Конспект по Математическому Анализу

Коченюк Анатолий 11М

Глава 1

Производные высших порядков

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$

$\sqsubset$ f –дифференцируема на $(a; b)$ $\quad \exists f'$ также дифференцируема на (a, b) $\quad (f')' = f''$ это называется двойной производной

Замечание 1.1. *Из дифференцируемости* $\implies$ *непрерывность, т.е.* $\exists (f')' \implies f'$ *– непрерывна* $\implies$ *в итоге исходная функция* $f' \in C^1(a; b)$ *, т.е. была непрерывно дифференцуруема (гладкая)*

Аналогично по индукции определяется n-ая производная (производная n-го порядка) от f
$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, если правая часть имеет смысл
Обозначения:

- f^n – Лагранж
- $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ – Лейбниц
- $D^n f$ – Коши ($D :^f \to f'$ оператор дифференцирования)

Если n мало, то часто пишут нужное количество чёрточек f'', p'''. Аналогия с римскими цифрами I, II, III, иногда пишут f^{IV}, f^V

Определение 1.1. *Функция* f *называется* n *раз дифференцурумеой на множестве* $E \in \mathbb{R}$*, если она* n *раз дифференцируема в каждой точке* E

Если f n *раз дифференцируема на множестве* E *и* $f^{(n)}$ *– непрерывна, то говорят, что* f n *раз непрерывно дифференцируема на* E*, Класс* $C^n(E)$ *(*C^n *– гладкая)*

Замечание 1.2. *Из* n *раз дифференцируемости* $\implies$ *все* $f^{(k)}, k = \overline{1, n-1}$ *– непрерывны, т.е.* $f \in C^k(E)$

Кстати $f^0 = f$ *(0-ая производная)* $C = C^0$

Определение 1.2. *Функция* f *называется бесконечно дифференцируемой на* E*, если в* $\forall x \in E \exists$ *производные всех порядков*

Класс таких функция называется $C^\infty(E)$
$e^x, \sin x, \cos x \in C^\infty(\mathbb{R})$
$\sqrt{x}, \ln x \in C^\infty(0; +\infty)$

Определение 1.3. f *называется бесконечное число раз непрерывно дифференцируемой, если производная любого порядка существует и непрерывна*

Ясно, что классы $C^n(E)$ "уменьшаются" с ростом n

Лемма 1.1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad C^n(E) \supset C^{n+1}(E) \supset C^\infty(E)$*, причём все включения строгие*

Доказательство. Предъявим функцию $f_n : f_n \in C^n(\mathbb{R})$, но $f_n \notin C^{n+1}(\mathbb{R})$, т.е. $f_n^{(n)}$ – не дифференцируема

Заведём последовательность функций $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} & , x > 0\,(\geqslant) \\ 0 & , x \leqslant 0\,(<) \end{cases}$

Очевидно $f_n' = f_{n-1}, n \in \mathbb{N}$

$n = 0 \quad f_0(x) = \begin{cases} x, x > 0 \\ 0, x \leqslant 0 \end{cases}$

$f_0 \notin C^1(\mathbb{R})$, у неё в 0 разрыв 1-го рода $f_0'(-0) = 0, f_0'(+0) = 1$

Таким образом $d_n^{(n)} = f_0 \in C(\mathbb{R})$, но $f_n^{(n+1)} = f_0' \notin C(\mathbb{R})$ □

1.1 Дифференциал f

$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$

$df = f'(x_0)dx \quad df(x_0, dx) = f'(x_0)dx$

или $(df(x_0))(dx) = f'(x_0)dx$

дифференциал – линейная функция от приращения $\Delta x = dx$ – это один аргумент

точка x_0 – параметр

$f'(x_0) = \frac{df(x_0,dx)}{dx}$ – это не зависит от dx

$\frac{df}{dx} = f'(x)$

Определение 1.4 (Дифференциал n-го порядка). $\sqsupset f$ *– n раз дифференцируема в* $x_0 \in E$ $(f : E \to \mathbb{R})$ *Величина*

$$d^n f(x_0, dx) = f^{(n)}(x_0)dx^n$$

называется дифференциалом n-го порядка в точке x_0

$dx^n = (dx)^n = dx \cdot dx \cdot \ldots \cdot dx \quad dx$ *– единый символ*

$d(x^n) = nx^{n-1}dx$

Замечание 1.3. *Дифференциал – это обычное число т.е. это числовая функция*

Теорема 1.1 (Теорема об арифметических действиях со старшими производными). $\sqsupset f, g : (a; b) \to \mathbb{R}$ *и* n *раз дифференцируемы в* $x_0 \in (a; b)$*. Тогда*

