

# Дифференциальные уравнения

Коченюк Анатолий

18 сентября 2021 г.

---

Связь по: mvbabushkin@itmo.ru — просьба писать именно на почту 30 — экзамен 70 — практика (будет уточняться)

Литературу пришлю

## 0.1 Введение

### 0.1.1 Уравнения первого порядка

Допустим,  $y$  — неизвестная величина. Заметим, что это не просто число, а некоторая зависимость (например, температура, зависящая от времени), то есть это некоторая искомая функция. Ну, и часто непосредственно, нам не написать чему она равна; явно эту функцию просто так не напишешь, но можно написать некую взаимосвязь между этой функцией и переменной, возможно еще и производной и т.п.

**Определение 1.** Такая взаимосвязь называется **дифференциальным уравнением**.

**Пример.** Допустим, у нас есть кролики, заведем таблицу и будем считать кроликов каждый день.

Предположем, мы смотрели на эксперимент и обнаружили такую зависимость: Прирост примерно пропорционален текущему количеству и времени замеры.

$$y_{k+1} - y_k \approx \alpha y_k (t_{k+1} - t_k)$$

Так же заметим, что если ущемлять шаг времени, то зависимость будет все более и более точная.

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{t_{k+1} - t_k} = \alpha y_k$$

Тогда слева производная.

$$y'(t) = \alpha y(t) - g \cdot y$$

Как же получать такие формулы? Все-таки мы не привели ни одного аргумента, что эта формула верна. . . Пусть этим занимаются физики, мы лишь будем решать используя эти формулы.

Попробуем поугадывать решения:

$$\varphi(t) = \alpha t \implies (\alpha t)' = \alpha(\alpha t) \implies \alpha = \alpha^2 t \implies t = \frac{1}{\alpha}$$

---

$\varphi(t) = e^{\alpha t} \implies (e^{\alpha t})' = \alpha e^{\alpha t} \implies \alpha e^{\alpha t} \equiv \alpha e^{\alpha t} \text{ на } \mathbb{R} \implies \varphi(t) = Ce^{\alpha t} - \text{все решения}$

**Задача 1.** Пусть дано  $m(0) = 25\text{г}$ ,  $m(30) = 42\text{г}$ ,  $m(t_2) = 2m(0)$ ,  $t_2$ —?

То есть нам нужно найти точку на плоскости (здесь был рисунок), но она может быть где угодно, так что предположем, что у нас есть еще какие-то данные:

$$m'(t) = \alpha m(t) \text{ \& } m(t) = Ce^{\alpha t}$$

*Решение.*

$$25 = m(0) = C \quad 42 = m(30) = 25e^{\alpha \cdot 30} \implies \alpha = \frac{1}{30} \ln \frac{42}{25} \implies 50 = m(t_2) = 25e^{\frac{1}{30} \ln \frac{42}{25} t_2} \implies t_2 \approx 40$$

■

### 0.1.2 Второй закон Ньютона

$$F = ma \implies a = \frac{F(t, x, v)}{m} \implies x'' = \frac{F(t, x, x')}{m}$$

Так что дифференциальные уравнение встречаются очень часто — мотивируйтесь их решать.

## 0.2 Уравнения первого порядка и его решения

**Определение 2.** Дифференциальное уравнение первого порядка — это уравнение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

**Определение 3.** Функция  $\varphi$ , если:

1.  $\varphi \in C^1(a, b)$
2.  $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0, x \in (a, b)$

**Пример.**  $y' = -\frac{1}{x^2}$

$$y = \frac{1}{x} + C, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$y = \begin{cases} \frac{1}{x} + A, x < 0 \\ \frac{1}{x} + B, x > 0 \end{cases}$$

Сейчас одна точка разрыва, а если их больше, то было бы больше независимых констант. . . Поэтому, решениями являются функции на отрезке.

**Определение 4.** Интегральная кривая — это график его решения.

<!-- Оять рисунок -->

**Определение 5.** Общее множество решений для дифференциального уравнения — это множество всех его решений.

**Определение 6.**  $F(x, y, c) = 0$

Общий интеграл — это такой интеграл при некотором значении константы в решении которого, соотношение неявно задает все решения.

### 0.2.1. Уравнение в нормальной форме

**Определение 7.** Уравнение в неявной форме:

$$y' = f(x, y)$$

Для такого мы определим **область задания** — это аналог ОДЗ.

