Дифференциальные уравнения

Коченюк Анатолий

12 октября 2021 г.

Связь по: mvbabushkin@itmo.ru — просьба писать именно на почту 30 — экзамен 70 — практика (будет уточняться)

Литературу пришлю

0.1 Введение

0.1.1 Уравнения первого порядка

Допустим, y — неизвестная величина. Заметим, что это не просто число, а некоторая зависимость (например, температура, зависящая от времени), то есть это некоторая искомая функция. Ну, и часто непосредственно, нам не написать чему она равна; явно эту функцию просто так не напишешь, но можно написать некую взаимосвязь между этой функцией и переменной, возможно еще и производной и т.п.

Определение 1. Такая взаимосвязь называется **дифференциальным уравнением**.

Пример. Допустим, у нас есть кролики, заведем таблицу и будем считать кроликов каждый день.

Предположем, мы смотрели на эксперемент и обнаружили такую зависимость: Прирост примерно пропорционален текущему клличеству и времени замерки.

$$y_{k+1} - y_k \approx \alpha y_k (t_{k+1} - t_k)$$

Так же заметим, что если узмельчать шаг времени, то зависимость будет все более и более точная.

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{t_{k+1} - t_k} = \alpha y_k$$

Тогда слева производная.

$$y'(t) = \alpha y(t) - g \cdot y$$

Как же получать такие формулы? Все-таки мы не привели ни одного аргумента, что эта формула верна... Пусть этим занимаются физики, мы лишь будем решать используя эти формулы.

Попробуем поугадывать решения:

$$\varphi(t) = \alpha t \implies (\alpha t)' = \alpha(\alpha t) \implies \alpha = \alpha^2 t \implies t = \frac{1}{\alpha}$$

$\varphi(t) = e^{\alpha t} \implies (e^{\alpha t})' = \alpha e^{\alpha t} \implies \alpha e^{\alpha t} \equiv \alpha e^{\alpha t}$на $\mathbb{R} \implies \varphi(t) = Ce^{\alpha t}$ – все решения

Задача 1. Пусть дано $m(0) = 25$г, $m(30) = 42$г, $m(t_2) = 2m(0),\ t_2 -?$

То есть нам нужно найти точку на плоскости (здесь был рисунок), но она может быть где угодно, так что предположем, что у нас есть еще какие-то данные:

$$m'(t) = \alpha m(t) \ \&\ m(t) = Ce^{\alpha t}$$

Решение.

$$25 = m(0) = C \quad 42 = m(30) = 25e^{\alpha \cdot 30} \implies \alpha = \frac{1}{30} \ln \frac{42}{25} \implies 50 = m(t_2) = 25e^{\frac{1}{30} \ln \frac{42}{25}} \implies t_2 \approx 40$$

■

0.1.2 Второй закон Ньютона

$$F = ma \implies a = \frac{F(t, x, v)}{m} \implies x'' = \frac{F(t, x, x')}{m}$$

Так что дифференциальные уравнение встречаются очень часто — мотивируйтесь их решать.

0.2 Уравнения первого порядка и его решения

Определение 2. Дифференциальное уравнение первого порядка — это уравнение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

Определение 3. Функция φ, если:

1. $\varphi \in C^1(a, b)$
2. $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0,\ x \in\in (a, b)$

Пример. $y' = -\dfrac{1}{x^2}$

$y = \dfrac{1}{x} + C,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$y = \begin{cases} \frac{1}{x} + A, x < 0 \\ \frac{1}{x} + B, x > 0 \end{cases}$$

Сейчас одна точка разрыва, а если их больше, то было бы больше независимых констант... Поэтому, решениями являются функции на отрезке.

Определение 4. Интегральная кривая — это график его решения.

<!– Опять рисунок –>

Определение 5. Общее множество решений для дифференциального уравнения — это множество всех его решений.

Определение 6. $F(x, y, c) = 0$

Общий интеграл — это такой интеграл при некотором значении константы в решении которого, соотношение неявно задает все решения.

Определение 7. Уравнение в неявной форме:

$$y' = f(x, y)$$

Для такого мы определим **область задания** — это аналог ОДЗ.

Определение 8. Область задания — это множество $\operatorname{Dom} f$ (domain) — множество, где уравнение имеет смысл.

Пример. $y' = -\dfrac{1}{x^2},\ f(x, y) = -\dfrac{1}{x^2},\ \operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$

Задача 2. $\lhd y' = x + y$. Пусть φ — решение. У нас есть такая связь: $\varphi'(x) = x + \varphi(x)$, в частности, в точке $(2, 3)$.

$\lhd(2,3) \quad \varphi'(2) = 2 + 3 = 5 = f(2,3)$

То есть, если там проходит наша функция, то она проходит там под углом $\operatorname{arctg} 5$.

$\lhd(4,3) \quad \varphi'(4) = 4 + 3 = 7 = f(4,3)$

Никто не мешает нам взять какую-то сетку, и в каждой точке этой сетки мы поймем, как примерно ведут себя интегральные кривые. То есть, можно не решая уравнения, можно построить такое поле и увидеть, как ведут себя интегральные кривые.

Определение 9. То есть, задать уравнение — это значит увидеть, как ведет себя поле направлений.

Из этого геометрического смысла, мы можем сделать еще один вывод.

