

Математический анализ, 3 семестр

Коченюк Анатолий

2 октября 2021 г.

Глава 1

Анализ нескольких переменных. Функциональные ряды. Теория меры, Криволинейные интегралы.

литература – Виноградов, Виноградов-Громов

1.1 Вспоминаем

$O \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое, $f : O \rightarrow R, f \in C^{N+1}(O), N \in \mathbb{N}$

$[a, x]$ – замкнутый отрезок $\subset O, a \neq x \implies \exists x \in (a, x) :$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^N \frac{d_a^k f(x-a)}{k!}}_{\text{Тейлоровский многочлен порядка } N} + \frac{d_c^k f(x-a)}{(N+1)!}$$

$T_{N,a,f}$

Определение 1. $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ – пространство мультииндексов

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

$$\alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$$

$$f_{(a)}^{(\alpha)} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_n} x_n \dots \partial^{\alpha_1} x_1}$$

$$h = (h_1, \dots, h_n) \quad d_a^k f(h) = \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha|=k}} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha$$

1.2 Полиномиальная форма Ньютона

$$N \in \mathbb{N} \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$(x_1 + \dots + x_n)^N = \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha|=N}} \frac{N!}{\alpha!} x^\alpha$$

$$\text{Доказательство. } p(x) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^N$$

$$p'_{x_1} = N(x_1 + \dots + x_n)^{N-1} = p'_{x_2} = \dots = p'_{x_n}$$

$$p^\alpha = N(N-1) \dots (N-|\alpha|+1) (x_1 + \dots + x_n)^{N-|\alpha|}$$

$$|\alpha| \leq N+1 \implies p^{(\alpha)} \equiv 0$$

$$|\alpha| < N \implies p^{(\alpha)}(0) = 0$$

$$\text{Неноль получается, только если } |\alpha| = N \quad p^{(\alpha)}(0) = N!$$

Если подставить, то получим:

$$\sum \frac{N!}{\alpha!} x^\alpha \quad h = x - a = x - 0 \quad \blacksquare$$

1.3 Оценка однородных многочленов

Определение 2. $\sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha|=N}}^n b_\alpha x^\alpha$ – однородный многочлен степени N

В более широком смысле $b_\alpha \in \mathbb{R}^m$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad p(tx) = t^N p(x)$, т.е. однородный многочлен является однородной функцией.

Утверждение 1. $\square p(x) = \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha| = N}} \frac{N!}{\alpha!} C_\alpha x^\alpha \quad C_\alpha \in \mathbb{R}^m, \square M : \|C_\alpha\| \leq M$
Тогда $\|p(x)\| \leq M (\sqrt{n}\|x\|)^N$

Доказательство. $\|p(x)\| \leq \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha| = N}} \frac{N!}{\alpha!} |x^\alpha| \underbrace{\|C_\alpha\|}_{\leq M} \leq M \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha| = N}} \frac{N!}{\alpha!} \underbrace{|x^\alpha|}_{|x_1|^{\alpha_1} \dots |x_n|^{\alpha_n}} =$
 $M \cdot (|x_1| + \dots + |x_n|)^N \leq M (\sqrt{n}\|x\|)^N$
 $\sum_{k=1}^n |x_k| \cdot 1 \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n 1} = \|x\| \sqrt{n}$ – неравенство Коши, что сумма
скалярных произведений меньше произведения норм ■

Формула Тейлора-Лагранжа на отображения буквально не переносится $f \in C^1(O)$ $f(x) - f(a) = d_c f(x - a)$

для отображений нарушается

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} a = 0, \text{ “x”} = 2\pi \quad f(x) - f(a) = 0$$

$$f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Теорема 1. Открытое $O \subseteq \mathbb{R}^n, n, m \in \mathbb{N} \quad N \in \mathbb{Z}_+, f \in C^{N+1}(O \rightarrow \mathbb{R}^m)$
 $[a, x] \in O, a \neq x$
Тогда $f(x) - T_{N,a,f}(x)$ – остаточный член, который оценивается так:
 $\|f(x) - T_{N,a,f}(x)\| \leq \frac{1}{(N+1)!} \sup_{x \in (a,x)} \|d_c^{N+1} f(x - a)\|$
 $\sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha| \leq N}} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x - a)^\alpha$

1.4 Отступление

$f, g : O \rightarrow \mathbb{R}^m$, дифференцируемые в O

$$d \langle f, g \rangle = \langle df, g \rangle + \langle f, dg \rangle$$

$$d \langle f, g \rangle (h) = \langle df(h), g \rangle + \langle f, dg(h) \rangle$$

$$d^2 \langle f, g \rangle = \langle d^2 f, g \rangle + 2 \langle df, dg \rangle + \langle f, d^2 g \rangle$$

$$d^N \langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^N C_N^k \langle d^k f d^{N-k} g \rangle \text{ (проверка как в одномерном случае)}$$

Тогда, если $v \in \mathbb{R}^m, v = \text{const}$

$$d^N \langle f, v \rangle = \langle d^N f, v \rangle$$

Доказательство теоремы 1. Если $v \in \mathbb{R}^m, v$ – фиксирована

$$g(x) = \langle f(x), v \rangle : O \rightarrow \mathbb{R}, g \in C^{N+1}(O \rightarrow \mathbb{R})$$

$g(x) - T_{N,a,g}(x) = \frac{1}{(N+1)!} d_c^{N+1} g(x-a)$ по уже установленной теореме Тейлора-Лагранжа для функций

$$T_{N,a,g}(x) = \sum_{k=0}^N \frac{\langle d^k f, v \rangle (x-a)}{k!}$$

$$\left\langle f(x) - \sum_{k=0}^N \frac{d^k f(x-a)}{k!}, v \right\rangle = \frac{1}{(N+1)!} \underbrace{\langle d_c^{N+1} f(x-a), v \rangle}_{\leq \|d_c^{N+1} f \dots\| \|v\|}$$

$$|\text{левая часть}| \leq \underbrace{\frac{1}{(N+1)!} \sup_{c \in [a,x]} \|d_c^{N+1} f(x-a)\| \cdot \|v\|}_{\text{не зависит от выбора } v}$$

Если мы возьмём v остаточным членом, то мы получим оценку остаточного члена, не зависящую от v

$$v = f(x) - \sum_{k=0}^N \frac{d^k f(x-a)}{k!}$$

$$\|v\|^2 \leq \frac{1}{(N+1)!} \sup \dots \|v\| \quad (\text{сократили на } \|v\|)$$

$$\|f - T_{N,a,f}\| \leq \frac{1}{(N+1)!} \sup \dots$$

■

1.5 Частный случай: формула конечных приращений

$O \subseteq \mathbb{R}^n, f \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}^m), [a, x] \subseteq O \quad a \neq x$, тогда

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \sup_{c \in [a,x]} \|d_c f\| \|x - a\|$$

Следствие 1. Пусть $f \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}^m)$, где O – открытое множество. Пусть K – выпуклый компакт, $K \subseteq O$. Тогда

$$\forall a, b \in K \quad \|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{c \in K} \|d_c f\| \|b - a\|$$

1.6 Об оценке нормы дифференциала

$$p(x) = \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha| \neq N}} \frac{N!}{\alpha!} C_\alpha x^\alpha \quad \forall \alpha \|C_\alpha\| \leq M$$

$$\|p(x)\| \leq M (\sqrt{n}\|x\|)^N$$

$$d_c^N f = \sum_{\alpha} \frac{N!}{\alpha!} \underbrace{\frac{f^{(\alpha)}}{N!}}_{=C_\alpha} x^\alpha$$

$$M = \max_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ c \in [a, x] \\ |\alpha| = N}} \left\| \frac{f^{(\alpha)}(x)}{N!} \right\| \implies \|d_c^N f(x - a)\| \leq M (\sqrt{n}\|x - a\|)^N$$

