

Линейная Алгебра

Коченюк Анатолий

19 января 2021 г.

0.1 Введение

Трифанов Александр Игоревич

Два модуля: аналитическая геометрия, линейная алгебра

Отчётность: дз, кр, лабы, рубежное тестирование, экзамен

дз (16 штук(8 в модуль) по 2 баллв)

кр (4 (2 в модуль) 5 баллов)

лаба (1-2 по 5 баллов)

рубежный тест (1)

Глава 1

I курс

1.1 Матрицы и операции над ними

Определение 1. Матрица – прямоугольная таблица чисел

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots, \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$a_{i,j} \in \mathbb{R}$ – элементы матрицы

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ – строка 1

$a_{12}, a_{22}, a_{32}, \dots, a_{m2}$ – столбец 2

a_{ij} – элемент на пересечении i -той строки и j -того столбца

В матрице выше m строк и n столбцов. $A_{m \times n}$ – обозначение

Замечание. $n = m \implies A_{n \times n}$ – квадратная матрица

$\{a_{ii}\}_{i=1}^n$ – диагональ матрицы $A_{n \times n}$

Замечание. $A = \|a_{ij}\| \quad B = \|b_{ij}\|$

Замечание. $A = B \iff$

- одинаковые размеры
- $\forall i, j, a_{ij} = b_{ij}$

Операции с матрицами:

1. Умножение на число:

$$B = \alpha \cdot A \iff \forall i, j \quad b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$$

2. Сложение:

Пусть A, B – одинакового размера

$$A + B = C : \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \forall i, j$$

Замечание. $\triangleleft \mathbb{O} : \mathbb{O} + A = A + \mathbb{O} = A$

\mathbb{O} – полностью состоит из нулей

Свойства:

- коммутативность сложения (следует из коммутативности сложения чисел) $A + B = B + A$
- ассоциативность $(A + B) + C = A + (B + C)$
- дистрибутивность $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $\forall A \quad -A = -1 \cdot A : \quad A + (-A) = \mathbb{O}$ противоположный элемент по сложению

3 Умножение матриц

Пусть $A_{m \times l}, B_{l \times n}$

$$C = A \cdot B \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} \cdot b_{kj} = C_{m \times n}$$

Замечание. $A \cdot B \neq B \cdot A$

Для квадратных матриц вводится такое понятие, как коммутатор

$$[AB] = A \cdot B - B \cdot A$$

Пример. $A \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Замечание. $\triangleleft I : A \cdot I = I \cdot A = A$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Свойства:

- некоммутативность $A \cdot B \neq B \cdot A$
- ассоциативность $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

- дистрибутивность¹ $A(B + C) = AB + AC$
- дистрибутивность² $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Определение 2. $\triangleleft N \neq \mathbb{O} : N^k = N \cdot N \cdot \dots \cdot N = \mathbb{O}$

N – нильпотентная матрица, k – её порядок нильпотентности

Пример. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Определение 3. Идемпотентной матрица называется, если $N^k = I$

k – порядок идемпотентности

Пример. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

4 Транспонирование

$$A_{m \times n} = \|a_{ij}\| \text{ Пусть } B = A^T = \|b_{ij}\| \implies b_{ij} = a_{ji}$$

Свойства:

- $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T \cdot A^T$ – проверить для себя

Замечание. $A : A = A^T$ – симметричная/симметрическая матрица. Любая квадратная матрица с симметричными относительно диагонали элементами.

$A : A = -A^T$ – антисимметричная матрица. На главной диагонали стоят нули

$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix}$ – верхняя треугольная. Транспонированная – нижняя треугольная матрица

1.2 Определитель

$$\square A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Определение 4. Определитель – это число

$$\square A_{1 \times 1} = (a_{11}) \quad \det A \equiv |A| = a_{11}$$

$$\square A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\square A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

Мнемоническое правило для случая с тремя:

берём диагонали в одну сторону с + в другую с -.

Пример. $\square A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

$$\det A = -28 - 18 + 4 - (-21 + 4 - 24) = -1$$

$$\triangleleft \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix}$$

Определение 5. Дополнительный минор элемента a_{ij} – определитель матрицы, полученной из исходной вычёркиванием i -ой строки и j -го столбца.

Обозначение: M_{ij}

Утверждение 1 (Рекуррентная формула вычисления определителя).

$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot M_{ij}$, где j – номер любого столбца. Эта формула называется разложением определителя по j -ому столбцу.

$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$ – разложение по i -ой строке

$$\triangleleft (-1)^{i+j} M_{ij} = \mathcal{A}_{ij} \text{ – алгебраическое дополнение элемента } a_{ij}$$

Пример. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} = A$

$$\det A = (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 25 - 22 - 4 = -1$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

Пример. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

В нижних (верхних) треугольных матрицах определитель – просто произведение элементов

Свойства определителя:

$$1. \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

$$2. \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \alpha_1 \cdot a_1 + b_1 & \alpha_2 \cdot a_2 + b_2 & \dots & \alpha_n \cdot a_n + b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$4. \det(A^T) = \det(A) \text{ (всё, что работает со строчками, работает и со столбцами)}$$

$$5. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} + c_1 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} + c_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & c_1 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & c_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$

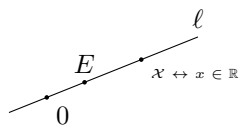
$$6. \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_1 & \alpha a_2 & \dots & \alpha a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Пример. $\begin{vmatrix} 1280 \\ 2848 \\ 1184 \\ 3072 \end{vmatrix} : 32$

TODO —

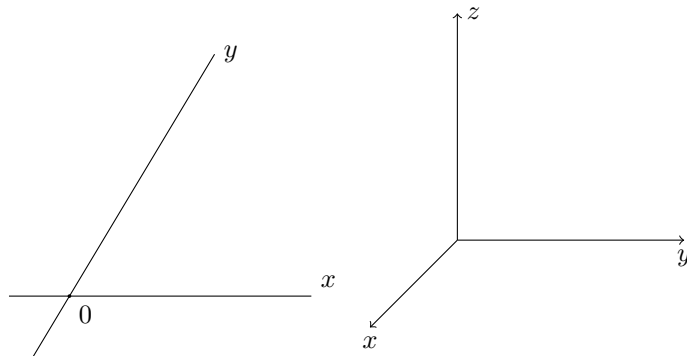
1.3 Лекция 1 - Метод аналитической геометрии

метод – метод координат.



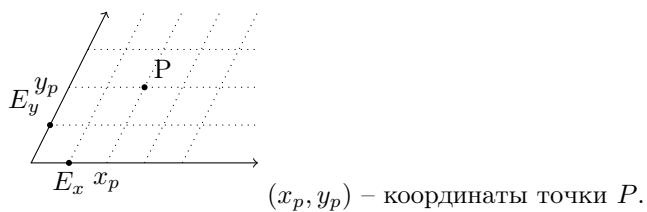
– координатная линия

Замечание. Система координат на плоскости – две координатные линии

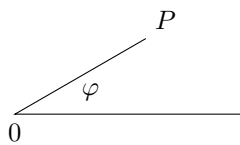


Определение 6. Система координат называется декартовой, если

1. Углы между координатными линиями прямые
2. Масштабы на осях одинаковые



Полярная система координат:



(TODO) —————

1.4 Практика 3

1.4.1 Обратная матрица

□ A, B – квадратные матрицы $n \times n$

Матричная алгебра:

1. $A + B$
2. $\lambda \cdot A$
3. $A \cdot B$

Определение 7 (Обратная матрица). $A^{-1} \quad A^{-1}A = AA^{-1} = I$

Утверждение 2. Обратная к A матрица существует, если и только если $\det A \neq 0$

Задача 1. $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = ?$

1. Метод союзной матрицы $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^T$

Определение 8. \tilde{A} союзная матрица – матрица алгебраических дополнений элементов матрицы A

$$\det A = (-1) \cdot 7 + 3 \cdot 11 + 1 \cdot 12 = 38$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -7 & -20 \\ -7 & 11 & -12 \\ 5 & 3 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{38} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 \\ -7 & 11 & 3 \\ -20 & -12 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\triangleleft A \cdot A^{-1} = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 \\ -7 & 11 & 3 \\ -20 & -12 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Метод Гаусса $[A|I] \sim [I|A^{-1}]$

Элементарные преобразования:

- (a) Умножение на число $\lambda \neq 0$ одной строчки
- (b) Перестановка двух любых строк
- (c) Составление линейной комбинации строк

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -20 & 7 & 0 & -8 & 1 \end{array} \right] \sim \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -140 & 30 & 10 & -50 & 0 \\ 0 & -140 & 49 & 0 & -56 & 7 \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & -10 & -6 & 7 \end{array} \right] \sim \dots \end{aligned}$$

Системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = -5 \\ x + 3y - 6z = 2 \\ 3x - 2y + 2z = 9 \end{cases}$$

Заметим, что стандартный способ решения таких систем: упрощение, складывание строк, домножение на число строк, их комбинация – напоминают элементарные преобразования. Т.е. элементарные преобразования – преобразования, приводящие к эквивалентной системе.

$$\begin{aligned} \text{1. Метод Гаусса} \quad &\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 9 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 9 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & -5 & 16 & -9 \\ 0 & -11 & 20 & 3 \end{array} \right] \sim \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & -55 & 176 & -99 \\ 0 & -55 & 100 & 15 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & -5 & 16 & -9 \\ 0 & 0 & -76 & 114 \end{array} \right] \\ &\begin{cases} x + 3y - 6z = 2 & x = 2 \\ -5y + 16z = -9 & y = -3 \\ -76z = 114 & z = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

2. Метод Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -6 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6) + 1 \cdot (-20) + 4 \cdot (-11) = -12 - 20 - 44 = -76$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -6 \\ 9 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (-5) \cdot (-6) - 1 \cdot 58 + 4 \cdot (-22) = -152$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-152}{-76} = 2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & -6 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

3. метод обратной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \quad X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{76} \begin{bmatrix} -6 & 20 & -11 \\ -10 & -8 & 7 \\ -18 & 16 & 5 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{76} \begin{bmatrix} 6 & 10 & 18 \\ -20 & 8 & -16 \\ 11 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}B = X$$

1.5 Лекция 3

$$V/\sim = W$$

$$\vec{a} + \vec{b}$$

Напоминание:

1. $\exists - (\vec{a})$
2. $\exists \vec{0}$
3. $\lambda \vec{a} \quad \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$

1.5.1 Проекция вектора на ось

Определение 9. Проекцией вектора \vec{a} на ось γ называется класс эквивалентности $a_l^{\parallel \gamma}$, содержащий вектор, начало которого совпадает с точкой пересечения оси l и прямой параллельной γ и проходящей через начало вектора \vec{a} , а конец – с точкой пересечения оси l и прямой, параллельной γ и проходящей через конец вектора \vec{a}

Свойства проекции:

1. $(\vec{a} + \vec{b})_l^{\parallel \gamma} = \vec{a}_l^{\parallel \gamma} + \vec{b}_l^{\parallel \gamma}$
2. $(\lambda \vec{a})_l^{\parallel \gamma} = \lambda \vec{a}_l^{\parallel \gamma}$

$$\underline{\lim}: \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i \right)_l^{\parallel \gamma} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_{i_l}^{\parallel \gamma}$$

$\square \vec{e}$ – вектор, параллельный l . Положим $|\vec{e}| = 1 \implies$ орт оси l

$$\angle \vec{a}_l^{\parallel \gamma} = \alpha \cdot \vec{e} \quad \alpha = (\text{Пр}_l^{\parallel \gamma} \vec{a}) \cdot \vec{e} \quad \alpha - \text{длина проекции } \vec{a}_l^{\parallel \gamma} \text{ на ось } l.$$

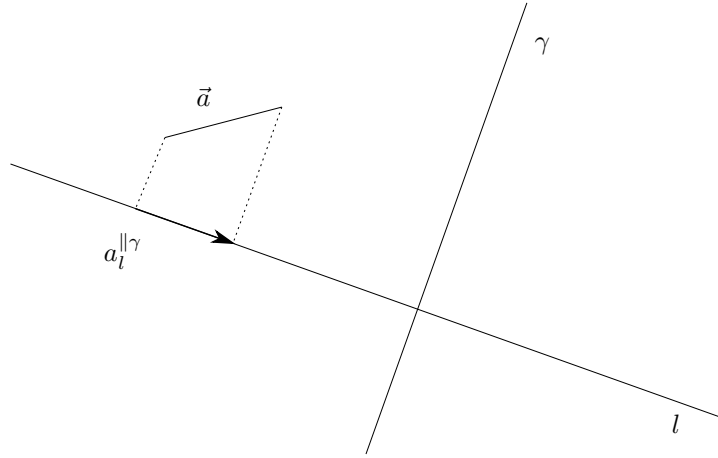


Рис. 1.1: Проекция

Лемма 1. $\text{Pr}_l^{\parallel\gamma} [\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i] = \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{Pr}_l^{\parallel\gamma} \vec{a}_i$

Доказательство. $(\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i)_l^{\parallel\gamma} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_{i_l}^{\parallel\gamma}$

$\text{Pr}_l^{\parallel\gamma} [\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i] = \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{Pr}_l^{\parallel\gamma} \vec{a}_i \vec{e}$ ■

\mathbb{R}^1

$\forall \vec{a} \quad \vec{a} = x_a \vec{e} \quad x_a - \text{координата вектора } \vec{a} \text{ на ось } l$

\mathbb{R}^2

$\vec{a} = \vec{a}_x^{\parallel y} + \vec{a}_y^{\parallel x} = \text{Pr}_y^{\parallel x} \vec{a} \vec{e}_1 + \text{Pr}_y^{\parallel x} \vec{a} \vec{e}_2 = x_x \vec{e}_1 + a_y \vec{e}_2$

Определение 10. Говорят, что в базисе $\{e_1, e_2\}$ вектор \vec{a} имеет координаты $\vec{a}(a_x, a_y)$

\mathbb{R}^3

$\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$

Замечание. Если угол между осью l и прямой γ прямой ($l \perp \gamma$) $\implies \vec{a}_l^{\parallel\gamma} = \vec{a}_l^\perp = \text{Pr}_l^\perp \vec{a} \cdot \vec{e}$

$l \perp \Gamma \implies \vec{a} + l^\perp \Gamma = \vec{a}_l^\perp = -||-$



Рис. 1.2: r1

В декартовой системе координат орты координатных осей обозначаются следующим образом:

$$x \quad \vec{e}_1 = \vec{i}$$

$$y \quad \vec{e}_2 = \vec{j}$$

$$z \quad \vec{e}_3 = \vec{k}$$

Замечание. $\vec{a}(1, 2, 3) \implies \vec{a} = 1 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k}$

$$\text{Лемма 2.} \quad \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i \right)_x = \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_{i_x}$$

1.6 Лекция 4

1.6.1 Скалярное произведение

$$W = V / \sim$$

$$\text{Определение 11.} \quad (\vec{a}\vec{b}) = |\vec{a}| \operatorname{Pr}_{\vec{a}}^{\perp} \vec{b}$$

$$\text{Замечание.} \quad (\vec{a}\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \gamma$$

Алгебраические свойства:

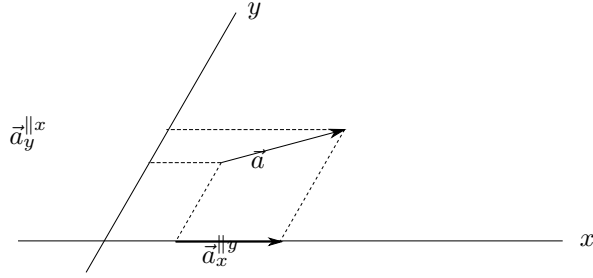


Рис. 1.3: r2

1. $(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{b}\vec{a})$
2. $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$

Доказательство. $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = |\vec{c}| \text{Pr}_{\vec{a}}^{\perp} (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}| (\text{Pr}_{\vec{c}}^{\perp} \vec{a})$ ■

3. $(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b})$

Геометрические свойства:

1. $\vec{a} \perp \vec{b} \quad \vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b} \implies (\vec{a}, \vec{b}) = 0$
2. $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$
3. $\square |\vec{a}| = 1 \implies (\vec{a}, \vec{b}) = \text{Pr}_{\vec{a}}^{\perp} \vec{b}$

Замечание. $\text{Pr}_i^{\perp} \vec{b} = (\vec{i}, \vec{b})$

Скалярное произведение в координатах:

- Декартова Прямоугольная Система Координат.

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$(\vec{a}\vec{b}) = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k})(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

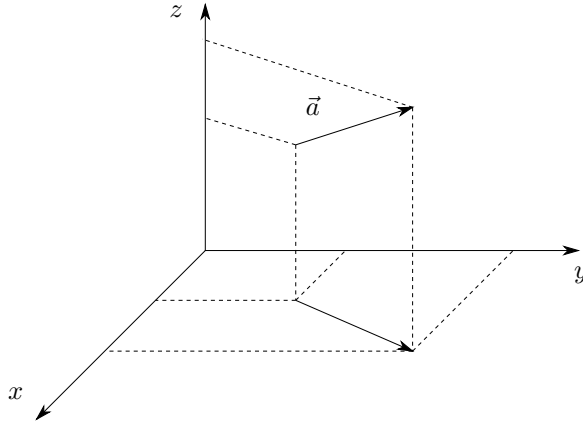


Рис. 1.4: r3

- Произвольная Система Координат.

