Конспект по дискретной математике
II семестр

Коченюк Анатолий

31 мая 2021 г.

Глава 1

Дискретная теория вероятностей

1.1 Введение

Определение 1 (Вероятностное пространство)**.**
Ω – элементарные исходы, неделимые дальше.

p – дискретная плотность вероятности.

$p : \Omega \to [0, 1] \quad \sum\limits_{q \in \Omega} p(\omega) = 1$

Замечание. В случае дискретного вероятностного пространства $|\Omega|$ – не более, чем счётное.

Пример (Честная монета)**.** $\Omega = \{0, 1\} \quad p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$

Пример (Нечестная монета)**.** $\Omega = \{0, 1\} \quad p(1) = p, p(0) = q$ – различные числа. $p + q = 1$

Ещё одно название – распределение Бернулли

Пример (Честная игральная кость)**.** $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad p(\omega) = \frac{1}{6}$

Определение 2. Событие, случайное событие – $A \subseteq \Omega$

Замечание. Неправильное определение – то, что может произойти, а может не произойти.

$\emptyset \subseteq \Omega \quad \Omega \subseteq \Omega$ – примеры, когда никогда не происходит и всегда происходит

Замечание. Для недискретного случая неверно, что любое подмножество Ω это событие

Определение 3. Вероятность события $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} p(\omega)$

p берёт элементарные исходы. $P, \mathbb{P}$ – вероятность события

Пример. Событие $E = \{2, 4, 6\} \quad P(E) = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$O = \{1, 3, 5\}$

Замечание. Не существует вероятностного пространства с бесконечным числом равновероятных исходов

$p(\omega) = 0 \quad \sum = 0$

$p(\omega) = a > 0 \quad \sum = a \cdot (+\infty) = +\infty$

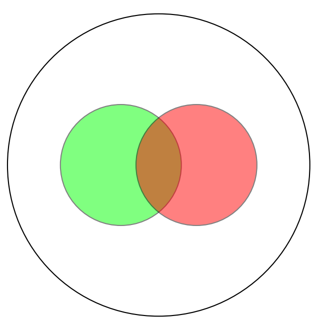
Пример. Событие $B(IG) = \{4, 5, 6\} \quad P(B) = \frac{1}{2}$

Определение 4 (Независимое событие)**.** События A, B независимы, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Пример. $E \cap O = \emptyset \quad B \cap E = \{4, 6\}$

$P(E \cap O) = \emptyset \quad P(O) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \neq 0$

$P(B) \cdot P(E) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3} = P(B \cap E)$



$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(\Omega)}$

Определение 5 (Условная вероятность)**.** $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Замечание. Альтернативное определение независимости, не поддерживающее 0: $P(A|B) = P(A)$

$V = \{5, 6\}$

$P(V \cap E) = \frac{1}{6}$

$P(V) = \frac{1}{3} \quad P(E) = \frac{1}{2} \quad P(V) \cdot P(E) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = P(V \cap E)$

Определение 6 (Произведение вероятностных пространств)**.**
$\Omega_1, p_1 \qquad \Omega_2, p_2$

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

$p\left(\langle\omega_1, \omega_2\rangle\right) = p_1\left(\omega_1\right) \cdot p_2(\omega_2)$

Теорема 1. $\forall A_1 \subseteq \Omega_1$ и $\forall A_2 \subseteq \Omega_2$

$A_1 \times \Omega_2$ и $\Omega_1 \times A_2$ – независимы

Доказательство. $P\left(A_1 \times \Omega_2 \cap \Omega_1 \times A_2\right) = P\left(A_1 \times A_2\right) = \sum\limits_{\substack{a\in A_1\\ b\in A_2}} p\left(\langle a, b\rangle\right) =$

$$= \sum_{a\in A_1} \sum_{b\in A_2} p_1(a) \cdot p_2(b) = \sum_{a\in A_1} p_1(a) \left(\sum_{b\in A_2} p_2(b)\right) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2)$$ ∎

Определение 7. $A_1, A_2, \ldots, A_n$

1. Попарно независимые $\quad A_i$ и A_j независимы
2. Независимы в совокупности $\forall I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ $P\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right) = \prod\limits_{i\in I} P(A_i)$

   $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$

Пример. Кидаем две монеты $\Omega = \{00, 01, 10, 11\}$

$A_1 = \{10, 11\} \quad A_2 = \{01, 11\} \quad A_3 = \{01, 10\}$ – независимы попарно, но не в совокупности

Определение 8 (Формула полной вероятности)**.**
$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$

Совокупность таких A-шек называется полной системой событий.

Дано: вероятности $P(A_i) \quad P(B|A_i)$ Найти: $P(B)$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

– формула полной вероятности

Найти: $P\left(A_j|B\right)$

A_1 – болен, A_2 – здоров, B – положительный результат теста

$P(A_2|B)$

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P\left(B|A_i\right) \cdot P(A_i)}$$

– формула Байеса

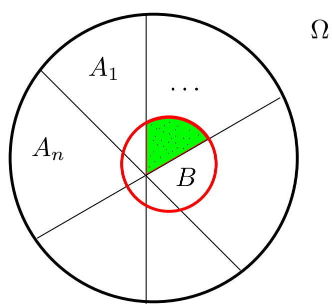


Рис. 1.1: B

1.2 Случайные величины

Замечание. Неправильное (наивное) определение – величина, принемающая слуйное значение.

Она может быть константой. Что такое величина?

Определение 9 (Случайная величина)**.** $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ – $\mathbb{R}$ -значная функция

Ω, p – вероятностное пространство.

Пример. Если взять случайные текст длинной 1Кб. Вариантов текста очень много и бессмысленно их рассматривать отдельно, интересует какое-то свойство, величина.

Графы, $2^{\binom{n}{2}}$ штук. Но нас интересует какая-то (численная) характеристика элементарного исхода.

Пример. $D(ice) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\Omega = D^2 \quad p\left(\langle i, j\rangle\right) = \frac{1}{36}$

$\xi : \Omega \to \mathbb{R} \qquad \xi(\langle i, j\rangle) = i + j$

Пример (Случайные графы)**.** $G(4, \frac{1}{2})$ – случайный граф, 4 вершины, каждое ребро существует с вероятностью $\frac{1}{2}$

$\Omega = \mathbb{B}^6 \quad p(G) = \frac{1}{64}$

$\xi(G) =$ количество компонент связности

Пример. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\xi(w) = w$

Пример. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad E = \{2, 4, 6\}$

$\chi_E(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in E \\ 0, & \omega \notin E \end{cases}$ – индикаторная случайная величина

Определение 10. $\Omega, p \quad \xi$

$[\xi = i] = \{\omega | \xi(\omega) = i\} \subseteq \Omega$

$P\left([\xi = i]\right) = P\left(\xi = i\right) = f_\xi(i) \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f_\xi(i) = P\left(\xi = i\right)$ – дискретная плотность вероятности случайной величины ξ

$F_\xi(i) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} = P\left(\xi \leqslant i\right)$ – функция распределения

Замечание. Непрерывная vs Дискретная вероятность

Пример.

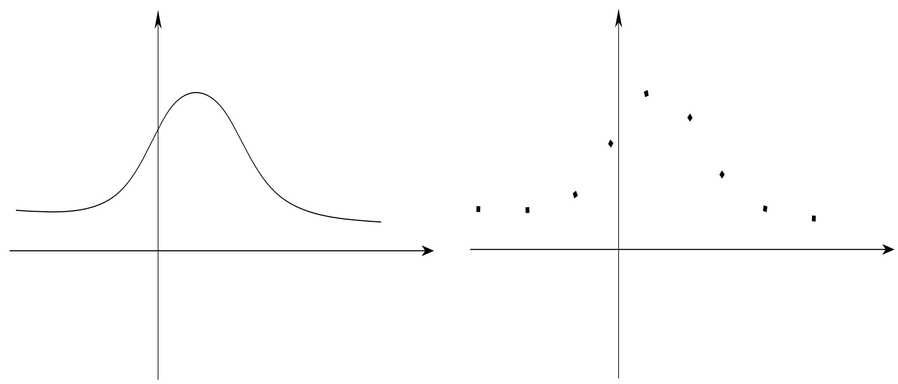


Рис. 1.2: непрерывная и дискретная вероятность

Замечание. $\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$

$f_\xi(i) = P\left(\xi = i\right) \qquad f_\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{xi}(x) = F_\xi(i)$

$f_\xi(x) = \sum\limits_i P\left(\xi = i\right) f\left(x - i\right)$

Пример. $\Omega = \mathbb{B}^{1000} \quad p(\omega) = \frac{1}{2^{1000}}$

$\xi(w) =$ число 1 в ω

$|$множество значений $\xi| = 1001 \qquad p\left(\xi = i\right) = \frac{\binom{1000}{i}}{2^{1000}}$

Замечание. Случайные числа обозначаются строчными греческими или заглавными латинскими из конца алфавита (X, Z)

Замечание (Что можно делать со случайными величинами)**.** ξ, η – функции

$\xi^2 \quad 2\xi \quad \xi + \eta \quad \xi \cdot \eta \quad \xi^\eta \quad \sin\xi \quad e^\eta \quad \frac{1+\xi}{\eta}$ (всё то же, что мы можем делать с функциями.

Пример. $\Omega = D^2 \quad \xi_1\left(\langle i, j\rangle\right) = i \qquad \xi_2\left(\langle i, j\rangle\right) = j$ – одинаково распределённые случайные величины

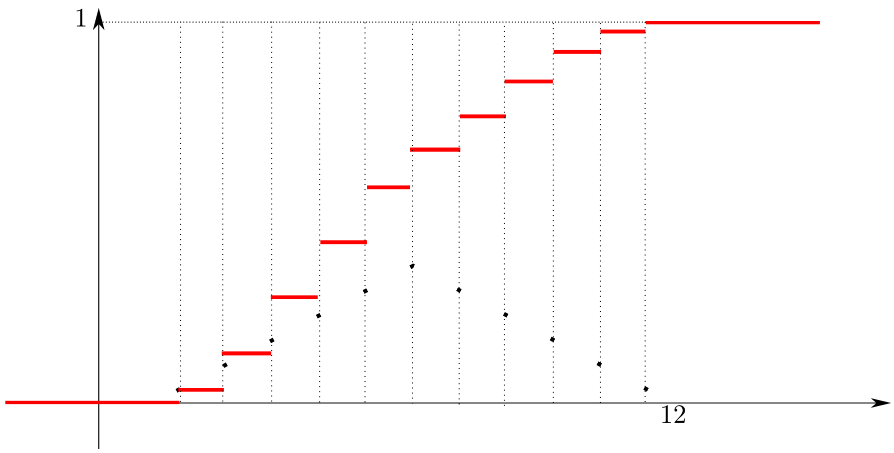


Рис. 1.3: Два-кубика (функция распределения)

Пример. $\Omega = F \quad id(\omega) = \omega$

$1, 2, \ldots, 6$ – каждый с вероятностью $\frac{1}{6}$. Другое вероятностное пространство относительно предыдущего примера, но всё равно одинаковое распределение.

$\xi = (i + j) = \xi_1 + \xi_2 \qquad \xi = (i + j)\%6 + 1$ – у второй то же распределение, что у верхних, но она уже совсем другая.

Определение 11. Математическое ожидание

$$E_\xi = \sum_\omega p\,(\omega)\,\xi(\omega).$$

Утверждение 1. $E_\xi = \sum_i ip(\xi = i)$

Доказательство.

$$\begin{aligned} E_\xi &= \sum_\omega p(\omega)\,\xi(\omega) \\ &= \sum_i \sum_{w:\xi(\omega)=i} p(\omega)\cdot\xi(\omega) \\ &= \sum_i \sum_{\omega:\xi(\omega)=i} p(\omega)\cdot i \\ &= \sum_i i \sum_{w:\xi(\omega)=i} p(\omega) \\ &= \sum_i iP(\xi=i) \end{aligned}$$

.

