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$

Задача 2. $\lhd y' = x + y$. Пусть φ — решение. У нас есть такая связь: $\varphi'(x) = x + \varphi(x)$, в частности, в точке $(2, 3)$.

$\lhd(2,3) \quad \varphi'(2) = 2 + 3 = 5 = f(2,3)$

То есть, если там проходит наша функция, то она проходит там под углом $\operatorname{arctg} 5$.

$\lhd(4,3) \quad \varphi'(4) = 4 + 3 = 7 = f(4,3)$

Никто не мешает нам взять какую-то сетку, и в каждой точке этой сетки мы поймем, как примерно ведут себя интегральные кривые. То есть, можно не решая уравнения, можно построить такое поле и увидеть, как ведут себя интегральные кривые.

Определение 9. То есть, задать уравнение — это значит увидеть, как ведет себя поле направлений.

Из этого геометрического смысла, мы можем сделать еще один вывод.

Возьмем какую-то точку (потом научимся их находить), посчитаем в ней угол, пойдем по этому направлению, новая точка — новое направление, и т. д. Чем мельче шаг, тем ближе ломаная к интегральной кривой.

$$x_{k+1} = x_k + h$$
$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h$$
$$\frac{\delta y_k}{\delta x_k} = f(x_k, y_k)$$

Так определяется **ломаная Эйлера**.

0.2.2 Уравнение в дифференциалах

Давайте запишем производную, как отношение дифференциалов, и перепишем уравнение 7.

$$dy = f(x,y)dx$$
$$f(x,y)dx - dy = 0$$

Определение 10. Уравнение в дифференциалах: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

Определение 11. Функция φ — это решение 10, если:

- $\varphi \in C^1(a,b)$
- $P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0, \ x \in (a,b)$

Определение 12. Область определения 10 — это множество $\operatorname{Dom} P \cap \operatorname{Dom} Q$

Пример. Пусть $xdx + ydy = 0 \qquad \operatorname{Dom} P \cap \operatorname{Dom} Q = \mathbb{R}^2$

$y = \sqrt{R^2 - x^2},\ x \in (-R, R) \quad xdx + \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \left(-\dfrac{2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}}\right) dx = 0$

В чем еще одна идея такого вида уравнения? В том, что x и y здесь равноправны, то есть $x = ky$ — это тоже *конечное* решения.

Определение 13. Пара или вектор-функция $r(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ — это параметрическое решение уравнения 10, если:

- $\varphi, \psi \in C^1(\alpha, \beta), r'(t) \neq 0,\ \forall t \in (\alpha, \beta)$ — второе условие, чтобы не было изломов у функции (как у модуля)
- $P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(x) \equiv 0$

Пример. $xdx + ydy = 0 \implies (R\cos t, R\sin t),\ t \in \mathbb{R}$ — параметрическое решение.

$P(\varphi, \psi)\varphi' + Q(\varphi, \psi)\psi'(x) \equiv 0 \implies (P, Q) \cdot (\varphi', \psi') = 0$

$F = (P, Q) \quad r = (\varphi, \psi) \quad F \perp r'$

<!– Рисунок –>

И здесь у нас никакие направления не исключаются, в отличии от поля, где исключались вертикальные направления.

0.3 Задача Коши и уравнения с разделяющимися переменными

0.3.1 Задача Коши (ЗК)

Определение 14. Задачей Коши или начальной задачей называется задача отыскания решения уравнения в нормальной форме $y' = f(x, y)$, которая удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = y_0$

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

(x_0, y_0) – начальные данные

Вопросы: есть ли решение и может ли их быть несколько?

Теорема 1 (Теорема о существовании для уравнений 1-го порядка)**.** G – область (открытое связное множество), $f \in C(G)$, $(x_0, y_0) \in G \implies \exists$ решение задачи Коши в некоторой окрестности точки x_0

Пример. $y' = f(x, y) \quad f(x, y) = \begin{cases} 1 & , y > 0 \\ 0, & y \leqslant 0 \end{cases}$

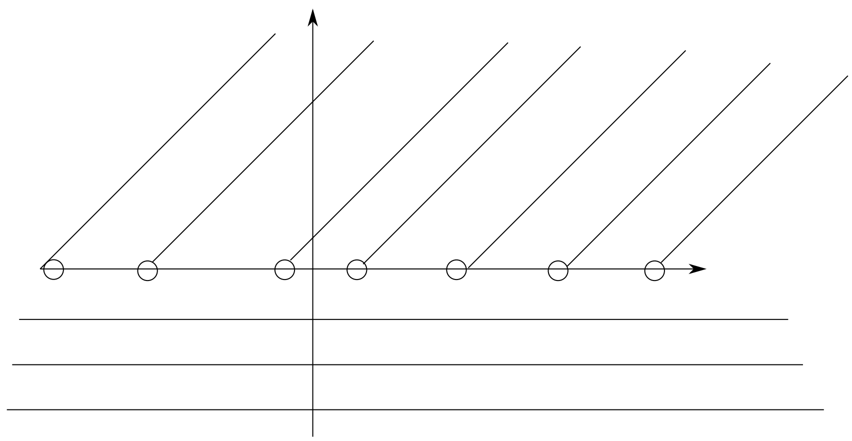

Рис. 1: legko

Теорема 2 (Теорема единственности для уравнения 1-го порядка)**.** G – область, $f, g'_y \in C(G), (x_0, y_0) \in G, \varphi_1, \varphi_2$ – решения ЗК на $(\alpha, \beta) \implies$ $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ на (α, β)