1. $\forall \alpha\beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha f(x) + \beta g(x))^{(n)} |_{(x_0)} = \alpha f^{(n)}(x_0) + \beta g^{(n)}(x_0)$

2. *Формула Лейбница* $(fg)^{(n)} |_{x=x_0} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0)$

Доказательство. (по индукции)

$n = 1 \quad$ всё известно $(fg)' = f'g + fg'$

$n \to n + 1$ п.1 – очевиден

$(\alpha f + \beta g)^{(n+1)} = \left((\alpha f + \beta g)^{(n)}\right)' = (\alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)})' = \ldots$

$(fg)^{(n+1)} = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} = f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} = f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} + \sum\limits_{i=1}^{n} C_n^{i-1} f^{(i)} g^{(n-i+1)} + \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} = f g^{(n+1)} + f^{(n+1)} g + \sum\limits_{k=1}^{n} \left(C_n^{k-1} + C_n^k\right) f^{(k)} g^{(n-k+1)} = f g^{(n+1)} + f^{(n+1)} g + \sum\limits_{k=1}^{n} \left(C_{n+1}^k\right) f^{(k)} g^{(n-k+1)} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n-k+1)}$ □

Примеры:

1. $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha \cdot (\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1) x^{\alpha - n}$

2. $\sqsupset \alpha = -1 \quad \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ Дз – проверить В

3. $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ ДЗ – проверить

4. $(a^x)^{(n)} = ((a^x)')^{(n-1)} = (a^x \ln a)^{(n-1)} = a^x (\ln a)^n$

5. $L =< \cos, \sin >= \{\alpha \cos x + \beta \sin x \mid \alpha, \beta, x \in \mathbb{R}\}$
   $P : L \to L$ "поворот на 90 градусов против часовой стрелки"
   $(P(\cos))(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \quad (P(\sin))(x) = \sin(x + \pi/2)$
   $\sin^{(n)} = P^n(\sin) \qquad \cos^{(n)} = P^n(\cos)$

1.2 Формула Тейлора

$\sqsupset T_n(x)$ какой-то многочлен степени $n \in \mathbb{Z}_+$
$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-x)^k$
$n = 1 \quad T_n(x) = ax + b = a(x - x_0) + b - ax_0 \qquad a_1 = a \quad a_0 = b + ax_0$
$n \to n+1 \quad T_{n+1}(x) = P_n(x) \cdot (x - x_0) + T_{n+1}(x_0) \quad P_n$ – какой-то многочлен, на который мы делим
$P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k(x - x_0)$ всё
$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x}$
$T_n^{(m)} = \sum\limits_{k=m}^{n} a_k k(k-1) \cdot (k-m+1)(x - x_0^{k-m})$
$T_n^{(m)}(x_0) = a_m m(m-1)\dots 1 = a_m \cdot m!$
$a_m = \frac{T_n^{(m)}(x_0)}{m!}$ – готовая формула для a_m
Т.О.

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{T_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$\sqsupset f$ – произвольная функция $(a; b) \to \mathbb{R}$
$\sqsupset f$ – n раз дифференцируемая а $x_0 \in (a; b)$
Конечно, формула

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

неверна, но оказывается, что она даёт хорошее приближение к функции f

Определение 1.5. *Многочленом Тейлора степени n для функции f в точке x_0 называется*

$$T_{n,x_0}(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)$$

T – Тейлор Taylor

Определение 1.6. *Остаток $R_{n,x_0}f\,(x) = f(x) - T_{n,x_0}f(x)$ (остаточный член)*

Определение 1.7. *Формула Тейлора*
$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x)$
Пока что эта формула полностью бессодержательная и просто является переписанным определением остатка
Содержание появляется, когда что-то говориться о R_{n,x_0} в смысле малости, ограниченности и т.п.

Существуют разные форму записи этого остатка: Пеано, Лагранжа и Коши.