■

Пример. $\Omega = D \quad \xi = id$

$E_\xi = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 5 + \frac{1}{6}\cdot 6 = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$

Пример. $\Omega = D^2 \quad \xi(\langle i, j\rangle) = i + j$

$E_\xi = \frac{1}{36}\cdot(2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 5\cdot 4 + 6\cdot 5 + 7\cdot 6 + 8\cdot 5 + 9\cdot 4 + 10\cdot 3 + 11\cdot 2 + 12\cdot 1)$ – здесь среднее значение оказалось наиболее частым, но так оно не всегда (пример с 3,5)

Теорема 2. $E_{\lambda\xi} = \lambda E_\xi$

$E(\xi+\eta) = E_\xi + E_\eta$

Доказательство. $E_{\lambda\xi} = \sum\limits_\omega p(\omega)\,\lambda\xi(\omega) = \lambda E_\xi$

$E(\xi+\eta) = \sum\limits_\omega p(\omega)\,(\xi(\omega) + \eta(\omega)) = E_\xi + E_\eta$ ■

Утверждение 2. Если ξ и η одинаково распределены, то $E_\xi = E_\eta$

Пример. Бросим кубик один раз, ξ_1 – что выпало сверху, ξ_2 – что выпало снизу

$E(\xi_1 + \xi_2) = 7.$ – не играет роли как числа друг относительно друга расположены.

МАТОЖИДАНИЕ ЛИНЕЙНО ВСЕГДА

Пример. $\Omega = S_n \quad p(\omega) = \frac{1}{n!}$

$\xi(\pi) = |\{i|\pi[i] = i\}| \quad 0\ldots n$, кроме $n-1$

$E_\xi = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_i = 1$

$\xi_i(\pi) = \begin{cases} 1, & \pi[i] = i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$E_{\xi_i} = \frac{1}{n}$

$\xi = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_i$

1.3 Независимые случайные величины

Определение 12 (удобное)**.** Случайные величины ξ и η независимы, если события $[\xi = \alpha]$ и $[\eta = \beta]$ – независимы $\forall \alpha, \beta$

Определение 13 (нормальное)**.** $[\xi \leqslant \alpha]$ и $[\eta \leqslant \beta]$ – независимы для $\forall \alpha,]beta$

Пример. $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

$\xi_1(\langle\omega_1, \omega_2\rangle) = f(\omega_1)$

$\xi_2(\langle\omega_1, \omega_2\rangle) = g(\omega_2)$

A и B независимы, χ_A, χ_B – независимы

Теорема 3. ξ, η – независимы $\implies E(\xi \cdot \eta) = E_\xi \cdot E_\eta$

Доказательство. $E\xi \cdot \eta = \sum\limits_{\alpha} \alpha \cdot P(\xi \cdot \eta = \alpha) = \sum\limits_{i,j} \alpha P([\xi = i] \cap [\eta = j]) = \sum\limits_{i} \sum\limits_{j} ijP(\xi = i) P(\eta = j) = E_\xi E_\eta$

$i \cdot j = \alpha \quad i \in R_\xi \quad j \in R_\eta$ ∎

Пример. $\Omega = \{0, 1\} \quad p = \frac{1}{2} \quad \xi(i) = 2i \quad E_\xi = 1$

$\Omega = S_n \quad p = \frac{1}{n!} \quad \xi =$ число неподвижных точек $\quad E_\xi = 1$

Матожидание одно, но ведут себя совершенно по разному.

Определение 14 (Дисперсия)**.** $D_\xi = Var\left(\xi\right)$

$D_{xi} = E\left(\xi - E_\xi\right)^2 = E\left(\xi^2 - 2\xi E_\xi + \left(E_\xi\right)^2\right) = E_{xi}^2 - 2E_\xi E_\xi + \left(E_\xi\right)^2 = E_{\xi^2} - \left(E_\xi\right)^2$

Теорема 4. $D_{c\xi} = c^2 D_\xi$

Если ξ и η независимы, то $D_{\xi+\eta} = D_\xi + D_\eta$

Доказательство. Упражнение ■

Вспомним. $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$

$F_\xi(a) = P\left(\xi \leqslant a\right)$

$f_\xi(a) = P\left(\xi = a\right)$

$F_\xi(a) = \sum\limits_{b \leqslant a} f_\xi(b)$

$E_\xi = \sum\limits_{\omega \in \Omega} p(\omega)\xi(\omega) = \sum\limits_{a} a \cdot P\left(\xi = a\right)$

$E(\xi + \eta) = E_\xi + E_\eta$ ■

$E\left(\xi - E\xi\right) = E_\xi - EE_\xi = 0$ матожидане отклонения от матожидания равно нулю..

Хочется смотреть насколько величина отклоняется от своего матожиданя. Для этого используется понятие дисперсии:

$D_\xi = E\left(\xi - E\xi\right)^2 = E\xi^2 - \left(E\xi\right)^2$

$D\left(\xi + \eta\right) = E\xi^2 + E\eta^2 + 2E\xi\eta - \left(E\xi\right)^2 - \left(E\eta\right)^2 - 2E\xi E\eta = D_\xi + D_\eta + 2\left(E_{\xi\eta} - E_\xi E_\eta\right)$.

В случае независимых случайных величин дисперсия линейна. Иначе она отличается на ковариацию:

Определение 15 (Ковариация)**.**

$$Cov\left(\xi, \eta\right) = E_{\xi\eta} - E_\xi E_\eta.$$

$D_\xi = Cov\left(\xi, \xi\right)$

Определение 16 (Корреляция)**.**

$$Corr\left(\xi,\eta\right)=\frac{Cov\left(\xi,\eta\right)}{\sqrt{D_\xi D_\eta}}.$$

Теорема 5. Корреляция двух случайных величин лежит между -1 и 1.

$$-1\leqslant Corr(\xi,\eta)\leqslant 1.$$

Доказательство. $\alpha=\xi-\lambda\eta$

$D_\alpha=E_{\xi^2}-2\lambda E_{\xi\eta}+\lambda^2 E\left(\eta^2\right)-(E(\xi))^2+2\lambda E_\xi E_\eta-\lambda^2\left(E_{\eta^2}\right)\geqslant 0$

$D_\xi+2\lambda Cov\left(\eta,\eta\right)+\lambda^2 D_\eta$

$4Cov\left(\xi,\eta\right)^2-4D_\xi D_\eta\leqslant 0$ ■

1.4 Хвостовые неравенства

$\xi \quad E\xi=10 \quad \xi\geqslant 0$

$P\left(\xi\geqslant 100\right)<\frac{1}{10}$

Теорема 6 (Неравенство Маркова)**.** $\xi\not\equiv 0 \quad \xi\geqslant 0 \quad P\left(\xi\geqslant a\cdot E_\xi\right)\leqslant\frac{1}{a}$

Доказательство. $E_\xi=\sum\limits_v v\cdot P\left(\xi=v\right)=\sum\limits_{v<a\cdot E_\xi} v\cdot P\left(\xi=v\right)+\sum\limits_{v\geqslant a\cdot E_\xi} v\cdot P\left(\xi=v\right)\geqslant 0+a\cdot E_\xi\sum\limits_{v\geqslant a\cdot E_\xi} P\left(\xi=v\right)=a\cdot E_\xi\cdot P\left(\xi\geqslant a\cdot E_\xi\right)$ ■

Пример. $a=\frac{c}{E_\xi} \quad P\left(\xi\geqslant c\right)\leqslant\frac{E_\xi}{c}$

$D_\xi=E\left(\xi-E\xi\right)^2$

$\eta=\left(\xi-E_\xi\right)^2$

$P((\xi-E_{xi})^2\geqslant a^2\cdot D_\xi)\leqslant\frac{1}{a^2}$

$\sigma=\sqrt{D_\xi}$ – среднеквадратичное отклонение

Теорема 7 (Неравенство Чебышева)**.** $P\left(\left|\xi-E_\xi\right|\geqslant a\sigma\right)\leqslant\frac{1}{a^2}$

$P\left(\left|\xi-E_\xi\right|\geqslant c\right)\leqslant\frac{D_\xi}{c^2}$

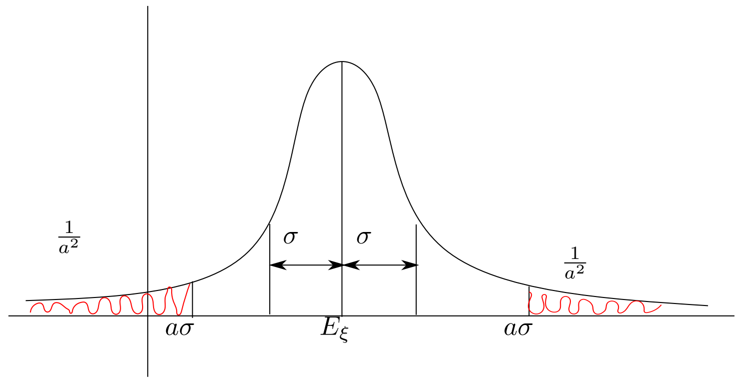


Рис. 1.4: drawing

Задача 1 (10 монет, найти количество “1”)**.**

$$E\xi = 5 \quad D\xi = 2{,}5$$

$$P(\xi \leqslant 0) \leqslant P(|\xi - E\xi| \geqslant 5) \leqslant \frac{2{,}5}{25} = \frac{1}{10}$$

Замечание. С одной стороны, у неравенства есть плюс: оно **всегда** работает; всегда (!)

С другой — иногда оценки получаются, очень грубыми. В нашем примере ответ $\leqslant \dfrac{1}{10}$, а в жизни — $\dfrac{1}{1024}$.

Пример. Нечестная монета $p \neq \frac{1}{2}$. Хотим выяснить чем чаще выпадает.

Бросили: c единиц, $n - c$ нулей. Предположим, что $c < \frac{n}{2} \quad p > \frac{1}{2} \quad pn > \frac{n}{2}$

$P\left(\xi = c\right) \leqslant P\left(\xi \leqslant c\right) \leqslant P\left(|\xi - pn| \leqslant pn - c\right) \leqslant P\left(|\xi - pn| \leqslant \frac{n}{2} - c\right) \leqslant \frac{n}{4 \cdot \left(\frac{n}{2} - c\right)^2}$

Теорема 8 (Граница Чернова (без доказательства))**.** $\xi_i \quad P\left(\xi_i = 1\right) \quad P\left(\xi_i = 0\right) = 1$

$\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \qquad E_\xi = np = \mu$

$P\left(|\xi - \mu| \geqslant \delta\mu\right) < e^{-\mu\frac{\delta^2}{3}}$

Пример. Случайная величина ξ. Хотим узнать матожидание. Проведём эксперимент n раз: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

$$P\left(\left|\frac{\sum \xi_i}{n} - E_\xi\right| > c\right) \leqslant \frac{D_\xi}{n\varepsilon^2}.$$

$\xi : \Omega \to \mathbb{Z}^+$

$E_\xi = \sum\limits_{i=0}^{n} i \cdot P(\xi = i) = \sum\limits_{i=0}^{n} \left(P(\xi \geqslant i) - P(\xi \geqslant i+1)\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(\xi \geqslant i)$

1.5 Теория информации

Определение 17 (Что такое информации)**.**
Информация = − неопределённость

непределённость H1. Что-то узнали, стала неопределённость H2. полученная информация I =H1-H2 = $-\Delta$ H

Хочется убрать наблюдателя, нас, из определения, чтобы не было кого-то, кто узнаёт и меняет неопределённость. Надо ввести объективную модель:

Определение 18 (Случайный источник)**.** Ω – вероятностное пространство. Есть исходы $p_1, p_2, \ldots, p_n$

Чёрный ящик с красной кнопкой и дисплеем. Основан на вероятностном пространстве

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m \ldots$

$P(\xi_i = a) = p_a \quad a = 1 \ldots n$

Случайный источник $p_1, p_1, \ldots, p_n$. Хотим померять сколько информации содержится в одном результате эксперимента.