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \sum_{j=1}^3 a_j \vec{e}_j$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3 = \sum_{k=1}^3 b_k \vec{e}_k$$

$(\vec{a}, \vec{b}) = \left(\sum_{j=1}^3 a_j \vec{e}_j \cdot \sum_{k=1}^3 b_k \vec{e}_k \right) = \sum_{j,k=1}^3 a_j b_k (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k)$ — достаточно знать скалярное произведение базисных векторов. $g_{jk} = \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k$ называется метрическим тензором.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{j,k=1}^3 a_j b_k g_{jk}$$

Замечание. В ДПСК $g_{jk} = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & , j \neq k \\ 1 & , j = k \end{cases}$ δ — символ Кронекера

$$g_{jk} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \text{ — матрица Грама}$$

$$a^T \cdot g \cdot b = (\vec{a}, \vec{b})$$

1.6.2 Векторное произведение

$$W = V / \sim$$

$$\vec{a}, \vec{b} \in W$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a} \vec{b}] = \vec{c} \text{ — вектор:}$$

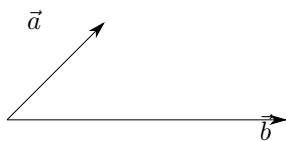


Рис. 1.5: скалярное произведение

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi = |\vec{a}_\perp| |\vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}_\perp|$
2. $\vec{c} \perp \vec{a} \quad \vec{c} \perp \vec{b} \quad \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – правая тройка (Буравчик, штопор)

Алгебраические свойства:

1. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$
2. $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$

Доказательство. $[\vec{a}, \vec{c}] = [\vec{a}_\perp, \vec{b}]$

$$[\vec{a}_\perp + \vec{b}_\perp, \vec{c}] = [\vec{a}_\perp, \vec{c}] + [\vec{b}_\perp, \vec{c}]$$

Если нарисовать картиночку, там будут углы с перпендикулярными сторонами и всё будет хорошо. ■

3. $[\alpha \vec{a}, \vec{b}] = \alpha [\vec{a}, \vec{b}]$

Доказательство. $\vec{m} = [\alpha \vec{a}, \vec{b}] \quad \vec{n} = [\vec{a}, \text{vecb}]$

$$|\vec{m}| = |\alpha| |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\alpha \vec{a}, \vec{b}) \quad |\vec{n}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$$

Если $\alpha < 0$, то у одного другая ориентация тройки, а у другого отрицательный множитель ■

Геометрические свойства:

1. $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$

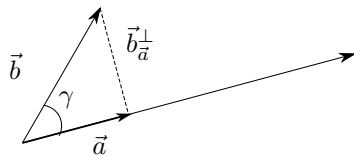


Рис. 1.6: note

$$2. \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi = S_{\triangle}$$

Замечание. $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i}$$

$$\text{Можно упростить запоминание: } a_x b_y - a_y b_x = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Хотя формально так делать плохо, потому что в матрице объекты разной природы: скаляры и векторы.

Общий случай:

$$\vec{a} = \sum_{m=1}^3 a_m \vec{e}_m$$

$$\vec{b} = \sum_{n=1}^3 b_n \vec{e}_n$$

$$\text{Точно: } \vec{e}_m \times \vec{e}_m = \vec{0} \forall m$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 \times \vec{e}_3$$

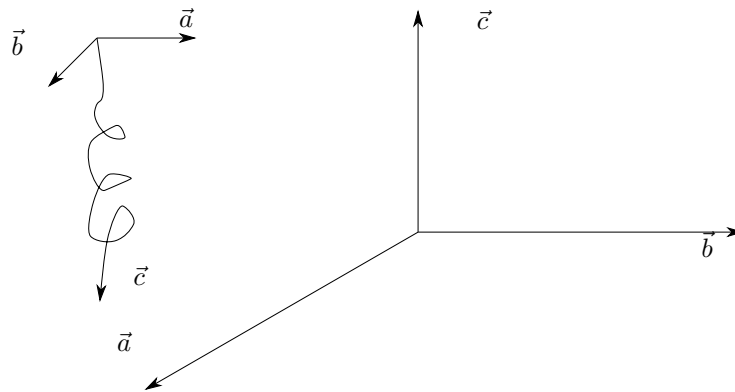


Рис. 1.7: shtopor

$$\vec{e}_1 \vec{e}_2 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i$$

1.7 Практика 4: Векторная Алгебра

Пример. $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{n}{m}$

$\vec{r}_C = ?$

$\vec{r}_C = \frac{n}{m+n} (\vec{r}_B - \vec{r}_A) + \vec{r}_A$

п1 Скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \Pr_{\vec{a}}^{\perp} \vec{b}$

Пример. $\square \quad |\vec{a}| = 1 \quad |\vec{b}| = 2 \quad (\vec{a} - \vec{b})^2 + (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = 20$

$|\vec{a}|^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 + 4(\vec{a}, \vec{b}) + 4|\vec{b}|^2 = 20$

$2(\vec{a}, \vec{b}) = -2 \implies (\vec{a}, \vec{b}) = -1 \quad \cos \varphi = -\frac{1}{2} \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}$

Пример. $\vec{a}(1, 2, 1) \quad \vec{b}(2, 3, 1,)$

$\Pr_{\vec{a}}(\vec{a} + \vec{b}) = \Pr_{\vec{a}} \vec{a} + \Pr_{\vec{a}} \vec{b} = |a| + \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|}$

Теперь посчитаем то же самое. но пусть вектора заданы в косоугольном базисе.

$\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n} \quad \vec{b} = 3\vec{m} - 2\vec{n} \quad |\vec{m}| = 2 \quad |\vec{n}| = 3 \quad \angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$

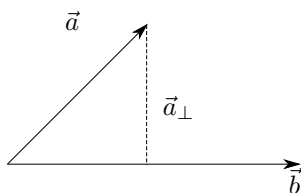


Рис. 1.8: couple

Проекция и скалярное произведение не зависят от базиса.

$$|\vec{a}|^2 = (2\vec{m} + 2\vec{n})^2 = 4|\vec{m}|^2 + 4(\vec{m}, \vec{n}) + |\vec{n}|^2$$

Пример. $\vec{AB} = 2\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2$ $\vec{AC} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$ $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \frac{\pi}{2}$

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{AB}, \vec{AC})}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = 0 \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Аналогично остальные, вектор третьей стороны можно выразить из двух других, как радиус векторов из A

Пример. $A(1, 2, 3)$ $B(1, 1, 1)$ $C(1, 0, 1)$ – три точки параллелограмма

$$O(1, 1, 2) \quad \vec{OB}(0, 0, -1) \quad \vec{OC}(0, -1, -1) \quad \cos \varphi = \frac{(\vec{OB}, \vec{OC})}{|\vec{OB}| |\vec{OC}|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}}$$

Пример. $\vec{a} = \alpha \vec{m} + \beta \vec{n}$ $\vec{b} = \gamma \vec{m} + \delta \vec{n}$ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ $|\vec{n}|, |\vec{m}|, |\vec{m}\vec{n}|$ – знаем

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{|\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{a} - \vec{b}|}$$

$$|\vec{a}|^2 = (\vec{a}, \vec{a}) = (\alpha \vec{m} + \beta \vec{n}, \alpha \vec{m} + \beta \vec{n}), \text{ для } \vec{b} \text{ так же}$$

Проверка того, что параллелограмм $\frac{\alpha}{\gamma} \neq \frac{\beta}{\delta}$

Пример. $\vec{x}(1, 2, 2)$ $\vec{e}_1(1, -1, 1)$ $\vec{e}_2(-2, 0, 1)$

$$\vec{x}' = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2$$

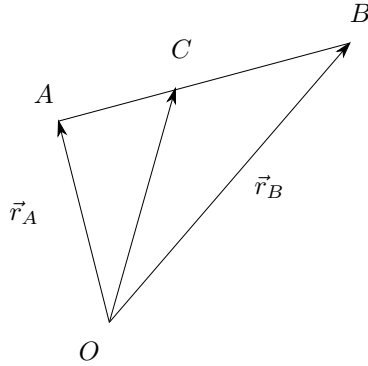


Рис. 1.9: vec

$$\vec{x} = \vec{x}' + \vec{z}$$

$$\vec{x} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \vec{z} \quad \begin{cases} (\vec{x}, \vec{e}_1) = \alpha(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + \beta(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \\ (\vec{x}, \vec{e}_2) = \alpha(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + \beta(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta = 1 \\ -\alpha + 5\beta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{5}{14} \\ \beta = \frac{1}{14} \end{cases}$$

1.7.1 Векторное произведение

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\varphi)$$

При векторном произведении можно не учитывать компоненту

Пример. $[\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}] = [\vec{a}, \vec{a}] + [\vec{a}, \vec{b}] - [\vec{b}, \vec{a}] + [\vec{b}, \vec{b}] = 0 + [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{b}] + 0 = 2[\vec{a}, \vec{b}]$

Получается площадь образуемого параллелограмма.

Пример.

1.8 Лекция 5

1.8.1 Смешанное произведение

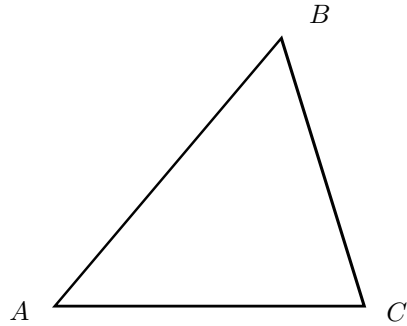


Рис. 1.10: trive

Определение 12. $\square \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Смешанным произведением векторов \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} называется число w

$$w = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]).$$

w – псевдоскаляр

Замечание. Алгебраические свойства:

1. Общие свойства векторного и скалярного произведений
2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны $\iff (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = 0$
3. $(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = |\vec{a}| |[\vec{b}, \vec{c}]| \cdot \cos(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = |\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{c}| \sin(\vec{b}, \vec{c}) \cos(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$

получается объём следующего параллелограмма (рисунок)

Замечание. $V_{\text{Пар}}$ – ориентированный объём

$$\begin{cases} V > 0 & , (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) - \text{правая тройка} \\ V < 0 & , (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) - \text{левая тройка} \end{cases}$$

$$4. \angle([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$$

$$\angle(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = ([\vec{b}, \vec{c}], \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

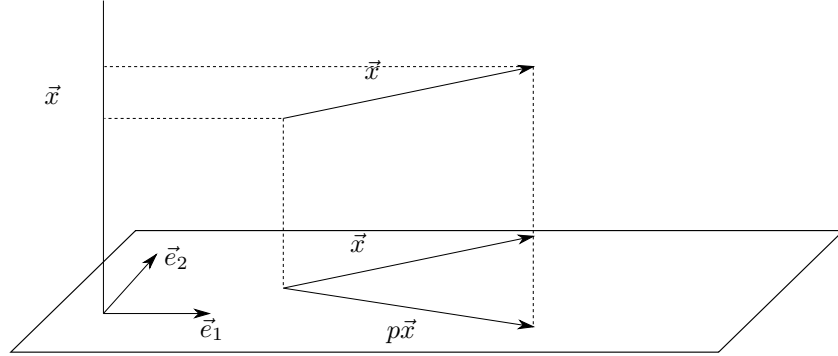


Рис. 1.11: pr

1.8.2 Смешанное произведение а координатах

1. Базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ $\vec{i}\vec{j}\vec{k} = 1$

$$\vec{a}(a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b}(b_x, b_y, b_z) \quad \vec{c}(c_x, c_y, c_z)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}\vec{b}\vec{c} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) (c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + \\ &a_z\vec{k}) \left(\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \vec{k} - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} \vec{i} \right) = a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + \\ &a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} (\vec{i}\vec{j}\vec{k}) - \text{число элементарных объёмов, кото-} \\ &\text{рые помещаются в задаваемый параллелепипед} \end{aligned}$$

2. Произвольный базис. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b}(b_1, b_2, b_3) \quad \vec{c}(c_1, c_2, c_3)$$

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)(c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3) = \\ &\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \cdot (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3), \text{ где } \vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3 - \text{объём параллелепипеда для ме-} \\ &\text{ры} \end{aligned}$$

1.8.3 Двойное векторное произведение

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \quad \vec{v} = [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$$

$$\vec{v} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$$

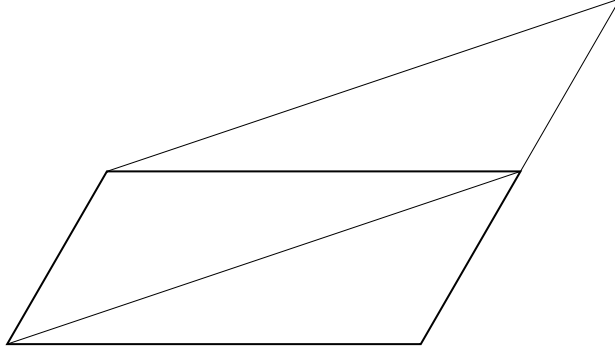


Рис. 1.12: paral

$$1. \vec{v} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$$

$$\text{Доказательство. } [\vec{b}, \vec{c}] = (b_y b_z - c_y c_z) \vec{i} - (b_x c_z - c_x b_z) \vec{j} + (b_y c_z - c_y b_z) \vec{k}$$

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = (a_y(b_x c_y - c_x b_y) + a_z(b_x c_z - c_x b_z)) \vec{i} - (a_x(b_x c_y - c_x b_y) - a_z(b_y c_z - b_z c_y)) \vec{j} + (a_x(b_z c_x - c_z b_x) - a_y(b_y c_z - b_z c_y)) \vec{k}$$

$$v_x = b_x(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_x(a_x b_x + a_y b_y + a_z c_z)$$

$$\triangleleft a_y b_x c_y - a_y c_x b_y + a_z b_x c_z - a_z c_x b_z = b_x(a_y c_y + a_z c_z) - c_x(a_y b_y + a_z b_z) + a_x b_x c_x - a_x b_x c_x = \vec{v}_x$$

Дальше то же самое для второй и третьей компонент (Упражнение: дома проделать для одной из оставшихся координат) ■

$$\text{Теорема 1 (Тождество Бьянки). } [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] + [\vec{b}, [\vec{c}, \vec{a}]] + [\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]] = \vec{0}$$

$$\text{Доказательство. } \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) + \vec{c}(\vec{b}\vec{a}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c}) - \vec{b}(\vec{c}\vec{a}) = \vec{0} \quad \blacksquare$$

$$d(f, g) = (df)(g) + (f)(dg)$$

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = [[\vec{a}, \vec{b}] \vec{c}] + [\vec{b}, [\vec{a}, \vec{c}]]$$

Позволяет считать двойное векторное произведение некоторым аналогом дифференцирования.

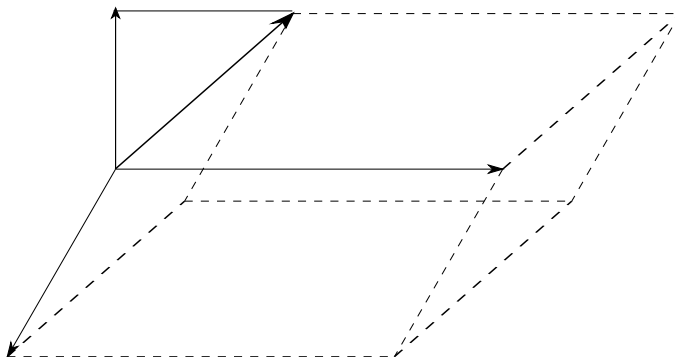


Рис. 1.13: mixed

1.9 Лекция 6

1.9.1 Аналитическая геометрия

Прямые и плоскости

1. Прямая на плоскости.

P_1, P_2 – произвольные различные точки на плоскости.

Прямая – геометрическое место точек, равноудалённых от этих двух.

$$|PP_1| = |PP_2|$$

Пусть O – точка отсчёта. $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OP_2}$ – два радиус вектора

$$|\vec{r} - \vec{r}_1|^2 = |\vec{r} - \vec{r}_2|^2$$

$$|\vec{r}_2|^2 - 2(\vec{r}\vec{r}_1) + |\vec{r}_1|^2 = |\vec{r}|^2 - 2(\vec{r}\vec{r}_2) + |\vec{r}_2|^2$$

$$2(\vec{r}, -\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = |\vec{r}_2|^2 - |\vec{r}_1|^2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_2 + \vec{r}_1)$$

$$(\vec{r} - \frac{\vec{r}_2 + \vec{r}_1}{2}, \vec{r}_2 - \vec{r}_1) = 0 \iff \underbrace{\vec{r} - \frac{\vec{r}_2 + \vec{r}_1}{2}}_{\vec{r}_0} \perp \underbrace{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}_{\vec{n}}$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{n} \quad (\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$$

$(\vec{r}, \vec{n}) = (\vec{r}_0, \vec{n})$ – нормальное уравнение прямой

$$(\vec{r}\vec{n}) = (\vec{r}_0\vec{n}).$$

Способы задания:

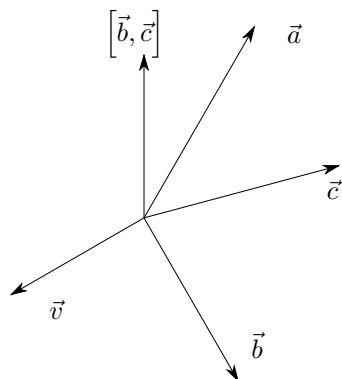


Рис. 1.14: dvec

- (a) В ДПСК $\vec{r}(x, y), \vec{n}(a, b), \vec{r}_0(x_0, y_0)$

$$ax + by = ax_0 + by_0 = -c \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

$$ax + by + c = 0.$$

Последнее – общее уравнение прямой.