Лемма 1.2. $\forall m = \overline{0, n} \quad f^{(m)}(x_0) = T_{n,x_0}^{(m)}(x_0)$

Доказательство. было доказано, что $T(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k \implies T^{(m)}(x_0) = m!a_m$

Из этого $\implies T_{n,x_0}^{(m)}f(x_0) = a_m \cdot m! = f^{(m)}(x_0) \qquad m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$ □

Замечание 1.4. *Существует единственный многочлен степени n, обладающим свойством из леммы выше (для данной функции $f(x)$) и именно он и есть многочлен Тейлора*

Теорема 1.2 (Формула Тейлора - Пеано). *$\sqsupset n \in \mathbb{N}, \sqsupset f$ – n раз дифференцируема в $x_0 \in (a;b)$. Тогда*

$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + o\left((x-x_0)^n\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right)$$

т.е. $R_{n,x_0}f(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$

Доказательство. Для упрощения записи пишем $T(x)$ вместо $T_{n,x_0}f(x)$ и $R(x)$ вместо $R_{n,x_0}f(x)$
Дано $R(x) = f(x) - T(x)$ и по лемме $f^{(m)}(x_0) = T^{(m)}(x_0) \forall m = \overline{0,m}$
т.е. $R^{(m)}(x_0) = 0 \forall m = \overline{0,n}$
Достаточно доказать такую лемму

Лемма 1.3. *if $R^{(m)}(x_0) = 0 \quad \forall m = \overline{0,n} \implies R(x) = o\left((x - x_0^n\right)$*
Из этой Леммы очевидно следует теорема

Доказательство. $n = 0 \quad R(x) = f(x) - T(x) = f(x) - f(x_0) \quad T_{0,x_0}f(x) = f(x_0)$
т.к. f – непрерывна в 0 $f(x) - f(x_0) = 0(1), x \to x_0$ (по определению)
(0 - дифференцируемость – непрерывность)
$n = 1 \quad R(x) = f(x) - T_{1,x_0}f(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = o(x-x_0)$ (по определению дифференцируемости в x_0)
$n \to n+1 \sqsupset R_(x) = 0\left((x-x_0)^m\right)$, т.е. $\frac{R(x)}{(x-x_0)^m} \to 0 \quad x \to x_0 (x \neq x_0) \quad m = \overline{0,n}$
Надо показать, что $R(x) = o\left((x-x_0)^{n+1} \iff \frac{R(x)}{(x-x_0)^{n+1}}\right) \to 0$, при $x \to x_0$
Воспользуемся языком последовательностей (языком Гейне)
$\sqsupset x_i \to x_0$ и $x_i \neq x_0$ – произвольная последовательность
Считаем x_i лежит между x_0 и x

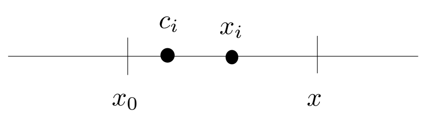

Рис. 1.1: xs

$\triangleleft \frac{R(x_i)}{(x_i-x_0)^{n+1}} = \frac{R(x_i)-R(x_0)}{(x_i-x_0)^{n+1}} = (*)$
Формула Лагранжа $R(x_i) - R(x_0) = R'(C_i)(x_i - x_0) \quad (c_i$ между x_0 и $x_i) \quad |c_i - x_0| \leqslant |x_i - x_0|$
$(*) = \frac{R'(C_i)(x_i-x_0)}{(x_i-x_0)^{n+1}} = \frac{R'(C_i)}{(x_i-x_0)^n} \to 0, x \to x_0$
$\left|\frac{R(x_i)}{(x_i-x_0)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{|r'(C_i)|}{|x_i-x_0|^n} \leqslant \frac{|R'(C_i)|}{|c_i-x_0|^n}$
$R'(c_i)$ – уже удовлетворяет индукционному предположению
$R - n+1$ раз дифференцируема $\implies \tilde{R} = R'$ и .. дифференцируемо в x_0 и $\tilde{R}^{(m)}(x_0) = 0, m = \overline{0,n} \implies \frac{\tilde{R}(c_i)}{(c_i-x_0)^n} \to 0, c_i \to x_0$

□

□

Определение 1.8. *Формула Тейлора для $x_0 = 0$ называется формулой Маклорена*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$$

Замечание 1.5. *$\sqsupset$ выполнено условие теоремы и $\sqsupset$ $P_n(x)$ – это такой многочлен степени n : $f(x) = P_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right) => P_n(x) = T_{n,x_0}f(x)$*

Иногда это замечание берут в качестве определения многочлена Тейлора

Если f – n раз дифференцируема в x_0(т.е. условие теоремы), то оба определения совпадают

