

Конспект по линейной алгебре  
II семестр

Коченюк Анатолий

3 апреля 2021 г.



# Глава 1

## Дополнительные главы линейной алгебры

### 1.1 Полилинейная формы

**Замечание** (вспомним). Линейное отображение  $\varphi(x + \alpha y) = \varphi(x) + \alpha \cdot \varphi(y)$

**Определение 1.**  $\triangleleft X$  – ЛП,  $\dim X = n$

$X^*$  – сопряжённое к  $X$  пространство.

Полилинейной формой (ПЛФ) называется отображение:

$$U : X \times X \times \dots \times X \times X^* \times X^* \times \dots \times X^* \rightarrow K,$$

обладающее свойством линейности по каждому аргументу.

$$\square x_1, x_2, x_3, \dots, x_p \in X \quad y^1, y^2, \dots, y^q \in X^*$$

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x'_i + \alpha x''_i, \dots, x_p, y^1, y^2, \dots, y^q) = \\ = (x_1, x_2, \dots, x'_i, \dots, x_p, y^1, y^2, \dots) + \alpha u(x_1, x_2, \dots, x''_i, \dots, x_p, y^1, y^2, \dots, y^q) \end{aligned}$$

**Замечание.** Пара чисел  $(p, q)$  называется валентностью полилинейной формы

**Пример.**  $\mathbb{R}^n \quad f : \mathbb{R} \rightarrow K$  – ПЛФ  $(1, 0)$

$\hat{x} : \mathbb{R}^{n*} \rightarrow K$  – ПЛФ  $(0, 1)$

Скалярное произведение  $u(x_1, x_2) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  – ПЛФ  $(2, 0)$

Смешанное произведение  $w(x_1, x_2, x_3) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$  – ПЛФ  $(3, 0)$

$\square u, w$  – две полилинейные формы валентности  $(p, q)$

**Определение 2.**

1.  $u = w \iff$

$$u(x_1, \dots, x_p, y^1, \dots, y^q) = w(x_1, \dots, x_p, y^1, \dots, y^q) \quad \forall x_1 \dots x_p y^1 \dots y^q$$

2. Нуль форма  $\Theta \quad \Theta(x_1, \dots, x_p, y^1, \dots, y^q) = 0$

3. Суммой ПЛФ валентностей  $(p, q) \quad u + v$  называется такое отображение  $\omega$ , что  $\omega(x_1, \dots, x_p, y^1, \dots, y^q) = u(x_1, \dots, x_p, y^1, \dots, y^q) + v(x_1, \dots, x_p, y^1, \dots, y^q)$

**Лемма 1.**  $w$  – ПЛФ  $(p, q)$

$$w(\dots, x'_i + \alpha x''_i, \dots) = w(\dots, x'_i, \dots) + \alpha w(\dots x''_i \dots)$$

4. Произведением полилинейной формы на число  $\lambda$  называется отображение  $\lambda u$ , такое что:

$$(\lambda u)(x_1, \dots, x_p, y^1, \dots, y^q) = \lambda \cdot u(x_1, \dots, x_p, y^1, \dots, y^q).$$

**Лемма 2.**  $\lambda u$  – ПЛФ  $(p, q)$

$\square \Omega_p^q$  – множество ПЛФ  $(p, q)$

**Утверждение 1.**  $\Omega_p^q$  – ЛП

$\square \{e_j\}$  – базис  $X \quad \square \{f^k\}$  – базис  $X^*$

$x_1 = \sum_{j_1=1}^n \xi_1^{j_1} e_{j_1} = \xi_1^{j_1} e_{j_1}$ . Далее значок суммы писаться не будет (иначе помрём) (соглашение о немом суммировании).

$$x_2 = \xi_2^{j_2} e_{j_2} \quad \dots \quad x_p = \xi_p^{j_p} e_{j_p}$$

4 ГЛАВА 1. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

---


$$\begin{aligned}
y^1 &= \eta_{k_1}^1 f^{k_1} & y^2 &= \eta_{k_2}^2 f^{k_2} & \dots & & y^q &= \eta_{k_q}^q f^{k_q} \\
w(x_1, x_2, \dots, x_p, y^1, y^2, \dots, y^q) &= w\left(\xi_1^{j_1} e_{j_1}, \xi_2^{j_2} e_{j_2}, \dots, \xi_p^{j_p} e_{j_p}, \eta_{k_1}^1 f^{k_1}, \eta_{k_2}^2 f^{k_2}, \dots, \eta_{k_q}^q f^{k_q}\right) \\
&= \xi_1^{k_1} \xi_2^{j_2} \dots \xi_p^{j_p} \eta_{k_1}^1 \eta_{k_2}^2 \dots \eta_{k_q}^q \underbrace{w(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_p}, f^{k_1}, f^{k_2}, \dots, f^{k_q})}_{\omega_{j_1 j_2 \dots j_p}^{k_1 k_2 \dots k_q} - \text{тензор ПЛФ}} \\
&= \xi_1^{k_1} \xi_2^{j_2} \dots \xi_p^{j_p} \eta_{k_1}^1 \eta_{k_2}^2 \dots \eta_{k_q}^q \omega_{j_1 j_2 \dots j_p}^{k_1 k_2 \dots k_q}.
\end{aligned}$$

**Лемма 3.** Задание полилинейной формы эквивалентно заданию её тензора в известном базисе

$$w \longleftrightarrow \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = \omega_i^{\vec{j}}.$$

*Доказательство.* (выше) ■

**Лемма 4.**  $v \longleftrightarrow v_i^{\vec{j}} \quad w \longleftrightarrow \omega_i^{\vec{j}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} w + v \longleftrightarrow v_i^{\vec{j}} + \omega_i^{\vec{j}} \\ \alpha v \longleftrightarrow \alpha v_i^{\vec{j}} \end{cases}$$

**Замечание.**  $\omega_{t_1 t_2 \dots t_q}^{s_1 s_2 \dots s_p} w$  – индексация базиса  $\Omega_p^q$

$$\omega_{t_1 t_2 \dots t_q}^{s_1 s_2 \dots s_p} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$$

$$\omega_{t_1 t_2 \dots t_q}^{s_1 s_2 \dots s_p} w(x_1, x_2, \dots, x_p, y^1, y^2, \dots, y^q) = \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} \dots \xi_p^{s_p} \eta_{t_1}^1 \eta_{t_2}^2 \dots \eta_{t_q}^q$$

**Замечание.**  $\omega_{t_1 t_2 \dots t_q}^{s_1 s_2 \dots s_p} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = \omega_{t_1 t_2 \dots t_q}^{s_1 s_2 \dots s_p} w(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}, f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q})$   
 $= \delta_{i_1}^{s_1} \delta_{i_2}^{s_2} \dots \delta_{i_p}^{s_p} \delta_{t_1}^{j_1} \delta_{t_2}^{j_2} \dots \delta_{t_q}^{j_q}$

**Пример.**  $\mathbb{R}_2^2$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad a_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = {}^{11} a_1 \quad a_2 = {}^{12} a_2 \quad a_3 = {}^{21} a_3 \quad a_4 = {}^{22} a_4$$

**Теорема 1.** Набор  $\left\{ \omega_{t_1 t_2 \dots t_q}^{s_1 s_2 \dots s_p} W \right\}_{s_1 s_2 \dots s_p}^{t_1 t_2 \dots t_p}$  – образует базис в  $\Omega_q^p$

*Доказательство.*

ПН  $\triangleleft u \in \Omega_q^p$

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_p, y^1, y^2, \dots, y^q) &= \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_p^{i_p} \eta_{j_1}^1 \eta_{j_2}^2 \dots \eta_{j_q}^q u_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = \\ &=_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} w(x_1, x_2, \dots, x_p, y^1, y^2, \dots, y^q) u_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_p, y^1, y^2, \dots, y^q. \end{aligned}$$

$$\implies u =_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} w \cdot u_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$$

ЛНЗ  $_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} W \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = \Theta$  Посчитаем на наборе  $e_{s_1}, e_{s_2}, \dots, e_{s_p}, f^{t_1}, f^{t_2}, \dots, f^{t_q}$

$$\delta_{s_1}^{i_1} \delta_{s_2}^{i_2} \dots \delta_{j_1}^{t_1} \delta_{j_2}^{t_2} \dots \delta_{j_q}^{t_q} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = 0$$

$$\alpha_{s_1 s_2 \dots s_p}^{t_1 t_2 \dots t_q} = 0 \quad \forall s_1 \dots s_p t_1 \dots t_q \implies \text{ЛНЗ (альфа 0 на всех, значит она все нули)}$$

■

**Замечание.** Размерность пространства полилинейных форм  $\dim \Omega_q^p = n^{p+q}$

## 1.2 Симметричные и антисимметричные ПЛФ

$$\triangleleft \Omega_0^p \quad u(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

$\triangleleft \sigma$  – перестановка чисел от 1 до  $p$ .  $\sigma(1, 2, \dots, p) = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(p))$

**Определение 3.** Полилинейная форма  $u$  называется симметричной, если

$$u(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = u(x_1, x_2, \dots, x_p).$$

**Лемма 5.** Симметричные полилинейные формы валентности  $(p, 0)$  образуют подпространство  $\Sigma^p$  линейного пространства  $\Omega_0^p$

*Доказательство.*  $\square u, v \in \Sigma^p$

$$\begin{aligned} \triangleleft (u+v)(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}) &= u(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}) + v(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \\ &= u(x_1, x_2, \dots, x_p) + v(x_1, x_2, \dots, x_p) = (u+v)(x_1, x_2, \dots, x_p) \end{aligned}$$

Так же с умножением на число. ■

**Определение 4.** Полилинейная форма  $u$  валентности  $(p, 0)$  называется антисимметричной, если:

$$u(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = (-1)^{[\sigma]} u(x_1, x_2, \dots, x_p).$$

---

**Лемма 6.** Антисимметричные полилинейные формы валентности  $(p, 0)$  образуют подпространство  $\Lambda^p$  линейного пространства  $\Omega_0^p$

**Лемма 7.** Полилинейная форма  $u \in \Lambda^p \iff u = 0$  при любых двух совпадающих аргументах.

*Доказательство.*

$$\implies \square u \in \Lambda^p \text{ и } x_i = x_j \quad i \neq j$$

$$a = \angle u(\dots x_i \dots x_j \dots) = -u(\dots x_j \dots x_i \dots) = -a \implies a = 0$$

$$\iff \text{Известно, что если } x_i = x_{j \neq i}, \text{ то } u(\dots x_i \dots x_j \dots) = 0 \quad \forall i, j$$

Докажем, что  $u$  принадлежит  $\Lambda^p$

$$x_i = x_j = x'_i + x''_i$$

$$u(\dots x_i \dots x_j \dots) = u(\dots x'_i + x''_i \dots x'_i + x''_i \dots) = u(\dots x'_i \dots x'_i) + u(x'_i \dots x''_i) + u(\dots x''_i \dots x'_i) + u(\dots x''_i \dots x''_i)$$