- (b) $\vec{r} - \vec{r}_0 \parallel \vec{s} \implies \exists t : \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{s}t$

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t$ \vec{s} – направляющий вектор, любой ненулевой, смотрящий вдоль прямой

- (c) $\vec{z}(x, y) \quad \vec{r}_0(x_0, y_0) \quad \vec{s}(\alpha, \beta)$

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \quad \text{– параметрическое уравнение прямой.}$$

- (d) $\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta}$ – каноническое уравнение прямой.

Пример. $l : 2x + 3y - 1 = 0$ Рассмотрим $A(1, 1)$, которая не лежит на прямой

$l' : 2(x - 1) + 3(y - 1) = 0$ – уравнение прямой, проходящей через A параллельно l

$l'' : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3}$ – уравнение прямой, проходящей через A перпендикулярно l (её направляющая – нормаль изначальной)

Пример. $\frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{4} \quad A(1, 1)$

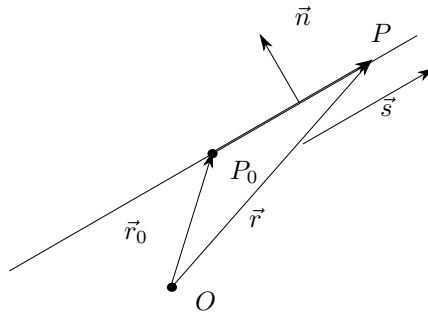


Рис. 1.15: line

$$l' : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4}$$

$$l'' : 2(x-1) + 4(y-1) = 0$$

2. Уравнение прямой с произвольным параметром

$$ax + by + c = 0 \quad | \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$Ax + By + C = 0$$

$$C = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = -(\vec{r}_0, \vec{n}^0)$$

C – прицельный параметр – (по модулю) расстояние от прямой до начала координат.

3. Уравнение прямой в отрезках.

$$ax + by = -c.$$

$$\frac{ax}{-c} + \frac{by}{-c} = 1$$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

4. Уравнение с угловыми коэффициентами.

$$\frac{a}{b}x + y = -\frac{c}{b}$$

$$y = kx + l$$

$$\operatorname{tg} \varphi = k$$

5. Уравнение прямой через две точки

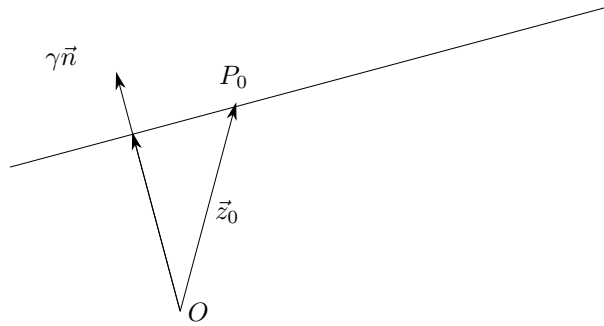


Рис. 1.16: radvec

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)t$$

Взаимное расположение прямых:

1. Найти угол между прямыми:

$$l_1 : (\vec{r}\vec{n}_1) = D_1$$

$$l_2 : (\vec{r}, \vec{n}_2) = D_2$$

$$\angle(l_1, l_2) = \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

2. Точка пересечения $(\vec{r}_1, \vec{n}_1) = D_1$

$$(\vec{r}_2, \vec{n}_2) = D_2$$

$$\vec{n}_1(a_1, b_1) \quad \vec{n}_2(a_2, b_2) \quad \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

\vec{r}_0 – радиус вектор точки пересечения прямых

$$a_1x + b_1y = D_1 \quad a_2x + b_2y = D_2$$

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

$$\Delta_x = D_1b_2 - b_1D_2$$

$$\Delta_y = a_1D_2 - a_2D_1$$

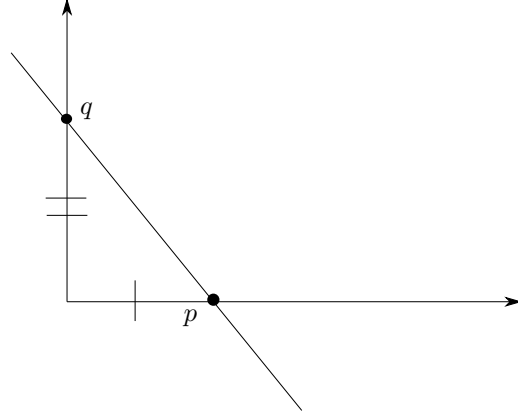


Рис. 1.17: отрезок

$$x = \frac{D_1 b_2 - b_1 D_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$y = \frac{a_1 D_2 - a_2 D_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Подойдём с другой стороны:

$$l_1 : \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{s}_1 t$$

$$l_2 : \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{s}_2 t$$

$$\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2 \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \neq \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

$$\vec{r}_1 + \vec{s}_1 t = \vec{r}_2 + \vec{s}_2 t$$

$$\vec{s}_1 t - \vec{s}_2 t = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\alpha_1 t_1 - \alpha_2 t_1 = x_2 - x_1$$

$$\beta_1 t_1 - \beta_2 t_1 = y_2 - y_1$$

$$\Delta = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0$$

3. Есть прямая ℓ и точка $P \notin \ell$

$$(\vec{r}, \vec{n}) = D = (\vec{r}_0, \vec{n}) \quad \ell, P_0$$

$$\vec{r}_P \quad P$$

Сначала найдём ортогональную проекцию точки P – точку Q

$$\vec{r}_Q = \vec{r}_P + \overrightarrow{PQ} = \vec{r}_P - \alpha \vec{n}$$

$$|QP| = (\overrightarrow{P_0P}, \vec{n}_0) = \frac{(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n})}{|\vec{n}|}$$

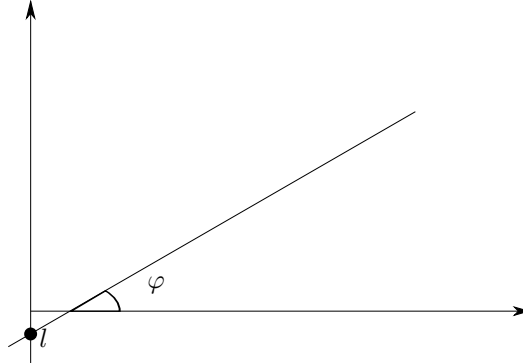


Рис. 1.18: coeff

$$\overrightarrow{QP} = |QP| \vec{n} = \frac{(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n})}{|\vec{n}|^2} \vec{n} = \frac{(\vec{r}_p - \vec{r}_0, \vec{n})}{|\vec{n}|^2} \vec{n} \quad \vec{r}_q = \vec{r}_p - \overrightarrow{QP} = \vec{r}_p - \frac{(\vec{r}_p, \vec{n}) - D}{|\vec{n}|^2} \vec{n}$$

$$II: \quad (\vec{r}_q, \vec{n}) = (\vec{r}_p, \vec{n}) - \alpha |\vec{n}|^2$$

$$D = (\vec{r}_p, \vec{n}) - \alpha |\vec{n}|^2 \implies \alpha = \frac{(\vec{r}_0, \vec{n}) - D}{|\vec{n}|^2}$$

$$\text{Расстояние от } P \text{ до } \ell \quad \rho(P, \ell) = \left| \overrightarrow{QP} \right| = \frac{(\vec{r}_p, \vec{n}) - D}{|\vec{n}|}$$

$$\text{В координатах: } \rho(P, \ell) = \frac{ax_p + by_p - D}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Плоскость – множество точек пространства, равноудалённых от фиксированных точек.

$$|P_1P| = |P_2P|$$

$$(\vec{r}_0 - \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}, \vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 0$$

$$(\vec{r}, \vec{n}) = (\vec{r}_0, \vec{n}) = D - \text{нормальное векторное уравнение плоскости}$$

$$\text{ДПСК: } \vec{n}(A, B, C)$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0 \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$(\vec{r}, \vec{n}) = D \quad Ax + By + Cz = D - \text{общее уравнение плоскости}$$

Параметрическое уравнение плоскости

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{P_0P} = \vec{r}_0 + \alpha \vec{m} + \beta \vec{q} - \text{векторное параметрическое уравнение плоскости}$$

$$\text{ДПСК: } \begin{cases} x = x_0 + \alpha m_1 + \beta q_1 \\ y = y_0 + \alpha m_2 + \beta q_2 \\ z = z_0 + \alpha m_3 + \beta q_3 \end{cases} \quad \vec{m}(m_1, m_2, m_3) \quad \vec{q}(q_1, q_2, q_3)$$

Плоскость можно задать через три точки. P_1, P_2, P_3

Если нам нужна нормаль, образуем два вектора $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad \vec{r}_3 - \vec{r}_1$

$$\vec{n} = [\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1] \quad \vec{r}_0 = \vec{r}_1$$

$$(\vec{r}, \vec{n}) = (\vec{r}_1, \vec{n})$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{n})$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0$$

$$\text{ДПСК: } \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Для параметрического уравнения: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \alpha(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \beta(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)$

Уравнение плоскости с прицельным параметром. $Ax + By + Cz + D = 0$
 $\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z + \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0 \quad \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} -$$

прицельный параметр
 $D = (\vec{r}_0, \vec{n})$ Прицельный параметр: $(\vec{r}_0, \vec{n}) / |\vec{n}|$

Взаимное расположение плоскостей: $(\vec{r}, \vec{n}_1) = D_1 \quad (\vec{r}, \vec{n}_2) = D_2$ - две плоскости

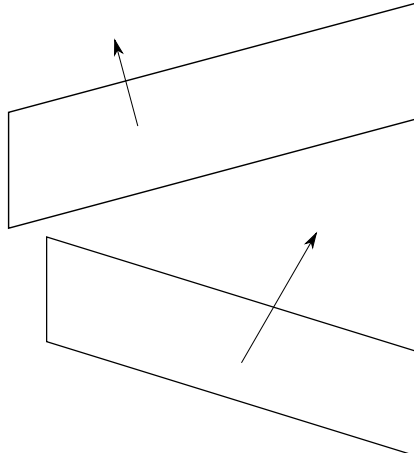


Рис. 1.19: плоскости

1. Угол

$$\angle(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$$

2. Пересечение

$$[\vec{n}_1, \vec{n}_2] \neq 0$$

3. Параллельность

$$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \implies \vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1$$

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{n}) = 0 \quad (\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{n}_1) = (\vec{r}_2, \vec{n}_1) - D = \frac{D_2}{\lambda} - D_1 \left(= \frac{|\vec{n}_1|}{|\vec{n}_2|} D_2 - D_1 \neq 0 \right)$$

$$(\vec{r}, \lambda \vec{n}_1) = D_2 \quad D_1 = \frac{D_2}{\lambda} \quad \lambda = \frac{D_2}{D_1} = \frac{|\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|}$$

4. Совпадение $\frac{D_2}{|\vec{n}_2|} = \frac{D_1}{|\vec{n}_1|}$

Пример. Даны плоскость и точка, не лежащая на плоскости. найдём точку проекции.

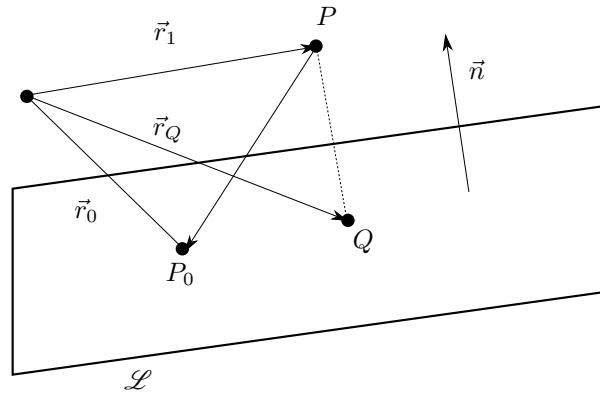


Рис. 1.20: проекция

$$\mathcal{L} \quad (\vec{r}, \vec{n}) = D$$

$$P \quad \vec{r}_1$$

$$\vec{r}_Q - ?$$

$$\vec{r}_Q = \vec{r}_1 + \overrightarrow{PQ} = \vec{r}_1 + \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_1, \vec{n})}{|\vec{n}|^2} \vec{n} = \vec{r}_1 + \frac{D - (\vec{r}_1, \vec{n})}{|\vec{n}|^2} \vec{n}$$

$$\rho(P, \mathcal{L}) = \left| \overrightarrow{PQ} \right| = \left| \frac{D - (\vec{r}_1, \vec{n})}{|\vec{n}|^2} \vec{n} \right|$$

Прямая в пространстве.

Три точки задают прямую, равноудалённую от них всех

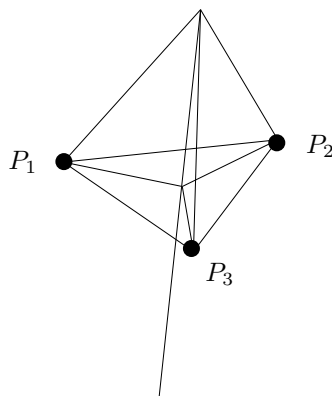


Рис. 1.21: прямая-через-3-точки

$$|PP_1| = |PP_2| = |PP_3|$$

(вывод будет позже)

\vec{s} – нормаль к плоскости, образованной тремя точками.

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{P_0P} = \vec{r}_0 + \vec{s}t$ – векторное параметрическое уравнение прямой

$$\text{ДПСК: } \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases} \quad \vec{s}(\alpha, \beta, \gamma) \quad \vec{r}_0(x_0, y_0, z_0) \quad \vec{r}(x, y, z)$$

Векторное уравнение: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t \quad \times \vec{s}$

$$[\vec{r}, \vec{s}] = [\vec{r}_0, \vec{s}] = \vec{b}$$

$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}$ – каноническое уравнение прямой (выразили t и приравняли)

Через две точки $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$

Через две пересекающиеся плоскости. $\begin{cases} (\vec{r}, \vec{n}_1) = D_1 \\ (\vec{r}, \vec{n}_2) = D_2 \end{cases} \quad [\vec{n}_1, \vec{n}_2] \neq 0$

$$\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$$

Прямая(взаимное расположение)

$$\ell_1 \quad [\vec{r}, \vec{s}_1] = \vec{b}_1$$

$$\ell_2 \quad [\vec{r}, \vec{s}_2] = \vec{b}_2$$

$$1. \ell_1 \parallel \ell_2$$

$$[\vec{s}_1, \vec{s}_2] = 0 \implies \vec{s}_2 = \lambda \vec{s}_1$$

$$[\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{s}] \neq 0$$

$$2. \ell_1 = \ell_2$$

$$[\vec{s}_1, \vec{s}_2] = 0$$

$$[\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{s}] = 0$$

Плоскость через $\ell_1 \parallel \ell_2$

$$\vec{n} = [\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{s}]$$

$$(\vec{r}, \vec{n}) = (\vec{r}_0, \vec{n})$$

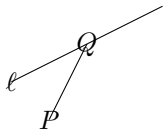
$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{s}) = 0 - \text{уравнение плоскости}$$

$$3. \text{Скрещивание } \ell_1 \times \ell_2$$

$$(\vec{n} =) [\vec{s}_1, \vec{s}_2] \neq 0$$

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{n}) \neq 0 \quad (\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2) \neq 0$$

Пример. Есть прямая, есть точка. Найти ортогональную проекцию этой точки на прямую.



$$[\vec{r}, \vec{s}] = \vec{b}$$

$$\vec{r}_p \quad P$$

$$\vec{r}_Q - ?$$

$$\vec{r}_Q = \vec{r}_p + \overrightarrow{PQ}$$

$$(\vec{r}, \vec{s}) = (\vec{r}_p, \vec{s}) - \text{плоскость}$$

$$[\vec{s}, [\vec{r}, \vec{s}]] = \vec{r}(\vec{s}\vec{s}) - \vec{s}(\vec{s}\vec{r}) = [\vec{b}, \vec{s}]$$

$$\vec{r}_Q |\vec{s}|^2 - \vec{s}(\vec{r}_p \vec{s}) = [\vec{b}, \vec{s}]$$

1.10 Практика

Пример. Даны две прямые, заданные параметрическими уравнениями:

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \end{cases}$$

$$l_2 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 + t \end{cases}$$

1. Параллельны ли они?

