Конспект по дискретной математике
II семестр

Коченюк Анатолий

3 марта 2021 г.

Глава 1

Дискретная теория вероятностей

1.1 Введение

Определение 1 (Вероятностное пространство).
Ω – элементарные исходы, неделимые дальше.

p – дискретная плотность вероятности.

$p : \Omega \to [0, 1] \quad \sum\limits_{q \in \Omega} p(\omega) = 1$

Замечание. В случае дискретного вероятностного пространства $|\Omega|$ – не более, чем счётное.

Пример (Честная монета). $\Omega = \{0, 1\} \quad p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$

Пример (Нечестная монета). $\Omega = \{0, 1\} \quad p(1) = p, p(0) = q$ – различные числа. $p + q = 1$

Ещё одно название – распределение Бернулли

Пример (Честная игральная кость). $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad p(\omega) = \frac{1}{6}$

Определение 2. Событие, случайное событие – $A \subseteq \Omega$

Замечание. Неправильное определение – то, что может произойти, а может не произойти.

$\emptyset \subseteq \Omega \quad \Omega \subseteq \Omega$ – примеры, когда никогда не происходит и всегда происходит

Замечание. Для недискретного случая неверно, что любое подмножество Ω это событие

Определение 3. Вероятность события $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} p(\omega)$

p берёт элементарные исходы. $P, \mathbb{P}$ – вероятность события

Пример. Событие $E = \{2, 4, 6\} \quad P(E) = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$O = \{1, 3, 5\}$

Замечание. Не существует вероятностного пространства с бесконечным числом равновероятных исходов

$p(\omega) = 0 \quad \sum = 0$

$p(\omega) = a > 0 \quad \sum = a \cdot (+\infty) = +\infty$

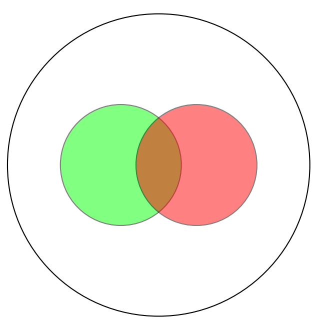
Пример. Событие $B(IG) = \{4, 5, 6\} \quad P(B) = \frac{1}{2}$

Определение 4 (Независимое событие)**.** События A, B независимы, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Пример. $E \cap O = \emptyset \quad B \cap E = \{4, 6\}$

$P(E \cap O) = \emptyset \quad P(O) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \neq 0$

$P(B) \cdot P(E) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3} = P(B \cap E)$



$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(\Omega)}$

Определение 5 (Условная вероятность)**.** $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Замечание. Альтернативное определение независимости, не поддерживающее 0: $P(A|B) = P(A)$

$V = \{5, 6\}$

$P(V \cap E) = \frac{1}{6}$

$P(V) = \frac{1}{3} \quad P(E) = \frac{1}{2} \quad P(V) \cdot P(E) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = P(V \cap E)$

Определение 6 (Произведение вероятностных пространств)**.**
$\Omega_1, p_1 \qquad \Omega_2, p_2$

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

$p\left(\langle\omega_1, \omega_2\rangle\right) = p_1\left(\omega_1\right) \cdot p_2(\omega_2)$

Теорема 1. $\forall A_1 \subseteq \Omega_1$ и $\forall A_2 \subseteq \Omega_2$

$A_1 \times \Omega_2$ и $\Omega_1 \times A_2$ – независимы

Доказательство. $P\left(A_1 \times \Omega_2 \cap \Omega_1 \times A_2\right) = P\left(A_1 \times A_2\right) = \sum\limits_{\substack{a\in A_1 \\ b\in A_2}} p\left(\langle a, b\rangle\right) =$

$$= \sum_{a\in A_1}\sum_{b\in A_2} p_1(a)\cdot p_2(b) = \sum_{a\in A_1} p_1(a)\left(\sum_{b\in A_2} p_2(b)\right) = P_1(A_1)\cdot P_2(A_2) \qquad \blacksquare$$

