Математический анализ

Коченюк Анатолий

8 ноября 2020 г.

Оглавление

0.1 Введение

Преподаватель — Семёнова Ольга Львовна. Почта: o_semenova@mail.ru

Литература:

1. Виноградов О.Л. Курс Математического анализа
2. Виноградов, Громов –||–
3. Фихтенгольц (курс)
4. Зорич (курс, двухтомник)
5. Кудрявцев (сборник задач, 1 том из трёх)
6. Виноградова, Олехник, Саровничий (1 том из двух)

0.2 Баллы

Практика – 70/100. Теория – 30/100 – 2-4 теста по теории (3 балла за присутствие на ∼всех лекциях.

Если меньше 18/30 баллов, то всю теорию нужно будет пересдавать. Иначе можно воспользоваться этим как баллами за экзамен.

Глава 1

Множества, отображения, $\mathbb{R}$

1.1 Множества

"Множество" – неопределямое слово. Синонимы: набор, совокупность, класс. Множество состоит из элементов.

$$M = \{1, 3, 7, 9\},\ \mathbb{N},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\},\ \mathbb{R},\ \mathbb{R}_+.$$

Способы описания:

- явное описание $\{1, 2, 3\}$
- через некоторое свойство
  $M = \{x : P(x)\}$ $\quad$: — читается как "таких что". Тот же смысл имеет $|$.
  $P(x)$ обозначает какое-то свойство.
  $M = \{x : xx$ – человек и x 2002 г.р.$\}$

Кванторы:

- $\forall$ – "для любого", любой, каждый, всякий ...
- $\exists$ – "существует".

Пример: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \dots$
Для любого положительного эпсилон существует положительное число дельта, т.ч. ...

Обозначения:

- $\iff$ — равносильно
- $\wedge$ — "и"
- $\vee$ — "или"
- $\sqsupset$ — пусть

- $\lhd$ — допустим, рассмотрим

Замечание. Множество всех множеств не существует.

$\neg$ – отрицание

$\neg\exists$ – не существует

$\emptyset$ – пустое множество

$x \in M \iff x$ – элемент множества M

$A \subseteq B \iff (x \in A \implies x \in B)$

$B \supseteq A$ – то же самое

$\forall$ множества $M \quad \emptyset \subseteq M$

$$A = B \iff (x \in A \iff x \in B) \iff \begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{cases}$$

A, B – множества

$A \cup B = \{x : (x \in A \vee x \in B)\}$

$A \cap B = \{x : (x \in A \wedge x \in B)\}$

$$x \in A \cap B \iff \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$$

$A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$

$A \subset C$

$A^c = X \setminus A$ – дополнение A в X

Определение 1. A, X_α – множества, $\forall \alpha \in A$

$\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – семейство множеств

A – индексное множество

$$\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x : \exists \alpha \in A \quad x \in X_\alpha\}$$

$$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x : \forall \alpha \in A \quad x \in x_\alpha\}$$

Пример. $\{(x-1, x+1)\}_{x \in (0;1)}$

$$\bigcup_{x \in (0;1)} (x-1, x+1) = (-1, 2), \bigcap_{x \in (0,1)} (x-1, x+1) = (0; 1)$$

Определение 2 (Формула Де Моргана)**.** $A, B \subseteq X$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$\{A_i\}$ – семейство

$(\bigcup\limits_{i \in I} A_i)^c = \bigcap A_i^c$

$\left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup A_i^c$

Замечание. $A^{cc} = A$ – проверить-упражнение

Доказательство. $x \in \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right)^c \iff x \notin \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) \iff \forall i \in I x \notin A_i \iff$ $\forall i \in I x \in A_i^c \iff x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i^c$

$(\bigcap A_i)^c = (\bigcap A_i^{cc})^c = (\bigcup A_i^c)^{cc} = \bigcup A_i$ ■

Определение 3 (упорядоченная пара)**.** A, B

(a, b) – упорядоченная пара, $a \in A, b \in B$. В этой паре важен порядок.

$\{a, b\}$ – неупорядоченная пара (двухэлементное множество), если $a \neq b$.

$\{a, a\} = \{a\}$ (в множестве не различаются копии).

Пример: координаты точек плоскости.

$X_1, \ldots, X_m \quad x_1 \in X_1 \ldots x_m \in X_m \quad (x_1, \ldots, x_m)$ – упорядоченная пара

Определение 4 (Декартово произведение)**.** $X_1 \times \ldots \times X_m = \{(x_1, \ldots, x_m) : x_k \in X_k \quad k = 1 : m\}$

$R^m = (R)^m$

Пример. $X = \{1, 2\}$

$Y = \{3, 5\}$

$Z = \{0\}$

$X \times Y \times Z = \{(1, 3, 0), (2, 3, 0), (2, 3, 0), (2, 5, 0)\}$

1.2 Отображения

Формальное определение, которое не будет использовано или потребовано нигде (в том числе на экзамене).

Определение 5. X, Y – множества
Если $R \subset X \times Y$ и $(x, y_1) \in R \vee (x, y_2) \in R \iff y_1 = y_2$, R называется отображением или графиком.

Определение 6. Отображение – это тройка (X, Y, f), где X, Y – множества, а f – некое правило, по которому каждому элементу $x \in X$ сопоставляется некоторый единственный элемент $y \in Y$.

$f : X \to Y$ – синоним. читают "f действует из X в Y"

X – множество определения отображения

Y – множество значений

$\{y \in Y : \exists x \in X f(x) = y\} \subset Y$ (т.е. Y – необязательно точное множество значений)

Пример. $x = \mathbb{R},\ Y = \mathbb{R},\quad x \mapsto x^2$

Если $y = f(x)$, то y называется образом элемента x при отображении f.

$A \subseteq X \quad f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ – образ множества A под действием f.

$B \subseteq Y \quad f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}$

$f^{-1}(\{y\})$ – необязательно одноэлементное.

Упражнения:

1. $f(A \cup B), f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B), f(A) \cap f(B)\ y \in f(A \cap B) \implies \exists x \in A \cap B : f(x) = y. x \in A, x \in B, y \in f(A), y \in f(B) \implies y \in f(A) \cap f(B)$

   $f(x) = const \quad f(A) \cap f(B) \neq \emptyset, f(A \cap B) = \emptyset$, если $A \cap B = \emptyset$
3. $f^{-1}(A \cup B), f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
4. $f(A \cap B), f(A) \cap f(B)$

Определение 7. Если $f : X \to Y,\ g : X_1 \to Y \quad X_1 \subseteq X$ и $\forall x \in X_1 \quad g(x) = f(x)$, то g называется сужением f на X_1.

Обозначение: $g = f\ |_{x_1}$. При этом f называется продолжением g с X_1 на X.

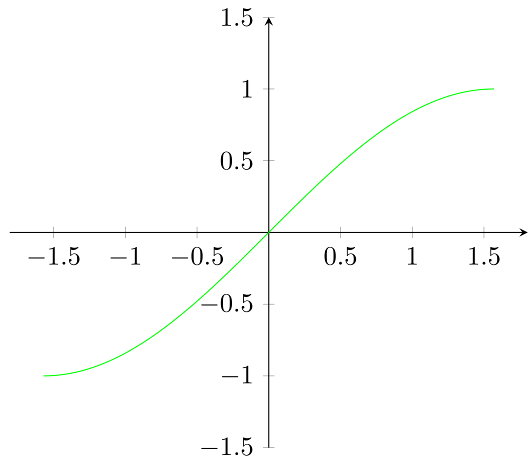


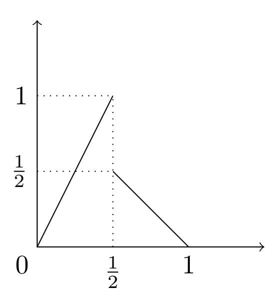
Рис. 1.1: sinus

Пример. $f(x) = \sin x \quad f\,|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$

> **Определение 8.** Если $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$, то $g \circ f : X \to Z$.
> $g \circ f(x) = g(f(x))\ \forall x \in X$.
> $g \circ f$ называется композицией f и g.

Пример. Изобразить эскизы графиков функций для всех случаев

1. $f(x) = \sin x, g(x) = x^2$
2. $f(x) = x^2, g(x) = \sin x$
3. $f(x) = g(x)$



Построить $f^{(2)}, f^{(3)}, f^{(4)}$ без формул.

Определение 9. Функция $f : X \to Y$ называется инъекцией, если $\begin{cases} f(x_1) = y \\ f(x_2) = y \end{cases} \implies x_1 = x_2$

Пример. $f(x) = kx + b$ – инъекция, $k \neq 0$

$f(x) = \sin x$ – не инъекция

$f(x) \mid_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ – инъекция

Определение 10. $f : X \to Y$ называется сюръекцией, если $\forall y \in Y \quad \exists x \in X : f(x) = y$.

Пример. $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – не сюъекция

$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ – сюръекция

$y = kx + b, k \neq 0$ – сюръекцией

Определение 11 (биективность)**.** $f : X \to Y$ – инъекция и сюръекция $\implies f$ называется биекцией

Пример. $y = kx + b, k \neq 0$ – биекция

Определение 12. $f : X \to Y, g : Y \to X$. g называется обратным к f отображением, если $f(x) = y \iff x = g(y)$. Обозначается: $g = f^{-1}$

Замечание. Обратимая функция должна быть биективной:

1. Инъективной – обратная иначе не будет функцией.

2. Сюръективной – обратная иначе не будет определена на всём Y.

Замечание. $f^{-1}(A)$ – обычно прообраз A под действием f, а не образ обратной функции (которая может не существовать).

Пример. $\arcsin = (\sin_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1}$

$\log_a(x) = (a^x)^{-1}$

$\sqrt{x} = (x_2 \mid_{[0, +\infty)}, \sqrt[3]{(x)} = (x^3)^{-1}$

1.3 Вещественные числа

1.3.1 Аксиоматическое определение вещественных чисел

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ – множество, две операции и отношение порядка, удовлетворяющие следующим 16 аксиомам:

Аксиомы поля:

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a + b = b + a$ (коммутативность сложения)
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)
3. $\exists$ нейтральный элемент 0 по сложению $\forall a \in \mathbb{R} \quad a + 0 = a$ (существование нейтрального элемента по сложению)
4. Существует обратный элемент по сложению.
   $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists (-a) \in \mathbb{R}: \quad a + (-a) = 0$
5. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность умножения)
6. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность умножения)
7. $\exists 1 \in R \setminus \{0\}, \forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 1 = a$
8. $\forall a \neq 0\ \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$
9. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (дистрибутивность)

примеры: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \{0, 1\}(1 + 1 = 0$, остальное как обычно).

Элементарные следствия:

- $\forall a \in K$ – поля, обратный по сложению единственный. Если b, b' – два обратных, то $b = b + (a + b') = (b + a) + b' = b'$
- обратный по умножению, нейтральные – все единственны.

Аксиомы порядка:

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \leqslant b \vee b \leqslant a$
2. $a \leqslant b, b \leqslant c \implies a \leqslant c$ (транзитивность)
3. $a \leqslant b, b \leqslant a \implies a = b$
4. $a \leqslant b, c \in \mathbb{R} \implies a + c \leqslant b + c$
5. $a \geqslant 0, b \geqslant 0$, то $a \cdot b \geqslant 0$

$0 \cdot x + x \cdot x = (0 + x) \cdot x = x \cdot x \implies 0 \cdot x = 0$

Упражнения:

1. $-x = (-1) \cdot x$
2. $(-a)(-b) = a \cdot b$

3. $1 \geqslant 0$

Определение 13. Индуктивным множеством в упорядоченном поле $(K, +, \cdot, \leqslant)$ называется множество N:

1. $1 \in N$
2. $\forall x \in N \implies x + 1 \in N$

$\mathbb{N}$ – наименьшее индуктивное множество. $\mathbb{N} = \bigcap\limits_{N \text{ – индуктивное}, N \subseteq \mathbb{R}} N$

Замечание. $x > b \iff \begin{cases} x \geqslant b \\ x \neq b \end{cases}$

Аксиома Архимеда: $\forall x, y \in R : x > 0, y > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$.

Аксиома вложенных промежутков:

$\forall \{[a_n, b_n]\}_{n \in \mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N} \ [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n] \quad \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$

В аксиоме о вложенных промежутках предполагается, что
$\forall n \in \mathbb{N}, [a_n, b_n] \neq \emptyset \iff a_n \leqslant b_n$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, : a \leqslant x \leqslant b\}$ – замкнутый отрезок, промежуток, сегмент, замкнутый промежуток

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ – интервал, открытый промежуток

$(a, b], [a, b)$ – полуоткрытый промежуток

$< a, b >$ – некоторый промежуток $a \leqslant b, < a, b > \neq \emptyset$

Замечание (Расширенная вещественная прямая)**.** $\overline{R} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

$\forall a \in \mathbb{R} \quad a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$

$a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

$(+\infty) + (-\infty), (-\infty) + (+\infty)$ – не определены

$\forall a > 0$

- $(+\infty) \cdot a = a \cdot (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) \cdot a = a \cdot (-\infty) = -\infty$
- $\pm\infty \cdot (-1) = \mp\infty$
- $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

- $(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$
- $(\pm\infty) \cdot 0, 0 \cdot (\pm\infty)$ – не определены

$\forall a \in \mathbb{R}$

- $+\infty \geqslant a \geqslant -\infty$

$[a, +\infty] = [a, +\infty) \cup \{+\infty\}$

В "$+\infty$" иногда $+$ опускают, но подразумевают её, если рассматривается $\overline{R}$

1.4 Модуль

$a \in \mathbb{R} \qquad |a| = \begin{cases} a & ,\text{если} a \geqslant 0 \\ -a & ,\text{если} < 0 \end{cases}$

Свойство 1. $b = |a| \iff \begin{cases} b \in \{a, -a\} \\ b \geqslant 0 \end{cases}$

Элементарные свойства модуля:

1. $\forall a \in \mathbb{R} \quad |-a| = |a|$
2. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \pm a \leqslant |a|$
3. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
4. $\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (\left|\frac{a}{b}\right|) = \frac{|a|}{|b|}$
5. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad ||a| - |b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|$

Замечание. $a - b := a + (-b), \quad \frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}, b \neq 0.$

Замечание. $a \leqslant b \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad a + c \leqslant b + c$

$a \leqslant b \quad b \leqslant c \implies a \leqslant c$

$a \leqslant b, c \leqslant d \quad a + c \overset{?}{\leqslant} b + d$

$a + c \leqslant b + c \quad b + c \leqslant b + d \implies a + c \leqslant b + d$

Доказательство. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad ||a| - |b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|$

$\pm a \leqslant |a|, \ \pm b \leqslant |b| \quad \pm (a + b) \leqslant |a| + |b|$ (аксиома порядка 4)

$\implies |a + b| \leqslant |a| + |b| \implies |a - b| \leqslant |a| + |-b| = |a| + |b|$

$|a| = |a - b + b| \leqslant |a - b| + |b|$

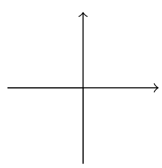
$|a| - |b| \leqslant |a - b| \quad |b| - |a| \leqslant |b - a| = |a - b|$

$||a| - |b|| = \pm(|a| - |b|) \leqslant |a - b|$ ■

Замечание. $|+\infty| := +\infty \quad |-\infty| := +\infty$

1.5 Комплексные числа

$\mathbb{C}$ – обозначение для множества комплексных чисел.
$\mathbb{C} = \{(x, y)|x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$



Удобно представлять на плоскости.

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$

Замечание. $\mathbb{C}$ – поле

Аксиомы для сложения очевидны.

$0 = (0, 0), \quad 1 = (1, 0)$

$-(x, y) = (-x, -y)$

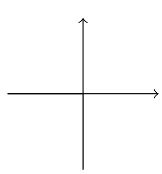
$(x, y) \cdot (1, 0) = (x, y) \; \forall x, y \in \mathbb{R}$

$i = (0, 1) \quad i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$

$\mathbb{R} \leftrightarrow \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ (именно такие пары, потому что так сохраняются операции)

$F : \mathbb{R} \to \{(x, 0)\} \quad F$ сохраняет $+$ и сохраняет $\cdot$.

