

Линейный Анализ

Коченюк Анатолий

6 ноября 2020 г.

0.1 Введение

Трифанов Александр Игоревич

Два модуля: аналитическая геометрия, линейная алгебра

Отчётность: дз, кр, лабы, рубежное тестирование, экзамен

дз (16 штук(8 в модуль) по 2 баллв)

кр (4 (2 в модуль) 5 баллов)

лаба (1-2 по 5 баллов)

рубежный тест (1)

Глава 1

I курс

1.1 Матрицы и операции над ними

Определение 1. Матрица – прямоугольная таблица чисел

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots, \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$a_{i,j} \in \mathbb{R}$ – элементы матрицы

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ – строка 1

$a_{12}, a_{22}, a_{32}, \dots, a_{m2}$ – столбец 2

a_{ij} – элемент на пересечении i -той строки и j -того столбца

В матрице выше m строк и n столбцов. $A_{m \times n}$ – обозначение

Замечание. $n = m \implies A_{n \times n}$ – квадратная матрица

$\{a_{ii}\}_{i=1}^n$ – диагональ матрицы $A_{n \times n}$

Замечание. $A = \|a_{ij}\| \quad B = \|b_{ij}\|$

Замечание. $A = B \iff$

- одинаковые размеры
- $\forall i, j, a_{ij} = b_{ij}$

Операции с матрицами:

1. Умножение на число:

$$B = \alpha \cdot A \iff \forall i, j \quad b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$$

2. Сложение:

Пусть A, B – одинакового размера

$$A + B = C : \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \forall i, j$$

Замечание. $\triangleleft \mathbb{O} : \mathbb{O} + A = A + \mathbb{O} = A$

\mathbb{O} – полностью состоит из нулей

Свойства:

- коммутативность сложения (следует из коммутативности сложения чисел) $A + B = B + A$
- ассоциативность $(A + B) + C = A + (B + C)$
- дистрибутивность $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $\forall A \quad -A = -1 \cdot A : \quad A + (-A) = \mathbb{O}$ противоположный элемент по сложению

3 Умножение матриц

Пусть $A_{m \times l}, B_{l \times n}$

$$C = A \cdot B \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} \cdot b_{kj} = C_{m \times n}$$

Замечание. $A \cdot B \neq B \cdot A$

Для квадратных матриц вводится такое понятие, как коммутатор

$$[AB] = A \cdot B - B \cdot A$$

Пример. $A \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Замечание. $\triangleleft I : A \cdot I = I \cdot A = A$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Свойства:

- некоммутативность $A \cdot B \neq B \cdot A$
- ассоциативность $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

- дистрибутивность¹ $A(B + C) = AB + AC$
- дистрибутивность² $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Определение 2. $\triangleleft N \neq \mathbb{O} : N^k = N \cdot N \cdot \dots \cdot N = \mathbb{O}$

N – нильпотентная матрица, k – её порядок нильпотентности

Пример. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Определение 3. Идемпотентной матрица называется, если $N^k = I$

k – порядок идемпотентности

Пример. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

4 Транспонирование

$$A_{m \times n} = \|a_{ij}\| \text{ Пусть } B = A^T = \|b_{ij}\| \implies b_{ij} = a_{ji}$$

Свойства:

- $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T \cdot A^T$ – проверить для себя

Замечание. $A : A = A^T$ – симметричная/симметрическая матрица. Любая квадратная матрица с симметричными относительно диагонали элементами.

$A : A = -A^T$ – антисимметричная матрица. На главной диагонали стоят нули

$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix}$ – верхняя треугольная. Транспонированная – нижняя треугольная матрица

1.2 Определитель

$$\square A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Определение 4. Определитель – это число

$$\square A_{1 \times 1} = (a_{11}) \quad \det A \equiv |A| = a_{11}$$

$$\square A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\square A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

Мнемоническое правило для случая с тремя:

берём диагонали в одну сторону с + в другую с -.

Пример. $\square A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

$$\det A = -28 - 18 + 4 - (-21 + 4 - 24) = -1$$

$$\triangleleft \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix}$$

Определение 5. Дополнительный минор элемента a_{ij} – определитель матрицы, полученной из исходной вычёркиванием i -ой строки и j -го столбца.

Обозначение: M_{ij}

Утверждение 1 (Рекуррентная формула вычисления определителя).

$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot M_{ij}$, где j – номер любого столбца. Эта формула называется разложением определителя по j -ому столбцу.

$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$ – разложение по i -ой строке

$$\triangleleft (-1)^{i+j} M_{ij} = \mathcal{A}_{ij} \text{ – алгебраическое дополнение элемента } a_{ij}$$

Пример. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} = A$

$$\det A = (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 25 - 22 - 4 = -1$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

Пример. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

В нижних (верхних) треугольных матрицах определитель – просто произведение элементов

Свойства определителя:

$$1. \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

$$2. \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \alpha_1 \cdot a_1 + b_1 & \alpha_2 \cdot a_2 + b_2 & \dots & \alpha_n \cdot a_n + b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$4. \det(A^T) = \det(A) \text{ (всё, что работает со строчками, работает и со столбцами)}$$

$$5. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} + c_1 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} + c_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & c_1 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & c_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$

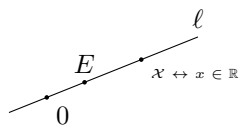
$$6. \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_1 & \alpha a_2 & \dots & \alpha a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Пример. $\begin{vmatrix} 1280 \\ 2848 \\ 1184 \\ 3072 \end{vmatrix} : 32$

TODO —

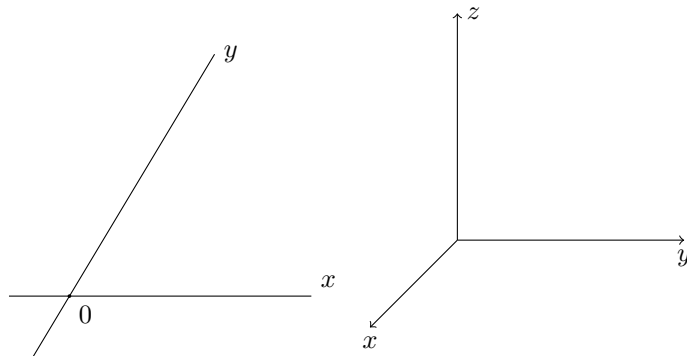
1.3 Лекция 1 - Метод аналитической геометрии

метод – метод координат.



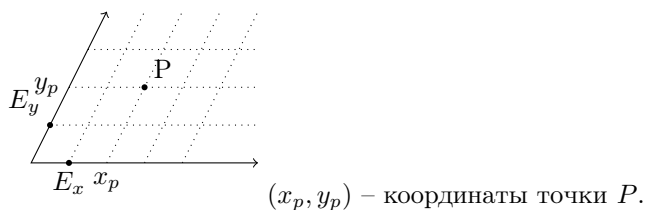
– координатная линия

Замечание. Система координат на плоскости – две координатные линии

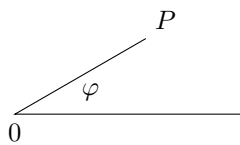


Определение 6. Система координат называется декартовой, если

1. Углы между координатными линиями прямые
2. Масштабы на осях одинаковые



Полярная система координат:



(TODO) —————

1.4 Практика 3

1.4.1 Обратная матрица

□ A, B – квадратные матрицы $n \times n$

Матричная алгебра:

1. $A + B$
2. $\lambda \cdot A$
3. $A \cdot B$

Определение 7 (Обратная матрица). $A^{-1} \quad A^{-1}A = AA^{-1} = I$

Утверждение 2. Обратная к A матрица существует, если и только если $\det A \neq 0$

Задача 1. $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = ?$

1. Метод союзной матрицы $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^T$