Определение 7. $A_1, A_2, \ldots, A_n$

1. Попарно независимые $\quad A_i$ и A_j независимы
2. Независимы в совокупности $\forall I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ $P\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right) = \prod\limits_{i\in I} P(A_i)$

   $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)$

Пример. Кидаем две монеты $\Omega = \{00, 01, 10, 11\}$

$A_1 = \{10, 11\} \quad A_2 = \{01, 11\} \quad A_3 = \{01, 10\}$ – независимы попарно, но не в совокупности

Определение 8 (Формула полной вероятности).
$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$

Совокупность таких А-шек называется полной системой событий.

Дано: вероятности $P(A_i) \quad P(B|A_i)$ Найти: $P(B)$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

– формула полной вероятности

Найти: $P\left(A_j|B\right)$

A_1 – болен, A_2 – здоров, B – положительный результат теста

$P(A_2|B)$

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P\left(B|A_i\right) \cdot P(A_i)}$$

– формула Байеса

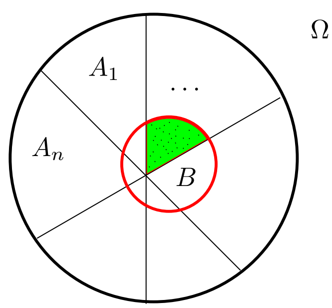


Рис. 1.1: B

1.2 Случайные величины

Замечание. Неправильное (наивное) определение – величина, принемающая слуйное значение.

Она может быть константой. Что такое величина?

Определение 9 (Случайная величина)**.** $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ – $\mathbb{R}$ -значная функция

Ω, p – вероятностное пространство.

Пример. Если взять случайные текст длинной 1Кб. Вариантов текста очень много и бессмысленно их рассматривать отдельно, интересует какое-то свойство, величина.

Графы, $2^{\binom{n}{2}}$ штук. Но нас интересует какая-то (численная) характеристика элементарного исхода.

Пример. $D(ice) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\Omega = D^2 \quad p\left(\langle i, j\rangle\right) = \frac{1}{36}$

$\xi : \Omega \to \mathbb{R} \qquad \xi(\langle i, j\rangle) = i + j$

Пример (Случайные графы)**.** $G(4, \frac{1}{2})$ – случайный граф, 4 вершины, каждое ребро существует с вероятностью $\frac{1}{2}$

$\Omega = \mathbb{B}^6 \quad p(G) = \frac{1}{64}$

$\xi(G) =$ количество компонент связности

Пример. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\xi(w) = w$

Пример. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad E = \{2, 4, 6\}$

$\chi_E(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in E \\ 0, & \omega \notin E \end{cases}$ – индикаторная случайная величина

Определение 10. $\Omega, p \quad \xi$

$[\xi = i] = \{\omega | \xi(\omega) = i\} \subseteq \Omega$

$P\left([\xi = i]\right) = P\left(\xi = i\right) = f_\xi(i) \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f_\xi(i) = P\left(\xi = i\right)$ – дискретная плотность вероятности случайной величины ξ

$F_\xi(i) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} = P\left(\xi \leqslant i\right)$ – функция распределения

Замечание. Непрерывная vs Дискретная вероятность

Пример.

