Дискретная математика, 3 семестр

Коченюк Анатолий

18 сентября 2021 г.

Глава 1

Графы, неалгоритмические свойства

1.1 Что такое граф

$V, E \subseteq V \times V$ – конечные множества

Такая конструкция называется (обыкновенным) ориентированным графом

Замечание. В таком графе нет параллельных рёбер.

Ориентированный, потому что у ребра есть начало и конец.

Определение 1. $V, E, beg : E \to V, end : E \to V$

Граф с кратными рёбрами (ориентированный мультиграф)

Замечание. Если дополнительно затребовать, что для любых

$$uv, ab \quad u \neq a \vee v \neq b$$

Замечание. $uv \sim vu \quad V, E \subseteq (V \times V)/_{\sim}$

неориентированный граф с петлями

$uv \sim vu \quad V, E \subseteq (V \times V)/_{\sim} \setminus \{(u,u) | u \in V\}$

неориентированный граф без петель (обыкновенный)

Замечание. Альтернативно $V, E, ends : E \to (V \times V)/_{\sim} [\setminus \{(u,u) | u \in V\}]$

Граф с кратными рёбрами [без петель] (мультиграф)

Замечание. Неориетированный граф – ориаентированный, где есть рёбра (дуги) в обе стороны

1.2 Ориентированный граф

У ребра есть начло и конец. Говорят, что ребро выходит из вершины и входит в вершины.

Когда из вершины выходит n рёбер, это число обозначается $d^{-}u$ и называется исходящей степенью вершины

Когда в вершину выходит n рёбер, это число обозначается $d^{+}u$ и называется входящей степенью вершины

Лемма 1. $\sum\limits_{u} deg^{+}u = \sum\limits_{u} deg^{-}u = |E|$

Определение 2. Пусть $P = u_0e_1u_1e_1u_2 \dots e_ku_k$

$e_i = u_{i-1}u_i$

$u_0 = \operatorname{Beg} P \quad u_k = \operatorname{End} P$

$k = \operatorname{len} P = |P|$

$a \rightsquigarrow b \quad \exists$ путь $P : \operatorname{Beg} P = a, \operatorname{End} P = b$

Лемма 2. $\rightsquigarrow = \rightarrow^{*}$

Следствие 1. $\rightsquigarrow$ – транзитивно, рефлексивно

Определение 3. $a \leftrightsquigarrow b \iff a \rightsquigarrow b, b \rightsquigarrow a$

Тогда это отношение эквивалентности, а граф, где вершины могут быть связаны только так, называется сильно связанным.

Определение 4. Если выполняется $a \rightsquigarrow b \implies$ не $b \rightsquigarrow a$

такой граф называется ациклическим

Определение 5. Циклическим путём называется путь, у которого начало и конец совпадают и длина больше нуля.

Циклом (в ориентированным графе) называется класс эквивалентности циклическим путей, в котором пути равны с точностью до циклического сдвига.

Путь (цикл) называется простым, если все вершины на нём различны

путь (цикл) называется рёберно-простым, если в нём все рёбра различны.

Утверждение 1. $a \rightsquigarrow b$ антисимметричный $\iff$ в G нет циклов длины 2 и более.

Лемма 3. G – ациклический граф $\implies \exists$ вершина исходящей степени ноль.

Следствие 2. В ациклическом графе можно построить topsort

$n : V \to \mathbb{N} \quad uv \in E \implies n(u) < u(v)$

Доказательство. Одна вершина очень хорошо сортируется

По лемме есть вершина исходящей степени ноль. Удалим её временно из графа. Меньший граф сортируется по индукционном предположению. Добавляем первую вершину, она ничего не ломает, так как в неё не входят рёбра. ■

1.3 Неориентированный граф

Определение 6. Путём называется последовательность $u_0 e_1 u_1 \ldots e_k u_k$

$e_i = u_{i-1} u_i$

Определение 7. Циклический путь – путь, где начало = концу и длина ненулевая.. Тогда путь $aebea$ по одному ребру в две стороны был бы циклическим путём.. а мы не хотим называть такое циклом.

Назовём циклическим путём корректным, если $\forall i \quad e_i = e_{i+1} \implies e_i$ петля. $e_k = e_1 \implies e_k$ петля

Назовём циклом класс эквивалентности корректных циклических путей относительно равенства с точностью до циклического сдвига отражения.

Замечание. $\rightsquigarrow$ – отношение эквивалентности, потому что есть симметричности в силу неориентированности.

Классы эквивалентности – компоненты связности.

Если граф состоит из одной компоненты связности, то он называется связным

Замечание. Ориентированному графу G можно сделать симметризацию $\overset{\leftrightarrow}{G}$

Обратно можно сделать ориентацию неориентированному графу, заменив каждое ребро на стрелку в одну стороны (соответственно $2^{|E|}$ ориентаций)

Определение 8. Отношение "связаны ребром" называется отношением смежности

Если из вершины исходит ребро, то отношение между ребром и вершиной называется отношением инцидентности.