$H(p_1, p_2, \ldots, p_n) : RS(randomsources) \to \mathbb{R}^+$

Частный случай $p_i = \frac{1}{n}$

$h(n) = H\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$

1. $h(n+1) > h(n)$
2.

   Пример. $\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,m_1)(2,1),\ldots,(2,m_2),\ldots,(k,1),\ldots,(k,m_k)\}$

   $n = m_1 + m_2 + \ldots m_n$

   $p(i,j) = 1_{ij} \quad p_i = \sum\limits_{j=1}^{m_k} q_{ij}$

Первый ряд $(1,*)$ – p_1. Второй p_2 ... Последний p_k

Если случайный источник показывает только первое число это эквивалентно $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$

Теперь представим, что мы сначала узнаём первую компоненту, а потом открываем вторую

$\sum\limits_{i=1}^{k} p_i H\left(\frac{q_{i1}}{p_i}, \ldots, \frac{q_{im_i}}{p_i}\right)$

Если провести эксперимент сразу, получим $q_{11}, \ldots, q_{im_i}$

$q_{ij} = p_i q_{ij}$

$$H\left(p_1 r_{11}, p_1 r_{12}, \ldots, p_1 r_{1k_1}, p_2 r_{21}, \ldots, p_k r_{km_k}\right) = H\left(p_1, p_2, \ldots, p_k\right) + \sum_{i=1}^{k} p_i H\left(r_{i1}, \ldots, r_{im_i}\right).$$

3. Для фиксированного n H непрерывная как функция $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Теорема 9. $H\left(p_1, p_2, .., p_n\right) = -\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \log p_i$

Лемма 1. $h\left(nm\right) = H_(n) + h(m)$ Следует из второго свойства

Доказательство. $k = n \quad m_i = m \quad p_i = \frac{1}{n} \quad q_{ij} = \frac{1}{nm} \quad r_{ij} = \frac{1}{m}$

$h(nm) = H\left(q_{11}, q_{12}, \ldots, q_{nm}\right) = H\left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n} H\left(\frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}\right) = h(n) + h(m)$ ■

Определение 19. $h(2) = \alpha$ (может с точностью до мультипликативной константы задать)

Лемма 2. $h(2^k) = k\alpha$

Лемма 3. $h(n) = \alpha \log_2 n$

Доказательство. $2^i \leqslant n^r < 2^{i+1} \quad r \in \mathbb{N}$

$h(i) \leqslant h\left(n^r\right) < \alpha(i+1)$

$\alpha \cdot i \leqslant r \cdot h(n) < \alpha(i+1)$

$\alpha \cdot \frac{i}{r} \leqslant h(n), \alpha\frac{i+1}{r}$

$i \leqslant r \log_2 n < i+1$

$\alpha\frac{i}{r} \leqslant \alpha \log_2 n < \alpha\frac{i+1}{r}$

$\forall r \quad |h(n) - \alpha \log_2 n| \leqslant \frac{\alpha}{r}$

$\implies h(n) = \alpha \log_2 n$ ■

Доказательство теоремы. Рациональный $p_i = \frac{a_i}{b} \quad m_i = a_i \quad r_{ij} = \frac{1}{a_i} \quad q_{ij} = \frac{1}{b} \quad q_{ij} = p_i r_{ij}$

$$H\left(\underbrace{\frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{b}}_{b}\right) = H\left(p_1, \ldots, p_k\right) + \sum_{i=1}^{k} p_i H\left(\underbrace{\frac{1}{a_i}, \ldots, \frac{1}{a_i}}_{a_i}\right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} p_i\right) h(b) = H\left(p_1, \ldots, p_k\right) + \sum_{i=1}^{k} p_i h(a_i)$$

$$H\left(p_1, \ldots, p_k\right) = \sum_{i=1}^{k} p_i \left(\alpha \log_2 b - \alpha \log_2 a_i\right)$$

Функция непрерывна и она верна для рациональных, следовательно она верна для всех ■

Замечание. $h(2) = \alpha$ – бит

А теперь мы хотим перевести определение информации на неслучайный источник

Ответ 1. Это тогда будет не совсем корректно с математической точки зрения. Когда смотришь на конкретные детерминированные данные. ■

Ответ 2. Изучение среднего не совсем антинаучное занятие. Внешне оно ведёт себя как случайные величины. ■

Пример. Есть строка s, в которой мы хотим померить информацию.

$s \in \Sigma^* \quad n = |\Sigma|$

$|s| = l \quad f_i$ – количество символов c_i в строке s

$p_i = \frac{f_i}{L}$

Допустим, что символы выдаёт случайный источник, который выдал символы $s_1, s_2, \ldots, s_L$. Статистически эта строка похожа на s. *натягивание на глобус* Допустим, что количество информации в строке s равно количеству в строке $\widetilde{s}$

$I(\widetilde{s}) = J \cdot H\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right) = -L \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$

Вспомним арифметическое кодирование

$q = A(s)$ – длина арифместического кодирования

$$A(s) \leqslant -\log_2(b_L - a_L) = -\log_2\left(p_{s_1} \cdot \ldots \cdot p_{s_L}\right) = -\log_2\left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{f_i}\right) = -\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{L}{p_i}}_{p_i} \log_2 p_i =$$

$$= I\left(\widetilde{s}\right) = L \cdot H\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right)$$

> **Теорема 10.** Длина кода, после арифметического кодирования не превышает энтропию Шеннона

Замечание. Арифметическое кодирование асимптотически оптимально среди тех, которые не учитывают взаимное расположение символов.

Пример (Нижняя оценка для сортировки)**.** Пусть $a_1, \ldots, a_n$ – перестановка и мы хотим её отсортировать

> **Утверждение 3.** От одного сравнения мы получаем не больше 1 бита информации

Рассмотрим все перествки. В каждой содержится

$\log_2 n! = \sum\limits_{i=1}^{n} \log_2 i \geqslant \sum\limits_{i=\frac{n}{2}}^{n} \log_2 \frac{n}{2} = \Omega\left(n \log n\right)$

1.6 Цепи Маркова

$b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ – b_i вероятность находиться в состоянии i

$C \quad c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – случайная величина после одного перехода

Матрица перехода p_{ij} – вероятность перейти из i в j

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$c_i = P(C = i) = \sum\limits_{j=1}^{n} P\left(x = i | B = j\right) P(B = j) = \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ji} \cdot b_j$

$b^0 = (1, 0, 0, 0)$ – нулевой шаг

$b^1 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

Рассмотрим судьбу м.ц. после поглощения. Жизнь происходит внутр одной сильно связанной компоненты – эргадического класса.

1. $d > 1$ длинна любого цикла кратна d. Циклический класс
2. НОД(длин всех циклов) = 1.

Теорема 11 (Эргадическая для регулярных цепей)**.** М.ц. такова, что $p_{ij} > 0 \forall i, j$

Тогда $\exists\, b \quad \forall\, b^0 \quad b^0 P^n \to b$

(b удовлетворяет равенству $b = bP$

Доказательство. $(b^0 A)_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j^0 \cdot A_{ji} = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^0\right) \widetilde{a}_i = \widetilde{a}_i$

$\sqsupset \forall j \quad a_{ji} = \widetilde{a}_i$

$P^n \to A$, которая удовлетворяет условию выше.

$m_i^t = \min_j (P^t)_{ji} \quad M_i^t = \min_j (P^t)_{ji}$

$M_i^t - m_i^t \to 0$

$\delta = \min_{i,j} \quad \delta > 0$

$$
\begin{aligned}
P_{ji}^{t+1} &= \sum_{k=1}^{n} P_{jk}^t P_{ki} \\
&\leqslant \overbrace{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq posMin}}^{n} P_{jk}}^{1} M_i^t + P_{j\ posMin}(m_i^t - M_i^t) \\
&\leqslant M_i^t + \delta\left(m_i^t - M_i^t\right).
\end{aligned}
$$

Аналогично с максимумом, оцениваем всё снизу минимумов, кроме максимума

$$M_i^{t+1} \leqslant M_i^t + \delta\left(m_i^t - M_i^t\right).$$

$$-m_i^{t+1} \leqslant -m_i^t + \delta\left(m_i^t - M_i^t\right).$$

$$M_i^{t+1} - m_i^{t+1} \leqslant \left(M_i^t - m_i^t\right)(1 - 2\delta) \leqslant (1 - 2\delta)^{t+1} \to 0.$$

Теперь у $b = bP$

$(I - P)b = 0$

$Rg\,(I - P) = n - 1$

$\sum b_i = 1$

P^{2^c}

$bP^n 0 > b \quad bP^{n+1} \to bP$

$b = bP$ ■

Вернёмся к вопросу что происходит после поглощения.

$\lhd$ эргадический класс $A \quad \widetilde{p} = \sum\limits_{a \in A} (b^o NR)_a$

$\widetilde{b}^0 = \left(b^0 NR\right)_{A - \frac{1}{p}}$

$\exists$ предельное $b: \quad \widetilde{b}^0 A^n \to b$

Конечное распределение $b\widetilde{p}$

Скрытые Марковские модели. Мы решали до этого прямую задачу – брали м.ц. с извстными матрицами перехода и смотрели на их характеристики.

Есть обратная: Есть состояние и мы хотим узнать матрицу перехода.

Ещё задача: Есть немарковский процесс и мы хотим аппроксимировать его марковским.

