Математический анализ, 3 семестр

Коченюк Анатолий

12 октября 2021 г.

Глава 1

Анализ нескольких переменных. Функциональные ряды. Теория меры, Криволинейные интегралы.

литература – Виноградов, Виноградов-Громов

1.1 Вспоминаем

$O \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое, $f : O \to R, f \in C^{N+1}(O), N \in \mathbb{N}$

$[a, x]$ – замкнутый отрезок $\subset O, a \neq x \implies \exists x \in (a, x)$:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{N} \frac{d_a^k f(x-a)}{k!}}_{\text{Тейлоровский многочлен порядка N}} + \frac{d_c^k f(x-a)}{(N+1)!}$$

$T_{N,a,f}$

Определение 1. $\alpha \in \mathbb{Z}_{+}^{n}$ – пространство мультииндексов

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

$\alpha! = \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n$

$f_{(a)}^{(\alpha)} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_n} x_n \dots \partial^{\alpha_1} x_1}$

$h = (h_1, \dots, h_n) \quad d_a^k f(h) = \sum\limits_{\substack{\alpha \in (Z_+)^n \\ |\alpha| = k}} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^{\alpha}$

1.2 Полиномиальная форма Ньютона

$N \in \mathbb{N} \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$(x_1 + \dots + x_n)^N = \sum\limits_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha| = N}} \frac{N!}{\alpha!} x^{\alpha}$

Доказательство. $p(x) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^N$

$p'_{x_1} = N\,(x_1 + \dots + x_n)^{N-1} = p'_{x_2} = \dots = p'_{x_n}$

$p^{\alpha} = N(N-1) \dots (N - |\alpha| + 1)\,(x_1 + \dots + x_n)^{N - |\alpha|}$

$|\alpha| \leqslant N + 1 \implies p^{(\alpha)} \equiv 0$

$|\alpha| < N \implies p^{(\alpha)}(0) = 0$

Неноль получается, только если $|\alpha| = N \quad p^{(\alpha)}(0) = N!$

Если подставить, то получим:

$\sum \frac{N!}{\alpha!} x^{\alpha} \quad h = x - a = x - 0$ ■

1.3 Оценка однородных многочленов

Определение 2. $\sum\limits_{\substack{\alpha \in (Z_+)^n \\ |\alpha| = N}}^{n} b_{\alpha} x^{\alpha}$ – однородный многочлен степени N

В более широком смысле $b_{\alpha} \in \mathbb{R}^m$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad p\,(tx) = t^N p(x)$, т.е. однородный многочлен является однородной функцией.

Утверждение 1. $\exists\ p(x) = \sum\limits_{\substack{\alpha\in(Z_+)^n \\ |\alpha|=N}} \frac{N!}{\alpha!} C_\alpha x^\alpha \quad C_\alpha \in \mathbb{R}^m, \exists\ M : \|C_\alpha\| \leqslant M$

Тогда $\|p(x)\| \leqslant M\left(\sqrt{n}\|x\|\right)^N$

Доказательство. $\|p(x)\| \leqslant \sum\limits_{\substack{\alpha\in(Z_+)^n \\ |\alpha|=N}} \frac{N!}{\alpha!}|x^\alpha| \underbrace{\|C_\alpha\|}_{\leqslant M} \leqslant M \sum\limits_{\substack{\alpha\in(Z_+)^n \\ |\alpha|=N}} \frac{N!}{\alpha!} \underbrace{|x^\alpha|}_{|x_1|^{\alpha_1}\dots|x_n|^{\alpha_n}} = M\cdot(|x_1|+\ldots+|x_n|)^N \leqslant M\left(\sqrt{n}\|x\|\right)^N$

$\sum\limits_{k=1}^n |x_k|\cdot 1 \leqslant \sqrt{\sum\limits_{k=1}^n x_k^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{k=1}^n 1} = \|x\|\sqrt{n}$ – неравенство Коши, что сумма скаларяных произведений меньше произведения норм ■

Формула Тейлора-Лагранжа на отображения буквально не переносится $f \in C^1(O) \quad f(x)-f(a) = d_c f(x-a)$

для отображений нарушается

$f(t) = \begin{pmatrix}\cos t \\ \sin t\end{pmatrix} a = 0$, “x”$= 2\pi \quad f(x)-f(a) = 0$

$f'(t) = \begin{pmatrix}-\sin t \\ \cos t\end{pmatrix}$

Теорема 1. Открытое $O \subseteq \mathbb{R}^n, n, m \in \mathbb{N} \quad N \in \mathbb{Z}_+, f \in C^{N+1}(O \to \mathbb{R}^m)$

$[a,x] \in O, a \neq x$

Тогда $f(x) - T_{N,a,f}(x)$ – остаточный член, который оценивается так:

$\|f(x) - T_{N,a,f}(x)\| \leqslant \frac{1}{(N+1)!}\sup_{x\in(a,x)}\|d_c^{N+1} f(x-a)\|$

$\sum\limits_{\substack{\alpha\in(\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha|\leqslant N}} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha$

1.4 Отступление

$f, g : O \to \mathbb{R}^m$, дифференцируемые в O

$d\langle f,g\rangle = \langle df, g\rangle + \langle f, dg\rangle$

$d\langle f,g\rangle(h) = \langle df(h), g\rangle + \langle f, dg(h)\rangle$

$d^2\langle f,g\rangle = \left\langle d^2 f, g\right\rangle + 2\langle df, dg\rangle + \left\langle f, d^2 g\right\rangle$

$d^N \langle f, g\rangle = \sum\limits_{k=0}^{N} C_N^k \left\langle d^k f d^{N-k} g \right\rangle$ (проверка как в одномерном случае)

Тогда, если $v \in \mathbb{R}^m, v = const$

$d^N \langle f, v\rangle = \left\langle d^N f, v\right\rangle$

Доказательство теоремы 1. Если $v \in \mathbb{R}^m, v$ – фиксирована

$g(x) = \langle f(x), v\rangle : O \to \mathbb{R}, g \in C^{N+1}\left(O \to \mathbb{R}\right)$

$g(x) - T_{N,a,g}(x) = \frac{1}{(N+1)!} d_c^{N+1} g(x-a)$ по уже установленной теореме Тейлора-Лагранжа для функций

$T_{N,a,g}(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{\left\langle d^k f, v\right\rangle (x-a)}{k!}$

$\left\langle f(x) - \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{d^k f(x-a)}{k!}, v \right\rangle = \frac{1}{(N+1)!} \underbrace{\left\langle d_c^{N+1} f(x-a), v\right\rangle}_{\leqslant \|d_c^{N+1} f \ldots\| \|v\|}$

$$|\text{левая часть}| \leqslant \underbrace{\frac{1}{(N+1)!} \sup_{c \in [a,x]} \|d_c^{N+1} f(x-a)\|}_{\text{не зависит от выбора } v} \cdot \|v\|$$

Если мы возьмём v остаточным членом, то мы получим оценку остаточного члена, не зависящую от v

$v = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{d^k f(x-a)}{k!}$

$\|v\|^{\cancel{2}} \leqslant \frac{1}{(N+1)!} \sup \ldots \cancel{\|v\|}$ (сократили на $\|v\|$)

$\|f - T_{N,a,f}\| \leqslant \frac{1}{(N+1)!} \sup \ldots.$ ■

1.5 Частный случай: формула конечных приращений

$O \subseteq \mathbb{R}^n, f \in C^1\left(O \to \mathbb{R}^m\right), [a, x] \subseteq O \quad a \neq x$, тогда

$$\|f(x) - f(a)\| \leqslant \sup_{c \in [a,x]} \|d_c f\| \|x - a\|$$

Следствие 1. Пусть $f \in C^1\left(O \to \mathbb{R}^m\right)$, где O – открытое множество. Пусть K – выпуклый компакт, $K \subseteq O$. Тогда

$$\forall a, b \in K \quad \|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_{c \in K} \|d_c f\| \|b - a\|$$

1.6 Об оценке нормы дифференциала

$p(x) = \sum\limits_{\substack{\alpha\in(\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha|\neq N}} \frac{N!}{\alpha!} C_\alpha x^\alpha \quad \forall\alpha\ \|C_\alpha\| \leqslant M$

$\|p(x)\| \leqslant M\left(\sqrt{n}\|x\|\right)^N$

$d_c^N f = \sum \frac{N!}{\alpha!} \underbrace{\frac{f^{(\alpha)}}{N!}}_{=C_\alpha} x^\alpha$

$M = \max\limits_{\substack{\alpha\in(Z_+)^n \\ c\in[a,x] \\ |\alpha|=N}} \|\frac{f^\alpha(x)}{N!}\| \implies \|d_c^N f(x-a)\| \leqslant M\left(\sqrt{n}\|x-a\|\right)^N$

Пусть $O \subseteq \mathbb{R}^n$ открыто, $f \in C^1(O \to \mathbb{R}^m)$

K – компактно в $O \implies f$ липшецево на K, т.е.

$$\exists C \in \mathbb{R} : \|f(x') - f(x'')\| \leqslant C\|x' - x''\|\ \forall x', x'' \in K$$

Следует из формулы конечных приращений и оценки дифференциала и теоремы Вейерштрасса: $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \in C(K)$

$\implies \exists x_1 : \quad \|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\| \leqslant C_1 \forall x \in K$

$M = C_1, \implies \forall x', x'' \in K \quad \|d_c f(x' - x'')\| \leqslant M\left(\sqrt{n}\|x' - x''\|\right) \quad C = M\sqrt{n}$

1.7 Экстремум функции нескольких переменных

Определение 3. $\sqsupset O \subseteq \mathbb{R}^n \quad f : O \to \mathbb{R}$

$a \in O \quad a$ называется точкой (локального) максимума, если $\exists$ окрестность $V_a : \forall x \in V_a \cap O \quad f(x) \leqslant f(a)$

Экстремум – максимум или минимум

Утверждение 2 (Необходимое условие экстремума (безусловного))**.** Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^n \quad f$, такое что $E \to \mathbb{R}$. $a \in \operatorname{Int} E$ – точка локального экстремума для f, f дифференцируема в точке a. Тогда

$$d_a f = \mathbb{O}\left(\iff \nabla f = \mathbb{O} \iff \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0\right)$$

.

