

Математический анализ, 3 семестр

Коченюк Анатолий

23 января 2022 г.

Глава 1

Анализ нескольких переменных. Функциональные ряды. Теория меры, Криволинейные интегралы.

литература – Виноградов, Виноградов-Громов

1.1 Вспоминаем

$O \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое, $f : O \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^{N+1}(O)$, $N \in \mathbb{N}$

$[a, x]$ – замкнутый отрезок $\subset O$, $a \neq x \implies \exists x \in (a, x) :$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^N \frac{d_a^k f(x-a)}{k!}}_{\text{Тейлоровский многочлен порядка } N} + \frac{d_c^k f(x-a)}{(N+1)!}$$

$T_{N,a,f}$

Определение 1. $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ – пространство мультииндексов

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

$$\alpha! = \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n$$

$$f_{(a)}^{(\alpha)} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_n} x_n \dots \partial^{\alpha_1} x_1}$$

$$h = (h_1, \dots, h_n) \quad d_a^k f(h) = \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha|=k}} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha$$

1.2 Полиномиальная форма Ньютона

$$N \in \mathbb{N} \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$(x_1 + \dots + x_n)^N = \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha|=N}} \frac{N!}{\alpha!} x^\alpha$$

$$\text{Доказательство. } p(x) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^N$$

$$p'_{x_1} = N(x_1 + \dots + x_n)^{N-1} = p'_{x_2} = \dots = p'_{x_n}$$

$$p^\alpha = N(N-1) \dots (N-|\alpha|+1) (x_1 + \dots + x_n)^{N-|\alpha|}$$

$$|\alpha| \leq N+1 \implies p^{(\alpha)} \equiv 0$$

$$|\alpha| < N \implies p^{(\alpha)}(0) = 0$$

$$\text{Неноль получается, только если } |\alpha| = N \quad p^{(\alpha)}(0) = N!$$

Если подставить, то получим:

$$\sum \frac{N!}{\alpha!} x^\alpha \quad h = x - a = x - 0 \quad \blacksquare$$

1.3 Оценка однородных многочленов

Определение 2. $\sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha|=N}}^n b_\alpha x^\alpha$ – однородный многочлен степени N

В более широком смысле $b_\alpha \in \mathbb{R}^m$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad p(tx) = t^N p(x)$, т.е. однородный многочлен является однородной функцией.

Утверждение 1. $\square p(x) = \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha| = N}} \frac{N!}{\alpha!} C_\alpha x^\alpha \quad C_\alpha \in \mathbb{R}^m, \square M : \|C_\alpha\| \leq M$

Тогда $\|p(x)\| \leq M (\sqrt{n}\|x\|)^N$

Доказательство. $\|p(x)\| \leq \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha| = N}} \frac{N!}{\alpha!} |x^\alpha| \underbrace{\|C_\alpha\|}_{\leq M} \leq M \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha| = N}} \frac{N!}{\alpha!} \underbrace{|x^\alpha|}_{|x_1|^{\alpha_1} \dots |x_n|^{\alpha_n}} =$

$$M \cdot (|x_1| + \dots + |x_n|)^N \leq M (\sqrt{n}\|x\|)^N$$

$$\sum_{k=1}^n |x_k| \cdot 1 \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n 1} = \|x\| \sqrt{n} - \text{неравенство Коши, что сумма}$$

скалярных произведений меньше произведения норм ■

Формула Тейлора-Лагранжа на отображения буквально не переносится $f \in C^1(O)$ $f(x) - f(a) = d_c f(x - a)$

для отображений нарушается

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} a = 0, \text{ "x" } = 2\pi \quad f(x) - f(a) = 0$$

$$f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Теорема 1. Открытое $O \subseteq \mathbb{R}^n, n, m \in \mathbb{N} \quad N \in \mathbb{Z}_+, f \in C^{N+1}(O \rightarrow \mathbb{R}^m)$

$[a, x] \in O, a \neq x$

Тогда $f(x) - T_{N,a,f}(x)$ – остаточный член, который оценивается так:

$$\|f(x) - T_{N,a,f}(x)\| \leq \frac{1}{(N+1)!} \sup_{x \in (a,x)} \|d_c^{N+1} f(x - a)\|$$

$$\sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha| \leq N}} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x - a)^\alpha$$

1.4 Отступление

$f, g : O \rightarrow \mathbb{R}^m$, дифференцируемые в O

$$d \langle f, g \rangle = \langle df, g \rangle + \langle f, dg \rangle$$

$$d \langle f, g \rangle (h) = \langle df(h), g \rangle + \langle f, dg(h) \rangle$$

$$d^2 \langle f, g \rangle = \langle d^2 f, g \rangle + 2 \langle df, dg \rangle + \langle f, d^2 g \rangle$$

$$d^N \langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^N C_N^k \langle d^k f d^{N-k} g \rangle \text{ (проверка как в одномерном случае)}$$

Тогда, если $v \in \mathbb{R}^m, v = \text{const}$

$$d^N \langle f, v \rangle = \langle d^N f, v \rangle$$

Доказательство теоремы 1. Если $v \in \mathbb{R}^m, v$ – фиксирована

$$g(x) = \langle f(x), v \rangle : O \rightarrow \mathbb{R}, g \in C^{N+1}(O \rightarrow \mathbb{R})$$

$g(x) - T_{N,a,g}(x) = \frac{1}{(N+1)!} d_c^{N+1} g(x-a)$ по уже установленной теореме Тейлора-Лагранжа для функций

$$T_{N,a,g}(x) = \sum_{k=0}^N \frac{\langle d^k f, v \rangle (x-a)}{k!}$$

$$\left\langle f(x) - \sum_{k=0}^N \frac{d^k f(x-a)}{k!}, v \right\rangle = \frac{1}{(N+1)!} \underbrace{\langle d_c^{N+1} f(x-a), v \rangle}_{\leq \|d_c^{N+1} f \dots\| \|v\|}$$

$$|\text{левая часть}| \leq \underbrace{\frac{1}{(N+1)!} \sup_{c \in [a,x]} \|d_c^{N+1} f(x-a)\| \cdot \|v\|}_{\text{не зависит от выбора } v}$$

Если мы возьмём v остаточным членом, то мы получим оценку остаточного члена, не зависящую от v

$$v = f(x) - \sum_{k=0}^N \frac{d^k f(x-a)}{k!}$$

$$\|v\|^2 \leq \frac{1}{(N+1)!} \sup \dots \|v\| \quad (\text{сократили на } \|v\|)$$

$$\|f - T_{N,a,f}\| \leq \frac{1}{(N+1)!} \sup \dots$$

■

1.5 Частный случай: формула конечных приращений

$O \subseteq \mathbb{R}^n, f \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}^m), [a, x] \subseteq O \quad a \neq x$, тогда

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \sup_{c \in [a,x]} \|d_c f\| \|x - a\|$$

Следствие 1. Пусть $f \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}^m)$, где O – открытое множество. Пусть K – выпуклый компакт, $K \subseteq O$. Тогда

$$\forall a, b \in K \quad \|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{c \in K} \|d_c f\| \|b - a\|$$

1.6 Об оценке нормы дифференциала

$$p(x) = \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha| \neq N}} \frac{N!}{\alpha!} C_\alpha x^\alpha \quad \forall \alpha \quad \|C_\alpha\| \leq M$$

$$\|p(x)\| \leq M (\sqrt{n}\|x\|)^N$$

$$d_c^N f = \sum_{\alpha} \frac{N!}{\alpha!} \underbrace{\frac{f^{(\alpha)}}{N!}}_{=C_\alpha} x^\alpha$$

$$M = \max_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ c \in [a, x] \\ |\alpha| = N}} \left\| \frac{f^{(\alpha)}(x)}{N!} \right\| \implies \|d_c^N f(x - a)\| \leq M (\sqrt{n}\|x - a\|)^N$$

Пусть $O \subseteq \mathbb{R}^n$ открыто, $f \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}^m)$

K – компактно в $O \implies f$ липшицево на K , т.е.

$$\exists C \in \mathbb{R} : \|f(x') - f(x'')\| \leq C\|x' - x''\| \quad \forall x', x'' \in K$$

Следует из формулы конечных приращений и оценки дифференциала и теоремы Вейерштрасса: $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \in C(K)$

$$\implies \exists x_1 : \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right\| \leq C_1 \forall x \in K$$

$$M = C_1, \implies \forall x', x'' \in K \quad \|d_c f(x' - x'')\| \leq M (\sqrt{n}\|x' - x''\|) \quad C = M\sqrt{n}$$

1.7 Экстремум функции нескольких переменных

Определение 3. $\square O \subseteq \mathbb{R}^n \quad f : O \rightarrow \mathbb{R}$

$a \in O$ называется точкой (локального) максимума, если \exists окрестность $V_a : \forall x \in V_a \cap O \quad f(x) \leq f(a)$

Экстремум – максимум или минимум

Утверждение 2 (Необходимое условие экстремума (безусловного)).

Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^n \quad f$, такое что $E \rightarrow \mathbb{R}$. $a \in \text{Int } E$ – точка локального экстремума для f , f дифференцируема в точке a . Тогда

$$d_a f = 0 \left(\iff \nabla f = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0 \right)$$

Доказательство. Пусть a — точка максимума. Фиксируем $h \in \mathbb{R}^n \quad g(t) = f(a+th), t \in \mathbb{R}$. Для g точка 0 это точка максимума. Существует окрестность

нуля $V'(0) : \forall t \in V'(0) \quad g(t) \geq g(0) = f(a)$, g дифференцируема в 0 как композиция, 0 – внутренний для $D(g) \implies g'(0) = 0$.

$$g(t) = f(\varphi(t)).$$

$$g'(t) = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

$$0 = \langle \nabla f, h \rangle = (f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n}) \begin{pmatrix} h_1 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

1.8 Квадратичные формы

Если $Q(x)$ допускает представление в виде $Q(x) \equiv \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_i x_j$, $c_{i,j} \in \mathbb{R}$. Тогда $Q(x)$ называется квадратичной формой в \mathbb{R}^n .

Замечание. Любая квадратичная форма есть однородная функция степени 2.

Замечание. Не умаляя общности, матрицу коэффициентов c_{ij} можно считать симметричной. Если это не так, можно перейти в такой форме $c'_{ij} = \frac{c_{ij} + c_{ji}}{2}$.

Определение 4. Квадратичная форма $Q(x)$ в \mathbb{R}^n называется положительно-определённой (положительной) ($Q > 0$), если

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad Q(x) > 0.$$

неотрицательно определённой, если неравенство нестрогое.

$$Q \geq 0 \quad \dots \quad Q < 0, Q \leq 0$$

неопределённая, если $Q \geq 0 \quad \exists x^1 x^2 \in \mathbb{R}^n : Q(x^1) > 0, Q(x^2) < 0$

Пример. 1. $n = 2 \quad Q(x) = 2x_1^2 - 3x_2^2 \geq 0$

$$Q(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 > 0$$

$$Q(x) = Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2, \text{ если } B^2 - AC, \text{ то форма знакопеременная}$$

$$\text{Если } A \geq 0 \quad B^2 - AC \leq 0, \text{ то } Q \geq 0$$

$$A \leq 0 \dots$$

Лемма 1. $\square \quad Q(x)$ – положительная квадратичная форма в \mathbb{R}^n

$$\text{Тогда } \exists \gamma > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \quad Q(x) \geq \gamma \|x\|^2$$

Доказательство. $\gamma = \min_{\|x\|=1} Q(x) = Q(x_0) > 0 \quad \|x_0\| = 1$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad Q(x) = Q\left(\|x\| \frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\|^2 \cdot Q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq \gamma \|x\|^2 \quad \blacksquare$$

Утверждение 3 (Достаточное условие экстремума). $\square f : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \in \text{Int } E, d_a f = 0 \quad \exists d_a^2 f$

Тогда, если $d_a^2 f > 0$ (положительная квадратичная форма как функция дифференциалов dx_1, \dots, dx_n), то a это точка минимума (строгого)

Если $d_a^2 f < 0 \dots$

Если $d_a^2 f \geq 0$, то a не точка экстремума

Это не все случаи, есть нестрогие, в которых ДУЭ не применимо

Пример. $f(x, y) = x^4 - y^4$

$$g(x, y) = x^4 + y^4$$

для f точка $(0, 0)$ не точка экстремума, а для g — да

$$\nabla f = (4x^3, -4y^3) = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$$

Доказательство. ДУЭ. Пеано в точке a :

$$f(x) = f(a) + d_a f(x - a) + \frac{1}{2} d_a^2 f(x - a) + o(\|x - a\|^2)$$

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2} d_a^2 f(x - a) + \underbrace{\varepsilon(x)}_{\rightarrow 0, x \rightarrow a} \|x - a\|$$

Если $Q > 0$, то по лемме $\exists \gamma > 0 : Q(x - a) \geq \gamma \|x - a\|^2$

Т.к. $\varepsilon(x) \rightarrow 0, x \rightarrow a$, то $\exists V(a) : |\varepsilon(x)| < \frac{\gamma}{8} \forall x \in V(a) \implies \forall x \in V(a) \quad f(x) - f(a) \geq \frac{1}{2} \gamma \|x - a\|^2 - \frac{\gamma}{8} \|x - a\|^2 = \|x - a\|^2 \left(\frac{3}{8} \gamma\right) > 0 \quad x \neq a \implies a - \text{точка строгого минимума}$

$Q < 0$, рассмотреть $-f$

$$Q \geq 0 \implies \exists h_+, h_- \in \mathbb{R}^n : Q(h_+) > 0 \quad Q(h_-) < 0, \text{ не умаляя общности } \|h_+\| = \|h_-\| = 1$$

$$\delta = \min\{|Q(h_+)|, |Q(h_-)|\}$$

Т.к. $\varepsilon(x) \rightarrow 0, x \rightarrow a$, то \exists окрестность $V_r(a) : |\varepsilon(x)| < \frac{\delta}{4}$

$$|t| < r \quad f(a + th_+) - f(a) = \frac{1}{2} t^2 Q(h_+) + \varepsilon(x) t^2 \geq \frac{1}{2} t^2 \cdot \delta - \frac{\delta}{4} t^2 = t^2 \frac{\delta}{4} > 0$$

$$|Q(h_-)| \geq \delta$$

$$Q(h_-) = -|Q(h_-)| \leq -\delta$$

$$f(a + th_-) - f(a) \leq -\frac{\delta}{2} t^2 + \frac{\delta}{4} t^2 \leq -\frac{\delta}{4} t^2 < 0$$

Таким образом в любой окрестности точки a $f(x) - f(a)$ знакопеременная

■

1.9 Практика. Теорема о существовании

Теорема 2 (Теорема о неявной функции). $F(x, y, z) = 0$

$(x_0, y_0, z_0) : F(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ и все функции непрерывны в (x_0, y_0, z_0)

$\implies \exists z = z(x, y) \quad z_0 = z(x_0, y_0) \quad F(x, y, z(x, y)) = 0$ в окрестности (x_0, y_0)

Пример. $x^2 + y^2 - 1 = 0$

$$F(x, y) \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$F'_y = 2y \quad F'_y(x_0, y_0) = \sqrt{2} \neq 0$$

$$y = y(x) \quad y_0 = y(x_0) \quad x^2 + y^2(x) - 1 = 0$$

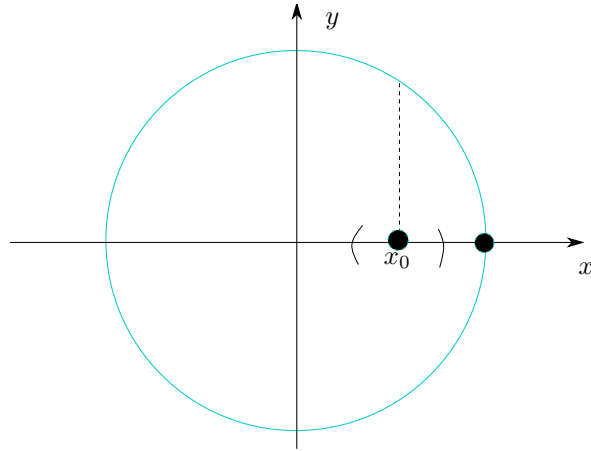


Рис. 1.1: exex

$F(x, y, z)$ И все условия выполняются. как найти $\frac{\partial}{\partial x} z(x, y)$

$$F(x, y, z(x, y)) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y, z(x, y)) = 0$$

$$\begin{cases} F'_x + F'_z \cdot \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 0 \\ F'_y + F'_z \cdot \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Отсюда выражается

Определение 5. Многозначная функция f – соответствие $x \mapsto f(x)$ – множество

Пример. $x \mapsto \pm\sqrt{1-x^2} = \{\sqrt{1-x^2}, -\sqrt{1-x^2}\}$

$x^{\frac{1}{2}} = y$ $x = y^2$ – задаёт неявную функцию $y(x)$

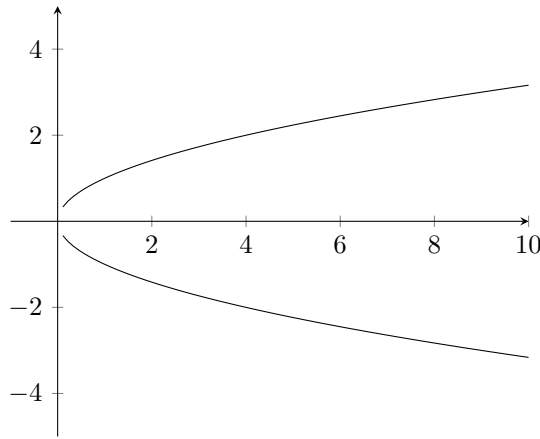


Рис. 1.2: $x = y^2$

Пусть $y(x)$ – многозначная функция. Тогда выбор единственного $y \in y(x)$ для $\forall x$ задаёт явную функцию (однозначная функция)

Каждый такой выбор задаёт однозначную функцию называемую ветвью. Ветви могут быть непрерывными, например в $x = y^2$ бесконечность ветвей. Чтобы уточнить, нужно проговаривать непрерывная ветвь, дифференцируемая ветвь и т.д.

Пример. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$

Задаёт многозначную функцию. Определить для каких x она будет 1-, 2-, 3-, 4-значной

1.10 Лекция 2

$$d_a^2 f \longleftrightarrow \begin{pmatrix} f''_{x_1 x_1}(a) & f''_{x_1 x_2}(a) & f''_{x_1 x_3}(a) & \dots \\ f''_{x_2 x_1}(a) & f''_{x_2 x_2}(a) & f''_{x_2 x_3}(a) & \dots \\ f''_{x_3 x_1}(a) & f''_{x_3 x_2}(a) & f''_{x_3 x_3}(a) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Теорема 3 (Критерий Сильвестра). • Если все главные миноры положительны, то соответствующая квадратичная форма положительна (a – точка минимума).

- Если $\Delta_1 < 0$ $\Delta_2 > 0$ $\Delta_3 < 0 \dots$, то квадратичная форма отрицательна (a – точка максимума)
- $\Delta_k \neq 0$, и не реализуется ни первый случай, ни второй, то квадратичная форма неопределённая (т.е. экстремума нет)

Замечание. $Q(h) = d_a^2 f(h)$. $Q(h) = \langle A \cdot h, h \rangle$ $A = \left(f''_{x_i x_j} \right)_{ij}$

Задача 1. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ – исследовать на экстремум

Доказательство. Необходимое условие экстремума $z'_x = 0$ $z'_y = 0$.

$$z'_x = 2x - y - 2 \quad z'_y = -x + 2y + 1$$

$(x, y) = (1, 0)$, других нет, потому что определитель хороший.

Достаточное условие экстремума: $z''_{xx} = 2$, $z''_{xy} = -1$, $z''_{yy} = 2$. $\left[d^2_{(1,0)} f \right] \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$\Delta_1 = 2 > 0$ $\Delta_2 = 2 * 2 - (-1)^2 = 3 > 0$, таким образом $(1, 0)$ – строгий минимум. ■

Замечание. $d^2_{(1,0)} f = 2dx^2 + 2(-1)dx dy + 2dy^2 = dx^2 + dy^2 + (dx - dy)^2 > 0$, если $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$d^2 f > 0$$

Задача 2 (без привлечения $d^2 f$). $z = x^2 y^3 (6 - x - y)$ – исследовать на экстремум.

$$\begin{cases} 0 = z'_x = y^3(6x^2 - x^3 - yx^2)'_x = y^3(12x - 3x^2 - 2yx) = xy^3(12 - 3x - 2y) \\ 0 = z'_y = x^2(6y^3 - xy^3 - y^4)'_y = x^2(18y^2 - 3xy^2 - 4y^3) = x^2y^2(18 - 3x - 4y) \end{cases}$$

$$\text{Либо } x = 0, \text{ либо } y = 0, \text{ либо } \begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases} - (2, 3).$$

$\{(0, t)\}_{\{t < 0\} \cup \{t > 6\}}$ – максимум (нестрогий)

$\{(0, t)\}_{\{t \in (0, 6)\}}$ – максимум (нестрогий)

$(0, 6)$ – не экстремум

$\triangleleft K = \{(x, y) | x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad x + y \leq 6\}$ – компакт

По теореме Больцано-Вейерштрасса существует $(x_{\pm}, y_{\pm}) \in K$

$$f(x_+, y_+) = \max_K f$$

$$f(x_-, y_-) = \min_K f$$

из распределения знаков следует, что точки границы – точки минимума. Тогда $(x_+, y_+) \in \text{Int } K$, значит (x_+, y_+) удовлетворяет необходимому условию экстремума. Такая точка у нас одна – $(x_+, y_+) = (2, 3)$.

