

# Конспект по матану 10 класс

Коченюк Анатолий

19 октября 2019 г.



# Глава 1

## 1 четверть

### 1.1 Функция

$f(x) : X \rightarrow Y \quad X, Y \subseteq \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

$a$  – предельная точка  $X$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in O_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(A)$$

$A \neq f(a)$ , потому что она там может быть даже не определена

$$\begin{cases} a \in \mathbb{R}, O_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta) \\ a = +\infty, O_\delta(a) = (\delta, +\infty) \\ a = -\infty, O_\delta(a) = (-\infty, -\delta) \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(O_\delta(a)) \subset O_\varepsilon(A)$$

**Определение 1.1.**  $f(x)$  – б.б.  $\iff |f(x)| \rightarrow \infty, x \rightarrow a \in \overline{\mathbb{R}}$   
 $\iff \forall k > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in O_\delta(a), x \neq a |f(x)| \geq k$

**Определение 1.2.**  $f(x)$  – б.м.  $\iff |f(x)| \rightarrow 0, x \rightarrow a \in \overline{\mathbb{R}}$

**Теорема 1.1** (О представлении).  $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \iff f(x) = A + g(x), g(x)$  – б.м. при  $x \rightarrow a$

**Определение 1.3** (По Гейне).  $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \iff \forall x_n \rightarrow a (x_n \in X, x_n \neq a)$  выполняется  $f(x_n) \rightarrow A$

**Пример:**

Доказать на языке  $\varepsilon - \delta$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2) = 1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : |x - 1| < \delta \Rightarrow |3x - 2 - 1| < \varepsilon$$

Уметь по  $\forall \varepsilon$  предъявлять соответствующее  $\delta$

$$|3x - 3| < \varepsilon \iff 3|x - 1| < \varepsilon \iff |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta$$

$$\square \delta = \frac{\varepsilon}{3} - \text{искомое}$$

**Пример:**

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - 1}{x + 3} = -\frac{1}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : |x + 1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{2x - 1}{x + 3} + \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{5(x + 1)}{2(x + 3)} \right| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{1}{2} \min \left\{ 1; \frac{2\varepsilon}{5} \right\}$$

$$\square |x + 1| < \delta$$

$$\delta < 1 \Rightarrow |x + 3| > 1$$

$$\text{А тогда } \left| \frac{2x - 1}{x + 3} + \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{5(x + 1)}{2(x + 3)} \right| = \frac{5|x + 1|}{2|x + 3|} < \frac{5}{2} \cdot \frac{\delta}{1} \leq \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2\varepsilon}{5} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \text{ ч.т.п.}$$

$$\sqsubset f(x) : E \rightarrow \mathbb{R} \quad E \subseteq \mathbb{R}$$

**Определение 1.4.**  $f(x)$  – ограничена сверху или ограничена снизу или ограничена на  $E \iff \exists K \geq 0 : \forall x \in E$  выполняется  $f(x) \leq K \vee -k \leq f(x) \vee |f(x)| \leq L$

**Определение 1.5.**  $f(x)$  называется локально ограниченной в точке  $a$ , которая либо принадлежит  $E$ , либо является предельной для  $E$  ( $a \in \bar{E}$ )  $\iff \exists K \geq 0, \exists O(a) : |f(x)| \leq K \forall x \in O(a) \cap E$

**Лемма 1.1.**  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\left(\frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}\right)}{\left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}\right)} f$  – локально ограничена  $\forall a \in \bar{E} \nRightarrow f$  – ограничено на  $E$

*Доказательство.*  $f(x) = x \quad E = \mathbb{R}$

в  $\forall a \in \mathbb{R}$  она локально ограничена

$$\exists K = \max\{|a + 1|, |a - 1|\}$$

$\forall x \in O_1(a)$  выполняется  $|x| \leq K \quad O_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$

$$\bar{E} = E \cup \partial E$$

$$\exists O(a) \subset E$$

□

## 1.2 Предельный переход в неравенствах

**Теорема 1.2** (1).  $\sqsubset \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  и  $\sqsubset A < B \Rightarrow \exists O(a) : \forall x \in \overset{\circ}{O}(a) \cap E$  выполняется  $f(x) < B$

*Доказательство.*  $\sqsubset \varepsilon > 0 : A + \varepsilon_1 < B$

По определению предела для этого  $\varepsilon_1 \exists \delta : \forall x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E \quad |f(x) - A| < \varepsilon_1 \Rightarrow -\varepsilon_1 < f(x) - A < \varepsilon_1 \Rightarrow f(x) < A + \varepsilon_1 < B$

т.о. (таким образом) эта  $O_\delta(a)$  – искомая окрестность.

□

ДЗ:

**Теорема 1.3** (2).  $\sqsubset f(x) < g(x) \forall x \in E$  и  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \Rightarrow A \leq B$

2а) контрпример, почему нельзя писать  $A < B$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = ?$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$$

5)

**Лемма 1.2.**  $f$  – ограничена на  $E \Rightarrow f$  – локально ограничена  $\forall a \in \bar{E}$

## 1.3 Неопределённости

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0 \cdot \infty; \infty - \infty; 1^\infty$$

**Теорема 1.4** (Безу).  $P_n(x) = (x - x_0)Q_{n-1}(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} x + \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{x^2 - x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (x+2)}{\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1)} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow -1} x + \lim_{x \rightarrow -1} 2}{\lim_{x \rightarrow -1} x \cdot \lim_{x \rightarrow -1} x - \lim_{x \rightarrow -1} x + \lim_{x \rightarrow -1} 1} \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - 1| < \delta &\Rightarrow \left| \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 1} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon \\ \left| \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 1} - \frac{1}{3} \right| &= \left| \frac{x+2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{3} \right| = \frac{|2x + 6 - x^2 + x - 1|}{|3(x^2 - x + 1)|} = \frac{|x^2 - 4x + 5|}{3(x^2 - x + 1)} = \frac{|x+1| \cdot |x-5|}{3(x^2 - x + 1)} \end{aligned}$$

$$x^2 + pz + q = (x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

$$\leq \frac{|x+1| \cdot 7}{2 \cdot \frac{3}{4}} < \frac{\delta \cdot 28}{9} = \varepsilon$$

Пусть  $\exists \delta = \min\{1, \frac{0\varepsilon}{28}\}$  Решено.

**Теорема 1.5** (о двух милиционерах).  $\square \forall x \in E \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

$$\square \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$$

*Доказательство.* Воспользуемся языком последовательностей (Гейне)

Берём для  $\forall x_n \rightarrow a$

$f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$  Пользуемся теоремой о двух милиционерах для последовательностей.

Таким образом  $g(x_m) \rightarrow A \forall x_n \rightarrow a \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$

□

## 1.4 Замечательные пределы

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \left( \frac{0}{0} \right)$  Было доказано, что  $\forall x_n \rightarrow 0 \quad \sin x \rightarrow \sin 0 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$  (непрерывность  $y = \sin x$  в 0)

**Определение 1.6.** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  Функция  $f$  непрерывно в точке  $a \in E$  (т.е.  $f(a)$  – определено заранее)  $\iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  и  $A = f(a)$ , т.е.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x) = f(a)$ .

$f$  коммутирует с пределом.

Было доказано (вопрос 13 п. 5), что  $\forall x_n \rightarrow a \quad \sin x \rightarrow \sin a \iff \exists \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \iff$  Функция была непрерывна в каждой точке из  $\mathbb{R}$

**Определение 1.7.**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Говорят, что  $f$  непрерывно на  $E$ , если  $f$  непрерывно в каждой точке из  $E$ .

Множество функций, непрерывных на  $E$  обозначают  $C(E)$

$$x \in (0, \frac{\pi}{2}) \quad \sin x < x < \operatorname{tg} x$$

- $\frac{\sin x}{x} = \frac{|\sin x|}{|x|} < 1, \forall x \in \overset{\circ}{O}_\delta(0), \quad \delta < \frac{\pi}{2}$
- $|\cos x| < \left| \frac{\sin x}{x} \right|$

**Задача 1.1.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

*Доказательство.*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{2}{3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{2}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$$

□

Следствия из предела №1:

(а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \left( \frac{0}{0} \right)$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \Rightarrow 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2}{1 - \cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = 2 \cdot 1 = 2$$

можем заменить предел произведения, так как оба выражения имеют предел

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\arcsin = (\sin|_{[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}])^{-1}$$

$$\arcsin(\sin x) \neq x, \text{ но } \sin(\arcsin x) = x$$

$$\arcsin a - \text{ тот корень уравнения } \sin x = a, \text{ при котором } a \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$y = \arcsin x$$

$$x \rightarrow 0; x \in O_\delta(0) \Rightarrow x = \sin y$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} y \rightarrow ? \frac{y}{\sin y}$$

**Лемма 1.3.** Покажем (на языке Гейне)  $x_n \rightarrow 0 \Rightarrow y_n \rightarrow 0 \forall x_n$

*Доказательство.*  $x_n = m \sin y_n, y_n \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \{y_n\} - \text{огр} \Rightarrow \text{сх п/п } y_{n_k}$

Но мы только что доказали, что любая сходящаяся подпоследовательность  $y_{n_k} \rightarrow 0 \Rightarrow$  сама  $y_n \rightarrow 0$

Допустим противное:

$\square y_n \not\rightarrow 0$  пишем отрицание существования предела

$\exists \varepsilon_0 \forall N : \exists n_N \geq N : |y_{n_N}| \geq \varepsilon_0 \quad N = 1, 2, 3, \dots$

рассмотрим последовательность  $\{y_{n_N}\} \cap O_{\varepsilon_0}(0) = \emptyset$ , но  $\{y_{n_N}\} \subset [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] - \text{огр!} \Rightarrow \{y_n\} - \text{огр.} \quad \square$

Ещё один пример доказательства предела на языке  $\varepsilon - \delta$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x \rightarrow 1 \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

Мы почитали этот предел, а теперь дока-

жем это на языке  $\varepsilon - \delta$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x \quad 0 < |x - 1| < \delta \text{ выполнено } \left| \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right| = \frac{1}{2} \frac{|\sqrt{x} - 1|}{|\sqrt{x} + 1|} \leq \frac{1}{2} |\sqrt{x} - 1| = \frac{1}{2} \left| \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1} \right| \leq \frac{1}{2} (|\sqrt{x} - 1|)$$

$$1)(\sqrt{x} + 1)| = \frac{1}{2} |x - 1| < \frac{\delta}{2} = \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \rightarrow 0 \frac{y}{\tan y}$$

$$x_n \rightarrow 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} y_n \rightarrow 0 \quad y_n = \arctan x_n$$

При  $x \rightarrow 0 \sin x \rightarrow 0, \cos x \rightarrow 1 \Rightarrow \tan x \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$

$\square x_n \rightarrow 0 \quad |\arctan x_n| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \exists$  сходящаяся подпоследовательность

$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall N (= 1, 2, 3) \exists n_N > N \text{ и } |y_{n_N}| > \varepsilon_0$

рассмотрим  $y_{n_N} = \arctan x_{n_k} \rightarrow a - \text{ограничена} \Rightarrow \exists$  сходящаяся подпоследовательность  $y_{n_N} > 0$

**Лемма 1.4.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e \quad (1^\infty)$

*Доказательство.* Классический вариант  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

$$\forall x_n \rightarrow \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{x_n})^{x_n} = e$$

$\square$

$$\text{Следствие: } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{y})^y = e, \quad y = \frac{1}{x}$$

**Лемма 1.5.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$

*Доказательство.*  $\lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{1}{x_n} \ln(1 + x_n) = \lim_{x_n \rightarrow 0} \ln(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \ln e = 1 \quad \forall x_n$

$\square$

Следствие:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} = a$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$

ДЗ:

1.  $y = \arcsin(\sin x)$  – нарисовать график
2.  $y = \arctan(\tan x)$  – нарисовать график
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\operatorname{ctg} x} \quad (1^\infty)$

4.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}}$

5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x+1} \right)^x$

6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$

8. Прошлое дз (на фотке в беседе)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$$

$$x_n \rightarrow a \Rightarrow \ln x_n \rightarrow \ln a$$

$$f(x) \rightarrow A \Rightarrow \ln f(x) \rightarrow \ln A$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)^{\operatorname{tg} x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \ln(\sin x)}{\cos x} \stackrel{x=\frac{\pi}{2}-t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t \cdot \ln(\cos t)}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t \cdot \ln(1 + (\cos t - 1))}{\sin t \cdot (\cos t - 1)} \cdot (\cos t - 1)^{y=\cos t-1} \stackrel{y=\cos t-1}{=} 1 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\cos t - 1)}{\sin t} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \cos t &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} \cdot \frac{-(1 - \cos t)^2 - t^2}{t^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)^{\operatorname{tg} x} &= 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = 1 \end{aligned}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\square y = e^x - 1 \quad x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \quad e^x = 1 + y \quad x = \ln(1 + y)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} \stackrel{3}{=} 1$$

**Следствие 1.1.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\ln a \cdot x} - 1}{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = \ln a$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \square y = (1+x)^\alpha - 1 \quad x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0$$

$$(1+x)^\alpha = 1+y \quad \alpha \ln(1+x) = \ln(1+y)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} \cdot \frac{\ln(1+y)}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} = 1 \cdot \alpha \cdot 1 = \alpha$$