Правая часть равна 0. В левой части первое и последнее слагаемые тоже нули, а значит получаем

$$u(\dots x'_i \dots x''_i) = -u(\dots x''_i \dots x'_i).$$

■

**Лемма 8.** Полилинейная форма  $u \in \Lambda^p \iff u(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$  лишь только  $\{x_i\}_{i=1}^p - \text{ЛЗ}$

*Доказательство.*

$$\implies \square \{x_i\}_{i=1}^p - \text{ЛЗ} \implies x_k = \sum_{j \neq k} \beta^j x_j = \beta^1 x_1 + \beta^2 x_2 + \dots + \beta^p x_p$$

$$\angle u(x_1, \dots, x_k, \dots, x_p) = u(x_1, \dots, \beta^1 x_1 + \beta^2 x_2 + \dots + \beta^p x_p, \dots, x_p) = 0$$

При раскрытии будут выносятся коэффициенты и получится образ от совпадающих аргументов (хотя бы двух), который 0 по пред. лемме, а значит всё выражение, как сумма нулей, будет нулём.

$$\iff u(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0, \text{ когда } \{x_i\}_{i=1}^n - \text{ЛЗ} \implies u \in \Lambda^p$$

ГЛАВА 1. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ 7

---


$$\begin{aligned}
 u(x_1, x_2, \dots, x_p) &= u(x_1 + \sum \alpha^i x_i, \dots, x_p + \sum \alpha^i x_i) = u(x_1, x_2, \dots, x_p) + \\
 &u(x_1, \dots, \sum \alpha^i x_i) + u(\sum \alpha^i x_i, \dots, x_p) = u(x_1, x_2, \dots, x_p) + \sum_{j=2}^p \alpha^i u(x_1, \dots, x_i) + \\
 &\sum_{i=1}^{p-1} \alpha^i u(x_i, \dots, x_p)
 \end{aligned}$$

■

## 1.3 Практика 02.12

### 1.3.1 Тензоры

$$\omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$$



**Определение 5** (Соглашение об упорядочивании индексов). Слева направо сверху вниз:  $(p, q)$  –  $r = p + q$  – ранг тензора, сколько значков.

$r = 0$  – число  $\omega$ , инвариант

$$r = 1: a_i - \text{строчка } [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \ b^j - \text{столбик } \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix}$$

$r = 2: a_{ij} \ b_j^i \ c^{ij}$  – первый индекс всегда строка, второй всегда столбец

$$a_{ij} \longleftrightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$b_j^i \longleftrightarrow B = \begin{bmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 \end{bmatrix}$$

$r = 3: a_{ijk} \ b_{jk}^i \ c_k^{ij} \ d^{ijk}$

1й – строка, 2й – столбец, 3й – слой

$$a_{ijk} \longleftrightarrow A = \left[ \begin{array}{cc|cc} a_{111} & a_{121} & a_{112} & a_{122} \\ a_{211} & a_{221} & a_{212} & a_{222} \end{array} \right]$$

**Пример.** Построить тензор  $\varepsilon_k^{ij} = \begin{cases} -1 & (i, j, k) - \text{чётная} \\ 1 & (i, j, k) - \text{нечётная} \\ 0 & (i, j, k) - \text{не перестановка} \end{cases}$

$r = 4$  : строка, столбец, слой, сечение

$a_{ijkl} \ b_{jkl}^i \ c_{kl}^{ij} \ d_l^{ijk} \ e^{ijkl}$  – последний тензор типа 4,0 (число вверху, число внизу)

$$c_{kl}^{ij} \longleftrightarrow C = \left[ \begin{array}{cc|cc} c_{11}^{11} & c_{11}^{12} & c_{12}^{11} & c_{12}^{12} \\ c_{11}^{21} & c_{11}^{22} & c_{12}^{21} & c_{12}^{22} \\ \hline c_{21}^{11} & c_{21}^{12} & c_{22}^{11} & c_{22}^{12} \\ c_{21}^{21} & c_{21}^{22} & c_{22}^{21} & c_{22}^{22} \end{array} \right]$$

**Пример.**  $c_{kl}^{ij} = \begin{cases} 1 & i = k \neq j = l \\ -1 & i = l \neq j = k \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

### 1.3.2 Операции с тензорами

1. Линейные операции:

$$\omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} \quad v_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$$

$$u = v + \omega \quad u_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = (v + \omega)_{\vec{i}}^{\vec{j}} = v_{\vec{i}}^{\vec{j}} + \omega_{\vec{i}}^{\vec{j}} - \text{матричное сложение.}$$

$$(\lambda v)_{\vec{i}}^{\vec{j}} = \lambda \cdot v_{\vec{i}}^{\vec{j}}$$

2. Произведение:

$$u_{\vec{i}}^{\vec{j}} \quad v_{\vec{s}}^{\vec{t}}$$

$$\omega = u \cdot v \quad \omega_{\vec{l}}^{\vec{k}} = u_{\vec{i}}^{\vec{j}} \cdot v_{\vec{s}}^{\vec{t}} = \omega_{i_1 i_2 \dots i_{p_1} s_1 s_2 \dots s_{p_2}}^{j_1 j_2 \dots j_{q_1} t_1 t_2 \dots t_{q_2}}$$

$$\vec{l} = \vec{j}\vec{t} = j_1 \dots j_{q_1} t_1 \dots t_{q_2}$$

$$\vec{l} = \vec{i}\vec{s} = i_1 \dots i_{p_1}, s_1 \dots s_{p_2}$$

**Пример.**  $a_j^i \longleftrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$b_k \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$a_j^i b_k = \omega_{jk}^i. \text{ То же самое можно записать как } a \otimes b = \omega$$

$$\omega \longleftrightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -3 & -4 \end{array} \right]$$

$$v = b \otimes a \quad v_{kj}^i = b_k \cdot a_j^i \longleftrightarrow V = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 4 & -4 \end{array} \right]$$

**Лемма 9.**  $\sqsubset \{x_i\}_{i=1}^p - \text{ДЗ}$

$$\text{Доказательство. } u(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$$

$$u(\alpha x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$$

$$u\left(\sum_{i=1}^{p-1} \alpha^i x_i, x_2, \dots, x_p\right) = 0 - \text{равные } x_p \text{ и первый аргумент} \quad \blacksquare$$

$\Omega_0^p$  – хотим делать из произвольной формы симметричную

$$\sqsubset u \in \Omega_0^p$$

---

**Определение 6.**  $u^{(s)}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} u(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)})$  – симметричная форма, образованная из  $u$   
 $u^{(s)}$  называю симметризацией  $u$  и пишут  

$$u^{(s)} = Sym\ u.$$

**Замечание.**  $u^{(s)} \in \Sigma^p$

*Доказательство.*  $\square \tilde{\sigma}$  – другая перестановка

$$u^{(s)}(x_{\tilde{\sigma}(1)}, \dots, x_{\tilde{\sigma}(pa)}) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (x_{\sigma \circ \tilde{\sigma}(1)}, \dots, x_{\sigma \circ \tilde{\sigma}(p)}) = u^{(s)}(x_1, x_2, \dots, x_p) \quad \blacksquare$$

**Замечание.** Деление на  $p!$  нужно, чтобы выполнялось

$$Sym\ u = u.$$

, если  $u$  уже симметричная форма

**Замечание.**  $Sym(\alpha u + \beta v) = \alpha Sym\ u + \beta Sym\ v$

**Определение 7.**

$$u^{(a)} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} u(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}).$$

Эта операция называется антисимметризацией или альтернированием

$$u^{(a)} = Asym\ u.$$

**Замечание.**  $u^{(a)} \in \Lambda^p$

**Замечание.**

$$(\alpha u + \beta v)^{(a)} = \alpha u^{(a)} + \beta v^{(a)}.$$

**Замечание.**  $Sym\ Sym = Sym$

$$Asym\ Asym = Asym$$

$$Sym\ Asym = 0 \quad Asym\ Sym = 0$$

**Задача 1.**  $\Omega_0^p$

Найдём базис  $\Lambda^p$

---

*Доказательство.*  $\triangleleft \{^{s_1, s_2, \dots, s_p} W\}_{\vec{s}}$  – базис

$$\triangleleft^{s_1, s_2, \dots, s_p} F = p! \cdot Asym(^{s_1, s_2, \dots, s_p} W)$$

**Лемма 10.** Некоторые формы будут повторяться.

$$s_1 \dots s_i \dots s_j \dots s_p F = -s_1 \dots s_j \dots s_i \dots s_p F$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} s_1 \dots s_i \dots s_j \dots s_p F(x_1 \dots x_i \dots x_j \dots x_p) &= s_1 \dots s_j \dots s_i \dots s_p F(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots x_p) \\ &= -s_1 \dots s_j \dots s_p F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots x_p) \\ &= -s_1 \dots s_j \dots s_i \dots s_p F(x_1 \dots x_i \dots x_j \dots x_p) \end{aligned}$$

■

**Замечание.** Ненулевых  $C_n^p$  штук

Упорядочивание  $\{^{s_1 s_2 \dots s_p} F\}_{1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_p \leq n}$  – ненулевой набор. Докажем, что он базис

■

**Теорема 2.** Набор  $\{^{s_1 s_2 \dots s_p} F\}_{1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_p \leq n}$  образует базис в  $\Lambda^p$

*Доказательство.*

Полнота  $\square u \in \Lambda^p$

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_p) &= \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_p^{i_p} u_{i_1 i_2 \dots i_p} \\ &= {}^{i_1 i_2 \dots i_p} W(x_1, x_2, \dots, x_p) u(i_1 i_2 \dots i_p) \end{aligned}$$

$$\text{То же самое: } u = {}^{i_1 i_2 \dots i_p} W \cdot u_{i_1 i_2 \dots i_p}$$

.

