

Математический анализ, 3 семестр

Коченюк Анатолий

2 декабря 2021 г.



## Глава 1

# Анализ нескольких переменных. Функциональные ряды. Теория меры, Криволинейные интегралы.

литература – Виноградов, Виноградов-Громов

### 1.1 Вспоминаем

$O \subseteq \mathbb{R}^n$  – открытое,  $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^{N+1}(O)$ ,  $N \in \mathbb{N}$

$[a, x]$  – замкнутый отрезок  $\subset O$ ,  $a \neq x \implies \exists x \in (a, x) :$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^N \frac{d_a^k f(x-a)}{k!}}_{\text{Тейлоровский многочлен порядка } N} + \frac{d_c^k f(x-a)}{(N+1)!}$$

$T_{N,a,f}$

---

**Определение 1.**  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$  – пространство мультииндексов

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

$$\alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$$

$$f_{(a)}^{(\alpha)} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_n} x_n \dots \partial^{\alpha_1} x_1}$$

$$h = (h_1, \dots, h_n) \quad d_a^k f(h) = \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha|=k}} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha$$

## 1.2 Полиномиальная форма Ньютона

$$N \in \mathbb{N} \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$(x_1 + \dots + x_n)^N = \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha|=N}} \frac{N!}{\alpha!} x^\alpha$$

$$\text{Доказательство. } p(x) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^N$$

$$p'_{x_1} = N(x_1 + \dots + x_n)^{N-1} = p'_{x_2} = \dots = p'_{x_n}$$

$$p^\alpha = N(N-1) \dots (N-|\alpha|+1) (x_1 + \dots + x_n)^{N-|\alpha|}$$

$$|\alpha| \leq N+1 \implies p^{(\alpha)} \equiv 0$$

$$|\alpha| < N \implies p^{(\alpha)}(0) = 0$$

$$\text{Неноль получается, только если } |\alpha| = N \quad p^{(\alpha)}(0) = N!$$

Если подставить, то получим:

$$\sum \frac{N!}{\alpha!} x^\alpha \quad h = x - a = x - 0 \quad \blacksquare$$

## 1.3 Оценка однородных многочленов

**Определение 2.**  $\sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha|=N}}^n b_\alpha x^\alpha$  – однородный многочлен степени  $N$

В более широком смысле  $b_\alpha \in \mathbb{R}^m$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad p(tx) = t^N p(x)$ , т.е. однородный многочлен является однородной функцией.

**Утверждение 1.**  $\square p(x) = \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha| = N}} \frac{N!}{\alpha!} C_\alpha x^\alpha \quad C_\alpha \in \mathbb{R}^m, \square M : \|C_\alpha\| \leq M$   
Тогда  $\|p(x)\| \leq M (\sqrt{n}\|x\|)^N$

*Доказательство.*  $\|p(x)\| \leq \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha| = N}} \frac{N!}{\alpha!} |x^\alpha| \underbrace{\|C_\alpha\|}_{\leq M} \leq M \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha| = N}} \frac{N!}{\alpha!} \underbrace{|x^\alpha|}_{|x_1|^{\alpha_1} \dots |x_n|^{\alpha_n}} =$   
 $M \cdot (|x_1| + \dots + |x_n|)^N \leq M (\sqrt{n}\|x\|)^N$   
 $\sum_{k=1}^n |x_k| \cdot 1 \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n 1} = \|x\| \sqrt{n}$  – неравенство Коши, что сумма  
скалярных произведений меньше произведения норм ■

Формула Тейлора-Лагранжа на отображения буквально не переносится  $f \in C^1(O)$   $f(x) - f(a) = d_c f(x - a)$

для отображений нарушается

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} a = 0, \text{ “x”} = 2\pi \quad f(x) - f(a) = 0$$

$$f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

**Теорема 1.** Открытое  $O \subseteq \mathbb{R}^n, n, m \in \mathbb{N} \quad N \in \mathbb{Z}_+, f \in C^{N+1}(O \rightarrow \mathbb{R}^m)$   
 $[a, x] \in O, a \neq x$   
Тогда  $f(x) - T_{N,a,f}(x)$  – остаточный член, который оценивается так:  
 $\|f(x) - T_{N,a,f}(x)\| \leq \frac{1}{(N+1)!} \sup_{x \in (a,x)} \|d_c^{N+1} f(x - a)\|$   
 $\sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha| \leq N}} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x - a)^\alpha$

## 1.4 Отступление

$f, g : O \rightarrow \mathbb{R}^m$ , дифференцируемые в  $O$

$$d \langle f, g \rangle = \langle df, g \rangle + \langle f, dg \rangle$$

$$d \langle f, g \rangle (h) = \langle df(h), g \rangle + \langle f, dg(h) \rangle$$

$$d^2 \langle f, g \rangle = \langle d^2 f, g \rangle + 2 \langle df, dg \rangle + \langle f, d^2 g \rangle$$

$$d^N \langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^N C_N^k \langle d^k f d^{N-k} g \rangle \text{ (проверка как в одномерном случае)}$$

Тогда, если  $v \in \mathbb{R}^m, v = \text{const}$

$$d^N \langle f, v \rangle = \langle d^N f, v \rangle$$

*Доказательство теоремы 1.* Если  $v \in \mathbb{R}^m, v$  – фиксирована

$$g(x) = \langle f(x), v \rangle : O \rightarrow \mathbb{R}, g \in C^{N+1}(O \rightarrow \mathbb{R})$$

$g(x) - T_{N,a,g}(x) = \frac{1}{(N+1)!} d_c^{N+1} g(x-a)$  по уже установленной теореме Тейлора-Лагранжа для функций

$$T_{N,a,g}(x) = \sum_{k=0}^N \frac{\langle d^k f, v \rangle (x-a)}{k!}$$

$$\left\langle f(x) - \sum_{k=0}^N \frac{d^k f(x-a)}{k!}, v \right\rangle = \frac{1}{(N+1)!} \underbrace{\langle d_c^{N+1} f(x-a), v \rangle}_{\leq \|d_c^{N+1} f \dots\| \|v\|}$$

$$|\text{левая часть}| \leq \underbrace{\frac{1}{(N+1)!} \sup_{c \in [a,x]} \|d_c^{N+1} f(x-a)\| \cdot \|v\|}_{\text{не зависит от выбора } v}$$

Если мы возьмём  $v$  остаточным членом, то мы получим оценку остаточного члена, не зависящую от  $v$

$$v = f(x) - \sum_{k=0}^N \frac{d^k f(x-a)}{k!}$$

$$\|v\|^2 \leq \frac{1}{(N+1)!} \sup \dots \|v\| \quad (\text{сократили на } \|v\|)$$

$$\|f - T_{N,a,f}\| \leq \frac{1}{(N+1)!} \sup \dots$$

■

## 1.5 Частный случай: формула конечных приращений

$O \subseteq \mathbb{R}^n, f \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}^m), [a, x] \subseteq O \quad a \neq x$ , тогда

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \sup_{c \in [a,x]} \|d_c f\| \|x - a\|$$

**Следствие 1.** Пусть  $f \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}^m)$ , где  $O$  – открытое множество. Пусть  $K$  – выпуклый компакт,  $K \subseteq O$ . Тогда

$$\forall a, b \in K \quad \|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{c \in K} \|d_c f\| \|b - a\|$$

## 1.6 Об оценке нормы дифференциала

$$p(x) = \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ |\alpha| \neq N}} \frac{N!}{\alpha!} C_\alpha x^\alpha \quad \forall \alpha \|C_\alpha\| \leq M$$

$$\|p(x)\| \leq M (\sqrt{n}\|x\|)^N$$

$$d_c^N f = \sum_{\alpha} \frac{N!}{\alpha!} \underbrace{\frac{f^{(\alpha)}}{N!}}_{=C_\alpha} x^\alpha$$

$$M = \max_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n \\ c \in [a, x] \\ |\alpha| = N}} \left\| \frac{f^{(\alpha)}(x)}{N!} \right\| \implies \|d_c^N f(x - a)\| \leq M (\sqrt{n}\|x - a\|)^N$$

Пусть  $O \subseteq \mathbb{R}^n$  открыто,  $f \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}^m)$

$K$  – компактно в  $O \implies f$  липпшецево на  $K$ , т.е.

$$\exists C \in \mathbb{R} : \|f(x') - f(x'')\| \leq C\|x' - x''\| \quad \forall x', x'' \in K$$

Следует из формулы конечных приращений и оценки дифференциала и теоремы Вейерштрасса:  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \in C(K)$

$$\implies \exists x_1 : \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right\| \leq C_1 \forall x \in K$$

$$M = C_1, \implies \forall x', x'' \in K \quad \|d_c f(x' - x'')\| \leq M (\sqrt{n}\|x' - x''\|) \quad C = M\sqrt{n}$$

## 1.7 Экстремум функции нескольких переменных

**Определение 3.**  $\square O \subseteq \mathbb{R}^n \quad f : O \rightarrow \mathbb{R}$

$a \in O$  называется точкой (локального) максимума, если  $\exists$  окрестность  $V_a : \forall x \in V_a \cap O \quad f(x) \leq f(a)$

Экстремум – максимум или минимум

**Утверждение 2** (Необходимое условие экстремума (безусловного)).

Пусть  $E \subseteq \mathbb{R}^n \quad f$ , такое что  $E \rightarrow \mathbb{R}$ .  $a \in \text{Int } E$  – точка локального экстремума для  $f$ ,  $f$  дифференцируема в точке  $a$ . Тогда

$$d_a f = \mathbb{O} \left( \iff \nabla f = \mathbb{O} \iff \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0 \right)$$

*Доказательство.* Пусть  $a$  — точка максимума. Фиксируем  $h \in \mathbb{R}^n \quad g(t) = f(a+th), t \in \mathbb{R}$ . Для  $g$  точка 0 это точка максимума. Существует окрестность

нуля  $V'(0) : \forall t \in V'(0) \quad g(t) \geq g(0) = f(a)$ ,  $g$  дифференцируема в 0 как композиция, 0 – внутренний для  $D(g) \implies g'(0) = 0$ .

$$g(t) = f(\varphi(t)).$$

$$g'(t) = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

$$0 = \langle \nabla f, h \rangle = (f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n}) \begin{pmatrix} h_1 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

## 1.8 Квадратичные формы

Если  $Q(x)$  допускает представление в виде  $Q(x) \equiv \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_i x_j$ ,  $c_{i,j} \in \mathbb{R}$ . Тогда  $Q(x)$  называется квадратичной формой в  $\mathbb{R}^n$ .

**Замечание.** Любая квадратичная форма есть однородная функция степени 2.

**Замечание.** Не умаляя общности, матрицу коэффициентов  $c_{ij}$  можно считать симметричной. Если это не так, можно перейти в такой форме  $c'_{ij} = \frac{c_{ij} + c_{ji}}{2}$ .

**Определение 4.** Квадратичная форма  $Q(x)$  в  $\mathbb{R}^n$  называется положительно-определённой (положительной) ( $Q > 0$ ), если

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad Q(x) > 0.$$

неотрицательно определённой, если неравенство нестрогое.

$$Q \geq 0 \quad \dots \quad Q < 0, Q \leq 0$$

неопределённая, если  $Q \geq 0 \quad \exists x^1 x^2 \in \mathbb{R}^n : Q(x^1) > 0, Q(x^2) < 0$

**Пример.** 1.  $n = 2 \quad Q(x) = 2x_1^2 - 3x_2^2 \geq 0$

$$Q(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 > 0$$

$$Q(x) = Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2, \text{ если } B^2 - AC, \text{ то форма знакопеременная}$$

$$\text{Если } A \geq 0 \quad B^2 - AC \leq 0, \text{ то } Q \geq 0$$

$$A \leq 0 \dots$$

**Лемма 1.**  $\square \quad Q(x)$  – положительная квадратичная форма в  $\mathbb{R}^n$

$$\text{Тогда } \exists \gamma > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \quad Q(x) \geq \gamma \|x\|^2$$



*Доказательство.*  $\gamma = \min_{\|x\|=1} Q(x) = Q(x_0) > 0 \quad \|x_0\| = 1$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad Q(x) = Q\left(\|x\| \frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\|^2 \cdot Q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq \gamma \|x\|^2 \quad \blacksquare$$

**Утверждение 3** (Достаточное условие экстремума).  $\square f : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \in \text{Int } E, d_a f = 0 \quad \exists d_a^2 f$

Тогда, если  $d_a^2 f > 0$  (положительная квадратичная форма как функция дифференциалов  $dx_1, \dots, dx_n$ ), то  $a$  это точка минимума (строгого)

Если  $d_a^2 f < 0 \dots$

Если  $d_a^2 f \geq 0$ , то  $a$  не точка экстремума

Это не все случаи, есть нестрогие, в которых ДУЭ не применимо

**Пример.**  $f(x, y) = x^4 - y^4$

$$g(x, y) = x^4 + y^4$$

для  $f$  точка  $(0, 0)$  не точка экстремума, а для  $g$  — да

$$\nabla f = (4x^3, -4y^3) = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$$

*Доказательство.* ДУЭ. Пеано в точке  $a$ :

$$f(x) = f(a) + d_a f(x - a) + \frac{1}{2} d_a^2 f(x - a) + o(\|x - a\|^2)$$

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2} d_a^2 f(x - a) + \underbrace{\varepsilon(x)}_{\rightarrow 0, x \rightarrow a} \|x - a\|$$

Если  $Q > 0$ , то по лемме  $\exists \gamma > 0 : Q(x - a) \geq \gamma \|x - a\|^2$

Т.к.  $\varepsilon(x) \rightarrow 0, x \rightarrow a$ , то  $\exists V(a) : |\varepsilon(x)| < \frac{\gamma}{8} \forall x \in V(a) \implies \forall x \in V(a) \quad f(x) - f(a) \geq \frac{1}{2} \gamma \|x - a\|^2 - \frac{\gamma}{8} \|x - a\|^2 = \|x - a\|^2 \left(\frac{3}{8} \gamma\right) > 0 \quad x \neq a \implies a - \text{точка строгого минимума}$

$Q < 0$ , рассмотреть  $-f$

$$Q \geq 0 \implies \exists h_+, h_- \in \mathbb{R}^n : Q(h_+) > 0 \quad Q(h_-) < 0, \text{ не умаляя общности } \|h_+\| = \|h_-\| = 1$$

$$\delta = \min\{|Q(h_+)|, |Q(h_-)|\}$$

Т.к.  $\varepsilon(x) \rightarrow 0, x \rightarrow a$ , то  $\exists$  окрестность  $V_r(a) : |\varepsilon(x)| < \frac{\delta}{4}$

$$|t| < r \quad f(a + th_+) - f(a) = \frac{1}{2} t^2 Q(h_+) + \varepsilon(x) t^2 \geq \frac{1}{2} t^2 \cdot \delta - \frac{\delta}{4} t^2 = t^2 \frac{\delta}{4} > 0$$

$$|Q(h_-)| \geq \delta$$

$$Q(h_-) = -|Q(h_-)| \leq -\delta$$

$$f(a + th_-) - f(a) \leq -\frac{\delta}{2} t^2 + \frac{\delta}{4} t^2 \leq -\frac{\delta}{4} t^2 < 0$$

Таким образом в любой окрестности точки  $a$   $f(x) - f(a)$  знакопеременная

■

## 1.9 Практика. Теорема о существовании

**Теорема 2** (Теорема о неявной функции).  $F(x, y, z) = 0$

$(x_0, y_0, z_0) : F(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  и все функции непрерывны в  $(x_0, y_0, z_0)$

$\implies \exists z = z(x, y) \quad z_0 = z(x_0, y_0) \quad F(x, y, z(x, y)) = 0$  в окрестности  $(x_0, y_0)$

**Пример.**  $x^2 + y^2 - 1 = 0$

$$F(x, y) \quad \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$F'_y = 2y \quad F'_y(x_0, y_0) = \sqrt{2} \neq 0$$

$$y = y(x) \quad y_0 = y(x_0) \quad x^2 + y^2(x) - 1 = 0$$

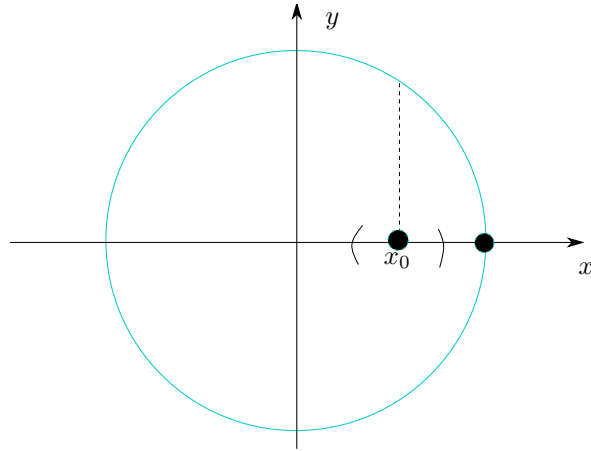


Рис. 1.1: exex

$F(x, y, z)$  И все условия выполняются. как найти  $\frac{\partial}{\partial x} z(x, y)$

$$F(x, y, z(x, y)) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y, z(x, y)) = 0$$

$$\begin{cases} F'_x + F'_z \cdot \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 0 \\ F'_y + F'_z \cdot \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Отсюда выражается

**Определение 5.** Многозначная функция  $f$  – соответствие  $x \mapsto f(x)$  – множество

**Пример.**  $x \mapsto \pm\sqrt{1-x^2} = \{\sqrt{1-x^2}, -\sqrt{1-x^2}\}$

$x^{\frac{1}{2}} = y \quad x = y^2$  – задаёт неявную функцию  $y(x)$

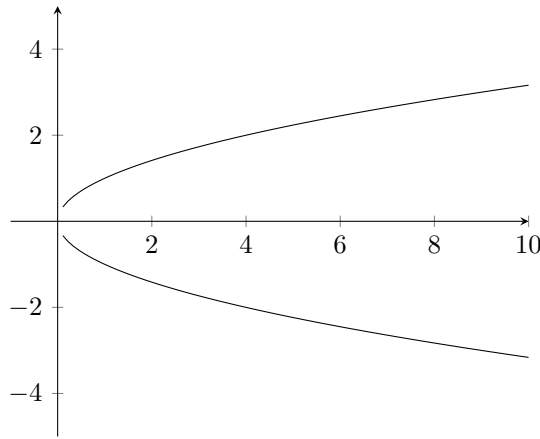


Рис. 1.2:  $x = y^2$

Пусть  $y(x)$  – многозначная функция. Тогда выбор единственного  $y \in y(x)$  для  $\forall x$  задаёт явную функцию (однозначная функция)

Каждый такой выбор задаёт однозначную функцию называемую ветвью. Ветви могут быть непрерывными, например в  $x = y^2$  бесконечность ветвей. Чтобы уточнить, нужно проговаривать непрерывная ветвь, дифференцируемая ветвь и т.д.