$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \quad (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1x_2 - 0, 0)$



Оси: вещественная(x) и мнимая(y)

$(0, y)^2 = (-y^2, 0) \; \forall y \in \mathbb{R}$

$(x, y) = x + iy \quad i = (0, 1)$ – мнимая единица. Алгебраическая форма записи комплексных чисел.

$z = x + iy \quad x$ – вещественная часть z, $\quad y$ – мнимая часть z

$Rez = x, \quad Imz = y$ иногда встречается rp, ip – real/imaginary part.

Замечание (Комплексное сопряжение)**.** $z = x+iy \quad \overline{z} = x-iy$ – отражённое от оси x, если смотреть на плоскость.

$Rez = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad Imz = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ – вещественные числа!

Замечание (Модуль и аргумент)**.** $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$

$z \cdot \overline{z} = (x+iy) \cdot (x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2$

$r = |z|$

Аргумент – угол (ориентированный) между осью Ox и $\overrightarrow{Oz}$.

Аргументов много $Argz, z \neq 0$ – совокупность всех аргументов.

Если $\varphi_0 \in Arg(z)$, то $Argz = \{\varphi_0 + 2\pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Если $\begin{cases} \varphi_0 \in Argz \\ \varphi_0 \in (-\pi, \pi] \end{cases}$, то φ_0 называется главным значением аргумента $\varphi_0 = arg(z)$.

$z = (x, y) = (r, \varphi), r$ – длина радиус-вектора, φ – аргумент.

(r, φ) – полярные координаты, совмещённые с прямоугольными

Замечание. $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\cos\varphi$

$x > 0 \quad argz = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$y > 0 \quad argz = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$y < 0 \quad argz = -\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases} \qquad argz = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi$

остальное – упражнение

Изобразить кривую заданную в полярных координатах:

1. $r = 3$
2. $r = \varphi$ – спираль Архимеда
3. $r = e^{\varphi}$
4. $r = \frac{1}{\cos\varphi}$

5. $r = \frac{2}{\sin\varphi}$
6. $r = \frac{3}{\cos\varphi + \sin\varphi}$
7. $r = 1 + \cos\varphi$

$(0, 0)$ – полюс

$r(\varphi) \uparrow$ – удаление от полюса

$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – в скобках точка на единичной окружности с аргументом таким же, что и у z.

Это называется тригонометрической формой записи числа.

$-\frac{1}{2}(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0) = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\varphi_0 + \pi) + i\sin(\varphi_0 + \pi))$

$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi \quad \varphi \in \mathbb{R}$

$r \cdot e^{i\varphi}$ – экспоненциальная (показательная) форма числа.

$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2i}$

Если $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$, то $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ (см. курс алгебра).

$n \in \mathbb{N} \quad z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$ – формула Муавра.

1.6 Дополнение к разделу “Действия над множествами”

Утверждение 1. Пусть B — множество, $\{A_i\}_{i \in I}$ — семейство множеств.
$B \cap \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) = \bigcup\limits_{i \in I} (B \cap A_i)$

Доказательство. $x \in B \cap \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) \iff \begin{cases} x \in B \\ x \in \cup A_i \end{cases} \iff \begin{cases} x \in B \\ \exists i : x \in A_i \end{cases} \iff$
$\exists i : \begin{cases} x \in B \\ x \in A_i \end{cases} \iff \exists i : x \in B \cap A_i \iff x \in \bigcup\limits_{i \in I} (B \cap A_i)$. ■

1.7 Принцип математической индукции

P_n - утверждение, зависящее от n

$\begin{cases} P_1 \text{– верно} \\ P_n \to P_{n+1} \end{cases} \implies \forall n \in \mathbb{N} \quad P_n$ – верно.

$\{n : P_n \text{– верно}\}$ – индуктивно $\implies \mathbb{N} \subseteq \{n : P_n \text{ – верно}\}$

Первый шаг (проверка P_1) называется базой индукции, а второй – переходом

Пример. $2^n \geqslant n^2 \quad \forall n \geqslant 4, n \in \mathbb{N}$

$P_4 \quad 2^4 \geqslant 4^2 \quad 16 \geqslant 16$ – верно

$\sqsupset P_n$ – верно

$P_{n+1}: \quad 2^{n+1} \geqslant (n+1)^2$

$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \geqslant n^2 \cdot 2 \overset{?}{\geqslant} (n+1)^2 \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \leqslant 2$

$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{4}$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \leqslant 2$

Определение 14. $\forall n \in \mathbb{N} \quad n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

$0! := 1$ – соглашение

$(n+k)! = n! \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k)$

$n!! = n \cdot (n-2) \cdot \ldots$ (заканчивается либо 1, либо 2)

n – чётно, $n!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$

n – нечётно, $n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$

Определение 15 (биноминальный коэффициент)**.** $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальный коэффициент, число сочетаний из n по k

$\binom{n}{k}$

Элементарные свойства биномиальных кэффициентов:

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$
2. $C_n^0 = C_n^n = 1$
3. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
4. $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$

   $\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} = \frac{n!}{k!(n+1-k)!} \cdot (n+1-k+k) = C_{n+1}^k$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & 1 & & 1 & \\
1 & & 2 & & 1
\end{array}
$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

Утверждение 2. $\forall a, b \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ – бином Ньютона.

Замечание. $\sum_{k=1}^{N} a_k := a_1 + a_2 + \ldots + a_N$

$\sum_{k=m}^{m+p} a_k := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{m+p}$

$\prod_{k=m}^{m+p} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_{m+p}$

Замечание. $x^0 := 1 \ \forall x \in \mathbb{C}$ – определили функцию

Доказательство бинома по индукции. База: $n = 1 \quad (a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} C_1^k a^k b^{1-k} = C_1^0 a^0 b^1 + C_1^1 a^1 b^0 = a + b$

Переход: Пусть верно для n. Докажем для $n+1$:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \right) \cdot (a+b) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k+1} \underset{(j=k+1)}{=}$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k} \underset{k=j}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k} =$$

$$= C_n^n a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^{k-1} a^k b^{n+1-k} + C_n^k a^k b^{n+1-k} \right) + C_n^0 a^0 b^{n+1} =$$

$$= C_{n+1}^{n+1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k a^{n+1} b^{n+1-k} + C_{n+1}^0 a^0 b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k}$$

что и требовалось доказать ■

1.8 Метрические пространства

Определение 16. Пусть X — любое множество, а $\rho : X \times X \to [0, +\infty)$.

Тогда пара (X, ρ) называется метрическим пространством, если функция φ удовлетворяет аксиомам метрики:

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$ (невырожденность)
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность)
3. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) \forall x, y, z \in X$ (неравенство треугольника)

Тогда ρ называется метрикой или расстоянием на X.

Пример. 1. (X, ρ_D) – метрическое пространство

$$\rho_D(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{, если} x = y \\ 1 & \text{, если} x \neq y \end{cases}$$

2. $X = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|$

$x - y = a, y - z = b \quad \rho(x, z) = |a - b| \leqslant |a| + |b| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Обычная или Евклидова метрика

$\tilde{2}$ $X = \mathbb{C} \quad \rho(z, w) = |z - w|$ (аксиома 3 будет проверена позже)

$\approx$ $\tilde{\tilde{2}}$ $X = \mathbb{R}^n, x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$.

$v = (v_1, \ldots, v_n) \quad \|v\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2}$ – евклидова норма вектора v.

3. $\sqsupset (X, \rho)$ – метрическое пространство

$\sqsupset X_1 \subseteq X \quad \rho_1 = \rho|_{X_1 \times X_1}$

Тогда (X_1, ρ_1) – есть метрическое пространство, а ρ_1 называется индуцированной метрикой.

4. X – множество станций метрополитена г. Санкт-Петербурга. Пусть между соседними станциями расстояние – 2 минуты. $\rho(u, v) = \min$ длин путей из u в v

ρ – метрика

Определение 17. Открытый шар с центром в точке a радиусом R в метрическом пространстве (X, ρ) :

$B_R(a) = \{x \in X : \quad \rho(X, a) < R\}$

$B_R[a] = \{x \in X : \quad \rho\,(x, a) \leqslant R)\}$

Пример. 1. $(0 \vee 1)$ $B_R(a) = \begin{cases} \{a\} & \text{, если } R \leqslant 1 \\ X & \text{, если } R > 1 \end{cases}$

2. $(a - R, a + R)$
3. круг (без окружности)
4. n-мерный шар

в $\mathbb{R}^n$ $\quad \|v\|_1 = \sum_{k=1}^n |v_k| \quad \|v\|_\infty = \max\limits_{k=1:n} |v_k|$

Определение 18. $E \subseteq \mathbb{R}, \begin{cases} M \in E \\ \forall x \in E \quad M \geqslant x \end{cases} \implies M := \max E$

$\rho(x, y) = \|x - y\|$

$\rho_1(x, y) = \|x - y\|_1 \qquad \rho_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty$

Упражнение: проверить, что ρ_1, ρ_∞ – метрики, нарисовать шар в $\mathbb{R}^2$ относительно ρ_1, ρ_∞.

Определение 19. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. $E \subseteq X, E$ называется ограниченным, если

$$\exists a \in X, \exists R > 0 : \quad E \subseteq B_R(a)$$

Замечание. Эквивалентное определение: те же слова, но $B_R[a]$.

Определение 20. Пусть $E \subseteq \mathbb{R}$. E называется ограниченным сверху, если

$$\exists m \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in E \quad x \leqslant m.$$

При этом такое число m называется <u>мажорантой</u>. Говорят: m мажорирует E

Аналогичное определение для ограниченности снизу. Соответствующее m называется <u>минорантой</u>.

Утверждение 3. Пусть $E \subseteq \mathbb{R}$.

$$E \text{ – ограничено} \iff \begin{cases} E \text{ – ограничено сверху} \\ E \text{ – ограничено снизу} \end{cases}.$$

Доказательство. $\implies$: по условию $\exists a : E \subseteq (a - R, a + R)$.

$M := a + R$– мажоранта $\implies$ E ограничено сверху. Снизу – аналогично.

$\Longleftarrow$: E – ограничено сверху $\implies \exists M \in R : \forall x \in E \quad x \leqslant M.$

$\ldots \exists m \in \exists : \forall x \in E \quad x \geqslant m$

$-x \leqslant -m \leqslant |m| \implies |x| = max\{x, -x\} \leqslant max\{|M|, |m|\} = R$

$\implies x \in B_R[0]$. Т.к. это верно $\forall x \in E$, то $E \subseteq B_R[0]$

■

Замечание. Если $E \subseteq \mathbb{R}$, то

$$E \text{ – ограничено} \iff \exists R : \quad \forall x \in E \quad |x| \leqslant R.$$

Определение 21. $E \subseteq R, M \in E$, тогда

$$M = \max E \iff \forall x \in E \quad x \leqslant M.$$

$\min E$ аналогично.

Утверждение 4. $\forall E \subseteq R :\ E$ – конечно и $E \neq \emptyset \implies \exists \max E, \min E$

Определение 22. E конечно, если $\exists m \in \mathbb{N}$ и $\exists$ биекция $\varphi : E \to \{1, 2, \ldots, n\}$

Доказательство утверждения. Индукцией по числу элементов в E.

База: $m = 1 \quad E = \{x\} \quad \max E = \min E = x$

Переход: $m \to m + 1$

Индукционное предположение: любое конечное множество из M элементов имеет max и min.

Пусть E содержит $m + 1$ элементов. $E = \{x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}\} = \widetilde{E} \cup \{x_{m+1}\}$.

$M = \max\{\max \widetilde{E}, x_{m+1}\}$.

$$\begin{cases} M \in \widetilde{E} & \subseteq E \\ M = x_{m+1} & \in E \end{cases} \implies M \in E$$

$$\begin{cases} M \geqslant x_{m+1} \\ M \geqslant x \forall x \in \widetilde{E} \end{cases} \implies M \geqslant x \ \forall x \in E, \text{ т.о. } M = \max E$$ ■

Следствие 1. Пусть $E \subseteq \mathbb{Z}, E$ – ограничено сверху (снизу).
Тогда $\exists \max(\min) E$.

Доказательство. По условию существует $M \in R : \forall x \in E \quad x \leqslant M, \widetilde{\sqsupset}\ M \geqslant M$.

$\sqsupset n \in E \quad \lhd \widetilde{E} = \{x \in E : n \leqslant x \leqslant \widetilde{M}\}$

В $\widetilde{E}$ не более $\widetilde{M} - n + 1$ элементов, оно конечно $\implies$ (по утверждению) $\exists \max \widetilde{E} = C$

$\forall x \in E^x < n \vee x \geqslant n$

$x < n \qquad n \in \widetilde{E} \implies n \leqslant C \implies x \leqslant C$

$x \geqslant n \qquad x \in \widetilde{E} \implies x \leqslant C$ ■

Следствие 2. Пусть $E \subseteq \mathbb{N} \quad E \neq \emptyset$. Тогда $\exists \min E$ (вытекает из следствия 1, т.к. $\mathbb{N}$ ограничено снизу).

$\lfloor x \rfloor$ – целая часть числа. $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : l \leqslant x\}$ (Существует по следствию 1)

$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$

$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$

Утверждение 5. $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$, т.е $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b \quad \exists c \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$

Доказательство. $b - a > 0 \implies \frac{1}{b-a} > 0$
$\exists N \in \mathbb{N} : N > \frac{1}{b-a} \iff b - a > \frac{1}{N}$

$c = \frac{\lfloor Na \rfloor + 1}{N} \in \mathbb{Q}$

$Na - 1 < \lfloor Na \rfloor \leqslant Na \implies a = \frac{Na}{N} < c \leqslant \frac{Na+1}{N} = a + \frac{1}{N} < a + b - a = b$

$\implies c \in (a, b)$

■

1.9 Равномощные множества

Определение 23. Пусть A, B – множества. A равномощно B, если $\exists$ биекция между A и B. Пишут $A \sim B$.

Пример. 1. $(a,b), a<b \sim (0,1)$ $f(x) = a + (b-a)\cdot x, x \in (0,1)$

$\overline{1}$ $\forall (a,b)$ и (c,d) равномощны

2. $a<b \implies (a,b) \sim [a,b) \sim [a,b]$

3. $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \sim \mathbb{R}$ $\quad$ (tg)

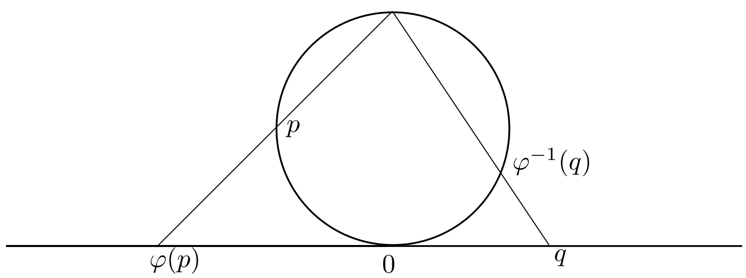


Рис. 1.2: circ

Замечание. (равномощность) $\sim$ – отношение эквивалентности.

1. $X \sim X$ $\qquad id(x) \equiv x$ – тождественное отображение id_X

2. $X \sim Y \implies Y \sim X$

3. $X \sim Y \quad Y \sim Z \implies X \sim Z$

Определение 24. Множество, равномощное $\mathbb{N}$, называется счётным

Пример. • $\{1,4,9,16,\ldots\}$ – счётно. $f(x) = x^2$

- $\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,4,-4\}$ – считаем их натуральными числами в таком порядке.

- $\{m, m+1, m+2, \ldots\}, m \in \mathbb{R}$ $\quad \varphi(x) = m + x - 1$

Теорема 1. Любое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

Доказательство. Пусть X — бесконечное множество. $\implies \exists a_1 \in X \quad X \setminus \{a_1\} \neq \emptyset$ (Иначе $X = \{a_1\}$!!!) $\implies \exists a_2 \in X \setminus \{a_1\} \quad a_2 \neq a_1$

Так можно продолжать для любого n. $X \setminus \{a_1, \ldots, a_n\} \neq \emptyset$ (иначе X конечно) $\implies \exists a_{n+1} \in X \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}, \quad an+1 \notin \{a_1, \ldots, a_n\}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi : n \to a_n \qquad A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \varphi$ – инъекция по построению. A – счётное ■

Определение 25. Если X – конечно $\vee X$ – счётно, то X называется <u>не более чем счётным</u> (нбчс).