---


$$\begin{aligned}
Asym u &= Asym (i_1 i_2 \dots i_p W \cdot u_{i_1 i_2 \dots i_p}) \\
u &= Asym (i_1 i_2 \dots i_p W) \cdot u_{i_1 i_2 \dots i_p} \\
&= \frac{1}{p!} i_1 i_2 \dots i_p F \cdot u_{i_1 i_2 \dots i_p} \\
&= \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \sum_{\sigma} \sigma(i_1) \sigma(i_2) \dots \sigma(i_p) F \cdot u_{\sigma(i_1) \sigma(i_2) \dots \sigma(i_p)} \\
&= \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma] i_1 i_2 \dots i_p} F \cdot (-1)^{[\sigma]} u_{i_1 i_2 \dots i_p} \\
&= \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < n} p! i_1 i_2 \dots i_p F u_{i_1 i_2 \dots i_p}
\end{aligned}$$

**Лемма 11.**  $u \in \Lambda^p \implies \forall \sigma u_{\sigma(i_1) \sigma(i_2) \dots \sigma(i_p)} = (-1)^{[\sigma]} u_{i_1 i_2 \dots i_p}$

Тензоры это значение  $u$  на  $e_{i_1} \dots e_{i_p}$ . А тогда оно выполняется просто по определению антисимметричной формы

Линейная независимость  $\langle \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} i_1 i_2 \dots i_p F \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0$ . Подействуем на  $e_{s_1} e_{s_2} \dots e_{s_p}$

$$i_1 i_2 \dots i_p F (e_{s_1}, e_{s_2}, \dots, e_{s_p}) \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0$$

$$p! [Asym^{i_1 i_2 \dots i_p}] (e_{s_1} e_{s_2} \dots e_{s_p}) \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0$$

$$p! \cdot \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma] i_1 i_2 \dots i_p} W (e_{\sigma(s_1)}, e_{\sigma(s_2)}, \dots, e_{\sigma(s_p)}) \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0$$

$$\sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \delta_{\sigma(s_1)}^{i_1} \delta_{\sigma(s_2)}^{i_2} \dots \delta_{\sigma(s_p)}^{i_p} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0$$

$$\sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \alpha_{\sigma(s_1) \sigma(s_2) \dots \sigma(s_p)} = 0$$

$$p! \alpha_{s_1 s_2 \dots s_p} = 0 \forall s_1 s_2 \dots s_p \implies \alpha = 0, \text{ если } \alpha \text{ антисимметричный тензор}$$

■

**Замечание.**  $\dim \Lambda^p = C_n^p$

$$1. p = 0 \implies C_n^0 = 1 \implies K$$

$$2. p = 1 \implies C_n^1 = n \implies X^*$$

$$3. p = 2 \implies C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

---


$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

$$\text{n } p = n - 1 \implies C_n^{n-1} = C_n^1 = n$$

$$\text{n+1 } C_n^n = 1$$

$$\triangleleft \Lambda^n$$

$$\{^{i_1 i_2 \dots i_n} F\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} = \{^{123 \dots n} F\}$$

$$\sqsupset u \in \Lambda^n \implies \exists \alpha \quad u = \alpha^{123 \dots n} F$$

$$\begin{aligned} \triangleleft^{123 \dots n} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= p! \cdot [Asym^{123 \dots n} W](x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]^{123 \dots n}} W(x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}) = \\ &= (-1)^{[\sigma]} \xi_{\sigma(1)}^1 \xi_{\sigma(2)}^2 \dots \xi_{\sigma(n)}^n \triangleq \\ &= \det\{x_i\} \end{aligned}$$

**Лемма 12.**  $\forall u \in \Lambda^n \quad u = \alpha(^{123 \dots n} F)$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_n^{i_n} u_{i_1 i_2 \dots i_n} \\ &=^{i_1, i_2, \dots, i_n} W(x_1, x_2, \dots, x_n) u_{i_1 i_2 \dots i_n} \\ &=^{123 \dots n} F(x_1, x_2, \dots, x_n) \underbrace{u_{12 \dots n}}_{\alpha} \end{aligned}$$

■

## 1.4 Произведение полилинейных форм

$$\sqsupset \Omega_p^q$$

**Определение 8.**  $u \in \Omega_{q_1}^{p_1}, v \in \Omega_{q_2}^{p_2}$

$$\begin{aligned} \triangleleft \omega(x_1, x_2, \dots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+p_2}, y^1, \dots, y^{q_1}, y^{q_1+1}, \dots, y^{q_1+q_2}) = \\ = u(x_1, x_2, \dots, x_{p_1}, y^1, y^2, \dots, y^{q_1}) \cdot v(x_{p_1+1}, x_{p_1+2}, \dots, x_{p_1+p_2}, y^{q_1+1}, \dots, y^{q_1+q_2}) \end{aligned}$$

Такая форма называется консолидированной формой  $u$  и  $v$

$$u_{j_1 i_2 \dots i_{p_1}}^{i_1} \cdot v_{t_1 t_2 \dots t_{q_2}}^{s_1 s_2 \dots s_{p_2}} = \omega_{j_1 \dots j_{q_1} t_1, \dots, t_{q_2}}^{i_1 \dots i_p, s_1, \dots, s_{p_2}}$$

---

**Замечание.**  $\omega$  – ПЛФ  $(p_1 + p_2, q^1 + q^2)$

$$\omega = u \cdot v \subseteq \Omega_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}$$

$\triangleleft \Omega = \dot{+} \sum_{i,j} \Omega_{q_j}^{p_i}$  – линейное пространство

$(\Omega, +, \cdot, \lambda, \cdot)$  Новое умножение называется внешним

**Свойство 1.** 1.  $u \cdot (v \cdot w) = (u * v) \cdot w$

2.  $u \cdot v \neq v \cdot u$

3.  $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$

4.  $\emptyset \quad u \cdot \emptyset = \emptyset$  – получившийся нооль из бОльшого пространства

5.  $u(\alpha v) = (\alpha u) \cdot v$

**Определение 9.**  $\Omega$  – внешняя алгебра полилинейных форм

## 1.5 Практика №2

### 1.5.1 Свёртки

**Пример.**  $\omega_i^j \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$

$$w_i^j = \sum_i = \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3$$

**Пример.**  $w_k^{ij} \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 8 & 9 \\ 5 & -1 & 10 & 3 \end{array} \right)$

$$w_i^{ij} = \alpha^j \quad \alpha^0 = 1 + 10 = 11 \quad \alpha^1 = 2 + (-3) = -1$$

$$\omega_i^{ij} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**Пример.**  $\omega_{kl}^{ij} \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & -3 & 11 \\ -3 & 4 & 13 & 17 \\ 6 & 5 & 19 & 23 \end{array} \right)$

$$\omega_{ki}^{ij} = \alpha_k^j \sim \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 16 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\omega_{ji}^{ij} = \sum_j \sum_i \omega_{ji}^{ij} = \sum_k \alpha_k^k = \alpha_0^0 + \alpha_1^1 = 27$$

---

**Замечание.** Сложную свёртку можно считать как последовательность единичных

### 1.5.2 Транспонирование

$$\omega_{jk}^i = \left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 6 \\ -3 & -2 & -1 & 9 & 8 & 7 & -7 & 11 & -13 \\ 2 & 19 & 17 & 14 & 12 & 9 & 21 & 17 & -1 \end{array} \right)$$

$$\psi_{jk}^i = \omega_{kl}^i$$

$$\psi_{jk}^i \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 7 & 4 & 2 & 8 & 5 & 3 & 9 & 6 \\ -3 & 9 & -7 & -2 & 8 & 11 & -1 & 7 & -13 \\ 2 & 14 & 21 & 19 & 12 & 17 & 17 & 9 & -1 \end{array} \right)$$

$$\omega_{kl}^{ij} \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 14 & 1 & 1 & 3 \\ -8 & 2 & -7 & -1 \\ 18 & 16 & 9 & 11 \\ -14 & -3 & 17 & 19 \end{array} \right)$$

$$\omega_{kl}^{ij} \sim \left( \begin{array}{cc|c} 14 & & 18 \\ & & \\ 1 & 3 & 9 \\ & & 17 \end{array} \right)$$

### 1.5.3 Свёртка и тензорное произведение

$$a^{ij} \sim \begin{pmatrix} 8 & 9 & 1 \\ 7 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_l^k \sim \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 8 & 4 & 5 \\ 11 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a \otimes b = \omega_l^{ijk} \implies \omega_j^{ijk} = \beta^{ik}$$

$$\beta^{ik} = a^{ij} b_l^k = \begin{pmatrix} 44 & \\ & 56 \end{pmatrix}$$

$$\beta^{00} = a^{00} b_0^0 + a^{01} b_1^0 + a^{02} b_2^0 =$$

$$a_k^{ij} \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & -1 & -7 \\ 2 & 2 & 8 & 11 \end{array} \right)$$

$$b_{m,n} \sim \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$a \otimes b = \omega_{kmn}^{ij} \implies \omega_{kji}^{ij} = \beta_k \sim \begin{pmatrix} 9 \\ -94 \end{pmatrix}$$



---


$$\omega \in \Omega_0^2 \quad \omega(x, y) \in \mathbb{R} \quad x, y \in X$$

$$\omega \sim a_{ij} \quad x \sim \xi^k \quad y \sim \eta^l$$

$$\omega(x, y) = a_{ij} \xi^i \eta^j = (a \otimes x \otimes y)_{ij}^{ij}$$

#### 1.5.4 Симметризация и асимметризация тензоров

$$\omega_{ij} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -1 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{sym}(\omega_{i_1, \dots, i_p}) = a_{j_1 \dots j_p} = \sum_{\sigma} \omega_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(p)}}$$

$$a_{ij} = w_{(ij)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 8 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \frac{1}{2!}(\omega_{ij} + \omega_{ji})$$

$$\omega_{ijk} \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & -7 & 8 & 1 & 9 & 3 & 13 \\ 3 & -4 & 5 & 11 & -7 & 13 & 1 & 4 & 2 \\ 8 & 9 & 7 & 5 & 6 & 11 & -7 & 8 & -1 \end{array} \right)$$

$$a_{ijk} = \frac{1}{6}(\dots)$$

$$a_{ijk} \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{20}{3} & -\frac{2}{3} & 5 & 4 & \frac{20}{3} & 4 & \frac{13}{3} \\ -\frac{2}{3} & 5 & 4 & 5 & -7 & \frac{23}{3} & 4 & \frac{23}{3} & 7 \\ \frac{20}{3} & 4 & \frac{13}{3} & 4 & \frac{23}{3} & 7 & \frac{13}{3} & 7 & -1 \end{array} \right)$$

#### 1.6 Свойства произведения полилинейных форм

$$1. \quad u \cdot v \cdot w = u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w$$

$$2. \quad u \cdot v \neq v \cdot u$$

$$\text{Пример (Контрпример)}. \quad \sqsupset u = f^1 \quad v = f^2 \quad u, v \in \Omega_0^1$$

$$(u \cdot v)(x_1, x_2) = (f^1 f^2)(x_1, x_2) = f^1(x_1) \cdot f^2(x_2) \neq f^2(x_1) \cdot f^1(x_2) = (f^2 f^1)(x_1, x_2) = (v \cdot u)(x_1, x_2)$$

$$3. \quad \forall p, q \exists \in \Omega_q^p \forall u \in \Omega_{q_1}^{p_1} \quad u \cdot \mathbb{0} = \mathbb{0} \cdot u = \mathbb{0} \in \Omega_{q_1+q}^{p_1+p}$$

$$4. \quad u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$

$$5. \quad u(\alpha v) = (\alpha u)v = \alpha(uv)$$

$$6. \quad \exists \{f^k\}_{k=1}^n - \text{базис } X^*$$

$$\sqsupset \{f^{s_1 s_2 \dots s_p} W\} - \text{базис } \Omega_0^p$$

$$f^{s_1 s_2 \dots s_p} W = f^{s_1} f^{s_2} \dots f^{s_p}$$

Доказательство.  $\square x_1, x_2, \dots, x_p \in X$

$$\begin{aligned} s_1 s_2 \dots s_p W(x_1, x_2, \dots, x_p) &= \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} \dots \xi_p^{s_p} \\ &= f^{s_1}(x_1) \cdot f^{s_2}(x_2) \dots f^{s_p}(x_p) \\ &= f^{s_1} f^{s_2} \dots f^{s_p}(x_1, x_2, \dots, x_p) \end{aligned}$$