**Пример.**  $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$

Задаёт многозначную функцию. Определить для каких  $x$  она будет 1-, 2-, 3-, 4-значной

## 1.10 Лекция 2

$$d_a^2 f \longleftrightarrow \begin{pmatrix} f''_{x_1 x_1}(a) & f''_{x_1 x_2}(a) & f''_{x_1 x_3}(a) & \dots \\ f''_{x_2 x_1}(a) & f''_{x_2 x_2}(a) & f''_{x_2 x_3}(a) & \dots \\ f''_{x_3 x_1}(a) & f''_{x_3 x_2}(a) & f''_{x_3 x_3}(a) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

**Теорема 3** (Критерий Сильвестра). • Если все главные миноры положительны, то соответствующая квадратичная форма положительна ( $a$  – точка минимума).

- Если  $\Delta_1 < 0$   $\Delta_2 > 0$   $\Delta_3 < 0 \dots$ , то квадратичная форма отрицательна ( $a$  – точка максимума)
- $\Delta_k \neq 0$ , и не реализуется ни первый случай, ни второй, то квадратичная форма неопределённая (т.е. экстремума нет)

**Замечание.**  $Q(h) = d_a^2 f(h)$ .  $Q(h) = \langle A \cdot h, h \rangle$   $A = \left( f''_{x_i x_j} \right)_{ij}$

**Задача 1.**  $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$  – исследовать на экстремум

*Доказательство.* Необходимое условие экстремума  $z'_x = 0$   $z'_y = 0$ .

$$z'_x = 2x - y - 2 \quad z'_y = -x + 2y + 1$$

$(x, y) = (1, 0)$ , других нет, потому что определитель хороший.

Достаточное условие экстремума:  $z''_{xx} = 2$ ,  $z''_{xy} = -1$ ,  $z''_{yy} = 2$ .  $\left[ d^2_{(1,0)} f \right] \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

$\Delta_1 = 2 > 0$   $\Delta_2 = 2 * 2 - (-1)^2 = 3 > 0$ , таким образом  $(1, 0)$  – строгий минимум. ■

**Замечание.**  $d^2_{(1,0)} f = 2dx^2 + 2(-1)dx dy + 2dy^2 = dx^2 + dy^2 + (dx - dy)^2 > 0$ , если  $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

$$d^2 f > 0$$

**Задача 2** (без привлечения  $d^2 f$ ).  $z = x^2 y^3 (6 - x - y)$  – исследовать на экстремум.

$$\begin{cases} 0 = z'_x = y^3(6x^2 - x^3 - yx^2)'_x = y^3(12x - 3x^2 - 2yx) = xy^3(12 - 3x - 2y) \\ 0 = z'_y = x^2(6y^3 - xy^3 - y^4)'_y = x^2(18y^2 - 3xy^2 - 4y^3) = x^2y^2(18 - 3x - 4y) \end{cases}$$

$$\text{Либо } x = 0, \text{ либо } y = 0, \text{ либо } \begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases} \quad - (2, 3).$$

$\{(0, t)\}_{\{t < 0\} \cup \{t > 6\}}$  – максимум (нестрогий)

$\{(0, t)\}_{\{t \in (0, 6)\}}$  – максимум (нестрогий)

$(0, 6)$  – не экстремум

$\triangleleft K = \{(x, y) | x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad x + y \leq 6\}$  – компакт

По теореме Больцано-Вейерштрасса существует  $(x_{\pm}, y_{\pm}) \in K$

$$f(x_+, y_+) = \max_K f$$

$$f(x_-, y_-) = \min_K f$$

из распределения знаков следует, что точки границы – точки минимума. Тогда  $(x_+, y_+) \in \text{Int } K$ , значит  $(x_+, y_+)$  удовлетворяет необходимому условию экстремума. Такая точка у нас одна –  $(x_+, y_+) = (2, 3)$ .

## 1.11 Экстремумы и замена переменных

Определение точки экстремума непосредственно переносится на случай метрических пространств

**Лемма 2.** Пусть  $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$  – метрические пространства и  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть  $g(b) = a$   $g$  непрерывна в точке  $b$ .  $a$  – точка максимума (минимума) для  $f$ . Тогда  $b$  – точка максимума (минимума) для  $f \circ g$ .

*Доказательство.* По условию  $a$  – точка локального максимума, т.е. существует окрестность  $U(a) \subseteq X : f(x) \leq f(a) \forall x \in U(a)$ . По определению непрерывности существует окрестность  $V(b) \subseteq Y :$

$$g(y) \in U(a) \forall y \in V(b) \implies f(g(y)) \leq f(a) = f(g(b)).$$

■

**Следствие 2.** Если в условии леммы  $g$  – гомеоморфизм  $X$  на  $Y$ , то  $a$  – точка максимума (минимума) для  $f \circ g$ .

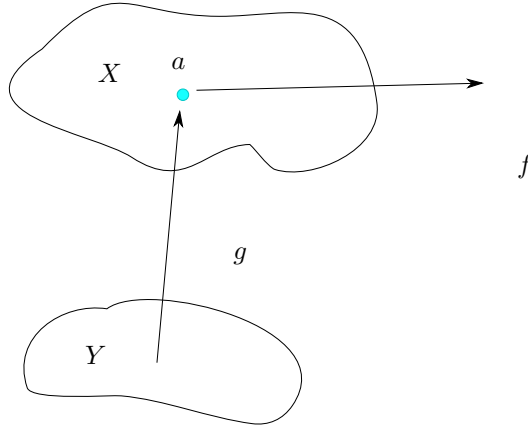


Рис. 1.3: kartinkalemmi

**Следствие 3.** Если  $g$  – локальный гомеоморфизм (существует окрестность  $V(b)$ , такая что в точке  $b$  сужение  $g|_{V(b)}$  – гомеоморфизм на образ  $(g(V(b)))$ ), то сохраняется вывод предыдущего следствия.

**Задача 3.**  $z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$  ( $a, b > 0$ ) – исследовать на экстремум.

*Доказательство.*  $z(x, y) = -z(-x, y) = -z(x, -y)$

$z$  – нечётная по  $x$  и по  $y$ . Значит достаточно рассматривать функцию только в первой четверти.

$$\begin{cases} x = a\rho \cos \alpha \\ y = b\rho \sin \alpha \end{cases}$$

$$(\rho, \varphi) \rightarrow (x, y)$$

$$(0, 1) \times (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \text{Int } K - \text{гомеоморфизм} \left( \varphi = \arctg \frac{y}{x} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

$$z(\rho, \varphi) = ab\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi \sqrt{1 - \rho^2} \stackrel{\rho^2=t}{=} \frac{ab}{2} \sin 2\varphi \cdot \sqrt{1-t}$$

$$\text{Необходимое условие экстремума: } \begin{cases} \frac{2}{ab} z'_\varphi = 0 = 2 \cos 2\varphi \cdot t \sqrt{1-t} \\ \frac{2}{ab} z'_t = 0 = \sin 2\varphi \left( \sqrt{1-t} - \frac{1}{2} \frac{t}{\sqrt{1-t}} \right) = \frac{\sin 2\varphi (2(1-t)-t)}{2\sqrt{1-t}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2\varphi \cdot t\sqrt{1-t} = 0 \\ \sin 2\varphi \cdot \frac{(2-3t)}{\sqrt{1-t}} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos 2\varphi = 0 & \varphi \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 3t = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{4} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = a \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}b}{9} \\ y = b \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}b}{9} \end{cases}$$

■

**Задача 4.**  $f : \underbrace{O}_{\subseteq \mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}$

$$E = \{\varphi_1(x) = 0, \dots, \varphi_n(x) = 0\}$$

Исследование  $f_E$  на экстремум называется задачей об условном экстремуме

**Пример.**  $f(x, y) = x + y \quad E = \{x + 2y = 1\}$

*Доказательство.*  $x = 1 - 2y$

$$f = 1 - 2y + y = 1 - y$$

$$\tilde{f}(x, y) = x^2 + y^2 \quad E = \{x + y = 1\}$$

■

**Пример.**  $f = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \quad E = \{x^2 + y^2 = 1\}$

$$\begin{cases} x = \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{cases}$$

## 1.12 Дифференцирование обратного отображения

$$x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = y$$

$$x \in \mathbb{R}^n \quad y \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = y \quad A \cdot x = y, \quad A = [f] - \text{линейна}$$

$$f(x) = y \text{ имеет единственное решение } \forall y \in \mathbb{R}^n \iff \det A \neq 0$$

**Теорема 4** (об обратной функции для случая одной переменной).  $f : (A, B) \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^1((A, B)), a \in (A, B), f'(a) \neq 0$ , тогда существует окрестность  $V(a)$  :

1.  $\forall x \in V(a) \quad f'(x) \neq 0$  – локальная новорожденность производной
2.  $f|_{(A, B)}$  – инъекция. – локальная обратимость
3.  $f(V(a))$  – откp. – локальная открытость отображения
4.  $(f|_{V(a)})^{-1}$  дифференцируема в точке  $f(a)$  и  $\left((f|_{V(a)})^{-1}\right)' = \frac{1}{f'(a)}$   
– дифференцируемость локально обратного

**Определение 6.**  $f : (X, \Omega_X) \rightarrow (Y, \Omega_Y)$

Если для любого  $O \in \Omega_X \quad f(O) \in \Omega_Y$ , то  $f$  называется открытым отображением

**Пример.**  $f(x) = x^2$  не открытое на  $(-1, 1) \rightarrow [0, 1)$ , но открыто на  $(-1, 0) \cup (0, 1)$ , потому что нет точек, где  $f'(x) = 0$

*доказательство теоремы.* По следствию теоремы Дарбу, если  $f'(a) > 0 (< 0)$ , то существует окрестность  $V(a) : \forall x \in V(a) \quad f'(x) > 0 (< 0)$

$\square f'(x) > 0$  всюду на  $V(a)$ , то  $f$  строго возрастает, значит  $f|_{V(a)}$  – инъекция

$V(a) = (a - \delta, a + \delta) \implies f(a - \delta, a + \delta) = (f(a - \delta), f(a + \delta))$

4  $\Leftarrow$  теоремы о дифференцируемости обратимой функции ■

**Теорема 5** (об обратном отображении). Пусть  $\underbrace{O}_{\text{открытое}} \subseteq \mathbb{R}^n \quad f : O \rightarrow \mathbb{R}^n$  и  $\forall x \in O \quad d_x f$  – обратим (якобиан не обращается в ноль в  $O$ )  
Тогда  $f$  – открытое отображение

*Доказательство.* См. доказательства утверждения 3 в теореме о дифференцировании обратного отображения в книжке Виноградов-Громов. ■



**Теорема 6** (теорема об обратном отображении).  $n \in \mathbb{N}$ ,  $O$  – открытое,  $O \subseteq \mathbb{R}^n$

$f \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}^n)$   $a \in O$ . Пусть  $d_a f$  обратим ( $\iff \mathcal{J}_a f \neq 0$ ), тогда существует окрестность  $V(a)$ :

1.  $\forall x \in V(a)$   $d_x f$  обратим – локальная новорожденность производной
2.  $f|_{(A,B)}$  – инъекция. – локальная обратимость
3.  $f(V(a))$  – откp. – локальная открытость отображения
4.  $(f|_{V(a)})^{-1}$  дифференцируема в точке  $f(a)$  и  $d_{f(a)}(f|_{V(a)})^{-1} = (d_a f)^{-1}$  – дифференцируемость локально обратного

**Лемма 3.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $O \subseteq \mathbb{R}^n$  открыто,  $f : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^1(O)$ ,  $a \in O$  и  $d_a f$  обратим. Тогда  $\forall \sigma > 0$  существует окрестность  $V(a)$ :

1.  $\forall x \in V(a)$

$$\|d_x f - d_a f\| < \sigma$$

2.  $\forall p, q \in V(a)$

$$\|f(p) - f(q) - d_a f(p - q)\| \leq C_1 \|p - q\|$$

3.  $\forall p, q \in V(a)$

$$C_3 \|p - q\| \leq \|f(p) - f(q)\| \leq C_2 \|p - q\|$$

, такое свойство называется билиппшецевость.

Здесь конкретно  $C_2 = \|d_a f\| + \sigma$   $C_3 = \frac{1}{\|(d_a f)^{-1}\|} - \sigma$

*Доказательство.*  $f \in C^1(a) \implies$  существует окрестность  $V(a)$ : 1 верно

$$\triangleleft F(x) = f(x) - d_a f(x) : O \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$d_x F(h) = d_x f(h) - d_a f(h), \quad F \in C^1(O)$$

$$\|f(p) - f(q) - d_a f(p - q)\| = \|F(p) - F(q)\| \leq \underbrace{\sup_{c \in V(a)} \|d_c F\|}_{\leq \sigma} \text{ по теореме о}$$

конечных приращениях, т.к.  $V(a)$  выпуклое

$$\|d_c F\| = \underbrace{\|d_c f - d_a f\|}_{< \sigma}$$

$$\forall p, q \in V(a)$$

$$\|f(p) - f(q)\| \leq \sup_{c \in V(a)} \|d_c f\| \|p - q\|$$

$$\|d_c f\| = \|d_a f + (d_c f - d_a f)\| \leq \|d_a f\| + \underbrace{\|d_c f - d_a f\|}_{< \sigma \text{ в силу 1}} \leq C_2$$

$$\|f(p) - f(q)\| = \|d_a f(p - q) - (f(p) - f(q) - d_a f(p - q))\| \geq \underbrace{\|d_a f(p - q)\|}_{\geq \frac{1}{\|(d_a f)^{-1}\|} \|p - q\|} - \underbrace{\|f(p) - f(q) - d_a f(p - q)\|}_{\leq C_1 \|p - q\|}$$

$$C_3 \|p - q\|$$

■

*доказательство (часть) теоремы об обратном отображении.* Существует  $(d_x f)^{-1} \iff \mathcal{J}f \neq 0$ , но  $\mathcal{J}f \in C(O \rightarrow \mathbb{R})$  по непрерывности  $\implies$  существует окрестность  $V(a) : \forall x \in V(a) \quad \mathcal{J}_x f \neq 0 \implies 1$

$$C_0 = \frac{1}{\|(d_a f)^{-1}\|}, \quad \sigma = \frac{C_0}{4}, \text{ применим лемму к такому } \sigma$$

Не умаляя общности  $V(a) \subseteq V_0(a)$ . Т.к.  $\sigma < C_0 \quad \forall p, q \in V(a)$  в силу неравенства 3 из леммы  $f(p) \neq f(q)$  ( $f|_{V(a)}$  – инъекция.  $\implies f|_{V(a)}$  – биекция на  $f(V(a))$ , т.е.  $g = f|_{V(a)}$  обратимо и 4  $\iff$  правило дифференцирования обратного отображения

■

## 1.13 Практика

**Теорема 7.**  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  дифференцируема в точке  $P$   
 $f$  достигает экстремума в точке  $P \implies \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = 0$

$$d^2 f = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 f$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

**Теорема 8.** Если  $H(f)$  положительно определена в точке  $P$ , то  $P$  – точка минимума. Если она отрицательно определена, то это точка максимума.

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} (dx_1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \dots = \lambda_1 (dy_1)^2 + \dots + \lambda_n (dy_n)^2$$

$$f(dx_1 \dots dx_n) = f(0) + \underbrace{0}_{f'(0)} dx + d^2 f + o()$$

$$f(dx_1 \dots dx_n) - f(0) = d^2 f + o()$$

$$x^T A x > 0 \forall x \neq 0 \iff \widehat{def}$$

$$(x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} \sum a_{1i} x_i \\ \sum a_{2i} x_i \\ \vdots \\ \sum a_{ni} x_i \end{pmatrix} = \sum a_{ji} x_j x_i$$

– квадратичная форма

Пусть  $Q$  – квадратичная форма.  $Q = \sum a_{ji} x_j x_i$ , где  $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$   $Q = x^T A x$ , где  $A^T = A$

Такая матрица  $A$  называется матрицей квадратичной формы  $Q$

$$x = C y \quad Q = (C y)^T A C y = y^T \underbrace{(C^T A C)}_B y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

**Утверждение 4.** Симметричная матрица подобна диагональной матрице.

*Доказательство.*  $A = A^T$

**Пример.**  $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Докажем, что существует собственный вектор.

Пусть  $Q = x^T A x = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j$

Рассмотрим  $Q$  на сфере  $x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0$

$Q$  дифференцируема на сфере  $\implies$  достигает максимума в точке  $(v_1, \dots, v_n)$

$Q$ , максимум с ограничением  $F = 0$ , то  $\mathcal{L} := Q - \lambda F$

У  $\mathcal{L}$  частные производные равны 0 в максимуме

$$\frac{\partial}{\partial x_i} Q = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_j a_{ij} x_i x_j + \sum_{k \neq i} a_{kj} x_k x_j \right) = \sum_j a_{ij} x_j + \sum_j a_{ji} x_j = 2 \sum_j a_{ij} x_j$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 2x_i \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{L} = 2 \sum_j a_{ij} x_j - \lambda 2x_i = 0 \forall i \text{ для } x_j = v_j$$

$Av = \lambda v \implies v$  – вещественный собственный вектор

Так мы для симметричной матрицы нашли вещественный собственный вектор

2. Достроим наш вектор  $v$  до базиса  $(v, e_2, e_3, \dots, e_n)$

Запишем  $A$  в этом базисе:  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ . Далее делаем по индукции

Следовательно существует базис из собственных векторов, где на диагонали стоят собственные числа

Итого, любую квадратичную форму  $Q$  можно заменой переменных свести к каноническому виду  $Q = \sum_i \lambda_i y_i^2$  ■

## 1.14 Лекция

Макаров, Подкорытов: Гладкие отображения и функции

**Теорема 9** (Об открытом отображении).  $\square O \subseteq \mathbb{R}^n$  – открыток,  $f \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ,  $\forall a \in O$   $d_a f$  обратим. Тогда  $f(O)$  – открыто.