1.7 Формальные языки

Алфавит – Σ, конечное непустое множество

слово, цепочка, строка $\Sigma^* = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \Sigma^k$

Формальный язык $L \subseteq \Sigma^*$

<TODO>

Определение 20. Описание языка – слово конечной длины

Всего "описаний" счётное множество

- Распознавание – по слову возвращаем булевский флаг – есть слово в нашем языке или нет
- Порождение – описывает как породить возможно бесконечное количество слов

Определение 21. Перечиление слов. $\{01, 011, 10, 1010\}$. Но так можно описать только конечные языки (содержащие конечное количество слов

Пример. Правильные скобочные последовательности ε – псп

A, B – псп $\implies AB$ – псп

A – псп $\implies (A)$ – псп

Это порождение. Можно описать распозхнованием: баланс в любой момент неотрицательный, баланс в конце $= 0$

Между этими способми есть логический переход:

- Распозновать $\to$ Порождать. порождаем всё, что можем распознать
- Обратно: распознаём всё, что в какой-то момент порождаем

Пример. C++ без ограничений по памяти. Пограмма P

$L = \{\omega \mid p(\omega) = 1\}$

1.7.1 Регулярные = Автоматные языки

Определение 22. Конкатенация: $\alpha \in \Sigma^k, \beta \in \Sigma^l \quad \alpha\beta \in \Sigma^{k+l}$

$\gamma = \alpha\beta \quad \gamma_i = \begin{cases} i \leqslant k & \implies \alpha_i \\ i > k & \implies \beta_{i-k} \end{cases}$

$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma \qquad \alpha\varepsilon = \varepsilon\alpha = \alpha$

Пример. $AB = \{x \mid x = yz, y \in A, z \in B\}$

$A = \{0, 01\} \quad B = \{0, 10\}$

$AB = \{00, 010, 0110\}$

Базовые операции:

1. Объединение $A \cup B$
2. Конкатенация AB

   Возведение в степень $A^k = \underbrace{AA \dots A}_{k} \quad A^0 = \{\varepsilon\}$
3. Замыкание Клини $A^* = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A^k$

Определение 23. $Reg_0 = \{\emptyset, \{\varepsilon\}, \{c\} \forall c \in C\}$

$Reg_{i+1} = Reg_i \cup \{A \cup B, AB, A^* \mid A, B \in Reg_i\}$

$Reg_1 = \{\emptyset, \varepsilon, a, b, \ldots, \{a, b\}, \{a, \varepsilon\}, \ldots., ab, aa, \ldots., \{\varepsilon, a, aa, aaa, \ldots\}, \ldots, \{\varepsilon b, bb, bbb, \ldots\}\}$

$Reg = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} Reg_k$

Лемма 4. $A, B \in Reg$:

1. $A \cup B \in Reg$
2. $AB \in Reg$
3. $A^* \in Reg$

$A \in Reg_i, B \in Reg_j$

Они все принадлежат $Reg_{\max\{i,j\}+1}$

Определение 24. Назовём семейство языков $X \in Good \quad X \subseteq 2^{\Sigma^*}$

$X = set\langle lang \rangle$

Good: set<set<lang> >

1. $Reg_0 \in X$
2. X замкнуто относительно $A \cup B, AB, A^*$, а.и.

$$A, B \in X \implies AB, A \cup B, A^* \in X \qquad A, B : lang.$$

Теорема 12. $Reg = \bigcap\limits_{u \in Good} U$

Доказательство. to be written ■

Определение 25 (Описание). • $\emptyset$ ε c

- A α B β:
  - AB $\alpha\beta$ – средний приоритет
  - $A \cup B$ $\alpha|\beta$ – минимальный приоритет
  - A^* α^* – максимальный приоритет

$\Sigma = \{0, 1\}$

$(0 \mid 11)^*$ – язык в кортором единицы идут парами

Такие описания называют академическими регулярными выражениями

$\alpha^+ = \alpha\alpha^*$

$\alpha^k = \underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{k}$

Пример. $0^* | \left(0^* 10^* 10^*\right)^*$ – язык, содержащий чётное число единиц

Пример. Проверка чётное ли число единиц

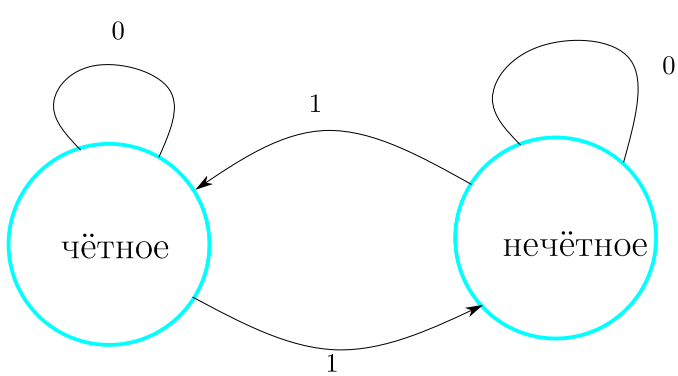


Рис. 1.5: check-one

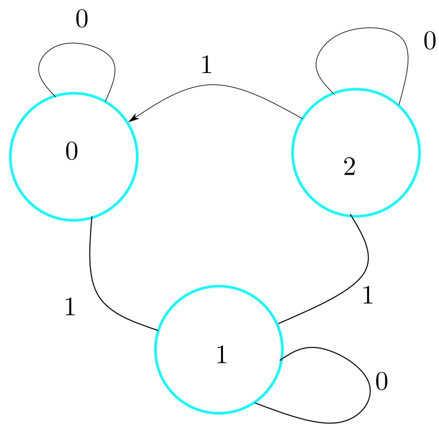


Рис. 1.6: check-div3

Определение 26. Детерминированный Конечный Автомат ДКА DFA

$$A = \langle \Sigma, Q, S \in \Sigma, T \subseteq Q, \delta : Q \times \Sigma \to Q \rangle .$$

- Σ – алфавит
- Q – конечное множество состояний
- S – начальное состояние
- T – допускающие состояния
- δ – функция переходов

$Snap = Q \times \Sigma^*$

Пеехоd:

1. $\alpha = c\beta \quad c \in \Sigma$
2. $r = \delta(q, c)$

Пример. $\langle e, 0101 \rangle \vdash \langle e, 101 \rangle \vdash \langle o, 01 \rangle \vdash \langle o, 1 \rangle \vdash \langle e, \varepsilon \rangle$

$\mathscr{L}(A) = \{\omega \mid \langle s, \omega \rangle \vdash^* \langle t, \varepsilon \rangle, t \in T\}$

Теорема 13 (Клини)**.** $Reg = Aut$

$Aut = \{X \mid \exists \text{ ДКА } A : \quad X = L(A)\}$

1.8 Недетерминированный конечный автомат

x – допускаоется Недетерминированным Конечным Автоматом $\iff \exists$ последовательность переходов по символам x, заканчиващееся в допускающем состоянии

L – формальный язык. $L \times \Sigma^*$

Артур: $x \mapsto x \in L?$

Мерлин: Убедить Арутра, что $x \in L$

Замечание. Артуру в случае неопределённости выгодно слушать Мерлина.

Если $x \notin L$, то Мерлин не сможет испортить своими советами, потому что в автомате просто нет такой последовательности, на которую можно направить, чтобы попасть в допускающее

Если $x \in L$, то, внезпано, интересы Артура и Мерлина совпадают

Замечание (интерпретация через миры)**.** На каждом шаге, где недетерминирован следующий шаг, создаётся два мира, на каждый из шагов. Если хотя бы в одном дошли до допускающего, то слово принадлежит.

Определение 27 (НКА)**.** $\left(\Sigma, Q, S \subseteq Q, T \subseteq Q, \delta : Q \times E \to 2^Q\right)$

Стартовых состояний может быть несколько, хотя почти никогда не нужно

Состояние – $\langle q, x\rangle \quad q \in Q, \quad x \in X^*$

$\langle q, x\rangle \vdash \langle r, y\rangle$

1. $x = cy, \quad c \in \Sigma$
2. $r \in \delta\left(q, c\right)$

x – допускается A, если $\langle s, x\rangle \vdash^* \langle t, \varepsilon\rangle\,, \quad t \in T$

Пример.

```
class DFA {
    // 0 .. n-1 -- Q; 0 .. c-1 -- Sigma
    s : int
    t :  vector<bool>(n)
    delta: vector<vector<int>> (n,c)

    bool accept(x) {
        cur = s
        for (i = 0 .. len(x) - 1)
```

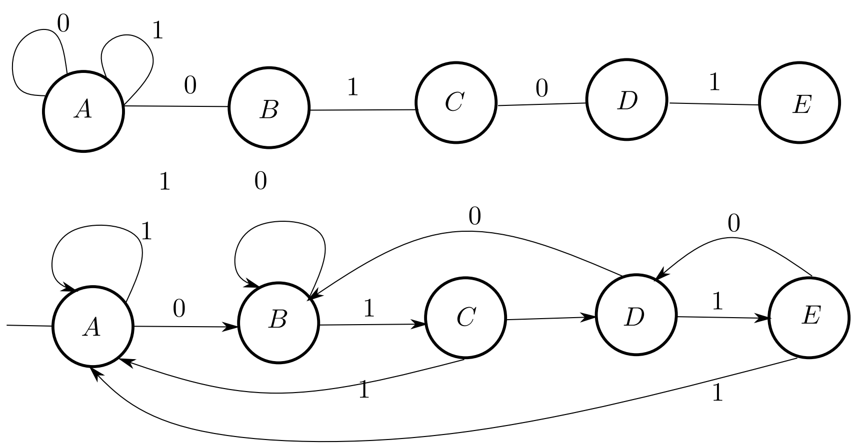


Рис. 1.7: auto

```
            cur = delta[cur][x[i]
        return t[cur]
    }
}
```

$O(len(x))$

1.9 Динамическое программирование

```
class NFA {
    // 0 ... n-1 -- Q; 0 .. c-1 -- Sigma
    s : int
    t : vector<bool>(n)
    delta : vector<vector<set<int>>>(int)

    can[i][q] -- можно ли прочитав i символов x’а оказаться в состоянии q

    bool accept(x):
        can[0][s] = true
        for (i = 0 .. len(x) - 1)
            for (q = 0 .. n-1)
                if (can[i][q])
                   for (r : delta[q][x[i])
                    can[i+1][r] = true
        for (q = 0 .. n-1)
            if (can[len(x)][q] &&  t[q])
                return true
```

```
}
```

$O\left(len(x)\cdot(n^2+m)\right)$

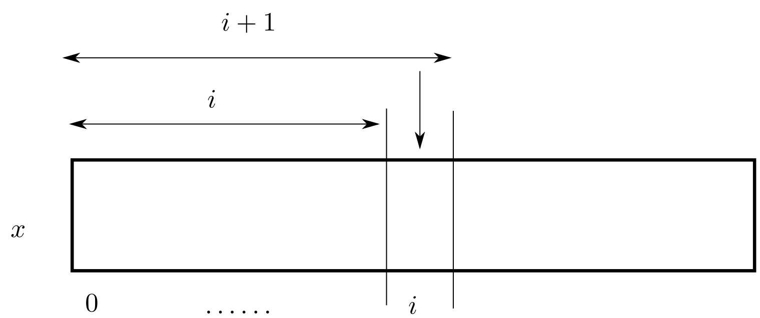


Рис. 1.8: nfa-step

Утверждение 4. Для L $\exists$ НКА A_n $\iff$ для L $\exists$ ДКА A_D

Доказательство. $\forall$ ДКА является частным случаем НКА

$\Longleftarrow$ очевидно

$\Longrightarrow$ Алгоритм Томпсона

```
next(a : vector<bool>, c) vector<bool>
    res = vector<bool>(n)
    for (q = 0 .. n-1)
        if a[q]
            for r : delta[q][c]
                res[r] = true
    return res

bool accept(x)
    can[0][s] = true
    for (i = 0 .. len(x) - 1)
        can[i+1] = next(can[i], x[i])
```

$(\Sigma, Q_D = 2^{Q_N}, \{s\}, T_D = \{A \mid A \cap T_n \neq \emptyset\}, \delta_D(A, c) = \{r \mid \exists q \in A,\ r \in \delta_N(q, c)\}$

∎

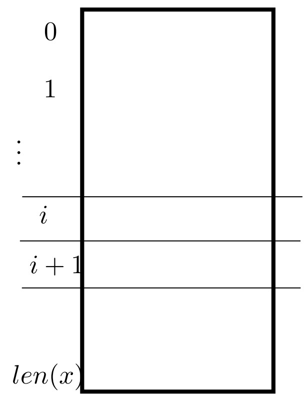


Рис. 1.9: tomps

Замечание. Казалось бы, вот Детерминированный автоматы такие хорошие, зачем нужны другие? Но он имеет экспоненциальное количество состояний (верхняя оценка) по сравнению с Недерминированным

Но в реальности можно улучшать, убирая состояния, которые недостижимы (например $\{B, C\}$ может не встречаться одновременно никогда) (в недерминированном)

Иначе можно начать со стартовых состояний и делать очередь всех состояний, в которых мы можем быть. Именно такую конструкцию обычно и называют Алгоритмом Томпсона.

Конструкция описанная выше называется Конструкцией подмонжеств.