Направляющие вектора $\vec{s}_1(2, -1)$ $\vec{s}_2(-1, 1) \implies \vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2 \implies$ пересекаются

2. Найти точку пересечения

$$1 + 2t = 2 - t \implies t = \frac{1}{3} \implies x = \frac{5}{3}$$

$$1 - t = 2 + t \implies t = -\frac{1}{2} \implies y = \frac{3}{2}$$

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} \quad \begin{cases} x + 2y = +3 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$l_2 : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{1}$$

$y = -1, x = 5$ – точка пересечения. верхний способ не работает, там разные t

Пример. $l_1 : 2x + y + 2 = 0$

$l_2 : 4x + y + 1 = 0$

$A(1, 2)$ $AB = AC$ $l = ?$, чтобы проходила через BC

Можно найти точку пересечения прямых $O = l_1 \cap l_2$

$$\begin{cases} 2x + y = -2 \\ 4x + y = -1 \end{cases} \implies 2x = 1 \quad x = \frac{1}{2} \quad y = -3 \quad O(\frac{1}{2}, -3) \quad OA(\frac{1}{2}, 5) \implies$$

$O'(\frac{3}{2}, 7)$

$$2(x - \frac{3}{2}) + (y - 7) = 0$$

$$2x + y - 10 = 0$$

$$C = l' \cap l_2 \quad \begin{cases} 2x + y = 10 \\ 4x + y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{11}{2} \\ y = 21 \end{cases} \implies l : \frac{x-1}{-\frac{11}{2}-1} = \frac{y-2}{21-2} - \text{ответ}$$

Пример. $A(1, 3)$ $B(2, 5)$ – две вершины треугольника. $H(1, 4)$ – точка пересечения высот этого треугольника. Найти третья точку треугольника C

$$\overrightarrow{AB} = (1, 2) \implies l = 1(x - 1) + 2(y - 4) = 0 \quad x + 2y = 3$$

$$\overrightarrow{AH}(0, 1) \implies l' : y = 5$$

$$C = l \cap l' \implies C(-1, 5)$$

Плоскости:

$$(\vec{r}\vec{n}) = (\vec{r}_0, \vec{n}) = \alpha$$

$$Ax + By + Cz + \alpha = 0 \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \alpha \vec{a} + \beta \vec{n}$$

Пример. $A(1, 1, 1) \quad B(2, 3, -1) \quad \vec{a}(0, -1, 2)$

$$\overrightarrow{AB}(1, 2, -2)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_a + \alpha \vec{a} + \beta \overrightarrow{AB}$$

Пример. $A(1, 1, -1)$

$$\alpha_1 : 2x - y + 5z + 3 = 0$$

$$\alpha_2 : x + 3y - z - 7 = 0$$

$$\alpha : \alpha \perp \alpha_1, \alpha \perp \alpha_2 \quad A \in \alpha \quad \alpha?$$

$$\vec{n}_1(2, -1, 5) \quad \vec{n}_2(1, 3, -1) \implies \vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2 \implies \vec{r} = \vec{r}_a + \alpha \vec{n}_1 + \beta \vec{n}_2$$

Пример. $\alpha : 2x + 3y + 6z - 12 = 0$

Вычислить объём фигуры, ограниченной тремя координатными и заданной плоскостями.

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1 \implies \text{Знаем пересечения плоскости с координатными плоскостями.}$$

$$V = 8$$

Пример. $L = \begin{cases} x + 2y - 3z - 5 = 0 \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$ – уравнение прямой через пересечение непараллельных плоскостей.

Найти каноническое уравнение прямой.

$$\vec{n}_1(1, 2, -3) \quad \vec{n}_2(2, -1, 1)$$

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 5\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\square z = 0 \quad \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2 + -y = -2 \end{cases} \quad -5y = -12 \quad \begin{cases} y = \frac{12}{5} \\ x = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\frac{x-\frac{1}{5}}{-1} = \frac{y-\frac{12}{5}}{-7} = \frac{z-0}{-5}$$

Пример. $L: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-3}{-1} (=t) \quad \alpha: x + 2y + 3z + 3 = 0$

$$\square P = L \cap \alpha \quad P-?$$

$$\vec{s}(1, -2, -1) \quad \vec{n}(1, 2, 3)$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad - \text{ вставляем в уравнение для плоскости}$$

$$t + 2(3 - 2t) + 3(3 - t) + 3 = 0$$

$$-6t = -18 \implies t = 3 \implies \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \\ z = 0 \end{cases}$$

Пример. $L: \frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-5}{4}$

$$\alpha: x - 3y + 2z - 7 = 0$$

Найти проекцию прямой L на плоскость α

$$\vec{n} \times \vec{s}$$

1.11 Практика: Кривые второго порядка на плоскости

Определение 13. Эллипс – геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до выбранных точек (называемых фокусами) постоянна.

F_1, F_2 – фокусы

a – длина большой полуоси

b – длина малой полуоси

c – фокусное расстояние $c^2 = a^2 - b^2$

В Декартовой системе координат. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\varepsilon = \frac{c}{a} \in [0, 1]$ – эксцентриситет

$\varepsilon = 0 \implies$ окружность $a^2 = b^2 = R^2$

$\varepsilon = 1 \implies a = c$

Уравнение касательной в точке (x_0, y_0)

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Директриса эллипса $x = \pm d = \pm \frac{a}{\varepsilon}$

Пример. Фокусы эллипса $(\pm 1, 0)$

$M(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \in E$

Построить уравнение эллипса E

Доказательство. $c = 1 = a^2 - b^2$

$$\frac{3}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1$$

Два уравнения с двумя неизвестными $\implies b = \sqrt{3} \quad a = 2 \implies \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ■

Пример. Директрисы $x = \pm 4$

Фокусы вместе с верхней и нижней точкой образуют квадрат

Найти уравнение эллипса

Доказательство. $b = c \implies a^2 - b^2 = c^2 \quad a^2 = 2c^2 \quad a = \sqrt{2}c$

$$d = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a^2}{c} = \frac{2c^2}{c} = 4 \implies c = 2 \implies b = 2 \quad a = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$

■

Определение 14. Гипербола – геометрическое место точек, (модуль) разность расстояний от которой до заданных точек есть число постоянное

$$||F_1P| - |F_2P|| = const$$

F_1, F_2 – фокусы гиперболы

$$\text{Уравнение гиперболы } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{Уравнение асимптот } y = \pm \frac{b}{a}x$$

Уравнение касательной в точке (x_0, y_0)

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Уравнение директрисы $x = \pm d = \frac{a}{\varepsilon}$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \in [1, \infty)$$

$$\varepsilon = 1 \implies a = c$$

$\varepsilon \rightarrow \infty \implies b \rightarrow \infty$ – две прямые, проходящие через фокусы вертикально.

Пример. Доказать, что отрезок касательной к гиперболе, заключённый между её асимптотами точкой касания делится пополам.

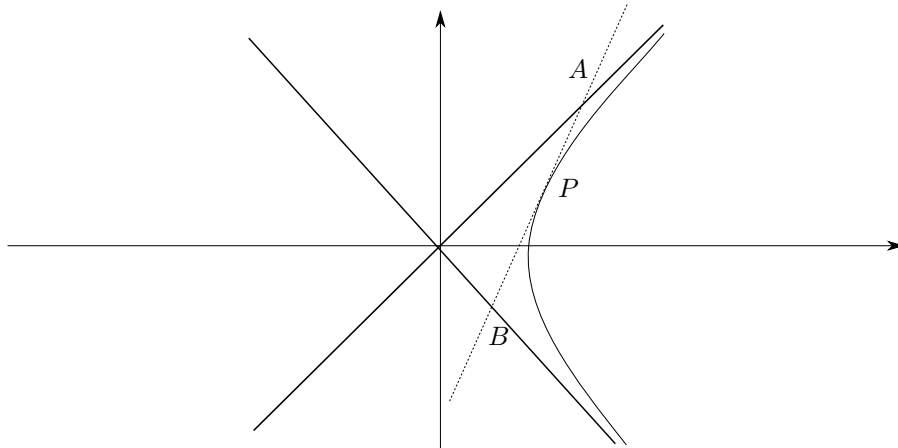


Рис. 1.22: zodacha

$$|AP| = |BP|$$

Доказательство.
$$\begin{cases} \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \\ y = \pm \frac{b}{a}x \end{cases}$$

$$A: \quad \frac{x_A x_0}{a^2} - \frac{b}{a} \frac{x_A y_0}{b^2} = 1 \implies x_A = \frac{1}{\frac{x_0}{a^2} - \frac{y_0}{ab}} = \frac{a^2 b}{x_0 b - y_0 a}.$$

$$B: \quad \frac{x_B x_0}{a^2} + \frac{b}{a} \frac{x_B y_0}{b^2} = 1 \implies x_B = \frac{a^2 b}{x_0 b + y_0 a}.$$

$$x_A + x_B = a^2 b \frac{2x_0 b}{x_0^2 b^2 - y_0^2 a^2} = \frac{2x_0}{\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}} = 2x_0 \quad \blacksquare$$

Определение 15. Парабола – геометрическое место точек, равноудалённых от заданной прямой и точки

$$\rho(l, F) = |PF|$$

F – фокус параболы Уравнение $y^2 = 2px$

Уравнение касательной $yy_0 = p(x + x_0)$

Пример. $y^2 = 4.5x$

$$M: \rho(l, M) = 9.125$$

$$|OM| - ?$$

Доказательство. $\frac{p}{2} = 1.125$

$$M_x = 8 \implies M_y = 36$$

$$|OM|^2 = x_M^2 + y_M^2 = 36 + 64 = 100 \quad \blacksquare$$

Пример. Найти касательную к параболе $y^2 = 16x$, проходящую через точку $(1, 5)$

Доказательство.
$$\begin{cases} yy_0 = p(x + x_0) \\ y_0^2 = 2px \end{cases}$$

$$yy_0 = p \left(x + \frac{y_0^2}{2p} \right)$$

$$y_M y_0 = p \left(x_M + \frac{y_0^2}{2p} \right) \implies y_0 = \dots \quad \blacksquare$$

1.12 Лекция

1.12.1 Параллельный перенос

1.12.2 Поворот

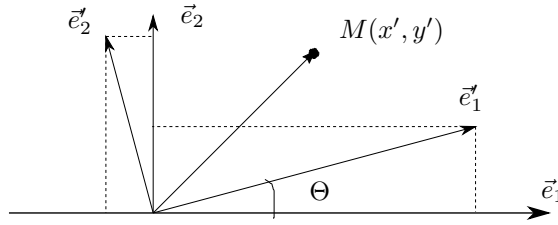


Рис. 1.23: rotation

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$$

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$$

Замечание. Сохраняем длины и углы:

$$|\vec{e}_1'| = |\vec{e}_2'| = 1 \quad (\vec{e}_1', \vec{e}_2') = 0$$

$$\vec{e}_1' = \vec{e}_1 \cos \Theta + \vec{e}_2 \sin \Theta$$

$$\vec{e}_2' = -\vec{e}_1 \sin \Theta + \vec{e}_2 \cos \Theta$$

$$\vec{r}_m = x' \vec{e}_1' + y' \vec{e}_2' = x' (\vec{e}_1 \cos \Theta + \vec{e}_2 \sin \Theta) + y' (-\vec{e}_1 \sin \Theta + \vec{e}_2 \cos \Theta) = \vec{e}_1 (x' \cos \Theta - y' \sin \Theta) + \vec{e}_2 (x' \sin \Theta + y' \cos \Theta)$$

$$\vec{r}_M = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x' \cos \Theta - y' \sin \Theta \\ y = x' \sin \Theta + y' \cos \Theta \end{cases} \quad \text{— прямое преобразование}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{e}_1' \cos \Theta + \vec{e}_2' \sin \Theta \\ \vec{e}_2 = -\vec{e}_1' \sin \Theta + \vec{e}_2' \cos \Theta \end{cases} \quad \text{— обратное преобразование}$$

$$\text{Замечание.} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad X = T_\Theta X'$$

Более общий вид: $T_\Theta \rightarrow T = \begin{bmatrix} t_1^1 & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 \end{bmatrix} \begin{cases} \vec{e}'_1 = t_1^1 \vec{e}_1 + t_1^2 \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_2 = t_2^1 \vec{e}_1 + t_2^2 \vec{e}_2 \end{cases}$

$(\vec{e}'_1 \vec{e}'_2) = 0 \implies (t_1^1 \vec{e}_1 + t_1^2 \vec{e}_2)(t_2^1 \vec{e}_1 + t_2^2 \vec{e}_2) = t_1^1 t_2^1 + t_1^2 t_2^2 = 0$ Т.е. в общем виде, матрица, преобразующая оси с сохранением углов, это такая матрица, у которой столбики ортогональны.

Чтобы сохранялись длины нужно $\begin{cases} (t_1^1)^2 + (t_1^2)^2 = 1 \\ (t_2^1)^2 + (t_2^2)^2 = 1 \end{cases}$

$T_\Theta^T T_\Theta = I$ – условие на матрицу поворота

$T^T T = \text{diag} \lambda_1^+ \lambda_2^+$

$\begin{bmatrix} t_1^1 & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1^1 & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^+ & 0 \\ 0 & \lambda_2^+ \end{bmatrix}$, где λ_1^+, λ_2^+ – положительные числа.

1.12.3 Общий вид преобразования плоскости

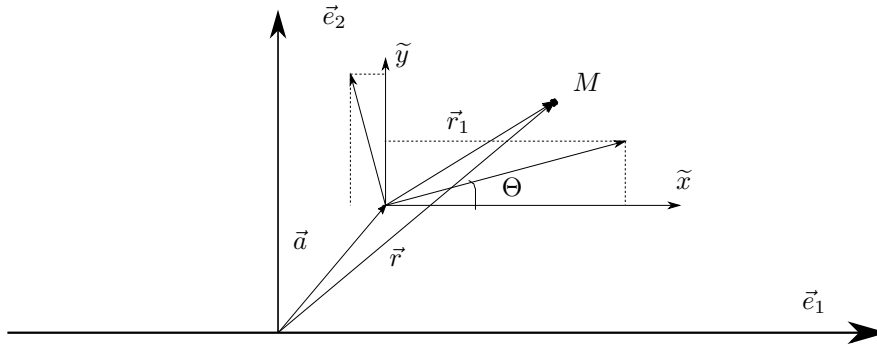


Рис. 1.24: general

$$(x, y) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})$$

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{r}_1$$

$$\vec{r}(x, y) \quad \vec{r}_1(\tilde{x}, \tilde{y})$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \tilde{x} \vec{e}'_1 + \tilde{y} \vec{e}'_2 \\ &= \tilde{x}(t_1^1 \vec{e}_1 + t_1^2 \vec{e}_2) + \tilde{y}(t_2^1 \vec{e}_1 + t_2^2 \vec{e}_2) \\ &= \vec{e}_1(t_1^1 \tilde{x} + t_2^1 \tilde{y}) + \vec{e}_2(t_1^2 \tilde{x} + t_2^2 \tilde{y}). \end{aligned}$$

Подставим \vec{r}_1

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{e}_1(t_1^1\tilde{x} + t_2^1\tilde{y}) + \vec{e}_2(t_1^2\tilde{x} + t_2^2\tilde{y}) .$$

В координатах $\vec{a}(\alpha, \beta)$

$$\begin{cases} x = \alpha + t_1^1\tilde{x} + t_2^1\tilde{y} \\ y = \beta + t_1^2\tilde{x} + t_2^2\tilde{y} \end{cases}$$

В матричной форме $X = A + T\tilde{X}$ A - параллельный перенос, T - поворот, масштаб и инверсия.

Частные случаи:

1. $T = I$ - параллельный перенос
2. $T = T_\Theta, A = 0$ - поворот
3. $T = \text{diag}\{\lambda_1^+, \lambda_2^+\}, A = 0$ - изменение масштаба
4. $T = \text{diag}\{1, -1\}$ - инверсия OY

1.12.4 Уравнение прямой при преобразовании координат

$$ax + by + c = 0$$

$$\text{В матричном виде: } N^T X + c = 0 \quad N = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad N^T = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$$

$$\text{В новой системе: } N^T(A + T\tilde{X}) + c = 0$$

$$N^T T \tilde{X} + \underbrace{N^T A + c}_{\tilde{c}} = 0$$

$$\widetilde{N^T X} + \tilde{c} = 0 \quad \begin{cases} \tilde{c} = N^T A + c \\ \tilde{N} = T^T N \end{cases}$$

1.12.5 Каноническое уравнение кривой II-го порядка

$$F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

$$\triangleleft P = \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} \quad R = f$$

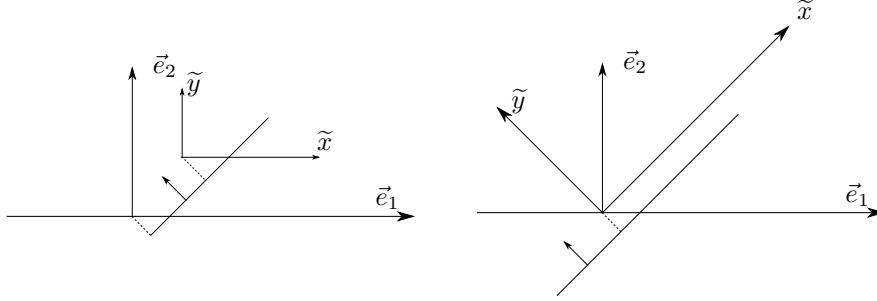


Рис. 1.25: linetr

$$X^T P X = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{bmatrix} = ax^2 + bxy + byxcy^2 = ax^2 + 2bxy + xy^2$$

$$Q^T X = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = dx + ey$$

$$\implies F(x, y) = X^T P X + Q^T X + R.$$

Теперь преобразуем систему координат $(x, y) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})$

Замечание. Много раз будет использовано свойство $(AB)^T = B^T A^T$

$$\begin{aligned} F(\tilde{x}, \tilde{y}) &= (A + T\tilde{X})^T P (A + T\tilde{X}) + Q^T (A + T\tilde{X}) + R \\ &= \underline{A^T P A} + (T\tilde{X})^T P A + (T\tilde{X})^T P T\tilde{X} + A^T P T\tilde{X} + \underline{Q^T A} + Q^T T\tilde{X} + \underline{R} \\ &= \tilde{X}^T \underbrace{T^T P T}_{\tilde{P}} \tilde{X} + ((PA)^T T\tilde{X})^T + A^T P T\tilde{X} + Q^T T\tilde{X} + \underbrace{A^T P A + Q^T A + R}_{\tilde{R}} \\ &= \tilde{X}^T \tilde{P} \tilde{X} + (A^T P^T T\tilde{X})^T + A^T P T\tilde{X} + Q^T T\tilde{X} + \tilde{R} \end{aligned}$$

Замечание. $P^T = P$

$$(A^T P^T T\tilde{X})^T = (A^T P T\tilde{X})^T = A^T P T\tilde{X}$$

Последнее равенство, потому что это число (матрица 1×1)

$$= \tilde{T}^T \tilde{P} \tilde{X} + (2A^T P + Q^T) T \tilde{X} + R$$

1. $\tilde{P} = T^T P T \stackrel{?}{=} \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$ – можно всегда

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 \quad \begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 > 0 & \text{эллиптический} \\ \lambda_1 \lambda_2 < 0 & \text{гиперболический} \\ \lambda_1 \lambda_2 = 0 & \text{параболический} \end{cases}$$

Замечание. $\det(AB) = \det A \det B$ (будем доказано позже)

$$\det \tilde{P} = \det T^T \det P \det T = \det(T^T T) \det P = \Delta \det P = \lambda_1 \lambda_2$$

$$\Delta \det P = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\Delta} \begin{cases} < 0 & \text{эллиптический} \\ < 0 & \text{гиперболический} \\ = 0 & \text{параболический} \end{cases}$$

$$\det P = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2$$

2. $\tilde{Q}^T = (2A^T P + Q^T) T = 0$ (хочется, чтобы было нулевой строчкой)

$$2A^T P = -Q^T$$

$$A^T = -\frac{1}{2} Q^T P^{-1} \implies A = -\frac{1}{2} P^{-1} Q^T$$

$$\tilde{X}^T \tilde{P} \tilde{X} + \underbrace{\tilde{Q}^T \tilde{X}}_{=0 \text{ хочу}} + \tilde{R} = 0 \implies \tilde{X}^T \tilde{P} \tilde{X} + \tilde{R} = 0.$$

Замечание. P^{-1} не всегда существует. конкретно в случае параболы. Это можно понять, если пропадает коэффициент при x^2 или y^2

$\det P = 0$ – рассмотреть дома

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 = -\tilde{R}$$

1.12.6 Поверхности второго порядка

Определение 16. Алгебраическая поверхность второго порядка – геометрическое место точек уравнения $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ – целый алгебраический полином второго порядка.