Доказательство. Пусть a — точка максимума. Фиксируем $h \in \mathbb{R}^n \quad g(t) = f(a+th), t \in \mathbb{R}$. Для g точка 0 это точка максимума. Существует окрестность нуля $V'(0)$: $\forall t \in V'(0) \quad g(t) \geqslant g(0) = f(a)$, g дифференцируема в 0 как композиция, 0 – внутренний для $D(g) \implies g'(0) = 0$.

$g(t) = f\left(\varphi(t)\right)$.

$g'(t) = f'\left(\varphi(t)\right) \cdot \varphi'(t)$.

$0 = \langle \nabla f, h \rangle = \left(f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_n}\right) \begin{pmatrix} h_1 \\ \ldots \\ h_n \end{pmatrix}$. ■

1.8 Квадратичные формы

Если $Q(x)$ допускает представление в виде $Q(x) \equiv \sum\limits_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j, \quad c_{i,j} \in \mathbb{R}$. Тогда $Q(x)$ называется квадратичной формой в $\mathbb{R}^n$.

Замечание. Любая квадратичная форма есть однородная функция степени 2.

Замечание. Не умаляя общности, матрицу коэффициентов c_{ij} можно считать симметричной. Если это не так, можно перейти в такой форме $c'_{ij} = c'_{ji} = \frac{c_{ij}+c_{ji}}{2}$.

Определение 4. Квадратичная форма $Q(x)$ в $\mathbb{R}^n$ называется положительно-определённой (положительной) (Q $>$ 0), если

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad Q(x) > 0.$$

неотрицательно определённой, если неравенство нестрогое.

$Q \geqslant 0 \quad \ldots Q < 0, Q \leqslant 0$

неопределённая, если $Q \gtreqless 0 \quad \exists x^1 x^2 \in \mathbb{R}^n : Q\left(x^1\right) > 0, Q\left(x^2\right) < 0$

Пример. 1. $n = 2$ $Q(x) = 2x_1^2 - 3x_2^2 \gtreqless 0$

$Q(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 > 0$

$Q(x) = Ax_1^2 + 2Bx_1^2x_2^2 + Cx_2^2$, если $B^2 - AC$, то форма знакопеременная

Если $A \geqslant 0 \quad B^2 - AC \leqslant 0$, то $Q \geqslant 0$

$A \leqslant 0 \ldots$

Лемма 1. $\sqsupset Q(x)$ – положительная квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$

Тогда $\exists \gamma > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad Q(x) \geqslant \gamma \|x\|^2$

Доказательство. $\gamma = \min_{\|x\|=1} Q(x) = Q(x_0) > 0 \quad \|x_0\| = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\, Q(x) = Q\left(\|x\| \frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\|^2 \cdot Q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geqslant \gamma \|x\|^2$ ■

Утверждение 3 (Достаточое условие экстремума)**.** $\sqsupset f : E \to \mathbb{R}, \quad \underline{a \in \operatorname{Int} E}, d_a f = 0 \quad \exists d_a^2 f$

Тогда, если $d_a^2 f > 0$ (положительная квадратичная форма как функция дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_n$), то a это точка минимума (строгого)

Если $d_a^2 f < 0 \ldots.$

Если $d_a^2 f \gtrless$, то a <u>не</u> точка экстремума

Это не все случаи, есть нестрогие, в которых ДУЭ не применимо

Пример. $f(x, y) = x^4 - y^4$

$g(x, y) = x^4 + y^4$

для f точка $(0, 0)$ не точка экстремума, а для g – да

$\nabla f = \left(4x^3, -4y^3\right) = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$

Доказательство. ДУЭ. Пеано в точке a:

$f(x) = f(a) + d_a f(x - a) + \frac{1}{2} d_a^2 f(x - a) + o\left(\|x - a\|^2\right)$

$f(x) - f(a) = \frac{1}{2} d_a^2 f(x - a) + \underbrace{\varepsilon(x)}_{\to 0, x \to a} \|x - a\|$

Если $Q > 0$, то по лемме $\exists \gamma > 0 : Q(x - a) \geqslant \gamma \|x - a\|^2$

Т.к. $\varepsilon(x) \to 0, x \to a$, то $\exists V(a) : |\varepsilon(x)| < \frac{\gamma}{8} \forall x \in V(a) \implies \forall x \in V(a) \quad f(x) - f(a) \geqslant \frac{1}{2}\gamma \|x - a\|^2 - \frac{\gamma}{8}\|x - a\|^2 = \|x - a\|^2 \left(\frac{3}{8}\gamma\right) > 0 \quad x \neq a \implies a$ – точка строгого минимума

$Q < 0$, рассмотреть $-f$

$Q \gtrless 0 \implies \exists h_+, h_- \in \mathbb{R}^n : Q\left(h_+\right) > 0 \quad Q\left(h_-\right) < 0$, не умаляя общности $\|h_+\| = \|h_-\| = 1$

$\delta = \min\left\{\left|Q\left(h_+\right)\right|, \left|Q\left(h_-\right)\right|\right\}$

Т.к. $\varepsilon(x) \to 0, x \to a$, то $\exists$ окрестность $V_r(a) : |\varepsilon(x)| < \frac{\delta}{4}$

$|t| < r \quad f\left(a + th_+\right) - f(a) = \frac{1}{2} t^2 Q\left(x_+\right) + \varepsilon(x) t^2 \geqslant \frac{1}{2} t^2 \cdot \delta - \cdot \frac{\delta}{4} t^2 = t^2 \frac{\delta}{4} > 0$

$|Q(h_-)| \geqslant \delta$

$Q(h_-) = -|Q(h_-)| \leqslant -\delta$

$f\left(a + th_-\right) - f(a) \leqslant -\frac{\delta}{2} tse + \frac{\delta}{4} t^2 \leqslant -\frac{\delta}{2} t^2 < 0$

Таким образом в любой окрестности точки $a \quad f(x)-f(a)$ знакопеременная

■

1.9 Практика. Теорема о существовании

Теорема 2 (Теорема о неявной функции)**.** $F(x,y,z)=0$

$(x_0,y_0,z_0): \quad F(x_0,y_0,z_0)=0 \quad F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ и все функции непрерывны в (x_0,y_0,z_0)

$\implies \exists z=z(x,y) \quad z_0=z(x_0,y_0) \quad F(x,y,z(x,y))=0$ в окрестности (x_0,y_0)

Пример. $x^2+y^2-1=0$

$F(x,y) \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad y=\sqrt{1-x^2}$

$F'_y=2y \quad F'_y(x_0,y_0)=\sqrt{2}\neq 0$

$y=y(x) \quad y_0=y(y_0) \quad x^2+y^2(x)-1=0$

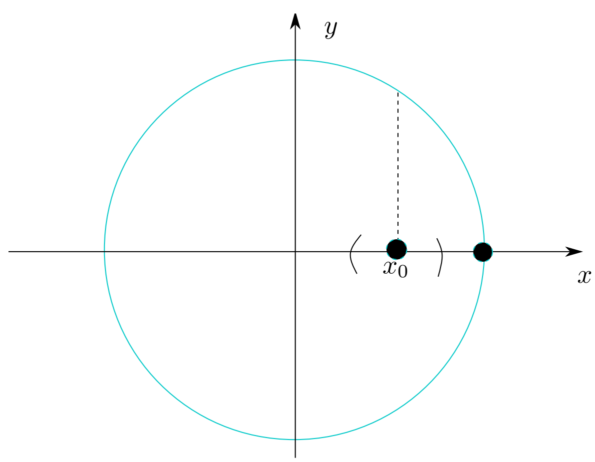

Рис. 1.1: exex

$F(x,y,z)$ И все условия выполняются. как найти $\frac{\partial}{\partial x}z(x,y)$

$F(x,y,z(x,y))=0$

$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,z(x,y))=0$

$$\begin{cases} F'_x+F'_z\cdot\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=0 \\ F'_y+F'_z\cdot\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=0 \end{cases}$$

Отсюда выражается

Определение 5. Многозначная функция f – соответствие $x \mapsto f(x)$ – множество

Пример. $x \mapsto \pm\sqrt{1-x^2} = \left\{\sqrt{1-x^2}, -\sqrt{1-x^2}\right\}$

$x^{\frac{1}{2}} = y \qquad x = y^2$ – задаёт неявную функцию $y(x)$

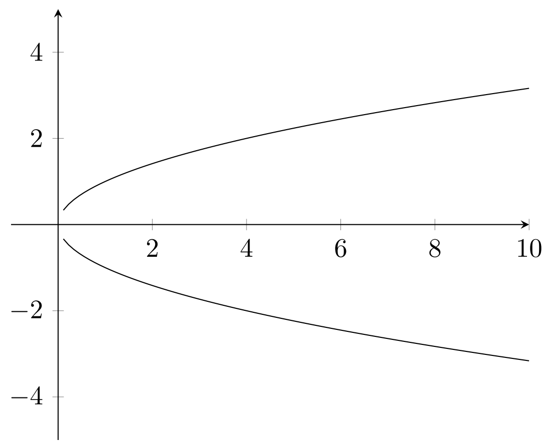

Рис. 1.2: $x = y^2$

Пусть $y(x)$ – многозначная функция. Тогда выбор единственного $y \in y(x)$ для $\forall x$ задаёт явную функцию (однозначная функция)

Каждый такой выбор задаёт однозначную функцию называемую ветвью. Ветви могут быть непрерывными, например в $x = y^2$ бесконечность ветвей. Чтобы уточнить, нужно проговаривать непрерывная ветвь. дифференцируемая ветвь и т.д.