Пример. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$

$f(x, y) = 3\sqrt[3]{y^2}$ – непрерывна везде, $G = \mathbb{R}^2$

По теореме о существовании через любую точку проходит хотя бы одна интегральная кривая.

$f'_y = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{y}} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$

На прямой $y = 0$ нарушаются условия теоремы об единственности, значит в этих точках могут (но не факт, что будут) проходить несколько интегральных кривых.

$$dy = 2\sqrt[3]{y^2}dx$$
$$y = (x-c)^3$$

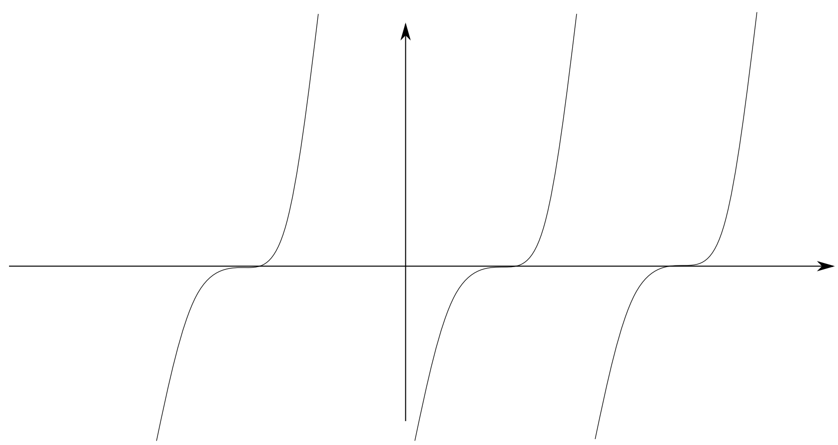

Рис. 2: uzhas

Ответ: $y = (x-C)^3 \quad C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

$y = 0, x \in \mathbb{R}$ – особое решение. Имеются составные решения

Определение 15. Решение φ на (a,b) уравнения $y' = f(x,y)$ называется <u>особым</u>, если

$$\forall x_0 \in (a,b)\ \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi_1 - \text{решение задачи}, y' = f(x,y) \quad y(x_0) = \varphi(x_0)$$

на (α, β), где $\beta - \alpha < \varepsilon, x_0 \in (\alpha, \beta)$, но $\varphi_1 \not\equiv \varphi$ на (α, β)

0.3.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 16 (Уравнения с разделёнными переменными)**.**

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

Теорема 3 (Общее решение уравнения с разделёнными переменными).
$P \in C(a,b) \quad Q \in C(c,d) \quad (\alpha,\beta) \subset (a,b)$

Тогда функция $y = \varphi(x)$ – решение на $(\alpha,\beta) \iff$:

1. $\varphi \in C^1(\alpha,\beta)$
2. $\exists C \in \mathbb{R}$, т.ч. φ неявно задаётся уравнением $\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Дано, что φ – решение $\Longrightarrow$ автоматически выполняется первый пункт.

$\sqsupset$ $x_0 \in (\alpha,\beta)$ – прозвольно. $y_0 := \varphi(x_0)$, тогда пункт 2 запишется как:

$$\int_{x_0}^{x} P(x)dx + C_1 + \int_{y_0}^{y} Q(t)dt + C_2 = C$$

$$\int_{x_0}^{x} P(x)dx + \int_{y_0}^{\varphi} Q(t)dt = A \quad \forall x \in (\alpha,\beta)$$

Пусть $t = \varphi(\tau) \implies$ л.ч.

$$\int_{x_0}^{x} P(t)dt + \int_{x_0}^{x} Q\left(\varphi(\tau)\,\varphi'(\tau)dt = \int_{x_0}^{x} \left(P(\tau) + Q\left(\varphi(\tau)\,\varphi'(\tau)\right)\right) dt \equiv 0 \text{ на } (\alpha,\beta)$$

$\Longleftarrow$ Дано: $\varphi \in C^1(\alpha,\beta)$ и $\int P(x)dx + \left[\int Q(y)dy\right]_{y=\varphi(x)} \equiv C$ на (α,β)

продиффиренцируем наше тождество (законно, потому что φ непрерывно дифференцируемо)