Замечание (уточнение понятие конечного)**.**
X конечно $\iff \begin{cases} X \sim \{1, \ldots, n\} \\ X = \emptyset \end{cases}$

Теорема 2. $\forall$ счётного E, если $X \subseteq E$, X – бсконечно, то X –счётно.

Замечание. Любое подмножество счётного не более чем счётно.

Доказательство. E – счётно по условию $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ldots\}$. В данном наборе есть элементы из X. Пронумеруем их в порядке возникновения в наборе (*). ■

Теорема 3. Произведение счётных множеств счётно.
A, B – счётны $\implies A \times B$ – счётно

Доказательство. Если $A = B = \mathbb{N}$, то $\mathbb{N}^2$ счётно.

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,2) & \ldots \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \ldots \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \text{ — нумеруем по диагоналям.}$$

$A \times B = \{(a_K, b_j)\}_{k,j \in \mathbb{N}} \qquad l \to (k,j) \qquad = \{(k,j)_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ ■

Замечание. Любое конечное произведение $\underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N}}_{m} = (\mathbb{N}^m) \sim \mathbb{N}$ не более чем счётно

Теорема 4. Объединение счётного количества счётных множеств счётно.

$\{\{A_j\}_{j\in J}: \quad J$ – не более чем счётно $\quad \forall j \in J \quad A_j$ не более чем счётно$\}$

$\bigcup\limits_{j\in J} A_j$ — не более чем счётно. Не умаляя общности (н.у.о.)
$J = \mathbb{N} \vee J = \{1, 2, \dots, n\}$

Элементы $A_1, A_2, \dots$ (счётных!) множеств можно занумеровать.

$$\begin{aligned} A_1 : &\quad a_{11}, a_{12} \dots \\ A_2 : &\quad a_{21}, a_{22} \dots \\ A_3 : &\quad a_{31}, a_{32} \dots \end{aligned}$$

Перенумеруем по диагоналям лишь те, который встречаем в первый раз

Следствие 3. 1. $\mathbb{Q}$ счётно. $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_N \qquad \mathbb{Q}_N = \{\frac{p}{n}\}_{p\in\mathbb{Z}}$

2. $A = \{x : \exists$ полином с целыми коэффициентами $P(\cdot): \ P(x) = 0\}$

$\mathbb{P}_n = \{p(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n : \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}\} \quad \mathbb{P}_n \leftrightarrow \mathbb{Z}^{n+1}$

$A_n = \{x : \exists p \in \mathbb{P}_n : p(x) = 0\} \qquad A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$

Задача 1. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \ldots$ – несчётно

Теорема 5. Сегмент несчётен ($\forall a, b : a < b \quad [a, b]$ – не является счётным)

Доказательство. Доказательство от противного.

$\sqsupset [a, b]$ – счётен $\implies [a, b] = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.

$\sphericalangle$ три замкнутые “трети” $\Delta = b - a \qquad [a, a + \frac{\Delta}{3}], [a + \frac{\Delta}{3}, a + \frac{2\Delta}{3}], [a + \frac{2\Delta}{3}, b]$

$x_1 \notin$ одной из третей. Эту треть назовём I_1. Повторим действие для I_1 и x_2

$I_2 \subseteq I_1 \subseteq I_0 x_1 \notin I_1, x_2 \notin I_2$

$I_n \subseteq I_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq I_2 \qquad x_n \notin I_n$

По аксиоме № 16 $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset \quad \sqsupset x \in \bigcap\limits_{n\in N} I_n \implies c \in [a, b] \implies \exists n : c = x_n \notin I_n \implies c \notin \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$!!!

Т.о. $[a, b]$ – несчётно ∎

Следствие 4. несчётные: $\mathbb{R}, \underset{a<b}{(a,b)}, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$X \sim [0,1]$, то говорят, что X – мощности континуум (мощности $\mathbb{C}$)

Задача 2.
1. $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\sim\mathbb{R}$
2. Если X – множество, то $X \not\sim 2^X$ $\quad 2^X = \{A : A \subseteq X\}$

   $X = \emptyset \quad 2^X = \{\emptyset\}$

   $X = \{a\} \quad 2^X = \{\emptyset, \{a\}\}$
3. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim [0,1]$

Определение 26. Пусть X — любое множество. Отображение из $\mathbb{N}$ в X называется последовательностью в X.

Вместо $f(n), n \in \mathbb{N} \quad f : \mathbb{N} \to X$ используют $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ или $(x_n)_{n=1}^{\infty} \qquad n \to x_n \in X$

1.10 Предел числовой последовательности

Определение 27. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность вещественных чисел. $x_+ \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n := x_+ \iff \forall\varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad |x_n - x_+| < \varepsilon.$$

В метрическом пространстве (X,ρ) шар $B_R(a)$ называется также R-окрестностью точки a.

Определение 28 (Определение предела на языке окрестностей)**.**

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_* \iff \forall$ окрестности U точки $x_* \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad x_n \in U$

Пример. $x_n = \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$ $x_* = 0$

$\forall\varepsilon > 0\exists N : \forall n > N \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad n > \frac{1}{\varepsilon} \quad N := \left\lfloor\frac{1}{\varepsilon}\right\rfloor + 1$

Замечание. Определение предела на “языке окрестностей” справедливо в случае последовательностей в метрическом пространстве.

$x_n \to x_* \iff \forall\varepsilon > 0\exists N : \forall n > N \quad \rho(x_n, x_*) < \varepsilon.$

Утверждение 6. Пусть X – метрическое пространство и $c \in X$. Если $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = c$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

Доказательство. $x_* = c \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \rho(x_n, x_*) = 0 < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$

$N = 1$ ∎

Замечание. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательности в метрическом пространстве X и $\exists m \in \mathbb{N} \quad x_n = y_n \ \forall n \geqslant m$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ совпадают (если существует один, то существует другой и равны при существовании).

Утверждение 7 (единственность предела)**.** Пусть (X, ρ), $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X,\ y, z \in X$. Если $x_n \to y$ и $x_n \to z$, то $y = z$.

Доказательство. Если $y \neq z$, то $\rho(y, z) = \Delta > 0 \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{2}$

Т.к. $x_n \to y, x_n \to z$, то $\exists N_1, N_2 :$

$\forall n > N_1 \quad \rho(x_n, y) < \varepsilon$

$\forall n > N_2 \quad \rho(x_n, z) < \varepsilon$

$\forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\} \quad \begin{cases} \rho(x_n, y) < \varepsilon \\ \rho(x_n, z) < \varepsilon \end{cases} \implies \Delta = \rho(y, z) \leqslant \rho(y, x_n) + \rho(x_n, z) <$
$2\varepsilon = \Delta \implies \Delta < \Delta$!!! ∎

Пример. $x_n = (-1)^{-1} \forall n \in \mathbb{N} \ \nexists \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n-1}$

Если бы $\exists x_* = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n-1}$, то для $\varepsilon = 1 \exists N$

$n = 2N \quad \left|(-1)^{n-1} - x_*\right| = |-1 - x_*| < 1$

$n = 2N + 1 \quad \left|(-1)^{n-1} - x_*\right| = |1 - x_*| < 1$

$2 = |1 - (-1)| \leqslant |1 - x_* + x_* - (-1)| \leqslant |1 - x_*| + |x_* - (-1)| < 2$

Определение 29. Ограниченной называется такая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что ограничено множество её значений $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Определение 30. В метрическом пространстве сходящейся последовательностью называется последовательность, у которой существует предел (в этом пространстве).

Теорема 6. Сходящаяся в метрическом пространстве последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – сходящаяся в метрическом пространстве (X,ρ) последовательность, т.е. $\exists x^* \in X \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in N \quad \rho(x_n, x^*) < \varepsilon$

$\sqsupset \varepsilon = 1, \sqsupset N = N(\varepsilon)$, т.е. $\forall n > N \quad \rho(x_n, x^*) < 1$

$R = max\{\rho(x_1,x^*), \rho(x_2,x^*), \dots, \rho(x_N,x^*), 1\} \implies \forall n \in \mathbb{N} x_n \in B_r[x^*] \implies \{x_n\}$ – ограничена ■

Теорема 7 (предельный переход в неравенствах)**.** Пусть $\{x_n\}, \{y_n\}$ – вещественные последовательности. $x_n \to x_*, y_n \to y_* \quad x_*, y_* \in \mathbb{R} \quad \forall n \quad x_n \leqslant y_n \implies x_* \leqslant y_*$

Отметим, что из $x_n < y_n$ НЕ следует, что $x_* < y_*$.

Пример: $x_n = 0, y_n = \frac{1}{n}, x_* = y_* = 0$, но при этом $x_n < y_n \forall n \in \mathbb{N}$

Доказательство. от противного. $\sqsupset x_* > y_* \quad \varepsilon = \frac{x_* - y_*}{2}$

Т.к. $x_n \to x_*$, то $\exists N_1 \, (= N(\varepsilon)) : \forall n \in \mathbb{N}, n > N_1 \quad |x_n - x_*| < \varepsilon$

$\exists N_2 \, (= N(\varepsilon)) \, \forall n > N_2 \quad |y_n - y_*| < \varepsilon$

Если $N = \max\{N_1, N_2\}$ и $n \in \mathbb{N}$ $n > N \implies \begin{cases} |x_n - x_*| < \varepsilon \\ |y_n - y_*| < \varepsilon \end{cases} \implies \begin{cases} x_n - x_* > -\varepsilon \\ y_n - y_* > -\varepsilon \end{cases} \implies \begin{cases} x_n > x_* - \varepsilon = x_* - \frac{x_* - y_*}{2} = \frac{x_* + y_*}{2} \\ y_n < y_* + \varepsilon = y_* - \frac{x_* - y_*}{2} = \frac{x_* + y_*}{2} \end{cases} \implies y_n < x_n$!!! ■

Частные случаи(следствия): Пусть $\{x_n\}$ – вещественная последовательность

1. $\sqsupset \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leqslant b, b \in \mathbb{R}$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant b$
2. $\dots \geqslant a \dots \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant a$
3. $\sqsupset n \in \mathbb{N} \quad x_n \in [a,b]$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in [a,b]$

Теорема 8 (о зажатой последовательности, “Принцип двух милиционеров”)**.** Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ – вещественные последовательности, и $\forall n \in \mathbb{N} x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ (и пределы существуют), то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ и $a = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Доказательство. $\lhd \forall \varepsilon > 0$

Т.к. $x_n \to a$, то $\exists N_1 \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1 \implies |x_n - a| < \varepsilon$.

Т.к. $z_n \to a$, то $\exists N_2 \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N},\ n > N_2, \quad |z_n - a| < \varepsilon$.

$N = \max\{N_1, N_2\}$, тогда $n \in \mathbb{N} \quad n > N$.

$$\begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon \\ |z_n - a| < \varepsilon \end{cases} \qquad \begin{cases} x_n > a - \varepsilon \\ y_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon \implies |y_n - a| < \varepsilon \implies y_n \to a$ ■

Определение 31. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — числовая последовательность.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется <u>бесконечно малой</u>, если $x_n \to 0, n \to +\infty$.

Замечание. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – б.м. $\iff \{|x_n|\}_{n=1}^{\infty}$ – б.м.

$\{x_n\}$ – б.м. $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} n > N \quad |x_n| < \varepsilon \implies |x_n|$ – б.м. $(||x_n| - 0| < \varepsilon)$.

Определение 32. Число N из определения предела последовательности x_n называется <u>ε -допуском</u> этой последовательности, Д(ε) – набор всех ε -допусков для данной последовательности

Пример. Найти (какой-нибудь) ε-допуск для последовательности $\sqrt{\frac{n+1}{n}} = x_n$ для $\varepsilon > 0$

Доказательство. Найти $N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\ n > N \quad \left|\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1\right| < \varepsilon$

$\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 < \varepsilon \iff \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \quad n > \frac{1}{\varepsilon^2} \quad N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$ ■

Определение 33. (X, K) X – множество, K – поле ($K = \mathbb{R} \vee K = \mathbb{C}$)

"$+$" определено в X, $\cdot$ на элемент K

$\forall x, y \in X \quad x + y \in X \qquad \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot k \in X$

(X, K) называется векторным (линейным) пространством, если

1. $\forall x, y \in X \quad x + y = y + x$
2. $\forall x, y, z \in X \quad (x + y) + z = z + (y + z)$
3. $\exists 0 \in X \quad x + 0 = x$
4. $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in X \quad \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$
5. $\forall \alpha, \beta \in K \quad \forall x \in X \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
6. $\forall \alpha \in K \forall x, y \in X \quad \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
7. $\forall x \in X \quad 1 \cdot x = x$

Пример.

1. $X = \mathbb{R} = K \quad X = \mathbb{C} = K \quad X = \mathbb{C}, K = \mathbb{R}$
2. $X = \mathbb{R}^n, K + \mathbb{R}$ – основной пример векторного пространства.
3. $X = \{f :< a, b >\to \mathbb{R}\}, K = \mathbb{R} \qquad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x) \forall \alpha \in K, \forall f \in X \qquad (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$

   $\mathbb{0}(x) :\equiv 0$

Определение 34. Пусть (X, K) – векторное пространство.

$p : X \to [0, +\infty)$ называется <u>нормой</u> на X, если

1. $p(x) = 0 \iff x = \mathbb{0}$ (невырожденность)
2. $\forall \alpha \in K \forall x \in X \quad p(\alpha x) = |\alpha| \, p(x)$ (положительная однородность)
3. $\forall x, y \in X \quad p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ (неравенство треугольника)

Функция $p : X \to [0, +\infty)$ и обладает свойствами $2, 3$ называется полунормой.

Элементарные свойства полунормы:

1. $\forall x, y \in X \forall \alpha, \beta \in K \quad p(\alpha x + \beta y) \leqslant |\alpha| p(x) + |\beta| p(y)$
2. $\forall x \in X \quad p(-x) = p(x)$
3. $p(x - y) \geqslant |p(x) - p(y)|$

   $p(x) = p(x - y + y) \leqslant p(x - y) + p(y)$

   $p(x) - p(y) \leqslant p(x - y) \; p(y) - p(x) \leqslant p(y - x) = p(x - y)$

Замечание. Норма порождает метрику. (X, p), X – векторное пространство.

$\rho(x, y) = p(x - y) \leqslant p(x - z) + p(z - y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Замечание. "Обычное" обозначение нормы $\|x\|$ вместо $p(x)$

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$ – евклидова норма, $x \in \mathbb{R}^n$

$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$

$\|x\|_\infty = \max\limits_{k=1:n} |x_k|$

$\|x\|_p = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}, p \in [1, +\infty)$ – норма (проверка позже).

Пример. $F(x)$ – строго монотонно возрастает, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\rho_F(x, y) = |F(x) - F(y)| \, \forall x, y \in \mathbb{R}$

$|F(x) - F(z)| = |F(x) - F(y) + F(y) + F(z)| \leqslant |F(x) - F(y)| + |F(y) - F(z)| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$

"$\|x\|$" $= \rho(x,)$ – не обязательно положительно однородна, т.е не всякая метрика порождена нормой.

Забегая вперёд: $C[a, b] = \{f-$ непрерывная на $[a, b], f : [a, b] \to \mathbb{R}\} \quad \|f\| = \max\limits_{x \in [a,b]} \{|f(x)|\}$. Упражнение: доказать, что это норма.

Определение 35. Пусть (X, K) – векторное пространство.

$< x, y >: X \times Y \to K, \quad < \cdot, \cdot >$ называется скалярным произведением на X, если

1. $< x, x > \geqslant 0$ и $\forall x \in X \quad < x, x >= 0 \iff x = \mathbb{0}$
2. $\forall x, y, z \in X \forall \alpha, \beta \in K \quad < \alpha x + \beta y, z >= \alpha < x, z > + \beta < y, z >$
3. $\forall x, y \in X \quad < x, y >= \overline{< y, x >}$

Элементарные следствия:

1. $< z, \alpha x + \beta y >= \overline{\alpha} < z, x > + \overline{\beta} < z, y >$

   $< z, \alpha x + \beta y >= \overline{< \alpha x + \beta y, z} = \overline{\alpha < x, z > + \beta < y, z >} = \overline{\alpha} \overline{< x, z >} + \overline{\beta} \overline{< y, z >} = \overline{\alpha} < z, x > + \overline{\beta} < z, y >$

2.

