

Дифференциальные уравнения

Коченюк Анатолий

23 сентября 2021 г.

Связь по: mvbabushkin@itmo.ru — просьба писать именно на почту 30 — экзамен 70 — практика (будет уточняться)

Литературу пришлю

0.1 Введение

0.1.1 Уравнения первого порядка

Допустим, y — неизвестная величина. Заметим, что это не просто число, а некоторая зависимость (например, температура, зависящая от времени), то есть это некоторая искомая функция. Ну, и часто непосредственно, нам не написать чему она равна; явно эту функцию просто так не напишешь, но можно написать некую взаимосвязь между этой функцией и переменной, возможно еще и производной и т.п.

Определение 1. Такая взаимосвязь называется **дифференциальным уравнением**.

Пример. Допустим, у нас есть кролики, заведем таблицу и будем считать кроликов каждый день.

Предположем, мы смотрели на эксперимент и обнаружили такую зависимость: Прирост примерно пропорционален текущему количеству и времени замеры.

$$y_{k+1} - y_k \approx \alpha y_k (t_{k+1} - t_k)$$

Так же заметим, что если ущемлять шаг времени, то зависимость будет все более и более точная.

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{t_{k+1} - t_k} = \alpha y_k$$

Тогда слева производная.

$$y'(t) = \alpha y(t) - g \cdot y$$

Как же получать такие формулы? Все-таки мы не привели ни одного аргумента, что эта формула верна. . . Пусть этим занимаются физики, мы лишь будем решать используя эти формулы.

Попробуем поугадывать решения:

$$\varphi(t) = \alpha t \implies (\alpha t)' = \alpha(\alpha t) \implies \alpha = \alpha^2 t \implies t = \frac{1}{\alpha}$$

$\varphi(t) = e^{\alpha t} \implies (e^{\alpha t})' = \alpha e^{\alpha t} \implies \alpha e^{\alpha t} \equiv \alpha e^{\alpha t} \text{ на } \mathbb{R} \implies \varphi(t) = Ce^{\alpha t} - \text{все решения}$

Задача 1. Пусть дано $m(0) = 25\text{г}$, $m(30) = 42\text{г}$, $m(t_2) = 2m(0)$, $t_2 - ?$

То есть нам нужно найти точку на плоскости (здесь был рисунок), но она может быть где угодно, так что предположем, что у нас есть еще какие-то данные:

$$m'(t) = \alpha m(t) \text{ \& } m(t) = Ce^{\alpha t}$$

Решение.

$$25 = m(0) = C \quad 42 = m(30) = 25e^{\alpha \cdot 30} \implies \alpha = \frac{1}{30} \ln \frac{42}{25} \implies 50 = m(t_2) = 25e^{\frac{1}{30} \ln \frac{42}{25} \cdot t_2} \implies t_2 \approx 40$$

■

0.1.2 Второй закон Ньютона

$$F = ma \implies a = \frac{F(t, x, v)}{m} \implies x'' = \frac{F(t, x, x')}{m}$$

Так что дифференциальные уравнение встречаются очень часто — мотивируйтесь их решать.

0.2 Уравнения первого порядка и его решения

Определение 2. Дифференциальное уравнение первого порядка — это уравнение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

Определение 3. Функция φ , если:

1. $\varphi \in C^1(a, b)$
2. $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0, x \in (a, b)$

Пример. $y' = -\frac{1}{x^2}$

$$y = \frac{1}{x} + C, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$y = \begin{cases} \frac{1}{x} + A, x < 0 \\ \frac{1}{x} + B, x > 0 \end{cases}$$

Сейчас одна точка разрыва, а если их больше, то было бы больше независимых констант... Поэтому, решениями являются функции на отрезке.

Определение 4. Интегральная кривая — это график его решения.

<!-- Оять рисунок -->

Определение 5. Общее множество решений для дифференциального уравнения — это множество всех его решений.

Определение 6. $F(x, y, c) = 0$

Общий интеграл — это такой интеграл при некотором значении константы в решении которого, соотношение неявно задает все решения.

Определение 7. Уравнение в неявной форме:

$$y' = f(x, y)$$

Для такого мы определим **область задания** — это аналог ОДЗ.