■

**Замечание.**  $\left\{ \frac{s_1 s_2 \dots s_p}{t_1 t_2 \dots t_q} W \right\}$  – базис  $\Omega_q^p$

$$\frac{s_1 s_2 \dots s_p}{t_1 t_2 \dots t_q} W = f^{s_1} f^{s_2} \dots f^{s_p} \hat{e}_{t_1} \hat{e}_{t_2} \dots \hat{e}_{t_q}$$

$$\hat{e}_y(y^k) = y^k(e_t)$$

$$7. \operatorname{Sym}(u \cdot v) = \operatorname{Sym}(\operatorname{Sym} u \cdot v) = \operatorname{Sym}(u \cdot \operatorname{Sym} v) \operatorname{Asym}(u \cdot v) = \operatorname{Asym}(\operatorname{Sym} u \cdot v) = \operatorname{Asym}(u \cdot \operatorname{Asym} v)$$

**Утверждение 2.**  $\operatorname{Asym}(u \cdot v) = \operatorname{Asym}(\operatorname{Asym} u \cdot v)$

Доказательство.

$$\operatorname{Asym}(\operatorname{Asym} u \cdot v)$$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{Asym} \left\{ \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} u(x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(p)}) \cdot v(x_{p+1} \dots x_{p+q}) \right\} \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \operatorname{Asym} \left[ \underbrace{u(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p)}) \cdot v(x_{p+1} \dots x_{p+q})}_{w(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p)} x_{p+1} \dots x_{p+q})} \right] \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} (-1)^{[\sigma]} \operatorname{Asym} w(x_1, x_2, \dots, x_{p+q}) \\ &= \frac{1}{p!} p! \operatorname{Asym} w(x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) \\ &= \operatorname{Asym}(u \cdot v)(x_1 \dots x_{p+q}) \end{aligned}$$

■

## 1.7 Внешнее произведение ассиметричных полилинейных форм

$$\square u \in \Lambda^{p_1} \quad v \in \Lambda^{p_2}$$

---


$$\triangleleft u \cdot \notin \Lambda^{p_1+p_2}$$

$$\triangleleft u \wedge v = \frac{(p_1+p_2)!}{p_1!p_2!} Asym(u \cdot v)$$

$$\begin{aligned} Asym(u \wedge v) &= Asym \left( \frac{(p_1+p_2)!}{p_1!p_2!} Asym(u \cdot v) \right) \\ &= \frac{(p_1+p_2)!}{p_1!p_2!} \cdot \frac{1}{(p_1+p_2)!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} u(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p_1)}) v(x_{\sigma(p_1+1)} \dots x_{\sigma(p_1+p_2)}) \\ &= \sum_{\sigma'} (-1)^{[\sigma]} u(x_{\sigma'(1)} \dots x_{\sigma'_{p_1}}) \cdot v(x_{\sigma(p_1+1)} \dots x_{\sigma'(p_1+p_2)}) \end{aligned}$$

$$\sigma'(j) > p_1 \quad j \leq p_1$$

$$\sigma'(j) \quad j > p_1$$

Свойства операции  $u \wedge v$ :

1.  $u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$
2.  $(\alpha u) \wedge v = u \wedge (\alpha v) = \alpha (u \wedge v)$
3.  $u \wedge v \wedge w = u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w$

**Замечание.**

$$\begin{aligned} (u \wedge v) \wedge w &= \frac{(p_1+p_2)!}{p_1!p_2!} Asym(u \cdot v) \wedge w \\ &= \frac{\cancel{(p_1+p_2)!}}{p_1!p_2!} \frac{(p_1+p_2+p_3)!}{\cancel{(p_1+p_2)!}p_3!} Asym(Asym(u \cdot v)w) \\ &= \frac{(p_1+p_2+p_3)!}{p_1!p_2!p_3!} Asym(u \cdot v \cdot w) \\ &= u \wedge v \wedge w \end{aligned}$$

$$4. \quad u \wedge v \stackrel{?}{=} v \wedge u$$

**Замечание.**  $u \wedge v = (-1)^{p_1 p_2} v \wedge u$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
& \triangleleft [u \wedge v] (x_1, x_2, \dots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+p_2}) = \\
& = \frac{(p_1 + p_2)!}{p_1! p_2!} \frac{1}{(p_1 + p_2)!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} u(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p_1)}) v(x_{\sigma(p_1+1)} \dots x_{\sigma(p_1+p_2)}) = \\
& = \frac{(p_1 + p_2)!}{p_1! p_2!} \frac{(-1)^{p_1 p_2}}{(p_1 + p_2)!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} v(x_{\sigma(p_1)} \dots x_{\sigma(p_1+p_2)}) \cdot u(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p_1)}) = \\
& = (-1)^{p_1 p_2} (v \wedge u)(x_1, \dots, x_{p_1+p_2})
\end{aligned}$$

■

**Замечание.**  $\square f, g \in \Lambda^1 \quad f \wedge g = -g \wedge f$

$$5. \exists \mathbf{0} \in \Lambda^p \quad u \wedge u \in \Lambda^p = u \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0} \in \Lambda^{p+q}$$

$$6. u \in \Lambda^p \quad v \in \Lambda^q$$

$$\square p + q > n = \dim X \implies u \wedge v = \mathbf{0}$$

$$7. \{f^k\}_{k=1}^n - \text{базис } X^*$$

$$\square \{f^{s_1 s_2 \dots s_p} F\} - \text{базис } \Lambda^p$$

$$\implies f^{s_1 s_2 \dots s_p} = f^{s_1} \wedge f^{s_2} \wedge \dots \wedge f^{s_p}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
f^{s_1 s_2 \dots s_p} F &= p! \text{Asym}(f^{s_1 s_2 \dots s_p} W) \\
&= p! \text{Asym}(f^{s_1} f^{s_2} \dots f^{s_p}) \\
&= p! \text{Asym}(\text{Asym}(f^{s_1} f^{s_2}) \dots f^{s_p}) \\
&= p! \text{Asym} \frac{1}{2!} (f^{s_1} \wedge f^{s_2} \dots f^{s_p}) \\
&= p! \text{Asym} \frac{1}{2!} (\text{Asym}(f^{s_1} \wedge f^{s_2} \dots f^{s_3}) \dots f^{s_p}) \\
&= p! \text{Asym} \frac{1}{3!} (f^{s_1} \wedge f^{s_2} \dots f^{s_3} \dots f^{s_p}) \\
&= \dots \\
&= f^{s_1} \wedge f^{s_2} \dots f^{s_p}
\end{aligned}$$

■

$$8. \triangleleft \Lambda^n \quad \dim \Lambda^n = 1$$

$f^{123 \dots n} F$  – единственный базисный элемент

$$\implies f^{123 \dots n} = f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n$$

$$\begin{aligned} \triangleleft^{12\dots n} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= n! \text{Asym} [^{12\dots n} W] (x_1, x_2, \dots, x_n) = n! \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} ^{12\dots n} W \left( x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)} \right) = \\ &= \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \xi_{\sigma(1)}^1 \xi_{\sigma(2)}^2 \dots \xi_{\sigma(n)}^n \triangleq \det \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} f^1(x_{\sigma(1)}) f^2(x_{\sigma(2)}) \dots f^n(x_{\sigma(n)}) = \\ &= (f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n)(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

## 1.8 Основы теории определителей

$\square X$  – ЛП  $\dim X = n$

$\{e_j\}_{j=1}^n$  – базис  $X$      $\{f^k\}_{k=1}^n$  – базис  $X^*$

$\{x_i\}_{i=1}^n$  – набор векторов из  $X$

**Определение 10.**

$$\begin{aligned} \det \{x_1, x_2, \dots, x_n\} &= ^{12\dots n} F(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n)(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \left\langle x_k = \sum_{j=1}^n \xi_k^j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \xi_{\sigma(1)}^1 \xi_{\sigma(2)}^2 \dots \xi_{\sigma(k)}^k \end{aligned}$$

**Определение 11.**  $k$ -мерным параллелепипедом в  $X$ , построенном на векторах  $\{x_i\}_{i=1}^k$  называется следующее множество:

$$T = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha^i x_i, \quad \alpha^i \in [0, 1] \right\}.$$

**Определение 12.** Формой объёма в ЛП  $X$  называется отображение  $\omega^i(n)$  удовлетворяющее следующим свойствам:

1.  $\omega^{(n)}(T_n)$  – число  $= \omega^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$
2.  $\omega^{(n)}$  – полилинейное отображение
3.  $\omega^{(n)}$  – ассиметричное отображение

**Лемма 13.**  $\omega^{(n)} \in \Lambda^n \iff \omega^{(n)} = \alpha \cdot ^{12\dots n} F$

## 1.9 Практика

$$\text{Задача 2. } a_{ijk} \longrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

Доказательство.  $\triangleleft a_{i(jk)}$

$$i = 1 \quad a_{1jk} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{S} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 3 & 5 & 7 & 5 & 7 & 9 \\ 9 & 7 & 5 & 7 & 5 & 3 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{array} \right] \quad \blacksquare$$

## 1.10 Определитель, продолжение

Пример.  $i_1 i_2 \dots i_p = f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \dots \wedge f^{i_p}$

Свойства:

$$\{e_j\}_{j=1}^k - \text{базис } X \implies x_i = \sum_{j=1}^n \xi_i^j e_j$$

$$\triangleleft M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \begin{bmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \dots & \xi_n^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \dots & \xi_n^n \end{bmatrix}$$

$$\square \det \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \det M$$

$$1. \det M^T = \det M$$

$$\text{Доказательство. } \det M = \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \xi_2^{\sigma(2)} \dots \xi_n^{\sigma(n)}$$

$$\triangleleft \det M^T = \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \xi_{\sigma(1)}^1 \xi_{\sigma(2)}^2 \dots \xi_{\sigma(n)}^n = \sum_{\sigma^{-1}} (-1)^{[\sigma^{-1}]} \xi_1^{\sigma^{-1}(1)} \dots \xi_n^{\sigma^{-1}(n)} = \det M \quad \blacksquare$$

$$\text{Лемма 14. } \sigma \in S_n \implies [\sigma] = [\sigma^{-1}]$$

Доказательство.  $\sigma \circ \sigma^{-1} = e$  – чётная перестановка.