Утверждение 8. Если (X, K) – векторное пространство, $< \cdot, \cdot >$ – скалярное произведение, то $\forall x, y \in X \quad |< x, y >|^2 \leqslant < x, x >< y, y >$.

Доказательство. 1. $y = \mathbb{0}, y = 0 \cdot \mathbb{0} \quad < x, y > = < x, 0 \cdot \mathbb{0} > = 0$

2. $y \neq \mathbb{0} \implies < y, y > \neq 0 \quad z = \frac{<x,y>}{<y,y>} \in K$

   $0 \leqslant < x - \alpha y, x - \alpha y > = < x, x > - \overline{\alpha} < x, y > - \alpha < x, y > + \alpha \cdot \overline{\alpha} < y, y >$

   $0 \leqslant < x, x > - Re \frac{<x,y>}{<y,y>} \cdot < x, y > + \frac{<x,y>^2}{<y,y>}$

3. $2Re < x, y > \cdot < x, y > - < x, y >^2 \leqslant < x, x >< y, y >$

■

Утверждение 9 (неравенство Коши-Буняковского-Шварца).
$x = (x_1, \ldots, x_n) \quad y = (y_1, \ldots, y_n)$

$\langle x, y \rangle_2 = \sum x_k y_k$

$\langle x, x \rangle = \|x\|_2^2$

$\langle y, y \rangle = \|y\|_2^2$

$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)$

$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$

Теорема 9 (О связи пределов и арифметических действий в нормированных пространствах)**.** Пусть (X, K) — нормированное векторное пространство (векторное пространство, снабжённое нормой).

$\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty$ последовательности в X, $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ в K.

$x_n \to x, y_n \to y, x, y \in X \quad \alpha_n \to \alpha \in K$ Тогда

1. $x_n \pm y_n \to x \pm y$
2. $\alpha_n \cdot x_n \to \alpha x$
3. $\|x_n\| \to \|x\|$
4. Если $X = \mathbb{R} \vee X = \mathbb{C}, K = X, y \neq 0, \forall n y_n \neq 0$, то $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$

Доказательство. 1. $x_n + y_n \to x + y$?

   $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \varepsilon$-допуск для $x_n + y_n$

   $\sqsupset N_1 \in$Д$(\frac{\varepsilon}{2}, \{x_n\})$

   $\sqsupset N_2 \in$Д$\left(\frac{\varepsilon}{2}, \{y_n\}\right)$

   $N = \max\{N_1, N_2\}$, если $n \in \mathbb{N}, n > N$

   $\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leqslant \|x_n - x\| + \|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, т.о. $N \in$Д$(\varepsilon, \{x_n + y_n\})$

Для разности аналогично.

Лемма 1. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – числовые последовательности, $\{a_n\}$ – ограничена, $\{b_n\}$ – б.м. $\implies$ $\{a_n b_n\}$ – б.м.

Доказательство леммы. $\{a_n\}$ – ограничено $\implies$ $\exists R > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leqslant R$

b_n – б.м. $\implies$ для $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \text{Д}\left(\frac{\varepsilon}{2}, \{b_n\}\right)$, т.е. $|b_n| < \frac{\varepsilon}{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n > N$. Тогда $|a_n b_n| = |a_n||b_n| < R \cdot \frac{\varepsilon}{R} = \varepsilon \implies N \in \text{Д}\,(\varepsilon, \{a_n b_n\}) \implies a_n b_n \to 0, n \to +\infty$ ■

Доказательство теоремы:

2. $\alpha_n x_n - \alpha x = \alpha_n x_n - \alpha x_n + \alpha x_n - \alpha x = (\alpha_n - \alpha)x_n + \alpha(x_n - x)$

   $\|(\alpha_n - \alpha) \cdot x_n\| = |\alpha_n - \alpha|\|x_n\| \qquad \|\alpha(x_n - x)\| = |\alpha|\|x_n - x\|$

   В каждой один из множителей ограничен, а другой бесконечно малый

   $\implies \|\alpha_n x_n - \alpha x\|$ – б.м. $\implies \alpha_n x_n - \alpha x \to 0 \implies \alpha_n x_n \to \alpha x$

3. $|\|x_n\| - \|x\|| \leqslant \|x_n - x\|$ – б.м.

4. $\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} = x_n \cdot \frac{1}{y_n} \to x \cdot \frac{1}{y} \impliedby$ (2), если $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{y} \iff \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}$ – б.м. $\frac{y - y_n}{y y_n} = (y - y_n)\frac{1}{y}\frac{1}{y_n}$

   $\varepsilon = \frac{1}{2}|y| > 0 \quad \sqsupset N \in \text{Д}\,(\varepsilon, \{y_n\}) \quad n > N \implies |y_n - y| < \varepsilon$

   $m = \min\{|y_1|, |y_2|, \ldots, |y_n|, \varepsilon\}$ и $m > 0$

   $\forall n \in N n \leqslant N \vee n > N \quad |y_n| \geqslant m \vee |y_n| \geqslant |y| - |y_n - y| = 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon \geqslant m \implies \left|\frac{1}{y_n}\right| \leqslant \frac{1}{m} \implies \{\frac{1}{y_n}\}$ – ограничено.

■

Определение 36. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — вещественная последовательность.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > N \quad x_n > M$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > N \quad x_n < M$

$\sqsupset \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > N \quad |x_n| > M$

Замечание. 1. $x_n \to \infty \iff |x_n| \to +\infty$

2. $x_n \to +\infty \vee x_n \to -\infty \implies x_n \to \infty$ (обратное неверно: $x_n = (-1)^n \cdot n$

Определение 37. Последовательности $x_n : \quad x_n \to \infty$ называются бесконечно большими.

Замечание. $\{x_n\}$ – б.б. $\implies$ неограничена (обратное неверно: $x_n = (1 + (-1)^n) \cdot n$ – неограничена и не б.б.).

Лемма 2 (О связи бесконечно больших и бесконечно малых)**.** Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – числовая последовательность и $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \neq 0$. Тогда x_n – б.б. $\iff \frac{1}{x_n}$ – б.м.

x_n – б.м. $\iff \frac{1}{x_n}$ – б.б.

Доказательство. x_n – б.б. $\iff \forall M > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} n > N \quad |x_n| > M \iff \frac{1}{x_n} < \frac{1}{M} \quad M = \frac{1}{\varepsilon}$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \ldots\ldots \left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$ ■

$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}, n \in \mathbb{N} \quad \{x_k\}_{n=k}^{\infty}$ – хвост последовательности x_k

Если $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, то последняя лемма применима к некоторому хвосту этой последовательности.

Замечание. $\overset{\wedge}{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Теорема 10 (Арифметические действия над бесконечно большими)**.**
Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательности.

Замечание. $x_n \to \pm\infty$ имеет смысл тогда и только тогда, когда $x_n \in \mathbb{R}$.

I) Если $x_n \to +\infty, \{y_n\}$ ограничено снизу, то $x_n + y_n \to +\infty$

II) Если $x_n \to -\infty, \{y_n\}$ ограничена сверху, то $x_n + y_n \to -\infty$

III) Если $x_n \to \infty$, $y_n \to a \in \mathbb{C}$ ограничено снизу, то $x_n + y_n \to \infty$

IV) Если $x_n \to +\infty(-\infty)$ и $\exists \delta > 0 : y_n > \delta \ \forall n \in \mathbb{N}$, то $x_n \cdot y_n \to +\infty(-\infty)$

V) Если $x_n \to +\infty(-\infty)$ и $\exists \delta > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad y_n < -\delta$, то $x_n \cdot y_n \to -\infty(+\infty)$

VI) Если $x_n \to \infty$ и $\exists \delta > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad |y_n| > \delta$, то $x_n \cdot y_n \to \infty$

VII) Если $x_n \to a \in \mathbb{C}, \quad y_n \to \infty \ \& \ \forall n \in \mathbb{N} \quad y_n \neq 0$, то $\frac{x_n}{y_n} \to 0$

VIII) Если $x_n \to a \in \overset{\wedge}{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, \quad y_n \to 0$, то $\frac{x_n}{y_n} \to \infty$.

IX) Если $x_n \to \infty$ и $\forall n \in \mathbb{N} \quad y_n \neq 0 \quad y_n \to a \in C$, то $\frac{x_n}{y_n} \to \infty$

Доказательство. (III) $z_n \to \infty \iff \forall M > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, n \in \mathbb{N} \quad |z_n| > M$

$\lhd \forall M > 0$ По условию $y_n \to a \in \mathbb{C} \implies \exists C : \forall n \in \mathbb{N} \quad |y_n| \leqslant C$

Т.к. $\{x_n\} \to \infty, \ \exists N' \in \mathbb{N} : \quad x_n > M + C \forall n > N', n \in \mathbb{N}$.

$a_n = |x_n + y_n| \geqslant |x_n| - |y_n| > M + C - C = M$

$N = N'$

(V) $\forall M > 0 \exists N \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, n > N \quad x_n y_n < -M$

Т.к. $x_n \to +\infty$, то для $\frac{M}{\delta}$ $\exists N' \in \mathbb{N} : \forall n > N' \quad n \in \mathbb{N} \quad x_n > \frac{M}{\delta} \implies x_n y_n < \frac{M}{\delta} \cdot (-\delta) = -M, \quad N = N'$

(IX) $y_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$

1. $a \neq 0 \implies \frac{1}{y_n} \to \frac{1}{a}, \exists \delta > 0 : \left|\frac{1}{y_n}\right| > \delta$ (см теорему об арифметических действиях над сх. последовательностями) $\implies \frac{x_n}{y_n} \to \infty\infty$ (по пункту VI)

■

$\overset{\wedge}{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Окрестность точки ∞ в $\overset{\wedge}{\mathbb{R}}$ – множество вида $\{\infty\} \cup \{x \in \mathbb{R} : |x| > R\}$.

Замечание. $x_n \to a \quad a \in \overset{\wedge}{\mathbb{C}}, a \in \overline{\mathbb{R}}, a \in \overset{\wedge}{\mathbb{R}} \iff \forall$ окрестности U_a в пространстве X $\exists$ окрестность $V_{+\infty} : \forall n \in \mathbb{N} \cap V_{+\infty} \implies x_n \in U_a$ (ещё одна формулировка на языке окрестностей).

Замечание (замечание к теореме)**.** $x_n \to \pm\infty(\infty), y_n \to \pm\infty(\infty) \quad -\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty\cdot 0, +\infty + (-\infty), \infty + (\infty)$ – неопределённость, т.е. нет универсального утверждения про предел.

Пример. $\frac{\infty}{\infty}$

1. $x_n = n = y_n \to \infty \quad \frac{x_n}{y_n} \to 1$
2. $x_n = n^2, y_n = n \to \infty \quad \frac{x_n}{y_n} \to \infty$
3. $x_n = n, y_n = n^2 \to \infty \quad \frac{x_n}{y_n} \to 0$
4. $x_{2n} = 2n, x_{2n+1} = n^2 \quad y_{2n} = x_{2n+1}, y_{2n+1} = x_{2n}$

   $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ – упражнение.

Продолжение доказательства неравенства Коши-Буняковского-Шварца. $|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle \,\forall$ скалярного произведение

Пример (Примеры скалярных произведений)**.** $C([a, b]) = \{f : f$ непрерывна на $[a, b]\} \qquad f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$< f, g >= \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$

$\ell^2 = \{(x_1, x_2, \dots) : x_k \in \mathbb{C} \quad \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2} < +\infty\} \qquad \langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$

$y = 0 \implies \langle x, y\rangle = \langle x, \mathbb{0}\rangle = \langle x, 0 \cdot \mathbb{0}\rangle = o \cdot \langle x, \mathbb{0}\rangle = 0 \qquad \langle y, y\rangle = 0 \implies$ КБШ верно

$y \neq 0 \implies \langle y, y\rangle > 0 \quad \lambda = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$

$0 \leqslant \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle - \lambda \langle y, x\rangle - \langle x, \lambda y\rangle + \langle \lambda x, \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle - \lambda \langle y, x\rangle - \overline{\lambda} \langle x, y\rangle + \lambda \cdot \overline{\lambda} \langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} \implies \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle - |\langle x, y\rangle|^2 \geqslant 0$

Равенство в КБШ $\iff x - \lambda y = 0 \quad x = \lambda y \quad$ (x коллинеарен y)

$|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots y_n) \in \mathbb{R}^n)$

$|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$

$x \in \mathbb{C}^n, y \in \mathbb{C}^n \quad (|x_1|, \ldots, |x_n|), (|y_1|, \ldots, |y_n|)$

$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n |y_k|^2}$ ■

Утверждение 10. Пусть $(X, \mathcal{K})$ — векторное пространство над полем $\mathcal{K}(= \mathbb{R}, \mathbb{C})$, в котором определено скалярное произведение $\langle x, y \rangle$. Тогда $p(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ есть норма на X.

Доказательство. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad \lambda \in \mathcal{K}$

$\sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \cdot \overline{\lambda} \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \sqrt{\langle x, x \rangle}$

$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$

$p^2(x+y) \overset{?}{\leqslant} (p(x)+p(y))^2 = p^2(x) + p^2(y) + 2p(x)p(y) = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$

$p^2(x+y) = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$

$2Re \langle x, y \rangle \leqslant 2 |\langle x, y \rangle| \leqslant 2\sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}$ ■

Неравенство КБШ через норму: $|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \quad \|x\| = P(x)$ для любой нормы порождённой скалярным произведением.

Утверждение 11. Пусть $(X, \mathcal{K})$ — векторное пространство со скалярным произведениемм $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Если $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X \quad x, y \in X \quad x_n \to x, y_n \to y \quad n \to +\infty$, то $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle, n \to +\infty$.

Доказательство. $\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle \to 0$

$(\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle) + (\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle) = \langle x_n, y_n - y \rangle + \langle x_n - x, y_n \rangle \to 0$

Потому что $|\langle x_n, y_n - y \rangle| \leqslant \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| =$ огр. $\cdot (\to 0) \to 0$. И аналогично со вторым. ■

1.11 Топологические свойства множеств в метрических пространствах

Определение 38. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. $E \subseteq X, a \in E$

a называется внутренней для $E \quad (a \in \operatorname{Int} E)$ если $\exists R > 0 : B_E(a) \subset E$.

Определение 39. Множество в метрическом пространстве называется открытым, если $E = \operatorname{Int} E$.

Для "Остальных" множеств верно $\operatorname{Int} E \subset E$.

Пример.

1. $E = X,\ X = \operatorname{Int} E, \quad X$ - открыто
2. $\emptyset$ – открыто
3. $(0,1)$ – открытое множество $R = \min\{1-a, a\}$

Утверждение 12. В любом метрическом пространстве открытый шар является открытым множеством.

Доказательство. $\lhd$ открытый шар $B_R(a)$ в метрическом пространстве (X, ρ).

$\lhd \forall b \in B_R(a) \implies \rho(b,a) < r < R$

$\delta = R - r > 0 \quad \lhd B = B_\delta(b)$

$\sqsupset c \in B \implies \rho(c,a) \leqslant \rho(c,b) + \rho(b,a) < \delta + r = R - r + r = R$

Т.о. $b \in Int(B_R(a)) \implies B_R(a)$ – открытое. ∎

Замечание. Свойство внутренней точки (и внутренности) зависит от объемлющего пространства.

$E \subseteq X, \quad E \subseteq Y,\ Int_X E \neq \operatorname{Int}_Y E$ (может оказаться неравным).

