Конспект по линейной алгебре
II семестр

Коченюк Анатолий

12 февраля 2021 г.

Глава 1

Дополнительные главы линейной алгебры

1.1 Полилинейная формы

Замечание (вспомним)**.** Линейное отображение $\varphi(x+\alpha y) = \varphi(x) + \alpha \cdot \varphi(y)$

Определение 1. $\lhd X$ – ЛП, $\dim X = n$

X^* – сопряжённое к X пространство.

Полилинейной формой (ПЛФ) называется отображение:

$$U : X \times X \times \ldots \times X \times X^* \times X^* \times \ldots \times X^* \to K,$$

обладающее свойством линейности по каждому аргументу.

$\sqsupset x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p \in X \quad y^1, y^2, \ldots, y^q \in X^*$

$u\left(x_1, x_2, \ldots, x_i'^1 + \alpha x_i'', \ldots, x_p, y^1, y^2, \ldots, y^q\right) =$
$= \left(x_1, x_2, \ldots, x_i', \ldots, x_p, y^1, y^2, \ldots\right) + \alpha u\left(x_1, x_2, \ldots, x_i'', \ldots, x_o, y^1, y^2, \ldots, y^q\right)$

Замечание. Пара чисел (p, q) называется валентностью полилинейной формы

Пример. $\mathbb{R}^n \quad f : \mathbb{R} \to K$ – ПЛФ $(1, 0)$

$\hat{x} : \mathbb{R}^{n*} \to K$ – ПЛФ(0,1)

Скалярное произведение $u(x_1, x_2) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ – ПЛФ(2,0)

Смешанное произведение $w(x_1, x_2, x_3) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ – ПЛФ(3,0)

$\sqsupset u, w$ – две полилинейные формы валентности (p, q)

Определение 2.

1. $u = w \iff$

   $$u(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^q) = w(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^q) \quad \forall x_1 \ldots x_p y^1 \ldots y^1$$

2. Нуль форма $\Theta \quad \Theta\left(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^q\right) = 0$
3. Суммой ПЛФ валентностей $(p, q) \quad u+v$ называется такое отображение ω, что $\omega(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^1) = u\left(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^1\right) + v\left(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^1\right)$

   Лемма 1. w – ПЛФ (p, q)

   $w\left(\ldots x_i' + \alpha x_i'' \ldots\right) = w\left(\ldots x_i'\right) + \alpha w\left(\ldots x_i'' \ldots\right)$

4. Произведением полилинейной формы на число λ называется отображение λu, такое что:

   $$(\lambda u)\left(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^1\right) = \lambda \cdot u\left(x_1, \ldots, x_p, y^1, \ldots, y^1\right).$$

   Лемма 2. λu – ПЛФ (p, q)

$\sqsupset \Omega_p^q$ – множество ПЛФ (p, q)

Утверждение 1. Ω_p^q – ЛП

$\sqsupset \{e_j\}$ – базис $X \quad \sqsupset \{f^k\}$ – базис X^*

$x_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_1^{j_1} e_{j_1} = \xi_1^{j_1} e_{j_1}$. Дальше значок суммы писаться не будет (иначе помрём) (соглашение о немом суммировании).

$x_2 = \xi_2^{j_1} e_{j_2} \quad \ldots \quad x_p = \xi^{j_p} e_{j_p}$

$y^1 = \eta_{k_1}^1 f^{k_1} \quad y_2 = \eta_{k_2}^2 f^{k_2} \quad \ldots \quad y^1 = \eta_{k_q}^q f^{k_q}$

$$\mathrm{w}(x_1, x_2, \ldots, x_o, y^1, y^2, \ldots, y^q) = w\left(\xi_1^{j_1} e_{j_1}, \xi_2^{j_2} e_{j_2}, \ldots, \xi_p^{j_p} e_{j_p}, \eta_{k_1}^1 f^{k_1}, \eta_{k_2}^2 f^{k_2}, \ldots, \eta_{k_q}^q f^{k_q}\right)$$

$$= \xi_1^{k_1}\xi_2^{j_2}\dots\xi_p^{j_p}\eta^1_{k_1}\eta^2_{k_2}\dots\eta^q_{k_q}\underbrace{w\left(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_p}, f^{k_1}, f^{k_2}, \dots, f^{k_q}\right)}_{\omega^{k_1k_2\dots k_q}_{j_1j_2\dots j_p}\text{ – тензор ПЛФ}}$$
$$= \xi_1^{k_1}\xi_2^{j_2}\dots\xi_p^{j_p}\eta^1_{k_1}\eta^2_{k_2}\dots\eta^q_{k_q}\omega^{k_1k_2\dots k_q}_{j_1j_2\dots j_p}.$$