Способы задания:

1. Выражение, разрешённо относительно одной из координат $x = f(y, z)$

2. Параметрическое:
$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

Типы поверхностей:

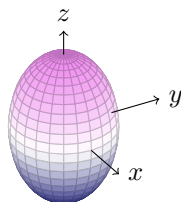
1. Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Метод сечений. $z = C \implies \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{C^2}{c^2}$

$|C| < c$ – эллипс

$|C| > c$ – \emptyset (мнимый эллипс) $|C| = c$ – точка $(0, 0, C)$



2. гиперболоиды

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ – однополостный}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ – двуполостный}$$

3. Параболоиды

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad p, q > 0 \text{ – эллиптический}$$

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \text{ –}$$

4. Конусы $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

5. Цилиндры $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллиптический

1.13 Лекция

1.13.1

1.13.2 Группа

Определение 17. Множество $G = \{g_k\}$ называется группой, если на G определён закон композиции элементов, обладающий следующими свойствами:

1. Ассоциативность: $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z) \forall x, y, z \in G$
2. Существование нейтрального $\exists e : e \circ g = g \circ e = g \forall g \in G$
3. Существование обратного $\forall g \in G \quad \exists g^{-1} : g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = e$

Пример. $(\mathbb{Z}, +)$ – аддитивная группа.

(\mathbb{Q}_+, \cdot) – мультипликативная группа.

Пример. $\mathbb{Z}^n = \{z = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T, \xi_i \in \mathbb{Z}\}$

$(\mathbb{Z}^n, +)$ – группа

$$e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi^{-1} = \begin{pmatrix} -\xi_1 \\ -\xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

Пример. $\mathbb{R}_n^n = \{z : \det z \neq 0\}$

(\mathbb{R}_n^n, \cdot) – группа (General Linear Group, $GL(n)$)

$A, B \in GL(n) \quad AB = BA$

Определение 18. Группа называется абелевой, если выполняется ещё одно условие: коммутативность $\forall a, b \in G \quad a \circ b = b \circ a$

Лемма 3. нейтральный элемент – единственный

Доказательство. Пусть существует два нейтральных элемента e_1, e_2 . Рассмотрим их композицию:

$e_1 \circ e_2 = e_1$, потому что e_2 – нейтральный элемент и $e_2 \circ g = g \forall g \in G$

$e_1 \circ e_2 = e_2$, потому что e_1 – нейтральный элемент и $g \circ e_2 = g \forall g \in G$

$e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2 \implies e_1 = e_2$ ■

Лемма 4. Обратный элемент единственный

Доказательство. Аналогично: пусть есть два обратных элемента g_1^{-1}, g_2^{-1} к элементу g

$$g_1^{-1} = g_1^{-1} \circ e = g_1^{-1} \circ (g \circ g_2^{-1}) = (g_1^{-1} \circ g) \circ g_2^{-1} = e \circ g_2^{-1} = g_2^{-1} \implies g_1^{-1} = g_2^{-1} \quad \blacksquare$$

1.13.3 Кольцо

Определение 19. Множество R называется кольцом, если на R согласованно заданы два закона элементов $+$, \cdot , так что:

1. $(R, +)$ – абелева группа
2. (R, \cdot) – полугруппа
3. Согласованность: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
 $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Пример. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ – коммутативное кольцо

1.13.4 Поле (Тело)

Определение 20. Множество K называется полем, если на K согласованно заданы два закона композиции $(+, -)$, так что:

1. $(K, +)$ – абелева группа
2. $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ – мультипликативная группа

Если она абелева, то структура называется полем

Если она не абелева, то структура называется телом

3. $x \cdot (y + z) = z \cdot y + x \cdot z$
 $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$

Пример. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ – (лучшее) поле

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ – поле (получающееся топологическим замыканием поля \mathbb{Q})

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ – поле (алгебраическое замыкание поля \mathbb{Q})

Определение 21. Элемент Θ называется поглощающим элементом относительно закона композиции, если $\forall x \in S \quad x \circ \Theta = \Theta \cdot x = \Theta$

Замечание. Представим себе структуру S с двумя законами композиции:

\circ, \cdot , и имеет место следующее: $x \cdot (y \circ z) = (x \cdot y) \circ (x \cdot z)$

$$\triangleleft x \cdot y = x \cdot (e \circ y) = (x \cdot e) \circ (x \cdot y) \implies (x \cdot e)$$

$\forall x \quad x \cdot e = e \implies e$, который был нейтральным для \circ также является поглощающим для \cdot .

\cdot = умножение

\circ – сложение

$e = 0$

1.13.5 Сложные алгебраические структуры

S, G, R, K – полугруппы, группы, кольца, поля – структуры нулевого уровня

1.13.6 Модуль над кольцом

Пусть у нас есть кольцо R и коммутати

Определение 22. R -модулем (или модулем над кольцом R) называется абелева группа $(G, +)$ с заданной бинарной операцией: $R \times G \rightarrow G \quad (r, g) \rightarrow rg \in G \quad r \in R, g \in G$ с законами согласования:

1. $(r_1 + r_2)g = r_1g + r_2g$ – здесь два разных плюса: один из группы G , другой из кольца R
2. $r(g_1 + g_2) = rg_1 + rg_2 \quad \forall r \in R \forall g_1, g_2 \in G$
3. $(r_1 \cdot r_2)g = r_1(r_2g)$

Пример. $\square (G, +)$ – абелева группа

$\square g \in G \quad \triangleleft g + g + \dots + g = ng$ – используем структуру Z -модуля для коэффициентов

$\triangleleft \alpha g_1 + \beta g_2 + \dots$ – какие-то коэффициенты из некоторого кольца

Замечание. Хотелось бы решать задачу: получить g ищ $\alpha g = \tilde{g}$, но у α не гарантирован обратный элемент в кольце

Задачи:

- Составлять $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_k g_k$
- Решать $\alpha g = \tilde{g}$

Определение 23. Линейным пространством X над полем K называется модель над кольцом, имеющим также алгебраическую структуру поля.

$$\square \alpha, \beta, \gamma, \dots \in K$$

$$\square x, y, z, \dots \in G$$

$$1. (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$2. (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$$

$$3. \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$4. 1x = x \forall x$$

Пример. $X^n = \{x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T, \xi \in \mathbb{R}\}$ – линейное пространство над \mathbb{R} – арифметическое пространство

$$\alpha \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$$

То же самое можно над полем \mathbb{C}

Пример. $\overline{S_n}$ – многочлены $\deg \leq n$ – Линейное пространство над $\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{Q})$

$$\alpha p(x) + \beta q(x)$$

Лемма 5. $\alpha 0_X = 0_X$

Доказательство. $\forall y \in X \quad \alpha 0_X + y = y$

$$\alpha 0_X = \alpha \cdot (0 \cdot x) = 0 \cdot x = 0_X \quad \blacksquare$$

Лемма 6. $0x = 0_X \implies 0 \cdot x + y = y$

Доказательство. $\triangleleft 0 \cdot x + y = 0x + 0_X + y = 0 \cdot x + x + (-x) + y = (0 + 1)x + (-x) + y = x + (-x) + y = 0_X + y = y \forall y \quad \blacksquare$

Лемма 7. $-1 \cdot x = -x$

Доказательство. $-1x = -1x + 0_X = -1x + x + (-x) = (-1 + 1)x + (-x) = 0x + (-x) = 0_X + (-x) = -x \quad \blacksquare$

1.13.7 Линейная зависимость

Замечание. Условимся называть элементы линейных пространств векторами – элементы группы

$X(K)$: X – группа (живут векторы) K – поле (живут скаляры / коэффициенты)

$\square \{x_i\}_{i=1}^n$ – набор векторов из $X(\mathbb{R})$

Определение 24. Объект вида $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ называется линейной комбинацией векторов x_i с коэффициентами $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ из поля K

Определение 25. Набор $\{x_i\}_{i=1}^n$ называется линейно зависимым (ЛЗ), если существует нетривиальный (хотя бы один ненулевой) набор $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, такой что: $\sum \alpha_i x_i = 0_X$ (далее будем писать просто 0)

Определение 26. Набор $\{x_i\}_{i=1}^n$ называется линейно независимым, если $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$ реализуется только если $\{\alpha_i\}$ – тривиальный набор (все α_i равны 0)

Пример. $X = \mathbb{R}^n = \{x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T, \xi_i \in \mathbb{R}\}$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_1^2 \\ \vdots \\ \xi_1^n \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \xi_2^1 \\ \xi_2^2 \\ \vdots \\ \xi_2^n \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} \xi_n^1 \\ \xi_n^2 \\ \vdots \\ \xi_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 \xi_1^1 + \alpha_2 \xi_2^1 + \dots + \alpha_n \xi_n^1 = 0 \\ \alpha_1 \xi_1^2 + \alpha_2 \xi_2^2 + \dots + \alpha_n \xi_n^2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 \xi_1^n + \alpha_2 \xi_2^n + \dots + \alpha_n \xi_n^n = 0 \end{cases}$$

Пример. $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots x_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ – линейно независимый

набор, из системы уравнений получается $\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 0 \dots \alpha_n = 0$

Пример. $\overline{S_n} \quad \{1, t, t^2, t^3, \dots, t^n\}$ – ЛНЗ?

$$\alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 + \dots + \alpha_{n+1} t^n = 0(t)$$

$$t = 0 \quad \alpha_1 = 0$$

$$0 + \alpha_2 + 2\alpha_3 t + \dots + n\alpha_{n+1} t^{n-1} = 0(t) \implies \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

Лемма 8. Если набор содержит 0, то он ЛЗ

Доказательство. Выберем все коэффициенты 0, кроме коэффициента перед 0_k , в нём выберем ненулевой α_k , тогда получится нетривиальный набор, при котором линейная комбинация обращается в 0 ■

Лемма 9. Набор, содержащий ЛЗ поднабор является ЛЗ

Доказательство. Выберем нетривиальный набор коэффициентов для поднабора, а для остальных зададим нулевые коэффициенты. Тогда всё, что не было в поднаборе обратится в 0, в поднабор обратится в 0 нетривиально, значит в итоге весь набор будет нетривиально обращён в 0 ■

Лемма 10. Любой поднабор ЛНЗ является ЛНЗ

Теорема 2. Набор векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ ЛЗ \iff хотя бы один вектор набора выражается линейной комбинацией остальных

Доказательство.

$$\implies \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

$$x_k = \frac{-1}{\alpha_k} (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{k-1} x_{k-1} + \alpha_{k+1} x_{k+1} + \dots + \alpha_n x_n)$$

$$\iff x_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i x_i \implies \sum_{i \neq k} \alpha_i x_i - x_k = 0$$

■

1.14 Базисы в линейных пространствах

Определение 27. Набор, с помощью которого можно выразить любой другой вектор в линейном пространстве называется полным.

Пример. $x \in \mathbb{R}^n$ $e_i = (0_1, 0_2, \dots, 0_{i-1}, 1_i, 0_{i+1}, \dots, 0_n)^T$

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots$$

Определение 28. Базисом в линейном пространстве X называется полный и линейно независимый набор векторов.

Пример. $\{e_i\}_{i=1}^n$ – базис в \mathbb{R}^n

Пример. $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ – базис в пространстве P_n

Определение 29. Пространство X называется конечномерным, если в нём существует конечный полный набор векторов.

Лемма 11. В любом конечномерном пространстве существует базис.

Доказательство. Т.к. X – конечномерный \implies существует полный набор $\exists \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ – ПН

1. Если он линейно независимый \implies мы нашли базис
2. Если он не линейно независимый, будем совершать процедуру прореживания:
 - (a) $\{y_1\}$ – ЛНЗ (Если он не нулевой. Но в полном наборе должен быть хотя бы один ненулевой)
 - (b) $\{y_1, y_2\}$. Если ЛЗ, то вычеркнем y_2 , иначе оставим.
 - (c) $\{y_1 \dots y_3\}$
 - ...
 - (d) $\{y_1, y_2, \dots y_k\}$ – ПН + ЛН – базис

■

Лемма 12. В любом конечномерном пространстве любой ЛНЗ набор может быть дополнен до базиса.

Доказательство. X – конечномерное, в нём существует полный набор $\implies \exists \{e_j\}_{j=1}^n$ базис X

$\sqsubset \{x_i\}_{i=1}^m$ – ЛНЗ

-
1. $\{x_1, x_2, \dots, x_m, e_1\}$: ЛЗ – вычёркиваем e_1 , иначе оставляем
 2. $\{x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, e_2\}$ – задаёмся тем же вопросом и потенциально убираем e_2
 - ...
 3. $\{x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, e_n\}$ – тот же вопрос.

Так мы прошли всё. Он линейно независимый (по построению) + ПН (добавляли вектора базиса, если они и так там не выражались) ■

Лемма 13. Число векторов ЛНЗ в КМ пространстве не превосходит число векторов ПН.

$\square \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ – ЛНЗ набор

$\square \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ – полный набор

$\implies m \leq n$

Доказательство. $\square n < m \implies$

1. $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ – ЛНЗ + ПН – базис (число базисных меньше, чем линейно независимых??!)
2. $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ – ЛЗ,

$\{x_1 : y_1, y_2, \dots, y_n\}$ (идём слева направо прореживанием)

$\{x_1, x_2 : \dots y_n\}$

...

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – ЛНЗ + ПН – базис. В базисе n элементов, а линейно независимых $m > n$?! ■

Лемма 14. Количество векторов в двух различных базисах ЛП одинаково.

Доказательство. $\{e_j\} \quad \{e_k\}$ – базисы X

ЛНЗ \leq ПН

ПН \geq ЛНЗ ■

Определение 30. Размерностью ЛП называется количество векторов его базиса. $\dim X$

Пример. $\dim \mathbb{R}^n = n$

Пример. $\dim P_n = n + 1$

Замечание. Если $\{x_i\}_{i=1}^n$ – ЛНЗ в $X \implies k \leq \dim X$

Замечание. Набор $x_{i=1}^n$ образует базис пространства $X \iff \{x_i\}$ – ЛНЗ и $k = \dim X$

Определение 31. $\square \{e_j\}_{j=1}^n$ – базис ЛП $X \implies \forall x \in X \exists \xi^i \in K Lx = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j$
 $\{\xi^j\}_{j=1}^n$ – координаты вектора x в базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$

Лемма 15. Координаты любого вектора в заданном базисе определяются единственным образом.