1.11 Экстремумы и замена переменных

Определение точки экстремума непосредственно переносится на случай метрических пространств

Лемма 2. Пусть $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ – метрические пространства и $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть $g(b) = a$ – g непрерывна в точке b . a – точка максимума (минимума) для f . Тогда b – точка максимума (минимума) для $f \circ g$.

Доказательство. По условию a – точка локального максимума, т.е. существует окрестность $U(a) \subseteq X$: $f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in U(a)$. По определению непрерывности существует окрестность $V(b) \subseteq Y$:

$$g(y) \in U(a) \quad \forall y \in V(b) \implies f(g(y)) \leq f(a) = f(g(b)).$$

■

Следствие 2. Если в условии леммы g – гомеоморфизм X на Y , то a – точка максимума (минимума) для $f \circ g$.

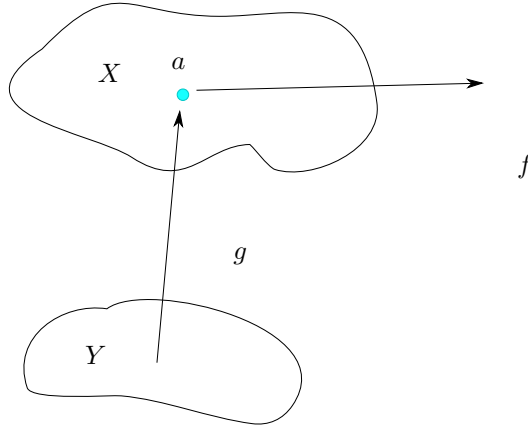


Рис. 1.3: kartinkalemmi

Следствие 3. Если g – локальный гомеоморфизм (существует окрестность $V(b)$, такая что в точке b сужение $g|_{V(b)}$ – гомеоморфизм на образ $(g(V(b)))$), то сохраняется вывод предыдущего следствия.

Задача 3. $z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ ($a, b > 0$) – исследовать на экстремум.

Доказательство. $z(x, y) = -z(-x, y) = -z(x, -y)$

z – нечётная по x и по y . Значит достаточно рассматривать функцию только в первой четверти.

$$\begin{cases} x = a\rho \cos \alpha \\ y = b\rho \sin \alpha \end{cases}$$

$$(\rho, \varphi) \rightarrow (x, y)$$

$$(0, 1) \times (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \text{Int } K - \text{гомеоморфизм} \left(\varphi = \arctg \frac{y}{x} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

$$z(\rho, \varphi) = ab\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi \sqrt{1 - \rho^2} \stackrel{\rho^2=t}{=} \frac{ab}{2} \sin 2\varphi \cdot \sqrt{1-t}$$

$$\text{Необходимое условие экстремума: } \begin{cases} \frac{2}{ab} z'_\varphi = 0 = 2 \cos 2\varphi \cdot t \sqrt{1-t} \\ \frac{2}{ab} z'_t = 0 = \sin 2\varphi \left(\sqrt{1-t} - \frac{1}{2} \frac{t}{\sqrt{1-t}} \right) = \frac{\sin 2\varphi (2(1-t)-t)}{2\sqrt{1-t}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2\varphi \cdot t\sqrt{1-t} = 0 \\ \sin 2\varphi \cdot \frac{(2-3t)}{\sqrt{1-t}} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos 2\varphi = 0 & \varphi \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 3t = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{4} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = a \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}b}{9} \\ y = b \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}b}{9} \end{cases}$$

■

Задача 4. $f : \underbrace{O}_{\subseteq \mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}$

$$E = \{\varphi_1(x) = 0, \dots, \varphi_n(x) = 0\}$$

Исследование f_E на экстремум называется задачей об условном экстремуме

Пример. $f(x, y) = x + y \quad E = \{x + 2y = 1\}$

Доказательство. $x = 1 - 2y$

$$f = 1 - 2y + y = 1 - y$$

$$\tilde{f}(x, y) = x^2 + y^2 \quad E = \{x + y = 1\}$$

■

Пример. $f = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \quad E = \{x^2 + y^2 = 1\}$

$$\begin{cases} x = \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{cases}$$

1.12 Дифференцирование обратного отображения

$$x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = y$$

$$x \in \mathbb{R}^n \quad y \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = y \quad A \cdot x = y, \quad A = [f] - \text{линейна}$$

$$f(x) = y \text{ имеет единственное решение } \forall y \in \mathbb{R}^n \iff \det A \neq 0$$

Теорема 4 (об обратной функции для случая одной переменной). $f : (A, B) \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^1((A, B)), a \in (A, B), f'(a) \neq 0$, тогда существует окрестность $V(a)$:

1. $\forall x \in V(a) \quad f'(x) \neq 0$ – локальная новорожденность производной
2. $f|_{(A, B)}$ – инъекция. – локальная обратимость
3. $f(V(a))$ – откp. – локальная открытость отображения
4. $(f|_{V(a)})^{-1}$ дифференцируема в точке $f(a)$ и $\left((f|_{V(a)})^{-1}\right)' = \frac{1}{f'(a)}$
– дифференцируемость локально обратного

Определение 6. $f : (X, \Omega_X) \rightarrow (Y, \Omega_Y)$

Если для любого $O \in \Omega_X \quad f(O) \in \Omega_Y$, то f называется открытым отображением

Пример. $f(x) = x^2$ не открытое на $(-1, 1) \rightarrow [0, 1)$, но открыто на $(-1, 0) \cup (0, 1)$, потому что нет точек, где $f'(x) = 0$

доказательство теоремы. По следствию теоремы Дарбу, если $f'(a) > 0 (< 0)$, то существует окрестность $V(a) : \forall x \in V(a) \quad f'(x) > 0 (< 0)$

$\square f'(x) > 0$ всюду на $V(a)$, то f строго возрастает, значит $f|_{V(a)}$ – инъекция

$V(a) = (a - \delta, a + \delta) \implies f(a - \delta, a + \delta) = (f(a - \delta), f(a + \delta))$

4 \Leftarrow теоремы о дифференцируемости обратимой функции ■

Теорема 5 (об обратном отображении). Пусть $\underbrace{O}_{\text{открытое}} \subseteq \mathbb{R}^n \quad f : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\forall x \in O \quad d_x f$ – обратим (якобиан не обращается в ноль в O)
Тогда f – открытое отображение

Доказательство. См. доказательства утверждения 3 в теореме о дифференцировании обратного отображения в книжке Виноградов-Громов. ■

Теорема 6 (теорема об обратном отображении). $n \in \mathbb{N}$, O – открытое, $O \subseteq \mathbb{R}^n$

$f \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}^n)$ $a \in O$. Пусть $d_a f$ обратим ($\iff \mathcal{J}_a f \neq 0$), тогда существует окрестность $V(a)$:

1. $\forall x \in V(a)$ $d_x f$ обратим – локальная новорожденность производной
2. $f|_{(A,B)}$ – инъекция. – локальная обратимость
3. $f(V(a))$ – откp. – локальная открытость отображения
4. $(f|_{V(a)})^{-1}$ дифференцируема в точке $f(a)$ и $d_{f(a)}(f|_{V(a)})^{-1} = (d_a f)^{-1}$ – дифференцируемость локально обратного

Лемма 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $O \subseteq \mathbb{R}^n$ открыто, $f : O \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(O)$, $a \in O$ и $d_a f$ обратим. Тогда $\forall \sigma > 0$ существует окрестность $V(a)$:

1. $\forall x \in V(a)$

$$\|d_x f - d_a f\| < \sigma$$

2. $\forall p, q \in V(a)$

$$\|f(p) - f(q) - d_a f(p - q)\| \leq C_1 \|p - q\|$$

3. $\forall p, q \in V(a)$

$$C_3 \|p - q\| \leq \|f(p) - f(q)\| \leq C_2 \|p - q\|$$

, такое свойство называется билипшецевость.

Здесь конкретно $C_2 = \|d_a f\| + \sigma$ $C_3 = \frac{1}{\|(d_a f)^{-1}\|} - \sigma$

Доказательство. $f \in C^1(a) \implies$ существует окрестность $V(a)$: 1 верно

$$\triangleleft F(x) = f(x) - d_a f(x) : O \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$d_x F(h) = d_x f(h) - d_a f(h), \quad F \in C^1(O)$$

$$\|f(p) - f(q) - d_a f(p - q)\| = \|F(p) - F(q)\| \leq \underbrace{\sup_{c \in V(a)} \|d_c F\|}_{\leq \sigma} \text{ по теореме о}$$

конечных приращениях, т.к. $V(a)$ выпуклое

$$\|d_c F\| = \underbrace{\|d_c f - d_a f\|}_{< \sigma}$$

$$\forall p, q \in V(a)$$

$$\|f(p) - f(q)\| \leq \sup_{c \in V(a)} \|d_c f\| \|p - q\|$$

$$\|d_c f\| = \|d_a f + (d_c f - d_a f)\| \leq \|d_a f\| + \underbrace{\|d_c f - d_a f\|}_{< \sigma \text{ в силу 1}} \leq C_2$$

$$\|f(p) - f(q)\| = \|d_a f(p - q) - (f(p) - f(q) - d_a f(p - q))\| \geq \underbrace{\|d_a f(p - q)\|}_{\geq \frac{1}{\|(d_a f)^{-1}\|} \|p - q\|} - \underbrace{\|f(p) - f(q) - d_a f(p - q)\|}_{\leq C_1 \|p - q\|}$$

$$C_3 \|p - q\|$$

■

доказательство (часть) теоремы об обратном отображении. Существует $(d_x f)^{-1} \iff \mathcal{J}f \neq 0$, но $\mathcal{J}f \in C(O \rightarrow \mathbb{R})$ по непрерывности \implies существует окрестность $V(a) : \forall x \in V(a) \quad \mathcal{J}_x f \neq 0 \implies 1$

$$C_0 = \frac{1}{\|(d_a f)^{-1}\|}, \quad \sigma = \frac{C_0}{4}, \text{ применим лемму к такому } \sigma$$

Не умаляя общности $V(a) \subseteq V_0(a)$. Т.к. $\sigma < C_0 \quad \forall p, q \in V(a)$ в силу неравенства 3 из леммы $f(p) \neq f(q)$ ($f|_{V(a)}$ – инъекция. $\implies f|_{V(a)}$ – биекция на $f(V(a))$, т.е. $g = f|_{V(a)}$ обратимо и 4 \iff правило дифференцирования обратного отображения

■

1.13 Практика

Теорема 7. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дифференцируема в точке P
 f достигает экстремума в точке $P \implies \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = 0$

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 f$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Теорема 8. Если $H(f)$ положительно определена в точке P , то P – точка минимума. Если она отрицательно определена, то это точка максимума.

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} (dx_1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \dots = \lambda_1 (dy_1)^2 + \dots + \lambda_n (dy_n)^2$$

$$f(dx_1 \dots dx_n) = f(0) + \underbrace{0}_{f'(0)} dx + d^2 f + o()$$

$$f(dx_1 \dots dx_n) - f(0) = d^2 f + o()$$

$$x^T A x > 0 \forall x \neq 0 \iff \widehat{def}$$

$$(x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} \sum a_{1i} x_i \\ \sum a_{2i} x_i \\ \vdots \\ \sum a_{ni} x_i \end{pmatrix} = \sum a_{ji} x_j x_i$$

– квадратичная форма

Пусть Q – квадратичная форма. $Q = \sum a_{ji} x_j x_i$, где $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$ $Q = x^T A x$, где $A^T = A$

Такая матрица A называется матрицей квадратичной формы Q

$$x = C y \quad Q = (C y)^T A C y = y^T \underbrace{(C^T A C)}_B y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Утверждение 4. Симметричная матрица подобна диагональной матрице.

Доказательство. $A = A^T$

Пример. $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Докажем, что существует собственный вектор.

Пусть $Q = x^T A x = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j$

Рассмотрим Q на сфере $x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0$

Q дифференцируема на сфере \implies достигает максимума в точке (v_1, \dots, v_n)

Q , максимум с ограничением $F = 0$, то $\mathcal{L} := Q - \lambda F$

У \mathcal{L} частные производные равны 0 в максимуме

$$\frac{\partial}{\partial x_i} Q = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j a_{ij} x_i x_j + \sum_{k \neq i} a_{kj} x_k x_j \right) = \sum_j a_{ij} x_j + \sum_j a_{ji} x_j = 2 \sum_j a_{ij} x_j$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 2x_i \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{L} = 2 \sum_j a_{ij} x_j - \lambda 2x_i = 0 \forall i \text{ для } x_j = v_j$$

$Av = \lambda v \implies v$ – вещественный собственный вектор

Так мы для симметричной матрицы нашли вещественный собственный вектор

2. Построим наш вектор v до базиса $(v, e_2, e_3, \dots, e_n)$

Запишем A в этом базисе: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$. Далее делаем по индукции

Следовательно существует базис из собственных векторов, где на диагонали стоят собственные числа

Итого, любую квадратичную форму Q можно заменой переменных свести к каноническому виду $Q = \sum_i \lambda_i y_i^2$ ■

1.14 Лекция

Макаров, Подкорытов: Гладкие отображения и функции

Теорема 9 (Об открытом отображении). $\square O \subseteq \mathbb{R}^n$ – открыток, $f \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $\forall a \in O$ $d_a f$ обратим. Тогда $f(O)$ – открыто.

Пример. $x = (x_1, \dots, x_n)$ $f(x) = x_1$ – необратимое, схлопывает шар и там нет открытости

Доказательство. $\square \sigma$: в лемме: $C_3 > 0, \sigma = \frac{1}{2} \frac{1}{\|(d_a f)^{-1}\|}$

δ – это половины от “ δ из леммы”

$$\|f(p) - f(q)\| \geq C_3 \|p - q\| \quad \forall p, q \in B_\delta[a]$$

$$r = \frac{1}{2} C_3 \cdot \delta \quad ? : B_r(b) \subset f(O) \iff \forall y \in B_r(b) \exists x \in O : f(x) = y$$

$$\varphi(x) = \|f(x) - y\| \in C^*(O \rightarrow \mathbb{R})$$

$$\varphi(a) = \|f(a) - y\| = \|b - y\| \leq r$$

$$\begin{aligned} \text{Если } \|x - a\| = \delta, \text{ то } \varphi(x) = \|f(x) - b\| &= \|f(x) - f(a) + f(a) - y\| \geq \\ \underbrace{\|f(x) - f(a)\|}_{\geq C_3 \|x - a\| = 2r} - \underbrace{\|f(a) - y\|}_{< r} &> 2r - r = r \end{aligned}$$

По теореме Вейерштрасса $\varphi(x)$ достигает на $B_\delta[a]$ своего минимума

Из оценки $\varphi(x)$ следует, что $\min_{B_\delta[a]} \varphi$ Достигается внутри шара

$\psi(x) = \varphi^2(x) = \|f(x) - y\|^2$. У функции $\psi(x)$ экстремумы в тех же точках, что и у $\varphi(x)$

Необходимое условие экстремума $\exists x_* \in B_\delta(a) : f_{x_*} \psi = 0$

$$\varphi(x) = \langle f(x) - y, f(x) - y \rangle$$

$$d\psi_{x_*} = 2 \left\langle \underbrace{d(f(x) - y)}_{d_{x_*} f}, f(x) - y \right\rangle$$

Т.к. df обратим в $B_\delta(a) \implies f(x_*) - y = 0 \implies f(x_*) = y_0$

■

Теорема 10 (теорема об обратном отображении). \square открытое $O \subseteq \mathbb{R}^n$ $f \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $a \in O$, $d_a f$ обратим

Тогда существует окрестность $V(a)$:

I $\forall x \in V(a)$ $d_x f$ обратим

II $f_{V(a)}$ — инъектив (т.е. обратимо как отображение из $V(a)$ в $f(V(a))$)

III $f(V(a))$ — открыто

IV $(f_{V(a)})^{-1} \in C^1(f(V(a)) \rightarrow \mathbb{R}^n)$

$$(f|_{V(a)})'(f(a)) = (f')(a) \text{ (или } d(f_{V(a)})^{-1} = (d_a f)^{-1})$$

$$\|B - A\| < \varepsilon \quad \|B^{-1} - A^{-1}\| < \varepsilon C(A)$$

$$\|(d_a f)^{-1} - (d_x f)^{-1}\| < \varepsilon C \cdot (d_a f) \implies (d_x f)^{-1} \text{ непрерывно зависит от } x$$

второе объяснение: элементы матрицы $(d_x f)^{-1}$ — результат арифметических действий над частными производными отображения f ; $f \in C^1(O) \implies$ элементы $[(d_x f)^{-1}] \in C(0)$

По аналогичным рассуждениям, если в условии теоремы $f \in C^r(O \rightarrow \mathbb{R})$, то локально обратное также из C^r

Определение 7. \square $r \in \mathbb{Z}_+$ $O \subseteq \mathbb{R}^n$, O — открытое, $f \in C^r(O \rightarrow \mathbb{R}^n)$

f называется диффеоморфизмом класса C^r , если:

1. f — биекция на $f(O)$
2. $f(O)$ — открытое
3. обратное отображение $f^{-1} \in C^r(f(O) \rightarrow O)$

Определение 8. $r, O \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in O$ f называется локальным диффеоморфизмом в точке a , если существует такая окрестность $V(a)$, что $f_{V(a)}$ — гомеоморфизм

Пример. $y = e^x$ – диффеоморфизм (глобальный)

$y = x^2$ – локальный диффеоморфизм отдельно либо на положительных, либо на отрицательных числах

$y = \sin x$ – локальный диффеоморфизм в точках не вида $\frac{\pi}{2} + \pi k$

Теорема 11 (Об обратном отображении “на языке диффеоморфизмов”). Открытое $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in C^r$ ($O \rightarrow \mathbb{R}^n$)

1. Если $a \in O$ $d_a f$ обратим, тогда f локальный диффеоморфизм в точке a класса C^r
2. Если f – инъекция и $d_a x f$ Обратим всюду в O , то f – глобальный диффеоморфизм

Пример. $f(x, y) = \begin{pmatrix} e^y \cos x \\ e^y \sin x \end{pmatrix}$

$$f' = \begin{pmatrix} -\sin x e^y & e^y \cos x \\ \cos x e^y & e^y \sin x \end{pmatrix}$$

$$\det f' = e^{2y}(-1) \neq 0$$

$$f(0, y) = f(2\pi k)$$

В каждой точке невырожденный дифференциал, но глобальной инъективности нет

Пример (Важные примеры локальных диффеоморфизмов). 1. Полярные координаты $\phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$

$$\phi : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\phi' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$\det \phi = \cos \varphi \cdot r \cos \varphi - \sin \varphi (-r \sin \varphi) = r > 0$ в O , значит ϕ – локальный диффеоморфизм в O класса C^∞

но не глобальный! $\phi(r, \varphi + 2\pi k) \equiv \phi(r, \varphi)$

$O_1 = (0, +\infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ϕ – инъекция в $O_1 \implies \phi$ глобальный диффеоморфизм в O_1

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}$$

2. Цилиндрические координаты.

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad z = t$$

$$\phi' = \begin{pmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_t \\ \nabla y \\ \nabla z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r$$

Таким образом ϕ – локальный диффеоморфизм в области $(0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

глобальный диффеоморфизм в областях $(0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \times x\mathbb{R}$ И $(0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$

$$x^2 + y^2 = R \quad r = |R|$$

$$x^2 + y^2 = z^2 C \leftrightarrow r^2 = Ct^2 \quad \pm r = \tilde{C} = t$$

3. Сферические координаты

меряем широту и долготу.
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi \\ y = r \sin \varphi \cos \psi \\ z = r \sin \psi \end{cases}$$

$$(r, \varphi, \psi) \rightarrow (x, y, z) \quad C^\infty : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_3$$

$$|\psi| = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \cos \psi & -r \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi & r \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & r \cos \psi \end{pmatrix} = r^2 \cos \psi \begin{pmatrix} \sin^2 \psi \begin{pmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi \end{pmatrix} + \cos^2 \psi \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

ϕ локальный диффеоморфизм в $(0, +\infty) \times \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

глобальный в $(0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \leftrightarrow r = R$$

Задача 5. Записать уравнение сферы $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R$ в сферических координатах

$x^2 + y^2 = Cz^2$ тоже.

Задача 6. В области $x > 0, y > 0$ $u = \frac{y}{x} \quad v = xy$

$$\psi : (x, y) \rightarrow (u, v)$$

Вопросы:

(а) $\psi(O) = ?$

(b) является ли ψ диффеоморфизмом или локальным диффеоморфизмом

(с) Выписать явно функции для обратного к ψ или локально обратного

1.15 Теорема о неявном отображении

Если у нас есть явное выражение $x = g(y)$, то можно явно исследовать функцию от одной переменной $f_E = f(h(y), y)$

Определение 9. Говорят, что уравнение $f(x, y) = 0$ неявно задаёт функцию $y = g(x)$ или $x = h(y)$, если условия $F(x, y) = 0$ и $\begin{cases} x \in D(g) \\ y = g(x) \end{cases}$ равносильны.

