Кусок конспекта по матану с 22.11.2017

Коченюк Анатолий

28 февраля 2018 г.

0.1 Точки прикосновения (предельные точки), сгущение и изолированные точки.

Определение 0.1. $x_0 \in \mathbb{R}$ *называется точкой прикосновения или предельной точкой множества A, если в окрестности точки x_0 найдётся хотя бы одна точка из A*

x_0 – точка прикосновения $\iff \forall O(x_0) \quad A \cap O(x_0) \neq \emptyset$ Примеры:

1. $x_0 \in A \Rightarrow x_0$ – точка прикосновения
   $A = \{1\} \cup (2,3)$ $x_0 = 1$ – точка прикосновения, а $x_0 = 4$ – нет

2. $x_0 \in \delta A \delta \Rightarrow x_0$ – точка прикосновения (по определению δA) 2, 3 – точки прикосновения
   $\delta A = \{1,2,3\}$f

Определение 0.2. $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *называется точкой сгущения, если в любой её окрестности есть точки из A, отличные от x_0, т.е. для любой проколотой окрестности $O(x)$*

$$\overset{\circ}{O}(x_0) \cap A \neq \emptyset$$

Замечания:

1. Любая сгущения является точкой прикосновения

2. Обратное неверно

3. т.к. в $\forall$ проколотой окрестности $x_0 \exists$ точки из $A \Rightarrow \forall$ окрестности $x_0 \exists infinity$ много точек из A
   Пусть a_m – ближайшая к $x_0 : |x_0 - a_m| = min_{k=\overline{1,n}}|x_0 - a_k|$
   Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2}|x_0 - a_m|$
   Тогда в $O_\varepsilon(x_0)$ уже нет точек из A – это противоречит определению точки сгущения

Определение 0.3. *Множество всех точек сгущения называется производным множеством множества A.*
Обозначение – A'

$A = \{1\} \cup (2,3) \Rightarrow A' = [2,3]$
$A = \mathbb{Q} \Rightarrow A' = \mathbb{R}$

Определение 0.4. $x_0 \in A$ *называется изолированной точкой, если $\exists$ проколотая окрестность $\overset{\circ}{O}(x_0)$:*

$$\overset{\circ}{O}(x_0) \cap A \neq \emptyset$$

т.е в Этой окрестности нет других точек из A

$A = \{1\} \cup (2,3) \Rightarrow x_0 = 1$ – изолированная точка. $x_0 = 4 --$ не изолированная точка, т.к. $x_0 \notin A$

Замечание: Пусть $x_0 \in A$. Тогда x_0 – не иззолированная точка $\Leftrightarrow x_0$ – точка сгущения, т.е множество изолированных точек $= A \setminus A'$

Вспомним определение замкнутого множества

Определение 0.5. *A – замкнуто $\Leftrightarrow cA$ – открыто*

Теорема 0.1. *(об эквивалентных определениях замкнутого множества). Следующие 4 определения эквивалентны*

1. *A – замкнуто*

2. *A включает (содержит) все свои конечные точки прикосновения*
3. *A включает в себя все свои конечные точки сгущения*
4. *A содержит свою границу ∂A*

Доказательство.

.
$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$$

. $1 \Rightarrow 2$: Пусть A – замкнуто (т.е. cA – открыто)
Пусть x_0 – конечная точка прикосновения A $\Rightarrow x_0 \in A$
От противного:

Пусть $x_0 \notin A \Rightarrow x_0 \in cA$ – открытое множество $\Rightarrow \exists$ окружность $O(x_0) \subset cA \Rightarrow O(x_0) \cap =$ $\emptyset \Rightarrow x_0$ – не точка прикосновения ??!

. $2 \Rightarrow 3$: Пусть A содержит все свои конечные точки прикосновения.

Пусть x_0 – конечная точка сгущения, но тогда она и точка прикосновения$\Rightarrow x_0 \in A$ ч.т.п.

. $3 \Rightarrow 4$ Пусть A включает все конечные точки сгущения $\Rightarrow \partial A \subset A$

Пусть $x_0 \in \partial A$. Если $x_0 \in A$ – то всё доказано.
Иначе, если $x_0 \notin A$, то по определению границы в любой окрестности ($x_0 \in \partial A \Rightarrow$ в любой окружности O(x_0) есть точки из A и не из A)
Есть точки из A, причём, они $\neq x_0$, т.к. $x_0 \notin A \Rightarrow x_0$ – точка сгущения $\Rightarrow x_0 \in A$ – противоречие по предположению

$4 \Rightarrow 1$ Пусть $\partial A \subseteq A$, покажем, что cA – открыто.

Пусть $x_0 \in$ cA, т.е. надо показать, что x_0 – внутренняя точка cA. То расположим x_0 по отношению к cA.
$$x_0 \in \int cA \vee x_0 \in \partial(cA) \vee x_0 \in ext(cA)$$

Первое нам не подходит. Т.к. $\partial(cA) = \partial A$ (легко следует из определения)

$x_0 in \partial(cA) = \partial A \overset{\text{усл}}{\Rightarrow} x_0 \in A \Rightarrow x_0 \notin cA$ противоречие

$x_0 \in ext(cA) \Rightarrow x_0 \in A \Rightarrow$ снова такое же противоречие.