Возьмем какую-то точку (потом научимся их находить), посчитаем в ней угол, пойдем по этому направлению, новая точка — новое направление, и т. д. Чем мельче шаг, тем ближе ломаная к интегральной кривой.

$$x_{k+1} = x_k + h$$
$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h$$
$$\frac{\delta y_k}{\delta x_k} = f(x_k, y_k)$$

Так определяется **ломаная Эйлера**.

0.2.2 Уравнение в дифференциалах

Давайте запишем производную, как отношение дифференциалов, и перепишем уравнение 7.

$$dy = f(x,y)dx$$
$$f(x,y)dx - dy = 0$$

Определение 10. Уравнение в дифференциалах: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

Определение 11. Функция φ — это решение 10, если:

- $\varphi \in C^1(a,b)$
- $P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0, \; x \in (a,b)$

Определение 12. Область определения 10 — это множество $\operatorname{Dom} P \cap \operatorname{Dom} Q$

Пример. Пусть $xdx + ydy = 0 \qquad \operatorname{Dom} P \cap \operatorname{Dom} Q = \mathbb{R}^2$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2},\ x \in (-R, R) \quad xdx + \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \left(-\frac{2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}}\right) dx = 0$$

В чем еще одна идея такого вида уравнения? В том, что x и y здесь равноправны, то есть $x = ky$ — это тоже *конечное* решения.

Определение 13. Пара или вектор-функция $r(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ — это параметрическое решение уравнения 10, если:

- $\varphi, \psi \in C^1(\alpha, \beta), r'(t) \neq 0,\ \forall t \in (\alpha, \beta)$ — второе условие, чтобы не было изломов у функции (как у модуля)
- $P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(x) \equiv 0$

Пример. $xdx + ydy = 0 \implies (R\cos t, R\sin t),\ t \in \mathbb{R}$ — параметрическое решение.

$$P(\varphi, \psi)\varphi' + Q(\varphi, \psi)\psi'(x) \equiv 0 \implies (P, Q) \cdot (\varphi', \psi') = 0$$

$$F = (P, Q) \quad r = (\varphi, \psi) \quad F \perp r'$$

<!– Рисунок –>

И здесь у нас никакие направления не исключаются, в отличии от поля, где исключались вертикальные направления.

0.3 Задача Коши и уравнения с разделяющимися переменными

0.3.1 Задача Коши (ЗК)

Определение 14. Задачей Коши или начальной задачей называется задача отыскания решения уравнения в нормальной форме $y' = f(x, y)$, которая удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = y_0$

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

(x_0, y_0) – начальные данные

Вопросы: есть ли решение и может ли их быть несколько?

Теорема 1 (Теорема о существовании для уравнений 1-го порядка)**.** G – область (открытое связное множество), $f \in C(G)$, $(x_0, y_0) \in G \implies \exists$ решение задачи Коши в некоторой окрестности точки x_0

Пример. $y' = f(x, y) \quad f(x,y) = \begin{cases} 1 & , y > 0 \\ 0, & y \leqslant 0 \end{cases}$

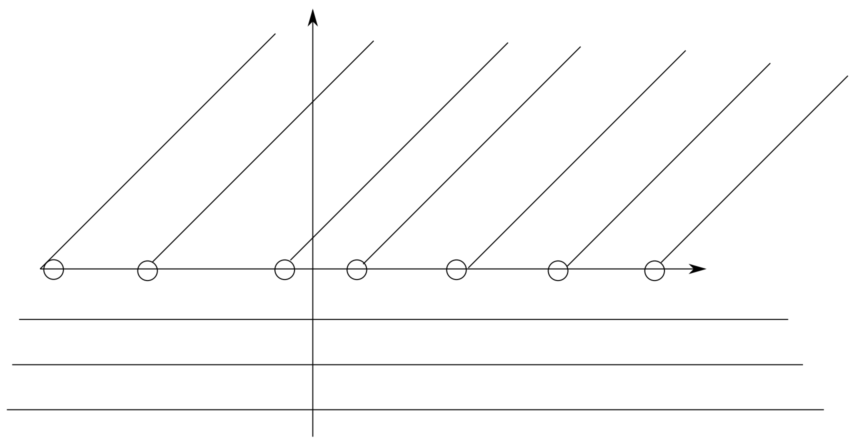

Рис. 1: legko

Теорема 2 (Теорема единственности для уравнения 1-го порядка)**.** G – область, $f, g'_y \in C(G), (x_0, y_0) \in G, \varphi_1, \varphi_2$ – решения ЗК на $(\alpha, \beta) \implies \varphi_1 \equiv \varphi_2$ на (α, β)

Пример. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$

$f(x, y) = 3\sqrt[3]{y^2}$ – непрерывна везде, $G = \mathbb{R}^2$

По теореме о существовании через любую точку проходит хотя бы одна интегральная кривая.