Пусть $O \subseteq \mathbb{R}^n$ открыто, $f \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}^m)$

K – компактно в $O \implies f$ липпшецево на K , т.е.

$$\exists C \in \mathbb{R} : \|f(x') - f(x'')\| \leq C\|x' - x''\| \quad \forall x', x'' \in K$$

Следует из формулы конечных приращений и оценки дифференциала и теоремы Вейерштрасса: $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \in C(K)$

$$\implies \exists x_1 : \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right\| \leq C_1 \forall x \in K$$

$$M = C_1, \implies \forall x', x'' \in K \quad \|d_c f(x' - x'')\| \leq M (\sqrt{n}\|x' - x''\|) \quad C = M\sqrt{n}$$

1.7 Экстремум функции нескольких переменных

Определение 3. $\square O \subseteq \mathbb{R}^n \quad f : O \rightarrow \mathbb{R}$

$a \in O$ называется точкой (локального) максимума, если \exists окрестность $V_a : \forall x \in V_a \cap O \quad f(x) \leq f(a)$

Экстремум – максимум или минимум

Утверждение 2 (Необходимое условие экстремума (безусловного)).

Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^n \quad f$, такое что $E \rightarrow \mathbb{R}$. $a \in \text{Int } E$ – точка локального экстремума для f , f дифференцируема в точке a . Тогда

$$d_a f = \mathbb{O} \left(\iff \nabla f = \mathbb{O} \iff \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0 \right)$$

Доказательство. Пусть a — точка максимума. Фиксируем $h \in \mathbb{R}^n \quad g(t) = f(a+th), t \in \mathbb{R}$. Для g точка 0 это точка максимума. Существует окрестность

нуля $V'(0) : \forall t \in V'(0) \quad g(t) \geq g(0) = f(a)$, g дифференцируема в 0 как композиция, 0 – внутренний для $D(g) \implies g'(0) = 0$.

$$g(t) = f(\varphi(t)).$$

$$g'(t) = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

$$0 = \langle \nabla f, h \rangle = (f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n}) \begin{pmatrix} h_1 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

1.8 Квадратичные формы

Если $Q(x)$ допускает представление в виде $Q(x) \equiv \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_i x_j$, $c_{i,j} \in \mathbb{R}$. Тогда $Q(x)$ называется квадратичной формой в \mathbb{R}^n .

Замечание. Любая квадратичная форма есть однородная функция степени 2.

Замечание. Не умаляя общности, матрицу коэффициентов c_{ij} можно считать симметричной. Если это не так, можно перейти в такой форме $c'_{ij} = c'_{ji} = \frac{c_{ij} + c_{ji}}{2}$.

Определение 4. Квадратичная форма $Q(x)$ в \mathbb{R}^n называется положительно-определённой (положительной) ($Q > 0$), если

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad Q(x) > 0.$$

неотрицательно определённой, если неравенство нестрогое.

$$Q \geq 0 \quad \dots \quad Q < 0, Q \leq 0$$

неопределённая, если $Q \geq 0 \quad \exists x^1 x^2 \in \mathbb{R}^n : Q(x^1) > 0, Q(x^2) < 0$

Пример. 1. $n = 2 \quad Q(x) = 2x_1^2 - 3x_2^2 \geq 0$

$$Q(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 > 0$$

$$Q(x) = Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2, \text{ если } B^2 - AC, \text{ то форма знакопеременная}$$

$$\text{Если } A \geq 0 \quad B^2 - AC \leq 0, \text{ то } Q \geq 0$$

$$A \leq 0 \dots$$

Лемма 1. $\square \quad Q(x)$ – положительная квадратичная форма в \mathbb{R}^n

$$\text{Тогда } \exists \gamma > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \quad Q(x) \geq \gamma \|x\|^2$$

Доказательство. $\gamma = \min_{\|x\|=1} Q(x) = Q(x_0) > 0 \quad \|x_0\| = 1$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad Q(x) = Q\left(\|x\| \frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\|^2 \cdot Q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq \gamma \|x\|^2 \quad \blacksquare$$

Утверждение 3 (Достаточное условие экстремума). $\square f : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \in \text{Int } E, d_a f = 0 \quad \exists d_a^2 f$

Тогда, если $d_a^2 f > 0$ (положительная квадратичная форма как функция дифференциалов dx_1, \dots, dx_n), то a это точка минимума (строгого)

Если $d_a^2 f < 0 \dots$

Если $d_a^2 f \geq 0$, то a не точка экстремума

Это не все случаи, есть нестрогие, в которых ДУЭ не применимо

Пример. $f(x, y) = x^4 - y^4$

$$g(x, y) = x^4 + y^4$$

для f точка $(0, 0)$ не точка экстремума, а для g — да

$$\nabla f = (4x^3, -4y^3) = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$$

Доказательство. ДУЭ. Пеано в точке a :

$$f(x) = f(a) + d_a f(x - a) + \frac{1}{2} d_a^2 f(x - a) + o(\|x - a\|^2)$$

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2} d_a^2 f(x - a) + \underbrace{\varepsilon(x)}_{\rightarrow 0, x \rightarrow a} \|x - a\|$$

Если $Q > 0$, то по лемме $\exists \gamma > 0 : Q(x - a) \geq \gamma \|x - a\|^2$

Т.к. $\varepsilon(x) \rightarrow 0, x \rightarrow a$, то $\exists V(a) : |\varepsilon(x)| < \frac{\gamma}{8} \forall x \in V(a) \implies \forall x \in V(a) \quad f(x) - f(a) \geq \frac{1}{2} \gamma \|x - a\|^2 - \frac{\gamma}{8} \|x - a\|^2 = \|x - a\|^2 \left(\frac{3}{8} \gamma\right) > 0 \quad x \neq a \implies a - \text{точка строгого минимума}$

$Q < 0$, рассмотреть $-f$

$$Q \geq 0 \implies \exists h_+, h_- \in \mathbb{R}^n : Q(h_+) > 0 \quad Q(h_-) < 0, \text{ не умаляя общности } \|h_+\| = \|h_-\| = 1$$

$$\delta = \min\{|Q(h_+)|, |Q(h_-)|\}$$

Т.к. $\varepsilon(x) \rightarrow 0, x \rightarrow a$, то \exists окрестность $V_r(a) : |\varepsilon(x)| < \frac{\delta}{4}$

$$|t| < r \quad f(a + th_+) - f(a) = \frac{1}{2} t^2 Q(h_+) + \varepsilon(x) t^2 \geq \frac{1}{2} t^2 \cdot \delta - \frac{\delta}{4} t^2 = t^2 \frac{\delta}{4} > 0$$

$$|Q(h_-)| \geq \delta$$

$$Q(h_-) = -|Q(h_-)| \leq -\delta$$

$$f(a + th_-) - f(a) \leq -\frac{\delta}{2} t^2 + \frac{\delta}{4} t^2 \leq -\frac{\delta}{4} t^2 < 0$$

Таким образом в любой окрестности точки a $f(x) - f(a)$ знакопеременная

■

1.9 Практика. Теорема о существовании

Теорема 2 (Теорема о неявной функции). $F(x, y, z) = 0$

$(x_0, y_0, z_0) : F(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ и все функции непрерывны в (x_0, y_0, z_0)

$\implies \exists z = z(x, y) \quad z_0 = z(x_0, y_0) \quad F(x, y, z(x, y)) = 0$ в окрестности (x_0, y_0)