Пример. $E = [0,1],\ X = \mathbb{R},\ Y = E \quad \operatorname{Int}_X [0,1] = (0,1), \operatorname{Int}_E E = [0,1]$

Теорема 11 (свойства открытых множеств в метрических пространствах)**.** Пусть (X, ρ) — произвольное метрическое пространство. Тогда

(I) $\emptyset, X$ – открыты

(II) $\forall \{O_i\}_{i \in I}$ – открытых $\implies \bigcup\limits_{i \in I} O_i$

(III) $\forall n \in \mathbb{N} \forall \{O_1, \dots O_n\}$ открытых $\implies O_1 \cap \ldots \cap O_N$ открыто

Замечание. $O_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \quad \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} O_n = \{0\}$ – не открыто

Доказательство. (II) $\sqsupset x \in \bigcap\limits_{i \in I} O_i \implies \exists i \in I : x \in O_i \qquad O_i$ – открыто

$$\implies x \in IntO_i \implies \exists \delta > 0 : \quad B_\delta(x) \subseteq O_i \implies B_\delta(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i \implies$$

$$x \in Int\left(\bigcup_{i \in I} O_i\right) \implies \cup O_i \text{ – открыто.}$$

(III) $\sqsupset x \in \bigcap\limits_{i\in I} O_i \implies \forall i = 1:n \quad x \in O_i \implies \forall i = 1:N \quad \exists \delta_i > 0:$ $B_{\delta i}(x) \subseteq O_i$

$\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\} > 0 \implies B_\delta(x) \subseteq O_i \implies B_\delta(x) = \bigcap\limits_{i=1}^{N} O_i \implies x \in$ $Int \bigcap\limits_{i=1}^{N} \implies \cap O_i$ – открыто.

■

Определение 40.
X – множество, $\Omega \subseteq 2^X$. Ω называется <u>топологической структурой</u> (или <u>топологией</u>) на X, если

1. $\emptyset, X \in \Omega$
2. $\forall \{O_i\}_{i\in I} \subseteq \Omega \implies \bigcup\limits_{i\in I} O_i \in \Omega$
3. $\forall N \in \mathbb{N} \forall O_1, \ldots, O_N \in \Omega \implies O_1 \cap \ldots \cap O_N \in \Omega$

При этом (X, Ω) называют <u>топологическим пространством</u>. Элементы Ω называют открытыми множествами в X (в (X, Ω)).

Т.о. любое метрическое пространство является топологическим.

Пример. 1. X — любое множество $\quad \Omega = \{\emptyset, X\}$ — антидискретная (не метризуемо, если состоит больше, чем из одной точки).

2. X — любое множество, $\quad \Omega = 2^X$ — дискретная топология.

3. $X = \mathbb{R}, \Omega = \{\mathbb{R} \setminus A : A$ – конечное множество$\}$ или $\Omega_2 = \{\mathbb{R} \setminus A :$ A – не более, чем счётное множество$\}$ или $\Omega_2 = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$.

Определение 41. Пусть (X, Ω) – топологическое пространство, $E \subseteq X, a \in X$.

a называется <u>предельной</u> для R (или <u>точкой сгущения</u>, $a \in E'$) $\iff \forall$ открытого $O: \quad a \in O \quad O \setminus \{a\} \cap E \neq \emptyset$.

“Открытая окретсность” точки a в топологическом пространстве X – это любое открытое, содержащее точку a.

$\dot{U}(a) = U \setminus \{a\}$ — проколотая окрестность точки a.

Утверждение 13. Пусть $E \subseteq X, (X, \rho)$ — метрическое пространство.

$a \in E' \iff \exists \{x_n\} \subseteq E \setminus \{a\} : x_n \to a, n \to +\infty$

Доказательство. $\Longleftarrow$: из определения.

$\Longrightarrow$: $\lhd B_{\frac{1}{n}}(a) \setminus \{a\} \cap E \neq \emptyset \implies \exists x_n \in (B_{\frac{1}{n}} \setminus \{a\}) \cap E \qquad \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \to 0, n \to +\infty \implies x_n \to a$

■

Определение 42. Множество E в топологическом пространстве (X, Ω) называется замкнутым, если $E' \subseteq E$.

Пример. 1. $E = (0, 1] \quad E' = [0, 1]$

2. $E = \{\frac{1}{k}\}_{k \in \mathbb{N}}, E' = \{0\}$

3. $E = \mathbb{R}, E' = \mathbb{R}$

Теорема 12. В любом топологическом пространстве множество открыто тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто.

Доказательство. Пусть (X, Ω) – топологическое пространство и $O \subseteq X$.

O – открыто. $F = X \setminus O \quad F$ – замкнуто?.

$\lhd a \in F', a \in F$?.

Пусть нет, тогда $a \in O \implies (O \setminus \{a\}) \cap F = \emptyset$!!! $\implies a \in F \implies F$ – замкнуто.

Пусть F — замкнуто $\implies$? $\quad O = X \setminus F$ — открыто. Если $O = \emptyset$,то O — открыто.

Если $O \neq \emptyset, \lhd a \in O \implies a \notin F \implies a \notin F' \implies \exists$ окрестность U точки $a: \quad (U \setminus \{a\}) \cap F = \emptyset \implies U \cap F = \emptyset$ (т.к. $a \notin F$) $\implies U \subset O = X \setminus F \implies X \in U \subseteq O \implies x \in IntO \implies (a - \forall)O$ — открытое. ■

Следствие 5. 1. Пусть (X, Ω) – топологическое пространство. Тогда

I) $\emptyset, X$ – замкнутые

II) $\forall$ семейства $\{F_i\}_{i \in I}$ замкнутых $\implies \bigcap\limits_{i \in I} f_i$ – замкнуто

III) $\forall N \in \mathbb{N}, \forall \{F_1, \ldots, F_N\}$ замкнутых $F_1 \cup \ldots \cup F_N$ – замкнуто.

Определение 43. Пусть (X, Ω) – топологическое пространство и $E \subseteq X, a \in E$.

a называется <u>изолированной точкой</u> E, если $\exists$ окрестность U точки $a: \quad U \cap E = \{a\}$.

Определение 44. Пусть (X, Ω) — топологическое пространство и $E \subseteq X, a \in X$.

a называется <u>точкой прикосновения</u> $E\,(a \in Cl\ E)$, если $\forall$ окрестности U точки a $U \cap E \neq \emptyset$.

$\operatorname{Cl} E$ – замыкание множества $E \qquad E \subseteq \operatorname{Cl} E$.

Теорема 13 (О замыкании)**.** Пусть $E \subseteq X, (x, \rho)$ – топологическое пространство. Тогда

(I) $\operatorname{Cl} E = E \cup E' = E' \cup (E \setminus E')$ – последнее является множеством изолированных точек.

(II) $\operatorname{Cl} E = \cap\{F : F$ – замкнуто $, E \subseteq F\}$

(III) $\operatorname{Cl} E$ – минимальное (по включению) замкнутое, содержащее E

(Если F — замкнуто, и $E \subseteq F$, то $\operatorname{Cl} E \subseteq F$)

(IV) Если X — метрическое пространство, то $x \in ClE \iff \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n \to x$.

Доказательство. (I) $x \in \operatorname{Cl} E \iff \begin{cases} x \in E \\ x \notin E \quad \forall \text{ окрестности } U \text{ точки } x \quad U \cap E \neq \emptyset \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} x \in E \\ x \in E' \end{cases} \iff x \in E \cup E'$$

(II) $c \in \operatorname{Cl} E \quad \lhd F$ – замкнутое: $E \subseteq F \implies x \in F \implies x \in$ Пр.ч (правой части)

$\sqsupset$ $x \in$ Пр.ч. $= F$, если $x \notin \operatorname{Cl} E \implies \exists$ окрестность U точки x : $U \cap E = \emptyset$

$\lhd F_1 = F \setminus U$ – замкнуто, $F_1 \supseteq$, т.к. $E \subseteq F \quad E \cap U \neq \emptyset, \quad F = F_1 \cap \ldots \quad x \in F = F_1, x \notin F_1$!!!

III F – правая часть равенства в II. F – замкнуто как пересечение и для любого замкнутого $F_1 : E \subseteq F_1 \implies F \subseteq F_1$ (по определению пересечения)

IV $?x \in \operatorname{Cl} E \iff \begin{cases} x \text{ изолированная для } E \quad x_n \equiv x \\ x \text{ предельная для } E \qquad \text{тога по характеристике предельной точки} \end{cases}$

$\blacksquare$

Задача 3. 1. $\operatorname{Int} E \subseteq E \qquad \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(E)) = \operatorname{Int} E$

2. $(\operatorname{Int} E)^c = \operatorname{Cl}(E^c)$
3. $\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl}(E)) = \operatorname{Cl}(E)$
4. $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$

   $\operatorname{Cl}(A \cup B) = \operatorname{Cl}(A) \cup \operatorname{Cl}(B)$

   $\operatorname{Int}(A \cup B) \neq \operatorname{Int}(A) \cup \operatorname{Int}(B)$

   $\operatorname{Cl}(A \cap B) = \dots$

Замечание. $\operatorname{Int} O$ — наибольшее открытое множество, содержащееся в O.

Определение 45. Пусть (X, Ω) – топологическое пространство, $E \subseteq X \quad a \in X$.

a называется <u>граничной точкой</u> для E, если $\forall$ окрестности U точки $a \qquad \underline{U \cap E \neq \emptyset \text{ И } U \cap (E^c) \neq \emptyset}$.

$\operatorname{Fr} E = \{x : x \text{ – граничная для } E\} = \partial E$

Пример. 1. $X = \mathbb{R}, E = [0,1] \quad \operatorname{Int} E = (0,1). \operatorname{Cl} E = [0,1] \quad \operatorname{Fr} R = \{0,1\}$

2. $X = \mathbb{R}^2 \; E = \{(x,0) : x \in [0,1]\} \quad \operatorname{Int} E = \emptyset, \operatorname{Cl} E = E, \operatorname{Fr} E = R.$
3. $X = [0,1], E = [0,1] \quad \operatorname{Int} E = E, \operatorname{Cl} E = E, \operatorname{Fr} E = \emptyset$

Замечание. Если (X, ρ) – метрическое пространство.

$\Omega = \left\{ \exists \text{ семейство открытых шаров } \{B_I\}_{i \in I} : O = \bigcup_{i \in I} B_i \right\}$

$(\forall O = \bigcup_{x \in O} B_{r(x)}(x))$

Утверждение 14. $\sqsupset (X, \rho)$ – м.п., $Y \subseteq X$ Тогда Ω_Y совпадает с топологией, порождённой индуцированной метрикой.

Доказательство. $\Omega_{\rho,Y} = \{O : \exists$ открытые шары в $Y \{B_i\}_{i\in I} : O = \bigcup\limits_{i\in I} B_i = \bigcup(\overline{B_i} \cap Y)\}$

$\overline{B_i}$ – шар с тем же центром и радиусом, но в X ■

Замечание. $Y \subseteq X \quad O$ открыто в $Y \iff \exists \overline{O}$ открыто в $X: \quad O = \overline{O} \cap Y$

$\sqsupset F \subseteq Y \quad F$ – замкнуто (в Y) $\iff \exists$ замкнутое $\overline{F}$ в $X \quad F = \overline{F} \cap Y$

Доказательство. F – замкнуто в $Y \iff Y \setminus F \in \Omega_Y \iff Y \setminus F = \overline{O} \cap Y$,(где $\overline{O} \in \Omega \iff X \setminus \overline{O}$ – замкнуто)

$F = Y \setminus (Y \setminus F) = Y \setminus (\overline{O} \cap Y) = Y \setminus \overline{O} = Y \cap (X \setminus \overline{O})$ ■

Пример. Примеры:

1. $X = \mathbb{R}^2 \quad Y = B_1(0) \cup \{(2,0)\} \cup \{(x,y) : xy = 1, x > 0, y > 0\}$

   $B_1[0] = B_1(0)$

   $B_{\frac{1}{2}}[2] = \{(2,0)\} \cup \{(x, \frac{1}{x}) : (x-2)^2 + \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{4}\}$

2. Y – график $y(x) = \sin\frac{1}{x}, x \neq 0$

   $\operatorname{Cl} E = Y \cup \{(0,y) : y \in [-1,1]\}$

Замечание. Если X – метрическое пространство $E \subseteq X$

$a \in E' \iff \forall$ открытой окрестности U точки $a \quad \dot{U} \cap E$ бесконечно

1.12 Компактность, сходимость в себе, полнота пространств

Определение 46. $\sqsupset (X, \Omega)$ – т.пр. $\sqsupset E \subseteq X, \{A_i\}_{i\in I} \subseteq X$

Если $E \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, то говорят, что $\{A_i\}_{i\in I}$ образует покрытие множества E

Определение 47. $\sqsupset (X, \Omega)$ – т.п. $K \subseteq X$

K – называется <u>компактным</u> (в X), если $\forall$ покрытия $\{O_i\}_{i\in I}$ множества K открытыми можно извлечь конечное подпокрытие: $\exists N : \exists i_1, i_2, \ldots i_n : K \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \ldots \cup O_{i_n}$

Элементарные свойства компактных множеств:

Утверждение 15. Если K – компактно (в (X,Ω)) и $F \subseteq K$ и F – замкнуто, то F – компактно (в (X,Ω))

Доказательство. $\vartriangleleft$ открытое покрытие $\{O_i\}_{i\in I}$ множества F

$\vartriangleleft O = X \setminus F$ – открытое $\implies \{O_i\}_{i\in I} \cup \{O\}$ – покрытие K

K – компакт $\implies \exists i_1,\ldots,i_n : \quad K \subseteq O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_n} \cup O$

$F \subseteq O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_N} \implies$ (покрытие – $\forall$) F – компакт ■

Утверждение 16. $\sqsupset (X,\Omega)$ – топ. пр-во $\quad K \subseteq X$. Тогда следующие утверждения равносильны

$$K \text{ комп. в } X \tag{1.1}$$

$$K \text{комп. в себе} \left(\text{комп в } (K,\Omega_K)\right). \tag{1.2}$$

Доказательство.