Лемма 3. Задание полилинейной формы эквивалентно заданию её тензора в известном базисе

$$w \longleftrightarrow \omega^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p} = \omega^{\vec{j}}_{\vec{i}}.$$

Доказательство. (выше) ■

Лемма 4. $v \longleftrightarrow v^{\vec{j}}_{\vec{i}} \quad w \longleftrightarrow \omega^{\vec{j}}_{\vec{i}}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} w + v \longleftrightarrow v^{\vec{j}}_{\vec{i}} + \omega^{\vec{j}}_{\vec{i}} \\ \alpha v \longleftrightarrow \alpha v^{\vec{j}}_{\vec{i}} \end{cases}$$

Замечание. ${}^{s_1s_2\dots s_p}_{t_1t_2\dots t_q}w$ – индексация базиса Ω^q_p

${}^{s_1s_2\dots s_p}_{t_1t_2\dots t_q}w^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p}$

${}^{s_1s_2\dots s_p}_{t_1t_2\dots t_q}w\left(x_1, x_2, \dots, x_p, y^1, y^2, \dots, y^q\right) = \xi_1^{s_1}\xi_2^{s_2}\dots\xi_p^{s_p}\eta^1_{t_1}\eta^2_{t_2}\dots\eta^q_{t_q}$

Замечание. $\lhd\, {}^{s_1s_2\dots s_p}_{t_1t_2\dots t_q}w^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p} = {}^{s_1s_2\dots s_p}_{t_1t_2\dots t_q}\ w\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}, f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q}\right)$
$= \delta^{s_1}_{i_1}\delta^{s_2}_{i_2}\dots\delta^{s_p}_{i_p}\delta^{j_1}_{t_1}\delta^{j_2}_{t_2}\dots\delta^{j_q}_{t_q}$

Пример. $\mathbb{R}^2_2$

$$a_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} \quad a_4 = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$a_1 =^{11} a_1 \quad a_2 =^{12} a_2 \quad a_3 =^{21} a_3 \quad a_4 =^{22} a_4$

Теорема 1. Набор $\left\{{}^{s_1s_2\dots s_p}_{t_1t_2\dots t_q}W\right\}^{t_1t_2\dots t_p}_{s_1s_2\dots s_p}$ – образует базис в Ω^p_q

Доказательство.

ПН $\lhd u \in \Omega^p_q$

$$u\left(x_1, x_2, \dots, x_p, y^1, y^2, \dots, y^q\right) = \xi^{i_1}_1 \xi^{i_2}_2 \dots \xi^{i_p}_p \eta^1_{j_1} \eta^2_{j_2} \dots \eta^q_{j_q} u^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} =$$

$$= {}^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} w\left(x_1, x_2, \dots, x_p, y^1, y^2, \dots, y^q\right) u^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_p, y^1, y^2, \dots, y^q.$$

$\implies u = {}^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} w \cdot u^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$

ЛНЗ ${}^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} W \alpha^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} = \Theta$ Посчитаем на наборе $e_{s_1}, e_{s_2}, \dots, e_{s_p}, f^{t_1}, f^{t_2}, \dots, f^{t_q}$

$\delta^{i_1}_{s_1} \delta^{i_2}_{s_2} \dots \delta^{t_1}_{j_1} \delta^{t_2}_{j_2} \dots \delta^{t_q}_{j_q} \alpha^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0$

$\alpha^{t_1 t_2 \dots t^q}_{s_1 s_2 \dots s_p} = 0 \quad \forall s_1 \dots s_p t_1 \dots t_q \implies$ ЛНЗ (альфа 0 на всех, значит она все нули)

■

Замечание. Размерность пространства полилинейных форм $\dim \Omega^p_q = n^{p+q}$