**Определение 8.** Область задания — это множество  $\text{Dom } f$  (domain) — множество, где уравнение имеет смысл.

**Пример.**  $y' = -\frac{1}{x^2}$ ,  $f(x, y) = -\frac{1}{x^2}$ ,  $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$

**Задача 2.**  $y' = x + y$ . Пусть  $\varphi$  — решение. У нас есть такая связь:  $\varphi'(x) = x + \varphi(x)$ , в частности, в точке  $(2, 3)$ .

$$\angle(2, 3) \quad \varphi'(2) = 2 + 3 = 5 = f(2, 3)$$

То есть, если там проходит наша функция, то она проходит там под углом  $\arctg 5$ .

$$\angle(4, 3) \quad \varphi'(4) = 4 + 3 = 7 = f(4, 3)$$

Никто не мешает нам взять какую-то сетку, и в каждой точке этой сетки мы поймем, как примерно ведут себя интегральные кривые. То есть, можно не решая уравнения, можно построить такое поле и увидеть, как ведут себя интегральные кривые.

**Определение 9.** То есть, задать уравнение — это значит увидеть, как ведет себя поле направлений.

Из этого геометрического смысла, мы можем сделать еще один вывод.

Возьмем какую-то точку (потом научимся их находить), посчитаем в ней угол, пойдем по этому направлению, новая точка — новое направление, и т. д. Чем мельче шаг, тем ближе ломаная к интегральной кривой.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + h \\ y_{k+1} &= y_k + f(x_k, y_k)h \\ \frac{\delta y_k}{\delta x_k} &= f(x_k, y_k) \end{aligned}$$

Так определяется **ломаная Эйлера**.

## 0.2.2 Уравнение в дифференциалах

Давайте запишем производную, как отношение дифференциалов, и перепишем уравнение 7.

$$\begin{aligned} dy &= f(x, y)dx \\ f(x, y)dx - dy &= 0 \end{aligned}$$

**Определение 10.** Уравнение в дифференциалах:  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

**Определение 11.** Функция  $\varphi$  — это решение 10, если:

- $\varphi \in C^1(a, b)$
- $P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0, \quad x \in (a, b)$

**Определение 12.** Область определения 10 — это множество  $\text{Dom } P \cap \text{Dom } Q$

**Пример.** Пусть  $xdx + ydy = 0$      $\text{Dom } P \cap \text{Dom } Q = \mathbb{R}^2$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in (-R, R) \quad xdx + \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \left( -\frac{2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} \right) dx = 0$$

В чем еще одна идея такого вида уравнения? В том, что  $x$  и  $y$  здесь равноправны, то есть  $x = ky$  — это тоже *конечное* решения.

**Определение 13.** Пара или вектор-функция  $r(t) = (\varphi(t), \psi(t))$  — это параметрическое решение уравнения 10, если:

- $\varphi, \psi \in C^1(\alpha, \beta), r'(t) \neq 0, \forall t \in (\alpha, \beta)$  — второе условие, чтобы не было изломов у функции (как у модуля)
- $P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \equiv 0$

**Пример.**  $xdx + ydy = 0 \implies (R \cos t, R \sin t), t \in \mathbb{R}$  — параметрическое решение.

$$P(\varphi, \psi)\varphi' + Q(\varphi, \psi)\psi' \equiv 0 \implies (P, Q) \cdot (\varphi', \psi') = 0$$

$$F = (P, Q) \quad r = (\varphi, \psi) \quad F \perp r'$$

<!-- Рисунок -->

И здесь у нас никакие направления не исключаются, в отличие от поля, где исключались вертикальные направления.

## 0.3 Задача Коши и уравнения с разделяющимися переменными

### 0.3.1 Задача Коши (ЗК)

**Определение 14.** Задачей Коши или начальной задачей называется задача отыскания решения уравнения в нормальной форме  $y' = f(x, y)$ , которая удовлетворяет начальному условию  $y(x_0) = y_0$

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

$(x_0, y_0)$  — начальные данные

Вопросы: есть ли решение и может ли их быть несколько?

**Теорема 1** (Теорема о существовании для уравнений 1-го порядка).  $G$  – область (открытое связное множество),  $f \in C(G)$ ,  $(x_0, y_0) \in G \implies \exists$  решение задачи Коши в некоторой окрестности точки  $x_0$

**Пример.**  $y' = f(x, y)$   $f(x, y) = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$

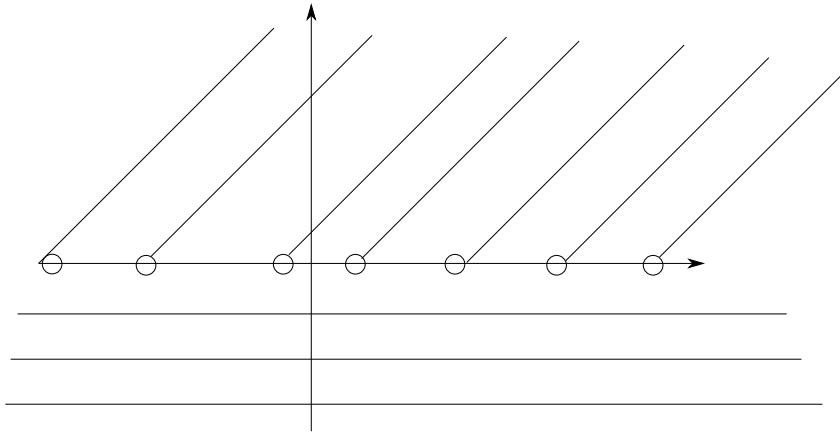


Рис. 1: легко

**Теорема 2** (Теорема единственности для уравнения 1-го порядка).  $G$  – область,  $f, g'_y \in C(G)$ ,  $(x_0, y_0) \in G$ ,  $\varphi_1, \varphi_2$  – решения ЗК на  $(\alpha, \beta) \implies \varphi_1 \equiv \varphi_2$  на  $(\alpha, \beta)$

