Конспект по линейной алгебре
II семестр

Коченюк Анатолий

31 мая 2021 г.

Глава 1

Дополнительные главы линейной алгебры

1.1 Полилинейная формы

Замечание (вспомним)**.** Линейное отображение $\varphi(x+\alpha y) = \varphi(x) + \alpha \cdot \varphi(y)$

Определение 1. $\lhd X$ – ЛП, $\dim X = n$

X^* – сопряжённое к X пространство.

Полилинейной формой (ПЛФ) называется отображение:

$$U : X \times X \times \ldots \times X \times X^* \times X^* \times \ldots \times X^* \to K,$$

обладающее свойством линейности по каждому аргументу.

$\sqsupset x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p \in X \quad y^1, y^2, \ldots, y^q \in X^*$

$u\left(x_1, x_2, \ldots, x_i' + \alpha x_i'', \ldots, x_p, y^1, y^2, \ldots, y^q\right) =$
$= \left(x_1, x_2, \ldots, x_i', \ldots, x_p, y^1, y^2, \ldots\right) + \alpha u\left(x_1, x_2, \ldots, x_i'', \ldots, x_p, y^1, y^2, \ldots, y^q\right)$

Замечание. Пара чисел (p, q) называется валентностью полилинейной формы

Пример. $\mathbb{R}^n \quad f : \mathbb{R} \to K$ – ПЛФ $(1, 0)$

$\hat{x} : \mathbb{R}^{n*} \to K$ – ПЛФ(0,1)

Скалярное произведение $u(x_1, x_2) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ – ПЛФ(2,0)

Смешанное произведение $w(x_1, x_2, x_3) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ – ПЛФ(3,0)

$\sqsupset u, w$ – две полилинейные формы валентности (p, q)

Определение 2.

1. $u = w \iff$

$$u(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^q) = w(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^q) \quad \forall x_1 \ldots x_p y^1 \ldots y^1$$

2. Нуль форма $\Theta \quad \Theta\left(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^q\right) = 0$
3. Суммой ПЛФ валентностей $(p, q) \quad u+v$ называется такое отображение ω, что $\omega(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^1) = u\left(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^1\right) + v\left(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^1\right)$

Лемма 1. w – ПЛФ (p, q)

$w\left(\ldots, x_i' + \alpha x_i'', \ldots\right) = w\left(\ldots, x_i', \ldots\right) + \alpha w\left(\ldots x_i'' \ldots\right)$

4. Произведением полилинейной формы на число λ называется отображение λu, такое что:

$$(\lambda u)\left(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^1\right) = \lambda \cdot u\left(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^1\right).$$

Лемма 2. λu – ПЛФ (p, q)

$\sqsupset \Omega_p^q$ – множество ПЛФ (p, q)

Утверждение 1. Ω_p^q – ЛП

$\sqsupset \{e_j\}$ – базис $X \quad \sqsupset \{f^k\}$ – базис X^*

$x_1 = \sum\limits_{j_1=1}^{n} \xi_1^{j_1} e_{j_1} = \xi_1^{j_1} e_{j_1}$. Дальше значок суммы писаться не будет (иначе помрём) (соглашение о немом суммировании).

$x_2 = \xi_2^{j_2} e_{j_2} \quad \ldots \quad x_p = \xi^{j_p} e_{j_p}$

$$y^1 = \eta^1_{k_1} f^{k_1} \quad y_2 = \eta^2_{k_2} f^{k_2} \quad \ldots \quad y^1 = \eta^q_{k_q} f^{k_q}$$

$$\begin{aligned} w\left(x_1, x_2, \ldots, x_p, y^1, y^2, \ldots, y^q\right) &= w\left(\xi_1^{j_1} e_{j_1}, \xi_2^{j_2} e_{j_2}, \ldots, \xi_p^{j_p} e_{j_p}, \eta^1_{k_1} f^{k_1}, \eta^2_{k_2} f^{k_2}, \ldots, \eta^q_{k_q} f^{k_q}\right) \\ &= \xi_1^{k_1} \xi_2^{j_2} \ldots \xi_p^{j_p} \eta^1_{k_1} \eta^2_{k_2} \ldots \eta^q_{k_q} \underbrace{w\left(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_p}, f^{k_1}, f^{k_2}, \ldots, f^{k_q}\right)}_{\omega^{k_1 k_2 \ldots k_q}_{j_1 j_2 \ldots j_p} \text{ -- тензор ПЛФ}} \\ &= \xi_1^{k_1} \xi_2^{j_2} \ldots \xi_p^{j_p} \eta^1_{k_1} \eta^2_{k_2} \ldots \eta^q_{k_q} \omega^{k_1 k_2 \ldots k_q}_{j_1 j_2 \ldots j_p}. \end{aligned}$$

Лемма 3. Задание полилинейной формы эквивалентно заданию её тензора в известном базисе

$$w \longleftrightarrow \omega^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \omega^{\vec{j}}_{\vec{i}}.$$

Доказательство. (выше) ■

Лемма 4. $v \longleftrightarrow v^{\vec{j}}_{\vec{i}} \quad w \longleftrightarrow \omega^{\vec{j}}_{\vec{i}}$

$$\implies \begin{cases} w + v \longleftrightarrow v^{\vec{j}}_{\vec{i}} + \omega^{\vec{j}}_{\vec{i}} \\ \alpha v \longleftrightarrow \alpha v^{\vec{j}}_{\vec{i}} \end{cases}$$

Замечание. ${}^{s_1 s_2 \ldots s_p}_{t_1 t_2 \ldots t_q} w$ – индексация базиса Ω^q_p

${}^{s_1 s_2 \ldots s_p}_{t_1 t_2 \ldots t_q} w^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$

${}^{s_1 s_2 \ldots s_p}_{t_1 t_2 \ldots t_q} w\left(x_1, x_2, \ldots, x_p, y^1, y^2, \ldots, y^q\right) = \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} \ldots \xi_p^{s_p} \eta^1_{t_1} \eta^2_{t_2} \ldots \eta^q_{t_q}$

Замечание. $\lhd^{s_1 s_2 \ldots s_p}_{t_1 t_2 \ldots t_q} w^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} =^{s_1 s_2 \ldots s_p}_{t_1 t_2 \ldots t_q} w\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}, f^{j_1}, f^{j_2}, \ldots, f^{j_q}\right)$
$= \delta^{s_1}_{i_1} \delta^{s_2}_{i_2} \ldots \delta^{s_p}_{i_p} \delta^{j_1}_{t_1} \delta^{j_2}_{t_2} \ldots \delta^{j_q}_{t_q}$

Пример. $\mathbb{R}^2_2$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad a_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$a_1 =^{11} a_1 \quad a_2 =^{12} a_2 \quad a_3 =^{21} a_3 \quad a_4 =^{22} a_4$

Теорема 1. Набор $\left\{ {}^{s_1 s_2 \ldots s_p}_{t_1 t_2 \ldots t_q} W \right\}^{t_1 t_2 \ldots t_p}_{s_1 s_2 \ldots s_p}$ – образует базис в Ω^p_q

Доказательство.

ПН $\lhd u \in \Omega^p_q$

$$u\left(x_1, x_2, \ldots, x_p, y^1, y^2, \ldots, y^q\right) = \xi^{i_1}_1 \xi^{i_2}_2 \ldots \xi^{i_p}_p \eta^1_{j_1} \eta^2_{j_2} \ldots \eta^q_{j_q} u^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} =$$
$$= {}^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} w\left(x_1, x_2, \ldots, x_p, y^1, y^2, \ldots, y^q\right) u^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} \quad \forall x_1, x_2, \ldots, x_p, y^1, y^2, \ldots, y^q.$$

$$\implies u = {}^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} w \cdot u^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$$

ЛНЗ ${}^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} W \alpha^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \Theta$ Посчитаем на наборе $e_{s_1}, e_{s_2}, \ldots, e_{s_p}, f^{t_1}, f^{t_2}, \ldots, f^{t_q}$

$\delta^{i_1}_{s_1} \delta^{i_2}_{s_2} \ldots \delta^{t_1}_{j_1} \delta^{t_2}_{j_2} \ldots \delta^{t_q}_{j_q} \alpha^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} = 0$

$\alpha^{t_1 t_2 \ldots t^q}_{s_1 s_2 \ldots s_p} = 0 \quad \forall s_1 \ldots s_p t_1 \ldots t_q \implies$ ЛНЗ (альфа 0 на всех, значит она все нули)

■

Замечание. Размерность пространства полилинейных форм $\dim \Omega^p_q = n^{p+q}$

1.2 Симметричные и антисимметричные ПЛФ

$\lhd \Omega^p_0 \qquad u\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right)$

$\lhd \sigma$ – перестановка чисел от 1 до p. $\sigma\left(1, 2, \ldots, p\right) = \left(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(p)\right)$

Определение 3. Полилиненйая форма u называется симметричной, если

$$u\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right) = u(x_1, x_2, \ldots, x_p.$$

Лемма 5. Симметричные полилинейные формы валентности $(p, 0)$ образуют подпространство Σ^p линейного пространства Ω^p_0

Доказательство. $\sqsupset u, v \in \Sigma^p$

$$\lhd (u+v)\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right) = u\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right) + v\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right) =$$

$$= u\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) + v\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) = (u+v)\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right)$$

Так же с умножением на число. ■

Определение 4. Полилинейная форма u валентности $(p, 0)$ называется антисимметричной, если:

$$u\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right) = (-1)^{[\sigma]} u(x_1, x_2, \ldots, x_p).$$

Лемма 6. Антисимметричные полилинейные формы валентности $(p, 0)$ образуют подпространство Λ^p линейного пространства Ω_0^p

Лемма 7. Полилинейная форма $u \in \Lambda^p \iff u = 0$ при любых двух совпадающих аргументах.

Доказательство.

$\Longrightarrow$ $\sqsupset u \in \Lambda^p$ и $x_i = x_j \quad i \neq j$

$a = \lessdot u(\ldots x_i \ldots x_j \ldots) = -u(\ldots x_j \ldots x_i \ldots) = -a \implies a = 0$

$\Longleftarrow$ Известно, что если $x_i = x_{j \neq i}$, то $u(\ldots x_i \ldots x_j \ldots) = 0 \quad \forall i, j$

Докажем, что u принадлежит Λ^p

$x_i = x_j = x_i' + x_i''$

$u(\ldots x_i \ldots x_j \ldots) = u(\ldots x_i' + x_i'' \ldots x_i' + x_i'' \ldots) = u(\ldots x_i' \ldots x_i') + u(x_i' \ldots x_i'') + u(\ldots x_i'' \ldots x_i' \ldots) + u(\ldots x_i'' \ldots x_i'' \ldots)$

Правая часть равна 0. В левой части первое и последнее слагаемые тоже нули, а значит получам

$$u(\ldots x_i' \ldots x_i'') = -u(\ldots x_i'', \ldots x_i').$$

■

Лемма 8. Полилинейная форма $u \in \Lambda^p \iff u(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0$ лишь только $\{x_i\}_{i=1}^p$ – ЛЗ

Доказательство.

$\Longrightarrow$ $\sqsupset \{x_i\}_{i=1}^p$ – ДЗ $\implies x_k = \sum\limits_{j \neq k} \beta^j x_j = \beta^1 x_1 + \beta^2 x_2 + \ldots + \beta^p x_p$

$\lessdot u(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_p) = u\left(x_1, \ldots, \beta^1 x_1 + \beta^2 x_2 + \ldots + \beta^p x_p, \ldots, x_p\right) = 0$

При раскрытии будут выносится коэффициенты и получится образ от совпадающих аргументов (хотя бы двух), который 0 по пред. лемме, а значит всё выражение, как сумма нулей, будет нулём.

$\Longleftarrow$ $u(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0$, когда $\{x_i\}_{i=1}^n$ – ЛЗ $\implies u \in \Lambda^p$

$u\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) = u\left(x_1 + \sum \alpha^i x_i, \ldots, x_p + \sum \alpha^i x_i\right) = u(x_1, x_2, \ldots, x_p) +$
$u\left(x_1, \ldots, \sum \alpha^i x_i\right) + u\left(\sum \alpha^i x_i, \ldots, x_p\right) = u\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) + \sum_{j=2}^{p} \alpha^i u\left(x_1, \ldots, x_i\right) +$
$\sum_{i=1}^{p-1} \alpha^i u(x_i, \ldots, x_p)$

$\blacksquare$

1.3 Практика 02.12

1.3.1 Тензоры

$\omega^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$

Определение 5 (Соглашение об упорядочивании индексов)**.** Слева направо сверху вниз: $(p,q) \quad r = p+q$ – ранг тензора, сколько значков.

$r = 0$ – число ω, инвариант

$r = 1$: a_i – строчка $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$ b^j – столбик $\begin{bmatrix} b^2 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix}$

$r = 2$: a_{ij} b^i_j c^{ij} – первый индекс всегда строка, второй всегда столбец

$$a_{ij} \longleftrightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$b^i_j \longleftrightarrow B = \begin{bmatrix} b^1_1 & b^1_2 & b^1_3 \\ b^2_1 & b^2_2 & b^2_3 \\ b^3_1 & b^3_2 & b^3_3 \end{bmatrix}$$

$r = 3 : a_{ijk}$ b^i_{jk} c^{ij}_k d^{ijk}

1й – строка, 2й – столбец, 3й – слой

$$a_{ijk} \longleftrightarrow A = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{111} & a_{121} & a_{112} & a_{122} \\ a_{211} & a_{221} & a_{212} & a_{222} \end{array} \right]$$

Пример. Построить тензор $\varepsilon^{ij}_k = \begin{cases} -1 & (i,j,k)\text{– чётная} \\ 1 & (i,j,k)\text{– чётная} \\ 0 & (i,j,k) \text{ – не перестановка} \end{cases}$

$r = 4$: строка, столбец, слой, сечение

a_{ijkl} b^i_{jkl} c^{ij}_{kl} d^{ijk}_l e^{ijkl} – последний тензор типа 4,0 (число вверху, число внизу)

$$c^{ij}_{kl} \longleftrightarrow C = \left[\begin{array}{cc|cc} c^{11}_{11} & c^{12}_{11} & c^{11}_{12} & c^{12}_{12} \\ c^{21}_{11} & c^{22}_{11} & c^{21}_{12} & c^{22}_{12} \\ \hline c^{11}_{21} & c^{12}_{21} & c^{11}_{22} & c^{12}_{22} \\ c^{21}_{21} & c^{22}_{21} & c^{21}_{22} & c^{22}_{22} \end{array} \right]$$

Пример. $c^{ij}_{kl} = \begin{cases} 1 & i = k \neq j = l \\ -1 & i = l \neq j = k \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

1.3.2 Операции с тензорами

1. Линейные операции:

$\omega^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} \qquad v^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$

$u = v + \omega \quad u^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} = (v+\omega)^{\vec{j}}_{\vec{i}} = v^{\vec{j}}_{\vec{i}} + \omega^{\vec{j}}_{\vec{i}}$ – матричное сложение.