**Пример.**  $x = (x_1, \dots, x_n)$   $f(x) = x_1$  – необратимое, схлопывает шар и там нет открытости

*Доказательство.*  $\square \sigma$  : в лемме:  $C_3 > 0, \sigma = \frac{1}{2} \frac{1}{\|(d_a f)^{-1}\|}$

$\delta$  – это половины от “ $\delta$  из леммы”

$$\|f(p) - f(q)\| \geq C_3 \|p - q\| \quad \forall p, q \in B_\delta[a]$$

$$r = \frac{1}{2} C_3 \cdot \delta \quad ? : B_r(b) \subset f(O) \iff \forall y \in B_r(b) \exists x \in O : f(x) = y$$

$$\varphi(x) = \|f(x) - y\| \in C^*(O \rightarrow \mathbb{R})$$

$$\varphi(a) = \|f(a) - y\| = \|b - y\| \leq r$$

$$\begin{aligned} \text{Если } \|x - a\| = \delta, \text{ то } \varphi(x) = \|f(x) - b\| &= \|f(x) - f(a) + f(a) - y\| \geq \\ \underbrace{\|f(x) - f(a)\|}_{\geq C_3 \|x - a\| = 2r} - \underbrace{\|f(a) - y\|}_{< r} &> 2r - r = r \end{aligned}$$

По теореме Вейерштрасса  $\varphi(x)$  достигает на  $B_\delta[a]$  своего минимума

Из оценки  $\varphi(x)$  следует, что  $\min_{B_\delta[a]} \varphi$  Достигается внутри шара

$\psi(x) = \varphi^2(x) = \|f(x) - y\|^2$ . У функции  $\psi(x)$  экстремумы в тех же точках, что и у  $\varphi(x)$

Необходимое условие экстремума  $\exists x_* \in B_\delta(a) : f_{x_*} \psi = 0$

$$\varphi(x) = \langle f(x) - y, f(x) - y \rangle$$

$$d\psi_{x_*} = 2 \left\langle \underbrace{d(f(x) - y)}_{d_{x_*} f}, f(x) - y \right\rangle$$

Т.к.  $df$  обратим в  $B_\delta(a) \implies f(x_*) - y = 0 \implies f(x_*) = y_0$

■

**Теорема 10** (теорема об обратном отображении).  $\square$  открытое  $O \subseteq \mathbb{R}^n$   $f \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ,  $a \in O$ ,  $d_a f$  обратим

Тогда существует окрестность  $V(a)$  :

I  $\forall x \in V(a)$   $d_x f$  обратим

II  $f_{V(a)}$  — инъектив (т.е. обратимо как отображение из  $V(a)$  в  $f(V(a))$ )

III  $f(V(a))$  — открыто

IV  $(f_{V(a)})^{-1} \in C^1(f(V(a)) \rightarrow \mathbb{R}^n)$

$$(f|_{V(a)})'(f(a)) = (f')(a) \text{ (или } d(f_{V(a)})^{-1} = (d_a f)^{-1})$$

$$\|B - A\| < \varepsilon \quad \|B^{-1} - A^{-1}\| < \varepsilon C(A)$$

$$\|(d_a f)^{-1} - (d_x f)^{-1}\| < \varepsilon C \cdot (d_a f) \implies (d_x f)^{-1} \text{ непрерывно зависит от } x$$

второе объяснение: элементы матрицы  $(d_x f)^{-1}$  — результат арифметических действий над частными производными отображения  $f$ ;  $f \in C^1(O) \implies$  элементы  $[(d_x f)^{-1}] \in C(0)$

По аналогичным рассуждениям, если в условии теоремы  $f \in C^r(O \rightarrow \mathbb{R})$ , то локально обратное также из  $C^r$

**Определение 7.**  $\square$   $r \in \mathbb{Z}_+$   $O \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $O$  — открытое,  $f \in C^r(O \rightarrow \mathbb{R}^n)$

$f$  называется диффеоморфизмом класса  $C^r$ , если:

1.  $f$  — биекция на  $f(O)$
2.  $f(O)$  — открытое
3. обратное отображение  $f^{-1} \in C^r(f(O) \rightarrow O)$

**Определение 8.**  $r, O \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $a \in O$   $f$  называется локальным диффеоморфизмом в точке  $a$ , если существует такая окрестность  $V(a)$ , что  $f_{V(a)}$  — гомеоморфизм

---

**Пример.**  $y = e^x$  – диффеоморфизм (глобальный)

$y = x^2$  – локальный диффеоморфизм отдельно либо на положительных, либо на отрицательных числах

$y = \sin x$  – локальный диффеоморфизм в точках не вида  $\frac{\pi}{2} + \pi k$

**Теорема 11** (Об обратном отображении “на языке диффеоморфизмов”). Открытое  $O \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^r$  ( $O \rightarrow \mathbb{R}^n$ )

1. Если  $a \in O$   $d_a f$  обратим, тогда  $f$  локальный диффеоморфизм в точке  $a$  класса  $C^r$
2. Если  $f$  – инъекция и  $d_a x f$  Обратим всюду в  $O$ , то  $f$  – глобальный диффеоморфизм

**Пример.**  $f(x, y) = \begin{pmatrix} e^y \cos x \\ e^y \sin x \end{pmatrix}$

$$f' = \begin{pmatrix} -\sin x e^y & e^y \cos x \\ \cos x e^y & e^y \sin x \end{pmatrix}$$

$$\det f' = e^{2y}(-1) \neq 0$$

$$f(0, y) = f(2\pi k)$$

В каждой точке невырожденный дифференциал, но глобальной инъективности нет

**Пример** (Важные примеры локальных диффеоморфизмов). 1. Полярные координаты  $\phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$

$$\phi : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\phi' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$\det \phi = \cos \varphi \cdot r \cos \varphi - \sin \varphi (-r \sin \varphi) = r > 0$  в  $O$ , значит  $\phi$  – локальный диффеоморфизм в  $O$  класса  $C^\infty$

но не глобальный!  $\phi(r, \varphi + 2\pi k) \equiv \phi(r, \varphi)$

$O_1 = (0, +\infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$   $\phi$  – инъекция в  $O_1 \implies \phi$  глобальный диффеоморфизм в  $O_1$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}$$

2. Цилиндрические координаты.

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad z = t$$

$$\phi' = \begin{pmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_t \\ \nabla y \\ \nabla z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r$$

Таким образом  $\phi$  – локальный диффеоморфизм в области  $(0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

глобальный диффеоморфизм в областях  $(0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \times x\mathbb{R}$  И  $(0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$

$$x^2 + y^2 = R \quad r = |R|$$

$$x^2 + y^2 = z^2 C \leftrightarrow r^2 = Ct^2 \quad \pm r = \tilde{C} = t$$

### 3. Сферические координаты

меряем широту и долготу. 
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi \\ y = r \sin \varphi \cos \psi \\ z = r \sin \psi \end{cases}$$

$$(r, \varphi, \psi) \rightarrow (x, y, z) \quad C^\infty : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_3$$

$$|\psi| = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \cos \psi & -r \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi & r \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & r \cos \psi \end{pmatrix} = r^2 \cos \psi \begin{pmatrix} \sin^2 \psi \begin{pmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi \end{pmatrix} + \cos^2 \psi \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$\phi$  локальный диффеоморфизм в  $(0, +\infty) \times \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

глобальный в  $(0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \leftrightarrow r = R$$

**Задача 5.** Записать уравнение сферы  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R$  в сферических координатах

$x^2 + y^2 = Cz^2$  тоже.

**Задача 6.** В области  $x > 0, y > 0$   $u = \frac{y}{x} \quad v = xy$

$$\psi : (x, y) \rightarrow (u, v)$$

Вопросы:

(а)  $\psi(O) = ?$

(b) является ли  $\psi$  диффеоморфизмом или локальным диффеоморфизмом

(с) Выписать явно функции для обратного к  $\psi$  или локально обратного

## 1.15 Теорема о неявном отображении

Если у нас есть явное выражение  $x = g(y)$ , то можно явно исследовать функцию от одной переменной  $f_E = f(h(y), y)$

**Определение 9.** Говорят, что уравнение  $f(x, y) = 0$  неявно задаёт функцию  $y = g(x)$  или  $x = h(y)$ , если условия  $F(x, y) = 0$  и  $\begin{cases} x \in D(g) \\ y = g(x) \end{cases}$  равносильны.

**Определение 10.**  $F : E \rightarrow \mathbb{R} \quad D \subseteq E$   
 $F$  задаёт  $y = g(x)$  или  $x = h(y)$  в  $D$ , если

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ (x, y) \in D \end{cases} \iff \begin{cases} x \in D(g) \\ y = g(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases} \iff F(x, y) = 0 \quad \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_k) \\ y = (y_1, \dots, y_m) \\ F = (F_1, \dots, F_m) \end{cases}$$

$$\text{“}y = g(x)\text{”} \quad \begin{cases} y_1 = g_1(x_1, \dots, x_k) \\ \vdots \\ y_m = g_m(x_1, \dots, x_k) \end{cases}$$



**Теорема 12** (Теорема о неявном отображении).  $\square$   $O$  – открытое в  $\mathbb{R}^{k+m}$ ,  $F \in C^1 (O \rightarrow \mathbb{R}^k)$

$(a, b) \in O$  ( $a = (a_1, \dots, a_k), b = (b_1, \dots, b_k)$ ) и

1.  $F(a, b) = 0$
2.  $\det F'_y(a, b) \neq 0$

$$F'_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

Тогда:

I Существует открытое множество  $U \times V$  в  $\mathbb{R}^{k+m}$ , где  $U$  – окрестность  $a$ , а  $V$  – окрестность  $b$ : в  $U \times V$  уравнение  $F(x, y) = 0$  неявно задаёт единственную функцию  $y = g(x)$

II  $g$  дифференцируема в точке  $a$

III  $g'(x) = - (F'_y(a, b))^{-1} \cdot F'_x(a, b)$

## 1.16 Практика

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \varphi_1, \dots, \varphi_n$

$$S = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid \begin{cases} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \right\}$$

Задача – найти экстремум  $f$  на  $S$

**Теорема 13** (Необходимое условие). Пусть для  $\left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{array} \right|$

ранга  $m$

$$L := f + \sum \lambda_i \varphi_i$$

Тогда  $x^*$  – условный экстремум, если  $\begin{cases} \varphi_i(x^*) = 0 \forall i = 1, \dots, m \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 \forall i = 1, \dots, n \end{cases}$

$$f(x) - f(P) = (x - P)^T D^2 f(x - P) + o(\dots)$$

В случае поиска на поверхности, рассматриваем касательные к поверхности, если она гладкая

**Теорема 14** (Достаточное условие). Пусть  $f, \varphi_i = C_2(x^* \in U)$

$$\sum_k \frac{\partial \varphi_i(x^*)}{\partial x_k} dx_k = 0 \quad \forall i \quad \sum (dx_k)^2 > 0$$

$d^2\Lambda(x^*)$  знакоопределена для  $dx_k$ , то  $x^*$  – экстремум

Если  $\geq 0$ , то экстремума нет

## 1.17 Лекция

**Теорема 15** (О неявном отображении).  $F(x, y) = \mathbb{O} \iff \begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases}$

$$x = (x_1, \dots, x_k), y = (y_1, \dots, y_m), F = (F_1, \dots, F_m)$$

Если  $F \in C^r(O)$ ,  $O$  – открытое в  $\mathbb{R}^{k+m}$

( $r \in \mathbb{Z}^+$ )

$$1. F(x^0, y^0) = 0$$

$$2. F'_y(x^0, y^0) \text{ – обратима } (\det F'_y \neq 0)$$

Тогда  $\exists$  открытое  $U_{x_0}$  и  $V_{y_0}$  и  $g : U_{x_0} \rightarrow V_{y_0}$ :

$$\text{I } \begin{cases} (x, y) \in U_{x_0} \times V_{y_0} \\ F(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in U_{x_0} \\ y = g(x) \end{cases}$$

$$\text{II } g \in C^r(U_{x_0})$$

$$\text{III } g'(X) = (F'_y(x, y))^{-1} \cdot F'(x, y)$$

**Определение 11** (Уточнение определения функции (отображения), заданной уравнением неявно).  $\square D \subseteq \mathbb{R}^k \quad g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  Скажем, что отображение  $g$  задаётся уравнением

$$1. F(x^0, y^0) = 0$$

$$2. F'_y(x^0, y^0) \text{ – обратима } (\det F'_y \neq 0)$$

неявно, если

$$F(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in D$$

(аналогично для  $x = h(y)$ )

**Пример.**  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad a > 0$

---


$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad y = \sqrt{a^2 - x^2 - z^2} \quad \dots$$

$$\begin{cases} z'_x = ? \\ z''_{xy} = ? \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z(x, y) \equiv a^2$$

$$g(x, y) = z(x, y) \quad F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$$

$$F'_z = 2z \neq 0 \iff x^2 + y^2 < a^2$$

$$2(x + z \cdot z'_x) = 0 \implies z'_x = -\frac{x}{z}$$

$$0 + z'_y \cdot z'_x + z \cdot z''_{xy} = 0 \quad z'_y = -\frac{y}{z} \implies z''_{xy} = -\frac{z'_y \cdot z'_x}{z} = -\frac{xy}{z^3} = -\frac{xy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}^3}$$

Примеры нарушения условия 2 теоремы

**Пример.**  $x = y^3 \quad F(x, t) = x - y^3$

$$F'_y = -3y^2 = 0 \quad y = 0$$

**Пример.**  $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$

$$r^4 = r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \quad r = \sqrt{\cos 2\varphi}$$

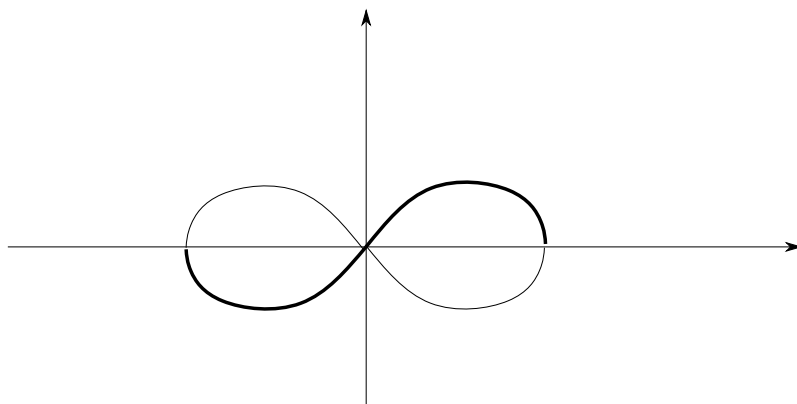


Рис. 1.4: lemniscat

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)$$

$$F'_y = 2(x^2 + y^2) \cdot 2y + 2y = 2y(2(x^2 + y^2) + 1)$$

$$F'_y = 0 \iff y = 0$$

$\int g(x) = y$  – функция, график которой – график  $F$  в I-III четвертях

$$\begin{cases} y = r(\varphi) \sin \varphi \\ x = r(\varphi) \cos \varphi \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$x'_\varphi = r' \cos \varphi + r \sin \varphi$$

$$x'(\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (r' + r) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \underbrace{\frac{-\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}}_{\text{не опр. при } \varphi = \frac{\pi}{4}} + \sqrt{\cos 2\varphi} \right)$$

**Замечание.** Если  $f \in C([a, b])$  и  $\exists \lim_{x \rightarrow a+} f'(a)$ , то  $\exists f'(a)$ , и  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$

**Пример.**  $y(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

$$\varphi \in (0, \frac{\pi}{4})$$

$$y'_x = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi} = \frac{\left( -\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \cdot \sin \varphi + \sqrt{\cos 2\varphi} \cdot \cos \varphi \right)}{-\frac{\sin \varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \cdot \cos \varphi - \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi} \rightarrow \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \implies$$

$$y'_x(x_{\varphi=\frac{\pi}{4}})$$

$$y'_+(0) = 1$$

## 1.18 Поверхности в $\mathbb{R}^n$ ( $k$ -мерные)

Способы задания поверхности:

1. Поверхность уровня

$$F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\{x \in D(F) : F(x) = C\} - \text{линия уровня } C$$

$$F : D - \text{открытое} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \quad F = (F_1, \dots, F_k), C \in \mathbb{R}^k$$

$$(x \in D(F) : F(x) = C) - \text{поверхность уровня } C$$

**Определение 12.**  $\square f : O \rightarrow \mathbb{R}^m \quad O - \text{открытое в } \mathbb{R}^k \quad k, n \in \mathbb{N}$

$f$  называется регулярным в  $O$ , если  $f$  Дифференцируема в  $O$  и в каждой точке  $x \in O \quad f'(x)$  Имеет максимальный ранг ( $\text{rang } f'(x) = \min(k, n)$ )

**Определение 13.**  $\square C \in \mathbb{R}^m \quad F \in C^r(O \rightarrow \mathbb{R}^m), O$  – открытое в  $\mathbb{R}^n$   
 $r \in \mathbb{Z}_+$