$f'_y = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{y}} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$

На прямой $y = 0$ нарушаются условия теоремы об единственности, значит в этих точках могут (но не факт, что будут) проходить несколько интегральных кривых.

$$dy = 2\sqrt[3]{y^2}dx$$
$$y = (x-c)^3$$

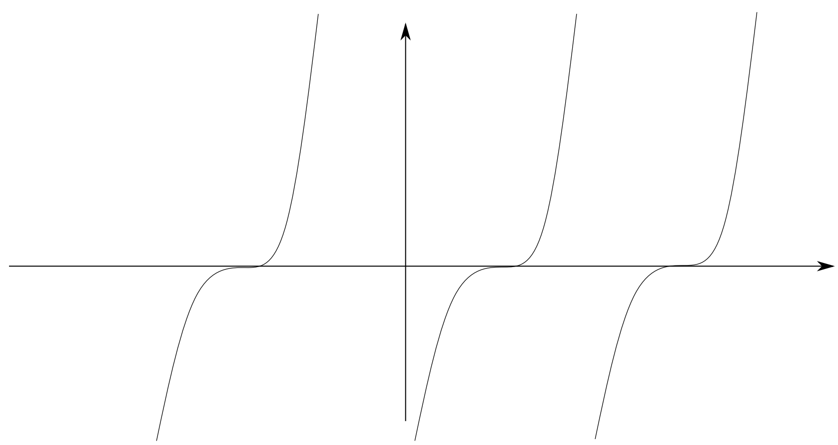

Рис. 2: uzhas

Ответ: $y = (x-C)^3 \quad C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

$y = 0, x \in \mathbb{R}$ – особое решение. Имеются составные решения

Определение 15. Решение φ на (a,b) уравнения $y' = f(x,y)$ называется <u>особым</u>, если

$$\forall x_0 \in (a,b)\ \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi_1 \text{ – решение задачи}, y' = f(x,y) \quad y(x_0) = \varphi(x_0)$$

на (α,β), где $\beta - \alpha < \varepsilon, x_0 \in (\alpha,\beta)$, но $\varphi_1 \not\equiv \varphi$ на (α,β)

0.3.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 16 (Уравнения с разделёнными переменными)**.**

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

Теорема 3 (Общее решение уравнения с разделёнными переменными)**.**
$P \in C(a,b) \quad Q \in C(c,d) \quad (\alpha,\beta) \subset (a,b)$

Тогда функция $y = \varphi(x)$ – решение на $(\alpha,\beta) \iff$:

1. $\varphi \in C^1(\alpha,\beta)$
2. $\exists C \in \mathbb{R}$, т.ч. φ неявно задаётся уравнением $\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Дано, что φ – решение $\implies$ автоматически выполняется первый пункт.

$\sqsupset x_0 \in (\alpha,\beta)$ – прозвольно. $y_0 := \varphi(x_0)$, тогда пункт 2 запишется как:

$$\int_{x_0}^{x} P(x)dx + C_1 + \int_{y_0}^{y} Q(t)dt + C_2 = C$$

$$\int_{x_0}^{x} P(x)dx + \int_{y_0}^{\varphi} Q(t)dt = A \quad \forall x \in (\alpha,\beta)$$

Пусть $t = \varphi(\tau) \implies$ л.ч.

$$\int_{x_0}^{x} P(t)dt + \int_{x_0}^{x} Q\left(\varphi(\tau)\,\varphi'(\tau)dt = \int_{x_0}^{x} \left(P(\tau) + Q\left(\varphi(\tau)\,\varphi'(\tau)\right)\right)dt \equiv 0 \text{ на } (\alpha,\beta)$$

$\Longleftarrow$ Дано: $\varphi \in C^1(\alpha,\beta)$ и $\int P(x)dx + \left[\int Q(y)dy\right]_{y=\varphi(x)} \equiv C$ на (α,β)

продиффиренцируем наше тождество (законно, потому что φ непрерывно дифференцируемо)

$P(x) + Q\left(\varphi(x)\right) \cdot \varphi'(x) \equiv 0$ на (α,β)

■

Пример. $xdx + ydy = 0$

$$\int xdx + \int ydy = C$$
$$x^2 + y^2 = 2C$$
$$x^2 + y^2 = A$$

$$A > 0 \quad \begin{array}{ll} y = \pm\sqrt{A - x^2} & x \in (-\sqrt{A}, \sqrt{A}) \\ x = \pm\sqrt{A - y^2} & , y \in \left(-\sqrt{A}, \sqrt{A}\right) \end{array}$$

Определение 17. Уравнение с разделяющимися переменными:

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)y_2(y)dy = 0$$

$p_2(x_0) = 0 \implies x \equiv x_0$ – решение

$q_1(t_0) = 0 \implies y \equiv y_0$ – решение

Далее отдельно рассматриваем на каждой из областей (4 здесь):

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx + \frac{q_2(y)}{q_1(y)}dy = 0$$

Пример.

$$2ydx - xdy = 0$$

$x = 0, y = 0$ – решения. Нужно отдельно смотреть все четверти

$$\frac{2dx}{x} = \frac{dy}{y}$$
$$2\ln|x| = \ln|y| + C$$
$$y = Ax^2, A > 0, x > 0$$

В остальных четвертях аналогично. Они все стыкуются в нуле и общее решение – всевозможные стыковки.

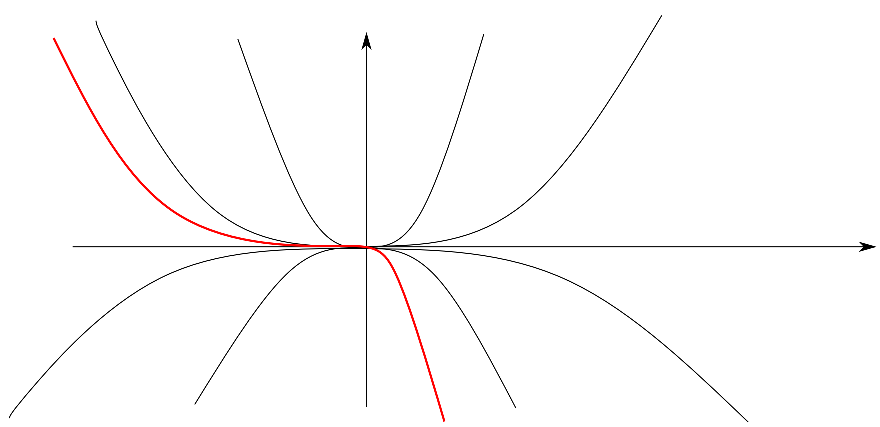

Рис. 3: gohan1

Пример.