$(\lambda v)^{\vec{j}}_{\vec{i}} = \lambda \cdot v^{\vec{j}}_{\vec{i}}$

2. Произведение:

   $u^{\vec{j}}_{\vec{i}} \quad v^{\vec{t}}_{\vec{s}}$

   $\omega = u \cdot v \quad \omega^{\vec{k}}_{\vec{l}} = u^{\vec{j}}_{\vec{i}} \cdot v^{\vec{t}}_{\vec{s}} = \omega^{j_1 j_2 \dots j_{q_1} t_1 t_2 \dots t_{q_2}}_{i_1 i_2 \dots i_{p_1} s_1 s_2 \dots s_{p_2}}$

   $\vec{l} = \vec{j}\vec{t} = j_1 \dots j_{q_1} t_1 \dots t_{q_2}$

   $\vec{l} = \vec{i}\vec{s} = i_1 \dots i_{p_1}, s_1 \dots . s_{p_2}$

Пример. $a^i_j \longleftrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$b_k \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$a^i_j b_k = \omega^i_{jk}$. То же самое можно записать как $a \otimes b = \omega$

$\omega \longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -3 & -4 \end{array}\right]$

$v = b \otimes a \quad v^i_{kj} = b_k \cdot a^i_j \longleftrightarrow V = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 4 & -4 \end{array}\right]$

Лемма 9. $\sqsupset \{x_i\}^p_{i=1}$ – ДЗ

Доказательство. $u(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$

$u\,(\alpha x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$

$u\left(\sum\limits_{i=1}^{p-1} \alpha^i x_i, x_2, \dots, x_p\right) = 0$ – равные x_p и первый аргумент ∎

Ω^p_0 – хотим делать из произвольной формы симметричную

$\sqsupset u \in \Omega^p_0$

Определение 6. $u^{(s)}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum\limits_{\sigma} u\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma_p}\right)$ – симметричная форма, образованная из u

$u^{(s)}$ называю симметризацией u и пишут

$$u^{(s)} = Sym\ u.$$

Замечание. $u^{(s)} \in \Sigma^p$

Доказательство. $\sqsupset \widetilde{\sigma}$ – другая перестановка

$u^{(s)}\left(x_{\widetilde{\sigma}(1)}, \ldots, x_{\widetilde{\sigma}(pa)}\right) = \frac{1}{p!} \sum\limits_{\sigma} \left(x_{\sigma \circ \widetilde{\sigma}(1)}, \ldots, x_{\sigma \circ \widetilde{\sigma}(p)}\right) = u^{(s)}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ ■

Замечание. Деление на $p!$ нужно, чтобы выполнялось

$$Sym\ u = u.$$

, если u уже симметричная форма

Замечание. $Sym\ (\alpha u + \beta v) = \alpha Sym\ u + \beta Sym\ v$

Определение 7.

$$u^{(a)} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} u\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right).$$

Эта операция называется антисимметризацией или альтернированием

$$u^{(a)} = Asym\ u.$$

Замечание. $u^{(a)} \in \Lambda^p$

Замечание.

$$(\alpha u + \beta v)^{(a)} = \alpha u^{(a)} + \beta v^{(a)}.$$

Замечание. $Sym\ Sym = Sym$

$Asym\ Asym = Asym$

$Sym\ Asym = 0 \quad Asym\ Sym = 0$

Задача 1. $Omega_0^p$

Найдём базис Λ^p

Доказательство. $\lhd \{{}^{s_1,s_2,\dots,s_p}W\}_{\vec{s}}$ – базис

$\lhd^{s_1,s_2,\dots,s_p}F = p! \cdot Asym\left({}^{s_1,s_2,\dots,s_p}W\right)$

Лемма 10. Некоторые формы будут повторятся.
${}^{s_1\dots s_i\dots s_j\dots s_p}F = -{}^{s_1\dots s_j\dots s_i\dots s_p}F$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
{}^{s1\dots s_i..s_j\dots s_p}F\left(x_1\dots x_i\dots x_j\dots x_p\right) &= {}^{s_1\dots s_j\dots s_i\dots s_p}\ F\left(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots x_p\right) \\
&= -{}^{s_1\dots s_j\dots s_p} \\
&= -{}^{s_1\dots s_j\dots s_i\dots s_p}F\left(x_1\dots x_i\dots x_j\dots x_p\right)
\end{aligned}$$

■

Замечание. Ненулевых C_n^p штук

Упорядочивание $\left\{{}^{s_1 s_2\dots d_p}F\right\}_{1\leqslant s_1<s_2<\dots<s_p\leqslant n}$ – ненулевой набор. Докажем, что он базис

■

Теорема 2. Набор $\left\{{}^{s_1 s_2\dots s_p}F\right\}_{1\leqslant s_1<s_2\dots<s_p\leqslant n}$ образует базис в Λ^p

Доказательство.

Полнота $\sqsupset u\in\Lambda^p$

$$\begin{aligned}
u\left(x_1,x_2,\dots,x_p\right) &= \xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2}\dots\xi_p^{i_p}u_{i_1 i_2\dots i_p} \\
&= {}^{i_1 i_2\dots i_p}\ W\left(x_1,x_2,\dots,x_p\right)u\left(i_1 i_2\dots i_p\right) \\
\text{То же самое:}\quad u &= {}^{i_1 i_2\dots i_p}\ W\cdot u_{i_1 i_2\dots i_p} \\
.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Asym\ u &= Asym\left({}^{i_1 i_2 \dots i_p}W \cdot u_{i_1 i_2 \dots i_p}\right)\\
u &= Asym\left({}^{i_1 i_2 \dots i_p}W\right) \cdot u_{i_1 i_2 \dots i_p}\\
&= \frac{1}{p!}\ {}^{i_1 i_2 \dots i_p}F \cdot u_{i_1 i_2 \dots i_p}\\
&= \frac{1}{p!} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_p \leqslant n} \sum_{\sigma} {}^{\sigma(i_1)\sigma(i_2)\dots\sigma(i_n)}F \cdot u_{\sigma(i_1)\sigma(i_2)\dots.\sigma(i_p)}\\
&= \frac{1}{p!} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]\, i_1 i_2 \dots i_p}F \cdot (-1)^{[\sigma]} u_{i_1 i_2 \dots i_p}\\
&= \frac{1}{p!} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < n} p!^{i_1 i_2 \dots i_p} F u_{i_1 i_2 \dots i_p}
\end{aligned}
$$

.

Лемма 11. $u \in \Lambda^p \implies \forall \sigma u_{\sigma(i_1)\sigma(i_2)\dots\sigma(i_p) = (-1)^{[\sigma]}} u_{i_1 i_2 \dots i_p}$

Тензоры это значение u на $e_{i_1} \dots e_{i_p}$. А тогда оно выполняется просто по определению антисимметричной формы

Линейная независимость $\triangleleft \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} \quad {}^{i_1 i_2 \dots i_p}F \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0$. Подействуем на $e_{s_1} e_{s_2} \dots e_{s_p}$

${}^{i_1 i_2 \dots i_p}F\left(e_{s_1}, e_{s_2}, \dots, s_{s_p}\right) \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0$

$p! \left[Asym^{i_1 i_2 \dots i_p}\right]\left(e_{s_1} e_{s_2} \dots s_{s_p}\right) \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0$

$p! \cdot \frac{1}{p!} \sum\limits_{\sigma} (-1)^{[\sigma]\, i_1 i_2 \dots i_p} W\left(e_{\sigma(s_1)}, e_{\sigma(s_2)}, \dots, e_{\sigma(s_p)}\right) \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0$

$\sum\limits_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \delta^{i_1}_{\sigma(s_1)} \delta^{i_2}_{\sigma(s_2)} \dots \delta^{i_p}_{\sigma(s_p)} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p = 0}$

$\sum\limits_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \alpha_{\sigma(s_1)\sigma(s_2)\dots\sigma(s_2)} = 0$

$p! \alpha_{s_1 s_2 \dots s_p} = 0 \forall s_1 s_2 \dots s_p \implies \alpha = 0$, если α антисимметричный тензор

■

Замечание. $\dim \Lambda^p = C_n^p$

1. $p = 0 \implies C_n^0 = 1 \implies K$
2. $p = 1 \implies C_n^1 = n \implies X^*$
3. $p = 2 \implies C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$

$C_n^p = C_n^{n-p}$

n $p = n-1 \implies C_n^{n-1} = C_n^1 = n$

n+1 $C_n^n = 1$

$\lhd \Lambda^n$

$\left\{{}^{i_1 i_2 \dots i_n} F\right\}_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_n \leqslant n} = \left\{{}^{123\dots n} F\right\}$

$\sqsupset u \in \Lambda^n \implies \exists \alpha \quad u = \alpha^{123\dots n} F$

$$\begin{aligned}
&\lhd^{123\dots n} F\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) = \\
&= p! \cdot \left[Asym^{123\dots n} W\right]\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) = \\
&= \sum_\sigma (-1)^{[\sigma]_{123\dots n}} W\left(x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}\right) = \\
&= (-1)^{[\sigma]} \xi^1_{\sigma(1)} \xi^2_{\sigma(2)} \dots \xi^n_{\sigma(n)} \stackrel{\triangle}{=} \\
&= \det\{x_i\}
\end{aligned}$$

Лемма 12. $\forall u \in \Lambda^n \quad u = \alpha\left({}^{123\dots n} F\right)$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
u\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) &= \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_n^{i_n} u_{i_1 i_2 \dots i_n} \\
&=^{i_1, i_2, \dots, i_n} W\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) u_{i_1 i_2 \dots, i_n} \\
&=^{123\dots n} F(x_1, x_2, \dots, x_n) \underbrace{u_{12\dots n}}_{\alpha}
\end{aligned}$$

■

1.4 Произведение полилинейных форм

$\sqsupset \Omega_p^q$

Определение 8. $u \in \Omega_{q_1}^{p_1}, v \in \Omega_{q_2}^{p_2}$

$\lhd \omega\left(x_1, x_2, \dots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+p_2}, y^1, \dots, y^{q_1}, y^{q_1+1}, \dots, y^{q_1+q_2}\right) =$
$= u\left(x_1, x_2, \dots, x_{p_1}, y^1, y^2, \dots, y^{q_1}\right) \cdot v\left(x_{p_1+1}, x_{p_1+2}, \dots, x_{p_1+p_2}, y^{q_1+1}, \dots, y^{q_1+q_2}\right)$

Такая форма называется консолидированной формой u и v

$u^{i_1 i_2 \dots i_{p_1}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_1}} \cdot v^{s_1 s_2 \dots s_{p_2}}_{t_1 t_2 \dots t_{q_2}} = \omega^{i_1 \dots i_p, s_1, \dots, s_{p_2}}_{j_1 \dots j_{q_1} t_1, \dots, t_{q_2}}$

Замечание. ω – ПЛФ (p_1+p_2, q^1+q^2)

$\omega = u \cdot v \subseteq \Omega^{p_1+p_1}_{q_1+q_2}$

$\lhd \Omega = \dot{+} \sum\limits_{i,j} \Omega^{p_i}_{q_j}$ – линейное пространство

$(\Omega, +, \cdot\lambda, \cdot)$ Новое умножение называется внешним

Свойство 1.
1. $u \cdot (v \cdot w) = (u * v) \cdot w$
2. $u \cdot v \neq v \cdot u$
3. $u \cdot (v+w) = u \cdot v + u \cdot w$
4. $\mathbb{0} \quad u \cdot \mathbb{0} = \mathbb{0}$ – получившийся нооль из бОльшего пространства
5. $u(\alpha v) = (\alpha u) \cdot v$

Определение 9. Ω – внешняя алгебра полилинейных форм

1.5 Практика №2

1.5.1 Свёртки

Пример. $\omega^j_i \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$

$w^i_i = \sum\limits_i = \omega^1_1 + \omega^2_2 + \omega^3_3$

Пример. $w^{ij}_k \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 8 & 9 \\ 5 & -1 & 10 & 3 \end{array}\right)$

$w^{ij}_i = \alpha^j \qquad \alpha^0 = 1 + 10 = 11 \quad \alpha^1 = 2 + (-3) = -1$

$\omega^{ij}_i = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \end{pmatrix}$

Пример. $\omega^{ij}_{kl} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & -3 & 11 \\ \hline -3 & 4 & 13 & 17 \\ 6 & 5 & 19 & 23 \end{array}\right)$

$\omega^{ij}_{ki} = \alpha^j_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 16 & 27 \end{pmatrix}$

$\omega^{ij}_{ji} = \sum\limits_j \sum\limits_i \omega^{ij}_{ji} = \sum\limits_k \alpha^k_k = \alpha^0_0 + \alpha^1_1 = 27$

Замечание. Сложную свёртку можно считать как последовательность единичных

1.5.2 Транспонирование

$$\omega^i_{jk} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 6 \\ -3 & -2 & -1 & 9 & 8 & 7 & -7 & 11 & -13 \\ 2 & 19 & 17 & 14 & 12 & 9 & 21 & 17 & -1 \end{array}\right)$$

$\psi^i_{jk} = \omega^i_{kl}$

$$\psi^i_{jk} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 7 & 4 & 2 & 8 & 5 & 3 & 9 & 6 \\ -3 & 9 & -7 & -2 & 8 & 11 & -1 & 7 & -13 \\ 2 & 14 & 21 & 19 & 12 & 17 & 17 & 9 & -1 \end{array}\right)$$

$$\omega^{ij}_{kl} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 1 & 1 & 3 \\ -8 & 2 & -7 & -1 \\ 18 & 16 & 9 & 11 \\ -14 & -3 & 17 & 19 \end{array}\right)$$

$$\omega^{ij}_{kl} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 14 & & 18 & \\ & & & \\ 1 & 3 & 9 & \\ & & 17 & \end{array}\right)$$

1.5.3 Свёртка и тензорное произведение

$$a^{ij} \sim \begin{pmatrix} 8 & 9 & 1 \\ 7 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b^k_l \sim \begin{pmatrix} 7 & -1^{-}3 & \\ 8 & 4 & 5 \\ 11 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

$a \otimes b = \omega^{ijk}_l \implies \omega^{ijk}_j = \beta^{ik}$

$$\beta^{ik} = a^{ij} b^k_l = \begin{pmatrix} 44 & & \\ & 56 & \\ & & \end{pmatrix}$$

$\beta^{00} = a^{00} b^0_0 + a^{01} b^0_1 + a^{02} b^0_2 =$

$$a^{ij}_k \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & -1 & -7 \\ 2 & 2 & 8 & 11 \end{array}\right)$$

$$b_{m,n} \sim \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$a \otimes b = \omega^{ij}_{kmn} \implies \omega^{ij}_{kji} = \beta_k \sim \begin{pmatrix} 9 \\ -94 \end{pmatrix}$$

$\omega \in \Omega_0^2 \quad \omega(x, y) \in \mathbb{R} \quad x, y \in X$

$\omega \sim a_{ij} \quad x \sim \xi^k \quad y \sim \eta^l$

$\omega(x, y) = a_{ij}\xi^i\eta^j = (a \otimes x \otimes y)_{ij}^{ij}$

1.5.4 Симметризация и асимметризация тензоров

$\omega_{ij} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -1 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$sym(\omega_{i_1,\ldots,i_p}) = a_{j_1\ldots j_p} = \sum\limits_{\sigma} \omega_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(p)}}$

$a_{ij} = w_{(ij)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 8 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$a_{ij} = \frac{1}{2!}(\omega_{ij} + \omega_{ji})$

$\omega_{ijk} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & -7 & 8 & 1 & 9 & 3 & 13 \\ 3 & -4 & 5 & 11 & -7 & 13 & 1 & 4 & 2 \\ 8 & 9 & 7 & 5 & 6 & 11 & -7 & 8 & -1 \end{array}\right)$