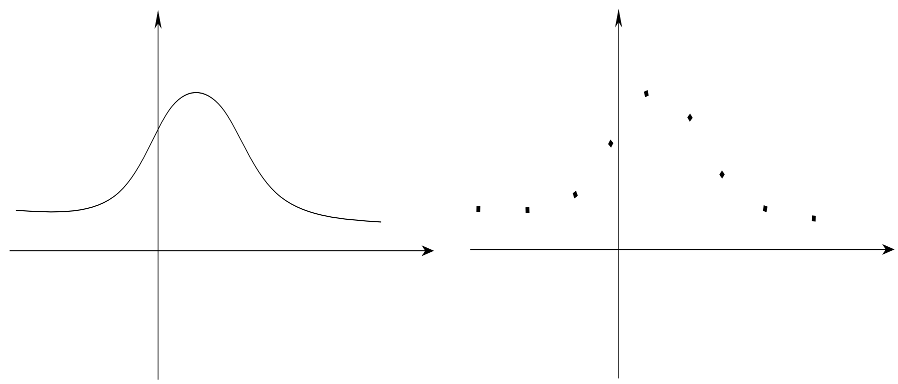


Рис. 1.2: непрерывная и дискретная вероятность

Замечание. $\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$

$f_\xi(i) = P\left(\xi = i\right) \qquad f_\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{xi}(x) = F_\xi(i)$

$f_\xi(x) = \sum\limits_i P\left(\xi = i\right) f\left(x - i\right)$

Пример. $\Omega = \mathbb{B}^{1000} \quad p(\omega) = \frac{1}{2^{1000}}$

$\xi(w) =$ число 1 в ω

$|$множество значений $\xi| = 1001 \qquad p\left(\xi = i\right) = \frac{\binom{1000}{i}}{2^{1000}}$

Замечание. Случайные числа обозначаются строчными греческими или заглавными латинскими из конца алфавита (X, Z)

Замечание (Что можно делать со случайными величинами)**.** ξ, η – функции

$\xi^2 \quad 2\xi \quad \xi + \eta \quad \xi \cdot \eta \quad \xi^\eta \quad \sin\xi \quad e^\eta \quad \frac{1+\xi}{\eta}$ (всё то же, что мы можем делать с функциями.

Пример. $\Omega = D^2 \quad \xi_1\left(\langle i, j \rangle\right) = i \qquad \xi_2\left(\langle i, j \rangle\right) = j$ – одинаково распределённые случайные величины

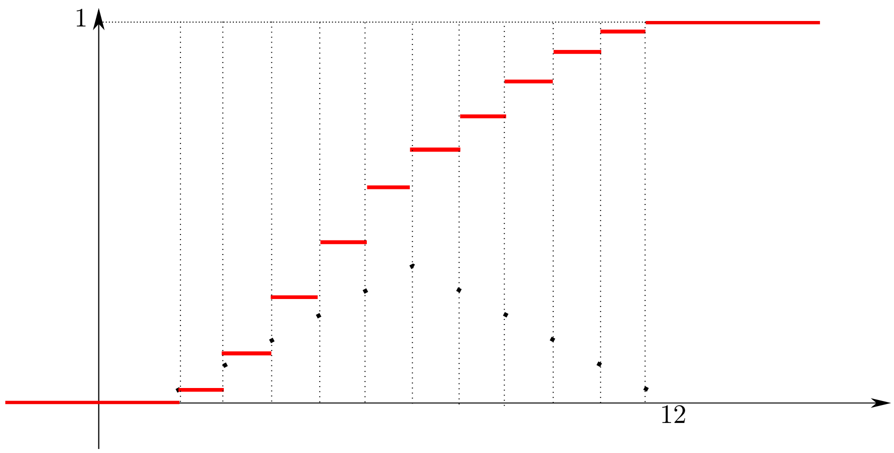


Рис. 1.3: Два-кубика (функция распределения)

Пример. $\Omega = F \quad id(\omega) = \omega$

$1, 2, \ldots, 6$ – каждый с вероятностью $\frac{1}{6}$. Другое вероятностное пространство относительно предыдущего примера, но всё равно одинаковое распределение.

$\xi = (i + j) = \xi_1 + \xi_2 \qquad \xi = (i + j)\%6 + 1$ – у второй то же распределение, что у верхних, но она уже совсем другая.

