Конспект по Математическому Анализу

Коченюк Анатолий 11М

Глава 1

Производные высших порядков

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$

$\sqsubset$ f –дифференцируема на $(a; b)$ $\quad \exists f'$ также дифференцируема на (a, b) $\quad (f')' = f''$ это называется двойной производной

Замечание 1.1. *Из дифференцируемости $\implies$ непрерывность, т.е. $\exists (f')' \implies f'$ – непрерывна $\implies$ в итоге исходная функция $f' \in C^1(a; b)$, т.е. была непрерывно дифференцуруема (гладкая)*

Аналогично по индукции определяется n-ая производная (производная n-го порядка) от f $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, если правая часть имеет смысл

Обозначения:

- f^n – Лагранж
- $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ – Лейбниц
- $D^n f$ – Коши ($D :^f \to f'$ оператор дифференцирования)

Если n мало, то часто пишут нужное количество чёрточек f'', p'''. Аналогия с римскими цифрами I, II, III, иногда пишут f^{IV}, f^V

Определение 1.1. *Функция f называется n раз дифференцурумеой на множестве $E \in \mathbb{R}$, если она n раз дифференцируема в каждой точке E*

Если f n раз дифференцируема на множестве E и $f^{(n)}$ – непрерывна, то говорят, что f n раз непрерывно дифференцируема на E, Класс $C^n(E)$ (C^n – гладкая)

Замечание 1.2. *Из n раз дифференцируемости $\implies$ все $f^{(k)}, k = \overline{1, n-1}$ – непрерывны, т.е. $f \in C^k(E)$*

Кстати $f^0 = f$ (0-ая производная) $C = C^0$

Определение 1.2. *Функция f называется бесконечно дифференцируемой на E, если в $\forall x \in E \exists$ производные всех порядков*

Класс таких функция называется $C^\infty(E)$

$e^x, \sin x, \cos x \in C^\infty(\mathbb{R})$

$\sqrt{x}, \ln x \in C^\infty(0; +\infty)$

Определение 1.3. *f называется бесконечное число раз непрерывно дифференцируемой, если производная любого порядка существует и непрерывна*

Ясно, что классы $C^n(E)$ "уменьшаются" с ростом n

Лемма 1.1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad C^n(E) \supset C^{n+1}(E) \supset C^\infty(E)$, *причём все включения строгие*

Доказательство. Предъявим функцию $f_n : f_n \in C^n(\mathbb{R})$, но $f_n \notin C^{n+1}(\mathbb{R})$, т.е. $f_n^{(n)}$ – не дифференцируема

Заведём последовательность функций $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} & , x > 0\,(\geqslant) \\ 0 & , x \leqslant 0\,(<) \end{cases}$

Очевидно $f_n' = f_{n-1}, n \in \mathbb{N}$

$n = 0 \quad f_0(x) = \begin{cases} x, x > 0 \\ 0, x \leqslant 0 \end{cases}$

$f_0 \notin C^1(\mathbb{R})$, у неё в 0 разрыв 1-го рода $f_0'(-0) = 0, f_0'(+0) = 1$

Таким образом $d_n^{(n)} = f_0 \in C(\mathbb{R})$, но $f_n^{(n+1)} = f_0' \notin C(\mathbb{R})$ □

1.1 Дифференциал f

$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$

$df = f'(x_0)dx \quad df(x_0, dx) = f'(x_0)dx$

или $(df(x_0))(dx) = f'(x_0)dx$

дифференциал – линейная функция от приращения $\Delta x = dx$ – это один аргумент

точка x_0 – параметр

$f'(x_0) = \frac{df(x_0,dx)}{dx}$ – это не зависит от dx

$\frac{df}{dx} = f'(x)$

Определение 1.4 (Дифференциал n-го порядка). $\sqsupset$ f *– n раз дифференцируема в* $x_0 \in E$ $(f : E \to \mathbb{R})$ *Величина*

$$d^n f(x_0, dx) = f^{(n)}(x_0)dx^n$$

называется дифференциалом n-го порядка в точке x_0

$dx^n = (dx)^n = dx \cdot dx \cdot \ldots \cdot dx \quad dx$ *– единый символ*

$d(x^n) = nx^{n-1}dx$

Замечание 1.3. *Дифференциал – это обычное число т.е. это числовая функция*

Теорема 1.1 (Теорема об арифметических действиях со старшими производными). $\sqsupset$ $f, g : (a; b) \to \mathbb{R}$ *и n раз дифференцируемы в* $x_0 \in (a; b)$. *Тогда*

1. $\forall \alpha\beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha f(x) + \beta g(x))^{(n)} |_{(x_0)}= \alpha f^{(n)}(x_0) + \beta g^{(n)}(x_0)$

2. *Формула Лейбница* $(fg)^{(n)} |_{x=x_0}= \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x_0)g^{(n-k)}(x_0)$

Доказательство. (по индукции)

$n = 1 \quad$ всё известно $(fg)' = f'g + fg'$

$n \to n + 1$ п.1 – очевиден

$(\alpha f + \beta g)^{(n+1)} = \left((\alpha f + \beta g)^{(n)}\right)' = (\alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)})' = \ldots$

$(fg)^{(n+1)} = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} = f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} = f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} + \sum\limits_{i=1}^{n} C_n^{i-1} f^{(i)} g^{(n-i+1)} + \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} = f g^{(n+1)} + f^{(n+1)} g + \sum\limits_{k=1}^{n} \left(C_n^{k-1} + C_n^k\right) f^{(k)} g^{(n-k+1)} = f g^{(n+1)} + f^{(n+1)} g + \sum\limits_{k=1}^{n} \left(C_{n+1}^k\right) f^{(k)} g^{(n-k+1)} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n-k+1)}$ □

Примеры:

1. $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha \cdot (\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1)x^{\alpha - n}$

2. $\sqsupset \alpha = -1 \quad \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ Дз – проверить В

3. $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ ДЗ – проверить

4. $(a^x)^{(n)} = ((a^x)')^{(n-1)} = (a^x \ln a)^{(n-1)} = a^x (\ln a)^n$

5. $L =< \cos, \sin >= \{\alpha \cos x + \beta \sin x \mid \alpha, \beta, x \in \mathbb{R}\}$
   $P : L \to L$ "поворот на 90 градусов против часовой стрелки"
   $(P(\cos))(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \quad (P(\sin))(x) = \sin(x + \pi/2)$
   $\sin^{(n)} = P^n(\sin) \qquad \cos^{(n)} = P^n(\cos)$

1.2 Формула Тейлора

$\sqsupset T_n(x)$ какой-то многочлен степени $n \in \mathbb{Z}_+$
$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x - x)^k$
$n = 1 \quad T_n(x) = ax + b = a(x - x_0) + b - ax_0 \qquad a_1 = a \quad a_0 = b + ax_0$
$n \to n + 1 \quad T_{n+1}(x) = P_n(x) \cdot (x - x_0) + T_{n+1}(x_0) \quad P_n$ – какой-то многочлен, на который мы делим
$P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k(x - x_0)$ всё
$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x}$
$T_n^{(m)} = \sum\limits_{k=m}^{n} a_k k(k-1) \cdot (k - m + 1)(x - x_0^{k-m})$
$T_n^{(m)}(x_0) = a_m m(m-1) \dots 1 = a_m \cdot m!$
$a_m = \frac{T_n^{(m)}(x_0)}{m!}$ – готовая формула для a_m
Т.О.