$a_{ijk} = \frac{1}{6}\left(\ldots\right)$

$a_{ijk} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{20}{3} & -\frac{2}{3} & 5 & 4 & \frac{20}{3} & 4 & \frac{13}{3} \\ -\frac{2}{3} & 5 & 4 & 5 & -7 & \frac{23}{3} & 4 & \frac{23}{3} & 7 \\ \frac{20}{3} & 4 & \frac{13}{3} & 4 & \frac{23}{3} & 7 & \frac{13}{3} & 7 & -1 \end{array}\right)$

1.6 Свойства произведения полилинейных форм

1. $u \cdot v \cdot w = u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w$

2. $u \cdot v \neq v \cdot u$

   Пример (Конртпример). $\sqsupset u = f^1 \quad v = f^2 \quad u, v \in \Omega_0^1$

   $(u \cdot v)(x_1, x_2) = \left(f^1 f^2\right)(x_1, x_2) = f^1(x_1) \cdot f^2(x_2) \neq f^2(x_1) \cdot f^1(x_2) = \left(f^2 f^1\right)(x_1, x_2) = (v \cdot u)(x_1, x_2)$

3. $\forall p, q \exists \in \Omega_q^p \forall u \in \Omega_{q_1}^{p_1} \quad u \cdot \mathbb{0} = \mathbb{0} \cdot u = \mathbb{0} \in \Omega_{q_1+q}^{p_1+p}$

4. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$

5. $u\,(\alpha v) = (\alpha u)\,v = \alpha\,(uv)$

6. $\exists \left\{f^k\right\}_{k=1}^n$ – базис X^*

   $\sqsupset \left\{{}^{s_1 s_2 \ldots s_p}W\right\}$ – базис Ω_0^p

   ${}^{s_1 s_2 \ldots s_p}W = f^{s_1} f^{s_2} \cdot \ldots \cdot f^{s_p}$

Доказательство. $\sqsupset x_1, x_2, \ldots, x_p \in X$

$$
\begin{aligned}
&{}^{s_1 s_2 \ldots s_p}W\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) = \xi_1^{s_1}\xi_2^{s_2}\ldots\xi_p^{s_p} \\
&= f^{s_1}(x_1)\cdot f^{s_2}(x_2)\ldots\cdot f^{s_p}(x_p) \\
&= f^{s_1}f^{s_2}\ldots f^{s_p}\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right)
\end{aligned}
$$

.

■

Замечание. $\left\{{}^{s_1 s_2 \ldots s_p}_{t_1 t_2 \ldots t_q}W\right\}$ – базис Ω^p_q

${}^{s_1 s_2 \ldots s_p}_{t_1 t_2 \ldots t_q}W = f^{s_1}f^{s_2}\ldots f^{s_p}\hat{e}_{t_1}\hat{e}_{t_2}\ldots\hat{e}_{t_q}$

$\hat{e}_y(y^k) = y^k(e_t)$

7. $Sym\left(u\cdot v\right) = Sym\left(Sym\ u\cdot v\right) = Sym\left(u\cdot Sym\ v\right)$ $Asym\left(u\cdot v\right) = Asym\left(Sym\ u\cdot v\right) = Asym\left(u\cdot Asym\ v\right)$

Утверждение 2. $Asym\left(u\cdot v\right) = Asym\left(Asym\ u\cdot v\right)$

Доказательство.

$Asym\left(Asym\ u\cdot v\right)$

$$
\begin{aligned}
&= Asym\left\{\frac{1}{p!}\sum_\sigma(-1)^{[\sigma]}u\left(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\ldots x_{\sigma(p)}\right)\cdot v\left(x_{p+1}\ldots x_{p+q}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{p!}\sum_\sigma(-1)^{[\sigma]}Asym\left[\underbrace{u\left(x_{\sigma(1)}\ldots x_{\sigma(p)}\right)\cdot v\left(x_{p+1}\ldots x_{p+q}\right)}_{w\left(x_{\sigma(1)\ldots x_{\sigma(p)}x_{p+1}\ldots x_{p+q}}\right)}\right] \\
&= \frac{1}{p!}\sum_\sigma\cancel{(-1)^{[\sigma]}}\cancel{(-1)^{[\sigma]}}Asym\ w\left(x_1, x_2, \ldots, x, x_{p+1}\right) \\
&= \frac{1}{p!}p!Asym\ w\left(x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+1}\right) \\
&= Asym\ \left(u\cdot v\right)\left(x_1\ldots x_{p+q}\right)
\end{aligned}
$$

.

■

1.7 Внешнее произведение ассиметричных полилинейных форм

$\sqsupset u \in \Lambda^{p_1} \quad v \in \Lambda^{p_2}$

$\lhd u \cdot \notin \Lambda^{p_1+p_2}$

$\lhd u \wedge v = \frac{(p_1+p_2)!}{p_1!p_2!} Asym\,(u \cdot v)$

$$
\begin{aligned}
Asym\,(u \wedge v) &= Asym\ \left(\frac{(p_1+p_2)!}{p_1!p_2!}\ Asym\,(u \cdot v)\right) \\
&= \frac{(p_1+p_2)!}{p_1!p_2!} \cdot \frac{1}{(p_1+p_2)!}\ \sum_{\sigma} \left((-1)^{[\sigma]}\right) u\left(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p_1)}\right) v\left(x_{\sigma(p_1+1} \dots x_{\sigma(p_1+p_2)}\right) \\
&= \sum_{\sigma'} (-1)^{[\sigma]}\, u\left(x_{\sigma'(1)} \dots x_{\sigma'_{p_1}}\right) \cdot v\left(x_{\sigma(p_1+1)} \dots x_{\sigma'(p_1+p_2)}\right)
\end{aligned}
$$
.

$\sigma'(j) > p_1 \quad j \leqslant p_1$

$\sigma'(j) \quad j > p_1$

Свойства операции $u \wedge v$:

1. $u \wedge (v+w) = u \wedge v + u \wedge w$
2. $(\alpha u) \wedge v = u \wedge (\alpha v) = \alpha\,(u \wedge v)$
3. $u \wedge v \wedge w = u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w$

   Замечание.

$$
\begin{aligned}
(u \wedge v) \wedge w &= \frac{(p_1+p_2)!}{p_1!p_2!} Asym\ (u \cdot v) \wedge w \\
&= \frac{\cancel{(p_1+p_2)!}}{p_1!p_2!} \frac{(p_1+p_2+p_3)!}{\cancel{(p_1+p_2)!}p_3!} Asym\ \ (Asym\,(u \cdot v) w)) \\
&= \frac{(p_1+p_2+p_3)!}{p_1!p_2!p_3!} Asym\,(u \cdot v \cdot w) \\
&= u \wedge v \wedge w
\end{aligned}
$$
.

4. $u \wedge v \stackrel{?}{=} v \wedge u$

   Замечание. $u \wedge v = (-1)^{p_1 p_2} v \wedge u$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\lhd \left[u \wedge v\right]\left(x_1, x_2, .., x_{p_1}, x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+p_2}\right) = \\
&= \frac{(p_1+p_2)!}{p_1! p_2!} \frac{1}{(p_1+p_2)!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} u\left(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p_1)}\right) v\left(x_{\sigma(p_1+1)} \dots x_{\sigma(p_1+p_2)}\right) = \\
&= \frac{(p_1+p_2)!}{p_1! p_2!} \frac{(-1)^{p_1 p_2}}{(p_1+p_2)!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} v\left(x_{\sigma(p_1)} \dots x_{\sigma(p_1+p_2)}\right) \cdot u\left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p_1)}\right) = \\
&= (-1)^{p_1 p_2} \left(v \wedge u\right)\left(x_1, \dots, x_{p_1+p_2}\right)
\end{aligned}$$

.

■

Замечание. $\sqsupset f, g \in \Lambda^1 \quad f \wedge g = -g \wedge f$

5. $\exists \mathbb{0} \in \Lambda^p \quad u \wedge u \in \Lambda^p = u \wedge \mathbb{0} = \mathbb{0} \in \Lambda^{p+q}$
6. $u \in \Lambda^p \quad v \in \Lambda^q$

   $\sqsupset p + q > n = \dim X \implies u \wedge v = \mathbb{0}$
7. $\left\{f^k\right\}_{k=1}^n$ – базис X^*

   $\sqsupset \left\{{}^{s_1 s_2 \dots s_p}F\right\}$ – базис Λ^p

   $\implies {}^{s_1 s_2 \dots s_p} = f^{s_1} \wedge f^{s_2} \wedge \dots \wedge f^{s_p}$

   Доказательство.

$$\begin{aligned}
{}^{s_1 s_2 \dots s_p}F &= p! Asym\left({}^{s_1 s_2 \dots s_p}W\right) \\
&= p! Asym\left(f^{s_1} f^{s_2} .. f^{s_p}\right) \\
&= p! Asym\left(Asym(f^{s_1} f^{s_2}) .. f^{s_p}\right) \\
&= p! Asym \frac{1}{2!}\left(f^{s_1} \wedge f^{s_2} \cdot .. \cdot f^{s_p}\right) \\
&= p! Asym \frac{1}{2!}\left(Asym(f^{s_1} \wedge f^{s_2} \cdot f^{s_3}) \cdot .. \cdot f^{s_p}\right) \\
&= p! Asym \frac{1}{3!}\left(f^{s_1} \wedge f^{s_2} \cdot f^{s_3} \cdot .. \cdot f^{s_p}\right) \\
&= \dots \\
&= f^{s_1} \wedge f^{s_2} \dots f^{s_p}
\end{aligned}$$

.

■

8. $\lhd \Lambda^n \quad \dim \Lambda^n = 1$

   ${}^{123\dots n}F$ – единственный базисный элемент

   $\implies {}^{123\dots n} = f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n$

$\lhd {}^{12\ldots n}F(x_1, x_2, \ldots, x_n = n! Asym\left[{}^{12\ldots n}W\right](x_1, x_2, \ldots, x_n) = n!\frac{1}{n!}\sum\limits_{\sigma}(-1)^{[\sigma]\,12\ldots n}W\left(x_{\sigma(1)\ldots x_{\sigma(2)}\ldots x_{\sigma(n)}}\right) = \sum\limits_{\sigma}(-1)^{[\sigma]}\xi^1_{\sigma(1)}\xi^2_{\sigma(2)}\ldots\xi^n_{\sigma(n)} \triangleq \det\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \sum\limits_{\sigma}(-1)^{[\sigma]}f^1\left(x_{\sigma(1)}\right)f^2\left(x_{\sigma(2)}\right)f^n\left(x_{\sigma(n)}\right) = \left(f^1 \wedge f^2 \wedge \ldots \wedge f^n\right)(x_1, x_2, \ldots x_n)$

1.8 Основы теории определителей

$\sqsupset X$ – ЛП $\dim X = n$

$\{e_j\}_{j=1}^n$ –базис X $\quad \left\{f^k\right\}_{k=1}^n$ – базис X^*

$\{x_i\}_{i=1}^n$ – набор векторов из X

Определение 10.

$$\begin{aligned}\det\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} &= {}^{12\ldots n}F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ &= \left(f^1 \wedge f^2 \wedge \ldots \wedge f^n\right)(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ &= \left\langle x_k = \sum_{j=1}^n \xi^j_k e_j \right\rangle\\ &= \sum_{\sigma}(-1)^{[\sigma]}\xi^1_{\sigma(1)}\xi^2_{\sigma(2)}\ldots\xi^k_{\sigma(k)}\end{aligned}$$

.

Определение 11. k-мерным параллелепипедом в X, построенном на векторах $\{x_i\}_{i=1}^k$ называется следующее множество:

$$T = \{\sum_{i=1}^k \alpha^i x_i, \quad \alpha^i \in [0,1]\}.$$

Определение 12. Формой объёма в ЛП X называется отображение $\omega^i(n)$ удовлетворяющееся следующим свойствам:

1. $\omega^{(n)}(T_n)$ – число $= \omega^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
2. $\omega^{(n)}$ – полилинейное отображение
3. $\omega^{(n)}$ – ассиметричное отображение

Лемма 13. $\omega^{(n)} \in \Lambda^n \iff \omega^{(n)} = \alpha \cdot {}^{12\ldots n}F$

1.9 Практика

Задача 2. $a_{ijk} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right]$

Доказательство. $\lessdot a_{i(jk)}$

$$i = 1 \quad a_{1jk} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{S} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 3 & 5 & 7 & 5 & 7 & 9 \\ 9 & 7 & 5 & 7 & 5 & 3 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right]$$ ■

1.10 Определитель, продолжение

Пример. ${}^{i_1 i_2 \dots i_p} = f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \dots \wedge f^{i_p}$

Свойства:

$$\{e_j\}_{j=1}^k \text{ – базис } X \implies x_i = \sum_{j=1}^n \xi_i^j e_j$$

$$\lessdot M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \begin{bmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \dots & \xi_n^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \dots & \xi_n^n \end{bmatrix}$$

$\sqsupset \det\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \det M$

1. $\det M^T = \det M$

   Доказательство. $\det M = \sum_\sigma (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \xi_2^{\sigma(2)} \dots \xi_n^{\sigma(n)}$

   $\lessdot \det M^T = \sum_\sigma (-1)^{[\sigma]} \xi^1_{\sigma(1)} \xi^2_{\sigma(2)} \dots \xi^n_{\sigma(n)} = \sum_{\sigma^{-1}} (-1)^{\left[\sigma^{-1}\right]} \xi_1^{\sigma^{-1}(1)} \dots \xi_n^{\sigma^{-1}(n)} = \det M$ ■

   Лемма 14. $\sigma \in S_n \implies [\sigma] = \left[\sigma^{-1}\right]$

   Доказательство. $\sigma \circ \sigma^{-1} = e$ – чётная перестановка.

   Чётность при композиции складывается, значит у σ и σ^{-1} равная чётность (если разная, то e – нечётная ?!!) ■

2. $\det\{x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n\} = -\det\{x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n\}$

Доказательство. Основное свойство антисимметричной формы ■

3. $\det\left\{x_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} \alpha^i x_i, x_2, \ldots, x_n\right\} = \det\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

4. $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ – ЛЗ $\implies \det\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = 0$

5. $\det\{\alpha x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \alpha \det\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

6. *Доказательство.* $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \begin{bmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \ldots & \xi_m^1 & \ldots & \xi_n^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \ldots & \xi_m^2 & \ldots & \xi_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \ldots & \xi_m^n & \ldots & \xi_n^n \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
\lhd \det\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} &= f^1 \wedge f^2 \wedge \ldots \wedge f^n (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&= f^1 \wedge f^2 \wedge \ldots \wedge f^n \left(x_1, x_2, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \xi_m^j e_j, \ldots, x_n\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \xi_m^j f^1 \wedge \ldots \wedge f^n (x_1, x_2, \ldots, e_j, \ldots, x_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{|m-j|} \xi_m^j f^1 \wedge f^2 \wedge \ldots \wedge \underbrace{f^j(e_j)}_{1} \wedge \ldots \wedge f^n (x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_{m+1}, \ldots, x_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{|m-j|} \xi_m^j \underbrace{\underbrace{f^1 \wedge \ldots \wedge f^n}_{\cancel{f^j}} (x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_{m+1}, \ldots, x_n)}_{M_j^m \text{ – дополнительный минор элемента } \xi_n^j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{|m-j|} \xi_n^j M_j^m = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-m} \xi_m^j M_j^m \\
= \ldots &= \sum_{j_1} \sum_{j_2} \ldots \sum_{j_k} (-1)^{j_1 - m} (-1)^{j_2 - m} \ldots (-1)^{j_k - m + k} \underbrace{\xi_{m_1}^{j_1} \xi_{m_2}^{j_2} \ldots \xi_{m_k}^{j_k}}_{L} M_{j_1, j_2, \ldots, j_k}^{m_1, m_2, \ldots, m_k} \\
&= (-1)^{j_1 - m_1 + j_2 - m_2 + \ldots + j_k - m_k} L_{m_1, m_2, \ldots, m_k}^{j_1, j_2, \ldots, j_k} M_{j_1, j_2, \ldots, j_k}^{m_1, m_2, \ldots, m_k}
\end{aligned}$$

.