Доказательство. $x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i$

$$x = \sum_{i=1}^n \psi^i e_i$$

$$\sum_{i=1}^n (\xi^i - \psi^i) e_i = 0 \implies \xi^i - \psi^i = 0 \forall i \implies \xi^i = \psi^i \quad \blacksquare$$

Лемма 16. Координаты линейной комбинации векторов в заданном базисе равны линейным комбинациям соответствующих координат данных векторов.

$$x_i = \sum_{k=1}^n \xi_i^k e_k \quad y = \sum_{i=1}^m \alpha^i x_i$$

$$y = \sum_{j=1}^n \psi^j e_j \implies \psi^j = \sum_{i=1}^m \alpha^i \xi_i^j$$

Доказательство. $y = \sum_{i=1}^m \alpha^i x_i = \sum_{i=1}^m \alpha^i \sum_{k=1}^n \xi_i^k e_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \alpha^i \xi_i^k \right) e_k = \sum_{k=1}^n \psi^k e_k \quad \blacksquare$

1.15 Системы линейных алгебраических уравнений

Определение 32.
$$\begin{cases} \alpha_1^1 \xi^1 + \alpha_2^1 \xi^2 + \dots + \alpha_n^1 \xi^n = \beta^1 \\ \alpha_1^2 \xi^1 + \alpha_2^2 \xi^2 + \dots + \alpha_n^2 \xi^n = \beta^2 \\ \dots \\ \alpha_1^m \xi^1 + \alpha_2^m \xi^2 + \dots + \alpha_n^m \xi^n = \beta^m \end{cases}$$

α_i^j – коэффициенты, ξ^j – неизвестные, β_i – свободные члены

Способы записи:

$$1. \text{ Матричный } A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^m & \dots & \alpha_n^m \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \vdots \\ \beta^n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$AX = B$$

2. Геометрический

$$a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \vdots \\ \alpha_1^m \end{pmatrix} \quad a_n = \begin{pmatrix} \alpha_n^1 \\ \alpha_n^2 \\ \vdots \\ \alpha_n^m \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \vdots \\ \beta^n \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 \xi^1 + a_2 \xi^2 + \dots + a_n \xi^n = b$$

Т.е. задача найти коэффициенты линейной комбинации векторов набора $\{a_j\}_{j=1}^n$, которая давала бы вектор b

$$1. \quad \square b = 0, \text{ т.е. } a_1 \xi^1 + a_2 \xi^2 + \dots + a_n \xi^n = 0$$

Очевидное решение $\xi_i = 0 \forall i$ – тривиальное решение. Но есть ли нетривиальные решения?

$$\text{Пример. } \begin{cases} r_1 + 2r_2 + 4r_3 - 3r_4 = 0 \\ 3r_1 + 5r_2 + 6r_3 - 4r_4 = 0 \\ 4r_1 + 5r_2 - 2r_3 + 3r_4 = 0 \\ 3r_1 + 8r_2 + 24r_3 - 19r_4 = 0 \end{cases}$$

Метод Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & -3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -4 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

r – количество линейно-независимых столбиков в итоге, или количество ненулевых строк. Первые два столбца назовём базисными неизвестными (можно выбрать любые, но ровно r) Оставшиеся столбцы назовём параметрами .

$$\begin{cases} r_1 + 2r_2 + 4r_3 - 3r_4 = 0 \\ r_2 + 6r_3 - 5r_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1 + 2r_2 = -4r_3 + 3r_4 \\ r_2 = -6r_3 + 5r_4 \end{cases}$$

Замечание. $a_1 r_1 + a_2 r_2 + \dots + a_n r_n = 0$

Пусть $R' = r'_1, r'_2, \dots, r'_n$ – решение

И пусть $R'' = r''_1, r''_2, \dots, r''_n$ – другое решение.

Тогда $\forall \gamma, \delta \in K \quad \gamma \cdot R' + \delta \cdot R''$ – линейная комбинация тоже решение.

Таким образом множество решений это линейное пространство.

Пусть $r_3 = 1, r_4 = 0 \implies r_1 + 2r_2 = -4; r_2 = 6 \implies r_1 = 8$

$X_1 = (8, -6, 1, 0)^T$ – одно из решений однородной системы.

$r_3 = 0, r_4 = 1 \implies r_1 = -7, r_2 = 5$

$X_2 = (-7, 5, 0, 1)^T$ – линейно независим с X_1

X_1, X_2 – базис пространства решений.

$X = c_1 X_1 + c_2 X_2$ – общее решение однородной системы. Окончательная форма решения.

$\{X_1, X_2\}$ – фундаментальная система решений (ФСР)

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Пример.
$$\begin{cases} r_1 + r_2 - 3r_4 - r_5 = 0 \\ r_1 - r_2 + 2r_3 - r_4 = 0 \\ 4r_1 - 2r_2 + 6r_3 + 3r_4 - 4r_5 = 0 \\ 2r_1 + 4r_2 - 2r_3 + 4r_4 - 7r_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Фиксируем первый, второй и четвёртый столбцы как базисные

$$\begin{cases} r_1 + r_2 - 3r_4 = r_5 \\ -2r_2 + 2r_4 = -2r_3 - r_5 \\ 3r_4 = r_5 \end{cases}$$

Строим ФСР $r_3 = 0, r_5 = 3 \implies X_1 \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 0, 1, 3\right)^T$

$r_3 = 1, r_5 = 0 \implies X_2 (-1, 1, 1, 0, 0)^T$

$$X = c_1 \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. $b \neq 0$

$$a_1 r_1 + a_2 r_2 + \dots + a_n r_n = b$$

Рассмотрим $a_1 r_1 + a_2 r_2 + \dots + a_n r_n = 0$

Если есть два решения первого, то их разность это решение второго.

1.16 Лекция 05.12

...

Лемма 17. Пространства различной размерности не могут быть изоморфны.

Доказательство. Пусть $X \sim Y$, $\dim X = n > m = \dim Y$

$\square \{e_j\}_{j=1}^n$ – базис X

$e_j \leftrightarrow f_j \in Y$

$\langle 0_X = \sum_{j=1}^n \alpha^j e_j \leftrightarrow \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j = 0_Y$ – только когда $\alpha^j = 0$

$\{f_j\}_{j=1}^n$ – ЛНЗ набор в пространстве Y $\dim Y = m < n$ ■

Лемма 18. $X \sim Y \iff \dim X = \dim Y$

Доказательство. $\square \{e_j\}_{j=1}^n$ – базис X

$\square \{f_j\}_{j=1}^n$ – базис Y

$\varphi(e_j) = f_j \quad e_j \leftrightarrow f_j$

$\square x \in X \quad x = \sum_{j=1}^n \alpha^j e_j \leftrightarrow y = \sum_{j=1}^n \alpha^j f_j$ ■

$X_n \sim \mathbb{R}^n \sim Y_n$

Пространства размерности n удобно рассматривать как арифметическое пространство \mathbb{R}^n

Замечание. Любое конечномерное пространство над полем \mathbb{R} или \mathbb{C} можно отождествить с пространством \mathbb{R}^n

Пример. $\mathbb{C}^n \sim \mathbb{R}^{2n}$

$$\mathbb{R}_m^n \sim \mathbb{R}^{nm} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_n \sim \mathbb{R}^{n+1}$$

1.16.1 Подпространства

Определение 33. Подпространством L Линейного Пространства X называется подмножество X , замкнутое относительно линейных операций, индуцированных на X

Пример. $X, \{0\}$ – тривиальные подпространства X

Прямая и плоскость в E_3 (они должны содержать 0)

$$\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n, m < n$$

Симметричные матрицы в \mathbb{R}_m^n

Лемма 19. $\square L$ – Линейное подпространство $L \implies \dim L \leq \sim X$

Лемма 20. $L = X \iff \sim L = \sim X$

Лемма 21. $\square L$ – линейное подпространство X . Тогда любой базис L может быть дополнен до базиса X , но не наоборот

Доказательство. $\square \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ – базис L $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – базис X
 $\{f_1, f_2, \dots, f_k, e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – прореживаем слева направо ■

Пример (Контрпример). $\square \{e_1, e_2\}$ – базис X $\{e_1 + e_2\}$ – базис L

1.16.2 Линейная оболочка

Определение 34. Линейной оболочкой набора $\{x_i\}_{i=1}^k$ называется множество $\mathcal{L}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ всех линейных комбинаций векторов x_i :

$$\mathcal{L} = \{x \in X : x = \sum_{i=1}^n \alpha^i x_i\}.$$

Лемма 22. $\mathcal{L}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – линейное подпространство X

Доказательство. $\square y_1, y_2 \in \mathcal{L} \xRightarrow{?} y_1 + y_2 \in \mathcal{L} \quad \lambda y_1 \in \mathcal{L}$

$$y_1, y_2 \in \mathcal{L} \implies y_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_1^i x_i \quad y_2 = \sum_{i=1}^n \alpha_2^i x_i$$

$$y_1 + y_2 = \sum_{i=1}^n (\alpha_1^i + \alpha_2^i) x_i \implies y_1 + y_2 \in \mathcal{L}$$

$$\lambda y_1 = \sum_{i=1}^n \lambda \alpha_1^i x_i \implies \lambda y_1 \in \mathcal{L} \quad \blacksquare$$

Лемма 23. Линейная оболочка $\mathcal{L}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ векторов x_1, x_2, \dots, x_n является наименьшим Линейным подпространством X , содержащим эти векторы.

Доказательство. $\square V = \mathcal{L} \setminus \{y\} \quad y \in \mathcal{L} \implies y = \sum_{i=1}^k \alpha^i x_i \in \mathcal{L} \iff \{x_i\} - \text{полный набор в } \mathcal{L}$

$$y = \sum_{i=1}^k \beta^i x_i \in V \implies \{x_i\} - \text{НЕ полный набор в } \mathcal{L} \quad \blacksquare$$

Определение 35. Линейная оболочка векторов $\{x_i\}_{i=1}^k$ называется подпространством, натянутым на данные вектора.

Определение 36. Линейным многообразием M , параллельным подпространству L Линейного пространства X называется множество

$$M = \{y \in X : y = x_0 + x \mid x_0 - \text{фикс } x_0 \in X, x \in L\}.$$

Пример. $\{(x_1, y_1 + y_0)\}$ – прямая, не проходящая через 0 в общем случае. Не линейное пространство, но линейное многообразие.

Лемма 24. $M = L \iff x_0 \in L$

Определение 37. $\dim M = \dim L$

Пример. Примеры Линейных многообразий:

1. Прямая $\dim L = 1$
2. Плоскость $\dim L = 2$
3. k -мерная плоскость $\dim L = k$
4. гипер-плоскость $\dim L = \dim X - 1$

1.16.3 Сумма и пересечение подпространств

\square X – линейное пространство. L_1, L_2 – его линейные подпространства

Определение 38. Пересечением ЛПП L_1, L_2 называется множество L' , такое что

$$L' = \{x \in X : x \in L_1 \& x \in L_2\}.$$

Лемма 25. $L' = L_1 \cap L_2$ – ЛПП X

Доказательство. \square $x_1, x_2 \in L' \implies x_1, x_2 \in L_1 \quad x_1, x_2 \in L_2$

$\lambda x_1 \in L_1, \lambda x_1 \in L_2 \implies \lambda x_1 \in L_1 \cap L_2$ ■

Определение 39. Множество L'' называется суммой ЛПП L_1, L_2 , если

$$L'' = \{x \in X : x = x_1 + x_2 \mid x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\}.$$

Лемма 26. $L'' = L_1 + L_2$ – ЛПП X

Доказательство. \triangleleft $x, y \in L'' \quad x = x_1 + x_2 \quad y = y_1 + y_2 \quad x_1, y_1 \in L_1 \quad x_2, y_2 \in L_2$

$$\triangleleft x + y = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = z_1 + z_2$$

$$\lambda x = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2$$
 ■

Теорема 3 ((первая) Теорема о размерностях). \square L_1, L_2 – ЛПП $X \implies \dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2)$

Доказательство. \triangleleft $L_1 \cap L_2 \quad e_1, e_2, \dots, e_m$ – базис пересечения

\triangleleft $L_1 \quad \{e_1, e_2, \dots, e_m; f_1, f_2, \dots, f_k\}$ – базис L_1

\triangleleft $L_2 \quad \{e_1, e_2, \dots, e_m; g_1, g_2, \dots, g_p\}$ – базис L_2

$\implies \{e_1, e_2, \dots, e_m; f_1, f_2, \dots, f_k; g_1, g_2, \dots, g_p\}$ – базис $L_1 + L_2$ (должно быть)

• Полнота: \square $x \in L_1 + L_2 \implies x = x_1 + x_2 \quad x_1 \in L_1 \quad x_2 \in L_2$

$$\implies x_1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i^1 e_i + \sum_{j=1}^k \beta_j^1 f_j$$

$$\implies x_2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 e_i + \sum_{j=1}^p \beta_j^2 g_j$$

$$x = x_1 + x_2 = \sum_{i=1}^m (\alpha_1^i + \alpha_2^i) e_i + \sum_{j=1}^k \beta_1^j f_j + \sum_{s=1}^p \beta_2^s g_s$$

- Линейная независимость

$$\alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^m e_m + \beta^1 f_1 + \dots + \beta^k f_k + \gamma^1 g^1 + \dots + \gamma^p g_p = 0$$

$$\alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^m e_m + \beta^1 f_1 + \dots + \beta^k f_k = -\gamma^1 g^1 - \dots - \gamma^p g_p = z \implies x \in L_1 \cap L_2 \implies z = \delta e_1 + \delta_2 e_2 + \dots + \delta_m e_m$$

$$\begin{aligned} \triangleleft z - z &= \delta e_1 + \delta_2 e_2 + \dots + \delta_m e_m + \gamma^1 g_1 + \dots + \gamma^p g_p = 0 \implies \delta_i = \gamma_j = \\ 0 &\implies z = 0 \implies \alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^m e_m + \beta^1 f_1 + \dots + \beta^k f_k = 0 \implies \alpha^i = \\ \beta^j &= 0 \end{aligned}$$

■

1.16.4 Прямая сумма подпространств

Определение 40. Сумма линейных подпространств называется прямой, если $\forall x \in L = L_1 + L_2 \quad x = x_1 + x_2$ – единственное представление.

Замечание (Обозначение прямой суммы). $L = L_1 \dot{+} L_2$

Лемма 27. $L = L_1 \dot{+} L_2 \iff L_1 \cap L_2 = \{0\}$

Доказательство.

$$\implies \sqsubset L = L_1 \dot{+} L_2 \quad \exists z \in L_1 \cap L_2 : z \neq 0$$

$$x = x_1 + x_2 = x_1 + x_2 + z - z = (x_1 + z) + (x_2 - z) \quad x_1 \in L_1, x_2 \in L_2 \quad x_1 + z \in L_1, x_2 - z \in L_2$$

$$\Leftarrow \sqsubset L_1 \cap L_2 = \{0\}, \text{ но } L = L_1 + L_2 - \text{ не прямая сумма}$$

$$x = x_1 + x_2 \quad x = y_1 + y_2$$

$$0 = x - x = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 \implies x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = z \quad z \in L_1 \cap L_2 \implies L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$$

■

$\sqsubset X$ – ЛП, L_1, L_2 – ЛПП X

Теорема 4. $X = L_1 \dot{+} L_2 \iff \begin{cases} L_1 \cap L_2 = \{0\} \\ \dim L_1 + \dim L_2 = \dim X \end{cases}$

Доказательство.

$$\implies 1. \text{ Доказано}$$

$$\begin{aligned}
& 2. \dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 + L_2) = \dim X \implies L_1 + L_2 \sim X \\
& \dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 + L_2) \\
& \dim L_1 + \dim L_2 = \dim X \\
& \implies \dim X = \dim(L_1 + L_2) \\
& L_1 + L_2 \subseteq X \text{ \& } \dim X = \dim(L_1 + L_2) \implies L_1 + L_2 \sim X \quad L_1 + L_2 = X \\
& L_1 \cap L_2 = \{0\} \implies X = L_1 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Определение 41. $\square X = L_1 \dot{+} L_2 \implies \forall x \in X \stackrel{!}{=} x_1 + x_2 \quad x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$

В таком случае x_1, x_2 называются компонентами x в L_1, L_2 соответственно

x_1 – проекция x на L_1 Параллельно L_2

x_2 – проекция x на L_2 параллельно L_1

L_1 – дополнение L_2 до X и наоборот

Замечание. Дополнение к заданному ЛПП до X определяется не единственным образом

Пример (Контрпример). $\square X = \mathbb{R}^3 \quad L = \mathcal{L}\{e_1, e_2\} \quad L_2 = \mathcal{L}\{e_2 + \alpha e_1 + \beta e_2\}$

$$X = L_1 \dot{+} L_2$$

Определение 42. Пространство L называется прямой суммой пространств $\{L - i\}_{j=1}^k$, если

$$\forall x \in L \quad x \stackrel{!}{=} x_1 + x_2 + \dots + x_k : \quad x_j \in L_j.$$

Теорема 5. $X = \dot{+} \sum_{i=1}^k L_i \iff \begin{cases} L_i \cap L_{j \neq i} = \{0\} \\ \dim X = \sum_{i=1}^k \dim L_i \end{cases}$

1.17 ... СЛАУ

1.

2. Геометрическое исследование СЛАУ

$$a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \vdots \\ \alpha_m^1 \end{pmatrix} \quad a_n = \begin{pmatrix} \alpha_n^1 \\ \alpha_n^2 \\ \vdots \\ \alpha_n^m \end{pmatrix} \quad quad \beta_n = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \vdots \\ \beta^m \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \xi^1 + \alpha_2 \xi^2 + \dots + \alpha_n \xi^n = b \iff \sum_{j=1}^n a_j \xi^j = b$$

$$\angle \alpha = \text{ЛО}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$a_j \in \mathbb{R}^m \quad \dim R^m = m$$

$$\text{Т.к. } \alpha \subset \text{ЛПП} \mathbb{R}^m \Rightarrow \dim \alpha \leq \dim \mathbb{R}^m$$

Определение 43. Система $*$ называется системой Крамера, если $n = m$ и набор $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ — ЛНЗ

Теорема 6. Система Крамера совместно и определена

Доказательство. $m = n \Rightarrow \dim \alpha = r \leq n = m$

$$b \in \mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^n \quad (m = n)$$

$\{a_j\}_{j=1}^n$ — ЛНЗ в $\alpha < \mathbb{R}^n \Rightarrow \{a_j\}_{j=1}^n$ — базис $\mathbb{R}^n \Rightarrow b \in \alpha$ — совместна и определена ■

$$\square m \neq n \quad \dim \alpha = r \leq m$$

Применим процедуру прореживания к набору $\{a_j\}_{j=1}^n \Rightarrow \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}\}$ — ЛНЗ \Rightarrow базис α

Определение 44. Коэффициенты $\{\xi^{i_k}\}_{k=1}^r$ называются базисными или главными неизвестными системы.