**Следствие 1.2.** Покажем,  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \neq 0$

$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha (1 + \frac{\Delta x}{x})^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = x^\alpha \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{\Delta x}{x})^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x} \cdot x} = x^{\alpha-1} \cdot \alpha$$

$$x = 0 \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(0 + \Delta x)^\alpha - 0^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 & \alpha > 1 \\ 1 & \alpha = 1 \\ \infty & \alpha < 1 \end{cases}$$

$$x^{\alpha-1} \cdot \alpha|_{x=0} = \begin{cases} 0 & \alpha > 1 \\ 1 = \alpha & \alpha = 1 \\ \infty & \alpha < 1 \end{cases}$$

Примеры:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 + \sqrt{\cos x}} \cdot \frac{cy^2}{1 - \cos \sqrt{x} \cdot cy^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2 \cdot x^2} \cdot x^2 \cdot \frac{(\sqrt{x})^2}{1 - \cos \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{3x}(2e^{-3x} + 1))}{\ln(e^{2x}(3e^{-2x} + 1))} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \ln(1 + 2e^{-3x})}{2x + \ln(1 + 3e^{-2x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{\ln(1 + 2e^{-3x})}{x}}{2 + \frac{\ln(1 + 3e^{-2x})}{x}} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y - 1}{y}$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{-} 1y = +\infty$$

ДЗ на 25.09.2018

$$1. \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x^3 - 3}{x - e}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin x)}{3 \operatorname{tg} x - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}$$

$$\left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+x} - \sqrt[4]{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{5}} - 1 - ((1+x)^{\frac{1}{4}} + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^{\frac{1}{5}} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{4}} - 1}{x} =$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

$$\left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + 1)^2}{(\sin x + 1)(\sin x + 2)} = \frac{0}{-3} = 0$$

$$\left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x^2 - x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{x^2 - x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{x^2 - x} =$$

$$= \ln 2 \cdot (-1) + \ln 3 \cdot (-1) = -\ln 6$$

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sqrt[4]{x^3 + 1} + \sqrt[3]{x^2 - 1}}{x^2 - \sqrt{x + 2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1+\frac{3}{4}} \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^3}} + x^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}}}{x^2(1 - \frac{\sqrt{x+2}}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-\frac{1}{4}} \sqrt[4]{1 + x^{-3}} + x^{-1\frac{1}{3}} \sqrt[3]{1 - x^{-2}}}{1 - \frac{\sqrt{x+2}}{x^2}} = 0$$

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4})}{\operatorname{tg} 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\left(\frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}\right)}{\left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}\right)} \stackrel{t}{=} \operatorname{tg} x \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(1+t)(1-t^2)}{(1-t) \cdot 2t} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

$$(\infty - \infty) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)(x+1)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$(\infty - \infty) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x^2 - 4} - \frac{1}{4(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x - 2}{4(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{4(x-2)(x+2)} = -\frac{1}{16}$$

$$(\infty - \infty) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$(\infty - \infty) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2^x}{x} - \frac{3^x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x} = \ln 2 - \ln 3$$

$$(\infty \cdot ?) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(1+x) - \ln x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \stackrel{t}{=} \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{\infty}\right) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \operatorname{arctg} x = 0$$



$$(\infty \cdot 0) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x(2^{\frac{1}{x}} - 1) \stackrel{t}{=} \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2^t - 1}{t} = \ln 2$$

$$(1^\infty) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^A = e^{-1}$$

$$\operatorname{Lim} x^{\frac{\pi}{4}} \ln(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \cdot \ln(\operatorname{tg} x) \stackrel{\operatorname{tg} x}{=} 1 - t \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(1-t)}{t(2-t)} \ln(1-t) = \frac{2 \cdot (-1)}{2} = -1$$

$$(\infty \cdot 0) \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1 + 2 \operatorname{arctg} x(x\sqrt{x^5 + x^2}))}{(1 + \arcsin(x^2))^{\frac{3}{4}} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x^2)}{\frac{3}{4}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\frac{3}{4}x^2} = \frac{8}{3}$$

$$\operatorname{arctg}(x\sqrt{x^5 + x^2}) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^7 + x^4} \sim \operatorname{arctg} x \sim x^2$$

$$(1 + \arcsin(x^2))^{\frac{3}{4}} - 1 \sim \frac{3}{4} \arcsin x^2 \sim \frac{3}{4} x^2$$

$$\frac{\arcsin x}{x} \rightarrow 1 \quad \arcsin x \sim x$$

$$\ln(1+t) \sim t \Rightarrow \ln(1+2x^2) \sim 2x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x + \sqrt{2x}}{x + \sqrt{3x}} \right)^{\sqrt{x}} = e^A$$

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \ln \left( \frac{x + \sqrt{2x}}{x + \sqrt{3x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \ln \left( \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}) - \ln(1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}})}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \stackrel{t}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sqrt{2}t) - \ln(1 + \sqrt{3}t)}{t} =$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

ДЗ:

- готовиться к работе по нахождению пределов.

- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\arcsin 2x}$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 3} - \sqrt{x^2 - 3x - 4})$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2}{x^2 - 3} \right)^{x^2}$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\sin \frac{1}{x}} - 1)$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sin x} + 2^{2x} - 2}{x - \sqrt{x}}$

## 1.5 Односторонние пределы

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\square a$  – предельная точка  $E$  ( $E \cap \overset{\circ}{O}(a) \neq \emptyset$ , где  $\overset{\circ}{O}(a)$  – произвольная проколота окрестность).

$f(x) \rightarrow A, (x \in E) \rightarrow a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{O}_\Delta(a) : \forall x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E$  выполняется  $|f(x) - A| < \varepsilon$

### 1.5.1 Левосторонний предел

$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \cap (a - b, a)$  и  $-\delta < x - a < 0$  выполняется  $|f(x) - A| < \varepsilon$

### 1.5.2 Правосторонний

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \cap (a, a + b)$  и  $-\delta < x - a < 0$  выполняется  $|f(x) - A| < \varepsilon$

Если  $a = 0$ , то пишут просто  $x \rightarrow -0$  и  $x \rightarrow +0$

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{sign} x = 1 \quad \lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{sign} x = -1$$

**Теорема 1.6** (Признак существования  $\lim f(x)$  при  $x \rightarrow a$ ).  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  – существует  $\iff \exists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  – очевидно, потому что определение полного предела не исключает возможности, что  $x$  только  $< a$  или только  $> a$ , а тогда и будут получаться односторонние пределы.

$\Leftarrow$  От противного.  $\square$  односторонние пределы существуют и равны, а полный предел не существует. Напишем отрицание существования предела.

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in E \cap \overset{\circ}{O}(a) \text{ для которого } |f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon_0$$

$$\text{В качестве } \delta = \frac{1}{n} \rightarrow 0, n \in \mathbb{N} \text{ и тогда } \exists x_n \in E \cap \overset{\circ}{O}_{\frac{1}{n}}(a) : |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$$

Имеем бесконечное количество точек  $\{x_n\}$ . Каждое  $x_n$  либо  $> 0$  либо  $< 0$ .

Ясно,  $\exists \infty$  много номеров, для которых выполняется: либо  $> a$  либо  $< a$

Таким образом  $\exists x_{n_k} : x_{n_k} < a$  либо  $x_{n_k} > a$

Не умаляя общности (далее НУО) считаем, что  $\exists x_{n_k} > a$

Но тогда получается, что нашлось такое  $\varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_{n_k} \in E \cap (a, a + \delta)$  и при этом  $|f(x_{n_k}) - A| > \varepsilon_0$

Это означает, что  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  не существует.??!

$\square$

Очевидные свойства переводятся на

Пример:

$$\begin{aligned} \left(\frac{0}{0}\right) \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{x^2 + x^3}}{x} &= \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{x^2 + x^3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{1 + x} = 1 \\ \left(\frac{0}{0}\right) \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{x^2 + x^3}}{x} &= \lim_{x \rightarrow -0} \left(-\sqrt{\frac{x^2 + x^3}{x^2}}\right) = -1 \end{aligned}$$

Ещё один признак существования предела

последовательность  $\{x_n\}$  – фундаментальная или последовательность Коши  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m \geq N$

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

**Теорема 1.7.** Коши Последовательность  $x_n$  – сходится  $\iff x_n$  – фундаментальная последовательность

**Теорема 1.8.** Коши  $\square f : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad a$  – конечная предельная точка  $a \in E$  Тогда  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  – конечный

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E \text{ выполняется } |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

*Доказательство.*

$$\Rightarrow \square \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

$$\text{т.е. по } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E \quad |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Теперь возьмём любые две точки  $x', x'' \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E$

$$\text{Рассмотрим } |f(x') - f(x'')| = |(f(x') - A) + (A - f(x''))| \leq |f(x') - A| + |A - f(x'')| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Leftarrow$  Воспользуемся я языком Гейне. Возьмём  $\forall$  последовательность  $x_n \in \overset{\circ}{O}(a) \cap E : x_n \rightarrow a$

Покажем, что последовательность  $\{f(x_n)\}$  – фундаментальна

Берём  $\forall \varepsilon > 0$  по условию  $\exists \delta : \forall x', x'' \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E$  выполняется  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Так как  $x_n \rightarrow a \Rightarrow \exists N : \forall n \geq N \quad x_n \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E$

Доказано:  $\square n, m \geq N \Rightarrow x_n, x_m \in \mathring{O}_\delta(a) \cap E \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$

Таким образом  $\{f(x_n)\}$  – фундаментальная

По теореме Коши  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$

Покажем, что  $A$  не зависит от выбранной последовательности  $x_n$ , т.е. если взять два ряда: последовательности  $\overline{x_n}, \overline{\overline{x_n}} \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{x_n}) = \overline{A} \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(\overline{x_n}) = \overline{\overline{A}}$

Рассмотрим последовательность  $y_n = \{\overline{x_1}, \overline{\overline{x_1}}, \dots, \overline{x_n}, \overline{\overline{x_n}}\}$

Очевидно  $y_n \rightarrow a \Rightarrow y_n$  – фундаментальная  $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = A < \dots >$

□

<...>

## 1.6 Сравнение асимптотического поведения функций

**Определение 1.8.**  $\square f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$

$\square a$  – предельная точка  $E$ . Если  $\exists$  функция  $\varphi(x) : E \rightarrow \mathbb{R}$  и такая  $\mathring{O}(a) \cap E$  выполняется  $f(x) = \varphi(x)g(x)$   
То:

1. Если  $\varphi(x)$  локально ограничено в окрестности  $a$ , то говорят, что  $f = O(g)$  при  $x \rightarrow a$   
 **$f$  –  $O$ -большое от  $g$  (при  $x$ , стремящемся к  $a$ )**
2. Если  $\varphi(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow a$ , то говорят, что  $f = o(g)$  при  $x \rightarrow a$   
 **$f$  –  $o$ -маленькое от  $g$  (при  $x$ , стремящемся к  $a$ )**
3. Если  $\varphi(x) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow a$ , то говорят, что  $f \sim g$  при  $x \rightarrow a$   
 **$f$  (асимптотически) эквивалентно  $g$  (при  $x$ , стремящемся к  $a$ )**

**Определение 1.9.** Если одновременно  $f = O(g)$  &  $g = O(f)$  при  $x \rightarrow a$ , то говорят, что  $f, g$  сравнимы при  $x \rightarrow a$

$f \asymp g$

**Лемма 1.6.** 1)  $f = O(g)$  при  $x \rightarrow a \iff \exists c > 0 \& \mathring{O}(a) \quad ()),$  что выполняется неравенство  $|f(x)| \leq c|g(x)| \forall x \in \mathring{O}_a \cap E$   
2)  $f = o(g)$  при  $x \rightarrow a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{O}_\delta(a) \cap E$  выполняется  $|f(x)| < \varepsilon|g(x)|$

Доказательство. .

1)  $f = O(g)$  при  $x \rightarrow a$

$f(x) = \varphi(x)g(x)$ , где  $\varphi(x)$  – локально ограничена, т.е.  $\exists C > 0$  и  $\exists \mathring{O}$ ;  $|\varphi(x)| \leq C \forall x \in \mathring{O}(a) \cap E$

Тогда  $|f(x)| = |\varphi(x)g(x)| = |\varphi(x)| \cdot |g(x)| \leq C|g(x)| \Rightarrow |f(x)| \leq C|g(x)|$

Обратно:  $\square$  выполняется  $|f(x)| \leq C|g(x)|$  Будем брать  $x \in \mathring{O}(a) \cap E$

Заметим, что если  $g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

Положим  $\varphi(x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} & , g(x) \neq 0 \\ 0 & , g(x) = 0 \end{cases}$

$\varphi : \mathring{O}(a) \cap E \rightarrow \mathbb{R}$

Выполняется  $f(x) = \varphi(x)g(x), \quad \forall x \in \mathring{O}(a) \cap E$

Покажем, что  $\varphi(x)$  – локально ограничена  $|\varphi(x)| < C$ , где  $C$  взято из (4)

Если  $g(x) \neq 0 \quad \varphi(x) = \frac{f}{g}$  и т.к.  $|f| \leq C|g|$

Если  $g(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) \leq C$

Таким образом в любом случае  $|\varphi(x)| \leq C$  чти 2) <...>

□

В 99% практических задач встречается случай, когда  $g(x) \neq 0$  в  $\mathring{O}(a) \cap E$   
Тогда можно дать "упрощённые" переформулировки для  $O$ -символ

1.  $f = O(g)$  при  $x \rightarrow a \iff \frac{f}{g}$  – локально ограниченная функция
2.  $f = o(g) \iff \frac{f}{g} \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow a$
3.  $f \sim g \iff \frac{f}{g} \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow a$

ДЗ:

Доказать:

1.  $f \sim g$  – отношение эквивалентности
2.  $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$
3.  $f \sim g \iff f = g + o(g) \iff f = g + o(f)$
4. Если  $f \sim \alpha g, \alpha \neq 0 \Rightarrow f \asymp g$
5.  $o(g) + o(g) = o(g)$   
 $o(g) - o(g) = o(g)$ , а не  $0!$ , как можно подумать . Привести пример  
 $2O(g) = O(g)$   
 $O(g)O(h) = O(gh)$

Вернёмся к замечательным пределам  $\langle \dots \rangle$

**Теорема 1.9** (о замене на эквивалентное при вычислении пределов).  $\square f, g, \tilde{f}, \tilde{g} : E \rightarrow \mathbb{R}$

$\square a$  – предельная точка  $E$

$\square f \sim \tilde{f}, g \sim \tilde{g}$  при  $x \rightarrow a$

$(f = \tilde{f} + o(\tilde{f}), g = \tilde{g} + o(\tilde{g}))$

Тогда справедливы равенства:

1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$
2. Если  $\exists \overset{\circ}{O}(a)$  в которой  $g(x) \neq 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$

Равенства надо понимать так: Предел стоящий справа и слева существует и не существует одновременно.

