Дискретная математика, 3 семестр

Коченюк Анатолий

15 ноября 2021 г.

Глава 1

Графы, неалгоритмические свойства

1.1 Что такое граф

$V, E \subseteq V \times V$ – конечные множества

Такая конструкция называется (обыкновенным) ориентированным графом

Замечание. В таком графе нет параллельных рёбер.

Ориентированный, потому что у ребра есть начало и конец.

Определение 1. $V, E, beg : E \to V, end : E \to V$

Граф с кратными рёбрами (ориентированный мультиграф)

Замечание. Если дополнительно затребовать, что для любых

$$uv, ab \quad u \neq a \vee v \neq b$$

Замечание. $uv \sim vu \quad V, E \subseteq (V \times V)\,/_\sim$

неориентированный граф с петлями

$uv \sim vu \quad V, E \subseteq (V \times V)\,/_\sim \setminus \{(u,u) | u \in V\}$

неориентированный граф без петель (обыкновенный)

Замечание. Альтернативно $V, E, ends : E \to (V \times V)\,/_\sim [\setminus \{(u,u) | u \in V\}]$

Граф с кратными рёбрами [без петель] (мультиграф)

Замечание. Неориетированный граф – ориаентированный, где есть рёбра (дуги) в обе стороны

1.2 Ориентированный граф

У ребра есть начло и конец. Говорят, что ребро выходит из вершины и входит в вершины.

Когда из вершины выходит n рёбер, это число обозначается $d^{-}u$ и называется исходящей степенью вершины

Когда в вершину выходит n рёбер, это число обозначается $d^{+}u$ и называется входящей степенью вершины

Лемма 1. $\sum\limits_{u} deg^{+}u = \sum\limits_{u} deg^{-}u = |E|$

Определение 2. Пусть $P = u_0e_1u_1e_1u_2 \dots e_ku_k$

$e_i = u_{i-1}u_i$

$u_0 = \operatorname{Beg} P \quad u_k = \operatorname{End} P$

$k = \operatorname{len} P = |P|$

$a \rightsquigarrow b \quad \exists$ путь $P : \operatorname{Beg} P = a, \operatorname{End} P = b$

Лемма 2. $\rightsquigarrow = \to^{*}$

Следствие 1. $\rightsquigarrow$ – транзитивно, рефлексивно

Определение 3. $a \leftrightsquigarrow b \iff a \rightsquigarrow b, b \rightsquigarrow a$

Тогда это отношение эквивалентности, а граф, где вершины могут быть связаны только так, называется сильно связанным.

Определение 4. Если выполняется $a \rightsquigarrow b \implies$ не $b \rightsquigarrow a$

такой граф называется ациклическим

Определение 5. Циклическим путём называется путь, у которого начало и конец совпадают и длина больше нуля.

Циклом (в ориентированным графе) называется класс эквивалентности циклическим путей, в котором пути равны с точностью до циклического сдвига.

Путь (цикл) называется простым, если все вершины на нём различны

путь (цикл) называется рёберно-простым, если в нём все рёбра различны.

Утверждение 1. $a \rightsquigarrow b$ антисимметричный $\iff$ в G нет циклов длины 2 и более.

Лемма 3. G – ациклический граф $\implies \exists$ вершина исходящей степени ноль.

Следствие 2. В ациклическом графе можно построить topsort

$n : V \to \mathbb{N} \quad uv \in E \implies n(u) < u(v)$

Доказательство. Одна вершина очень хорошо сортируется

По лемме есть вершина исходящей степени ноль. Удалим её временно из графа. Меньший граф сортируется по индукционном предположению. Добавляем первую вершину, она ничего не ломает, так как в неё не входят рёбра. ■

1.3 Неориентированный граф

Определение 6. Путём называется последовательность $u_0 e_1 u_1 \dots e_k u_k$

$e_i = u_{i-1} u_i$

Определение 7. Циклический путь – путь, где начало = концу и длина ненулевая.. Тогда путь $aebea$ по одному ребру в две стороны был бы циклическим путём.. а мы не хотим называть такое циклом.

Назовём циклическим путём корректным, если $\forall i \quad e_i = e_{i+1} \implies e_i$ петля. $e_k = e_1 \implies e_k$ петля

Назовём циклом класс эквивалентности корректных циклических путей относительно равенства с точностью до циклического сдвига отражения.

Замечание. $\rightsquigarrow$ – отношение эквивалентности, потому что есть симметричности в силу неориентированности.

Классы эквивалентности – компоненты связности.

Если граф состоит из одной компоненты связности, то он называется связным

Замечание. Ориентированному графу G можно сделать симметризацию $\overset{\leftrightarrow}{G}$

Обратно можно сделать ориентацию неориентированному графу, заменив каждое ребро на стрелку в одну стороны (соответственно $2^{|E|}$ ориентаций)

Определение 8. Отношение "связаны ребром" называется отношением смежности

Если из вершины исходит ребро, то отношение между ребром и вершиной называется отношением инцидентности.

$\deg u$ – количество рёбер, инцидентных данной вершине

Лемма 4 (о рукопожатиях). $\sum \deg u = 2|E|$

Определение 9. Лес – ациклические неориентированный граф

Дерево – лес, связный

Определение 10. u, v рёберно-двусвязны, если $\exists$ два рёберно-непересекающихся пути $u \rightsquigarrow v$

Классы эквивалентности – листы

Если удалить вершину, связывающую разные листы, то эти листы перестанут быть связанными. Такие вершины называются хвостами

Теорема 1. Рёберно-двусвязность – отношение эувивалентности

Доказательство. Транзитивность:

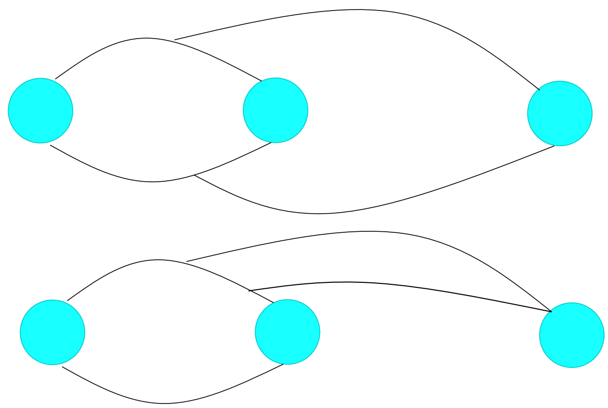

Рис. 1.1: trans

■

Замечание. Если вводить аналогичную вершинную двусвязность с патчем, что концы могут совпадать, то облом:

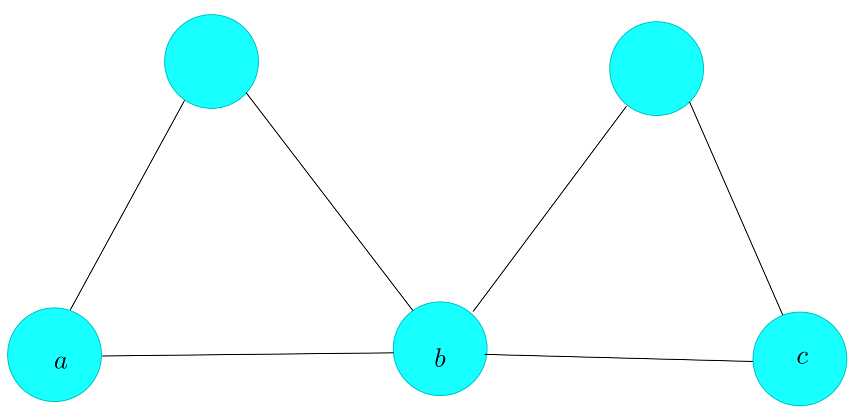

Рис. 1.2: oblom

$a, b \quad b, c$ вершинно двусвязны, но a, c явно нет

Определение 11. Ребра вершинно двусвязны, если междц ними есть два пути, которые вершинно непересекаются (концы тоже должны не совпадать)

Классы эквивалентности – блоки

Если удалить ребро, связывающее два разных блока, то его концы перестанут быть связанными. Такие рёбра называется мостами.

1.4 Деревья

Определение 12. Неориентированный граф называется лесом, если в нём нет циклов.

Неориентированный граф называется деревом, если он является лесом и связным.

Теорема 2.

1. граф связен
2. граф ацикличен
3. количество рёбер на 1 меньше количества вершин $|E| = |V| - 1$.

Из любых двух из этих свойств следует третье.

Лемма 5. Пусть есть дерево (связный граф без циклов), содержащее хотя бы 2 вершины. Тогда существует вершина степени 1.

Доказательство. Рассмотрим самый длинный простой путь. Его концы имеют степень 1. Пусть нет, пусть есть вершина, которая не лежит на диаметре и является соседом конца, но тогда диаметр не самый длинный путь. Иначе сосед конца лежит внутри диаметра, что значит появление цикла, а у нас дерево. ∎

Доказательство теоремы. $1, 2 \implies 3$ $|V| = 1 \implies |E| = 0$. Петлей нет. Даже если разрешить, петля это цикл, что запрещено по ацикличности

Если есть хотя бы две вершины, то есть вершина степени 1. Возьмём её, удалим из графа и получим дерево из индукционного предположения. Получаем n вершин и $n - 1$ ребро

$1, 3 \implies 2$ Предположим, что цикл есть. Удалим любое ребро этого цикла. Получим граф, в котором n вершин и $n - 2$ ребра. Граф всё ещё связен (можно пройти по циклу вместо удалённого ребра). Рассмотрим все связные подграфы (есть как миниму он сам) и выберем минимальный по числу рёбер. n вершин и $n-k$ рёбер. Он ациклический (потому что иначе можно удалить ребро без потери связности), тогда по первому пункту $n-k=n-1$??

Можно прямее: возьмём минимальный по числу рёбер связный подграф, он ациклический, значит $n-k=n-1$, значит он совпадает с нашим.

$2,3 \implies 1$ Каждая компонента связна и ациклична, значит в каждой из них n_i вершин и n_i-1 рёбер. Просуммируем и получим n вершин и $n-k$ рёбер. Но по 3 рёбер у нас $n-1 \implies n-k=n-1 \implies k=1$ – есть ровно одна компонента связности

■

Теорема 3. В дереве между любыми двумя вершинами существует один простой путь

Доказательство. Допустим есть два простых путя между двумя вершинами. Найдём общий префикс и место, где пути ветвятся. Найдём общий суффикс и место, где пути ветвятся. Между этими двумя путями согласно нашему определению есть корректный цикл. В дереве нашли цикл?! ■

Утверждение 2. Все рёбра дерева являются мостами.

Верно также и обратное.

Определение 13. T – подграф G – называется остовным дерево, если T остовный граф

Определение 14. Подграф:

- Откидываем любое количество вершин и рёбер
- Остовный подграф, не удаляем вершины, они сохраняют отношение связности

Утверждение 3. Любой связный граф содержит остовное дерево.

Доказательство. минимальный по количеству рёбер связный подграф. ■

Определение 15. Матрица смежности. $A[i][j] = \begin{cases} 1, \text{есть ребро из} i \text{ в } j \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$

Теорема 4. $A^k[i][j]$ – число путей из i в j длины k

Доказательство. $A^0 = I \quad A^1 = A$

$A^k = A^{k-1}A \quad A^K[i][j] = \sum\limits_t A^{k-1}[i][t] \cdot A[t][j]$

Рассмотрим путь из i в j длины k, разобьём его на две части длины $k-1$ и 1. Тогда количество путей считается именно так, как произведение количества первых на количество вторых. ■

Возьмём матрицу смежности и на диагонали напишем минус степени вершин

$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ – матрица Кирхгофа.

Вычеркнем одну строку и одну столбец. Посчитаем определитель и получим количество остовных деревьев.

Теорема 5. Количество остовных деревьев неориентированного графа равно алгебраическому дополнению любого элемента матрицы Кирхгофа

Доказательство. Рассмотрим любую ориентацию нашего графа G. Рассмотрим матрицу инцидентности $\vec{G}$ – $I_{\vec{G}}$ – в каждом столбце есть -1, 1 и остальные все нули.

Лемма 6. $K_G = I_{\vec{G}} I_{\vec{G}}^T$

Доказательство. на диагоналях скалярное произведение равных строк, где стоят 1 или -1 на местах рёбер. В сумме это степень вершины.