Чётность при композиции складывается, значит у  $\sigma$  и  $\sigma^{-1}$  равная чётность (если разная, то  $e$  – нечётная ???)  $\blacksquare$

$$2. \det \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n\} = -\det \{x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n\}$$

*Доказательство.* Основное свойство антисимметричной формы ■

$$3. \det \left\{ x_1 + \sum_{i=2}^n \alpha^i x_i, x_2, \dots, x_n \right\} = \det \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$4. \{x_i\}_{i=1}^n - \text{ЛЗ} \implies \det \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = 0$$

$$5. \det \{\alpha x_1, x_2, \dots, x_n\} = \alpha \det \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$6. \text{Доказательство. } M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \begin{bmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \dots & \xi_m^1 & \dots & \xi_n^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_m^2 & \dots & \xi_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \dots & \xi_m^n & \dots & \xi_n^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \triangleleft \det \{x_1, x_2, \dots, x_n\} &= f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n \left( x_1, x_2, \dots, \sum_{j=1}^n \xi_m^j e_j, \dots, x_n \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \xi_m^j f^1 \wedge \dots \wedge f^n (x_1, x_2, \dots, e_j, \dots, x_n) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{|m-j|} \xi_m^j f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge \underbrace{f^j(e_j)}_1 \wedge \dots \wedge f^n (x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_{m+1}, \dots, x_n) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{|m-j|} \xi_m^j \underbrace{f^1 \wedge \dots \wedge f^n (x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_{m+1}, \dots, x_n)}_{M_j^m - \text{дополнительный минор элемента } \xi_n^j} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{|m-j|} \xi_n^j M_j^m = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-m} \xi_m^j M_j^m \\ &= \dots = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \dots \sum_{j_k} (-1)^{j_1-m} (-1)^{j_2-m} \dots (-1)^{j_k-m+k} \underbrace{\xi_{m_1}^{j_1} \xi_{m_2}^{j_2} \dots \xi_{m_k}^{j_k}}_L M_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{m_1, m_2, \dots, m_k} \\ &= (-1)^{j_1-m_1+j_2-m_2+\dots+j_k-m_k} L_{m_1, m_2, \dots, m_k}^{j_1, j_2, \dots, j_k} M_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{m_1, m_2, \dots, m_k} \\ & . \end{aligned}$$

**Теорема 3** (Лапласа).  $\det \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = (-1)^{j_1+\dots+j_n-m_1-\dots-m_n} L_{m_1, \dots, m_n}^{j_1, j_2, \dots, j_n} M_{j_1, j_2, \dots, j_n}^{m_1, m_2, \dots, m_n}$

**Пример.**  $\det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1 + \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot 2 \cdot (-1)^7 + \det \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$   
 $1 - 3 = 2$

---


$$\text{Пример. } \det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

■

$$\text{Пример. } \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^n \det A_{jj}$$

## 1.11 Ранг матрицы

$\sqsubset \{x_i\}_{i=1}^k$  – набор векторов в  $X$  ( $\dim X = n \geq k$ )

**Лемма 15.**  $\{x_i\}_{i=1}^k$  – ЛЗ  $\iff \forall \omega \in \Lambda^k \quad \omega(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$

*Доказательство.*

$\implies \sqsubset \{x_i\}_{i=1}^n$  – ЛЗ

$$\begin{aligned} \triangleleft \omega(x_1, x_2, \dots, x_k) &= \omega \left( \underbrace{x_1 + \sum_{i=2}^k \alpha_i^x}_{\simeq x_k = \beta x_k}, x_2, \dots, x_k \right) = \beta \omega(x_1, x_2, \dots, x_k) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\Leftarrow \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \quad \forall \omega \in \Lambda^k \omega(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0 \stackrel{?}{\implies} \text{ЛЗ}$

Допустим обратное. Тогда мы можем достроить этот набор до базиса  $X$   $\{x_1, x_2, \dots, x_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ . К нему есть сопряжённый базис  $\{f^1, f^2, \dots, f^n\}$

$$\triangleleft f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge (x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} f^{\sigma(1)} f^{\sigma(2)} \dots f^{\sigma(k)}(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad (1.1)$$

$$= \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} f^{\sigma(1)}(x_1) f^{\sigma(2)} \dots f^{\sigma(k)} \neq 0 \quad (1.2)$$

$$(1.3)$$

■



**Замечание.**  $\forall \omega \in \Lambda^p \quad \omega = {}^{i_1 i_2 \dots i_k} F \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}$

$$\Leftarrow (\{x_i\}_{i=1}^n - \text{ЛЗ} \iff {}^{i_1 i_2 \dots i_k} F(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0 \forall i_1 \dots i_k)$$

$$\Delta B = \begin{bmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \dots & \xi_n^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \dots & \xi_n^n \end{bmatrix} \quad \det B = 0 \implies x_1, x_2, \dots, x_n - \text{ЛЗ. Но нам}$$

хочется узнать, а сколько там независимых

$\Lambda^n \quad \Lambda^{n-1} \quad {}^{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ . Если найдётся такой минор, который не равен 0, то у нас есть  $n-1$  ЛНЗ векторов. Если все равны 0, то значит их меньше. Мы уменьшаем число и смотрим дальше, а там тоже выбор из двух.

**Определение 13.** Ранг матрицы – максимальный размер её отличного от нуля минора.

**Определение 14.** Базисные строки – набор ЛНЗ строк в количестве ранга матрицы.

**Теорема 4.** Число ЛНЗ строк матрицы равно  $rg A$  (ранг  $A$ )

## 1.12 Практика. Вычисление определителей

1. Приведение к треугольному виду.
2. Метод выделения линейных множителей

**Определение 15** (Определитель Вандермонда (определитель Того-кого-нельзя-называть)).  $\prod_{i>j} (x_i - x_j)$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

## 1.13 Тензорная алгебра

**Теорема 5.** TODO

*Доказательство.* TODO ■

---


$$\triangleleft W \in \Omega_q^p$$

$$W \quad \underbrace{x_1 x_2 \dots x_p}_{\in X} \underbrace{y^1 y^2 \dots y^q}_{\in X^*} \mapsto K$$

$$\sqsubset \{e_j\}_{j=1}^n - \text{базис } K \quad \{f^i\}_{i=1}^n$$

$$f^k(e_j) = \delta_j^k$$

$$x_1 = \sum_{i=1}^n \xi_1^{i_1} e_{i_1} \quad \dots \quad x_p = \sum_{i=1}^n \xi_p^{i_p} e_{i_p}$$

$$y^1 = \sum_{j=1}^n \eta_{j_1}^1 f^{i_1} \quad \dots \quad y^q = \sum_{j=1}^n \eta_{j_q}^q f^{j_q}$$

$$\begin{aligned} W(x_1 x_2 \dots x_p y^1 y^2 \dots y^q) &= W(\xi_1^{i_1} \dots) \\ &= \xi_1^{i_1} \dots \eta_{j_q}^q W(e_{i_1} e_{i_2} \dots f^{j_1} f^{j_2} \dots) \\ \overline{\Delta} &= \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \eta_{j_1}^1 \eta_{j_2}^2 \dots \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j^1 j^2 \dots j^q} \end{aligned}$$

$$\sqsubset \{\tilde{e}_l\}_{l=1}^n - \text{базис } X \text{ (новый)}$$

$$\tilde{e}_l = \sum_{j=1}^n \tau_l^j e_j \quad \left( \tau = \|\tau_l^j\| \right)$$

$$\sqsubset \{\tilde{f}^m\}_{m=1}^n - \text{базис } X^* \text{ (сопряжённый к новому)}$$

$$\tilde{f}^m = \sum_{j=1}^n \sigma_j^m f^j \quad \left( \sigma_j^m \tau_l^j = \delta_l^m \right)$$

$$\sqsubset \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = W(e_{i_1} \dots e_{i_p} f^{j_1} \dots f^{j_q})$$

$$\begin{aligned} \triangleleft \omega_{s_1 s_2 \dots s_p}^{t_1 t_2 \dots t_q} &= W(\tilde{e}_{s_1} \tilde{e}_{s_2} \dots \tilde{e}_{s_p} \tilde{f}^{t_1} \dots \tilde{f}^{t_q}) \\ &= W\left(\sum_{i_1=1}^n \tau_{s_1}^{i_1} e_{i_1} \dots \sum_{i_p=1}^n \tau_{s_p}^{i_p} e_{i_p}, \sum_{j_1=1}^n \sigma_{j_1}^{t_1} \dots \sum_{j_q=1}^n \sigma_{j_q}^{t_q} f^{j_q}\right) \\ &= \tau_{s_1}^{i_1} \tau_{s_2}^{i_2} \dots \tau_{s_p}^{i_p} \sigma_{j_1}^{t_1} \dots \sigma_{j_q}^{t_q} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j^1 j^2 \dots j^q} \end{aligned}$$

**Замечание.** Вообще аргументы могут идти по-разному и тогда могут писать  $\omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 j_3 \dots j_4 j_5}$

---

**Определение 16.** Тензором типа  $(p, q)$  называется алгебраический объект вида  $\omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$ , где:

$i_1 i_2 \dots i_p$  – ковариантные индексы

$j^1 j^2 \dots j^q$  – контравариантные индексы

и преобразующийся при замене базиса  $(T)$  по закону

$$\tilde{\omega}_{s_1 s_2 \dots s_p}^{t_1 t_2 \dots t_q} = \tau_{s_1}^{i_1} \tau_{s_2}^{i_2} \dots \tau_{s_p}^{i_p} \sigma_{j_1}^{t_1} \dots \sigma_{j_q}^{t_q} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j^1 j^2 \dots j^q}.$$

**Замечание.** Они, естественно, образуют линейное пространство (можно рассмотреть сложение, домножение на число и доказать свойство)

Операции:

1. Сложение  $\omega_i^{\vec{j}} \quad v_i^{\vec{j}} \in (p, q)$

$$u_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j^1 j^2 \dots j^q} = \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} + v_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j^1 j^2 \dots j^q}$$

$$\tilde{u}_i^{\vec{j}} = \widetilde{\omega + v}_i^{\vec{j}} = \tilde{\omega}_i^{\vec{j}} + v_i^{\vec{j}}$$

2. Умножение на число  $u_i^{\vec{j}} = \alpha \omega_i^{\vec{j}}$

$$\tilde{u}_i^{\vec{j}} = \widetilde{(\alpha \omega)}_i^{\vec{j}} = \alpha \tilde{\omega}_i^{\vec{j}}$$