□

0.2 Три фундаментальных принципа математического Анализа

- Теорема (принцип) Кантора
- Теорема Бореля - Лебега
- Теорема Больцано - Вейрштрасса

Теорема 0.2. *Теорема Кантора (повтор, т.к. это было).*
Пусть дана последовательность вложенных отрезков

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \ldots$$

. *Тогда*
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

Более того если
$$\delta_n = |b_n - a_n|$$

стремится к 0, т.е.

$$\forall\epsilon > 0 \exists N : \forall n > N \delta_n < \epsilon$$

, то

$$\cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = c$$

состоит из единственной точки.

Пусть есть некоторое множество X и семейство множеств

$$X_\alpha, \alpha \in A$$

– множество индексов

$$X \subset \cup_{\alpha \in A} X_\alpha$$

, тогда семейство $\{X_\alpha\}$ называется покрытием множества X.

Пример:

$X_n = [n, n+1] \quad X_{n n \in \mathbb{N}}$ — покрытие $\mathbb{R}$

Пусть в множестве индексов A $\exists$ подмножество $B \subsetneq A$: семейство $\{X_\alpha\}_{\alpha in B}$ снова образует покрытие.

Тогда $\{X_\alpha\}_{\alpha \in B}$ называется подпокрытием покрытия $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Теорема 0.3. *Бореля - Лебега*

Из $\forall$ покрытия отрезка открытыми интервалами можно выбрать конечное подпокрытие.

Доказательство. Пусть $[a, b]$ – некоторый отрезок, и $\{X_\alpha\} = (a_\alpha, b_\alpha)$

Предположим обратное, т.е. что из $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ нельзя выбрать конечное подпокрытие (т.е. $\forall$ конечного $B \subset A \quad \exists x^* \in X : x^* \notin \bigcup_{\alpha \in B} X_\alpha$)

Разделим $[a, b]$ пополам

$$[a; \frac{a+b}{2}] \quad \text{и} \quad [\frac{a+b}{2}; b]$$

Тогда не существует конечного подпокрытия хотя бы для одной из половин. Обозначим её за $[a_1, b-1]$ И повторим рассуждение. Разобьём $[a_1, b-1]$ пополам и выберем ту, для которой нет конечного подпокрытия

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \ldots$$

со свойствами:

1. из покрытия отрезка $[a_n, b_n]$ нельзя выбрать конечное подпокрытие
2. $\delta_n = b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \quad \delta \to 0$

По теореме Кантора $\exists! c = \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$.

Ясно $\exists X_{\alpha \ni c}$, т.е. $c \in (a_\alpha, b_\alpha)$ – открытое множество $\Rightarrow \exists\epsilon$ – открытое $O_\epsilon \subset (a_{\alpha, b_\alpha})$

$\delta_n \to 0 \Rightarrow$ начиная с некоторого N $c \in [a_N, b_N] \subset O_\epsilon(c)$

$\epsilon > \dfrac{b-a}{2^N} \Rightarrow [a_N, b_N]$ покрывается одним интервалом (a_α, b_α)

$[a_n, b_n] \subset (a_\alpha, b_\alpha)$ □

Теорема 0.4. *Больцано - Вейрштрасса*

Определение 0.6. *Множества, которые замкнуты и конечны называются компактными.*

Любое бесконечное ограниченное множество имеет хотя бы одну точку сгущения

Доказательство. Если множество ограничено $\Leftrightarrow$ он целиком включено с некоторым отрезком

Пусть A – множество из условия теоремы

x – точка сгущения A $\Leftrightarrow \forall \overset{\circ}{O}_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \setminus : \overset{\circ}{O}(x) \cap A \neq \emptyset)$

От противного: точек сгущения нет $\Rightarrow \forall x \in [a, b]$ не является точкой сгущения.

$\forall x \exists \overset{\circ}{O}(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow O(x)$ максимум сожержит только одну точку из A

Пусть $X_x = \overset{\circ}{O}(x)$ – открестность из отрицания выше.
$[a,b] \subset \bigcup_{x\in[a,b]}$ - покрытие отрезка неограниченным множествами.
$x \in O(x)$
$\exists x_1, ..., x_n$:
$[a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{n} O(x_k)$
Каждое $O(x_k)$ содержит не более одной точки из A
То бесконечное A содержится в множестве, содержащим лишь конечное число точек A ??! $\square$

0.3 Последовательность, предел последовательности.

Определение 0.7. *Последовательностью называется счётный (пронумерованный натуральными числами) набор чисел в* $\mathbb{R}$
Последовательностью называется некая функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}(n \to x_n)$

Пусть дана последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
Язык "$\varepsilon - \delta$"

Определение 0.8. *Число* $a \in \mathbb{R}$ *(a – конечное число) называется пределом последовательности* $\{x_n\}$*, если* $\forall\varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geqslant N \quad |x_n - a| < \varepsilon$

Доказательство. Докажем на Языке "$\varepsilon - \delta$ что a=1 – предел x_n, т.е. $\forall\varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \quad |x_n - a| = |\frac{1}{k}| < \varepsilon$