1.1 → 1.2 $\sqsupset \{G_i\}_{i\in I}$ – открытое покрытие K в $K \implies \forall i \in I \exists$ открытое в $X \quad O_i : G_i = O_i \cap K \implies K \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} O_i \implies \exists i_1,\ldots,i_N : K \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} O_{i_j} \implies K \subseteq \left(\bigcup\limits_{j=1}^{N} O_{i_j}\right) \cap K = \bigcup\limits_{j=1}^{N} \left(O_{i_j} \cap K\right) = \bigcup\limits_{j=1}^{N} G_{i_j}$, т.о. $\left\{G_{i_j}\right\}$ – конечное подпокрытие K в K

1.2 → 1.1 $\vartriangleleft\forall$ открытое покрытие $\{O_i\}_{i\in I}$ K в X. $\sqsupset G_i = O_i \cap K$ – открытые в K

$$K \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i \implies K \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} O_i\right) \cap K = \bigcup_{i\in I} G_i$$

Т.к. K компактно в K, то $\exists i_1,\ldots,i_N : \quad K \subseteq G_{i_1} \cup \ldots \cup g_{i_N} \implies K \subseteq O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_N}$ $(G_{i_1} \subseteq O_{i_1} \ldots)$. Т.о. $\{O_{i_1},\ldots,O_{i_N}\}$ – конечное покрытие

■

Следствие 6. $K \subseteq Y \subseteq X \quad (X,\Omega)$ – т.п. Тогда K компактно в $Y \iff K$ компактно в X

Замечание. $(0,1) = \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n},1\right)$ – не извлекается конечное подпокрытие

Утверждение 17. $\sqsupset (X,\rho)$ – м.п., K – компактно в X. Тогда K замкнуто и ограничено (в X)

Доказательство. $\sqsupset a \in X \quad \{B_n(a)\}_{n\in\mathbb{N}} \implies K \subseteq X \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n(a)$

Если K компактно, то $\exists n_1, \dots, n_m : K \subseteq \bigcup\limits_{k=1} \&m B_{n_k}(a) = B_N(a), N = \max\{n_1, \dots, n_m\}$, т.е. K ограничено

K – замкнуто? $\iff X \setminus K$ – открыто

$\lhd \forall p \in X \setminus K$

$\forall q \in K \quad 0 < \frac{\rho(q,p)}{2} = r_q \implies B_{r_q}(q) \cap B_{r_q}(p) = \emptyset$

$\rho(x,y) > \rho(p,q) - \rho(p,y) - \rho(q,x) > 2r_q - r_q - r_q = 0$

$\left\{B_{r_q}(q)\right\}_{q\in K}$ – открытое покрытие $K \implies$ (K – компакт) $\exists q_1, \dots, q_N : K \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{N} B_{r_{q_j}}(q_j), r = \min\{r_{q_1}, \dots, r_{q_N}\}$

$B_r(p) \subseteq B_{r_{q_j}}(p) \qquad B_r(p) \cap B_{r_{q_j}}(q_j) \neq \emptyset \quad \forall j = 1 : N \implies B_r(p) \cap K \neq \emptyset \implies B_r(p) \subseteq X \setminus K$

Т.о. $X \setminus K$ – открыто ■

Аксиома о вложенных промежутках справедлива и для "обобщённых замкнутых промежутков" $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ – $\overline{\text{куб}}$

$Q^{(j)} = \prod_{k=1}^n [a_k^{(j)}, b_k^{(j)}] \quad \forall j \in \mathbb{N}$ и $\forall k = 1 : n \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \left[a_k^{(j+1)}, b_k^{(j+1)}\right] \subseteq \left[a_k^{(j)}, b_k^{(j)}\right]$

По аксиоме о вложенных промежутках $\forall k = 1 : n \quad \exists c_k \subseteq \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} [a_k^{(j)}, b_k^{(j)}] \implies$

$c = (c_1, \dots, c_n) \in \prod_{k=1}^n [a_k^{(j)}, b_k^{(j)}] \forall j \in \mathbb{N}$

Теорема 14 (Гейне-Бореля)**.** В $\mathbb{R}^n$ любой замкнутых куб компактен

$Q = [a_1, a_1 + \delta] \times [a_2, a_2 + \delta] \times \ldots \times [a_n, a_n + \delta] \quad \delta$ – длина ребра

Доказательство. От противного $\sqsupset \{O_i\}_{i\in I}$ – открытое покрытие куба Q, из которого нельзя извлечь конечного подпокрытия

$Q_1 = Q$; делением рёбер пополам представим Q виде объединения 2^N кубов со стороной $\frac{\delta}{2}$

Хотя бы один из них – "плохой" (т.е. не имеет конечного подпокрытия в $\{O_i\}$)ю Назовём $O_2, \ldots$

В результате $\{Q_j\}$ – последовательность кубов

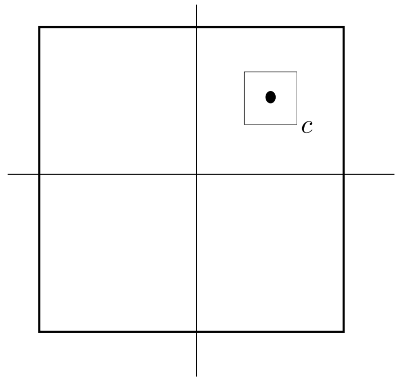


Рис. 1.3: cube

$x, y \in \overline{O} \quad \overline{O}$ – куб со стороной $\Delta \implies \|x-y\| \leqslant \Delta \cdot \sqrt{n}$
$\left(\|x-y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\Delta^2} = \sqrt{n}\Delta\right)$

По предыдущему утверждению $\exists c \in \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} Q_j \quad c \in \bigcup\limits_{i \in I} O_i \implies \exists i_c : c \in O_{i_c}$

$\{O_i\}$ – открыто $\implies \exists r > 0 : B_r(c) \subset O_{i_c}/$

Т.к. $\frac{\delta}{2^{j-1}} \to 0$, то $\exists J : \forall j \geqslant J \quad \frac{\delta\sqrt{n}}{2^{j-1}} < r$

Тогда $y \in Q_j$, где $j \geqslant J$

$\implies |y-c| \leqslant \frac{\delta}{2^{j-1}} \cdot \sqrt{n} < r \quad \forall j \geqslant J \implies Q_j \subseteq B_r(c) \subseteq O_{i_c} \quad \forall j \geqslant J$. Q_j – "плохой" !!!

$\blacksquare$

Теорема 15 (критерий компактности в $\mathbb{R}^n$). $\sqsupset K \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда следующие утверждения равносильны:

I: K – замкнуто и ограничено

II: K – компактно

III: K – секвенциально компактно
(из любой последовательности в K можно извлечь сходящуюся в K подпоследовательность)

Определение 48. $\sqsupset \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность в топологическом пространстве (X, Ω).

Если $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то $\left\{x_{k_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ называется <u>подпоследовательностью</u> исходной последовательности

Лемма 3. Если $\{k_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ и строга возрастает, то $\forall j \in \mathbb{N} \quad k_j \geqslant j$

Теорема 16 (критерий компактности в $\mathbb{R}^n$). $\sqsupset K \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда следующие утверждения равносильны:

I : K – замкнуто и ограничено

II : K – компактно

III : K – секвенциально компактно
(из любой последовательности в K можно извлечь сходящуюся в K подпоследовательность)

Определение 49. $\sqsupset \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность в топологическом пространстве (X, Ω).

Если $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то $\left\{x_{k_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ называется <u>подпоследовательностью</u> исходной последовательности

Лемма 4. Если $\{k_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ и строга возрастает, то $\forall j \in \mathbb{N} \quad k_j \geqslant j$

Определение 50. $\sqsupset \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ – последовательность.

$\{y_k\}$ называется возрастающей, если $\forall k \in \mathbb{N} \quad y_{k+1} \geqslant y_k$ $(\forall k, m, m \geqslant k$, то $y_m \geqslant y_k)$

$\{y_k\}$ – строго возрастает $\iff \forall k, m \in \mathbb{N} m > k \implies y_m > y_k$

Определение 51. $\sqsupset \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность в т.п. $(X, \Omega), x \in X$ $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k \iff \forall$ открытой окрестности U точки $x \quad \exists N \in \mathbb{R} \forall k \in \mathbb{N}, k \geqslant N \quad x_n \in U$

$\iff \forall$ открытой окрестности U точки $x \quad \exists$ окрестность $V(+\infty) : \forall k \in V(+\infty) \cap \mathbb{N} \quad x_k \in V$

Пример. $x_k = (-1)^k, k \in \mathbb{N}$

$x_{2k} \equiv 1 \to 1$

$x_{2k+1} \equiv = -1 \to -1$

Утверждение 18. Если $\{x_n\}$ сходится (в (X, Ω)), то любая её подпоследовательность сходится, причём к тому же пределу.

Доказательство. $\lhd \forall$ подпоследовательность $\left\{x_{k_j}\right\}_{j=1}^{\infty} \quad \sqsupset x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k \quad \sqsupset$ U, N, x – из определения предела.

Тогда $\forall j \geqslant N \implies$ по лемме $k_j \geqslant j \geqslant N \implies x_{k_j} \in U \implies x_{k_J} \to x, j \to +\infty$ ■

Утверждение 19. $\sqsupset \{x_k\}$ – последовательность в т.п. (X, Ω)

$\left\{x_{k_j}\right\}_{j=1}^{\infty} \quad \{x_{l_i}\}_{i=1}^{\infty}$ – подпоследовательности

$\{x_k\}_{\mathbb{N}} = \left\{x_{k_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}} \cup \{x_{l_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$

$\sqsupset \exists \lim\limits_{j\to\infty} x_{k_j} = \lim\limits_{i\to\infty} x_{l_i} = x$ Тогда $\exists \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$

Доказательство. Т.к. $x_{k_j} \to x$, то $\forall$ окрестности $U \exists J = J(U) : \forall j > J \quad x_{k_j} \in U$

Т.к. $x_{l_i} \to x$, то $\forall$ окрестности $U \quad \exists I = I(U) : \forall i > I \quad x_{l_i} \in U$ $N = \max\{k_J, l_I\}, \forall n > N \quad x_n = \begin{cases} x_{k_j} \implies j > J \\ x_{l_i} \implies i > I \end{cases} \implies x_n \in U$ ■

Пример. $\mathbb{Q} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ (при некоторой нумерации)

Задача 4. $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \exists$ подпоследовательность $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} : x_{k_j} \to x, j \to \infty$

Доказательство критерия компактности в пространстве $\mathbb{R}^n$.

II $\implies$ I Утверждение 17

I $\implies$ II K – замкнуто и ограничено $\implies K \subseteq B \subseteq Q \quad B$ – шар, Q – куб $\implies$ по 15 K – компакт

III $\implies$ I K – ограничено? от противного. Если K не ограничено $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_k \in K : \quad \|x_k\| > k \quad \|x_k\| \to +\infty \quad x_k \to \infty \implies \forall$ подпоследовательность $\{x_{k_i}\} \to \infty \quad i \to \infty$

K – замкнуто, $\forall p \in K' \implies p \in K$ От противного $\exists\, p \in K', p \notin K \implies \exists$ последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset K : x_k \to p, k \to +\infty \implies \forall$ подпоследовательность $\{x_{k_j}\} \to \notin K, j \to \infty!!!(III)$. Т.о. K – замкнуто

III $\Longleftarrow$ II $\lhd \forall \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \times K$

Если $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ – конечно, то $\exists \{k_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ – возрастающая $\quad x_{k_j} = const \implies x_{k_j} \to x_{k_1}$

Если $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, тогда существует предельная точка в $\mathbb{R}^n$ для F $\implies F$. Если нет, то F – замкнуто в $\mathbb{R}^n \implies F$ – компакт $(F \subseteq K)$

$\forall x \in F \quad x$ – изолированная точка $\exists \delta_x > 0 : B_{\delta_x}(x) \cap F = \{x\}$

$\cup B_{\delta_x}(x) \supseteq F$, но нельзя извлечь конечное подпокрытие.

Т.о. $\exists p \in F' \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \overset{\circ}{B}_{\varepsilon}(p) \cap F \neq \emptyset$

$\varepsilon = 1 \quad \exists\, x_{k_1} \in B_1(p) \cap F \implies k_2 \in \overset{\circ}{B}_{y_2}(p) \cap F \setminus \{x_1, \ldots, x_{k_1}\} \neq \emptyset \quad k_2 > k_1$

...

$\exists x_{k_{j+1}} \in \overset{\circ}{B}_{2j}(o) \cap F \setminus \{x_1, \ldots, x_{k_j}\} \neq \emptyset$

$\{x_{k_j}\} \subseteq F, k_i \uparrow \quad \|x_{k_j} - p\| \leqslant \frac{1}{2j} \to 0, j \to \infty$

■

Следствие 7 (принцип выбора Больцано-Вейерштрасса)**.** Из любой ограниченной последовательности в $\mathbb{R}^n$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. (последовательность содержится в некотором компакте)

Определение 52. $\sqsupset (X,\rho)$ – м.п. $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$. $\{x_k\}_k$ называется сходящейся в себе (она же последовательность Коши, она же фундаментальная последовательность), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R} : \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geqslant N \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

Утверждение 20. Если $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq (X,\rho)$, то она сходится в себе

Доказательство. $\sqsupset \{x_k\}$ сходится $\implies \exists x \in X : \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant \mathbb{N} \quad \rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\forall n, m \geqslant \mathbb{N}, n, m \in \mathbb{N} \quad \rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon \implies \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в себе ■

Лемма 5. $\sqsupset \{x_n\}$ сходится в себе и $\subseteq (X,\rho)$

Тогда:

1. $\{x_n\}$ ограничена
2. Если существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, то сама последовательность $\{x_n\}$ сходится

Доказательство. $\{x_n\}$ сходится в себе $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R} \quad \forall n, m \geqslant N, n, m \in \mathbb{N} \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

$\lhd \varepsilon = 1 \quad \sqsupset N = N(\varepsilon)$ из определения сходимости в себе.

$C = \max\{\rho(x_2, x_1), \rho(x_3, x_1), \ldots, \rho(x_{N-1}, x_1), \rho(x_N, x_1) + 1\}$

$B_C[x_1]$

$$\lhd x_n \implies \left[\begin{array}{l} n < N \implies \rho(x_n, x_1) \leqslant X \\ n > N \implies \rho(x_n, x_1) \leqslant \rho(x_n, x_N) + \rho(xN, x_1) \leqslant= C \end{array}\right.$$

Теперь о втором пункте.

$\sqsupset x_{n_k} \to x \in X, k \to \infty \quad x_n \to x?$

$\lhd \varepsilon > 0 \quad \exists K : \rho(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} \forall k : k \geqslant K, k \in \mathbb{N}$

x_n сх. в себе, то $\exists N_1 \in \mathbb{R} : \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad n, m \geqslant N \quad \rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$

$N = \max N_1, K$

Если $n \geqslant N$, то $\rho(x_n, x) \leqslant \rho(x_n, x_{n_N}) + \rho(x_{n_N}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ■

Теорема 17. 1. В произвольном метрическом пространстве любая сходящаяся последовательность фундаментальна

2. В пространствах $\mathbb{R}^n$ сходимость последовательности равносильна её фундаментальности.

Второе утверждение – критерий Коши-Больцано

Доказательство. 1. уже доказано

2. Половина доказана.

   $\sqsupset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Надо проверить, что она сходится.

   Фундаментальность по лемме $\Longrightarrow$ ограниченность. По принципу выбора $\Longrightarrow$ $\exists$ сходящаяся подпоследовательность. По лемме $\Longrightarrow$ сходимость.

■

Пример. $X = R \quad F(x) = \frac{x}{1+|x|}$

$x > 0$ и $F(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \uparrow$ на $(0, +\infty)$

$\rho_F(x, y) = |F(x) - F(y)|$

$\rho_F(n, m) = \left|\frac{n}{1+n} - \frac{m}{1+m}\right| = \frac{|n-m|}{(1+n)(1+m)} < \varepsilon \Longleftarrow N : \frac{1}{N} < \varepsilon \quad m, n > N$

$\{n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундментальна или сходится в себе, но не имеет предела

$F(\pm\infty) = \pm 1$ (заменили функцию её пределом)

Получаем пролжением метрики на всю $\overline{\mathbb{R}}$ Тогда $\{n\} \to +\infty$

Определение 53. Метрическое пространство (X, ρ) называется полным, если любая фундаментальная последовательность в нём сходится.

1.13 Супремум и инфимум. Монотонная последовательность

Определение 54. Последовательного вложенных промежутков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty} \quad a_n, b_n \in \mathbb{R} \quad a_n \leqslant an + 1 \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \forall n \in \mathbb{N}$ называется стягивающейся, если $b_n - a_n \to 0, n \to \infty$

Теорема 18. Пусть $\{[a_n, b_n]\}$ – стягивающаяся последовательность промежутков. Тогда:

1. $\exists! C \in \mathbb{R} \quad \{C\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$
2. $a_n \to C \quad b_n \to C$

Доказательство. По аксиоме 16 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$

$\sqsupset c, d \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \implies \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant c \leqslant b_n \quad a_n \leqslant d \leqslant b_n \quad -b_n \leqslant -d \leqslant -a_n$

$a_n - b_n \to 0 \leqslant c - d \leqslant b_n - a_n \to 0 \implies c - d \to 0 \implies c = d$

$$\begin{aligned} b_n - (b_n - a_n) = a_n &\leqslant c \\ &\leqslant c - (b_n - a_n) \to c. \end{aligned}$$

$\implies a_n \to C$

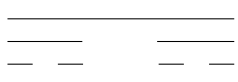
$b_n = a_n + (b_n - a_n) \to c + 0 = c$ ∎

Упражнение:

$C_0 = [0, 1]$

$C_1 = [0, 1] \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$

$C_2 = C_1 \setminus (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \setminus (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}), \ \ldots$



$C = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} C_k$

Проверить, что C несчётно (и $C \sim [0, 1]$)

C – Канторово множества, множество Кантора

Определение 55. $\sqsupset E \subseteq \mathbb{R} \quad M \in \overline{\mathbb{R}}$

M называется <u>мажорантой</u> для E, если $\forall x \in E \quad x \leqslant M$

(<u>миноранта</u>)

Определение 56. $E \subseteq \mathbb{R}$

$$\sup E = \begin{cases} +\infty & \text{, если } E \text{ не ограничено сверху} \\ \min\{C : C - \text{мажоранта для } E\} & \text{, если } E \text{ ограничено сверху} \\ -\infty & , E = \emptyset \end{cases}$$

Названия: супремум, точная верхняя граница

$\inf E = \ldots$ – инфимум

Замечание. Если $E \neq \emptyset$, то $\exists x \in E: \quad \inf E \leqslant x \leqslant \sup E \implies \inf E \leqslant \sup E$ (кроме случая $E = \emptyset$)

Теорема 19. в $\overline{\mathbb{R}}$ $\quad \sup E, \inf E$ существуют у всякого $E \subseteq \mathbb{R}$. Если E ограничено сверху (снизу), то $\sup E$ конечен ($\inf E$ конечен)

Замечание. $E \subseteq \mathbb{R}, R$ – огр. $\implies$ в $\mathbb{R} \exists \sup E, \inf E$

Доказательство. $\lhd E \neq \emptyset$ – огр. сверху. Докажем, что $\sup E$ существует и конечен

$\sqsupset I = [a, b]$ – отрезок. Назовём I “хорошим”, если:

1. $I \cap E \neq \emptyset$
2. $I \cap \mathscr{M} \neq \emptyset$, где $\mathscr{M}$ – множество всех мажорант E

Замечание (Критерий супремумы и инф)**.** $\sqsupset E \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}, M \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда $M = \sup E \iff \forall \text{окр}\, U(M) \quad U(M) \cap (-\infty, M) \cap E \neq \emptyset \qquad (M, +\infty) \cap E = \emptyset$

Т.к. $E \neq \emptyset \exists x \in E$. Т.к. E – огр сверху, $\exists M \in \mathscr{M} \cap \mathbb{R}$

$I_1 = [x, M] \neq \emptyset, I_1$ – хороший

$\sqsupset c = \frac{x+M}{2}$. Один из отрезков $[x, c]$ или $[c, M]$ – хороший

Если $[c, M] \cap E \neq \emptyset$, то $[c, M]$ – хороший

Если $[c, M] \cap E = \emptyset \implies C \in \mathscr{M} \implies [x, c]$ – хороший

Рассмотрим хорошую половину в качестве I_2.