но, если f – не дифференцируема, то второе определение шире

Пример 1.1. $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin \mathbb{Q} \\ x^n, x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

f – непрерывна на $\mathbb{R}$ (непрерывна только в 0), в остальных точках разрыв

Т.е. это означает, что f – не дифференцируема при $x \neq 0$

Но в 0 $\nexists f''$

$f''(0) = \lim \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-0}$ *– $\nexists$, т.к. $f'(x)$ – не определена*

$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \begin{cases} 0 & , x \notin \mathbb{Q} \\ x^{n-2} & , x \in \mathbb{Q} \end{cases} = 0$

У f отсутствует $T_{2,0}f(x) \implies T_{\geqslant 2,0}f(x)$ тоже не существует

Но $P_{n-1}(x)$ в смысле второго определения существует $P_{n-1} \equiv 0$

$f(x) = 0 + o(x^{n-1}) \iff$ сама f есть $p(x^{n-1})$

Теорема 1.3 (Глобальная формула Тейлора)**.** *$\sqsupset f \quad n+1$ раз дифференцируема на $(a;b)$*

$\sqsupset \phi$ – произвольная функция, 1 раз дифференцируемая на $(a;b)$ и $\phi' \neq 0$ на $(a;b)$ $\quad \sqsupset x_0 \in (a;b)$ Тогда $\forall x \in (a;b)$

$\exists C_x$, лежащие между x_0, x :

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{\phi(x)-\phi(x_0)}{\phi'(c_x)n!} f^{(n+1)}(c_x)(x-c_x)^n$$

Доказательство. На $(a;b)$ рассмотрим функцию

$$F(t) = f(x) - T_{n,x}f(t) = f(x) - \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^4 \right) \quad x$$

– как бы фиксируется, а t – как бы меняется

f – $(n+1)$ раз дифференцируема на $(a;b) \implies F(t)$ – – 1 раз дифференцируема

$$F'(t) = \; = -\left(f'(t) + (-f'(t)) + f''(t)(x-t) + f''(t)(x-t)(-1) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}(-1) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x$$

Применим к F и ϕ формулу Коши. $\exists C_x$ между x_0, x : $\frac{F(x)-F(x_0)}{\phi(x)-\phi(x_0)} = \frac{F'(C_x)}{\phi'(C_x)}$

Заметим: $F(x) = F(t)\mid_{t=0} = 0; \quad F(x_0) = f(x) - T_{n,x_0}f(x) = R_{n,x_0}f(x)$

$\frac{0-R_{n,x_0}f(x)}{\phi(x)-\phi(x_0)} = \frac{\left(-\frac{f^{(n+1)}(C_x)}{n!}\right)(x-C_x)^n}{\phi'(C_x)}$

$R_{n,x_0}f(x) = \frac{\phi(x)-\phi(x_0)}{\phi'(C_x)n!} \cdot f^{(n+1)}(C_x) \cdot (x-C_x)^n$ □

Следствие 1.1. *1. $\sqsupset \phi(t) = x - t \quad \phi(x) = 0$ и $\phi(x_0) = x - x_0 \quad \phi'(t) = -1$*

$R_{n,x_0}f(x) = \frac{-(x-x_0)}{(-1)n!} f^{(n+1)}(C_x) \cdot (x-C_x)^n = \frac{f^{(n+1)}(C_x)}{n!}(x-x_0)(x-C_x)^n$

$\sqsupset \theta \in [0;1] : \quad (x - C_x) = (1-\theta)(x-x_0) \quad \theta = \frac{C_x - x_0}{x-x_0} \quad C_x = x_0 \; \theta = 0 \quad C_x = x \; \theta = 1$

$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(C_x)}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}$, *где* $\theta = \frac{C_x-x_0}{x-x_0} \in [0;1]$

Остаточный член в формуле Коши

2. $\sqsupset \phi(t) = (x-t)^{n+1} \quad \phi(x) = 0, \quad \phi(x_0) = (x-x_0)^{n+1} \quad \phi'(t) = -(n+1)(x-t)^4$

$R_{n,x_0} = \frac{0-(x-x_0)^{n+1}}{-(n+1)(x-C_x)^n n!} f^{(n+1)}(C_x) \cdot (x-C_x)^n = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

3. *Формула Лагранжа – частный случай формулы Тейлора-Лагранжа для $n = 0$*

$f(x) - f(x_0) = f'(C_x) \cdot (x - x_0)$

4. *$\sqsupset$ известно, что $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M$ на $(a;b)$*