Неформальная часть: хотим, чтобы $\frac{1}{n} < \varepsilon \quad n > \frac{1}{\varepsilon} \quad n \geqslant \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$
$N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$
Покажем, что это N_ε – искомое
Пусть $n \geqslant N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$
Тогда $|x_n - a| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N_\varepsilon} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1} < \varepsilon$, т.к $\frac{1}{\varepsilon} < \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$
Обозначение: $a = \lim_{n\to\infty} x_n$
Вспомним, что $O_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = x||x - a| < \varepsilon$
Определим предел на языке окрестностей
$\forall\varepsilon$ – окрестности $O_\varepsilon(a) \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \quad x_n \in O_\varepsilon(a)$

Определение 0.9. *отрезок* $[a,b]$ *— "кормушка" для* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, если он содержит* ∞ *много членов последовательности.*

Определение 0.10. *отрезок* $[a,b]$ *– "ловушка" для* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, если вне этого отрезка либо совсем нет членов* x_n *либо их конечное число.*

$\square$

$\forall A\mathbb{R} = int(a) \cup \partial A \cup ext(A)$

$x_n = \frac{n^2}{2^n}$ по индукции можно построить разность и привести всё к вадратному уравнению, котрое покажет, что начиная с 4-х последовательность монотонно убывает.

любая кормушка является (включается) ловушкой.

$\{x_n^2\} \quad [a,b]$ – кормушка, но не ловушка
$\frac{1}{2} + (-1)^n(\frac{1}{2} - \frac{1}{n})$

а) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}..., \frac{1}{n}..$

б) $1, 2, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}...\frac{1}{n}, 1\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}...$

в) $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, ..2n-1, \frac{1}{2n}, 2n+1, ...$

$A = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ловушка, кормушка, кормушка
$B = [-1, 1]$ ловушка, кормушка, кормушка
$C = [-2, 2]$ ловушка, ловушка, кормушка

Существует ли такая последовательность, для которой каждый из отрезков $[0, 1]$ и $[2, 3]$ является кормушкой, ловушкой.

$\frac{1}{2} + (-1)^n(\frac{1}{2} - \frac{1}{n})$ – кормушки

два не пересекающихся множества не могут быть ловушками одновременно

а) $x_n = \frac{1}{n^2+1}$

б) $x_n = (-\frac{1}{2})^2$

Указать такое N, чтобы при $n > N$ выполнялось, что $|x_n| < 0.001$ и $|x_n| < 0.000001$

Теорема 0.5. *Предел Единственен*

Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такова, что* $x_n \to a$ *и* $x_n \to b \Rightarrow a = b$

Доказательство. От противного. Пусть

$$b > a \quad \varepsilon = b - a > 0$$

Т.к. $x_n \to a \Rightarrow \exists N : \forall n > N x_n \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(n)$

С другой стороны $x_n \to b \Rightarrow \exists N_2 : \forall n > N_2 x_n \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(n)$

но $O_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \bigcap O_{\frac{\varepsilon}{2}}(b) = \emptyset$??!

□

0.3.1 Предельные точки

Пусть $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность. $x_n : \mathbb{N} \xrightarrow{x_n} \mathbb{R}$

Пусть n_k – последовательность возрастающих натуральных чисел. $n_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad n_{k+1} > n_k$

Определение 0.11. *Композиция*

$k \to n_k \to x_{n_k}$

$x_{n_k} : \mathbb{N} \xrightarrow{n_k} \mathbb{N} \xrightarrow{x_n} \mathbb{R}$

называется подпоследовательностью последовательности x_n*. Пишем* $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$

Теорема 0.6. *Пусть* $x_n \to a$ *Тогда* $\forall$ *подпоследовательности* $x_{n_k} \to a$

Доказательство. По определению предела.

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \quad x_n \in O_\varepsilon(a)$

Т.к. n_k – взрастающая последовательность натуральных чисел $\Rightarrow n_k \geqslant k$

То $\forall k > N \Rightarrow n_k > N \Rightarrow x_{n_k} \in O_\varepsilon(a)$ □

Определение 0.12. *Пусть дана последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *Тогда* x^* *называется предельной точкой этой последовательности, если Любая окрестность* x^* *содержит бесконечное число членов этой последовательности.*

Если a – предел, то a – предельная точка.

Теорема 0.7. *Пусть* x^* *– предельная точка последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

Тогда существует подпоследовательность $x_{n_k} \to x^*$

Доказательство. $\varepsilon = \dfrac{1}{m}$ Рассмотрим окрестность $O_{\frac{1}{m}}(x^*)$

Она содержит бесконечное число членов x_n

Пусть $m = 1$ $O_1(x^*)$ берём любой его член, который попал в $O_1(x^*)$. Его номер n_1

Рассмотрим $O_{\frac{1}{2}}(x^*) - -\infty$ членов $\Rightarrow$ есть член не равный x_n, Пусть его номер n_2 – это второй номер нашей подпоследовательности.

Пусть уже построили $n_1, n_2, n_3, ..., n_m : x_{n_m} \in O_{\frac{1}{m}}(x^*)$

Рассмотрим $O_{\frac{1}{m+1}}(x^*)$ и берём тот член последовательности, который отличен от предыдущих, но также $\in O_{\frac{1}{m}}(x^*) n_{m+1}$ – это m+1-ый номер подпоследовательности.