**Доказательство.** По определению эквивалентности  $\exists \varphi(x) : f(x) = \varphi(x)\tilde{f}(x)$  в некоторой  $\overset{\circ}{O}_1(a) \cap E$  и  $\varphi(x) \rightarrow 1, x \rightarrow a$

$\exists \psi(x) : g(x) = \psi(x)\tilde{g}(x)$  в некоторой  $\overset{\circ}{O}_2(a) \cap E$  и  $\psi(x) \rightarrow 1, x \rightarrow a$

$\forall x \in \overset{\circ}{O}_1(a) \cap \overset{\circ}{O}_2(a) \cap E$

$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \langle \dots \rangle$

$\square$

**Замечание 1.1.** Из теоремы не следует, что то же самое можно делать для  $f(x) \pm g(x)$

Вообще говоря  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) \neq \lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x)\tilde{f}(x) \pm \varphi(x)\tilde{g}(x))$

Пример:  $a = +\infty$   $f(x) = x + 1$   $\tilde{f}(x) = g(x) = \tilde{g}(x) = x$   $f \sim \tilde{f}(x)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f - g) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 - x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\tilde{f}(x) - \tilde{g}(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x) = 0$

$(0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty})$  – брр

$(\infty - \infty)$  – не брр

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \arcsin 3x - 5x^3}{\sin 2x + \operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2+o(x+x^2)+3x+o(3x)-5x^3}{2x+o(2x)+(x+o(x))^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x+o(x)}{2x+o(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4+\frac{o(x)}{x}}{2+\frac{o(x)}{x}} =$$

$$= \frac{4+0}{2+0} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x}{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} - 3} \stackrel{y=x+1}{=} \lim_{y \rightarrow 0}$$

**ДЗ на 16.10.2018:**

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2\arcsin x^2)}{(\cos x)^{\frac{3}{2}} - 1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\operatorname{tg} \frac{x}{2}) \cos x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^2 - x - 1}$$

## 1.7 Формулы Тейлора

$$1. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$2. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$3. (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} x^n + o(x^n)$$

$$4. e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$5. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + o(x^n)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \cos x}{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{-\frac{x^2}{8} + o(x^2)} = -8$$

## 1.8 Асимптоты

(асимптотическое представление функции на бесконечность)

$$\square f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

**Определение 1.10.** Вертикальная прямая  $x = a$  называется асимптотой, если  $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  и  $\exists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$  равные либо  $+\infty$ , либо  $-\infty$

**Определение 1.11.**  $\square f: \langle a, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

прямая  $y = kx + b$  называется наклонной асимптотой функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , если  $f(x) = kx + b + o(1)$  при  $x \rightarrow +\infty$

Асимптота при  $x \rightarrow -\infty$  аналогично определяется

Если  $k = 0$ , то асимптота называется горизонтальной

**Утверждение 1.1.**  $y = kx + b$  — асимптота функции  $f$ , если  $f(kx + b) \rightarrow 0$

**Утверждение 1.2.**  $y = b$  является горизонтальной асимптотой для  $f$  при  $x \rightarrow +(-)\infty \iff \lim_{x \rightarrow +(-)\infty} f(x) = b$

*Доказательство.*  $y = b$  является горизонтальной асимптотой для  $f \iff f(x) = b + o(1), x \rightarrow +(-)\infty \iff \exists \lim_{+(-)\infty \rightarrow f} (x) = b$  По теореме о представлении предела.  
 $o(1)$  – любая бесконечно малая функция при  $x \rightarrow +(-)\infty$  □

Примеры:

1.  $y = \sin x$  – нет горизонтальной асимптоты, т.к.  $\nexists \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$
2.  $y = \operatorname{tg} x$  – есть вертикальная асимптота (см. рисунок в вики)
3.  $y = \sqrt{x}$  –  $\nexists \lim_{x \rightarrow \infty}$  конечного
4.  $y = \ln x$  –  $\nexists$  конечного  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$
5.  $y = \operatorname{arctg} x$  –  $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$   $y = \frac{\pi}{2}$  – горизонтальная асимптота  $\exists \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$   $y = -\frac{\pi}{2}$

**Теорема 1.10.**  $\square f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{прямая } y = kx + b \text{ будет наклонной асимптотой} \iff \begin{cases} \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \\ \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b \end{cases}$$

*Доказательство.*

$$\Rightarrow \square y = kx + b \text{ – наклонная асимптота} \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} f(x) = kx + b + o(1) \Rightarrow \begin{cases} f(x) - kx = b + o(1) \\ \frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{o(1)}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b \\ \exists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k \end{cases}$$

$$\Leftarrow \text{По условию } \exists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

$$\text{По условию } \exists \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b \Rightarrow f(x) - kx = b + o(1) \Rightarrow f(x) = kx + b + o(1)$$

□

## 1.9 Непрерывные функции

$$\supseteq f : E \rightarrow \mathbb{R}$$

**Определение 1.12.**  $\supseteq x_0 \in E$  Функция  $f$  называется непрерывной в точке  $x_0$ , если выполняется любое одно из следующих утверждений:

1 Предел функции  $f$  в точке  $x_0$  существует и равен  $f(x_0)$  т.е.  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  (это определение работает только для случая когда  $x_0$  – предельная точка  $E$ )

язык  $\varepsilon - \delta$  2  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  (Если  $x_0$  – изолированная точка  $\Rightarrow$  из  $|x - x_0| < \delta$  – достаточно мало  $\Rightarrow x = x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$  автоматически выполнено). Поэтому, если  $x_0$  – изолированная точка  $E$ , то автоматически  $f$  будет непрерывна в  $x_0$

язык окрестностей 3  $\forall O_\varepsilon(f(x_0)) \exists O_\delta(x_0) : f(O_\delta \cap E) \subset O_\varepsilon(f(x_0))$  ( $O_\delta \cap E = \{x | x \in E \& |x - x_0| < \delta\}$ ). Если  $\delta$  мало то  $E \cap O_\delta(x_0) = \{x_0\}$  и есть  $f(x_0) \in O_\varepsilon(f(x_0))$

язык Гейне 4  $\forall x_n \in E$  и  $x_n \rightarrow x_0$  выполняется  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  (это тоже работает тогда, когда  $x_0$  – предельная точка  $E$ )

язык приращений 5 Бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции. Т.е.  $\Delta y \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .  $x \in E \quad \Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$  (раз появляется  $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow x_0$  должна быть предельной точкой  $E$ )

Из плодотворной и оживлённой дискуссии во время лекции  $\Rightarrow$  все 5 определений эквивалентны.

Эквивалентность  $1 \sim 2 \vee 3$  – определение  $\lim$  Эквивалентность  $4 \sim 2$  – эквивалентность  $\varepsilon - \delta$  и языка Гейне 5 – другая переформулировка 1

**Определение 1.13.**  $f$  называется непрерывной на множестве  $E$ , если она непрерывна в каждой точке  $E$   
 обозначение:  $f \in C(E)$

**Определение 1.14.**  $\supseteq f : E \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in E$ . Если  $f$  не является непрерывной в точке  $x_0$ , то  $x_0$  называется точкой разрыва  $f$ . ( $f$  терпит разрыв в  $x_0$ ,  $f$  разрывна в  $x_0$ )

**Определение 1.15.**  $\supseteq f : E \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in E$

Обозначим:  $E_- = (-\infty; x_0] \cap E$   $E_+ = [x_0, +\infty) \cap E$

Если сужение  $f|_{E_-}$  — непрерывно в  $x_0$ , то говорят, что  $f$  непрерывно в  $x_0$  слева

Если сужение  $f|_{E_+}$  — непрерывно в  $x_0$ , то говорят, что  $f$  непрерывно в  $x_0$  справа

**Замечание 1.2.** Если  $f$  непрерывна в  $x_0$  слева  $\iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$

аналогично Если  $f$  непрерывна в  $x_0$  справа  $\iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$  (убедиться)

**Замечание 1.3.** Помним:  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \iff \begin{cases} \exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \\ \exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \end{cases}$  и они равны

Из этого следует:  $f$  — непрерывна в  $x_0 \iff f$  непрерывна в  $x_0$  слева и справа

**Замечание 1.4.** обозначения:

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

$\square x_0$  — точка разрыва

**Определение 1.16.** Если  $\exists$  конечные числа  $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ , но не все 3 числа  $f(x_0 - 0), f(x_0), f(x_0 + 0)$  равны между собой  $\Rightarrow x_0$  — точка разрыва 1 рода

разрыв первого рода также называют скачком

Существует терминология:

скачком называют разность  $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$

$f(x_0 + 0) - f(x_0)$  — правый скачок

$f(x) - f(x_0 - 0)$  — левый скачок

Бывает, что  $f$  определена в проколотой окрестности  $x_0$ , но в  $x_0$  не определена.

Если  $\exists$  конечные  $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ , которые не равны, то также говорят, что  $x_0$  — точка разрыва 1 рода

**Определение 1.17.** Если точка разрыва  $x_0$  не является разрывом 1 рода, то  $x_0$  — точка разрыва 2 рода

т.е. Либо хотя бы одно из чисел  $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$  "равно"  $\infty$ , либо вообще не существует

аналогично случаю разрыва 1 рода, если  $f$  определено в проколотой окрестности  $x_0$ , но не в самой  $x_0$  и хотя бы одно из чисел  $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$  либо не существует либо "равен"  $\infty$ , то  $x_0$  также называется точкой разрыва 2 рода.

**Определение 1.18.**  $\square x_0$  — точка разрыва 1 рода и  $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$ , но  $f(x_0) \neq A$ , тогда  $x_0$  называют точкой устраняемого разрыва (сам разрыв или скачок называется устраняемым).

Мотивация. Если у  $f$  поменять значение в  $x_0$  на  $A$  (вместо  $x_0$ ), т.е. рассмотреть функцию

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ A, & x = x_0 \end{cases}, \text{ то } \tilde{f} \text{ становится непрерывна в } x_0$$

Примеры:

$$1. f(x) = \text{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$  — разрыв 1 рода не устранимый

$$2. f(x) = \text{sign}^2 x = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0 \text{ — устранимый разрыв}$$

3.  $f(x) = \frac{1}{x}$  – гипербола  
 $f(-0) = -\infty$   $f(+0) = +\infty$  разрыв второго рода  
 $x_0$  – разрыв второго рода (хоть функция в 0 не определена)

Если  $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ A, x = 0 \end{cases}$  всё равно 0 – разрыв 2 рода

4.  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $x_0 = 0$   $f(-0) = f(0) = +\infty$  разрыв 2 рода

5.  $f(x) \equiv \frac{x-1}{x^2-1}$  в  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

ясно  $f = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$

$x_0 = -1$

$f(-1-0) = \frac{1}{-0} = -\infty$   $f(-1+0) = \frac{1}{+0} = +\infty$

$x_0 = 1$

$f(1+0) = f(1-0) = \frac{1}{2}$  устранимый разрыв разрыв 2 рода

6.  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

**Теорема 1.11.**  $x_0 = 0$  разрыв 2 рода, т.к.  $f(+0) \nexists$

*Доказательство.*  $\neg \exists \lim_{x \rightarrow +0} f(x)$  – надо доказать

$\sqsubset x_n^{(1)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \rightarrow +0$   $\sin(\frac{1}{x_n^{(1)}}) = 1 \forall n$

$\sqsubset x_n^{(2)} = \frac{1}{\pi n} \rightarrow +0$   $\sin(\frac{1}{x_n^{(2)}}) = 0 \forall n$

□

7.  $f(x) = x \sin x$  в  $\widehat{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$

$x_0 = 0$  – 1 рода, устранимый ( $f(+0) = f(-0) = 0$   $|f(x)| \leq |x| \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm 0} f(x) = 0$ )

8.  $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$  на  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(-0) = 2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0$

$f(+0) = 2^{\frac{1}{+0}} = 2^{\infty} = \infty$

$x_0 = 0$  – разрыв 2 рода

$y = 1$  – горизонтальная асимптота

9. Функция Дирихле  $\chi(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

**Лемма 1.7.** В любой точке из  $\mathbb{R}$  у  $\chi$  разрыв 2 рода

*Доказательство.* достаточно доказать, что в любой точке  $x_0$  не существует  $f(x_0 + 0)$

(а)  $x_0 \in \mathbb{Q}$   $x_n^{(1)} = x_0 + \frac{\pi}{n} \downarrow x_0$   $\chi(x_n^{(1)} + 0) \rightarrow 0$

$x_n^{(2)} = x_0 + \frac{1}{n} \downarrow x_0 + 0 \in \mathbb{Q}$   $\chi(x_n^{(2)} + 0) = 1 \neq 0 = \chi(x^{(1)} + 0)$