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{T_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$\sqsupset f$ – произвольная функция $(a; b) \to \mathbb{R}$
$\sqsupset f$ – n раз дифференцируемая а $x_0 \in (a; b)$
Конечно, формула

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

неверна, но оказывается, что она даёт хорошее приближение к функции f

Определение 1.5. *Многочленом Тейлора степени n для функции f в точке x_0 называется*

$$T_{n,x_0}(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)$$

T – Тейлор Taylor

Определение 1.6. *Остаток $R_{n,x_0}f\,(x) = f(x) - T_{n,x_0}f(x)$ (остаточный член)*

Определение 1.7. *Формула Тейлора*
$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x)$
Пока что эта формула полностью бессодержательная и просто является переписанным определением остатка
Содержание появляется, когда что-то говориться о R_{n,x_0} в смысле малости, ограниченности и т.п.

Существуют разные форму записи этого остатка: Пеано, Лагранжа и Коши.

Лемма 1.2. $\forall m = \overline{0, n} \quad f^{(m)}(x_0) = T_{n,x_0}^{(m)}(x_0)$

Доказательство. было доказано, что $T(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k \implies T^{(m)}(x_0) = m!a_m$

Из этого $\implies T_{n,x_0}^{(m)}f(x_0) = a_m \cdot m! = f^{(m)}(x_0) \qquad m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$ □

Замечание 1.4. *Существует единственный многочлен степени n, обладающим свойством из леммы выше (для данной функции $f(x)$) и именно он и есть многочлен Тейлора*

Теорема 1.2 (Формула Тейлора - Пеано). *$\sqsupset n \in \mathbb{N}, \sqsupset f$ – n раз дифференцируема в $x_0 \in (a;b)$. Тогда*

$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + o\left((x-x_0)^n\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right)$$

т.е. $R_{n,x_0}f(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$

Доказательство. Для упрощения записи пишем $T(x)$ вместо $T_{n,x_0}f(x)$ и $R(x)$ вместо $R_{n,x_0}f(x)$

Дано $R(x) = f(x) - T(x)$ и по лемме $f^{(m)}(x_0) = T^{(m)}(x_0) \forall m = \overline{0,m}$

т.е. $R^{(m)}(x_0) = 0 \forall m = \overline{0,n}$

Достаточно доказать такую лемму

Лемма 1.3. *if $R^{(m)}(x_0) = 0 \quad \forall m = \overline{0,n} \implies R(x) = o\left((x - x_0^n\right)$*

Из этой Леммы очевидно следует теорема

Доказательство. $n = 0 \quad R(x) = f(x) - T(x) = f(x) - f(x_0) \quad T_{0,x_0}f(x) = f(x_0)$

т.к. f – непрерывна в 0 $f(x) - f(x_0) = 0(1), x \to x_0$ (по определению)

(0 - дифференцируемость – непрерывность)

$n = 1 \quad R(x) = f(x) - T_{1,x_0}f(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = o(x-x_0)$ (по определению дифференцируемости в x_0)

$n \to n+1 \sqsupset R_(x) = 0\left((x-x_0)^m\right)$, т.е. $\frac{R(x)}{(x-x_0)^m} \to 0 \quad x \to x_0 (x \neq x_0) \quad m = \overline{0,n}$

Надо показать, что $R(x) = o\Big((x-x_0)^{n+1} \iff \frac{R(x)}{(x-x_0)^{n+1}}\Big) \to 0$, при $x \to x_0$

Воспользуемся языком последовательностей (языком Гейне)

$\sqsupset x_i \to x_0$ и $x_i \neq x_0$ – произвольная последовательность

Считаем x_i лежит между x_0 и x

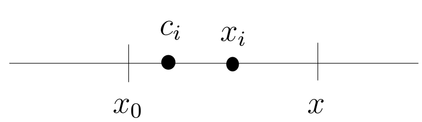

Рис. 1.1: xs

$\lhd \frac{R(x_i)}{(x_i-x_0)^{n+1}} = \frac{R(x_i)-R(x_0)}{(x_i-x_0)^{n+1}} = (*)$

Формула Лагранжа $R(x_i) - R(x_0) = R'(C_i)(x_i - x_0) \quad$ (c_i между x_0 и x_i) $\quad |c_i - x_0| \leqslant |x_i - x_0|$

$(*) = \frac{R'(C_i)(x_i-x_0)}{(x_i-x_0)^{n+1}} = \frac{R'(C_i)}{(x_i-x_0)^n} \to 0, x \to x_0$

$\left|\frac{R(x_i)}{(x_i-x_0)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{|r'(C_i)|}{|x_i-x_0|^n} \leqslant \frac{|R'(C_i)|}{|c_i-x_0|^n}$

$R'(c_i)$ – уже удовлетворяет индукционному предположению

R – $n+1$ раз дифференцируема $\implies \widetilde{R} = R'$ и .. дифференцируемо в x_0 и $\widetilde{R}^{(m)}(x_0) = 0, m = \overline{0,n} \implies \frac{\widetilde{R}(c_i)}{(c_i-x_0)^n} \to 0, c_i \to x_0$

□

□

Определение 1.8. *Формула Тейлора для $x_0 = 0$ называется формулой Маклорена*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$$

Замечание 1.5. *$\sqsupset$ выполнено условие теоремы и $\sqsupset$ $P_n(x)$ – это такой многочлен степени n : $f(x) = P_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right) => P_n(x) = T_{n,x_0}f(x)$*

Иногда это замечание берут в качестве определения многочлена Тейлора

Если f – n раз дифференцируема в x_0(т.е. условие теоремы), то оба определения совпадают

но, если f – не дифференцируема, то второе определение шире

Пример 1.1. $f(x) = \begin{cases} 0 & ,x \notin \mathbb{Q} \\ x^n, x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

f – непрерывна на $\mathbb{R}$ (непрерывна только в 0), в остальных точках разрыв

Т.е. это означает, что f – не дифференцируема при $x \neq 0$

Но в 0 $\nexists f''$

$f''(0) = \lim \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-0}$ *– $\nexists$, т.к. $f'(x)$ – не определена*

$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \begin{cases} 0 & ,x \notin \mathbb{Q} \\ x^{n-2} & ,x \in \mathbb{Q} \end{cases} = 0$

