# Алгебра

Коченюк Анатолий

14 ноября 2019 г.

# Глава 1

# Теория Вероятности

## 1.1 Комбинаторика

**Определение 1.1.** *Принцип сложения: Если есть два непересекающихся события и одно можно совершить* $k_1$ *, а второе – k2 способами, то их объединение можно совершить* $k_1 + k_2$ *способами*

$N\left(A_1 \cup A_2\right) = N\left(A_1\right) + N(A_2)$

*Если события пересекающихся* $N\left(A \cup B\right) = N\left(A\right) + N\left(B\right) - N\left(A \cap B\right)$

## 1.2 Пример Виталия

Свойства длины:

1. длина пустого множества – 0
2. $l\left(A\right) \geqslant 0 \quad \forall A$
3. $l\left(A \cup B\right) = l((A) + l\left(B\right)$
4. $l\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} l\left(A_i\right)$
5. $l\left(x + A\right) = l\left(A\right)$

$a \sim b \Longleftrightarrow a - b \in \mathbb{Q}$

рефлексивность, симметричность и транзитивность есть

разобъём вещественные числа по этому отношению эквивалентности. На отрезке $[0, 1]$ есть элементы из каждого класса эквивалентности

В качестве множества $A$ возьмём $A := X + Q \cap [-1, 1]$ – все суммы пар элементов из множеств.

$X + Q \cap [-1, 1] = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \left(X + q_i\right)$ ($q_i$ – занумерованные элементы счётного второго множества)

$(X + q_i) \cap (X + q_j) = \emptyset$, если есть элемент пересечения, т.е. $x_1 + q_i = a = x_2 + q_j \implies x_1 - x_2 = q_j - q_i$ , т.е. $x_1$ и $x_2$ в одном классе эквивалентности, но они разные, т.к мы взяли множество элементов по одному элементу из каждого класса.

$l(X) = 0 \implies l(A) = 0$

$l\left(X\right) \neq 0 \implies l\left(A\right) = \infty$

$[0, 1] \subset A \subset [-1, 2]$

$1 = l\left([0, 1]\right) \leqslant l\left(A\right) \leqslant l\left([-2, 1]\right) = 3$

Пусть $z \in [0, 1] \quad z \in A? \quad \exists x \in X \subset [0, 1] : z \sim x \quad z - x = q \in Q \cap [-1, 1] \quad z = x + q \in A$ (по определению A)

Комбинаторика эгэйн

$N\left(A \cup B \cup C\right) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C$

**Определение 1.2.** *Принцип Умножения: Если сложное события состоит из нескольких подсобытий и оно считается состоявшимся, только если случились все подсобытие и* $i$*-ое событие можно совершить* $k_i$ *способами, то общее событие можно совершить* $\prod\limits_{i=1}^{n} k_i$ *способами*

## 1.3 Шарики по ящикам

Таблица 1.1: шарики

| Ящики \ Шары | разные | одинаковые |
|---|---|---|
| не более одного шара | $\frac{N!}{(N-k)!} = A_N^k$ | $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$ |
| вместительные | $N^k$ | $C_{n+k-1}^{k-1}$ – расстановка $k$ перегородок в $N+k+1$ ячейках |

разные – порядок важен
одинаковые – порядок не важен
отношение между ними – $k!$
$0! = 1$
$n! = n \cdot (n-1)!$
$1! = 1 \cdot 0! \quad 0! = \frac{1!}{1} = 1$
20 человек и нужно выбрать 11 для футбольной команды $C_{20}^{11}$
с капитаном – $11 * C_{20}^{11}$ – выбираем капитана.
выбираем бригаду из $n$ человек – $C_n^0 + Cn^1 + C - n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n = (1+1)^n$
с бригадиром $n * 2^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{n} kC_n^k$

## 1.4 Формула Классической вероятности

$P = \frac{k}{N}, \quad N$ – число всех исходов, $k$ – число благоприятных исходов
$A \cap B = \emptyset \implies N(A \cup B) = N(A) + N(B)$
Условная вероятность – $P(A \mid B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ – A, при условии, что произошло B. $P(B) \neq 0$

**Определение 1.3.** *$A$ – Не зависит от $B$. $P(A \mid B) = P(A)$*

Если одно событие зависимо от другого, то другое зависит от первого.
$P(A \mid B) = P(A) \implies \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \implies \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B) \implies P(B \mid A) = P(B)$
Если $A$ и $B$ независимы то $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ – можно взять за определение

**Определение 1.4.** *$A, B, C$ – попарно независимы, если:*
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

**Определение 1.5.** *$A, B, C$ – независимы в совокупности, если:*
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$
$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Пример Бернштейна: Тетрэдр, у которого 3 грани покрашены в красный, синий, зелёный, а 4-ая во все 3.
$A$ – выпал синий
$B$ – выпал зелёный
$C$ – зелёный
$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$
$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$
$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$
$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cap P(B) \cap P(C)$

## 1.5 Геометрическая вероятность

Если можно засунуть всё в прямую, то $P(A) = \frac{l(A)}{l(\omega)}$
Если в плоскость $P(A) = \frac{S(A)}{S(\omega)}$

## 1.6 Задача о встрече

Два человека договорились о встрече у метро между 17 и 18 часами

Можно запихнуть это в квадрат 1 x 1, где x – 17 + x часов пришёл первый. 17+y – пришёл второй.