Определение 11. Математическое ожидание

$$E_\xi = \sum_\omega p\,(\omega)\,\xi(\omega).$$

Утверждение 1. $E_\xi = \sum\limits_i ip(\xi = i)$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
E_\xi &= \sum_\omega p(\omega)\,\xi(\omega) \\
&= \sum_i \sum_{w:\xi(\omega)=i} p(\omega)\cdot\xi(\omega) \\
&= \sum_i \sum_{\omega:\xi(\omega)=i} p(\omega)\cdot i \\
&= \sum_i i \sum_{w:\xi(\omega)=i} p(\omega) \\
&= \sum_i iP(\xi=i)
\end{aligned}$$

.

■

Пример. $\Omega = D \quad \xi = id$

$E_\xi = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 5 + \frac{1}{6}\cdot 6 = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$

Пример. $\Omega = D^2 \quad \xi(\langle i,j\rangle) = i+j$

$E_\xi = \frac{1}{36}\cdot(2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 5\cdot 4 + 6\cdot 5 + 7\cdot 6 + 8\cdot 5 + 9\cdot 4 + 10\cdot 3 + 11\cdot 2 + 12\cdot 1)$ – здесь среднее значение оказалось наиболее частым, но так оно не всегда (пример с 3,5)

Теорема 2. $E_{\lambda\xi} = \lambda E_\xi$

$E(\xi+\eta) = E_\xi + E_\eta$

Доказательство. $E_{\lambda\xi} = \sum\limits_\omega p(\omega)\,\lambda\xi(\omega) = \lambda E_\xi$

$E(\xi+\eta) = \sum\limits_\omega p(\omega)\,(\xi(\omega)+\eta(\omega)) = E_\xi + E_\eta$ ■

Утверждение 2. Если ξ и η одинаково распределены, то $E_\xi = E_\eta$

Пример. Бросим кубик один раз, ξ_1 – что выпало сверху, ξ_2 – что выпало снизу

$E(\xi_1+\xi_2) = 7$. – не играет роли как числа друг относительно друга расположены.

МАТОЖИДАНИЕ ЛИНЕЙНО ВСЕГДА

Пример. $\Omega = S_n \quad p(\omega) = \frac{1}{n!}$

$\xi(\pi) = |\{i|\pi[i] = i\}| \quad 0 \ldots n$, кроме $n-1$

$E_\xi = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_i = 1$

$\xi_i(\pi) = \begin{cases} 1, & \pi[i] = i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$E_{\xi_i} = \frac{1}{n}$

$\xi = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_i$

1.3 Независимые случайные величины

Определение 12 (удобное)**.** Случайные величины ξ и η независимы, если события $[\xi = \alpha]$ и $[\eta = \beta]$ – независимы $\forall \alpha, \beta$

Определение 13 (нормальное)**.** $[\xi \leqslant \alpha]$ и $[\eta \leqslant \beta]$ – независимы для $\forall \alpha,]beta$

Пример. $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

$\xi_1(\langle \omega_1, \omega_2 \rangle) = f(\omega_1)$

$\xi_2(\langle \omega_1, \omega_2 \rangle) = g(\omega_2)$

A и B независимы, χ_A, χ_B – независимы

Теорема 3. ξ, η – независимы $\implies E(\xi \cdot \eta) = E_\xi \cdot E_\eta$

Доказательство. $E\xi \cdot \eta = \sum\limits_{\alpha} \alpha \cdot P(\xi \cdot \eta = \alpha) = \sum\limits_{i,j} \alpha P([\xi = i] \cap [\eta = j]) = \sum\limits_{i} \sum\limits_{j} ijP(\xi = i) P(\eta = j) = E_\xi E_\eta$

$i \cdot j = \alpha \quad i \in R_\xi \quad j \in R_\eta$ ■

Пример. $\Omega = \{0, 1\} \quad p = \frac{1}{2} \quad \xi(i) = 2i \quad E_\xi = 1$

$\Omega = S_n \quad p = \frac{1}{n!} \quad \xi =$ число неподвижных точек $\quad E_\xi = 1$

Матожидание одно, но ведут себя совершенно по разному.