$$ydx - xdy = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} + C$$
$$\ln|x| = \ln|y| + C$$
$$y = Ax$$

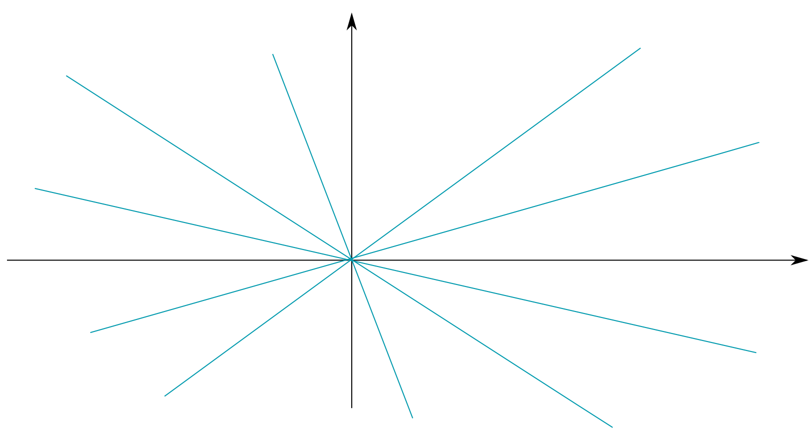

Рис. 4: gohan2

> **Определение 18.** Два уравнения называют <u>эквивалентными</u>, если они имеют одинаковую область задания и одинаковый набор интегральных кривых.

Замечание.

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0$$

не экивалентно

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx + \frac{q_1(y)}{q_2(y)}dy = 0$$

Теорема 4 (Теорема о существовании и единственности для уравнений с разделёнными переменными). $P \in C(a,b) \quad Q \in C(c,d)$

(x_0, y_0) – не особая точка уравнения (т.е. $P(x_0) \neq 0, Q(y_0) \neq 0$) $\implies$ уравнение

$$\int_{x_0}^{x} P(t)dt + \int_{y_0}^{y} Q(t)dt = 0$$

)

определяет единственное решение в некоторой окрестности точки x_0

0.4 Некоторые типы уравнений, интегрируемых в квадратурах

решение уравнения – конечное число арифметических действий, суперпозиции и взятия интегралов от обеих частей

0.4.1 Линейные уравнения

Определение 19. $y' = p(x)y + q(x)$ – линейное уравнения (ЛУ)

$y' = p(x)y$ – однородное линейное уравнения (ЛОУ)

Лемма 1 (Общее решение линейного однороднго уравнения). $\sqsupset p \in C(a,b) \implies y = Ce^{\int p}, C \in \mathbb{R}, x \in (a,b)$ – Общая запись решения ЛОУ

Доказательство. $dy = p(x)ydx$

$y = 0$ – решение

$\int \frac{dy}{y} = \int p(x)dx + C$

$\ln |u| = \int p + C$

При $y > 0 \quad y = Ae^{\int p}, A > 0$

При $y < 0 \quad y = Ae^{\int p}, A < 0$

$y = 0$ не особое по теореме об единственности из прошлой секции. ■

Теорема 5 (Общее решение линейного уравнения). $\sqsupset p, q \in C(a,b)$

$\implies y = \left(C + \int qe^{-\int p}\right) e^{\int p} \quad C \in \mathbb{R} \quad x \in (a,b)$

Доказательство. Подстановкой убеждаемся, что все эти функции – решения.

Пусть есть ещё решения φ – решение ЛУ на (α, β), и оно не задаётся формулой из условия теоремы.

Возьмём любую точку, через которую проходит это решение, $(x_0, \varphi(x_0))$. Подставим в общую формулу эту точку, то выразим C

$y_0 = (C + E(x_0))F(x_0) \quad C = \frac{y_0}{F(x_0)} - E(x_0)$

По теореме об единственности новое решение совпадает с решение с константой C везде, где оба определены – на (α, β), а тогда φ задаётся формулой, противоречие ■

0.4.2 Метод вариации постоянной или Метод Лагранжа

1. вместо ЛУ решаем соответствующее ЛОУ

   $yy' = p(x)y \quad t = Ce^{\int p}$

2. заменяя C на $C(x)$ и подставляем $y = C(x)e^{\int p}$ в исходное ЛУ уравнение

$$\left(Ce^{\int p}\right)' = pCe^{\int p} + q$$
$$C'e^{\int p} + Ce^{\int p} \cdot p = pCe^{\int p} + q$$
$$C' = qe^{-\int p}$$

3. находим $C = \int qe^{-\int p} + C_1$

4. Подставляем $C(x)$ вместо C в решение (ЛОУ)

   $y = \left(C_1 + \int qe^{-\int p}\right) e^{\int p}$

0.4.3 Уравнение Бернулли

Определение 20. $y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha} \quad \alpha \notin \{0, 1\}$