Теорема 3 (Лапласа)**.** $\det\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = (-1)^{j_1 + \ldots + j_n - m_1 - \ldots - m_n} L_{m_1, \ldots, m_n}^{j_1, j_2, \ldots, j_n} M_{j_1, j_2, \ldots, j_n}^{m_1, m_2, \ldots, m_n}$

Пример. $\det\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1 + \det\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot 2 \cdot (-1)^7 + \det\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 - 3 = 2$

Пример. $\det\begin{vmatrix}1&2&5&6\\3&4&7&8\\0&0&1&2\\0&0&3&4\end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}\cdot\det\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix} = 4$

■

Пример. $\begin{vmatrix}A_{11}&A_{12}&\dots&A_{1n}\\0&A_{22}&\dots&A_{2n}\\0&0&\dots&A_{nn}\end{vmatrix} = \prod_{j=1}^{n}\det A_{jj}$

1.11 Ранг матрицы

$\sqsupset \{x_i\}_{i=1}^{k}$ – набор векторов в X $\quad(\dim X = n \geqslant k)$

Лемма 15. $\{x_i\}_{i=1}^{k}$ – ЛЗ $\iff \forall\omega\in\Lambda^k \quad \omega\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)=0$

Доказательство.

$\Longrightarrow$ $\sqsupset \{x_i\}_{i=1}^{n}$ – ЛЗ

$$\lhd\omega\left(x_1,x_2,\dots,x_k\right)=\omega\left(\underbrace{x_1+\sum_{i=2}^{k}}_{\simeq x_k\quad =\beta x_k}\alpha_i^x,x_2,\dots,x_k\right)=\beta\omega\left(x_1,x_2,\dots,x_k\right)=0$$

$\Longleftarrow$ $\{x_1,x_2,\dots,x_k\} \quad \forall\omega\in\Lambda^k\omega\left(x_1,x_2,..,x_k\right)=0 \overset{?}{\Longrightarrow}$ ЛЗ

Допустим оратное. Тогда мы можем достроить этот набор до базиса X $\quad\{x_1,x_2,\dots,x_k,e_{k+1},\dots,e_n\}$. К нему есть сопряжённый базис $\left\{f^1,f^2,\dots,f^n\right\}$

$$\lhd f^1\wedge f^2\wedge\dots\wedge\left(x_1,x2,\dots,x_n\right)=\sum_{\sigma}(-1)^{[\sigma]}f^{\sigma(1)}f^{\sigma(2)}\dots f^{\sigma(k)}\left(x_1,x_2,\dots,x_k\right) \tag{1.1}$$

$$=\sum_{\sigma}(-1)^{[\sigma]}f^{\sigma(1)}(x_1)f^{\sigma(2)}\dots f^{\sigma(k)}\neq 0 \tag{1.2}$$

$$\tag{1.3}$$

■

Замечание. $\forall \omega \in \Lambda^p \quad \omega =^{i_1 i_2 \dots i_k} F \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}$

$\Longleftarrow \left(\{x_i\}_{i=1}^n - \text{ЛЗ} \iff {}^{i_1 i_2 \dots i_k} F\left(x_1, x_2, \dots, x_k\right) = 0 \forall i_1 \dots i_k\right)$

$\lessdot B = \begin{bmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \dots & \xi_n^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \dots & \xi_n^n \end{bmatrix} \quad \det B = 0 \implies x_1, x_2, \dots, x_n$ – ЛЗ. Но нам хочется узнать, а сколько там независимых

$\Lambda^n \quad \Lambda^{n-1} \quad {}^{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} F\left(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\right)$. Если найдётся такой минор, который не равен 0, то у нас есть $n-1$ ЛНЗ векторов. Если все равны 0, то значит их меньше. Мы уменьшаем число и смотрим дальше, а там тоже выбор из двух.

Определение 13. Ранг матрицы – максимальный размер её отличного от нуля минора.

Определение 14. Базисные строки – набор ЛНЗ строк в количестве ранга матрицы.

Теорема 4. Число ЛНЗ строк матрицы равно $rg\ A$ (ранг A)

1.12 Практика. Вычисление определителей

1. Приведение к треугольному виду.
2. Метод выделения линейных множителей

Определение 15 (Определитель Вандермомда (определитель Того-кого-нельзя-называть))**.** $\prod_{i>j}(x_i - x_j$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

1.13 Тензорная алгебра

Теорема 5. TODO

Доказательство. TODO ∎

$\lhd W \in \Omega^p_q$

$W \quad \underbrace{x_1 x_2 \dots x_p}_{\in X} \underbrace{y^1 y^2 \dots y^q}_{\in X^*} \mapsto K$

$\sqsupset \{e_j\}_{j=1}^n$ – базис $K \quad \left\{f^i\right\}_{i=1}^n$

$f^k(e_j) = \delta^k_j$

$x_1 = \sum\limits_{i=1}^n \xi_1^{i_1} e_{i_1} \quad \dots \quad x_p = \sum\limits_{i=1}^n \xi_p^{i_p} e_{i_p}$

$y^1 = \sum\limits_{j=1}^n \eta_{j_1}^1 f^{i_1} \quad \dots \quad y^q = \sum\limits_{j=1}^n \eta_{j_q}^q f^{j_q}$

$$\begin{aligned} W\left(x_1 x_2 \dots x_p y^1 y^2 \dots y^q\right) &= W\left(\xi_1^{i_1} \dots\right) \\ &= \xi_1^{i_1} \dots \eta_{j_q}^q W\left(e_{i_1} e_{i_2} \dots f^{j_1} f^{j_2} \dots\right) \\ \overline{\triangle} &= \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \eta_{j_1}^1 \eta_{j_2}^2 \dots \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j^1 j^2 \dots j^q} \end{aligned}$$
.

$\sqsupset \{\widetilde{e}_l\}_{l=1}^n$ – базис X (новый)

$\widetilde{e}_l = \sum\limits_{j=1}^n \tau_l^j e_j \qquad \left(\tau = \|\tau_l^j\|\right)$

$\sqsupset \left\{\widetilde{f}^m\right\}_{m=1}^n$ – базис X^* (сопряжённый к новому)

$\widetilde{f}^m = \sum\limits_{j=1}^n \sigma_j^m f^j \qquad \left(\sigma_j^m \tau_l^j = \delta_l^m\right)$

$\sqsupset \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = W\left(e_{i_1} \dots e_{i_p} f^{j_1} \dots f^{j_q}\right)$

$$\begin{aligned} \lhd \widetilde{\omega}_{s_1 s_2 \dots s_p}^{t_1 t_2 \dots t_q} &= W\left(\widetilde{e}_{s_1} \widetilde{e}_{s_2} \dots . \widetilde{e}_{s_p} \widetilde{f}^{t_1} \dots \widetilde{f}^{t_q}\right) \\ &= W\left(\sum_{i_1=1}^n \tau_{s_1}^{i_1} e_{i_1} \dots \sum_{i_p=1}^n \tau_{s_p}^{i_p} e_{i_p}, \sum_{j_1=1}^n \sigma_{j_1}^{t_1} \dots \sum_{j_q=1}^n \sigma_{j_q}^{t_q} f^{j_q}\right) \\ &= \tau_{s_1}^{i_1} \tau_{s_2}^{i_2} \dots \tau_{s_p}^{i_p} \sigma_{j_1}^{t_1} \dots \sigma_{j_q}^{t_q} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j^1 j^2 \dots j^q} \end{aligned}$$
.

Замечание. Вообще аргументы могут идти по-разному и тогда могут писать ${\omega^{i_1 i_2}}_{j_1 j_2 j_3}{}^{i_3 i_4 i_5}$

Определение 16. Тензором типа (p,q) называется алгебраический объект вида $\omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$, где:

$i_1 i_2 \dots i_p$ – ковариантные индексы

$j^1 j^2 \dots j^q$ – контравариантные индексы

и преобразующийся при замене базиса (T) по закону

$$\widetilde{\omega}_{s_1 s_2 \dots s_p}^{t_1 t_2 \dots t_q} = \tau_{s_1}^{i_1} \tau_{s_2}^{i_2} \dots \tau_{s_p}^{i_p} \sigma_{j_1}^{t_1} \dots \sigma_{j_q}^{t_q} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j^1 j^2 \dots j^q}.$$

Замечание. Они, естественно, образуют линейное пространство (можно рассмотреть сложение, домножение на число и доказать свойство)

Операции:

1. Сложение $\quad \omega_{\vec{i}}^{\vec{j}} \quad v_{\vec{i}}^{\vec{j}} \quad \in (p,q)$

$$u_{i_1 i_2 .. i_p}^{j^1 j^2 \dots j^q} = \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} + v_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j^1 j^2 \dots j^q}$$

   $\widetilde{u}_{\vec{i}}^{\vec{j}} = \widetilde{\omega + v}_{\vec{i}}^{\vec{j}} = \widetilde{\omega}_{\vec{i}}^{\vec{j}} + v_{\vec{i}}^{\vec{j}}$

2. Умножение на число $u_{\vec{i}}^{\vec{j}} = \alpha \omega_{\vec{i}}^{\vec{j}}$

   $\widetilde{u}_{\vec{i}}^{\vec{j}} = \widetilde{(\alpha\omega)}_{\vec{i}}^{\vec{j}} = \alpha \widetilde{\omega}_{\vec{i}}^{\vec{j}}$

3. Тензорное произведение. $\sqsupset \omega_{\vec{i}}^{\vec{j}} \, (p_1, q_1) \quad v_{\vec{i}}^{\vec{j}} \quad (p_2, q_2)$

   $u = \omega \otimes v \, (p_1 + p_2, q_1 + q_2)$

$$\widetilde{\omega}_{s_1 s_2 \dots s_{p_1}}^{t_1 t_2 \dots t_{q_1}} \widetilde{v}_{s_{p_1+1} \dots s_{p_1+p_2}}^{t_{p_1+1} \dots t_{p_1+p_2}} = \\ = \tau_{s_1}^{i_1} .. \tau_{s_{p_1+p_2}}^{i_{p_1+p_2}} \sigma_{j_1}^{t_1} \dots \sigma_{j_{q_1+q_2}}^{t_{q_1+q_2}} \underbrace{\omega_{i_1 i_2 \dots i_{p_1}}^{j_1 j_2 \dots j_{q_1}} v_{i_{p_1+1} \dots i_{p_1+p_2}}^{j_{q_1} \dots j_{q_1+q_2}}}_{u_{i_1 i_2 \dots i_{p_1+p_2}}^{j_1 j_2 \dots j_{q_1+q_2}}}.$$

4. Транспонирование. Замена двух индексов тянется до замены двух индексов в преобразовании (просто везде один меняется на другой). А тогда преобразование то же самое. Note: менять можно индексы одного типа

   Замечание. Если менять индексы разного типа, то нарушится ко(нтра)вариантность и это не будет тензором

5. Свёртка. $\omega^{j_1 j_2 \ldots k \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots k \ldots i_p}$

   $\omega^{t_1 t_2 \ldots m \ldots t_q}_{s_1 s_2 \ldots m \ldots s_p} = \sigma^{t_1}_{j_1} \ldots \sigma^{m}_{k} \ldots \sigma^{t_q}_{j_q} \tau^{i_1}_{s_1} \ldots \tau^{k}_{m} \ldots \tau^{k}_{m} \ldots \tau^{i_p}_{s_p} \omega^{j_1 j_2 \ldots k \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots k \ldots i_p}$

   $\sigma^m_k \tau^k_m = 1$ – т.е. эти индексы просто не участвуют в преобразовании.

1.14 Практика. Вычисление определеителей

1. Метод рекуррентных отношений

   $D_n = pD_{n-1}$

   $D_n = p_n D_{n-1}$

   $D_n = p - qD_{n-1}$

   $D_n = p_n - q_n D_{n-1}$

   $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$

2. Представление определителя в виде суммы

1.15 Ранг матрицы это инвариант

$\sqsupset A, B$

$AB = C \quad c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots \\ b_{21} & b_{22} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ldots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ldots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots \\ c_{21} & c_{22} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ldots \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} & & \\ b_{11} & b_{12} & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Если поменять две строчки местами, то они поменяются и у результата.

Если умножить строку на число, в итоге та же строка тоже умножится

Если добавим к одной строке другую, то же произойдёт и с результатом.

Матрицы преобразований:

1. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \lambda & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

Замечание. Произведение матриц некоммутативно.

$AB \neq BA \qquad (A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2 \quad (A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$

Пример. $A \quad \operatorname{rg} A = a \quad \operatorname{rg} B = b$

$$\operatorname{rg} AB = \min(m, n).$$

Про ранг суммы нельзя ничего сказать

Пример. $A_{m\times r} \quad B_{r\times n}$

$\operatorname{rg}(AB) = r \implies \operatorname{rg} A = r \quad \operatorname{rg} B = r$

Задача 3. Сформулировать в терминах рангов необходимое и достаточное условие того, чтобы три точки на плоскости не лежали на одной прямой

$P(x_1, y_1) \quad Q(x_2, y_2) \quad R(x_3, y_3)$

$Ax + By + C = 0$ – уравнение прямой

$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + C = 0 \\ Ax_2 + By_2 + C = 0 \\ Ax_3 + By_3 + C = 0 \end{cases}$

Мы требуем нетривиальное решение. Это некрамеровская система, значит

$\operatorname{rg} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} < 3$

Задача 4. То же самое, только для четырёх точек в пространстве и плоскость через них.