Определение 8. \tilde{A} союзная матрица – матрица алгебраических дополнений элементов матрицы A

$$\det A = (-1) \cdot 7 + 3 \cdot 11 + 1 \cdot 12 = 38$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -7 & -20 \\ -7 & 11 & -12 \\ 5 & 3 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{38} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 \\ -7 & 11 & 3 \\ -20 & -12 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\triangleleft A \cdot A^{-1} = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 \\ -7 & 11 & 3 \\ -20 & -12 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Метод Гаусса $[A|I] \sim [I|A^{-1}]$

Элементарные преобразования:

- (a) Умножение на число $\lambda \neq 0$ одной строчки
- (b) Перестановка двух любых строк
- (c) Составление линейной комбинации строк

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -20 & 7 & 0 & -8 & 1 \end{array} \right] \sim \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -140 & 30 & 10 & -50 & 0 \\ 0 & -140 & 49 & 0 & -56 & 7 \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & -10 & -6 & 7 \end{array} \right] \sim \dots \end{aligned}$$

Системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = -5 \\ x + 3y - 6z = 2 \\ 3x - 2y + 2z = 9 \end{cases}$$

Заметим, что стандартный способ решения таких систем: упрощение, складывание строк, домножение на число строк, их комбинация – напоминают элементарные преобразования. Т.е. элементарные преобразования – преобразования, приводящие к эквивалентной системе.

$$\begin{aligned} \text{1. Метод Гаусса} \quad &\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 9 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 9 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & -5 & 16 & -9 \\ 0 & -11 & 20 & 3 \end{array} \right] \sim \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & -55 & 176 & -99 \\ 0 & -55 & 100 & 15 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & -5 & 16 & -9 \\ 0 & 0 & -76 & 114 \end{array} \right] \\ &\begin{cases} x + 3y - 6z = 2 & x = 2 \\ -5y + 16z = -9 & y = -3 \\ -76z = 114 & z = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

2. Метод Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -6 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6) + 1 \cdot (-20) + 4 \cdot (-11) = -12 - 20 - 44 = -76$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -6 \\ 9 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (-5) \cdot (-6) - 1 \cdot 58 + 4 \cdot (-22) = -152$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-152}{-76} = 2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & -6 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

3. метод обратной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \quad X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{76} \begin{bmatrix} -6 & 20 & -11 \\ -10 & -8 & 7 \\ -18 & 16 & 5 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{76} \begin{bmatrix} 6 & 10 & 18 \\ -20 & 8 & -16 \\ 11 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}B = X$$

1.5 Лекция 3

$$V/\sim = W$$

$$\vec{a} + \vec{b}$$

Напоминание:

1. $\exists - (\vec{a})$
2. $\exists \vec{0}$
3. $\lambda \vec{a} \quad \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$

1.5.1 Проекция вектора на ось

Определение 9. Проекцией вектора \vec{a} на ось γ называется класс эквивалентности $a_l^{\parallel \gamma}$, содержащий вектор, начало которого совпадает с точкой пересечения оси l и прямой параллельной γ и проходящей через начало вектора \vec{a} , а конец – с точкой пересечения оси l и прямой, параллельной γ и проходящей через конец вектора \vec{a}

Свойства проекции:

1. $(\vec{a} + \vec{b})_l^{\parallel \gamma} = \vec{a}_l^{\parallel \gamma} + \vec{b}_l^{\parallel \gamma}$
2. $(\lambda \vec{a})_l^{\parallel \gamma} = \lambda \vec{a}_l^{\parallel \gamma}$

$$\underline{\lim}: \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i \right)_l^{\parallel \gamma} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_{i_l}^{\parallel \gamma}$$

$\square \vec{e}$ – вектор, параллельный l . Положим $|\vec{e}| = 1 \implies$ орт оси l

$$\angle \vec{a}_l^{\parallel \gamma} = \alpha \cdot \vec{e} \quad \alpha = (\text{Пр}_l^{\parallel \gamma} \vec{a}) \cdot \vec{e} \quad \alpha - \text{длина проекции } \vec{a}_l^{\parallel \gamma} \text{ на ось } l.$$

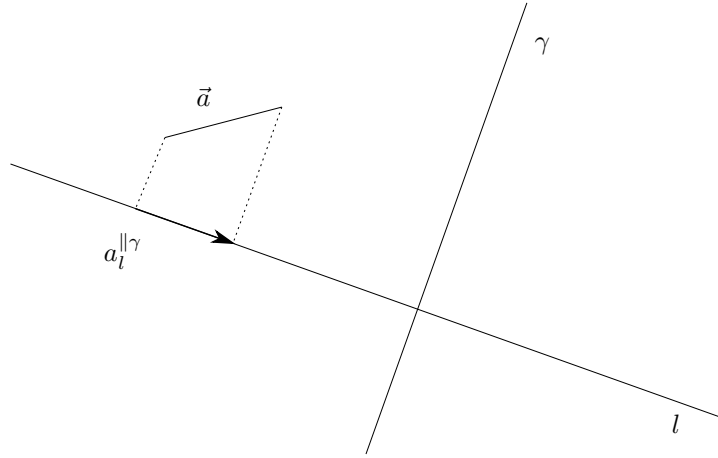


Рис. 1.1: Проекция

Лемма 1. $\text{Pr}_l^{\parallel\gamma} [\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i] = \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{Pr}_l^{\parallel\gamma} \vec{a}_i$

Доказательство. $(\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i)_l^{\parallel\gamma} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_{i_l}^{\parallel\gamma}$

$\text{Pr}_l^{\parallel\gamma} [\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i] = \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{Pr}_l^{\parallel\gamma} \vec{a}_i \vec{e}$ ■

\mathbb{R}^1

$\forall \vec{a} \quad \vec{a} = x_a \vec{e} \quad x_a - \text{координата вектора } \vec{a} \text{ на ось } l$

\mathbb{R}^2

$\vec{a} = \vec{a}_x^{\parallel y} + \vec{a}_y^{\parallel x} = \text{Pr}_y^{\parallel x} \vec{a} \vec{e}_1 + \text{Pr}_y^{\parallel x} \vec{a} \vec{e}_2 = x_x \vec{e}_1 + a_y \vec{e}_2$

Определение 10. Говорят, что в базисе $\{e_1, e_2\}$ вектор \vec{a} имеет координаты $\vec{a}(a_x, a_y)$

\mathbb{R}^3

$\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$

Замечание. Если угол между осью l и прямой γ прямой ($l \perp \gamma$) $\implies \vec{a}_l^{\parallel\gamma} = \vec{a}_l^\perp = \text{Pr}_l^\perp \vec{a} \cdot \vec{e}$

$l \perp \Gamma \implies \vec{a} + l^\perp \Gamma = \vec{a}_l^\perp = -||-$



Рис. 1.2: r1

В декартовой системе координат орты координатных осей обозначаются следующим образом:

$$x \quad \vec{e}_1 = \vec{i}$$

$$y \quad \vec{e}_2 = \vec{j}$$

$$z \quad \vec{e}_3 = \vec{k}$$

Замечание. $\vec{a}(1, 2, 3) \implies \vec{a} = 1 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k}$

$$\text{Лемма 2.} \quad \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i \right)_x = \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_{i_x}$$

1.6 Лекция 4

1.6.1 Скалярное произведение

$$W = V / \sim$$

$$\text{Определение 11.} \quad (\vec{a}\vec{b}) = |\vec{a}| \operatorname{Pr}_{\vec{a}}^{\perp} \vec{b}$$

$$\text{Замечание.} \quad (\vec{a}\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \gamma$$

Алгебраические свойства:

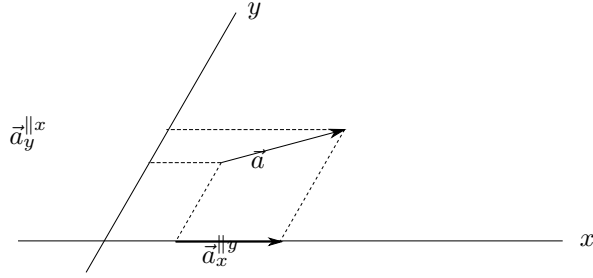


Рис. 1.3: r2

1. $(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{b}\vec{a})$
2. $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$

Доказательство. $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = |\vec{c}| \text{Pr}_{\vec{a}}^{\perp} (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}| (\text{Pr}_{\vec{c}}^{\perp} \vec{a})$ ■

3. $(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b})$

Геометрические свойства:

1. $\vec{a} \perp \vec{b} \quad \vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b} \implies (\vec{a}, \vec{b}) = 0$
2. $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$
3. $\square |\vec{a}| = 1 \implies (\vec{a}, \vec{b}) = \text{Pr}_{\vec{a}}^{\perp} \vec{b}$

Замечание. $\text{Pr}_i^{\perp} \vec{b} = (\vec{i}, \vec{b})$

Скалярное произведение в координатах:

- Декартова Прямоугольная Система Координат.

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$(\vec{a}\vec{b}) = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k})(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

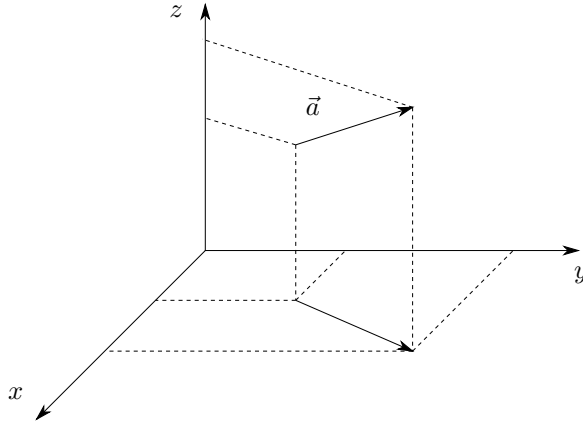


Рис. 1.4: r3

- Произвольная Система Координат.

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \sum_{j=1}^3 a_j \vec{e}_j$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3 = \sum_{k=1}^3 b_k \vec{e}_k$$

$(\vec{a}, \vec{b}) = \left(\sum_{j=1}^3 a_j \vec{e}_j \cdot \sum_{k=1}^3 b_k \vec{e}_k \right) = \sum_{j,k=1}^3 a_j b_k (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k)$ — достаточно знать скалярное произведение базисных векторов. $g_{jk} = \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k$ называется метрическим тензором.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{j,k=1}^3 a_j b_k g_{jk}$$

Замечание. В ДПСК $g_{jk} = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & , j \neq k \\ 1 & , j = k \end{cases}$ δ — символ Кронекера

$$g_{jk} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \text{ — матрица Грама}$$

$$a^T \cdot g \cdot b = (\vec{a}, \vec{b})$$

1.6.2 Векторное произведение

$$W = V / \sim$$

$$\vec{a}, \vec{b} \in W$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a} \vec{b}] = \vec{c} \text{ — вектор:}$$

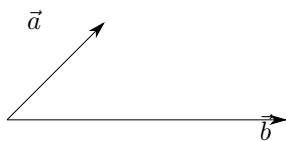


Рис. 1.5: скалярное произведение

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi = |\vec{a}_\perp| |\vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}_\perp|$
2. $\vec{c} \perp \vec{a} \quad \vec{c} \perp \vec{b} \quad \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – правая тройка (Буравчик, штопор)

Алгебраические свойства:

1. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$
2. $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$

Доказательство. $[\vec{a}, \vec{c}] = [\vec{a}_\perp, \vec{b}]$

$$[\vec{a}_\perp + \vec{b}_\perp, \vec{c}] = [\vec{a}_\perp, \vec{c}] + [\vec{b}_\perp, \vec{c}]$$

Если нарисовать картиночку, там будут углы с перпендикулярными сторонами и всё будет хорошо. ■

3. $[\alpha \vec{a}, \vec{b}] = \alpha [\vec{a}, \vec{b}]$

Доказательство. $\vec{m} = [\alpha \vec{a}, \vec{b}] \quad \vec{n} = [\vec{a}, \text{vecb}]$

$$|\vec{m}| = |\alpha| |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\alpha \vec{a}, \vec{b}) \quad |\vec{n}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$$

Если $\alpha < 0$, то у одного другая ориентация тройки, а у другого отрицательный множитель ■

Геометрические свойства:

1. $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$

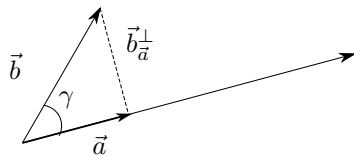


Рис. 1.6: note

$$2. \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi = S_{\triangle}$$

Замечание. $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i}$$

$$\text{Можно упростить запоминание: } a_x b_y - a_y b_x = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Хотя формально так делать плохо, потому что в матрице объекты разной природы: скаляры и векторы.

Общий случай:

$$\vec{a} = \sum_{m=1}^3 a_m \vec{e}_m$$

$$\vec{b} = \sum_{n=1}^3 b_n \vec{e}_n$$

$$\text{Точно: } \vec{e}_m \times \vec{e}_m = \vec{0} \forall m$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 \times \vec{e}_3$$

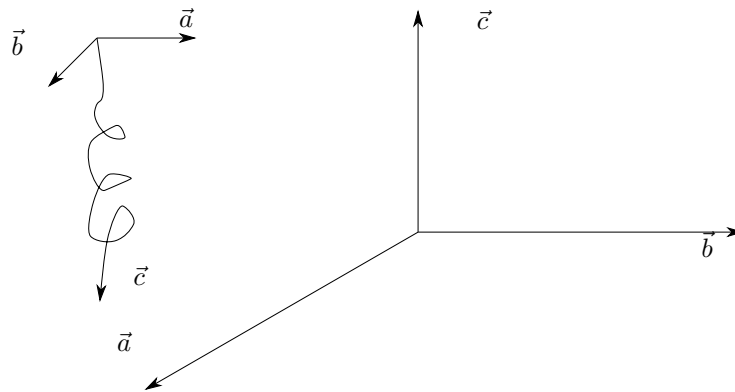


Рис. 1.7: shtopor

$$\vec{e}_1 \vec{e}_2 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i$$

1.7 Практика 4: Векторная Алгебра

Пример. $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{n}{m}$

$\vec{r}_C = ?$

$$\vec{r}_C = \frac{n}{m+n} (\vec{r}_B - \vec{r}_A) + \vec{r}_A$$

п1 Скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \Pr_{\vec{a}}^{\perp} \vec{b}$

Пример. $\square \quad |\vec{a}| = 1 \quad |\vec{b}| = 2 \quad (\vec{a} - \vec{b})^2 + (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = 20$

$$|\vec{a}|^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 + 4(\vec{a}, \vec{b}) + 4|\vec{b}|^2 = 20$$

$$2(\vec{a}, \vec{b}) = -2 \implies (\vec{a}, \vec{b}) = -1 \quad \cos \varphi = -\frac{1}{2} \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

Пример. $\vec{a}(1, 2, 1) \quad \vec{b}(2, 3, 1,)$

$$\Pr_{\vec{a}}(\vec{a} + \vec{b}) = \Pr_{\vec{a}} \vec{a} + \Pr_{\vec{a}} \vec{b} = |a| + \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|}$$

Теперь посчитаем то же самое. но пусть вектора заданы в косоугольном базисе.

$$\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n} \quad \vec{b} = 3\vec{m} - 2\vec{n} \quad |\vec{m}| = 2 \quad |\vec{n}| = 3 \quad \angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$$