У f отсутствует $T_{2,0}f(x) \implies T_{\geqslant 2,0}f(x)$ тоже не существует

Но $P_{n-1}(x)$ в смысле второго определения существует $P_{n-1} \equiv 0$

$f(x) = 0 + o(x^{n-1}) \iff$ сама f есть $p(x^{n-1})$

Теорема 1.3 (Глобальная формула Тейлора)**.** *$\sqsupset f$ $\quad n+1$ раз дифференцируема на $(a;b)$*

$\sqsupset \phi$ – произвольная функция, 1 раз дифференцируемая на $(a;b)$ и $\phi' \neq 0$ на $(a;b)$ $\quad \sqsupset x_0 \in (a;b)$ Тогда $\forall x \in (a;b)$

$\exists C_x$, лежащие между x_0, x :

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{\phi(x)-\phi(x_0)}{\phi'(c_x)n!} f^{(n+1)}(c_x)(x-c_x)^n$$

Доказательство. На $(a;b)$ рассмотрим функцию

$$F(t) = f(x) - T_{n,x}f(t) = f(x) - \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^4\right) \quad x$$

– как бы фиксируется, а t – как бы меняется

f – $(n+1)$ раз дифференцируема на $(a;b) \implies F(t)$ – – 1 раз дифференцируема

$$F'(t) = = -\left(f'(t) + (-f'(t)) + f''(t)(x-t) + f''(t)(x-t)(-1) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}(-1) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x\right.$$

Применим к F и ϕ формулу Коши. $\exists C_x$ между x_0, x : $\frac{F(x)-F(x_0)}{\phi(x)-\phi(x_0)} = \frac{F'(C_x)}{\phi'(C_x)}$

Заметим: $F(x) = F(t)\mid_{t=0} = 0; \quad F(x_0) = f(x) - T_{n,x_0}f(x) = R_{n,x_0}f(x)$

$\frac{0-R_{n,x_0}f(x)}{\phi(x)-\phi(x_0)} = \frac{\left(-\frac{f^{(n+1)}(C_x)}{n!}\right)(x-C_x)^n}{\phi'(C_x)}$

$R_{n,x_0}f(x) = \frac{\phi(x)-\phi(x_0)}{\phi'(C_x)n!} \cdot f^{(n+1)}(C_x) \cdot (x-C_x)^n$ $\square$

Следствие 1.1.

1. *$\sqsupset \phi(t) = x - t \quad \phi(x) = 0$ и $\phi(x_0) = x - x_0 \quad \phi'(t) = -1$*

   $R_{n,x_0}f(x) = \frac{-(x-x_0)}{(-1)n!} f^{(n+1)}(C_x) \cdot (x-C_x)^n = \frac{f^{(n+1)}(C_x)}{n!}(x-x_0)(x-C_x)^n$

   $\sqsupset \theta \in [0;1]: \quad (x-C_x) = (1-\theta)(x-x_0) \quad \theta = \frac{C_x-x_0}{x-x_0} \quad C_x = x_0 \; \theta = 0 \quad C_x = x \; \theta = 1$

   $R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(C_x)}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}$, *где* $\theta = \frac{C_x-x_0}{x-x_0} \in [0;1]$

   Остаточный член в формуле Коши

2. *$\sqsupset \phi(t) = (x-t)^{n+1} \quad \phi(x) = 0, \quad \phi(x_0) = (x-x_0)^{n+1} \quad \phi'(t) = -(n+1)(x-t)^4$*

   $R_{n,x_0} = \frac{0-(x-x_0)^{n+1}}{-(n+1)(x-C_x)^n n!} f^{(n+1)}(C_x) \cdot (x-C_x)^n = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

3. *Формула Лагранжа – частный случай формулы Тейлора-Лагранжа для $n = 0$*

   $f(x) - f(x_0) = f'(C_x) \cdot (x-x_0)$

4. *$\sqsupset$ известно, что $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M$ на $(a;b)$*

   Тогда $|R_{n,x_0}f(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}$

5. *Сравним Тейлора-Пеано и Тейлора-Лагранжа*

   Из Пеано $R_{n,x_0}f(x) = O\left((x-x_0)^{n+1}\right)$ (в случае, если f^{n+1} локально ограничено в x_0)

   $O\left((x-x_0)^{n+1}\right) = o\left((x-x_0)^n\right)$, но $o\left((x-x_0)^n\right) \neq O\left((x-x_0)^{n+1}\right)$

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(C_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

6. *Снова рассмотрим в качестве $f(x) = T_n(x)$ – многочлен Лагранжа*

   т.к. $T_n^{(n+1)}(x) \equiv 0$

   Из формулы Тейлора-Лагранжа: $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{T_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + 0$

7. *f – ∞ число раз дифференцируема на $(a;b)$ $\quad f \in C^\infty(a;b)$*

   $\sqsupset$ все $f^{(k)}(x)$ равномерно ограничено на $(a;b) \longleftrightarrow \exists M : \left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant M \forall k \in \mathbb{Z}^+, \forall x \in (a;b)$

   $|R_{n,x_0}f(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1} \quad \forall n$

   $\implies |f(x) - T_{n,x_0}f(x)| = |R_{n,x_0}f(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1} \to 0, n\to\infty$, *т.к.* $\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, n \to \infty$

   $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_{n,x_0}f(x)$

   $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

   <u>Ряд Тейлора</u>

   Любую n раз дифференцируемую функцию можно разложить с помощью формулы Тейлора-Пеано

   Но не любую, даже ∞ раз дифференцируемую функцию можно представить рядом Тейлора

   Если функция в x_0 совпадает со своим рядом Тейлором, они называются аналитическими

   $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

   $f \in C^\infty(\mathbb{R}), f^{(k)}(0) = 0 \quad T_{n,0}f(x) \equiv 0 \implies$ *ряд Тейлора* $\equiv 0$

1.3 Преобразование уравнений и неравенств

(1) $f(x)$ $\qquad$ (2) $g(x) = 0$

Если любой корень (1) является корнем (2), то (2) – следствие (1) (корни не теряются) $f(x) \implies g(x)$

Если любой корень (1) является корнем (2) и любой корень (2) является корнем (1), то уравнения называются равносильными $f(x) \iff g(x)$

корни не теряются и лишние не появляются

Типичные преобразования:

<u>приведение подобных слагаемых</u>

<u>$f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$</u>

$f(x) = g(x)$

приведение расширяет ОДЗ, добавление же, наоборот, сужает

$f + h = g + h \iff \begin{cases} f = g \\ \text{ОДЗ} \end{cases}$

<u>Деление на общий множитель</u> Не делим, а расщипляем

<u>$fh = gh \iff fh - gh = 0 \iff$</u> $(f-g)h = 0$

Когда можно "делить"?