Замена на $z = y^{1-\alpha}$ сводит его к ЛУ

$$\frac{y'}{y^\alpha} = p(x)y^{1-\alpha} + q(x)$$
$$z' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^\alpha}$$
$$z' = (1-\alpha)p(x)z + (1-\alpha)q\,(x)$$
$$f(x,y) = py + qy^\alpha$$
$$f'_y = p + qy^{\alpha-1}$$

$\alpha \geqslant 1 \implies$ непрерывна, следовательно по теореме об единственности $y = 0$ – не особое

0.4.4 Уравнение Риккати

Определение 21. $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$ – квадратичная функция от y

Утверждение 1 (Лиувилль)**.** Уравнение

$$y' = y^2 + x^\alpha$$

интегрируется в квадратурах $\iff \frac{\alpha}{2\alpha+4} \in \mathbb{Z}$ или $\alpha = -2$

Если известно решение φ, то подставновка $y = z + \varphi$ сводится к уравнению Бернулли

0.4.5 Уравнение в полных дифференциалах

Определение 22.

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

Если $\exists u : u'_x = P \quad u'_y = Q$

Теорема 6 (Общее решение УПД)**.** $P, Q \in C(G) \quad G \subseteq \mathbb{R}^2$ – область, $u'_x = P, u'_y = Q$

$y = \varphi(x)$ – решение УПД на $(a,b) \iff$

1. $\varphi \in C^1(a,b)$
2. $\exists C : \quad U(x,\varphi(x)) \equiv C$ на (a,b) (т.е. φ неявно задано уравнением $u(x,y) = C$)

Доказательство.

$\Longrightarrow$

1. Выполняется по определению решения

2. Имеем $P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$

   $P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x) = (u(x,\varphi(x)))' = 0 \implies u(x,\varphi(x)) = C$

$\Longleftarrow$ Имеем $u(x,\varphi(x)) \equiv C$, дифференцируем:

$$u'_x(x,\varphi(x)) + u'_y(x,\varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$$
$$P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$$

■

Предположим $u \in C^2(G) \quad u'_x = P \quad u'_y = Q \quad P'_y = u'_{xy} = u'_{yx} = Q'_x$

Утверждение 2. Условие $P'_y = Q'_x$ – достаточное для того, чтобы уравнение было УПД, если G – односвязная область

Определение 23. Область односвязна, если любая замкнутая кривая стягивается в точку (гомотопна точке)

Определение 24. Функция $u: \quad u'_x = P, u'_y = Q$ называется потенциалом уравнения в полных дифференциальных (= потенциал поля (P,Q))

Потенциал УПД находится по формуле:

$u(x,y) = C + \int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

Если кривая $\gamma \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t \in [\alpha,\beta] \end{cases} \implies \int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \left(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right)dt$

0.4.6 Интегрирующий множитель

Определение 25. $\exists\, \mu(x,y) \neq 0 \quad \forall x,y$ и

$$\mu P dx + \mu Q dy = 0$$

– УПД $\implies \mu$ – интегральный множитель уравнения $Pdx + Qdy = 0$

Утверждение 3 (Необходимое условие)**.** (если $\mu \in C^1(G)$)

$$(\mu P)'_y = (\mu Q)'_x$$

)

Пример.

$$y' = p(x)y + q(x) = 0$$
$$(p(x)y + q(x))\,dx - dy = 0$$
$$P'_y = p(x) \quad Q'_x = 0$$

Будем искать μ в виде $\mu = \mu(x) \implies 0 \cdot P + \mu P = \mu'(-1) + 0 \implies \mu' = -\mu p$

$\mu = Ce^{-\int p}$, пусть $C = 1 \quad \mu = e^{-\int p}$

Умножим исходное уравнение на $\mu = e^{-\int p}$

$$y'e^{-\int p} = pye^{-\int p} + qe^{-\int p}$$
$$y'e^{-\int p} - pye^{-\int p} = qe^{\int p}$$
$$\left(ye^{-\int p}\right)' = qe^{-\int p}$$
$$ye^{-\int p} = \int qe^{-\int p} + C$$
$$y = \left(C + \int qe^{-\int p}\right)e^{\int p}$$

0.5 Уравнения неразрешённные относительно производной

Определение 26. $F(x, y, y') = 0$ – разрешённые относительно производной

0.5.1 Уравнения разрешимые относительно производной

Пример. $(y' - f_1(x,y))\,(y' - f_2(x,y)) = 0$

Если φ – решение $y' = f_1(x,y)$ или $y' = f_2(x,y)$, то φ – решение исходного

Обратное неверно

Пример. $y'^2 - 4x^2 = 0$

$$
\begin{aligned}
(y'-2x)(y'+2)=0 \\
y'=2x \implies y=x^2+C \\
y'=-2x \implies -x^2+C \\
.
\end{aligned}
$$

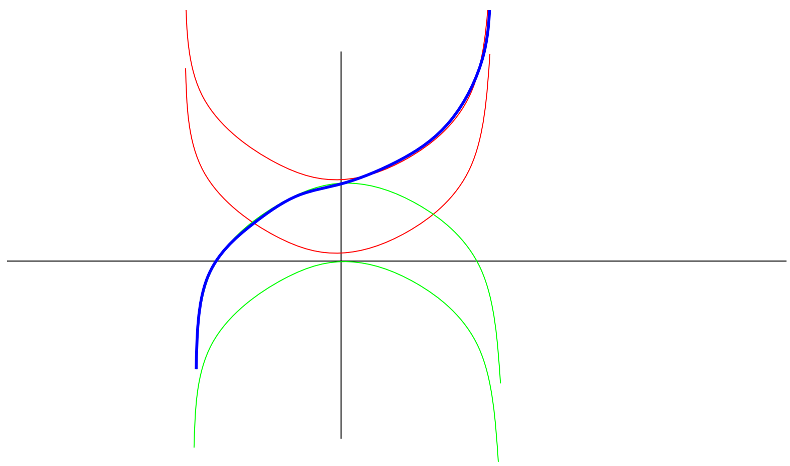

Рис. 5: obrnev

Есть составные решения, где интегральные уравнения стыкуются в точках $(x_0, y_0) \quad f_1'(x_0,y_0)=f_2(x_0,y_0)$.