1.2 Симметричные и антисимметричные ПЛФ

$\lhd \Omega^p_0 \qquad u\left(x_1, x_2, \dots, x_p\right)$

$\lhd \sigma$ – перестановка чисел от 1 до p. $\sigma\left(1, 2, \dots, p\right) = \left(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(p)\right)$

Определение 3. Полилиненйая форма u называется симметричной, если

$$u\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}\right) = u(x_1, x_2, \dots, x_p.$$

Лемма 5. Симметричные полилинейные формы валентности $(p, 0)$ образуют подпространство Σ^p линейного пространства Ω^p_0

Доказательство. $\sqsupset u, v \in \Sigma^p$

$$\lhd (u+v)\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}\right) = u\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}\right) + v\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}\right) =$$

$$= u\left(x_1, x_2, \dots, x_p\right) + v\left(x_1, x_2, \dots, x_p\right) = (u+v)\left(x_1, x_2, \dots, x_p\right)$$

Так же с умножением на число. ■

Определение 4. Полилинейная форма u валентности $(p, 0)$ называется антисимметричной, если:

$$u\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}\right) = (-1)^{[\sigma]} u(x_1, x_2, \dots, x_p).$$

Лемма 6. Антисимметричные полилинейные формы валентности $(p, 0)$ образуют подпространство Λ^p линейного пространства Ω_0^p

Лемма 7. Полилинейная форма $u \in \Lambda^p \iff u = 0$ при любых двух совпадающих аргументах.

Доказательство.

$\Longrightarrow$ $\sqsupset u \in \Lambda^p$ и $x_i = x_j \quad i \neq j$

$a = \lessdot u\left(\ldots x_i \ldots x_j \ldots\right) = -u\left(\ldots x_j \ldots x_i \ldots\right) = -a \implies a = 0$

$\Longleftarrow$ Известно, что если $x_i = x_{j \neq i}$, то $u\left(\ldots x_i \ldots x_j \ldots\right) = 0 \quad \forall i, j$

Докажем, что u принадлежит Λ^p

$x_i = x_j = x_i' + x_i''$

$u\left(\ldots x_i \ldots x_j \ldots\right) = u\left(\ldots x_i' + x_i'' \ldots x_i' + x_i'' \ldots\right) = u\left(\ldots x_i' \ldots x_i'\right) + u\left(x_i' \ldots x_i''\right) + u\left(\ldots x_i'' \ldots x_i' \ldots\right) + u\left(\ldots x_i'' \ldots x_i'' \ldots\right)$

Правая часть равна 0. В левой части первое и последнее слагаемые тоже нули, а значит получам

$$u\left(\ldots x_i' \ldots x_i''\right) = -u\left(\ldots x_i'', \ldots x_i'\right).$$

■

Лемма 8. Полилинейная форма $u \in \Lambda^p \iff u\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) = 0$ лишь только $\{x_i\}_{i=1}^p$ – ЛЗ

Доказательство.

$\Longrightarrow$ $\sqsupset \{x_i\}_{i=1}^p$ – ДЗ $\implies x_k = \sum\limits_{j \neq k} \beta^j x_j = \beta^1 x_1 + \beta^2 x_2 + \ldots + \beta^p x_p$

$\lessdot u\left(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_p\right) = u\left(x_1, \ldots, \beta^1 x_1 + \beta^2 x_2 + \ldots + \beta^p x_p, \ldots, x_p\right) = 0$

При раскрытии будут выносится коэффициенты и получится образ от совпадающих аргументов (хотя бы двух), который 0 по пред. лемме, а значит всё выражение, как сумма нулей, будет нулём.

$\Longleftarrow$ $u\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) = 0$, когда $\{x_i\}_{i=1}^n$ – ЛЗ $\implies u \in \Lambda^p$

$u(x_1, x_2, \ldots, x_p) = u\left(x_1 + \sum \alpha^i x_i, \ldots, x_p + \sum \alpha^i x_i\right) = u(x_1, x_2, \ldots, x_p) +$
$u\left(x_1, \ldots, \sum \alpha^i x_i\right) + u\left(\sum \alpha^i x_i, \ldots, x_p\right) = u(x_1, x_2, \ldots, x_p) + \sum\limits_{j=2}^{p} \alpha^i u(x_1, \ldots, x_i) +$
$\sum\limits_{i=1}^{p-1} \alpha^i u(x_i, \ldots, x_p)$

$\blacksquare$

1.3 Практика 02.12

1.3.1 Тензоры

$\omega_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{j_1 j_2 \ldots j_q}$

Определение 5 (Соглашение об упорядочивании индексов)**.** Слева направо сверху вниз: $(p, q) \quad r = p + q$ – ранг тензора, сколько значков.