Пример. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$

Задаёт многозначную функцию. Определить для каких x она будет 1-, 2-, 3-, 4-значной

1.10 Лекция 2

$$d_a^2 f \longleftrightarrow \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(a) & f''_{x_1x_2}(a) & f''_{x_1x_3}(a) & \dots \\ f''_{x_2x_1}(a) & f''_{x_2x_2}(a) & f''_{x_2x_3}(a) & \dots \\ f''_{x_2x_1}(a) & f''_{x_2x_2}(a) & f''_{x_2x_3}(a) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Теорема 3 (Критерий Сильвестра).

- Если все главные миноры положительны, то соответствующая квадратичная форма положительна (a – точка минимума).
- Если $\Delta_1 < 0 \quad \Delta_2 > 0 \quad \Delta_3 < 0 \ldots$, то квадратичная форма отрицательна (a – точка максимума)
- $\Delta_k \neq 0$, и не реализуется ни первый случай, ни второй, то квадратичная форма неопределённая (т.е. экстремума нет)

Замечание. $Q(h) = d_a^2 f(h)$. $Q(h) = \langle A \cdot h, h \rangle \quad A = \left(f''_{x_i x_j} \right)_{ij}$

Задача 1. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ – исследовать на экстремум

Доказательство. Необходимое условие экстремума $z'_x = 0 \quad z'_y = 0$.

$z'_x = 2x - y - 2 \quad z'_y = -x + 2y + 1$

$(x, y) = (1, 0)$, других нет, потому что определитель хороший.

Достаточное условие экстремума: $z''_{xx} = 2, \quad z''_{xy} = -1, \quad z''_{yy} = 2$. $\left[d^2_{(1,0)} f \right] \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$\Delta_1 = 2 > 0 \quad \Delta_2 = 2 * 2 - (-1)^2 = 3 > 0$, таким образом $(1, 0)$ — строгий минимум. ■

Замечание. $d^2_{(1,0)} f = 2dx^2 + 2(-1)dxdy + 2dy^2 = dx^2 + dy^2 + (dx - dy)^2 > 0$, если $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$d^2 f > 0$

Задача 2 (без привлечения $d^2 f$). $z = x^2y^3(6-x-y)$ – исследовать на экстремум.

$$\begin{cases} 0 = z'_x = y^3(6x^2 - x^3 - yx^2)'_x = y^3(12x - 3x^2 - 2yx) = xy^3(12 - 3x - 2y) \\ 0 = z'_y = x^2(6y^3 - xy^3 - y^4)'_y = x^2(18y^2 - 3xy^2 - 4y^3) = x^2y^2(18 - 3x - 4y) \end{cases}$$

Либо $x = 0$, либо $y = 0$, либо $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$ – $(2, 3)$.

$\{(0,t)\}_{\{t<0\}\cup\{t>6\}}$ – максимум (нестрогий)

$\{(0,t)\}_{\{t\in(0,6)\}}$ – максимум (нестрогий)

$(0, 6)$ – не экстремум

$\lessdot K = \{(x,y) | x \geqslant 0 \quad y \geqslant 0 \quad x + y \leqslant 6\}$ – компакт

По теореме Больцано-Вейерштрасса существует $(x_\pm, y_\pm) \in K$

$f\left(x_+, y_+\right) = \max\limits_K f$

$f\left(x_-, y_-\right) = \min\limits_K f$

из распределения знаков следует, что точки границы – точки минимума. Тогда $(x_+, y_+) \in \operatorname{Int} K$, значит (x_+, y_+) удовлетворяет необходимому условии экстремума. Такая точка у нас одна — $(x_+, y_+) = (2, 3)$.

1.11 Экстремумы и замена переменных

Определение точки экстремума непосредственно переносится на случай метрических пространств

Лемма 2. Пусть $(X, \rho_X)), (Y, \rho_y)$ – метрические пространства и $f : X \to \mathbb{R}$. Пусть $g(b) = a \quad g$ непрерывна в точке b. a – точка максимума (минимума) для f. Тогда b – точка максимума (минимума) для $f \circ g$.

Доказательство. По условию a – точка локального максимума, т.е. существует окрестность $U(a) \subseteq X : \quad f(x) \leqslant f(a) \ \forall x \in U(a)$. По определению непрерывности существует окрестность $V(b) \subseteq Y$:

$$g(y) \in U(a) \forall y \in V(b) \implies f(g(y)) \leqslant f(a) = f(g(b)).$$

■

Следствие 2. Если в условии леммы g – гомеоморфизм X на Y, то a – точка максимума (минимума) для $f \circ g$.

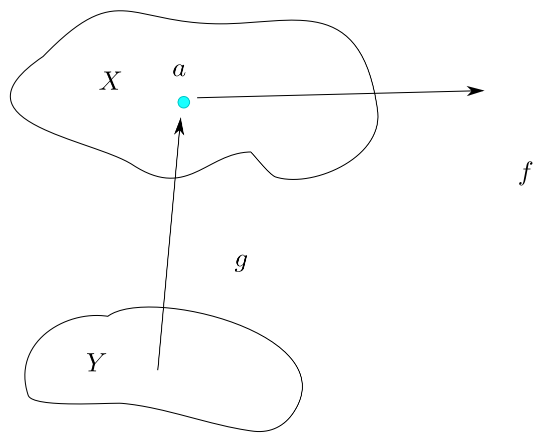

Рис. 1.3: kartinkalemmi

Следствие 3. Если g – локальный гомеоморфизм (существует окрестность $V(b)$, такая что в точке b сужение $g|_{V(b)}$ – гомеоморфизм на образ ($g(V(b))$)), то сохраняется вывод предыдущего следствия.

Задача 3. $z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (a, b > 0)$ — исследовать на экстремум.

Доказательство. $z(x, y) = -z(-x, y) = -z(x, -y)$

z – нечётная по x и по y. Значит достаточно рассматривать функцию только в первой четверти.

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\alpha \\ y = b\rho\sin\alpha \end{cases}$$

$(\rho, \varphi) \to (x, y)$

$(0, 1) \times (0, \frac{\pi}{2}) \to \operatorname{Int} K$ – гомеоморфизм $\left(\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

$z(\rho, \varphi) = ab\rho^2\cos\varphi\sin\varphi\sqrt{1 - \rho^2} \overset{\rho^2 = t}{=} \frac{ab}{2}\sin 2\varphi t \cdot \sqrt{1 - t}$

Необходимое условие экстремума: $\begin{cases} \frac{2}{ab}z'_\varphi = 0 = 2\cos 2\varphi \cdot t\sqrt{1 - t} \\ \frac{2}{ab}z'_t = 0 = \sin 2\varphi\left(\sqrt{1 - t} - \frac{1}{2}\frac{t}{\sqrt{1 - t}}\right) = \frac{\sin 2\varphi(2(1-t)-t))}{2\sqrt{1-t}} \end{cases}$

$\begin{cases} \cos 2\varphi \cdot t\sqrt{1-t} = 0 \\ \sin 2\varphi \cdot \frac{(2-3t)}{\sqrt{1-t}} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos 2\varphi = 0 \quad \varphi \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 3t = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{4} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases} \iff$
$\begin{cases} x = a \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}b}{9} \\ y = b \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}b}{9} \end{cases}$

■

Задача 4. $f : \underbrace{O}_{\subseteq \mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$

$E = \{\varphi_1(x) = 0, \ldots, \varphi_n(x) = 0\}$

Исследование f_E на экстремум называется задачей об условном экстремуме

Пример. $f(x, y) = x + y \quad E = \{x + 2y = 1\}$

Доказательство. $x = 1 - 2y$

$f = 1 - 2y + y = 1 - y$

$\widetilde{f}(x, y) = x^2 + y^2 \quad E = \{x + y = 1\}$ ■

Пример. $f = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \quad E = \left\{x^2 + y^2 = 1\right\}$

$\begin{cases} x = \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{cases}$

1.12 Дифференцирование обратного отображения

$x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

$$f(x) = y$$

$x \in \mathbb{R}^n \quad y \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = y \quad A \cdot x = y,\ A = [f]$ – линейна

$f(x) = y$ имеет единственное решение $\forall y \in \mathbb{R}^n \iff \det A \neq 0$

Теорема 4 (об обратной функции для случая одной переменной)**.** $f : (A, B) \to \mathbb{R}, f \in C^1((A, B)), a \in (A, B), f'(a) \neq 0$, тогда существует окрестность $V(a)$:

1. $\forall x \in V(a) \quad f'(x) \neq 0$ – локальная новорожденность производной
2. $f|_{(A,B)}$ – инъекция. – локальная обратимость
3. $f(V(a))$ - откр. – локальная открытость отображения
4. $\left(f|_{V(a)}\right)^{-1}$ дифференцируема в точке $f(a)$ и $\left(\left(f|_{V(a)}\right)^{-1}\right)' = \frac{1}{f'(a)}$ – дифференцируемость локально обратного

Определение 6. $f : (X, \Omega_X) \to (Y, \Omega_Y)$

Если для любого $O \in \Omega_X \quad f(O) \in \Omega_Y$, то f называется открытым отображением

Пример. $f(x) = x^2$ не открытое на $(-1, 1) \to [0, 1)$, но открыто на $(-1, 0) \cup (0, 1)$, потому что нет точек, где $f'(x) = 0$

доказательство теоремы. По следствию теоремы Дарбу, если $f'(a) > 0 (< 0)$, то существует окрестность $V(a) : \forall x \in V(a) \quad f'(x) > 0 (< 0)$

$\sqsupset f'(x) > 0$ всюду на $V(a)$, то f строго возрастает, значит $f|_{V(a)}$ – инъекция

$V(a) = (a - \delta, a + \delta) \implies f\left(a - \delta, a + \delta\right) = \left(f(a - \delta), f(a + \delta)\right)$

$4 \Longleftarrow$ теоремы о дифференцируемости обратимой функции ■

Теорема 5 (об обратном отображении)**.** Пусть $\underbrace{O}_{\text{открытое}} \subseteq \mathbb{R}^n \quad f : O \to \mathbb{R}^n$ и $\forall x \in O \quad d_x f$ – обратим (якобиан не обращается в ноль в O)

Тогда f – открытое отображение

Доказательство. См. доказательства утверждения 3 в теореме о дифференцировании обратного отображения в книжке Виноградов-Громов. ■

Теорема 6 (теорема об обратном отображении)**.** $n \in \mathbb{N}$, O – открытое, $O \subseteq \mathbb{R}^n$

$f \in C^1(O \to \mathbb{R}^n)$ $a \in O$. Пусть $d_a f$ обратим ($\iff \mathcal{J}_a f \neq 0$) , тогда существует окрестность $V(a)$:

1. $\forall x \in V(a) \quad d_x f$ обратим – локальная новорожденность производной
2. $f|_{(A,B)}$ – инъекция. – локальная обратимость
3. $f(V(a))$ - откр. – локальная открытость отображения
4. $\left(f|_{V(a)}\right)^{-1}$ дифференцируема в точке $f(a)$ и $d_{f(a)}\left(f|_{V(a)}\right)^{-1} = (d_a f)^{-1}$ – дифференцируемость локально обратного

Лемма 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $O \subseteq \mathbb{R}^n$ открыто, $f : O \to \mathbb{R}^n, f \in C^1(O), a \in O$ и $d_a f$ обратим. Тогда $\forall \sigma > 0$ существует окрестность $V(a)$:

1. $\forall x \in V(a)$
$$\|d_x f - d_a f\| < \sigma$$
2. $\forall p, q \in V(a)$
$$\|f(p) - f(a) - d_a f(p-q)\| \leqslant C_1 \|p - q\|$$
3. $\forall p, q \in V(a)$
$$C_3\|p - q\| \leqslant \|f(p) - f(q)\| \leqslant C_2\|p - q\|$$
, такое свойство называется билипшецевость.

Здесь конкретно $C_2 = \|d_a f\| + \sigma \qquad C_3 = \frac{1}{\|(d_a f)^{-1}\|} - \sigma$

Доказательство. $f \in C^1(a) \implies$ существует окрестность $V(a)$: 1 верно

$\lhd F(x) = f(x) - d_a f(x) : O \to \mathbb{R}^n$

$d_x F(h) = d_x f(h) - d_a f(h), \quad F \in C^1(O)$

$\|f(p) - f(q) - d_a d(p-q)\| = \|F(p) - F(q)\| \leqslant \underbrace{\sup_{c \in V(a)} \|d_c F\|}_{\leqslant \sigma}$ по теореме о конечных приращениях, т.к. $V(a)$ выпуклое

$\|d_c F\| = \|\underbrace{d_C f - d_a f}_{<\sigma}\|$

$\forall p, q \in V(a)$

$\|f(p)-f(q)\| \leqslant \sup\limits_{c\in V(a)} \|d_c f\|\|p-q\|$

$\|d_c f\| = \|d_a f + (d_c f - d_a f)\| \leqslant \|d_a f\| + \underbrace{\|d_c f - d_a f\|}_{<\sigma \text{в силу } 1} \leqslant C_2$

$\|f(p)-f(q)\| = \|d_a f(p-1) - (f(p)-f(q)-d_a f(p-q))\| \geqslant \underbrace{\|d_a f(p-q)\|}_{\geqslant \frac{1}{\|(d_a f)^{-1}\|}\|p-q\|} - \underbrace{\|f(p)-f(q)-d_a f(p-q)\|}_{\leqslant C_1\|p-q\|}$

$C_3\|p-q\|$ ■

доказательство (часть) теоремы об обратном отобржаении. Существует $(d_x f)^{-1} \iff \mathcal{J}f \neq 0$, но $\mathcal{J}f \in C(O \to \mathbb{R}) \underset{\text{по неперывности}}{\Longrightarrow}$ существует окрестность $V(a) : \forall x \in V(a) \quad \mathcal{J}_x f! + 0 \implies 1$

$C_0 = \frac{1}{\|(d_a f)^{-1}\|}, \quad \sigma = \frac{C_0}{4}$, применим лемму к такому σ

Не умаляя общности $V(a) \subseteq V_0(a)$. Т.к. $\sigma < C_0 \quad \forall p,q \in V(a)$ в силу неравенства 3 из леммы $f(p) \neq f(q)$ ($f|_{V(a)}$ – инъекция. $\implies f|_{V(a)}$ – биекция на $f(V(a))$, т.е. $g = f|_{V(a)}$ обратимо и $4 \impliedby$ правило дифференцирования обратного отображения ■

1.13 Практика

Теорема 7. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке P

f достигает экстремума в точке $P \implies \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = 0$

$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2 f$

$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$

Теорема 8. Если $H(f)$ положительно определена в точке P, то P – точка минимума. Если она отрицательно определена, то это точка максимума.

$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(dx_1)^2 + \frac{\partial^2 d}{\partial x_1 \partial x_2} + \ldots = \lambda_1 (dy_1)^2 + \ldots + \lambda_n (dy_n)^2$

$f(dx_1 \ldots dx_n) = f(0) + \underbrace{=0}\, f'(0)dx + d^2 f + o\left(\right)$

$f(dx_1 \ldots dx_n) - f(0) = d^2 f + o\left(\right)$

$x^T A x > 0 \forall x \neq 0 \overbrace{def} \iff$

$$(x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} & \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots \\ & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} \sum a_{1i}x_i \\ \sum a_{2i}x_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \sum a_{ji}x_jx_i$$

– квадратичная форма

Пусть Q – квадратичная форма. $Q = \sum a_{ji}x_jx_i$, где $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j \quad Q = x^TAx$, где $A^T = A$

Такая матрица A называется матрицей квадратичной формы Q

$x = Cy \quad Q = (Cy)^T ACy = y^T \underbrace{B}\left(C^TAC\right)y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$

> **Утверждение 4.** Симметричная матрица подобна диагональной матрице.

Доказательство. $A = A^T$

Пример. $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Докажем, что существует собственный вектор.

   Пусть $Q = x^TAx = \sum\limits_{ij} a_{ij}x_ix_j$

   Рассмотрим Q на сфере $x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0$

   Q диффрецнируема на сфере $\implies$ достигает максимума в точке $(v_1, \dots, v_n)$

   Q, максимум с ограничением $F = 0$, то $\lhd \mathcal{L} := Q - \lambda F$

   У $\mathcal{L}$ частные производные равны 0 в максимуме

   $\frac{\partial}{\partial x_1}Q = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum\limits_j a_{ij}x_ix_j + \sum\limits_{k \neq i} a_{kj}x_kx_j\right) = \sum\limits_j aijx_j + \sum\limits_j a_{ji}x_j = 1\sum a_{ij}x_j$

   $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 2x_i \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{L} = 2\sum\limits_j a_{ij}x_j - \lambda 2xi = 0 \forall i$ для $x_j = v_j$

   $Av = \lambda v \implies v$ – вещественный собственный вектор

   Так мы для симметричной матрицы нашли вещественный собственный вектор

2. Достроим наш вектор v до базиса $(v, e_2, e_3, \dots, e_n)$

   Запишем A в этом базисе: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$. Дальше делаем по индукции

   Следовательно существует базис из собственных векторов, где на диагонали стоят собственные числа

Итого, любую квадратичную форму Q можно заменой переменных свести к каноническому виду $Q = \sum\limits_i \lambda_i y_i^2$ ∎

1.14 Лекция

Макаров, Подкорытов: Гладкие отображения и функции

Теорема 9 (Об открытом отображении)**.** $\sqsupset O \subseteq \mathbb{R}^n$ – открыток, $f \in C^1(O \to \mathbb{R}^n)$, $\quad \forall a \in O\ d_a f$ обратим. Тогда $f(O)$ – открыто.