3. Тензорное произведение.  $\square \omega_i^{\vec{j}}(p_1, q_1) \quad v_i^{\vec{j}}(p_2, q_2)$

$$u = \omega \otimes v(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{s_1 s_2 \dots s_{p_1}}^{t_1 t_2 \dots t_{q_1}} \tilde{v}_{s_{p_1+1} \dots s_{p_1+p_2}}^{t_{p_1+1} \dots t_{p_1+p_2}} &= \\ &= \tau_{s_1}^{i_1} \dots \tau_{s_{p_1+p_2}}^{i_{p_1+p_2}} \sigma_{j_1}^{t_1} \dots \sigma_{j_{q_1+q_2}}^{t_{q_1+q_2}} \underbrace{\omega_{i_1 i_2 \dots i_{p_1}}^{j_1 j_2 \dots j_{q_1}} v_{i_{p_1+1} \dots i_{p_1+p_2}}^{j_{q_1+1} \dots j_{q_1+q_2}}}_{u_{i_1 i_2 \dots i_{p_1+p_2}}^{j_1 j_2 \dots j_{q_1+q_2}}}. \end{aligned}$$

4. Транспонирование. Замена двух индексов тянется до замены двух индексов в преобразовании (просто везде один меняется на другой). А тогда преобразование то же самое. Note: менять можно индексы одного типа

**Замечание.** Если менять индексы разного типа, то нарушится ко(нтра)вариантность и это не будет тензором

---

5. Свёртка.  $\omega_{i_1 i_2 \dots k \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots k \dots j_q}$

$$\omega_{s_1 s_2 \dots m \dots s_p}^{t_1 t_2 \dots m \dots t_q} = \sigma_{j_1}^{t_1} \dots \sigma_k^m \dots \sigma_{j_q}^{t_q} \tau_{s_1}^{i_1} \dots \tau_m^k \dots \tau_m^k \dots \tau_{s_p}^{i_p} \omega_{i_1 i_2 \dots k \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots k \dots j_q}$$

$\sigma_k^m \tau_m^k = 1$  – т.е. эти индексы просто не участвуют в преобразовании.

## 1.14 Практика. Вычисление определителей

1. Метод рекуррентных соотношений

$$D_n = pD_{n-1}$$

$$D_n = p_n D_{n-1}$$

$$D_n = p - qD_{n-1}$$

$$D_n = p_n - q_n D_{n-1}$$

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$$

2. Представление определителя в виде суммы

## 1.15 Ранг матрицы это инвариант

$\square A, B$

$$AB = C \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots \\ b_{21} & b_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots \\ c_{21} & c_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} & & \\ b_{11} & b_{12} & & \end{bmatrix}$$

Если поменять две строчки местами, то они поменяются и у результата.

Если умножить строку на число, в итоге та же строка тоже умножится

Если добавим к одной строке другую, то же произойдёт и с результатом.

Матрицы преобразований:

---


$$\begin{array}{l}
1. \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \\
2. \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \lambda & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \\
3. \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

**Замечание.** Произведение матриц некоммукативно.

$$AB \neq BA \quad (A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2 \quad (A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$$

**Пример.**  $A \quad \text{rg } A = a \quad \text{rg } B = b$

$$\text{rg } AB = \min(m, n).$$

Про ранг суммы нельзя ничего сказать

**Пример.**  $A_{m \times r} \quad B_{r \times n}$

$$\text{rg}(AB) = r \implies \text{rg } A = r \quad \text{rg } B = r$$

**Задача 3.** Сформулировать в терминах рангов необходимое и достаточное условие того, чтобы три точки на плоскости не лежали на одной прямой

$$P(x_1, y_1) \quad Q(x_2, y_2) \quad R(x_3, y_3)$$

$Ax + By + C = 0$  – уравнение прямой

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + C = 0 \\ Ax_2 + By_2 + C = 0 \\ Ax_3 + By_3 + C = 0 \end{cases}$$

Мы требуем нетривиальное решение. Это некрамеровская система, значит

$$\text{rg} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} < 3$$

**Задача 4.** То же самое, только для четырёх точек в пространстве и плоскость через них.

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix}$$

4 – не лежат

3 – на одной плоскости

2 – на одной прямой

**Задача 5.** 
$$\left[ \begin{array}{cc|c} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{array} \right]$$

2, 3 – две прямые параллельны или они пересекаются в трёх разных точках

2, 2 – пересекаются в одной точке

1, 2 – три параллельных прямые, две из которых совпадают

1, 1 – все совпадают

## 1.16 Линейные операторы

**Определение 17.**  $\square X, Y$  – ЛП,  $\dim X = n$   $\dim Y = m$

$\triangleleft \phi : X \rightarrow Y$

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$

$$x \longmapsto y = \varphi(x) = \varphi x$$

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x).$$

**Замечание.**  $\varphi : X \longrightarrow X$

действует на (биекция) – автоморфизм

действует в (сюръекция) – эндоморфизм

**Пример.** 1.  $\mathcal{I} : X \rightarrow X$   $\mathcal{I}x = x$  – тождественный оператор

2.  $\mathcal{O} : X \rightarrow X$   $\mathcal{O}x = 0$  – нулевой оператор

---


$$3. \mathcal{P} : X \rightarrow X \quad X = L_1 \dot{+} L_2 \implies x = x_1 + x_2 \begin{cases} \mathcal{P}_{L_2}^{\|L_2} x = x_1 \\ \mathcal{P}_{L_1}^{\|L_1} x = x_2 \end{cases} \quad - \text{проектор}$$

$$4. \varphi : C'[a, b] \rightarrow C'[a, b] \quad (\varphi f)(t) = \int_a^b f(s)K(s, t)ds$$

$$5. \mathcal{D} : C^\infty(a, b) \rightarrow C^\infty(a, b) \quad (\mathcal{D}f)(t) = \frac{df}{dt}$$

$\square \mathcal{L}(X, Y)$  – множество операторов действующих из  $X$  в  $Y$

$\square \varphi, \psi \in \mathcal{L}(X, Y)$

**Определение 18.** Суммой операторов  $\varphi, \psi$  называется отображение

$$\chi = \varphi + \psi.$$

и определяемое как  $\chi(x) = \varphi(x) + \psi(x)$

**Лемма 16.**  $\chi \in \mathcal{L}(X, Y)$

$$\chi(x + y) = (\varphi + \psi)(x + y) = \varphi(x + y) + \psi(x + y) = (\varphi + \psi)(x) + (\varphi + \psi)(y) = \chi x + \chi y.$$

**Определение 19.** Умножением оператора на число  $\lambda \in K$  называется отображение

$$\omega = \lambda\varphi.$$

$$\omega(x) = (\lambda\varphi)(x) = \lambda \cdot \varphi(x)$$

**Лемма 17.**  $\omega \in \mathcal{L}(X, Y)$

**Теорема 6.**  $\mathcal{L}(X, Y)$  – Линейное Пространство

**Вопрос 1.**  $\dim(X, Y) = ?$

$\square \{e_j\}_{j=1}^n$  – базис  $X$      $\{h_k\}_{k=1}^m$  – базис  $Y$

$$\square x \in X \implies x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j$$

---


$$\begin{aligned}\varphi x &= \varphi \left( \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \right) = \sum_{j=1}^n \xi^j \underbrace{\varphi(e_j)}_{\in Y} \\ &= \sum_{j=1}^n \xi^j \sum_{k=1}^m a_j^k h_k = \sum_{k=1}^m \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n \xi^j a_j^k \right)}_{\eta^k} h_k = \sum_{k=1}^m \eta^k h_k x.\end{aligned}$$

$$* \quad \varphi(e_j) = \sum_{k=1}^m a_j^k h_k$$

**Определение 20.** Набор  $A_\varphi = \|a_j^k\|$  образует матрицу, которая называется матрицей линейного оператора  $\varphi$  в паре базисов  $\{e_j\}$  и  $\{h_k\}$

**Лемма 18.** Задание линейного оператора в пространстве эквивалентно заданию его матрицы при фиксированной паре базисов.

**Замечание.**  $\varphi x = y$

$$A_\varphi \xi = \eta$$

Тождественный оператор имеет единичную матрицу.

Нулевой матрицу из нулей

$$X = L_1 \dot{+} L_2 \quad L_1 \{e_j\}_{j=1}^k \quad L_2 \{e_j\}_{j=k+1}^n$$

$\begin{bmatrix} E & O \\ O & O \end{bmatrix}$  – матрица проектора (единичный квадрат, всё остальное ноль)

$\triangleleft \left\{ \begin{smallmatrix} j \\ k \end{smallmatrix} E \right\}$  – набор в  $\mathcal{L}(X, Y)$

$$\sqsupset x \in X \quad x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \quad \begin{smallmatrix} j \\ k \end{smallmatrix} E x = \xi^j h_k \text{ (единичка в матрице на месте } (j, k))$$

**Теорема 7.** Набор  $\left\{ \begin{smallmatrix} j \\ k \end{smallmatrix} E \right\}$  образует базис  $\mathcal{L}(X, Y)$

*Доказательство.*

- Полнота.  $\sqsupset \varphi \in \mathcal{L}(X, Y)$



$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{j=1}^n \xi^j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^n \xi^j \sum_{k=1}^m a_j^k \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \xi^j a_j^k h_k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m {}^j_k E(x) a_j^k \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$

$$\implies \varphi = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m {}^j_k E a_j^k$$

$$\bullet \text{ Линейная независимость. } \square \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m {}^j_k E \alpha_j^k = \mathcal{O} \quad | e_1$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m {}^j_k E(e_1) \alpha_j^k = \sum_{k=1}^m 1 \cdot \underbrace{h_k}_{\text{ЛНЗ}} \cdot \alpha_1^k = 0 \implies \alpha_1^k = 0$$

$$\alpha_j^k = 0 \forall k, j$$

■

**Замечание.**  $\dim \mathcal{L}(X, Y) = m \cdot n$

$\triangleleft K_n^m$  – пространство  $m \cdot n$

**Лемма 19.**  $\mathcal{L}(X, Y) \simeq K_n^m$

$$\square \{e_j\}_{j=1}^n \quad \{\tilde{e}_k\}_{k=1}^m \text{ – базис } X$$

$$\square \varphi : X \rightarrow X \quad A_\varphi \quad \tilde{A}_\varphi$$

Как преобразуется матрица оператора при переходе между базисами

$$\begin{aligned}\varphi \tilde{e}_s &= \varphi \left( \sum_{j=1}^n \tau_s^j e_j \right) = \sum_{j=1}^n \tau_s^j \varphi(e_j) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \tau_s^j a_j^k e_k \\ &= \sum_{j=1}^n \tilde{a}_s^j \tilde{e}_j = \sum_{j=1}^n \tilde{a}_s^j \sum_{k=1}^m \tau_j^k e_k &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \tilde{a}_s^j \tau_j^k e_k.\end{aligned}$$

$$\implies \sum_{j=1}^n \tau_s^j a_j^k = \sum_{j=1}^n \tilde{a}_s^j \tau_j^k$$

$$A_\varphi T = T \tilde{A}_\varphi$$

**Лемма 20.**  $\tilde{A}_\varphi = S A_\varphi T \quad S = T^{-1}$  – преобразование SAT

$$\square T \quad \det T \neq 0$$

$$\square A \in \mathbb{R}_n^n$$

$A \longrightarrow T^{-1}AT$  – преобразование подобия

$A \sim B \iff B = T^{-1}AT$  – отношение эквивалентности. Разбивается на непересекающиеся классы

$$\square X, Y, Z$$

$$\triangleleft \varphi \in \mathcal{L}(X, Y)$$

$$\triangleleft \psi \in \mathcal{L}(Y, Z)$$

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$$

**Определение 21.** Композицией линейных операторов  $\phi$  и  $\psi$  называется отображение

$$\chi = \psi \circ \varphi,$$

которое действует как

$$\chi(x) = (\varphi \circ \psi)(x) = \pi(\varphi(x)).$$

**Лемма 21.**  $\psi \circ \varphi = \chi \in \mathcal{L}(X, Z)$

*Доказательство.*  $\square x, y \in X$

$$\chi(x+y) = (\psi \circ \varphi)(x+y) = \psi(\varphi(x+y)) = \psi(\varphi x + \varphi y) = \psi(\varphi(x)) + \psi(\varphi(y)) = \chi(x) + \chi(y)$$

$$\chi(\lambda x) = \lambda \chi(x) \quad \blacksquare$$

$$\square \{e_j\}_{j=1}^n - \text{базис } X, \{h_k\}_{k=1}^m - \text{базис } Y, \{g_l\}_{l=1}^s - \text{базис } Z$$

