Задача 6. Геометрия и Алгебра слов.

Анатолий Коченюк, команда ЛНМО#ℕ

Февраль 2018

Аннотация

В этой статье решены первые два пункта исходной задачи. Доказано, что R- и X-эквивалентность – отношение эквивалентности. Доказаны несколько теорем на фиксированных наборах условий

Содержание

1 Условия и Определения

.

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ – алфавит. $\forall a \in A \quad \exists a^{-1}$. Множество таких элементов обозначим за A^{-1}. $\Sigma = A \cup A^{-1}$ – расширенный алфавит

Можно рассмотреть набор

$$\Sigma^* = \{\varepsilon, a_1, a_2, \ldots, a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_1a_1, a_1a_2, \ldots, a_1a_1^{-1}, a_1a_2^{-1} \ldots\}$$

всех слов, которые можно получить из алфавита Σ, где ε – пустое слово длины ноль.

На этом множестве определена операция $(\cdot) : \Sigma \times \Sigma \to \Sigma$

Пример: $abaa \cdot ba = abaaba$

Будем коротко записывать $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n раз) $= aa \ldots a$ (n раз)

Зафиксируем некоторый набор изометрий $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subseteq Isom(\mathbb{R}^n)$ пространства $\mathbb{R}^n$

Мы можем компонировать изометрии между собой $xy := x \circ y$

$\forall$ изометрии x $\exists x^{-1}$, которая тоже является изометрией

Определим функцию $f_X : \Sigma^* \to Isom(\mathbb{R}^n)$, которая будет действовать следующим образом:

1. буквам a_i будет опоставляться x_i
2. буквам a_i^{-1} будет сопоставляться x_i^{-1}
3. образ слов будет вычисляться по реккурентному правилу $f_X(w_1w_2) = f_X(w_1) \circ f_X(w_2)$

Будем говорить, что два слова $u, w \in \Sigma^*$ X-эквивалентны, если $f_X(u) = f_X(w)$

Через W_X обозначим фактор-множество Σ^* по получаемому бинарному отношению

Через $R \subset \Sigma^*$ будем обозначать какой-то фиксированный набор слов, а слова из R будем называть пустыми (на геометрическом уровне пустые слова будут соответствовать тождественным изометриям)

Будем говорить, что два слова $u, w \in \Sigma^*$ R-эквивалентны и писать $u \equiv w$, если u можно получить из w многократным повторением следущей опреации:

1. между любыми двумя буквами слова w (или с краю) можно вставить (приписать) любое слово из $\overline{R} := R \cup \{\varepsilon\} \cup \{aa^{-1} | a \in A\} \cup \{a^{-1}a | a \in A\}$
2. А также из слова w можно вычеркнуть отрезок (часть), равную одному из слов в $\overline{R}$. (Считается, что если вычеркнуть из слова само млово, то останется слово длины 0, то есть ε)

Через $\langle \Sigma | R \rangle$ обозначим фактор-множество Σ^* по такому отношению эквивалентности.

Также введём множество движений (чаще отражений), сохраняющи х данную геометрическую фигуру Φ в $\mathbb{R}^n$ – $Fix(\Phi) := \{\varphi \in Isom(\mathbb{R}^n) | \varphi(\Phi) = \Phi\}$

2 Задача 0.1 X-эквивалентность – отношение эививалентности

1. Рефлективность. Каждому слову из Σ^* соответсвует одна изометрия из X.
Значит $\forall a \in \Sigma^* f_x(a) = f_x(a)$

2. Симметричность. $\forall a, b \in \Sigma^* : f_x(a) = f_x(b) \Rightarrow f_x(b) = f_x(a)$. Это очевидно, ведь отношение равенства симметрично.

3. Транзитивность. $\forall a, b, c \in \Sigma^* : f_x(a) = f_x(b) \& f_x(b) = f_x(c) \Rightarrow f_x(a) = f_x(c)$. Это очевидно, потому что отношение равенства транзитивно.

3 Задача 0.2

R-эквивалентность – отношение эививалентности

1. Рефлексивность. $\forall a \in \Sigma^* a \equiv a$. Это очевидно, потому что мы можем получить слово из него же с помощью приписания а затем удалениям слова длины 0 ε

2. Симметричность $\forall u, w \in \Sigma^* u \equiv w \Rightarrow w \equiv u$. $u \equiv w$, следовательно мы можем получить w приписыванием/вычёркиванием слов из $\overline{R}$. Но мы так же можем сделать обратные действия в обратном порядке и получить u из w . А значит $w \equiv u$ что и требовалось доказать

3. Транзитивность. $\forall u, w, v \in \Sigma^* u \equiv w \& w \equiv v \Rightarrow u \equiv v$. Нам нужно показать, что мы можем получить v из u . По условию мы можем получить w из u, а затем мы можем из w получить v. то есть существует искомая поледовательность действий, что и требовалось показать.

Теорема 3.1. *если* $u, v, w, w' \in \Sigma^* \quad \& \quad w = w'$ *, то* $uwv = uw'v$.