Определение 8. Область задания — это множество $\text{Dom } f$ (domain) — множество, где уравнение имеет смысл.

Пример. $y' = -\frac{1}{x^2}$, $f(x, y) = -\frac{1}{x^2}$, $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$

Задача 2. $y' = x + y$. Пусть φ — решение. У нас есть такая связь: $\varphi'(x) = x + \varphi(x)$, в частности, в точке $(2, 3)$.

$$\angle(2, 3) \quad \varphi'(2) = 2 + 3 = 5 = f(2, 3)$$

То есть, если там проходит наша функция, то она проходит там под углом $\arctg 5$.

$$\angle(4, 3) \quad \varphi'(4) = 4 + 3 = 7 = f(4, 3)$$

Никто не мешает нам взять какую-то сетку, и в каждой точке этой сетки мы поймем, как примерно ведут себя интегральные кривые. То есть, можно не решая уравнения, можно построить такое поле и увидеть, как ведут себя интегральные кривые.

Определение 9. То есть, задать уравнение — это значит увидеть, как ведет себя поле направлений.

Из этого геометрического смысла, мы можем сделать еще один вывод.

Возьмем какую-то точку (потом научимся их находить), посчитаем в ней угол, пойдем по этому направлению, новая точка — новое направление, и т. д. Чем мельче шаг, тем ближе ломаная к интегральной кривой.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + h \\ y_{k+1} &= y_k + f(x_k, y_k)h \\ \frac{\delta y_k}{\delta x_k} &= f(x_k, y_k) \end{aligned}$$

Так определяется **ломаная Эйлера**.

0.2.2 Уравнение в дифференциалах

Давайте запишем производную, как отношение дифференциалов, и перепишем уравнение 7.

$$\begin{aligned} dy &= f(x, y)dx \\ f(x, y)dx - dy &= 0 \end{aligned}$$

Определение 10. Уравнение в дифференциалах: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

Определение 11. Функция φ — это решение 10, если:

- $\varphi \in C^1(a, b)$
- $P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0, \quad x \in (a, b)$

Определение 12. Область определения 10 — это множество $\text{Dom } P \cap \text{Dom } Q$

Пример. Пусть $xdx + ydy = 0$ $\text{Dom } P \cap \text{Dom } Q = \mathbb{R}^2$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in (-R, R) \quad xdx + \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \left(-\frac{2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} \right) dx = 0$$

В чем еще одна идея такого вида уравнения? В том, что x и y здесь равноправны, то есть $x = ky$ — это тоже *конечное* решения.

Определение 13. Пара или вектор-функция $r(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ — это параметрическое решение уравнения 10, если:

- $\varphi, \psi \in C^1(\alpha, \beta), r'(t) \neq 0, \forall t \in (\alpha, \beta)$ — второе условие, чтобы не было изломов у функции (как у модуля)
- $P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \equiv 0$

Пример. $xdx + ydy = 0 \implies (R \cos t, R \sin t), t \in \mathbb{R}$ — параметрическое решение.

$$P(\varphi, \psi)\varphi' + Q(\varphi, \psi)\psi'(x) \equiv 0 \implies (P, Q) \cdot (\varphi', \psi') = 0$$

$$F = (P, Q) \quad r = (\varphi, \psi) \quad F \perp r'$$

<!-- Рисунок -->

И здесь у нас никакие направления не исключаются, в отличие от поля, где исключались вертикальные направления.

0.3 Задача Коши и уравнения с разделяющимися переменными

0.3.1 Задача Коши (ЗК)

Определение 14. Задачей Коши или начальной задачей называется задача отыскания решения уравнения в нормальной форме $y' = f(x, y)$, которая удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = y_0$

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

(x_0, y_0) — начальные данные

Вопросы: есть ли решение и может ли их быть несколько?