Пример. $x = (x_1, \dots, x_n) \quad f(x) = x_1$ – необратимое, схлопывает шар и там нет открытости

Доказательство. $\sqsupset \sigma$: в лемме: $C_3 > 0, \sigma = \frac{1}{2} \frac{1}{\|(d_a f)^{-1}\|}$

δ – это половины от "δ из леммы"

$$\|f(p) - f(q)\| \geqslant C_3 \|p - q\| \quad \forall p, q \in B_\delta[a]$$

$r = \frac{1}{2} C_3 \cdot \delta \quad ? : B_r(b) \subset f(O) \iff \forall y \in B_r(b) \exists x \in O : f(x) = y$

$\lhd \varphi(x) = \|f(x) - y\| \in C * (O \to \mathbb{R}$

$\varphi(a) = \|f(a) - y\| = \|b - y\| \leqslant r$

Если $\|x - a\| = \delta$, то $\varphi(x) = \|f(x) - b\| = \|f(x) - f(a) + f(a) - y\| \geqslant \underbrace{\|f(x) - f(a)\|}_{\geqslant C_3 \|x - a\| = 2r} - \underbrace{\|f(a) - y\|}_{< r} > 2r - r = r$

По теореме Вейерштрасса $\varphi(x)$ достигает на $B_\delta[a]$ своего минимума

Из оценки $\varphi(x)$ следует, что $\min B_\delta[a] \varphi$ Достигается внутри шара

$\psi(x) = \varphi^2(x) = \|f(x) - y\|^2$. У функции $\psi(x)$ экстремумы в тех же точках, что и у $\varphi(x)$

Необходимое условие экстремума $\exists x_* \in B_\delta(a) : \quad f_{x_*} \psi = \mathbb{O}$

$\varphi(x) = \langle f(x) - y, f(x) - y \rangle$

$d\psi_{x_*} = 2 \left\langle \underbrace{d(f(x) - y)}_{d_{x_*} f}, f(x) - y \right\rangle$

Т.к. df обратим в $B_\delta(a) \implies f(x_*) - y = 0 \implies f(x_*) = y_0$

$\blacksquare$

Теорема 10 (теорема об обратном отображении). $\sqsupset$ открытое $O \subseteq \mathbb{R}^n \quad f \in C^1(O \to \mathbb{R}^n), a \in O, d_a f$ обратим

Тогда существует окретстность $V(a)$:

I $\forall x \in V(a) \quad d_x f$ обратим

II $f_{V(a)}$ – инъекуий (т.е. обратимо как отображение из $V(a)$ в $f(V(a))$

III $f(V(a))$ – открыто

IV $\left(f_{V(a)}\right)^{-1} \in C^1\left(f(V(a)) \to \mathbb{R}^n\right)$

$\left(f|_{V(a)}\right)' (f(a)) = (f')(a)$ (или $d\left(f_{V(a)}\right)^{-1} = (d_a f)^{-1}$

$\|B - A\| < \varepsilon \quad \|B^{-1} - A^{-1}\| < \varepsilon C(A)$

$\|(d_a f)^{-1} - (d_x f)^{-1}\| < \varepsilon C \cdot (d_a f) \implies (d_x f)^{-1}$ непрерывно зависит от x

второе объяснение: элементы матрицы $(d_x f)^{-1}$ – результат арифметических действий над частными производными отображения $f; f \in C^1(O) \implies$ элементы $[(d_x f)^{-1}] \in C(0)$

По аналогичным рассуждения, если в условии теоремы $f \in C^r(O \to \mathbb{R})$, то локально обратное также из C^r

Определение 7. $\sqsupset r \in Z_+ \quad O \subseteq \mathbb{R}^n, O$ – открытое, $f \in C^r(O \to \mathbb{R}^n)$

f Называется диффеоморфизмом класса C^r, если:

1. f – биекция на $f(O)$
2. $f(O)$ – открытое
3. обратное отображение $f^{-1} \in C^r(f(O) \to O)$

Определение 8. r, O –||–, $a \in O \quad f$ называется локальным диффеоморфизмом в точке a, если существует такая окрестность $V(a)$, что $f_{V(a)}$ – гомеоморфзим

Пример. $y = e^x$ – диффеоморфизм (глобальный)

$y = x^2$ – локальный диффеорморфизм отдельно либо на положительных, либо на отрицательных числах

$y = \sin x$ – локальный диффеоморфизм в точках не вида $\frac{\pi}{2} + \pi k$

Теорема 11 (Об обратном отображении "на языке диффеоморфизмов")**.** Открытое $O \subseteq \mathbb{R}^n, f \in C^r\,(O \to \mathbb{R}^n)$

1. Если $a \in O \quad d_a f$ обратим, тогда f локальный диффеоморфизм в точке a класса C^r
2. Если f – инъекция и $d_a x f$ Обратим всюду в O, то f – глобальный диффеоморфизм

Пример. $f(x,y) = \begin{pmatrix} e^y \cos x \\ e^y \sin x \end{pmatrix}$

$f' = \begin{pmatrix} -\sin x e^y & e^y \cos x \\ \cos x e^y & e^y \sin x \end{pmatrix}$

$\det f' = e^{2y}(-1) \neq 0$

$f(0,y) = f(2\pi k)$

В каждой точке невырожденный дифференциал, но глобальный инъективности нет

Пример (Важные примеры локальных диффеоморфизмов)**.**

1. Полярные координаты $\phi(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

   $\phi : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

   $\phi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$

   $\det\phi = \cos\varphi \cdot r\cos\varphi - \sin\varphi\,(-r\sin\varphi) = r > 0$ в O, значит ϕ – локальный ддиффеоморфзм в O класса C^∞

   но не глобальный! $\phi(r, \varphi + 2\pi k) \equiv \phi(r,\varphi)$

   $O_1 = (0,+\infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \phi$ – инъекция d в $O_1 \implies \phi$ глобальный диффеоморфизм в O_1

   $r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

2. Цилиндрические координаты.

   $x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \quad z = t$

$$\phi' = \begin{pmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_t \\ & \nabla y & \\ & \nabla z & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r$$

Таким образом ϕ – локальный диффеорморфизм в области $(0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

глобальный диффеоморфизм в областях $(0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \times x\mathbb{R}$ И $(0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$

$x^2 + y^2 = R \quad r = |R|$

$x^2 + y^2 = z^2 C \leftrightarrow r^2 = Ct^2 \quad \pm r = \widetilde{C} = t$

3. Сферические координаты

меряем широту и долготу. $\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi \\ y = r\sin\varphi\cos\psi \\ z = r\sin\psi \end{cases}$

$(r, \varphi, \psi) \to (x, y, z) \quad C^\infty : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_3$

$$|\psi| = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\cos\psi & -r\cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi & r\cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{pmatrix} = r^2\cos\psi \left(\sin^2\psi \begin{pmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi \\ cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix} + \cos^2\psi \begin{pmatrix} \cos\varphi & - \\ \sin\varphi & c \end{pmatrix} \right.$$

$r^2\cos\psi$

ϕ локальный диффеоморфизм в $(0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

глобальный в $(0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \leftrightarrow r = R$

Задача 5. Записать уравнение сферы $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R$ в сферических координатах

$x^2 + y^2 = Cz^2$ тоже.

Задача 6. В области $x > 0, y > 0$ $u = \frac{y}{x} \quad v = xy$

$\psi : (x, y) \to (u, v)$

Вопросы:

(a) $\psi(O) = ?$

(b) является ли ψ диффеоморфизмом или локальным диффеоморфизмом

(c) Выписать явно функции для обратного к ψ или локально обратного

1.15 Теорема о неявном отображении

Если у нас есть явное выражение $x = g(y)$, то можно явно исследовать функцию от одной переменной $f_E = f\left(h(y), y\right)$

Определение 9. Говорят, что уравнение $f(x,y) = 0$ неявно задаёт функцию $y = g(x)$ или $x = h(y)$, если условия $F(x,y) = 0$ и $\begin{cases} x \in D(g) \\ y = g(x) \end{cases}$ равносильны.