Определение 14 (Дисперсия)**.** $D_\xi = Var\left(\xi\right)$

$D_{xi} = E\left(\xi - E_\xi\right)^2 = E\left(\xi^2 - 2\xi E_\xi + \left(E_\xi\right)^2\right) = E_{xi}^2 - 2E_\xi E_\xi + \left(E_\xi\right)^2 = E_{\xi^2} - \left(E_\xi\right)^2$

Теорема 4. $D_{c\xi} = c^2 D_\xi$

Если ξ и η независимы, то $D_{\xi+\eta} = D_\xi + D_\eta$

Доказательство. Упражнение ■

Вспомним. $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$

$F_\xi(a) = P\left(\xi \leqslant a\right)$

$f_\xi(a) = P\left(\xi = a\right)$

$F_\xi(a) = \sum\limits_{b \leqslant a} f_\xi(b)$

$E_\xi = \sum\limits_{\omega \in \Omega} p(\omega)\xi(\omega) = \sum\limits_{a} a \cdot P\left(\xi = a\right)$

$E(\xi + \eta) = E_\xi + E_\eta$ ■

$E\left(\xi - E\xi\right) = E_\xi - EE_\xi = 0$ матожидане отклонения от матожидания равно нулю..

Хочется смотреть насколько величина отклоняется от своего матожиданя. Для этого используется понятие дисперсии:

$D_\xi = E\left(\xi - E\xi\right)^2 = E\xi^2 - \left(E\xi\right)^2$

$D\left(\xi + \eta\right) = E\xi^2 + E\eta^2 + 2E\xi\eta - \left(E\xi\right)^2 - \left(E\eta\right)^2 - 2E\xi E\eta = D_\xi + D_\eta + 2\left(E_{\xi\eta} - E_\xi E_\eta\right)$.

В случае независимых случайных величин дисперсия линейна. Иначе она отличается на ковариацию:

Определение 15 (Ковариация)**.**

$$Cov\left(\xi, \eta\right) = E_{\xi\eta} - E_\xi E_\eta.$$

$D_\xi = Cov\left(\xi, \xi\right)$

Определение 16 (Корреляция)**.**

$$Corr\left(\xi,\eta\right)=\frac{Cov\left(\xi,\eta\right)}{\sqrt{D_\xi D_\eta}}.$$

Теорема 5. Корреляция двух случайных величин лежит между -1 и 1.

$$-1\leqslant Corr(\xi,\eta)\leqslant 1.$$

Доказательство. $\alpha=\xi-\lambda\eta$

$D_\alpha=E_{\xi^2}-2\lambda E_{\xi\eta}+\lambda^2E\left(\eta^2\right)-(E(\xi))^2+2\lambda E_\xi E_\eta-\lambda^2\left(E_{\eta^2}\right)\geqslant 0$

$D_\xi+2\lambda Cov\left(\eta,\eta\right)+\lambda^2D_\eta$

$4Cov\left(\xi,\eta\right)^2-4D_\xi D_\eta\leqslant 0$ ■

1.4 Хвостовые неравенства

$\xi\quad E\xi=10\quad \xi\geqslant 0$

$P\left(\xi\geqslant 100\right)<\frac{1}{10}$

Теорема 6 (Неравенство Маркова)**.** $\xi\not\equiv 0\quad \xi\geqslant 0\quad P\left(\xi\geqslant a\cdot E_\xi\right)\leqslant\frac{1}{a}$

Доказательство. $E_\xi=\sum\limits_v v\cdot P\left(\xi=v\right)=\sum\limits_{v<a\cdot E_\xi}v\cdot P\left(\xi=v\right)+\sum\limits_{v\geqslant a\cdot E_\xi}v\cdot P\left(\xi=v\right)\geqslant 0+a\cdot E_\xi\sum\limits_{v\geqslant a\cdot E_\xi}P\left(\xi=v\right)=a\cdot E_\xi\cdot P\left(\xi\geqslant a\cdot E_\xi\right)$ ■