(b)  $x_0 \notin \mathbb{Q}$  $\square r_n \in \mathbb{Q}$  и  $r_n \rightarrow x_0 + 0$  – последовательность десятичных дробей $\chi(r_n) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$  $\mathbb{Q} \not\ni x_n = x_0(1 + \frac{1}{n}) \quad \chi(x_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$  снова предела не существует

□

Дз с 13 ноября:

1. Функция Римана  $\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, x = \frac{p}{q} - \text{несократимая} \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ 

Доказать:

- $\psi$  непрерывна во всех иррациональных точек
- имеет разрыв 1 рода во всех рациональных точках

2. Построить график и исследовать на разрывность/непрерывность

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - 1|}{x^2 - 1}, x \neq \pm 1 \\ 0, x = -1 \\ 1, x = 1 \end{cases}$$

3. Подобрать  $k : f(x) = \frac{\sqrt{1-2x} - 1 + x}{x^k}$  была бы непрерывна в 0

### 1.9.1 Свойства непрерывных функций

 $f : E \rightarrow \mathbb{R} \quad E \subset \mathbb{R}$  $x_0 \in E$  возможны два случая:

- $x_0$  – изолированная точка
- $x_0$  – предельная точка

**Теорема 1.12.**  $\square f$  – непрерывна в  $x_0 \Rightarrow f$  – локально ограничена в  $x_0$ *Доказательство.*  $f$  – локально ограничена  $\iff \exists K \geq 0$  и  $\exists$  окрестность  $O(x_0) \quad |f(x)| \leq k \quad \forall x \in O(x_0) \cap E$ Если  $x_0$  – изолированная точка, то всё очевидно, т.к. достаточно малая окрестность  $O(x_0 \cap E = \{x_0\})$  и для этой окрестности  $K = |f(x_0)|$  (т.к.  $\forall x \in O(x_0) \cap E \Rightarrow x = x_0$  и  $|f(x)| = |f(x_0)| \leq k$ ) [для этого случая непрерывность не нужна] $\square x_0$  – не изолированная точка. Воспользуемся определением непрерывности на языке  $\varepsilon - \delta$ Возьмём  $\varepsilon = 1$ . По непрерывности  $\exists \delta > 0 : \forall x \in O_\delta(x_0) \cap E \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < 1 \Rightarrow |f(x)| < 1 + |f(x_0)| \quad k = 1 + |f(x_0)|$ Т.о. мы нашли  $k$  и окрестность  $O_\delta(x_0)$ 

□

**Теорема 1.13** (О стабилизации знака).  $f$  – непрерывна в  $x_0$  и  $f(x_0) \neq 0$ , тогда  $\exists$  такая окрестность  $x_0$ , в которой знак  $f(x)$  совпадает со знаком  $f(x_0)$ Т.е.  $if f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists$  окрестность  $O(x_0) : \forall x \in O(x_0) \cap E \quad f(x) > 0$  $if f(x_0) < 0 \Rightarrow \exists$  окрестность  $O(x_0) : \forall x \in O(x_0) \cap E \quad f(x) < 0$ *Доказательство.* Рассмотрим случай  $f(x_0) > 0$  ( $f(x_0) < 0$  – аналогично) $\square \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$  по определению непрерывности  $\exists \delta : x \in O_\delta(x_0) \cap E$  выполняется  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ Вспомним  $|a| + |b| \geq |a - b| \geq ||a| - |b||$ 

$$||f(x)| - |f(x_0)|| < \frac{f(x_0)}{2}$$

$$-|f(x)| + |f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$$

$$f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x)$$

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0 \quad \forall x \in O_\delta(x_0) \cap E$$

□

**Теорема 1.14** (Арифметические действия над непрерывными функциями).  $\square f, g : E \rightarrow \mathbb{R} \quad \square f, g$  – непрерывны в  $x_0$

Тогда:

1.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha f(x) + \beta g(x)$  – непрерывна в  $x_0$

2.  $f \cdot g$  – непрерывно в  $x_0$

3. Если  $g(x_0) \neq 0$ , то  $\frac{f}{g}$  – непрерывна в  $x_0$

*Доказательство.* Если  $x_0$  – изолированная точка, то всё тривиально

$\square x_0$  – предельная точка  $E$  и воспользуемся языком Гейне

Возьмём произвольную последовательность  $x_n \rightarrow x_0$

По непрерывности  $f(x_n) \rightarrow f(x_0), g(x_n) \rightarrow g(x_0)$

Тогда из Теоремы об арифметических действиях над пределами следует  $\alpha f(x_n) + \beta g(x_n) \rightarrow \alpha f(x_0) + \beta g(x_0)$

$f(x_n)g(x_n) \rightarrow f(x_0)g(x_0)$  и Если  $g(x_0) \neq 0$ , то  $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$  это и означает непрерывность

Замечание к 3. Т.к.  $g(x_0) \neq 0$  по теореме о стабилизации знака  $g(x) \neq 0$  в некоторой окрестности  $O(x) \Rightarrow$  функция  $\frac{f}{g}$  корректно определена в  $O(x_0)$  □

Класс элементарных функций:

1. Все многочлены (включая константы)

2.  $a^x (a > 0)$

3.  $\log_a x (a > 0, a \neq 1)$

4.  $\sin x, \cos x$

---

5. Любая комбинация, произведение, частное элементарных функций снова считается элементарной (добавляются все рациональные функции =  $\frac{\text{многочлен}}{\text{многочлен}}$  и все тригонометрические функции)

6. Композиция элементарных функций – элементарная функция.

(добавляется  $\lg(x+1) \quad \lg(x^2 - 3x + 1) \quad x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ )

**Теорема 1.15** (О непрерывности композиции).  $\square f : E \rightarrow M; g : M \rightarrow \mathbb{R}$

$$E \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$\square f$  – непрерывна в  $x_0 \in E$ , а  $g$  непрерывно в  $f(x_0) \in M \Rightarrow$  композиция  $g \circ f = g(f(x))$  непрерывна в  $x_0$

*Доказательство.* обозначим  $y_0 = f(x_0)$  на языке последовательностей (Гейне).

Возьмём  $x_n \rightarrow x_0$  Т.к.  $f$  – непрерывна в точке  $x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

$\square y_n = f(x_n)$ , тогда  $y_n \rightarrow y_0$

Т.к.  $g$  непрерывна в  $y_0 \Rightarrow g(y_n) \rightarrow g(y_0)$

Окончательно  $g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0))$  Т.е.  $g(f(x))$  – непрерывно в  $x_0$  □

Пример:  $f(x) = x \sin \frac{1}{x} \quad g(y) = |\text{sign } y|$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, g(0) = 0$$

Однако  $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x))$  – не существует !!! (=0?)

Это не всё: кто-то заявит, что это "понятно т.к.  $f$  не является непрерывной в 0

Другой парадокс:  $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 1$  – существует!!

Но снова  $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) \neq 1$ , т.к. он вообще не существует

Покажем, что  $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x))$  – не существует

$$\begin{aligned} \square x_n &= \frac{1}{\pi n} & f(x_n) &= \frac{1}{\pi n} \sin \pi n = 0 \\ g(f(x_n)) &= 0 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \\ \square x_n &= \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \rightarrow 0 & f(x_n) &= \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} > 0 \\ g(f(x)) &= 1 \rightarrow 1 \end{aligned}$$

**Теорема 1.16.** Все элементарные функции непрерывны на своей области определения

**Теорема 1.17** (1-ая Больцано-Коши о промежуточном значении).  $\square f \in C([a; b]), \square f(a), f(b) < 0$   
Тогда  $\exists c \in (a; b) : f(c) = 0$

*Доказательство.* Метод половинного деления Кантора

$$\triangleleft x_1 = \frac{a+b}{2} \text{ Если } f(x_1) = 0 - \text{теорема доказана}$$

Если  $f(x_1) \neq 0$ , то оно либо  $> 0$ , либо  $< 0$

Тогда берём отрезок либо  $[a, x_1]$ , либо  $[x_1, b]$  так, чтобы выполнялось  $f(a)f(x_1) < 0 \vee f(x_1)f(b) < 0$

В итоге получаем последовательность вложенных отрезков, где длина каждого следующего в два раза меньше предыдущего.

$$[a, b] \supset [a_1, x_1] \supset [x_2, x_1] \supset \dots \supset [x_n, x_{n+1}] \supset \dots$$

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{b-a}{2^{n-1}}$$

$$\forall n \quad f(x_n)f(x_{n+1}) < 0$$

$$\text{По теореме Коши } \exists! c = \bigcap_{n=1}^{\infty} [x_n, x_{n+1}]$$

Покажем, что  $f(c) = 0$

От противного  $\square f(c) \neq 0$

Тогда по теореме о стабилизации знака  $\exists$  окрестность  $(c - \delta, c + \delta)$  точки  $c$ , в которой  $f(x)$  принимает тот же знак, что и  $f(c)$

Ясно, что НСНМ  $[x_n, x_{n+1} \subset (c - \delta, c + \delta)] \quad (x_n, x_{n+1} \rightarrow c) \Rightarrow f(x_n)f(x_{n+1}) > 0$ , что невозможно

Т.О.  $f(c) = 0$  ч.т.д. □

*Доказательство.* Будем считать для определённости, что  $f(a) < 0 < f(b)$

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in [a, b], f(x) < 0\}$$

$M \neq \emptyset$ , т.к.  $a \in M$

$M$  – ограничено, не  $\emptyset \Rightarrow \exists \sup M = c \in [a, b]$  – замкнутое

Покажем, что  $f(c) = 0$

От противного. Если  $f(c) > 0$ , то по теореме о стабилизации знака  $\exists (c - \delta, c + \delta) : f(x) > 0 \Rightarrow c$  – не  $\sup$  для  $f(x) < 0$ , т.к. в любой окрестности  $\sup$  должны лежать точки из  $M$

Если  $f(c) < 0$ , то по теореме о стабилизации знака  $f(x) < 0$  на  $(c - \delta, c + \delta) \Rightarrow$  нашлись точки из  $M : (c, c + \delta) \cap M \quad f(x < 0)$ , но  $x > c$

Это невозможно, т.к.  $c$  наибольшее из таких чисел □

**Теорема 1.18** (2-ая Больцано-Коши о промежуточном значении).  $\square f \in C([a; b])$  Тогда  $\forall$  числа  $c$ , лежащего между числами  $f(a)$  и  $f(b)$   $\exists x \in [a, b] : c = f(x)$

Иными словами, непрерывная функция принимает все значения, заключённые между  $f(a)$  и  $f(b)$

*Доказательство.* Рассмотрим вспомогательную функцию  $g(x) = f(x - c)$  Ясно, что  $g \in C([a, b])$

Т.к.  $c$  лежит между  $f(a)$  и  $f(b)$ , то  $(f(a) - c)(f(b) - c) < 0 \iff (f(a) < c < f(b) \vee f(a) > c > f(b)) \iff g(a)g(b) < 0$

Тогда по 1-ой ТБК  $\exists x \in (a, b) : g(x) = 0 \iff f(x) = c$  (нашлось значение) □

**Следствие 1.3** (Лемма о сохранении промежутка). Непрерывный образ промежутка есть снова промежуток

*Доказательство.*  $\langle a; b \rangle$  – промежуток ( $a \geq -\infty, b \leq +\infty$ ) – Связное множество (т.е. без дыр)

**Лемма 1.8.** Характеристическое свойство промежутка –  $I$  – промежуток  $\iff \forall x_1, x_2 \in I$  выполняется  $[x, x_2] \subset I$ .

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  Это следует из определения промежутка.

$$I - \text{промежуток} \iff I = \langle a, b \rangle = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

$$a \leq x_1 \leq x_2 \leq b \Rightarrow \forall x \in [x_1, x_2] \quad a \leq x_1 \leq x \leq x_2 \leq b$$

$$\text{Т.е. } [x_1, x_2] \in \langle a, b \rangle$$

$$\Leftrightarrow \square a = \inf I, b = \sup I \text{ (может быть, что } a = -\infty \vee b = +\infty)$$

Ясно, что  $I \subset [a, b]$  Если  $a = -\infty \vee b = +\infty$ , то пишем  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Покажем, что  $(a, b) \subset I$ , тогда понятно, что  $I$  либо совпадает с  $(a, b)$  и это промежуток, либо  $I$  получается из  $(a, b)$  добавлением одной или двух точек из  $a$  и  $b$

Т.е.  $I = [a, b] \vee \langle a, b \rangle \vee [a, b]$  и это тоже промежуток

$$\square x \in (a, b) \Rightarrow a < x < b$$

$$\text{т.к. } a = \inf I \Rightarrow \exists x_1 \in I : a < x_1 < x$$

$$\text{аналогично } b = \sup I \Rightarrow \exists x_2 \in I : x < x_2 < b$$

Т.о. нашёлся отрезок  $[x_1, x_2] \ni x$  и такой что  $x_1 \in I, x_2 \in I$  По условию  $[x - 1, x_2] \in I \Rightarrow x \in I$  Т.о.  $(a, b) \in I$

□

Возвращаемся к лемме.

$$\square I = f(\langle a, b \rangle)$$

$$\text{берём } c_1 \in I \Rightarrow \exists x_1 \in \langle a, b \rangle : f(x_1) = c_1$$

$$c_2 \in I \Rightarrow x_2 \in \langle a, b \rangle : f(x_2) = c_2$$

По ТЗБК  $\forall c \in [c_1, c_2] \exists x \in \langle a, b \rangle \quad f(x) = c$ , т.е.  $c \in f(\langle a, b \rangle)$ , т.е.  $[c_1, c_2] \subset f(\langle a, b \rangle) \Rightarrow f(\langle a, b \rangle) - \text{промежуток}$

□

**Теорема 1.19** (1-ая Теорема Вейрштрасса).  $\square f \in C([a, b]) \Rightarrow f - \text{ограничено на } [a, b]$

*Доказательство.* От противного.  $\square f - \text{неограничена} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a, b] : |f(x_n)| > n$

Рассмотрим последовательность  $\{x_n\} \subset [a, b] \Rightarrow$  это ограниченная последовательность

По теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность  $x_{n_k} \rightarrow x^*$ . Т.к.  $[a, b] - \text{замкнутое множество} \Rightarrow x^* \in [a, b]$

Т.к.  $f - \text{непрерывно} \Rightarrow f - \text{локально ограничено, в частности в окрестности точки } x^* \exists K \text{ и } O_\delta(x^*) : \forall x \in O_\delta(x^*) |f(x)| \leq K$

с другой стороны  $x_{n_k} \rightarrow x^* \Rightarrow \text{НСНМ } x_{n_k} \in O_\delta(x^*) \text{ при этом } |f(x_{n_k})| > n_k \rightarrow +\infty$

Это несовместимо с неравенством  $|f(x_{n_k})| \leq K$ !!!