$\deg u$ – количество рёбер, инцидентных данной вершине

Лемма 4 (о рукопожатиях)**.** $\sum \deg u = 2|E|$

Определение 9. Лес – ациклические неориентированный граф

Дерево – лес, связный

Определение 10. u, v рёберно-двусвязны, если $\exists$ два рёберно-непересекающихся пути $u \rightsquigarrow v$

Классы эквивалентности – листы

Если удалить вершину, связывающую разные листы, то эти листы перестанут быть связанными. Такие вершины называются хвостами

Теорема 1. Рёберно-двусвязность – отношение эувивалентности

Доказательство. Транзитивность:

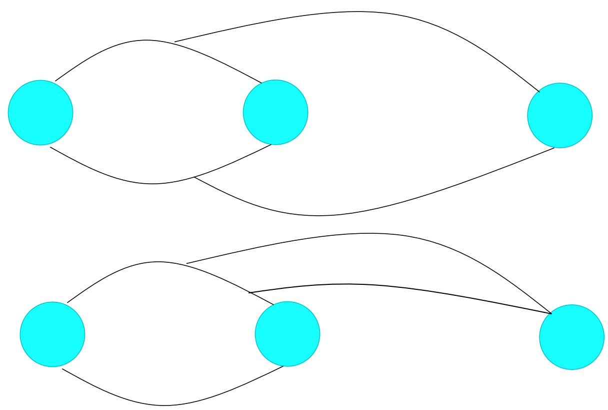

Рис. 1.1: trans

∎

Замечание. Если вводить аналогичную вершинную двусвязность с патчем, что концы могут совпадать, то облом:

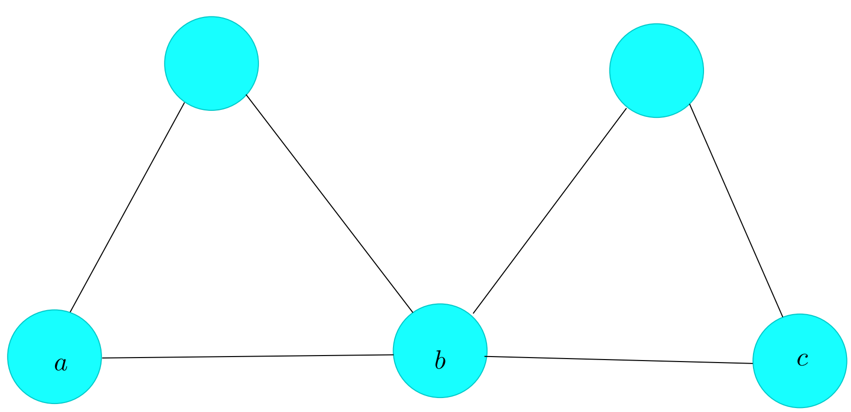

Рис. 1.2: oblom

$a, b \quad b, c$ вершинно двусвязны, но a, c явно нет

Определение 11. Ребра вершинно двусвязны, если междц ними есть два пути, которые вершинно непересекаются (концы тоже должны не совпадать)

Классы эквивалентности – блоки

Если удалить ребро, связывающее два разных блока, то его концы перестанут быть связанными. Такие рёбра называется мостами.

1.4 Деревья

Определение 12. Неориентированный граф называется лесом, если в нём нет циклов.

Неориентированный граф называется деревом, если он является лесом и связным.

Теорема 2.

1. граф связен
2. граф ацикличен
3. количество рёбер на 1 меньше количества вершин $|E| = |V| - 1$.

Из любых двух из этих свойств следует третье.

Лемма 5. Пусть есть дерево (связный граф без циклов), содержащее хотя бы 2 вершины. Тогда существует вершина степени 1.

Доказательство. Рассмотрим самый длинный простой путь. Его концы имеют степень 1. Пусть нет, пусть есть вершина, которая не лежит на диаметре и является соседом конца, но тогда диаметр не самый длинный путь. Иначе сосед конца лежит внутри диаметра, что значит появление цикла, а у нас дерево. ∎

Доказательство теоремы. $1, 2 \implies 3$ $|V| = 1 \implies |E| = 0$. Петлей нет. Даже если разрешить, петля это цикл, что запрещено по ацикличности

Если есть хотя бы две вершины, то есть вершина степени 1. Возьмём её, удалим из графа и получим дерево из индукционного предположения. Получаем n вершин и $n - 1$ ребро

$1, 3 \implies 2$ Предположим, что цикл есть. Удалим любое ребро этого цикла. Получим граф, в котором n вершин и $n - 2$ ребра. Граф всё ещё связен (можно пройти по циклу вместо удалённого ребра). Рассмотрим все связные подграфы (есть как миниму он сам) и выберем минимальный по числу рёбер. n вершин и $n-k$ рёбер. Он ациклический (потому что иначе можно удалить ребро без потери связности), тогда по первому пункту $n-k=n-1$??