Определение 10. $F : E \to \mathbb{R} \quad D \subseteq E$

F задаёт $y = g(x)$ или $x = h(y)$ в D, если

$$\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ (x,y) \in D \end{cases} \iff \begin{cases} x \in D(g) \\ y = g(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1\left(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m\right) = 0 \\ \vdots \\ F_m\left(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m\right) = 0 \end{cases} \iff F(x,y) = 0 \quad \begin{cases} x = (x_1, \ldots, x_k) \\ y = (y_1, \ldots, y_m) \\ F - (F_1, \ldots, F_m) \end{cases}$$

$$\text{“}y = g(x)\text{”} \quad \begin{cases} y_1 = g_1\left(x_1, \ldots, x_k\right) \\ \vdots \\ y_m = g_m\left(x_1, \ldots, x_k\right) \end{cases}$$

Теорема 12 (Теорема о неявном отображении)**.** $\exists$ O – открытое в $\mathbb{R}^{k+m}$, $F \in C^1\left(O \to \mathbb{R}^k\right)$

$(a,b) \in O \quad \left(a = (a_1, \ldots, a_k), b = (b_1, \ldots, b_k)\right)$ и

1. $F(a,b) = 0$
2. $\det F'_y(a,b) \neq 0$
$$F'_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial} \end{pmatrix}$$

Тогда:

I Существует открытое множество $U \times V$ в $\mathbb{R}^{k+m}$, где U – окрестность a, а V – окрестность b: в $U \times V$ уравнение $F(x,y) = 0$ неявно задаёт единственную функцию $y = g(x)$

II g дифференцируема в точке a

III $g'(x) = -\left(F'_y(a,b)\right)^{-1} \cdot F'_x(a,b)$

1.16 Практика

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \varphi_1, \ldots, \varphi_n$

$$S = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \mid \begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_n(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \right\}$$

Задача – найти экстремум f на S

Теорема 13 (Необходимое условие)**.** Пусть для $\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \vdots & \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} & \end{vmatrix}$ ранга m

$L := f + \sum \lambda_i \varphi_i$

Тогда x^* – условный экстремум, если $\begin{cases} \varphi_i(x^*) = 0 \forall i = 1, \ldots, m \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 \forall i = 1, \ldots, n \end{cases}$

$f(x) - f(P) = (x-P)^T D^2 f(x-P) + o(\ldots)$

В случае поиска на поверхности, рассматриваем касательные к поверхности, если она гладкая

Теорема 14 (Достаточное условие)**.** Пусть $f, \varphi_i = C_2(x^* \in U)$

$\sum\limits_k \frac{\partial \varphi_i(x^*)}{\partial x_k} dx_k = 0 \quad \forall i \qquad \sum (dx_k)^2 > 0$

$d^2\Lambda(x^*)$ знакоопределна для dx_k, то x^* – экстремум

Если $\gtrless 0$, то экстремума нет

1.17 Лекция

Теорема 15 (О неявном отображении)**.** $F(x,y) = \mathbb{O} \iff \begin{cases} F_1\left(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m\right) = 0 \\ \vdots \\ F_m\left(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m\right) = 0 \end{cases}$

$x = \left(x_1, \dots, x_k\right), y = \left(y_1, \dots, y_m\right), F = \left(F_1, \dots, F_m\right)$

Если $F \in C^r(O), O$ – открытое в $\mathbb{R}^{k+m}$

$(r \in \mathbb{Z}^+)$

1. $F(x^0, y^0) = 0$
2. $F'_y(x^0, y^0)$ – обратима ($\det F'_y \neq 0$)

Тогда $\exists$ открытое U_{x_0} и V_{y_0} и $g : U_{x_0} \to V_{y_0}$:

I $\begin{cases} (x,y) \in U_{x_0} \times V_{y_0} \\ F(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in U_{x_0} \\ y = g(x) \end{cases}$

II $g \in C^r(U_{x_0})$

III $g'(X) = \left(F'_y(x,y)\right)^{-1} \cdot F'(x,y)$

Определение 11 (Уточнение определения функции (отображения), заданной уравнением неявно)**.** $\sqsupset D \subseteq R^k \quad g : D \to \mathbb{R}^m$ Скажем, что отображение g задаётся уравнением

1. $F(x^0, y^0) = 0$
2. $F'_y(x^0, y^0)$ – обратима ($\det F'_y \neq 0$)

неявно, если

$$F(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in D$$

(аналогично для $x = h(y)$)

Пример. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad a > 0$

$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad z = -\sqrt{a^2 - x^2 - z^2} \quad y = \sqrt{a^2 - x^2 - z^2} \quad \ldots$

$\begin{cases} z'_x = ? \\ z''_{xy} = ? \end{cases}$

$x^2 + y^2 + z(x, y) \equiv a^2$

$g(x, y) = z(x, y) \quad F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$

$F'_z = 2z \neq 0 \iff x^2 + y^2 < a^2$

$2\left(x + z \cdot z'_x\right) = 0 \implies z'_x = -\frac{x}{z}$

$0 + z'_y \cdot z'_x + z \cdot z''_{xy} = 0 \qquad z'_y = -\frac{y}{z} \implies z''_{xy} = -\frac{z'_y \cdot z'_x}{z} = -\frac{xy}{z^3} = -\frac{xy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}^3}$

Примеры нарушения условия 2 теоремы

Пример. $x = y^3 \quad F(x, t) = x - y^3$

$F'_y = -3y^2 = 0 \quad y = 0$

Пример. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = x^2 - y^2 \quad \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$r^4 = r^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) \quad r = \sqrt{\cos 2\varphi}$

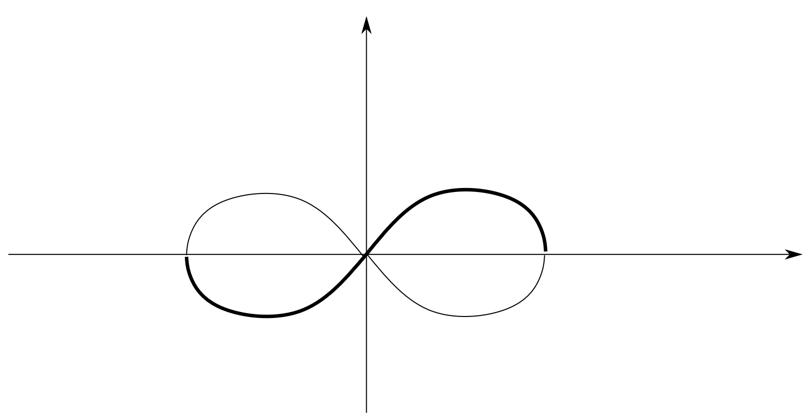

Рис. 1.4: lemniscat

$F(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)^2 - (x^2 - y^2)$

$F'_y = 2\left(x^2 + y^2\right) \cdot 2y + 2y = 2y\left(2(x^2 + y^2) + 1\right)$

$F'_y = 0 \iff y = 0$

$\int g(x) = y$ – функция, график которой – график F в I-III четвертях

$$\begin{cases} y = r(\varphi)\sin\varphi \\ x = r(\varphi)\cos\varphi \end{cases}$$

$\varphi = \frac{\pi}{4}$

$x'_\varphi = r'\cos\varphi + r\sin\varphi$

$$x'(\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(r'+r) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\underbrace{\frac{-\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}}_{\text{не опр. при}\varphi=\frac{\pi}{4}} + \sqrt{\cos 2\varphi}\right)$$

Замечание. Если $f \in C([a,b])$ и $\exists \lim\limits_{x\to a+} f'(a)$, то $\exists f'(a)$, и $f'(a) = \lim\limits_{x\to a+} f'(x)$

Пример. $y(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$

$\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

$y'_x = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = \frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi} = \frac{\left(-\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\cdot\sin\varphi + \sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\cos\varphi\right)}{-\frac{\sin\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\cdot\cos\varphi - \sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi} \to \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \implies y'_x(x_{\varphi=\frac{\pi}{4}})$

$y'_+(0) = 1$

1.18 Поверхности в $\mathbb{R}^n$ (k-мерные)

Способы задания поверхности:

1. Поверхность уровня

   $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad C \in \mathbb{R}$

   $\{x \in D(F) : \quad F(x) = C\}$ – линия уровня C

   $F : D$ – открытое $\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \quad F = (F_1, \ldots, F_k), C \in \mathbb{R}^k$

   $(x \in D(F) : F(x) = C)$ – поверхность уровня C

Определение 12. $\sqsupset f : O \to \mathbb{R}^m \quad O$ – открытое в $\mathbb{R}^k \quad k, n \in \mathbb{N}$

f называется регулярным в O, если f Дифференцируема в O и в каждой точке $x \in O \quad f'(x)$ Имеет максимальный ранг ($\operatorname{rang} f'(x) = \min(k, n)$)

Определение 13. $\sqsupset C \in \mathbb{R}^m \quad F \in C^r(O \to \mathbb{R}^m), O$ – открытое в $\mathbb{R}^n$

$r \in \mathbb{Z}_+$

F регулярно в O, тогда поверхность уровня C называется r-гладкой (класса C^r) $n-m$-мерной поверхностью

Пример. $x^2+y^2+z^2=a^2, a>0$

$F(x,y,z)=a^2 \quad m=1 \quad n=3 \quad F'=(2x,2y,2z)$

$S - 3-1=2$-мерная поверхность

2 Поверхности-графики

$\sqsupset g : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m \quad k<n \quad n=k+m$

$\Gamma_g = \{(x,y) : x \in D, y=g(x)\} \in \mathbb{R}^n$

Если D Ограничено в $\mathbb{R}^k \quad g \in C^r\left(D \to \mathbb{R}^m\right)$, то говорят о графике отображения гладкости r (класса C^r)

Пример. Сфера – объединение бесконечно гладких графиков

3 Параметрическое задание

$\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$

Если D – открытое, $\Phi \in C^r(D)$ и Φ Регулярна в D, то $\Phi(D)$ – k-мерная поверхность с параметризацией класса C^r (параметризованной поверхности)

Пример. $S \cap \{x>0, y>0, z>0\} = \left\{ (x,y,z) : \begin{matrix} x = a\cos\varphi\cos\psi \\ y = a\sin\varphi\cos\psi \\ z = a\sin\psi \end{matrix} \quad \varphi,\psi \in (0, \frac{\pi}{2} \right\}$

$\Phi : (\varphi,\psi) \to (x,y,z)$

Теорема 16 (О способах задания гладких поверхностей)**.** $\sqsupset r \in \mathbb{Z}_+, m,k \in \mathbb{N} n=m+k$

$S \subseteq \mathbb{R}^n \quad a \in S$. Следующие утверждения равносильны:

1. $\exists$ окрестность $U_a : U_a \cap S$ – k-мерный график класса C^r
2. $\exists$ окрестность $U_a : U_a \cap S$ – k-мерная поверхность уровня класса C^r
3. $\exists$ окрестность $U_a : U_a \cap S$ – k-мерная поверхность класса C^r заданная параметрически

Доказательство.