□

**Теорема 1.20** (2-ая Теорема Вейрштрасса). *Непрерывная функция на отрезке принимает (достигает) своих наибольших и наименьших значений*

$$m = \inf_{x \in [a, b]} f(x), M = \sup_{x \in [a, b]} f(x) \text{ Тогда } \exists x_1, x_2 \in [a, b] : m = f(x_1), M = f(x_2)$$

$$\inf_{[a, b]} = \min_{[a, b]}, \text{ т.е. } \exists \max_{[a, b]} f(x) = f(x_2) - \sup_{[a, b]} f$$

*Доказательство.* Докажем, что достигается  $M$  (для  $m$  надо рассмотреть просто  $-f(x)$ )

$$\text{Т.к. } M = \sup f \Rightarrow \forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq M$$

Предположим противное  $\forall x \in [a, b] f(x) < M$

Рассмотрим вспомогательную функцию  $g(x) = \frac{1}{M - f(x)} > 0$ , т.к. знаменатель  $\neq 0$ , то это снова непрерывная функция на  $[a, b]$

По ТЗБВ она ограничена  $\Rightarrow \exists \mu > 0 : g(x) \leq \mu$

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq \mu \Rightarrow \frac{1}{\mu} \leq M - f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{\mu} \text{ выполняются } \forall x \in [a, b]$$

$$\sup_{[a, b]} f(x) \leq M - \frac{1}{\mu}, \text{ а он равен } M \text{?!}$$

□

**Теорема 1.21.** Если  $f(x)$  непрерывна и обратима на  $[a, b]$ , то обратная к ней тоже непрерывна

Более аккуратно  $\square f \in C([a, b])$  и  $f : [a, b] \rightarrow [A, B]$  и  $f$  – обратима :  $\exists f^{-1} : [A, B] \rightarrow [a, b]$  Тогда  $f^{-1} \in C([A, B])$

*Доказательство.*  $y = f(x) \quad x = f^{-1}(y)$

**Замечание 1.5.**  $f([a; b]) = [A; B]$  это следует из предыдущей теоремы

$\square y_0 \in [A; B]$  по теореме о промежуточном значении  $\exists x_0 \in [a; b] : y_0 = f(x_0)$

Возьмём  $\forall \varepsilon > 0$  и  $\triangleleft (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

$\square \sigma > 0$  такое маленькое число  $[x_0 - \sigma, x_0 + \sigma] \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

$\triangleleft f([x_0 - \sigma, x_0 + \sigma]) = [\alpha, \beta]$  т.к. непрерывный образ отрезка – отрезок

Ясно, что  $y_0 \in (\alpha, \beta)$  ( $y_0 \neq \alpha$  иначе  $y_0 = f(x_0) = f(x_0 - \sigma)$ ) аналогично  $y_0 \neq \beta$   $f$  – биекция?! )

А теперь, наконец, подумаем, что же надо доказать?

$f^{-1}$  – непрерывна в  $y_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f^{-1}(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

Так мы это уже и доказали: по  $\forall \varepsilon$  мы нашли  $\delta : y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset [\alpha, \beta] \Rightarrow x = f^{-1}(y) \subset [x_0 - \sigma, x_0 + \sigma] \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  что и требовалось доказать  $\square$

**Следствие 1.4** (Непрерывность обратных элементарных функций). •  $y = x^{6n}, n > 0$  на  $[0, +\infty), \uparrow \Rightarrow$  она обратима и непрерывна (мы это знаем из того  $\forall x_n^\alpha \rightarrow x_0^\alpha$  и эквивалентность языка Гейне и языка  $\varepsilon - \delta$ )  $\Rightarrow x^{\frac{1}{n}}$  – непрерывна (т.е.  $\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}$  и т.д.)

• Если мы доказали, что  $e^x$  – непрерывна и возрастает, то из этого уже бы следовало, что  $\ln x$  непрерывна

•  $f = \sin |_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$

$f \uparrow$  и непрерывна  $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$

$\exists f^{-1} = \arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \uparrow$

$\arcsin$  – непрерывен  $f(x) = a \iff x = f^{-1}(a)$

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$

•  $f = \cos |_{[0, \pi]}, \downarrow$

$f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$

$\exists f^{-1} = \arccos$

$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

$\arccos(-x) =$

$\arccos \downarrow$  и непрерывен

•  $f = \operatorname{tg} |_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}, \uparrow$

$\exists f^{-1} = \operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \uparrow$ , непрерывен

вертикальные асимптоты  $\operatorname{tg}$  превращаются в горизонтальные асимптоты  $\operatorname{arctg}$

•  $f = \operatorname{cth} |_{(0, \pi)}$

$\exists f^{-1} = \operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi), \downarrow$ , непрерывен

вертикальные асимптоты переходят в горизонтальные

**Теорема 1.22** (Непрерывность, обратимость, монотонность). Если  $f$  непрерывна на  $[a, b]$  и обратима на нём, то  $f$  монотонна (строго) на  $[a, b]$

*Доказательство.* От противного  $\Rightarrow \exists x_1 < x_2 < x_3$ , в которых будет реализовываться следующие картинки

$\square c \in (\min\{f(x_1), f(x_3)\}, f(x_2))$  По теореме о промежуточном значении  $\exists x' \in (x_1, x_2) : c = f(x')$

$\exists x'' \in (x_2, x_3) : c = f(x'') \Rightarrow f(x') = f(x'')$ , но  $x' \neq x''$  это противоречит обратимости.  $\square$

**Теорема 1.23** (Теорема о непрерывности монотонной функции).  $\square f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  – монотонная

Тогда она не может иметь разрывов 2 рода и непрерывность функции  $f$  равносильно тому, что множество значений, т.е.  $f((a; b))$ , есть промежуток

*Доказательство.* Пусть для определённости она монотонно возрастающая. В противном случае нужно рассматривать  $-f$

$$\square x_0 \in (a; b) \supset \square x_1 \in (a; x_0)$$

Тогда  $\forall x \in (x_1, x_0)$  выполняется, что  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_0)$

$$\forall x_n \in (x_1, x_0) \text{ и } x_n \uparrow x_0$$

получаем  $f(x_1) \leq f(x_n) \leq f(x_0)$  и  $f(x_n) \uparrow$

По теореме Больцано-Вейрштасса  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$

Для  $\forall$  другой последовательности  $\overline{x}_n \uparrow x_0$

$\lim f(\overline{x}_n) = \lim f(x_n)$  — совпадают

$$x_1 < \overline{x}_1 < x_2 < \overline{x}_2 < \dots$$

$\square x_0 \in (a; b), \square x_2 \in (x_0, b) >$  и аналогично доказываем  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$  □

$$\frac{(x^3 + 1)(x^2 - 4x + 3)}{x^2 - 6x + 8} \geq 0$$

$$\frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x - 3)}{(x - 2)(x - 4)} \geq 0$$

метод интервалов

$$a_n t^n + \dots + a_0 = 0 \quad a_n, a_0 \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{p}{q} \Rightarrow \begin{cases} a_0 : p \\ a_n : q \end{cases}$$

**Теорема 1.24.** Любое уравнение нечётной степени имеет хотя бы один вещественный корень

## 1.10 Равномерная непрерывность

Обычной непрерывности может не хватать. Например  $f(x)_n = x^n \rightarrow \begin{cases} 1, x = 1 \\ 0, 0 \leq x < 1 \end{cases}$

**Определение 1.19.**  $\square f : E \rightarrow \mathbb{R}$

$f$  — непрерывна на  $E \iff f$  — непрерывна в  $\forall$  точке  $E$

т.е.  $\forall \bar{x} \in E \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, \bar{x}) : \forall x \in O_\delta(\bar{x}) \cap E \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(f(\bar{x}))$

В двух словах равномерная непрерывность  $\iff \delta$  не зависит от  $\bar{x}$ , т.е для всех точек  $\bar{x}$  из  $E$   $\delta$  можно выбрать одинаковой (по  $\varepsilon$ )

**Определение 1.20.**  $f$  — равномерно непрерывно на множестве  $E \iff \forall \bar{x} \in E, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \underline{\delta(\varepsilon)} > 0$  ( $\delta$  зависит только от  $\varepsilon$ ):  $\forall x \quad |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$

**Лемма 1.9** (равносильное определение).  $f$  — равномерно непрерывна на  $E \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \overline{\overline{x}} \in E \quad |\overline{\overline{x}} - \overline{x}| < \delta \Rightarrow |f(\overline{\overline{x}}) - f(\overline{x})| < \varepsilon$

*Доказательство.* •

$\Leftarrow$  очевидно (считаем, что  $x = \overline{\overline{x}}$ )

$\Rightarrow$  Если по любому  $\overline{x}$  и по любому  $\varepsilon$  выбрать  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , то

$\forall \overline{x} \in E \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall \overline{\overline{x}} \in E \quad |\overline{\overline{x}} - \overline{x}| < \varepsilon \Rightarrow |f(\overline{\overline{x}}) - f(\overline{x})| < \varepsilon$  Квантер для  $\overline{\overline{x}}$  можно занести внутрь, получив утверждение из леммы □

**Замечание 1.6.** Из равномерной непрерывности, конечно же, следует обычная непрерывность.

Обратное неверно (будут примеры).

**Теорема 1.25** (Кантор). Если  $f$  определена на отрезке  $[a; b]$  и непрерывна на нём, то она равномерно непрерывна на отрезке

Доказательство.  $\square f \in C([a; b])$

От противного. Напишем отрицание определения равномерной непрерывности (из леммы):

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists \bar{x}_\delta, \bar{\bar{x}}_\delta \in [a; b] : |\bar{x}_\delta - \bar{\bar{x}}_\delta| < \delta, \text{ но } |f(\bar{x}_\delta) - f(\bar{\bar{x}}_\delta)| \geq \varepsilon_0 \quad (*)$$

Будем брать  $\delta = \frac{1}{n} \rightarrow 0, n \in \mathbb{N}$

$$\text{Получим } \exists \bar{x}_n, \bar{\bar{x}}_n : |\bar{x}_n - \bar{\bar{x}}_n| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(\bar{x}_n) - f(\bar{\bar{x}}_n)| \geq \varepsilon_0$$

Мы имеем две последовательности  $\{\bar{x}_n\}$  и  $\{\bar{\bar{x}}_n\}$  из отрезка  $[a; b]$

Из  $\{\bar{x}_n\}$  можно выбрать сходящуюся подпоследовательность

$$\square \bar{x}_{n_k} \rightarrow c \in [a; b]$$

$$\text{Тогда и } \bar{\bar{x}}_{n_k} \rightarrow x, \text{ т.к. } |\bar{x}_{n_k} - \bar{\bar{x}}_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \rightarrow 0$$

$$|\bar{x}_{n_k} - c| = |\bar{\bar{x}}_{n_k} - \bar{x}_{n_k} + \bar{x}_{n_k} - c| \leq |\bar{\bar{x}}_{n_k} - \bar{x}_{n_k}| + |\bar{x}_{n_k} - c| \text{ Первое слагаемое стремится к 0, т.к. } < \frac{1}{n_k} \rightarrow 0. \text{ А}$$

второе стремится к 0, т.к.  $c = \lim \bar{x}_{n_k}$

$$\text{Тогда } |f(\bar{x}_{n_k}) - f(\bar{\bar{x}}_{n_k})| \geq \varepsilon_0 \quad (*)$$

$f$  — непрерывна и монотонно убывает  $n_k \rightarrow \infty$

$$|f(c) - f(c)| \geq \varepsilon_0 \quad 0 \geq \varepsilon_0 \text{ странно}$$

□

### 1.10.1 Примеры

1.  $f(x) = x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — равномерно непрерывно

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \varepsilon \quad |\bar{x} - \bar{\bar{x}}| < \delta \Rightarrow |f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}})| = |\bar{x} - \bar{\bar{x}}| < \varepsilon?$$

2. Но  $f(x) = x^2$  — не равномерно непрерывная на  $\mathbb{R}$  (но само  $x^2$  непрерывно на  $\mathbb{R}$ ).