Когда область определения функции h это всё $\mathbb{R}$ и $h(x) \neq 0 \forall x$

<u>Возведение в квадрат</u>

<u>$f(x) = g(x) \implies f^2(x) = g^2(x)$</u>

1.4 Формулы (ряды) Тейлора для элементарных функций

1. $f(x) = e^x$

   Ясно, что $(e^x)^{(k)} = e^x \quad (e^x)^{(k)}\mid_{x=0}= 1$

   Формула Тейлора-Пеано $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + o(x^n)$

   Формула Тейлора-Лагранжа $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \theta \in [0, x], x > 0 \quad$ (либо $x \in [x, 0]$, если $x < 0$)

   или $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \theta \in [0, 1]$

   Из этого $\left| e^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{e^{\theta x}\cdot|x|^{n+1}}{(n+1)!}$

   Если x – фиксирована $\frac{e^{\theta x}\cdot|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, n \to +\infty$

   $\implies \left| e^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \to 0, n \to +\infty \iff e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (по определению ряда) – аналитическая функция

   в частности $x = 1 \quad e = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

   Теорема 1.4. *e – иррациональное*

   Доказательство. Пусть не так $\implies e = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$

   Т.к. $2 < e < 3$ – известная грубая оценка, то $e \notin \mathbb{Z}$

   $\implies n \geqslant 2$

   Пишем Формулу Тейлора-Лагранжа $e = \frac{m}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}\cdot 1^{n+1}$

   $(n+1)!m = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \frac{e^\theta}{n+1} \implies \frac{e^\theta}{n+1} \in \mathbb{Z}$, что невозможно, т.к. $n+1 \geqslant 3 \quad 1 < e^\theta < 3$ □

2. $f(x) = \sin x$

   $f^{(k)}(x) = (D^k \sin)x = \sin(x + \frac{\pi k}{2})$

   $L =< \sin x, \sin x >= \{a \cos x + b \sin x | a, b \in \mathbb{R}\}$ – линейное пространство

   $L \to \mathbb{R}^2 \quad a \cos x + b \sin x \to (a, b)$

   $D : L \to L$

   $D \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$

   $(\sin x)^{(m)} = \sin(x + \frac{\pi m}{2} \quad x_0 = 0$

   $(\sin x)^{(2k)}\mid_{x=0}= \sin(0 + \pi k) = 0$

   $(\sin x)^{(2k+1)}|_{x=0} = \sin(\frac{\pi}{2} + \pi k) = (-1)^m$

   $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2x+1} + O(x^{2n+1})$ ФТП

   $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \frac{\sin\theta}{(2x+3)!}x^{2n+3} \quad \theta \in [0, 1]$ (формулы как бы до (n+1) просто (n+1)-ое слагаемое не учитывается)

   Т.к. $\left| \frac{\sin\theta x\cdot x^{2n+3}}{(2n+3)!} \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \to 0, n \to \infty$

   Т.о. $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$

3. $f(x) = \cos x$ – всё по аналогии

   $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(2^{2n})$ ФТП

   $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \frac{\cos\theta x}{(2n+2)!} x^{2n+2}$

   ФТЛ $\left|\cos x - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}\right| \leqslant \left|\frac{\cos\theta x}{(2n+2)!} x^{2n+2}\right|$

   $\cos x$ – аналитическая функция

   $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$

   $e^{ix} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(i)^k}{k!} x^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{i(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \cos x + i \sin x$

   $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

   $e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a(\cos b + i \sin b)$

   $\boxed{e^{\pi i} = -1}$

4. $f(x) = \ln(1+x)$

   $f'(x) = \frac{1}{1+x}$

   $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$

   $f^{III}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$

   $f^{IV} = -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4}$

   $f^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$

   $f^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot (n-1)! \quad x_0 = 0$

   $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n + \frac{(-1)^{n+2} n!}{(1+\theta x)^{n+1} \cdot (n+1)!} x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \frac{(-1)^{n+2} x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}(n+1)}$ ФТЛ

   ФТП $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + o(x^n)$

   При каких x ряд Тейлора будет сходиться к $\ln(1+x)$

   $|R_n(x)| = \left|\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}(n+1)}\right| \to 0, n \to \infty$

   $\theta \in [0,1]$

   $x = 1 \quad \left|\frac{1}{(1+\theta)^{n+1}(n+1)}\right| \to 0$

   $\sqsupset x \in [0,1) \quad |R_n(x)| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} < \frac{x^{n+1}}{n+1} \to 0, n \to \infty$

   $x = 1 \quad$ ряд $= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots = \ln 2 \quad R_N = \frac{1}{n+1} \to 0$

   $x > 1 \quad |R_n(x)| \to \infty$ ряд расходится $\frac{x^n}{n} \not\to 0$

   Т.о. сходимость есть в $x \in [0,1]$

   $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \frac{(-1)^n n!}{(1+c)^{n+1} n!} \cdot x \cdot (x-c)^n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}$

   $|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}$

   $0 < \frac{1+\theta}{1+\theta x} < 1 \Longleftrightarrow 1 - \theta < 1 + \theta x \Longleftrightarrow 0 < \theta x + \theta = \theta(x-1)$ yes!

   Фокус авансом $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$

   $\sqsupset |x| < 1$

   $\ln(1+x) = \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{1+t} = \int\limits_0^{x} (1 - t + t^2 - t^3 \ldots) dt = (t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4})|_0^x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$

5. $f(x) = (1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$

   $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$

   $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$

   $f^{(k)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

   $f^{(k)}(0) = \alpha\dots(\alpha-k+1)$

   Если $\alpha \in \mathbb{N}$, то есть некторое N $f^{(N)}(x) = 0$

   А если α – ненатуральное ненулевое число, то производная считается бесконечное число раз

   $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} \cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

   $\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + \frac{(-1)(-1-1)}{2!}x^2 + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!}x^3 + \dots = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)x^n + o(x^n)$

   $\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = 1 - \frac{2}{1!}x + \frac{-2(-3)}{2!}x^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}x^3 + \dots + \frac{(-2)\dots(-n-1)}{n!}x^n + o(x^n) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots + (-1)^n(n+1)x^n + o(x^n)$

   $\frac{1}{(1+x)^2} = -\left(\frac{1}{1+x}\right) = (1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)x^n + \dots)' = 1 - 2x + 3x^2 + \dots + (-1)^{n+1}nx^{n-1} + \dots$

   $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \dots = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$

6. $f(x) = \operatorname{tg} x$

   $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7)}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + O(x^8)} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7)}{1+t} = (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7))(1 + t + t^2 + O(t^3) + (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7))(1 + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}) + (1 + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720})^2 + o(x^5)) = (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7))(1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^4}{4} + o(x^5)\right) = (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7))(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5) = (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}) + \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12}\right) + \left(\frac{5}{24}x^5\right) + o(x^5) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$

   до $o(x^5)$

7. Гиперболические функции

   $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

   $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

   $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$

   $\operatorname{ch}(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos x$

   $\operatorname{sh}(ix) = i \sin x$

   Если f – аналитическая $\iff f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

   $f(\varepsilon) = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots = a_0 + a_1\varepsilon$