$P(x) + Q\left(\varphi(x)\right) \cdot \varphi'(x) \equiv 0$ на (α,β)

■

Пример. $xdx + ydy = 0$

$$\int xdx + \int ydy = C$$
$$x^2 + y^2 = 2C$$
$$x^2 + y^2 = A$$

$$A > 0 \quad \begin{array}{ll} y = \pm\sqrt{A - x^2} & x \in (-\sqrt{A}, \sqrt{A}) \\ x = \pm\sqrt{A - y^2} & , y \in \left(-\sqrt{A}, \sqrt{A}\right) \end{array}$$

Определение 17. Уравнение с разделяющимися переменными:

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)y_2(y)dy = 0$$

$p_2(x_0) = 0 \implies x \equiv x_0$ – решение

$q_1(t_0) = 0 \implies y \equiv y_0$ – решение

Далее отдельно рассматриваем на каждой из областей (4 здесь):

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx + \frac{q_2(y)}{q_1(y)}dy = 0$$

Пример.

$$2ydx - xdy = 0$$

$x = 0, y = 0$ – решения. Нужно отдельно смотреть все четверти

$$\frac{2dx}{x} = \frac{dy}{y}$$
$$2\ln|x| = \ln|y| + C$$
$$y = Ax^2, A > 0, x > 0$$

В остальных четвертях аналогично. Они все стыкуются в нуле и общее решение – всевозможные стыковки.

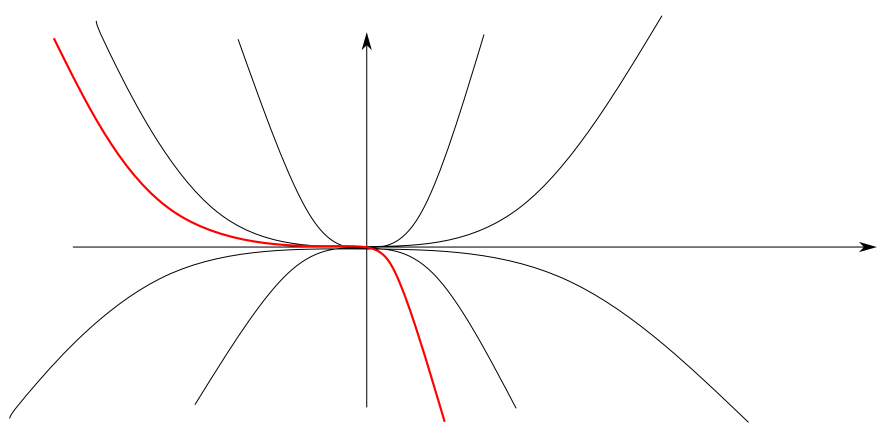

Рис. 3: gohan1

Пример.

$$ydx - xdy = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} + C$$
$$\ln|x| = \ln|y| + C$$
$$y = Ax$$

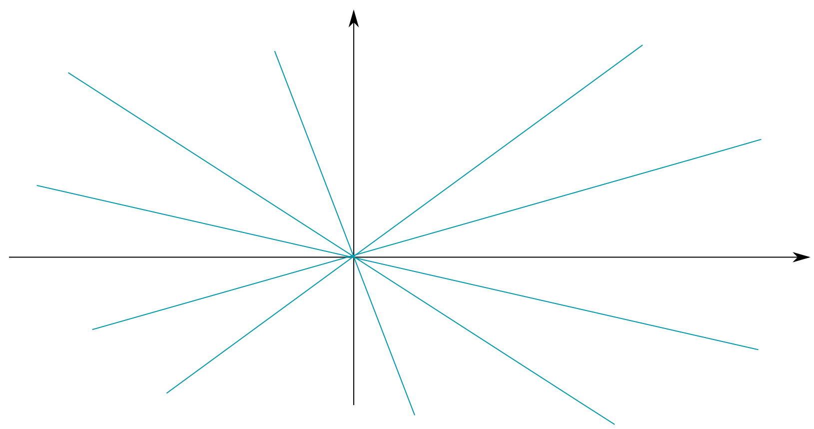

Рис. 4: gohan2

Определение 18. Два уравнения называют <u>эквивалентными</u>, если они имеют одинаковую область задания и одинаковый набор интегральных кривых.

Замечание.

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0$$

не экивалентно

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx + \frac{q_1(y)}{q_2(y)}dy = 0$$

Теорема 4 (Теорема о существовании и единственности для уравнений с разделёнными переменными). $P \in C(a, b) \quad Q \in C(c, d)$

(x_0, y_0) – не особая точка уравнения (т.е. $P(x_0) \neq 0, Q(y_0) \neq 0$) $\implies$ уравнение

$$\int_{x_0}^{x} P(t)dt + \int_{y_0}^{y} Q(t)dt = 0$$

определяет единственное решение в некоторой окрестности точки x_0