$1 \implies 2$ $U_a \cap S = \{(x,y) : x \in D \quad y = g(x)\}$ (посе перенумерации, если требуется)

$= \{(x,y) : F(x,y) = 0\} \quad F = y - g(x)$

F определена на $D \times \mathbb{R}^m \quad F : D \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad F \in C^r(D \times R^m)$

$F'_y = E_m \quad F'$ содержит E как минор $\implies$ ранг F' максимальный

$2 \implies 1$ $F(x,y) = C \quad C \in \mathbb{R}^m \quad F : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$U_a \cap S = \{(x,y) : (2)\}$

F' имеет максимальный ранг $= m$. С точностью до нумерации координат можно считать, что $\det F'_y(a) \neq 0$. В некоторой окрестности $\det F'_y(x,y) \neq 0 \implies$ по теореме о неявной функции $y = g(x)$

$1 \implies 3$ $S \cap U_a = \{(x, g(x)) : x \in D\}$

$\Phi : x \in D \subseteq \mathbb{R}^k \to (x, g(x)) \in \mathbb{R}^n$

$$\Phi' = \begin{bmatrix} & E_k & \\ g'_{1x_1} & & g'_{1x_k} \\ & & \end{bmatrix} \implies \operatorname{rang} \Phi' = k \implies \Phi \text{ - регулярна в } D$$

$3 \implies 1$ $S \cap U_a = \left\{(x,y) = \Phi(u) : u \in D - \text{открытое в } \mathbb{R}^k\right\} \quad \Phi \in C^r(D), \operatorname{rang} \Phi' = k$ – максимальный

Не умаляя общности $\det \Phi'_x \neq 0 \quad \widetilde{\Phi}(n) = \begin{bmatrix} \Phi_1(u) \\ \vdots \\ \Phi_k(u) \end{bmatrix} \qquad \Phi(n) = \begin{bmatrix} \Phi_1(u) \\ \vdots \\ \Phi_n(u) \end{bmatrix}$

$$\det \begin{bmatrix} \nabla\Phi_1 \\ \vdots \\ \nabla\Phi_k \end{bmatrix} \neq 0$$

$$\widetilde{\Phi'} = \begin{bmatrix} \nabla\Phi_1 \\ \vdots \\ \nabla\Phi_k \end{bmatrix} \text{ – обратима}$$

$\Psi = \widetilde{\Phi}^{-1} \quad \widetilde{\Phi} : (u_1, u_2, \dots, u_k) \to (x_1, \dots, x_k)$

$(x,y) = \Phi(u) = \left(\widetilde{\Phi}(u), \widetilde{\widetilde{\Phi}}(u) = (x, \widetilde{\widetilde{\Phi}}(\Psi(x))\right) \in C^r$ по теореме об обратном отображении $u = \Psi(x) \quad \Phi(u) = \Phi(\Psi(x))$

> **Определение 14.** r-гладках k-мерная поверхность – поверхность, для которой справедливо одно из утверждений 1-3 предыдущей теоремы

Пример. $\gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{bmatrix} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$

$\gamma|_{(a,b)} \quad \gamma \in C^r(a, b)$

$\operatorname{rang} \gamma'$ максимален $\iff \gamma'(t) \neq 0$

Пример. в $\mathbb{R}^n \quad D = \{\langle v_1, x\rangle + v_2 = 0\}$, где $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$

$F' = v_1$. Если $v_1 \neq 0$, то $S - n - 1$-мерная поверхность (гиперплоскость, гперпространство в $\mathbb{R}^n$)

1.19 Условный экстремум функций нескольких переменных

$f : E \subseteq R^n \to \mathbb{R} \quad E_0 \subseteq E$

Условный экстремум f на $E_0 \equiv$ экстремум $f|_{E_0}$

$$\sqsupset E_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} F_1(x) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x) = 0 \end{cases}, m \in \mathbb{N}, m \leqslant n \right\}$$

Эти уравнения называются уравнениями связи , функции F_i называются функциями связи

Экстремум $F|_{E_0} \equiv$ условный экстремум F при условии ⟨система уравнений⟩ ■

> **Теорема 17** (Необходимое условие условного экстремума, геометрическая формулировка)**.** $\sqsupset O$ – открыток $\subseteq \mathbb{R}^n \quad f, F_1, \dots, F_m \in C^1(O \to \mathbb{R}), m < n$ и $F = (F_1, \dots, F_m)$ – регулярно в O. $\sqsupset$ a – точка локального условного экстремума для f относительно $F(x) = 0$
>
> Тогда в точке $a \quad \nabla f$ представимо в виде линейной комбинации $\nabla_a F_1, \dots, \nabla F_m \quad (\nabla_1 f \in \mathcal{L}_{in}\{\nabla_a F_1, \dots, \nabla_a f_m\}$

Доказательство. случай 1: $m = n - 1$

От противного : $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} f'(a) \\ F_1'(a) \\ \vdots \\ F_m'(a) \end{bmatrix} < n \quad \left(\iff \det \begin{bmatrix} f'(a) \\ F_1'(a) \\ \vdots \\ F_{n-1}'(a) \end{bmatrix} \right) = 0 \iff$ $f'(a), \dots, F_{n-1}'(a)$ – линейно зависимы $\implies \exists \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} : \quad \lambda_0 f'(a) + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k F_k'(a) = 0$

Если бы $\lambda_0 = 0 \implies \{F_k'(a)\}_{k=1}^{n-1}$ – линейно зависимо $\operatorname{rang}\left(F_k'(a)\right)_{k=1}^{n-1} < n-1$ – не максимально

Значит $\lambda_0 \neq 0 \implies f'(a) = -\sum \frac{\lambda_k}{\lambda_0} F_k'(a)$

$$\lessdot h(x) = \begin{bmatrix} f(x) \\ F_1(x) \\ \vdots \\ F_{n-1}(x) \end{bmatrix} : Oc\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Если неверно, что определитель матрицы производных этого столбца функций равен нулю, то по теореме об обратном отображении $h(U_a)$ – открытое множество $\implies \exists \delta_0 > 0 : \quad \forall \delta \in (0, \delta_0) \quad \begin{bmatrix} f(a) \pm \delta \\ F_1(a) \\ \vdots \\ F_{n-1}(a) \end{bmatrix} \in h(u_n)$

$\implies \forall$ Открытого $\widetilde{U}_a \quad \exists$ точка $x : F_1(x) = F(a) = 0, \dots, F_{n-1} = F_{n-1}(a) = 0 \qquad f(x) > f(a)$ или $f(x) < f(a)$

Противоречие – x – точка условного локального экстремума

$m = 1, \dots, n-2$ F' – максимального ранга $\lessdot \widetilde{h}(a) = \begin{bmatrix} f(x) \\ F_1(x) \\ \vdots \\ F_m(x) \end{bmatrix}$ Предположим, что $\operatorname{rang} \widetilde{h'(x)} < m+1$

С точностью до нумерации координат $h'_{\widetilde{x_1, \dots, x_{m+1}}}(a) \neq 0$

$h(x) = \begin{bmatrix} \widetilde{h}(x) \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad h'(a) = \begin{bmatrix} h'_{x_1, \dots, x_{m+1}} & \cdots \\ \mathbb{O} & \\ E_{n-(m+1)} & \end{bmatrix}(a) \implies \exists$ окрестность $U_a \quad h|_{U_a}$

$a\overline{h}\to \begin{bmatrix} f(a) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{m+2} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$. Т.к. h – открытое, то $\exists \sigma > 0 : \forall y \in \mathbb{R}^n : \|y - b\| < \sigma \implies$
$y \in h(U_a)$

$\lhd y = \begin{bmatrix} f(a) \pm \frac{b}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ o \\ a_{m+2} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \implies \exists x \in U_a : f(x) = y \quad F_1(x) = \ldots = F_m(x) =$
$0 \quad f(x) f(a) \pm \frac{b}{2}$

Противоречие, ранг не меньше максимального

■

1.20 Практика

u – непрерывная функция на компакте – достигает наибольшего и наименьшего значения

1.21 Лекция. Дополнение : теорема об открытом отображении (общение)

Теорема 18. $\sqsupset k, n \in \mathbb{N} \quad k \leqslant n \quad O$ – открытое $\in \mathbb{R}^n \quad F : O \to \mathbb{R}^k$, регулярная ($\in C^1$ ранг матрицы Якоби $= k$)

Тогда F является открытом отображением.

Случай $n = k$ был установлен.