1.10 ε-НКА

Разрешим на переходе писать не символ, а ε. Переходя по нему строка на входе не меняется

Пример. $\left((0|1)^* 00| (0|1)^* 11\right) (0|1)^*$

0*1*2*

> **Утверждение 5.** $\forall \varepsilon$-НКА $\exists$ эквивалентный НКА без ε переходов

Доказательство.

1. Рассмотрим граф ε-переходов. Этому графу мы сделаем транзитивное замыкание. И добавим новые рёбра как ε-переходы в наш граф

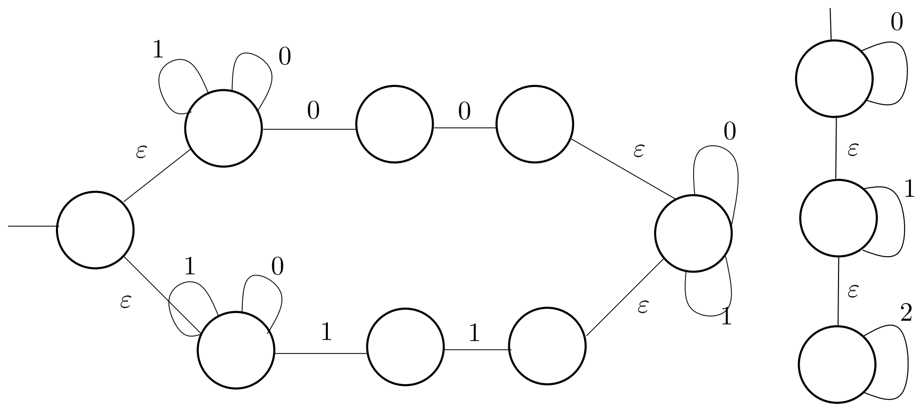


Рис. 1.10: epsauto

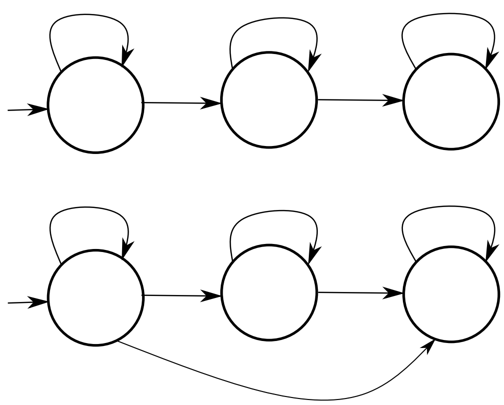


Рис. 1.11: epsgraph

Язык не поменялся. Вместо прохождения по новому переходу, можно делать n эпсилон-переходов в старом графе

2. Для каждой конструкции: Из p есть ε-переход в q терминальный, сделаем p тоже терминальным

> **Утверждение 6.** Если x Допускалось раньше, $\iff$ допускается и сейчас. Последний переход не ε

3. Рассмотрим тройки вершин, что Из p есть ε переход в q откуда переход по c в r. Тогда добавим ребро из p в r по c

Утверждение 7. Если слово можно допустить, то его можно допустить вообще не делая ε-переход

4. удалим все ε-переходы

■

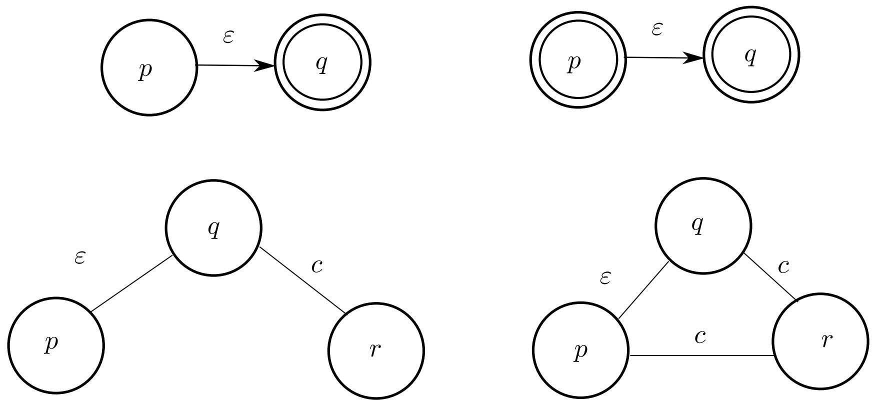


Рис. 1.12: proof-pic

Утверждение 8. Для любого Языка следующие три утверждения эквивалентны:

1. Можно построить ДКА
2. Можно построить НКА
3. Можно построить ε-НКА

$2 \implies 1$ – Томпсон

$3 \implies 1$ – ε-замыкание

Теорема 14 (Клини)**.** $\mathrm{Reg} = \mathrm{Aut}$

Доказательство.

$\mathrm{Reg} \subseteq \mathrm{Aut}$ Докажем по индекции, что $\forall i \quad \mathrm{Reg}_i \subseteq Aut$

Будем строить ε-НКА с одним терминальным состоянием

База: $\emptyset$. Стратовое и терминальное состояние и никаких переходов

ε – одна ε-стрелка

c – одна c-стрелка

Переход: $\mathrm{Reg}_i \subseteq Aut \implies \mathrm{Reg}_{i+1} \subseteq Aut$

- $L = A \cup B$
- $L = AB$
- $L = A^*$

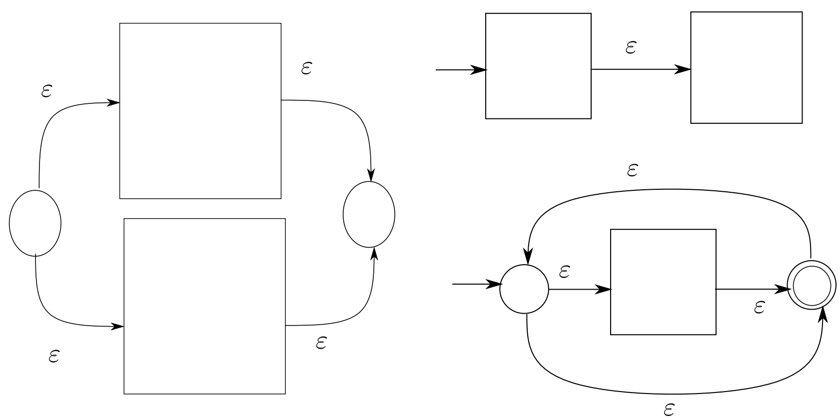


Рис. 1.13: move-klini

■

Теорема 15 (Лемма о разрастании/накачке)**.** L – регулярный

$\exists n > 0 \forall \omega : \omega \in L \quad |\omega| \geqslant n \quad \exists x, y, z : \quad \omega = xyz$

$y \neq \varepsilon \quad |xy| \leqslant n \quad \forall l \geqslant 0 \; xy^k z \in L$

<TODOTODOTODO>

Замечание. Формула, в которой чередуются блоки “существует” и “для любого” называется $\sigma - \pi$-формулой

Формула сверху это $\sigma - 4$

На это можно смотреть на игру между двумя игроками. Существует ход одного, что для любого хода другого существует ход первого... Если утверждение верное, то выиграл “существует”, иначе выиграл “для любого”

Пример. Правильные скобочный последовательности

$n \quad \omega = (^n)^n \quad x = (^a \quad y = (^b . b > 0 . z = (^{n-a-b})^n$

$k = 2 \quad (^{n+b})^n \notin L$

Доказательство. L – регулярный язык. A – ДКА для L

$\sqsupset n$ – число состояний автомата A

$\lhd w \in L \quad |w| \geqslant n$. Раз оно из L, значит автомат его допускает

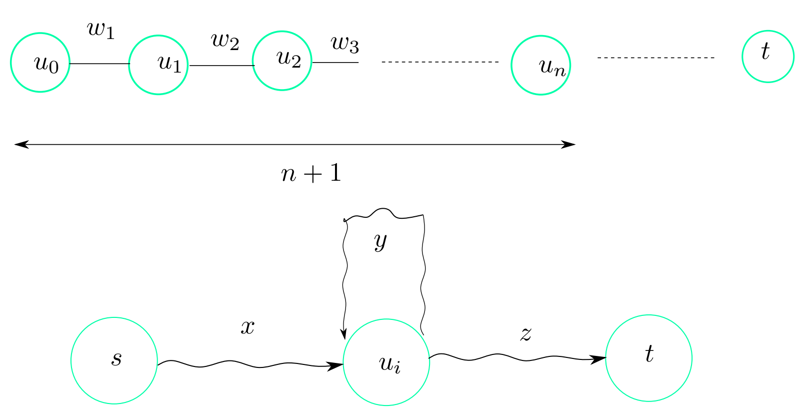


Рис. 1.14: dopusk

$i \neq j \quad u_i = u_j \quad w[1 \dots i] = x \quad w[i+1 \dots j] = y \quad w[j+1 \dots |w|] = z$ ■

Пример. $0^a 1^a, a \geqslant 0$

$n \quad o^n 1^n$

$x = 0^a \quad y = 0^b \quad z = 0^{n-b-a} 1^n$

$k = 0$

$xy^k z = 0^{n-c} 1^n \notin L$

Замечание. Просто ДКА для одного языка может быть несколько

Но у любого языка существует единственный ДКА с минимальным количеством состояний

1.11 Алгоритм Минимизации

ДКА A. u и v различим строкой S, если $(x \in T \wedge y \notin T) \vee (x \notin T \wedge y \in T)$

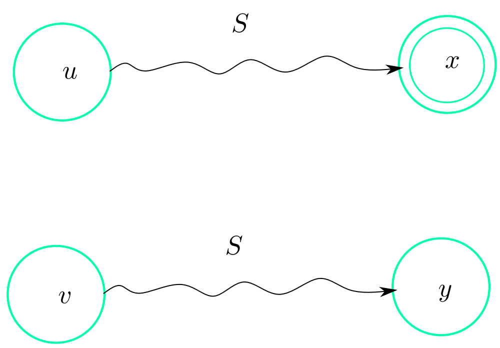


Рис. 1.15: razlich

$a \sim b$, если они не различили никакой строгой

Лемма 5. $\sim$ – отношение эквивалентности

Доказательство. Рефлексивность и Симметричность очевидны

■

Лемма 6. $u \sim v \implies \delta(u, c) \sim \delta(v, c)$ для $\forall c \in \Sigma$

Доказательство. $\delta(u, c)$ и $\delta(v, c)$ различимы $S \implies u$ и v различимы cs ■

Алгоритм:

$D_k = \{(u, v) \mid u$ и v различимы $s, |s| \leqslant k\}$

$D_0 = \{(u, v) \mid u \in T \oplus v \in T\}$

$D_k = \{(u, v) | (u, v) \in D_{k-1}$ или $\exists x \in \Sigma : (\delta(u, c), \delta(v, c)) \in D_{k-1}\}$

$D_k = D_{k-1} \implies D_{k+1} = D_k \implies \forall$ пара различима в D_k

Обход в ширину:

очередь Q, поместим D_0 в Q и D_0 в D

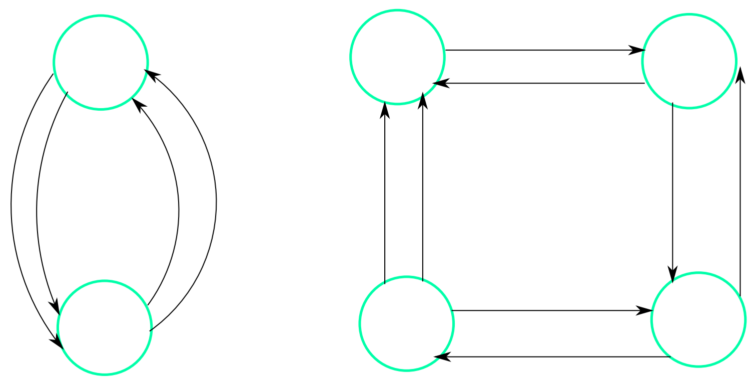


Рис. 1.16: minex

```
    while not Q.empty()
        (u, v) = Q.pop()
        for c \in Sigma
            for a \in In[u][c]
                for b \in In[v][c]
                    if (a,b) !\in D
                        Q.push(a,b)
                        D.add(a,b)
```

while – n^2 $\quad |\Sigma| = \sigma$

форы суммарно – n^2

Суммарно $O(n^2 \cdot \sigma)$

Теорема 16. *A – ДКА для L, не содержащий эквивалентных состояний, и любое состояние достижимо из S, тогда:*

1. *A – минимальный*
2. *A' – ДКА для L, $|Q'| = |\mathbb{Q}|$, тогда $A \simeq A'$*

Стартовые состояния эквивалентны. состояния, в которые можно дойти из них – тоже эквивалентны.