$F$  регулярно в  $O$ , тогда поверхность уровня  $C$  называется  $r$ -гладкой (класса  $C^r$ )  $n - m$ -мерной поверхностью

**Пример.**  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, a > 0$

$F(x, y, z) = a^2 \quad m = 1 \quad n = 3 \quad F' = (2x, 2y, 2z)$

$S - 3 - 1 = 2$ -мерная поверхность

## 2 Поверхности-графики

$\square g : D \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m \quad k < n \quad n = k + m$

$\Gamma_g = \{(x, y) : x \in D, y = g(x)\} \in \mathbb{R}^n$

Если  $D$  Ограничено в  $\mathbb{R}^k \quad g \in C^r(D \rightarrow \mathbb{R}^m)$ , то говорят о графике отображения гладкости  $r$  (класса  $C^r$ )

**Пример.** Сфера – объединение бесконечно гладких графиков

## 3 Параметрическое задание

$\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$

Если  $D$  – открытое,  $\Phi \in C^r(D)$  и  $\Phi$  Регулярна в  $D$ , то  $\Phi(D)$  –  $k$ -мерная поверхность с параметризацией класса  $C^r$  (параметризованной поверхностью)

**Пример.**  $S \cap \{x > 0, y > 0, z > 0\} = \left\{ (x, y, z) : \begin{aligned} x &= a \cos \varphi \cos \psi \\ y &= a \sin \varphi \cos \psi \\ z &= a \sin \psi \end{aligned} \quad \varphi, \psi \in (0, \frac{\pi}{2}) \right\}$

$\Phi : (\varphi, \psi) \rightarrow (x, y, z)$

**Теорема 16** (О способах задания гладких поверхностей).  $\square r \in \mathbb{Z}_+, m, k \in \mathbb{N} n = m + k$

$S \subseteq \mathbb{R}^n \quad a \in S$ . Следующие утверждения равносильны:

1.  $\exists$  окрестность  $U_a : U_a \cap S$  –  $k$ -мерный график класса  $C^r$
2.  $\exists$  окрестность  $U_a : U_a \cap S$  –  $k$ -мерная поверхность уровня класса  $C^r$
3.  $\exists$  окрестность  $U_a : U_a \cap S$  –  $k$ -мерная поверхность класса  $C^r$  заданная параметрически

*Доказательство.*

---

1  $\implies$  2  $U_a \cap S = \{(x, y) : x \in D \quad y = g(x)\}$  (после перенумерации, если требуется)

$$= \{(x, y) : F(x, y) = 0\} \quad F = y - g(x)$$

$F$  определена на  $D \times \mathbb{R}^m$   $F : D \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $F \in C^r(D \times \mathbb{R}^m)$

$F'_y = E_m$   $F'$  содержит  $E$  как минор  $\implies$  ранг  $F'$  максимальный

2  $\implies$  1  $F(x, y) = C$   $C \in \mathbb{R}^m$   $F : O \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$U_a \cap S = \{(x, y) : (2)\}$$

$F'$  имеет максимальный ранг  $= m$ . С точностью до нумерации координат можно считать, что  $\det F'_y(a) \neq 0$ . В некоторой окрестности  $\det F'_y(x, y) \neq 0 \implies$  по теореме о неявной функции  $y = g(x)$

1  $\implies$  3  $S \cap U_a = \{(x, g(x)) : x \in D\}$

$$\Phi : x \in D \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow (x, g(x)) \in \mathbb{R}^n$$

$$\Phi' = \begin{bmatrix} & E_k \\ g'_{1x_1} & g'_{1x_k} \end{bmatrix} \implies \text{rang } \Phi' = k \implies \Phi - \text{регулярна в } D$$

3  $\implies$  1  $S \cap U_a = \{(x, y) = \Phi(u) : u \in D - \text{открытое в } \mathbb{R}^k\}$   $\Phi \in C^r(D)$ ,  $\text{rang } \Phi' = k$  - максимальный

$$\text{Не умаляя общности } \det \Phi'_x \neq 0 \quad \tilde{\Phi}(n) = \begin{bmatrix} \Phi_1(u) \\ \vdots \\ \Phi_k(u) \end{bmatrix} \quad \Phi(n) = \begin{bmatrix} \Phi_1(u) \\ \vdots \\ \Phi_n(u) \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} \nabla \Phi_1 \\ \vdots \\ \nabla \Phi_k \end{bmatrix} \neq 0$$

$$\tilde{\Phi}' = \begin{bmatrix} \nabla \Phi_1 \\ \vdots \\ \nabla \Phi_k \end{bmatrix} - \text{обратима}$$

$$\Psi = \tilde{\Phi}^{-1} \quad \tilde{\Phi} : (u_1, u_2, \dots, u_k) \rightarrow (x_1, \dots, x_k)$$

$$(x, y) = \Phi(u) = \left( \tilde{\Phi}(u), \tilde{\Phi}(u) = (x, \tilde{\Phi}(\Psi(x))) \right) \in C^r \text{ по теореме об обратном отображении} \quad u = \Psi(x) \quad \Phi(u) = \Phi(\Psi(x))$$

---

**Определение 14.**  $r$ -гладкая  $k$ -мерная поверхность – поверхность, для которой справедливо одно из утверждений 1-3 предыдущей теоремы

**Пример.**  $\gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{bmatrix} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\gamma|_{(a,b)} \quad \gamma \in C^r(a, b)$

$\text{rang } \gamma' \text{ максимален} \iff \gamma'(t) \neq 0$

**Пример.** в  $\mathbb{R}^n \quad D = \{\langle v_1, x \rangle + v_2 = 0\}$ , где  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$

$F' = v_1$ . Если  $v_1 \neq 0$ , то  $S - n - 1$ -мерная поверхность (гиперплоскость, гиперпространство в  $\mathbb{R}^n$ )

## 1.19 Условный экстремум функций нескольких переменных

$f : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad E_0 \subseteq E$

Условный экстремум  $f$  на  $E_0 \equiv \text{экстремум } f|_{E_0}$

$$\square E_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} F_1(x) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x) = 0 \end{cases}, m \in \mathbb{N}, m \leq n \right\}$$

Эти уравнения называются уравнениями связи, функции  $F_i$  называются функциями связи

Экстремум  $F|_{E_0} \equiv \text{условный экстремум } F \text{ при условии } \langle \text{система уравнений} \rangle$

■

**Теорема 17** (Необходимое условие условного экстремума, геометрическая формулировка).  $\square O$  – открыток  $\subseteq \mathbb{R}^n \quad f, F_1, \dots, F_m \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}), m < n$  и  $F = (F_1, \dots, F_m)$  – регулярно в  $O$ .  $\square a$  – точка локального условного экстремума для  $f$  относительно  $F(x) = 0$

Тогда в точке  $a \quad \nabla f$  представимо в виде линейной комбинации  $\nabla_a F_1, \dots, \nabla_a F_m \quad (\nabla_1 f \in \mathcal{L}_{in} \{ \nabla_a F_1, \dots, \nabla_a F_m \})$

*Доказательство* случай 1:  $m = n - 1$

---


$$\begin{aligned} \text{От противного : } \text{rang} \begin{bmatrix} f'(a) \\ F'_1(a) \\ \vdots \\ F'_m(a) \end{bmatrix} < n \quad \left( \Longleftrightarrow \det \begin{bmatrix} f'(a) \\ F'_1(a) \\ \vdots \\ F'_{n-1}(a) \end{bmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \right. \\ \left. f'(a), \dots, F'_{n-1}(a) \text{ -- линейно зависимы} \implies \exists \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} : \lambda_0 f'(a) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k F'_k(a) = 0 \right. \end{aligned}$$

Если бы  $\lambda_0 = 0 \implies \{F'_k(a)\}_{k=1}^{n-1}$  -- линейно зависимо  $\text{rang}(F'_k(a))_{k=1}^{n-1} < n-1$  -- не максимально

$$\text{Значит } \lambda_0 \neq 0 \implies f'(a) = - \sum \frac{\lambda_k}{\lambda_0} F'_k(a)$$

$$\triangleleft h(x) = \begin{bmatrix} f(x) \\ F_1(x) \\ \vdots \\ F_{n-1}(x) \end{bmatrix} : \text{Oc} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Если неверно, что определитель матрицы производных этого столбца функций равен нулю, то по теореме об обратном отображении  $h(U_a)$  --

$$\text{открытое множество} \implies \exists \delta_0 > 0 : \quad \forall \delta \in (0, \delta_0) \quad \begin{bmatrix} f(a) \pm \delta \\ F_1(a) \\ \vdots \\ F_{n-1}(a) \end{bmatrix} \in h(u_n)$$

$$\implies \forall \text{ Открытого } \tilde{U}_a \quad \exists \text{ точка } x : F_1(x) = F(a) = 0, \dots, F_{n-1}(x) = F_{n-1}(a) = 0 \quad f(x) > f(a) \text{ или } f(x) < f(a)$$

Противоречие --  $x$  -- точка условного локального экстремума

$$m = 1, \dots, n-2 \quad F' \text{ -- максимального ранга } \triangleleft \tilde{h}(a) = \begin{bmatrix} f(x) \\ F_1(x) \\ \vdots \\ F_m(x) \end{bmatrix} \quad \text{Предположим, что}$$

$$\text{rang } \widetilde{h'(x)} < m+1$$

С точностью до нумерации координат  $\widetilde{h'_{x_1, \dots, x_{m+1}}}(a) \neq 0$

$$\begin{aligned} h(x) = \begin{bmatrix} \tilde{h}(x) \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad h'(a) = \begin{bmatrix} h'_{x_1, \dots, x_{m+1}} & \cdots \\ \mathbb{O} & \\ E_{n-(m+1)} & \end{bmatrix} (a) \implies \exists \text{ окрестность} \\ U_a \quad h|_{U_a} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& a\bar{h} \rightarrow \begin{bmatrix} f(a) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{m+2} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} . \text{ Т.к. } h - \text{открытое, то } \exists \sigma > 0 : \forall y \in \mathbb{R}^n : \|y - b\| < \sigma \implies \\
& y \in h(U_a) \\
& \triangleleft y = \begin{bmatrix} f(a) \pm \frac{b}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{m+2} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \implies \exists x \in U_a : f(x) = y \quad F_1(x) = \dots = F_m(x) = \\
& 0 \quad f(x)f(a) \pm \frac{b}{2}
\end{aligned}$$

Противоречие, ранг не меньше максимального

■

## 1.20 Практика

$u$  – непрерывная функция на компакте – достигает наибольшего и наименьшего значения

## 1.21 Лекция. Дополнение : теорема об открытом отображении (общение)

**Теорема 18.**  $\square k, n \in \mathbb{N} \quad k \leq n \quad O - \text{открытое} \in \mathbb{R}^n \quad F : O \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  
регулярная ( $\in C^1$  ранг матрицы Якоби =  $k$ )

Тогда  $F$  является открытым отображением.

Случай  $n = k$  был установлен.

*Доказательство.*  $n < k$

1.  $F$  – проекция.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$$

– очевидно открытое

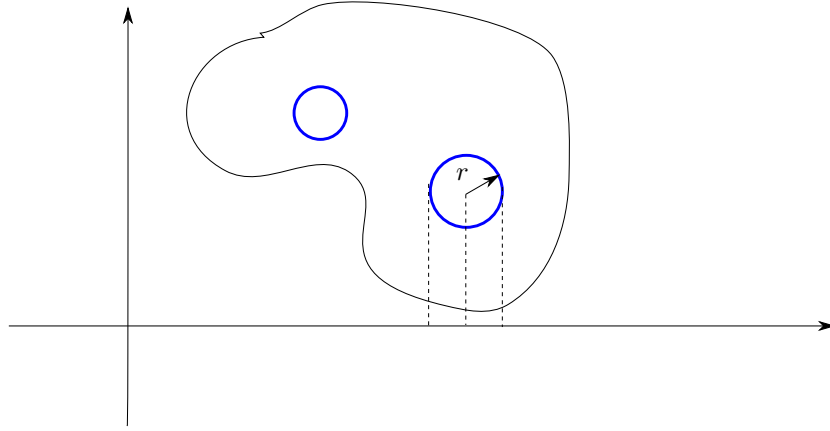


Рис. 1.5: очевидно

$$x, a \in \mathbb{R}^n \quad \|x - a\| < r \implies \|F(x) - F(a)\| \leq \|x - a\| < r, \text{ т.е. } B_{r(a)} \xrightarrow{F} B_r(F(a))$$

$$2. F - \text{регулярно. } F' = \begin{bmatrix} \nabla F_1 \\ \vdots \\ \nabla F_k \end{bmatrix}, \text{ матрица } n \times k$$

После удаления  $n-k$  столбцов возникает ненулевой минор. Не умаляя общности удаляем последние столбцы (иначе перенумеруем переменные  $x_1, \dots, x_n$ )  $\implies F'_{(x_1, \dots, x_n)} = \begin{bmatrix} F'_{1x_1} & \dots & F'_{1x_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ F'_{kx_1} & \dots & F'_{kx_k} \end{bmatrix} \quad \det F'_{(x_1, \dots, x_n)} \neq 0$

$$\phi(x) = (F_1, F_2, \dots, F_k, x_{k+1}, \dots, x_n)^T$$

$$\phi'(x) = \begin{bmatrix} F'_{(x_1, \dots, x_k)} & F'_{(x_{k+1}, \dots, x_n)} \\ 0 & E_{n-k} \end{bmatrix}$$

$\det \phi'(x) = \det F'_{(x_1, \dots, x_k)} \cdot \det(E_{n-k}) \neq 0$   $\phi$  регулярно в некоторой окрестности фиксированной точки  $\implies F = \pi \circ \phi$  – открытое в точке  $a$  в силу произвольности  $a \implies F$  – открыто

■

**Теорема 19** (Необходимое условие условного экстремума (геометрическая формулировка)).  $\square k, n \in \mathbb{N} \quad k < n \quad O$  – открытое в  $\mathbb{R}^n$

$f, F_1, \dots, F_k \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}), \quad F = (F_1, \dots, F_k)$  – регулярно в  $O$

$E = \{x \in O | F(x) = 0\}, a \in E$

Если  $a$  – точка условного экстремума для  $f$  Относительно

$$F(x) = 0$$

, то

$$\nabla_a f \in \text{Lin} \{ \nabla_a F_1, \dots, \nabla_a F_k \}$$

В частности, если  $k = 1$ , то условие  $\iff \nabla_a f$  – коллинеарен  $\nabla_a F$

**Пример.** Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x, y) = (x^2 + (y - 1)^2) \sqrt{x^2 + y^2 - 2y}$$

на криволинейном треугольнике – границе множества

$$D = \{(x, y) | (x + 1)^2 + y^2 \geq 1, \quad (x - 1)^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 2 \quad y \geq 0\}$$

$$r = x^2 + (y - 1)^2$$

$$f = \underbrace{r \cdot \sqrt{r + 1}}_{g(r)}$$

$$\nabla f = g'(r) \cdot \nabla r$$

при  $r = \sqrt{2} - 1$  касание окружности уровня границы окружности

Подозрительные точки: вершины. точки  $T_1, T_2, T_3 : \quad f(T_1) = f(T_2) = f(T_3)$

$$g'(r) = \sqrt{r + 1} + \frac{r}{2\sqrt{r + 1}} = \frac{2(r + 1) + r}{2\sqrt{r + 1}} = \frac{3r + 2}{2\sqrt{r + 1}} \text{ не обращается в ноль при } r \geq 0$$

$K$  – граница  $D$ , компакт  $\implies \max, \min$  достижимы

т.к.  $g(r)$  стремится вверх и  $r(T_1) = r(T_2) = r(T_3) < g(V_1) = g(V_2) = g(V_3) \implies \min_k g = g(T_1) \quad \max_k g = g(V_1)$

*Доказательство.* Не умаляя общности  $a$  – точка глобального условного экстремума для  $f$  относительно  $F(x) = 0$

**Замечание.** Если  $v, v^1, \dots, v^k \in \mathbb{R}^k$  и набор  $v, v^1, v^k$  – линейно зависим, а  $v^1, \dots, v^k$  – ЛНЗ, то  $v \in \text{Lin} \{v^1, \dots, v^k\}$

$$\implies \exists \lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_k : \quad \underbrace{\lambda v + \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j}_{\neq 0} = 0 \implies \lambda \neq 0 \implies v = - \sum_{j=1}^k \frac{\lambda_j}{\lambda} v_j$$

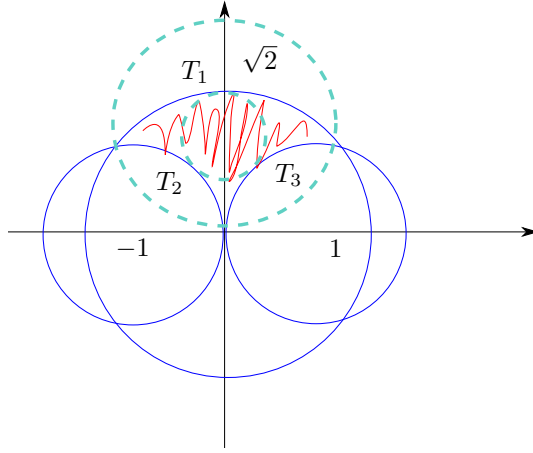


Рис. 1.6: krivoyPrimer

По замечанию достаточно проверить, что  $\{\nabla_a f, \nabla_a F_1, \dots, \nabla_a F_k\}$  – линейно зависим, т.е.  $\tilde{F} = (f, F_1, \dots, F_k)^T$  – не регулярна в точке  $a$ .