Возьмём  $\varepsilon_0 = 1$ , возьмём  $\forall \delta > 0$

$$\square \bar{x} = \frac{1}{\delta}, \bar{\bar{x}} = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$$

$$\text{Тогда } |\bar{x} - \bar{\bar{x}}| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

$$\text{Но } |f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}})| = |(\bar{x} - \bar{\bar{x}})(\bar{x} + \bar{\bar{x}})| = \left| \frac{\delta}{2} \cdot \left( \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right) \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\delta^2}{4} \right| > \varepsilon_0$$

**Определение 1.21.** Колебания  $f(x)$  на  $\langle a, b \rangle$   $\omega_{\langle a, b \rangle}(f) = \sup_{\bar{x}, \bar{\bar{x}} \in \langle a, b \rangle} |f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}})|$

ДЗ(прошлый листок):

1. 572.1

2. 573.1

3. 574.1

4. 579.1





## Глава 2

# Дифференциальные исчисления (функции от одной переменной)

### 2.1 Дифференцируемость

**Определение 2.1** (Скорость).  $v = \frac{S}{t}$  – средняя скорость на отрезке. Непригодно для характеристики движения.

**Определение 2.2** (Мгновенная скорость).  $\exists \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{cp} = v_{мгн}$

$$s(\Delta t) = x(t + \Delta t) - x(t) = \Delta x$$

$$v_{мгн} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \dot{x}(t) - \text{флюксия (Ньютон), производная.}$$

**Определение 2.3** (ускорение).  $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$

$$m\ddot{x}(t) = F(t, x(t), \dot{x}(t))$$

Ньютон изобрёл дифференциальные уравнения.

#### 2.1.1 Задача о касательной (Лейбниц)

**Определение 2.4.** Касательная – предельное положение секущей

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \text{ по подобности треугольников.}$$

$$l_{x_1}(x) : y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0) + f(x_0), x_1 \rightarrow x_0$$

$$l_{x_0} \exists \iff \exists \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

**Определение 2.5** (Определение 1).  $\square f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$\square x_0 \in \langle a, b \rangle$  Если  $\exists$  число  $A$ : выполняется  $f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$ , то говорят, что:

1.  $f$  дифференцируется в  $x_0$
2. Число  $A$  – называется производной функции  $f$  в  $x_0$

**Определение 2.6** (Определение 2).  $\square f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$\square x_0 \in \langle a, b \rangle$ . Если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , то  $f$  называется дифференцируемой, а конечное значение предела называют производной  $f$  в точке  $x_0$ .

**Теорема 2.1.** Два определения выше эквивалентны

Доказательство.

1.  $\Rightarrow$  Пусть выполняется (1)

Во-первых  $o(x - x_0) = \varphi(x) \cdot (x - x_0), \varphi(x) \rightarrow 0, x \rightarrow x_0$

$f(x) - f(x_0) = A \cdot (x - x_0) + \varphi(x) \cdot (x - x_0) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \varphi(x) \rightarrow A, x \rightarrow x_0 \Rightarrow$  предел из 2-го определения существует и равен  $A$

2.  $\Leftarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A \in \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{cases}$$

Из 2-го определения следует, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$  и Т.О.  $\varphi(x)$  непрерывна в  $x_0$

Тогда  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \varphi(x) \Rightarrow f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + \varphi(x) \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{o(x - x_0)}, \text{ т.к. } \varphi(x) \rightarrow 0, x \rightarrow x_0$

Т.е. выполняется равенство из 1-го определения

□

**Замечание 2.1.** В виду теоремы о единственности предела получаем, что производная в точке определяется однозначно

Обозначения для производной:	$f'(x_0)$	Лагранж	В последнем примере $x(t)$ – функция от времени $t$
	$\frac{df(x_0)}{x_0}$	Лейбниц	
	$Df(x_0)$	Копи	
	$\dot{x}(t)$	Ньютон	

Дробь  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  – разностное отношение

Введём обозначение:  $u = f(x), y_0 = f(x_0) \quad \Delta y = y - y_0 = \Delta_{x_0} f$  – приращение функции (в точке  $x_0$ )

А тогда предел из второго определения можно записать следующим образом :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_0} f}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Также производной от  $f$  называется сопоставление  $x \rightarrow f'(x)$

Найти  $(x^2)'$  (обычно (2) удобнее, чем (1))

$$\triangleleft \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

ДЗ – посчитать производные:

1.  $(x^n)', n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{R}$

2.  $(\sqrt{x})'$

3.  $\left(\frac{1}{x}\right)'$

4.  $(\sin x)' = \cos x$  и вывести из неё  $(\cos x)' = -\sin x$

5.  $(e^x)' = e^x$

6.  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \quad (*)$$

**Определение 2.7.** Рассмотрим приращение функции  $f$  в точке  $x_0$  как функцию от  $\Delta x$ :  $(\Delta x_0 f)(\Delta x)$

Если  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то справедлива формула(\*) (это просто определение)

$$(\Delta x_0 f)(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \quad f'(x_0)\Delta x - \text{линейная/главная часть}$$

Дифференциалом  $f$  в точке  $x_0$  называется линейная (главная) часть приращения  $f$ , т.е.  $f'(x_0)\Delta x$

Понимаем так: Дифференциал – линейная функция от  $\Delta x$

Обозначение: коротко  $df$ , целое  $d_{x_0}f$ , подробное  $(d_{x_0}f)\Delta x$

$$(d_{x_0}f)(\Delta x) \stackrel{\text{def}}{=} f'(x_0)\Delta x \quad (**)$$

Более абстрактно  $(d_{x_0}f)h = f'(x_0) \cdot h \forall h \in \mathbb{R}$

$\square f(x) = x \quad f'(x) = 1 \quad (d_{x_0}x)(\Delta x) = \Delta x$  позволяет сделать отождествление  $\Delta x = dx$

(\*\*)  $\iff (d_{x_0}f) = f'(x_0)dx$  или совсем коротко  $df = f'dx$

Эта формула оправдывает обозначение Лейбница для производной  $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$  – это дробь

$dx$  – конечное приращение  $\forall \quad df(x) = (d_x f)(dx) = f'(x) \cdot dx$  – конечно

Вычислить дифференциал функции  $x^2$  в точке  $x_0 = 1$  для приращения  $dx = 3 \quad dx^2 = 2x dx$

$$(d_{x_0}x^2)h = 2 \cdot x_0 \cdot h \quad (d_2x^2)(3) = 2 \cdot x|_{x=1} \cdot 3 = 6$$

ДЗ:

1. Написать функцию, которая дифференцируема только в нуле

<...>

Допускается, чтобы  $f'(x_0), f'_+(x_0) \vee f'_-(x_0)$  равны  $\pm\infty$

Но дифференцируемость означает  $\exists$  конечная производная

Функция  $f(x)$  называется гладкой на  $\langle a, b \rangle$ , если дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$

Класс гладких функций  $C^2(\langle a, b \rangle)$

**Лемма 2.1.** Если функция дифференцируема в  $x_0 \Rightarrow f$  – непрерывна в  $x_0$

*Доказательство.* По определению дифференцируемости  $f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} o(x - x_0) = 0$$

Т.О.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f$  – непрерывна в  $x_0$

□

Примеры:

1.  $f(x) = x^2$  покажем, что  $f \in C^1(\mathbb{R})$

$$\Delta f = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = 2x_0\Delta x + o(\Delta x)$$

выпишем определение дифференцируемости  $f'(x_0) = 2x_0 \quad x_0 \in \mathbb{R}$  – любое

или  $f'(x) = 2x$

2.  $f(x) = \sqrt{x} \in C^1(0, +\infty)$  в  $x_0 = 0 \quad f'(0) = +\infty \Rightarrow$  дифференцируемости нет

$\square x_0 \neq 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \quad \text{---} \exists$$

$$\text{Т.О. } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{Если } x_0 = 0 \quad f'(0) = f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = +\infty$$

Кстати,  $\sqrt{x}$  в 0 непрерывен, таким образом из непрерывности  $\nRightarrow$  дифференцируемость

3.  $f(x) = |x| \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ , а в 0 – не дифференцируема

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \begin{cases} x \in (0, +\infty) & f(x) = x & f'(x) = 1 \\ x \in (-\infty, 0) & f(x) = -x & f'(x) = -1 \end{cases}$$

$$x = 0 \quad f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \quad \text{--- не } \exists$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{+\Delta x}{\Delta x} = +1, \quad f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

Левосторонние и правосторонние производные существуют, но производной  $f'$  – нет

$$\forall f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{\Delta x} - \text{не существует даже односторонней, но при этом есть непрерывность}$$

5 Согласно лемме: дифференцируемость в точке  $\Rightarrow$  непрерывность

но  $\exists$  производная в точке  $\nRightarrow$  непрерывность в точке

$$f(x) = \operatorname{sign} x \text{ в } x = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\operatorname{sign} \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{1}{\Delta x} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\operatorname{sign} \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{-1}{\Delta x} = -\infty$$

### 2.1.2 К задаче о касательной

**Определение 2.8.**  $\supseteq f$  — дифференцируема в  $x_0$

касательная к  $f$  в точке  $(x_0, f(x_0))$  (обычно говорят коротко: в точке  $x_0$ ) называется прямая, задаваемая формулой  $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Обсуждение:  $\triangleleft$  множество всех прямых, проходящих через  $(x_0, f(x_0))$

$y = k(x - x_0) + f(x_0)$ ,  $k$  — угловой коэффициент, параметр

Поставим вопрос: Какая прямая "лучше" всего приближает график  $f$  в окрестности точки  $(x_0, f(x_0))$

$$\triangleleft f(x) - k(x - x_0) - f(x_0) = (f(x) - f(x_0)) - k(x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0) - k(x - x_0) = (f'(x_0) - k) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta$$

$$\text{Если } f'(x_0) \neq k \quad \Delta = O(x - x_0) \quad \frac{\Delta}{x - x_0} \rightarrow f'(x_0) - k \neq 0$$

$$\text{Если } f'(x_0) = k \quad \Delta = o(x - x_0)! \quad \frac{\Delta}{x - x_0} \rightarrow 0$$

Лучше 2-ой вариант

Т.О.  $f(x) - k(x - x_0) - f(x_0) = o(x - x_0) \iff k = f'(x_0)$  и прямая касательная

Заметим, что уравнение касательной возникает в самой формуле дифференцируемости

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + A \cdot (x - x_0)}_{\text{уравнение касательной}} + o(x - x_0)$$

Уравнение касательной — линейные члены разложения в ряд Тейлора.

Факт:  $\exists$  касательная  $\iff$  дифференцируемость в  $x_0$

Если  $f'(x_0) = \pm\infty$ , то можно говорить о вертикальной касательной

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

$$f'(0) = \infty$$

Если  $\exists f'_{\pm}(x_0)$ , то можно говорить о лево и право сторонних касательных

$$y = |x|$$

$y = -x$  — касательная ко всем точкам  $(-\infty, 0)$  и левосторонняя касательная в 0

$y = x$  — касательная ко всем точкам  $(0, +\infty)$  и правосторонняя касательная в 0

$f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ , то касательная "терпит" скачок

График имеет угол  $\Rightarrow$  т.е. он не гладкий

**Замечание 2.2.**  $f(x) = \sqrt{|x|}$

$$f'_+(0) = +\infty \quad f'_-(0) = -\infty$$

не гладкая, хотя лево и право сторонние касательные в 0 совпадают. Касательные меняются непрерывно, но это не означает гладкость функции

## 2.2 Правила Дифференцирования

1. Пишем  $x$  вместо  $x_0$
2.  $\Delta x \longleftrightarrow h$
- 3.

**Предложение 2.1.**  $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

*Доказательство.*  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \pm g)(x+h) - (f \pm g)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x)) \pm (g(x+h) - g(x))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) \pm g'(x)$

Т.О. если  $\exists f', g' \Rightarrow \exists (f \pm g)'$  □

**Следствие 2.1.**  $\left( \sum_{k=1}^n f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^n f'_k(x)$  (доказательство проводится по индукции)

**Предложение 2.2.**  $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

*Доказательство.*  $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h)$

$$g(x+h) = g(x) + g'(x)h + o(h)$$

$$\begin{aligned} f(x+h)g(x+h) &= (f(x) + f'(x)h + o(h)) \cdot (g(x) + g'(x)h + o(h)) = \\ &= f(x)g(x) + (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))h + (f'(x) + g'(x))h \cdot o(h) + f'(x)g'(x)h^2 + (f(x) + g(x))o(h) + (o(h))^2 = \\ &= f(x)g(x) + (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))h + o(h) \end{aligned}$$

$$(f \cdot g)(x+h) - (fg)(x) = (f'g + fg')(x) \cdot h + o(h) \Rightarrow fg - \text{дифференцируема и } (fg)' = f'g + fg'$$

□

**Следствие 2.2.**  $(cf(x))' = cf'(x)$

Более общий вариант -  $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$

*Доказательство.*  $(cf(x))' = c'f(x) + cf'(x) = cf'(x)$  □

**Следствие 2.3.**  $(f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n)' = f'_1 f_2 \dots f_n + f_1 f'_2 \dots f_n + \dots + f_1 f_2 \dots f'_n$

**Предложение 2.3.**  $\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$  при условии  $g(x) \neq 0$  в окрестности рассматриваемой точки.