Пример. $x^2 + y^2 - 1 = 0$

$$F(x, y) \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$F'_y = 2y \quad F'_y(x_0, y_0) = \sqrt{2} \neq 0$$

$$y = y(x) \quad y_0 = y(x_0) \quad x^2 + y^2(x) - 1 = 0$$

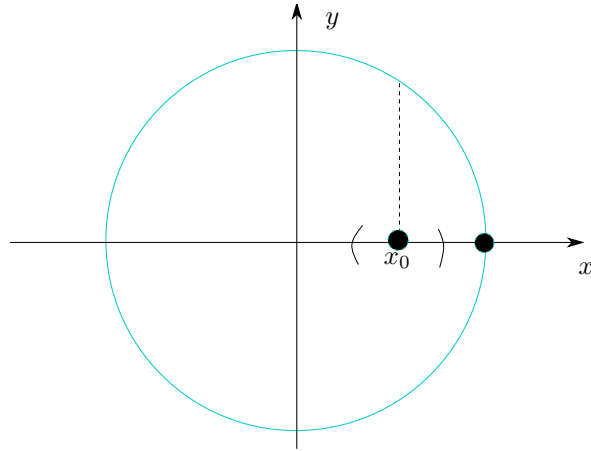


Рис. 1.1: exex

$F(x, y, z)$ И все условия выполняются. как найти $\frac{\partial}{\partial x} z(x, y)$

$$F(x, y, z(x, y)) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y, z(x, y)) = 0$$

$$\begin{cases} F'_x + F'_z \cdot \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 0 \\ F'_y + F'_z \cdot \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Отсюда выражается

Определение 5. Многозначная функция f – соответствие $x \mapsto f(x)$ – множество

Пример. $x \mapsto \pm\sqrt{1-x^2} = \{\sqrt{1-x^2}, -\sqrt{1-x^2}\}$

$x^{\frac{1}{2}} = y$ $x = y^2$ – задаёт неявную функцию $y(x)$

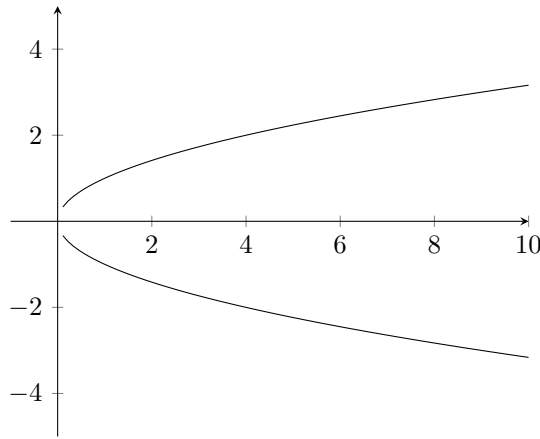


Рис. 1.2: $x = y^2$

Пусть $y(x)$ – многозначная функция. Тогда выбор единственного $y \in y(x)$ для $\forall x$ задаёт явную функцию (однозначная функция)

Каждый такой выбор задаёт однозначную функцию называемую ветвью. Ветви могут быть непрерывными, например в $x = y^2$ бесконечность ветвей. Чтобы уточнить, нужно проговаривать непрерывная ветвь, дифференцируемая ветвь и т.д.

Пример. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$

Задаёт многозначную функцию. Определить для каких x она будет 1-, 2-, 3-, 4-значной

1.10 Лекция 2

$$d_a^2 f \longleftrightarrow \begin{pmatrix} f''_{x_1 x_1}(a) & f''_{x_1 x_2}(a) & f''_{x_1 x_3}(a) & \dots \\ f''_{x_2 x_1}(a) & f''_{x_2 x_2}(a) & f''_{x_2 x_3}(a) & \dots \\ f''_{x_3 x_1}(a) & f''_{x_3 x_2}(a) & f''_{x_3 x_3}(a) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Теорема 3 (Критерий Сильвестра). • Если все главные миноры положительны, то соответствующая квадратичная форма положительна (a – точка минимума).

- Если $\Delta_1 < 0$ $\Delta_2 > 0$ $\Delta_3 < 0 \dots$, то квадратичная форма отрицательна (a – точка максимума)
- $\Delta_k \neq 0$, и не реализуется ни первый случай, ни второй, то квадратичная форма неопределённая (т.е. экстремума нет)

Замечание. $Q(h) = d_a^2 f(h)$. $Q(h) = \langle A \cdot h, h \rangle$ $A = \left(f''_{x_i x_j} \right)_{ij}$

Задача 1. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ – исследовать на экстремум

Доказательство. Необходимое условие экстремума $z'_x = 0$ $z'_y = 0$.

$$z'_x = 2x - y - 2 \quad z'_y = -x + 2y + 1$$

$(x, y) = (1, 0)$, других нет, потому что определитель хороший.

Достаточное условие экстремума: $z''_{xx} = 2$, $z''_{xy} = -1$, $z''_{yy} = 2$. $\left[d^2_{(1,0)} f \right] \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$\Delta_1 = 2 > 0$ $\Delta_2 = 2 * 2 - (-1)^2 = 3 > 0$, таким образом $(1, 0)$ – строгий минимум. ■

Замечание. $d^2_{(1,0)} f = 2dx^2 + 2(-1)dx dy + 2dy^2 = dx^2 + dy^2 + (dx - dy)^2 > 0$, если $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$d^2 f > 0$$

Задача 2 (без привлечения $d^2 f$). $z = x^2 y^3 (6 - x - y)$ – исследовать на экстремум.

$$\begin{cases} 0 = z'_x = y^3(6x^2 - x^3 - yx^2)'_x = y^3(12x - 3x^2 - 2yx) = xy^3(12 - 3x - 2y) \\ 0 = z'_y = x^2(6y^3 - xy^3 - y^4)'_y = x^2(18y^2 - 3xy^2 - 4y^3) = x^2y^2(18 - 3x - 4y) \end{cases}$$

$$\text{Либо } x = 0, \text{ либо } y = 0, \text{ либо } \begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases} - (2, 3).$$

$\{(0, t)\}_{\{t < 0\} \cup \{t > 6\}}$ – максимум (нестрогий)

$\{(0, t)\}_{\{t \in (0, 6)\}}$ – максимум (нестрогий)

$(0, 6)$ – не экстремум

$\triangleleft K = \{(x, y) | x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad x + y \leq 6\}$ – компакт

По теореме Больцано-Вейерштрасса существует $(x_{\pm}, y_{\pm}) \in K$

$$f(x_+, y_+) = \max_K f$$

$$f(x_-, y_-) = \min_K f$$

из распределения знаков следует, что точки границы – точки минимума. Тогда $(x_+, y_+) \in \text{Int } K$, значит (x_+, y_+) удовлетворяет необходимому условию экстремума. Такая точка у нас одна – $(x_+, y_+) = (2, 3)$.

1.11 Экстремумы и замена переменных

Определение точки экстремума непосредственно переносится на случай метрических пространств

Лемма 2. Пусть $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ – метрические пространства и $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть $g(b) = a$ – g непрерывна в точке b . a – точка максимума (минимума) для f . Тогда b – точка максимума (минимума) для $f \circ g$.

Доказательство. По условию a – точка локального максимума, т.е. существует окрестность $U(a) \subseteq X$: $f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in U(a)$. По определению непрерывности существует окрестность $V(b) \subseteq Y$:

$$g(y) \in U(a) \quad \forall y \in V(b) \implies f(g(y)) \leq f(a) = f(g(b)).$$

■

Следствие 2. Если в условии леммы g – гомеоморфизм X на Y , то a – точка максимума (минимума) для $f \circ g$.