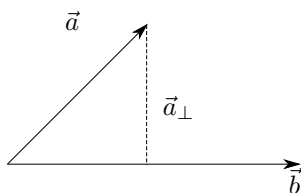


Рис. 1.8: couple

Проекция и скалярное произведение не зависят от базиса.

$$|\vec{a}|^2 = (2\vec{m} + 2\vec{n})^2 = 4|\vec{m}|^2 + 4(\vec{m}, \vec{n}) + |\vec{n}|^2$$

Пример. $\vec{AB} = 2\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2$ $\vec{AC} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$ $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \frac{\pi}{2}$

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{AB}, \vec{AC})}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = 0 \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Аналогично остальные, вектор третьей стороны можно выразить из двух других, как радиус векторов из A

Пример. $A(1, 2, 3)$ $B(1, 1, 1)$ $C(1, 0, 1)$ – три точки параллелограмма

$$O(1, 1, 2) \quad \vec{OB}(0, 0, -1) \quad \vec{OC}(0, -1, -1) \quad \cos \varphi = \frac{(\vec{OB}, \vec{OC})}{|\vec{OB}| |\vec{OC}|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}}$$

Пример. $\vec{a} = \alpha \vec{m} + \beta \vec{n}$ $\vec{b} = \gamma \vec{m} + \delta \vec{n}$ $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ $|\vec{n}|, |\vec{m}|, |\vec{m}\vec{n}|$ – знаем

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{|\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{a} - \vec{b}|}$$

$$|\vec{a}|^2 = (\vec{a}, \vec{a}) = (\alpha \vec{m} + \beta \vec{n}, \alpha \vec{m} + \beta \vec{n}), \text{ для } \vec{b} \text{ так же}$$

Проверка того, что параллелограмм $\frac{\alpha}{\gamma} \neq \frac{\beta}{\delta}$

Пример. $\vec{x}(1, 2, 2)$ $\vec{e}_1(1, -1, 1)$ $\vec{e}_2(-2, 0, 1)$

$$\vec{x}' = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2$$

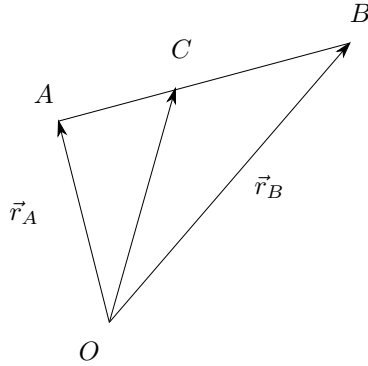


Рис. 1.9: vec

$$\vec{x} = \vec{x}' + \vec{z}$$

$$\vec{x} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \vec{z} \quad \begin{cases} (\vec{x}, \vec{e}_1) = \alpha(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + \beta(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \\ (\vec{x}, \vec{e}_2) = \alpha(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + \beta(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta = 1 \\ -\alpha + 5\beta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{5}{14} \\ \beta = \frac{1}{14} \end{cases}$$

1.7.1 Векторное произведение

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\varphi)$$

При векторном произведении можно не учитывать компоненту

Пример. $[\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}] = [\vec{a}, \vec{a}] + [\vec{a}, \vec{b}] - [\vec{b}, \vec{a}] + [\vec{b}, \vec{b}] = 0 + [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{b}] + 0 = 2[\vec{a}, \vec{b}]$

Получается площадь образуемого параллелограмма.

Пример.

1.8 Лекция 5

1.8.1 Смешанное произведение

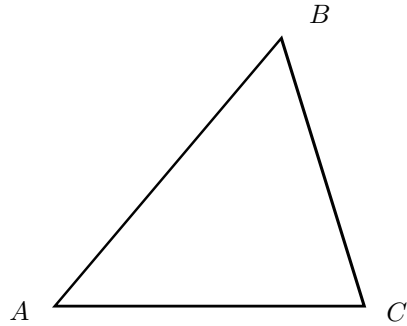


Рис. 1.10: trive

Определение 12. $\square \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Смешанным произведением векторов \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} называется число w

$$w = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]).$$

w – псевдоскаляр

Замечание. Алгебраические свойства:

1. Общие свойства векторного и скалярного произведений
2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны $\iff (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = 0$
3. $(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = |\vec{a}| |[\vec{b}, \vec{c}]| \cdot \cos(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = |\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{c}| \sin(\vec{b}, \vec{c}) \cos(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$

получается объём следующего параллелограмма (рисунок)

Замечание. $V_{\text{Пар}}$ – ориентированный объём

$$\begin{cases} V > 0 & , (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) - \text{правая тройка} \\ V < 0 & , (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) - \text{левая тройка} \end{cases}$$

$$4. \angle([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$$

$$\angle(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = ([\vec{b}, \vec{c}], \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

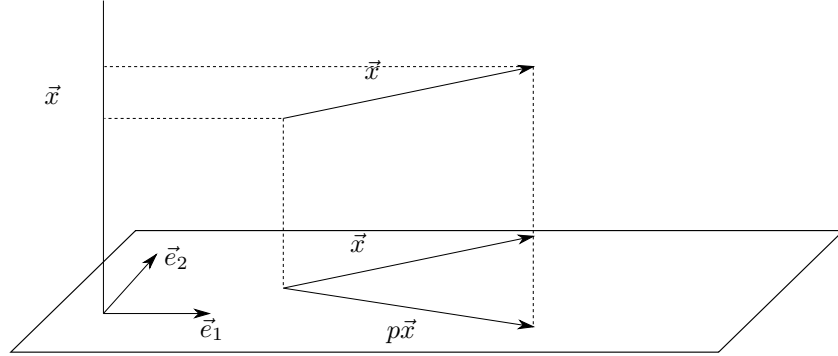


Рис. 1.11: pr

1.8.2 Смешанное произведение а координатах

1. Базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ $\vec{i}\vec{j}\vec{k} = 1$

$$\vec{a}(a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b}(b_x, b_y, b_z) \quad \vec{c}(c_x, c_y, c_z)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}\vec{b}\vec{c} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) (c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + \\ &a_z\vec{k}) \left(\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \vec{k} - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} \vec{i} \right) = a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + \\ &a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} (\vec{i}\vec{j}\vec{k}) - \text{число элементарных объёмов, кото-} \\ &\text{рые помещаются в задаваемый параллелепипед} \end{aligned}$$

2. Произвольный базис. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b}(b_1, b_2, b_3) \quad \vec{c}(c_1, c_2, c_3)$$

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)(c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3) = \\ &\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \cdot (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3), \text{ где } \vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3 - \text{объём параллелепипеда для ме-} \\ &\text{ры} \end{aligned}$$

1.8.3 Двойное векторное произведение

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \quad \vec{v} = [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$$

$$\vec{v} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$$

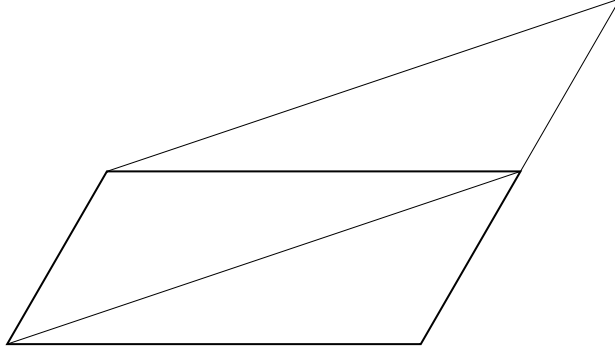


Рис. 1.12: paral

$$1. \vec{v} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$$

$$\text{Доказательство. } [\vec{b}, \vec{c}] = (b_y b_z - c_y c_z) \vec{i} - (b_x c_z - c_x b_z) \vec{j} + (b_y c_z - c_y b_z) \vec{k}$$