**Пример.**  $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$

$f(x, y) = 3\sqrt[3]{y^2}$  – непрерывна везде,  $G = \mathbb{R}^2$

По теореме о существовании через любую точку проходит хотя бы одна интегральная кривая.

$$f'_y = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{y}} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$$

На прямой  $y = 0$  нарушаются условия теоремы об единственности, значит в этих точках могут (но не факт, что будут) проходить несколько интегральных кривых.

---


$$dy = 2\sqrt[3]{y^2}dx$$

$$y = (x - c)^3$$

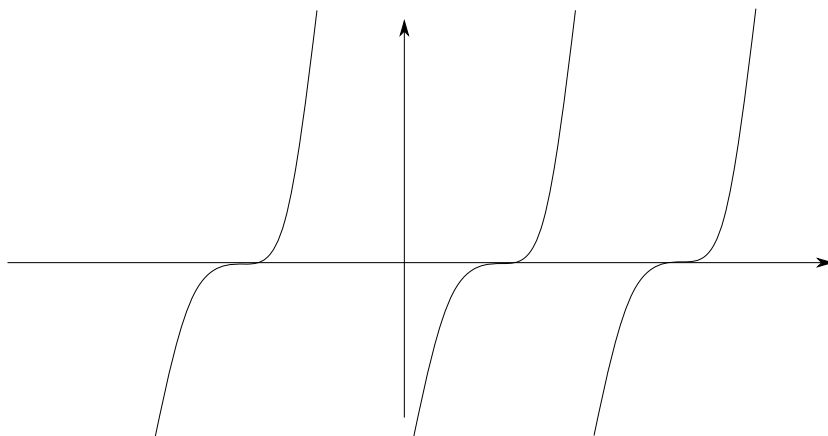


Рис. 2: uzhas

Ответ:  $y = (x - C)^3$   $C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

$y = 0, x \in \mathbb{R}$  – особое решение. Имеются составные решения

**Определение 15.** Решение  $\varphi$  на  $(a, b)$  уравнения  $y' = f(x, y)$  называется особым, если

$$\forall x_0 \in (a, b) \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi_1 - \text{решение задачи, } y' = f(x, y) \quad y(x_0) = \varphi(x_0)$$

на  $(\alpha, \beta)$ , где  $\beta - \alpha < \varepsilon, x_0 \in (\alpha, \beta)$ , но  $\varphi_1 \not\equiv \varphi$  на  $(\alpha, \beta)$

### 0.3.2 Уравнения с разделяющимися переменными

**Определение 16** (Уравнения с разделёнными переменными).

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$



---

**Теорема 3** (Общее решение уравнения с разделёнными переменными).  
 $P \in C(a, b) \quad Q \in C(c, d) \quad (\alpha, \beta) \subset (a, b)$

Тогда функция  $y = \varphi(x)$  – решение на  $(\alpha, \beta) \iff$  :

1.  $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$
2.  $\exists C \in \mathbb{R}$ , т.ч.  $\varphi$  неявно задаётся уравнением  $\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$

*Доказательство.*

$\implies$  Дано, что  $\varphi$  – решение  $\implies$  автоматически выполняется первый пункт.

$\sqsupset x_0 \in (\alpha, \beta)$  – произвольно.  $y_0 := \varphi(x_0)$ , тогда пункт 2 запишется как:

$$\int_{x_0}^x P(x)dx + C_1 + \int_{y_0}^y Q(t)dt + C_2 = C$$

$$\int_{x_0}^x P(x)dx + \int_{y_0}^{\varphi} Q(t)dt = A \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

Пусть  $t = \varphi(\tau) \implies$  л.ч.

$$\int_{x_0}^x P(t)dt + \int_{x_0}^x Q(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau)dt = \int_{x_0}^x (P(\tau) + Q(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau)) dt \equiv 0 \text{ на } (\alpha, \beta)$$

$\Leftarrow$  Дано:  $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$  и  $\int P(x)dx + [\int Q(y)dy]_{y=\varphi(x)} \equiv C$  на  $(\alpha, \beta)$