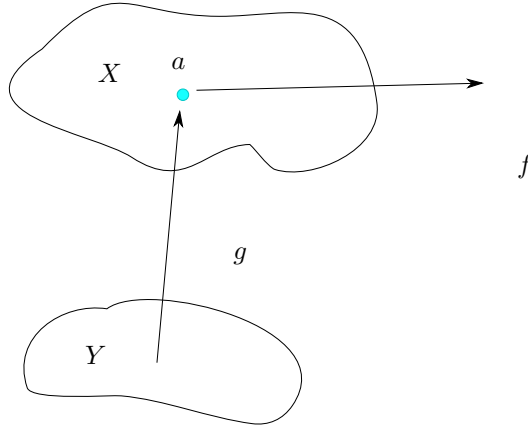


Рис. 1.3: kartinkalemmi

Следствие 3. Если g – локальный гомеоморфизм (существует окрестность $V(b)$, такая что в точке b сужение $g|_{V(b)}$ – гомеоморфизм на образ $(g(V(b)))$), то сохраняется вывод предыдущего следствия.

Задача 3. $z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ ($a, b > 0$) – исследовать на экстремум.

Доказательство. $z(x, y) = -z(-x, y) = -z(x, -y)$

z – нечётная по x и по y . Значит достаточно рассматривать функцию только в первой четверти.

$$\begin{cases} x = a\rho \cos \alpha \\ y = b\rho \sin \alpha \end{cases}$$

$$(\rho, \varphi) \rightarrow (x, y)$$

$$(0, 1) \times (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \text{Int } K - \text{гомеоморфизм} \left(\varphi = \arctg \frac{y}{x} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

$$z(\rho, \varphi) = ab\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi \sqrt{1 - \rho^2} \stackrel{\rho^2=t}{=} \frac{ab}{2} \sin 2\varphi \cdot \sqrt{1-t}$$

$$\text{Необходимое условие экстремума: } \begin{cases} \frac{2}{ab} z'_\varphi = 0 = 2 \cos 2\varphi \cdot t \sqrt{1-t} \\ \frac{2}{ab} z'_t = 0 = \sin 2\varphi \left(\sqrt{1-t} - \frac{1}{2} \frac{t}{\sqrt{1-t}} \right) = \frac{\sin 2\varphi (2(1-t)-t)}{2\sqrt{1-t}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2\varphi \cdot t\sqrt{1-t} = 0 \\ \sin 2\varphi \cdot \frac{(2-3t)}{\sqrt{1-t}} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos 2\varphi = 0 & \varphi \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 3t = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{4} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = a \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}b}{9} \\ y = b \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}b}{9} \end{cases}$$

■

Задача 4. $f : \underbrace{O}_{\subseteq \mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}$

$$E = \{\varphi_1(x) = 0, \dots, \varphi_n(x) = 0\}$$

Исследование f_E на экстремум называется задачей об условном экстремуме

Пример. $f(x, y) = x + y \quad E = \{x + 2y = 1\}$

Доказательство. $x = 1 - 2y$

$$f = 1 - 2y + y = 1 - y$$

$$\tilde{f}(x, y) = x^2 + y^2 \quad E = \{x + y = 1\}$$

■

Пример. $f = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \quad E = \{x^2 + y^2 = 1\}$

$$\begin{cases} x = \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{cases}$$

1.12 Дифференцирование обратного отображения

$$x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = y$$

$$x \in \mathbb{R}^n \quad y \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = y \quad A \cdot x = y, \quad A = [f] - \text{линейна}$$

$$f(x) = y \text{ имеет единственное решение } \forall y \in \mathbb{R}^n \iff \det A \neq 0$$

Теорема 4 (об обратной функции для случая одной переменной). $f : (A, B) \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^1((A, B)), a \in (A, B), f'(a) \neq 0$, тогда существует окрестность $V(a)$:

1. $\forall x \in V(a) \quad f'(x) \neq 0$ – локальная новорожденность производной
2. $f|_{(A, B)}$ – инъекция. – локальная обратимость
3. $f(V(a))$ – отквр. – локальная открытость отображения
4. $(f|_{V(a)})^{-1}$ дифференцируема в точке $f(a)$ и $\left((f|_{V(a)})^{-1}\right)' = \frac{1}{f'(a)}$
– дифференцируемость локально обратного

Определение 6. $f : (X, \Omega_X) \rightarrow (Y, \Omega_Y)$

Если для любого $O \in \Omega_X \quad f(O) \in \Omega_Y$, то f называется открытым отображением

Пример. $f(x) = x^2$ не открытое на $(-1, 1) \rightarrow [0, 1)$, но открыто на $(-1, 0) \cup (0, 1)$, потому что нет точек, где $f'(x) = 0$

доказательство теоремы. По следствию теоремы Дарбу, если $f'(a) > 0 (< 0)$, то существует окрестность $V(a) : \forall x \in V(a) \quad f'(x) > 0 (< 0)$

$\square f'(x) > 0$ всюду на $V(a)$, то f строго возрастает, значит $f|_{V(a)}$ – инъекция

$V(a) = (a - \delta, a + \delta) \implies f(a - \delta, a + \delta) = (f(a - \delta), f(a + \delta))$

4 \Leftarrow теоремы о дифференцируемости обратимой функции ■

Теорема 5 (об обратном отображении). Пусть $\underbrace{O}_{\text{открытое}} \subseteq \mathbb{R}^n \quad f : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\forall x \in O \quad d_x f$ – обратим (якобиан не обращается в ноль в O)
Тогда f – открытое отображение

Доказательство. См. доказательства утверждения 3 в теореме о дифференцировании обратного отображения в книжке Виноградов-Громов. ■

Теорема 6 (теорема об обратном отображении). $n \in \mathbb{N}$, O – открытое, $O \subseteq \mathbb{R}^n$

$f \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}^n)$ $a \in O$. Пусть $d_a f$ обратим ($\iff \mathcal{J}_a f \neq 0$), тогда существует окрестность $V(a)$:

1. $\forall x \in V(a)$ $d_x f$ обратим – локальная новорожденность производной
2. $f|_{(A,B)}$ – инъекция. – локальная обратимость
3. $f(V(a))$ – откp. – локальная открытость отображения
4. $(f|_{V(a)})^{-1}$ дифференцируема в точке $f(a)$ и $d_{f(a)}(f|_{V(a)})^{-1} = (d_a f)^{-1}$ – дифференцируемость локально обратного

Лемма 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $O \subseteq \mathbb{R}^n$ открыто, $f : O \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(O)$, $a \in O$ и $d_a f$ обратим. Тогда $\forall \sigma > 0$ существует окрестность $V(a)$:

1. $\forall x \in V(a)$

$$\|d_x f - d_a f\| < \sigma$$

2. $\forall p, q \in V(a)$

$$\|f(p) - f(q) - d_a f(p - q)\| \leq C_1 \|p - q\|$$

3. $\forall p, q \in V(a)$

$$C_3 \|p - q\| \leq \|f(p) - f(q)\| \leq C_2 \|p - q\|$$

, такое свойство называется билиппшецевость.

