От типов до свободных монад

Коченюк Анатолий

28 марта 2021 г.

0.1 Функции

$f(x) = y$

$f(x) = y_1, \dots, y_n$ – многозначная функция

У нас функция: соответствие одному y-ку

Зачем нужны? Много чего ими описывается. А теперь мы хотим поменять способ описания самих функций. (страшное слово – функторизация)

$f(x) = y \quad x \in X_f \quad y \in Y_f$

```
function int mod2(int a) {
    return a & 1;
}
```

$X_f \to Y_f$ – наша функция стала стрелочкой и это то, чем занимает теория категорий – стрелочки)

Тип $\leftrightarrow$ Множество

Что можем делать с множествами: $\cap \quad \cup \quad add \quad \in? \quad \subseteq \quad \setminus \quad remove$ – с последней есть некоторые проблемы в разных теориях, но сейчас не об этом.

Что можем делать с типами:

- объединять да
- пересекать неочевидно непонятно
- добавлять элемент – объединять с синглтоном
- принадлежность есть
- включённость есть
- с вычитанием проблемы

Воспомиания о топологии: Топология – множество открытых множеств. Если X, Y – открытые, то $X \subseteq X \cup Y \quad Y \subseteq X \cup Y$. Этого про топологию нам должно хватить

0.2 Типы

```
class A<T,U> {
    T a;
    U b;
}
```

Если значений T – 5, а U – 7, то всего разных A Бывает 35. Вжух, мы ввели умножение

Если ввести union(U, T), то это будет сложение

$f : U_7 \to T_5$ – 5^7 – возведение в степень

$x + y = (1 + (x - 1)) + y = \ldots = (1 + 1 + \ldots + 1) + y$

$x \cdot y = (1 + (x - 1)) \cdot y = y + (x - 1) \cdot y = \ldots = y + \ldots + y$

$x^y \quad 0^y = 0 \quad x^{1+(y-1)} = x \cdot x^{y-1}$

Рассмотрим наш класс выше. $\frac{\partial TU}{\partial U} = T$

0.3 Схема существования

Хотим, чтобы функция работали и на типах и на множествах. И отдельно, чтобы в качестве функция были наши стрелочки (которые будут называется категориями)

Хотим от стрелок ассоциативности $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

$f(X_f) = Y_f$

```
func T id(T t) {
    return t
}

id: T -> T
id: A -> A
```

Разные ли эти два id? Реализация одна, вообще разные

```
A a = new A();
A b = new A();
id(a) != id(b)
```

Хотим, ли мы, чтобы они были равны. Этим вопросом в частности задаётся теория категорий

Obj Объекты: Будем обозначать их буковками A, B, C, ..., а остальное выводить сами.

Morph Морфизмы: $\to \quad A \to B, \ldots, f, g, \ldots$

Закон композиции: $x, y \in Morph \quad x_{AB}, y_{BC} \quad (y \circ x) \in Morph$

Если у нас есть две категории, и между ними есть соответствие, то мы называем его функтором

$\mathbb{C}_1 \quad \mathbb{C}_2 \quad \gamma\mathscr{F}$:

1. $\forall a \in \mathrm{Obj}\,\mathbb{C}_1 \; \exists f(a) = a \in \mathrm{Obj}\,\mathbb{C}_2$
2. $\forall m \in \mathrm{Morph}\,\mathbb{C}_1 \; \exists f(m) = m'$

3. $f\left(m\left(a\right)\right) = m'\left(a'\right), m' = f(m), a' = f(a)$
4. $\forall m_1, m_2 \in \operatorname{Morph} \mathbb{C}_1 \quad f\left(m_1\right) \circ f\left(m_2\right) = m_1' \circ m_2'$

Объект – первого порядка, Морфизмы – второго, Морфизмы морфизмов – третьего, ...

Категория какого порядка?

- Первого, как объект
- 2.5, 1.5, ..
- Категория не объект, а что-то ещё (более страшная терминология, юхху)

Если есть стрелки в обе стороны, то $(f_{BA} \circ f_{AB})(A) = id_A(A) = A$

$A[k] \quad arr \quad f(A) = B \quad Aarr \to Barr$

$B[k] \quad map(f, arr)$

Определение 1. Полная категория – в которой стоят все стрелки, которые могут стоять

Ввести петли так просто, что давайте их требовать