

Конспект по геометрии.

Каданцев Георгий, Коченюк Анатолий

13.01.2017

1 Формулы для вычисления площади

1.1 Треугольник

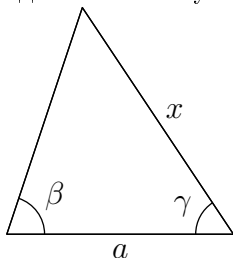
1. По четвёртой аксиоме о площади площадь треугольника равна половине произведения длин одного из его оснований на высоту, опущенной к нему:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

2. Площадь треугольника равна половине произведения двух сторон на синус угла между ними.

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ac \sin \beta$$

3. Давайте найдём площадь треугольника, если известна длина одной его стороны и прилежащие к ней 2 угла. Обозначим сторону напротив одного из этих углов за x . По теореме синусов

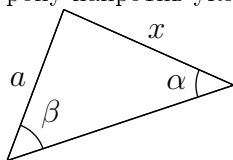


$$x = \frac{a \sin \beta}{\sin(\beta + \gamma)}$$

Следовательно

$$S = \frac{1}{2}ax \sin \gamma = \frac{1}{2}a^2 \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$$

4. Теперь найдём площадь треугольника, когда известны только 2 угла, назовём их α и β , и длина стороны напротив угла α . Обозначим сторону напротив угла β за x . По теореме синусов



$$\frac{x}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

Откуда

$$x = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$$

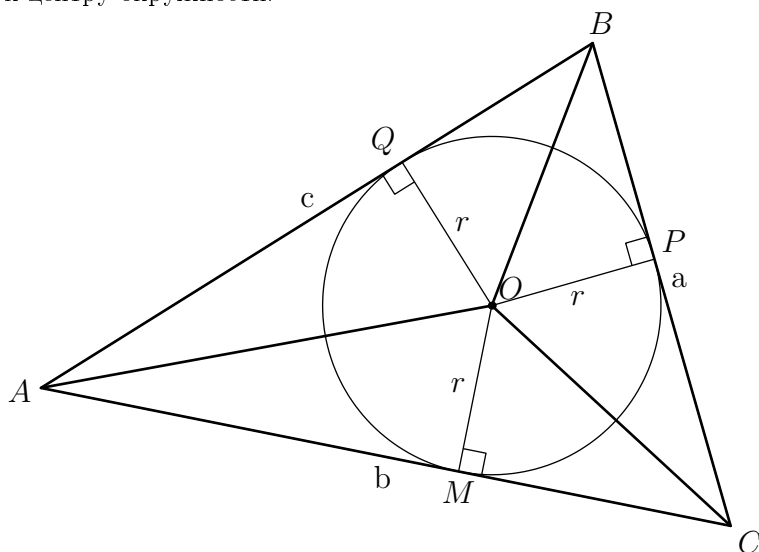
$$S = \frac{1}{2}ax \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}a^2 \frac{\sin \beta \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$$

5.

$$S = \frac{abc}{4R}$$

a, b, c – стороны треугольника, R – радиус вписанной окружности.

6. Рассмотрим произвольный треугольник и вписанную окружность. Проведём радиусы к точкам касания и отрезки из вершин треугольника к центру окружности.

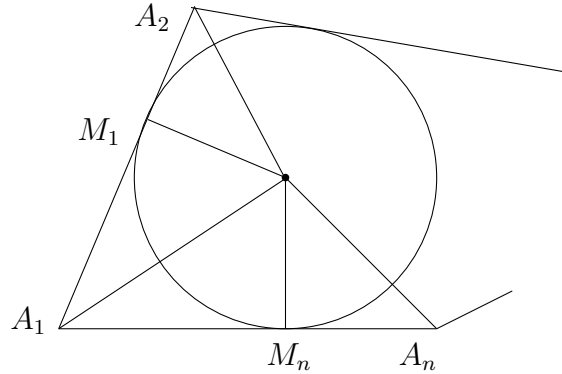


Теперь треугольник ABC разрезан на треугольники AOC , COB и BOA . Площадь этих треугольников обозначим за S_1 , S_2 и S_3 соответственно.

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}r(a + b + c)$$

- 6*. Если в многоугольник можно вписать окружность, то площадь этого треугольника есть произведение полупериметра на радиус вписанной окружности.

Рассмотрим такой многоульник. Он имеет n сторон, и будет разрезаться на n треугольников путём соединения вершин с центром окружности. Понятно, что доказательство в случае треугольника переносится.



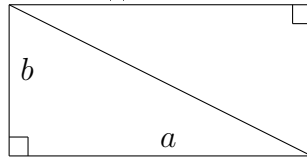
$$\begin{aligned}
 S &= S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n = \\
 &= \frac{1}{2}a_1r + \frac{1}{2}a_2r + \dots + \frac{1}{2}a_nr = \\
 &= \frac{1}{2}r(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \frac{1}{2}Pr = pr
 \end{aligned}$$

$$S = pr$$

r — радиус вписанной окружности.

1.2 Прямоугольник

7. Любой прямоугольник любой диагональю делится на 2 равных треугольника. Так как эти треугольники прямоугольные, высота, опущенная на один из катетов совпадает с другим катетом.



$$S = 2S_{\triangle} = 2 \cdot \frac{1}{2}ab = ab$$

8. Площадь квадрата находится по формуле:

$$S = a * a = a^2$$

1.3 Параллелограмм

1. $S = 2 * S_{\triangle} = 2 * \frac{1}{2}ab \sin \alpha = ab \sin \alpha$
2. $S = 2 * S_{\triangle} = 2 * \frac{1}{2}ah_a = ah_a$
3. $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \alpha$
 $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 2S_1 + 2S_2 = 2 * \frac{1}{2}xy \sin \alpha + 2 * \frac{1}{2}xy \sin \alpha = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \alpha$