Конспект по дискретной математике
II семестр

Коченюк Анатолий

10 февраля 2021 г.

Глава 1

Дискретная теория вероятностей

1.1 Введение

Определение 1 (Вероятностное пространство).
Ω – элементарные исходы, неделимые дальше.

p – дискретная плотность вероятности.

$p : \Omega \to [0,1] \quad \sum\limits_{q \in \Omega} p(\omega) = 1$

Замечание. В случае дискретного вероятностного пространства $|\Omega|$ – не более, чем счётное.

Пример (Честная монета). $\Omega = \{0,1\} \quad p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$

Пример (Нечестная монета). $\Omega = \{0,1\} \quad p(1) = p, p(0) = q$ – различные числа. $p + q = 1$

Ещё одно название – распределение Бернулли

Пример (Честная игральная кость). $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \quad p(\omega) = \frac{1}{6}$

Определение 2. Событие, случайное событие – $A \subseteq \Omega$

Замечание. Неправильное определение – то, что может произойти, а может не произойти.

$\emptyset \subseteq \Omega \quad \Omega \subseteq \Omega$ – примеры, когда никогда не происходит и всегда происходит

Замечание. Для недискретного случая неверно, что любое подмножество Ω это событие

Определение 3. Вероятность события $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} p(\omega)$

p берёт элементарные исходы. $P, \mathbb{P}$ – вероятность события

Пример. Событие $E = \{2, 4, 6\} \quad P(E) = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$O = \{1, 3, 5\}$

Замечание. Не существует вероятностного пространства с бесконечным числом равновероятных исходов

$p(\omega) = 0 \quad \sum = 0$

$p(\omega) = a > 0 \quad \sum = a \cdot (+\infty) = +\infty$

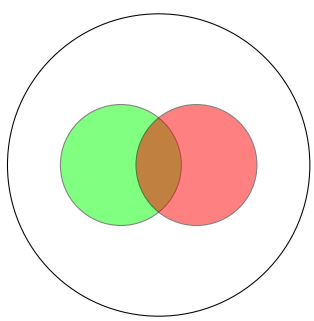
Пример. Событие $B(IG) = \{4, 5, 6\} \quad P(B) = \frac{1}{2}$

Определение 4 (Независимое событие)**.** События A, B независимы, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Пример. $E \cap O = \emptyset \quad B \cap E = \{4, 6\}$

$P(E \cap O) = \emptyset \quad P(O) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \neq 0$

$P(B) \cdot P(E) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3} = P(B \cap E)$



$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(\Omega)}$

Определение 5 (Условна вероятность)**.** $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Замечание. Альтернативное определение независимости, не поддерживающее 0: $P(A \cap B) = A$

$V = \{5, 6\}$

$P(V \cap E) = \frac{1}{6}$

$P(V) = \frac{1}{3} \quad P(E) = \frac{1}{2} \quad P(V) \cdot P(E) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = P(V \cap E)$

Определение 6 (Произведение вероятностных пространств)**.**
$\Omega_1, p_1 \qquad \Omega_2, p_2$

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

$p\left(\langle \omega_1, \omega_2 \rangle\right) = p_1\left(\omega_1\right) \cdot p_2(\omega_2)$

Теорема 1. $\forall A_1 \subseteq \Omega_1$ и $\forall A_2 \subseteq \Omega_2$

$A_1 \times \Omega_2$ и $\Omega_1 \times A_2$ – независимы

Доказательство. $P\left(A_1 \times \Omega_2 \cap \Omega_1 \cap A_2\right) = P\left(A_1 \times A_2\right) = \sum\limits_{\substack{a \in A_1 \\ b \in A_2}} p\left(\langle a, b \rangle\right) =$

$$= \sum_{a \in A_1} \sum_{b \in A_2} p_1(a) \cdot p_2(b) = \sum_{a \in A_1} p_1(a) \left(\sum_{b \in A_2} p_2(b) \right) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2) \qquad \blacksquare$$

Определение 7. $A_1, A_2, \ldots, A_n$

1. Попарно независимые $\quad A_i$ и A_j независимы
2. Независимы в совокупности $\forall I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} \quad P\left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right) = \prod\limits_{i \in I} P(A_i)$

   $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$

Пример. Кидаем две монеты $\Omega = \{00, 01, 10, 11\}$

$A_1 = \{10, 11\} \quad A_2 = \{01, 11\} \quad A_3 = \{01, 10\}$ – независимы попарно, но не в совокупности

Определение 8 (Формула полной вероятности)**.** $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$

Совокупность таких A-шек называется полной системой событий.

Дано: вероятности $P(A_i) \quad P(B|A_i)$ Найти: $P(B)$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

– формула полной вероятности

Найти: $P\left(A_j|B\right)$

A_1 – болен, A_2 – здоров, B – положительный результат теста

$P(A_2|B)$

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P\left(B|A_i\right) \cdot P(A_i)}$$

– формула Байеса

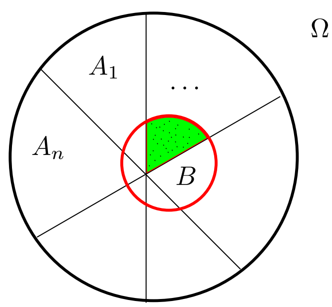


Рис. 1.1: B