Есть алгоритм быстрой минимазации (фамилии, которую я не услышал), буит на след. неделе.

План

1. Другой алгоритм построения регулярного выражения по автомату

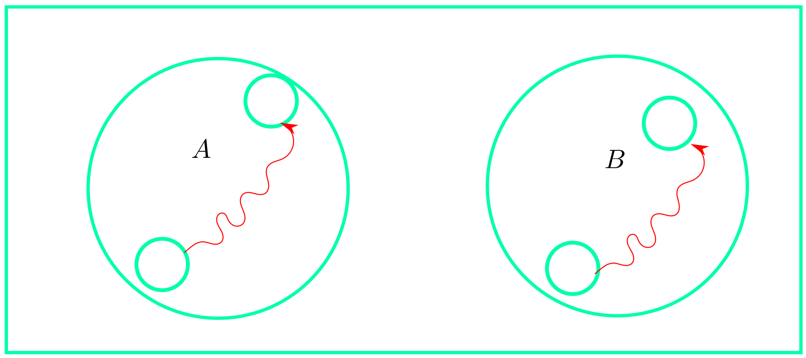


Рис. 1.17: union

(решаем системы линейных уравнений в регулярных выражениях)

2. Быстрый алгоритм минимизации (за $n \log n$)
3. Алгоритмический анализ свойств регулярных языков

1.12 Построение ругулярки с помощью линала

α, β – регулярки

$L = \alpha L + \beta$ $\quad$ + здесь означает объединение или "или"

Пример. $\alpha = aL + b$

решени – a^*b

$\forall k \geqslant 0 a^k b \in L$

$x \in L \quad x = b \begin{cases} \implies x \in a * b \\ x \in aL \end{cases}$

Лемма 7. $\alpha^* b$ – решение

Теорема 17. Если $\varepsilon \notin \alpha \implies \alpha^* \beta$ – единственное решение

Иначе $L = \alpha^* b \cup N$ – решение для $\forall N \subseteq \Sigma^*$

Доказательство. 1. $\varepsilon \notin \alpha$

$|x| = 0 \implies x \in L \implies x \in \alpha L + \beta \implies x \in \beta \implies x \in \alpha^*\beta$

$|y| < |x| \implies y \in \alpha^*\beta$

$x \in L \implies x \in \alpha L + \beta$

(a) $x \in \beta \implies x \in \alpha^*\beta$

(b) $x \in \alpha L \implies x = yz, y \in \alpha, z \in L$

$|y| \geqslant 1 \implies |z| < |z| \implies z \in \alpha^*\beta \implies x \in \alpha^*\beta$

2. $\varepsilon \in \alpha$

$\beta \subseteq L \implies \alpha\beta \subseteq L \implies \ldots \implies \alpha^*\beta \subseteq L$

$\forall N \quad \alpha N \supset N$

■

Задача 2. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – неизвестные языки, которые связаны системой

$$\begin{cases} X_1 = \alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 + \ldots + \alpha_{1n}X_n + \beta_1 \\ X_2 = \alpha_{21}X_1 + \alpha_{22}X_2 + \ldots + \alpha_{2n}X_n + \beta_2 \\ \vdots \\ X_n = \alpha_{n1}X_1 + \alpha_{n2}X_2 + \ldots + \alpha_{nn}X_n + \beta_n \end{cases}$$

Решение. Потребуем $\varepsilon \notin \alpha_{ij}$

Будем решать чем-то похожим на метод Гаусса.

Предположим, что X_1 неизвестное, а остальное нам известно, тогда первое уравнение выглядит как

$X_1 = \alpha_{11}^* \left(\alpha_{12}X_2 + \alpha_{13}X_3 + \ldots + \alpha_{1n}X_n + \beta\right)$

$X_2 = \alpha_{21}\alpha_{11}^* \left(\alpha_{12}X_2 + \ldots + \alpha_{1n}X_n + \beta\right) + \alpha_{22}X_2 + \ldots + \beta_2$

$X_2 = \left(\alpha_{21}\alpha_{11}^*\alpha_{12} + \alpha_{22}\right)^* \left(\left(\alpha_{21}\alpha_{11}^*\alpha_{13} + \alpha_{23}\right) X_3 + \ldots + \left(\alpha_{21}\alpha_{11}^*\beta_1 + \beta_2\right)\right)$

Так продолжаем до X_n. Кажется, что непохоже, но вообще похоже на прошлый алгоритм. ■

Замечание. Как это можно применить для автомата?

Рассмотрим автомат для чисел кратных трёх

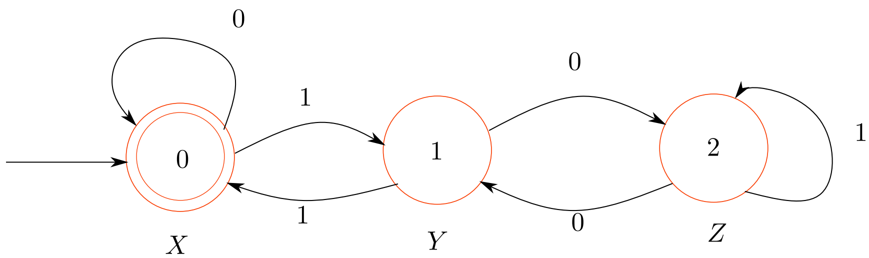


Рис. 1.18: kratno3

$$\begin{cases} X = 0X + 1Y + \varepsilon \\ Y = 0Z + 1X \\ Z = 1Z + 0Y \end{cases}$$

$Z = 1^*0Y$

$Y = 01^*0Y + 1X$

$Y = (p_1^*0)^*\, 1X$

$X = \left(0 + 1\,(01^*0)^*\, 1\right) X + \varepsilon$

$X = \left(0 + 1\,(01^*0)^*\, 1\right)^*$

1.13 Алгоритмы анализа регулярных языков

Теорема 18. Пусть A, B – регулярные языки. Тогда такими также являются: (по определению $A \cup B, AB, A^*$)

- $A \cap B$

- $\overline{A}$

- $\varphi : \Sigma \to \Pi *\quad \varphi^* : \Sigma^* \to \Pi^*$ – гомоморфизмы

  $\varphi^*(c_1 c_2 \dots c_n) = \varphi(c_1)\varphi(c_2)\dots\varphi(c_n)$

  $\varphi L \Sigma^* \to \Pi^* \quad \varphi = \varphi^*$ (обозначим так)

  $\varphi(A) \quad \varphi^{-1}(A) = \{x | \varphi(x) \in A\}$ – тоже ругялярн ые

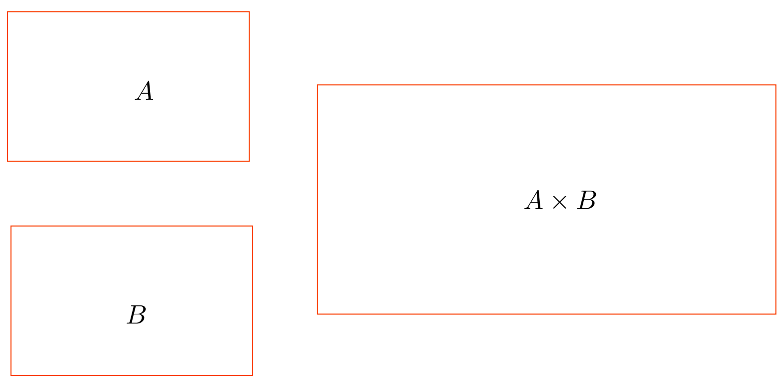


Рис. 1.19: presech

Доказательство. Рассмотрим произведение автоматов.

Множество состояний – декартово произведение $Q_{A \times b} = Q_A \times Q_b$

$\delta(\langle y_a, u_b\rangle, c) = \langle \delta(u_a, c), \delta_B(u_B, c)\rangle$

$S = \langle S_a, S_b \rangle$

$T = \{\langle t_A, t_B\rangle \mid t_A \in T_A, t_B \in T_b\}$ – допускает, если оба автомата допускают.

Подобным образом можно сдать объединение, ксор, ... (см следствие)

A – регулряный. $\lhd \varphi^{-1}(A)$

$\varphi : \Sigma \to \Pi^*$

Рис. 1.20: homomor

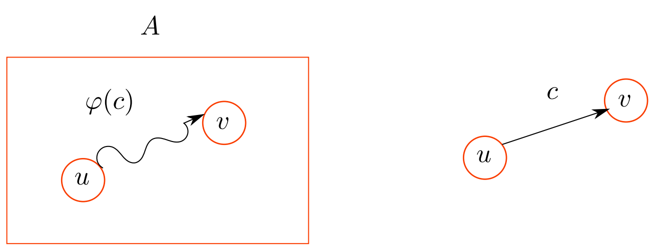


Рис. 1.21: obr-homomor

■

Следствие 1. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – регулярные языки

$f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$

$A = \{x \mid f(x \in A_1, x \in A_2, \ldots, x \in A_n)\}$

То A – регулрный. Доказательство не меняется, просто терминальными объяляем те, которые подходят под функцию

Пример. $0^{2n}1^{2n}$ – нерегулярный

$\varphi : \begin{cases} 0 \to 00 \\ 1 \to 11 \end{cases}$

$A = \varphi\left(0^N 1^n\right)$

$0^n 1^n = \varphi^{-1}(A)$

1.14 Алгоритм Хопкрофта

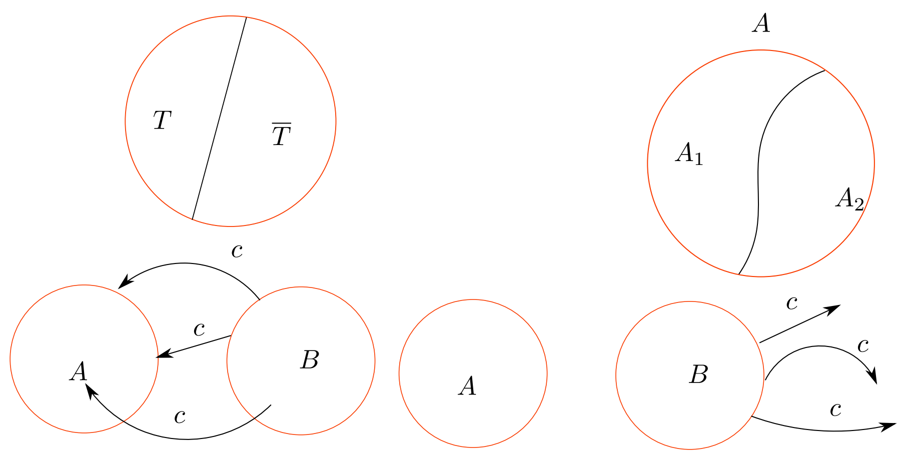


Рис. 1.22: classes

Хотим разбить на классы по различимости, чтоб бегать по ним за линию. Также нам потребуется список входящих рёбер по символу.