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = (a_y(b_x c_y - c_x b_y) + a_z(b_x c_z - c_x b_z)) \vec{i} - (a_x(b_x c_y - c_x b_y) - a_z(b_y c_z - b_z c_y)) \vec{j} + (a_x(b_z c_x - c_z b_x) - a_y(b_y c_z - b_z c_y)) \vec{k}$$

$$v_x = b_x(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_x(a_x b_x + a_y b_y + a_z c_z)$$

$$\triangleleft a_y b_x c_y - a_y c_x b_y + a_z b_x c_z - a_z c_x b_z = b_x(a_y c_y + a_z c_z) - c_x(a_y b_y + a_z b_z) + a_x b_x c_x - a_x b_x c_x = \vec{v}_x$$

Дальше то же самое для второй и третьей компонент (Упражнение: дома проделать для одной из оставшихся координат) ■

Теорема 1 (Тождество Бьянки). $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] + [\vec{b}, [\vec{c}, \vec{a}]] + [\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]] = \vec{0}$

$$\text{Доказательство. } \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) + \vec{c}(\vec{b}\vec{a}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c}) - \vec{b}(\vec{c}\vec{a}) = \vec{0} \quad \blacksquare$$

$$d(f, g) = (df)(g) + (f)(dg)$$

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = [[\vec{a}, \vec{b}] \vec{c}] + [\vec{b}, [\vec{a}, \vec{c}]]$$

Позволяет считать двойное векторное произведение некоторым аналогом дифференцирования.

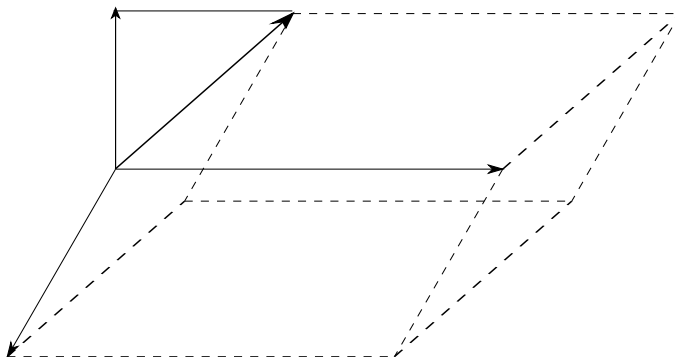


Рис. 1.13: mixed

1.9 Лекция 6

1.9.1 Аналитическая геометрия

Прямые и плоскости

1. Прямая на плоскости.

P_1, P_2 – произвольные различные точки на плоскости.

Прямая – геометрическое место точек, равноудалённых от этих двух.

$$|PP_1| = |PP_2|$$

Пусть O – точка отсчёта. $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OP_2}$ – два радиус вектора

$$|\vec{r} - \vec{r}_1|^2 = |\vec{r} - \vec{r}_2|^2$$

$$|\vec{r}_2|^2 - 2(\vec{r}\vec{r}_1) + |\vec{r}_1|^2 = |\vec{r}|^2 - 2(\vec{r}\vec{r}_2) + |\vec{r}_2|^2$$

$$2(\vec{r}, -\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = |\vec{r}_2|^2 - |\vec{r}_1|^2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_2 + \vec{r}_1)$$

$$(\vec{r} - \frac{\vec{r}_2 + \vec{r}_1}{2}, \vec{r}_2 - \vec{r}_1) = 0 \iff \underbrace{\vec{r} - \frac{\vec{r}_2 + \vec{r}_1}{2}}_{\vec{r}_0} \perp \underbrace{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}_{\vec{n}}$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{n} \quad (\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$$

$(\vec{r}, \vec{n}) = (\vec{r}_0, \vec{n})$ – нормальное уравнение прямой

$$(\vec{r}\vec{n}) = (\vec{r}_0\vec{n}).$$

Способы задания:

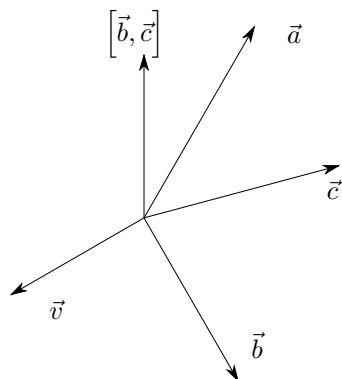


Рис. 1.14: dvec

(a) В ДПСК $\vec{r}(x, y), \vec{n}(a, b), \vec{r}_0(x_0, y_0)$

$$\begin{aligned} ax + by = ax_0 + by_0 = -c \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \\ ax + by + c = 0. \end{aligned}$$

Последнее – общее уравнение прямой.

(b) $\vec{r} - \vec{r}_0 \parallel \vec{s} \implies \exists t : \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{s}t$

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t$ \vec{s} – направляющий вектор, любой ненулевой, смотрящий вдоль прямой

(c) $\vec{z}(x, y) \quad \vec{r}_0(x_0, y_0) \quad \vec{s}(\alpha, \beta)$

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \quad \text{– параметрическое уравнение прямой.}$$

(d) $\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta}$ – каноническое уравнение прямой.

Пример. $l : 2x + 3y - 1 = 0$ Рассмотрим $A(1, 1)$, которая не лежит на прямой

$l' : 2(x - 1) + 3(y - 1) = 0$ – уравнение прямой, проходящей через A параллельно l

$l'' : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3}$ – уравнение прямой, проходящей через A перпендикулярно l (её направляющая – нормаль изначальной)

Пример. $\frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{4} \quad A(1, 1)$

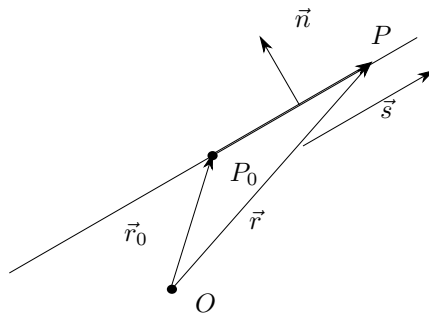


Рис. 1.15: line

$$l' : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4}$$

$$l'' : 2(x-1) + 4(y-1) = 0$$

2. Уравнение прямой с произвольным параметром

$$ax + by + c = 0 \quad | \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$Ax + By + C = 0$$

$$C = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = -(\vec{r}_0, \vec{n}^0)$$

C – прицельный параметр – (по модулю) расстояние от прямой до начала координат.

3. Уравнение прямой в отрезках.

$$ax + by = -c.$$

$$\frac{ax}{-c} + \frac{by}{-c} = 1$$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

4. Уравнение с угловыми коэффициентами.

$$\frac{a}{b}x + y = -\frac{c}{b}$$

$$y = kx + l$$

$$\operatorname{tg} \varphi = k$$

5. Уравнение прямой через две точки

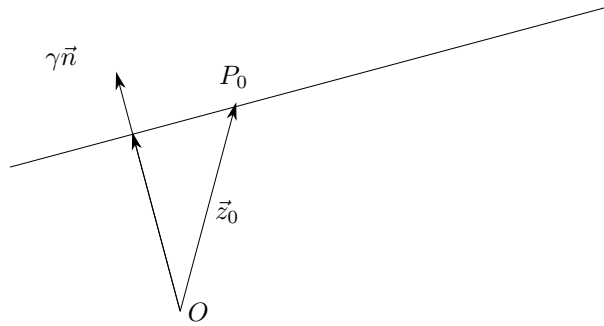


Рис. 1.16: radvec

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)t$$

Взаимное расположение прямых:

1. Найти угол между прямыми:

$$l_1 : (\vec{r}\vec{n}_1) = D_1$$

$$l_2 : (\vec{r}, \vec{n}_2) = D_2$$

$$\angle(l_1, l_2) = \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

2. Точка пересечения $(\vec{r}_1, \vec{n}_1) = D_1$

$$(\vec{r}_2, \vec{n}_2) = D_2$$

$$\vec{n}_1(a_1, b_1) \quad \vec{n}_2(a_2, b_2) \quad \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