Здесь конкретно $C_2 = \|d_a f\| + \sigma$ $C_3 = \frac{1}{\|(d_a f)^{-1}\|} - \sigma$

Доказательство. $f \in C^1(a) \implies$ существует окрестность $V(a)$: 1 верно

$$\triangleleft F(x) = f(x) - d_a f(x) : O \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$d_x F(h) = d_x f(h) - d_a f(h), \quad F \in C^1(O)$$

$$\|f(p) - f(q) - d_a f(p - q)\| = \|F(p) - F(q)\| \leq \underbrace{\sup_{c \in V(a)} \|d_c F\|}_{\leq \sigma} \text{ по теореме о}$$

конечных приращениях, т.к. $V(a)$ выпуклое

$$\|d_c F\| = \underbrace{\|d_c f - d_a f\|}_{< \sigma}$$

$$\forall p, q \in V(a)$$

$$\|f(p) - f(q)\| \leq \sup_{c \in V(a)} \|d_c f\| \|p - q\|$$

$$\|d_c f\| = \|d_a f + (d_c f - d_a f)\| \leq \|d_a f\| + \underbrace{\|d_c f - d_a f\|}_{< \sigma \text{ в силу 1}} \leq C_2$$

$$\|f(p) - f(q)\| = \|d_a f(p - q) - (f(p) - f(q) - d_a f(p - q))\| \geq \underbrace{\|d_a f(p - q)\|}_{\geq \frac{1}{\|(d_a f)^{-1}\|} \|p - q\|} - \underbrace{\|f(p) - f(q) - d_a f(p - q)\|}_{\leq C_1 \|p - q\|}$$

$$C_3 \|p - q\|$$

■

доказательство (часть) теоремы об обратном отображении. Существует $(d_x f)^{-1} \iff \mathcal{J}f \neq 0$, но $\mathcal{J}f \in C(O \rightarrow \mathbb{R})$ по непрерывности \implies существует окрестность $V(a) : \forall x \in V(a) \quad \mathcal{J}_x f \neq 0 \implies 1$

$$C_0 = \frac{1}{\|(d_a f)^{-1}\|}, \quad \sigma = \frac{C_0}{4}, \text{ применим лемму к такому } \sigma$$

Не умаляя общности $V(a) \subseteq V_0(a)$. Т.к. $\sigma < C_0 \quad \forall p, q \in V(a)$ в силу неравенства 3 из леммы $f(p) \neq f(q)$ ($f|_{V(a)}$ – инъекция. $\implies f|_{V(a)}$ – биекция на $f(V(a))$, т.е. $g = f|_{V(a)}$ обратимо и 4 \iff правило дифференцирования обратного отображения

■

1.13 Практика

Теорема 7. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дифференцируема в точке P
 f достигает экстремума в точке $P \implies \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = 0$

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 f$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Теорема 8. Если $H(f)$ положительно определена в точке P , то P – точка минимума. Если она отрицательно определена, то это точка максимума.

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} (dx_1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \dots = \lambda_1 (dy_1)^2 + \dots + \lambda_n (dy_n)^2$$

$$f(dx_1 \dots dx_n) = f(0) + \underbrace{0}_{f'(0)} dx + d^2 f + o()$$

$$f(dx_1 \dots dx_n) - f(0) = d^2 f + o()$$

$$x^T A x > 0 \forall x \neq 0 \iff \widehat{def}$$

$$(x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} \sum a_{1i} x_i \\ \sum a_{2i} x_i \\ \vdots \\ \sum a_{ni} x_i \end{pmatrix} = \sum a_{ji} x_j x_i$$

– квадратичная форма

Пусть Q – квадратичная форма. $Q = \sum a_{ji} x_j x_i$, где $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$ $Q = x^T A x$, где $A^T = A$

Такая матрица A называется матрицей квадратичной формы Q

$$x = C y \quad Q = (C y)^T A C y = y^T \underbrace{(C^T A C)}_B y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Утверждение 4. Симметричная матрица подобна диагональной матрице.

Доказательство. $A = A^T$

Пример. $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Докажем, что существует собственный вектор.

Пусть $Q = x^T A x = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j$

Рассмотрим Q на сфере $x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0$

Q дифференцируема на сфере \implies достигает максимума в точке (v_1, \dots, v_n)

Q , максимум с ограничением $F = 0$, то $\mathcal{L} := Q - \lambda F$

У \mathcal{L} частные производные равны 0 в максимуме

$$\frac{\partial}{\partial x_i} Q = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j a_{ij} x_i x_j + \sum_{k \neq i} a_{kj} x_k x_j \right) = \sum_j a_{ij} x_j + \sum_j a_{ji} x_j = 2 \sum_j a_{ij} x_j$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 2x_i \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{L} = 2 \sum_j a_{ij} x_j - \lambda 2x_i = 0 \forall i \text{ для } x_j = v_j$$

$Av = \lambda v \implies v$ – вещественный собственный вектор

Так мы для симметричной матрицы нашли вещественный собственный вектор

2. Построим наш вектор v до базиса $(v, e_2, e_3, \dots, e_n)$

Запишем A в этом базисе: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$. Далее делаем по индукции

Следовательно существует базис из собственных векторов, где на диагонали стоят собственные числа

Итого, любую квадратичную форму Q можно заменой переменных свести к каноническому виду $Q = \sum_i \lambda_i y_i^2$ ■

1.14 Лекция

Макаров, Подкорытов: Гладкие отображения и функции

Теорема 9 (Об открытом отображении). $\square O \subseteq \mathbb{R}^n$ – открыток, $f \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $\forall a \in O$ $d_a f$ обратим. Тогда $f(O)$ – открыто.

Пример. $x = (x_1, \dots, x_n)$ $f(x) = x_1$ – необратимое, схлопывает шар и там нет открытости

Доказательство. $\square \sigma$: в лемме: $C_3 > 0, \sigma = \frac{1}{2} \frac{1}{\|(d_a f)^{-1}\|}$

δ – это половины от “ δ из леммы”

$$\|f(p) - f(q)\| \geq C_3 \|p - q\| \quad \forall p, q \in B_\delta[a]$$

$$r = \frac{1}{2} C_3 \cdot \delta \quad ? : B_r(b) \subset f(O) \iff \forall y \in B_r(b) \exists x \in O : f(x) = y$$

$$\varphi(x) = \|f(x) - y\| \in C * (O \rightarrow \mathbb{R})$$

$$\varphi(a) = \|f(a) - y\| = \|b - y\| \leq r$$

$$\begin{aligned} \text{Если } \|x - a\| = \delta, \text{ то } \varphi(x) = \|f(x) - b\| &= \|f(x) - f(a) + f(a) - y\| \geq \\ \underbrace{\|f(x) - f(a)\|}_{\geq C_3 \|x - a\| = 2r} - \underbrace{\|f(a) - y\|}_{< r} &> 2r - r = r \end{aligned}$$

По теореме Вейерштрасса $\varphi(x)$ достигает на $B_\delta[a]$ своего минимума

Из оценки $\varphi(x)$ следует, что $\min B_\delta[a] \varphi$ Достигается внутри шара

$\psi(x) = \varphi^2(x) = \|f(x) - y\|^2$. У функции $\psi(x)$ экстремумы в тех же точках, что и у $\varphi(x)$

Необходимое условие экстремума $\exists x_* \in B_\delta(a) : f_{x_*} \psi = 0$

$$\varphi(x) = \langle f(x) - y, f(x) - y \rangle$$

$$d\psi_{x_*} = 2 \left\langle \underbrace{d(f(x) - y)}_{d_{x_*} f}, f(x) - y \right\rangle$$

Т.к. df обратим в $B_\delta(a) \implies f(x_*) - y = 0 \implies f(x_*) = y_0$

■

Теорема 10 (теорема об обратном отображении). \square открытое $O \subseteq \mathbb{R}^n$ $f \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $a \in O$, $d_a f$ обратим

Тогда существует окрестность $V(a)$:

I $\forall x \in V(a)$ $d_x f$ обратим

II $f_{V(a)}$ — инъектив (т.е. обратимо как отображение из $V(a)$ в $f(V(a))$)

III $f(V(a))$ — открыто

IV $(f_{V(a)})^{-1} \in C^1(f(V(a)) \rightarrow \mathbb{R}^n)$

$$(f|_{V(a)})'(f(a)) = (f')(a) \text{ (или } d(f_{V(a)})^{-1} = (d_a f)^{-1})$$

$$\|B - A\| < \varepsilon \quad \|B^{-1} - A^{-1}\| < \varepsilon C(A)$$

$$\|(d_a f)^{-1} - (d_x f)^{-1}\| < \varepsilon C \cdot (d_a f) \implies (d_x f)^{-1} \text{ непрерывно зависит от } x$$