Пары состояний, в которых либо по символу все идёт из одного в другой, либо все ведут не в A.

Если есть и те, и те, разобъём их на ведущие в и не в.

Рассмотри Dequeu, которая будет хранить классы, которые могут ещё повлиять на разделение других.

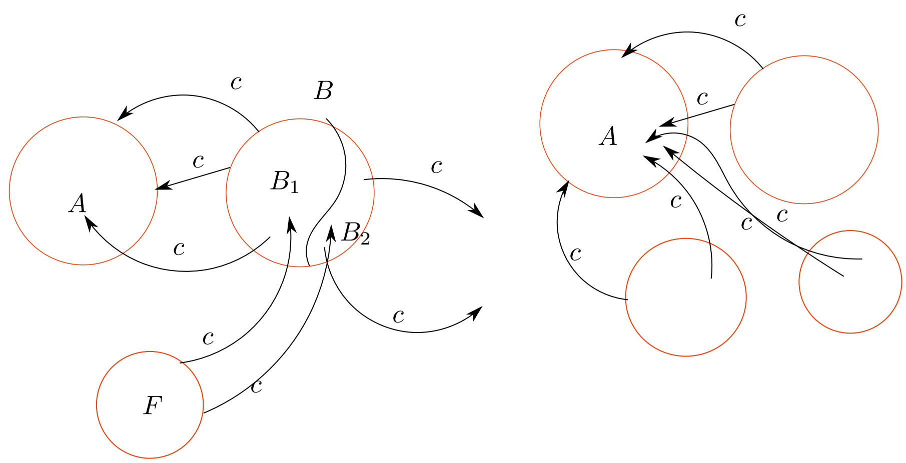


Рис. 1.23: nablud

$\forall B : \exists u \in B \quad \delta(u, c) \in A \implies \forall u \in B \quad \delta(u, c) \in A$

Если A – хороший, то он не будет влиять на разбиение других. Если нет, разбиваем все, что идут в него и делаем его хорошим.

В очереди будем хранить пары $\langle A, c\rangle$ – состояние, символ, чтобы не разбивать сразу по всем символом (потому что это неудобно)

Если мы разбиваем B, то нужно положить $\langle B_1, c\rangle \quad \langle B_2, c\rangle$

Хотим удалять, но удалять из очереди непоятно как. Но мы храним номер и одной половине оставляем старый, а другой даём новый. Так, если в очереди уже было состояние, то нужно добавить только по новому номеру

Каждая вершина просматривается n раз (столько может уменьшаться), рёбер $n \cdot c$

Алгоритм делает всё за $n^2 S + n^2$

Оптимизация 1:

$\lessdot \langle B, d\rangle$ – хорошая. Оно разобъётся $\langle B_1, d\rangle \quad \langle B_2, d\rangle$ – эти уже могли стать плохими. Но разбивать по обеим парам не нужно, т.к. разбивание по одной также сделает другую хорошей. Поэтому при разделении будем класть только ту, которая меньше

Если $\langle B, d\rangle$ – плохой, то надо положить обе (добавим новую)

Теперь оно работает за $n \log n S + n^2$

Оптимизация 2:

При разделении объявим новым классом тот, который указывает в C. Так у нас ... <пересмотреть лекцию и понять почему оно работае хорошо>

Дальше нам нужно уметь удалять из нашей структуры, можно либо связный список, либо hash-set

1.15 КС (контекстно-свободные) грамматики. Лекция 11 мая

TODO на пол пары

Пример.

$$A \to \varepsilon$$
$$A \to (A)$$
$$A \to AA$$

Определение 28. Грамматика называется право-линейной, если каждая правая часть задержит не более одного нетерминала и этот нетерминал находится на последнем месте (Все правила имеют вид $A \to \alpha B \quad \alpha \in \Sigma^* \quad A \to \alpha$)

Теорема 19. Язык A регулярный $\iff$ A задаётся проволинейной грамматикой.

Доказательство.

$\Longrightarrow$ $\lhd$ ДКА для языка A. $\langle \Sigma, Q, S, T, \delta \rangle$

$N = Q \quad S = S \quad \delta$ – правила:

Если из X переходим в Y по символу c, то добавляем $X \to cY$

Для терминального состояния T добавляем правило $T \to \varepsilon$

По построению видно, что всё правильно =)

$\langle s, xy \rangle \vdash^k \langle U, y \rangle$

$S \to^k xU$

$\Longleftarrow$ Строим НКА с ε-переходами

$\langle \Sigma, N, S, P \rangle$ – грамматика

$Q = N \cup \{T\} \quad S = S \quad \delta :$

$A \to \alpha B$

1. $\alpha = \varepsilon \quad A \to B$ по ε
2. $\alpha = c \quad$ переход по c
3. $\alpha = c_1 c_2 \ldots c_k \quad$ промежуточные вспомогательные состояни по одному символу

$A \to \alpha$ – сделать терминальное состояние.

■

Следствие 2. $Reg \subseteq CF \quad Reg \neq CF$

Замечание. Почему контестно-свободные. Потому что нет контекста. Можно дальше ещё обощить

Иерархия Хосмкого. У нас есть некоторое неравноправие, слева всегда стоит только один символ. Давайте разрешим там тоже несколько символов.

Формальная грамматика нулевого класс – как грамматика, только слева стоит произвольная строка $\Gamma = \left\langle \Sigma, N, S, P \subseteq N^+ \times (N \cup \Sigma)^* \right\rangle$

$0^n 1^n 2^n$ – не задать даже CF грамматикой, но можно формальной грамматикой нулевого класса

$$
\begin{gathered}
S \to ZT \\
T \to ABCT \\
T \to \varepsilon \\
BA \to AB \\
CB \to BC \\
CA \to AC \\
ZA \to 0Z \\
Z \to Y \\
YB \to 1Y \\
Y \to X \\
XC \to 3X \\
X \to \varepsilon
\end{gathered}
$$

Грамматики нулевого класса задают все языки, порождаемые Машины Тьюринга

CG (Chomsky)

CG_1 – контекстно зависимые грамматики. Правила обладают контекством $\xi A\eta \to \xi\alpha\eta \quad \xi, \eta \in (\Sigma \cup N)^*$ КЗГ

$CG_2 = CFG$

$CG_3 =$ праволинейные грамматики

Определение 29. Неукарачивающая грамматкиа. $\alpha \to \beta \quad |\alpha| \leqslant |\beta|$

Грамматику выше можно сделать такой. Некоторые нет.

1.16 Выводиться ли слово в заданной КС

Определение 30. Г в НФХ (нормальная форма Хомского)

$A \longrightarrow BC - -A \longrightarrow c$

(а также $S \to \varepsilon$, тогда S не встречается в правых частях)

1. В правых частях только N, кроме правил $A \to c$

   $cN_c \quad N_c \to c \quad A \to \alpha c\beta \quad A \to \alpha N c\beta$

   - $A \to \varepsilon$ – эпсилон правила
   - $A \to B$ – цепные правила
   - $A \to BC$ – хорошие правила, мы таки любим, остальные враги
   - $A \to N_1 N_2 \dots N_k, k \geqslant 3$ – длинные правила

   Пример. $S \to (S)S \quad S \to \varepsilon$

   $S \to ASBS \quad A \to (\quad B \to) \quad S \to \varepsilon$

   Легче всего избавиться от длинных правил.

   $A \to N_1 N_2 \dots N_k$

   $A \to N_1 Y_1 \quad Y_1 \to N_2 Y_2 \quad \dots \quad Y_{k-2} \to N_{k-1} N_k$

   Пример. $S \to AX \quad X \to SY \quad Y \to BS \quad A \to C \quad B \to) \quad S \to \varepsilon$

   Удаление ε-переходов:

   (a) Найдём ε-переходы. $A \implies {}^*\varepsilon$

   $A \to \varepsilon \quad B \to AA \quad C \to AB$ — все они ε-порождающие

```
                        while changes:
                            for A -> alpha:
                                Если все нетерминальные в alpha --
     epsilonпорождающие-
                                    то пометить A как epsilon
    порождающий-
```

$B \implies {}^k\varepsilon \quad k \quad k \to \min$ алгоритм не пометил B как ε-порождающую

$B \implies C \implies \dots \implies \varepsilon$

$B \implies CD \implies \dots \implies \varepsilon$

C и D – были порождены на $k-1$ шаге, значит и B тоже должен был быть помечен

(b) $A \implies {}^*\varepsilon$

$B \implies AC$. Добавим правило $B \implies C$

$B \implies CA$. Добавим $B \implies C$

Если S — ε-порождающий, заведём новое стартовое состояние и правило $S' \to S \quad S' \to \varepsilon$

Пример. $S \to AX \quad X \to Sy \quad X \to Y \quad Y \to BS \to Y \to B \quad A \to (\quad B \to) \quad S' \to \varepsilon \quad S' \to S$

Граф цепных правил

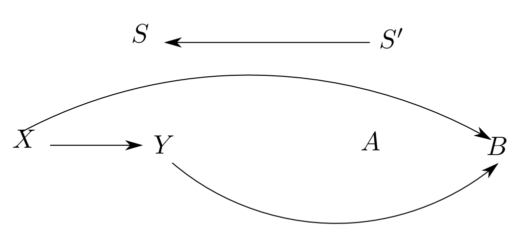


Рис. 1.24: chain-graph

Транзитивное замыкание $A \to B \quad B \to \alpha \quad A \to \alpha$

Пример. $S \to AX \quad X \to SY \quad X \to BS \quad X \to (\quad Y \to BS \quad Y \to) \quad A \to (\quad B \to) \quad S' \to \varepsilon \quad S' \to AX$

() ()

1.17 Алгоритм Кока-Янгера-Касами (КЯК) Cock, Yanger, Kasami CYK

Принимает на вход грамматику в НФХ и слово $x \quad len(x) = n \quad x[0 \dots n-1]$

$d_a[l][r]$ – можно ли из нетерминала a породить фрагмент нашего слова $x[l \dots r-1]$

$$d_A[l][r] = \bigvee_{A \to BC} \bigvee_{k=l+1}^{r-1} (d_B[l][r] \wedge d_C[l][r]) \quad r - l > 1$$

$$d_A[l][l+1] = \begin{cases} 1 & , A \to x[l] \in \Gamma \\ 0 & , \text{иначе} \end{cases}$$

$ans = d_s[0][n]$

```
    for len = 2 ... n:
        for l = 0 ... n-len:
            r = l + len:
                ...
```

Итоговая сложность $|\Gamma|\, n^3$

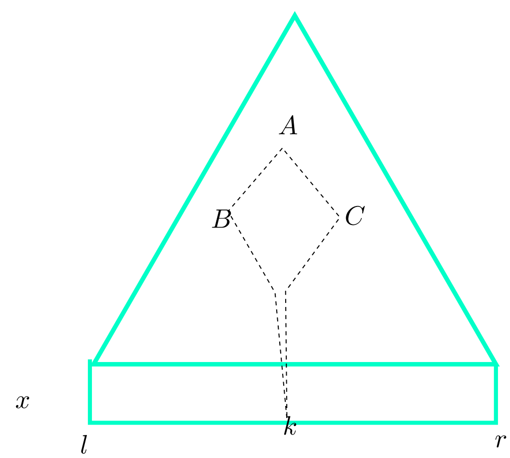


Рис. 1.25: cyk-algo

Пример. $(0|1)^*00(0|1)^*$ – слова с двумя нулями подряд

Можно написать автомат. Он распознаёт строку

Грмамматика $S \to (S)S \quad S \to \varepsilon$

С одной стороны мы говорим как порождать слова. С другой стороны с помощью алгоритма выше можно проверять выводиться ли слово в КС-грамматике.