Определение 10. $F : E \rightarrow \mathbb{R} \quad D \subseteq E$
 F задаёт $y = g(x)$ или $x = h(y)$ в D , если

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ (x, y) \in D \end{cases} \iff \begin{cases} x \in D(g) \\ y = g(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases} \iff F(x, y) = 0 \quad \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_k) \\ y = (y_1, \dots, y_m) \\ F = (F_1, \dots, F_m) \end{cases}$$

$$“y = g(x)” \quad \begin{cases} y_1 = g_1(x_1, \dots, x_k) \\ \vdots \\ y_m = g_m(x_1, \dots, x_k) \end{cases}$$

Теорема 12 (Теорема о неявном отображении). \square O – открытое в \mathbb{R}^{k+m} , $F \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}^k)$

$(a, b) \in O$ ($a = (a_1, \dots, a_k)$, $b = (b_1, \dots, b_k)$) и

1. $F(a, b) = 0$
2. $\det F'_y(a, b) \neq 0$

$$F'_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

Тогда:

I Существует открытое множество $U \times V$ в \mathbb{R}^{k+m} , где U – окрестность a , а V – окрестность b : в $U \times V$ уравнение $F(x, y) = 0$ неявно задаёт единственную функцию $y = g(x)$

II g дифференцируема в точке a

III $g'(x) = - (F'_y(a, b))^{-1} \cdot F'_x(a, b)$

1.16 Практика

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \varphi_1, \dots, \varphi_n$

$$S = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid \begin{cases} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \right\}$$

Задача – найти экстремум f на S

Теорема 13 (Необходимое условие). Пусть для $\left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{array} \right|$

ранга m

$$L := f + \sum \lambda_i \varphi_i$$

Тогда x^* – условный экстремум, если $\begin{cases} \varphi_i(x^*) = 0 \forall i = 1, \dots, m \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 \forall i = 1, \dots, n \end{cases}$

$$f(x) - f(P) = (x - P)^T D^2 f(x - P) + o(\dots)$$

В случае поиска на поверхности, рассматриваем касательные к поверхности, если она гладкая

Теорема 14 (Достаточное условие). Пусть $f, \varphi_i = C_2(x^* \in U)$

$$\sum_k \frac{\partial \varphi_i(x^*)}{\partial x_k} dx_k = 0 \quad \forall i \quad \sum (dx_k)^2 > 0$$

$d^2\Lambda(x^*)$ знакоопределена для dx_k , то x^* – экстремум

Если ≥ 0 , то экстремума нет

1.17 Лекция

Теорема 15 (О неявном отображении). $F(x, y) = \mathbb{O} \iff \begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases}$

$$x = (x_1, \dots, x_k), y = (y_1, \dots, y_m), F = (F_1, \dots, F_m)$$

Если $F \in C^r(O)$, O – открытое в \mathbb{R}^{k+m}

($r \in \mathbb{Z}^+$)

$$1. F(x^0, y^0) = 0$$

$$2. F'_y(x^0, y^0) \text{ – обратима } (\det F'_y \neq 0)$$

Тогда \exists открытое U_{x_0} и V_{y_0} и $g : U_{x_0} \rightarrow V_{y_0}$:

$$\text{I } \begin{cases} (x, y) \in U_{x_0} \times V_{y_0} \\ F(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in U_{x_0} \\ y = g(x) \end{cases}$$

$$\text{II } g \in C^r(U_{x_0})$$

$$\text{III } g'(X) = (F'_y(x, y))^{-1} \cdot F'(x, y)$$

Определение 11 (Уточнение определения функции (отображения), заданной уравнением неявно). $\square D \subseteq \mathbb{R}^k \quad g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ Скажем, что отображение g задаётся уравнением

$$1. F(x^0, y^0) = 0$$

$$2. F'_y(x^0, y^0) \text{ – обратима } (\det F'_y \neq 0)$$

неявно, если

$$F(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in D$$

(аналогично для $x = h(y)$)

Пример. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad a > 0$

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad y = \sqrt{a^2 - x^2 - z^2} \quad \dots$$

$$\begin{cases} z'_x = ? \\ z''_{xy} = ? \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z(x, y) \equiv a^2$$

$$g(x, y) = z(x, y) \quad F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$$

$$F'_z = 2z \neq 0 \iff x^2 + y^2 < a^2$$

$$2(x + z \cdot z'_x) = 0 \implies z'_x = -\frac{x}{z}$$

$$0 + z'_y \cdot z'_x + z \cdot z''_{xy} = 0 \quad z'_y = -\frac{y}{z} \implies z''_{xy} = -\frac{z'_y \cdot z'_x}{z} = -\frac{xy}{z^3} = -\frac{xy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}^3}$$

Примеры нарушения условия 2 теоремы

Пример. $x = y^3 \quad F(x, t) = x - y^3$

$$F'_y = -3y^2 = 0 \quad y = 0$$

Пример. $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$

$$r^4 = r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \quad r = \sqrt{\cos 2\varphi}$$

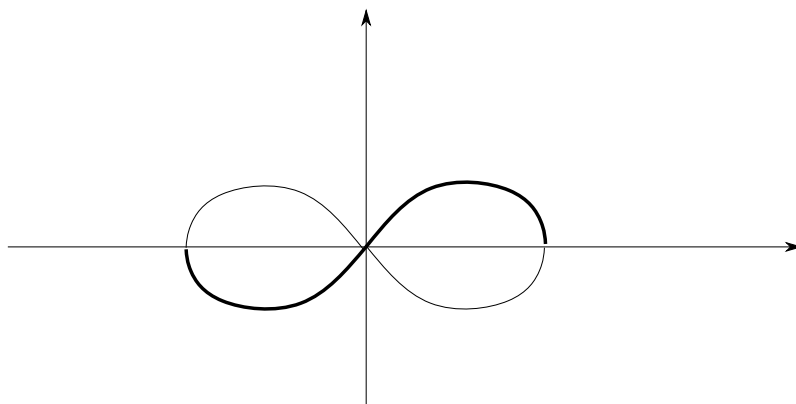


Рис. 1.4: lemniscat

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)$$

$$F'_y = 2(x^2 + y^2) \cdot 2y + 2y = 2y(2(x^2 + y^2) + 1)$$

$$F'_y = 0 \iff y = 0$$

$\int g(x) = y$ – функция, график которой – график F в I-III четвертях

$$\begin{cases} y = r(\varphi) \sin \varphi \\ x = r(\varphi) \cos \varphi \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$x'_\varphi = r' \cos \varphi + r \sin \varphi$$

$$x'(\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (r' + r) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\underbrace{\frac{-\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}}_{\text{не опр. при } \varphi = \frac{\pi}{4}} + \sqrt{\cos 2\varphi} \right)$$

Замечание. Если $f \in C([a, b])$ и $\exists \lim_{x \rightarrow a+} f'(a)$, то $\exists f'(a)$, и $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$

Пример. $y(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

$$\varphi \in (0, \frac{\pi}{4})$$

$$y'_x = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi} = \frac{\left(-\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \cdot \sin \varphi + \sqrt{\cos 2\varphi} \cdot \cos \varphi \right)}{-\frac{\sin \varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \cdot \cos \varphi - \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi} \rightarrow \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \implies$$

$$y'_x(x_{\varphi=\frac{\pi}{4}})$$

$$y'_+(0) = 1$$

1.18 Поверхности в \mathbb{R}^n (k -мерные)

Способы задания поверхности:

1. Поверхность уровня

$$F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\{x \in D(F) : F(x) = C\} - \text{линия уровня } C$$

$$F : D - \text{открытое} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \quad F = (F_1, \dots, F_k), C \in \mathbb{R}^k$$

$$(x \in D(F) : F(x) = C) - \text{поверхность уровня } C$$

Определение 12. $\square f : O \rightarrow \mathbb{R}^m \quad O - \text{открытое в } \mathbb{R}^k \quad k, n \in \mathbb{N}$

f называется регулярным в O , если f Дифференцируема в O и в каждой точке $x \in O \quad f'(x)$ Имеет максимальный ранг ($\text{rang } f'(x) = \min(k, n)$)

Определение 13. $\square C \in \mathbb{R}^m \quad F \in C^r(O \rightarrow \mathbb{R}^m), O$ – открытое в \mathbb{R}^n
 $r \in \mathbb{Z}_+$

F регулярно в O , тогда поверхность уровня C называется r -гладкой
(класса C^r) $n - m$ -мерной поверхностью

Пример. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, a > 0$

$F(x, y, z) = a^2 \quad m = 1 \quad n = 3 \quad F' = (2x, 2y, 2z)$

$S - 3 - 1 = 2$ -мерная поверхность

2 Поверхности-графики

$\square g : D \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m \quad k < n \quad n = k + m$

$\Gamma_g = \{(x, y) : x \in D, y = g(x)\} \in \mathbb{R}^n$

Если D Ограничено в $\mathbb{R}^k \quad g \in C^r(D \rightarrow \mathbb{R}^m)$, то говорят о графике
отображения гладкости r (класса C^r)

Пример. Сфера – объединение бесконечно гладких графиков

3 Параметрическое задание

$\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$

Если D – открытое, $\Phi \in C^r(D)$ и Φ Регулярна в D , то $\Phi(D)$ – k -
мерная поверхность с параметризацией класса C^r (параметризован-
ной поверхности)

Пример. $S \cap \{x > 0, y > 0, z > 0\} = \left\{ (x, y, z) : \begin{array}{l} x = a \cos \varphi \cos \psi \\ y = a \sin \varphi \cos \psi \\ z = a \sin \psi \end{array} \quad \varphi, \psi \in (0, \frac{\pi}{2}) \right\}$

$\Phi : (\varphi, \psi) \rightarrow (x, y, z)$

Теорема 16 (О способах задания гладких поверхностей). $\square r \in \mathbb{Z}_+, m, k \in \mathbb{N} n = m + k$

$S \subseteq \mathbb{R}^n \quad a \in S$. Следующие утверждения равносильны:

1. \exists окрестность $U_a : U_a \cap S$ – k -мерный график класса C^r
2. \exists окрестность $U_a : U_a \cap S$ – k -мерная поверхность уровня класса C^r
3. \exists окрестность $U_a : U_a \cap S$ – k -мерная поверхность класса C^r за-
данная параметрически

Доказательство.

1 \implies 2 $U_a \cap S = \{(x, y) : x \in D \quad y = g(x)\}$ (после перенумерации, если требуется)

$$= \{(x, y) : F(x, y) = 0\} \quad F = y - g(x)$$

F определена на $D \times \mathbb{R}^m$ $F : D \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $F \in C^r(D \times \mathbb{R}^m)$

$F'_y = E_m$ F' содержит E как минор \implies ранг F' максимальный

2 \implies 1 $F(x, y) = C$ $C \in \mathbb{R}^m$ $F : O \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$U_a \cap S = \{(x, y) : (2)\}$$

F' имеет максимальный ранг $= m$. С точностью до нумерации координат можно считать, что $\det F'_y(a) \neq 0$. В некоторой окрестности $\det F'_y(x, y) \neq 0 \implies$ по теореме о неявной функции $y = g(x)$

1 \implies 3 $S \cap U_a = \{(x, g(x)) : x \in D\}$

$$\Phi : x \in D \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow (x, g(x)) \in \mathbb{R}^n$$

$$\Phi' = \begin{bmatrix} & E_k \\ g'_{1x_1} & g'_{1x_k} \end{bmatrix} \implies \text{rang } \Phi' = k \implies \Phi - \text{регулярна в } D$$

3 \implies 1 $S \cap U_a = \{(x, y) = \Phi(u) : u \in D - \text{открытое в } \mathbb{R}^k\}$ $\Phi \in C^r(D)$, $\text{rang } \Phi' = k$ - максимальный

$$\text{Не умаляя общности } \det \Phi'_x \neq 0 \quad \tilde{\Phi}(n) = \begin{bmatrix} \Phi_1(u) \\ \vdots \\ \Phi_k(u) \end{bmatrix} \quad \Phi(n) = \begin{bmatrix} \Phi_1(u) \\ \vdots \\ \Phi_n(u) \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} \nabla \Phi_1 \\ \vdots \\ \nabla \Phi_k \end{bmatrix} \neq 0$$

$$\tilde{\Phi}' = \begin{bmatrix} \nabla \Phi_1 \\ \vdots \\ \nabla \Phi_k \end{bmatrix} - \text{обратима}$$

$$\Psi = \tilde{\Phi}^{-1} \quad \tilde{\Phi} : (u_1, u_2, \dots, u_k) \rightarrow (x_1, \dots, x_k)$$

$$(x, y) = \Phi(u) = \left(\tilde{\Phi}(u), \tilde{\Phi}(u) = (x, \tilde{\Phi}(\Psi(x))) \right) \in C^r \text{ по теореме об обратном отображении} \quad u = \Psi(x) \quad \Phi(u) = \Phi(\Psi(x))$$

Определение 14. r -гладкая k -мерная поверхность – поверхность, для которой справедливо одно из утверждений 1-3 предыдущей теоремы

Пример. $\gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{bmatrix} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\gamma|_{(a,b)} \quad \gamma \in C^r(a, b)$

$\text{rang } \gamma' \text{ максимален} \iff \gamma'(t) \neq 0$

Пример. в $\mathbb{R}^n \quad D = \{\langle v_1, x \rangle + v_2 = 0\}$, где $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$

$F' = v_1$. Если $v_1 \neq 0$, то $S - n - 1$ -мерная поверхность (гиперплоскость, гиперпространство в \mathbb{R}^n)

1.19 Условный экстремум функций нескольких переменных

$f : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad E_0 \subseteq E$

Условный экстремум f на $E_0 \equiv \text{экстремум } f|_{E_0}$

$$\square E_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} F_1(x) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x) = 0 \end{cases}, m \in \mathbb{N}, m \leq n \right\}$$

Эти уравнения называются уравнениями связи, функции F_i называются функциями связи

Экстремум $F|_{E_0} \equiv \text{условный экстремум } F \text{ при условии } \langle \text{система уравнений} \rangle$

■

Теорема 17 (Необходимое условие условного экстремума, геометрическая формулировка). $\square O$ – открыток $\subseteq \mathbb{R}^n \quad f, F_1, \dots, F_m \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}), m < n$ и $F = (F_1, \dots, F_m)$ – регулярно в O . $\square a$ – точка локального условного экстремума для f относительно $F(x) = 0$

Тогда в точке $a \quad \nabla f$ представимо в виде линейной комбинации $\nabla_a F_1, \dots, \nabla_a F_m \quad (\nabla_1 f \in \mathcal{L}_{in} \{ \nabla_a F_1, \dots, \nabla_a F_m \})$

Доказательство случай 1: $m = n - 1$

$$\begin{aligned} \text{От противного : } \text{rang} \begin{bmatrix} f'(a) \\ F'_1(a) \\ \vdots \\ F'_m(a) \end{bmatrix} < n \quad \left(\Longleftrightarrow \det \begin{bmatrix} f'(a) \\ F'_1(a) \\ \vdots \\ F'_{n-1}(a) \end{bmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \right. \\ \left. f'(a), \dots, F'_{n-1}(a) \text{ -- линейно зависимы} \implies \exists \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} : \lambda_0 f'(a) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k F'_k(a) = 0 \right. \end{aligned}$$

Если бы $\lambda_0 = 0 \implies \{F'_k(a)\}_{k=1}^{n-1}$ -- линейно зависимо $\text{rang}(F'_k(a))_{k=1}^{n-1} < n-1$ -- не максимально

$$\text{Значит } \lambda_0 \neq 0 \implies f'(a) = - \sum \frac{\lambda_k}{\lambda_0} F'_k(a)$$

$$\triangleleft h(x) = \begin{bmatrix} f(x) \\ F_1(x) \\ \vdots \\ F_{n-1}(x) \end{bmatrix} : \text{Oc} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Если неверно, что определитель матрицы производных этого столбца функций равен нулю, то по теореме об обратном отображении $h(U_a)$ --

$$\text{открытое множество} \implies \exists \delta_0 > 0 : \quad \forall \delta \in (0, \delta_0) \quad \begin{bmatrix} f(a) \pm \delta \\ F_1(a) \\ \vdots \\ F_{n-1}(a) \end{bmatrix} \in h(u_n)$$

$$\implies \forall \text{ Открытого } \tilde{U}_a \quad \exists \text{ точка } x : F_1(x) = F(a) = 0, \dots, F_{n-1}(x) = F_{n-1}(a) = 0 \quad f(x) > f(a) \text{ или } f(x) < f(a)$$

Противоречие -- x -- точка условного локального экстремума

$$m = 1, \dots, n-2 \quad F' \text{ -- максимального ранга } \triangleleft \tilde{h}(a) = \begin{bmatrix} f(x) \\ F_1(x) \\ \vdots \\ F_m(x) \end{bmatrix} \quad \text{Предположим, что}$$

$$\text{rang } \widetilde{h'(x)} < m+1$$

С точностью до нумерации координат $\widetilde{h'_{x_1, \dots, x_{m+1}}}(a) \neq 0$

$$\begin{aligned} h(x) = \begin{bmatrix} \tilde{h}(x) \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad h'(a) = \begin{bmatrix} h'_{x_1, \dots, x_{m+1}} & \cdots \\ \mathbb{O} & \\ E_{n-(m+1)} & \end{bmatrix} (a) \implies \exists \text{ окрестность} \\ U_a \quad h|_{U_a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a\bar{h} \rightarrow \begin{bmatrix} f(a) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{m+2} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} . \text{ Т.к. } h - \text{открытое, то } \exists \sigma > 0 : \forall y \in \mathbb{R}^n : \|y - b\| < \sigma \implies \\
& y \in h(U_a) \\
& \triangleleft y = \begin{bmatrix} f(a) \pm \frac{b}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{m+2} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \implies \exists x \in U_a : f(x) = y \quad F_1(x) = \dots = F_m(x) = \\
& 0 \quad f(x)f(a) \pm \frac{b}{2}
\end{aligned}$$

Противоречие, ранг не меньше максимального

■

1.20 Практика

u – непрерывная функция на компакте – достигает наибольшего и наименьшего значения

1.21 Лекция. Дополнение : теорема об открытом отображении (общение)

Теорема 18. $\square k, n \in \mathbb{N} \quad k \leq n \quad O - \text{открытое} \in \mathbb{R}^n \quad F : O \rightarrow \mathbb{R}^k$,
регулярная ($\in C^1$ ранг матрицы Якоби = k)

Тогда F является открытым отображением.

Случай $n = k$ был установлен.

Доказательство. $n < k$

1. F – проекция.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$$

– очевидно открытое

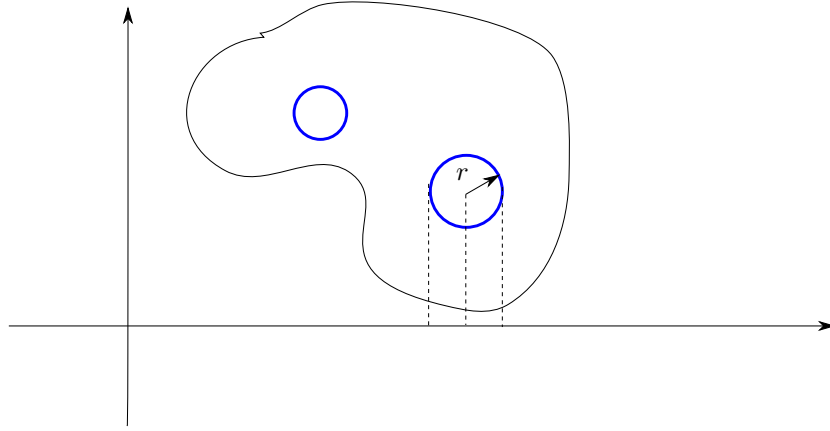


Рис. 1.5: очевидно

$$x, a \in \mathbb{R}^n \quad \|x - a\| < r \implies \|F(x) - F(a)\| \leq \|x - a\| < r, \text{ т.е. } B_{r(a)} \xrightarrow{F} B_r(F(a))$$

$$2. F - \text{регулярно. } F' = \begin{bmatrix} \nabla F_1 \\ \vdots \\ \nabla F_k \end{bmatrix}, \text{ матрица } n \times k$$

После удаления $n-k$ столбцов возникает ненулевой минор. Не умаляя общности удаляем последние столбцы (иначе перенумеруем переменные x_1, \dots, x_n) $\implies F'_{(x_1, \dots, x_n)} = \begin{bmatrix} F'_{1x_1} & \dots & F'_{1x_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ F'_{kx_1} & \dots & F'_{kx_k} \end{bmatrix} \quad \det F'_{(x_1, \dots, x_n)} \neq 0$

$$\phi(x) = (F_1, F_2, \dots, F_k, x_{k+1}, \dots, x_n)^T$$

$$\phi'(x) = \begin{bmatrix} F'_{(x_1, \dots, x_k)} & F'_{(x_{k+1}, \dots, x_n)} \\ 0 & E_{n-k} \end{bmatrix}$$

$\det \phi'(x) = \det F'_{(x_1, \dots, x_k)} \cdot \det(E_{n-k}) \neq 0$ ϕ регулярно в некоторой окрестности фиксированной точки $\implies F = \pi \circ \phi$ – открытое в точке a в силу произвольности $a \implies F$ – открыто

■

Теорема 19 (Необходимое условие условного экстремума (геометрическая формулировка)). $\square k, n \in \mathbb{N} \quad k < n \quad O$ – открытое в \mathbb{R}^n

$f, F_1, \dots, F_k \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}), \quad F = (F_1, \dots, F_k)$ – регулярно в O

$E = \{x \in O | F(x) = 0\}, a \in E$

Если a – точка условного экстремума для f Относительно

$$F(x) = 0$$

, то

$$\nabla_a f \in \text{Lin} \{ \nabla_a F_1, \dots, \nabla_a F_k \}$$

В частности, если $k = 1$, то условие $\iff \nabla_a f$ – коллинеарен $\nabla_a F$

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x, y) = (x^2 + (y - 1)^2) \sqrt{x^2 + y^2 - 2y}$$

на криволинейном треугольнике – границе множества

$$D = \{(x, y) | (x + 1)^2 + y^2 \geq 1, \quad (x - 1)^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 2 \quad y \geq 0\}$$

$$r = x^2 + (y - 1)^2$$

$$f = \underbrace{r \cdot \sqrt{r + 1}}_{g(r)}$$

$$\nabla f = g'(r) \cdot \nabla r$$

при $r = \sqrt{2} - 1$ касание окружности уровня границы окружности

Подозрительные точки: вершины. точки $T_1, T_2, T_3 : \quad f(T_1) = f(T_2) = f(T_3)$

$$g'(r) = \sqrt{r + 1} + \frac{r}{2\sqrt{r + 1}} = \frac{2(r + 1) + r}{2\sqrt{r + 1}} = \frac{3r + 2}{2\sqrt{r + 1}} \text{ не обращается в ноль при } r \geq 0$$

K – граница D , компакт $\implies \max, \min$ достижимы

т.к. $g(r)$ стремится вверх и $r(T_1) = r(T_2) = r(T_3) < g(V_1) = g(V_2) = g(V_3) \implies \min_k g = g(T_1) \quad \max_k g = g(V_1)$

Доказательство. Не умаляя общности a – точка глобального условного экстремума для f относительно $F(x) = 0$

Замечание. Если $v, v^1, \dots, v^k \in \mathbb{R}^k$ и набор v, v^1, v^k – линейно зависим, а v^1, \dots, v^k – ЛНЗ, то $v \in \text{Lin} \{v^1, \dots, v^k\}$

$$\implies \exists \lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_k : \quad \lambda v + \underbrace{\sum_{j=1}^k \lambda_j v_j}_{\neq 0} = 0 \implies \lambda \neq 0 \implies v = - \sum_{j=1}^k \frac{\lambda_j}{\lambda} v_j$$

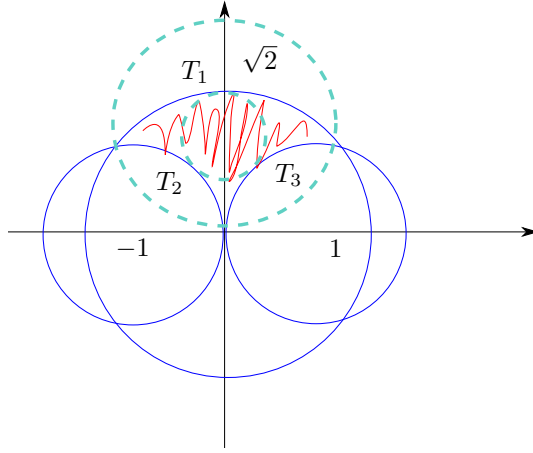


Рис. 1.6: krivoyPrimer

По замечанию достаточно проверить, что $\{\nabla_a f, \nabla_a F_1, \dots, \nabla_a F_k\}$ – линейно зависим, т.е. $\tilde{F} = (f, F_1, \dots, F_k)^T$ – не регулярна в точке a .