0.5.2 Метод введения параметра

$x=\varphi(t) \quad y=\psi(t) \quad t\in(\alpha,\beta)$

$\exists\varphi^{-1} \implies$ функция $\psi\circ\varphi^{-1}$ задана параметрически

Неполные уравнения

$\lhd F(x,y')=0$ – уравнения множества на плоскости $\mathbb{R}^2_{x,y'}$

Пусть $x=\varphi(t) \quad y'=\psi(t)$ – гладкая параметризация γ и $\exists\varphi^{-1}$

Утверждение 4. $x=\varphi(t), y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt$ – параметрически заданное решение $F(x,y')=0$

Доказательство. $F(x,y_x'(x)) = F(\varphi(t), \frac{(\int\psi(t)\varphi'(t)dt+C)'}{\varphi'(t)} = F(\varphi(t),\psi(t)) \equiv 0$ ■

Правило нахождения решений (некоторых) уравнения $F(x, y') = 0$:

1. Подобрать параметризацию множества $F(x, y')$ в $\mathbb{R}^2_{x,y'}$

$$x = \varphi(t) \quad y' = \psi(t) \quad t \in (\alpha, \beta)$$

2. В основном соотношении метода введения параметризации

$$dy = y'_x dx$$

сделать подстановки

$$dy = y'_t dt \quad y'_x = \psi(t) \quad dx = x'_t dt = \varphi^{-1} dt$$

$$\begin{gathered}\implies y'_t dt = \psi(t)\varphi'(t)dt \\ y'_t = \psi(t)\varphi'(t) \\ \implies y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C \\ x = \varphi(t) \\ .\end{gathered}$$

Так мы получили решения, заданное параметрически

Пример. $e^{y'_x} + y'_x = x$

Пусть $y'_x = t$

$x = e^t + t$

$\lhd dy = y'_x dx$, заменим:

$$\begin{gathered}dy = t'_t dt \\ t'_x = t \\ dx = x'_t dt = (e^t + 1)dt \\ \implies y'_t = t\left(e^t + 1\right) \\ \implies y = \int t\left(e^t + 1\right)dt = e^t\left(t - 1\right) + \frac{t^2}{2} + C\end{gathered}$$

Ответ: $\begin{cases} x = t + e^t \\ y = e^t\left(t - 1\right) + \frac{t^2}{2} + C \end{cases}$

$\lhd F(y, y') = 0$

Сделать подстановки

$$\begin{aligned}
dy &= y'dt = \varphi' dt\\
y'_x &= \psi(t)\\
dx &= x'_t dt\\
\Longrightarrow \varphi'(t)dt &= \psi(t)x'_t dt\\
\varphi'(t) &= \psi(t)x'_t\\
x'_t &= \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\\
x &= \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C\\
\Longrightarrow &\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'}{\psi} + C\\ y = \varphi \end{cases}.
\end{aligned}$$

– решение заданное параметрически

0.5.3 Полное уравнение

$F(x, y, y') = 0$ –уравнение множества σ в пространстве $\mathbb{R}^3_{x,y,y'}$.

Пусть $\begin{cases} x = \varphi(u, v)\\ y = \psi(u, v)\\ y' = \chi(u, v) \end{cases}$ – гладкая параметризация σ

Правило нахождения решений (некоторых) полного уравнения:

1. Подобрать параметризацию множества $F(x, y, y') = 0$ в $\mathbb{R}^3_{x,y,y'}$

2. В основном соотношении $dy = y'_x dx$ поставить $\begin{cases} dy = y'_u du + y'_v dv = \psi'_u du + \psi'_v dv\\ y'_x = \chi(u, v)\\ dx = x'_u du + x'_v dv = \varphi'_u du + \varphi'_v dv \end{cases}$

   (Цель – получить уравнение, содержащее только u, v)

$$\psi'_u du + \psi'_v dv = \chi \cdot (\varphi'_u du + \varphi'_v dv)$$

3. Если $v = g(u, C)$ – решение уравнения сверху, то $\begin{cases} x = \varphi(u, g(u, C))\\ y = \psi(u, g(u, C)) \end{cases}$

   – решение исходного уравнения, заданное параметрически

Пример. $xy' - y = \frac{y'}{2} \ln \frac{y'}{2}$

Доказательство. Пусть $\begin{cases} x = u\\ y' = v\\ y = uv - \frac{v}{2} \ln \frac{v}{2} \end{cases}$

$\lhd$ основное соотношение $dy = y'_x dx$

$$dy = y'_u du + y'_v dv = vdu + \left(u - \frac{1}{2}\ln\frac{v}{2} - \frac{1}{2}\right)dv$$
$$y'_x = v$$
$$dx = x'_u du + x'_v dv = du$$

$$vdu + \left(u - \frac{1}{2}\ln\frac{v}{2} - \frac{1}{2}\right)dv = vdu$$

.