устраивает $y \leqslant x \leqslant y + \frac{1}{6} \quad x \leqslant y \leqslant x + \frac{1}{6}$

$x - \frac{1}{6} \leqslant y \leqslant x \quad x \leqslant y \leqslant x + \frac{1}{6}$

рисуется, считается

## 1.7 Парадокс Бертрана

равносторонний треугольник, вписанный в окружность $a = R\sqrt{3}$

хорошие хорды – длиннее $R\sqrt{3}$

Из разных точек окружности вероятность хорошей хорлды – одинакова, а тогда нам годяться в $[0, \pi]$ углы $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ – вероятность – $\frac{1}{3}$

Хорды могут быть под разным наклоном. Они могут горизонтальными, вертикальными, по разному наклонными. В каждом таком классе вероятность одинакова. Рассмотрим горизонтальные хорды. В них с помощью геометрии получается вероятность $\frac{1}{2}$

Чтобы знать хорду нам достаточно знать её середину (кроме точки центра окружности). Получается окружность с радиусом $\frac{R}{2}$, а вероятность $P = \frac{\pi(\frac{R}{2})^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}$

Такое происходит, потому что у события выбрать хорду нет вероятности. Но, когда мы конкретизируем (из одной точки, только из горизонтальных ...), то новое событие

Игла Бюффона, симметричная острая с обоих сторон. между параллельными линиями расстояние $2a$, игла длиной $2l$, $l < a$

Игла может пересечь максимум одну прямую

Рисуем иглу с ближайшей прямой к центру иглы. Если центр дальше от прямой – вероятность пересечения меньше.

Есть угол поворота. Игла однозначно задаётся двумя параметрами: расстоянием до ближайшей линии (считаем, то одна), угла поворота.

Двухмерное пространство $0 < r < a \quad 0 < \varphi < \pi \qquad l \sin\phi \geqslant r$ – условие пересечения

$P = \frac{s_1}{s_2} = \frac{\int\limits_0^\pi l \sin\phi d\phi}{\pi a} = \frac{l}{a\pi}(-\cos\phi)\mid_0^\pi = \frac{l}{a\pi}(-(-1)+1) = \frac{2l}{a\pi}$

$l := \frac{a}{2}$

$\lim\limits_{N\to\infty} \frac{K(N)}{N} = P(\text{пересечения}) = \frac{1}{\pi}$

$\pi \approx \frac{N}{K(N)}$

## 1.8 Формула полной вероятности. (формула Байеса)

**Определение 1.6.** $\{H_i\}_{i=1}^n$

1. $\bigcap\limits_{i=1}^n H_i = \Omega$
2. $H_i \cap H_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

*$H_i$ – полная группа событий*

**Теорема 1.1** (Формула полной вероятности)**.** *$H_i$ – полная группа событий* $\implies P(A) = \sum\limits_{i=1}^n P(A|H_i) \cdot P(H_i)$

*Доказательство.* $P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap \bigcup\limits_{i=1}^n H_i) = P(\bigcup\limits_{i=1}^n (A \cap H_i)) = \sum\limits_{i=1}^n P(A \cap H_i) = \sum\limits_{i=1}^n P(A|H_i) \cdot P(H_i)$ □

**Теорема 1.2** (Теорема Байеса)**.** $P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A|H_1)P(H_1)+\ldots+P(A|H_n)P(H_n)}$

*Доказательство.* $P(H_1|A) = \frac{P(H_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap H_1)}{P(A)} = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A|H_1)P(H_1)+\ldots+P(A|H_n)P(H_n)}$ □

## 1.9 Формула Кордано

$AX^3 + BX^2 + Cx + D = 0$

$x^3 + ax^2 + bx + c$

$y = x + \frac{a}{3}$

$x = y - \frac{a}{3}$

$(y - \frac{a}{3})^3 + a(y - \frac{a}{3})^2 + b(y - \frac{a}{3}) + c = 0$

$y^3 + py + q = 0$

$\sqsupset y = u + v$

$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$

$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^2 + p(u+v) + q = 0$

$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q = 0$

$\sqsupset 3uv + p = 0$

$u^3 + v^3 + q = 0$

$\begin{cases} uv = -\frac{p}{3} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$

$\begin{cases} u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$

$u^3, v^3$ – корни уравнения

$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$

$t = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$

$t = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$

$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$

## 1.10 Метод Феррари

$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$(x^2 + \frac{a}{2}x + \alpha)^2 - \frac{a^2}{4}x^2 - \alpha^2 - 2x^2\alpha - 2x^2\alpha - a\alpha x + bx^2 + cx + d = 0$

$(x^2 + \frac{a}{2}x + \alpha)^2 - \Big((\frac{a^2}{4} + 2\alpha - b)x^2 + (a\alpha - c)x + (\alpha^2 - d)\Big)$

Возьмём $\alpha$, чтобы вторая скобка была полным квадратом

$D = (a\alpha - c)^2 - 4(\frac{a^2}{4+2\alpha-b)(\alpha^2-d)} = 0$ А дальше получается разность квадратов, которая раскладывается в произведение двух квадратных уравнений