От противного: пусть \tilde{F} – регулярна в точке a , тогда существует окрестность $U(a) : \tilde{F}$ – регулярно в $U(a)$

По теореме об открытом отображении \tilde{F} – открыто в $U(a) \implies \exists \varepsilon > 0 : \tilde{F}(U(a)) \supset B_\varepsilon(\tilde{F}(a))$ $\tilde{F}(a) = (f(a), F_1(a), \dots, F_k(a)) = (f(a), 0, \dots, 0)$ $F_i(a) = 0$, т.к. a – точка, удовлетворяющая формулам связи.

$$y_\pm = (f(a) \pm \frac{\varepsilon}{2}, 0, \dots, 0)$$

$\|y_\pm - \tilde{F}(a)\| = \frac{\varepsilon}{2} \implies y_\pm \in B_\varepsilon(\tilde{F}(a)) \subseteq \tilde{F}(U(a)) \implies \exists x_\pm \in U(a) : \tilde{F}(x_\pm) = y_\pm \iff f(x_\pm) = f(a) \pm \frac{\varepsilon}{2} \quad F_1(x_\pm) = \dots = F_k(x_\pm) \implies x_\pm \in E?!! \implies$
точка a не экстремум, что противоречит нашему предположению ■

1.22 Функция Лагранжа

Определение 15 (“большая” функция Лагранжа). $\mathcal{L}(x, \lambda) =$

$$f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{j=1}^k \lambda_j F_j(x_1, \dots, x_n)$$

где $F_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, F_k(x_1, \dots, x_n) = 0$

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$

$$\nabla_a f = \sum_{j=1}^k \lambda_j \nabla_a F_j$$

Теорема 20 (Необходимое условие условного экстремума через дифференциал функции Лагранжа). В условиях последней теоремы $\exists \lambda_1^*, \dots, \lambda_k^* \in \mathbb{R}$ $d_{(a, \lambda^*)} \mathcal{J} = 0$

В скалярной записи это запишется как:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(a, \lambda^*) = f'_{x_1}(a) - \sum_{j=1}^k \lambda_j^* F'_{jx_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n}(a, \lambda^*) = f'_{x_n}(a) - \sum_{j=1}^k \lambda_j^* F'_{jx_n}(a) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1}(a, \lambda^*) = 0 = F_1(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_k}(a, \lambda^*) = 0 = F_k(a) \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \nabla f = \sum_{j=1}^k \lambda_j \nabla_a F_j \end{cases}$$

Задача 7. Найти максимум и минимум квадратичной формы на сфере

$$Q(x) = \sum_{k,i,j=1}^n q_{ij}x_i x_j$$

– \forall квадратичная форма в \mathbb{R}^n

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

Продолжаем $[Q] = (q_{ij})_{i,j=1}^n$ – симметричная

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} \iff \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|^2 = 1$$

$$F(x) = \|x\|^2 - 1$$

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = Q(x) - \lambda F(x)$$

$$\nabla F = 2x \text{ (} F \text{ регулярно всюду в } \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

$\langle \dots \rangle$

$$\text{Вывод: } \max_{x \in S} Q(x) = \max \{\lambda : \lambda_i - \text{собственные числа } Q\}$$

$\square E \subseteq \mathbb{R}^n \quad f \in C(\text{Cl } E \rightarrow \mathbb{R})$. Тогда $\sup_E f = \sup_{\text{Cl } E} f$

Доказательство. $A = \sup_E f \quad B = \sup_{\text{Cl } E} f \implies B \geq A$ как \sup по большему множеству.

$B \leq A$. От противного: существует последовательность $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subseteq f(\text{Cl } E)$

$$y_k \rightarrow B \implies \exists \{x_k\} \subseteq \text{Cl } E \text{ и } f(x_k) = y_k$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists \tilde{x}_k \subseteq E \quad \|\tilde{x}_k - x_k\| < \frac{1}{k}$$

$\langle \dots \rangle$ вернёмся к этому доказательству позже ■

Утверждение 5. $\square E$ – замкнутое множество в $\mathbb{R}^n \quad f \in C(E)$ и
 $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f = L$

Тогда

$$\sup_E f \times f(E) \cup \{L\}$$

Доказательство. По определению супремума существует $\{y_j\}_{j=1}^\infty \subseteq f(E) : y'_j \rightarrow \sup_E f \implies \exists$ последовательность $\{x_j\} \subseteq E : f(x_j) = y_j$. В силу обобщённого принципа Больцано-Вейерштрасса \exists подпоследовательность $\{x_{j_i}\}_{i=1}^\infty : x_{j_i} \rightarrow x_* \in \hat{\mathbb{R}}_r$:

-
1. Если $x_* = \infty$ $\underbrace{f x_{j_i}}_{\rightarrow L} = y_{j_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \sup_E f$. Теорема о пределе композиции
 2. $x_* \neq \infty$ x_* – предельная точка для E , E замкнуто $\implies x_* \in E$
Т.к. f непрерывно на E

$$f(x_*) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{j_i}) = \lim_{i \rightarrow \infty} y_{j_i} = \sup_E f \implies \sup_E f \subseteq f(E)$$

■

1.24 Касательные пространства к поверхностям

$\square S$ – гладкая k -мерная поверхность пространства \mathbb{R}^n $q \in S$

вектор $\tau \in \mathbb{R}^n$, для которого существует гладкий путь $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ и существует $c \in [a, b] : \gamma'(c) = \tau$ называется касательным в S в точке q

$$\gamma(c) = q$$

$T_q S$ – набор всех касательных векторов к S в точке q

$\square \phi$ – гладкая локальная параметризация S вблизи a (\exists окрестность $U(0)$ в \mathbb{R}^n и \exists Окрестность $V(q) : \Phi(U(0)) = V(q) \cap S$ $\Phi(0) = q$)

$\gamma^1(t) = (t, 0, \dots, 0)^T$ $\gamma^2(t) = (0, t, 0, \dots, 0)^T$ $\gamma^j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^k$ $\tilde{\gamma}^j = \phi(\gamma^j)$ – гладкий путь в S

$$\tau^j = (\tilde{\gamma}^j)'_t = \Phi' \cdot (\gamma^j)' = j\text{-ый столбец } \Phi'$$

τ^1, \dots, τ^k – канонические касательные векторам

Утверждение 6. $T_q S$ – линейное пространство

Локально S также задаётся системой уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x) = 0 \\ \vdots \\ F_{n-k}(x) = 0 \end{cases} \quad \square \tau \in T_q(S) \quad \tau = \gamma'(c), \text{ где } \gamma : [a, b] \rightarrow S \quad \gamma(c) = q$$

1.25 Лекция

Замечание. $\exists \subseteq \mathbb{R}^n$ $f \in C(\text{Cl } E \rightarrow \mathbb{R})$

Тогда $A := \sup_E f = \inf_{\text{Cl } E} f =: B$

Доказательство. Очевидно $A \leq B$. $B \leq A$?

$$\square x \in \text{Cl } E \implies \exists \{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq E : x_j \rightarrow x, j \rightarrow \infty$$

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad f(x_j) \leq A, j \rightarrow \infty$$

$$f(x) = f\left(\lim_{j \rightarrow \infty} x_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(x_j) \leq A$$

Перейдём к супремуму по $x : x \in \text{Cl } E \implies B \leq A$ ■

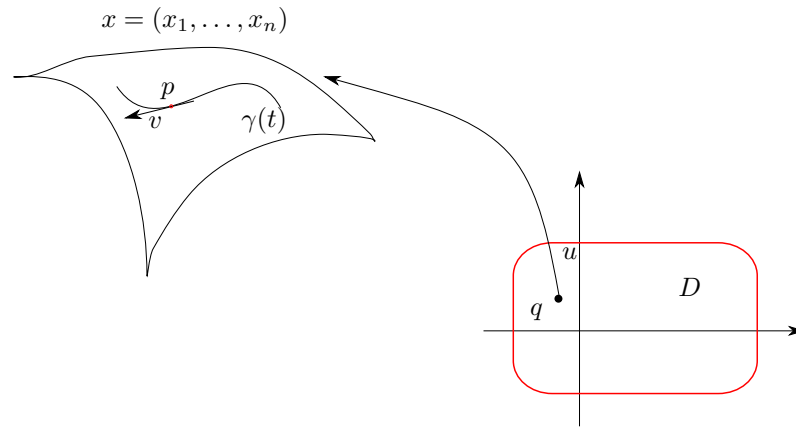


Рис. 1.7: povcrh

S -гладкая, k -мерная поверхность. $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ – гладкий путь в S

$$\gamma'(c) \text{ для } c \in [a, b] \quad \gamma(c) = p$$

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$\phi'_{u_1}(q) \quad \phi'_{u_k}(q) \in \text{Tr } S$ – канонические касательные векторы

$$\phi'_{u_j}(q) = d_q \phi(e_j)$$

S локально задана как поверхность уровня

\exists окрестность $U(p)$:

$$S \cap (U(p)) = \{x \in U(p) : F_1(x) = 0, \dots, F_{n-k}(x) = 0\}$$

$F = (F_1, \dots, F_{n-k})$ – регулярно в $U(p)$

$$\forall \tau \in \text{Tr } S \quad \forall j = 1, \dots, n-k \quad \tau \perp \nabla_p F_j$$

Утверждение 7. Если s -гладкая k -мерная поверхность (в \mathbb{R}^n), $p \in S$, то $\text{Tr } S$ – линейное подпространство \mathbb{R}^n

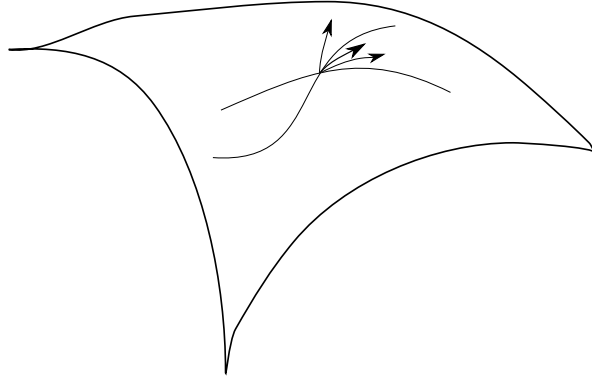


Рис. 1.8: skpoverh

Доказательство. Если $v_1, v_2 \in \text{Tr } S$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \implies v = c_1 v_1 + c_2 v_2 \in \text{Tr } S$

Дополним набор $\nabla_p F_1, \dots, \nabla_p F_{n-k}$ до базиса ортогонального дополнения к $v \in \mathbb{R}^n$

Добавляем $h^1, \dots, h^{k-1} \quad \forall j \quad g^j \perp v$

$$\triangleleft \text{систему } n-1 \text{ уравнений} \quad \begin{cases} F_1(x) = 0 \\ \vdots \\ F_{n-k}(x) = 0 \\ \langle x - p, h^1 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle x - p, h^{k-1} \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\text{Матрица} \quad \begin{bmatrix} \nabla_p F_1 \\ \vdots \\ \nabla_p F_{n-k} \\ h^1 \\ \vdots \\ h^{k-1} \end{bmatrix} \text{ имеет максимальный ранг} \implies \text{система задёт (локаль-}$$

но) гладкую $n - (n - 1) = 1$ -мерную поверхность

По теореме о способах задания поверхности \exists параметризация $\gamma : t \in (\alpha, \beta) \rightarrow \Gamma$ $0 \in (\alpha, \beta]$ $quad \gamma(0) = p$

$$\gamma' \perp \nabla_p F_1, \dots, \nabla_p F_{n-k}, h_1, \dots, h_{k-1}$$

$$\implies \gamma'(0) \text{ коллинеарна } v$$

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\Theta t) \quad \Theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\tilde{\gamma}'(t) = \Theta \gamma'(\Theta t)$$

$$\tilde{\gamma}'(0) = \Theta \cdot \gamma'(0)$$

$$\text{Подбор } \Theta \implies \Theta \cdot \gamma'(0) = v$$

■

Следствие 4. $\dim \text{Tr } S = k$

Т.к. канонические касательные линейно независимы, $\in \text{Tr } S, \implies \dim \text{Tr } S \geq k$

С другой стороны $\dim (\text{Tr } S)^\perp \geq n - k$ (т.к. $\nabla_p F_j \in (\text{Tr } S)^\perp$)

$$v \in \text{Tr } S \iff \begin{cases} \langle \nabla_p F_1, v \rangle = 0 \\ \langle \nabla_p F_{n-k}, v \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p)(v_1) + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(p)v_n = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_1}(p)(v_1) + \dots + \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_n}(p)v_n = 0 \end{cases} \iff d_p F(v) = 0$$

Можно считать, что дифференциалы dx_1, \dots, dx_n на касательном пространстве связаны системой возникающей при формальном дифференцировании системы $F(x) = 0$

$$d_p F = 0 \quad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p)dx_1 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(p)dx_n = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_1}(p)dx_1 + \dots + \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_n}(p)dx_n = 0 \\ dx_i(v) = v_i \end{cases}$$

Следствие 5. $\text{Tr } S = d_q \Phi(\mathbb{R}^k)$

Оба объекта линейные подмножества \mathbb{R}^n размерности k и содержат $d_q \Phi(e_1), \dots, d_q \Phi(e^k)$

Пример. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad S_2(\mathbb{R})$

уравнение касательного пространства $2(xdx, ydy, zdz) = 0$

$$v \in T_{(x,y,z)} S_2(\mathbb{R}) \iff xv_1, yv_2, zv_3 = 0$$

$\text{Tr } S$ – касательное линейное пространство

$\text{Lp } S$ – аффинное касательное пространство $\text{Lp } S = \text{Tr } S + P$

$$x \in \text{Lp } S \quad x - p \in \text{Tr } S$$

$$\text{Lp } S = \{x \in \mathbb{R}^n : d_p F(x - P) = 0\}$$

$$d_p F(x - p) = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(p)(x_n - p_n) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) + \dots + \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_n}(p)(x_n - p_n) = 0 \end{cases}$$

Если $k = n-1$, то $\text{Tr } S$ и $\text{Lp } S$ называются касательными (гипер)плоскостями

Касательная гиперплоскость к графику функции?

$$S = \Gamma_f = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, y) \in \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_{n-1}) \in O \subseteq \mathbb{R}^{n-1}\} \quad y = f(x_1, \dots, x_{n-1})$$

$$f \in C^1(O)$$

$$F(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = f(x_1, \dots, x_{n-1}) - y$$

$$\angle F \text{ в } O \times \mathbb{R}$$

$$\nabla_{p,y} F = \left(f'_{x_1}(p), \dots, f'_{x_{n-1}}(p), -1 \right)$$

$$x \in \text{Lp } \Gamma_f \iff f'_{x_1}(p)(x_1 - p_1) + \dots + f'_{x_{n-1}}(p)(x_{n-1} - p_{n-1}) - (y - p_y) = 0$$

$$y = f(p_1, \dots, p_{n-1}) + \langle \nabla_{p_1, \dots, p_{n-1}} f, (x - p_x) \rangle$$

Утверждение 8 (Достаточное условие условного экстремума). $\square O$ – открытое в \mathbb{R}^n $f, F_1, \dots, F_{n-k} \in C^2(O \rightarrow \mathbb{R})$ $F = (F_1, \dots, F_{n-k}), p$ – решение системы

$$F(x) = 0$$

\square в точке p выполнено необходимое условие условного экстремума для f относительно $F(x) = 0$. $L(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1^*, \dots, \lambda_{n-k}^*)$

Тогда:

- Короткий вариант

Если $d_p^2 L > 0$, то p – условный минимум

Если $d_p^2 L < 0$, то p – условный максимум

Из $d_p^2 L \geq 0$, то НЕ следует, что p не точка условного экстремума

- Подробный вариант:

Если $d_p^2 L|_{\text{TPS}} > 0$, то p – точка условного минимума

Если $d_p^2 L|_{\text{TPS}} < 0$, то p – точка условного максимума

Если $d_p^2 L|_{\text{TPS}} \geq 0$, то p – седловая точка (условного экстремума нет)

Пример. $f(x, y) = x^2 + y^2$ на $x + y = 1$. найти условный экстремум.

1-ый способ: $y = 1 - x$ $g(x) = f(x, 1 - x) = x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$

$g(x)$ имеет минимум в точке $x = \frac{1}{2}$ (глобальный) $\implies f(x, y)$ имеет условный (глобальный) минимум в точке $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

2-ой способ: $\mathcal{J}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x + y - 1)$

$$\begin{cases} 0 = \mathcal{J}'_x = 2x - \lambda \\ 0 = \mathcal{J}'_y = 2y - \lambda \\ x + y = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = y = \frac{1}{2} \\ \lambda = 2x = 1 \end{cases}$$

$$L(x, y) = x^2 + y^2 - (x + y - 1)$$

$$L'' \iff \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$d^2 L > 0$ по короткому $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ – условный минимум

Наводящие соображения по достаточному условию условного экстремума:

1. $S = \{x \in O \mid F(x) = 0\}$. Исследуется $f|_S$

$$\mathcal{L}(x) = f(x) - \sum \lambda_k F_k(x)$$

$$L = \mathcal{L}(x, \lambda^*)$$

$L|_S = f_L$, таким образом условный экстремум $f \leftrightarrow$ условный экстремум L

ϕ – локально гомеоморфизм

p – точка условного экстремума для $L|_S \iff$ Для $L \circ \phi$ точка $\phi^{-1}(p) = q$ – безусловный экстремум

$d^2(L \circ \phi) \leftrightarrow d_p^2 L(d_q \phi) + d_p L(d_q^2 \phi)$ – одномерная формула

1.26 О задаче отыскания наибольшего и наименьшего значения функции на множестве.