В итоге мы определили подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$

$x_{n_m \in O_{\frac{1}{m}}}(x^*) \Rightarrow |x_{n_m}| < \dfrac{1}{m} \forall n$

При $m \to \infty |x_{n_m}| \to \dfrac{2n^2+1}{n^2+n+1} - 3htarrow0 \Rightarrow x_{n_m} \to x^*$ □

Задача: Доказать по определению, что $\dfrac{3n^2+1}{n^2+n+1} \to 3$, при $n \to \infty$

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k \geqslant N$ выполнянтся, что $|\dfrac{3n^2+1}{n^2+n+1} - 3| < \varepsilon?$

$|\dfrac{3n^2+1}{n^2+n+1} - 3| = |\dfrac{3n^2+1-3n^2-3n-3}{n^2+n+1}| = \dfrac{3n+2}{n^2+n+1} < \varepsilon?$

$\Leftrightarrow 3n + 2 < \varepsilon(n^2+n+1) \Leftrightarrow \varepsilon n^2 + (\varepsilon - 3)n + \varepsilon - 2 > 0$

$n_{1,2} = \dfrac{3-\varepsilon \pm \sqrt{(3-\varepsilon)^2 - 4\varepsilon(\varepsilon-2)}}{2\varepsilon}$

$D = (3-\varepsilon)^2 - 4\varepsilon(\varepsilon - 2)$

$N(\varepsilon) = \begin{cases} [n_2] + 1, D \geqslant 0 \\ 1, D < 0 \end{cases}$

1) $n > n_2 \Rightarrow$ выполняется для любого n

2) D<0 не выполняется

□

0.4 Бесконечно большие последовательности

До сих пор $x_n \to a, a \in \mathbb{R}$, где a – конечно
Теперь рассмотрим $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \pm\infty$

Определение 0.13 (на $\varepsilon - \delta$)**.** $x_n \to +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall k \geqslant N \quad x_n > \varepsilon$

Определение 0.14 (на языке окрестностей)**.** $x_n \to a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \geqslant N x_n \in O_\varepsilon(x) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

$x_n \to +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \ \forall n \geqslant N x_n \in O_\varepsilon(+\infty)$

Эта запись совпадает с записью для конечнго предела. Аналогично для $-\infty$

Определение 0.15. $x_n \to \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geqslant N \quad x_n < -\varepsilon$

Определение 0.16. $x_n \to \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geqslant N \quad x_n \in O_\varepsilon(-\infty) \overset{def}{=} (-\infty, -\varepsilon)$

Определение 0.17 (Универсальное определение предела)**.** *$x_n \to a$, где $a \in \overline{\mathbb{R}}$* $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \quad x_n \in O_\varepsilon(n)$

Существует разница в словоупотреблении "Последовательность имеет предел"и "Последовательность сходится"

Последовательность сходится = Последовательность имеет конечный предел

Т.о $x_n = n \to +\infty$ эта последовательность имеет предел, но расходится

Расходимость = предел не существует или равен $\pm\infty$

Теорема 0.8 (Больцано-Вейрштрасса (другая формулировка принципа))**.** *Из любой ограниченной последовательности x_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность*

Доказательство. Пусть $x_n = f(n)$, f(n):$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Рассмотрим образ $f(\mathbb{N})$

$f(\mathbb{N}) \subset [inf\{x_1 \dots x_n \dots\}, sup\{x_1 \dots x_n \dots\}]$,они существуют, т.к последовательность ограничена.

Случай 1) $f(\mathbb{N})$ – конечно

Случай 2) $f(\mathbb{N})$ – бесконечно

Случай 1) Если $f(\mathbb{N})$ – конечно, то $\exists\infty$ число членов последовательности и конечное число возможных значений для них $\Rightarrow$ какое-то значение (например a) будет приниматься ∞ число раз

Т.е $\exists n_1, n_2 \dots n_k \dots : x_{n_k} = a \forall k = 1, 2 \dots$

Тогда x_{n_k} и есть искомая подпоследовательность 0 Случай 2) По приницпу Больцано-Вейрштрасса любое ограниченное бесконечное множетсво имеет хотя бы одну точку сгущения.

Пусть a – точка сгущения для множества $f(\mathbb{N})$

По определению: $\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists x \in f(\mathbb{N}) : \ x \in \dot{O}_\varepsilon(a)$

Будем брать $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$

$\forall k \in \mathbb{N} \ \ \exists x \in f(\mathbb{N}) = x_1, x_2 \dots$, что сие значит?

это значит, что $x = x_{n_k}$ $\quad n_k$ – номер члена последовательности, которому равен x

Т.е. $0 < |x_{n_k} - a| < \dfrac{1}{k}$

Т.е. мы нашли искомую подпоследовательности. □

Замечание(для неограниченных последовательностей):

Из любой последовательности можно выбрать подполедовательность, имеющюю предел (иметь предел $\neq$ сходиться)

Доказательство. Если последовательность ограничена, то это следует из теоремы Больцано-Верштрасса

А если последовательность $\{x_n\}$ неограничена $\Rightarrow$ она неограничена либо сверху либо снизу. Не умаляя общности считаем, что $\{x_n\}$ неограничена сверху

