Конспект по геометрии.

Каданцев Георгий, Коченюк Анатолий

13.01.2017

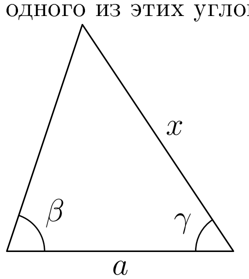
1 Формулы для вычисления площади

1.1 Треугольник

1. По четвёртой аксиоме о площади площадь треугольника равна половине произведения длин одного из его оснований на высоту, опущенной к нему:
$$\boxed{S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c}$$

2. Площадь треугольника равна половине произведения двух сторон на синус угла между ними.
$$\boxed{S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta}$$

3. Давайте найдём площадь треугольника, если известна длина одной его стороны и прилежащие к ней 2 угла. Обозначим сторону напротив одного из этих углов за x. По теореме синусов

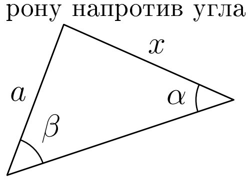


$$x = \frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$$

Следовательно

$$\boxed{S = \frac{1}{2}ax\sin\gamma = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}}$$

4. Теперь найдём площадь треугольника, когда известны только 2 угла, назовём их α и β, и длина стороны напротив угла α. Обозначим сторону напротив угла β за x. По теореме синусов



$$\frac{x}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

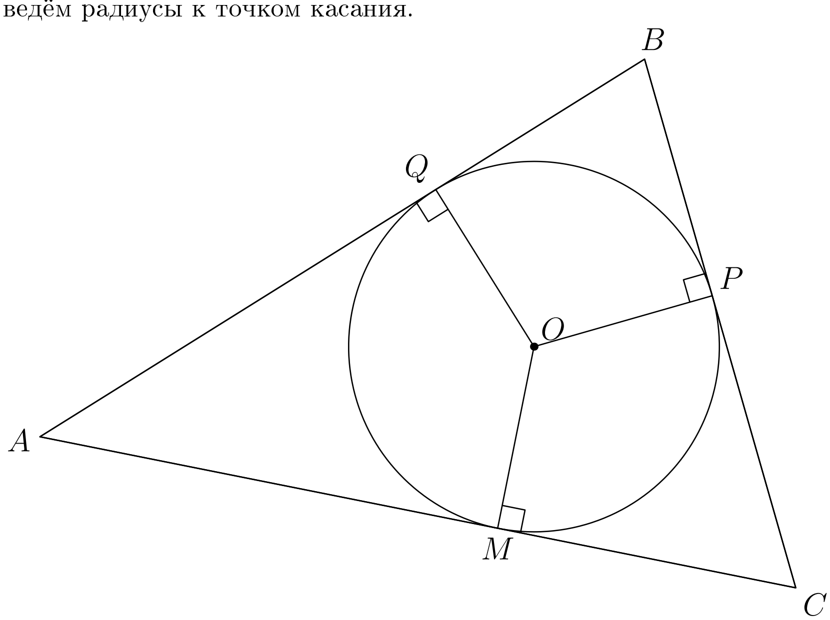
Откуда

$$x = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$$

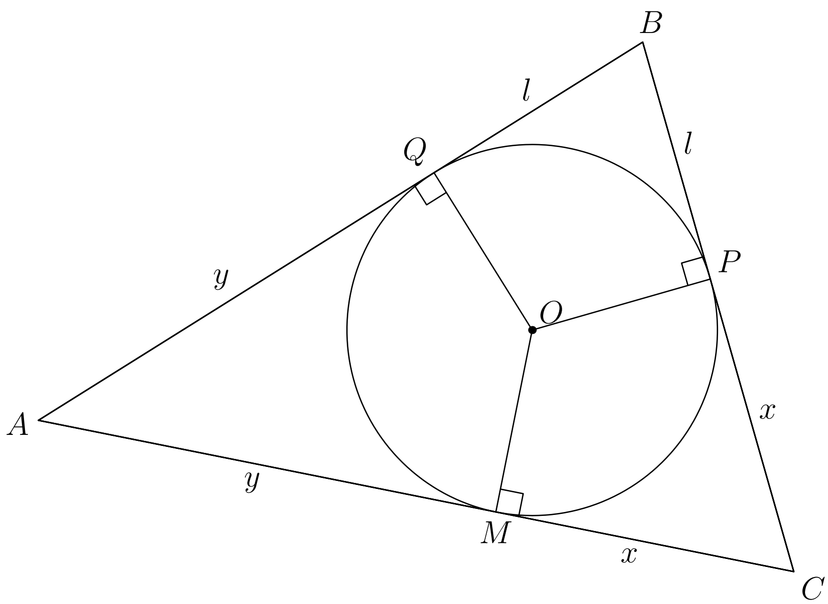
$$\boxed{S = \frac{1}{2}ax\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}}$$