K – компакт, $f \in C(K)$

f_k не имеет экстремума на $K \setminus K^* \implies \max_K f = \max_{K^*} f, \min ..$

Если $K = S_1 \cup \dots \cup S_N$, где S_1, \dots, S_N – поверхности различных размерностей, $S_j \cap S_k \neq \emptyset$

$(S_j)_*$ – множество точек, в которых выполняется НУУЭ (необходимое условие условного экстремума) относительно $x \in S_j$ (либо нарушается ранг системы, задающей нашу поверхность S_j)

$K_* = (S_1)_* \cup \dots \cup (S_N)_*$ – если это конечное множество, то можно их уже просто сравнить

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y, z)$ на компактном множестве K ограниченном поверхностями $z = 1$ и $z = x^2 + y^2$

$$S_0 = \text{Int } K \quad S_1 = \{z = 1, x^2 + y^2 < 1\} \quad S_2 = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 < 1\} \quad S_3 = \{(x, y, z) : z = 1, x^2 + y^2 = 1\}$$

на S_0 необходимое условие безусловного экстремума:

$$dF = 0 \iff \begin{cases} 0 = f'_x = y \\ 0 = f'_y = x + z \\ 0 = f'_z = y \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases} \quad (x, 0, -x) \quad f(x, 0, -x) = 0$$

$$\text{На } S_1 \quad g(x, y) := f(x, y, 1) = y(x+1) \quad \begin{cases} g'_x = 0 = y \\ g'_y = 0 = x+1 \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases} \iff (-1, 0)?? \quad \emptyset$$

$$\text{на } S_2 \quad f(x, y, z) = xy + y(x^2 + y^2) = x^2y + xy + y^3 = h(x, y) \quad x^2 + y^2 < 1$$

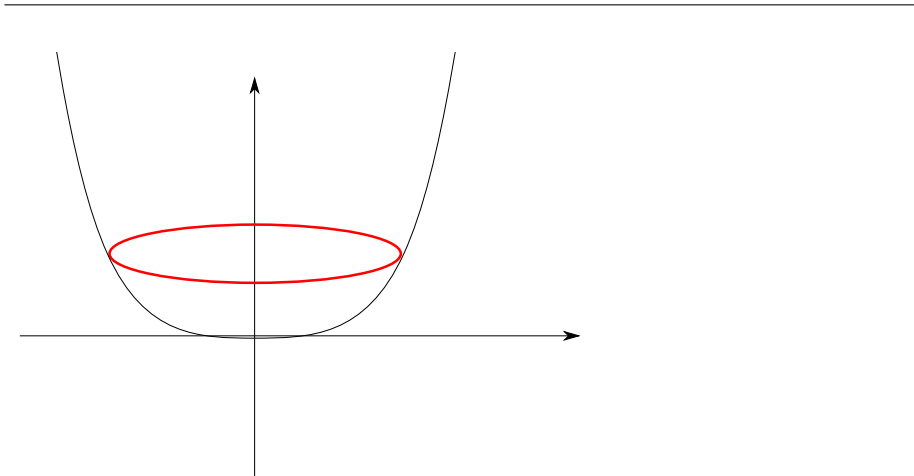


Рис. 1.9: paraplane

$$\begin{cases} h'_x = 0 = 2xy + y \\ h'_y = 0 = x^2 + x + 2y^2 \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$

на S_3 $f = (xy + y)_{x^2+y^2=1} = \sin \varphi (\cos \varphi + 1) = \varkappa(\varphi) \quad \varphi \in [-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} \varkappa'(\varphi) &= \cos \varphi (\sin \varphi) - \sin^2 \varphi \\ &= \cos^2 \varphi + \cos \varphi - (1 - \cos^2 \varphi) \\ &= 2 \cos^2 \varphi + \cos \varphi - 1 \\ &= 2t^2 + t - 1 =: \mu(t) \end{aligned}$$

$$(2t^2 + t)' = 4t + 1$$

$$\varkappa(t = -1) = 0 \quad \varkappa(t = \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Подозрительные значения: $0, \pm \frac{\sqrt{12}}{72} \quad \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$$\max_K f = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \min_K f = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Пример. Найти $\sup_E f$ $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0\}$

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z)e^{-(x+y+z)}$$

$$g(t) = te^{-t}$$

$$f(x, y, z) \leq (3x + 3y + 3z)e^{(x+y+z)} = 3g(t) \leq 3 \cdot \sup_{t \geq 0} g(t) = \frac{3}{e}$$

$$f(0, 0, 1) = 3 \cdot e^{-1} = \frac{3}{e} \leq \sup_{C1E} f \implies \sup_{C1E} f = \sup_E f = \frac{3}{e}$$

1.27 Функциональная последовательности и ряды

$$\exists \subseteq \mathbb{R}^n \quad f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ (или } f : E \rightarrow \mathbb{C})$$

$$\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}; \quad f_k : E \rightarrow \mathbb{C}$$

Определение 16. Говорят, что функциональная последовательность $\{f_k(x)\}$ сходится к $f(x)$ поточечно на множестве E , если $\forall x_0 \in E$ числовая последовательность $\{f_k(x_0)\}$ сходится к $f(x_0)$

Примеры:

$$1. \quad f_k(x) = x^k \quad E = [0, 1] \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Определение 17 (Поточечная сходимость). $d_k(x) \rightarrow f(x)$ на $E \iff \forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon, x) > 0 : \forall k \geq N \quad f_k(x) - f(x) < \varepsilon$

Определение 18 (Равномерная сходимость). $\sqsubset f, f_k : E \rightarrow \mathbb{C}$. Говорят, что $\{f_k\}$ сходится к f равномерно, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall k \geq N \forall x \in E \quad |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Замечание. $\rho_k = \sup_E |f_k(x)|$, то $d_k(x) \Rightarrow f(x)$ на $E \iff \rho_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$

Доказательство.

$$\implies \forall k \geq n \implies \rho_k \leq \varepsilon \implies \rho_k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty$$

$$\Leftarrow \rho_k \rightarrow 0 \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k \geq N \quad 0 \leq \rho_k < \varepsilon \implies \forall x \in E \quad |f_k(x) - f(x)| \leq \rho_k < \varepsilon$$

■

Пример. $f_k(x) = x^k \quad \rho_k = \sup_{x \in [0,1]} |f_k(x) - f(x)| = \max \left\{ \sup_{x \in [0,1]} |f_k - f|, |f_k(0) - f(0)| \right\} = \sup_{x \in [0,1]} |f_k(x) - f(x)| = \sup_{[0,1]} x^k = \sup_{[0,1]} x^k = 1$

$$\rho_k \equiv 1 \not\rightarrow 0 \implies f_k \not\Rightarrow f(x) \text{ на } E$$

Замечание. $f_k \not\Rightarrow f$ и на $[0, 1)$

$$E_\delta = [0, \delta], \delta < 1 \quad \rho_k = \sup_{x \in [0, \delta]} |f_k(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, \delta]} x^k = \delta^k \implies \rho_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty \implies f_k \Rightarrow f \text{ на } E_\delta$$

Замечание. Если $\forall j \in \mathbb{N} \quad f_k \Rightarrow f$ на E_j , то из этого не следует, что $f_k \Rightarrow f$ на $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, но это становится верным при конечном количестве E

1.28 Практика

$F(x, y, z) = 0$ – поверхность. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0 \text{ – уравнение касательной}$$

$$\frac{x - x_0}{\partial F / \partial x} = \frac{y - y_0}{\partial F / \partial y} = \frac{z - z_0}{\partial F / \partial z} \text{ – уравнение нормали}$$

1.29 Лекция

Замечание. Если $f_n \Rightarrow f$ на E , то $f_n \rightarrow f$ поточечно.

$\square X$ – любое множество. $\ell_\infty(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}(\rightarrow \mathbb{C}) : f \text{ – ограниченная}\}$

Определение 19. $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$

$\|\cdot\|_\infty$ – отклонение, равномерная норма, Чебышёвская норма

Проверим, что она норма:

1. 0 только на $f = 0$

2. $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$

3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sup_{\tilde{x} \in X} |f(\tilde{x})| + \sup \dots = \|f\| + \|g\|$$

$$\text{т.е. } \forall x \in X \quad |f(x) + g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$$

$$\text{Переходим к } \sup_{x \in X} \implies \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

ℓ_∞ – нормированное пространство.

$$f_n \Rightarrow f \text{ на } X \iff \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \iff \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Утверждение 9. $\ell_\infty(X)$ является полным нормированным пространством (т.е. в $\ell_\infty(X)$ из сходимости в себе следует сходимость)

Доказательство. $\triangleleft \{f_n\}$ – сходится в себе в $\ell_\infty(X)$

$$\implies \forall \varepsilon \exists N : \forall n, m \geq N \quad \|f_n - f_m\| < \varepsilon \quad \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| = \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$$

$$\iff \forall n, m \geq N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

Значит $\forall x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ – сходится в себе

Т.к. $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ – полное пространство $\implies \forall x \in X \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, т.о. возникает $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

1. Почему она ограничена? $\square N = N(\varepsilon)$ для $\varepsilon = 1$

$$\forall n \geq N \quad \|f_n(x)\| \leq \|f_N\| + 1$$

$$\|f_n - f_N\| \leq 1 \forall n \geq N \implies \|f_n\| = \|f_N + f_n - f_N\| \leq \|f_N\| + \|f_n - f_N\| \leq \|f_N\| + 1 = C$$

$$\forall x \in X \quad \|f(x)\| \leq C \text{ при } n \rightarrow \infty$$

$$\|f(x)\| \leq C, \text{ переходим к супремуму по } x \text{ и получаем } \|f\| \leq C$$

2. $\|f_n - f\| \rightarrow 0 \quad b \rightarrow \infty$?

$$\triangleleft \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \quad \|f_n - f\| \leq \varepsilon \implies \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$$\implies \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \iff \|f_n - f\| \leq \varepsilon$$

$$\implies \|f_n - f\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

■

Если X – компакт, то $C(K) \leq \ell_\infty(K)$

Замечание. “Обычная” норма на $C(K)$ это норма из $\ell_\infty(K)$

$$\|f\|_{C(K)} = \max_{x \in K} |f(x)|$$

Теорема 21. Критерий Коши-Больцано равномерной сходимости в себе для функциональных последовательностей.

$$\square \{f_n\}_{n=1}^\infty : X \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$$

Последовательность $\{f\}$ является равномерно сходящейся на $X \iff$ она равномерно сходится в себе, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N \forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon (\leq \varepsilon)$$

Пример. $X = \mathbb{R} \quad f_n = x + \frac{1}{n} \quad f(x) = x \quad f_n \rightrightarrows f$, но $f_n(x)$ и $f(x) \notin \ell_\infty(\mathbb{R})$

Доказательство.

\Rightarrow Если $f_n \rightrightarrows f$ на X , то для $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \quad \|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$
 $\forall m \geq N \quad \|f_n - f_m\| \leq \|f_n - f\| + \|f_m - f\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
 \Leftarrow Существование $f(x) : f_n \rightrightarrows f$. Проверяем как в доказательстве полноты ℓ_∞
 $f(x)$ – поточечный предел для $\{f_n\}$
 $m \rightarrow \infty$ в условии теоремы $\Rightarrow \forall n \geq N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
 $\varepsilon \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ на X

■

Определение 20. $\square \{f_n\} : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ X – любое множество

Говорят, что $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на X , если последовательность частичных сумм равномерно сходится на X

Теорема 22 (Критерий Коши-Больцано равномерной сходимости для рядов). $\square f_n : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на X

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad \forall p \in \mathbb{Z}_+ \quad \left(\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right) < \varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \quad \forall p \in \mathbb{Z}_+ \quad \left\| \sum_{k=n}^{n+p} f_k \right\| < \varepsilon$$

Теорема 23 (Необходимое условие равномерной сходимости ряда). Если $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на X , то $f_n(x) \rightrightarrows 0$ на X

Пример (необходимое условие не является достаточным). $f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot f_n(x) \rightrightarrows 0$ на \mathbb{R} , но $\sum f_n$ – расходится всюду

Замечание (“Популярный” алгоритм исследования функциональных рядов на равномерную сходимость)
 Найти поточечный предел $f(x)$ (Если нет поточечной сходимости хотя бы в одной точке, то нет и равномерной на X)

2. Выяснить $\|f_n(x) - f(x)\|_{\ell_\infty(X)} \rightarrow 0?$

Пример. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ на $X = [0, 1]$

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$
2. $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x \in [0,1]} f_n(x)$
 $f_n(0) = f_n(1) = 0$
 $f'_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = 0$
 $x \in (0,1) \implies x = \frac{n}{n+1}$
 $\|f_n - f\| = \max_{[0,1]} f_n = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^n}{(n+1)^n} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$
 Т.о. $f_n \rightrightarrows 0$ на $[0,1]$

Пример. $f_n(x) = x^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \forall x \in (-1,1) (\forall x \in \mathbb{C} : |x| < 1)$$

$f \not\equiv 0$ на $(-1,1) \implies$ нет равномерной сходимости ряда

Утверждение 10. $\square E \subseteq X$ X – метрическое пространство
 $\square \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C(\text{Cl } E)$, тогда $\{f_n\}$ равномерно сходится на $E \iff$ она равномерно сходится на замыкании.

Доказательство.

\Leftarrow Очевидно

$\implies \{f_n\}$ равномерно сходится на $E \iff \{f_n\}$ равномерно сходится в себе на $E \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m \geq N \quad \|f_n - f_m\|_{\ell_{\infty}(E)} \leq \varepsilon$

$$\iff \sup_{x \in E} |f_n - f_m| \leq \varepsilon$$

$$\iff \sup_{x \in \text{Cl } E} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

$$\iff \|f_n - f_m\|_{\ell_{\infty}(\text{Cl } E)}$$

$\iff \{f_n\}$ равномерно сходится в себе на $\text{Cl } E \iff f_n$ равномерно сходится на $\text{Cl } E$

■

Теорема 24 (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда).

$\square \forall n \quad f_n(x) : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}) \quad a_n \in \mathbb{R}$

$\forall n \quad \forall x \in X \quad |f_n(x)| \leq a_n$

и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на X и абсолютно.

Эквивалентная формулировка: Если $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\ell_{\infty}(X)}$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно и абсолютно на X

Доказательство первой формулировки на основе критерия Коши. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \geq N \quad \forall p \in \mathbb{Z}_+$

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

$\geq \left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right| \implies$ ряд $\sum f_n(x)$ равномерно сходится в себе $\implies \sum f_n(x)$ сходится равномерно ■

Пример. $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$ – равномерно сходится на \mathbb{R} , но не абсолютно

$f(x) = x^n$ – ряд сходится абсолютно (при $x \in [0, 1)$), но не равномерно

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^p} \quad p > 1 \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^p}$ равномерно сходится на \mathbb{R}

$\left| \frac{\sin kx}{k^p} \right| \leq \frac{1}{k^p} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходится

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{n^5 + x^2}$

$$n^5 + x^2 \geq 2\sqrt{n^5 x^2} = 2n^{\frac{5}{2}} |x|$$

$$\text{При } x \neq 0 \quad |f_n(x)| \leq \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

$$x = 0 \quad |f_n(0)| = |0| \leq \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

$$a_n = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

$\sum a_n$ сходится, а значит по признаку Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно

1.30 Преобразование Абеля

$$A_0 \in \mathbb{R} \quad A_k = \sum_{j=1}^k a_j + A_0 \quad a_k = A_k - A_{k-1}$$

$$\sum_{k=n}^m a_k b_k = \sum_{k=n}^m (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=n}^m A_k b_k - \sum_{k=n}^m A_{k-1} b_k = \sum_{k=n}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_m b_m - A_{n-1} b_n$$

Лемма 4. Если b_k монотонно зависит от k при любом x , то:

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k(x) b_k(x) \right| \leq 4 \cdot \max_{k=n:m} |A_k(x)| \cdot \max \{|b_n(x)|, |b_m(x)|\}$$

Доказательство. x фиксировано

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k b_k \right| \leq \underbrace{\left| \sum_{k=n}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \right|}_{\Sigma} + |A_m| |b_m| + |A_{n-1}| |b_n| \leq \Sigma + A_* b_* + A_* b_*$$

$$\Sigma \leq \sum_{k=n}^{m-1} |A_k| |b_k - b_{k+1}| \leq A_* \sum_{k=n}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| = A_* \left| \sum_{k=n}^{m-1} (b_k - b_{k+1}) \right| = A_* |b_n - b_m| \leq 2A_* \cdot b_k \quad \blacksquare$$

Теорема 25 (Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда). $\square a_n : X \rightarrow \mathbb{C} \quad b_n : X \rightarrow \mathbb{R}$

Если:

1. Последовательность частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ равномерно ограничена на X
2. $\{b_k(x)\}$ монотонна по k для каждого $x \in X$
3. $b_k \Rightarrow 0$ на X

, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ сходится равномерно на x

Замечание (Пояснение). 1. $\Rightarrow \exists C \neq C(x, N) : \forall x \in X \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=1}^N a_k(x) \right| \leq C$

Доказательство. $A_0(x) = 0 \quad 0 < A_{**} = C$ из пояснения

Т.к. $b_n(x) \Rightarrow 0$ на X , то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in E \quad |b_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{A_{**}}$

$$\Rightarrow b_* \leq \frac{\varepsilon}{A_{**}}$$

По лемме $\left| \sum_{k=n}^m a_k(x)b_k(x) \right| \leq 4 \cdot A_{**} \cdot \frac{\varepsilon}{A_{**}} = 4\varepsilon \Rightarrow \sum a_k(x)b_k(x)$ сходятся в себе ■

Теорема 26 (Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда). $\square a_n : X \rightarrow \mathbb{C} \quad b_n : X \rightarrow \mathbb{R}$

Если:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ сходится равномерно на X
2. $\{b_k(x)\}$ монотонна по k для каждого $x \in X$
3. b_k равномерно ограничена на X

, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ сходится равномерно на x

Замечание. 3. $\Rightarrow \exists b_{**} : \forall x \in X \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad |b_k(x)| \leq b_{**}$

Доказательство. $A_0(x) = - \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$

$A_j(x) = \sum_{k=1}^j a_k(x) + A_0(x) = - \sum_{k=j+1}^{\infty} a_k(x) \Rightarrow 0$, т.к. $\sum a_k(x)$ сходится равномерно $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall j \geq N \quad \forall x \in X$

$$|A_j(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4 \cdot b_{**}}$$

Тогда для $m \geq n > N$ $\left| \sum_{k=n}^m a_k(x)b_k(x) \right| \leq 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4b_{**}} \cdot b_{**} = \varepsilon$, значит ряд сходится в себе равномерно \Rightarrow сходится равномерно ■

Пример. $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^N e^{ikx} = \sum_{k=1}^N q^k = q \frac{1-q^N}{1-q}$$

$$\square q = e^{ix} \neq 1$$

$$\left| \sum_{k=1}^N e^{ikx} \right| = \left| e^{ix} \cdot \frac{e^{iNx} - 1}{e^{ix} - 1} \right| = \left| \frac{e^{\frac{iNx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}} \right| \cdot \left| \frac{e^{\frac{iNx}{2}} - e^{-\frac{iNx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}} \right| = \left| \frac{\sin \frac{Nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$$

$$\left| \sum_{k=1}^N \cos kx \right| = \left| \sum_{k=1}^N \Re e^{ikx} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$$

$$\left| \sum_{k=1}^N \sin kx \right| = |\Im e^{ikx}| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}$$

$$x \in [\delta, 2\pi - \delta] = E_\delta \quad \delta > 0$$

$$\frac{x}{2} \in [\frac{\delta}{2}, \pi - \frac{\delta}{2}] \implies \sin \frac{x}{2} \geq \sin \frac{\delta}{2}$$

$$A_{**} = \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} \implies \forall x \in E_\delta \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=1}^N \sin kx \right| \leq A_{**}$$

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^p}$ сходится на E_δ равномерно по признаку Дирихле при $0 < p \leq 1$

$$a_k(x) = \sin kx \quad b_k = \frac{1}{k^p}$$

$$\text{Аналогично для } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^p}$$

Задача 8. Исследовать на равномерную сходимость $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ на $[0, \delta]$

1.31 Равномерная сходимость и действия, связанные с предельным переходом

Теорема 27 (Теорема о повторном пределе для функциональных последовательностей). $\square D \subseteq X$ X – метрическое пространство, $f, \{f_n\} : D \rightarrow \mathbb{C}$

$x_0 \in D'$ – предельная точка. Пусть:

$$1. \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n \in \mathbb{C}$$

$$2. f_n \rightrightarrows f \text{ на } D$$

$$\text{Тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)}_{A_n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)}_{f(x)}$$

Оба конечны и равны между собой.

Теорема 28 (о повторном пределье для функциональных рядов). \square
 $D \subseteq X, X$ – Метрическое пространство

$\{f_n\} : D \rightarrow \mathbb{C} \square x_0 \in D'$ Пусть:

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на D

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)}_{A_n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)}_{S(x)}$

Обе части конечны и равны между собой

Замечание. $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$, теорема для рядов вытекает из теоремы для последовательностей.

Теоремы для последовательностей. 1. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathbb{C}$?

2. Итоговое равенство

Т.к. $f_n \Rightarrow f$ на D , то $\{f_n\}$ равномерно сходится в себе на D ($\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N \quad \forall x \in D \quad |f_n(x) - f_m(x)|$)

$x \rightarrow x_0$, перейдём к пределу в этом неравенстве. $|A_n - A_m| \leq \varepsilon \forall n, m \geq N$

Значит последовательность чисел $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в себе, \mathbb{C} – полно

$$\square A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

$$A_n = \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)?$$

$$\begin{aligned} |A - f(x)| &= |A - A_n + A_n - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \leq \\ &\leq |A_n - A| + |f_n(x) - A_n| + |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon? \end{aligned}$$

$$\text{Т.к. } A_n \rightarrow A, n \rightarrow \infty \quad \exists N_1 : \quad \forall n \geq N \quad |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{Т.к. } f_n \Rightarrow f \quad \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$N = \max N_1, N_2 \quad n = N$$

$$\text{Т.к. } \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n, \text{ то } \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in D : \quad 0 < \rho(x, x_0) < \delta \quad |f_n(x) - A_n|$$

$$\implies \forall x \in D : \quad 0 < \rho(x, x_0) < \delta \implies |f(x) - A| \leq \frac{\varepsilon}{3} \cdot 3 = \varepsilon$$

Следствие 6 (Для последовательностей). $\square D \subseteq X$ – м.п., $\{f_n\}, f : D \rightarrow \mathbb{C}$

$f_n \Rightarrow f$ на D .

Если $\{f_n\}$ непрерывны в точке x_0 , то и f непрерывна в x_0

Следствие 7 (Для рядов). $\square D \subseteq X$ – м.п., $x_0 \in D', \{f_n\}_{n=1}^\infty, f : D \rightarrow \mathbb{C}$ и $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ сходится равномерно на D .

Если $\forall n \quad f_n(x)$ непрерывна в точке x_0 , то и $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ непрерывно в x_0

Для последовательностей. $x_0 \in D \Rightarrow \begin{cases} x_0 \in D' \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)}^{f_n(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \overbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)}^{f(x)} \\ x_0 - \text{изолированная} \end{cases},$

но если она изолирована, то в ней все функции непрерывны.