Если не диагональный: будет 0, если не соединены ребром и -1, если соидены $(1 \cdot -1)$ (здесь пригождается ориентация) ■

Лемма 7. $\vartriangleleft$ минор $(n-1)\times(n-1)$ матрицы $I_{\vec{G}}$. Задаётся множеством рёбер и вершиной, которую выкидыванием. Утверждается, что этот минор равен нулю, если множество рёбер содержит цикл и ± 1 иначе.

Доказательство. рассмотрим цикл – какие-то рёбра. Просуммируем соответствующие столбцы и получим нулевой столбец (если цикл ориентированный. В противном случае, просуммируем с нужными коэффициентами). А тогда мы получим линейно-зависимые столбцы в миноре, следовательно он будет равен нулю.

Иначе, пусть v_1 – висячая вершина (лист) $A, v_1 \neq u$. Поставим в миноре строку v_1 в начало, как и столбец с её единственным ребром $[0][0] = \pm 1$, всё остальное в строке 0. Удалим её из дерева., по усиленной лемме о висячих вершинах, есть два листа, хотя бы один из которых не u. Проделаем с ней – v_2 – те же действия. Так сделам со всеми и получим треугольную матрицу, у которой на диагонали стоят ± 1, значит сам минор равен ± 1 ∎

Лемма 8. $\widehat{K_{G_{ii}}} = (I_{\vec{G}} \setminus \{i \text{ стр.}\}) \cdot \left(I^T_{\vec{G}} \setminus \{i \text{ столбца}\}\right)$

Лемма 9 (Формула Коши-Бине)**.**

$$A_{r\times r} \quad A = B\cdot C \quad B_{r\times s} \quad C_{s\times r} \quad s \geqslant r$$

$$\det A = \sum_{1\leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant s} \det B^{i_1 i_2 \ldots i_r} \det C_{i_1 i_2 \ldots i_r}$$

Теорема 6 (lite)**.** Число основных деревьев G = алгебраическому дополнению матрицы Кирхгофа.

∎

1.5 Циклическое пространство

Рассмотрим матрицу инцидентности $A : \mathbb{B}^m \to \mathbb{B}^n$

$\operatorname{Ker} A = \{C | C \subset E, C$ – дизъюнктное объединение циклов$\}$

1.6 Эйлеровы и Гамильтоновы графы

Определение 16. Цикл (путь) называется эйлеровым, если он проходит по каждому ребру в графе ровно один раз

Теорема 7. Неориентированный граф содержит Эйлеров цикл тогда и только тогда, когда все вершины имеют чётную степень, граф связен (кроме конпонент связности из одной вершины – пней) и есть хотя бы одно ребро.

Утверждение 4. G – граф, что все степени вершин чётные и любая компонента связности содержит больше одно ребра, тогда любая компонента содержит эйлеров цикл

Доказательство. Доказательство. Если рёбер 0, то все компоненты связности содержат эйлеров цикл (все ноль компонент связности)

Пусть рёбра есть. Возьмём одно ребро. т.к. степень чётная, то мы можем идти в одну из сторон. В какой-то момент из-за чётности мы успрёмся в вершину, в которй уже были, так мы найдём цикл, удалим его из графа и рассмотрим компоненты связности. По нидукционному предположению во всех них есть эйлеров цикл. Дальше обойдём цикл и когда попадаем в новую компоненту, выписываем подряд его цикл и идём дальше. ∎

∎

Замечание. Разрешим кратные рёбра и петли. Утверждение всё ещё верно. Если есть вершина степени хотя бы 2, возьмём два соседних с ней ребра, удалим их и совместим (если есть, то добавим ещё одно ребро) соответствующие вершины. Тогда по индукции в образовавшихся компонентах есть эйлеровы циклы и дальше мы заменяем ребро обратно на 2 ребра. Возможно при этом нужно будет включить эйлоров цикл компоненты связности, в которой находилась выбранная вершина

Следствие 3. Неориентированный граф содержит Эйлеров путь тогда и только тогда, когда все уго компоненты связности, кроме $\leqslant 1$ содержат хотя бы одну вершину и степени всех вершин чётны, кроме $\leqslant 2$

Теорема 8. В ориентированном графе существует Эйлеров цикл тогда и только тогда, когда $\forall u : \quad \deg^+ u = \deg^- u$

Определение 17. Гамильтонов цикл (путь) – проходит по любой вершине ровно один раз

Поиск и проверка существования – NP-полные задачи.

Критерии: связность, нет висячих рёбер, нет точек сочленения

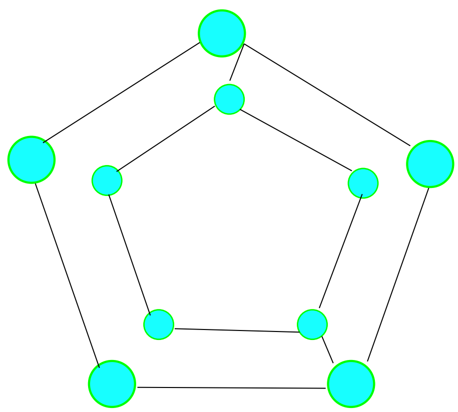

Рис. 1.3: gamil

Утверждение 5. В полном графе ($K_n, n \geqslant 3$) есть гамильтонов цикл

Если степень любой вершины $\geqslant \frac{n}{2}$, то тоже (теорема Дирака)

Теорема 9 (Критерий Хватала)**.** $[d](*) \implies \forall G[d] \quad \exists$ гамильтонов цикл

$\neg[d](*) \implies \exists G[d] : \nexists$ гамильтонова цикла

Пусть G содержит $\geqslant 3$ вершин, степени вершин $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$.

И выполнено *: $d_k \leqslant k < \frac{n}{2} \implies d_{n-k} \geqslant n-k$

Тогда G гамильтонов

(Хватал $\implies$ Дирак)

Доказательство. Пусть G – контпример к теореме Хватова. Среди всех контрпримеров возьмём минимальный по количеству вершин, в среди них возьмём тот, у которого максимальное число рёбер.