В паре базисов  $\varphi \longleftrightarrow A_\varphi$

В паре базисов  $\psi \longleftrightarrow B_\psi$

Хочется получить матрицу  $\chi \longleftrightarrow C_\chi$

$$\chi(e_j) = \sum_{l=1}^s C_k^l g_l$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}
 &= (\psi \circ \varphi)(e_j) = \psi(\varphi(e_j)) \\
 &= \psi\left(\sum_{k=1}^m a_j^k h_k\right) \\
 &= \sum_{k=1}^m a_j^k \psi(h_k) \\
 &= \sum_{k=1}^m a_j^k \sum_{l=1}^s b_k^l g_l \\
 &= \sum_{l=1}^s \left(\sum_{k=1}^m a_j^k b_k^l\right) g_l
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_j^l = \sum_{k=1}^m a_j^k b_k^l \iff C_\chi = B_\psi \cdot A_\varphi$$

$\triangleleft \mathbb{K}_n^n$  “+” “λ” “.”

**Определение 22.** Алгеброй  $\mathcal{A}$  называется линейное пространство, наделённое операцией умножения, так что выполняются следующие требования (аксиомы):

1.  $a_1(a_2 a_3) = (a_1 a_2) a_3 \forall a_1, a_2, a_3$
2.  $a(b + c) = ab + ac$   
 $(a + b)c = ac + bc$
3.  $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$

$\square \mathcal{A}$  – некоторая алгебра  $\square x, y \in \mathcal{A}$

$$\square \{e_j\} - \text{базис } \mathcal{A} \implies \begin{cases} x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \\ y = \sum_{k=1}^n \eta^k e_k \end{cases}$$

$$x \cdot y = \left( \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^n \eta^k e_k \right) = \sum_{k,j=1}^n \xi^j \eta^k \underbrace{(e_j \cdot e_k)}_{\sum_{l=1}^n m_{jk}^l e_l}$$

$\{m_{jk}^l\}$  – структурные константы алгебры  $\mathcal{A}$

**Пример.**  $\mathbb{C}$

---

	1	i
1	1	i
i	i	-1

Такую же для кватернионов можно сделать.

**Задача 6.** Выразить свойство ассоциативности в рамках структурных констант

Сделать то же самое с коммутативностью

**Замечание.** Алгебра это полугруппа (есть ассоциативности)

$\triangleleft \mathcal{A}$  – алгебра  $\square e_L \in \mathcal{A} : \forall x \in \mathcal{A} \quad e_L x = x$  – левая единица

$e_R \in \mathcal{A} : \forall x \in \mathcal{A} \quad x e_R = x$  – правая единица

**Замечание.** Если есть и левая и правая, то они совпадают

Если нет, то может быть несколько одного типа.

$\square x \in \mathcal{A} \quad \square y \in \mathcal{A} : yx = e$ ,  $y$  – левый обратный

$z \in \mathcal{A} \quad xz = e$  – правый обратный

**Замечание.** Если у  $x$  есть правый или левый, то он называется обратимым

Если есть и тот и другой, то они совпадают  $y = z = x^{-1}$

*Доказательство.*  $z = yxz = y$  ■

**Пример.**  $\mathcal{L}(X, X)$  – алгебра операторов ( $\circ$ )

$K_n^n$  – алгебра матриц

**Определение 23.**  $\square x \in \mathcal{A}$

$y : yx = e \implies y$  – левый обратный

$z : xz = e \implies z$  – правый обратный

**Утверждение 3.** Если существует и тот, и другой, то они совпадают и обозначаются  $x^{-1}$

## 1.17 Обратная матрица

$\square A \in K_n^n$

---

**Определение 24.** Матрица  $B \in K_n^n$  называется левой обратной к  $A$ , если

$$BA = E.$$

Матрица  $X \in K_n^n$  называется правой обратной к  $A$ , если

$$AC = E.$$

( $E$  – единичная матрица)

**Лемма 22.** Обратная матрица существует тогда и только тогда, когда её определитель не равен нулю

$$\det A \neq 0 \iff \exists A^{-1} : AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

*Доказательство.*

$$\implies \det A \neq 0 \implies \exists B, C : BA = AC = E$$

$$\square A = \|a_j^i\| \quad c = \|c_j^i\| \quad E = \|\delta_j^i\|$$

$$\begin{matrix} [C] \\ [A] \end{matrix} = [E].$$

$$\sum_{j=1}^n a_j^i c_k^j = \delta_k^i$$

Зафиксируем  $k = k_0$ -ый столбец.  $\implies \delta_{k_0}^i = \beta^i \quad c_{k_0}^j = \xi^j$

$\implies \sum_{j=1}^n a_j^i \xi^j = \beta^i$  – система линейных уравнений. Матрица уравнения – ровно матрица  $A$

Нам нужно единственное решение, чтобы она была Крамеровской  $\implies \det A \neq 0$

**Замечание.** Существования правой ИЛИ левой обратной достаточно, чтобы определитель был не равен нулю.

$$\implies \exists C : AC = E$$

$$\exists B : BA = E$$

$$E^T = E \quad (BA)^T = A^T B^T \quad A^T B^T = E$$

Аналогично нам нужно  $\det A^T \neq 0$ , но  $\det A^T = \det A$ , а значит мы свели к тому же условию

$$\exists B, C \implies \exists B = C = A^{-1}$$

$\Leftarrow$  Можно сказать, что уже сделали. Там также сводим к крамеровской системе, а там определитель не ноль.

■

**Замечание.** Можно вычислять обратную матрицу честно выписывая все уравнения на все члены, но такое матричное произведение у нас определено не случайно, у него уже есть структура и ей следует пользоваться

Методы вычисления обратной матрицы:

1. Метод Гаусса

$$[A \mid E] \sim [E \mid A^{-1}]$$

Мини-описание: делаем прогон, чтобы получить треугольную, потом получаем диагональную, затем домножаем столбцы или строки, чтобы получить  $E$

$$T_n \dots T_2 T_1 A = E \implies T_n \dots T_2 T_1 E = A^{-1} \text{ (не доказательство, просто демонстрация)}$$

2. Союзная матрица.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T$$

$\tilde{A}_j^i$  – вычёркиваем в  $A$  соответствующие столбцы и строки, считаем определитель оставшегося (название получившегося: алгебраическое дополнение)

$$\text{Доказательство. } A = \|\alpha_j^i\| A^{-1} = \|\gamma_j^i\|$$

$$AA^{-1} = E \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j^i \gamma_k^j = \delta_k^i$$

$k = k_0$  – зафиксировали

$$\delta_{k_0}^i = \beta^i \quad \gamma_{k_0}^j = \xi^j \quad \alpha_j^i = a_j \text{ (вектор по } i)$$

$$\sum_{j=1}^n a_j \xi^j = b$$

$$\xi^j = \frac{\Delta_j}{\det A} = \frac{\det(A|a_j \rightarrow b)}{\det A} o$$

$b$  – столбец с нулями и одной единицей на месте  $k_0$ . Можем разложить по столбцу определитель

$$= \frac{A_j^{k_0}}{\det A} \forall k_0$$

$$\xi^j = \gamma_{k_0}^j = \frac{A_j^k}{\det A}$$

$$\implies A^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{\det A}$$

■

---

## 1.18 Операторная алгебра

$$\mathcal{L}(X, X) \simeq K_n^n$$

$$\square \varphi : X \rightarrow X$$

**Определение 25.** Ядром оператора  $\varphi$  называется множество

$$\text{Ker } \varphi = \{x \in X : \varphi x = 0\}.$$

**Лемма 23.**  $\text{Ker } \varphi$  – ЛПП  $X$

**Определение 26.** Образом оператора  $\varphi$  называется множество

$$\text{Im } \varphi = \varphi(X).$$

**Лемма 24.**  $\text{Im } \varphi$  – ЛПП  $X$

**Теорема 8** (О ядре и образе).  $\square \varphi : X \rightarrow X$

$$\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim X.$$

*Доказательство.* Утверждаем, что  $X$  делится на две непересекающиеся части: ядро и образ

$$\dim \text{Ker } \varphi = K \quad (\dim X = n)$$

$$\square \text{Ker } \varphi = \mathcal{L}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$$

$$X = \mathcal{L}\left\{\underbrace{e_1, e_2, \dots, e_k}_{\text{Ker } \varphi}, e_{k+1}, \dots, e_n\right\}$$

$$\square x \in X \quad x = \sum_{i=1}^k \xi^i e_i + \sum_{j=k+1}^n \xi^j e_j$$

$$\varphi x = \varphi \left( \sum_{j=k+1}^n \xi^j e_j \right) = \sum_{j=k+1}^n \xi^j \varphi(e_j) \quad \forall x \in X$$

Так образов  $e_{k+1} \dots e_n$  хватает, чтобы разложить образ. Пока что есть только полнота: любой образ раскладывается. Надо доказать следующее:

$$\{\varphi(e_j)\}_{j=k+1}^n - \text{ЛНЗ}$$

$$\triangleleft \sum_{j=k+1}^n \alpha^j \varphi(e_j) = 0 \implies \varphi \left( \underbrace{\sum_{j=k+1}^n \alpha^j e_j}_z \right) = 0 \implies z \in \text{Ker } \varphi \implies z =$$