   Тогда $|R_{n,x_0}f(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}$

5. *Сравним Тейлора-Пеано и Тейлора-Лагранжа*

   Из Пеано $R_{n,x_0}f(x) = O\left((x-x_0)^{n+1}\right)$ (в случае, если f^{n+1} локально ограничено в x_0)

   $O\left((x-x_0)^{n+1}\right) = o\left((x-x_0)^{n}\right)$, но $o\left((x-x_0)^{n}\right) \neq O\left((x-x_0)^{n+1}\right)$

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(C_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

6. *Снова рассмотрим в качестве $f(x) = T_n(x)$ – многочлен Лагранжа*

   т.к. $T_n^{(n+1)}(x) \equiv 0$

   Из формулы Тейлора-Лагранжа: $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{T_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + 0$

7. *f – ∞ число раз дифференцируема на $(a;b)$ $\quad f \in C^\infty(a;b)$*

   $\sqsupset$ все $f^{(k)}(x)$ равномерно ограничено на $(a;b) \longleftrightarrow \exists M : \left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant M \forall k \in \mathbb{Z}^+, \forall x \in (a;b)$

   $|R_{n,x_0}f(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1} \quad \forall n$

   $\implies |f(x) - T_{n,x_0}f(x)| = |R_{n,x_0}f(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1} \to 0, n\to\infty$, т.к. $\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, n \to \infty$

   $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_{n,x_0}f(x)$

   $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

   Ряд Тейлора

   Любую n раз дифференцируемую функцию можно разложить с помощью формулы Тейлора-Пеано

   Но не любую, даже ∞ раз дифференцируемую функцию можно представить рядом Тейлора

   Если функция в x_0 совпадает со своим рядом Тейлором, они называются аналитическими

   $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

   $f \in C^\infty(\mathbb{R}), f^{(k)}(0) = 0 \quad T_{n,0}f(x) \equiv 0 \implies$ ряд Тейлора $\equiv 0$

1.3 Преобразование уравнений и неравенств

(1) $f(x)$ $\qquad$ (2) $g(x) = 0$

Если любой корень (1) является корнем (2), то (2) – следствие (1) (корни не теряются) $f(x) \implies g(x)$

Если любой корень (1) является корнем (2) и любой корень (2) является корнем (1), то уравнения называются равносильными $f(x) \iff g(x)$

корни не теряются и лишние не появляются

Типичные преобразования:

приведение подобных слагаемых

$f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$

$f(x) = g(x)$

приведение расширяет ОДЗ, добавление же, наоборот, сужает

$f + h = g + h \iff \begin{cases} f = g \\ \text{ОДЗ} \end{cases}$

Деление на общий множитель Не делим, а расщипляем

$fh = gh \iff fh - gh = 0 \iff (f-g)h = 0$

Когда можно "делить"?

Когда область определения функции h это всё $\mathbb{R}$ и $h(x) \neq 0 \forall x$

Возведение в квадрат

$f(x) = g(x) \implies f^2(x) = g^2(x)$

1.4 Формулы (ряды) Тейлора для элементарных функций

1. $f(x) = e^x$

   Ясно, что $(e^x)^{(k)} = e^x \quad (e^x)^{(k)}\mid_{x=0} = 1$

   Формула Тейлора-Пеано $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + o(x^n)$

   Формула Тейлора-Лагранжа $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \theta \in [0, x], x > 0 \quad$ (либо $x \in [x, 0]$, если $x < 0$)

   или $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \theta \in [0, 1]$

   Из этого $\left| e^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{e^{\theta x} \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!}$

   Если x – фиксирована $\frac{e^{\theta x} \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, n \to +\infty$

   $\implies \left| e^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \to 0, n \to +\infty \iff e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (по определению ряда) – аналитическая функция

   в частности $x = 1 \quad e = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

   Теорема 1.4. *e – иррациональное*

   Доказательство. Пусть не так $\implies e = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$

   Т.к. $2 < e < 3$ – известная грубая оценка, то $e \notin \mathbb{Z}$

   $\implies n \geqslant 2$

   Пишем Формулу Тейлора-Лагранжа $e = \frac{m}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1}$

   $(n+1)! m = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \frac{e^\theta}{n+1} \implies \frac{e^\theta}{n+1} \in \mathbb{Z}$, что невозможно, т.к. $n + 1 \geqslant 3 \quad 1 < e^\theta < 3$ □