Оставшиеся коэффициенты называются свободными или параметрическими.

Замечание. $\xi^{i_1} = \xi^1 \quad x^{i_r} = \xi^3$

$$\xi^{i_{r+1}} = \xi^{r+1} \quad \xi^{i_n} = \xi^n$$

Перепишем систему $*$:

$$a_1 \xi^1 + a_2 \xi^2 + \dots + a_r \xi^r = b - a_{r+1} \xi^{r+1} - \dots - a_n \xi^n.$$

Теорема 7 (Кронекера-Капелли о совместности системы). Чтобы система $*$ была совместна необходима и достаточно выполнение следующего условия: $b \in \alpha$

Доказательство.

\Rightarrow Пусть $*$ совместна $\Rightarrow \exists \{\xi^j\}_{j=1}^n$:

$$\{b, a_1, a_2, \dots, a_n\} - \text{ЛЗ} \Rightarrow b \in \alpha$$

$$\Leftarrow \sqsubset b \in \alpha \Rightarrow b - a_{r+1}\xi^{r+1} - \dots - a_n\xi^r \in \alpha$$

■

Замечание. Если $r = n \Rightarrow *$ определена

$$a_1\xi^1 + \dots + a_n\xi^n = b + 0$$

Если $r < n \Rightarrow *$ неопределена

$$a_1\xi^1 + \dots + a_r\xi^r = b - a_{r+1}\xi^{r+1} - \dots - a_n\xi^n = b'$$

$a_1\xi^1 + \dots + a_r\xi^r = b'$ – определена, но! разложение для b' даёт неопределённость

Следствие 1. (а) Однородная система:

- всегда определена
 - имеет неоднородные решения, когда $r < n$
 - является неопределённой, когда $m < n$
- $$\dim \alpha = m < n \Rightarrow \{a_j\}_{j=1}^n - \text{ЛЗ по любому}$$

Теорема 8 (Альтернатива Фредгольма). $\sqsubset m = n$

$$\sum_{j=1}^n a_j \xi^j = b \quad (*)$$

$$\sum_{j=1}^n a_j \xi^j = 0 \quad (**).$$

- (а) Или $**$ имеет только тривиальное решение (а тогда $*$ совместна и определена)
- (б) (Или $**$ имеет нетривиальное решение) система $*$ совместна не при любом b

Доказательство. $**$ имеет нетривиальные

■

3. Фундаментальная систем решений

$\sqsubset N$ – множество решений системы $**$

Теорема 9. Множество M решений однородной системы СЛАУ является линейным пространством.

Доказательство. $\square x_1 = (\xi_1^1 \ \xi_1^2, \dots, \xi_1^n)$

$\square x_2 = (\xi_2^1 \ \xi_2^2, \dots, \xi_2^n) \quad x_1, x_2, \in M$

$x_1 + x_2 \in M?$

$\sum_{i=1}^n (\xi_1^i + \xi_2^i) a_i = \sum_{i=1}^n \xi_1^i a_i + \sum_{i=1}^n \xi_2^i a_i = 0 + 0 = 0 \implies x_1 + x_2 \in M$

$\sum_{i=1}^n (\lambda \xi^i) a_i = \lambda \sum_{i=1}^n \xi^i a_i = \lambda \cdot 0 = 0 \implies \lambda x \in M \quad \blacksquare$

Теорема 10. $\dim M = n - r$

Доказательство. $\dim M = n - r \iff \simeq \mathbb{R}^{n-r}$

$a_1 \xi^1 + a_2 \xi^2 + \dots a_r \xi^r = -a_{r+1} \xi^{r+1} - \dots - a_n \xi^n =: \eta$

Замечание. η имеет единственное разложение по набору $\{a_i\}_{i=1}^r$

$\mathbb{R}^{n-r} \ni (\xi^{r+1} \xi^{r+2} \dots \xi^n)^T \longleftrightarrow (\xi^1 \xi^2 \dots \xi^r; \xi^{r+1} \dots \xi^n)^T$ – биекция

$\square y_1 = \sum_{k=1}^n \eta_1^k a_k \longleftrightarrow x_1 = \sum_{k=1}^n \xi_1^k a_k$

$\square y_2 = \sum_{k=1}^n \eta_2^k a_k \longleftrightarrow x_2 = \sum_{k=1}^n \xi_2^k a_k$

$y_1 + y_2 = \sum_{k=1}^n (\eta_1^k + \eta_2^k) a_k = \sum_{k=1}^n \eta_1^k a_k + \sum_{k=1}^n \eta_2^k a_k \longleftrightarrow \sum_{k=1}^n \xi_1^k a_k + \sum_{k=1}^n \xi_2^k a_k = x_1 + x_2$

$\lambda y = \sum_{k=1}^n \lambda \eta^k a_k = \lambda \sum_{k=1}^n \eta^k a_k \longleftrightarrow \lambda \sum_{k=1}^n \xi^k a_k \quad \blacksquare$

Доказали, что M – ЛП размерности $n - r$

$M \simeq \mathbb{R}^{n-r} \leftarrow \text{базис} \begin{cases} (1, 0, \dots, 0)^T \\ (0, 1, \dots, 1)^T \dots \\ (0, 0, \dots, 1)^T \end{cases}$

$(100 \dots 0) \in \mathbb{R}^{n-r} \quad (\xi_1^1 \xi_1^2 \dots \xi_1^r; 100 \dots 0)$

$(0100 \dots 0) \in \mathbb{R}^{n-r} \longleftrightarrow (\xi_2^1 \xi_2^2 \dots \xi_2^r; 010 \dots 0)$

...

$(000 \dots 1) \leftrightarrow (\xi_{n-r}^1 \xi_{n-r}^2 \dots \xi_{n-r}^r; 00 \dots 1)$

Справа стоит базис M . Нормальная ФСР (**)

$\square (\xi_j^1 \xi_j^2 \dots \xi_j^r, 00 \dots 1..0) = x_j$

Определение 45. Общим решением системы ** называется решение вида

$$x = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_{n-r}x_{n-r} = \sum_{i=1}^{n-r} c_i x_i.$$

4. Структура решения неоднородной СЛАУ

$\square (*)$ – совместна $\implies b \in \alpha \quad \dim \alpha = r$

$\square \widetilde{M}$ – множество решений *

M – множество решений ** – ЛПП

Теорема 11. Пусть z' – фиксированное решение *. $z' \in \widetilde{M}$, тогда

$$z = z' + x \in \widetilde{M} \quad \forall x \in M.$$

Доказательство. $z' = \{\zeta^1 \zeta^2 \dots \zeta^n\} \quad x = \{\xi^1 \xi^2 \dots \xi^n\}$

$$\triangleleft \sum_{i=1}^n (\zeta^i + \xi^i) a_i = \sum_{i=1}^n \zeta^i a_i + \sum_{i=1}^n \xi^i a_i = b + 0 = b$$

$$\triangleleft x = z' - z \quad z = \left(\widetilde{\zeta}^1 \dots \widetilde{\zeta}^n \right)^T$$

$$\sum_{i=1}^n (\widetilde{\zeta}^i - \xi^i) a_i = \sum_{i=1}^n \widetilde{\zeta}^i a_i - \sum_{i=1}^n \xi^i a_i = b - b = 0 = \sum_{i=1}^n \xi^i a_i \implies x \in M \quad \blacksquare$$

Замечание. Общее решение неоднородной СЛАУ

$$z = z' - x \implies z = z' - \sum_{i=1}^n x_i x_i \quad \{x_i\}_{i=1}^n - \text{ФСР}$$

Замечание. \widetilde{M} имеет структуру линейного многообразия

$$\forall z \in \widetilde{M} \quad z = z' + x \quad x \in M \quad z' \notin M$$

1.18 Как практика, но на лекции, потому что космос против практики на практике.

$$\text{Задача 2.} \quad \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -4 \end{cases}$$

Получить общее решение системы

$$\text{Доказательство. } \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & -4 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 11 & -7 & 15 \\ 0 & -5 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & -7 & 7 & -5 & 9 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -11 & 11 & -7 & 15 \\ 0 & -7 & 7 & -5 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Решение однородной задачи:
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 2x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

x_3 – параметр. Можем взять любой ненуль.

$$\square x_3 = 1$$

$$\implies x_4 = 0, x_2 = 1, x_1 = -1 \quad x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Общее решение ОЗ: $x = c_1 x_1$

2. Решение неоднородной задачи

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_4 = -4 + 2x_3 \\ x_2 = -2 + x_3 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

В неоднородной задаче можно взять параметры вообще любыми (даже 0)

Частное решение: $x_3 = 0 \quad x_4 = 1 \quad x_2 = -2 \quad x_1 = 0$

$$z' = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Общее решение: } z = z' + c_1 x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

■

Пример.
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Найти общее решение в зависимости от параметра λ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 1 \setminus \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ \lambda-1 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$(\lambda-1 \neq 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1-\lambda & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2-\lambda & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3-\lambda & -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -3 \implies$ система несовместна

$\lambda \neq -3 \& \lambda \neq -1 \implies$ единственное решение $x_4 = \frac{1}{\lambda+3}$ $x_3 = \frac{1}{\lambda+3}$ $x_2 = \frac{1}{\lambda+3}$ $x_1 = 1 - \frac{\lambda}{\lambda+3} - \frac{2}{\lambda+3} = \frac{1}{\lambda+3}$

$\lambda = 1$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$

Однородная задача: $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4$

$x_2 = 1 \quad x_3 = x_4 = 0 \quad (-1, 1, 0, 0)^T = y_1$

$x_2 = x_3 = 0 \quad x_4 = 1 \quad (-1, 0, 1, 0)^T = y_2$

$x_2 = x_3 = 0 \quad x_4 = 1 \quad (-1, 0, 1, 0)^T = y_3$

$y_1, y_2, y_3 - \Phi CP$

Неоднородная задача: $x_2 = x_3 = x_4 = 0 \quad x_1 = 1$

Общее решение: $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^3 x_i y_i$

II вариант. Когда система будет крамеровского типа? Когда определитель будет отличен от 0

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \setminus \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & & \end{vmatrix} =$$

$$-(1-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda \\ 0 & 1 & 2+\lambda \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2+\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda-1)^3(\lambda+3) = 0$$

$$\lambda = -3 \implies$$

$$\lambda = 1 \implies$$

λ Остальные

1.19 Линейные подпространства

$\mathbb{R}^n, P^n, \mathbb{R}_m^n$

Вспомним:

Определение 46. $L \subseteq X$ L – замкнуто относительно операций индуцированных на X

Пример. \mathbb{R}^n

$x \in \mathbb{R}^n$ $x = (\xi, \xi, \dots, \xi)$ – линейное пространство

Пример. $\sum \xi_i = 0$ – линейное пространство

$\sum \xi_i = 1$ – НЕ линейное пространство

Пример. $X = \mathbb{R}_n^n$

x – матрица с нулевой первой строкой. Множество таких x – линейное подпространство

Если заменить на единичную строку, то уже не будет

Пример. Верхние треугольные матрицы – линейное подпространство.

Вспомним также, что в линейном пространстве есть базис.

$$\mathbb{R}^n : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Пример.

$$x_1 = (-1, 4, 0, 1)^T$$

$$x_2 = (0, 0, 0, 1)^T$$

$$x_3 = (-1, 1, 1, -)^T$$

$$x_4 = (0, 3, -1, 1)^T$$

.

Найдём линейные зависимости (если они есть) Запишем вектора по строкам:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$0 = -x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$\text{Пример.} \quad \begin{cases} 3\xi^1 + 3\xi^2 - 4\xi^3 - 3\xi^4 = 0 \\ 6\xi^1 + \xi^3 + \xi^4 = 0 \\ 5\xi^1 + 4\xi^2 + 2\xi^3 + \xi^4 = 0 \\ 2\xi^1 + 3\xi^2 + 3\xi^3 + 2\xi^4 = 0 \end{cases}$$

Множество решений – ЛП. Найдём базис и размерность этого пространства.

ФСР \rightarrow Базис L

А что если мы хотим наоборот по ФСР восстановить систему. Или по-другому: имея базис ЛП составить систему, которая этот базис порождает.

$$\begin{aligned} x_1 &= (2, 0, 1, 3, -1)^T \\ x_2 &= (1, 1, 0, -1, 1)^T \\ x_3 &= (0, -2, 1, 5, -3)^T \\ x_4 &= (1, -3, 2, 9, -5)^T \\ &\quad . \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L = \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n)$$

$$y \in L \quad (\eta^1, \eta^2, \eta^3, \eta^4, \eta^5) \Rightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = y - \text{совместна}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & \eta^1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & \eta^2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \eta^3 \\ 3 & -1 & 5 & 9 & \eta^4 \\ -1 & 1 & -3 & -5 & \eta^5 \end{array} \right]$$

1.20 Лекция

TODO: дописать

Лемма 28. f, g – линейные форма $\implies f + g$ – линейная форма

Доказательство. $\square x_1, x_2 \in X$

$$\begin{aligned}
 h(x_1 + x_2) &= (f + g)(x_1 + x_2) \\
 &= f(x_1 + x_2) + g(x_1 + x_2) \\
 &= f(x_1) + f(x_2) + g(x_1) + g(x_2) \\
 &= (f + g)(x_1) + (f + g)(x_2) \\
 &= h(x_1) + h(x_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h(\lambda x) &= (f + g)(\lambda x) \\
 &= \lambda f(x) + \lambda g(x) \\
 &= \lambda(f + g)(x) \\
 &= \lambda h(x)
 \end{aligned}$$

■

Теорема 12. Линейные формы образуют линейное пространство

Определение 47. Линейное пространство линейных форм над X называется пространством, сопряжённым к X

Замечание. Обозначение: X^*

$\square \{e_j\}$ – базис X

$$\forall x \in X \quad x \longleftrightarrow \xi \quad x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j$$

$\square f \in X^*$

$$\langle f(x) = f\left(\sum_{j=1}^n \xi^j e_j\right) = \sum_{j=1}^n \xi^j \underbrace{f(e_j)}_{\phi_j} = \sum_{j=1}^n \xi^j \phi_j$$

Определение 48. Коэффициентами линейной формы в базисе $\{e_j\}$ ЛП X называется набор $\{\phi_j\} : \phi_j = f(e_j)$

Лемма 29. Задание линейной формы над X эквивалентно заданию её коэффициентов на базисных векторах X

Доказательство. Доказательство чуть выше ■

Замечание. $f \longleftrightarrow (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$

$x \longleftrightarrow (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$

$f(x) = \xi^1 \phi_1 + \xi^2 \phi_2 + \dots + \xi^n \phi_n$

Если $f(x) = 0 \implies \xi^1 \phi_1 + \xi^2 \phi_2 + \dots + \xi^n \phi_n = 0$

Теорема 13 (О базисе X^*). Набор линейных форм $\{f^k\}_{k=1}^n : X \rightarrow K$, действующих на X с базисом $\{e_j\}$ следующим образом:

$$f^k(x) = \xi^k \quad x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j.$$

образует базис линейного пространства X^*

Замечание. $\dim X = \dim X^* = n \implies X \simeq X^*$

теоремы. $\{f^k\}_{k=1}^n$ – полный набор.

$$\square g \in X^* \quad x \in X \quad \triangleleft g(x) = \sum_{k=1}^n \xi^k g(e_k) = \sum_{k=1}^n \xi^k \phi_k = \sum_{k=1}^n \phi_k f^k(x) = \sum_{k=1}^n (\phi_k f^k)(x) = \left(\sum_{k=1}^n \phi_k f^k \right)(x)$$

$$\implies g = \sum_{k=1}^n \phi_k f^k \text{ – полный набор!}$$

$\{f^k\}_{k=1}^n$ – ЛНЗ

$$\triangleleft \sum_{k=1}^n \alpha_k f^k = \mathcal{O} \text{ (ноль-форма)} \quad \alpha_k = 0 \forall k?$$

$$\mathcal{O}(e_1) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f^k(e_1) = \alpha_1 f^1(e_1) = \alpha_1 = 0$$

$$\mathcal{O}(e_2) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f^k(e_2) \implies \alpha_2 = 0$$

...