$\forall M > 0 \exists n = n(M) \in \mathbb{N} : x_n > M$

Будем брать в качестве M натуральные числа M=k, где $k = 1, 2, 3 \dots$

Тогда $\forall k \exists n_k : x_{n_k} > k$

Т.о. $x_{n_k} \to \infty \Rightarrow$

Мы нашли подпоследовательность x_{n_k} : у неё есть ∞ предел □

Лемма 0.1. *Если последовательность $\{x_n\}$ не имеет наибольшего члена, то из неё можно выделить строго монотонную возрастающюю последовательность*

$x_{n_1} < x_{n_2} < \dots < x_{n_k} < x_{n_{k+1}} < \dots$

Теорема 0.9 (Теорема о монотонной подпоследовательности)**.** *Из любой последовательности $\{x_n\}$ можно выбрать монотонную подпоследовательность*

$$x_{n_1} \leqslant x_{n_2} \leqslant \dots \leqslant x_{n_k} \leqslant x_{n_{k+1}} \leqslant \dots$$

или

$$x_{n_1} \geqslant x_{n_2} \geqslant \dots \geqslant x_{n_k} \geqslant x_{n_{k+1}} \geqslant \dots$$

Теорема 0.10 (Больцано-Вейрштрасса 2)**.** *Монотонные и ограниченные последовательности сходятся*

Доказательство. Не умаляя общности считаем, что ограниченная послеодватеьельность x_n возрастает

$$x_{n_1} \leqslant x_{n_2} \leqslant \ldots \leqslant x_{n_k} \leqslant x_{n_{k+1}} \leqslant \ldots$$

Рассмотрим $\sup\{x_1, x_2 \ldots x_n \ldots\} = \in \mathbb{R}$

а – конечное число, т.к. последовательность ограничена

Покажем, что $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ – искомый предел

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : n \geqslant N \ |x_n - a| \leqslant \varepsilon$

Т.к. $x_n \uparrow \Rightarrow a \geqslant x_n \quad \forall n \ |x_n - a| = |a - x_n|$

Берём $\forall \varepsilon > 0$ по теореме о sup а - ε – уже не будет верхней гранью, т.е. $\exists N = N(\varepsilon) : x_N > a - \varepsilon \Leftrightarrow 0 \leqslant a - x_N < \varepsilon$

Т.к. $x_n \uparrow \Rightarrow \forall n \geqslant N x_N \leqslant x_n \leqslant a$

Из этого следует, что $0 \leqslant a - x_n \leqslant a - x_N < \varepsilon$

И всё доказано □

О предельных переходах в неравенствах

Теорема 0.11. *Пусть дана сходящиеся последовательности* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *и* $\forall n \ x_n \leqslant y_n \Rightarrow lim_{n\to\infty} x_n \leqslant lim_{n\to\infty} y_n$

Замечание: Даже если $x_n < y_n$ *всё равно нужно писать* $lim_{n\to\infty} x_n \leqslant lim_{n\to\infty} y_n$

При $x_n = -\dfrac{1}{n} < y_n = \dfrac{1}{n} \quad lim x_n = lim y_n = 0$

Доказательство. Пусть $a = lim\{x_n\}, b = \{lim y_n\}$ От противного: Пусть а > b

$\varepsilon = a - b > 0$

По пореденлению предела:

$\exists N_1 : \forall n \geqslant N_1 x_n \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$

$\exists N_2 : \forall n \geqslant N_2 y_n \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(b)$

$N = max N_1, N_2 \forall n \geqslant N y_n \leqslant b + \dfrac{\varepsilon}{2} = a - \dfrac{\varepsilon}{2} < x_n$

Т.е. $y_n < x_n$, что невозможно □

Теорема 0.12 (О двух милиционерах)**.** *Пусть даны 3 последовательности* $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\} : x_n \leqslant y_n \leqslant z_n \forall n$

Пусть существует $lim\{x_n\} = lim\{z_n\} = a$

Тогда существует $lim\{y_n\} = a$

Определение 0.18. α_n *– бесконечно малая последовательность, если* $\alpha_n \to 0 \quad n \to +\infty$

Теорема 0.13 (Об арифметических действиях над б.м.п.)**.** .

1. *если* α_n *– б.м.п.* $\Rightarrow \forall c \in \mathbb{R} \quad c \cdot \alpha_n$ *– б.м.п.*
2. *если* α_n, β_n *– б.м.п* $\Rightarrow \alpha_n \pm \beta_n$ *– б.м.п*
3. *если* α_n *– б.м.п,* β_n *– ограничено* $\Rightarrow \alpha_n \cdot \beta_n$ *– б.м.п*
4. *если* α_n *– б.м.п.* $\Rightarrow \frac{1}{|\alpha_n|}$ *– б.б.п* $\to \infty$
5. *если* $\beta_n : \beta_n \neq 0$ *– б.б.п.* $\Rightarrow \frac{1}{\beta_n}$ *– б.м.п*

Доказательство. α_n – б.м.п. $\Longleftarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geqslant N \quad |\alpha_n| < \varepsilon$

1. Берём $\varepsilon > 0$ и выбираем $N : \forall n \geqslant N \quad |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{|c|}$

   Тогда $\forall n \geqslant N \quad \forall n \geqslant N \quad |c \cdot \alpha_n| < \varepsilon$ ч.т.д.