2. $f(x) = \sin x$

   $f^{(k)}(x) = (D^k \sin) x = \sin(x + \frac{\pi k}{2})$

   $L =< \sin x, \sin x >= \{a \cos x + b \sin x | a, b \in \mathbb{R}\}$ – линейное пространство

   $L \to \mathbb{R}^2 \quad a \cos x + b \sin x \to (a, b)$

   $D : L \to L$

   $D \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$

   $(\sin x)^{(m)} = \sin(x + \frac{\pi m}{2} \quad x_0 = 0$

   $(\sin x)^{(2k)}\mid_{x=0} = \sin(0 + \pi k) = 0$

   $(\sin x)^{(2k+1)}|_{x=0} = \sin(\frac{\pi}{2} + \pi k) = (-1)^m$

   $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2x+1} + O(x^{2n+1})$ ФТП

   $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{\sin \theta}{(2x+3)!} x^{2n+3} \quad \theta \in [0, 1]$ (формулы как бы до (n+1) просто (n+1)-ое слагаемое не учитывается)

   Т.к. $\left| \frac{\sin \theta x \cdot x^{2n+3}}{(2n+3)!} \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \to 0, n \to \infty$

   Т.о. $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

3. $f(x) = \cos x$ – всё по аналогии

   $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(2^{2n})$ ФТП

   $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \frac{\cos\theta x}{(2n+2)!} x^{2n+2}$

   ФТЛ $\left|\cos x - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}\right| \leqslant \left|\frac{\cos\theta x}{(2n+2)!} x^{2n+2}\right|$

   $\cos x$ – аналитическая функция

   $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$

   $e^{ix} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(i)^k}{k!} x^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{i(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \cos x + i \sin x$

   $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

   $e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a(\cos b + i \sin b)$

   $\boxed{e^{\pi i} = -1}$

4. $f(x) = \ln(1+x)$

   $f'(x) = \frac{1}{1+x}$

   $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$

   $f^{III}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$

   $f^{IV} = -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4}$

   $f^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$

   $f^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot (n-1)! \quad x_0 = 0$

   $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n + \frac{(-1)^{n+2} n!}{(1+\theta x)^{n+1} \cdot (n+1)!} x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \frac{(-1)^{n+2} x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}(n+1)}$ ФТЛ

   ФТП $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + o(x^n)$

   При каких x ряд Тейлора будет сходиться к $\ln(1+x)$

   $|R_n(x)| = \left|\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}(n+1)}\right| \to 0, n \to \infty$

   $\theta \in [0, 1]$

   $x = 1 \quad \left|\frac{1}{(1+\theta)^{n+1}(n+1)}\right| \to 0$

   Фокус авансом $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$

   $\sqsupset |x| < 1$

   $\ln(1+x) = \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{1+t} = \int\limits_0^{x} (1 - t + t^2 - t^3 \ldots) dt = (t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4})|_0^x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$

5. $f(x) = (1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$

   $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1)}$

   $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$

   $f^{(k)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k)}$

   $f^{(k)}(0) = \alpha\ldots(\alpha-k+1)$

   Если $\alpha \in \mathbb{N}$, то есть некторое N $f^{(N)}(x) = 0$

   А если α – ненатуральное ненулевое число, то производная считается бесконечное число раз

   $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} \cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$

$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + \frac{(-1)(-1-1)}{2!}x^2 + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!}x^3 + \ldots = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)x^n + o(x^n)$

$\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = 1 - \frac{2}{1!}x + \frac{-2(-3)}{2!}x^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{(-2)\ldots(-n-1)}{n!}x^n + o(x^n) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots + (-1)^n(n+1)x^n + o(x^n)$

$\frac{1}{(1+x)^2} = -\left(\frac{1}{1+x}\right) = (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)x^n + \ldots)' = 1 - 2x + 3x^2 + \ldots + (-1)^{n+1}nx^{n-1} + \ldots$

$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \ldots = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \ldots$

6. $f(x) = \operatorname{tg} x$

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7)}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + O(x^8)} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7)}{1+t} = (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7))(1 + t + t^2 + O(t^3)) + (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7))(1 + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}) + (1 + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720})^2 + o(x^5)) = (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7))(1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^4}{4} + o(x^5)\right) = (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7))(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5) = (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}) + \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12}\right) + \left(\frac{5}{24}x^5\right) + o(x^5) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$ до $o(x^5)$