$\beta^1 e_1 + \dots \beta^k e_k$ . Но тогда есть два разложения по первым  $k$  и одновременно по  $k+1 \dots n$ , но тогда они были бы линейно зависимы, а они выбраны не такими (они базис  $\implies$  есть ЛНЗ в них)

$$\implies \alpha^j = 0 \quad \forall j$$

■

**Замечание.**  $\text{Ker } \varphi \cap \text{Im } \varphi = (0)$

$$\dim \text{Ker } \varphi = k \quad \dim \text{Im } \varphi = n - k$$

$$\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = n = \dim X$$

$$\implies X = \text{Ker } \varphi \dot{+} \text{Im } \varphi$$

$$\square \varphi : X \rightarrow X$$

**Определение 27.** Оператор  $\varphi^{-1}$  называется обратным к  $\varphi$ , если:

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = I.$$

$$\forall x \in X \quad (\varphi^{-1} \circ \varphi)(x) = \varphi^{-1}(\varphi(x))$$

**Теорема 9** (Инвариантное условие существования  $\varphi^{-1}$ ).  $\exists \varphi^{-1} \iff$

$$\begin{cases} \text{Ker } \varphi = \{0\} \\ \text{Im } \varphi = X \end{cases}$$

**Замечание.**  $\varphi(x) = y \implies x = \varphi^{-1}(y)$

$$x \longleftrightarrow \xi^j \quad y \longleftrightarrow \eta^k \quad \varphi \longleftrightarrow \|a_m^i\|$$

$\eta^k = \sum_{i=1}^n a_i^k \xi^i$  – в такой записи нужно искать решение системы уравнений

$$\eta = A\xi$$

Нужно, чтобы система была совместна и определена (крамеровская). ш

$\triangleleft \sum_{i=1}^n a_i^k = 0$  : Если существует единственно решение такого, то существует обратный оператор (по теорема Фредгольма)



**Утверждение 4.**  $\exists \varphi^{-1} \iff \text{Ker } \varphi = \{0\}$

*Доказательство теоремы.*  $\exists \varphi^{-1} \implies \forall y \quad \varphi x = y$  имеет решение  $[x = \varphi^{-1}y]$

$\square \text{Ker } \varphi = \{0\} \implies \dim \text{Im } \varphi = n \implies \text{Im } \varphi \simeq X \implies \varphi - \text{сюръекция}$

$$\begin{cases} \varphi(x_1) = y_1 \\ \varphi(x_2) = y_2 \end{cases}$$

$\varphi(x_1 - x_2) = y_1 - y_2 \neq 0 \implies x_1 - x_2 \notin \text{Ker } \varphi \implies x_1 \neq x_2 \implies \text{инъекция}$   
 $\implies \text{биекция} \quad \blacksquare$

## 1.19 Внешняя степень оператора

$$\Lambda^n \quad \dim X = n \quad \dim X = n$$

$$\dim \Lambda^n = C_n^n = 1 \implies \{^{12\dots n}F\}$$

$$^{12\dots n}F = f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n$$

$$\det \{x_1 x_2 \dots x_n\} = ^{12\dots n} (x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \xi_{\sigma(1)}^1 \dots \xi_{\sigma(n)}^n = \det A \quad A = [x_1 x_2 \dots x_n]$$

$\Lambda_n \quad ^{12\dots n} \hat{F} = \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 \wedge \dots \wedge \hat{e}_n = \langle X^{**} = X \rangle = e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$  (под негалочками будем понимать то, что с галочками. формально сняли их)

$$\begin{aligned} \triangleleft x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n &= \xi_1^{i_1} e_{i_1} \wedge \xi_2^{i_2} e_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_n^{i_n} e_{i_n} \\ &= \sum \sigma (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \xi_2^{\sigma(2)} \dots \wedge \xi_n^{\sigma(n)} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \\ &= \det A^T e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \\ &= \det [x_1 x_2 \dots x_n]. \end{aligned}$$

**Лемма 25.**  $\det [x_1 x_2 \dots x_n] = \det \{x_1 x_2 \dots x_n\}$

**Определение 28** (Внешняя степень оператора  $p$ ).  $\square \varphi : X \rightarrow X$

$$\Lambda_p \quad \{_{i_1 i_2 \dots i_p} F = e_{i_1} \dots e_{i_p}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n}$$

$$\triangleleft \varphi^{\Lambda_p} : \Lambda_p \rightarrow \Lambda_p$$

$$\square x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n \in \Lambda_p$$

$$\varphi^{|\text{lambda}^p} (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) = \varphi x_1 \wedge \varphi x_2 \wedge \dots \wedge \varphi x_n$$

---


$$\square p = n \implies \implies \varphi^{\Lambda_n} : \Lambda_n \rightarrow \Lambda_n$$

**Лемма 26.**  $\square z \in \Lambda_n \implies \varphi^{\Lambda_n} z = \alpha z$

*Доказательство.*  $\square z = e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$

$$\begin{aligned} \varphi^{\Lambda_n} z &= \varphi e_1 \wedge \varphi e_2 \wedge \dots \wedge \varphi e_n \\ &= a_1^{j_1} e_{j_1} \wedge a_2^{j_2} e_{j_2} \wedge \dots \wedge a_n^{j_n} e_{j_n} \\ &= \underbrace{\sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} a_1^{\sigma(1)} a_2^{\sigma(2)} \dots a_n^{\sigma(n)}}_{\alpha} \overbrace{e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n}^z = \alpha z. \end{aligned}$$

■

**Определение 29.**  $\alpha \overline{\Delta} = \det \varphi$  – определитель Линейного Оператора

**Замечание.**  $\varphi^{\Lambda_n} (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) = \det \varphi \cdot x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$

$$\begin{aligned} \varphi^{\Lambda_n} (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) &= \varphi x_1 \wedge \varphi x_2 \wedge \dots \wedge \varphi x_n \\ &= \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \dots \xi_n^{\sigma(n)} \varphi (e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) \\ &= \det \varphi \cdot (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) \\ &= \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \dots \xi_n^{\sigma(n)} \cdot \det \varphi \cdot (e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) \end{aligned}$$

$$\square \varphi, x \in \text{End}(X)$$

**Теорема 10.**  $\det (\varphi \circ \chi) = \det \varphi \cdot \det \chi$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} (\varphi \chi)^{\Lambda_n} (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) &= \varphi (\chi x_1) \wedge \varphi (\chi x_2) \wedge \dots \wedge \varphi (\chi x_n) \\ &= \det \varphi \cdot (\chi x_1 \wedge \chi x_2 \wedge \dots \wedge \chi x_n) \\ &= \det \varphi \cdot \det \chi (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) \end{aligned}$$

С другой стороны  $(\varphi \chi)^{\Lambda_n} (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) = \det (\varphi \chi) (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n)$  ■

---

## 1.20 Практика: ядро и образ

$$\varphi : X \rightarrow Y$$

$$1. \operatorname{Ker} \varphi = \{x \in X \mid \varphi(x) = 0\} - \text{ЛПП } X$$

$$2. \operatorname{Im} \varphi = \varphi(X) = \{y \in Y \mid \exists x \in X \quad \varphi(x) = y\} - \text{ЛПП } Y$$

$$\square Y = X \quad \varphi - \text{эндоморфизм}$$

$$\square \{e_j\}_{j=1}^n - \text{базис } X \quad \varphi \longleftrightarrow A_\varphi = \|a_j^i\| \quad \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^n a_j^i e_i$$

$$x \longleftrightarrow \xi^i \implies \varphi(x) \longleftrightarrow A_\varphi \xi$$

**Задача 7.** Как найти ядро линейного оператора?

$$\text{Доказательство. } \triangleleft x : \quad \varphi(x) = 0$$

но, у нас есть базис, поэтому эквивалентно можно искать  $\xi : \quad A_\varphi \xi = 0 \implies$   
ФСР – базис  $\operatorname{Ker} \varphi$  ■

**Пример.**  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\varphi [\xi^1 \xi^2 \xi^3]^T = [\xi^2, \xi^1 + \xi^3, \xi^3]$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \implies \operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$$

**Пример.**  $D(p) = 2 \cdot \frac{d^2 p}{dt^2} - \frac{dp}{dt}$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_\varphi \xi = 0 \implies \begin{cases} -\xi^2 + 4\xi^3 = 0 \\ -12\xi^3 + 12\xi^4 = 0 \\ -3\xi^4 = 0 \end{cases} \implies \xi^1 = \forall \quad \xi^1 = 1. \text{ Все остальные нули}$$

В  $\operatorname{Ker} \varphi$  лежит  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , а значит там только константы, что соответствует нашему оператору

**Пример.**  $\varphi A = A^T$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det \neq 0 \implies \text{Ker } \varphi = \{0\}$$

**Пример.**  $\varphi: E_3 \rightarrow E_3 \quad \varphi(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{(\vec{x}, \vec{n})}{(\vec{n}, \vec{n})} \vec{n}$

$$\varphi(\vec{x}) = 0 \implies \vec{x} = \frac{(\vec{x}, \vec{n})}{(\vec{n}, \vec{n})} \vec{n} \implies \vec{x} \parallel \vec{n}$$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \xi^3 = 1 \\ \xi^2 = 1 \\ \xi^1 = 1 \end{cases}$$

$$\vec{n} = (1, 1, 1)$$

**Задача 8.** Найти ядро и образ ЛОп

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

.....

$x_1, x_2 = \dots$  – пространство размерности 2, ядро

*Доказательство.*  $\varphi(X) = \text{Im } \varphi \quad \varphi(x) = y \quad \square y = \begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \\ \eta^4 \\ \eta^5 \end{bmatrix}$

Если дописать сбоку столбец эт и преобразовывать его вместе с матрицей, то в конце когда слева у нас де строки нулей, справа есть две нулевые комбинации эт. Строим ФСР по этой системе и находим базис Образа оттуда

НО есть способ лучше. Что такое  $A$ ? это матрица образов базисных векторов. Значит они все лежат в образе. Более того, всё сводится к базису, а

значит образ это линейная оболочка векторов из матрицы. Обычно просят найти таки базис образа, а не просто описание, но мы просто приводим её к диагональному виду и выделяем ненулевые строки. ■

**Задача 9.** Найти полный прообраз  $a$ . Это то же самое что найти один прообраз и добавить все линейные комбинации ядра. (потому что по сути мы решаем неоднородную систему линейных уравнений, а она даёт решения в виде многообразия через частное решение и линейную комбинацию

**Задача 10.**  $\varphi : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 6 & -5 \\ 8 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M \subseteq Y \quad \begin{cases} \xi_6 + \xi^2 = 0 \\ \xi^1 - \xi^3 = 0 \end{cases}$$

$$\square y \in Y \quad y \in M \iff By = 0 \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x \longleftrightarrow \xi$$

$$A_\varphi x = y \in M$$

$$BA_\varphi x = By = 0$$

Таким образом:

- Прообраз элемента это многообразие
- Прообраз линейного пространство это линейное пространство