От противного: пусть  $\tilde{F}$  – регулярна в точке  $a$ , тогда существует окрестность  $U(a) : \tilde{F}$  – регулярно в  $U(a)$

По теореме об открытом отображении  $\tilde{F}$  – открыто в  $U(a) \implies \exists \varepsilon > 0 : \tilde{F}(U(a)) \supset B_\varepsilon(\tilde{F}(a))$   $\tilde{F}(a) = (f(a), F_1(a), \dots, F_k(a)) = (f(a), 0, \dots, 0)$   $F_i(a) = 0$ , т.к.  $a$  – точка, удовлетворяющая формулам связи.

$$y_\pm = (f(a) \pm \frac{\varepsilon}{2}, 0, \dots, 0)$$

$\|y_\pm - \tilde{F}(a)\| = \frac{\varepsilon}{2} \implies y_\pm \in B_\varepsilon(\tilde{F}(a)) \subseteq \tilde{F}(U(a)) \implies \exists x_\pm \in U(a) : \tilde{F}(x_\pm) = y_\pm \iff f(x_\pm) = f(a) \pm \frac{\varepsilon}{2} \quad F_1(x_\pm) = \dots = F_k(x_\pm) \implies x_\pm \in E?!! \implies$   
точка  $a$  не экстремум, что противоречит нашему предположению ■

## 1.22 Функция Лагранжа

---

**Определение 15** (“большая” функция Лагранжа).  $\mathcal{L}(x, \lambda) =$

$$f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{j=1}^k \lambda_j F_j(x_1, \dots, x_n)$$

где  $F_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, F_k(x_1, \dots, x_n) = 0$

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$

$$\nabla_a f = \sum_{j=1}^k \lambda_j \nabla_a F_j$$

**Теорема 20** (Необходимое условие условного экстремума через дифференциал функции Лагранжа). В условиях последней теоремы  $\exists \lambda_1^*, \dots, \lambda_k^* \in \mathbb{R}$   $d_{(a, \lambda^*)} \mathcal{J} = 0$

В скалярной записи это запишется как:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(a, \lambda^*) = f'_{x_1}(a) - \sum_{j=1}^k \lambda_j^* F'_{jx_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n}(a, \lambda^*) = f'_{x_n}(a) - \sum_{j=1}^k \lambda_j^* F'_{jx_n}(a) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1}(a, \lambda^*) = 0 = F_1(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_k}(a, \lambda^*) = 0 = F_k(a) \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \nabla f = \sum_{j=1}^k \lambda_j \nabla_a F_j \end{cases}$$

**Задача 7.** Найти максимум и минимум квадратичной формы на сфере

$$Q(x) = \sum_{k,i,j=1}^n q_{ij}x_i x_j$$

–  $\forall$  квадратичная форма в  $\mathbb{R}^n$

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

Продолжаем  $[Q] = (q_{ij})_{i,j=1}^n$  – симметричная

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} \iff \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|^2 = 1$$

$$F(x) = \|x\|^2 - 1$$

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = Q(x) - \lambda F(x)$$

$$\nabla F = 2x \text{ (} F \text{ регулярно всюду в } \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{)}$$

$\langle \dots \rangle$

$$\text{Вывод: } \max_{x \in S} Q(x) = \max \{ \lambda : \lambda_i - \text{собственные числа } Q \}$$

$$\square E \subseteq \mathbb{R}^n \quad f \in C(\text{Cl } E \rightarrow \mathbb{R}). \text{ Тогда } \sup_E f = \sup_{\text{Cl } E} f$$

*Доказательство.*  $A = \sup_E f \quad B = \sup_{\text{Cl } E} f \implies B \geq A$  как  $\sup$  по большему множеству.

$B \leq A$ . От противного: существует последовательность  $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subseteq f(\text{Cl } E)$

$$y_k \rightarrow B \implies \exists \{x_k\} \subseteq \text{Cl } E \text{ и } f(x_k) = y_k$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists \tilde{x}_k \subseteq E \quad \|\tilde{x}_k - x_k\| < \frac{1}{k}$$

$\langle \dots \rangle$  вернёмся к этому доказательству позже ■

**Утверждение 5.**  $\square E$  – замкнутое множество в  $\mathbb{R}^n$   $f \in C(E)$  и  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f = L$

Тогда

$$\sup_E f \times f(E) \cup \{L\}$$

*Доказательство.* По определению супремума существует  $\{y_j\}_{j=1}^\infty \subseteq f(E) : y'_j \rightarrow \sup_E f \implies \exists$  последовательность  $\{x_j\} \subseteq E : f(x_j) = y_j$ . В силу обобщённого принципа Больцано-Вейерштрасса  $\exists$  подпоследовательность  $\{x_{j_i}\}_{i=1}^\infty : x_{j_i} \rightarrow x_* \in \hat{\mathbb{R}}_r$ :

- 
1. Если  $x_* = \infty$   $\underbrace{f x_{j_i}}_{\rightarrow L} = y_{j_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \sup_E f$ . Теорема о пределе композиции
  2.  $x_* \neq \infty$   $x_*$  – предельная точка для  $E$ ,  $E$  замкнуто  $\implies x_* \in E$   
Т.к.  $f$  непрерывно на  $E$

$$f(x_*) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{j_i}) = \lim_{i \rightarrow \infty} y_{j_i} = \sup_E f \implies \sup_E f \subseteq f(E)$$

■

## 1.24 Касательные пространства к поверхностям

$\square S$  – гладкая  $k$ -мерная поверхность пространства  $\mathbb{R}^n$   $q \in S$

вектор  $\tau \in \mathbb{R}^n$ , для которого существует гладкий путь  $\gamma : [a, b] \rightarrow S$  и существует  $c \in [a, b] : \gamma'(c) = \tau$  называется касательным в  $S$  в точке  $q$

$$\gamma(c) = q$$

$T_q S$  – набор всех касательных векторов к  $S$  в точке  $q$

$\square \phi$  – гладкая локальная параметризация  $S$  вблизи  $a$  ( $\exists$  окрестность  $U(0)$  в  $\mathbb{R}^n$  и  $\exists$  Окрестность  $V(q) : \Phi(U(0)) = V(q) \cap S$   $\Phi(0) = q$ )

$\gamma^1(t) = (t, 0, \dots, 0)^T$   $\gamma^2(t) = (0, t, 0, \dots, 0)^T$   $\gamma^j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^k$   $\tilde{\gamma}^j = \phi(\gamma^j)$  – гладкий путь в  $S$

$$\tau^j = (\tilde{\gamma}^j)'_t = \Phi' \cdot (\gamma^j)' = j\text{-ый столбец } \Phi'$$

$\tau^1, \dots, \tau^k$  – канонические касательные векторам

**Утверждение 6.**  $T_q S$  – линейное пространство

Локально  $S$  также задаётся системой уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x) = 0 \\ \vdots \\ F_{n-k}(x) = 0 \end{cases} \quad \square \tau \in T_q(S) \quad \tau = \gamma'(c), \text{ где } \gamma : [a, b] \rightarrow S \quad \gamma(c) = q$$

## 1.25 Лекция

**Замечание.**  $\exists \subseteq \mathbb{R}^n$   $f \in C(\text{Cl } E \rightarrow \mathbb{R})$

Тогда  $A := \sup_E f = \inf_{\text{Cl } E} f =: B$

---

*Доказательство.* Очевидно  $A \leq B$ .  $B \leq A$ ?

$$\square x \in \text{Cl } E \implies \exists \{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq E : x_j \rightarrow x, j \rightarrow \infty$$

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad f(x_j) \leq A, j \rightarrow \infty$$

$$f(x) = f\left(\lim_{j \rightarrow \infty} x_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(x_j) \leq A$$

Перейдём к супремуму по  $x : x \in \text{Cl } E \implies B \leq A$  ■

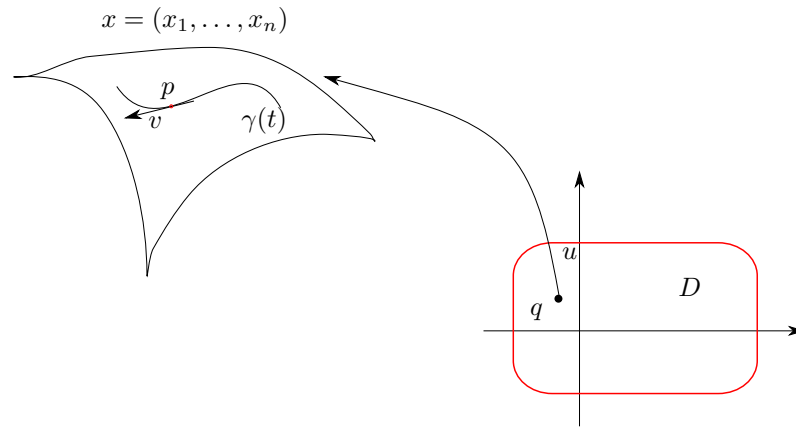


Рис. 1.7: povcrh

$S$ -гладкая,  $k$ -мерная поверхность.  $\gamma : [a, b] \rightarrow S$  – гладкий путь в  $S$

$$\gamma'(c) \text{ для } c \in [a, b] \quad \gamma(c) = p$$

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$\phi'_{u_1}(q) \quad \phi'_{u_k}(q) \in \text{Tr } S$  – канонические касательные векторы

$$\phi'_{u_j}(q) = d_q \phi(e_j)$$

$S$  локально задана как поверхность уровня

$\exists$  окрестность  $U(p)$  :

$$S \cap (U(p)) = \{x \in U(p) : F_1(x) = 0, \dots, F_{n-k}(x) = 0\}$$

$F = (F_1, \dots, F_{n-k})$  – регулярно в  $U(p)$

$$\forall \tau \in \text{Tr } S \quad \forall j = 1, \dots, n-k \quad \tau \perp \nabla_p F_j$$



---

**Утверждение 7.** Если  $s$ -гладкая  $k$ -мерная поверхность (в  $\mathbb{R}^n$ ),  $p \in S$ , то  $\text{Tr } S$  – линейное подпространство  $\mathbb{R}^n$

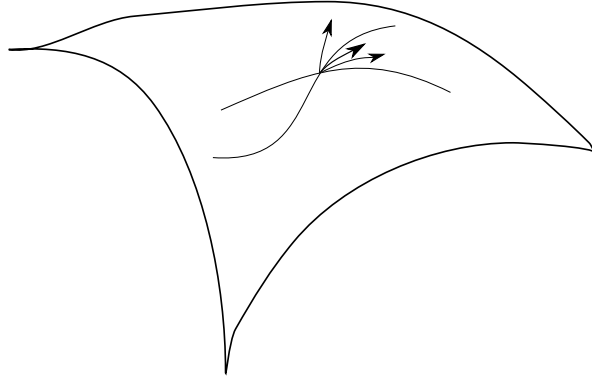


Рис. 1.8: skpoverh

*Доказательство.* Если  $v_1, v_2 \in \text{Tr } S$   $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \implies v = c_1 v_1 + c_2 v_2 \in \text{Tr } S$

Дополним набор  $\nabla_p F_1, \dots, \nabla_p F_{n-k}$  до базиса ортогонального дополнения к  $v \in \mathbb{R}^n$

Добавляем  $h^1, \dots, h^{k-1} \quad \forall j \quad g^j \perp v$

$$\triangleleft \text{систему } n-1 \text{ уравнений} \quad \begin{cases} F_1(x) = 0 \\ \vdots \\ F_{n-k}(x) = 0 \\ \langle x - p, h^1 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle x - p, h^{k-1} \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\text{Матрица} \begin{bmatrix} \nabla_p F_1 \\ \vdots \\ \nabla_p F_{n-k} \\ h^1 \\ \vdots \\ h^{k-1} \end{bmatrix} \text{ имеет максимальный ранг} \implies \text{система задёт (локаль-}$$

но) гладкую  $n - (n - 1) = 1$ -мерную поверхность

По теореме о способах задания поверхности  $\exists$  параметризация  $\gamma : t \in (\alpha, \beta) \rightarrow \Gamma$   $0 \in (\alpha, \beta]$   $quad \gamma(0) = p$

$$\gamma' \perp \nabla_p F_1, \dots, \nabla_p F_{n-k}, h_1, \dots, h_{k-1}$$

$$\implies \gamma'(0) \text{ коллинеарна } v$$

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\Theta t) \quad \Theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\tilde{\gamma}'(t) = \Theta \gamma'(\Theta t)$$

$$\tilde{\gamma}'(0) = \Theta \cdot \gamma'(0)$$

$$\text{Подбор } \Theta \implies \Theta \cdot \gamma'(0) = v$$

■

**Следствие 4.**  $\dim \text{Tr } S = k$

Т.к. канонические касательные линейно независимы,  $\in \text{Tr } S, \implies \dim \text{Tr } S \geq k$

С другой стороны  $\dim (\text{Tr } S)^\perp \geq n - k$  (т.к.  $\nabla_p F_j \in (\text{Tr } S)^\perp$ )

$$v \in \text{Tr } S \iff \begin{cases} \langle \nabla_p F_1, v \rangle = 0 \\ \langle \nabla_p F_{n-k}, v \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p)(v_1) + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(p)v_n = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_1}(p)(v_1) + \dots + \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_n}(p)v_n = 0 \end{cases} \iff d_p F(v) = 0$$

Можно считать, что дифференциалы  $dx_1, \dots, dx_n$  на касательном пространстве связаны системой возникающей при формальном дифференцировании системы  $F(x) = 0$

$$d_p F = 0 \quad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p)dx_1 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(p)dx_n = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_1}(p)dx_1 + \dots + \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_n}(p)dx_n = 0 \\ dx_i(v) = v_i \end{cases}$$

**Следствие 5.**  $\text{Tr } S = d_q \Phi(\mathbb{R}^k)$

Оба объекта линейные подмножества  $\mathbb{R}^n$  размерности  $k$  и содержат  $d_q \Phi(e_1), \dots, d_q \Phi(e^k)$

**Пример.**  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad S_2(\mathbb{R})$

уравнение касательного пространства  $2(xdx, ydy, zdz) = 0$

$$v \in T_{(x,y,z)} S_2(\mathbb{R}) \iff xv_1, yv_2, zv_3 = 0$$

---

$\text{Tr } S$  – касательное линейное пространство

$\text{Lp } S$  – аффинное касательное пространство  $\text{Lp } S = \text{Tr } S + P$

$$x \in \text{Lp } S \quad x - p \in \text{Tr } S$$

$$\text{Lp } S = \{x \in \mathbb{R}^n : d_p F(x - P) = 0\}$$

$$d_p F(x - p) = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(p)(x_n - p_n) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) + \dots + \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_n}(p)(x_n - p_n) = 0 \end{cases}$$

Если  $k = n-1$ , то  $\text{Tr } S$  и  $\text{Lp } S$  называются касательными (гипер)плоскостями

Касательная гиперплоскость к графику функции?

$$S = \Gamma_f = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, y) \in \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_{n-1}) \in O \subseteq \mathbb{R}^{n-1}\} \quad y = f(x_1, \dots, x_{n-1})$$

$$f \in C^1(O)$$

$$F(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = f(x_1, \dots, x_{n-1}) - y$$

$$\angle F \text{ в } O \times \mathbb{R}$$

$$\nabla_{p,y} F = \left( f'_{x_1}(p), \dots, f'_{x_{n-1}}(p), -1 \right)$$

$$x \in \text{Lp } \Gamma_f \iff f'_{x_1}(p)(x_1 - p_1) + \dots + f'_{x_{n-1}}(p)(x_{n-1} - p_{n-1}) - (y - p_y) = 0$$

$$y = f(p_1, \dots, p_{n-1}) + \langle \nabla_{p_1, \dots, p_{n-1}} f, (x - p_x) \rangle$$

**Утверждение 8** (Достаточное условие условного экстремума).  $\square O$  – открытое в  $\mathbb{R}^n$   $f, F_1, \dots, F_{n-k} \in C^2(O \rightarrow \mathbb{R})$   $F = (F_1, \dots, F_{n-k}), p$  – решение системы

$$F(x) = 0$$

$\square$  в точке  $p$  выполнено необходимое условие условного экстремума для  $f$  относительно  $F(x) = 0$ .  $L(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1^*, \dots, \lambda_{n-k}^*)$

Тогда:

- Короткий вариант

Если  $d_p^2 L > 0$ , то  $p$  – условный минимум

Если  $d_p^2 L < 0$ , то  $p$  – условный максимум

Из  $d_p^2 L \geq 0$ , то НЕ следует, что  $p$  не точка условного экстремума

- Подробный вариант:

Если  $d_p^2 L|_{\text{TPS}} > 0$ , то  $p$  – точка условного минимума

Если  $d_p^2 L|_{\text{TPS}} < 0$ , то  $p$  – точка условного максимума

Если  $d_p^2 L|_{\text{TPS}} \geq 0$ , то  $p$  – седловая точка (условного экстремума нет)

**Пример.**  $f(x, y) = x^2 + y^2$  на  $x + y = 1$ . найти условный экстремум.

1-ый способ:  $y = 1 - x$   $g(x) = f(x, 1 - x) = x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$

$g(x)$  имеет минимум в точке  $x = \frac{1}{2}$  (глобальный)  $\implies f(x, y)$  имеет условный (глобальный) минимум в точке  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

2-ой способ:  $\mathcal{J}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x + y - 1)$

$$\begin{cases} 0 = \mathcal{J}'_x = 2x - \lambda \\ 0 = \mathcal{J}'_y = 2y - \lambda \\ x + y = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = y = \frac{1}{2} \\ \lambda = 2x = 1 \end{cases}$$

$$L(x, y) = x^2 + y^2 - (x + y - 1)$$

$$L'' \iff \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$d^2 L > 0$  по короткому  $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  – условный минимум

Наводящие соображения по достаточному условию условного экстремума:

1.  $S = \{x \in O \mid F(x) = 0\}$ . Исследуется  $f|_S$

$$\mathcal{L}(x) = f(x) - \sum \lambda_k F_k(x)$$

$$L = \mathcal{L}(x, \lambda^*)$$

$L|_S = f_L$ , таким образом условный экстремум  $f \leftrightarrow$  условный экстремум  $L$

