Алгебра

Коченюк Анатолий

23 октября 2019 г.

Глава 1

Теория Вероятности

1.1 Комбинаторика

Определение 1.1. *Принцип сложения: Если есть два непересекающихся события и одно можно совершить k_1 , а второе – k2 способами, то их объединение можно совершить $k_1 + k_2$ способами*

$N(A_1 \cup A_2) = N(A_1) + N(A_2)$

Если события пересекающихся $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$

1.2 Пример Виталия

Свойства длины:

1. длина пустого множества – 0
2. $l(A) \geqslant 0 \quad \forall A$
3. $l(A \cup B) = l((A) + l(B)$
4. $l\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} l(A_i)$
5. $l(x + A) = l(A)$

$a \sim b \Longleftrightarrow a - b \in \mathbb{Q}$

рефлексивность, симметричность и транзитивность есть

разобъём вещественные числа по этому отношению эквивалентности. На отрезке $[0, 1]$ есть элементы из каждого класса эквивалентности

В качестве множества A возьмём $A := X + Q \cap [-1, 1]$ – все суммы пар элементов из множеств.

$X + Q \cap [-1, 1] = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(X + q_i)$ (q_i – занумерованные элементы счётного второго множества)

$(X + q_i) \cap (X + q_j) = \emptyset$, если есть элемент пересечения, т.е. $x_1 + q_i = a = x_2 + q_j \implies x_1 - x_2 = q_j - q_i$, т.е. x_1 и x_2 в одном классе эквивалентности, но они разные, т.к мы взяли множество элементов по одному элементу из каждого класса.

$l(X) = 0 \implies l(A) = 0$

$l(X) \neq 0 \implies l(A) = \infty$

$[0, 1] \subset A \subset [-1, 2]$

$1 = l([0, 1]) \leqslant l(A) \leqslant l([-2, 1]) = 3$

Пусть $z \in [0, 1] \quad z \in A? \quad \exists x \in X \subset [0, 1] : z \sim x \quad z - x = q \in Q \cap [-1, 1] \quad z = x + q \in A$ (по определению A)

Комбинаторика эгэйн

$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C$

Определение 1.2. *Принцип Умножения: Если сложное события состоит из нескольких подсобытий и оно считается состоявшимся, только если случились все подсобытие и i-ое событие можно совершить k_i способами, то общее событие можно совершить $\prod\limits_{i=1}^{n} k_i$ способами*

1.3 Шарики по ящикам

Таблица 1.1: шарики

Ящики \ Шары	разные	одинаковые
не более одного шара	$\frac{N!}{(N-k)!} = A_N^k$	$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$
вместительные	N^k	C_{n+k-1}^{k-1} – расстановка k перегородок в $N+k+1$ ячейках

разные – порядок важен
одинаковые – порядок не важен
отношение между ними – $k!$
$0! = 1$
$n! = n \cdot (n-1)!$
$1! = 1 \cdot 0! \quad 0! = \frac{1!}{1} = 1$
20 человек и нужно выбрать 11 для футбольной команды C_{20}^{11}
с капитаном – $11 * C_{20}^{11}$ – выбираем капитана.
выбираем бригаду из n человек – $C_n^0 + Cn^1 + C - n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n = (1+1)^n$
с бригадиром $n * 2^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{n} kC_n^k$

1.4 Формула Классической вероятности

$P = \frac{k}{N}, \quad N$ – число всех исходов, k – число благоприятных исходов
$A \cap B = \emptyset \implies N(A \cup B) = N(A) + N(B)$
Условная вероятность – $P(A \mid B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ – A, при условии, что произошло B. $P(B) \neq 0$

Определение 1.3. *A – Не зависит от B. $P(A \mid B) = P(A)$*

Если одно событие зависимо от другого, то другое зависит от первого.
$P(A \mid B) = P(A) \implies \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \implies \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B) \implies P(B \mid A) = P(B)$
Если A и B независимы то $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ – можно взять за определение

Определение 1.4. *A, B, C – попарно независимы, если:*
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

Определение 1.5. *A, B, C – независимы в совокупности, если:*
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$
$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Пример Бернштейна: Тетрэдр, у которого 3 грани покрашены в красный, синий, зелёный, а 4-ая во все 3.
A – выпал синий
B – выпал зелёный
C – зелёный
$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$
$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$
$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$
$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cap P(B) \cap P(C)$

1.5 Геометрическая вероятность

Если можно засунуть всё в прямую, то $P(A) = \frac{l(A)}{l(\omega)}$
Если в плоскость $P(A) = \frac{S(A)}{S(\omega)}$

1.6 Задача о встрече

Два человека договорились о встрече у метро между 17 и 18 часами

Можно запихнуть это в квадрат 1 x 1, где x – 17 + x часов пришёл первый. 17+y – пришёл второй.

устраивает $y \leqslant x \leqslant y + \frac{1}{6} \quad x \leqslant y \leqslant x + \frac{1}{6}$

$x - \frac{1}{6} \leqslant y \leqslant x \quad x \leqslant y \leqslant x + \frac{1}{6}$

рисуется, считается

1.7 Парадокс Бертрана

равносторонний треугольник, вписанный в окружность $a = R\sqrt{3}$

хорошие хорды – длиннее $R\sqrt{3}$

Из разных точек окружности вероятность хорошей хорлды – одинакова, а тогда нам годяться в $[0, \pi]$ углы $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ – вероятность – $\frac{1}{3}$

Хорды могут быть под разным наклоном. Они могут горизонтальными, вертикальными, по разному наклонными. В каждом таком классе вероятность одинакова. Рассмотрим горизонтальные хорды. В них с помощью геометрии получается вероятность $\frac{1}{2}$

Чтобы знать хорду нам достаточно знать её середину (кроме точки центра окружности). Получается окружность с радиусом $\frac{R}{2}$, а вероятность $P = \frac{\pi(\frac{R}{2})^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}$

Такое происходит, потому что у события выбрать хорду нет вероятности. Но, когда мы конкретизируем (из одной точки, только из горизонтальных ...), то новое событие

Игла Бюффона, симметричная острая с обоих сторон. между параллельными линиями расстояние $2a$, игла длиной $2l$, $l < a$

Игла может пересечь максимум одну прямую

Рисуем иглу с ближайшей прямой к центру иглы. Если центр дальше от прямой – вероятность пересечения меньше.

Есть угол поворота. Игла однозначно задаётся двумя параметрами: расстоянием до ближайшей линии (считаем, то одна), угла поворота.

Двухмерное пространство $0 < r < a \quad 0 < \varphi < \pi \qquad l \sin\phi \geqslant r$ – условие пересечения

$P = \frac{s_1}{s_2} = \frac{\int\limits_0^\pi l \sin\phi d\phi}{\pi a} = \frac{l}{a\pi}(-\cos\phi)\mid_0^\pi = \frac{l}{a\pi}(-(-1)+1) = \frac{2l}{a\pi}$

$l := \frac{a}{2}$

$\lim\limits_{N\to\infty} \frac{K(N)}{N} = P(\text{пересечения}) = \frac{1}{\pi}$

$\pi \approx \frac{N}{K(N)}$