Конспект по линейной алгебре
II семестр

Коченюк Анатолий

12 февраля 2021 г.

Глава 1

Дополнительные главы линейной алгебры

1.1 Полилинейная формы

Замечание (вспомним)**.** Линейное отображение $\varphi(x+\alpha y) = \varphi(x) + \alpha \cdot \varphi(y)$

Определение 1. $\lhd X$ – ЛП, $\dim X = n$

X^* – сопряжённое к X пространство.

Полилинейной формой (ПЛФ) называется отображение:

$$U : X \times X \times \ldots \times X \times X^* \times X^* \times \ldots \times X^* \to K,$$

обладающее свойством линейности по каждому аргументу.

$\sqsupset x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p \in X \quad y^1, y^2, \ldots, y^q \in X^*$

$u\left(x_1, x_2, \ldots, x_i'^1 + \alpha x_i'', \ldots, x_p, y^1, y^2, \ldots, y^q\right) =$
$= \left(x_1, x_2, \ldots, x_i', \ldots, x_p, y^1, y^2, \ldots\right) + \alpha u\left(x_1, x_2, \ldots, x_i'', \ldots, x_o, y^1, y^2, \ldots, y^q\right)$

Замечание. Пара чисел (p, q) называется валентностью полилинейной формы

Пример. $\mathbb{R}^n \quad f : \mathbb{R} \to K$ – ПЛФ $(1, 0)$

$\hat{x} : \mathbb{R}^{n*} \to K$ – ПЛФ(0,1)

Скалярное произведение $u(x_1, x_2) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ – ПЛФ(2,0)

Смешанное произведение $w(x_1, x_2, x_3) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ – ПЛФ(3,0)

$\sqsupset u, w$ – две полилинейные формы валентности (p, q)

Определение 2.

1. $u = w \iff$

$$u(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^q) = w(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^q) \quad \forall x_1 \ldots x_p y^1 \ldots y^1$$

2. Нуль форма $\Theta \quad \Theta\left(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^q\right) = 0$
3. Суммой ПЛФ валентностей $(p, q) \quad u+v$ называется такое отображение ω, что $\omega(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^1) = u\left(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^1\right) + v\left(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^1\right)$

Лемма 1. w – ПЛФ (p, q)

$w\left(\ldots x_i' + \alpha x_i'' \ldots\right) = w\left(\ldots x_i'\right) + \alpha w\left(\ldots x_i'' \ldots\right)$

4. Произведением полилинейной формы на число λ называется отображение λu, такое что:

$$(\lambda u)\left(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^1\right) = \lambda \cdot u\left(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^1\right).$$

Лемма 2. λu – ПЛФ (p, q)

$\sqsupset \Omega_p^q$ – множество ПЛФ (p, q)

Утверждение 1. Ω_p^q – ЛП

$\sqsupset \{e_j\}$ – базис $X \quad \sqsupset \{f^k\}$ – базис X^*

$x_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_1^{j_1} e_{j_1} = \xi_1^{j_1} e_{j_1}$. Дальше значок суммы писаться не будет (иначе помрём) (соглашение о немом суммировании).

$x_2 = \xi_2^{j_1} e_{j_2} \quad \ldots \quad x_p = \xi^{j_p} e_{j_p}$

$y^1 = \eta_{k_1}^1 f^{k_1} \quad y_2 = \eta_{k_2}^2 f^{k_2} \quad \ldots \quad y^1 = \eta_{k_q}^q f^{k_q}$

$$\mathrm{w}(x_1, x_2, \ldots, x_o, y^1, y^2, \ldots, y^q) = w\left(\xi_1^{j_1} e_{j_1}, \xi_2^{j_2} e_{j_2}, \ldots, \xi_p^{j_p} e_{j_p}, \eta_{k_1}^1 f^{k_1}, \eta_{k_2}^2 f^{k_2}, \ldots, \eta_{k_q}^q f^{k_q}\right)$$

$$= \xi_1^{k_1}\xi_2^{j_2}\dots\xi_p^{j_p}\eta^1_{k_1}\eta^2_{k_2}\dots\eta^q_{k_q}\underbrace{w\left(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_p}, f^{k_1}, f^{k_2}, \dots, f^{k_q}\right)}_{\omega^{k_1k_2\dots k_q}_{j_1j_2\dots j_p}\text{ – тензор ПЛФ}}$$
$$= \xi_1^{k_1}\xi_2^{j_2}\dots\xi_p^{j_p}\eta^1_{k_1}\eta^2_{k_2}\dots\eta^q_{k_q}\omega^{k_1k_2\dots k_q}_{j_1j_2\dots j_p}.$$

Лемма 3. Задание полилинейной формы эквивалентно заданию её тензора в известном базисе

$$w \longleftrightarrow \omega^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p} = \omega^{\vec{j}}_{\vec{i}}.$$

Доказательство. (выше) ■

Лемма 4. $v \longleftrightarrow \upsilon^{\vec{j}}_{\vec{i}} \quad w \longleftrightarrow \omega^{\vec{j}}_{\vec{i}}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} w + v \longleftrightarrow \upsilon^{\vec{j}}_{\vec{i}} + \omega^{\vec{j}}_{\vec{i}} \\ \alpha v \longleftrightarrow \alpha\upsilon^{\vec{j}}_{\vec{i}} \end{cases}$$

Замечание. ${}^{s_1s_2\dots s_p}_{t_1t_2\dots t_q}w$ – индексация базиса Ω^q_p

${}^{s_1s_2\dots s_p}_{t_1t_2\dots t_q}w^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p}$

${}^{s_1s_2\dots s_p}_{t_1t_2\dots t_q}w\left(x_1, x_2, \dots, x_p, y^1, y^2, \dots, y^q\right) = \xi_1^{s_1}\xi_2^{s_2}\dots\xi_p^{s_p}\eta^1_{t_1}\eta^2_{t_2}\dots\eta^q_{t_q}$

Замечание. $\lhd\, {}^{s_1s_2\dots s_p}_{t_1t_2\dots t_q}w^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p} = {}^{s_1s_2\dots s_p}_{t_1t_2\dots t_q}\ w\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}, f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q}\right)$
$= \delta^{s_1}_{i_1}\delta^{s_2}_{i_2}\dots\delta^{s_p}_{i_p}\delta^{j_1}_{t_1}\delta^{j_2}_{t_2}\dots\delta^{j_q}_{t_q}$

Пример. $\mathbb{R}^2_2$

$$a_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} \quad a_4 = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$a_1 = {}^{11}a_1 \quad a_2 = {}^{12}a_2 \quad a_3 = {}^{21}a_3 \quad a_4 = {}^{22}a_4$

Теорема 1. Набор $\left\{{}^{s_1s_2\dots s_p}_{t_1t_2\dots t_q}W\right\}^{t_1t_2\dots t_p}_{s_1s_2\dots s_p}$ – образует базис в Ω^q_p