$\phi$  – локально гомеоморфизм

$p$  – точка условного экстремума для  $L|_S \iff$  Для  $L \circ \phi$  точка  $\phi^{-1}(p) = q$  – безусловный экстремум

$d^2(L \circ \phi) \leftrightarrow d_p^2 L(d_q \phi) + d_p L(d_q^2 \phi)$  – одномерная формула

## 1.26 О задаче отыскания наибольшего и наименьшего значения функции на множестве.

$K$  – компакт,  $f \in C(K)$

$f_k$  не имеет экстремума на  $K \setminus K^* \implies \max_K f = \max_{K^*} f, \min ..$

Если  $K = S_1 \cup \dots \cup S_N$ , где  $S_1, \dots, S_N$  – поверхности различных размерностей,  $S_j \cap S_k \neq \emptyset$

$(S_j)_*$  – множество точек, в которых выполняется НУУЭ (необходимое условие условного экстремума) относительно  $x \in S_j$  (либо нарушается ранг системы, задающей нашу поверхность  $S_j$ )

$K_* = (S_1)_* \cup \dots \cup (S_N)_*$  – если это конечное множество, то можно их уже просто сравнить

**Пример.** Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $f(x, y, z)$  на компактном множестве  $K$  ограниченном поверхностями  $z = 1$  и  $z = x^2 + y^2$

$$S_0 = \text{Int } K \quad S_1 = \{z = 1, x^2 + y^2 < 1\} \quad S_2 = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 < 1\} \quad S_3 = \{(x, y, z) : z = 1, x^2 + y^2 = 1\}$$

на  $S_0$  необходимое условие безусловного экстремума:

$$dF = 0 \iff \begin{cases} 0 = f'_x = y \\ 0 = f'_y = x + z \\ 0 = f'_z = y \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases} \quad (x, 0, -x) \quad f(x, 0, -x) = 0$$

$$\text{На } S_1 \quad g(x, y) := f(x, y, 1) = y(x+1) \quad \begin{cases} g'_x = 0 = y \\ g'_y = 0 = x+1 \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases} \iff (-1, 0)?? \quad \emptyset$$

$$\text{на } S_2 \quad f(x, y, z) = xy + y(x^2 + y^2) = x^2y + xy + y^3 = h(x, y) \quad x^2 + y^2 < 1$$

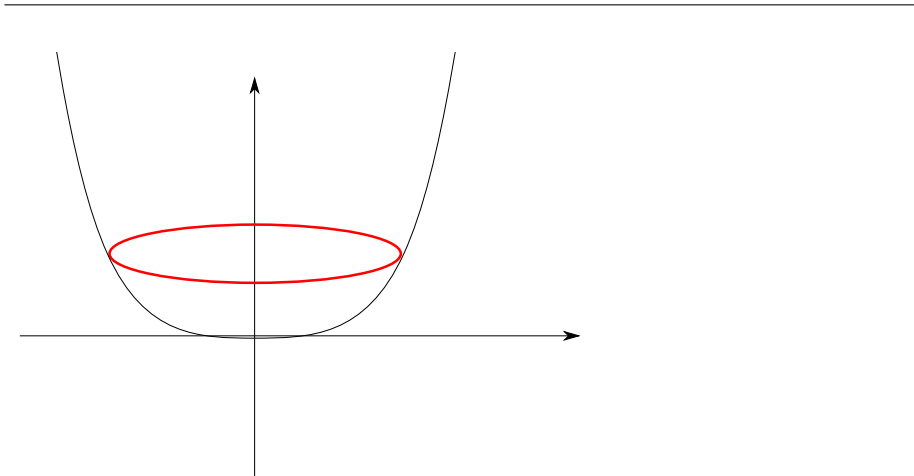


Рис. 1.9: paraplane

$$\begin{cases} h'_x = 0 = 2xy + y \\ h'_y = 0 = x^2 + x + 2y^2 \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$

на  $S_3$   $f = (xy + y)_{x^2+y^2=1} = \sin \varphi (\cos \varphi + 1) = \varkappa(\varphi) \quad \varphi \in [-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} \varkappa'(\varphi) &= \cos \varphi (\sin \varphi) - \sin^2 \varphi \\ &= \cos^2 \varphi + \cos \varphi - (1 - \cos^2 \varphi) \\ &= 2 \cos^2 \varphi + \cos \varphi - 1 \\ &= 2t^2 + t - 1 =: \mu(t) \end{aligned}$$

$$(2t^2 + t)' = 4t + 1$$

$$\varkappa(t = -1) = 0 \quad \varkappa(t = \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) = \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Подозрительные значения:  $0, \pm \frac{\sqrt{12}}{72} \quad \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$$\max_K f = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \min_K f = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

**Пример.** Найти  $\sup_E f$   $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0\}$

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z)e^{-(x+y+z)}$$

$$g(t) = te^{-t}$$

$$f(x, y, z) \leq (3x + 3y + 3z)e^{(x+y+z)} = 3g(t) \leq 3 \cdot \sup_{t \geq 0} g(t) = \frac{3}{e}$$

$$f(0, 0, 1) = 3 \cdot e^{-1} = \frac{3}{e} \leq \sup_{C1E} f \implies \sup_{C1E} f = \sup_E f = \frac{3}{e}$$

## 1.27 Функциональная последовательности и ряды

$$\exists \subseteq \mathbb{R}^n \quad f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ (или } f : E \rightarrow \mathbb{C})$$

$$\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}; \quad f_k : E \rightarrow \mathbb{C}$$

**Определение 16.** Говорят, что функциональная последовательность  $\{f_k(x)\}$  сходится к  $f(x)$  поточечно на множестве  $E$ , если  $\forall x_0 \in E$  числовая последовательность  $\{f_k(x_0)\}$  сходится к  $f(x_0)$

Примеры:

$$1. \quad f_k(x) = x^k \quad E = [0, 1] \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

**Определение 17** (Поточечная сходимость).  $d_k(x) \rightarrow f(x)$  на  $E \iff \forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon, x) > 0 : \forall k \geq N \quad f_k(x) - f(x) < \varepsilon$

**Определение 18** (Равномерная сходимость).  $\sqsubset f, f_k : E \rightarrow \mathbb{C}$ . Говорят, что  $\{f_k\}$  сходится к  $f$  равномерно, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall k \geq N \forall x \in E \quad |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$

**Замечание.**  $\rho_k = \sup_E |f_k(x)|$ , то  $d_k(x) \Rightarrow f(x)$  на  $E \iff \rho_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$

*Доказательство.*

$$\implies \forall k \geq n \implies \rho_k \leq \varepsilon \implies \rho_k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty$$

$$\Leftarrow \rho_k \rightarrow 0 \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k \geq N \quad 0 \leq \rho_k < \varepsilon \implies \forall x \in E \quad |f_k(x) - f(x)| \leq \rho_k < \varepsilon$$

■

**Пример.**  $f_k(x) = x^k \quad \rho_k = \sup_{x \in [0,1]} |f_k(x) - f(x)| = \max \left\{ \sup_{x \in [0,1]} |f_k - f|, |f_k(0) - f(0)| \right\} = \sup_{x \in [0,1]} |f_k(x) - f(x)| = \sup_{[0,1]} x^k = \sup_{[0,1]} x^k = 1$

$$\rho_k \equiv 1 \not\rightarrow 0 \implies f_k \not\Rightarrow f(x) \text{ на } E$$

---

**Замечание.**  $f_k \not\Rightarrow f$  и на  $[0, 1)$

$$E_\delta = [0, \delta], \delta < 1 \quad \rho_k = \sup_{x \in [0, \delta]} |f_k(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, \delta]} x^k = \delta^k \implies \rho_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty \implies f_k \Rightarrow f \text{ на } E_\delta$$

**Замечание.** Если  $\forall j \in \mathbb{N} \quad f_k \Rightarrow f$  на  $E_j$ , то из этого не следует, что  $f_k \Rightarrow f$  на  $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ , но это становится верным при конечном количестве  $E$

## 1.28 Практика

$F(x, y, z) = 0$  – поверхность.  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0 \text{ – уравнение касательной}$$

$$\frac{x - x_0}{\partial F / \partial x} = \frac{y - y_0}{\partial F / \partial y} = \frac{z - z_0}{\partial F / \partial z} \text{ – уравнение нормали}$$

## 1.29 Лекция

**Замечание.** Если  $f_n \Rightarrow f$  на  $E$ , то  $f_n \rightarrow f$  поточечно.

$\square X$  – любое множество.  $\ell_\infty(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}(\rightarrow \mathbb{C}) : f \text{ – ограниченная}\}$

**Определение 19.**  $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$

$\|\cdot\|_\infty$  – отклонение, равномерная норма, Чебышёвская норма

Проверим, что она норма:

1. 0 только на  $f = 0$

2.  $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$

3.  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sup_{\tilde{x} \in X} |f(\tilde{x})| + \sup \dots = \|f\| + \|g\|$$

$$\text{т.е. } \forall x \in X \quad |f(x) + g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$$

$$\text{Переходим к } \sup_{x \in X} \implies \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

$\ell_\infty$  – нормированное пространство.

$$f_n \Rightarrow f \text{ на } X \iff \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \iff \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

**Утверждение 9.**  $\ell_\infty(X)$  является полным нормированным пространством (т.е. в  $\ell_\infty(X)$  из сходимости в себе следует сходимость)



*Доказательство.*  $\triangleleft \{f_n\}$  – сходится в себе в  $\ell_\infty(X)$

$$\implies \forall \varepsilon \exists N : \forall n, m \geq N \quad \|f_n - f_m\| < \varepsilon \quad \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| = \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$$

$$\iff \forall n, m \geq N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

Значит  $\forall x \in X$  числовая последовательность  $\{f_n(x)\}$  – сходится в себе

Т.к.  $\mathbb{R}(\mathbb{C})$  – полное пространство  $\implies \forall x \in X \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ , т.о. возникает  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

1. Почему она ограничена?  $\square N = N(\varepsilon)$  для  $\varepsilon = 1$

$$\forall n \geq N \quad \|f_n(x)\| \leq \|f_N\| + 1$$

$$\|f_n - f_N\| \leq 1 \forall n \geq N \implies \|f_n\| = \|f_N + f_n - f_N\| \leq \|f_N\| + \|f_n - f_N\| \leq \|f_N\| + 1 = C$$

$$\forall x \in X \quad \|f(x)\| \leq C \text{ при } n \rightarrow \infty$$

$$\|f(x)\| \leq C, \text{ переходим к супремуму по } x \text{ и получаем } \|f\| \leq C$$

2.  $\|f_n - f\| \rightarrow 0 \quad b \rightarrow \infty$ ?

$$\triangleleft \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \quad \|f_n - f\| \leq \varepsilon \implies \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$$\implies \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \iff \|f_n - f\| \leq \varepsilon$$

$$\implies \|f_n - f\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

■

Если  $X$  – компакт, то  $C(K) \leq \ell_\infty(K)$

**Замечание.** “Обычная” норма на  $C(K)$  это норма из  $\ell_\infty(K)$

$$\|f\|_{C(K)} = \max_{x \in K} |f(x)|$$

**Теорема 21.** Критерий Коши-Больцано равномерной сходимости в себе для функциональных последовательностей.

$$\square \{f_n\}_{n=1}^\infty : X \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$$

Последовательность  $\{f\}$  является равномерно сходящейся на  $X \iff$  она равномерно сходится в себе, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N \forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon (\leq \varepsilon)$$

**Пример.**  $X = \mathbb{R} \quad f_n = x + \frac{1}{n} \quad f(x) = x \quad f_n \rightrightarrows f$ , но  $f_n(x)$  и  $f(x) \notin \ell_\infty(\mathbb{R})$

*Доказательство.*

---

$\Rightarrow$  Если  $f_n \rightrightarrows f$  на  $X$ , то для  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \quad \|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$   
 $\forall m \geq N \quad \|f_n - f_m\| \leq \|f_n - f\| + \|f_m - f\| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon$   
 $\Leftarrow$  Существование  $f(x) : f_n \rightrightarrows f$ . Проверяем как в доказательстве полноты  $\ell_\infty$   
 $f(x)$  – поточечный предел для  $\{f_n\}$   
 $m \rightarrow \infty$  в условии теоремы  $\Rightarrow \forall n \geq N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$   
 $\varepsilon \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$  на  $X$

■

**Определение 20.**  $\square \{f_n\} : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$   $X$  – любое множество

Говорят, что  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  равномерно сходится на  $X$ , если последовательность частичных сумм равномерно сходится на  $X$

**Теорема 22** (Критерий Коши-Больцано равномерной сходимости для рядов).  $\square f_n : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  равномерно сходится на  $X$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad \forall p \in \mathbb{Z}_+ \quad \left( \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right) < \varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \quad \forall p \in \mathbb{Z}_+ \quad \left\| \sum_{k=n}^{n+p} f_k \right\| < \varepsilon$$

**Теорема 23** (Необходимое условие равномерной сходимости ряда). Если  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  равномерно сходится на  $X$ , то  $f_n(x) \rightrightarrows 0$  на  $X$

**Пример** (необходимое условие не является достаточным).  $f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot f_n(x) \rightrightarrows 0$  на  $\mathbb{R}$ , но  $\sum f_n$  – расходится всюду

**Замечание** (“Популярный” алгоритм исследования функциональных рядов на равномерную сходимость. Найти поточечный предел  $f(x)$  (Если нет поточечной сходимости хотя бы в одной точке, то нет и равномерной на  $X$ ))

2. Выяснить  $\|f_n(x) - f(x)\|_{\ell_\infty(X)} \rightarrow 0?$

**Пример.**  $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$  на  $X = [0, 1]$

---


$$\begin{aligned}
1. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x) \\
2. \quad & \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x \in [0,1]} f_n(x) \\
& f_n(0) = f_n(1) = 0 \\
& f'_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = 0 \\
& x \in (0,1) \implies x = \frac{n}{n+1} \\
& \|f_n - f\| = \max_{[0,1]} f_n = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^n}{(n+1)^n} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \\
& \text{Т.о. } f_n \rightrightarrows 0 \text{ на } [0,1]
\end{aligned}$$

**Пример.**  $f_n(x) = x^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \forall x \in (-1,1) (\forall x \in \mathbb{C} : |x| < 1)$$

$f \not\equiv 0$  на  $(-1,1) \implies$  нет равномерной сходимости ряда

**Утверждение 10.**  $\square E \subseteq X$   $X$  – метрическое пространство  
 $\square \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C(\text{Cl } E)$ , тогда  $\{f_n\}$  равномерно сходится на  $E \iff$  она равномерно сходится на замыкании.

*Доказательство.*

$\Leftarrow$  Очевидно

$\implies \{f_n\}$  равномерно сходится на  $E \iff \{f_n\}$  равномерно сходится в себе на  $E \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m \geq N \quad \|f_n - f_m\|_{\ell_{\infty}(E)} \leq \varepsilon$

$$\iff \sup_{x \in E} |f_n - f_m| \leq \varepsilon$$

$$\iff \sup_{x \in \text{Cl } E} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

$$\iff \|f_n - f_m\|_{\ell_{\infty}(\text{Cl } E)}$$

$\iff \{f_n\}$  равномерно сходится в себе на  $\text{Cl } E \iff f_n$  равномерно сходится на  $\text{Cl } E$

■

---

**Теорема 24** (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда).

$\square \forall n \quad f_n(x) : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}) \quad a_n \in \mathbb{R}$

$\forall n \quad \forall x \in X \quad |f_n(x)| \leq a_n$

и  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится. Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  сходится равномерно на  $X$  и абсолютно.