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix}$$

4 – не лежт

3 – на одной плоскости

2 – на одной прямой

Задача 5. $\left[\begin{array}{cc|c} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{array}\right]$

2, 3 – две прямые параллельны или они пересекаются в трёх разных точках

2, 2 – пересекаются в одной точке

1, 2 – три параллельных прямые, две из которых совпадают

1, 1 – все совпадают

1.16 Линейные операторы

Определение 17. $\sqsupset X, Y$ – ЛП, $\dim X = n \quad \dim Y = m$

$\lhd \phi : X \to Y$

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto y = \varphi(x) = \varphi x$$
$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$
$$\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x).$$

Замечание. $\varphi : X \longrightarrow X$

действует на (биекция) – автоморфизм

действует в (сюръекция) – эндоморфизм

Пример. 1. $\mathscr{I} : X \to X \quad \mathscr{I}x = x$ – тождественный оператор

2. $\mathbb{O} : X \to X \quad \mathbb{O}x = 0$ – нулевой оператор

3. $\mathscr{P} : X \to X \quad X = L_1 \dot{+} L_2 \implies x = x_1 + x_2 \begin{cases} \mathscr{P}^{\|L_2}_{L_1} x = x_1 \\ \mathscr{P}^{\|L_1}_{L_2} = x_2 \end{cases}$ – проектор

4. $\varphi : C'[a,b] \to C'[a,b] \quad (\varphi f)(t) = \int_a^b f(s)K(s,t)ds$

5. $\mathscr{D} : C^\infty(a,b) \to C^\infty(a,b) \quad (\mathscr{D} f)(t) = \frac{df}{dt}$

$\sqsupset \mathscr{L}(X,Y)$ – множество операторов действующих из X в Y

$\sqsupset \varphi, \psi \in \mathscr{L}(X,Y)$

Определение 18. Суммой операторов φ, ψ называется отображение

$$\chi = \varphi + \psi.$$

и определяемое как $\chi(x) = \varphi(x) + \psi(x)$

Лемма 16. $\chi \in \mathscr{L}(X,Y)$

$$\chi(x+y) = (\varphi+\psi)(x+y) = \varphi(x+y) + \psi(x+y) = (\varphi+\psi)(x) + (\varphi+\psi)(y) = \chi x + \chi y.$$

Определение 19. Умножением оператора на число $\lambda \in K$ называется отображение

$$\omega = \lambda\varphi.$$

$\omega(x) = (\lambda\varphi)(x) = \lambda \cdot \varphi(x)$

Лемма 17. $\omega \in \mathscr{L}(X,Y)$

Теорема 6. $\mathscr{L}(X,Y)$ – Линейное Пространство

Вопрос 1. $\dim(X,Y) = ?$

$\sqsupset \{e_j\}_{j=1}^n$ – базис $X \quad \{h_k\}_{k=1}^m$ – базис Y

$\sqsupset x \in X \implies x = \sum\limits_{j=1}^n \xi^j e_j$

$$\varphi x = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n}\xi^j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\xi^j \underbrace{\varphi(e_j)}_{\in Y}$$
$$\overset{*}{=} \sum_{j=1}^{n}\xi^j\sum_{k=1}^{m}a_j^k h_k = \sum_{k=1}^{m}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n}\xi^j a_j^k\right)}_{\eta^k} h_k = \sum_{k=1}^{n}\eta^k h_k x.$$

$*\quad \varphi(e_j) = \sum\limits_{k=1}^{m} a_j^k h_k$

Определение 20. Набор $A_\varphi = \|a_j^k\|$ образует матрицу, которая называется матрицей линейного оператора φ в паре базисов $\{e_j\}$ и $\{h_k\}$

Лемма 18. Задание линейного оператора в пространстве эквивалентно заданию его матрицы при фиксированной паре базисов.

Замечание. $\varphi x = y$

$A_\varphi \xi = \eta$

Тождественный оператор имеет единичную матрицу.

Нулевой матрицу из нулей

$X = L_1 \dot{+} L_2 \quad L_1\,\{e_j\}_{j=1}^{k} \quad L_2\,\{e_j\}_{j=k+1}^{n}$

$\begin{bmatrix} E & O \\ O & O \end{bmatrix}$ – матрица проектора (единичный квадрат, всё остальное ноль)

$\lhd \left\{{}^j_k E\right\}$ – набор в $\mathscr{L}(X, Y$

$\sqsupset x \in X \quad x = \sum\limits_{j=1}^{n}\xi^j e_j \quad {}^j_k E x = \xi^j h_k$ (единичка в матрице на месте (j,k))

Теорема 7. Набор $\left\{{}^j_k E\right\}$ образует базис $\mathscr{L}(X, Y)$

Доказательство.

- Полнота. $\sqsupset \varphi \in \mathscr{L}(X, Y)$

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi^j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \xi^j \sum_{k=1}^{m} a_j^k$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \xi^j a_j^k h_k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} {}_k^j E(x) a_j^k \quad \forall x \in X.$$

$\implies \varphi = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{m} {}_k^j E a_j^k$

- Линейная независимость. $\sqsupset \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{m} {}_k^j E \alpha_j^k = \mathscr{O} \quad | \, e_1$

$\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{m} {}_k^j E \left(e_1\right) \alpha_j^k = \sum\limits_{k=1}^{m} 1 \cdot \underbrace{h_k}_{\text{ЛНЗ}} \cdot \alpha_1^k = 0 \implies \alpha_1^k = 0$

$\alpha_j^k = 0 \forall k, j$

■

Замечание. $\dim \mathscr{L}(X, Y) = m \cdot n$

$\lhd K_n^m$ – пространство $m \cdot n$

Лемма 19. $\mathscr{L}(X, Y) \simeq K_n^m$

$\sqsupset \{e_j\}_{j=1}^n \quad \{\widetilde{e}_k\}_{k=1}^n$ – базис X

$\sqsupset \varphi : X \to X \quad A_\varphi \quad \widetilde{A}_\varphi$

Как преобразуется матрица оператора при переходе между базисами

$$\varphi \widetilde{e}_s i = \varphi \left(\sum_{j=1}^{n} \tau_s^j e_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \tau_s^j \varphi\left(e_j\right) \qquad = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \tau_s^j a_j^k e_k$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_s^j \widetilde{e}_j = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_s^j \sum_{k=1}^{n} \tau_j^k e_k \qquad = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \widetilde{a}_s^j \tau_j^k e_k.$$

$\implies \sum\limits_{j=1}^{n} \tau_s^j a_j^k = \sum\limits_{j=1}^{n} \widetilde{a}_s^j \tau_j^k$

$A_\varphi T = T \widetilde{A}_\varphi$

Лемма 20. $\widetilde{A}_\varphi = S A_\varphi T \quad S = T^{-1}$ – преобразование SAT

$\sqsupset T \quad \det T \neq 0$

$\sqsupset A \in \mathbb{R}^n_n$

$A \longrightarrow T^{-1}AT$ – преобразование подобия

$A\ B \iff B = T^{-1}AT$ – отношение эквивалентности. Разбивается на непересекающиеся классы

$\sqsupset X, Y, Z$

$\lhd \varphi \in \mathscr{L}(X, Y)$

$\lhd \psi \in \mathscr{L}(Y, Z)$

$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$

Определение 21. Композицией линейных операторов ϕ и ψ называется отображение

$$\chi = \psi \circ \varphi,$$

которое действует как

$$\chi(x) = (\varphi \circ \psi)(x) = \pi(\varphi(x)).$$

Лемма 21. $\psi \circ \varphi = \chi \in \mathscr{L}(X, Z)$

Доказательство. $\sqsupset x, y \in X$

$\chi(x+y) = (\psi \circ \varphi)(x+y) = \psi(\varphi(x+y)) = \psi(\varphi x + \varphi y) = \psi(\varphi(x)) + \psi(\varphi(y)) = \chi(x) + \chi(y)$

$\chi(\lambda x) = \lambda\chi(x)$ ∎

$\sqsupset \{e_j\}_{j=1}^n$ – базис X, $\{h_k\}_{k=1}^m$ – базис Y, $\{g_l\}_{l=1}^s$ – базис Z

В паре базисов $\varphi \longleftrightarrow A_\varphi$

В паре базисов $\psi \longleftrightarrow B_\psi$

Хочется получить матрицу $\chi \longleftrightarrow C_\chi$

$\chi(e_j) = \sum\limits_{l=1}^{s} C_k^l g_l$

С другой стороны

$$
\begin{aligned}
&= (\psi \circ \varphi)(e_j) = \psi(\varphi(e_j)) \\
&= \psi\left(\sum_{k=1}^{m} a_j^k h_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_j^k \psi(h_k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_j^k \sum_{l=1}^{s} b_k^l g_l \\
&= \sum_{l=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{m} a_j^k b_k^l\right) g_l
\end{aligned}
$$

.

$\implies c_j^l = \sum\limits_{k=1}^{m} a_j^k b_k^l \iff C_\chi = B_\psi \cdot A_\varphi$

$\lhd \mathbb{K}_n^n$ "+" "λ" "·"

Определение 22. Алгеброй $\mathscr{A}$ называется линейное пространство, наделённое операцией умножение, так что выполняются следующие требования (аксиомы):

1. $a_1(a_2a_3) = (a_1a_2)a_3 \forall a_1, a_2, a_3$
2. $a(b+c) = ab + ac$

   $(a+b)c = ac + bc$
3. $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$

$\sqsupset \mathscr{A}$ – некоторая алгебра $\sqsupset x, y \in \mathscr{A}$

$\sqsupset \{e_j\}$ – базис $\mathscr{A} \implies \begin{cases} x = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi^j e_j \\ y = \sum\limits_{k=1}^{n} \eta^k e_k \end{cases}$

$$x \cdot y = \left(\sum_{j=1}^{n} \xi^j e_j\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \eta^k e_k\right) = \sum_{k,j=1}^{n} \xi^j \eta^k \underbrace{(e_j \cdot e_k)}_{\sum\limits_{l=1}^{n} m_{jk}^l e_l}$$

$\left\{m_{jk}^l\right\}$ – структурные константы алгебры $\mathscr{A}$

Пример. $\mathbb{C}$

	1	i
1	1	i
i	i	-1

Такую же для кватернионов можно сделать.

Задача 6. Выразить свойство ассоциативности в рамках структурных констанст

Сделать то же самое с коммутативностью

Замечание. Алгебра это полугруппа (есть ассоциативности)

$\lhd \mathscr{A}$ – алгебра $\sqsupset e_L \in \mathscr{A}: \quad \forall x \in \mathscr{A} \quad e_L x = x$ – левая единица

$e_R \in \mathscr{A}: \quad \forall x \in \mathscr{A} \quad x e_R = x$ – правая единица

Замечание. Если есть и левая и правая, то они совпадают

Если нет, то может быть несколько одного типа.

$\sqsupset x \in \mathscr{A} \quad \sqsupset y \in \mathscr{A} : yx = e$, y – левый обратный

$z \in \mathscr{A} \quad xz = e$ – правый обратный

Замечание. Если у x есть правый <u>или</u> левый, то он называется обратимым

Если есть и тот и другой, то они совпадают $y = z = x^{-1}$

Доказательство. $z = yxz = y$ ■

Пример. $\mathcal{L}(X, X)$ – алгебра операторов $(\circ)$

K_n^n – алгебра матриц

Определение 23. $\sqsupset x \in \mathcal{A}$

$y: \quad yx = e \implies y$ – левый обратный

$z : xz = e \implies z$ – правый обратный

Утверждение 3. Если существует и тот, и другой, то они совпадают и обозначаются x^{-1}

1.17 Обратная матрица

$\sqsupset A \in K_n^n$

Определение 24. Матрица $B \in K_n^n$ Называется левой обратной к A, если

$$BA = E.$$

Матрица $X \in K_n^n$ называется правой обратной к A, если

$$AC = E.$$

(E – единичная матрица)

Лемма 22. Обратная матрица существует тогда и только тогда, когда её определитель не равен нулю

$\det A \neq 0 \iff \exists A^{-1} : \quad AA^{-1} = A^{-1}A = E$

Доказательство.

$\Longrightarrow$ $\det A \neq 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \exists B, C : \quad BA = AC = E$

$\sqsupset A = \|a_j^i\| \quad c = \|c_j^i\| \quad E = \|\delta_j^i\|$

$$\begin{matrix} & [C] & \\ [A] & & = [E]\,. \end{matrix}$$

$\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^i c_k^j = \delta_k^i$

Зафиксируем $k = k_0$-ый столбец. $\Longrightarrow$ $\delta_{k_0}^i = \beta^i \quad c_{k_0}^j = \xi^j$

$\Longrightarrow \sum\limits_{j=1}^{n} a_j^i \xi^j = \beta^i$ – система линейных уравнений. Матрица уравнения – ровно матрица A

Нам нужно единственное решение, чтобы она была Крамеровской $\Longrightarrow$ $\det A \neq 0$

Замечание. Существования правой ИЛИ левой обратной достаточно, чтобы определитель был не равен нулю.

$\Longrightarrow \exists C : \quad AC = E$

$?\exists B : BA = E$

$E^T = E \quad (BA)^T = A^T B^T \qquad A^T B^T = E$

Аналогично нам нужно $\det A^T \neq 0$, но $\det A^T = \det A$, а значит мы свели к тому же условию

$\exists B, C \implies \exists B = C = A^{-1}$

$\Longleftarrow$ Можно сказать, что уже сделали. Там также сводим к крамеровской системе, а там определитель не ноль.

■

Замечание. Можно вычислять обратную матрицу честно выписывая все уравнения на все члены, но такое матричное произвдение у нас определено не случайно, у него уже есть структура и ей следует пользоваться

Методы вычисления обратной матрицы:

1. Метод Гаусса

   $\left[A \mid E\right] \sim \left[E \mid A^{-1}\right]$

   Мини-описание: делаем прогон, чтобы получить треугольную, потом получаем диагональную, затем домножаем столбцы или строки, чтобы получить E

   $T_n \dots T_2 T_1 A = E \implies T_n \dots T_2 T_1 E = A^{-1}$ (не доказательство, просто демонстрация)

2. Союзная матрица.