Пример. Грамматика для палиндромов

$S \to aSa \quad S \to bSb \quad S \to \varepsilon$. Проверить что слово палиндром можно также например стэком, дойдя до середины

1.18 Автомат с магазином памяти. МП-автомат, Стековая машина, Автомат со стэком, Push-Down-Automaton (PDA)

Придётся делать НКА, потому что мы не можем чётко знать что нужно хранить (пример слова азканчиваюиеся на 001, он не знает когда нужно выходить на конец, а просто рассматривает вохможность всегда когда она есть)

В стэке изначально находится маркер дна. Его не надо вынимать или копировать.

В рамках перехода. включается два параметра: символ на которым мы сейчас c (указатель на ленте) и верхний символ в стэке A.

При переходе мы можем изменить стэк: $c, A/\alpha$ – по символу c мы переходим, убираем A и кладём в стэк α

Пример. Будем хранить баланс в унарной системе

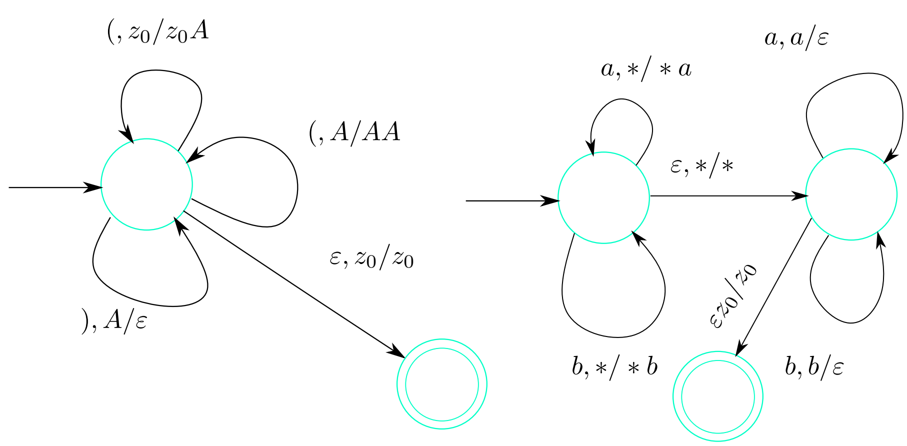


Рис. 1.26: brack-stack

Входной Алфаыит Σ

Стэковый алфавит Π

Состояния Q

Стартовое состояние $S \in Q$

Допускающее состояние $T \in Q$

$\delta : Q \times (\Sigma \cup \varepsilon) \times \Pi \to \mathscr{P}_{<+\infty}(Q \times \Pi^*)$ – Powerset $_{<+\infty}$ – семейство конечных пожмножеств.

Теорема 20. L – контекстно-свободный $\iff$ L распознаётся МП-автоматом

1.19 МП-автоматом с допуском по пустому стэку

Определение 31. Нету терминальных состояний, но теперь можем снимать маркер дна.

Допуск, если полностью опустошили стэк.

Определение 32 (операция переходит за один шаг)**.** $\langle q, x, \gamma\rangle \vdash \langle r, y, p\rangle$

состояние-вход(слово)-стэк

Определение 33 (МП-автомат-язык)**.** $L(A) = \{x | \langle s, x, z_0\rangle \vdash^* \langle t, \varepsilon, \varepsilon\rangle\}$

Лемма 8. Допуск по допускающему состоянию, допуск по пустому стэку

Доказательство. ■

КС $\implies$ МП-автомат. строим МП-автомат с допуском по пустому стэку (ДПС)

$\Sigma, \Pi = \Sigma \cup N, Q = \{st\}, S = st, z_0 = S, \delta$

$A \to \alpha \implies \varepsilon, A/\alpha$

$A \to c \implies c, c/\varepsilon$

$S \implies \xi = xA\zeta \implies x\alpha\zeta$

$\langle st, xy, S\rangle \vdash^* \langle st, y, \alpha\rangle$ ■

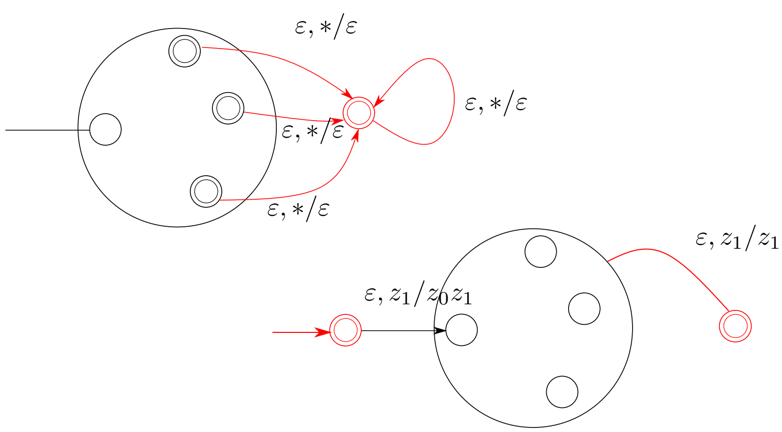


Рис. 1.27: ekvimp

Определение 34 (LL(k) грамматики)**.** Если можно подсмотрев на k символов точно определить какое правило применить (детерминированность)

МП-автомат $\implies$ *КСГ.* Автомат $\Sigma, \Pi, Q, s \in Q, z_0 \in \Pi, \delta$

КСГ $\Sigma, Q \times P \times Q[pAq]$,

состояние P символ A перейдём в r с состояни

$L[pAq]) = \{x | \langle p, x, A\rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, \varepsilon\rangle\}$

$S \to [sz_0q_1] \quad S \to [sz_0q_2] \quad \dots \quad S \to [sz_0q_k]$

$p \to r \quad c, A/\alpha$

$c \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

1. $\alpha = \varepsilon$ должно быть $q = r$

   $[pAr] \to c$

2. $|\alpha| = 1 \quad \alpha = B$

   $[pAq] \to c[rBq]$

3. $|\alpha| \geqslant 2 \quad \alpha = B_1B_2 \dots B_k, k \geqslant 2$

   $\forall u_1, u_2 \dots, u_{k-1} \in Q \quad \left(|Q|^{k-1}\right)$

   $[pAq] \to c[rB_1u_1][u_1B_2u_2] \dots [u_{k-1}B_kq]$

■

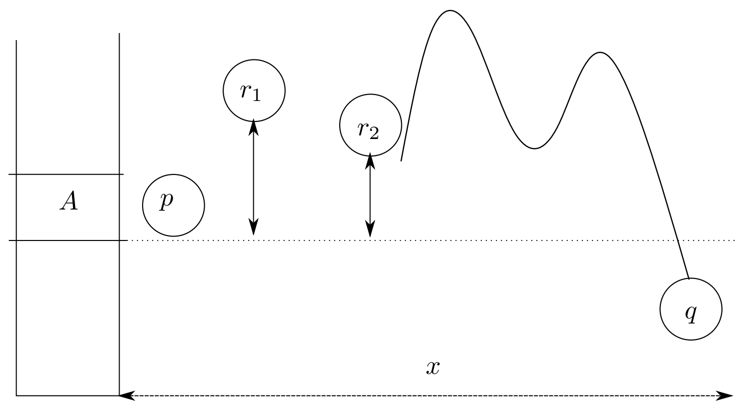


Рис. 1.28: klast-snimat

МП-автомат $A \mapsto \Gamma \overset{\text{НФХ}}{\mapsto} \Gamma' \to A'$

A' кладёт в стэк не более двух символов и эквивалентен A!

Пример. $\Sigma, x_1, x_2, \ldots, x_n$ – множество слов

$\Sigma' = \Sigma \cup \{1, \ldots, n\}$

$L : S \to \varepsilon, S \to x_i S i$

$3121 x_1 x_2 x_1 x_3$

L – КС

Теорема 21 (Лемма о разрастании (накачке boost) для КС). L - КС-язык

$\exists n \forall w \in L, |w| \geqslant n \quad \exists u, v, x, y, z : w = uvxyz \quad |vxy| \leqslant n \quad vy \neq \varepsilon \quad \forall k \geqslant 0 uv^k xy^k z \in L$

Доказательство. $\sqsupset \Gamma$ – КСГ в НФХ для L

Γ содержит m нетерминалов

выберем $n = 2^m$

Лемма 9. $\sqsupset w \in L \quad |w| \geqslant n$

Тогда в дереве разбора w существует такой нетерминал A, что у него в собственном поддереве тоже есть нетерминал A

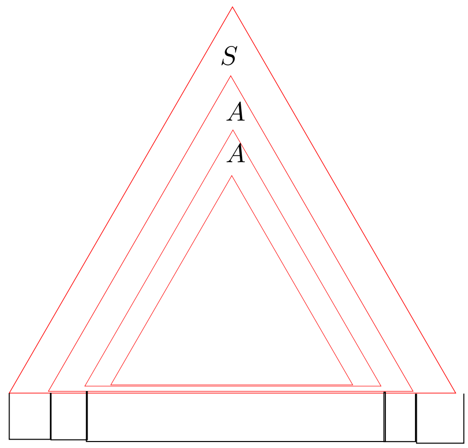


Рис. 1.29: prostaya-kartinka

Доказательство. Допустим нет, тогда , значит суммарное количество листьев не более 2^{m-1}?! $(n = 2^m)$ ■

Выберем пару $A - - - - A$, у которой верхний нетерминал самый глубокий. В её поддереве таких пар нет (мы взяли самую глубокую), поэтому высота дереве в рёбрах не превышает m

Крона этого поддерева $|t| \leqslant 2^h = 2^m = n$

То, что справа и слева от поддерева A по листья назовём u и z

Внутри по поддереву нижнего A Разделим на vxy

$|vxy| \leqslant n$, как и требовалось

Т.к. у верхнего A есть два сына, нижнее А лежит в либо правом, либо левом поддереве. Значит либо v либо y содержат хотя бы один символ (от другого сына верхнего A) ■

Теорема 22. Язык $0^n 1^n 2^n$ – НЕ КС

Доказательство. $\triangleleft n \quad w = 0^n 1^n 2^n$

$|vxy| \leqslant n$, соотвественно не может содержать одновременно 0 и 2

$k = 2 \quad uv^2xy^2z$

длина увеличилось, либо количество 0 n, либо количество 2 n, значит их не треть, слово не из языка. ■

Пример. $L = 0^n 1^n 2^m$

$S \to AB \quad A \to 0A_1 \quad A \to \varepsilon \quad B \to 2B \quad B \to \varepsilon$

$L = 0^n 1^m 2^m$ – тоже КС

$L_1 \cap L_2 = 0^n 1^n 2^n$ – Не КС

Замечание. Автомат с двумя стэками распознаёт вообще любые языки

Теорема 23. $L \in CF \quad L_2 \in Reg \implies L_1 \cap L_2 \in CF$ (можно рассмотреть произведение обычного автомата и автомата со стэком)

Теорема 24. Язык тандемных повторов на неодносимвольным алфавитом не является КС.

$\lhd n \quad 0^n 1^n 0^n 1^n$

Если vxy целиком какой-то блок, берём $k = 1$ и доказано

Если два блока: Если не посередине, то берём $k = 2$ и две не равные части получаются

Если посередине $0^a 1^b 0^n 1^n$

Замечание. Существуют КС языки, такие, что дополнение не КС