Доказательство. $n < k$

1. F – проекция.
$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$$
– очевидно открытое

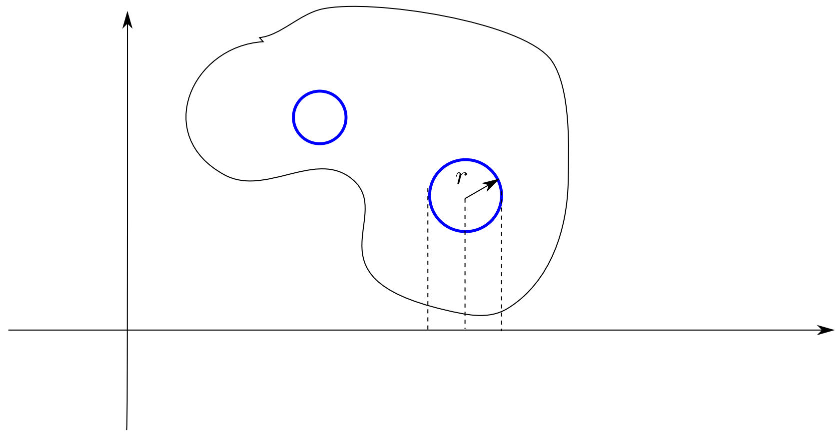

Рис. 1.5: очевидно

$x, a \in \mathbb{R}^n \quad \|x-a\| < r \implies \|F(x) - F(a)\| \leqslant \|x-a\| < r$, т.е. $B_{r(a)} \xrightarrow{F} B_r\left(F(a)\right)$

2. F – регулярно. $F' = \begin{bmatrix} \nabla F_1 \\ \vdots \\ \nabla F_k \end{bmatrix}$, матрица $n \times k$

После удаления $n-k$ столбцоы возникает ненулевой минор . Не умаляя общности удаляем последние столбцы (иначе перенумеруем переменные $x_1, \ldots, x_n$) $\implies F'_{(x_1,\ldots,x_n)} = \begin{bmatrix} F'_{1x_1} & \ldots & F'_{1x_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ F'_{kx_1} & \ldots & F'_{kx_k} \end{bmatrix} \quad \det F'_{(x_1,\ldots,x_n)} \neq 0$

$\sphericalangle \phi(x) = (F_1, F_2, \ldots, F_k, xk+1, \ldots, x_n)^T$

$\phi'(x) = \begin{bmatrix} F'_{(x_1,\ldots,xk)} & F'_{(x_{k+1},\ldots,x_n)} \\ 0 & E_{n-k} \end{bmatrix}$

$\det \phi'(x) = \det F'_{(x_1,\ldots,x_k)} \cdot \det\left(E_{n-k}\right) \neq 0 \quad \phi$ регулярно в некоторой окрестности фиксированной точки $\implies F = \pi \circ \phi$ – открытое в точке a в силу произвольности $a \implies F$ – окткрыто

$\blacksquare$

Теорема 19 (Необходимое условие условного экстремума (геометрическая формулировка))**.** $\sqsupset k, n \in \mathbb{N} \quad k < n \quad O$ – открытое в $\mathbb{R}^n$

$f, F_1, \ldots, F_k \in C^1(O \to \mathbb{R}), \quad F = (F_1, \ldots, F_k)$ – регулярно в O

$E = \{x \in O | F(x) = 0\}, a \in E$

Если a – точка условного экстремума для f Относительно

$$F(x) = 0$$

, то

$$\nabla_a f \in \mathcal{L}in\{\nabla_a F_1, \ldots, \nabla_a F_k\}$$

В частности, если $k = 1$, то условие $\iff \nabla_a f$ – коллинеарен $\nabla_a F$

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x, y) = (x^2 + (y-1)^2)\sqrt{x^2 + y^2 - 2y}$$

на криволинейном треугольнике – границе множества

$$D = \left\{(x, y) \mid (x+1)^2 + y^2 \geqslant 1, \quad (x-1)^2 + y^2 \geqslant 1, x^2 + y^2 \leqslant 2 \quad y \geqslant 0\right\}$$

$r = x^2 + (y-1)^2$

$f = \underbrace{r \cdot \sqrt{r+1}}_{g(r)}$

$\nabla f = g'(r) \cdot \nabla r$

при $r = \sqrt{2} - 1$ касание окружности уровня границы окружности

Подозрительные точки: вершины. точки $T_1, T_2, T_3: \quad f(T_1) = f(T_2) = f(T_3)$

$g'(r) = \sqrt{r+1} + \frac{r}{2\sqrt{r+1}} = \frac{2(r+1)+r}{2\sqrt{r+1}} = \frac{3r+2}{2\sqrt{r+1}}$ не обращается в ноль при $r \geqslant 0$

K – граница D, компакт $\implies \max, \min$ достижимы

т.к. $g(r)$ стремится вверх и $r(T_1) = r(T_2) = r(T_3) < g(V_1) = g(V_2) = g(V_3) \implies \min_k g = g(T_1) \quad \max_k g = g(V_1)$

Доказательство. Не умаляя общности a – точка глобального условного экстремума для f относительно $F(x) = 0$

Замечание. Если $v, v^1, \ldots, v^k \in \mathbb{R}^k$ и набор v, v^1, v^k – линейно зависим, а $v^1, \ldots, v^k$ – ЛНЗ, то $v \in \mathcal{L}in\left\{v^1, \ldots, v^k\right\}$

$$\implies \exists \lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_k: \quad \lambda v + \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j}_{\neq 0} = 0 \implies \lambda \neq 0 \implies v = -\sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{\lambda} v_j$$

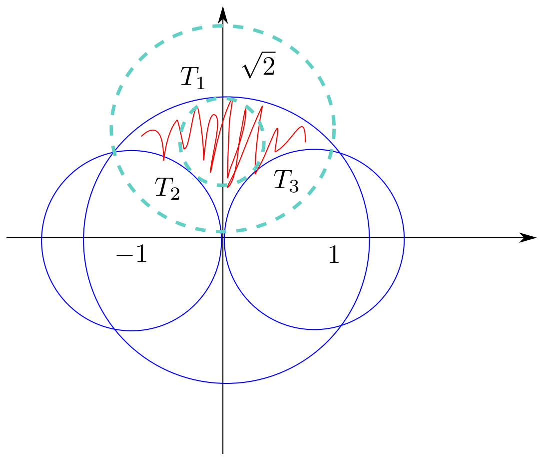

Рис. 1.6: krivoyPrimer

По замечанию достаточно проверить, что $\{\nabla_a f, \nabla_a F_1, \ldots, \nabla_a F_k\}$ – линейно зависим, т.е. $\widetilde{F} = (f, F_1, \ldots, F_k)^T$ – не регулярна в точке a.

От противного: пусть $\widetilde{F}$ – регулряна в точке a, тогда существует окрестность $U(a) : \widetilde{F}$ – регулярно в $U(a)$

По теореме об открытом отображении $\widetilde{F}$ – открыто в $U(a) \implies \exists \varepsilon > 0 :$ $\widetilde{F}(U(a)) \supset B_\varepsilon\left(\widetilde{F}(a)\right) \quad \widetilde{F}(a) = (f(a), F_1(a), \ldots, F_k(a)) = (f(a), 0, \ldots, 0) \quad F_i(a) =$ 0, т.к. a – точка, удовлетворяющая формулам связи.

$y_\pm = \left(f(a) \pm \frac{\varepsilon}{2}, 0, \ldots, 0\right)$

$\|y_\pm - \widetilde{F}(a)\| = \frac{\varepsilon}{2} \implies y_\pm \in B_\varepsilon\left(\widetilde{F}(a)\right) \subseteq \widetilde{F}(U(a)) \implies \exists x_1 \in U(a) : \widetilde{F}(x_\pm) =$ $y_\pm \iff f(x_1) = f(a) \pm \frac{\varepsilon}{2} \quad F_1(x_\pm) = \ldots = F_k(x_\pm) \implies x_\pm \in E?!! \implies$ точка a не экстремум, что противоречит нашем предположению ■

1.22 Функция Лагранжа

Определение 15 («большая» функция Лагранжа)**.** $\begin{matrix} f(x_1,\dots,x_n) \\ F_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \dots\dots\dots \\ F_k(x_1,\dots,x_n)=0 \end{matrix}$ $\mathcal{L}(x,\lambda) =$ $f(x) - \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_i F_j(x) \quad \lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_k)$

$$\nabla_a f = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \nabla_a F_j$$

Теорема 20 (Необходимое условие условного экстремума через дифференациал функции Лагранжа)**.** В условиях последней теоремы $\exists \lambda_1^*,\dots,\lambda_k^* \in \mathbb{R} \quad \mathrm{d}_{(a,\lambda^*)}\mathcal{J} = 0$

В скалярной записи это запишется как: $\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(a,\lambda^*) = f'_{x_1}(a) - \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j F'_{jx_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n}(a,\lambda^*) = f'_{x_n}(a) - \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j^* F'_{jx_n}(a) \\ \hline \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1}(a,\lambda^*) = 0 = F_1(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_k}(a,\lambda^*) = 0 = F_k(a) \end{cases} \iff$

$\begin{cases} \nabla f = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j \nabla_a F_j \end{cases}$

1.23 Примеры приложения необходимого условия условного экстремума

Задача 7. Найти максимум и минимум квадратичной формы на сфере

$$Q(x) = \sum_{ki,j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j$$

– $\forall$ квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

Продолжаем $[Q] = (q_{ij})_{i,j=1}^{n}$ – симметричная

$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} \iff \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2 = 1$

$F(x) = \|x\|^2 - 1$

$\mathcal{L}(x, \lambda) = Q(x) - \lambda F(x)$

$\nabla F = 2x$ (F регулярно всюду в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$)

<...>

Вывод: $\max_{x \in S} Q(x) = \max \{\lambda : \lambda_i$ – собственные числа $Q\}$

$\sqsupset E \subseteq \mathbb{R}^n \quad f \in C(\operatorname{Cl} E \to \mathbb{R})$. Тогда $\sup_E f = \sup_{\operatorname{Cl} E}$