   $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \widetilde{A}^T$

   $\widetilde{A}^i_j$ – вычёркиваем в A соответствующие столбцы и строки, считаем определитель оставшегося (название получившегося: алгебраическое дополнение)

   Доказательство. $A = \|\alpha^i_j\| A^{-1} = \|\gamma^i_j\|$

   $AA^{-1} = E \quad \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha^i_j \gamma^j_k = \delta^i_k$

   $k = k_0$ – зафиксировали

   $\delta^i_{k_0} = \beta^i \quad \gamma^j_{k_0} = \xi^j \quad \alpha^i_j = a_j$ (вектор по i)

   $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j \xi^j = b$

   $\xi^j = \frac{\Delta_j}{\det A} = \frac{\det(A|a_j \to b)}{\det A} o$

   b – столбец с нулями и одной единицей на месте k_0. Можем разложить по столбцу определитель

   $= \frac{A^{k_0}_j}{\det A} \forall k_0$

   $\xi^j = \gamma^j_{k_0} = \frac{A^k_j}{\det A}$

   $\implies A^{-1} = \frac{\widetilde{A}^T}{\det A}$ ■

1.18 Операторная алгебра

$\mathcal{L}(X, X) \simeq K_n^n$

$\sqsupset \varphi : X \to X$

Определение 25. Ядром оператора φ называется множество

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{x \in X : \varphi x = 0\}.$$

Лемма 23. $\operatorname{Ker} \varphi$ – ЛПП X

Определение 26. Образом оператора φ называется множество

$$\operatorname{Im} \varphi = \varphi(X).$$

Лемма 24. $\operatorname{Im} \varphi$ – ЛПП X

Теорема 8 (О ядре и образе)**.** $\sqsupset \varphi : X \to X$

$$\dim Ker\varphi + \dim \Im\varphi = \dim X.$$

Доказательство. Утверждаем, что X делится на две непересекающиеся части: ядро и образ

$\dim \operatorname{Ker} \varphi = K \quad (\dim X = n)$

$\sqsupset \operatorname{Ker} \varphi = \mathcal{L}\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$

$$X = \mathcal{L}\left\{\underbrace{e_1, e_2, \ldots, e_k}_{\operatorname{Ker} \varphi}, e_{k+1}, \ldots, e_n\right\}$$

$\sqsupset x \in X \quad x = \sum\limits_{i=1}^{k} \xi^i e_i + \sum\limits_{j=k+1}^{n} \xi^j e_j$

$\lhd \varphi x = \varphi\left(\sum\limits_{j=k+1}^{n} \xi^j e_j\right) = \sum\limits_{j=k+1}^{n} \xi^j \varphi(e_j) \quad \forall x \in X$

Так образов $e_{k+1} \ldots e_n$ хватает, чтобы разложить образ. Пока что есть только полнота: любой образ раскладывается. Надо доказать следующее:

$\{\varphi(e_j)\}_{j=k+1}^{n}$ – ЛНЗ

$$\lhd \sum_{j=k+1}^{n} \alpha^i \varphi(e_j) = 0 \implies \varphi\left(\underbrace{\sum_{j=k+1}^{n} \alpha^j e_j}_{z}\right) = 0 \implies z \in \operatorname{Ker}\varphi \implies z =$$

$\beta^1 e_1 + \ldots \beta^k e_k$. Но тогда есть два разложения по первым k и одновременно по $k+1 \ldots n$, но тогда они были бы линейно зависимы, а они выбраны не такими (они базис $\implies$ есть ЛНЗ в них)

$\implies \alpha^j = 0 \quad \forall j$

■

Замечание. $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi = (0)$

$\dim \operatorname{Ker}\varphi = k \quad \dim \operatorname{Im}\varphi = n - k$

$\dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = n = \dim X$

$\implies X = \operatorname{Ker}\varphi \dotplus \operatorname{Im}\varphi$

$\sqsupset \varphi : X \to X$

Определение 27. Оператор φ^{-1} называется обратным к φ, если:

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = I.$$

$\forall x \in X \quad \left(\varphi^{-1} \circ \varphi\right)(x) = \varphi^{-1}\left(\varphi(x)\right)$

Теорема 9 (Инвариантное условие существования φ^{-1})**.** $\exists \varphi^{-1} \iff \begin{cases} \operatorname{Ker}\varphi = \{0\} \\ \operatorname{Im}\varphi = X \end{cases}$

Замечание. $\varphi(x) = y \implies x = \varphi^{-1}(y)$

$x \longleftrightarrow \xi^j \quad y \longleftrightarrow \eta^k \quad \varphi \longleftrightarrow \|a^i_m\|$

$\eta^k = \sum\limits_{i=1}^{n} a^k_i \xi^i$ – в такой записи нужно искать решение системы уравнений

$\eta = A\xi$

Нужно, чтобы система была совместна и определена (крамеровская). ш

$\lhd \sum\limits_{i=1}^{n} a^k_i = 0$: Если существует единственно решение такого, то существует обратный оператор (по теорема Фредгольма)

Утверждение 4. $\exists \varphi^{-1} \iff \operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$

Доказательство теоремы. $\exists \varphi^{-1} \implies \forall y \quad \varphi x = y$ имеет решение $\left[x = \varphi^{-1}y\right]$

$\sqsupset \operatorname{Ker}\varphi = \{0\} \implies \dim \operatorname{Im}\varphi = n \implies \operatorname{Im}\varphi \simeq X \implies \varphi$ – сюръекция

$$\begin{cases} \varphi(x_1) = y_1 \\ \varphi(x_2) = y_2 \end{cases}$$

$\varphi\left(x_1 - x_2\right) = y_1 - y_2 \neq 0 \implies x_1 - x_2 \notin \operatorname{Ker}\varphi \implies x_1 \neq x_2 \implies$ инъекция

$\implies$ биекция ■

1.19 Внешняя степень оператора

$\Lambda^n \quad \dim X = n \quad \dim X = n$

$\dim \Lambda^n = C_n^n = 1 \implies \left\{ {}^{12\dots n}F \right\}$

${}^{12\dots n}F = f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n$

$\det\left\{x_1 x_2 \dots x_n\right\} =^{12\dots n} \left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) = \sum\limits_\sigma (-1)^{[\sigma]} \xi^1_{\sigma(1)} \dots \xi^n_{\sigma(n)} = \det A \quad A = \left[x_1 x_2 \dots x_n\right]$

$\Lambda_n \quad {}_{12\dots n}\hat{F} = \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 \wedge \dots \wedge \hat{e}_n = \left\langle X^{**} = X \right\rangle = e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$ (под негалочками будем понимать то, что с галочками. формально сняли их)

$$\begin{aligned} \lhd x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n &= \xi_1^{i_1} e_{i_1} \wedge \xi_2^{i_2} e_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_n^{i_n} e_{i_n} \\ &= \sum \sigma (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \xi_2^{\sigma(2)} \dots \wedge \xi_n^{\sigma(n)} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \\ &= \det A^T e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \\ &= \det\left[x_1 x_2 \dots x_n\right]. \end{aligned}$$

Лемма 25. $\det\left[x_1 x_2 \dots x_n\right] = \det\left\{x_1 x_2 \dots x_n\right\}$

Определение 28 (Внешняя степень оператора p)**.** $\sqsupset \varphi : X \to X$

$\Lambda_p \quad \left\{ {}_{i_1 i_2 \dots i_p}F = e_{i_1} \dots e_{i_p} \right\}_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n}$

$\lhd \varphi^{\Lambda_p} : \Lambda_p \to \Lambda_p$

$\sqsupset x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n \in \Lambda_p$

$\varphi^{|lambda^p} \left(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n\right) = \varphi x_1 \wedge \varphi x_2 \wedge \dots \wedge \varphi x_n$

$\sqsupset p = n \implies \implies \varphi^{\Lambda_n} : \Lambda_n \to \Lambda_n$

Лемма 26. $\sqsupset z \in \Lambda_n \implies \varphi^{\Lambda_n} z = \alpha z$

Доказательство. $\sqsupset z = e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n$

$$\begin{aligned}
\varphi^{\Lambda_n} z &= \varphi e_1 \wedge \varphi e_2 \wedge \ldots \wedge \varphi e_n \\
&= a_1^{j_1} e_{j_1} \wedge a_2^{j_2} e_{j_2} \wedge \ldots \wedge a_n^{j_n} e_{j_n} \\
&= \underbrace{\sum_\sigma (-1)^{[\sigma]} a_1^{\sigma(1)} a_2^{\sigma(2)} \ldots a_n^{\sigma(`n)}}_{\alpha} \overbrace{e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n}^{z} = \alpha z.
\end{aligned}$$

■

Определение 29. $\alpha\overline{\triangle} = \det \varphi$ – определитель Линейного Оператора

Замечание. $\varphi^{\Lambda^n} (x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n) = \det \varphi \cdot x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$

$$\begin{aligned}
\varphi^{\Lambda^n} (x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n) &= \varphi x_1 \wedge \varphi x_2 \wedge \ldots \wedge \varphi x_n \\
&= \sum_\sigma (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \ldots \xi_n^{\sigma(n)} \varphi (e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n) \\
&= \det \varphi \cdot (x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n) \\
&= \sum_\sigma (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \ldots \xi_n^{\sigma(n)} \cdot \det \varphi \cdot (e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n)
\end{aligned}$$

.

$\sqsupset \varphi, x \in End(X)$

Теорема 10. $\det (\varphi \circ \chi) = \det \varphi \cdot \det \chi$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
(\varphi\chi)^{\Lambda_n} (x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n) = \varphi (\chi x_1) \wedge \varphi (\chi x_2) \wedge \ldots \wedge \varphi (\chi x_n) \\
= \det \varphi \cdot (\chi x_1 \wedge \chi x_2 \wedge \ldots \wedge \chi x_n) \\
= \det \varphi \cdot \det \chi (x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n)
\end{aligned}$$

.

С другой стороны $(\varphi\chi)^{\Lambda_n} (x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n) = \det (\varphi\chi) (x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n)$ ■

1.20 Практика: ядро и образ

$\varphi : X \to Y$

1. $\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in X \mid \varphi(x) = 0\}$ – ЛПП X
2. $\operatorname{Im}\varphi = \varphi(X) = \{y \in Y \mid \exists x \in X \quad \varphi(x) = y\}$ – ЛПП Y

$\sqsupset Y = X \quad \varphi$ – эндоморфизм

$\sqsupset \{e_j\}_{j=1}^n$ – базис $X \quad \varphi \longleftrightarrow A_\varphi = \|a_j^i\| \quad \varphi(e_j) = \sum\limits_{i=1}^n a_j^i e_j$

$x \longleftrightarrow \xi^i \implies \varphi(x) \longleftrightarrow A_\varphi \xi$

Задача 7. Как найти ядро линейного оператора?

Доказательство. $\lhd x : \quad \varphi(x) = 0$

но, у нас есть базис, поэтому эквивалентно можно искать $\xi : \quad A_\varphi \xi = 0 \implies$ ФСР – базис $\operatorname{Ker}\varphi$ ■

Пример. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\varphi\left[\xi^1\xi^2\xi^3\right]^T = \left[\xi^2, \xi^1 + \xi^3, \xi^3\right]$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \implies \operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$$

Пример. $D(p) = 2 \cdot \frac{d^2p}{dt^2} - \frac{dp}{dt}$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_\varphi \xi = 0 \implies \begin{cases} -\xi^2 + 4\xi^3 = 0 \\ -12\xi^3 + 12\xi^4 \\ -3\xi^4 \end{cases} \implies \xi^1 - \forall \quad \xi^1 = 1. \text{ Все остальные нули}$$

В $\operatorname{Ker}\varphi$ лежит $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, а значит там только константы, что соответствует нашему оператору

Пример. $\varphi A = A^T$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$\det \neq 0 \implies \operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$

Пример. $\varphi : E_3 \to E_3 \quad \varphi(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{(\vec{x},\vec{n})}{(\vec{n},\vec{n})}\vec{n}$

$\varphi(\vec{x}) = 0 \implies \vec{x} = \frac{(\vec{x}\vec{n})}{(\vec{n}\vec{n})}\vec{n} \implies \vec{x} \parallel \vec{n}$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\xi^3 = 1\\\xi^2 = 1\\\xi^1 = 1\end{cases}$$

$\vec{n} = (1,1,1)$

Задача 8. Найти ядро и образ ЛОп

$$A = \begin{bmatrix}1&1&1&2&-1\\2&1&-2&-1&1\\3&-1&0&-1&1\\1&-2&2&0&0\\2&-2&-1&-3&2\end{bmatrix}$$

$\dots\dots\dots\dots$

$x_1, x_2 = \dots$ – пространство размерности 2, ядро

Доказательство. $\varphi(X) = \operatorname{Im}\varphi \quad \varphi(x) = y \quad \sqsupset y = \begin{bmatrix}\eta^1\\\eta^2\\\eta^3\\\eta^4\\\eta^5\end{bmatrix}$

Если дописать сбоку столбец эт и преобразовывать его вместе с матрицей, то в конце когда слева у нас де строки нулей, справа есть две нулевые комбинации эт. Строим ФСР по этой системе и находим базис Образа оттуда

НО есть способ лучше. Что такое A? это матрица образов базисных векторов. Значит они все лежат в образе. Более того, всё сводится к базису, а значит образ это линейная оболочка векторов из матрицы. Обычно просят найти таки базис образа, а не просто описание , но мы просто приводим её к диагональному виду и выделяем ненулевые строки. ■

Задача 9. Найти полный прообраз a. Это то же самое что найти один прообраз и добавить все линейные комбинации ядра. (потому что по сути мы решаем неоднородную систему линейных уравнений, а она даёт решения в виде многообразия через частное решение и линейную комбинацию

Задача 10. $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 6 & -5 \\ 8 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M \subseteq Y \quad \begin{cases} \xi_{61} + \xi^2 = 0 \\ \xi^1 - \xi^3 = 0 \end{cases}$$

$$\sqsupset y \in Y \quad y \in M \iff By = 0 \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x \longleftrightarrow \xi$

$A_\varphi x = y \in M$

$BA_\varphi x = By = 0$

Таким образом:

- Прообраз элемента это многооразие
- Прообраз линейного пространство это линейное пространство

1.21 Алгебра скалярных полиномов

P_n – пространство, множество полиномов.

Определение 30 (Полином)**.** Формальная запись

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n, \quad a \in K \quad t^k = \underbrace{t \cdot t \cdot \ldots \cdot t}_{k}.$$

$P_n = P_n[K]$ – линейное пространство.

Стандартный базис $\left\{1, t, t^2, \ldots, t^n\right\}$ $\qquad \lim P_n[K] = n + 1$

Не ввести мультипликативную структуры, замкнутую в полиномах степени n

$\triangleleft P_\infty[K] = \left\{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i t^i \quad \forall n \in \mathbb{N}\right\}$

1. $P_\infty[K]$ – линейное пространство
2. $P_\infty[K]$ – мультипликативный моноид

   $\sqsupset p, q \in P_\infty[K] \quad \triangleleft (p \cdot q)(t) = p(t) \cdot q(t) = q(t) \cdot p(t) = (q \cdot p)\,(t)$

   $\implies p \cdot q = q \cdot p \quad \forall p, q \implies$ коммутативность

   $\triangleleft 1 \in P_\infty[K] \quad 1 \cdot p = p \implies$ нейтральный элемент моноида

Замечание. $\dim P_\infty[K] = \infty$

Утверждение 5. $P_\infty[K]$ – алгебра (скалярных полиномов)

$\sqsupset J \subseteq P_\infty[K]$

Определение 31. J называется <u>идеалом</u> алгебры $P_\infty[K]$, если

$$P_\infty[K] \cdot J \subseteq J(\text{левый идеал}).$$

У нас коммутативность, значит идеалы все двусторонние и называются просто идеалами.