$G \neq K_n$

Лемма 10. Если граф удовлетворяет * и $uv \notin EG \implies G \cup uv$ удовлетворяет *

Импликации могут только стать “лучше”, истинность не поменяется

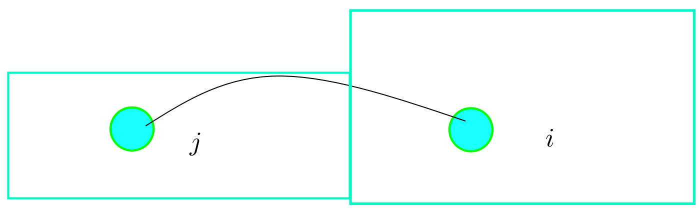

Рис. 1.4: lem1

Лемма 11. $\lhd uv \notin EG]quadG \cup uv$ содержит гамильтонов цикл

(т.к. G контрпример с максимальным числом рёбер, $G \cup uv$ удовлетворяет * по предыдущей емме)

$\lhd uv \notin EG : \deg u + \deg v \to \max$. НУО $\deg u \leqslant \deg v$

$S = \{i | uu_{i+1} \in G\} \subset \{1, 2, \ldots, n-1\}$

$T = i | u_j v \in G \subseteq \{1, 2, \ldots, n-1\}$

Лемма 12. $S \cap T = \emptyset$

Следствие 4. $|S| = \deg u \quad |T| = \deg v \implies \deg u + \deg v \leqslant n-1$

Следствие 5. $\deg u < \frac{n}{2}$

Вершины: $1, 2, 3, \ldots, k, \ldots, p$(верш. u)$, \ldots, n$

$\lhd i : i \in S \quad uu_{i+1} \in E$

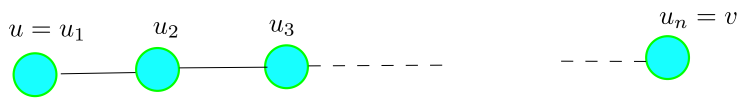

Рис. 1.5: numer

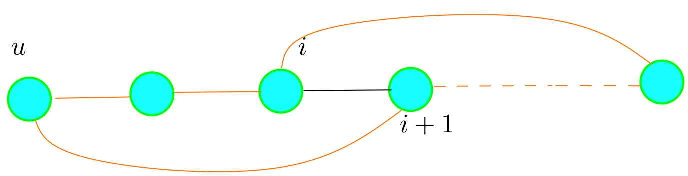

Рис. 1.6: st

Лемма 13. $\forall i \in S \quad \deg u_i \leqslant \deg u < \frac{n}{2}$

Доказательство. $i \in S \implies i \notin T \implies u_i v \notin E \implies \deg u_i + \deg v \leqslant \deg u + \deg v$.

$p \geqslant \deg u = d_p$

$k = \deg u, k \leqslant p \implies d_k \leqslant d_p = \deg u = k < \frac{n}{2}$

По $(*)$ $d_{n-k} \geqslant n-k > \frac{n}{2}$

Лемма 14. $\exists \geqslant k+1$ вершин степени $\geqslant n-k$

Следствие 6. $\exists w : \deg w \geqslant n-k, w$ – не сосед $u \quad uw \notin E \quad \deg u + \deg w \geqslant k+n-k = n > n-1 \geqslant \deg u + \deg v$

$(*) \quad d_k \leqslant k < \frac{n}{2} \implies d_{n-k} > n-k$ ■

■

Теорема 10 (Оре)**.** $\forall uv \notin E \quad \deg u + \deg v \geqslant n$, то G содержит гамильтонов цикл

Определение 18. Ориентированный граф называется турниром, если между любой парой вершин существует ровно одно ребро (в одну из сторон)

Теорема 11 (Редеи, Камеон)**.** $\forall$ турнир содержит гамильтонов путь

Любой сильно связный ткрнир содержит гамильтонов цикл

1.7 Рисуем графы

Утверждение 6. Любой граф можно вложить в $\mathbb{R}^3$

Доказательство. сопоставим каждой вершине случаную точку с раномерным распределением. Рёбра – отрезки между ними. Рёбра пересекутся с вероятностью 0. Значит существует способ вложить граф в $\mathbb{R}^3$ без пересечений.

Другое доказательство: нарисуем на плоскости и там, где есть пересечние двух, одним ребром выёдем из плоскости в $\varepsilon-$ окрестности. ■

Теорема 12 (Формула Эйлера)**.** Связный G, V, E. Уложим на плоскость, получим F граней.

Тогда $V + F - E = 2$

Доказательство.

база $1 + 1 - 0 = 2$

переход G содержит вершину $\deg u = 1 \quad G \setminus u : \begin{cases} V+ = 1 \\ E+ = 1 \\ F - -const \end{cases}$

Если такой нет, рассмотрим uv не мост.

■

$21 = 3F \leqslant \sum\limits_{\text{f -- грань}} C_f = 2E = 20$

хмм, кажется предположение, что C_5 можно уложить неверно.

$3F \leqslant 2E$

$3\,(2 + E - V) \leqslant 2E$

$6 + 3E - 3V \leqslant 2E$

Утверждение 7.
$$E \leqslant 3V - 6$$

Лемма 15. Дерево можно уложить

Лемма 16. Если G содержит мост uv и в $G \setminus uv$ можно уложить любую компоненту связности, то G можно уложить

Теорема 13. Граф G можно уложить на плоскости тогда и только тогда, когда G можно уложить на сфере.

Доказательство. Есть биекция между сферой без точки и плоскостью ■

Следствие 7. G - планарен, то любая вершина(грань) может лежать на внешней грани.

Леммы. Сделаем, чтобы вершины моста лежали на внешней и грани и соединим их. ??? profit ■

Лемма 17. G содержит точку сочленения и любая компонента связности расчленения графа по этой вершине планарна, то G планарен.

Расчленение – удаление вершины с инцидентными рёбрами и добавление её отдельно независимо в каждую из получившихся компонент связности.

Определение 19. G_1, G_2 – гемеоморфны, если один в другой можно перевести конечной последовательностью следующих операций:

- Убрать вершину степени 2, объединив два её ребра в одно
- Добавить в ребро вершину степени 2.

гомеоморфизм не влияет на укладку, гемеоморфность отношение эквивалентности.

Теорема 14 (Понтрягина-Куратовского)**.** Граф G планарен тогда и только тогда, когда G не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$

Доказательство. G – минимальное число вершин и рёбер. G – не планарен, G не содержит K_5 или $K_{3,3}$ как гомеоморфные подграфы. Нет мостов, нет точек сочления, есть связность (всё из этого гарантирует неминимальность по числу вершин или рёбер)

Возьмём какое-то его ребро uv и удалим. гомеомофрных графов в G не появилось от удаления, он всё ещё планарен.