2. $\alpha_n \pm \beta_n \to 0$

   Берём $\varepsilon > 0$

   и выбираем $N_1 : \forall n \geqslant N_1 \quad |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

   и выбираем $N_2 : \forall n \geqslant N_2 \quad |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

   Пусть $N = max\{N_1, N_2\}$

   Тогда $\forall n \geqslant N$

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

   ч.т.д.

3. Т.к. β_n – ограничена $\Rightarrow \exists M : \forall n : |beta_n| \leqslant M$

   Берём $\varepsilon > 0$, т.к. $\alpha_n \to 0$, то $\exists N = N(\frac{\varepsilon}{M}) : \forall n \geqslant N |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$

   Тогда $\forall n \geqslant N |\alpha_n \cdot \beta_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$ ч.т.д.

4. $\frac{1}{\alpha_n} \to +\infty \Longleftarrow \forall M \exists N = N(M) : \forall n \geqslant N \quad \frac{1}{\alpha_n} > M$

   Т.к. $\alpha_n \to 0$, то для $\varepsilon = \frac{1}{M} \exists N : \forall n \geqslant N |\alpha_n| < \varepsilon = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{|\alpha_n| > M}$ ч.т.д.

5. Очевидно

□

Теорема 0.14 (о представлениии сходящихся последовательностей). *Пусть $\{x_n\}$ – сходящяяся последовательность, т.е.* $\lim_{n+\infty}(x_n) = a < +\infty$

Тогда $\exists$ такая б.м.п. $\alpha_n : x_n = a + \alpha_n$

Доказательство. Рассмотрим $\alpha_n = x_n - a$ Надо показать, что α_n – б.м.п.

Мгновенно следует по определению

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N |x_n - a| < \varepsilon \Longleftarrow |\alpha_n < \varepsilon|$ ч.т.д. □

Теорема 0.15 (Об арифметических действиях над сходящимися последовательностями). *Пусть $x_n \to a, y_n \to b \quad a, b$ – конечные*

1. *Тогда* $\exists \lim_{n\to+\infty}(c_1 x_n + c_2 y_n = c_1 a + c_2 b \quad \forall c_{1,2}$

2. *Тогда* $\exists \lim_{n\to+\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$

3. *Если $b \neq 0$, то* $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} \quad (y_n \neq 0?)$

Доказательство. По предположению теормы $x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n$

1. ${}_1 x_n + c_2 y_n = c_1 a + c_2 b + (c_1 \alpha_n + c_2 y_n) \Rightarrow c_1 x_n + c_2 y_n \to c_1 a + c_2 b$

   $(c_1 \alpha_n + c_2 y_n)$ – б.м.п.

2. $x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n)$

   $a\beta_n \to 0$

   $b\alpha_n \to 0$

   $\alpha_n \beta_n \to 0$

   $\Rightarrow x_n y_n \to ab$

3. $\frac{x_n}{y_n} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} = \frac{a}{b} + \frac{\alpha_n b - \beta_n a}{\beta(\beta_n)}$

   Числитель – б.м.п.

   Знаменатель – ограниченная последовательность

   Дробь – б.м.п.

   $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$

□

Задача 0.1 (57). $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ *(т.е. 2^n растёт быстрее, чем n)*

$\prec$ – растёт медленнее
Есть последовательность $\{x_n\}$,
нужно выбрать монотонную подпоследовательность (возрастающую или убывающую)
Может быть два случая:

1. изначальная – сходящяяся, тогда исходя из теоремы Больцано Вейрштрасса можно выбрать сходящуюся подпоследовательность

   $\lim x_n = a(n \to +\infty) \quad \forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \ |x_n - a| < \varepsilon$

   $\begin{cases} x_{n_k} \to a \\ x_{n_k} < a \end{cases}$

2. Не ограничена сверху. Тогда $\forall b \in \mathbb{R} \exists x_j \geqslant b$

   $x_1 < x_2 < \dots$

Полезное неравенство
Неравенство Бернули
$(1 + x^n) \geqslant 1 + nx \forall x > -1$
$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{1+a^n} = L$

1. $a = 0 \quad L = 0$
2. $a = 1 \quad L = \frac{1}{2}$
3. $a > 1 \Rightarrow a = 1 + \varepsilon > 0 \quad a^n = (1+\varepsilon)^n \geqslant (1 + \varepsilon n) \to +\infty$

Теорема 0.16. $x_n = (a + \frac{1}{n})^n$ *имеет предел*
$\lim_{n\to+\infty} x_n = e$
$e = 2.18281828459045$

Доказательство. $\lhd y_n = (1 + \frac{1}{n})^(n + 1)$ Покажем, что она убывающая и ограничена сверху. Ограничена снизу очевидно $y_n \geqslant 1$

Монотонность? $y_n < y_{n-1}$

$y_{n-1} > y_n \iff (1 + \frac{1}{n-1})^n > (1 + \frac{1}{n}^{n+1}) \iff (\dfrac{n}{n-1})^n > (\dfrac{n+1}{n}))^{n+1} \iff (\dfrac{n}{n-1})^n (\dfrac{n+1}{n})^{n+1} \iff (1 + \frac{1}{n^2-1})^n (\frac{n}{n+1}) > 1 \iff (1 + \frac{1}{n^2-1})^n > \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ (*)