*Доказательство.*

**Лемма 2.2.**  $\left( \frac{1}{g} \right)' = -\frac{g'}{g^2}$

*Доказательство.*  $\Delta \frac{1}{g}(x) = \frac{1}{g(x)+h} - \frac{1}{g(x)} = \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x)}$

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta \frac{1}{g}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( -\frac{g'(x)h + o(h)}{h \cdot g(x+h)g(x)} \right) = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) + \frac{o(h)}{h}}{g(x+h)g(x)} = -\frac{g'}{g^2}$$

□

$$(f \cdot \frac{1}{g})' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left( \frac{1}{g} \right)' = \frac{f'}{g} - \frac{f \cdot g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

□

**Предложение 2.4.**  $\square f - \text{дифференцируема в } x_0, \text{ а } g \text{ в } f(x_0) \Rightarrow (g \circ f) = g(f(x)) - \text{дифференцируема в } x_0$   
 $(g(f(x_0)))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

*Доказательство.* Из дифференцируемости следует:  $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h)$

$$x = x_0, y_0 = f(x_0)$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

$$g(y_0+k) = g(y_0) + g'(y_0)k + o(k)$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x_0+h) &= g(f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)) = g(y_0 + g'(y_0)h + o(h)) = g(y_0) + g'(y_0) \cdot (f'(x_0)h + o(h)) + o(g'(y_0)h + o(h)) = \\ &= g(f(x_0)) + g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \cdot h + g'(y_0)o(h) + o(g'(y_0)h + o(h)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \cdot h + o(h) \end{aligned}$$

□

**Следствие 2.4.**  $(f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n)' = f'(f_2 \circ \dots \circ f_n) \cdot f_2'(f_3 \circ \dots \circ f_n) \cdot \dots \cdot f_{n-1}'(f_n) \cdot f_n'$

ДЗ (посчитать производные):

1.  $y = x^2 \cdot e^{2x}$
2.  $y = e^{\sin(x^2)}$
3.  $y = e^{x^3} \cdot (\cos x + \sin x)$
4.  $y = \frac{\sin^4(5x)}{\cos^2(\sqrt{x})}$

**Предложение 2.5** (производная обратной функции).  $\square f : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle \alpha, \beta \rangle$  – биективна и непрерывна на  $\langle a, b \rangle$  и дифференцируема в  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ , причём  $f'(x_0) \neq 0$ , тогда обратная функция  $x = g(y)$  дифференцируема в  $y_0 = f(x_0) \in \langle \alpha, \beta \rangle$ , при этом  $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

**Замечание 2.3.** 1. В условиях предложения 2.5 обратная функция  $x = g(y)$  – непрерывна на  $\langle \alpha, \beta \rangle$

2. Другая запись:  $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$

*Доказательство.* Существование

$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$  – Если он существует, то он равен  $g'(y_0)$ . Надо показать, что этот предел существует и найти чему он равен.

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{d(x) - f(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Т.к.  $f'(x_0) \neq 0$ , то при  $x$  достаточно близких к  $x_0$ , то дробь  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq 0$  и потому значение  $\neq 0$  в окрестности  $x_0$  ( $f(x) \rightarrow A > 0, x \rightarrow x_0 : \forall x \in O_\delta(x_0) \quad f(x) > \frac{A}{2} > 0$ )  $\square$

## 2.3 Дифференцирование элементарных функций

1.  $c' = 0$

2.  $\square n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \quad (x^n)' = nx^{n-1}$

способ 1  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n((1 + \frac{h}{x})^n - 1)}{h} = x^n \lim_{\frac{h}{x} \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{h}{x})^n - 1}{\frac{h}{x}} = x^n \cdot \frac{n}{x} = nx^{n-1}$

$$(1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + o(\alpha), \alpha \rightarrow 0$$

Всё это катит, пока  $x \neq 0$

Рассмотрим  $x = 0$  – отдельно. Тогда, очевидно  $n \geq 1$

$$(x^n)'|_{x=0} = nx^{n-1}|_{x=0} = \begin{cases} 1, n=1 \\ 0, n>1 \end{cases} = 0$$

$$(x^n)'|_{x=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0+h)^n - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{n-1} = \begin{cases} 1, n=1 \\ 0, n>1 \end{cases} \quad \text{чтд}$$

способ 2  $\square n \in \mathbb{N}$

$x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x$  по формуле Лейбница  $(x^n)' = x' \cdot x \cdot \dots \cdot x + x \cdot x' \cdot \dots \cdot x + \dots + x \cdot \dots \cdot x \cdot x' = nx^{n-1}$

$$n \in \mathbb{Z}_- = \{-1, -2, \dots\}$$

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)' = \frac{-(x^{-n})'}{(x^{-n})^2} = \frac{-(-n)x^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{2n-n-1} = nx^{n-1}$$

3.  $(e^x)' = e^x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

**Следствие 2.5.**  $(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$

*Доказательство.*  $a^x = e^{x \ln a} = g(f(x)) \quad g = e^x \quad f(x) = x \ln a$   
 $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{f(x)} \cdot (x \ln a)' = e^{x \ln a} \ln a x' = a^x \ln a$  □

4.  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

способ 1  $y = e^x \quad x = \ln y$

$$(\ln y)' = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y} \quad \text{чтд}$$

способ 2  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{\ln(\frac{x+h}{x})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{h}{x})}{h} = \frac{1}{x}$

**Следствие 2.6.**  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

*Доказательство.*  $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$  и всё □

5. Произвольная степенная функция  $y = x^\alpha, \alpha \neq 0 \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

способ 1  $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$  (это определение в классе элементарных функций)

$$x^\alpha = g(f(x)) \quad g(y) = e^y \quad f(x) = \alpha \ln x$$

$$(x^\alpha)' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{f(x)} \cdot (\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

способ 2  $(1+h)^\alpha = 1 + \alpha h + o(h)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^\alpha((1+\frac{h}{x})^\alpha - 1)}{h} = x^\alpha \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + \alpha \frac{h}{x} + o(h) - 1}{h} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

6.  $(\sin x)' = \cos x$  (ясно)

$$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$(\cos x)' = (\sin(x + \frac{\pi}{2}))' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \cdot (x + \frac{\pi}{2})' = -\sin x \cdot 1$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

7.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$y = \arcsin x, x \in [-1, 1] \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$$

$$x = \sin y \quad \sin(\arcsin x) = x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{+\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Д/З:

1.  $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$  (2 доказательства)

2.  $(\operatorname{tg} x)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

3.  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

4.  $(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$  (2 доказательства)

## 2.4 Основные теоремы дифференциального исчисления

**Теорема 2.2** (Ферма).  $\square f(x) : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$$\square x_0 \in (a, b) \quad \square f(x_0) = \max_{\langle a, b \rangle} f(x) \text{ или } f(x_0) = \min_{\langle a, b \rangle} f(x) \quad \square f - \text{дифференцируемо в } x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

*Геометрический смысл – касательные в точках минимума и максимума – горизонтальные*

*Доказательство.* Пусть, для определённости,  $f(x_0) = \max_{\langle a, b \rangle} f(x) \Rightarrow \forall x < x_0 \quad f(x) \leq f(x_0)$

$$\forall x > x_0 f(x) \leq f(x_0)$$

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$

□

**Замечание 2.4.** Дифференцируемость важна.

$$f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$$

Ясно, что  $1 - \min$ , но  $f'(-1) \nexists$

**Замечание 2.5.** Важно, что  $x_0$  – внутренняя точка промежутка  $\langle a, b \rangle$

$$f(x) = x^2, x \in [0, 1]$$

$$\min \text{ в } x_0 = 0$$

$$\text{и там } f'(x) \text{ в } x = 1$$

$$f'(1) = 2 \neq 0$$

**Теорема 2.3** (Роля).  $\square f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \in C[a, b] \quad \exists f'$$

$$f(a) = f(b)$$

$$\Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$$

*Доказательство.* .

$f \in C([a, b])$  по теореме Вейерштрасса  $\square x_1, x_2 \in [a, b] : f(x_1) = f(x_0) = \max_{[a, b]} f(x) \quad f(x_2) = \min_{[a, b]} f(x)$

$$1. \{x_1, x_2\} = \{a, b\} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x) = \text{const} \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$2. \text{ Хотя бы одна точка } x_1 \text{ или } x_2 - \text{внутренняя. Тогда - по теореме Ферма - в ней производная} = 0$$

□

**Теорема 2.4** (Лагранжа).  $\square f$  – непрерывна на  $[a, b]$  и дифференцируема на  $(a, b) \Rightarrow \exists x \in (a, b) \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

*геометрический смысл – угловой коэффициент хорды, соединяющей концы графика. И говорится, что есть точка, в которой касательная параллельна хорде*

**Теорема 2.5** (Коши).  $\square f, g$  – непрерывны на  $[a, b]$  и дифференцируемы на  $(a, b)$ , причём  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow \exists c \in (a, b) \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

*Теорема Лагранжа – частный случай теоремы Коши при  $g(x) = x$*

*Доказательство.* Сведём теорему Коши к теореме Роля.

$$\triangleleft \varphi(x) = f(x) - k \cdot g(x), k \in \mathbb{R} \text{ подобрать } k \text{ так, чтобы } \varphi(a) = \varphi(b)$$

$f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) \quad k(g(b) - g(a)) = f(b) - f(a)$  заметим, что  $g(b) \neq g(a)$ , иначе по теореме Роля существовала бы точка  $x \in (a, b) : g'(x) = 0$ , а это запрещено по условию теоремы

$$\Rightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}, \text{ а значит такое } k \text{ существует}$$

$$\text{Применим к } \varphi(x) \text{ теорему Роля } \exists x \in (a, b) : \varphi'(x) = 0 \iff f'(x) - kg'(x) = 0 \iff k = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\text{Таким образом, } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

□



**Замечание 2.6** (К теоремам Лагранжа и Коши). 1. Если  $f(x)$  трактовать как расстояние, а  $x$  как время, то тогда  $f(b) - f(a)$  – пройденный путь, а  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  – средняя скорость,  $b - a$  – затраченное время

$f'(c)$  – мгновенная скорость в момент времени  $c$

При любом движении существует такой момент времени  $c$ , в котором мгновенная скорость равна средней

2. Формулу из теоремы Лагранжа часто записывают как  $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$  и называют формулой Лагранжа/формулой конечных приращений (приращение функции = приращение аргумента на значение производной в некоторой точке)

3. Пусть  $a = x, b = x + \Delta x$  Формула Лагранжа записывается, как  $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x) \cdot \Delta x$ ,  $\theta \in (0, 1)$

Пусть  $c$  между  $x$  и  $x + \Delta x$   $c = x + \theta \Delta x$

4.

**Лемма 2.3** (об оценке приращения функции).  $\square$   $f$  удовлетворяет условию теоремы Лагранжа и  $\square \exists M : |f'(x)| \leq M \forall x \in (a, b) \Rightarrow |f(x + \Delta x) - f(x)| \leq M \cdot |\Delta x| \forall x, x + \Delta x \in (a, b)$

(Если функция удовлетворяет данному неравенству, то говорят, что функция удовлетворяет условию Липшица)

Доказательство.  $|f(x + \Delta x) - f(x)| = |f'(x + \theta \Delta x)| \cdot |\Delta x| \leq M \cdot |\Delta x|$   $\square$

5.  $f$  – непрерывна на  $(a, b)$  ( $a \geq -\infty; b \leq +\infty$ ) и дифференцируема на  $(a, b)$  и производная ограничена  $|f'(x)| \leq M \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$  – равномерно непрерывна на  $(a, b)$

Доказательство.  $f$  – равномерно непрерывна на  $(a, b) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x_1, x_2 \in (a, b) \quad |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$

Берём  $\varepsilon$ , предъявляем  $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$  – искомое?

Берём  $\forall x_1, x_2 : |x_2 - x_1| < \delta$

$\triangleleft |f(x_2) - f(x_1)| = |f'(c)| |x_2 - x_1| \leq M \cdot |x_2 - x_1| < M \delta = \varepsilon$   $\square$

6.  $\square f$  – дифференцируема на  $(a, b)$ , непрерывна на  $[a, b]$  и  $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ )

Тогда  $f(x) \uparrow$  (или  $\downarrow$ )

Доказательство.  $\square f'(x) > 0$

Берём  $\forall x_2 > x_1 \quad \triangleleft f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$   $\square$

7. Если  $f'(c) \geq 0$  ( $\leq 0$ ), то  $f$  может (не обязательно строго) возрастать (или убывать)

"Контрпример" если  $f$  – дифференцируема в  $x_0$  и  $f'(x_0) > 0 \nRightarrow f \uparrow$  в окрестности  $x_0$

$$\triangleleft f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f \in C(\mathbb{R}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

$$т.к. \lim_{x \rightarrow 0} (x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x \sin \frac{1}{x} + 2x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 2 \sin \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$т.о. f'(0) = 1 > 0$$

**Замечание 2.7.** 1.  $f$  – дифференцируема на  $[a, b]$

$$f'(x) > 0 \text{ на } [a, b] \Rightarrow f(x) \uparrow$$

2. Если  $f'(x_0) > 0 \nRightarrow f \uparrow$  в некоторой окрестности  $x_0$

$$\Rightarrow f \uparrow \text{ по отношению к } x_0 \quad \forall x > x_0 \quad f(x) > f(x_0) \quad \forall x < x_0 \quad f(x) < f(x_0)$$

**Теорема 2.6** (Сравнения 1).  $\square f, g$  дифференцируемы на  $(a, b)$  и справедливы неравенства  $f(x_0) \geq g(x_0)$ ,  $f'(x_0) \geq g'(x_0) \forall x \in (a, b) \Rightarrow f(x) \geq g(x)$  на  $[x_0, b)$  и  $f(x) \leq g(x)$  на  $(a, x_0]$

*Доказательство.*  $h(x) = f(x) - g(x)$

$\triangleleft$  случай  $[x_0, b)$  (случай  $(a, x_0]$  рассматривается аналогично)