$\lhd$ 2 уравнения:

$$u - \frac{1}{2}\ln v_2 - \frac{1}{2} = 0$$
$$dv = 0$$

.

$$v = 2e^{2u-1}$$
$$v = c$$

.

$x = \varphi\left(u, (u, C)\right) = u$

$y = \psi\left(u, g(u, C)\right) = u\cdot\left(2e^{2u-1}\right) - \left(\frac{2e^{2u-1}}{2}\right)\ln\frac{2e^{2u-1}}{2} = 2ue^{2u-1} - e^{2u-1}(2u-1) = e^{2u-1} = y = e^{2x-1}$ – решение

$$x = u$$
$$y = u \cdot C - \frac{C}{2}\ln\frac{C}{2}$$
$$\Longrightarrow y = Cx - \frac{C}{2}\ln\frac{C}{2}$$

.

– решение ■

0.5.4 Задача Коши для уравнения, разрешимого относительно производной

Определение 27. Задачей Коши для этого уравнения называются задачу нахождения его решений, удовлетворяюих начальным условиям: $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$

Чтобы задача Коши имела хотя бы одно решение необходимо $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$ (согласование начальных данных)

Теорема 7 (существование и единственность решени уравнения, разрешимого относительно производной)**.** $G \subset \mathbb{R}^3$ – область

$F \in C^1(G) \quad (x_0, y_0, y'_0) \in G \quad F(x_0, y_0, y'_0) = 0 \quad F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0$

$\implies$ в некоторой окрестности точки $x_0 \exists!$ решение задачи Коши.

$$F(x, y, y') = 0 \quad y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y'_0$$

Определение 28. Решение φ на (a, b) уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется <u>особым</u>, если $\forall x_0 \in (a, b) \quad \exists \psi$ – решение

$$F(x, y, y') = 0 \quad y(x_0) = \varphi(x_0) \quad y'(x_0) = \varphi^{-1}(x_0)$$

, отличающееся от φ в $\forall$ сколь-угодно малой окрестности x_0

Определение 29. Множество $D = \left\{(x, y) | \exists y' \in \mathbb{R} \quad F(x, y, y') = 0 \text{ и } F'_{y'}(x, y, y') = 0\right\}$ называется дискриминанной кривой

Алгоритм нахождения особого решения:

1. найти общий интеграл
2. Найти дискриминантную кривую D, исключив y' из системы $\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ F'_y(x, y, y') = 0 \end{cases}$
3. Найти интегральные кривые, проходящие внутри.
4. Проверить найденное решение на соответствие определению особого решения

Пример (Продолжение)**.** 1. $y = e^{2x-1} \quad y = Cx - \frac{C}{2} \ln \frac{C}{2}$

2. $\begin{cases} xy' - y - \frac{y'}{2} \ln \frac{y'}{2} = 0 \\ x - \frac{1}{2} \ln \frac{y'}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$

   $\ldots \implies t = e^{2x-1} \implies D = \left\{(x, y) | y = e^{2x-1}\right\}$

3. Интегральная кривая $y = e^{2x-1}$ лежит в D

4. Возьмём $x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad \exists ?C \begin{cases} Cx_0 - \frac{C}{2}\ln\frac{C}{2} = e^{2x_0-1} \\ C = 2e^{2x_0-1} \end{cases} \implies \psi = 2e^{2x_0-1}x - e^{2x_0-1}(2x_0-1)$

   $\psi \not\equiv e^{2x-1}$

0.6 Уравнения высшего порядка

0.6.1 Основные понятия

Определение 30 (Уравнение n-го порядка)**.**

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Определение 31. Функция φ на интервале (a, b) – решение такого уравнения, если:

1. $\varphi \in C^n(a, b)$
2. Подстановка обращает уравнение в тождество

   $$F(x, \varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n)}) \equiv 0$$

   на (a, b)

Определение 32 (Каноническое уравнение n-го порядка)**.**

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{n-1}\right)$$

Определение 33. Задаче Коши для канонического уравнения n-го порядка называют задачу нахождения его решения, удовлетворяющего начальным условиям: $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y\,(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y\,(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$

Числа $\left(x_0, y_0, \ldots, y_0^{n-1}\right)$ – начальные данные

Замечание (Геометрический смысл задачи Коши на уравнениях второго порядка). $\begin{cases} y'' = f\left(x, y, y'\right) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$

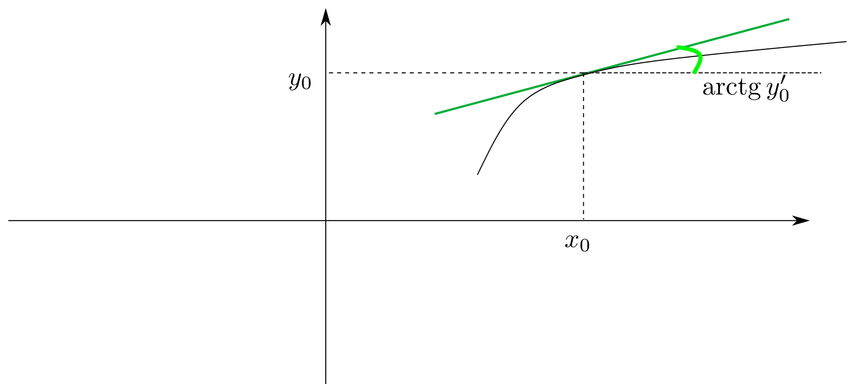

Рис. 6: geokasha

Замечание (Механический смысл). x – координата точки, t – время

$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$

$$\begin{cases} \ddot{x} = f\left(t, x, \dot{x}\right) \\ x\left(t_0\right) = x_0 \\ \dot{x}\left(t_0\right) = v_0 \end{cases}$$