$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Rightarrow f$ – непрерывна

Следствие 8 (теорема Стокса-Зейделя). $D \subseteq X, \quad f_n, f : D \rightarrow \mathbb{C} \quad f_n \Rightarrow f$ на D при $n \rightarrow \infty$ и $f_n \in C(D) \Rightarrow f \in C(D)$

равномерный предел последовательности непрерывных функций непрерывных

Следствие 9. Сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций непрерывна

Теорема 29 (Дини). $\square K$ – компакт. $\{f(x)\}$ поточечно сходится к $f(x)$ на K

f_n, f – непрерывны $\in C(K)$

Если $\forall x \in K$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ возрастает (по n).

Тогда $f_n \Rightarrow f$ равномерно на K

Замечание. Теорема верна для случая убывания $\{f_n(x)\}$ по n

Теорема 30 (Дани для рядов). $\sqsupset f_n, S \in C(K)$ $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ – ряд сходится на K и $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in X \quad f_n(x) \geq 0 \implies$ ряд сходится равномерно

Доказательство. НУО $\{f_n\}$ убывающая, $f(x) = 0$ (иначе рассмотреть $f_n(x) - f(x)$)

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \forall x \in K \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon?$

По условию $f_n(x) \rightarrow f(x)$ поточечно. Фиксируем $\varepsilon > 0 \quad \exists N(x) = N(\varepsilon, x) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

$U_x = \{\tilde{x} \in K : |f_n(\tilde{x}) - f(\tilde{x})| < \varepsilon\}$ – открытая окрестность точки x

$\{U_x\}_{x \in K}$ – открытое покрытие компакта $K \quad \exists$ конечное подпокрытие $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_m}\} \quad N = \max\{N(x_1), \dots, N(x_m)\}$

$\forall x \in K \exists$ номер $i : x \in U_i$

$n \geq N \quad x \in K \quad f_n(x) \leq f_N(x) \leq f_{N(x_i)}(x) < \varepsilon$

■

Пример. $f_n(x) = nx(q - x^2)^n \rightarrow 0$ поточечно на $[0, 1]$

$$\int_0^1 f(x) = \int_0^1 nx(1 - x^2)^n dx = \left| \begin{matrix} y = 1 - x^2 \\ dy = -2x dx \end{matrix} \right| = \frac{-n}{2} \int_1^0 y^n dy = \frac{n}{2} \frac{y^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{n}{2(n+1)} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$0 = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2}$$

Теорема 31 (Об интегрировании предела функциональной последовательности). $\sqsupset f_n \in C([a, b]) \quad f_n \Rightarrow f$ на $[a, b]$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

Теорема 32 (Об интегрировании функционального ряда). $\sqsupset f_n \in C([a, b])$ и $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится равномерно на $[a, b]$. Тогда ряд допускает почленное интегрирование:

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Доказательство. $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in C([a, b])$ $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$

$$\langle \varepsilon > 0 \quad \int_a^b S(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n(x) dx$$

Т.к. $S_n \Rightarrow S(x)$, то для $\frac{\varepsilon}{b-a} \exists N : |S(x) - S_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \forall n \geq N$

$$\left| \int_a^b S(x) dx - \int_a^b S_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b (S(x) - S_n(x)) dx \right| \leq \int_a^b |S(x) - S_n(x)| dx \leq \varepsilon \quad \blacksquare$$

Теорема 33. $\square \langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{R}$ – промежуток

$\square f_n : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, Пусть:

1. $\exists x^0 \in \langle a, b \rangle : \{f_n(x^0)\}$ сходится
2. $\{f'_n(x)\}$ сходится равномерно на $\langle a, b \rangle$ к $g(x)$

Тогда $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на $\langle a, b \rangle$,

Если $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, то $f(x)$ дифференцируема на $\langle a, b \rangle$ и $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad \left(\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \right)$

Теорема 34 (Для рядов). $\square f_n$ дифференцируема на $\langle a, b \rangle \quad f_n : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть:

1. $\exists x_0 \in \langle a, b \rangle \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ сходится
2. $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ сходится равномерно на $\langle a, b \rangle$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на $\langle a, b \rangle$, его сумма дифференцируема на $\langle a, b \rangle$ и

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$$

Доказательство. Для случая функций класса C^1

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n = \int_{x_0}^x f'_n(t) dt + f_n(x_0)$$

$$f(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt + \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$$

При фиксированном x по предыдущей теореме $\int_{x_0}^x f'(t) dt \rightarrow \int_{x_0}^x g(t) dt$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \int_{x_0}^x |f'_n(t) - g(t)| dt + \left| f_n(x_0) - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) \right|$$

По теореме Барроу $f(x)$ дифференцируема на $\langle a, b \rangle$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f'(x) = g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ ■

1.32 Степенные ряды

$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$ – вещественный степенной ряд

$$\{C_n\} \subseteq \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$ – комплексный степенной ряд

Лемма 5. $\square \{x_n\}, \{y_n\}$ – вещественный неотрицательные

Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, то $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$

Доказательство. 1. Если $x_n \rightarrow 0 \implies x_n y_n - \text{б.м.} \implies \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

2. $x_n \equiv x(\text{const}) \quad y = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}$

$$x \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x y_{n_k}$$

$$x \cdot y \leq \overline{\lim} xy$$

С другой стороны Если $xy_{n_k} - \forall$ подпоследовательность $xy_n \dots$

$$\pi = \textcolor{red}{3} \rightarrow \textcolor{green}{\pi}$$

1.33 Здесь должна была быть лекция

1.34 ...

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k$$

$a \in \mathbb{C}, C_k \in \mathbb{C} \quad \forall z \in B_R(a) \implies C_k = \frac{S^{(k)}(a)}{k!}$ однозначно задаются коэффициенты

Пример. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad f \in C(\mathbb{R})$

$$\triangleleft f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^{y^2}} = 0$$

$$f'_{x \neq 0}(x) = f(x) \cdot \left(\frac{2}{x^3}\right) = 2 \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} \rightarrow 0, x \rightarrow 0$$

$$f''(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3 x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2y^4}{e^{y^2}} = 0, ..$$

$$C_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{0}{k!} = 0$$

Ряд Тейлора $\equiv 0 \quad f(z) = S(z)$ лишь при $x = 0$

Пример. $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad |z| < 1$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \quad |x^2| < 1 \quad |x| < 1$$

Определение 21. $Hol(O) = \{f : O \rightarrow \mathbb{C}, \forall z \in O \exists f'(z_0)\}$, т.е. f — \mathbb{C} -дифференцируема, O — открытое в \mathbb{C}

Теорема 35. Если $f \in Hol(B_R(a)), a \in \mathbb{C}, R \in (0, +\infty] \implies \exists$ единственный набор $\{C_k\}_{k=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$:

$$\forall z \in B_R(a) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - a)^k$$

1.35 $\exp, \cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh}$

Определение 22. $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = (*)$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n + 1 = +\infty$$

(*) сходится на \mathbb{C}

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z^k)'}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \implies e^z \in Hol(\mathbb{C})$$

Определение 23. $\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Оба ряда сходятся $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2j+1}}{(2j+1)!} \\ &= \cos z + i \sin z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i \sin z \\ e^{-iz} &= \cos z - i \sin z \\ \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ \text{sh } z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\ \cos z &= \text{ch}(iz) \\ \sin z &= \frac{\text{sh}(iz)}{i} \\ \text{ch } z &= \cos\left(\frac{t}{i}\right) = \cos(iz) \\ \text{sh } z &= i \sin\left(\frac{z}{i}\right). \end{aligned}$$

Теорема 36 (единственности для \mathbb{C} -дифференцируемых функций). \square
 $f, g \in \text{Hol}(O) \quad \square \quad E \subseteq O \subseteq C : E' \cap O \neq \emptyset \quad O$ – область (закнутое связное)

Если $f|_E = g|_E \implies f \equiv g$ (в O)

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}.$$

Если фиксировать $x_1 \in \mathbb{R}$ $f(z) = e^{x_1+z} = g(z) = e^{x_1} e^z$

Всё это сохраняется на \mathbb{C}

По аналогичным причинам все формулы для арифметических действий и тригонометрических функций сохраняются

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos z &\equiv \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \\ \sin z &\equiv \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \\ \cos(it) &= \operatorname{ch}(-t) = \operatorname{ch} t \quad \sin(it) = \frac{\operatorname{sh}(-t)}{i} = i \operatorname{sh} t \\ \sin, \cos &\text{ неограниченные функции} \\ e^z &= \cos(-iz) + i \sin(-iz) \\ e^{z+2\pi k \cdot i} &= e^z. \end{aligned}$$

Пример. $\cos z = 2 \quad z = x+iy \iff \begin{cases} \sin x \operatorname{sh} y = 0 \\ \cos x \operatorname{ch} y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ y = \pm (\operatorname{ch}_{[0,+\infty)})^{-1}(2) \end{cases}$

e^z не имеет корней на \mathbb{C}

$$e^z = A \quad A$$

Определение 24. $\operatorname{Ln}(A) = \{z : e^z = A\} = \{\ln|A| + i \operatorname{Arg} z\}$

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z \quad \arg z \in (-\pi, \pi]$$

Замечание. Все корни косинуса и синуса лежат на вещественной прямой

$$(1+z)^p = e^{p \ln(1+z)} \in \operatorname{Gol}(B_1(0))$$

$z = x \in (-1, 1)$ $(1+z)^p$ совпадает с прежним определением.

Равенство выше продолжает степенную функцию с $(-1, 1)$ в $B_1(0)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} z^k = (1+z)^p \quad \forall z : |z| < 1 \quad \binom{n}{k} = \begin{cases} 1, k=0 \\ \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$\left| \frac{\binom{p}{k+1}}{\binom{p}{k}} \right| = \frac{p-k}{k+1} = \frac{|k-p|}{|k+1|} = \frac{k-p}{k+1} < 1 \implies \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} z^k$ сходиться по признаку Лейбница.

$$\left(\frac{1}{2}\right)_k = \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k k!}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} x^k$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \operatorname{arctg} x'(t) dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{при } |x| < 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} (-x^2)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^{2k}$$

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)^2} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 + \dots$$

1.36 Вещественная аналитичность

$O \subseteq \mathbb{R}$ O – область

$f : O \rightarrow \mathbb{R}$ f называется (вещественно) аналитичной, если $\forall a \in O \exists B_R(a) \quad (R > 0) \exists (C_k)_{k=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{R} : \forall x \in B_R(a)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x-a)^k$$

Определение 25 (Комплексная аналитичность). $O \subseteq \mathbb{C}$ O – открытое, $f : O \rightarrow \mathbb{C}$

f – \mathbb{C} -аналитична $\iff \exists a \in O \exists B_R(a), R > 0 \exists (C_k^{\infty}) : \forall z \in B_R(a) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k$

Замечание. Если $\{f^{(k)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничено на $\langle a, b \rangle$, тогда функция $f \in C^{\infty}(\langle a, b \rangle)$

1.37 Системы множеств

X – множеств. $2^X = \{A : A \subseteq X\}$. Вместо множества множеств говорят система множеств.

Определение 26. Система множеств – множества некоторых подмножеств множества X

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subseteq 2^X$$

Определение 27. $\sqsubset X$ – множество. $\mathfrak{P} \subseteq 2^X$

\mathfrak{P} называется полукольцом, если:

1. $\emptyset \subseteq \mathfrak{P}$
2. $A, B \in \mathfrak{P} \implies A \cap B \in \mathfrak{P}$
3. $A, B \in \mathfrak{P} \implies \exists C_1, \dots, C_L \in \mathfrak{P} : A \setminus B = \coprod_{l=1}^L C_l$ – дизъюнктное объединение

Замечание. Вместо (3) можно требовать

$$3 \quad A, B \in \mathfrak{P}, B \subseteq A \implies \exists \text{ диз. } \{C_1, \dots, C_L\} : A \setminus B = \coprod_{l=1}^L C_l$$

$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$, последнее принадлежит \mathfrak{P} по 2

Пример. 1. 2^X

$$2. \{\emptyset\}$$

$$3. \mathfrak{P}_{1\text{я}} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\} \text{ – одномерные ячейки}$$

$$4. \mathfrak{P}_{1\text{п}} = \{\langle a, b \rangle : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\} \text{ – промежутков}$$

Утверждение 11 (О произведение полуколец). $\sqsubset X, Y$ – множества. $\mathfrak{P}_X, \mathfrak{P}_Y$ – полукольца. Тогда $\mathfrak{P}_X \times \mathfrak{P}_Y = \{A \times B : A \in \mathfrak{P}_X, B \in \mathfrak{P}_Y\}$ – полукольцо на $X \times Y$

Доказательство. 1. верно. $\emptyset \times \emptyset$

$$2. \sqsubset A \times B, C \times D \in \mathfrak{P}_X \times \mathfrak{P}_Y \implies (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

$$3. \sqsubset A \times B \supseteq C \times D \implies C \subseteq A, B \subseteq D$$

$$A \setminus C = \coprod D_j \quad C \setminus D = \coprod E_j$$

$$D_0 = C, E_0 = D \implies A = \coprod_{i=0}^I D_i, D = \coprod_{j=0}^J E_j$$

$$A \times B = (\coprod D_i) \times (\coprod E_j) = \coprod (D_i \times E_j) = D_0 \times E_0 \coprod_{i=0 \dots I, j=0 \dots J, (i,j) \neq (0,0)} (D_i \times E_j)$$

Определение 28. $\sqsubset X$ – множество. $\mathfrak{A} \subseteq 2^X$. \mathfrak{A} называется σ -алгеброй, если:

1. $a \in \mathfrak{A} \implies A^C \in \mathfrak{A}$
2. $\{A_i\}$ не более, чем счётный набор элементов $\mathfrak{A} \implies \bigcap_i A_i \in \mathfrak{A}$

Утверждение 12. $\sqsubset X$ – .. множество, $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ – σ -алгебра $\subseteq 2^X$. Тогда:

1. $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \setminus B \in \mathfrak{A}$
2. $\{A_i\}$ – не более, чем счётное. $\{A_i\} \subseteq \mathfrak{A} \implies \bigcup_i A_i \in \mathfrak{A}$
3. \mathfrak{A} есть полукольцо

Доказательство. 1. $A \setminus B = A \cap (B^C) \in \mathfrak{A}$

$$2. \left(\bigcup_i A_i \right)^{CC} = \left(\bigcap_i A_i^C \right)^C \in \mathfrak{A}$$

$$3. \mathfrak{A} \neq \emptyset \implies \exists A \in \mathfrak{A} \implies A \setminus A = \emptyset \in \mathfrak{A}$$

Пример. $\mathfrak{A} = \{A - \text{нбчс или } A^C \text{ нбчс} \}$

Если хотя бы одно A_i нбчс, то их пересечение тоже нбчс

Если все нечётны, значит дополнения к ним нбчс. $\left(\bigcap_i A_i \right)^{CC} = \left(\bigcup_i A_i^C \right)^C$

Задача 9. 1. $\mathfrak{A} = \{B - \text{огр или } B^C - \text{огр} \}$, X – метрическое пространство. Является ли это сигма-алгеброй

Утверждение 13. $\sqsubset X$ – множество $\mathfrak{A} \subseteq 2^X$

Тогда существует наименьшая по включению σ -алгебра, содержащая \mathfrak{A}

Доказательство. $\mathfrak{A}_* = \bigcap_{\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{A}_0} \mathfrak{A}$ – пересечение таких σ -алгебра

В пересечении входит 2^X , в каждое входит \emptyset

Она наименьшая, потому что наименьшая входит в пересечение ■

Лемма 6. Пересечение σ -алгебр – σ -алгебра

Определение 29. Если $\mathfrak{A}_0 \subseteq 2^X \implies$ наименьшая σ -алгебра, содержащая \mathfrak{A}_0 называется борелевской оболочкой системы \mathfrak{A}_0

Определение 30. $E \in \mathfrak{B}(\Omega)$

Ω – стандартная (Евклидова) топология в \mathbb{R}^n

E – борелевское множество.

F_σ – множество – счётное объединение замкнутых

G_δ -множество – счётное пересечение открытых

Пример. $\{(\cdot)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k(\cdot) \implies$ тип G_δ

в \mathbb{R} $Q - F_\sigma$

$(F_\sigma)_\delta = F_{\sigma\delta\sigma\ldots}$

Теорема 37. $\square O$ – открытое в \mathbb{R}^n

Тогда $O = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} P_j$ $\{P_j\}$ – кубические ячейки со стороной $\frac{1}{2^k}$

Определение 31. $\square X$ – множество, $\mathfrak{P} \subseteq 2^X$, \mathfrak{P} – полукольцо

$\mu : \mathfrak{P} \rightarrow [0, +\infty]$ называется объёмом (мерой) на \mathfrak{P} , если:

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. \forall конечного (счётного) дизъюнктного объединения семейства $\{P_j\} \subseteq \mathfrak{P} :$ $P = \bigsqcup P_i \in \mathfrak{P}$

$$\mu(P) = \sum_j \mu(P_j)$$

конечная аддитивность объема, счётная аддитивность меры

Замечание. Из счётной следует конечная, любая мера является объёмом.

Пример. X – любое множество. $\mathfrak{P} = 2^X$

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

Если μ – мера на полукольце \mathfrak{P} $\mathfrak{P} \subseteq 2^X$

$f(x)$ – ступенчатая функция, т.е. $\exists \{E_1, \dots, E_N\} \in \mathfrak{P}$:

$$f(x) = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{E_j} \quad \chi_A(p) = \begin{cases} 1 & , p \in A \\ 0 & , p \notin A \end{cases}$$

$$\int_X f d\mu = \sum_{j=1}^N c_j \int_X \chi_{E_j} d\mu \quad \int_X \chi_{E_j} d\mu = \mu(E_j)$$

Пример. $\int_{\mathbb{R}} f(x) d\delta_0 = \int_{\{0\}} f(x) d\mu + \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} f(x) d\delta_0 = \chi_{\{0\}} \cdot f(0) + 0 = f(0) \cdot \delta_0(\{0\}) = f(0)$

Пример. $\mathfrak{P} = 2^{\mathbb{N}} \ni A$

$$\mu(A) = \begin{cases} \#(A), & \text{если конечно} \\ +\infty & \end{cases}$$

Замечание. Условие $\mu(\emptyset)$ вытекает из конечной аддитивности, если $\exists A \in \mathfrak{P} : \mu(A) < +\infty$

$$(\implies \mu(A) = \mu(A \amalg \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset) \implies 0 = \mu(\emptyset))$$

$\mu(P) \equiv +\infty$ – счётная аддитивность есть, а $\mu(\emptyset) = +\infty$

Теорема 38 (Элементарные свойства объёмов и мер). $\sqsupset \mu$ – объём (мера) на полукольце $\mathfrak{P} \subseteq 2^X$

1. Если $\{P_j\} \subseteq \mathfrak{P}$ – конечный (счётный) набор $P \in \mathfrak{P}$

$$\amalg P_j \subseteq P \implies \sum_i \mu(p_j) \leq \mu(P) \text{ – усиленная монотонность}$$

2. $\{P_i\} \subseteq \mathfrak{P}$ – конечный (счётный) набор $P \in \mathfrak{P}$

$$P \subseteq \bigcup_j P_j \implies \mu(P) \leq \sum_j \mu(P_j) \text{ – конечная (счётная) полуаддитивность}$$

Утверждение 14. Если $\mathfrak{P} \subseteq 2^X$ – полукольцо, то:

1. $P \in \mathfrak{P}$ $P_1, \dots, P_N \in \mathfrak{P}$, то $\exists \{Q_1, \dots, Q_L\}$ – дизъюнктивный набор $\subseteq P$:

$$P \setminus \left(\bigcup_{n=1}^N P_n \right) = \prod_{l=1}^L Q_L$$

2. Если $P_1, \dots, P_N \in \mathfrak{P}$, то существует Q_{nl}

$$\bigcup_{n=1}^N P_n = \prod_{n=1}^N \prod_{l=1}^{L_n} Q_{nl}$$

Точнее диз. $\{Q_{nl}\}_{n=1..N, l=1..L_N}$ и $\forall l = 1..L_N \quad Q_{nl} \subseteq P_n$

Доказательство. 1. По индукции по N . Если $N = 1$ утверждение верное по 3-й аксиоме полукольца.

$$N \rightarrow N + 1$$

$$\begin{aligned} P \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{N+1} P_n \right) &= \left(P \setminus \bigcup_{n=1}^N P_n \right) \setminus P_{N+1} = \text{по индукционному предположению} \\ &= \left(\prod_{l=1}^L Q_l \right) \setminus P_{N+1} = \\ &= \prod_{l=1}^L (Q_l \setminus P_{N+1}) = \prod_{e=1}^L \prod_{j=1}^{J_l} Q_{ej} \end{aligned}$$

$$2. \bigcup_{i=1}^N P_i = P_1 \vee (P_2 \setminus P_1) \vee (P_3 \setminus (P_1 \cup P_2)) \vee \dots \vee (P_N \setminus (P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_{N-1}))$$

■

Доказательство. 1. $\sum_n \mu(P_n) \leq \mu(O)$

$$\forall N \quad \sum_{n=1}^N \mu(P_n) \leq \mu(P) \text{ если } \prod_{n=1}^N P_n \leq P$$

В силу теоремы о свойствах полукольца $\exists \{Q_1, \dots, Q_L\}$ – диз, $\subseteq \mathfrak{P}$:
 $P \setminus \prod P_n = Q_l$

$$(\prod P_n) \sqcup (\prod Q_l) = P$$

$$\text{мера левой части} = \sum_{n=1}^N \mu(P_n) + \sum_{l=1}^L \mu(Q_l) = \mu(P)$$

$$2. \cup P_j = P_1 \coprod (P_2 \setminus P_1) \coprod \dots$$

$$\coprod P_i \cap P = P$$

$$B_j = (P_j \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_{j-1})) \cap P = \coprod \tilde{Q}_{jl} \cap P = \coprod (\tilde{Q}_{jl} \cap P) \cap P$$

$$P = \coprod_j \coprod_{l=1}^L Q_{jl}$$

$$\mu(P) = \sum_j \sum_{l=1}^L \mu(Q_{jl}) \leq \mu(P_J)$$

■

Утверждение 15. $\nu(A \times B) = \nu(A) \cdot \nu(B)$

Теорема 39. Классический объём ν_n есть мера на \mathcal{P}_n (т.е. ν_n – счётно-аддитивна)

Доказательство. По теореме о свойствах объёмов $\coprod_{k=1}^{\infty} P_k \subseteq P \implies \sum_{k=1}^{\infty} \nu(P_k) \leq \nu(P)$

Если $P, P_k \in \mathcal{P}$ и $P = \coprod_{k=1}^{\infty} P_k \implies \mu_n(P) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(P_k)A$. Неравенство \leq происходит из прошлого абзаца

Свойство в другую сторону называется счётной полуаддитивностью

$\forall \varepsilon > 0 \quad P = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j] \quad \triangleleft K = \prod_{j=1}^n [a_j, \tilde{b}_j] \quad \tilde{P} = \prod_{j=1}^n [a_j, \tilde{b}_j], \text{ где } \tilde{b}_j \in (a_j, b_j) : \quad \nu(\tilde{P}) > \nu(P) - \frac{\varepsilon}{2}$

$$\tilde{P}_k = [\tilde{a}_j, b_j] \quad \tilde{a}_j < a_j \quad \nu_k(\tilde{P}_k) < \nu(P_k) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$O_k = \prod (a_j, b_j) \quad P_k \subseteq O_k \subseteq \tilde{P}_k \quad \tilde{P} \subseteq K \subseteq P = \bigcup P_k \subseteq \bigcup_k O_k$, т.о. $\{O_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует открытое покрытие компакта K , а значит можно выбрать конечное подпокрытие $\{O_1, \dots, O_N\}$ – покрытие K

$$\tilde{P} \subseteq K \subseteq \bigcup_{k=1}^N O_k \subseteq \bigcup_{k=1}^N \tilde{P}_k. \text{ В силу конечной аддитивности } \nu_n(\tilde{P}) \leq \sum_{k=1}^N \nu_n(\tilde{P}_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu_n(\tilde{P}_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\nu(P_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_n(P_k) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\nu_n(P) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu_n(P_k) + \varepsilon \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad \nu_n(P) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu_n(P_k)$$

■

Определение 32. λ_n – стандартное продолжение ν_n (с \mathcal{P}_n)

\mathcal{A}_n – область определения мер λ_n

$E \in \mathcal{A}_n \xLeftrightarrow{\text{def}} E$ – измеримо по Лебегу

$\mathcal{N} = \{\}$

...