Лемма 18. $G \setminus uv$ не содержит мостов и точек сочленения

Пусть есть мост

$\triangleleft$ цикл, содержащий u И v: C и укладку $G \setminus uv$, чтобы внутри C было как можно больше граней. При удалении этого цикла, граф распадётся на внутренние компоненты цикла и внешние. Каждая компонента связности имеет рёбра с циклом C

Лемма 19. любая внешняя компонента является разделяемой

Лемма 20. Существует хотя бы одна внутренняя разделяющая компонента.

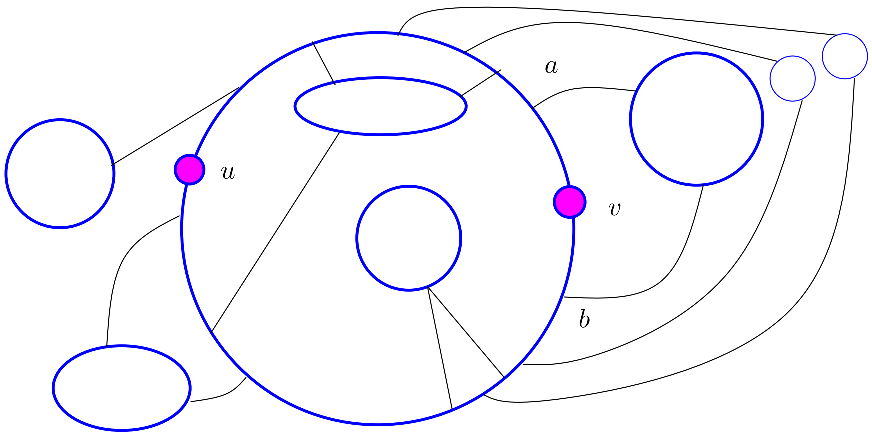

Рис. 1.7: komponents

Лемма 21. Существует внутренняя компонента, которая разделяет u и v, а также a и b одновременно

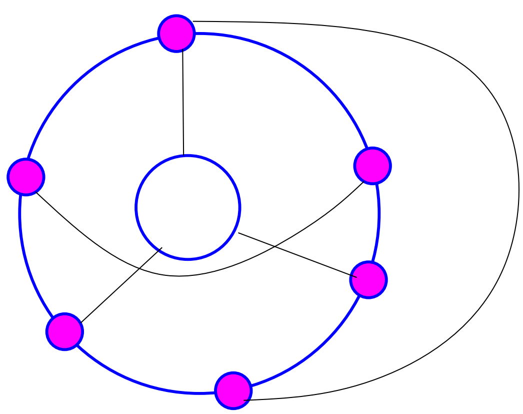

Рис. 1.8: rasdelat

■

1.8 Раскраски графов

Все графы здесь будут неориентированы.

Определение 20. Раскраской графа в k цветов – отображение φ, сопоставляющее каждой вершине число от 1 до k, так что для любых двух смежных вершин $uv \in E \quad \varphi(u) \neq \varphi(v)$

Пример. $k = 2$

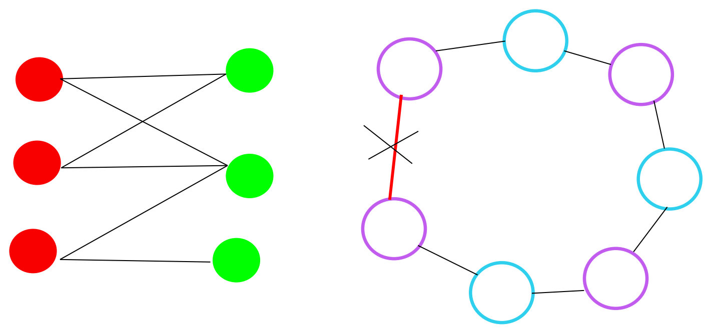

Рис. 1.9: k2

Утверждение 8. Раскраска в два цвета существует $\iff$ в G нет нечётных циклов

Доказательство.

$\implies$ Очевидно (картинка)

$\impliedby$ $dist(1, v)\%2 = 0 \implies \varphi(v) = 1 \quad$ иначе $\varphi(v) = 2$

■

В 3 цвета и дальше уже NP-полная задача

Замечание. G, x цветов

$P(G, x)$ – хроматический многочлен графа G – количество раскрасок G в x цветов

1. $P(O_n, x) - x^n$
2. $P(K_n, x) = A_x^n = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+k+1)$
3. $P(T_n, x) = P(T_{n-1}, x) \cdot (x-1) = P(T_1, x) \cdot (x-1)^{n-1} = x(x-1)^{n-1}$

Утверждение 9. $\forall G \quad P(G, *)$ – многочлен и $\deg P(G, *) = n$

Доказательство. Если убрать одно ребро, то ограничений станет меньше, раскрасок больше и мы посчитаем лишние. Какие? Те, в которых две вершины, соединённые тем ребром имеют один цвет. Найдём количество раскрасок, в которых две фиксированные смежные вершины имеют один цвет. Для этого стянем эти две вершины

$P(G, x) = P(G \setminus \{uv\}, x) - P(G/uv, x)$

База: $P(O_n, x) = x^n$

Переход: $P(G, x)$ – разность многочленов степени n и $n-1$ ■

Замечание. $P(O_n, x) = x^n + 0 \cdot x^{n-1}$

$P(T_n, x) = x(x-1)^{n-1} = x^n - (n+1)x^{n-1} + \dots$

$P(K_n, x) = (x-0)(x-1)\dots(x-(n-1)) = x^n - \binom{n}{2}x^{n-1} + \dots$

$P(G_n, x) = x^n - |E|x^{n-1} + \dots$

$P(G, x) = P(G \setminus uv, x) - P(G/uv, x) = x^n - (|E|-1)x^{n-1} + \dots - x^{n-1} + \dots = x^n - |E|x^{n-1} + \dots$

Определение 21. $\mathrm{Chi}(G)$ – минимальное число цветов, для которых сущесвует раскраска графа G – хроматическое число графа G

Замечание. $\gamma(G) \leqslant k \implies \exists$ раскраска в $k+1$ цветов, $\mathrm{Chi}(G) \leqslant \Delta(G) + 1$

Теорема 15 (Брукс)**.** G – связный, $G \neq K_n$ или $C_{2n+1} \implies \mathrm{Chi}(G) \leqslant \Delta(G) = k$

Доказательство. $k = 0 \quad G = K_1$

$k = 1 \quad G = K_2$

$k = 2 \quad G$ – путь или чётный цикл, его можно раскрасить в два цвета

$k \geqslant 3$

Берём вершину с $\deg < k$, запускаем dfs, жадно красим

G – k-регулярный, все вершины имеют степень k. $\quad k < n-1$, иначе граф был бы полным. Между какими-то двумя вершинами нет ребра. $uxv \quad uv$ ребра нет. Жадно продлеваем путь, не заходя в посещённые вершины: $uxvv_4v_5 \dots v_r$

1. Мы получили гамильтонов путь. У вершины x степень как минимум 3, значит у неё есть ещё какой-то сосед. Пусть у u, v – цвет 1.