$r = 0$ – число ω, инвариант

$r = 1$: a_i – строчка $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$ b^j – столбик $\begin{bmatrix} b^2 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix}$

$r = 2$: a_{ij} b^i_j c^{ij} – первый индекс всегда строка, второй всегда столбец

$$a_{ij} \longleftrightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$b^i_j \longleftrightarrow B = \begin{bmatrix} b^1_1 & b^1_2 & b^1_3 \\ b^2_1 & b^2_2 & b^2_3 \\ b^3_1 & b^3_2 & b^3_3 \end{bmatrix}$$

$r = 3 : a_{ijk}$ b^i_{jk} c^{ij}_k d^{ijk}

1й – строка, 2й – столбец, 3й – слой

$$a_{ijk} \longleftrightarrow A = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{111} & a_{121} & a_{112} & a_{122} \\ a_{211} & a_{221} & a_{212} & a_{222} \end{array}\right]$$

Пример. Построить тензор $\varepsilon^{ij}_k = \begin{cases} -1 & (i, j, k) - - \\ 1 & (i, j, k) - - \\ 0 & (i, j, k) \text{ – не перестановка} \end{cases}$

$r = 4$: строка, столбец, слой, сечение

a_{ijkl} b^i_{jkl} c^{ij}_{kl} d^{ijk}_l e^{ijkl} – последний тензор типа 4,0 (число вверху, число внизу)

$$c^{ij}_{kl} \longleftrightarrow C = \left[\begin{array}{cc|cc} c^{11}_{11} & c^{12}_{11} & c^{11}_{12} & c^{12}_{12} \\ c^{21}_{11} & c^{22}_{11} & c^{21}_{12} & c^{22}_{12} \\ \hline c^{11}_{21} & c^{12}_{21} & c^{11}_{22} & c^{12}_{22} \\ c^{21}_{21} & c^{22}_{21} & c^{21}_{22} & c^{22}_{22} \end{array}\right]$$

Пример. $c^{ij}_{kl} = \begin{cases} 1 & i = k \neq j = l \\ -1 & i = l \neq j = k \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

1.3.2 Операции с тензорами

1. Линейные операции:

$\omega^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} \qquad v^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$

$u = v + \omega \quad u^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} = (v + \omega)^{\vec{j}}_{\vec{i}} = v^{\vec{j}}_{\vec{i}} + \omega^{\vec{j}}_{\vec{i}}$ – матричное сложение.

$(\lambda v)^{\vec{j}}_{\vec{i}} = \lambda \cdot v^{\vec{j}}_{\vec{i}}$

2. Произведение:

   $u^{\vec{j}}_{\vec{i}} \quad v^{\vec{t}}_{\vec{s}}$

   $\omega = u \cdot v \quad \omega^{\vec{k}}_{\vec{l}} = u^{\vec{j}}_{\vec{i}} \cdot v^{\vec{t}}_{\vec{s}} = \omega^{j_1 j_2 \dots j_{q_1} t_1 t_2 \dots t_{q_2}}_{i_1 i_2 \dots i_{p_1} s_1 s_2 \dots s_{p_2}}$

   $\vec{l} = \vec{j}\vec{t} = j_1 \dots j_{q_1} t_1 \dots t_{q_2}$

   $\vec{l} = \vec{i}\vec{s} = i_1 \dots i_{p_1}, s_1 \dots . s_{p_2}$

Пример. $a^i_j \longleftrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$b_k \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$a^i_j b_k = \omega^i_{jk}$. То же самое можно записать как $a \otimes b = \omega$

$\omega \longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -3 & -4 \end{array} \right]$

$v = b \otimes a \quad v^i_{kj} = b_k \cdot a^i_j \longleftrightarrow V = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 4 & -4 \end{array} \right]$