Пример. $a=\frac{c}{E_\xi}\quad P\left(\xi\geqslant c\right)\leqslant\frac{E_\xi}{c}$

$D_\xi=E\left(\xi-E\xi\right)^2$

$\eta=\left(\xi-E_\xi\right)^2$

$P((\xi-E_{xi})^2\geqslant a^2\cdot D_\xi)\leqslant\frac{1}{a^2}$

$\sigma=\sqrt{D_\xi}$ – среднеквадратичное отклонение

Теорема 7 (Неравенство Чебышева)**.** $P\left(|\xi-E_\xi|\geqslant a\sigma\right)\leqslant\frac{1}{a^2}$

$P\left(|\xi-E_\xi|\geqslant c\right)\leqslant\frac{D_\xi}{c^2}$

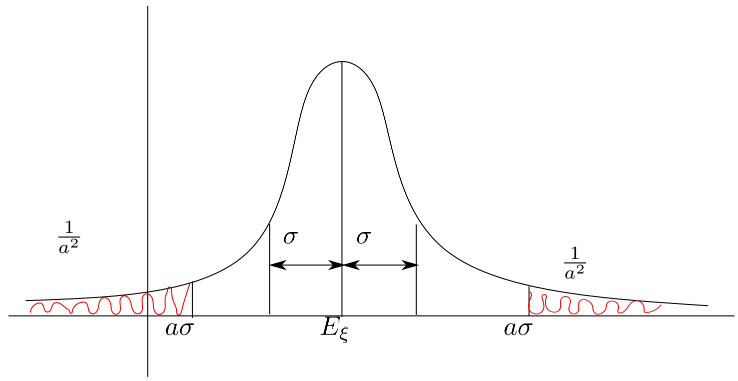


Рис. 1.4: drawing

Задача 1 (10 монет, найти количество “1”)**.**

$$E\xi = 5 \quad D\xi = 2{,}5$$

$$P(\xi \leqslant 0) \leqslant P(|\xi - E\xi| \geqslant 5) \leqslant \frac{2{,}5}{25} = \frac{1}{10}$$

Замечание. С одной стороны, у неравенства есть плюс: оно **всегда** работает; всегда (!)

С другой — иногда оценки получаются, очень грубыми. В нашем примере ответ $\leqslant \dfrac{1}{10}$, а в жизни — $\dfrac{1}{1024}$.

Пример. Нечестная монета $p \neq \frac{1}{2}$. Хотим выяснить чем чаще выпадает.

Бросили: c единиц, $n - c$ нулей. Предположим, что $c < \frac{n}{2} \quad p > \frac{1}{2} \quad pn > \frac{n}{2}$

$P\left(\xi = c\right) \leqslant P\left(\xi \leqslant c\right) \leqslant P\left(|\xi - pn| \leqslant pn - c\right) \leqslant P\left(|\xi - pn| \leqslant \frac{n}{2} - c\right) \leqslant \frac{n}{4 \cdot \left(\frac{n}{2} - c\right)^2}$

Теорема 8 (Граница Чернова (без доказательства))**.** $\xi_i \quad P\left(\xi_i = 1\right) \quad P\left(\xi_i = 0\right) = 1$

$\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \qquad E_\xi = np = \mu$

$P\left(|\xi - \mu| \geqslant \delta\mu\right) < e^{-\mu\frac{\delta^2}{3}}$

Пример. Случайная величина ξ. Хотим узнать матожидание. Проведём эксперимент n раз: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

$$P\left(\left|\frac{\sum \xi_i}{n} - E_\xi\right| > c\right) \leqslant \frac{D_\xi}{n\varepsilon^2}.$$

$\xi : \Omega \to \mathbb{Z}^+$

$E_\xi = \sum\limits_{i=0}^{n} i \cdot P\left(\xi = i\right) = \sum\limits_{i=0}^{n} \left(P\left(\xi \geqslant i\right) - P\left(\xi \geqslant i+1\right)\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} P\left(\xi \geqslant i\right)$