Повторим действия, ...

В результате $\{I_n\}$ – последовательность стягивающихся вложенных замкнутых промежутков, потому что длинна $I_n = |I_n| = \frac{M-x}{2^{n-1}} \to 0$

Следовательно, по теореме о стягивающихся промежутках $\exists c : \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$, и $a_n \to c, b_n \to c$, где a_n, b_n – концы I_n

$c = \sup E$?

$\forall n b_n$ – мажоранта. $\forall x \in E \quad x \leqslant b_n \implies x \leqslant c \implies c \in \mathscr{M} \quad ?\forall \varepsilon > 0 \quad (c - \varepsilon, c) \cap E \neq \emptyset$

Т.к. $|I_n| \to 0$, то $\exists N : \forall n \geqslant N : \quad |I_n| < \varepsilon$

$I_n \cap E \neq \emptyset \implies \exists x_n \in [a_n, b_n] \cap E \implies x_n \in [a_n, c] \cap E$

$x > a_n = b_n - (b_n - a_n) \geqslant c - (b_n - a_n) > c - \varepsilon \implies c = \sup E$ ■

Замечание. Если $E \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$, то

$$\sup E \leqslant \sup D.$$

$$\inf E \geqslant \inf D.$$

Определение 57. $E \subseteq \mathbb{R} \quad f : E \to \mathbb{R}$

f называется <u>возрастающей на E</u> $\iff \forall x_1, x_2 \in E : \quad x_1 \leqslant x_2 \implies f(x_1) \leqslant f(x_2)$

f называется <u>строго возрастающей на E</u> $\iff \forall x_1, x_2 \in E : \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$

Убывающие аналогично

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется возрастающей $\iff \forall n, m \in \mathbb{N} : n \leqslant m \implies x_n \leqslant x_m$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется строго возрастающей $\iff \forall n, m \in \mathbb{N} : n < m \implies x_n < x_m$

Замечание. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает (строго возрастает) $\iff \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leqslant x_{n+1}\,(x_n < x_{n+1})$

Определение 58. $\{x_n\}$ – монотонная (строго монотонная) $\iff$

$$\left[\begin{array}{l}\{x_n\}_n\text{– возрастающая}\\ \{x_n\}_n\text{– убывающая}\end{array}\right. \quad \left(\left[\begin{array}{l}\{x_n\}_n\text{– строго возрастающая}\\ \{x_n\}_n\text{– строго убывающая}\end{array}\right.\right)$$

Теорема 20. В $\overline{\mathbb{R}}$ предел любой возрастающей (убывающей) последовательности существует и равен её супремуму (инфимуму)

Замечание. Любая ограниченная монотонная вещественная последовательность сходится

$\sup_E f = \sup f(E)$

$\sup\{x_n\} = \sup\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Доказательство. $\sqsupset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает. $\sqsupset M = \sup\{x_n\} \in (-\infty, +\infty]$

По критерию супремума $\forall$ окр $U(M) \quad \exists x_{n_U} \in U(M) \cap (-\infty, M)$

Тогда $\forall n \geqslant n_U \quad x_n \geqslant x_{n_U} \quad x_n \leqslant M \implies x_n \in U(M)$ Т.о. $x_n \to M, n \to \infty$ ■

Утверждение 21. неравенство Бернулли

$$(a+x)^n \geqslant 1 + nx \quad \forall n \in \mathbb{N} \forall x > -1.$$

Доказательство. Докажем методом мат. индукции.

База: $(1+x)^1 \geqslant 1 + 1 \cdot x$

Переход $n \to n+1$: $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geqslant (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 \geqslant 1 + (n+1)x$ ■

Теорема 21. $x_n = \left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ и $y_n = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся.

(доказательство было на практике)

$e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(= \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$

$x_n \leqslant e \leqslant y_n \forall n \in \mathbb{N}$

$e \approx 2,71828182845\dots$

Утверждение 22 (формула Герона)**.** $a, x_0 > 0, x_n = \frac{1}{2\left(\frac{a}{x_{n-1}} + x_{n-1}\right)} \forall n \in \mathbb{N}$

Тогда $x_n \to \sqrt{a}, n \to \infty$

Доказательство. $x_n = f(x_{n-1})$, где $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x} + x\right) = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{\sqrt{a}}{x} + \frac{x}{\sqrt{a}}\right)$

$\forall t > 0 \quad t + \frac{1}{t} \geqslant 2$ Минимум достигается при $t = 1 \implies f$ имеет минимум в $x = \sqrt{a}$

$x_{n+1} \geqslant x_n \forall n \in \mathbb{N}$

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n} + x_n\right) - x_n = \frac{1}{2}\frac{a - x_n^2}{x_n} < 0 \iff x_n > \sqrt{a} \iff x_n = f(x_{n-1}), x_{n-1} > 0$ по индукции

$f(x) \geqslant \sqrt{a} \quad \forall x > 0$

Т.о. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \downarrow$ и ограничено снизу $\sqrt{a} \implies \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = L \in \mathbb{R}$

Перейдём к пределу в рекуррентном соотношении

$L = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{L} + L\right)$

$L = \frac{a}{L} \quad L^2 = a \quad L \geqslant 0$, т.к. $x_n \geqslant 0 \implies L = \sqrt{a}$ ■

Утверждение 23. $\sqsupset \{x_n\}$ – вещественная последовательность $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L < 1 \implies x_n \to 0$

Частные случаи:

1. $\frac{n}{a^n} \to 0 \quad \forall a > 1$
2. $\frac{n^k}{a^n} \to 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$
3. $\frac{a^n}{n!} \to 0$
4. $\frac{n!}{n^n}$

Определение 59. $\sqsupset \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N} \overline{x_n} = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2} \ldots\}$ (для ограниченной сверху)

$\{\overline{x_n}\}$– верхняя огибающая последовательности

$\underline{x_n} = \inf\{\ldots\}$ (для ограниченной снизу)

Элементарные свойства:

1. $\underline{x_n} \leqslant x_n \leqslant \overline{x_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. $\{\overline{x_n} \downarrow \quad \{\underline{x_n}\} \uparrow$

Пример. $x_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

$\overline{x_n}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$

$\underline{x_n}, -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \ldots$

Определение 60. $\sqsupset \{x_n\}_{n=1}^\infty$ – произвольная вещественная последовательность

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \overline{x_n} & , x_n \text{ ограничена сверху} \\ +\infty \end{cases} \text{ – верхний предел}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \dots$$

Пример (продолжение примера). $\varlimsup x_n = 0 = \varliminf\limits_{n\to\infty}$

Определение 61. $\sqsupset \{x_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность в топологическом пространстве (X, Ω) $\quad l \in X$

l называется <u>частичным пределом</u> последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, если $\exists$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{n=1}^\infty : \quad x_{n_k} \to l$

Теорема 22. $\sqsupset \{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}$, тогда

I $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ есть наибольший частичный предел последовательности $\{x_n\}$ в $\overline{\mathbb{R}}$

II $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}} \iff \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$

В случае существования $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ совпадает с $\varlimsup$ и $\varliminf$

Доказательство. $\sqsupset L = \varlimsup x_n$

Замечание. Если $L = \varlimsup x_n \in \mathbb{R}$

$$L \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad x_n < L + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \forall N : \exists n > N : \quad x_n > L - \varepsilon \end{cases}$$

$\lhd L \in \mathbb{R} \quad ? : \exists x_{n_k} : \quad x_{n_k} \to L$

$\varepsilon = 1 \quad N_1 = 1 \quad \exists n_1 > N_1 : \quad x_{n_1} > L - 1$

$\varepsilon = \frac{1}{2} \quad N_2 = n_1 + 1 \quad n_2 \geqslant N_2 : \quad x_{n_2} > L - \frac{1}{2}$

$\dots$

$\varepsilon = \frac{1}{k} \quad N_k = n_{k-1} + 1 \quad \exists n_k \geqslant N_k : \quad x_{n_k} \geqslant L - \frac{1}{k}$

Возникает x_{n_k}, что $\overline{x_{n_k}} x_{n_k} > L - \frac{1}{k}$ Обе части стремятся к $L \implies x_{n_k} \to L$

Если $\{x_{m_j}\}$ – сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x_n\} \implies x_{m_j} \leqslant \overline{x_{m \leqslant j}} \to L, j \to \infty$

$\lim\limits_{j\to\infty} x_{m_j} \leqslant L$

Т.о. L – наибольший частичный предел

Если $\overline{\lim}\, x_n = -\infty \implies$ любой частичный предел $\leqslant -\infty$

Если $\overline{\lim}\, x_n = +\infty \implies \{x_n\}$ не ограничена сверху $\implies$ (было установлено) $\exists \{x_{n_k}\} : \quad x_{n_k} \to +\infty$

II: Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = L \in \overline{\mathbb{R}} \implies \forall$ подпоследовательности $\{x_{n_j}\} \quad x_{n_j} \to L, j \to \infty \implies \overline{\lim}\, x_n = \max\{\text{частичных}\} = L$ и $\underline{\lim} = \ldots = L$

Обратно: $\sqsupset \overline{\lim} = \underline{\lim} = l$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underline{x_n}\,(\to l) \leqslant x_n \leqslant \overline{x_n} \to l.$$

$\implies x_n \to l$ ■

Теорема 23 (Теорема Штольца)**.** $\sqsupset \{x_n\} \quad \{y_n\}$ – две вещественные последовательности

1. $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \uparrow$
2. $y_n \to +\infty, n \to \infty$
3. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$

Доказательство. $\sqsupset \Delta y_n = y_{n+1} - y_n \quad \Delta x_n = x_{n+1} - x_n$

1. $L \in \mathbb{R}$

   $$\lessdot \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 : \forall n \geqslant N_1 \quad \left| \underbrace{\frac{\Delta x_n}{\Delta y_n} - l}_{\alpha_n} \right| < \tfrac{\varepsilon}{10}$$

   $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} - l = \alpha_n$

   $x_{n+1} - x_n - l\,(y_{n+1} - y_n) = \alpha_n (y_{n+1} - y_n)$

   $x_{N_1+1} - x_{N_1} - l\,(y_{N_1+1} - y_{n_1}) = \alpha_{N_1}\,(y_{N_1+1} - y_{N_1})$

   Такие суммы удобно складывать

   $\left|x_{n+1} - x_{N_1} - l\,(y_{n+1} - y_{N_1})\right| = \left|\sum_{k=N_1}^{n} \alpha_k\,(y_{k+1} - y_k)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{10} \sum_{k=N_1}^{n} |\Delta y_k| = \frac{\varepsilon}{10} \cdot (y_{n+1} - y_{N_1})$

   $\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \frac{x_{N_1}}{y_{n+1}} - l + l \cdot \frac{y_{N_1}}{y_{n+1}}\right| < \frac{\varepsilon}{10} \left(1 - \frac{y_{N_1}}{y_{n+1}}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{10}$

$\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - l\right| < \frac{\varepsilon}{10} + \left|\frac{x_{N_1}}{y_{n+1}}\right| + l \cdot \left|\frac{y_{N_1}}{y_{n+1}}\right|$

$y_n \to +\infty \quad \exists N_2 : \forall n \geqslant N_2, n \in \mathbb{N} \quad \left|\frac{x_{n_1}}{x_{n+1}}\right| + l\left|\frac{y_{N_1}}{y_{n+1}}\right| < \frac{\varepsilon}{10} \implies \forall n \geqslant N_2 \quad \left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - l\right| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{10} < \varepsilon$

2. Если $L = +\infty \quad x_n \uparrow$ с некоторого номера

   $\lhd \frac{y_n}{x_n}$

3. Если $L = -\infty$ – упражнение

■

1.14 Предел отображения, предел функции

Определение 62. $\sqsupset (X, \Omega_X), (Y, \Omega_Y)$ – топологические пространства.

$f : E \to Y \quad E \subseteq X, a \in E', A \in Y$

$A = \lim_a f \iff \forall$ окр. $U(A) \exists$ окр. $V(a)$: $\quad f\left(\dot{V}(a) \cap E\right) \subseteq U(A)$

$\left(\iff \forall x \in \dot{V}(a) \cap E \implies f(x) \in U(A)\right)$

Определение 63 (по Коши)**.** $\sqsupset (X, \rho_x), (Y, \rho_y)$ – метрические пространства. $E \subseteq X \quad a \in E'$

$f : X \to Y$

$A = \lim_a f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E : \rho_x(x, a) < \delta \implies \rho_y(f(x), A) < \varepsilon$

Определение 64 (опр (по Коши) для функциий)**.** $E \subseteq \mathbb{R}, a \in E', f : E \to \mathbb{R} \quad A \in \mathbb{R}$

$A = \lim_a f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E, 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$

Определение 65 (по Гейне)**.** $\sqsupset (X, \Omega_X), (Y, \Omega_Y)$ – топологические пространства

$E \subseteq X, a \in R', f : E \to Y, A \in Y$

$\lim_a f = A \iff \forall$ последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq E \setminus \{a\} : x_n \to a$, при $n \to \infty \implies f(x_n) \to A, n \to \infty$

Замечание. Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ из определения (по Гейне), то назовём $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательностью Гейне для f и точки a

Теорема 24. В метрических пространствах определения предела по Гейне и по Коши равносильны.

$A = H\lim\limits_{a} f \iff A = C\lim\limits_{a} f$

Доказательство.

$\Longleftarrow$ $\sqsupset A = C\lim\limits_{a} f; \lhd \{x_n\}$ – последовательность Гейне для f в точке a. $\lhd\forall$ окрестность $U(A) \implies \exists$ окрестность $V(a)$: $f\left(\dot{V} \cap E\right) \subseteq U(A); x_n \to a, x_n \neq a \implies \exists N : \forall n \geqslant N \quad x_n \in \dot{V}(a) \implies f(x_n) \in U(A) \implies f(x_n) \to A$

$\Longrightarrow$ $\sqsupset A = H\lim\limits_{a} f$. От противного $A = C\lim\limits_{a} f$

$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \quad f\left(\dot{B}_\delta(a) \cap E\right) \not\subseteq B_\varepsilon(A)$

$\exists x_\delta \in \dot{B}_\delta(A) \cap E : \quad \rho\left(f(x_\delta), A\right) \geqslant \varepsilon$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \delta = \frac{1}{n} \quad \{x_{\frac{1}{n}}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq E \setminus \{a\} \quad \rho\left(x_{\frac{1}{n}}, a\right) < \frac{1}{n}$

$x_{\frac{1}{n}} \to a$, но $\rho\left(f(x), A\right) \geqslant \varepsilon_0 \implies f\left(x_{\frac{1}{n}}\right) \not\to A, n \to \infty$, что противоречит наличию предела по Гейне !!!