   С другой стороны $f(\delta x) = f(0) + f'(0) \cdot \delta x + o(\delta x)$

   Сравнивая $f'(o) = a_1 \quad f(\varepsilon) = f(0) + f'(0)\varepsilon]$

8. $\operatorname{arctg} x$

   $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

   $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ – степенной ряд

   интервал сходимости $|x - x_0| < R$ – радиус сходимости. не запрещено $R = \pm\infty$

   Теорема

Теорема 1.5. *Степенной ряд, внктри интервала сходимости, можно почленно дииференцировать и интегрировать, при этом интервал сходимости не меняется*

1. $f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_k(x-x_0)^{k-1}$

   $\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}$

ДЗ:

1. $\frac{1}{1+x^2} = \ldots$ разложить в ряд по формуле геометрической прогрессии
2. $\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \ldots$

1.5 Выпуклость функций

Определение 1.9. $f :< a, b >\to \mathbb{R}$

Тогда

1. *f называется выпуклой вниз (или просто выпуклой) , если $\forall x_1, x_2 \in< a, b >$ и $\forall t \in (0, 1)$ выполняется* $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \qquad (1^{\leqslant})$

2. *f называется выпулокй вверх (или вогнутой), если выполняется противоположное неравенство* $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \qquad (1^{\leqslant})$

Если неравенства строгие и $x_1 \neq x_2$, то говорят, что f строго выпуклая или строго вогнутая

Так как переменные x_1 и x_2 входят в неравенство симметрично, то можно всегда считать (для удобства) , что $x_1 < x_2$

1.5.1 Геометрический смысл

$\sqsupset x_1, x_2 \in< a, b >$ и $x_1 < x_2$

$\sqsupset x = tx_1 + (1-t)x_2 \implies x = t(x_1 - x_2) + x_2 \implies t = \frac{x-x_2}{x_1-x_2}$

Тогда $1 - t = \frac{x_1-x}{x_1-x_2}$

$(1^{\leqslant}) \iff f(x) \leqslant \frac{x-x_2}{x_1-x_2} f(x_1) + \frac{x_1-x}{x_1-x_2} f(x_2)$

$x_1 < x < x_2$

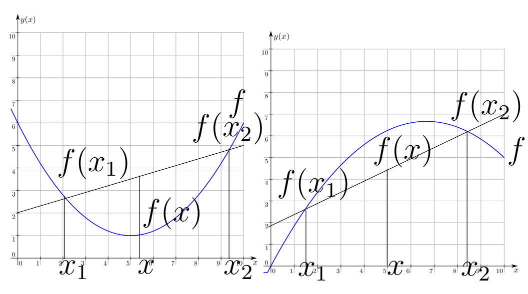

Рис. 1.2: Выпуклость

Выпуклость вниз означает, что график функции лежит не выше хорды, соединяющей точки графика. Или график функции, рассматриваемый между точками x_1, x_2 лежит ниже хорды

Аналогично, выпуклость вниз геометрически означает, что дуга графика лежит не ниже (выше) хорды, соединяющей точки графика.

Примеры:

1. $f(x) = kx + b$ – аффинная функция. Нестрого выпукла и вниз и вверх одновременно

2. $f(x) = x^2$ строго выпукла на $\mathbb{R}$

   $(tx_1 + (1-t)x_2)^2 = t^2x_1^2 + (1-t)^2x_2^2 + 2t(1-t)x_1x_2$

   хотим $\leqslant tx_1^2 + (1-t)x_2^2$

   $<\ldots>$

Теорема 1.6. *Пусть f, g – выпуклы (или строго выпуклы). $\alpha > 0$ Тогда*

1. *$f + g$ – выпукла (строго)*
2. *αf – выпукла (строго)*
3. *$-f$ – вогнута*

Теорема 1.7. *$\sqsupset f$ – выпукла на $< a, b >$ и $x_1 < x_2$*
Тогда на $< a, b > \setminus [x_1, x_2]$ выпукла
$f(x) \geqslant \frac{x-x_2}{x-1-x_2} f(x_1) + \frac{x_1-x}{x_1-x_2} f(x_2)$
Т.е. концы хорды на рисунке лежат ниже графика f

Доказательство. $\lhd$ случай $a < x < x_1 < x_2$
Запишем $2^{\leqslant}$ заменим $x \leftrightarrow x_1$
$f(x_1) \leqslant \frac{x_1-x_2}{x-x_2} f(x) + \frac{x-x_1}{x-x_2} f(x_2)$ Домножим на $(x - x_2) > 0$
$(x - x_2)f(x_1) \geqslant (x_1 - x_2)f(x) + (x - x_1)f(x_2)$
$(x_2 - x_1)f(x) \geqslant (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2)$
$f(x) \geqslant \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$ чтп
Второй случай доказывается аналогично □

Теорема 1.8 (О трёх хордах)**.** *$\sqsupset f$ – выпуклая на $< a, b >$*
$x_1, x_2, x_3 \in < a, b >$ *и* $x_1 < x_2 < x_3$
Тогда $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ *(Если f – строго выпукла, то неравенства строгие)*

Доказательство. □

ДЗ:

1. Доказать теорему
2. Доказать выпуклость:
   (a) $x^n, n \in \mathbb{N}, x > 0$
   (b) e^x на $\mathbb{R}$
3. Доказать неравенства
   (a) $\frac{1}{2}(x^n + y^n) \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$
   (b) $\frac{e^x+e^y}{2} > e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)} \forall x \neq y; x, y > 0; n \in \mathbb{N}$

Теорема 1.9 (Об односторонней дифференцируемости выпукллых функций)**.** *$\sqsupset f$ – выпукла на промежутке $< a; b >$*
Тогда $\forall x_0 \in (a; b) \quad \exists f'_-(x_0), f'_+(x_0)$ лево и правосторонние производные
Причём $f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0)$

Доказательство. По теореме о 3-х хордах
$\frac{f(x_2)-x(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-x(x_4)}{x_3-x_4} \leqslant \ldots$
$\lhd g(\xi) = \frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}, \xi \in (a, b)$ и $\xi \neq x_0$
$g(\xi) \uparrow \Longleftarrow$ Теорема о трёх хордах
$\sqsupset \xi < x_0 < \eta \implies \frac{f(\xi)-f(\eta)}{\xi-x_0} \leqslant \frac{f(\eta)-f(x_0)}{\eta-x_0}$(*)

$\sqsupset \eta$ – фиксированная ξ – меняется $\implies g(\xi)\uparrow$ и ограничена сверху числом $g(\eta) \implies \exists \lim\limits_{\xi\uparrow x_0-0} g(\xi) = f'_-(x_0)$ чтд

Аналогично фиксируем ξ и меняем $\eta \implies g(\eta)\downarrow$ и ограничена снизу числом $g(\xi) \implies \exists \lim\limits_{\eta\downarrow x_0+0} g(\eta) = f'_+(x_0)$