второе объяснение: элементы матрицы $(d_x f)^{-1}$ — результат арифметических действий над частными производными отображения f ; $f \in C^1(O) \implies$ элементы $[(d_x f)^{-1}] \in C(0)$

По аналогичным рассуждениям, если в условии теоремы $f \in C^r(O \rightarrow \mathbb{R})$, то локально обратное также из C^r

Определение 7. \square $r \in \mathbb{Z}_+$ $O \subseteq \mathbb{R}^n$, O — открытое, $f \in C^r(O \rightarrow \mathbb{R}^n)$

f называется диффеоморфизмом класса C^r , если:

1. f — биекция на $f(O)$
2. $f(O)$ — открытое
3. обратное отображение $f^{-1} \in C^r(f(O) \rightarrow O)$

Определение 8. $r, O \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in O$ f называется локальным диффеоморфизмом в точке a , если существует такая окрестность $V(a)$, что $f_{V(a)}$ — гомеоморфизм

Пример. $y = e^x$ – диффеоморфизм (глобальный)

$y = x^2$ – локальный диффеоморфизм отдельно либо на положительных, либо на отрицательных числах

$y = \sin x$ – локальный диффеоморфизм в точках не вида $\frac{\pi}{2} + \pi k$

Теорема 11 (Об обратном отображении “на языке диффеоморфизмов”). Открытое $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in C^r$ ($O \rightarrow \mathbb{R}^n$)

1. Если $a \in O$ $d_a f$ обратим, тогда f локальный диффеоморфизм в точке a класса C^r
2. Если f – инъекция и $d_a x f$ Обратим всюду в O , то f – глобальный диффеоморфизм

Пример. $f(x, y) = \begin{pmatrix} e^y \cos x \\ e^y \sin x \end{pmatrix}$

$$f' = \begin{pmatrix} -\sin x e^y & e^y \cos x \\ \cos x e^y & e^y \sin x \end{pmatrix}$$

$$\det f' = e^{2y}(-1) \neq 0$$

$$f(0, y) = f(2\pi k)$$

В каждой точке невырожденный дифференциал, но глобальной инъективности нет

Пример (Важные примеры локальных диффеоморфизмов). 1. Полярные координаты $\phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$

$$\phi : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\phi' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$\det \phi' = \cos \varphi \cdot r \cos \varphi - \sin \varphi (-r \sin \varphi) = r > 0$ в O , значит ϕ – локальный диффеоморфизм в O класса C^∞

но не глобальный! $\phi(r, \varphi + 2\pi k) \equiv \phi(r, \varphi)$

$O_1 = (0, +\infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ϕ – инъекция в $O_1 \implies \phi$ глобальный диффеоморфизм в O_1

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}$$

2. Цилиндрические координаты.

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad z = t$$

$$\phi' = \begin{pmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_t \\ \nabla y \\ \nabla z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r$$

Таким образом ϕ – локальный диффеоморфизм в области $(0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

глобальный диффеоморфизм в областях $(0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \times x\mathbb{R}$ И $(0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$

$$x^2 + y^2 = R \quad r = |R|$$

$$x^2 + y^2 = z^2 C \leftrightarrow r^2 = Ct^2 \quad \pm r = \tilde{C} = t$$

3. Сферические координаты

меряем широту и долготу.
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi \\ y = r \sin \varphi \cos \psi \\ z = r \sin \psi \end{cases}$$

$$(r, \varphi, \psi) \rightarrow (x, y, z) \quad C^\infty : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_3$$

$$|\psi| = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \cos \psi & -r \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi & r \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & r \cos \psi \end{pmatrix} = r^2 \cos \psi \begin{pmatrix} \sin^2 \psi \begin{pmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi \end{pmatrix} + \cos^2 \psi \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

ϕ локальный диффеоморфизм в $(0, +\infty) \times \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

глобальный в $(0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \leftrightarrow r = R$$

Задача 5. Записать уравнение сферы $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R$ в сферических координатах

$$x^2 + y^2 = Cz^2 \text{ тоже.}$$

Задача 6. В области $x > 0, y > 0$ $u = \frac{y}{x} \quad v = xy$

$$\psi : (x, y) \rightarrow (u, v)$$

Вопросы:

(а) $\psi(O) = ?$

(b) является ли ψ диффеоморфизмом или локальным диффеоморфизмом

(с) Выписать явно функции для обратного к ψ или локально обратного

1.15 Теорема о неявном отображении

Если у нас есть явное выражение $x = g(y)$, то можно явно исследовать функцию от одной переменной $f_E = f(h(y), y)$

Определение 9. Говорят, что уравнение $f(x, y) = 0$ неявно задаёт функцию $y = g(x)$ или $x = h(y)$, если условия $F(x, y) = 0$ и $\begin{cases} x \in D(g) \\ y = g(x) \end{cases}$ равносильны.

Определение 10. $F : E \rightarrow \mathbb{R} \quad D \subseteq E$
 F задаёт $y = g(x)$ или $x = h(y)$ в D , если

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ (x, y) \in D \end{cases} \iff \begin{cases} x \in D(g) \\ y = g(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases} \iff F(x, y) = 0 \quad \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_k) \\ y = (y_1, \dots, y_m) \\ F = (F_1, \dots, F_m) \end{cases}$$

$$“y = g(x)” \quad \begin{cases} y_1 = g_1(x_1, \dots, x_k) \\ \vdots \\ y_m = g_m(x_1, \dots, x_k) \end{cases}$$

Теорема 12 (Теорема о неявном отображении). \square O – открытое в \mathbb{R}^{k+m} , $F \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}^k)$

$(a, b) \in O$ ($a = (a_1, \dots, a_k)$, $b = (b_1, \dots, b_k)$) и

1. $F(a, b) = 0$
2. $\det F'_y(a, b) \neq 0$

$$F'_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

Тогда:

I Существует открытое множество $U \times V$ в \mathbb{R}^{k+m} , где U – окрестность a , а V – окрестность b : в $U \times V$ уравнение $F(x, y) = 0$ неявно задаёт единственную функцию $y = g(x)$

II g дифференцируема в точке a

III $g'(x) = - (F'_y(a, b))^{-1} \cdot F'_x(a, b)$

1.16 Практика

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \varphi_1, \dots, \varphi_n$

$$S = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid \begin{cases} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \right\}$$

Задача – найти экстремум f на S

Теорема 13 (Необходимое условие). Пусть для $\left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{array} \right|$

ранга m

$$L := f + \sum \lambda_i \varphi_i$$

Тогда x^* – условный экстремум, если $\begin{cases} \varphi_i(x^*) = 0 \forall i = 1, \dots, m \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 \forall i = 1, \dots, n \end{cases}$

$$f(x) - f(P) = (x - P)^T D^2 f(x - P) + o(\dots)$$

В случае поиска на поверхности, рассматриваем касательные к поверхности, если она гладкая

Теорема 14 (Достаточное условие). Пусть $f, \varphi_i = C_2(x^* \in U)$

$$\sum_k \frac{\partial \varphi_i(x^*)}{\partial x_k} dx_k = 0 \quad \forall i \quad \sum (dx_k)^2 > 0$$