Любой идеал это линейное пространство

Замечание. $1 \in P_\infty[K]$, значит $\forall a \in J \quad a \in 1 \cdot J \subseteq P_\infty[K] \cdot J \quad a \in P_\infty[K] \cdot J \implies J \subseteq P_\infty[K] J$

$$P_\infty[K] \cdot J = J.$$

Пример. $\sqsupset q \in P_\infty[K] \implies q \cdot P_\infty[K]$ – идеал J_q

1. $P_\infty[K] \cdot q \cdot P_\infty[K] = q \cdot P_\infty[K] = J_q$
2. $q \in J_q \quad p \in P_\infty[K]$

   $$p \cdot q = q' \in J_q.$$

   $\sqsupset p \in P_\infty[K] \quad r \in J_q \implies r = \widetilde{p} \cdot q$

   $\triangleleft p \cdot r = p \cdot \widetilde{p} \cdot q = \hat{p} \cdot q \in q \cdot P_\infty[k]$

Пример. $\{0\}, \quad P_\infty[K]$

Замечание. Если В идеале есть единица, то он тривиален и совпадает с $P_\infty[K]$

Пример. $J_\alpha = \{p \in P_\infty[K] : \quad p(\alpha) = 0\}$ – идеал. (главный идеал)

$J_q = \{p \in P_\infty[K] :$ имеют тот же набор корней, что и $q\}$

Определение 32. Если $J_q = q \cdot P_\infty[K]$, то q – порождающий полином идеала J

Определение 33. Суммой идеалов J_1 и J_2 называется множество

$$J_s = \{p \in P_\infty[K] : p = p_1 + p_2, \quad p_1 \in J_1, \quad p_2 \in J_2\}.$$

Лемма 27. J_s – идеал

Доказательство. $\sqsupset \widetilde{p} \in P_\infty[K], \quad p \in J_s \quad p_1' \in J_1, \quad p_2' \in J_2$

$$\lessdot \widetilde{p} \cdot p = \widetilde{p}\,(p_1 + p_2) = \overbrace{\widetilde{p}p_1}^{p_1' \in J_1} + \overbrace{\widetilde{p}p_2}^{p_2' \in J_2} \in J_1 + J_2 = J$$ ■

Определение 34. Произведением идеалов J_1 и J_2 называется множество

$$J_m = \left\{ \sum_i p_i q_i \mid \{p_i\} \in J_1, \quad \{q_i\} \in J_2 \right\}.$$

Лемма 28. J_m – идеал

Замечание. Идеал это:

1. Аддитивный моноид
2. Мультипликативный моноид
3. Дистрибцтивность ещё есть

Определение 35. Пересечением идеалов J_1 и J_2 называется

$$J_r = \{p \in P_\infty[K] : \quad p \in J_1 \cap J_2\}.$$

Здесь $J_1 \cap J_2$ в теоретико-множественном смысле. Вообще так называется именно пересечение идеалов

Задача 11 (Домашнее задание)**.**

$$J_1 \cdot J_2 \subseteq J_1 \cap J_2.$$

$\lhd J \quad \sqsupset p \in J : \deg P = \min$

Определение 36. Полином, обладающий данным свойством называется минимальным полиномом идеала J

Замечание. $P = P_{\min}$

Лемма 29. Минимальный полином существует

Доказательство. $p - \min J$

Если $\dim p = 1$, то $J = P_\infty[K]$, а в $P_\infty[K]$ есть 1

Если $\dim p > 1$

$P_\infty[K] \cdot J = J$

$1 \cdot p = p$,

Так мы нашли минимальный полином в обоих частях равенства из определения, значит всё хорошо =) ■

Лемма 30. $\forall p \in J \implies p \vdots p_{\min}$

Доказательство. $\sqsupset p \in J$, но $p \not\vdots p_{\min}$

$\implies p = q \cdot p_{\min} + r \quad \deg r < \deg p_{\min}$

$r = p - q \cdot p_{\min}$, оба слагаемых из идеала $\implies r \in J \quad \deg r < \deg p_{\min} \implies r$ – минимальный полином идеала $\implies r = 0$ ■

Лемма 31. $\sqsupset q$ – порождающий полином идеала $J_q \implies J_q = q \cdot P_\infty[K]$

$\sqsupset p_{\min}$ – минимальный полином идеала J_q

$\implies q = \alpha p_{\min} \quad \alpha \in K$

Доказательство. В силу предыдущей леммы $q \vdots p_{\min}$

$p_{\min} \in J_q \implies \exists \widetilde{p} \in P_\infty[K] : \quad p_{\min} = q \cdot \widetilde{p} \implies p_{\min} \vdots q$ ■

Замечание. $J_p \quad p_J$ – минимальный порождающий полином идеала J_p

1.22 Практика. Алгебра Скалярных полиномов

Операции:

1. Умножение полиномов
2. Деление. Деление в столбик.

Замечание. Алгебру скалярных полиномов $P_\infty[K]$ будем обозначать как $\mathscr{A}$

Лемма 32. J_1, J_2 – идеалы $\mathscr{A}$

$p_1 \leftrightarrow J_1 \quad p_2 \leftrightarrow J_2$

$\sqsupset J_1 \subseteq J_2 \implies p_1 \vdots p_2$

Доказательство. $\forall p \in J_1 \quad p \vdots p_1$

$J_1 \subseteq J_2 \implies p \in J_2 \implies p \vdots p_2$

$p_1 \in J_1 \implies p_1 \in J_2 \implies p_1 \vdots p_2$ ∎

Лемма 33. $p_1 = \min J_1 \quad p_2 = \min J_2$

$\sqsupset J_r = J_1 \cap J_2 \quad p_r = \min J_r \implies p_r = \text{НОК}\,(p_1, p_2)$

Доказательство. $p_r \in J_1 \cap J_2 \implies \begin{cases} p_r \in J_1 \implies p_r \vdots p_1 \\ p_r \in J_2 \implies p_r \vdots p_2 \end{cases} \implies p_r \sim$ ОК (p_1, p_2)

$\sqsupset \widetilde{p}_r \sim \text{НОК}\,(p_1, p_2) \implies \widetilde{p}_r \vdots p_1 \implies p_r \in J_1$

$\widetilde{p}_r \vdots p_2 \implies p_r \in J_2$

$\implies p_r \in J_1 \cap J_2$

Кроме того $p_r \vdots \widetilde{p}_r \implies \widetilde{p}_r = \min J_r$ ∎

Лемма 34. $p_1 = \min J_1 \quad p_2 = \min J_2$

$\triangleleft J_s = J_1 + J_2 \leftrightarrow p_s = \text{НОД}\,(p_1, p_2)$

Доказательство. $p_1 \in J_s \implies p_1 \vdots p_s$

$p_2 \in J_s \implies p_2 \vdots p_s$

$p_3 \sim \text{ОД}\,(p_1, p_2)$

$\sqsupset \widetilde{p}_s = \text{НОД}\,(p_1, p_2)$

$$\begin{cases} p_1 \vdots p_s \\ p_2 \vdots p_s \\ p_s = \alpha p_1 + \beta p_2 \vdots p_s \implies \underbrace{\widetilde{p}_s}_{\min} \in J_s \end{cases}$$ ■

Теорема 11. $\sqsupset p_1, p_2 \quad \text{НОД}\,(p_1, p_2) = 1 \implies \exists q_1, q_2 \in A:$

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = 1.$$

Доказательство. J_1, J_2 порождены полиномами p_1, p_2

$J_1 + J_2 = P_\infty[K] \longleftrightarrow p_s = 1$

1 лежит в сумме идеалов, значит раскладывается через p_1 и p_2

$\implies p_1 q_1 + p_2 q_2 = 1$ ■

Замечание. $\sqsupset p_1 p_2 \dots p_k \in A \quad \text{НОД}\,(p_1 \dots p_n) = 1 \implies \exists q_1 q_2 \dots q_k :$

$$\sum_{i=1}^{k} p_i q_i = 1.$$

Доказательство. $p_i \leftrightarrow J_i$

$J_1 + \underbrace{J_2 + \ldots + J_k}_{J'} = 1$ (свели задачу предыдущей. $J' = J_2 + J''$ ...) ■

Замечание. $\sqsupset p_1 p_2 \dots p_k$ – попарно взаимопростые $(\text{НОД}\,(p_i, p_{j \neq i}) = 1)$

$\triangleleft p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$

$p_i' = \frac{p}{p_i}$ – не взаимнопростые (дофига общих множителей), но подходит под условие прошлого замечания с общим нодом

$\implies \exists q_i \in A: \quad \sum\limits_{i=1}^{k} p_i' q_i = 1$

1.23 Алгебра операторных полиномов

1.23.1 Введение

$\sqsupset G, G'$ – группы

$\sigma : g \to G' \quad \begin{cases} \sigma\,(xy) = \sigma(x)\sigma(y) \\ \sigma(e) = e' \end{cases}$

$\operatorname{Ker}\sigma = \{x \in G \mid \sigma(x) = e'\}$

Замечание. $\operatorname{Ker}\sigma$ – подгруппа G

$\sqsupset R, R'$ – два кольца. Есть сложение и умножение

$\sigma : R \to R'$

$\forall x, y \in R \begin{cases} \sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y) \\ sigma(0) = 0 \\ \sigma(xy) = sigma(x) sigma(y) \sigma(1) = 1 \end{cases}$

$?\operatorname{Ker}\sigma = \{x \in R \mid \sigma(x) = 1\}$

$\sqsupset x, y \in \operatorname{Ker}\sigma \quad \sigma(x+y) \neq 1$

На самом деле:

$$\operatorname{Ker}\sigma = \{x \in R \mid \sigma(x) = 0\}\,.$$

$\sqsupset x, y \in \operatorname{Ker}\sigma \quad x + y \in, 0 \in$ – по сложению всё хорошо (и группы по сложению мы и исходим)

$xy \in \operatorname{Ker}\sigma \quad 1 \notin \operatorname{Ker}\sigma \implies$ Ядро σ это не подкольцо

$\sigma\,(xy) = \sigma(x)\sigma(y) \implies \operatorname{Ker}\sigma$ – идеал (что угодно домножить на элемент из него всё ещё в нём)

$A = P_\infty[K]$ – кольцо

$\sqsupset \varphi : X \to X \quad X$ – ЛП

$\lhd S_\varphi \quad P_\infty[K] \to P_\varphi$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i t^i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi^i.$$

Определение 37. P_φ – множество операторных полиномов

Лемма 35. S_φ – гомоморфизм колец

Доказательство. $S_\varphi(p+q) = q_1 + q_2 \quad S_\varphi p_i = q_i$

$S_\varphi(0) = \mathbb{O}$
$quad S_\varphi(1) = \mathbb{J}$

$S_\varphi(p_1 p_2) = q_1 q_2$ ■

Замечание. $S_\varphi(P_\infty[K]) =$ кольцо

Замечание. $S_\varphi(\lambda p) = \lambda q \implies S_\varphi$ – гомоморфизм

Теорема 12. $\sqsupset p_1, p_2 \in P_\infty[K] :$ НОД $(p_1, p_2) = 1$
$\implies \exists q_1 q_2 \in P_\infty[K] \quad p_1(\varphi) q_1(\varphi) + p_2(\varphi) q_2(\varphi) = \mathbb{J}$

Доказательство. Из леммы для скалярных полиномов следует:

$\exists q_1, q_2 \quad p_1(t) q_1(t) + p_2(t) q_2(t) = 1$. Применим к обоим частям гомоморфизм и получается то, что нужно. ■

Теорема 13. $\sqsupset p(t) = p_1(t) \cdot p_2(t) \quad$ НОД $(p_1, p_2) = 1$
Тогда $\operatorname{Ker} p(\varphi) = \operatorname{Ker} p_1(\varphi) \dot{+} \operatorname{Ker} p_2(\varphi)$

Доказательство.

1. $\operatorname{Ker} p_1(\varphi) + \operatorname{Ker} p_2(\varphi) \subseteq \operatorname{Ker} p(\varphi)$

   $\sqsupset x_1 \in Ker p_1(\varphi) \quad x_2 \in \operatorname{Ker} p_2(\varphi) \implies x_1 + x_2 \in \operatorname{Ker} p_1(\varphi) + \operatorname{Ker} p_2(\varphi)$

   $\lhd p(\varphi) x = p(\varphi)(x_1 + x_2) = p_1(\varphi) + p_2(\varphi) x + p_1(\varphi) p_2(\varphi) x_2 = 0 + 0 = 0$

2. $\operatorname{Ker} p(\varphi) \subseteq \operatorname{Ker} p_1(\varphi) + \operatorname{Ker} p_2(\varphi)$

   $\sqsupset x \in \operatorname{Ker} p(\varphi) \quad p_1(\varphi) q_1(\varphi) + p_2(\varphi) q_2(\varphi) = \mathbb{J}$

   $\underbrace{p_1(\varphi) q_1(\varphi) x}_{x_2} + \underbrace{p_2(\varphi) q_2(\varphi) x}_{x_1} = x \quad \forall x \in X$

   $p_2(\varphi) x_2 = p_2(\varphi) p_1(\varphi) q_1(\varphi) x = 0 \implies p_1(\varphi) q_1(\varphi) x \in \operatorname{Ker} p_2(\varphi)$

   $p_1(\varphi) x_1 = p_1(\varphi) p_2(\varphi) q_2(\varphi) x = 0 \implies p_1(\varphi) q_1(\varphi) x \in \operatorname{Ker} p_2(\varphi)$

3. $\sqsupset z = \operatorname{Ker} p_1(\varphi) \cap \operatorname{Ker} p_2(\varphi)$

   $\implies p_1(\varphi) z = 0 \quad p_2(\varphi) z = 0$

$\Longrightarrow\ z = p_1(\varphi)\, q_1(\varphi)\, z + p_2(\varphi)\, q_2(\varphi)\, z = 0 + 0 = 0 \implies$ пространства дизъюнктны и речь идёт о прямой сумме

■

S_φ – гомоморфизм колец. Давайте найдём его ядро.

$\operatorname{Ker} S_\varphi = \{p \in P_\infty[K] \mid p(\varphi) = \mathbb{O}\}$

Определение 38. Полином $p \in P_\infty[K]$, такой что

$$p(\varphi) = \mathbb{O}.$$

называется аннулирующим полиномом оператора φ

Лемма 36. Аннулирующий полином существует

Доказательство. $\dim P_\infty[K] = \infty$

$\dim \mathscr{L}(X, X) = (\dim X)^2$

$\varphi^0\ \varphi^1\ \varphi^2\ \varphi^3\ \ldots \varphi^{n^2}$ – ЛЗ набор (векторов больше черм размерность)

$$\Longrightarrow \exists \{\alpha_i\}_{i=0}^{n^2} \quad \sum_{i=1}^{n^2} \alpha_i \varphi^i = 0$$

$$p = \sum_{i=1}^{n^2} \alpha_i t^i$$

■

Лемма 37. $\operatorname{Ker} S_\varphi$ – идеал в $P_\infty[K]$

Определение 39. Минимальным аннулирующим полиномом оператора φ называется минимальный полином идеала $\operatorname{Ker} S_\varphi$

Замечание. Обозначать его мы будем как $p_\varphi \qquad p_\varphi(\varphi) = \mathbb{O}$

Лемма 38. $\sqsupset p_\varphi(t) = p_1(t) p_2(t) \quad$ НОД $(p_1, p_2) = 1$

Тогда $\underbrace{\operatorname{Ker} p_\varphi(\varphi)}_{X} = \operatorname{Ker} p_1(\varphi) \dotplus \operatorname{Ker} p_2(\varphi)$

$X = \operatorname{Ker} p_1(\varphi) \dotplus \operatorname{Ker} p_2(\varphi)$

Замечание. $\sqsupset \operatorname{Ker} p_i(\varphi) = L_i$ (назовём так)

$x_1 = p_2(\varphi)\, q_2(\varphi)\, x \in L_1$

$x_2 = p_1(\varphi)\, q_1(\varphi)\, x \in L_2$

$X = L_1 \dotplus L_2$

Лемма 39. $\mathscr{P}_{L_1}^{\parallel L_2} = p_2(\varphi) q_2(\varphi) \quad \mathscr{P}_{L_2}^{\parallel L_1} = p_1(\varphi)\, q_1(\varphi)$ – проекторы!