Эквивалентная формулировка: Если  $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\ell_{\infty}(X)}$  сходится, то  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  сходится равномерно и абсолютно на  $X$

*Доказательство первой формулировки на основе критерия Коши.*  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \geq N \quad \forall p \in \mathbb{Z}_+$

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

$\geq \left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right| \implies$  ряд  $\sum f_n(x)$  равномерно сходится в себе  $\implies \sum f_n(x)$  сходится равномерно ■

**Пример.**  $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$  – равномерно сходится на  $\mathbb{R}$ , но не абсолютно

$f(x) = x^n$  – ряд сходится абсолютно (при  $x \in [0, 1)$ ), но не равномерно

**Пример.**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^p} \quad p > 1 \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^p}$  равномерно сходится на  $\mathbb{R}$

$\left| \frac{\sin kx}{k^p} \right| \leq \frac{1}{k^p} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$  сходится

**Пример.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{n^5 + x^2}$

$$n^5 + x^2 \geq 2\sqrt{n^5 x^2} = 2n^{\frac{5}{2}} |x|$$

$$\text{При } x \neq 0 \quad |f_n(x)| \leq \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

$$x = 0 \quad |f_n(0)| = |0| \leq \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

$$a_n = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

$\sum a_n$  сходится, а значит по признаку Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно

### 1.30 Преобразование Абеля

$$A_0 \in \mathbb{R} \quad A_k = \sum_{j=1}^k a_j + A_0 \quad a_k = A_k - A_{k-1}$$

$$\sum_{k=n}^m a_k b_k = \sum_{k=n}^m (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=n}^m A_k b_k - \sum_{k=n}^m A_{k-1} b_k = \sum_{k=n}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_m b_m - A_{n-1} b_n$$

**Лемма 4.** Если  $b_k$  монотонно зависит от  $k$  при любом  $x$ , то:

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k(x) b_k(x) \right| \leq 4 \cdot \max_{k=n:m} |A_k(x)| \cdot \max \{|b_n(x)|, |b_m(x)|\}$$

*Доказательство.*  $x$  фиксировано

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k b_k \right| \leq \underbrace{\left| \sum_{k=n}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \right|}_{\Sigma} + |A_m| |b_m| + |A_{n-1}| |b_n| \leq \Sigma + A_* b_* + A_* b_*$$

$$\Sigma \leq \sum_{k=n}^{m-1} |A_k| |b_k - b_{k+1}| \leq A_* \sum_{k=n}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| = A_* \left| \sum_{k=n}^{m-1} (b_k - b_{k+1}) \right| = A_* |b_n - b_m| \leq 2A_* \cdot b_k \quad \blacksquare$$

**Теорема 25** (Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда).  $\square a_n : X \rightarrow \mathbb{C} \quad b_n : X \rightarrow \mathbb{R}$

Если:

1. Последовательность частичных сумм ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$  равномерно ограничена на  $X$
2.  $\{b_k(x)\}$  монотонна по  $k$  для каждого  $x \in X$
3.  $b_k \Rightarrow 0$  на  $X$

, то  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$  сходится равномерно на  $x$

**Замечание** (Пояснение). 1.  $\Rightarrow \exists C \neq C(x, N) : \forall x \in X \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=1}^N a_k(x) \right| \leq C$

*Доказательство.*  $A_0(x) = 0 \quad 0 < A_{**} = C$  из пояснения

Т.к.  $b_n(x) \Rightarrow 0$  на  $X$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in E \quad |b_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{A_{**}}$

$$\Rightarrow b_* \leq \frac{\varepsilon}{A_{**}}$$

По лемме  $\left| \sum_{k=n}^m a_k(x) b_k(x) \right| \leq 4 \cdot A_{**} \cdot \frac{\varepsilon}{A_{**}} = 4\varepsilon \Rightarrow \sum a_k(x) b_k(x)$  сходятся в себе ■

**Теорема 26** (Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда).  $\square a_n : X \rightarrow \mathbb{C} \quad b_n : X \rightarrow \mathbb{R}$

Если:

1.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$  сходится равномерно на  $X$
2.  $\{b_k(x)\}$  монотонна по  $k$  для каждого  $x \in X$
3.  $b_k$  равномерно ограничена на  $X$

, то  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$  сходится равномерно на  $x$

**Замечание.** 3.  $\Rightarrow \exists b_{**} : \forall x \in X \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad |b_k(x)| \leq b_{**}$

*Доказательство.*  $A_0(x) = - \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$

$A_j(x) = \sum_{k=1}^j a_k(x) + A_0(x) = - \sum_{k=j+1}^{\infty} a_k(x) \Rightarrow 0$ , т.к.  $\sum a_k(x)$  сходится равномерно  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall j \geq N \quad \forall x \in X$

$$|A_j(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4 \cdot b_{**}}$$

Тогда для  $m \geq n > N$   $\left| \sum_{k=n}^m a_k(x) b_k(x) \right| \leq 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4b_{**}} \cdot b_{**} = \varepsilon$ , значит ряд сходится в себе равномерно  $\Rightarrow$  сходится равномерно ■

**Пример.**  $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^N e^{ikx} = \sum_{k=1}^N q^k = q \frac{1-q^N}{1-q}$$

$$\square q = e^{ix} \neq 1$$

$$\left| \sum_{k=1}^N e^{ikx} \right| = \left| e^{ix} \cdot \frac{e^{iNx} - 1}{e^{ix} - 1} \right| = \left| \frac{e^{\frac{iNx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}} \right| \cdot \left| \frac{e^{\frac{iNx}{2}} - e^{-\frac{iNx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}} \right| = \left| \frac{\sin \frac{Nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$$

$$\left| \sum_{k=1}^N \cos kx \right| = \left| \sum_{k=1}^N \Re e^{ikx} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$$

$$\left| \sum_{k=1}^N \sin kx \right| = |\Im e^{ikx}| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}$$

$$x \in [\delta, 2\pi - \delta] = E_\delta \quad \delta > 0$$

$$\frac{x}{2} \in [\frac{\delta}{2}, \pi - \frac{\delta}{2}] \implies \sin \frac{x}{2} \geq \sin \frac{\delta}{2}$$

$$A_{**} = \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} \implies \forall x \in E_\delta \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=1}^N \sin kx \right| \leq A_{**}$$

**Пример.**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^p}$  сходится на  $E_\delta$  равномерно по признаку Дирихле при  $0 < p \leq 1$

$$a_k(x) = \sin kx \quad b_k = \frac{1}{k^p}$$

$$\text{Аналогично для } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^p}$$

**Задача 8.** Исследовать на равномерную сходимость  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$  на  $[0, \delta]$

### 1.31 Равномерная сходимость и действия, связанные с предельным переходом

**Теорема 27** (Теорема о повторном пределе для функциональных последовательностей).  $\square D \subseteq X$   $X$  – метрическое пространство,  $f, \{f_n\} : D \rightarrow \mathbb{C}$

$x_0 \in D'$  – предельная точка. Пусть:

$$1. \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n \in \mathbb{C}$$

$$2. f_n \rightrightarrows f \text{ на } D$$

$$\text{Тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)}_{A_n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)}_{f(x)}$$

Оба конечны и равны между собой.

**Теорема 28** (о повторном пределье для функциональных рядов).  $\square$   
 $D \subseteq X, X$  – Метрическое пространство

$\{f_n\} : D \rightarrow \mathbb{C} \square x_0 \in D'$  Пусть:

1.  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  равномерно сходится на  $D$

Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)}_{A_n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)}_{S(x)}$

Обе части конечны и равны между собой

**Замечание.**  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ , теорема для рядов вытекает из теоремы для последовательностей.

Теоремы для последовательностей. 1.  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathbb{C}?$

2. Итоговое равенство

Т.к.  $f_n \Rightarrow f$  на  $D$ , то  $\{f_n\}$  равномерно сходится в себе на  $D$  ( $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N \quad \forall x \in D \quad |f_n(x) - f_m(x)|$ )

$x \rightarrow x_0$ , перейдём к пределу в этом неравенстве.  $|A_n - A_m| \leq \varepsilon \forall n, m \geq N$

Значит последовательность чисел  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится в себе,  $\mathbb{C}$  – полно

$$\square A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

$$A_n = \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)?$$

$$\begin{aligned} |A - f(x)| &= |A - A_n + A_n - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \leq \\ &\leq |A_n - A| + |f_n(x) - A_n| + |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon? \end{aligned}$$

$$\text{Т.к. } A_n \rightarrow A, n \rightarrow \infty \quad \exists N_1 : \quad \forall n \geq N \quad |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{Т.к. } f_n \Rightarrow f \quad \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$N = \max N_1, N_2 \quad n = N$$

$$\text{Т.к. } \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n, \text{ то } \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in D : \quad 0 < \rho(x, x_0) < \delta \quad |f_n(x) - A_n|$$

$$\implies \forall x \in D : \quad 0 < \rho(x, x_0) < \delta \implies |f(x) - A| \leq \frac{\varepsilon}{3} \cdot 3 = \varepsilon$$



**Следствие 6** (Для последовательностей).  $\square D \subseteq X$  – м.п.,  $\{f_n\}, f : D \rightarrow \mathbb{C}$

$f_n \Rightarrow f$  на  $D$ .

Если  $\{f_n\}$  непрерывны в точке  $x_0$ , то и  $f$  непрерывна в  $x_0$

**Следствие 7** (Для рядов).  $\square D \subseteq X$  – м.п.,  $x_0 \in D', \{f_n\}_{n=1}^\infty, f : D \rightarrow \mathbb{C}$  и  $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$  сходится равномерно на  $D$ .

Если  $\forall n \quad f_n(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , то и  $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$  непрерывно в  $x_0$

Для последовательностей.  $x_0 \in D \Rightarrow \begin{cases} x_0 \in D' \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)}^{f_n(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \overbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)}^{f(x)} \\ x_0 - \text{изолированная} \end{cases},$

но если она изолирована, то в ней все функции непрерывны.

$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Rightarrow f$  – непрерывна

**Следствие 8** (теорема Стокса-Зейделя).  $D \subseteq X, \quad f_n, f : D \rightarrow \mathbb{C} \quad f_n \Rightarrow f$  на  $D$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $f_n \in C(D) \Rightarrow f \in C(D)$

равномерный предел последовательности непрерывных функций непрерывных

**Следствие 9.** Сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций непрерывна

**Теорема 29** (Дини).  $\square K$  – компакт.  $\{f(x)\}$  поточечно сходится к  $f(x)$  на  $K$

$f_n, f$  – непрерывны  $\in C(K)$

Если  $\forall x \in K$  числовая последовательность  $\{f_n(x)\}$  возрастает (по  $n$ ).

Тогда  $f_n \Rightarrow f$  равномерно на  $K$

**Замечание.** Теорема верна для случая убывания  $\{f_n(x)\}$  по  $n$

**Теорема 30** (Дани для рядов).  $\sqsupset f_n, S \in C(K)$   $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  – ряд сходится на  $K$  и  $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in X$   $f_n(x) \geq 0 \implies$  ряд сходится равномерно

*Доказательство.* НУО  $\{f_n\}$  убывающая,  $f(x) = 0$  (иначе рассмотреть  $f_n(x) - f(x)$ )

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \forall x \in K \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon?$

По условию  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  поточечно. Фиксируем  $\varepsilon > 0 \quad \exists N(x) = N(\varepsilon, x) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

$U_x = \{\tilde{x} \in K : |f_n(\tilde{x}) - f(\tilde{x})| < \varepsilon\}$  – открытая окрестность точки  $x$

$\{U_x\}_{x \in K}$  – открытое покрытие компакта  $K \quad \exists$  конечное подпокрытие  $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_m}\} \quad N = \max\{N(x_1), \dots, N(x_m)\}$

$\forall x \in K \exists$  номер  $i : x \in U_i$

$n \geq N \quad x \in K \quad f_n(x) \leq f_N(x) \leq f_{N(x_i)}(x) < \varepsilon$

■

**Пример.**  $f_n(x) = nx(q - x^2)^n \rightarrow 0$  поточечно на  $[0, 1]$

$$\int_0^1 f(x) = \int_0^1 nx(1 - x^2)^n dx = \left| \begin{array}{l} y = 1 - x^2 \\ dy = -2x dx \end{array} \right| = \frac{-n}{2} \int_1^0 y^n dy = \frac{n}{2} \frac{y^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{n}{2(n+1)} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$0 = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2}$$

**Теорема 31** (Об интегрировании предела функциональной последовательности).  $\sqsupset f_n \in C([a, b]) \quad f_n \Rightarrow f$  на  $[a, b]$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

**Теорема 32** (Об интегрировании функционального ряда).  $\sqsupset f_n \in C([a, b])$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  сходится равномерно на  $[a, b]$ . Тогда ряд допускает почленное интегрирование:

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

*Доказательство.*  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in C([a, b])$   $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$

$$\langle \varepsilon > 0 \quad \int_a^b S(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n(x) dx$$

Т.к.  $S_n \Rightarrow S(x)$ , то для  $\frac{\varepsilon}{b-a} \exists N : |S(x) - S_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \forall n \geq N$

$$\left| \int_a^b S(x) dx - \int_a^b S_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b (S(x) - S_n(x)) dx \right| \leq \int_a^b |S(x) - S_n(x)| dx \leq \varepsilon \quad \blacksquare$$

**Теорема 33.**  $\square \langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{R}$  – промежуток

$\square f_n : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , Пусть:

1.  $\exists x^0 \in \langle a, b \rangle : \{f_n(x^0)\}$  сходится
2.  $\{f'_n(x)\}$  сходится равномерно на  $\langle a, b \rangle$  к  $g(x)$

Тогда  $\{f_n(x)\}$  сходится равномерно на  $\langle a, b \rangle$ ,

Если  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , то  $f(x)$  дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$  и  $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad \left( \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \right)$

**Теорема 34** (Для рядов).  $\square f_n$  дифференцируема на  $\langle a, b \rangle \quad f_n : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть:

1.  $\exists x_0 \in \langle a, b \rangle \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$  сходится
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$  сходится равномерно на  $\langle a, b \rangle$

Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  сходится равномерно на  $\langle a, b \rangle$ , его сумма дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$  и

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$$

*Доказательство.* Для случая функций класса  $C^1$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n = \int_{x_0}^x f'_n(t) dt + f_n(x_0)$$

$$f(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt + \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$$

При фиксированном  $x$  по предыдущей теореме  $\int_{x_0}^x f'(t) dt \rightarrow \int_{x_0}^x g(t) dt$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \int_{x_0}^x |f'_n(t) - g(t)| dt + \left| f_n(x_0) - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) \right|$$

По теореме Барроу  $f(x)$  дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f'(x) = g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$  ■

## 1.32 Степенные ряды

$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$  – вещественный степенной ряд

$$\{C_n\} \subseteq \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$  – комплексный степенной ряд

**Лемма 5.**  $\square \{x_n\}, \{y_n\}$  – вещественный неотрицательные

Если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , то  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$

*Доказательство.* 1. Если  $x_n \rightarrow 0 \implies x_n y_n - \text{б.м.} \implies \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

2.  $x_n \equiv x(\text{const}) \quad y = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}$

$$x \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x y_{n_k}$$

$$x \cdot y \leq \overline{\lim} xy$$

С другой стороны Если  $xy_{n_k} - \forall$  подпоследовательность  $xy_n \dots$  ■

$$\pi = \textcolor{red}{3} \rightarrow \textcolor{green}{\pi}$$

## 1.33 Здесь должна была быть лекция

## 1.34 ...

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k$$

$a \in \mathbb{C}, C_k \in \mathbb{C} \quad \forall z \in B_R(a) \implies C_k = \frac{S^{(k)}(a)}{k!}$  однозначно задаются коэффициенты

**Пример.**  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad f \in C(\mathbb{R})$

$$\triangleleft f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^{y^2}} = 0$$

$$f'_{x \neq 0}(x) = f(x) \cdot \left(\frac{2}{x^3}\right) = 2 \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} \rightarrow 0, x \rightarrow 0$$

$$f''(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3 x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2y^4}{e^{y^2}} = 0, ..$$

$$C_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{0}{k!} = 0$$

Ряд Тейлора  $\equiv 0 \quad f(z) = S(z)$  лишь при  $x = 0$

**Пример.**  $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad |z| < 1$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \quad |x^2| < 1 \quad |x| < 1$$

**Определение 21.**  $Hol(O) = \{f : O \rightarrow \mathbb{C}, \forall z \in O \exists f'(z_0)\}$ , т.е.  $f$  —  $\mathbb{C}$ -дифференцируема,  $O$  — открытое в  $\mathbb{C}$

**Теорема 35.** Если  $f \in Hol(B_R(a)), a \in \mathbb{C}, R \in (0, +\infty] \implies \exists$  единственный набор  $\{C_k\}_{k=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ :

$$\forall z \in B_R(a) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - a)^k$$

### 1.35 $\exp, \cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh}$

**Определение 22.**  $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = (*)$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n + 1 = +\infty$$

(\*) сходится на  $\mathbb{C}$

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z^k)'}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \implies e^z \in Hol(\mathbb{C})$$

**Определение 23.**  $\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Оба ряда сходятся  $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2j+1}}{(2j+1)!} \\ &= \cos z + i \sin z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i \sin z \\ e^{-iz} &= \cos z - i \sin z \\ \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ \text{sh } z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\ \cos z &= \text{ch}(iz) \\ \sin z &= \frac{\text{sh}(iz)}{i} \\ \text{ch } z &= \cos\left(\frac{t}{i}\right) = \cos(iz) \\ \text{sh } z &= i \sin\left(\frac{z}{i}\right). \end{aligned}$$

**Теорема 36** (единственности для  $\mathbb{C}$ -дифференцируемых функций).  $\square$   
 $f, g \in \text{Hol}(O) \quad \square \quad E \subseteq O \subseteq C : E' \cap O \neq \emptyset \quad O - \text{область (закнутое связное)}$

Если  $f|_E = g|_E \implies f \equiv g \text{ (в } O)$

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}.$$

Если фиксировать  $x_1 \in \mathbb{R}$   $f(z) = e^{x_1+z} = g(z) = e^{x_1} e^z$

Всё это сохраняется на  $\mathbb{C}$

По аналогичным причинам все формулы для арифметических действий и тригонометрических функций сохраняются

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos z &\equiv \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \\ \sin z &\equiv \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \\ \cos(it) &= \operatorname{ch}(-t) = \operatorname{ch} t \quad \sin(it) = \frac{\operatorname{sh}(-t)}{i} = i \operatorname{sh} t \\ \sin, \cos &\text{ неограниченные функции} \\ e^z &= \cos(-iz) + i \sin(-iz) \\ e^{z+2\pi k \cdot i} &= e^z. \end{aligned}$$

**Пример.**  $\cos z = 2 \quad z = x+iy \iff \begin{cases} \sin x \operatorname{sh} y = 0 \\ \cos x \operatorname{ch} y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ y = \pm (\operatorname{ch}_{[0,+\infty)})^{-1}(2) \end{cases}$

$e^z$  не имеет корней на  $\mathbb{C}$

$$e^z = A \quad A$$

**Определение 24.**  $\operatorname{Ln}(A) = \{z : e^z = A\} = \{\ln |A| + i \operatorname{Arg} z\}$   
 $\ln z = \ln |z| + i \arg z \quad \arg z \in (-\pi, \pi]$

**Замечание.** Все корни косинуса и синуса лежат на вещественной прямой

$$(1+z)^p = e^{p \ln(1+z)} \in \operatorname{Gol}(B_1(0))$$

$z = x \in (-1, 1)$   $(1+z)^p$  совпадает с прежним определением.