В (*) $\xi\uparrow x_0, \quad \eta\downarrow x_0 \implies f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0)$ □

Следствие 1.2. *Если f выпукла на $< a; b >$, то она непрерывна на $(a; b)$*

Доказательство. дифференцируемость $\implies$ непрерывность

$\sqsupset x_0 \in (a; b)$

Из левосторонней дифференцируемости $\implies$ левосторонняя непрервность в $x_0 \quad f(x) \to f(x_0), x\uparrow x_0$

Из правосторонней дифференцируемости $\implies$ правосторонняя непрерывность $f(x) \to f(x_0), x\downarrow x_0$

$\implies f$ – просто непрерывна в x_0 □

Замечание 1.6. *На концах промежутка могут быть разрывы*

$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2} & x \in (-1; 1) \\ 1 & x = \pm 1 \end{cases}$

f – выпукла, но не непрерывна

Но, кстати, если разрешить несобственные значения для $f'_\pm$

$\exists f'_+(-1) = -\infty, \exists f'_-(1) = +\infty$, т.е. сама производная существует

Теорема 1.10 (выпуклость и касательные). *$\sqsupset f$ – дифференцируема на $< a; b >$. Тогда f будет выпуклой в том и только в том случае, если $\forall x_0, x \in< a; b >$ выполняется $f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$*

График f лежит выше касательной

Доказательство. Необходимость:

$\sqsupset f$ – выпукла. Если $x > x_0$. Возьмём $x_0 < \eta < x$

По теореме 1.8 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{f(\eta)-f(x_0)}{\eta-x_0}$

$\sqsupset h\downarrow x_0$

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant f'_+(x_0) = f'(x_0)$ Т.к. f дифференцируема по условию

$\implies f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ чтп

Если $x < x_0$

$\sqsupset x < \xi < x_0$

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}$

$\sqsupset \xi\uparrow x_0$

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant f'_-(x_0) = f'(x_0) \implies f(x) - f(x_0) \geqslant f'(x_0)(x - x_0)$ чтп

Достаточность:

$\sqsupset f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in< a; b >$

$\sqsupset x_1 < x \leq x_2$ из $< a; b >$

$\begin{cases} f(x_1) \geqslant f(x) + f'(x)(x - x_1) \\ f(x_2) \geqslant f(x_0 + f'(x)(x - x_2) \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{f(x_1)-f(x)}{x-x_1} \geqslant f'(x) \\ \frac{f(x_2)-f(x)}{x-x_2} \leqslant f'(x) \end{cases} \implies \frac{f(x_2)-f(x)}{x-x_2} \geqslant \frac{f(x_1)-f(x)}{x-x_2}$

$(x - x_2)(f(x_2) - f(x)) \leqslant (x - x_1)(f(x_1) - f(x))$

$f(x)\left((x - x_1) - (x - x_2)\right) \leqslant (x - x_1)f(x_1) - (x - x_2)f(x_2)$

$f(x) \leqslant \frac{x-x_1}{x_2-x} f(x_1) + \frac{x_2-x}{x_1-x} f(x_2)$

Это неравенство из определения выпуклости $t = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ □

Замечание 1.7. *Если для $x \neq x_0$ неравенство в условии теоремы строгое $\implies f$ будет строго выпуклой*

Следствие 1.3. *$\sqsupset f$ – произвольная выпуклая функция на $< a; b >$. Тогда $\forall x_0 \in (a; b)$ по теореме 1.9 $\exists f'_\pm(x_0) \implies \exists$ лево и правосторонние касательные к f в точке x_0*

Утверждается, что график f Лежит выше $\forall$ односторонней касательной

(правой) $y = f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0)$

(левой) $y = f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0)$

Доказательство. Если $x_0 = a$ или $x_0 = b$, то это частичный случай теоремы 1.10

$\sqsupset x_0 \in (a; b)$

$\sphericalangle$ случаи $f\mid_{<a;x_0]}$ $\quad f\mid_{[x_0,b>}$ – оба выпуклые

По теореме 1.10 $\forall x \in <a; x_0] \quad f(x) \geqslant f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0)$

$\forall x \in [x_0, b> \quad f(x) \geqslant f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0)$

Теперь учтём $f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0)$ (Теорема 1.9)

$x \in [x_0, b> \quad f(x) \geqslant f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0) \geqslant f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0)$

Т.е. график лежит и выше левосторонней касательной

Аналогично $x \in <a; x_0] \quad f(x) \geqslant f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0) \geqslant f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0)$ чтп ☐

Определение 1.10. $\sqsupset f :<a; b> \to \mathbb{R}, \quad \sqsupset x_0 \in <a; b>$

прямая $y = l(x)$ называется опорной для функции f в точке x_0, если выполняется $f(x_0) = l(x_0)$ и $f(x) \geqslant l(x) \forall x \in <a; b>$

Если же $f(x) > l(x) \forall x \in <a; b> \setminus \{x_0\}$, то $l(x)$ называется строго опорной

Следствие 1.4. *Если f (строго) выпукла на $<a; b>$, то $\forall x \in <a; b> \exists$ (строго) опорная прямая*

ДЗ:

1. $\sqsupset f$ – выпуклая на $<a; b>$. Тогда прямая $l(x) = f(x_0) + k(x - x_0)$ будет опорной к f в точке x_0 в том и только том случае, когда $k \in \left[f'_-(x_0), f'_+(x_0)\right]$
2. $\sin x > \frac{2}{\pi}$ на $(0; \frac{\pi}{2}$
3. $\ln(1 + x) < x$ при $x > -1$ и $x \neq 0$
4. $\alpha > 1 \quad (1 + x)^\alpha > 1 + \alpha x \quad \forall x \geqslant -1, x \neq 0$

Теорема 1.11 (Дифференциальные критерии выпуклости)**.**

1. *$\sqsupset f$ – непрерывна на $<a; b>$ и дифференцируема на $(a; b)$*

   Тогда f (строго) выпукла вниз $\iff f'(x)$ (строго) монотонна возрастает на $(a; b)$

2. *$\sqsupset f$ непрерывна на $<a; b>$ и дважды дифференцируема на $<a; b>$. Тогда f выпукла вниз $\iff f''(x) \geqslant 0$ на $<a; b>$*

Доказательство. 1. $\implies$ По Теореме 1.10 f лежит выше касательной в любой точке. В $x_1 : f(x) \geqslant f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$

Возьмём $x = x_2 > x_1$

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geqslant f'(x_1) \quad (*)$

В точке $x_2 : f(x) \geqslant f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2)$

Возьмём $x = x_1 < x_2$

$-f'(x_2)(x_1 - x_2) \geqslant f(x_2) - f(x_1)$

$f'(x_2)(x2 - x_1) \geqslant f(x_2) - f(x_1) \implies f'(x_2) \geqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad (**)$