$d^2\Lambda(x^*)$ знакоопределена для dx_k , то x^* – экстремум

Если ≥ 0 , то экстремума нет

1.17 Лекция

Теорема 15 (О неявном отображении). $F(x, y) = \mathbb{O} \iff \begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases}$

$$x = (x_1, \dots, x_k), y = (y_1, \dots, y_m), F = (F_1, \dots, F_m)$$

Если $F \in C^r(O)$, O – открытое в \mathbb{R}^{k+m}

($r \in \mathbb{Z}^+$)

$$1. F(x^0, y^0) = 0$$

$$2. F'_y(x^0, y^0) \text{ – обратима } (\det F'_y \neq 0)$$

Тогда \exists открытое U_{x_0} и V_{y_0} и $g : U_{x_0} \rightarrow V_{y_0}$:

$$\text{I } \begin{cases} (x, y) \in U_{x_0} \times V_{y_0} \\ F(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in U_{x_0} \\ y = g(x) \end{cases}$$

$$\text{II } g \in C^r(U_{x_0})$$

$$\text{III } g'(X) = (F'_y(x, y))^{-1} \cdot F'(x, y)$$

Определение 11 (Уточнение определения функции (отображения), заданной уравнением неявно). $\square D \subseteq \mathbb{R}^k \quad g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ Скажем, что отображение g задаётся уравнением

$$1. F(x^0, y^0) = 0$$

$$2. F'_y(x^0, y^0) \text{ – обратима } (\det F'_y \neq 0)$$

неявно, если

$$F(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in D$$

(аналогично для $x = h(y)$)

Пример. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad a > 0$

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad y = \sqrt{a^2 - x^2 - z^2} \quad \dots$$

$$\begin{cases} z'_x = ? \\ z''_{xy} = ? \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z(x, y) \equiv a^2$$

$$g(x, y) = z(x, y) \quad F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$$

$$F'_z = 2z \neq 0 \iff x^2 + y^2 < a^2$$

$$2(x + z \cdot z'_x) = 0 \implies z'_x = -\frac{x}{z}$$

$$0 + z'_y \cdot z'_x + z \cdot z''_{xy} = 0 \quad z'_y = -\frac{y}{z} \implies z''_{xy} = -\frac{z'_y \cdot z'_x}{z} = -\frac{xy}{z^3} = -\frac{xy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}^3}$$

Примеры нарушения условия 2 теоремы

Пример. $x = y^3 \quad F(x, t) = x - y^3$

$$F'_y = -3y^2 = 0 \quad y = 0$$

Пример. $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$

$$r^4 = r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \quad r = \sqrt{\cos 2\varphi}$$

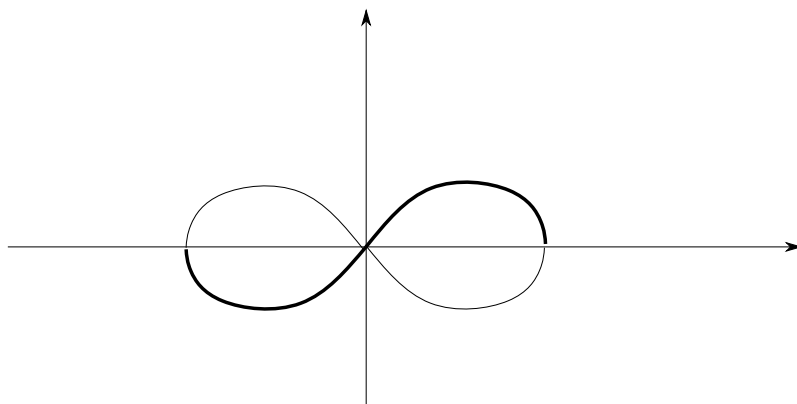


Рис. 1.4: lemniscat

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)$$

$$F'_y = 2(x^2 + y^2) \cdot 2y + 2y = 2y(2(x^2 + y^2) + 1)$$

$$F'_y = 0 \iff y = 0$$

$\int g(x) = y$ – функция, график которой – график F в I-III четвертях

$$\begin{cases} y = r(\varphi) \sin \varphi \\ x = r(\varphi) \cos \varphi \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$x'_\varphi = r' \cos \varphi + r \sin \varphi$$

$$x'(\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (r' + r) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\underbrace{\frac{-\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}}_{\text{не опр. при } \varphi = \frac{\pi}{4}} + \sqrt{\cos 2\varphi} \right)$$

Замечание. Если $f \in C([a, b])$ и $\exists \lim_{x \rightarrow a+} f'(a)$, то $\exists f'(a)$, и $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$

Пример. $y(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

$$\varphi \in (0, \frac{\pi}{4})$$

$$y'_x = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi} = \frac{\left(-\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \cdot \sin \varphi + \sqrt{\cos 2\varphi} \cdot \cos \varphi \right)}{-\frac{\sin \varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \cdot \cos \varphi - \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi} \rightarrow \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \implies$$

$$y'_x(x_{\varphi=\frac{\pi}{4}})$$

$$y'_+(0) = 1$$

1.18 Поверхности в \mathbb{R}^n (k -мерные)

Способы задания поверхности:

1. Поверхность уровня

$$F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\{x \in D(F) : F(x) = C\} - \text{линия уровня } C$$

$$F : D - \text{открытое} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \quad F = (F_1, \dots, F_k), C \in \mathbb{R}^k$$

$$(x \in D(F) : F(x) = C) - \text{поверхность уровня } C$$

Определение 12. $\square f : O \rightarrow \mathbb{R}^m$ O – открытое в \mathbb{R}^k $k, n \in \mathbb{N}$

f называется регулярным в O , если f Дифференцируема в O и в каждой точке $x \in O$ $f'(x)$ Имеет максимальный ранг ($\text{rang } f'(x) = \min(k, n)$)

Определение 13. $\square C \in \mathbb{R}^m \quad F \in C^r(O \rightarrow \mathbb{R}^m), O$ – открытое в \mathbb{R}^n
 $r \in \mathbb{Z}_+$

F регулярно в O , тогда поверхность уровня C называется r -гладкой
(класса C^r) $n - m$ -мерной поверхностью

Пример. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, a > 0$

$F(x, y, z) = a^2 \quad m = 1 \quad n = 3 \quad F' = (2x, 2y, 2z)$

$S - 3 - 1 = 2$ -мерная поверхность

2 Поверхности-графики

$\square g : D \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m \quad k < n \quad n = k + m$

$\Gamma_g = \{(x, y) : x \in D, y = g(x)\} \in \mathbb{R}^n$

Если D Ограничено в $\mathbb{R}^k \quad g \in C^r(D \rightarrow \mathbb{R}^m)$, то говорят о графике
отображения гладкости r (класса C^r)

Пример. Сфера – объединение бесконечно гладких графиков

3 Параметрическое задание

$\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$

Если D – открытое, $\Phi \in C^r(D)$ и Φ Регулярна в D , то $\Phi(D)$ – k -
мерная поверхность с параметризацией класса C^r (параметризован-
ной поверхности)

Пример. $S \cap \{x > 0, y > 0, z > 0\} = \left\{ (x, y, z) : \begin{array}{l} x = a \cos \varphi \cos \psi \\ y = a \sin \varphi \cos \psi \\ z = a \sin \psi \end{array} \quad \varphi, \psi \in (0, \frac{\pi}{2}) \right\}$

$\Phi : (\varphi, \psi) \rightarrow (x, y, z)$

Теорема 16 (О способах задания гладких поверхностей). $\square r \in \mathbb{Z}_+, m, k \in$
 $\mathbb{N} n = m + k$

$S \subseteq \mathbb{R}^n \quad a \in S$. Следующие утверждения равносильны:

1. \exists окрестность $U_a : U_a \cap S$ – k -мерный график класса C^r
2. \exists окрестность $U_a : U_a \cap S$ – k -мерная поверхность уровня класса C^r
3. \exists окрестность $U_a : U_a \cap S$ – k -мерная поверхность класса C^r за-
данная параметрически

Доказательство.