■

Утверждение 10. Любой планарный граф можно покрасить в 5 цветов

Доказательство. $\deg V_{min} \leqslant 4 \implies$ есть свободный цвет ■

Теорема 16. ..

1.9 Паросочетания

Определение 22. Паросочетание – множество рёбер $M \subseteq E$, такое что никакие два ребра не имеют общих вершин

$$\forall e, f \in M \quad e, f \text{не имеют общих концов}$$

$\alpha'(G)$ – максимальное паросочетание в графе G

Определение 23. $I \subseteq V$ – независимое множество, если никакие две вершины из него не связаны ребром.

$\alpha(G)$ – максимальное независимое множество.

Определение 24. Вершинное покрытие – множество вершин, такое что у каждого ребра хотя бы один конец в этом множестве.

$\beta(G)$ – минимальное вершинное покрытие

Определение 25. Рёберное покрытие – множество рёбер, чтобы любая вершина являлась концом хотя бы одного ребра из этого множества

$\beta'(G)$ – минимальное рёберное покрытие

Замечание. $\mathrm{Chi}(G)$ – минимальное количестве цветов для вершинной покраски

$\mathrm{Chi}'(G)$ – минимальное количество цветов для рёберной покраски

Утверждение 11. I – независимое $\iff$ $V \setminus I$ – вершинное покрытие

Следствие 8. $\alpha(G) + \beta(G) = n$

Определение 26. Клика в графе – множество вершин, в котором каждая пара вершин связана ребром.

Изолированное множество иногда называют антикликой

Размер максимальной клики в графе – $\omega(G)$

Утверждение 12. $\alpha(G) = \omega(G)$

Определение 27. Паросочетание называется совершенным, если оно покрывает все вершины (является рёберным покрытием).

Следствие 9. n – нечётно $\implies$ нет совершенного паросочетания

Замечание. В еже на 4 вершины ($K_{1,3}$) совершенного паросочетания нет, значит условие не необходимое-и-достаточное.

Определение 28. $o(G)$ – числа нечётных компонент связности

Утверждение 13. Если $\exists A \subseteq V : |A| < o(G \setminus A)$, то в G нет совершенных паросочетаний

Определение 29. Множество Татта – множество, удалив которое в графе получается больше нечётных компонент связности, чем вершин в этом множестве

Теорема 17 (Татта)**.** G содержит совершенное парочочетание $\iff$ $\forall A \subseteq V \quad |A| \geqslant o(G \setminus A)$

Доказательство.

$\Longrightarrow$ предыдущее утверждение

$\Longleftarrow$ $A = \emptyset \implies 0 \geqslant o(G) \implies$ количестве вершин в G – чётно

Предположим есть контрпример. Среди всех котрпримеров выберем с минимальным числом вершин, а среди них с максимальным числом рёбер.

G – не полный граф, т.к. при чётном количестве вершин в нём было бы паросочетание.

$\lhd uv \notin E \quad \lhd G \cup uv = G'$, может ли после такой опреации появиться множество Татта? Нет, не может.

$o\,(G' \setminus A) = O(G \setminus A)$, если в A одна из вершин u или v

Если u и v в одной компоненте, то тоже равны

Если в разных и одна из компонент нечётная, то равны. Если обе компоненты нечётны, то левая меньше

Итого: $o\,(G' \setminus A) \leqslant o\,(G \setminus A) \leqslant |A|$

Множества Татта появиться не могло, а значит добавление любого ребра приводит у полному паросочетанию

$\forall uv \notin E \quad G \cup uv$ содрежит совершенное паросочетание.

$U = \{u : degu = n - 1\}$

$U \neq V$ (иначе он был бы полным)

Лемма 22. $G \setminus U$ – объединение полных графов

Доказательство. Предположим, что это не так. Значит в графе $G \setminus U$ есть хотя бы одна компонента, которая не полный граф. В ней хотя бы три вершины, т.к. две вершины соединённый ребром это полный граф.

Рассмострим три вершины xyz, т.ч. есть рёбра xy И yz, но не xz (если таких нет, то отношение соединённости рёбром транзитивно и граф полон).

Т.к. $y \notin U$, значит $\exists w : yw \notin E$

$\lhd G \cup xz$. По предыдущей лемме он содержит совершенное паросочетание M_1

$\lhd G \cup yw$. По лемме он содержит совершенное паросочетание M_2

$\lhd M_1 \bigoplus M_2$ ■

■

....

Определение 30. Граф называется фактор-критическим, если для любой его вершины граф $G \setminus u$ содержит совершенное паросочетание

$K_{2n+1} \quad C_{2n+1}$

$\alpha'(G) = \alpha'(G \setminus u) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

Теорема 18 (Галлаи)**.** G – связный

G – фактор критический $\iff \forall u \in v \quad \alpha'(G \setminus u) = \alpha'(G)$

Доказательство.