Доказательство. $w \equiv w' \Rightarrow$ существует поледовательность действий по прибавлению/вычёркиванию слов из $\overline{R}$ для преобразования w в w'. То же самое преобразование мы можем совершить внутри слова uwv (так, что если в преобразовании приписывалось какое-то слово, то теперь оно будет вставляться между w и одним из двух других слов), получив $uw'v$, что и требовалось доказать $\square$

4 1 пункт

$A = \{a, b\} \quad R = \{a^2, b^2, abab\}$
$\overline{R} = R \cup \{\varepsilon\} \cup \{cc^{-1} | c \in A\} \cup \{c^{-1}c | c \in A\}$

4.1 a)

Теорема 4.1. $\forall x \in \Sigma^* \quad \exists y \in \{\varepsilon, a, b, ab\} : x \equiv y$

рассмотрим несколько длин слов и попробуем сделать вывод

0. $n = 0$:

   Слово длинны 0 – ε он эквивалентен сам себе по рефлексивности R-эквивалентности

1. $n = 1$:

   - a, b эквивалентны себе
   - $a^{-1} \equiv a^{-1}a^2 = a^{-1}aa \equiv a$

- $b^{-1} \equiv b^{-1}b^2 = b^{-1}bb \equiv b$

2. $n = 2$: Существует 16 случаев:

   - так как $a \equiv a^{-1}$ и $b \equiv b^{-1}$ то
     $\varepsilon \equiv a^2 = aa \equiv aa^{-1} \equiv a^{-1}a \equiv a^{-1}a^{-1}$
     и $\varepsilon \equiv b^2 = bb \equiv bb^{-1} \equiv b^{-1}b \equiv b^{-1}b^{-1}$
   - по той же причине

$$ab \equiv ab^{-1} \equiv a^{-1}b \equiv a^{-1}b^{-1}$$

и

$$ba \equiv ba^{-1} \equiv b^{-1}a \equiv b^{-1}a^{-1}$$

и

$$ba \equiv baabab = ba^2bab \equiv bbab = b^2ab \equiv ab \equiv \varepsilon$$

3. $n = 3$: т.е. новое слово имеет вид cs, где $c \in \Sigma$ и s – слово длинны 2. По предыдущему пункту $s \equiv \varepsilon \vee s \equiv ab$

   ε: тогда слово имеет вид $c\varepsilon \equiv c$. По первому пункту слово длины 1 $c \equiv a \vee c \equiv b$

   ab : тогда слово имеет вид cab

   - $c = a \equiv a^{-1}$ тогда по предыдущему пункту $ca \equiv a^{-1}a \equiv \varepsilon$, а тогда $cab \equiv \varepsilon b \equiv b$
   - $c = b \equiv b^{-1}$ тогда по предыдущему пункту $cab \equiv cba$ далее аналогично $cab \equiv a$

4. $n = 4$: тогда по предыдущему пункту $cs \equiv ca \vee cs \equiv cb$, что в свою очередь R-эквивалентно либо ε либо ab

   Заметим, что далее можно применить метод математическо индукции.

   Таким образом любое слово чётной длины будет R-эквивалентно либо ε либо ab, а нечётной – a или b

   доказано

4.2 б)

Необходимо найти пару из двухэлементного множества изометрий $X = \{x, y\}$ и функции f_X, так, чтобы в этой паре понятия R- и X- эквивалентности совпадали.

По пункту [a] $a \equiv a^{-1}$. следовательно $f_X(a) = f_X(a^{-1})$ тогда скажем, что они обе равны x аналогично $f_X(b) = f_X(b^{-1}) = y$

При этом было бы очень хорошо, если бы при повторном применении обеих ихометрий получался бы id и была бы коммутативность относительно композиции.

Для начала поищем в одном из самых простых пространств вида $\mathbb{R}^n$ – $\mathbb{R}^2$

Рассмотрим симметрии относительно кажой из осей, где x– симметрия относительно оси OX, а y – симметрия относительно оси OY.

Для доказательство того, что мы нашли то, что нам нужно рассмотрим все операции, используемые в R-эквивалентности

Докажем, что они все ни что иное, как композиция/удаление композиции с id, что никак не меняет ряд комозиций X-эквивалентности

1. добавление/удаление ε в реккуретной записи X-эквивалентности добавление/удаление композиции с id

2. добавление/удаление $a^2 \vee b^2$ аналогично

3. добавление/удаление $abab$ в записи X-эквиалентности это $xyxy = x^2y^2 = id$
4. добавление/удаление $cc^{-1}, c \in \Sigma$ это то же самое, что добавить в записи X-эквивалентности $vv^{-1}, v \in X$, но $vv^{-1} = id$

мы перебрали все операции с помощью которых мы доказывали R-эквивалентность и не одна из них не меняет ничего в композиционном ряду.