\vec{r}_0 – радиус вектор точки пересечения прямых

$$a_1x + b_1y = D_1 \quad a_2x + b_2y = D_2$$

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

$$\Delta_x = D_1b_2 - b_1D_2$$

$$\Delta_y = a_1D_2 - a_2D_1$$

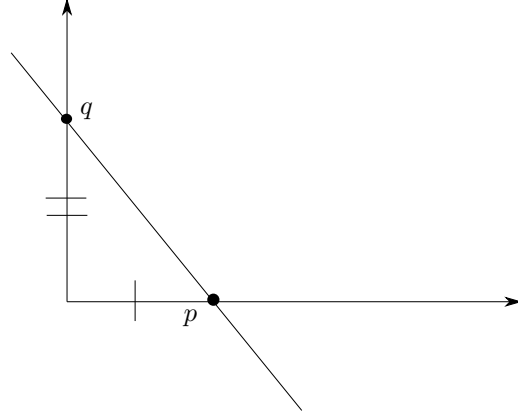


Рис. 1.17: отрезок

$$x = \frac{D_1 b_2 - b_1 D_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$y = \frac{a_1 D_2 - a_2 D_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Подойдём с другой стороны:

$$l_1 : \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{s}_1 t$$

$$l_2 : \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{s}_2 t$$

$$\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2 \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \neq \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

$$\vec{r}_1 + \vec{s}_1 t = \vec{r}_2 + \vec{s}_2 t$$

$$\vec{s}_1 t - \vec{s}_2 t = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\alpha_1 t_1 - \alpha_2 t_1 = x_2 - x_1$$

$$\beta_1 t_1 - \beta_2 t_1 = y_2 - y_1$$

$$\Delta = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0$$

3. Есть прямая ℓ и точка $P \notin \ell$

$$(\vec{r}, \vec{n}) = D = (\vec{r}_0, \vec{n}) \quad \ell, P_0$$

$$\vec{r}_P \quad P$$

Сначала найдём ортогональную проекцию точки P – точку Q

$$\vec{r}_Q = \vec{r}_P + \overrightarrow{PQ} = \vec{r}_P - \alpha \vec{n}$$

$$|QP| = (\overrightarrow{P_0P}, \vec{n}_0) = \frac{(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n})}{|\vec{n}|}$$

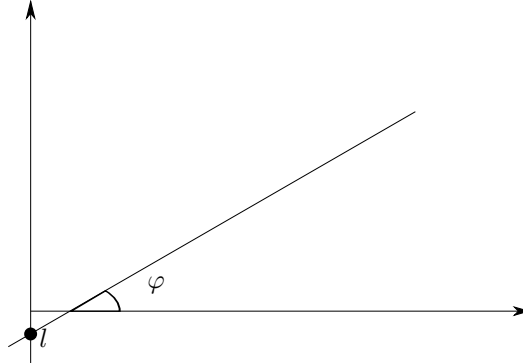


Рис. 1.18: coeff

$$\overrightarrow{QP} = |QP| \vec{n} = \frac{(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n})}{|\vec{n}|^2} \vec{n} = \frac{(\vec{r}_p - \vec{r}_0, \vec{n})}{|\vec{n}|^2} \vec{n} \quad \vec{r}_q = \vec{r}_p - \overrightarrow{QP} = \vec{r}_p - \frac{(\vec{r}_p, \vec{n}) - D}{|\vec{n}|^2} \vec{n}$$

$$II: \quad (\vec{r}_q, \vec{n}) = (\vec{r}_p, \vec{n}) - \alpha |\vec{n}|^2$$

$$D = (\vec{r}_p, \vec{n}) - \alpha |\vec{n}|^2 \implies \alpha = \frac{(\vec{r}_0, \vec{n}) - D}{|\vec{n}|^2}$$

$$\text{Расстояние от } P \text{ до } \ell \quad \rho(P, \ell) = \left| \overrightarrow{QP} \right| = \frac{(\vec{r}_p, \vec{n}) - D}{|\vec{n}|}$$

$$\text{В координатах: } \rho(P, \ell) = \frac{ax_p + by_p - D}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Плоскость – множество точек пространства, равноудалённых от фиксированных точек.

$$|P_1P| = |P_2P|$$

$$(\vec{r}_0 - \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}, \vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 0$$

$$(\vec{r}, \vec{n}) = (\vec{r}_0, \vec{n}) = D - \text{нормальное векторное уравнение плоскости}$$

$$\text{ДПСК: } \vec{n}(A, B, C)$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0 \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$(\vec{r}, \vec{n}) = D \quad Ax + By + Cz = D - \text{общее уравнение плоскости}$$

Параметрическое уравнение плоскости

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{P_0P} = \vec{r}_0 + \alpha \vec{m} + \beta \vec{q} - \text{векторное параметрическое уравнение плоскости}$$

$$\text{ДПСК: } \begin{cases} x = x_0 + \alpha m_1 + \beta q_1 \\ y = y_0 + \alpha m_2 + \beta q_2 \\ z = z_0 + \alpha m_3 + \beta q_3 \end{cases} \quad \vec{m}(m_1, m_2, m_3) \quad \vec{q}(q_1, q_2, q_3)$$

Плоскость можно задать через три точки. P_1, P_2, P_3

Если нам нужна нормаль, образуем два вектора $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad \vec{r}_3 - \vec{r}_1$

$$\vec{n} = [\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1] \quad \vec{r}_0 = \vec{r}_1$$

$$(\vec{r}, \vec{n}) = (\vec{r}_1, \vec{n})$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{n})$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0$$

$$\text{ДПСК: } \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Для параметрического уравнения: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \alpha(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \beta(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)$

Уравнение плоскости с прицельным параметром. $Ax + By + Cz + D = 0$
 $\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z + \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0 \quad \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} -$$

прицельный параметр

$$D = (\vec{r}_0, \vec{n}) \quad \text{Прицельный параметр: } (\vec{r}_0, \vec{n}) / |\vec{n}|$$

Взаимное расположение плоскостей: $(\vec{r}, \vec{n}_1) = D_1 \quad (\vec{r}, \vec{n}_2) = D_2$ - две плоскости

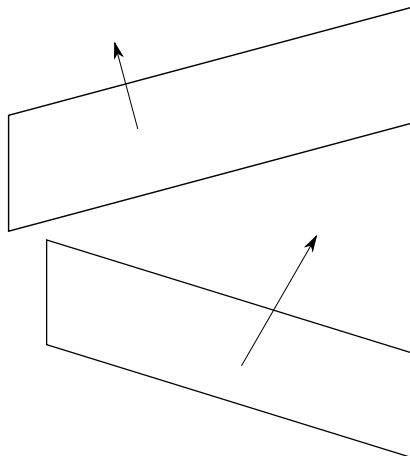


Рис. 1.19: плоскости

1. Угол

$$\angle(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$$

2. Пересечение

$$[\vec{n}_1, \vec{n}_2] \neq 0$$

3. Параллельность

$$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \implies \vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1$$

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{n}) = 0 \quad (\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{n}_1) = (\vec{r}_2, \vec{n}_1) - D = \frac{D_2}{\lambda} - D_1 \left(= \frac{|\vec{n}_1|}{|\vec{n}_2|} D_2 - D_1 \neq 0 \right)$$

$$(\vec{r}, \lambda \vec{n}_1) = D_2 \quad D_1 = \frac{D_2}{\lambda} \quad \lambda = \frac{D_2}{D_1} = \frac{|\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|}$$

4. Совпадение $\frac{D_2}{|\vec{n}_2|} = \frac{D_1}{|\vec{n}_1|}$

Пример. Даны плоскость и точка, не лежащая на плоскости. найдём точку проекции.