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \quad \blacksquare$$

Замечание. $\{f^k\}_{k=1}^n : X \rightarrow K \quad f^k(x) = \xi^k$

$$f^k(e_j) = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases} = \delta_j^k.$$

Такие базисы называются сопряжёнными. Для такой формы есть спец символ, называемый формой Корнекера

Замечание. $x = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \dots + \xi^n e_n = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j$

$$x = f^1(x)e_1 + f^2(x)e_2 + \dots + f^n(x)e_n = \sum_{j=1}^n f^j(x)e_j$$

Замечание. $f = \sum_{k=1}^n \eta_k f^k \xleftarrow{\{f^k\}_{k=1}^n} f \in X^* \xrightarrow{\{e_j\}_{j=1}^n} \phi_j = f(e_j)$

$$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \quad (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$$

Если f^k и e_j сопряжены, то эти наборы коэффициентов совпадают ($f^k(e_j) = \delta_j^k$)

Замечание. $X \quad X^* \quad (X^*)^* = X^{**}?$

$$(f, x) \quad (f, *) \quad \begin{cases} (f, x_1 + x_2) = (f, x_1) + (f, x_2) \\ (f, \lambda x) = \lambda(f, x) \end{cases} \quad X \rightarrow K$$

$$(*, x) \quad \begin{cases} (f_1 + f_2, x) = (f_1, x) + (f_2, x) \\ (\lambda f, x) = \lambda(f, x) \end{cases} \quad X^* \rightarrow K$$

$$X \simeq X^* \simeq X^{**} \implies X \simeq X^{**}$$

$$(*, x) = (\tilde{x}, *)$$

$$X \simeq X^{**} - \text{“естественно изоморфны”}. (x \rightarrow \tilde{x}) \iff (\tilde{x}, f) = (f, x)$$

$$x_1 + x_2 \longleftrightarrow \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$$

$$\lambda x_1 \longleftrightarrow \lambda \tilde{x}_1$$

1.21 Низапная Практика

$$x_1 = (2, 0, 1, 3, -1)^T$$

$$x_2 = (1, 1, 0, -1, 1)^T$$

$$x_3 = (0, -2, 1, 5, -3)^T$$

$$x_4 = (1, -3, 2, 9, -5)^T$$

.

$$\implies L = \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n)$$

$$y \in L \quad (\eta^1, \eta^2, \eta^3, \eta^4, \eta^5) \implies \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = y - \text{совместна}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & \eta^1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & \eta^2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \eta^3 \\ 3 & -1 & 5 & 9 & \eta^4 \\ -1 & 1 & -3 & -5 & \eta^5 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & \eta^3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & \eta^1 - 2\eta^3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & \eta^4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & \eta^4 - 3\eta^3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & \eta^4 + \eta^3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & \eta^3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & \eta^1 - 2\eta^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta^2 - \eta^1 + 2\eta^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta^1 - 2\eta^3 + \eta^4 - 3\eta^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta^5 + \eta^3 - \eta^1 + 2\eta^3 \end{array} \right]$$

$$\text{Для совместности напротив нулей должны быть нули} \implies \begin{cases} -\eta^1 + \eta^2 + 2\eta^3 = 0 \\ \eta^1 - 5\eta^3 + \eta^4 = 0 \\ -\eta^1 + 3\eta^3 + \eta^5 = 0 \end{cases}$$

Эта система уравнений даёт нам нужную линейную оболочку четырёх векторов x_1, x_2, x_3, x_4

Пример. $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ $A_4 =$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$
 $A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ $A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

Эти матрицы лежат в линейном пространстве симметричных матриц размерности 3×3 . Найдём базис их линейной оболочки: $\mathcal{L}\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$

\triangleleft базис пространства симметричных матриц:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_5 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = 0E_1 + 0E_2 + 1E_3 + 1E_4 + 0E_5 + 1E_6 \implies A_1 \longleftrightarrow (0, 0, 1, 1, 0, 1)$$

Так можно переформулировать на язык векторов. А дальше тот же алгоритм.

Пример. $X = P_3^{(e)} \begin{cases} P_1 = (1+t^2)^2 \\ P_2 = (1-t^2)^2 \\ P_3 = 1 \end{cases}$

Выберем базис $\{1, t^2, t^4\}$

$$P_1 \longleftrightarrow (1, 2, 1)^T$$

$$P_2 \longleftrightarrow (1, -2, 1)^T$$

$$P_3 \longleftrightarrow (1, 0, 0)^T$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \implies \text{образуют базис.}$$

Пример. $L_1 : \begin{cases} x_1 = (1, 2, -1, -2)^T \\ x_2 = (3, 1, 1, 1)^T \\ x_3 = (-1, 0, 1, -1)^T \end{cases} \quad L_2 : \begin{cases} y_1 = (2, 5, -6, -6)^T \\ y_2 = (-1, 2, -7, -3)^T \end{cases}$

$L_1 + L_2$ -? (базис суммы)

$L_1 \cap L_2$ -? (базис пересечения)

$$\text{Сумма: } \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -6 & -7 \\ -2 & 1 & -1 & -5 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 7 & -3 & -1 & -5 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 9 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$y_1 \in L_1, y_2 \in L_1$

$$L_1 + L_2 = L_1 \implies L_2 \subseteq L_1$$

Базис суммы совпадает с базисом L_1

Базис пересечения – базис L_2

Пример. $L_1, L_2 \subseteq P_3$

$$L_1 : \begin{cases} p_1 = 1 + 2t + t^3 \\ p_2 = 1 + t + t^2 \\ p_3 = t - t^2 + t^3 \end{cases} \quad L_2 : \begin{cases} q_1 = 1 + t^3 \\ q_2 = 1 + 3t + t^2 \\ q_3 = 3t - t^2 + t^3 \end{cases}$$

$L_1 + L_2$ -? $L_1 \cap L_2$ -?

Выберем базис $P_3 = \{1, t, t^2, t^3\}$

$$p_1 \longleftrightarrow x_1(1, 2, 0, 1)^T$$

$$p_2 \longleftrightarrow x_2(1, 1, 1, 0)^T$$

$$p_3 \longleftrightarrow x_3(0, 1, -1, 1)^T$$

$$q_1 \longleftrightarrow y_1(1, 0, 0, 1)^T$$

$$q_2 \longleftrightarrow y_2(1, 2, 0, 1)^T$$

$$q_3 \longleftrightarrow y_3(0, 3, -1, 1)^T$$

Найдём базис суммы

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \end{array} \right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Базис суммы: 1, 2 и 4 столбцы:

$$\begin{cases} (1, 2, 0, 1)^T \leftrightarrow b_1 = 1 + 2t + t^3 \\ (1, 1, 1, 0)^T \leftrightarrow b_2 = 1 + t + t^2 \\ (1, 0, 0, 1)^T \leftrightarrow b_3 = 1 + t^3 \end{cases}$$

(Можем взять те же столбцы из начальной матрицы, т.к. Гаусс сохраняет линейные соотношения.

СЛАУ для L_1 :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \xi^1 \\ 2 & 1 & 1 & \xi^2 \\ 0 & 1 & -1 & \xi^3 \\ 1 & 0 & 1 & \xi^4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \xi^1 \\ 0 & -1 & 1 & \xi^2 - 2\xi^1 \\ 0 & 1 & -1 & \xi^3 \\ 0 & -1 & 1 & \xi^4 - \xi^1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \xi^1 \\ 0 & -1 & 1 & \xi^2 - 2\xi^1 \\ 0 & 0 & 0 & -2\xi^1 + \xi^2 + \xi^3 \\ 0 & 0 & 0 & \xi^1 - \xi^2 + \xi^4 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} -2\xi^1 + \xi^2 + \xi^3 = 0 \\ \xi^1 - \xi^2 + \xi^4 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \xi^1 \\ 0 & 3 & 3 & \xi^2 \\ 0 & 0 & -1 & \xi^3 \\ 1 & 1 & 1 & \xi^4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \xi^1 \\ 0 & 3 & 3 & \xi^2 \\ 0 & 0 & -1 & \xi^3 \\ 0 & 0 & 1 & \xi^4 - \xi^1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \xi^1 \\ 0 & 3 & 3 & \xi^2 \\ 0 & 0 & -1 & \xi^3 \\ 0 & 0 & 0 & -\xi^1 + \xi^3 + \xi^4 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} -\xi^1 + \xi^3 + \xi^4 = 0 \end{cases}$$

Базис для $L_1 \cap L_2$ – ФСР

$$\begin{cases} -2\xi^1 + \xi^2 + \xi^3 = 0 \\ \xi^1 - \xi^2 + \xi^4 = 0 \\ -\xi^1 + \xi^3 + \xi^4 = 0 \end{cases}$$

1.22 Практика-закрепление

1.22.1 Линейные формы

$$f : X \rightarrow K \quad \forall x, y \in X \quad f(x + y) = f(x) + f(y) \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Пример. P_n – f – отображение $\forall p \in P_n \quad f(p) = p(t_0) \quad t_0$ – фиксировано

1. f – Линейная форма

2. Найти коэффициенты в базисе $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$

$$\text{Доказательство. } \exists p, q \in P^n \quad p(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k \quad q(t) = \sum_{m=0}^n \beta_m t^m$$

$$f(p + q) = f(\sum + \sum) = f(\sum) = \sum_{k=0}^n (\alpha_k + \beta_k) t_0^k = \sum + \sum = f(p) + f(q)$$

$$f(\lambda p) = f(\lambda \sum) = \lambda f(\sum) = \lambda f(p)$$

f – ЛФ

$$\triangleleft \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$$

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(t) = t_0 \\ f(t^2) = t_0^2 \\ \dots \end{cases}$$

$$f \leftrightarrow (1, t_0, t_0^2, \dots, t_0^n)$$

■

f, g – ЛФ $\implies (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) \implies X^*$ – пр-во сопряжённое X ($\dim X^* = \dim X$)

Пример. $\{f^k\}_{k=1}^n$ – набор Линенных Форм в P_n^* (над P_n)

$$f^k(p) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} p(0)$$

Покажем, что $\{f^k\}_{k=1}^n$ – ЛНЗ набор в P_n^*

Доказательство. $P_n^k = \mathbb{R}^{n+1}$

$$\sqsupset \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$$

$$f^1 \longleftrightarrow (1, 0, 0, \dots, 0)^T$$

$$f^2 \longleftrightarrow (0, 1, 0, \dots, 0)^T$$

$$f^3 \longleftrightarrow (0, 0, 2, \dots, 0)^T$$

$$f^n \longleftrightarrow (0, 0, 0, \dots, n!)^T$$

Этот набор ЛНЗ

$f^k(e_j) = \delta_j^k$ – сопряжённый базис

■

$$\sqsupset x \in X \quad \{e_j\}_{j=1}^n \text{ – базис } X$$

$$\implies x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j$$

$$\triangleleft f(x) = f\left(\sum_{j=1}^n \xi^j e_j\right) = \sum_{j=1}^n \xi^j f(e_j) = \sum_{j=1}^n \xi^j \varphi_j$$

Пример.

$$\begin{aligned} y^1(x) &= 2\xi^1 - \xi^2 + 3\xi^3 + 4\xi^4 - \xi^5 \\ y^2(x) &= 5\xi^1 - 5\xi^2 + 12\xi^3 + 11\xi^4 - 5\xi^5 \\ y^3(x) &= \xi^1 - 3\xi^2 + 6\xi^3 + 3\xi^4 - 3\xi^5. \end{aligned}$$

$$y^1, y^2, y^3 \in X^*$$

1. ЛЗ -?

2. Найти зависимости

$$X^* \simeq \mathbb{R}^5 \implies y_1 \quad (2, -1, 3, 4, -1) \dots$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 12 & 11 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Пример. P_2 $f'^1(p) = p(1)$ $f^2(p) = p(2)$ $f^3(p) = p(3)$ Покажем, что эти три формы образуют базис.

Доказательство. Выберем базис $\{1, t, t^2\}$

$$f^1 \rightarrow (1, 1, 1) \quad f^2 \rightarrow (1, 2, 4) \quad f^3 \rightarrow (1, 3, 9)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \neq 0 \implies f^1, f^2, f^3 - \text{ЛНЗ} \implies \text{базис}$$

$$\triangleleft \delta \in P_2^* \quad \delta(p) = p(0) \quad \delta \leftrightarrow (1, 0, 0)$$

$$\alpha_1 f^1 + \alpha_2 f^2 + \alpha_3 f^3 = \delta$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 8 & -1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

$$\implies \alpha_1 = 3 \quad \alpha_2 = -3 \quad \alpha_3 = 1$$

$$\delta = 3f^1 - 3f^2 + f^3 \text{ Применим к } p \in P_2$$

$$p(0) = 3p(1) - 3p(2) + p(3) \quad \forall p \in P_2$$

$$f^1, f^2, f^3 - \text{базис } P_2^*$$

Построим базис P_2 , сопряжённый базису f^1, f^2, f^3

$$\text{Если } p_1, p_2, p_3 - \text{искомый базис} \implies f^k(p_m) = \delta_m^k$$

$$p_1(t) : \quad f^1(p_1) = 1 \quad f^2(p_1) = 0, f^3(p_1) = 1$$

$$p_1 = \alpha_1 + \beta_1 t + \gamma t^2$$

$$f^2(p_1) = p_1(2) = 0 \implies 2 - \text{корень полинома. } 3 - \text{тоже корень полинома.}$$

$$p_1(t) = a(t-2)(t-3) \quad p_1(1) = 1 \implies a = \frac{1}{2}$$

$$p_1(t) = \frac{1}{2}(t-2)(t-3)$$

$$p_2(t) : \quad f^1(p_2) = 0 \quad f^2(p_2) = 1 \quad f^3(p_2) = 0 \implies p_2(t) = -1 \cdot (t-1)(t-3)$$

$$p_3(t) : \quad f^1(p_3) = 0 \quad f^2(p_3) = 0 \quad f^3(p_3) = 1 \quad p_3(t) = -\frac{1}{2}(t-1)(t-1) \quad \blacksquare$$

Пример. $P_3 \quad f(p) = \int_{-1}^1 (1+t^2)p(t)dt$

Найти коэффициенты разложения f в базисе P_3^* , сопряжённом к базису $\{1, t, t^2, t^3\}$

$$\forall x \in X \quad x = f^1(x)e_1 + f^2(x)e_2 + \dots + f^n(x)e_n$$

Эта штука работает в обе стороны

$$\forall g \in X^* \quad g(e_1)f^1 + g(e_2)f^2 + \dots + g(e_n)f^n$$

$$f(1) = \frac{8}{3}$$

$$f(t) = 0$$

$$f(t^2) = \frac{16}{15}$$

$$f(t^3) = 0$$

1.23 Преобразование базиса

$\square X$ – Линейное пространство

$$\{e_j\}_{j=1}^n - \text{базис } X \quad \forall x \in X \quad x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j$$

$\square \{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$ – тоже базис X

$$\triangleleft \tilde{e}_k = \sum_{j=1}^n \tau_k^j e_j \quad j, k = 1 \dots n$$

$\square T = \|\tau_k^j\|$ – матрица перехода от базиса $\{e_j\}$ к базису $\{\tilde{e}_k\}$

Для удобства введём ещё две матрицы: $E = [e_1, e_2, \dots, e_n] \quad \tilde{E} = [\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n]$

Замечание. $\tilde{E} = ET$

$$\tilde{e}_k = \sum_{j=1}^n \tau_k^j e_j \quad j, k = 1 \dots n$$

$\triangleleft x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j$ Какие координаты будет иметь x в базисе $\{\tilde{e}_k\}$

$$\{e_j\} \xrightarrow{T} \{\tilde{e}_k\}$$

$$x \leftrightarrow \xi^j \xrightarrow{?} \tilde{\xi}^k$$

$$x = \sum_{k=1}^n \tilde{\xi}^k \tilde{e}_k = \sum_{k=1}^n \tilde{\xi}^k \sum_{j=1}^n \tau_k^j e_j = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^n \tilde{\xi}^k \tau_k^j \right] e_j = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \implies$$

$$\implies \xi^j = \sum_{k=1}^n \tilde{\xi}^k \tau_k^j \quad \xi = T \tilde{\xi}$$

$\square \{f^i\}$ – базис X^* (старый)

$\{\tilde{f}^l\}$ – тоже базис X^* (новый)

$$\{e_j\} \xrightarrow{T} \{\tilde{e}_k\}$$

$$\{f^i\} \xrightarrow{?} \{\tilde{f}^l\}$$

Нижняя строчка сопряжена с верхней.

$$\sqsubset \tilde{f}^l = \sum_{i=1}^n \alpha_i^l f^i \quad \delta_k^l \quad (1.1)$$

$$= (\tilde{f}^l, \tilde{e}_k) \quad (1.2)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^l f^i, \sum_{j=1}^n \tau_k^j e_j \right) \quad (1.3)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i^l \tau_k^j (f^i, e_j) \quad (1.4)$$

$$= \quad (1.5)$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^l \tau_k^j \quad (1.6)$$

$$= \delta_k^j \quad (1.7)$$

$$(1.8)$$

$$AI = I \implies A = T^{-1}$$

Замечание. Матрицу, обратную к матрице перехода T обозначают $S = \|\sigma_i^p\|$

$$\tilde{f}^l = \sum_{i=1}^n \sigma_i^l f^i$$

$$\{e_j\} \xrightarrow{T} \{\tilde{e}_k\}$$

$$\{\tilde{f}^i\} \xrightarrow{T^{-1}} \{\tilde{f}^l\}$$

$$\text{Введём две матрицы: } F = \begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \\ \vdots \\ f^n \end{bmatrix} \quad \tilde{F} = \begin{bmatrix} \tilde{f}^1 \\ \tilde{f}^2 \\ \vdots \\ \tilde{f}^n \end{bmatrix} \quad \tilde{F} = SF \quad F = T\tilde{F} \quad S = T^{-1}$$

$$\triangleleft g \in X^* \quad g = \sum_{i=1}^n \eta_i f^i$$

$$\triangleleft g = \sum_{l=1}^n \tilde{\eta}_l \tilde{f}^l \quad (1.9)$$

$$= \sum_{l=1}^n \tilde{\eta}_e \sum_{i=1}^n \sigma_i^l f^i \quad (1.10)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{l=1}^n \tilde{\eta}_l \sigma_i^l \right] f^i = \sum_{i=1}^n \eta_i f^i \quad (1.11)$$

$$\eta_i = \sum_{l=1}^n \tilde{\eta}_l \sigma_i^l \quad \eta = \tilde{\eta} S \quad \tilde{\eta} = \eta T \quad \eta - \text{строка}$$

Ковариантные величины – те, которые преобразуются как базис e . Индекс снизу как в e_j, η_j

Контравариантные – те, которые преобразуются обратной матрицей. Индекс сверху ξ^j, f^j

$$g = \sum_{i=1}^n \eta_i f^i \quad x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j$$

$$\triangleleft g \in X^* \quad g(e_j) = \chi_j - \text{коэффициенты ЛФ в базисе } e_j$$