Теорема 8 (Сущетсвование решения Задачи Коши для канонического уравнения n-го порядка). G – область в $\mathbb{R}^{n+1}$ $\quad f \in C(G) \quad \left(x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}\right) \implies$ в некоторой окрестности точки x_0 $\exists$ решение

Теорема 9 (Единственность решения Задачи Коши для канонического уравнения n-го порядка). G – область в $\mathbb{R}^{n+1}_{x,y,y',\ldots,y^{n-1}}$

$f, f'_y, f'_{y'}, \ldots, g'_{y^{(n-1)}} \in C(G) \quad \left(x_0, y_0, \ldots, y_0^{n-1}\right) \in G$

φ_1, φ_2 – решение Задачи Коши на $(a, b) \implies \varphi_1 \equiv \varphi_2$ на (a, b)

Определение 34. Решение φ на (a,b) называется особым, если для любой точки $x_0 \in (a,b)$ найдётся другое решение ψ, т.ч.

$$\psi(x_0) = \varphi(x_0) \quad \psi'(x_0) = \varphi'(x_0), \dots, \psi^{(n-1)}(x_0) = \varphi^{n-1}(x_0)$$

, при этом $\varphi \neq \psi$ в любой сколько угодно малой окрестности x_0

0.6.2 Методы понижения

1. $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)} = 0$ (нет $y, y', \dots, y^{(k-1)}$)

   Простейший случай $y^{(n)} = f(x) \quad \left(y^{(n-1)}\right)' = f(x) \implies y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C$

   Пример.

   $$y'' = \sin x$$

   $$y' = \int \sin x dx + C_1 = -\cos x + C_1 - \text{первый интеграл}$$

   $$y = \int \left(-\cos x + C_1\right) dx + C_2 = -\sin x + C_1 x + C_2 - \text{второй интеграл}$$

   В общем случае делаем замену $z = y^{(k)}$, понижаем порядок уравнения на k единиц

2. $$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

   (нет x) Подстановка $y' = z(y)$ понижает порядок уравнения на 1

   Допустим y – решение такого уравнения и сущесвует $y^{-1} \implies y'(x) = y'\left(y^{-1}\left(y(x)\right)\right)$, т.е. $y'(x) = z(y(x)) \quad z = y' \circ y$

   Получим уравнение, которому удовлетворяет функция z. Далее не пишем x для краткости

   $y' = z(y) \quad y'' = z(y)' = z'(y)y' \implies y^{(3)} = \ldots = z''(y) \cdot z(y)^2 + \left(z'(y)\right)^2 \cdot z(y)$

   $F(y, z(y), z'(y)z(y), z''(y)z(y)^2 + z'(y)^2 z(y)) \equiv 0$ при $x \in (a,b)$ или при $y \in (A,B)$

   Таким образом z – решение уравнения $F(y, z, z'z, z''z^2 + z'^2 z = 0$

   Пример. $y'' + yy' = 0 \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = -2$

   решаем $y'' = -yy'$

т.е. $f(x,y,y') = -yy'$

$f \in C\left(\mathbb{R}^3_{x,y,y'}\right) \implies \forall$ Задачи Коши имеется решение

$f'_y = -y' \quad f'_{y'} = -y$

$f'_y, f'_{y'} \in C\left(\mathbb{R}^3_{x,y,y'}\right) \implies \forall$ Задачи Коши имеет единственно решение

Сделаем подстановку $y' = z(y) \implies y'' = z'(y)y' = z'z \implies z'z + yz = 0 \quad z\left(z' + y\right) = 0$

$z = 0$, т.е. $y' = 0$ не даёт решения Задачи Коши

$\lhd z' = -y \quad z = \int (-y)dy + C = -\frac{y^2}{2} + C_1$

Воспользуемся начальными данными:

$y'(0) = \frac{-y_0^2}{2} + C_1 \quad -2 = -\frac{2^2}{2} + C_1 \implies C_1 = 0$

$y' = -\frac{y^2}{2}$ и $y = 0$ – не решение, $-\int \frac{2dy}{y^2} = \int dx \implies \frac{2}{y} = x + C_2$

начальные данные $\implies \frac{2}{2} = 0 + C_2 \implies C_2 = 1$

$y = \frac{2}{x+1}$

0.6.3

Определение 35.
$$F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$$
– уравнение однородное отночительно $y,\dots,y^{(n)}$, если $\forall t \quad F(x,ty,ty',\dots,ty^{(n)} = t^\alpha F(x,y,y',\dots,y^{(n)})$

Замена $z = \frac{y'}{y}$ понижает порядок уравнения

0.6.4 Уравнение в точных производных

Определение 36. Уравнение $F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$ – уравнение в точных производных, если $\exists \phi = \phi(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}$, что

$$\frac{d}{dx}\phi(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}) = F\left(x,y,y',\dots,y^{(n)}\right)$$

Утверждение 5. Пусть $F(x,y,\dots,y^{(n)})$ – уравнение в точных производных и функция ϕ удовлетворяет определению. Тогда y – решение

$$\iff \exists C: \quad \phi\left(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}\right) = C$$