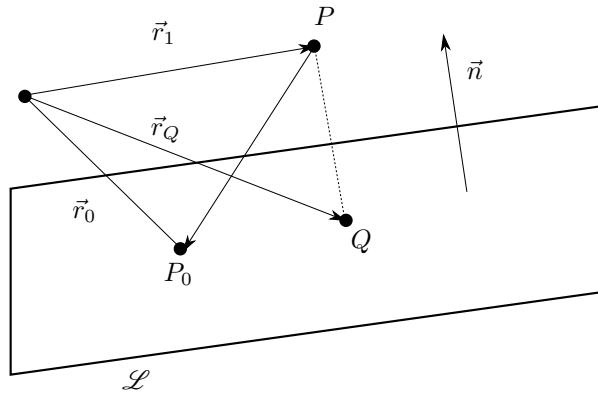


Рис. 1.20: проекция

$$\mathcal{L} \quad (\vec{r}, \vec{n}) = D$$

$$P \quad \vec{r}_1$$

$$\vec{r}_Q - ?$$

$$\vec{r}_Q = \vec{r}_1 + \overrightarrow{PQ} = \vec{r}_1 + \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_1, \vec{n})}{|\vec{n}|^2} \vec{n} = \vec{r}_1 + \frac{D - (\vec{r}_1, \vec{n})}{|\vec{n}|^2} \vec{n}$$

$$\rho(P, \mathcal{L}) = \left| \overrightarrow{PQ} \right| = \left| \frac{D - (\vec{r}_1, \vec{n})}{|\vec{n}|^2} \vec{n} \right|$$

Прямая в пространстве.

Три точки задают прямую, равноудалённую от них всех

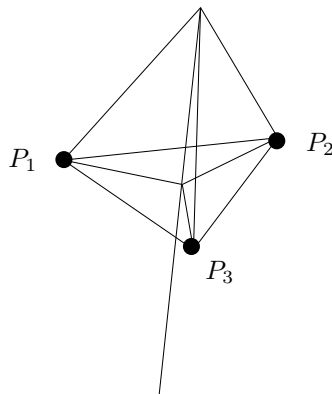


Рис. 1.21: прямая-через-3-точки

$$|PP_1| = |PP_2| = |PP_3|$$

(вывод будет позже)

\vec{s} – нормаль к плоскости, образованной тремя точками.

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t$ – векторное параметрическое уравнение прямой

$$\text{ДПСК: } \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases} \quad \vec{s}(\alpha, \beta, \gamma) \quad \vec{r}_0(x_0, y_0, z_0) \quad \vec{r}(x, y, z)$$

Векторное уравнение: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t$ $\times \vec{s}$

$$[\vec{r}, \vec{s}] = [\vec{r}_0, \vec{s}] = \vec{b}$$

$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}$ – каноническое уравнение прямой (выразили t и приравняли)

Через две точки $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$

Через две пересекающиеся плоскости. $\begin{cases} (\vec{r}, \vec{n}_1) = D_1 \\ (\vec{r}, \vec{n}_2) = D_2 \end{cases} \quad [\vec{n}_1, \vec{n}_2] \neq 0$

$$\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$$

Прямая(взаимное расположение)

$$\ell_1 \quad [\vec{r}, \vec{s}_1] = \vec{b}_1$$

$$\ell_2 \quad [\vec{r}, \vec{s}_2] = \vec{b}_2$$

$$1. \ell_1 \parallel \ell_2$$

$$[\vec{s}_1, \vec{s}_2] = 0 \implies \vec{s}_2 = \lambda \vec{s}_1$$

$$[\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{s}] \neq 0$$

$$2. \ell_1 = \ell_2$$

$$[\vec{s}_1, \vec{s}_2] = 0$$

$$[\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{s}] = 0$$

Плоскость через $\ell_1 \parallel \ell_2$

$$\vec{n} = [\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{s}]$$

$$(\vec{r}, \vec{n}) = (\vec{r}_0, \vec{n})$$

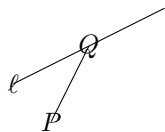
$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{s}) = 0 - \text{уравнение плоскости}$$

$$3. \text{Скрещивание } \ell_1 \times \ell_2$$

$$(\vec{n} =) [\vec{s}_1, \vec{s}_2] \neq 0$$

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{n}) \neq 0 \quad (\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2) \neq 0$$

Пример. Есть прямая, есть точка. Найти ортогональную проекцию этой точки на прямую.



$$[\vec{r}, \vec{s}] = \vec{b}$$

$$\vec{r}_p \quad P$$

$$\vec{r}_Q - ?$$

$$\vec{r}_Q = \vec{r}_p + \overrightarrow{PQ}$$

$$(\vec{r}, \vec{s}) = (\vec{r}_p, \vec{s}) - \text{плоскость}$$

$$[\vec{s}, [\vec{r}, \vec{s}]] = \vec{r}(\vec{s}\vec{s}) - \vec{s}(\vec{s}\vec{r}) = [\vec{b}, \vec{s}]$$

$$\vec{r}_Q |\vec{s}|^2 - \vec{s}(\vec{r}_p \vec{s}) = [\vec{b}, \vec{s}]$$

1.10 Практика

Пример. Даны две прямые, заданные параметрическими уравнениями:

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \end{cases}$$

$$l_2 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 + t \end{cases}$$

1. Параллельны ли они?

Направляющие вектора $\vec{s}_1(2, -1)$ $\vec{s}_2(-1, 1) \Rightarrow \vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2 \Rightarrow$ пересекаются

2. Найти точку пересечения

$$1 + 2t = 2 - t \Rightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$1 - t = 2 + t \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} \quad \begin{cases} x + 2y = +3 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$l_2 : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{1}$$

$y = -1, x = 5$ – точка пересечения. верхний способ не работает, там разные t

Пример. $l_1 : 2x + y + 2 = 0$

$l_2 : 4x + y + 1 = 0$

$A(1, 2)$ $AB = AC$ $l = ?$, чтобы проходила через BC

Можно найти точку пересечения прямых $O = l_1 \cap l_2$

$$\begin{cases} 2x + y = -2 \\ 4x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow 2x = 1 \quad x = \frac{1}{2} \quad y = -3 \quad O(\frac{1}{2}, -3) \quad OA(\frac{1}{2}, 5) \Rightarrow$$

$O'(\frac{3}{2}, 7)$

$$2(x - \frac{3}{2}) + (y - 7) = 0$$

$$2x + y - 10 = 0$$

$$C = l' \cap l_2 \quad \begin{cases} 2x + y = 10 \\ 4x + y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{11}{2} \\ y = 21 \end{cases} \Rightarrow l : \frac{x-1}{-\frac{11}{2}-1} = \frac{y-2}{21-2} - \text{ответ}$$

Пример. $A(1, 3)$ $B(2, 5)$ – две вершины треугольника. $H(1, 4)$ – точка пересечения высот этого треугольника. Найти третья точку треугольника C

$$\overrightarrow{AB} = (1, 2) \implies l = 1(x - 1) + 2(y - 4) = 0 \quad x + 2y = 3$$

$$\overrightarrow{AH}(0, 1) \implies l' : y = 5$$

$$C = l \cap l' \implies C(-1, 5)$$

Плоскости:

$$(\vec{r}\vec{n}) = (\vec{r}_0, \vec{n}) = \alpha$$

$$Ax + By + Cz + \alpha = 0 \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \alpha \vec{a} + \beta \vec{n}$$

Пример. $A(1, 1, 1) \quad B(2, 3, -1) \quad \vec{a}(0, -1, 2)$

$$\overrightarrow{AB}(1, 2, -2)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_a + \alpha \vec{a} + \beta \overrightarrow{AB}$$

Пример. $A(1, 1, -1)$

$$\alpha_1 : 2x - y + 5z + 3 = 0$$

$$\alpha_2 : x + 3y - z - 7 = 0$$

$$\alpha : \alpha \perp \alpha_1, \alpha \perp \alpha_2 \quad A \in \alpha \quad \alpha?$$

$$\vec{n}_1(2, -1, 5) \quad \vec{n}_2(1, 3, -1) \implies \vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2 \implies \vec{r} = \vec{r}_a + \alpha \vec{n}_1 + \beta \vec{n}_2$$

Пример. $\alpha : 2x + 3y + 6z - 12 = 0$

Вычислить объём фигуры, ограниченной тремя координатными и заданной плоскостями.