$\implies$ ✓

$\impliedby$ G не содержит совершенного паросочетания $\implies$ G содержит множество Татта S

1. $S = \emptyset \quad \deg G = (G) - 0 = 1 \implies \alpha'(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$
2. $\exists S \neq \emptyset$ Выберем то, для которого $o\,(G \setminus S) - |S| \to \max = \deg G = k$

   $\lhd v \in S \quad G' = G \setminus v \quad S' = S \setminus v$

   $\deg\,(G \setminus v) = \deg G' \geqslant o\,(G' \setminus S') - |S'| = o\,(G \setminus S) - |S| + 1 = k + 1 \implies \alpha'(G \setminus v) \leqslant \alpha'(G) - 1$

∎

Определение 31. $D(G) = \{u | \alpha'\,(G \setminus u) = \alpha'(G)\}$

(для $u \quad \exists$ максимальное паросочетание H не покрывающее u)

$A(G) = \{u | u \notin D(G), \exists v \in D(G) : uv \in E\} = N(D)$

$C(G) = V \setminus (D(G) \cup A(G))$

Лемма 23 (О стабильности)**.** $a \in A(G)$. Тогда $\begin{cases} A(G \setminus a) = D(G) \\ A(G \setminus a) = A\,(G) \setminus a \\ C(G \setminus a) = C(G) \\ \alpha'(G \setminus a) = \alpha'(G) - 1 \end{cases}$

Доказательство. $\lhd u \in D(G) \quad \exists M$ – максимальное паросочетание G, u не покрывается M. $\exists ax \in M \quad M \setminus ax$ – паросочетание $G \setminus a$, не покрывающее

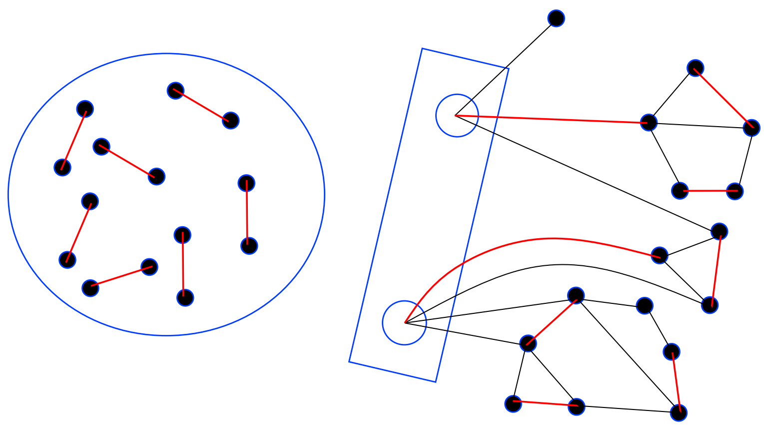

Рис. 1.10: FAC

u

$v \notin D(G)$. $\sqsupset \exists$ максимальное парочсочетание графа $G \setminus a$, не покрываюшее v. $\exists w$ – сосед a в $D(G)$

M_w – максимальное паросочетание G, не покрывающее w, M_w покрывает v

$M' \bigoplus M_w$

1. v – конец пути чётной длины P, тогда $M_w \bigoplus P$ – паросочетание того же размера, не покрывающее $r \implies r \in D(G)$
2. v и a – концы одного пути. $M_w \bigoplus P \cup aw$ – паросочетание того же размера, не покрывающее $v \implies v \in D(G)$
3. v – конец нечётного пути P, второй конец не a. Тогда $M' \bigoplus P$ – паросочетание в $G \setminus a$, имеющее больший размер

■

Теорема 19 (Галлаи, Эдмондс)**.** G – граф, $D_1, \dots, D_k$ – к. св. $D(G)$

1. $C(G)$ имеет совершенное паросочетание
2. $D_1, D_2, .., D_k$ – фактор-критические
3. $\forall$ максимальное паросочетние G :
   - совершенное паросочетание $C(G)$
   - почти совершенное паросочетание в $D_1, \dots, D_k$
   - $\forall$ вершина из $A(G)$ покрывается ребром в $D(G)$
4. $\mathrm{Def}\, G = k - |A|$

Доказательство. $\begin{cases} D(G \setminus A) = D(G) \\ A(G \setminus A) = \emptyset \\ C(G \setminus A) = C(G) \\ \alpha'\left(G \setminus A\right) = \alpha'(G) - |A| \end{cases}$

$C(G)$ имеет совершенное паросочетание

$\alpha'(D_i \setminus u) = \alpha'(D_i)$ для любого $u \in D - i \implies$ по теореме Галлаи D_i – фактор-критические графы

$\lhd M$ – максимальное паросочетание в G

$|M'| \geqslant |M| - |A| = \alpha'(G) - |A| = \alpha'(G \setminus A) \implies M'$ – максмальное паросочетание в $G \setminus A \implies M' = M_C \cup \bigcup\limits_{u=1}^{k} M_{D_i}$ ∎

Задача 1 (Задача о факторе в графе)**.** G, k-фактор

$V, E_k \subseteq E$

$\forall v \quad \deg_{E_k} v = k$

1-фактор – совершенное паросочетание

2-фактор – разбиение на циклы

3-фактор – кубическая декомпозиция

Определение 32 (f-фактор)**.** $f = (f_1, \dots, f_n)$

$V, E_f \subseteq E$

$\deg_{E_f} v = f_v$

k-фактор – f-фактор, $f_i = k$

Для каждого ребра создаём копию вершин и создаём вершины избытка. Находим совершенное паросочетание.

1.10 Случайные графы

$\Omega, p : \Omega \to \exists \quad p(\omega) \geqslant 0 \quad \sum\limits_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$

Идея: Многие процессы, свойства объектов, дороги, соединения сетевые, беспроводные, могут в определённом смысле считать случайными.

Определение 33 (модель Эрдон-Реньи)**.** $1 \dots n$ – вершины $\binom{n}{2}$ возможных рёбер

$p(n)$ – с такой вероятностью мы берём каждое ребро и не берём с $q = 1 - p = 1 - p(n)$

$G(n,p) \quad |\Omega| = 2^{\binom{n}{2}}$

Вероятность конкретного графа $p(G) = p^m \left(1-p\right)^{\binom{n}{2} - m}$

Изучаем события и случайные величины.