Равенство выше продолжает степенную функцию с  $(-1, 1)$  в  $B_1(0)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} z^k = (1+z)^p \quad \forall z : |z| < 1 \quad \binom{n}{k} = \begin{cases} 1, k=0 \\ \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$\left| \frac{\binom{p}{k+1}}{\binom{p}{k}} \right| = \frac{p-k}{k+1} = \frac{|k-p|}{|k+1|} = \frac{k-p}{k+1} < 1 \implies \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} z^k$  сходиться по признаку Лейбница.

$$\left(\frac{1}{2}\right)_k = \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k k!}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} x^k$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \operatorname{arctg} x'(t) dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\pi = 4 \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{при } |x| < 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} (-x^2)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^{2k}$$

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)^2} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 + \dots$$

### 1.36 Вещественная аналитичность

$O \subseteq \mathbb{R}$   $O$  – область

$f : O \rightarrow \mathbb{R}$   $f$  называется (вещественно) аналитичной, если  $\forall a \in O \exists B_R(a) \quad (R > 0) \exists (C_k)_{k=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{R} : \forall x \in B_R(a)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x-a)^k$$

**Определение 25** (Комплексная аналитичность).  $O \subseteq \mathbb{C}$   $O$  – открытое,  $f : O \rightarrow \mathbb{C}$

$f$  –  $\mathbb{C}$ -аналитична  $\iff \exists a \in O \exists B_R(a), R > 0 \exists (C_k^{\infty}) : \forall z \in B_R(a) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k$

**Замечание.** Если  $\{f^{(k)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$  равномерно ограничено на  $\langle a, b \rangle$ , тогда функция  $f \in C^{\infty}(\langle a, b \rangle)$



## 1.37 Системы множеств

$X$  – множеств.  $2^X = \{A : A \subseteq X\}$ . Вместо множества множеств говорят система множеств.

**Определение 26.** Система множеств – множества некоторых подмножеств множества  $X$

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subseteq 2^X$$

**Определение 27.**  $\sqsubset X$  – множество.  $\mathfrak{P} \subseteq 2^X$

$\mathfrak{P}$  называется полукольцом, если:

1.  $\emptyset \subseteq \mathfrak{P}$
2.  $A, B \in \mathfrak{P} \implies A \cap B \in \mathfrak{P}$
3.  $A, B \in \mathfrak{P} \implies \exists C_1, \dots, C_L \in \mathfrak{P} : A \setminus B = \coprod_{l=1}^L C_l$  – дизъюнктное объединение

**Замечание.** Вместо (3) можно требовать

$$3 \quad A, B \in \mathfrak{P}, B \subseteq A \implies \exists \text{ диз. } \{C_1, \dots, C_L\} : A \setminus B = \coprod_{l=1}^L C_l$$

$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ , последнее принадлежит  $\mathfrak{P}$  по 2

**Пример.** 1.  $2^X$

$$2. \{\emptyset\}$$

$$3. \mathfrak{P}_{1\text{я}} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\} \text{ – одномерные ячейки}$$

$$4. \mathfrak{P}_{1\text{п}} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\} \text{ – промежутков}$$

**Утверждение 11** (О произведении полуколец).  $\sqsubset X, Y$  – множества.  $\mathfrak{P}_X, \mathfrak{P}_Y$  – полукольца. Тогда  $\mathfrak{P}_X \times \mathfrak{P}_Y = \{A \times B : A \in \mathfrak{P}_X, B \in \mathfrak{P}_Y\}$  – полукольцо на  $X \times Y$

*Доказательство.* 1. верно.  $\emptyset \times \emptyset$

$$2. \sqsubset A \times B, C \times D \in \mathfrak{P}_X \times \mathfrak{P}_Y \implies (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

$$3. \sqsubset A \times B \supseteq C \times D \implies C \subseteq A, B \subseteq D$$

$$A \setminus C = \coprod D_j \quad C \setminus D = \coprod E_j$$

$$D_0 = C, E_0 = D \implies A = \coprod_{i=0}^I D_i, D = \coprod_{j=0}^J E_j$$

$$A \times B = (\coprod D_i) \times (\coprod E_j) = \coprod (D_i \times E_j) = D_0 \times E_0 \coprod_{i=0 \dots I, j=0 \dots J, (i,j) \neq (0,0)} (D_i \times E_j)$$

**Определение 28.**  $\sqsubset X$  – множество.  $\mathfrak{A} \subseteq 2^X$ .  $\mathfrak{A}$  называется  $\sigma$ -алгеброй, если:

1.  $a \in \mathfrak{A} \implies A^C \in \mathfrak{A}$
2.  $\{A_i\}$  не более, чем счётный набор элементов  $\mathfrak{A} \implies \bigcap_i A_i \in \mathfrak{A}$

**Утверждение 12.**  $\sqsubset X$  – .. множество,  $\mathfrak{A} \neq \emptyset$  –  $\sigma$ -алгебра  $\subseteq 2^X$ . Тогда:

1.  $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \setminus B \in \mathfrak{A}$
2.  $\{A_i\}$  – не более, чем счётное.  $\{A_i\} \subseteq \mathfrak{A} \implies \bigcup_i A_i \in \mathfrak{A}$
3.  $\mathfrak{A}$  есть полукольцо

*Доказательство.* 1.  $A \setminus B = A \cap (B^C) \in \mathfrak{A}$

$$2. \left( \bigcup_i A_i \right)^{CC} = \left( \bigcap_i A_i^C \right)^C \in \mathfrak{A}$$

$$3. \mathfrak{A} \neq \emptyset \implies \exists A \in \mathfrak{A} \implies A \setminus A = \emptyset \in \mathfrak{A}$$

**Пример.**  $\mathfrak{A} = \{A - \text{нбчс или } A^C \text{ нбчс} \}$

Если хотя бы одно  $A_i$  нбчс, то их пересечение тоже нбчс

Если все нечётны, значит дополнения к ним нбчс.  $\left( \bigcap_i A_i \right)^{CC} = \left( \bigcup_i A_i^C \right)^C$

**Задача 9.** 1.  $\mathfrak{A} = \{B - \text{огр или } B^C - \text{огр} \}$ ,  $X$  – метрическое пространство. Является ли это сигма-алгеброй

**Утверждение 13.**  $\sqsubset X$  – множество  $\mathfrak{A} \subseteq 2^X$

Тогда существует наименьшая по включению  $\sigma$ -алгебра, содержащая  $\mathfrak{A}$

*Доказательство.*  $\mathfrak{A}_* = \bigcap_{\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{A}_0} \mathfrak{A}$  – пересечение таких  $\sigma$ -алгебра

В пересечении входит  $2^X$ , в каждое входит  $\emptyset$

Она наименьшая, потому что наименьшая входит в пересечение ■

**Лемма 6.** Пересечение  $\sigma$ -алгебр –  $\sigma$ -алгебра

**Определение 29.** Если  $\mathfrak{A}_0 \subseteq 2^X \implies$  наименьшая  $\sigma$ -алгебра, содержащая  $\mathfrak{A}_0$  называется борелевской оболочкой системы  $\mathfrak{A}_0$

**Определение 30.**  $E \in \mathfrak{B}(\Omega)$

$\Omega$  – стандартная (Евклидова) топология в  $\mathbb{R}^n$

$E$  – борелевское множество.

$F_\sigma$  – множество – счётное объединение замкнутых

$G_\delta$ -множество – счётное пересечение открытых

**Пример.**  $\{(\cdot)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_K(\cdot) \implies$  тип  $G_\delta$

в  $\mathbb{R}$   $Q = F_\sigma$

$(F_\sigma)_\delta = F_{\sigma\delta\sigma\ldots}$

**Теорема 37.**  $\square O$  – открытое в  $\mathbb{R}^n$

Тогда  $O = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} P_j$   $\{P_j\}$  – кубические ячейки со стороной  $\frac{1}{2^k}$

**Определение 31.**  $\square X$  – множество,  $\mathfrak{P} \subseteq 2^X$ ,  $\mathfrak{P}$  – полукольцо

$\mu : \mathfrak{P} \rightarrow [0, +\infty]$  называется объёмом (мерой) на  $\mathfrak{P}$ , если:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$

2.  $\forall$  конечного (счётного) дизъюнктного объединения семейства  $\{P_j\} \subseteq \mathfrak{P} :$   $P = \bigsqcup P_i \in \mathfrak{P}$

$$\mu(P) = \sum_j \mu(P_j)$$

конечная аддитивность объема, счётная аддитивность меры

**Замечание.** Из счётной следует конечная, любая мера является объёмом.

**Пример.**  $X$  – любое множество.  $\mathfrak{P} = 2^X$

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

Если  $\mu$  – мера на полукольце  $\mathfrak{P}$   $\mathfrak{P} \subseteq 2^X$

$f(x)$  – ступенчатая функция, т.е.  $\exists \{E_1, \dots, E_N\} \in \mathfrak{P}$ :

$$f(x) = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{E_j} \quad \chi_A(p) = \begin{cases} 1 & , p \in A \\ 0 & , p \notin A \end{cases}$$

$$\int_X f d\mu = \sum_{j=1}^N c_j \int_X \chi_{E_j} d\mu \quad \int_X \chi_{E_j} d\mu = \mu(E_j)$$

**Пример.**  $\int_{\mathbb{R}} f(x) d\delta_0 = \int_{\{0\}} f(x) d\mu + \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} f(x) d\delta_0 = \chi_{\{0\}} \cdot f(0) + 0 = f(0) \cdot \delta_0(\{0\}) = f(0)$

**Пример.**  $\mathfrak{P} = 2^{\mathbb{N}} \ni A$

$$\mu(A) = \begin{cases} \#(A), & \text{если конечно} \\ +\infty & \end{cases}$$

**Замечание.** Условие  $\mu(\emptyset)$  вытекает из конечной аддитивности, если  $\exists A \in \mathfrak{P} : \mu(A) < +\infty$

$$(\implies \mu(A) = \mu(A \amalg \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset) \implies 0 = \mu(\emptyset))$$

$\mu(P) \equiv +\infty$  – счётная аддитивность есть, а  $\mu(\emptyset) = +\infty$

**Теорема 38** (Элементарные свойства объёмов и мер).  $\sqsupset \mu$  – объём (мера) на полукольце  $\mathfrak{P} \subseteq 2^X$

1. Если  $\{P_j\} \subseteq \mathfrak{P}$  – конечный (счётный) набор  $P \in \mathfrak{P}$

$$\amalg P_j \subseteq P \implies \sum_i \mu(p_j) \leq \mu(P) \text{ – усиленная монотонность}$$

2.  $\{P_i\} \subseteq \mathfrak{P}$  – конечный (счётный) набор  $P \in \mathfrak{P}$

$$P \subseteq \bigcup_j P_j \implies \mu(P) \leq \sum_j \mu(P_j) \text{ – конечная (счётная) полуаддитивность}$$

**Утверждение 14.** Если  $\mathfrak{P} \subseteq 2^X$  – полукольцо, то:

1.  $P \in \mathfrak{P}$   $P_1, \dots, P_N \in \mathfrak{P}$ , то  $\exists \{Q_1, \dots, Q_L\}$  – дизъюнктивный набор  $\subseteq P$ :

$$P \setminus \left( \bigcup_{n=1}^N P_n \right) = \prod_{l=1}^L Q_L$$

2. Если  $P_1, \dots, P_N \in \mathfrak{P}$ , то существует  $Q_{nl}$

$$\bigcup_{n=1}^N P_n = \prod_{n=1}^N \prod_{l=1}^{L_n} Q_{nl}$$

Точнее диз.  $\{Q_{nl}\}_{n=1..N, l=1..L_N}$  и  $\forall l = 1..L_N \quad Q_{nl} \subseteq P_n$

*Доказательство.* 1. По индукции по  $N$ . Если  $N = 1$  утверждение верное по 3-й аксиоме полукольца.

$$N \rightarrow N + 1$$

$$\begin{aligned} P \setminus \left( \bigcup_{n=1}^{N+1} P_n \right) &= \left( P \setminus \bigcup_{n=1}^N P_n \right) \setminus P_{N+1} = \text{по индукционному предположению} \\ &= \left( \prod_{l=1}^L Q_l \right) \setminus P_{N+1} = \\ &= \prod_{l=1}^L (Q_l \setminus P_{N+1}) = \prod_{e=1}^L \prod_{j=1}^{J_l} Q_{ej} \end{aligned}$$

$$2. \bigcup_{i=1}^N P_i = P_1 \vee (P_2 \setminus P_1) \vee (P_3 \setminus (P_1 \cup P_2)) \vee \dots \vee (P_N \setminus (P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_{N-1}))$$

■

*Доказательство.* 1.  $\sum_n \mu(P_n) \leq \mu(O)$

$$\forall N \quad \sum_{n=1}^N \mu(P_n) \leq \mu(P) \text{ если } \prod_{n=1}^N P_n \leq P$$

В силу теоремы о свойствах полукольца  $\exists \{Q_1, \dots, Q_L\}$  – диз,  $\subseteq \mathfrak{P}$  :  
 $P \setminus \prod P_n = Q_l$

$$(\prod P_n) \sqcup (\prod Q_l) = P$$

$$\text{мера левой части} = \sum_{n=1}^N \mu(P_n) + \sum_{l=1}^L \mu(Q_l) = \mu(P)$$

$$2. \cup P_j = P_1 \coprod (P_2 \setminus P_1) \coprod \dots$$

$$\coprod P_i \cap P = P$$

$$B_j = (P_j \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_{j-1})) \cap P = \coprod \tilde{Q}_{jl} \cap P = \coprod (\tilde{Q}_{jl} \cap P) \cap P$$

$$P = \coprod_j \coprod_{l=1}^L Q_{jl}$$

$$\mu(P) = \sum_j \sum_{l=1}^L \mu(Q_{jl}) \leq \mu(P_J)$$

■

**Утверждение 15.**  $\nu(A \times B) = \nu(A) \cdot \nu(B)$

**Теорема 39.** Классический объём  $\nu_n$  есть мера на  $\mathcal{P}_n$  (т.е.  $\nu_n$  – счётно-аддитивна)

*Доказательство.* По теореме о свойствах объёмов  $\coprod_{k=1}^{\infty} P_k \subseteq P \implies \sum_{k=1}^{\infty} \nu(P_k) \leq \nu(P)$

Если  $P, P_k \in \mathcal{P}$  и  $P = \coprod_{k=1}^{\infty} P_k \implies \mu_n(P) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(P_k)A$ . Неравенство  $\leq$  происходит из прошлого абзаца

Свойство в другую сторону называется счётной полуаддитивностью

$\forall \varepsilon > 0 \quad P = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j] \quad \triangleleft K = \prod_{j=1}^n [a_j, \tilde{b}_j] \quad \tilde{P} = \prod_{j=1}^n [a_j, \tilde{b}_j], \text{ где } \tilde{b}_j \in (a_j, b_j) : \quad \nu(\tilde{P}) > \nu(P) - \frac{\varepsilon}{2}$

$$\tilde{P}_k = [\tilde{a}_j, b_j] \quad \tilde{a}_j < a_j \quad \nu_k(\tilde{P}_k) < \nu(P_k) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$O_k = \prod (a_j, b_j) \quad P_k \subseteq O_k \subseteq \tilde{P}_k \quad \tilde{P} \subseteq K \subseteq P = \bigcup P_k \subseteq \bigcup_k O_k$ , т.о.  $\{O_k\}_{k=1}^{\infty}$  образует открытое покрытие компакта  $K$ , а значит можно выбрать конечное подпокрытие  $\{O_1, \dots, O_N\}$  – покрытие  $K$

$$\tilde{P} \subseteq K \subseteq \bigcup_{k=1}^N O_k \subseteq \bigcup_{k=1}^N \tilde{P}_k. \text{ В силу конечной аддитивности } \nu_n(\tilde{P}) \leq \sum_{k=1}^N \nu_n(\tilde{P}_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu_n(\tilde{P}_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\nu(P_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_n(P_k) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\nu_n(P) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu_n(P_k) + \varepsilon \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad \nu_n(P) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu_n(P_k)$$

■

---

**Определение 32.**  $\lambda_n$  – стандартное продолжение  $\nu_n$  (с  $\mathcal{P}_n$ )

$\mathcal{A}_n$  – область определения мер  $\lambda_n$

$E \in \mathcal{A}_n \xLeftrightarrow{\text{def}} E$  – измеримо по Лебегу

$\mathcal{N} = \{\}$

...

**Определение 33.** Если  $H$  – гиперплоскость, параллельная координатному подпространству.

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = c\}$$

$$\implies \lambda_n(H) = 0$$

*Доказательство.*  $H = \cup_j H_j \quad H_j = H \cap [-j, j]^n$

Н.у.о  $j = n$ .  $H = \mathbb{R}^{n-1} \times \{c\}$

$$H_j = [-j, j]^{n-1} \times \{c\} = \bigcap_{l=1}^{\infty} [-j, j]^{n-1} \times [c, c + \frac{1}{2}) \implies \lambda_n(H_j) = \lim_{l \rightarrow \infty} \lambda_n(H_{jl}) = 0 \quad \blacksquare$$

**Замечание.**  $\mu$  – полная мера.  $A$  – измеримо,  $e$  – нуль-множество.  $B \Delta A \subseteq e \implies B$  измеримо и  $\mu(A) = \mu(B) = \mu(A \cap B)$

$$(A \cap B) = A \setminus (A \setminus B) \text{ – измеримо} \quad B = (A \cap B) \amalg (B \setminus A)$$

**Утверждение 16.**  $\Pi = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \dots \times \langle a_n, b_n \rangle \quad -\infty \leq a_k, b_k \leq +\infty$

$$\implies \Pi \in \mathcal{A} \text{ и } \lambda_n(\Pi) = \prod (b_k - a_k)$$

**Утверждение 17.**  $\lambda_n$  –  $\sigma$ -конечная мера,  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{N=1}^{\infty} [-N, N]^n \quad \lambda_n([-N, N]^n) = (2N)^n < +\infty$

**Утверждение 18.**  $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n \quad \nu_{n*}(E) = \inf \{ \lambda_n(G) : G \text{ – откp. }, E \subseteq G \}$

В частности, если  $E \in \mathcal{A}_n$

$$\lambda_n(E) = \inf \{ \lambda_n(G) : G \text{ – откp. }, E \subseteq G \}$$

---

**Утверждение 19.**  $\forall E \in \mathcal{A}_n \quad \lambda_n(E) = \sup\{\lambda_n(F) : F - \text{замкн}, F \subseteq E\} = \sup\{\lambda_n(K) : K - \text{комп}, K \subseteq E\}$

**Утверждение 20.**  $\forall E \in \mathcal{A}_n \exists \text{ окр } E \subseteq G:$