5.
$$S = \frac{abc}{4R}$$
a, b, c – стороны треугольника, R – радиус вписанной окружности.

6. Рассмотрим произвольный треугольник и вписанную окружность. Проведём радиусы к точком касания.



Два треугольника $\triangle MOC$ и $\triangle POC$ равны по гипотенузе (общая) и катету ($OM = OP$, так как это радиусы одной окружности), значит $CM = CP$. Аналогично для отрезков AM и AQ, BQ и BP. Проведём отрезки из вершин к центру окружности.

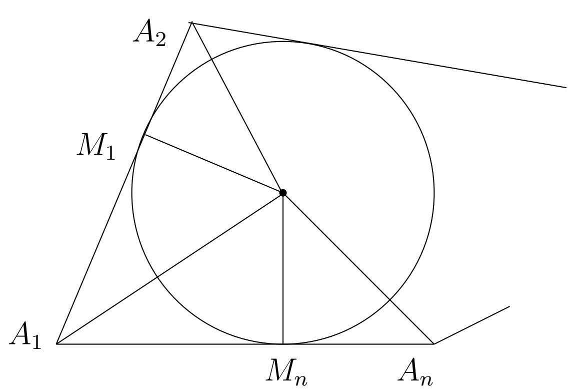


Теперь треугольник ABC разрезан на треугольники AOC, COB и BOA. Площадь этих треугольников обозначим за S_1, S_2 и S_3 соответственно.

$$\boxed{S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}r(a+b+c)}$$

6*. Если в многоугольник можно вписать окружность, то площадь этого треугольника есть произведение полупериметра на радиус вписанной окружности.

Рассмотрим такой многоульник. Он имеет n сторон, и будет разрезаться на n треугольников путём соединения вершин с центром окружности. Понятно, что доказательство в случае треугольника переносится.



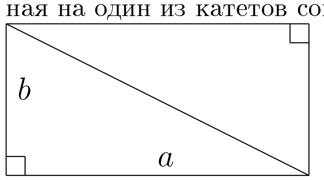
$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n =$$
$$\frac{1}{2}a_1 r + \frac{1}{2}a_2 r + \ldots + \frac{1}{2}a_n r =$$
$$\frac{1}{2}r(a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{2}Pr = pr$$

$$\boxed{S = pr}$$

$r-$ радиус вписанной окружности.

1.2 Прямоугольник

7. Любой прямоугольник любой диагональю делится на 2 равных треугольника. Так как эти треугольники прямоугольны, высота, опущенная на один из катетов совпадает с другим катетом.



$$\boxed{S = 2S_\triangle = 2\frac{1}{2}ab = ab}$$

8. Площадь квадрата находится по формуле:

$$\boxed{S = a * a = a^2}$$

1.3 Параллелограм

1. $S = 2 * S_\triangle = 2 * \frac{1}{2}ab\sin\alpha = ab\sin\alpha$
2. $S = 2 * S_\triangle = 2 * \frac{1}{2}ah_a = ah_a$
3. $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha$
   $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 2S_1 + 2S_2 = 2 * \frac{1}{2}xy\sin\alpha + 2 * \frac{1}{2}xy\sin\alpha = \frac{1}{2}d_! d_2 \sin\alpha$