Теорема 1 (Теорема о существовании для уравнений 1-го порядка). G – область (открытое связное множество), $f \in C(G)$, $(x_0, y_0) \in G \implies \exists$ решение задачи Коши в некоторой окрестности точки x_0

Пример. $y' = f(x, y)$ $f(x, y) = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$

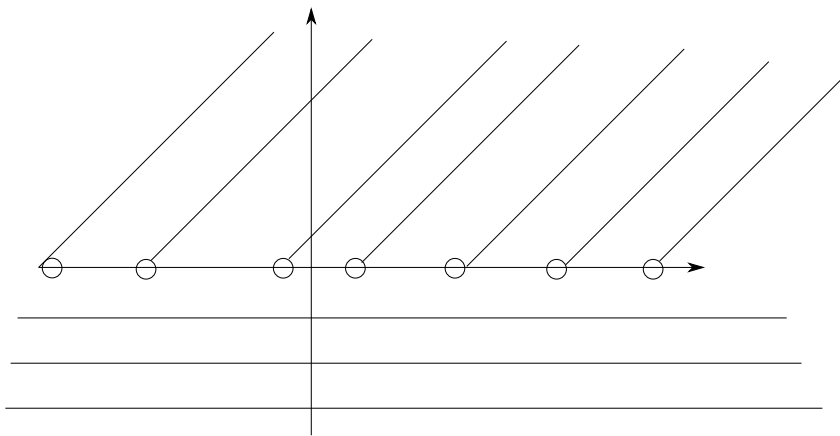


Рис. 1: легко

Теорема 2 (Теорема единственности для уравнения 1-го порядка). G – область, $f, g'_y \in C(G)$, $(x_0, y_0) \in G$, φ_1, φ_2 – решения ЗК на $(\alpha, \beta) \implies \varphi_1 \equiv \varphi_2$ на (α, β)

Пример. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$

$f(x, y) = 3\sqrt[3]{y^2}$ – непрерывна везде, $G = \mathbb{R}^2$

По теореме о существовании через любую точку проходит хотя бы одна интегральная кривая.

$$f'_y = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{y}} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$$

На прямой $y = 0$ нарушаются условия теоремы об единственности, значит в этих точках могут (но не факт, что будут) проходить несколько интегральных кривых.

$$dy = 2\sqrt[3]{y^2}dx$$

$$y = (x - c)^3$$

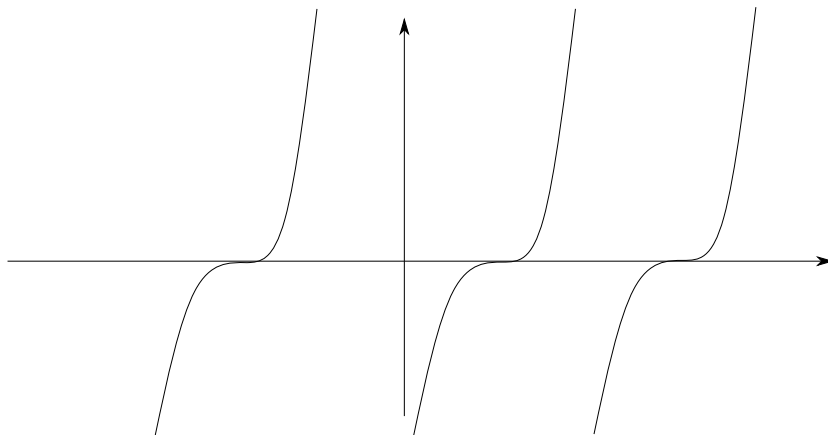


Рис. 2: uzhas

Ответ: $y = (x - C)^3$ $C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

$y = 0, x \in \mathbb{R}$ – особое решение. Имеются составные решения

Определение 15. Решение φ на (a, b) уравнения $y' = f(x, y)$ называется особым, если

$$\forall x_0 \in (a, b) \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi_1 - \text{решение задачи, } y' = f(x, y) \quad y(x_0) = \varphi(x_0)$$

на (α, β) , где $\beta - \alpha < \varepsilon, x_0 \in (\alpha, \beta)$, но $\varphi_1 \not\equiv \varphi$ на (α, β)

0.3.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 16 (Уравнения с разделёнными переменными).

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

Теорема 3 (Общее решение уравнения с разделёнными переменными).
 $P \in C(a, b) \quad Q \in C(c, d) \quad (\alpha, \beta) \subset (a, b)$

Тогда функция $y = \varphi(x)$ – решение на $(\alpha, \beta) \iff$:

1. $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$
2. $\exists C \in \mathbb{R}$, т.ч. φ неявно задаётся уравнением $\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$

Доказательство.

\implies Дано, что φ – решение \implies автоматически выполняется первый пункт.