Определение 33. Если H – гиперплоскость, параллельная координатному подпространству.

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = c\}$$

$$\implies \lambda_n(H) = 0$$

Доказательство. $H = \cup_j H_j \quad H_j = H \cap [-j, j]^n$

Н.у.о $j = n$. $H = \mathbb{R}^{n-1} \times \{c\}$

$$H_j = [-j, j]^{n-1} \times \{c\} = \bigcap_{l=1}^{\infty} [-j, j]^{n-1} \times [c, c + \frac{1}{2}) \implies \lambda_n(H_j) = \lim_{l \rightarrow \infty} \lambda_n(H_{jl}) = 0 \quad \blacksquare$$

Замечание. μ – полная мера. A – измеримо, e – нуль-множество. $B \triangle A \subseteq e \implies B$ измеримо и $\mu(A) = \mu(B) = \mu(A \cap B)$

$$(A \cap B) = A \setminus (A \setminus B) \text{ – измеримо} \quad B = (A \cap B) \amalg (B \setminus A)$$

Утверждение 16. $\Pi = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \dots \times \langle a_n, b_n \rangle \quad -\infty \leq a_k, b_k \leq +\infty$

$$\implies \Pi \in \mathcal{A} \text{ и } \lambda_n(\Pi) = \prod (b_k - a_k)$$

Утверждение 17. λ_n – σ -конечная мера, $\mathbb{R}^n = \bigcup_{N=1}^{\infty} [-N, N]^n \quad \lambda_n([-N, N]^n) = (2N)^n < +\infty$

Утверждение 18. $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n \quad \nu_{n*}(E) = \inf \{ \lambda_n(G) : G \text{ – откp. }, E \subseteq G \}$

В частности, если $E \in \mathcal{A}_n$

$$\lambda_n(E) = \inf \{ \lambda_n(G) : G \text{ – откp. }, E \subseteq G \}$$

Утверждение 19. $\forall E \in \mathcal{A}_n \quad \lambda_n(E) = \sup\{\lambda_n(F) : F - \text{замкн}, F \subseteq E\} = \sup\{\lambda_n(K) : K - \text{комп}, K \subseteq E\}$

Утверждение 20. $\forall E \in \mathcal{A}_n \exists \text{ окр } E \subseteq G:$

1.38 Много чего

1.39 Продолжение

Утверждение 21. E – измеримо, то

$$\lambda_n(E) = \inf\{\lambda_n(G) : E \subseteq G, G - \text{откр.}\}$$

Следствие 10. $\forall \varepsilon > 0 \forall (\text{измерим}) E \in \mathcal{A}_n \quad \exists \text{ откр } G : G \supset E$

$$\lambda_n(G \setminus E) < \varepsilon$$

Доказательство. Если $\lambda_n(E) < +\infty \implies \exists \text{ откр. } G \supset E : \lambda_n(G) < \lambda_n(E) + \varepsilon$
 $\lambda_n(G) = \lambda_n(E) + \lambda_n(G \setminus E)$

$$G = E \amalg (G \setminus E)$$

Если $\lambda_n(E) = +\infty$

$$E_k = E \cap B_0(k)$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_0(k) \right) = E$$

$$\lambda_n(E_k) \leq \lambda_n(B_0(k)) < +\infty$$

$$\forall k \text{ по 1) } \exists \text{ откр } G_k \supset E_k : \lambda_n(G_k \setminus E_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k - \text{откр} \quad G \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E$$

$$\lambda_n(G \setminus E) = \lambda_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \setminus E\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(G_k \setminus E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(G_k \setminus E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} < \varepsilon \quad \blacksquare$$

Следствие 11. $\forall \varepsilon > 0 \forall E \in \mathcal{A} \quad \exists \text{ замкн. } F \subseteq E :$

$$\lambda_n(E \setminus F) < \varepsilon$$

И $E \in \mathcal{A} \implies \lambda_n(E) = \sup \{ \lambda_n(F) : F \subseteq E, F = \overline{F} \}$

Доказательство. $\lambda_n(E) = \lambda_n(F) + \underbrace{\lambda_n(E \setminus F)}_{< \varepsilon}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{для } E^C \quad \exists \text{ откр. } G : G \supset E^C \text{ и } \lambda_n(G \setminus E^C) < \varepsilon$

$F = G^C - \text{замкн, } F \subseteq E \quad G \setminus E^C = G \cap (E^C)^c = G \cap E$

$E \setminus F = E \cap (F^C) = E \cap G$ ■

Определение 34. $\sqsupset \mu - \text{мера на } \mathcal{A} \quad \mathcal{A} \quad \mathcal{A} \subseteq 2^X$

$(X, \mathcal{A}, \mu) - \text{пространство с мерой}$

$X - \text{топологическое пространство}$

Определение 35. Если $\forall E \in \mathcal{A}$

$$\mu(F) = \sup \{ \mu(F) : F = \overline{F} \quad F \subseteq E \} = \inf \{ \mu(G) : G - \text{откр}, E \subseteq G \}$$

, то мера называется регулярной.

Пример. $E = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \quad \mu = \lambda_1$

$$\lambda_1(E) = 0 \quad F = \overline{F} \quad F \supset E \implies \overline{F} \supset \overline{E} = [0, 1]$$

$$\forall \text{ замкн } F : \quad F \supset E \quad \lambda_n(F) \geq \lambda_n([0, 1]) = 1$$

Следствие 12. $\forall E \in \mathcal{A} \quad \exists F_\sigma - \text{множество } F \quad G_\sigma - \text{множество } G :$

$$F \subseteq E \subseteq G \text{ и } \lambda_n(G \setminus F) = 0$$

, т.е.

$\exists \text{ множества меры нуль } e_1, e_2 :$

$$E = F \cup e_1 \text{ и } E = G \setminus e_2$$

Доказательство. $\forall k \quad \exists \text{ замкн } F_k \text{ и откр } G_k : \quad F_k \subseteq E \subseteq G_k \text{ и } \lambda_n(G_k \setminus E) < \frac{1}{2k} \quad \lambda_n(E \setminus F_k) < \frac{1}{2k}$

$$\implies \lambda_n(G_k \setminus F_k) \leq \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}$$

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \quad F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$$

$$\lambda_n(G \setminus F) \leq \lambda_n(G_k \setminus F_k) < \frac{1}{k} \quad \forall k$$

$$\implies \lambda_n(G \setminus F) = 0$$

$$e_1 = E \setminus F \subseteq G \setminus F$$

■

Следствие 13. $\forall E \in \mathcal{A} \quad \exists$ возрастающая последовательность компактов $\{K_j\} \quad K_{j+1} \supset K_j \quad \forall j$:

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \cup e \text{ и } e \text{ меры нуль } (\lambda_n(e) = 0)$$

Доказательство. \square $\{F_k\}$ – из следствия 2, замкнутые, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \cup e_2$

$$F_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_{kj} \quad F_{kj} = F \cap \overline{B_j(0)} - \text{комп.}$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} F_{kj} = \bigcup_{l=1}^{\infty} F_l - \text{объединение компактов}$$

■

Теорема 40 (сохранение измеримости при гладком отображении). \square
 $\phi \in C^1(O \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n) \quad O - \text{откр}$ Если $E \subseteq G$ и $E \in \mathcal{E}$ Тогда $\forall E \subseteq G$

$$\Phi(E) \in \mathcal{E}$$

$$\forall e \subseteq G \text{ и } \lambda_n(e) = 0 \implies \lambda_n(\Phi(e)) = 0$$

Доказательство. $E \in \mathcal{E} \quad E = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \cup e$

$\Phi(E) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \cup \Phi(e)$ – объединение компактов и множества меры ноль

переходя ко второму: По теореме о представлении открытых множеств $\exists \quad \{P_k\}_{k=1}^{\infty}$
– последовательность кубических ячеек

$$G = \cup P_k \quad \forall k \quad \overline{P_k} \subseteq G$$

1. $e \subseteq P_{k_0}$ для некоторого k_0 . Гладкое отображение на компакте $\implies \Phi$ липшицево на P , т.е. $\exists C : \forall x, y \in P \quad \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq C \cdot \|x - y\|$

$$\langle \varepsilon \rangle > 0 \quad \exists \text{ откр } G : \quad G \supseteq e \text{ и } \lambda_n(G) < \varepsilon$$

По теореме о представлении открытого \exists последовательность кубических ячеек $\{Q_j\}_{j=1}^\infty \quad G = \prod_{j=1}^\infty Q_j \implies e \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty (Q_j \cap P) \implies$

$$\Phi(e) \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty \Phi(Q_j \cap P)$$

$$\text{diam}(\Phi(Q_j \cap P)) \leq C \quad \text{diam}(Q_j \cap P) \leq C \text{diam}(Q_j) = C\sqrt{n}(\lambda_n(Q_j))$$

Там много возни с ячейками

■

Лемма 7 (об единственности меры на \mathcal{A}). $\square \mu, \nu$ – две регулярные меры на \mathcal{A}_n

Если \forall кубических ячеек Q

$$\mu(Q) = \nu(Q)$$

, то μ и ν совпадают (на \mathcal{A}_n)

Доказательство. Точно верно на открытых, т.к. открытые можно выразить через кубические ячейки.

Для компакта верно, потому что $K = B \setminus (B \setminus K)$

■

Следствие 14. Если $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ – инъекция и $\forall E \in \mathcal{A}_m \quad \Phi(E) \in \mathcal{E}$ и $\exists c \geq 0 \quad \forall$ кубической ячейки Q

$$\lambda_n(\Phi(Q)) = C\lambda_m(Q)$$

Тогда $\forall E \in \mathcal{A}_n$

$$\lambda_n(\Phi(E)) = C\lambda_m(E)$$

Доказательство. $\mu = c\lambda_n \quad \nu = \lambda_n(\Phi(E)) \forall E \in \mathcal{A}_n$

Первая очевидно мера, вторая мера, потому что Φ биекция

■

Определение 36. $T(x) = x + v$ – сдвиг на $v \quad x, v \in \mathbb{R}^n$

Утверждение 22. Мера Лебега инвариантна относительно любого сдвига.

Доказательство. $\Phi(x) = T_v(x)$

$$\lambda(\Phi(Q)) = \lambda_n(T_v(Q))$$

Ячейка передвинется поточечно, длины рёбер не изменятся,

А тогда по лемме $\lambda_n(T(E)) = \lambda_n(E)$ ■

Определение 37. $D : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется диагональным (относительно стандартного базиса) если в этом базисе, если она представляется как диагональная матрица.

Утверждение 23. Если $l_1, \dots, l_n > 0$ – числа на диагонали, то

$$\lambda_n(D(Q)) = l_1 l_2 \dots l_n \lambda_n(Q)$$

$$\implies \lambda_n(D(E)) = l_1 l_2 \dots l_n \lambda_n(E)$$

Замечание (Напоминание). $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – линейное, сохраняет скалярное произведение $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$ называется ортогональным

Или по-другому:

1. U ортогонально
2. U изометрия
3. $U^{-1} = U^T$

Утверждение 24. \forall линейного $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : \det A \neq 0 \implies \exists$ ортогональные операторы U_1, U_2 и диагональный $D = \text{diag}(l_1, \dots, l_n) \quad l_i > 0 :$

$$A = U_2 D U_1$$

Доказательство. $A^T A$ симметричный, положительный

$$\langle A^T A x, x \rangle = \langle A x, A x \rangle = \|A x\|^2 \geq 0 \quad = 0 \iff x = 0$$

Тогда он приводится к диагональному виду. $A^T A = Q \tilde{D} Q^{-1}$ Q – ортогональный, $\tilde{D} = \text{diag}(m_1, \dots, m_n) \quad m_i > 0$ – диагональный

$$D = \text{diag}(\sqrt{m_1}, \dots, \sqrt{m_n}) \quad D \cdot D = \tilde{D}$$

$$\begin{aligned}
U_1 &= Q^{-1} \quad U_2 = AU_1^{-1}D^{-1} \\
U_2U_2^T &= (AU_1^{-1}D^{-1})(AU_1^{-1}D^{-1})^T = AU_1^{-1}D^{-1}D^{-1T}U_1^{-1T}A^T = AQ\tilde{D}^{-1}QA^T = \\
\tilde{D} &= Q^T A^T A Q \quad \tilde{D}^{-1} = Q^T A^{-1} A^{-1T} Q \\
&= AQQ^T A^{-1}(A^T)^{-1}QQ^T A^T = Id \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Теорема 41. \square L – лин из $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Тогда $\forall E \in \mathcal{A}$

$$\lambda_N(L(E)) = |\det[L]| \cdot \lambda_n(E)$$

Доказательство. 1. Если $\det L \neq 0 \implies$ по лемме \exists ортогональные U_1, U_2 и диаг. $D : L = U_2 D U_1$

(a) $L = U$ ортогональное

$$C = \frac{\lambda_n(U(Q_*))}{\lambda_n(Q_*)} = \lambda_n(U(Q_*)) \quad Q_* = [0, 1]^n$$

\square Q – произвольная кубическая ячейка.

$$Q = b \cdot Q_* + a = T_a(bQ_*)$$

$$U(x+y) = U(x) + U(y)$$

$$U(T_y(x)) = T_{U(y)}(U(x)) \text{ или } U \cdot T_y = T_{U(y)} \cdot U$$

$$\lambda_n(U(Q)) = \lambda_n(U(T_a(bQ_*))) = \lambda_n(T_{U(a)}U(bQ_*)) = \lambda_n(bU(Q_*)) = b^n \lambda_n(U(Q_*)) = b^n C = \lambda_n(Q)C$$

$$\lambda_n(UQ) = C \lambda_n(Q)$$

Тогда по лемме $\lambda_n(Q(E)) \equiv C \cdot \lambda_n(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}_n$

$E = B_R(0) \quad \lambda_n(B) = \lambda_n(U(B)) = C \lambda_n(B) \implies C = 1 \implies \forall$
ортогональное преобразование сохраняет меру.

2. $\det L = 0 \implies L(\mathbb{R}^n)$ подпространство размерности $k < n$ в \mathbb{R}^n

$$X = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$$

$$\lambda_n(X) = 0 \quad \square \quad v^1, \dots, v^k \text{ – базис в } L(\mathbb{R}^n)$$

$$v^{k+1}, \dots, v^n \text{ – базис } (L(\mathbb{R}^n))^\perp$$

$$e^k = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0) \text{ – 1 на } k \text{ месте}$$

$A : e^k \rightarrow v^k; \quad A : X \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$ – гладкое отображение, которое переводит множество меры ноль в множество меры ноль $\lambda(L(\mathbb{R}^n))$

\blacksquare

1.40 Измеримые множества

$\square (X, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с мерой

Определение 38. $\square E \subseteq X \quad f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

f называется измеримой на множестве $E \quad (f \in S(E))$, если $\forall a \in \mathbb{R}$ измеримы $(\in \mathcal{A})$:

- $E \{f < a\}$
- $E \{f > a\}$
- $E \{f \leq a\}$
- $E \{f \geq a\}$

Здесь $E \{f < a\} = \{x \in E : f(x) < a\}$

Замечание. Если $S(E) \neq \emptyset$, то $E \in \mathcal{E}$

$$E = E \{f < a\} \cup E \{f \geq a\}$$

Утверждение 25. $\square E \in \mathcal{A} \quad f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Следующие утверждения равносильны:

1. $\forall a \in \mathbb{R} \quad E \{f > a\} \in \mathcal{A}$
2. $\forall a \in \mathbb{R} \quad E \{f \leq a\} \in \mathcal{A}$
3. $\forall a \in \mathbb{R} \quad E \{f < a\} \in \mathcal{A}$
4. $\forall a \in \mathbb{R} \quad E \{f \geq a\} \in \mathcal{A}$

Кстати, эти множества называются множествами Лебега, если вы ещё не слышали о нём.

Замечание. E Неизмеримо $f(x) \equiv +\infty \quad E \{f < a\} = \emptyset \in \mathcal{A} \quad E \{f > a\} = E \notin \mathcal{A}$

Доказательство.

- 1 \implies 2 $E \{f \leq a\} = E \setminus E \{f > a\}$
- 2 \implies 3 $E \{f < a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E \{f \leq a - \frac{1}{k}\}$
- 4 \implies 2 $E \{\}$

■

Утверждение 26. $E \subseteq X$, то

$$E \in \mathcal{A} \iff \chi_E \text{ измерима на } X$$

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Замечание. $\forall x \in \mathbb{R} \quad X \setminus \{\chi_{E_0} < a\} = \begin{cases} X & a > 1 \\ X \setminus E_0 & 0 < a \leq 1 \\ \emptyset & a \leq 0 \end{cases}$

$$X \setminus E_0 \in \mathcal{A} \iff E_0 \in \mathcal{A}$$

Утверждение 27. $f \in S(E) \quad E_0 \in \mathcal{A} \quad E_0 \subseteq E \implies f \in S(E_0)$

Доказательство. $\forall a \in \mathbb{R} \quad E_0 \setminus \{f < a\} = E \setminus \{f < a\} \cap E_0$ ■

Утверждение 28. Если $\forall k \in \mathbb{N} \quad f \in S(E_k), E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \implies f \in S(E)$

Замечание. $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} E \setminus \{f < a\} &= (\cup E_k) \setminus \{f < a\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \setminus \{f < a\}) \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

Пример. Примеры измеримых:

$$1. f \equiv C \implies f \in S$$

$$X \setminus \{f < a\} = \begin{cases} X & C < a \\ \emptyset & C \geq a \end{cases}$$

$$f \in S(X) \quad \forall E \in \mathcal{A} \implies f \in S(E)$$

$$2. \chi_{E_0} \in S(E) \forall E \in \mathcal{A}$$

Утверждение 29. Если $d \in S(E) \quad f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, тогда $f^{-1}(\langle a, b \rangle) \in \mathcal{A}$

Доказательство.

$$\begin{aligned} f^{-1}((a, b)) &= \{x \in E : f(x) \in (a, b)\} \\ &= E \{f < b\} \cap E \{f > a\} \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

■

Утверждение 30. Если $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n$ – сигма-алгебра измеримых по Лебегу множеств, $E \in \mathcal{A}_n$

$$f \in C(E) \implies f \in S(E)$$

Доказательство. $E \{f < a\} = f^{-1}([-\infty, a))$ – открытое в $E \implies E \{f < a\} = E \cap O, O$ – открытое в $\mathbb{R} \in \mathcal{A}_n$ ■

Утверждение 31. $\sqsupset \mu$ – полная, $\mu(e) = 0$

Тогда $\forall f : e \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \implies f$ измерима на E

Доказательство. $\begin{cases} e \{f < a\} \subseteq e \\ \mu - \text{полная} \end{cases} \implies e \{f < a\} \in \mathcal{A} \implies f \in S(e)$ ■

Определение 39. $\sqsupset (X, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с мерой

$P(x)$ – утверждение зависящее от $x \in E$.