Докажем противное, т.е.  $\exists x_1 \in (x_0, b) : h(x_1) < 0$ , при этом  $h(x_0) \geq 0$

$$h(x_1) - h(x_0) = h'(c) \cdot (x_1 - x_0), \text{ где } c \in (x_0, x_1) \Rightarrow h'(c) < 0??!, \text{ но } h'(c) = f'(c) - g'(c) \geq 0 \quad \square$$

**Теорема 2.7** (Сравнения 2). То же самое условие, но неравенства такие  $f(x_0) \geq g(x_0)$ ,  $f'(x) \geq g'(x) \forall x \in (a, b)$

*Доказательство.*  $h(x) = f(x) - g(x)$

$\triangleleft (x_0, b)$

Допустим противное:  $\exists x_1 \in (x_0, b)$

$$h(x_1) \leq 0$$

$$h(x_1) - h(x_0) = h'(c)(x_1 - x_0) \Rightarrow h'(c) \leq 0??! \quad \square$$

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \forall x > 0$$

$$f(x) = \cos x \quad g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \quad f(0) = g(0) = 0$$

$$f'(x) = -\sin x > g'(x) = -x \quad (\text{при } x > 0 \text{ т.к. } \sin x < x \quad \cos x < 1)$$

По Т2

$$f(x) = \sin x \quad g(x) = x - \frac{x^3}{6} \quad f(0) = g(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x > g'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \text{ по предыдущей задаче}$$

$$2\sqrt{x} < 3 - \frac{1}{x}$$

$$f(1) = g(1) = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} > g'(x) = \frac{1}{x^2} \text{ чтд}$$

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} \forall x \geq 0$$

$$f(x) = e^x \quad g(x) = 1 + x \quad f(0) = g(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \geq g'(x) = 1 + x \quad f'(0) = g'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \geq g''(x) = 1 \forall x \geq 0$$

ДЗ:

1. 214.2

2. 216.2

3. Доказать неравенства:

$$\bullet (a + b)^p \leq a^p + b^p \quad (0 \leq p \leq 1)$$

$$\bullet e^x \leq 1 + x + \frac{x^2 e^x}{2!} \quad x \geq 0$$

$$\bullet \ln(1 + x) \leq x \frac{x^2}{2} + 1 \frac{x^3}{3} \quad \forall x \geq 0$$

$f(x) = |x|$  дифференцируема в  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Производная функции не обязана быть непрерывной  $\begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$$\triangleleft g(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad \exists f : f'(x) = g(x)$$

**Теорема 2.8** (Дарбу).  $\square f$  – дифференцируема на  $[a; b]$ . Тогда  $\forall$  числа  $C$  заключённого между  $f'(a)$  и  $f'(b)$   $\exists c \in (a; b) : f'(c) = C$

(Т.е. производная дифференцируемой функции обладает свойством принимать все промежуточные значения, как и непрерывная функция по Теореме Больцано-Коши)

*Доказательство.* • Пусть  $f'(a)$  и  $f'(b)$  – разных знаков и докажем, что  $\exists c \in (a; b) : f'(c) = 0$

НУО  $\square f'(a) < 0 < f'(b)$

Т.к.  $f$  – дифференцируема на  $[a; b] \Rightarrow f \in C[a; b] \Rightarrow$  По теореме Вейерштрасса  $f$  достигает на  $[a; b]$  наибольшего и наименьшего значения  $\triangleleft \min f(x)$

$$\square x \in [a; b] : f(c) = \min_{[a; b]} f(x)$$

По теореме Ферма  $f'(c) = 0$  Остаётся доказать, что  $c \in (a; b)$

От противного  $\square c = a \Rightarrow \forall x \in (a; b] \quad f(x) \geq f(a)$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ правосторонняя производная}$$

но  $f(a+h) - f(a) \geq 0 \Rightarrow f'(a) \geq 0$ , а у нас  $f'(a) < 0$ ??!

Если  $c = b \quad f(b) \geq f(x) \forall x \in [a; b]$

$$f'(b) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \leq 0 \quad f'(b) > 0$$

- Считаем (НУО), что  $f'(a) < f'(b)$  и берём  $\forall C : f'(a) < C < f'(b)$

$$\triangleleft g(x) = f(x) - Cx$$

$$g'(a) = f'(a) - C < 0; g'(b) = f'(b) - C > 0$$

По Случаю 1  $\exists c \in (a; b) : g'(c) = f'(c) - C = 0$

Т.е.  $f'(c) = C$

□

**Замечание 2.8.** Теорема Дарбу похожа на Теорему Больцано-Коши для непрерывных функций. Но производная дифференцируемой функции не обязана быть непрерывной

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

У  $g(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$  не существует предела в 0, т.е. 0 – разрыв 2 рода

**Замечание 2.9.** Если  $(\alpha; \beta) \subset [a; b]$  – произвольный промежуток, то и  $f'((\alpha; \beta))$  – тоже промежуток

**Замечание 2.10.** Производная  $f'(x)$  не может иметь разрывов 1-го рода (неустранимых) (в условии теоремы Дарбу)

*Доказательство.*  $\square x_0 \in (a, b)$  – разрыв 1-го рода неустранимый

$$\exists \lim_{h \rightarrow -0} f'(x_0 + h) = f'(x_0 - 0) \neq \lim_{h \rightarrow +0} f'(x_0 + h) = f'(x_0 + 0)$$

$$\square f'(x_0 - 0) < f'(x_0 + 0)$$

$$\square \frac{f'(x_0 + \delta) - f'(x_0 - \delta)}{2} > \varepsilon$$

$$\exists \delta_1 : \forall x \in [a_0 - \delta_1, x_0] \quad |f'(x) - f'(x_0 - 0)| < \varepsilon$$

$$\exists \delta_2 : \forall x \in [x_0, x_0 + \delta_2] \quad |f'(x) - f'(x_0 + 0)| < \varepsilon$$

$$\square \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} < \text{отрезок } [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

$$\text{На нём нарушается теорема Дарбу } C = \frac{f'(x_0 + \delta) - f'(x_0 - \delta)}{2} + f'(x_0 - 0) \quad \square$$

**Лемма 2.4** (Базовая теорема единственности в теории дифференциальных уравнений).  $\square f$  – дифференцируема на  $(a, b)$  и  $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow f(x) \equiv \text{const}$

*Доказательство.* Пусть есть  $x_1 \neq x_2 : f(x_1) \neq f(x_2)$ . Применим формулу Лагранжа  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), x \in (x_1, x_2) \quad f'(c) = 0, f(x_2) - f(x_1) \neq 0$ ?!  $\square$

## 2.5 Правило Лопиталя

Точнее говоря стоило бы говорить о правилах Иоганна Бернулли - Лопиталя

**Теорема 2.9** (Правило Лопиталя для неопределённостей вида  $\frac{0}{0}$ ).  $\square f(x), g(x)$  – непрерывны на  $[a; b]$  и дифференцируемы на  $(a, b)$ , при этом  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$

Пусть выполняется:

$$1. f(a) = g(a) = 0$$

$$2. \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ и он } = A$$

$$\text{Т.е. } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ Читается справа на лево. Обратно неверно.}$$

$$\text{Доказательство. } \square x \in a; b] \text{ По теореме Коши } \exists c(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$$

Если  $x \rightarrow a \Rightarrow c(x) \rightarrow a$  (По теореме о двух милиционерах)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f'(t)}{g'(t)} = A \quad \square$$

**Замечание 2.11.** Справедлив правосторонний вариант этой теоремы  $x \rightarrow b \quad f(b) = g(b) = 0 \quad g'(x) \neq 0$

$$0 \quad \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Примеры:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \cos(0) = 1 \text{ (в качестве доказательства это не законно, т.к. получается цикл)}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +0} x^a \ln x = 0 \forall a > 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-a}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-ax^{-a-1}} = -\frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow 0} x^a = 0 \text{ (неопределённость } \frac{\infty}{\infty})$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

ДЗ (вычислить только по Лопиталю):

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{\cos x}{\cos x - 1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \text{ctg}^2 x \right)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(\sin x) - \sin^2 x}{x^6}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x - x^4} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[4]{x^3}}$$

**Теорема 2.10**  $\left(\frac{0}{0}\right)$ .  $\square f, g$  – дифференцируемы на  $(a, +\infty)$  (считаем  $a > 0$ )

$$\square \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

$$\square g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, +\infty)$$

$$\square \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow \exists \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

*Доказательство.* Сведём к предыдущей теореме.  $x = \frac{1}{t}$  – взаимнооднозначная замена.  $x \in (a, +\infty)$   $t \in$

$$\left(+0, \frac{1}{a}\right)$$

$$\square \phi(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) \quad \square \psi(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \phi(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +0} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

$$\phi'(t) = f'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right); \quad \psi'(t) = g'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\phi'(t)}{\psi'(t)} = \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

$$\text{Тогда, по предыдущей теореме } \exists \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\phi(t)}{\psi(t)} = A$$

$$\text{Но } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\phi(t)}{\psi(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

□

**Теорема 2.11**  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ .  $\square f, g$  – дифференцируемы на  $(a, b)$ , где  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ,  $g'(x) \neq 0$  на  $(a, b)$

$$\square \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = \infty \quad \square \exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

**Комментарий** Эта теорема объединяет в себе оба случая, когда  $a$  и  $b$  – конечны (2.9) и  $a$  и  $b$  – бесконечны (2.10).

Мы не предполагаем  $f(x) \rightarrow \infty, x \rightarrow a+0$ . Если  $f$  – ограничена, то предел равен 0 без всякого Лопиталья

*Доказательство. Случай 1:*  $\square A = 0$ . Воспользуемся языком последовательностей (языком Гейне). Пока-

$$\text{жем, что } \forall x_n \rightarrow a+0 \Rightarrow \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow 0$$

$$\text{По условию } \frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow 0, x \rightarrow a+0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists y_\varepsilon \in (a, b) : \forall x \in (a, y_\varepsilon) \quad \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$x_n \rightarrow a+0, \text{ то НСНМ } N_1 \quad x_n \in (a, y_\varepsilon)$$

$$\triangleleft \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(y_\varepsilon)}{g(x_n) - g(y_\varepsilon)} \cdot \frac{g(x_n) - g(y_\varepsilon)}{g(x_n)} + \frac{f(y_\varepsilon)}{g(x_n)} \stackrel{\text{КОШИ}}{=} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \cdot \left(1 - \frac{g(y_\varepsilon)}{g(x_n)}\right) + \frac{f(y_\varepsilon)}{x_n}$$

$$c_n \in (x_n, y_\varepsilon) \subset (a, y_\varepsilon)$$

$$g(x_n) \rightarrow \infty, y_\varepsilon - \text{как бы фиксировано.} \Rightarrow \exists N_2 : \forall n \geq N-2 \quad \left| \frac{g(y_\varepsilon)}{g(x_n)} \right| < 1 \& \left| \frac{f(y_\varepsilon)}{f(x_n)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left| \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \right| < \frac{\varepsilon}{4} \cdot (1+1) + \frac{1}{2} = \varepsilon \text{ Это и означает } \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Случай 1 доказан}$$

$$\text{Случай 2 } \square A \neq 0 - \text{конечно} \quad \triangleleft h(x) = f(x) - Ag(x)$$

$$\text{quad} h'(x) = f'(x) - Ag'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} - A \right) = 0$$

$$\text{Таким образом к } \frac{h(x)}{g(x)} \text{ можно применить случай 1}$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{h(x)}{g(x)} = 0 \iff \exists \lim_{x \rightarrow a+0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} - A \right) = 0 \iff \exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A \text{ ч.т.д.}$$

$$\text{Случай 3 } A = \infty. \text{ Т.е. } \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty \Rightarrow \exists \text{ правосторонние окрестности точки } a \text{ (} a, a+\delta \text{), в которых}$$

$$f'(x) \neq 0 \text{ (Иначе } \exists x_n \rightarrow a : f'(x_n) = 0 \Rightarrow \text{поменяем роли } f \text{ и } g \text{ местами } \frac{f'(x_n)}{g'(x_n)} = 0 \nrightarrow \infty) \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{g(x)}{f(x)} =$$

$$0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

□

**Замечание 2.12.** 2.11 не обратима  $\exists \frac{f}{g} \nRightarrow \frac{f'}{g'}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1'}{\alpha} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^x \ln a} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-h)}{e^x} \ln^n a = 0 \quad h = \lceil \alpha \rceil + 1$$

## 2.6 Исследование функции на $\max$ и $\min$ с помощью производных

1. Если  $x_0$  – точка  $\max$  или  $\min \Rightarrow$  по теореме Ферма  $f'(x_0)$  (критические точки функции)
2.  $f(x_0) = -\max \Rightarrow$  производная меняет знак с  $+$  на  $-$
3.  $f(x_0) = -\min \Rightarrow$  производная меняет знак с  $-$  на  $+$
4.  $f(x)$  задано на отрезке. Возможен случай, когда  $\max$  или  $\min$  достигается в концевых точках, при этом производная не обязана равняться нулю. Решение – отдельно посмотреть значения функции на концах промежутка.

$$y = x^2(x - 4)$$

$$y' = 2x(x - 4) + x^2 = x(2x - 8 + x) = x(3x - 8) \text{ Критические точки } y' = 0 \iff x = 0 \vee x = \frac{8}{3}. \text{ Смотрим на}$$

возрастание/убывание:  $0 - \max \quad \frac{8}{3} - \min$

**Определение 2.9.**  $P(x)$  – многочлен

$x_0$  – корень кратности  $m$

$$P(x) = (x - x_0)^m \cdot Q(x), \text{ где } Q(x_0) \neq 0$$

$$P(x_0) = P'(x_0) = \dots = P^{(m-1)}(x_0) = 0 \quad P^{(m)}(x_0) \neq 0$$