$\sqsupset x_0 \in (\alpha, \beta)$ – произвольно. $y_0 := \varphi(x_0)$, тогда пункт 2 запишется как:

$$\int_{x_0}^x P(x)dx + C_1 + \int_{y_0}^y Q(t)dt + C_2 = C$$

$$\int_{x_0}^x P(x)dx + \int_{y_0}^{\varphi} Q(t)dt = A \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

Пусть $t = \varphi(\tau) \implies$ л.ч.

$$\int_{x_0}^x P(t)dt + \int_{x_0}^x Q(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau)dt = \int_{x_0}^x (P(\tau) + Q(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau)) dt \equiv 0 \text{ на } (\alpha, \beta)$$

\Leftarrow Дано: $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$ и $\int P(x)dx + [\int Q(y)dy]_{y=\varphi(x)} \equiv C$ на (α, β)

продифференцируем наше тождество (законно, потому что φ непрерывно дифференцируемо)

$$P(x) + Q(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \equiv 0 \text{ на } (\alpha, \beta)$$

■

Пример. $xdx + ydy = 0$

$$\int xdx + \int ydy = C$$

$$x^2 + y^2 = 2C$$

$$x^2 + y^2 = A$$

$$A > 0 \quad \begin{matrix} y = \pm\sqrt{A - x^2} & x \in (-\sqrt{A}, \sqrt{A}) \\ x = \pm\sqrt{A - y^2} & , y \in (-\sqrt{A}, \sqrt{A}) \end{matrix}$$

Определение 17. Уравнение с разделяющимися переменными:

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)y_2(y)dy = 0$$

$$p_2(x_0) = 0 \implies x \equiv x_0 - \text{решение}$$

$$q_1(t_0) = 0 \implies y \equiv y_0 - \text{решение}$$

Далее отдельно рассматриваем на каждой из областей (4 здесь):

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx + \frac{q_2(y)}{q_1(y)}dy = 0$$

Пример.

$$2ydx - xdy = 0$$

$x = 0, y = 0$ – решения. Нужно отдельно смотреть все четверти

$$\begin{aligned}\frac{2dx}{x} &= \frac{dy}{y} \\ 2\ln|x| &= \ln|y| + C \\ y &= Ax^2, A > 0, x > 0\end{aligned}$$

В остальных четвертях аналогично. Они все стыкуются в нуле и общее решение – всевозможные стыковки.

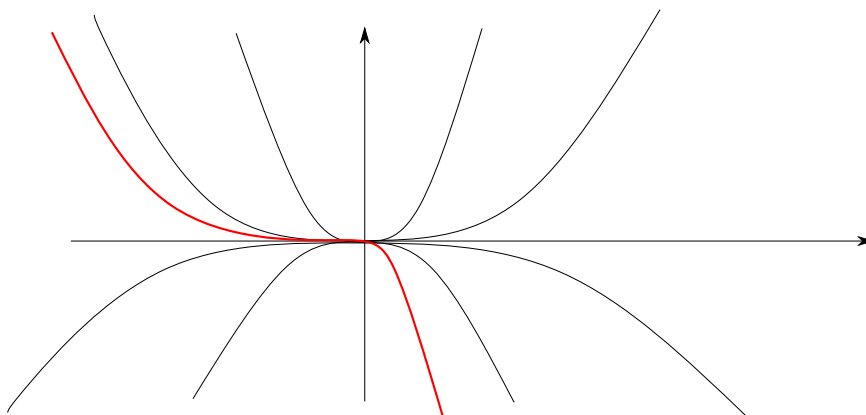


Рис. 3: gohan1

Пример.

$$ydx - xdy = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} + C$$
$$\ln |x| = \ln |y| + C$$
$$y = Ax$$