Неравенство Бернули
$(1 + \frac{1}{n^2-1})^n \geqslant 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}$ (*)
То $y_n \downarrow$ и ограничено снизу $\Rightarrow \exists \lim y_n$
Пусть $\varphi = \lim_n y_n$
$y_n = x_n * (1 + \frac{1}{n}) \to e$
$x_n = \dfrac{y_n}{1 + \frac{1}{n}} \to e$
То $\exists \lim x_n = e$ □

Иерархия об бесконечно больших последовательностей

$\log_{\frac{1}{a}}(x) = -\log_a x$
$(\log_a n)^m \prec n^p \prec a^n \prec n! \prec n^n$
m – фиксированное число$\in \mathbb{N}$.
p – фиксированное число$\in \mathbb{N}$.

$$lim_{n\to\infty} \frac{n!2^n - (n+1)!}{(n+1)!3^n - n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1} * \frac{2}{3}^n - \frac{1}{3}^n}{1 - \frac{n^2}{(n+1)!*3^n}} = \frac{0}{1} = 0$$

Теорема 0.17. *Пусть* $|\frac{x_{n+1}}{x_n}| \to a < 1 \Rightarrow \lim_n \to \infty x_n = 0$

II) Покажем $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^p}{a^n} = 0 \quad p \in \mathbb{N}, a > 1$

Пусть $x_n = \frac{n^p}{a^n}$

$\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{(n+1)^p}{a^{n+1}} * \dfrac{a^n}{n^p} = \dfrac{(n+1)^p}{n^p} * \dfrac{1}{a} \to \dfrac{1}{a} < 1$

По теореме: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^p}{a^n} = 0$

То $\exists \lim x_n = e$

Теорема 0.18. $y_n = \dfrac{(log_a n)^m}{n^p} \to 0$

Пусть $x_n = log_a n \to +\infty \quad n = a^{x_n}$

$lim_{n\to+\infty} y_n = lim_{n\to+\infty} \dfrac{(log_a n)^m}{n^p} = lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n^m}{(a^{x_n})^p} = lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n^m}{b_n^x}$

$a^p = b$

$\dfrac{n^m}{b^n} \to 0$

$\forall k \in \mathbb{N} \exists N = N(k) \forall n \geqslant N x_n = log_a n > k$

$\dfrac{k^m}{b^{k+1}} < \dfrac{x_n^m}{b^{x_n}} < \dfrac{(k+1)^m}{b^k}$ *оно всё стремиться к 0 при* $k \to \infty$

$\overset{x_1}{\sqrt{2}}, \overset{x_2}{\sqrt{2\sqrt{2}}}, \overset{x_3}{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}} \dots$

Покажем, что предел сущестует. x_n ограничена сверху?

$x_n \leqslant 3$

Мат индукция

$n = 1 \quad \sqrt{2} \leqslant 3$

$n \to n+1 \quad$ Пусть $x_n \leqslant 3 \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \leqslant \sqrt{6} \leqslant 3$ чтд

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{ln\ n + n^2 2^n} - \sqrt{4^n + n^4}}{2^n\sqrt{cos^2 n + n^3 ln\ n} - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{ln\ n}{4^n} + \frac{n^2}{2^n}} - \sqrt{1 + \frac{n^4}{4^n}}}{\sqrt{cos^2 n + n^2 ln\ n} - \frac{n}{2^n}} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

самый быстрорастущий член – 2^n. Поделим на него всё

Поделим на 5

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n3^n + 2*5^n} - 2}{\sqrt[n]{2n^2 + n} + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\frac{n3^n}{5^n} + 2} - \frac{2}{5}}{\sqrt[n]{\frac{2n^2}{5^n} + \frac{n}{5^n}} + \frac{1}{5}} = \frac{1 - \frac{2}{5}}{0 + \frac{1}{5}} = 3$$

$x_{n+1} = \dfrac{2 + x_n}{6 + x_n}, x_1 = 2015$

$n \geqslant 2 \quad - < x_n < 1 \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} - -$

Монотонность?

<u>База</u> $x_1 > x_2$ ясно $2015 > \frac{2017}{2021}$

$n \to n+1$

Пусть $x_{n-1} > x_n$, то есть $x_n - x_{n-1} < 0$

Рассмотрим $x_{n+1} - x_n = \frac{2+x_n}{6+x_n} - \dfrac{2 + x_{n-1}}{6 + x_{n-1}} = \dfrac{(2 + x_n)(6 + x_{n-1}) - (2 + x_{n-1})(6 + x_n)}{(6 + x_n)(6 + x_{n-1})} = \frac{12+6x_n+2x_{n-1}+x_n x_{n-1}-12-6x_{n-}}{()>0,()>0}$

$\dfrac{4(x_n - x_{n-1})}{()()} < 0$ по индукционному предположению

Тогда $x_{n+1} - x_n < 0$

$x_n \downarrow$ По теореме Больцано-Вейршрасса $\exists a = \lim\limits_{n\to infty} x_n$

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{2 + x_n}{6 + x_n} \\ x_n \to a \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2 + a}{6 + a}$$