1 \implies 2 $U_a \cap S = \{(x, y) : x \in D \quad y = g(x)\}$ (после перенумерации, если требуется)

$$= \{(x, y) : F(x, y) = 0\} \quad F = y - g(x)$$

F определена на $D \times \mathbb{R}^m$ $F : D \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $F \in C^r(D \times \mathbb{R}^m)$

$F'_y = E_m$ F' содержит E как минор \implies ранг F' максимальный

2 \implies 1 $F(x, y) = C$ $C \in \mathbb{R}^m$ $F : O \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$U_a \cap S = \{(x, y) : (2)\}$$

F' имеет максимальный ранг $= m$. С точностью до нумерации координат можно считать, что $\det F'_y(a) \neq 0$. В некоторой окрестности $\det F'_y(x, y) \neq 0 \implies$ по теореме о неявной функции $y = g(x)$

1 \implies 3 $S \cap U_a = \{(x, g(x)) : x \in D\}$

$$\Phi : x \in D \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow (x, g(x)) \in \mathbb{R}^n$$

$$\Phi' = \begin{bmatrix} & E_k \\ g'_{1x_1} & g'_{1x_k} \end{bmatrix} \implies \text{rang } \Phi' = k \implies \Phi - \text{регулярна в } D$$

3 \implies 1 $S \cap U_a = \{(x, y) = \Phi(u) : u \in D - \text{открытое в } \mathbb{R}^k\}$ $\Phi \in C^r(D)$, $\text{rang } \Phi' = k$ - максимальный

$$\text{Не умаляя общности } \det \Phi'_x \neq 0 \quad \tilde{\Phi}(n) = \begin{bmatrix} \Phi_1(u) \\ \vdots \\ \Phi_k(u) \end{bmatrix} \quad \Phi(n) = \begin{bmatrix} \Phi_1(u) \\ \vdots \\ \Phi_n(u) \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} \nabla \Phi_1 \\ \vdots \\ \nabla \Phi_k \end{bmatrix} \neq 0$$

$$\tilde{\Phi}' = \begin{bmatrix} \nabla \Phi_1 \\ \vdots \\ \nabla \Phi_k \end{bmatrix} - \text{обратима}$$

$$\Psi = \tilde{\Phi}^{-1} \quad \tilde{\Phi} : (u_1, u_2, \dots, u_k) \rightarrow (x_1, \dots, x_k)$$

$$(x, y) = \Phi(u) = \left(\tilde{\Phi}(u), \tilde{\Phi}(u) = (x, \tilde{\Phi}(\Psi(x))) \right) \in C^r \text{ по теореме об обратном отображении} \quad u = \Psi(x) \quad \Phi(u) = \Phi(\Psi(x))$$

Определение 14. r -гладкая k -мерная поверхность – поверхность, для которой справедливо одно из утверждений 1-3 предыдущей теоремы

Пример. $\gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{bmatrix} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\gamma|_{(a,b)} \quad \gamma \in C^r(a, b)$

$\text{rang } \gamma' \text{ максимален} \iff \gamma'(t) \neq 0$

Пример. в $\mathbb{R}^n \quad D = \{\langle v_1, x \rangle + v_2 = 0\}$, где $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$

$F' = v_1$. Если $v_1 \neq 0$, то $S - n - 1$ -мерная поверхность (гиперплоскость, гиперпространство в \mathbb{R}^n)

1.19 Условный экстремум функций нескольких переменных

$f : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad E_0 \subseteq E$

Условный экстремум f на $E_0 \equiv \text{экстремум } f|_{E_0}$

$$\square E_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} F_1(x) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x) = 0 \end{cases}, m \in \mathbb{N}, m \leq n \right\}$$

Эти уравнения называются уравнениями связи, функции F_i называются функциями связи

Экстремум $F|_{E_0} \equiv \text{условный экстремум } F \text{ при условии } \langle \text{система уравнений} \rangle$

■

Теорема 17 (Необходимое условие условного экстремума, геометрическая формулировка). $\square O$ – открыток $\subseteq \mathbb{R}^n \quad f, F_1, \dots, F_m \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}), m < n$ и $F = (F_1, \dots, F_m)$ – регулярно в O . $\square a$ – точка локального условного экстремума для f относительно $F(x) = 0$

Тогда в точке $a \quad \nabla f$ представимо в виде линейной комбинации $\nabla_a F_1, \dots, \nabla_a F_m \quad (\nabla_1 f \in \mathcal{L}_{in} \{ \nabla_a F_1, \dots, \nabla_a F_m \})$

Доказательство случай 1: $m = n - 1$

$$\begin{aligned} \text{От противного : } \text{rang} \begin{bmatrix} f'(a) \\ F'_1(a) \\ \vdots \\ F'_m(a) \end{bmatrix} < n \quad \left(\Longleftrightarrow \det \begin{bmatrix} f'(a) \\ F'_1(a) \\ \vdots \\ F'_{n-1}(a) \end{bmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \right. \\ \left. f'(a), \dots, F'_{n-1}(a) \text{ -- линейно зависимы} \implies \exists \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} : \lambda_0 f'(a) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k F'_k(a) = 0 \right. \end{aligned}$$

Если бы $\lambda_0 = 0 \implies \{F'_k(a)\}_{k=1}^{n-1}$ -- линейно зависимо $\text{rang}(F'_k(a))_{k=1}^{n-1} < n-1$ -- не максимально

$$\text{Значит } \lambda_0 \neq 0 \implies f'(a) = - \sum \frac{\lambda_k}{\lambda_0} F'_k(a)$$

$$\triangleleft h(x) = \begin{bmatrix} f(x) \\ F_1(x) \\ \vdots \\ F_{n-1}(x) \end{bmatrix} : \text{Oc} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Если неверно, что определитель матрицы производных этого столбца функций равен нулю, то по теореме об обратном отображении $h(U_a)$ --

$$\text{открытое множество} \implies \exists \delta_0 > 0 : \quad \forall \delta \in (0, \delta_0) \quad \begin{bmatrix} f(a) \pm \delta \\ F_1(a) \\ \vdots \\ F_{n-1}(a) \end{bmatrix} \in h(u_n)$$

$$\implies \forall \text{ Открытого } \tilde{U}_a \quad \exists \text{ точка } x : F_1(x) = F(a) = 0, \dots, F_{n-1}(x) = F_{n-1}(a) = 0 \quad f(x) > f(a) \text{ или } f(x) < f(a)$$

Противоречие -- x -- точка условного локального экстремума

$$m = 1, \dots, n-2 \quad F' \text{ -- максимального ранга } \triangleleft \tilde{h}(a) = \begin{bmatrix} f(x) \\ F_1(x) \\ \vdots \\ F_m(x) \end{bmatrix} \quad \text{Предположим, что}$$

$$\text{rang } \widetilde{h'(x)} < m+1$$

С точностью до нумерации координат $\widetilde{h'_{x_1, \dots, x_{m+1}}}(a) \neq 0$

$$\begin{aligned} h(x) = \begin{bmatrix} \tilde{h}(x) \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad h'(a) = \begin{bmatrix} h'_{x_1, \dots, x_{m+1}} & \cdots \\ \mathbb{O} & \\ E_{n-(m+1)} & \end{bmatrix} (a) \implies \exists \text{ окрестность} \\ U_a \quad h|_{U_a} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
a\bar{h} \rightarrow \begin{bmatrix} f(a) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{m+2} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} . \text{ Т.к. } h - \text{открытое, то } \exists \sigma > 0 : \forall y \in \mathbb{R}^n : \|y - b\| < \sigma \implies \\
y \in h(U_a) \\
\triangleleft y = \begin{bmatrix} f(a) \pm \frac{b}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ o \\ a_{m+2} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \implies \exists x \in U_a : f(x) = y \quad F_1(x) = \dots = F_m(x) = \\
0 \quad f(x)f(a) \pm \frac{b}{2}
\end{array}$$

Противоречие, ранг не меньше максимального