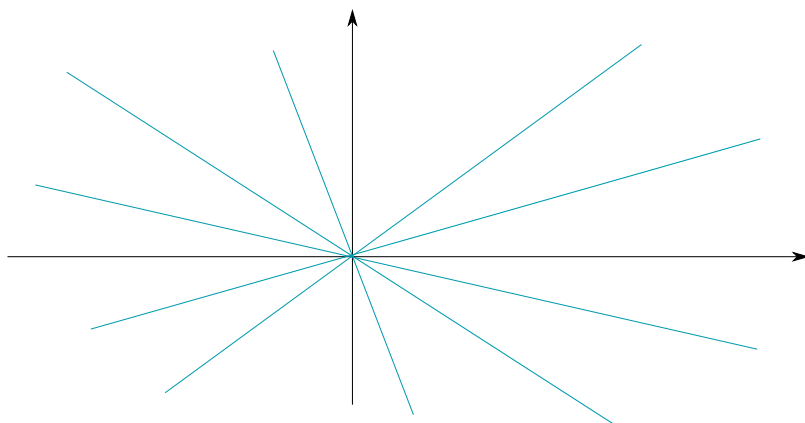


Рис. 4: gohan2

Определение 18. Два уравнения называют эквивалентными, если они имеют одинаковую область задания и одинаковый набор интегральных кривых.

Замечание.

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0$$

не эквивалентно

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx + \frac{q_1(y)}{q_2(y)}dy = 0$$

Теорема 4 (Теорема о существовании и единственности для уравнений с разделёнными переменными). $P \in C(a, b)$ $Q \in C(c, d)$

(x_0, y_0) – не особая точка уравнения (т.е. $P(x_0) \neq 0, Q(y_0) \neq 0$) \implies уравнение

$$\int_{x_0}^x P(t)dt + \int_{y_0}^y Q(t)dt = 0$$

)

определяет единственное решение в некоторой окрестности точки x_0

0.4 Некоторые типы уравнений, интегрируемых в квадратурах

решение уравнения – конечное число арифметических действий, суперпозиции и взятия интегралов от обеих частей

0.4.1 Линейные уравнения

Определение 19. $y' = p(x)y + q(x)$ – линейное уравнения (ЛУ)

$y' = p(x)y$ – однородное линейное уравнения (ЛОУ)

Лемма 1 (Общее решение линейного однородного уравнения). $\exists p \in C(a, b) \implies y = Ce^{\int p}, C \in \mathbb{R}, x \in (a, b)$ – Общая запись решения ЛОУ

Доказательство. $dy = p(x)ydx$

$y = 0$ – решение

$$\int \frac{dy}{y} = \int p(x)dx + C$$

$$\ln |u| = \int p + C$$

При $y > 0$ $y = Ae^{\int p}, A > 0$

При $y < 0$ $y = Ae^{\int p}, A < 0$

$y = 0$ не особое по теореме об единственности из прошлой секции. ■

Теорема 5 (Общее решение линейного уравнения). $\exists p, q \in C(a, b)$

$$\implies y = \left(C + \int qe^{-\int p} \right) e^{\int p} \quad C \in \mathbb{R} \quad x \in (a, b)$$

Доказательство. Подстановкой убеждаемся, что все эти функции – решения.

Пусть есть ещё решения φ – решение ЛУ на (α, β) , и оно не задаётся формулой из условия теоремы.

Возьмём любую точку, через которую проходит это решение, $(x_0, \varphi(x_0))$. Подставим в общую формулу эту точку, то выразим C

$$y_0 = (C + E(x_0))F(x_0) \quad C = \frac{y_0}{F(x_0)} - E(x_0)$$

По теореме об единственности новое решение совпадает с решением с константой C везде, где оба определены – на (α, β) , а тогда φ задаётся формулой, противоречие \blacksquare

0.4.2 Метод вариации постоянной или Метод Лагранжа

1. вместо ЛУ решаем соответствующее ЛОУ

$$yy' = p(x)y \quad t = Ce^{\int p}$$

2. заменяя C на $C(x)$ и подставляем $y = C(x)e^{\int p}$ в исходное ЛУ уравнение

$$\begin{aligned} (Ce^{\int p})' &= pCe^{\int p} + q \\ C'e^{\int p} + Ce^{\int p} \cdot p &= pCe^{\int p} + q \\ C' &= qe^{-\int p} \end{aligned}$$