$6a + a^2 = 2 + a$

$a^2 + 5a - 2 = 0$

$a_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{33}}{2} \quad ////$

$f(x) = \dfrac{2 + x}{6 + x}$

$x_{n+1} = f(x_n) = f^2(x_{n-1} = \ldots = f^n(x_1))$
$x_{n+1} = f(x_n)$ и пусть $x_n \to a \Rightarrow f(a) = a$
$f(x) = x \Longleftarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$
Диаграма Ламерея
$\lim\limits_{n\to\infty}(a + \frac{1}{n})^n = e = \lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+1}{n})$
$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+3}{n-2})^{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \dfrac{5}{n-2})^{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}((1 + \dfrac{1}{\frac{n-2}{5}})^{\frac{n-2}{5}})^{\frac{5}{n-2}*(2n+1)}$
выражение в скобках стремится к , а степень к 10
Последовательность стремится к e^{10}
$x_n = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}), x_1 = 2$
Пусть мы занем, что она ограничена и монотонно убывает. Чемц равен предел
Пусть $x_n \to a$
$a = \frac{1}{2}(a + \frac{2}{a})$
$a^2 = 2$
Поскольку $a > 0$, то $a = \sqrt{2}$

Лемма 0.2. *$x_n \downarrow$ и ограничена снизу:*
Есть тупая оценка снизу $x_n > 0$
$x\frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}) \geqslant \sqrt{x_n\frac{2}{x_n}} = \sqrt{2}$
$x_n \downarrow$
Рассмотрим $x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}) = \frac{x_n}{2} - \frac{1}{x_n} = \dfrac{x_n^2 - 2}{2x_n} > 0 \Rightarrow x_{n+1} < x_n \Rightarrow x_n \downarrow$

$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}), x_1 = 2, a > 0$ ограничено и монотонно убывает. стремиться к корню из а
О скорости сходимости x_n к 2:
Пусть $z_n = x_n^2 - 2$
$z_1 = 4 - 2 = 2$
$z_{n+1} = x_{n+1}^2 - 2 = \frac{1}{4}(x_n + \frac{2}{x_n})^2 - 2 = \frac{1}{4}(x_n^2 + 4 + \frac{4}{x_n^2} - 8) = \frac{1}{4}(x_n^2 - 4 + \frac{4}{x_n^2}) = \frac{1}{4}(x_n - \frac{2}{x_n})^2 = \frac{1}{4x_n^2}(x_n^2 - 2)^2 \leqslant \frac{z_n}{8}$
$z_{n+1} \leqslant \frac{z_n^2}{8}$
супер сходимость
$sin(x \pm y) = sin\ x\ cos\ y \pm cos\ c\ sin\ y$
$\forall x, y \quad \exists u, v : \begin{cases} x = u + v \\ y = u + v \end{cases} \quad \begin{cases} u = \dfrac{x+y}{2} \\ v = \dfrac{x-y}{2} \end{cases}$
$|sin\ x - sin\ y| = |sin(u+v) - sin(u-v)| = 2|cos\ u||sin\ v| \leqslant 2 \cdot 1|sin\dfrac{x-y}{2}|$
$sin\ w \leqslant w$

Теорема 0.19. *$y_n \to \infty$, начиная с некоторого номера выполняется, что $y_{n+1} > y_n$*
Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_n - 1}$
Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$

Теорема 0.20. *Пусть* $x_n \to a < +\infty \Rightarrow \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \to a$

Доказательство. Рассмотрим $x'_n = x_1 + \ldots + x_n, y_n = n$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x'_n - x'_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{1} = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x'_n}{y} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$ □

Дз:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1$

2. $\lim \dfrac{1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}} = \dfrac{1}{k+1}$

3. Пользуясь теоремой о сущществовании предела у монотонных оганиченных последователь доказать существование предела:

   - $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$
   - $x_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$

Теорема 0.21 (Штольца)**.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$

Если :

1. *Пусть* $e_n \to +\infty$ *и* $y_{n+1} > y_n$
2. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ *– конечный или бесконечный*

$\Rightarrow \exists \lim \dfrac{x_n}{y_n} = \lim \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$

Доказательство. Пусть $\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \to a$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N \quad |\dfrac{x_{n+1}x_n}{y_{n+1}-y_n} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_{n+1}x_n}{y_{n+1}-y_n} < a + \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N$$

Лемма 0.3. *Пусть есть набор* $\frac{p_k}{q_k}, k = \overline{1,n}$. *Тогда* $\forall k \quad a < \dfrac{p_k}{q_k} < b \Rightarrow a < \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{m} p_k}{\sum_{k=1}^{m} q_k} < b$

$a - \frac{\varepsilon}{2} < \dfrac{(x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_{N+1} - x_N)}{(y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + \cdots + (y_{N+1} - y_N)} < a + \frac{\varepsilon}{2}$

$|\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N$

Легко видеть:

$|\frac{x_n}{y_n} - a| = |\frac{x_N - a y_N}{y_n} + (1 - \frac{y_N}{y_n})(\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - a)| \leqslant |\frac{x_N - a y_N}{y_n}| + (a - \frac{y_N}{y_n})|\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - a| \leqslant$

$y_n \uparrow$ □

.

+

.

.

.

.

ДЗ) 39, 40, Случай 2, 54(а, в, г), 59* , 355.1(а-л) прошлый листочек $\lim_{n\to\infty} \frac{n^m}{a^n} = 0 \qquad n^m \prec a^n$

$m \in \mathbb{N}$

$a > 1$

59^*