Из $(*)$ и $(**) \implies f'(x_1) \leqslant f'(x_2) \implies f' \uparrow$

Если f строго выпукла, то неравенство будет строгим

$\Longleftarrow$ $\sqsupset f'(x) \uparrow$ на (a, b)

Возьмём $a < x_1 < x < x_2 < b$. По Теореме Лагранжа $\exists c_1 \in (x_1, x)$ и $\exists c_2 \in (x, x_2) : \quad \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(x)$ и $\frac{f(x)-f(c_2)}{x-x_2} = f'(c_2)$

Т.к. $f' \uparrow$ и $c_2 > c_1 \implies f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$

Т.о. $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \quad (***) \iff f(x) \geqslant \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$ (см. теорему 10) А это определение выпуклости

(если $f \upuparrows$, то неравенство в $(**)$ строгое $\implies$ выпуклость строгая

2. f – выпукла вниз $\iff f' \uparrow$ на (a, b)

   По критерию монотонности $\iff (f')' \geqslant 0$ чтд

$\square$

Замечание 1.8. *В пункте 2 нельзя по аналогии с пунктом 1 сказать "Тогда и только тогда" Это неверно*
Контпример: $f(x) = x^4$ – срого выпуклая вниз функция, т.к. график оежит строго выше касательной. Но $f''(x) = 12x^2$ и $f''(0) = 0$
Однако из $f''(x) > 0$ строгая выпуклость вытекает

Примеры:

1. $f(x) = a^x \quad f'(x) = a^x \ln a \quad f''(x) = a^x \ln^2(x) > 0 \implies f$ – строго выпукла вниз
2. $f(x) = \log_a x \quad f'(x) = \frac{1}{x \ln a} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln a}$
   Если $a > 1 \implies \ln a > 0 \implies f''(x) < 0 \implies f$ – строго вогнута (выпукла вверх)
   Если $0 < a < 1 \implies \ln a < 0 \implies f''(x) > 0 \implies f$ – строго выпукла вверх

Определение 1.11. $\sqsupset f :< a; b > \to \mathbb{R}, x_0 \in (a; b)$ *Если:*

1. *$\exists$ такое $\delta > 0 : f$ имеет разный характер выпуклости на $(x_0 - \delta, x_0]$ и $[x_0, x_0 + \delta)$*
2. *f – непрерывна в x_0*
3. *$\exists f'(x_0) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*

Замечание 1.9. *Непрерыавность $\iff$ запрещаются разрывы первого рода*
Запрещается, чтобы производная терпела разрывы

Замечание 1.10. *Если $f \in C^2(a; b)$, то в точках перегиба $f''(x_0) = 0$ (необходимое условие перегиба)*

Теорема 1.12 (Неравенство Йенсена)**.** *$\sqsupset f$ – выпукла вниз на $< a; b >$*
$\sqsupset p_1, \ldots, p_n$ – набор чисел, что $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$
Тогда $\forall x_1, ..., x_n \in < a; b > \quad f(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$

Доказательство. Если $x_1 = x_2 = \ldots = x_*$
$f(x_*) \leqslant f(x_*)$
Будем считать, что числа различные.

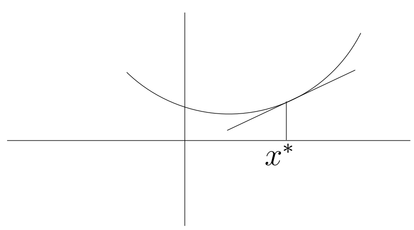

Рис. 1.3: ор

Можно брать любой набор чисел $p_1, ..., p_n$ и делить на их сумму
$\sqsupset x^* = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k \in < a, b > \forall k \quad a \leqslant x_k \leqslant b \quad a = \sum\limits_{k=1}^{n} a \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} p_k b = b$
В точке x^* существует опорная прямая у графику $f(x) : l_{x^*}(x) = ax + b$
$l_{x^*}(x^*) = f(x^*)$ и $\forall x \quad f(x) \geqslant l_{x^*}(x)$
(причём, если f строго выпукла, то $f(x) > l_{x^*}(x) \forall x \neq x_*$)
Тогда $f(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k = f(x^*) = l_{x^*}(x^*) = l_{x^*}(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k) = a \sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k + b = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k (a x_k + b) = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k l_{x^*}(x_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} p_k f(x^k)$ чтд

$\square$

ДЗ:

1. $epif = \{(x, y) \mid x \in < a; b >, y \geqslant f(x)\}$
   Доказать, что f – выпукла вниз $\iff$ $epif$ – выпуклое множество
2. $\sqsupset f(x)$ выпукла вниз на $(a; +\infty)$ и $y = \alpha x + \beta$ – её асимптота при $x \to \infty \implies f(x) \geqslant f(x) \geqslant \alpha x + \beta \forall x \in (a; +\infty)$ (аналогично при $x \to -\infty$)

Следствие 1.5. *Если f строго выпукла вниз, а среди x-ов есть различные, то неравенство срогое*

Следствие 1.6. *Если f выпукла вверх (вогнута), то* $f\left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k\right) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$

Следствие 1.7. *В принципе можно $\sphericalangle p_k \geqslant 0$ (просто нулевые коэффициенты удаляются из доказательства*

Замечание 1.11. $n = 2 \implies f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$ *(но это сразу следует из определения выпуклой функции)*

Применение неравества Йенсона:

1. $\sqsupset x_1 \dots x_n > 0 \implies \frac{x_1+x_2+..+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$
   $f(x) = \ln x \quad f''(x) = \frac{1}{x} =' -\frac{1}{x} < 0 \implies f$ – вогнутая (выпуклая вверх)
   $\sum p_k x_k = \frac{1}{n} x_1 + \ldots + \frac{1}{n} x_n$
   $\implies \ln\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n}(\ln x_1 + \ln x_2 + ... + \ln x_n = \ln \sqrt[n]{(}x_1 \dots x_n$
2. Неравество Гёльдера

   Теорема 1.13.

   Определение 1.12. *Числа p и q называются сопряжёнными, если* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
   $p = \frac{q}{q-1} \quad p = \frac{q}{q-1}$
   Рассмоти набор чсисел $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}$, который также трактуется как вектор
   $\sqsupset \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{R} \quad \sqsupset p > 1$ *и* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
   Тогда $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \left|\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p\right|^{\frac{1}{p}} \cdot \left|\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^q\right|^{\frac{1}{q}}$

   Замечание 1.12. $p = q = 2 \implies$ *Неравенство Коши-Буняковского Шварца*

   Доказательство. Т.к. очевидно, что $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k||b_k|$ (неравенство треугольника)
   То вместо a_k и b_k можно использовать $|a_k|$ и $|b_k|$, т.е. считать, что $a_k \geqslant 0 \quad b_k \geqslant 0$
   И надо доказать:
   $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$
   Далее можно считать, что все $b_k > 0$ (слагаемые, где $b_k = 0$ можно просто отбросить
   $\sphericalangle f(x) = x^p, p > 1$ – строго выпукла вниз на $[0, +\infty)$
   $\sqsupset p_k = b_k^q, x_k = a_k b_k^{1-q}$
   Чтобы $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$
   $f(\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)}{\sum_{k=1}^{n} p_k}$ Напишем неравенство Йенсона в общей формулировке