■

Замечание. Если $(X, \Omega_x), (Y, \Omega_y)$ – топологические пространства $A \in Y$ и $\exists$ набор окрестностей $\{V_n(a)\}_{n=1}^{\infty}$: $\forall$ окр. $V(a) \exists N : \forall n \geqslant N \quad V_n(a) \subseteq V(a)$, теоретически также верно

В случае если $f : E \to \mathbb{R} \quad E \subseteq \mathbb{R} \quad a \in E', A \in \overline{R}, \widehat{\mathbb{R}}$, используется определение через окрестности.

Варианты определения через параметры:

1. $a = -\infty \quad A \in \mathbb{R} \quad f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad E$ – неограниченно снизу

   $A = \lim\limits_{-\infty} f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R} : \forall x < M, x \in E \implies |f(x) - A| < \varepsilon$

2. $A = \infty, a = \infty \quad \infty = \lim\limits_{\infty} f \iff \forall \mathscr{E} \in \mathbb{R} \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in E : |x| > M \implies |f(x)| > \mathscr{E}$

3. ...

Задача 5. Определения по Коши и по Гейне эквивалентны и в случае $A, a \in \overline{\mathbb{R}}, \widehat{e}\mathbb{R}$

$V_n(+\infty) = (n, +\infty) \forall n \in \mathbb{N}$

Пример. 1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{n-1} + \ldots + b_0} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$

Теорема 25 (единственность предела)**.** $\sqsupset (X, \Omega_X), (Y, \Omega_Y)$ – м.п. $E \subseteq X, a \in E'$

$$f : E \to Y \quad A, B \in Y \quad \begin{cases} A = \lim\limits_a f \\ B = \lim\limits_a f \end{cases} \implies A = B$$

Доказательство. $\lhd \forall$ последовательность Гейне для f и точки $a \quad \{x_n\} \implies$ по определению предела по Гейне $f(x_n) \to A, f(x_n) \to B, n \to \infty \implies A = B$ (по свойствам предела последовательности) ∎

Определение 66. $\sqsupset f : X \to Y, \quad X, Y$ – м.п. $a \in E'$

f называется локально ограниченной в точке a отображения, если $\exists$ окр. $U(a) : \quad f|_{U(a)\cap E}$ ограничено (т.к. $\exists R > 0 \exists r > 0 \exists B \in Y : \quad f\left(B(a) \cap E\right) \subseteq B_r(b))$

Теорема 26 (локальная ограниченность отображения, имеющего предел)**.** $\sqsupset X, Y$ – м.п. $E \subseteq X, a \in E' \quad f : E \to Y, \exists \lim\limits_a f = A \in Y$. Тогда f локально ограничена в точке a

Доказательство. По Коши для $\varepsilon = 1 \exists B(a) : \quad f\left(\dot{B}(a) \cap E\right) \subseteq B_1(A)$

Если $a \in E \implies f\left(B(a) \cap E\right) \subseteq B_1(A) \cap B_{\rho(f(a),A)}[A] \subseteq B_R(a)$

$R = \max\{1, 2\rho(f(x), A)\}$ ∎

Теорема 27 (для функций)**.** Если $f : E \to \mathbb{R}, a \in E' \cap \overline{\mathbb{R}}, A \in \mathbb{R}$

$A = \lim\limits_a f$ Тогда $\exists$ окр $U(a)$ и $\exists c > 0 : |f(x)| \leqslant C \forall x \in U(a) \cap E$

Аналогичное определение для $\mathbb{C}$

Утверждение 24 (об отделённости от нуля)**.** $\sqsupset E \subseteq \mathbb{R}(\mathbb{C}), f : E \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) $A = \lim\limits_a f$

$A \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ (или $A \in \widehat{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ или $A \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$)

Тогда $\exists$ окр. $U(a) : f(x) \neq 0 \forall x \in \dot{(a)} \cap E$

Доказательство. От противного $\sqsupset \forall$ окр. $U(a) \exists x \in \dot{U}(a) \cap E$

$f(x) = 0$

Тогда $\forall \in \mathbb{N} \exists x_n \in \dot{U}(a) \cap E \quad f(x_n) = 0$

(если a – конечное, $U_n = B_{y_n}(a)$, $\begin{cases} a = +\infty & , U_n = (n, +\infty) \\ a = \infty & , U_n = \{x : |x| > n\} \end{cases}$

$x_n \to a, n \to \infty \quad x_n \neq a \forall n \in \mathbb{N} \implies \{x_n\}$ – последовательность Гейне $f(x_n) \to A \neq 0, n \to \infty \implies$!!! ∎

Замечание. Кроме “$\lim\limits_a f = A$” используется “$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$” или “$f(x) \to A, x \to a$”

Теорема 28 (об арифметических действиях над пределами)**.** $\sqsupset f, g \in X \to Y \quad (Y, \|\cdot\|)$ – нормированное пространство, (X, ρ) – метрическое пространство

$\lambda : E \to K \quad K$ – поле, отвечающее Y

$a \in E' \quad \exists \lim\limits_a f = A \quad \lim\limits_a g = B \quad A, B \in Y$

$\exists \lim\limits_a \lambda = l \in K$

1. $\exists \lim\limits_{x \to a} \lambda(x) \cdot f(x) = l \cdot A$
2. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
4. $Y = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C} \implies \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = AB$
5. $\exists \lim\limits_{x \to a} \|f(x)\| = \|A\|$

Доказательство. Всё доказывается через последовательности. ∎

Если $Y = \mathbb{R}^n \quad f : E \to Y \quad E \subseteq X$ – м.п.в

$f(x) = y = (y_1, \dots, y_n)$

$f_k : x \to y_k \quad f_k$ – k -я координатная функция отображения f

$A \in Y \quad A = (A_1, \dots, A_n)$

$A = \lim\limits_{x \to a} f \iff \forall l = 1 : n \quad \lim\limits_{x \to a} f_k(a) = A_k$

Замечание. $\{x_n\}$ – п. Гейне для f и точки $a \iff \{x_n\}$ – п. Гейне для a и $f_k \quad \forall k = 1 : n$

$A = \lim\limits_{x \to a} f \iff f(x_m) \to A, m \to \infty \forall$п. Гейне $\{x_m\}_{n=1}^{\infty} \iff \forall k = 1 : n \quad f_k(x_m) \to A_k, m \to \infty \iff \forall k = 1 : n \quad A_k = \lim\limits_{x \to a} f_k(x)$

Пример. $f(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ xy \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$

$\lim\limits_{(2,1)} f = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\nexists \lim\limits_{(x,y) \to \infty} f$ ни в $\overline{\mathbb{R}}^3$, ни в $\widehat{\mathbb{R}}^3$

Замечание. Теорема об арифметических действиях в случае $Y = \overline{\mathbb{R}}$ (или $\widehat{\mathbb{C}}$) выполнена, если правая часть равенства определена в Y

Теорема 29. $\sqsupset f, g : R \to \mathbb{R} \quad E \subseteq \mathbb{C}, a \in E'$

$\sqsupset \forall x \in E \setminus \{a\} \quad f(x) \leqslant g(x)$ и $\exists \lim\limits_a f, \lim\limits_a g \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда $\lim\limits_a f \leqslant \lim\limits_a g$

Доказательство. Если $\{x_n\}$ – п. Гейне для f и a, то и для g и a

$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_n) \leqslant g(x_n) \implies \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \leqslant \lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} g(x)$ ■

Теорема 30 (о сжатой функции или теорема "о трёх милиционерах")**.** $\sqsupset f, g, h : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R} \quad a \in E' \quad \forall x \in E \setminus \{a\} \quad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$

и $\exists \lim\limits_a f, lim_a h$ и $\lim\limits_a f = \lim\limits_a h = A$

Тогда $\exists \lim\limits_a g$ и $\lim\limits_a g = A$

Доказательство. (доказательство с помощью последовательностей) ■

Замечание. Если $f : E \subseteq X \to Y \quad X, Y$ – м.п.

$\forall$ посл. Гейне $\{x_n\}$ для f и точки a

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, то все такие пределы равны между собой $\left(\implies \lim\limits_{x\to a} f(x) \right)$

(Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ – п. Гейне

$f(x_n) \to A \quad f(y_n) \to B \quad n \to \infty)$

$\{z_n\}_n = \{x_1, y_1, x_1, y_2, \ldots\}$ – п. Гейне

$f(z_n) \to A \quad f(z_n) \to B \implies A = B$

Замечание. $\sqsupset f, g, h : E \subseteq X \to Y \quad X, Y$ – м.п. $a \in E' \cap E$

$\sqsupset f(x) = g(x) \forall x \in E \setminus \{a\}$

$\exists$ окр $U(a) : \quad f(x) = h(x) \forall x \in \dot{U}(a)$

Тогда $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a} g = \lim\limits_{a} h$ (если существует один, то существуют два других, в случае существования равны)

> **Теорема 31.** $f : E \to \mathbb{R}$ (или в $\mathbb{C}$) $a \in E' \quad E \subseteq X$ – м.п.
>
> Следующие утверждения равносильны:
>
> 1. $\exists \lim\limits_{a} f \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$)
> 2. $\forall \varepsilon > 0 \exists$ окр $U(a) : \forall x_1, x2 \in \dot{U}(a) \cap E \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ – критерий Коши-Больцано для функций

Доказательство.

$1 \implies 2$ $\sqsupset A = \lim\limits_{a} f$ – конечный предел

$\forall \varepsilon > 0 \exists U(a) : |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \forall x \in U'(a) \cap E$

Тогда если $x_1, x_2 \in \dot{U}(a) \implies |f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - A + A - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \varepsilon$

$1 \impliedby 2$ $\sphericalangle$ п Гейне $\{x_n\}$ для f и $a \quad x_n \to a$

$\forall \varepsilon > 0 \exists$ окр $U(a)$: (2). Т.к. $x_n \to a$, то $\exists N \in \mathbb{R} : \forall n \geqslant N \quad x_n n \in \dot{U}(a) \implies \{f(x_n)\}$ – сходится в себе

$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \quad n, m \geqslant N$

$\implies \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \implies \exists \lim\limits_{a} f$ (т.к. $\{x_n\}$ – произвольная последовательность)

∎

1.15 Символы $\sim, O, o$

Определение 67. $\sqsupset f : D_f \to \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$

$g : D_g \to \mathbb{R}\dots$

$\alpha : F_\alpha \to \mathbb{R}\dots$

$D_f, D_g, D_h \subseteq \mathbb{C} \quad a \in \widehat{\mathbb{C}}, a \in \overline{\mathbb{R}} \quad \exists$ окр $U(a)$:

$$\dot{U}(a) \cap D_f = \dot{U}(a) \cap D_y = \dot{U}(a) \cap D_\alpha = D.$$

И $f(x) = \alpha(x) \cdot g(x) \forall x \in D$

Тогда пишут:

- $f \sim h, x \to a \iff \alpha(x) \to 1, x \to a$ (f асимптотически равна или эквивалентна g в окрестности точки a)
- $f = O(g), x \to a \iff \alpha(x)$ локально ограничено в точке a (f равно О-большому от g)
- $f(x) = o(g(x)), x \to a \iff \alpha(x) \to 0, x \to a$ (f равно о-малому от g)

Элементарные свойства:

1. $f \sim g$ в точке $a \implies \begin{cases} f = O\,(g) \\ g = O\,(f) \end{cases}, x \to a$

   $f = o(g) \implies f = O(g)$
2. Асимптотическое равенство есть отношение эквивалентности:
   - $f \sim f$
   - $f \sim g \iff g \sim f$
   - $f \sim g, g \sim h \implies f \sim h$

   Всё в одной точке
3. $f \sim g, x \to a \iff f = g + o(g), x \to a \iff g = f + o(f), x \to a$
4. Если $f \to L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \to a \quad g(x) \equiv L \forall x \in D_f$

   Тогда $f(x) \sim g, x \to a$

   $f = \frac{f}{L} \cdot g \to 1 \cdot L$

5. Если $f \sim \overline{f}, x \to a$, то $\lim\limits_{x \to a} f = \lim\limits_{x \to a} \overline{f}$

6. Если $f \sim \overline{f} \quad g \sim \overline{g} \implies f \cdot g \sim \overline{f} \cdot \overline{g}$

   Если $g(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки $a \implies \frac{f}{g} \sim \frac{\overline{f}}{\overline{g}}$ Если $\begin{matrix} f \sim \overline{f} \\ g \sim \overline{g} \end{matrix}, x \to a \not\Rightarrow f \pm g \sim \overline{f} \pm \overline{g}$

Пример. $f(x) = x + 1 \sim \overline{f} = x$

$g(x) = -x \sim \overline{g} = g = -x$

$f(x) + g(x) = 1 \not\sim 0$

$\sin x \sim x$

$-x \sim -x$

$\sin x - x \sim \frac{x^3}{2}$ – упражнение

$x \to +\infty \quad \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \sim Cx^p \quad p \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$

$= \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{\frac{x+1}{x}}} \sim \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x}}$

Упражнения: Исходя из $\sin x \sim x, x \to 0$ выяснить, что $\operatorname{tg} x \sim x, \arcsin x \sim x, \operatorname{arctg} x \sim x, \cos x \sim 1, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1 \quad f(x) = e^x \implies e^x - 1 \sim x, x \to 0 \quad t \sim \ln(1+t), x \to 0, t \to 0$

Достаточные условия: $\sqsupset D_g, D_f$ как в определении $O, o, \sim$

$g \neq 0$ в некоторой окрестности a

Если $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1, x \to a \implies f(x) \sim g(x)$

Если $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0, x \to a \implies f(x) = o(g(x))$

Если $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеет конечный предел $\implies f = O(g), x \to a$

Определение 68. $f \asymp g, x \to a \iff \begin{cases} f = O(g) \\ g = O(f) \end{cases} \quad x \to a$

$(f = \Theta(g), f = \Omega(g))$

Упражнение: $f(x) = \sin x$ найти функцию, которая будет $o(\sin x)$ при $x \to +\infty$

$x \to +\infty \quad x^m = O(x^n) \iff m < n$

$x \to 0+ \quad x^m = o(x^n) \iff m > n$

$x \to 0 x^2 = o(x) \quad x^3 = o\left(x^2\right)$

Замечание. 1. $o(f) + o(f) = o(f)$

равенства в одну стороны $f = o(g)$. Возможно более подходящим было бы $f \in o(g)$

(если $g = o(f), h = o(f) \implies f + h = o(f)$)

2. $o(Cf) = o(f) = C\left(o(f)\right)$
3. $O(o(f)) = o(f)$
4. $o(o(f)) = o(f)$
5. $O(O(f)) = O(f)$
6. $O(f) \cdot O(g) = O(fg)$
7. $o(f) \cdot o(g) = o(fg)$

Замечание. $\forall p \in \mathbb{R}, p = const \quad (1+x)^p - 1 \sim px, x \to 0$

Если $p \in \mathbb{N} \quad (1+x)^p - 1 = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \ldots + x^p - 1 \sim px$

$f(x) = (1+x)^p \quad \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0}{x} = f'(0) = p$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt[3]{1-2x}}{\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}} + \sqrt[5]{1+\frac{x}{2}}} = \frac{C_1}{C_2}$

Знаменатель $\sim C_1 x$

Числитель $C_2 x$

$(1+x)^p - 1 \sim px \iff (1+x)^p - 1 = px + o(x)$

$\sqrt{1+3x} - 1 = \frac{3}{2}x + o(x) \quad \sqrt[3]{1-2x} - 1 = -\frac{2}{3}x + o(x)$

Числитель $\frac{3}{2}x + o(x) - \left(-\frac{2}{3}x + o(x)\right) = \frac{13}{6}x + o(x) \sim \frac{13}{6}$