Рассмотрим случайную величину – количество рёбер. $m : \Omega \to \mathbb{R} \quad Em = p\binom{n}{2} \quad Em = \sum\limits_{u,v} E\chi_{uv} = \sum\limits_{u,v} p = p\frac{n(n-1)}{2}$

Интересно изучать поведение величин при $n \to \infty$

Пример. $p = \frac{1}{n^3} \quad Em = \frac{1}{n^3} \frac{n^2 - n}{2} \ \frac{1}{n} \to 0$

$P\left(\xi \geqslant k \cdot E\xi\right) \leqslant \frac{1}{k}$

$P\left(m \geqslant 1\right) = P\left(m \geqslant n \cdot \frac{1}{n}\right) \leqslant n$

$p = \frac{1}{n^2} \quad Em \to \frac{1}{2}$

$p = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad Em = o(1) \to 0$

$P\left(m \geqslant 1\right) = P\left(m \geqslant \frac{1}{Em} Em\right) \leqslant Em \to 0$ – метод первого момента

Теорема 20. $A \subseteq G(n,p)$. A асимптотически почти наверное (апн) выполнена, $p(A) \to 1$ при $n \to \infty$

$G, \xi : G(n,o) \to \mathbb{N}_0$ – количество гаджетов

$A \subseteq G(n,p) \quad \xi \geqslant 1$

Лемма 24. $E\xi \to 0 \implies A$ апн ложно

Утверждение 14. $p = o\left(\frac{1}{n}\right) \implies G(n,p)$ апн не содержит $\triangle$

Доказательство. ξ – количество $\triangle$

$E\xi = \binom{n}{3}E_{\chi_\triangle} = \binom{n}{3}p^3 = \binom{n}{3}o\left(\frac{1}{n^3}\right) \to 0$ ■

$p = \frac{1}{n} \quad P(m=0) = (1-p)^{\binom{n}{2}} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \to \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{n-1}{2}} \to 0$

$p = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \to$ апн рёбер нет

$p = \omega\left(\frac{1}{n^2}\right)$ – апн рёбра есть

$P(m=0) = (1-p)^{\binom{n}{2}} = (1-p)^{\frac{1}{p}\cdot\binom{n}{2}\cdot p} \to e^{-p\binom{n}{2}} = e^{-\omega(1)} \to 0$

$p = \frac{c}{n^2} \quad Em = \frac{c}{2} \quad P(m=0) = (1-p)^{\binom{n}{2}} \sim e^{-\binom{n}{2}p} = e^{-\frac{c}{2}}$

Лемма 25 (Метод вторых моментов)**.** $\frac{D\xi}{(E\xi)^2} \to 0 \implies$ апн A истинно

Доказательство. Неравенство Чебышёва

$E\xi^2 = (E\xi)^2(1+o(1)) \implies A$ апн истинно ■

Теорема 21. G имеет диаметр 2, имеет строгий порог $t(n) = \sqrt{\frac{2\ln n}{n}}$

$A \iff \exists$ объект $\alpha \implies En_\alpha$

$En_\alpha \to 0 \implies A$ а.п.н не выполнено

$En_\alpha \to \infty \quad E(n_\alpha)^2 = (En_\alpha)^2(1+o(1)) \implies A$ а.п.н выполнено – правило вторых моментов

(u,v) – плохая, если

1. $uv \notin E$
2. $N(u) \cap N(0) = \emptyset$

i, j, $I_{ij} = \begin{cases} 1, (i,j) \in Bad \\ 0, (i,j) \notin Bad \end{cases}$

$EI_{ij} = P((i,s) \in Bad) = (1-p)(1-p^2)^{n-2}$

$EB = E\sum_{i<j} I_{ij} = \binom{n}{2}(1-p)(1-p^2)^{n-2} = \binom{n}{2}\left(1-\sqrt{C\frac{\ln n}{n}}\right)\left(1-\frac{C\ln n}{n}\right)^{n-2} \approx \frac{n^2}{2}\left(1-\sqrt{C}\frac{\ln n}{n}\right)\left(1-\frac{C\ln n}{n}\right)^{n} \approx \frac{n^2}{2}e^{-c\ln n} = \frac{n^2\cdot n^{-c}}{2} = \frac{1}{2}n^{2-c}$

C – константа > 2 или $C = \omega(1)$, то $EB \to 0$ и G апн имеет диаметр 2

$EB^2 = E\left(\sum_{i<j} I_{ij}\right)^2 = E\left(\sum_{\substack{i<j\\k<l}} I_{ij}I_{kl}\right)$

1. $|\{i,j,k,l\}| = 4$

   $I_{ij}I_{kl} = 1 \iff (i,j) \in Bad, (k,l) \in Bad$

   $(1-p)^2(1-p^2)^{2(n-2)}$

   $E\left(\sum_{\substack{i<j\\k<l\\|ijkl|=4}} I_{ij}I_{kl}\right) \approx \frac{n^4}{4}\left(1-\sqrt{C}\frac{\ln n}{n}\right)\left(1-\frac{C\ln n}{n}\right)^{2(n-2)} = \frac{n^{4-2C}}{4}(1+o(1)) = (EB)^2(1+o(1))$

2. 3. $(1-p)^2(1-2p^2+p^3)^{n-3}$

   $E \approx \alpha n^{3-2C} = o\left((EB)^2\right)$

3. 2 $IijIkl = Iij^2 = Iij$

   $E = EB = o\left((EB)^2\right)$, т.к. $EB \to \infty, C < 2$ или $C = o(1)$

Как понять какой порог? Возьмём из предыдущего примера $E \approx n^2(1-p^2)^n \to z$

$n^2\left(1-\frac{p_2 n}{n}\right)^n 0 \to z$

$n^2 r^{-p^2 n} \to z$

$e^{2\ln n - p_2 n} \to z$

$2\ln n - p^2 n \to \widetilde{z}$

$p_2 n = 2\ln n$

$p = \sqrt{\frac{2\ln n}{n}}$

1.11 Распределение степеней

$E\deg = (n-1)p$

Теорема 22. $P\left(|\deg u - np| > \lambda\sqrt{np}\right) \leqslant 3e^{-\frac{\lambda^2}{8}}$ (Chernoff Bound)

$E \deg u = \sum\limits_{v} I\,(\exists \text{ ребра } uv) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} B(P)$

Рассмотрим $p = \frac{d}{n}$

$P(\deg u = k) = \binom{n}{k}\frac{d^k}{n^k}\left(1 - \frac{d}{n}\right)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{d^k}{n^k}\left(1 - \frac{d}{n}\right)^{n-k} = \frac{\sqrt{2\pi n}n^n d^k}{\sqrt{2\pi(n-k)}n^{n-k}(1-\frac{k}{n}^{n-k}n^k e^k}\left(1 - \frac{d}{n}\right)^{n-k} =$

$\approx \frac{n^k}{k!}\frac{d^k}{n^k}\left(1 - \frac{d}{n}\right)^n = d^{\frac{k}{k!}}e^{-d}$ – распределение Пуассона.