Можно прямее: возьмём минимальный по числу рёбер связный подграф, он ациклический, значит $n-k=n-1$, значит он совпадает с нашим.

$2,3 \implies 1$ Каждая компонента связна и ациклична, значит в каждой из них n_i вершин и n_i-1 рёбер. Просуммируем и получим n вершин и $n-k$ рёбер. Но по 3 рёбер у нас $n-1 \implies n-k=n-1 \implies k=1$ – есть ровно одна компонента связности

■

Теорема 3. В дереве между любыми двумя вершинами существует один простой путь

Доказательство. Допустим есть два простых путя между двумя вершинами. Найдём общий префикс и место, где пути ветвятся. Найдём общий суффикс и место, где пути ветвятся. Между этими двумя путями согласно нашему определению есть корректный цикл. В дереве нашли цикл?! ■

Утверждение 2. Все рёбра дерева являются мостами.

Верно также и обратное.

Определение 13. T – подграф G – называется остовным дерево, если T остовный граф

Определение 14. Подграф:

- Откидываем любое количество вершин и рёбер
- Остовный подграф, не удаляем вершины, они сохраняют отношение связности

Утверждение 3. Любой связный граф содержит остовное дерево.

Доказательство. минимальный по количеству рёбер связный подграф. ■

Определение 15. Матрица смежности. $A[i][j] = \begin{cases} 1, \text{есть ребро из} i \text{ в } j \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$

Теорема 4. $A^k[i][j]$ – число путей из i в j длины k

Доказательство. $A^0 = I \quad A^1 = A$

$A^k = A^{k-1}A \quad A^K[i][j] = \sum\limits_t A^{k-1}[i][t] \cdot A[t][j]$

Рассмотрим путь из i в j длины k, разобьём его на две части длины $k-1$ и 1. Тогда количество путей считается именно так, как произведение количества первых на количество вторых. ■

Возьмём матрицу смежности и на диагонали напишем минус степени вершин

$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ – матрица Кирхгофа.

Вычеркнем одну строку и одну столбец. Посчитаем определитель и получим количество остовных деревьев.

Теорема 5. Количество остовных деревьев неориентированного графа равно алгебраическому дополнению любого элемента матрицы Кирхгофа

Доказательство. Рассмотрим любую ориентацию нашего графа G. Рассмотрим матрицу инцидентности $\vec{G}$ – $I_{\vec{G}}$ – в каждом столбце есть -1, 1 и остальные все нули.

Лемма 6. $K_G = I_{\vec{G}} I_{\vec{G}}^T$

Доказательство. на диагоналях скалярное произведение равных строк, где стоят 1 или -1 на местах рёбер. В сумме это степень вершины.

Если не диагональный: будет 0, если не соединены ребром и -1, если соиденены $(1 \cdot -1)$ (здесь пригождается ориентация) ■

Лемма 7. $\lhd$ минор $(n-1)\times(n-1)$ матрицы $I_{\vec{G}}$. Задаётся множеством рёбер и вершиной, которую выкидыванием. Утверждается, что этот минор равен нулю, если множество рёбер содержит цикл и ± 1 иначе.

Доказательство. рассмотрим цикл – какие-то рёбра. Просуммируем соответствующие столбцы и получим нулевой столбец (если цикл ориентированный. В противном случае, просуммируем с нужными коэффициентами). А тогда мы получим линейно-зависимые столбцы в миноре, следовательно он будет равен нулю.

Иначе, пусть v_1 – висячая вершина (лист) $A, v_1 \neq u$. Поставим в миноре строку v_1 в начало, как и столбец с её единственным ребром $[0][0] = \pm 1$, всё остальное в строке 0. Удалим её из дерева., по усиленной лемме о висячих вершинах, есть два листа, хотя бы один из которых не u. Проделаем с ней – v_2 – те же действия. Так сделам со всеми и получим треугольную матрицу, у которой на диагонали стоят ± 1, значит сам минор равен ± 1 ■

Лемма 8. $\widehat{K_{G_{ii}}} = (I_{\vec{G}} \setminus \{i \text{ стр.}\}) \cdot \left(I^T_{\vec{G}} \setminus \{i \text{ столбца}\}\right)$

Лемма 9 (Формула Коши-Бине)**.**

$$A_{r\times r} \quad A = B \cdot C \quad B_{r\times s} \quad C_{s\times r} \quad s \geqslant r$$

$$\det A = \sum_{1\leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant s} \det B^{i_1 i_2 \ldots i_r} \det C_{i_1 i_2 \ldots i_r}$$

Теорема 6 (lite)**.** Число основных деревьев G = алгебраическому дополнению матрицы Кирхгофа.

■

1.5 Циклическое пространство

Рассмотрим матрицу инцидентности $A : \mathbb{B}^m \to \mathbb{B}^n$

$\operatorname{Ker} A = \{C | C \subset E, C$ – дизъюнктное объединение циклов$\}$