продифференцируем наше тождество (законно, потому что  $\varphi$  непрерывно дифференцируемо)

$$P(x) + Q(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \equiv 0 \text{ на } (\alpha, \beta)$$

■

**Пример.**  $xdx + ydy = 0$

$$\int xdx + \int ydy = C$$

$$x^2 + y^2 = 2C$$

$$x^2 + y^2 = A$$

$$A > 0 \quad \begin{matrix} y = \pm\sqrt{A-x^2} & x \in (-\sqrt{A}, \sqrt{A}) \\ x = \pm\sqrt{A-y^2} & , y \in (-\sqrt{A}, \sqrt{A}) \end{matrix}$$

---

**Определение 17.** Уравнение с разделяющимися переменными:

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)y_2(y)dy = 0$$

$$p_2(x_0) = 0 \implies x \equiv x_0 - \text{решение}$$

$$q_1(t_0) = 0 \implies y \equiv y_0 - \text{решение}$$

Далее отдельно рассматриваем на каждой из областей (4 здесь):

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx + \frac{q_2(y)}{q_1(y)}dy = 0$$

**Пример.**

$$2ydx - xdy = 0$$

$x = 0, y = 0$  – решения. Нужно отдельно смотреть все четверти

$$\begin{aligned} \frac{2dx}{x} &= \frac{dy}{y} \\ 2 \ln |x| &= \ln |y| + C \\ y &= Ax^2, A > 0, x > 0 \end{aligned}$$

В остальных четвертях аналогично. Они все стыкуются в нуле и общее решение – всевозможные стыковки.

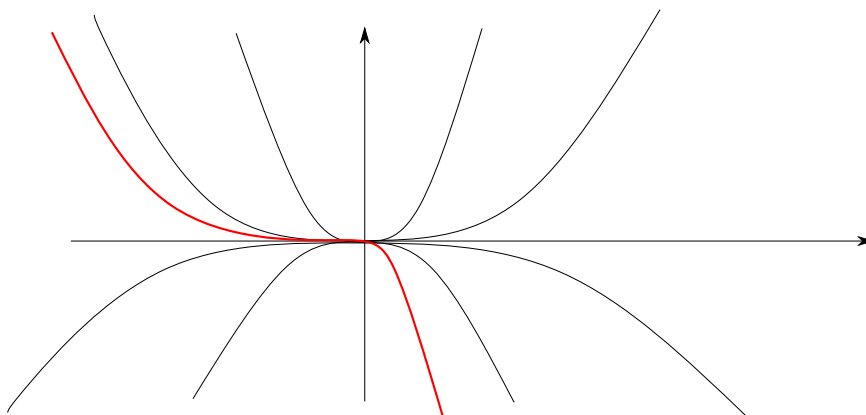


Рис. 3: gohan1

---

**Пример.**

$$ydx - xdy = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} + C$$

$$\ln |x| = \ln |y| + C$$

$$y = Ax$$

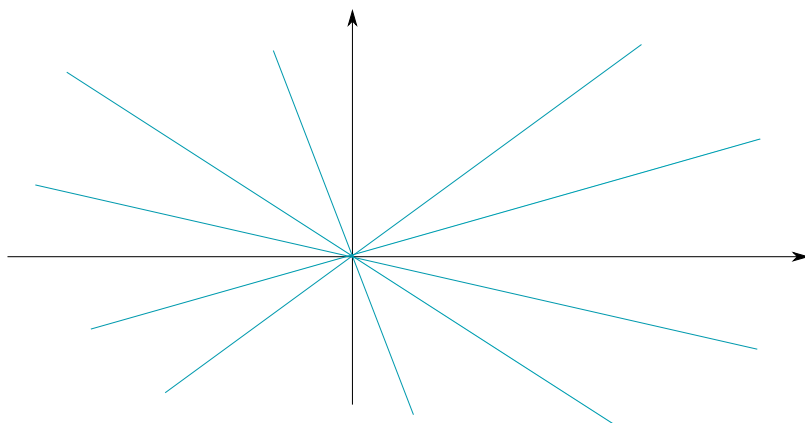


Рис. 4: gohan2

**Определение 18.** Два уравнения называют эквивалентными, если они имеют одинаковую область задания и одинаковый набор интегральных кривых.

**Замечание.**

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0$$

не эквивалентно

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx + \frac{q_1(y)}{q_2(y)}dy = 0$$

---

**Теорема 4** (Теорема о существовании и единственности для уравнений с разделёнными переменными).  $P \in C(a, b)$   $Q \in C(c, d)$

$(x_0, y_0)$  – не особая точка уравнения (т.е.  $P(x_0) \neq 0, Q(y_0) \neq 0$ )  $\implies$   
уравнение

$$\int_{x_0}^x P(t)dt + \int_{y_0}^y Q(t)dt = 0$$

определяет единственное решение в некоторой окрестности точки  $x_0$