3. находим $C = \int qe^{-\int p} + C_1$

4. Подставляем $C(x)$ вместо C в решение (ЛОУ)

$$y = \left(C_1 + \int qe^{-\int p} \right) e^{\int p}$$

0.4.3 Уравнение Бернулли

Определение 20. $y' = p(x)y + q(x)y^\alpha \quad \alpha \notin \{0, 1\}$

Замена на $z = y^{1-\alpha}$ сводит его к ЛУ

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y^\alpha} &= p(x)y^{1-\alpha} + q(x) \\ z' &= (1-\alpha)\frac{y'}{y^\alpha} \\ z' &= (1-\alpha)p(x)z + (1-\alpha)q(x) \\ f(x, y) &= py + qy^\alpha \\ f'_y &= p + qy^{\alpha-1}\end{aligned}$$

$\alpha \geq 1 \implies$ непрерывна, следовательно по теореме об единственности $y = 0$ – не особое

0.4.4 Уравнение Риккати

Определение 21. $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$ – квадратичная функция от y

Утверждение 1 (Лиувилль). Уравнение

$$y' = y^2 + x^\alpha$$

интегрируется в квадратурах $\iff \frac{\alpha}{2\alpha+4} \in \mathbb{Z}$ или $\alpha = -2$

Если известно решение φ , то подстановка $y = z + \varphi$ сводится к уравнению Бернулли

0.4.5 Уравнение в полных дифференциалах

Определение 22.

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Если $\exists u : u'_x = P \quad u'_y = Q$

Теорема 6 (Общее решение УПД). $P, Q \in C(G) \quad G \subseteq \mathbb{R}^2$ – область, $u'_x = P, u'_y = Q$

$y = \varphi(x)$ – решение УПД на (a, b) \iff

1. $\varphi \in C^1(a, b)$
2. $\exists C : \quad U(x, \varphi(x)) \equiv C$ на (a, b) (т.е. φ неявно задано уравнением $u(x, y) = C$)

Доказательство.

\Rightarrow 1. Выполняется по определению решения

2. Имеем $P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$

$$\frac{P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x)}{C} = (u(x, \varphi(x)))' = 0 \Rightarrow u(x, \varphi(x)) = C$$

\Leftarrow Имеем $u(x, \varphi(x)) \equiv C$, дифференцируем:

$$u'_x(x, \varphi(x)) + u'_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$$

$$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$$

■

Предположим $u \in C^2(G)$ $u'_x = P$ $u'_y = Q$ $P'_y = u'_{xy} = u'_{yx} = Q'_x$

Утверждение 2. Условие $P'_y = Q'_x$ – достаточное для того, чтобы уравнение было УПД, если G – односвязная область

Определение 23. Область односвязна, если любая замкнутая кривая стягивается в точку (гомотопна точке)

Определение 24. Функция $u : u'_x = P, u'_y = Q$ называется потенциалом уравнения в полных дифференциальных (= потенциал поля (P, Q))

Потенциал УПД находится по формуле:

$$u(x, y) = C + \int_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

$$\text{Если кривая } \gamma \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t \in [\alpha, \beta] \end{cases} \Rightarrow \int_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt$$

0.4.6 Интегрирующий множитель

Определение 25. $\square \mu(x, y) \neq 0 \quad \forall x, y$ и

$$\mu Pdx + \mu Qdy = 0$$

– УПД $\Rightarrow \mu$ – интегральный множитель уравнения $Pdx + Qdy = 0$

Утверждение 3 (Необходимое условие). (если $\mu \in C^1(G)$)

$$(\mu P)'_y = (\mu Q)'_x$$

Пример.

$$\begin{aligned} y' &= p(x)y + q(x) = 0 \\ (p(x)y + q(x)) dx - dy &= 0 \\ P'_y &= p(x) \quad Q'_x = 0 \end{aligned}$$

Будем искать μ в виде $\mu = \mu(x) \implies 0 \cdot P + \mu P = \mu'(-1) + 0 \implies \mu' = -\mu p$

$\mu = Ce^{-\int p}$, пусть $C = 1 \quad \mu = e^{-\int p}$

Умножим исходное уравнение на $\mu = e^{-\int p}$

$$\begin{aligned} y'e^{-\int p} &= pye^{-\int p} + qe^{-\int p} \\ y'e^{-\int p} - pye^{-\int p} &= qe^{-\int p} \\ (ye^{-\int p})' &= qe^{-\int p} \\ ye^{-\int p} &= \int qe^{-\int p} + C \\ y &= \left(C + \int qe^{-\int p} \right) e^{\int p} \end{aligned}$$