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q}\right)^p \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q}$$

$p_k x_k^q = b_k^q a_k^p b_k^{p(1-q)} = a_k^p \quad p = \frac{q}{q-1}$

$b_k^{p(1-q)} = b_k^{-q}$

$\Longleftrightarrow \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^p \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{p-1}$ Возьмём корень p степени и учтём, что $\frac{p-1}{p} = 1/q$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

□

ДЗ:

(a) Неравенство Гёльдера обращается в равенство если и только если выполнены два условия:

i. Вектора $(|a_1|^p, \ldots, |a_n|^p)$ и $(|b_1|^q, \ldots, |b_n|^q)$ – сонаправленны

ii. Все произведения $a_k b_k$ – одного знака

(b)

Определение 1.13. $\sqsupset n \in \mathbb{N}, r > 0, a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$ *(или $r < 0, a_1, \ldots, a_n > 0$)*

$M_r(\overline{a}) = \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^r\right)^{\frac{1}{r}}$ *Называется средним степенным порядка r чисел $a_1, \ldots, a_n$*

$M_1(a)$ – среднее арифметическое, $M_2(a)$ – среднее квадратичное, $M_{-1}(a)$ – срднее гармониическое

Проверить:

i. $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0 \quad M_r(a) = \frac{1}{M_{-r}(\frac{1}{a})}$

ii. $\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k \leqslant M_r(a) \leqslant \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k$

iii. $\lim\limits_{r\to+\infty} M_r(a) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k$

$\lim\limits_{r\to-\infty} M_r(a) = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k$

Теорема 1.14 (О монотонности средних степенных). $\sqsupset 0 < r < S \quad a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$
$\Longrightarrow M_r(a) \leqslant M_s(a)$

Доказательство. $\triangleleft f(x) = x^{\frac{s}{r}}$ т.к. $\frac{s}{r} > 1 \Longrightarrow f$ – строго выпукла (вниз) на $[0, +\infty]$

Напишем неарвенство Йенсена

$f\left(\frac{a_1^r + \ldots + a_n^r}{n}\right) \leqslant \frac{f(a_1^r) + \ldots + f(a_n^r)}{n}$

$\left(\frac{a_1^r + \ldots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{s}{r}} \leqslant \frac{a_1^s + \ldots + a_n^s}{n}$ Берём корень s -ой степени

$\left(\frac{a_1^r + \ldots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \left(\frac{a_1^s + \ldots + a_n^s}{n}\right)^{\frac{1}{s}}$

□

Замечание 1.13. *Т.к. f – строг овыпукла, то если среди чисел $a_1, \ldots, a_n$ есть различные, то нравенство будет строгим.*

Теорема 1.15. $\sqsupset a_1, \ldots, a_n > 0$
$\lim\limits_{r\to 0} M_r(a) = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$ *– среднее геометрическое*

Доказательство. $M_r(a) = e^{\ln M_r(a)} = e^{\frac{1}{r}\ln\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^r} =$
$a^r = 1 + r \cdot \ln a + O(r^2)$

$= e^{\frac{1}{r}\ln\left(\frac{1}{n}\left(n+r\cdot(\ln a_1+\ldots+\ln a_n)+O(r^2)\right)\right)} = e^{\frac{1}{r}\ln\left(1+\frac{r}{n}\ln(a_1\ldots a_n)+O(r^2)\right)} =$
$\ln(1+z) = z + O(z^2)$
$= e^{\frac{1}{r}\cdot\left(\frac{r}{n}\ln(a_1\ldots a_n)+O(r^2)\right)} = e^{\frac{1}{n}\ln(a_1\ldots a_n)} \cdot e^{\frac{O(r^2)}{r}} = \sqrt[n]{a_1\ldots a_n}\cdot e^{O(r)} \to \sqrt[n]{a_1,...,a_n}$ □

Следствие 1.8. *Тогда при $r > 0$ $M_r(a) \geqslant M_0(a)$ (обобщённое неравенство Коши), причём равенство возможно лишь при равенстве всех a*

$\sqsupset a1,\ldots,a_n > 0 \quad \sqsupset s < r < 0 \implies 0 < -r < -s$
По Th $M_{-r}(\frac{1}{a}) \leqslant M_{-s}(\frac{1}{a})$
$\frac{1}{M_r(a)} \leqslant \frac{1}{M_s(a)}$
Т.к. седние степенные > 0
$M_s(a) \leqslant M_r(a)) \quad M_s(a) \leqslant M_r(a) \leqslant M_0(a)$
Вывод: Th справедлива и для отрицатльеных степеней
Окончательно
$r < s$ и $a_1,\ldots,a_n > 0 \implies M_r(a) \leqslant M_s(a) \quad \forall r,s$

Доказательство. 1. $0 < r < s$ – есть

2. $r < s < 0$ – есть

3. $r < 0 < s \quad M_r(a) \leqslant M_0(a) \leqslant M_s(a)$ – ок

□

Знаменитое неравенство $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1\ldots a_n} \leqslant \frac{s_1+\ldots+a_n}{n} \quad M_{-1}(a) \leqslant M_0(a) \leqslant M_1(a)$

4 Неравество Менковского

$\sqsupset a,b \in \mathbb{R}^n, p \geqslant 1$ Тогда:

$(\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^p)^{\frac{1}{p}}$

Доказательство. $\sqsupset p = 1$
$\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k+b_k| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n}|a_k| + \sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|$
$\iff |a_k+b_k| \leqslant |a_k|+|b_k|$ – неравенство Треугольника
$\sqsupset p > 1 \quad \sqsupset q$ – сопряжённое к $p \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1 \quad q = \frac{p}{p-1}$
$\sqsupset A = \sum\limits_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p$

$A = \sum\limits_{k=1}^{n}|a_k+b_k|\cdot|a_k+b_k|^{p-1} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|\cdot|a_k+b_k|^{p-1} + \sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|\cdot|a_k+b_k|^{p-1} \leqslant \left(\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} =$

$(p-1)q = p \quad \sum\limits_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^{(p-1)q} = A$

$= \left(\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \cdot A^{\frac{1}{q}\geqslant A}$

$A^{1-\frac{1}{q}} = A^{\frac{1}{p}} = \left(\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\bigg)\bigg)$ □

ДЗ:

1. $\sqsupset a_k > 0 \quad a_1^{a_1} a_2^{a_2} \ldots a_n^{a_n} \geqslant \left(\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{n}\right)^{a_1 a_2 \ldots a_n}$
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \geqslant \sqrt{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right)^2}$
3. $a, b, c > 0 \quad \sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geqslant 3\sqrt{2}$
4. $\forall a, b, c, d > 0 \quad \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b}$