Таким образом для любого слова $c \in \Sigma^*$ $\quad f_X(c) = \begin{cases} id \\ x \\ y \\ xy \quad (f_X(ab) = f_X(a)f_X(b) = xy) \end{cases}$

доказано

4.3 в)

Необходимо доказать, что никакие два слова из множества $\{\varepsilon, a, b, ab\}$ не R-эквивалентны друг другу

- $\varepsilon \not\equiv a$ любая операция по добавлению/удалению слов из $\overline{R}$ изменяет длину слова на 2, то есть сохраняет чётность длины. ε – слово длины 0. a– слово длины 1. они разной чётности $\Rightarrow$ не R-эквивалентны

  По той же причине

  $\varepsilon \not\equiv b$

  $a \not\equiv ab$

  $b \not\equiv ab$

- $\varepsilon \not\equiv ab$

  Допустим обратное $\varepsilon \equiv ab$

  Тогда $abab \equiv ab\varepsilon \equiv ab$

  Докажем, что без этого допущения это не так:

  Каждое R-преобразование сохраняет чётность количества букв a и a^{-1} вместе взятых. Также и с (b, b^{-1}). Это можно показать так. В множестве R лежат:

  - a^2 добавляет/удаляет чётное количество 'а-шек' не изменяя общую их чётность
  - b^2 аналогично
  - $abab$ изменяет количесвто и того и того на 2, всё ещё не меняя четность

  В множестве $\overline{R}$ помимо элементов из R также лежат:

  - ε добавление/удаление которого не меняет количество букв вообще
  - слова вида cc^{-1}, где $c \in \Sigma$ снова изменяет общее количество одной из двух букв на 2.

  Тем самым $abab$ точно не R-эквивалентно ab Так как чётность количества обоих букв изменилась. Но по нашему допущению это так. Противоречие??!

- $a \not\equiv b$ Допустим обратное $a \equiv b$. Также по пункту [а] мы знаем, что $a \equiv a^{-1}$

  Таким образом $ab \equiv aa \equiv aa^{-1} \equiv \varepsilon$. Как можно видеть мы вышли на только что рассмотренный и доказанный случай.

5 2 пункт

Пусть $X = \{x, y\}$, где x, y — это нетривиальный перенос на вектор $(1, 0)$ и нетривиальная скользящая симметрия в перпендикулярном направлении соответственно.

5.1 а)

Докажите, что $xyx = y$, то есть $xyxy^{-1} = id$.

Для связи этой теоремы с алгеброй и геометрией слов зададим алфавит $A = \{a, b\}$ и соответственно расширенный алфавит $\Sigma = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$

Теперь для связи с геометрией зададим плоскость с двумя перпендикулярными осями:

- ось OX. 0 отметим как ε. 1 отметим как a. При отдлении от нуля вправо степень a будет возрастать $(15 \to a^{15})$

  -1 отметим как a^{-1} При отдалении влево будем увеличивать степень $(-15 \to (a^{-1})^{15})$

- Аналогично со второй осью – OY, только там будет использоваться b и b^{-1}

обозначим за $a^{-n} = (a^{-1})^n, n \in \mathbb{Z}$

фиксируем произвольные $n, m \in \mathbb{Z}$ и пронаблюдаем как действуют преобразования x и y:

- $x(a^n b^m) = x(n, m) = (n + 1, m) = a^{n+1} b^m$
- $y(a^n b^m) = y(n, m) = (-n, m + 1) = (a^{-n} b^{m+1}$

Теперь пронаблюдаем что делает xyx:
$xyx(a^n b^m) = x(y(x(n, m))) = x(y(n + 1, m)) = x(-n - 1, m + 1) = (-n, m + 1) = a^{-n} b^{m+1} = y(a^n b^m)$
Что и требовалось показать.

5.2 б)

Пусть $A = \{a, b\}$ и $R = \{abab^{-1}\} \subseteq \Sigma^*$. Определена функция f_X , переводящая a, b в x, y и продолжающаяся на все слова алфавита Σ по установленным в условии правилам. Докажите, что отношения R– и X–эквивалентности совпадают.

Как и раньше покажем, что любые преобразования связанные с R-эквивалентностью есть ничто иное, как (не)домножение

ε Понятно что в реккурентной записи X-эквиалентности это всего лишь домножение на id и не домонжение на id, которое не меняет копмозиционный ряд

$abab^{-1}$ $f_X(abab^{-1}) = xyxy^{-1}$, что по предыдущему пункту $= id$
А значит аналогично ε его добавление/удаление ничего не меняет

cc^{-1} , $c \in \Sigma$ $f_X(cc^{-1}) = uu^{-1} = id.u \in X$ Аналогично.

Таким образом никакое преобразование, связанное с R-эквивалентностью никак не меняет X-эквивалентность. что и требовалось показать.

6 Заключение

Автор полагает надежды, что весь материал, описанный в данной статье, будет понятен читателю любого уровня.

Список литературы:

[1] Юрай Громкович Теоритическая информатика изд. 3-е БХВ-Петербург