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1 \implies \text{Знаем пересечения плоскости с координатными плоскостями.}$$

$$V = 8$$

Пример. $L = \begin{cases} x + 2y - 3z - 5 = 0 \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$ – уравнение прямой через пересечение непараллельных плоскостей.

Найти каноническое уравнение прямой.

$$\vec{n}_1(1, 2, -3) \quad \vec{n}_2(2, -1, 1)$$

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 5\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\square z = 0 \quad \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2 + -y = -2 \end{cases} \quad -5y = -12 \quad \begin{cases} y = \frac{12}{5} \\ x = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\frac{x-\frac{1}{5}}{-1} = \frac{y-\frac{12}{5}}{-7} = \frac{z-0}{-5}$$

Пример. $L: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-3}{-1} (=t) \quad \alpha: x + 2y + 3z + 3 = 0$

$$\square P = L \cap \alpha \quad P-?$$

$$\vec{s}(1, -2, -1) \quad \vec{n}(1, 2, 3)$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad - \text{ вставляем в уравнение для плоскости}$$

$$t + 2(3 - 2t) + 3(3 - t) + 3 = 0$$

$$-6t = -18 \implies t = 3 \implies \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \\ z = 0 \end{cases}$$

Пример. $L: \frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-5}{4}$

$$\alpha: x - 3y + 2z - 7 = 0$$

Найти проекцию прямой L на плоскость α

$$\vec{n} \times \vec{s}$$

1.11 Практика: Кривые второго порядка на плоскости

Определение 13. Эллипс – геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до выбранных точек (называемых фокусами) постоянна.

F_1, F_2 – фокусы

a – длина большой полуоси

b – длина малой полуоси

c – фокусное расстояние $c^2 = a^2 - b^2$

В Декартовой системе координат. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\varepsilon = \frac{c}{a} \in [0, 1]$ – эксцентриситет

$\varepsilon = 0 \implies$ окружность $a^2 = b^2 = R^2$

$\varepsilon = 1 \implies a = c$

Уравнение касательной в точке (x_0, y_0)

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Директриса эллипса $x = \pm d = \pm \frac{a}{\varepsilon}$

Пример. Фокусы эллипса $(\pm 1, 0)$

$M(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \in E$

Построить уравнение эллипса E

Доказательство. $c = 1 = a^2 - b^2$

$$\frac{3}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1$$

Два уравнения с двумя неизвестными $\implies b = \sqrt{3} \quad a = 2 \implies \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ■

Пример. Директрисы $x = \pm 4$

Фокусы вместе с верхней и нижней точкой образуют квадрат

Найти уравнение эллипса

Доказательство. $b = c \implies a^2 - b^2 = c^2 \quad a^2 = 2c^2 \quad a = \sqrt{2}c$

$$d = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a^2}{c} = \frac{2c^2}{c} = 4 \implies c = 2 \implies b = 2 \quad a = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$

■

Определение 14. Гипербола – геометрическое место точек, (модуль) разность расстояний от которой до заданных точек есть число постоянное

$$||F_1P| - |F_2P|| = const$$

F_1, F_2 – фокусы гиперболы

$$\text{Уравнение гиперболы } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{Уравнение асимптот } y = \pm \frac{b}{a}x$$

Уравнение касательной в точке (x_0, y_0)

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Уравнение директрисы $x = \pm d = \frac{a}{\varepsilon}$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \in [1, \infty)$$

$$\varepsilon = 1 \implies a = c$$

$\varepsilon \rightarrow \infty \implies b \rightarrow \infty$ – две прямые, проходящие через фокусы вертикально.

Пример. Доказать, что отрезок касательной к гиперболе, заключённый между её асимптотами точкой касания делится пополам.

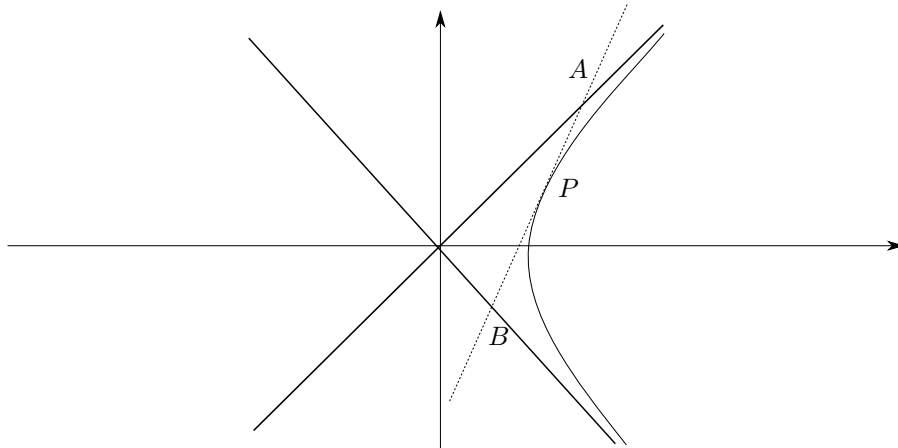


Рис. 1.22: zodacha

$$|AP| = |BP|$$

$$\text{Доказательство. } \begin{cases} \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \\ y = \pm \frac{b}{a}x \end{cases}$$

$$A: \quad \frac{x_A x_0}{a^2} - \frac{b}{a} \frac{x_A y_0}{b^2} = 1 \implies x_A = \frac{1}{\frac{x_0}{a^2} - \frac{y_0}{ab}} = \frac{a^2 b}{x_0 b - y_0 a}.$$

$$B: \quad \frac{x_B x_0}{a^2} + \frac{b}{a} \frac{x_B y_0}{b^2} = 1 \implies x_B = \frac{a^2 b}{x_0 b + y_0 a}.$$

$$x_A + x_B = a^2 b \frac{2x_0 b}{x_0^2 b^2 - y_0^2 a^2} = \frac{2x_0}{\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}} = 2x_0 \quad \blacksquare$$

Определение 15. Парабола – геометрическое место точек, равноудалённых от заданной прямой и точки

$$\rho(l, F) = |PF|$$

F – фокус параболы Уравнение $y^2 = 2px$

Уравнение касательной $yy_0 = p(x + x_0)$

Пример. $y^2 = 4.5x$

$$M: \rho(l, M) = 9.125$$

$$|OM| - ?$$

$$\text{Доказательство. } \frac{p}{2} = 1.125$$

$$M_x = 8 \implies M_y = 36$$

$$|OM|^2 = x_M^2 + y_M^2 = 36 + 64 = 100 \quad \blacksquare$$

Пример. Найти касательную к параболе $y^2 = 16x$, проходящую через точку $(1, 5)$

$$\text{Доказательство. } \begin{cases} yy_0 = p(x + x_0) \\ y_0^2 = 2px \end{cases}$$

$$yy_0 = p \left(x + \frac{y_0^2}{2p} \right)$$

$$y_M y_0 = p \left(x_M + \frac{y_0^2}{2p} \right) \implies y_0 = \dots \quad \blacksquare$$