Доказательство. $\mathscr{P}_{L_1}^{\parallel L_2} \mathscr{P}_{L_1}^{\parallel L_2} = \mathscr{P}_{L_1}^{\parallel L_2}$

$\mathscr{P}_{L_1}^{\parallel L_2} \mathscr{P}_{L_1}^{\parallel L_2} x = p_2(\varphi)\, q_2(\varphi)\, p_2(\varphi)\, q_2(\varphi)\, x = p_2(\varphi)\, q_2(\varphi)\, (\mathbb{J} - p_1(\varphi)\, q_1(\varphi)) = p_2(\varphi)\, q_2(\varphi)$

$\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} \mathcal{P}_{L_2}^{\parallel L_1} = \underline{p_1(\varphi)} q_1(\varphi)\, \underline{p_2(\varphi)} q_2(\varphi) = \mathbb{O}$ ■

$\varphi \to P_\varphi(t) = p_1(t) p_2(t) \to X = L_1 \dotplus L_2$

Теорема 14. $\sqsupset \varphi : X \to X$

$\sqsupset p_\varphi$ – минимальный аннулирующий полином оператора φ

$p_\varphi = p_1 p_2 \dots p_k \quad$ НОД$(p_i, p_{j \neq i}) = 1$

$\implies X = \bigoplus \sum\limits_{i=1}^{k} L_i \quad L_i = \operatorname{Ker} p_i'(\varphi) \quad p_i' = \frac{p(\varphi)}{p_i}$

$\mathscr{P} : X \to L_i \quad \mathscr{P}_i = p_i'(\varphi)\, q_i(\varphi)$

где $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i' q_i = 1$

Замечание. Применим S_φ к последней сумме.

$$\sum_{i=1}^{k} p_i'(\varphi)\, q_i(\varphi) = \sum_{i=1}^{k} i = \mathbb{J}.$$

– разложение единицы для оператора φ

Теорема 15 (Вторая теорема о ядре и образе)**.** $\sqsupset \varphi : X \to X \quad p_\varphi = p_1 p_2 \quad$ НОД$(p_1 p_2)$

$\implies \Im p_2(\varphi) = \operatorname{Ker} p_1(\varphi)$

Доказательство. $\Im p_2(\varphi) \subseteq \operatorname{Ker} p_1(\varphi)$

$let x \in X \implies y = p_2(\varphi)\, x \subseteq \Im p_2(\varphi)$

$\lhd p_1(\varphi)\, y = p_1(\varphi)\, p_2(\varphi)\, x = p_\varphi(\varphi)\, x = 0$

$\dim \Im p_2(\varphi) = \dim \operatorname{Ker} p_1(\varphi)$

$\dim \operatorname{Ker} p_1(\varphi) + \dim \Im \operatorname{Ker} p_1(\varphi) = n$

$\dim \operatorname{Ker} p_1(\varphi) + \dim \operatorname{Ker} p_2(\varphi) = n$

$\dim \Im p_1(\varphi) = \dim \operatorname{Ker} p_2(\varphi)$ ■

Замечание. $\sum_{i=1}^{k} {}_i x = \mathbb{J} x \forall x$

$\sum_{i=1}^{k} \varphi \mathscr{P}_i x = \varphi x$

$\sum_{i=1}^{k} \varphi \mathscr{P}_i = \varphi$

$X \overline{\mathcal{P}_i} \longrightarrow L_i \overline{\varphi} \longrightarrow ?$

$\sum_{i=1}^{k} \varphi_i = \varphi$

1.24 BIIG TODO, something Жордана something

1.25 Евклидово пространство

$\sqsupset M$ – произвольное множество (вообще любое)

Определение 40. Метрикой ρ на M называется отображение $M \times M \to R$, удовлетворяющее следующим свойствам (аксиомам метрики) $\forall x, y, z$:

1. $\rho(x, y) \geqslant 0 \quad \rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Пример. Множество непрерывных функций на $[a, b]$

$\rho(f, g) = \max\limits_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$

Пример. Шахматная доска

максимальное количество ходов коней, ферзей, ладей, чтобы добравться из одной клетки в другую..

Замечание. (M, ρ) – метрическое пространство

1.25.1 Норма

Определение 41. $\sqsupset L$ – линейное пространство

Нормой называется отображение $L \to \mathbb{R}$, такое что:

1. $\|x\| \geqslant 0 \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$ (ноль есть, потому что ЛП)
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \alpha \in K$
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Замечание. Пара $(L, \|\|)$ – нормированное простраснство

Замечание. Нормированное пространство можно метризовать

$\rho(x, y) = \|x - y\|$

$x = a - b$

$\rho(x, z) = \|x - z\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$

$x - y = a, y - z = b$

$\|a + b\| \leqslant a + b$

Замечание. $\rho(x, y) = \begin{cases} 0, x = y \\ 1, x \neq y \end{cases}$

Отличное расстояние, метризует любое пространство)

Пример. $L = \mathbb{R} \implies \|x\| = |x|$

$L = \mathbb{R}^n \implies x = \left(\xi^1 \dots \xi^n\right)^T \quad \max_i |\xi^i|$ – норм норма

$\|x\| = \sum\limits_i \xi^i$ – 1-норма

$\|x\| = \sqrt[p]{\sum\limits_{i=1}^n \xi^p}$ – p-норма (доказывать – убиться)

Аналогично можно сделать с функциями заменив сумму на интеграл.

Пример. $L = \mathscr{P}_n - \sum\limits_{i=1}^m |p(t_i)|$

ненулевой многочлен может дать 0, плохо. Но можно взять $m > n$ и оно переборет даже n корней

1.26 Скалярное произведение

Определение 42. $\sqsupset L$ – ЛП над $\mathbb{R}$

Скалярным произведением над L называется отображение $L \times L \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее следующим требованиям (аксиомы скалярного произведения):

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
2. $\langle x + \alpha y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \alpha \langle y, z\rangle$
3. $\langle x, x\rangle \geqslant 0 \quad \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

Замечание. Пара $(L, \langle\rangle) = E$ – (вещественное) Евклидово пространство

Пример. $E = \mathbb{R}^n \quad x = \left[\xi^1 \dots \xi^n\right]^T \quad y = \left[\eta^1 \dots \eta^n\right]^T$

$\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi^i \eta^i$

Пример. $E = C[a, b]$

$\langle f, g\rangle = \int\limits_a^b f(t)g(t)dt$

Пример. $E = \mathscr{P}$

$\langle p, a\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} p(t_i)q(t_i), \quad m > n$

Лемма 40. Любое евклидово пространство можно нормизовать

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

Первые два свойтсва очевидны

$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$

$(\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$

$\langle x, y\rangle \leqslant \|x\|\|y\|$ (неравенство Швартца (Коши-Буняковского-Швартца))

Лемма 41 (неравенство Швартца)**.** $\langle x, y\rangle \leqslant \|x\|\|y\| \implies \underbrace{\frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|\|y\|}}_{\cos\Theta} \leqslant 1$

Доказательство. $\|\alpha x + y\|^2 = \langle \alpha x + y, \alpha x + y\rangle = |\alpha|^2\|x\|^2 + 2\alpha\langle x, y\rangle + \|y\|^2 > 0$ (строго, потому что берём ненулевые)

Всегда пололжительный, нет корней, отрицательный дискриминант $\frac{D}{4} = \langle x, y\rangle^2 - \|x\|\|y\| < 0 \implies \langle x, y\rangle < \|x\|\|y\|$ ■

Замечание. Неравенство Швартца превращается в равенство, когда x, y линейно зависимы

$|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\| \iff x, y$ – ЛЗ

Доказательство.

$\Longleftarrow$ $\sqsupset y = |\beta x \quad \langle x, y\rangle| = |\langle x, \beta x\rangle| = |\beta\langle x, x\rangle| = |\beta|\|x\|^2 = |\beta|\|x\|\|x\| = \|x\|\|\beta x\| = \|x\|\|y\|$

$\Longrightarrow$ $\lhd\|\alpha x + y\|^2 = \alpha^2\|x\|^2 + 2\alpha\langle x, y\rangle + \|y\|^2 = 0 \quad D = 0 \quad \alpha x + y = 0 \implies$ ДЗ

■

Замечание (равенство параллелограмма)**.** Если норма удовлетворяет следующему свойству:

$\forall x, y \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

Сумма квадратов сторон параллелограмма равна сумма квадратов её диагоналей

1.26.1 Псевдо-евклидовы пространства

Аксиомы:

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
2. $\langle \alpha x + y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
3. $\langle x, y\rangle = 0 \forall y \implies x = 0$

Пример (пространство Минковского)**.** $x = \left[\xi^1\xi^2\xi^3\right]^T \quad y = \left[\eta^1\eta^2\eta^3\right]^T$

$\langle x, y\rangle = \xi^1\eta^1 + \xi^2\eta^2 - \xi^3\eta^3 \implies \langle x, x\rangle = |\xi^1|^2 + |\xi^2|^2 - |\xi^3|^2 \quad x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}1\right) \quad \|x\| = 0$

1.26.2 Комплексное евклидово пространство

Аксиомы скалярного произведения:

1. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
2. $\langle \alpha x + y, z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

   $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

   1.5-линейность (вместо билинейности в вещественных числах)

3. $\langle x, x\rangle \geqslant 0 \quad \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

   $\langle x, x\rangle = \overline{\langle x, x\rangle} \implies \langle x, x\rangle \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$

Замечание. $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$

Доказательство. $\|\lambda x + y\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + \lambda\langle x, y\rangle + \overline{\lambda}\langle y, x\rangle + \|y\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + 2\Re\lambda\langle x, y\rangle + \|y\|^2$ ■

Лемма 42 (Швартц жив! (всё равно работает)).

Доказательство. $\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|e^{i\varphi}$

$\lessdot z = e^{i\varphi}x$

$\langle z, y\rangle = \left\langle e^{i\varphi}x, y\right\rangle = e^{-\varphi}\langle x, y\rangle = e^{-i\varphi}e^{i\varphi}r = r \in \mathbb{R}$

$|\langle x, y\rangle| = |\langle z, y\rangle| \leqslant \|z\|\|y\| = \|e^{i\varphi}x\|\|y\| = |e^{i\varphi}|\|x\|\|y\| = \|x\|\|y\|$ ■

1.26.3 Метрический тензор

$\sqsupset \{e_j\}_{j=1}^n$ базис E

$x = \sum\limits_{j=1}^n \xi^j e_j \quad y = \sum\limits_{k=1}^n \eta^k e_k$

$\langle x, y\rangle =$

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^n \xi^j e_j, \sum_{k=1}^n \eta^k e_k \right\rangle \\ &= \sum_{j,k=1}^n \overline{\xi}^j \eta^k \overset{g_{ik}}{\langle e_j, e_k\rangle} \\ &= \sum_{j,k=1}^n \overline{\xi}^j \eta^k g_{jk}.\end{aligned}$$

Замечание. $g_{ik} \longleftrightarrow G = \begin{bmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \langle e_2, e_1\rangle & \dots \\ \langle e_1, e_2\rangle & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$ – матриа Грама

Свойства g_{jk}:

1. $g_{jk} = \langle e_j, e_k\rangle = \overline{e_k, e_j} = \overline{g_{jk}}$

   $\overline{G}^{-1} = G$ – эрмитовость

$G^\dagger := \overline{G}^{-1}$

$\langle x, y\rangle = \dagger\xi G\eta$

2. $g_{ii} > 0$

1.27 Ортогональность

$\sqsupset E$ – Евклидово пространство

$\sqsupset x, y \in E$

Определение 43. Элементы x, y называются ортогональными, если $\langle x, y\rangle = 0$

Лемма 43. $\sqsupset \{x_i\}_{i=1}^n$ – набор попарно ортогональных векторов (ненулевых)

$\Longleftarrow \{x_i\}_{i=1}^n$ – ЛНЗ

Доказательство. $\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0 \implies$
$\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i x_i\|^2 = 0 = \left\langle \sum\limits_{i=1}^n \alpha^i x_i, \sum\limits_{j=1}^n \alpha^j x_j \right\rangle = \sum\limits_{i,j=1}^n \alpha^i \alpha^j \langle x_i, x_j\rangle = \sum\limits_{i=1}^n |\alpha^i|^2 \|x_i\| = 0 \implies \alpha^i = 0 \forall i \implies$ ЛНЗ ■

Теорема 16 (ортогонализация Грама-Шинка)**.** $\sqsupset \{x_i\}_{i=1}^k$ – ЛНЗ и $L = \mathscr{L}\{x_1, \dots, x_k\}$ – подпространство E

Можно построить ортогональный базис L

Доказательство. Будем строить ортогональный базис $L \quad \{e_i\}_{i=1}^k$

$e_1 = x_1$

$e_2 = x_2 - \alpha e_1 \quad (e_1, e_2) = 0 \quad 0 = (x_2, e_1) - \alpha (e_1, e_1)$ – знаем α

$e_3 = x_3 - \beta e_2 - \gamma e_1$ Домножением на e_1, e_2 получаем коэффициенты

$e_3 = x_3 - \frac{\langle x_3, r_2\rangle}{\langle e_2, e_2\rangle} e_2 - \frac{\langle x_3, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1$

...

$e_m = x_m - \sum\limits_{j=1}^{m-1} \frac{\langle x_m, e_j\rangle}{\langle e_j, e_j\rangle} e_j$

...

e_k ■

Замечание. Почему он не прервётся?

$\sqsupset m: \quad e_{m+1} = 0 \implies 0 = x_{n+1} - \sum\limits_{j=1}^{m} x_j e_j = x_{m+1} - \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j x_j = 0$, но х-ы ЛНЗ

Замечание. На любом этапе $\|x_m\| \leqslant \|e_m\|$

$e_m = x_m + \dots$

$\|e_m\|^2 = \langle x_m, e_m\rangle \leqslant \|x_m\|\|e_m\| \quad \|e_m\| \leqslant \|x\|$ (Если есть линейная комбинация, зануляющая x_m, то занулиться и e_m)

Определение 44. Базис $\{e_j\}_{j=1}^n$ пространства E называется ортогональным, если $\langle e_i, e_{j\neq i}\rangle = 0$

Замечание. Ортогональный базис всегда существует

Определение 45. Базис называется ортонормированным, если $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$ ОРТН

Замечание. В ортогональном базис матрица Грама имеет вид $G = diag\,\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$

ОРТН $G = I$

Теорема 17 (Пифагора)**.** Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ – такой, что $\langle x_i, x_{j\neq i}\rangle = 0$

Тогда $\left\|\sum\limits_{i=1}^{m} x_i\right\| = \sum\limits_{i=1}^{m} \|x_i\|^2$

1.27.1 Ортогональное дополнение

L – ЛПП E

Определение 46. Говорят, что x ортогонален $L \iff \langle x, y\rangle = 0 \forall y \in L$

Определение 47. $\{x_i\}_{i=1}^m$ ортогонален L, если x_i отогонален $L \forall i$

Лемма 44. Множество векторов, ортогональных L образует подпространство E

Доказательство. $\sqsupset x, y \perp L$

$x + y \perp L$

$\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle = 0 + 0 = 0 \forall z \in L$ ■

Замечание. L' – ортогональное дополнение пространства L до E

Лемма 45. $E = L \dotplus L'$

Доказательство. $E = L + L'$

Выберем базис L $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cup e_{k+1}, \ldots, e_n$ – добили базис до базиса всего пространства. дальше ортонормируем базис. Тогда все вектора, что не лежат в L ортогональны L', а тогда полуичшееся – базис E – состоит из базисов L И L'

$E = L \dotplus L' \iff L \cap L' = \emptyset$

$x \overset{!}{=} y + z \quad x = y' + z'$

$y - y' = z - z'$

$\lhd \|y - y'\|^2 = \langle y - y', y - y'\rangle = \langle y - y', z - z'\rangle = 0 \implies y = y' \implies z = z'$ ■