Говорят, что $P(X)$ почти везде на E , если $\exists e \subseteq E \quad \mu(e) = 0$ и $P(X)$ верно для $\forall x \in E \setminus e$

Замечание. Если $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad E \subseteq \tilde{E} \quad \mu(\tilde{E} \setminus E) = 0$

μ полная $f \in S(E)$ и \tilde{f} – продолжение на \tilde{E} , тогда $\tilde{f} \in S(E)$

Доказательство. $\tilde{f}|_E$ измерима, $\tilde{f}|_{\tilde{E} \setminus E}$ измерима

$$\implies \tilde{f} \text{ измерима и на } E \cup (\tilde{E} \setminus E) = \tilde{E}$$

■

Утверждение 32. Если f определена почти везде на E и измерима на $D(f) \subseteq E$, то полагают f измеримой и на E (т.к. любое продолжение измеримо)

Теорема 42. $\square (X, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с мерой

$\square (f_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq S(E)$, Тогда

1. $\sup_k f_k, \inf_k f_k \in S(E)$
2. $\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k, \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \in S(E)$
3. Если существует поточечный $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ на E , то $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \in S(E)$

Если μ – полная и $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ существует п.в. (почти везде), то $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \in S(E)$

Доказательство. 1. $a \in \mathbb{R} \quad E \{ \sup_k f_k \leq a \} = \bigcap_{k=1}^{\infty} E \{ f_k \leq a \} \in \mathcal{A}$

$$E \{ \inf_k f_k \geq a \} = \cap E \{ f_k \geq a \} \in S(E)$$

$$2. \tilde{f}_k(x) = \sup_{j \geq k} \{ f_j \} \in S(E)$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k = \inf_k \tilde{f}_k \in S(E)$$

■

Утверждение 33. 1. $f \in S(E) \iff f_+, f_- \in S(E)$, где $\begin{cases} f_+(x) = \max \{ f(x), 0 \} \\ f_-(x) = \max \{ -f(x), 0 \} \end{cases}$

2. $f(x) \in S(E) \implies |f| \in S(E)$

Доказательство.

\implies из теоремы

$$\iff \forall a \in \mathbb{R} \quad E \{ f < a \} = \begin{cases} E \{ f_+ < a \} & a > 0 \\ E \{ f_- < -a \} & a \leq 0 \end{cases}$$

$$f < a \iff -f > -a$$

$$2 \quad |f| = \max \{ f_+, f_- \}$$

■

Определение 40. (X, \mathcal{A}, μ) – пространство с мерой

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется ступенчатой (или простой), если:

1. $f \in S(X)$
2. $f(X)$ конечно

Определение 41. $(X, \mathcal{A}, \mu) \quad E \in \mathcal{A}$

$\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ называется (измеримым) разбиением множества E , если:

1. $E = \coprod_{\alpha \in A} E_\alpha$
2. $\forall \alpha \in A \quad E_\alpha \in \mathcal{A}$

Определение 42. $\sqsubset \mathcal{B} \subseteq 2^X \quad X \in \mathcal{B}$

Пусть $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – разбиение X

Разбиение $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ вписано в \mathcal{B} , если

$$\forall \alpha \in A \forall B \in \mathcal{B} \text{ либо } E_\alpha \subseteq B \text{ либо } E_\alpha \cap B = \emptyset$$

Пример. $X = \{1, 2, 3\} \quad \mathcal{B} = \{X, \{2\}\}$

Разбиение $\{\{2\}, \{2, 3\}\}$

Лемма 8. Пусть $\mathcal{B} = \{X = D_0, D_1, \dots, D_m\} \subseteq \mathcal{A}$. Тогда существует конечное разбиение X , вписанное в \mathcal{B}

Доказательство. Индукция по m . \sqsubset_* – вписанное разбиение

$$m = 0 \quad \mathcal{B} = \{X\} \quad \mathcal{B}_* = \{X\}$$

$$m \rightarrow m + 1 \quad m \in \mathbb{Z}_+$$

$$\mathcal{B} = \{X = D_0, D_1, \dots, D_{m+1}\}$$

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{X = D_0, D_1, \dots, D_m\} \text{ по индукционному предположению}$$

$$\exists \tilde{\mathcal{B}}_* = \{E_1, \dots, E_n\} : \quad \forall i = 1 \dots n \quad \forall j = 0, \dots, m$$

$$D_j \subseteq E_i \text{ либо } D_j \cap E_i = \emptyset$$

$$\mathcal{B}_* = \{E_1 \cap D_{m+1}, E_1 \cap D_{m+1}^C, \dots, E_n \cap D_{m+1}, E_n \cap D_{m+1}^C\}$$

$$(E_i \cap E_{m+1}^\pm) \cap (E_j \cap D_{m+1}^\pm) - \text{ не пересекается, если } i \neq j \text{ или } D_{m+1}^\pm = D_{m+1}^\mp \text{ — правые и левые}$$

$$(E_1 \cap D_{m+1}) \cup (E_1 \cap D_{m+1}^C) \cup \dots \cup E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = X$$

Если $(E_i \cap D_{m+1}^\pm) \cap \bigcap_{1 \leq j \leq m} D_j \subseteq E_i \cap D_j$ либо $E_i \subseteq D_j$, либо $E_i \cap D_j = \emptyset$

■

Утверждение 34 (критерий ступенчатых функций). (X, \mathcal{A}, μ)

Следующие утверждения равносильны:

1. f – ступенчатая
2. \exists разбиение $\{E_1, \dots, E_N\}$ пространства X и набор чисел b_1, b_2, \dots, b_N :

$$f(x) = \sum_{j=1}^N b_j \chi_{E_j}(x)$$

3. \exists набор измеримых множеств $\{D_1, \dots, D_m\}$ в X и чисел c_1, \dots, c_m :

$$f(x) = \sum_{k=1}^m c_k \chi_{D_k}$$

Доказательство.

$I \implies II$ по условию функция f принимает конечное множество значений. Пусть это $b_1 < \dots < b_N$

$E_k = X \{f = b_k\}$ – измеримо

$X \{f < b_{k+1}\} \cap X \{f > b_{k-1}\}$

$$X = \coprod E_k = \sum_{k=1}^N b_k \chi_{E_k}(x) \dots$$

■

Утверждение 35. \square f, g – ступенчатые функции, $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольная функция

Тогда:

1. $F \circ f$ – ступенчатая функция
2. $f + g$ – ступенчатая функция

Замечание. В частности $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \cdot f$ – ступенчатая, $|f|$ – ступенчатая

Доказательство. 1. По утверждению $f = \sum_{j=1}^N b_j \chi_{E_j}$, где E_1, \dots, E_N – разбиение

$$F \circ f = \sum_{j=1}^N F \circ (b_j) \cdot \chi_{E_j}(x) \text{ – ступенчатая}$$

$$2. f = \sum_{j=1}^N b_j \chi_{E_j} \quad g = \sum_{k=1}^K \tilde{b}_k \chi_{\tilde{E}_k}$$

Пусть $\{D_1, \dots, D_M\}$ – разбиение X , вписанное в $\{E_1, \dots, E_N, \tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_k, X\}$, но не вписанное в $\{E_1, \dots, E_N, \tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_k\} \implies \chi_{E_j}, \chi_{\tilde{E}_j}$ постоянна на $D_m \quad \forall j, m$

$$\begin{aligned} f &= \sum_{j=1}^N b_j \chi_{E_j} = \sum_{j=1}^N \sum_{m: D_m \subseteq E_j} b_j \chi_{D_m} \\ &= \sum_{m=1}^M C_m \chi_{D_m} \end{aligned}$$

$$\text{Для } g = \sum_{m=1}^M \tilde{C}_m \chi_{D_m} \implies f + g = \sum_{m=1}^M (C_m + \tilde{C}_m) \chi_{D_m}$$

■

Теорема 43 (теорема об аппроксимации измеримых функций). $\square (X, \mathcal{A}, \mu)$ – любое пространство с мерой

$\square f \in S(X), f \geq 0$ (всюду на X)

Тогда \exists возрастающая последовательность неотрицательных ступенчатых $\{f_i\}_{i=1}^\infty$

$f_i(x) \rightarrow f(x)$ поточечно. А если f ограничена (на X), то $f_i \Rightarrow f$ на X

Следствие 15. Если $f \in S(X)$, то f – последовательность ступенчатых $\{f_i\}$

$$\forall x \in X \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad |f_i(x)| \leq |f_{i+1}(x)| \leq |f(x)|$$

и $f_j(x) \rightarrow f(x)$, а если f ограничено, то $f_i \Rightarrow f$

Доказательство следствия. Для f_+, f_- \exists последовательности ступенчатых функций $\{(f_+)_j\}$ $f_{\pm_j} M = f_{\pm_{j+1}}$.. ■

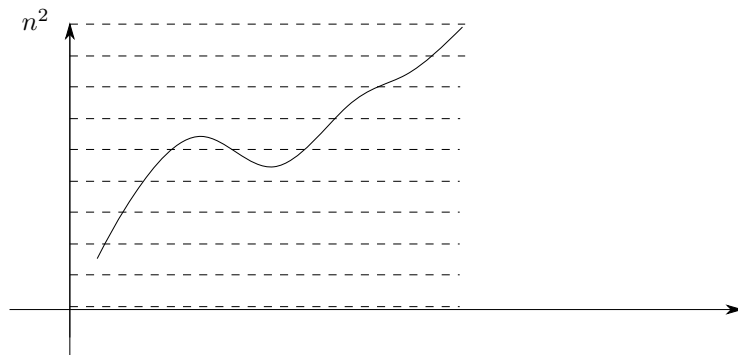


Рис. 1.10: approxmeasure

теоремы. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k = 0..n^2 - 1 \quad \Delta_k = [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}) \quad \Delta_{n^2} = [n, +\infty)$

$\{\Delta_0, \dots, \Delta_{n^2}\}$ – разбиение $[0, +\infty]$

$E_k = f^{-1}(\Delta_k) \quad \{E_k\}_{k=0}^{n^2}$ – разбиение X

$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n^2} \frac{k}{n} \chi_{E_k}(x) \quad x \in X \implies k = 1 : n^2 : x \in E_k$

$f(x) \in \Delta_k \implies \frac{k}{n} < f(x) \quad g_n(x) = \frac{k}{n}$

Если $k < n^2$, то $f(x), \frac{k+1}{n} = g_n(x) + \frac{1}{n}$

$g_n(x)$ – ступенчатая. $f_n(x) = \max \{g_1(x), \dots, g_n(x)\}$ (упражнение проверить, что f_n ступенчатая. Делается аналогично сумме)

$\forall n \in \mathbb{N} \quad g_n(x) \leq f(x)$. Перейдём к максимуму $f_n(x) \leq f(x) \quad f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$

Если $f(x) = +\infty \implies \forall n \in \mathbb{N} \quad f(x) \in \Delta_{n^2} \implies x \in E_{n^2} \quad g_n(x) = n; \quad f_n(x) = n \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty = f(x)$

Если $f(x) < +\infty \implies$ НСНН $n \quad f(x) \leq n \implies x \in E_{kn}$ для $k < n^2 \implies$ Для всех до статистически больших n

$$f_n(x) \leq f(x) \leq g_n(x) + \frac{1}{n} \leq f_n(x) + \frac{1}{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(x) \leq f(x) \leq f_n(x) + \frac{1}{n}$$

$$|f(x) - f_n(x)| = f(x) - f_n(x) \leq f_n(x) + \frac{1}{n} - f_n(x) \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Если f ограничено на X , то утверждение для больших n не зависит от X
 $\sup_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ начиная с некоторого номера ■

Следствие 16. (X, \mathcal{A}, μ)

$f, g \in S(X)$ $F \in C(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ – возрастающая . Тогда:

1. $F \circ f \in S(E)$
2. Если $f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ определена на E , то соответствующая функция также измерима на E

Доказательство. 1. \exists последовательность ступенчатых $f_i(x) \rightarrow f(x)$ по-точечно

$F(f_j(x)) \rightarrow F(f(x))$, если $f(x) < +\infty$. Продолжим F на $\overline{\mathbb{R}}$: $F(\pm\infty) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x) \implies F$ непрерывна из $\overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$$2. f_j \rightarrow f \quad g_j \rightarrow g$$

$f_j \pm g_j \rightarrow f \pm g$ по теореме об арифметических действиях над пределами ■

1.41 Интеграл по мере – определение и простейшие свойства

$\square (X, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с мерой

$E \subseteq \mathcal{A}$

1. f – ступенчатая неотрицательная функция. $f(x) = \sum_{k=1}^k C_k \chi_k$, где $\{E_1, \dots, E_k\}$ – разбиение X

$$\int_E f d\mu = \int_E f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^K C_k \mu(E_k \cap E)$$

2. $f \in S_+(E)$ – неотрицательная измеримая функция.

$$\int_E f d\mu = \sup \left\{ \int_E g d\mu : g - \text{неотр, ступенча и } g(x) \leq f(x) \forall x \in E \right\}$$

3. $f \in S(E)$ ($f : E \rightarrow \mathbb{R}$)

$\int_E f d\mu = \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu$ – при условии, что сумма в правой части определена

Если оба интеграла справа конечны, то и результат конечен (и наоборот). Такие функции называются суммируемыми.

$\mathcal{L}(\mu, E)$ – набор суммируемых функций по мере μ на множестве E функций

4. Если $f = u + iv$ $u = \Re f$ $v = \Im f$

f измерима $\iff u, v$ измеримы

$\int_E f d\mu = \int_E u d\mu + i \int_E v d\mu$, если $u, v \in \mathcal{L}(E, \mu)$

Утверждение 36. Определение интеграла корректно, интеграл монотонно зависит от функции

Доказательство. 1. Если $f = \sum_{k=1}^K C_k \chi_{E_k} = \sum_{j=1}^J b_j \chi_{D_j} \cdot \{E_k \cap D_j\}_{k,j}$ – разбиение X , допустимое для f ($f|_{E_k} = C_k$ $f|_{D_j} = b_j$ $f_{E_k \cap D_j = C_k = b_j}$)

$$\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^K C_k \mu(E_k \cap E) = \sum_{k=1}^K C_k \sum_{j=1}^J \mu(E_k \cap E \cap D_j) = \sum_{k,j} C_k \mu(E_k \cap E \cap D_j)$$

$$\sum_{j=1}^J b_j \mu(D_j \cap E) = \sum_{j=1}^J b_j \sum_{k=1}^K \mu(D_j \cap E \cap E_k) = \sum_{k,j} b_j \mu(E_k \cap E \cap D_j)$$

$$c_k = f|_{E_k \cap E \cap D_j} = b_j \implies c_k = b_j$$

Если f, g – ступенчатые неотрицательные и $\forall x \in E$ $f(x) \leq g(x) \implies \int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$

Существует общее допустимое разбиение для f и g , т.о

$$f = \sum_{k=1}^K C_k \chi_{E_k} \quad g = \sum_{k=1}^K b_k \chi_{E_k}$$

$$x \in E_k \implies f(x) = c_k \leq g(x) = b_k$$

$$\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^K c_k \mu(E_k \cap E) \leq \sum_{k=1}^K b_k \mu(E_k \cap E) = \int_E g d\mu$$

Значит интеграл из этого пункта обладает свойством конечной аддитивности.

2. Если $f \in S_+$ f – ступенчатая, равны ли интегралы в смыслах первого и второго пунктов

Если $g \in S_+$ ступенчатая и $g \leq f$ на $E \implies$ второе больше первого ..

3. Если $f \in S_+(E)$

$$f_+ = f \quad f_- = 0 \quad \int_E f_-$$

$$\int_E f = \int_E f_+ - \int_E f_- = \int_E f_+ - \text{во смысле второго пункта.}$$

Монотонность интеграла из пункта 3. $f \leq g$

$$f_+ = \max(f, 0) \leq \max(g, 0) = g_+$$

$$f_- = \max(-f, 0) \geq \max(-g, 0) = g_-$$

$$\int_E f_+ \leq \int_E g \quad \int_E f_-$$

■

Пример. $f_D = \chi_Q$

$$1. \int_{[0,1]} f_D d\lambda_1 = 1 \cdot \lambda(Q \cap [0, 1]) = 0$$

$$2. \int_{[0,1]} f_D = 1 \cdot \delta_0(Q \cap [0, 1]) = 1$$

Утверждение 37. $\square e_0 \subseteq E \quad E_0, E \in \mathcal{A} \quad f_{E_0} = 0$ Тогда

$$\int_E f d\mu = \int_{E \setminus E_0} f d\mu$$

Существуют или нет одновременно. В случае существования равны.

$$\text{Доказательство. } f = \sum_{k=1}^K c_k \chi_{E_k} = \sum_{k=1}^K c_k \chi_{E_k \cap (X \setminus E_0)} + 0 \cdot \chi_{E_0}$$

$$\int_E f = \sum_{k=1}^K c_k \cdot \mu(E_k \cap (X \setminus E_0) \cap E) + 0 = \sum_{k=1}^K c_k \mu(E_k \cap (X \setminus E_0 \cap (E \setminus E_0))) = \int_{E \setminus E_0} f$$

■

Замечание. Если $f|_E = 0 \quad f \in S(E) \implies \int_E f d\mu = 0$

Следствие 17. $\int_E f = \int_X f \cdot \chi_E \quad \forall f \in S(E)$

Следствие 18 (Монотонность интеграла неотрицательной функции от множества.). Если $f \in S_+(X) \quad E_0 \subseteq E$

$$E_0, E \in \mathcal{A} \implies \int_{E_0} f \leq \int_E f$$

$$\text{Доказательство. } \int_{E_0} f = \int_X f \cdot \chi_{E_0} \leq \int_X f \cdot \chi_E = \int_E f$$

■

Теорема 44 (Леви). $\square (X, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с мерой. $E \in \mathcal{A}$ $\{f_j\}_j \in S(E)$ $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$$\forall x \in E \forall j \in \mathbb{N} \quad 0 \leq f_j(x) \leq f_{j+1}(x) \quad f = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j$$

Тогда

$$\int f d\mu = \lim_E \int f_j d\mu$$

$$(f_j \geq 0 \quad f_i \uparrow f \implies \int_E \lim f d\mu = \lim \int_E f d\mu)$$

Доказательство. $\square q \in (0, 1)$ $\triangleleft \forall$ ступенч $g : \quad 0 \leq g \leq 1$ на K

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad E_j = \{x \in E : \quad f_j(x) \geq q \cdot g(x)\} \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = E?$$

$$\triangleleft \forall x \in E \quad f(x) = 0 \implies f_j(x) = 0 \implies x \in E \forall j \in \mathbb{N}$$

Если $f(x) > 0 \implies qg(x) < f(x)$. Т.к. $f_j \rightarrow f$ поточечно, то НСНН $\bigcup_{j_0} f_{j_0}(x) > 0 \implies \dots$ ■

Утверждение 38. $\forall f, g \in S(E)$

$$\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$$

, если определена правая часть

Для ступенчатых – как выше с помощью общего разбиения

Если $f, g \in S_+$, по теореме об аппроксимации

$$\exists \{f_j\}_{j=1}^{\infty}, \{g_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ ступенч. } \begin{cases} 0 \leq f_j \leq f_{j+1} \leq f \\ 0 \leq g_j \leq g_{j+1} \leq g \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_j \rightarrow f \\ g_j \rightarrow g \end{cases} \implies f_j + g_j \rightarrow f + g$$

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E \lim_{j \rightarrow \infty} (f_j + g_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_E (f_j + g_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} (\int_E f_j d\mu + \int_E g_j d\mu) = \int_E f + \int_E g$$

$$f, g \in S(E) \quad f + g = h$$

$$\int_E h_+ - \int_E h_- = \int_E f_+ - \int_E f_- + \int_E g_+ - \int_E g_-$$

$$\int_E h_+ + \int_E f_- + \int_E g_- = \int_E h_- + \int_E f_+ + \int_E g_+$$

$$h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+$$

$$(h_+ - h_-) = h = f + g = (f_+ - f_-) + (g_+ - g_-)$$

Замечание. Если $\int_E f d\mu$ – конечен (функция суммируема), то f конечно почти везде на E

Доказательство. Достаточно доказать для $f \in S_+$

$$E_{\infty} = E \{f = +\infty\}$$

$$\forall N \quad N \cdot \mu(E_{\infty}) = \int_{E_{\infty}} f \leq \int_E f d\mu < +\infty \implies \mu(E_{\infty}) = 0 \quad \blacksquare$$

Утверждение 39. $\forall C \in \mathbb{C} \quad \forall f \in \mathcal{L}(E) \quad f : E \rightarrow \mathbb{C} \text{ или } f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$$\int_E C f d\mu = C \int_E d\mu$$

Доказательство. 1. $C > 0$ – для частей суммируемых функций можем вынести положительное C

$$2. C = -1 \quad (-f)_+ = f_- \quad (-f)_- = f_+$$

$$3. \quad C = i \quad if = -v + iu \quad \int_E if = \int_E -v + i \int_E u = i \left(i \int_E v + \int_E u \right) = i \int_E f$$

■

Теорема 45 (Нравенство Чебышёва). $f \in \mathcal{L}(E, \mu) \quad \forall t > 0$

$$\mu(E \{ |F| \geq t \}) \leq \frac{1}{t} \int_E |f| d\mu$$

Замечание. Если $f \in S(E) \quad g \in \mathcal{L}(E, \mu) \quad |f| \leq g \implies f \in \mathcal{L}(E, \mu)$

Доказательство. $f_{\pm} < +|f| \leq g \implies \int_E f_{\pm} \leq \int_E g < +\infty \implies f \in \mathcal{L}(E, \mu)$

■

Замечание. $f \in \mathcal{L}(E, \mu) \iff |F| \in \uparrow(E, \mu) \iff \int_E f_{\pm} < +\infty$

Доказательство.

\Leftarrow Из предыдущего замечания

$$\implies \int_E f d\mu = \int_E f_+ + \int_E f_- d\mu < +\infty$$

■

Задача 10. μ – считающая мера на \mathbb{N}