

Конспект по Математическому Анализу

Коченюк Анатолий 11М

Глава 1

Производные высших порядков

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

$\square f$ – дифференцируема на $(a; b)$ $\iff \exists f'$ также дифференцируема на (a, b) $(f')' = f''$ это называется двойной производной

Замечание 1.1. Из дифференцируемости \implies непрерывность, т.е. $\exists (f')' \implies f' - \text{непрерывна} \implies$ в итоге исходная функция $f' \in C^1(a; b)$, т.е. была непрерывно дифференцируема (гладкая)

Аналогично по индукции определяется n -ая производная (производная n -го порядка) от f $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, если правая часть имеет смысл

Обозначения:

- f^n – Лагранж
- $\frac{d^n f}{dx^n}$ – Лейбниц
- $D^n f$ – Коши ($D : f \rightarrow f'$ оператор дифференцирования)

Если n мало, то часто пишут нужное количество чёрточек f'', f''' . Аналогия с римскими цифрами I, II, III , иногда пишут f^{IV}, f^V

Определение 1.1. Функция f называется n раз дифференцируемой на множестве $E \in \mathbb{R}$, если она n раз дифференцируема в каждой точке E

Если f n раз дифференцируема на множестве E и $f^{(n)}$ – непрерывна, то говорят, что f n раз непрерывно дифференцируема на E , Класс $C^n(E)$ (C^n – гладкая)

Замечание 1.2. Из n раз дифференцируемости \implies все $f^{(k)}, k = \overline{1, n-1}$ – непрерывны, т.е. $f \in C^k(E)$

Кстати $f^0 = f$ (0-ая производная) $C = C^0$

Определение 1.2. Функция f называется бесконечно дифференцируемой на E , если в $\forall x \in E \exists$ производные всех порядков

Класс таких функций называется $C^\infty(E)$

$e^x, \sin x, \cos x \in C^\infty(\mathbb{R})$

$\sqrt{x}, \ln x \in C^\infty(0; +\infty)$

Определение 1.3. f называется бесконечное число раз непрерывно дифференцируемой, если производная любого порядка существует и непрерывна

Ясно, что классы $C^n(E)$ ”уменьшаются” с ростом n

Лемма 1.1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad C^n(E) \supset C^{n+1}(E) \supset C^\infty(E)$, причём все включения строгие

Доказательство. Предъявим функцию $f_n : f_n \in C^n(\mathbb{R})$, но $f_n \notin C^{n+1}(\mathbb{R})$, т.е. $f_n^{(n)}$ – не дифференцируема

Заведём последовательность функций $f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} & , x > 0 (\geq) \\ 0 & , x \leq 0 (<) \end{cases}$

Очевидно $f'_n = f_{n-1}, n \in \mathbb{N}$

$$n = 0 \quad f_0(x) = \begin{cases} x, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}$$

$f_0 \notin C^1(\mathbb{R})$, у неё в 0 разрыв 1-го рода $f'_0(-0) = 0, f'_0(+0) = 1$

Таким образом $d_n^{(n)} = f_0 \in C(\mathbb{R})$, но $f_n^{(n+1)} = f'_0 \notin C(\mathbb{R})$ □

1.1 Дифференциал f

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

$$df = f'(x_0)dx \quad df(x_0, dx) = f'(x_0)dx$$

$$\text{или } (df(x_0))(dx) = f'(x_0)dx$$

дифференциал – линейная функция от приращения $\Delta x = dx$ – это один аргумент

точка x_0 – параметр

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0, dx)}{dx} \text{ – это не зависит от } dx$$

$$\frac{df}{dx} = f'(x)$$

Определение 1.4 (Дифференциал n -го порядка). $\square f$ – n раз дифференцируема в $x_0 \in E$

$(f : E \rightarrow \mathbb{R})$ Величина

$$d^n f(x_0, dx) = f^{(n)}(x_0)dx^n$$

называется дифференциалом n -го порядка в точке x_0

$$dx^n = (dx)^n = dx \cdot dx \cdot \dots \cdot dx \quad dx \text{ – единый символ}$$

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx$$

Замечание 1.3. Дифференциал – это обычное число т.е. это числовая функция

Теорема 1.1 (Теорема об арифметических действиях со старшими производными). $\square f, g : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ и n раз дифференцируемы в $x_0 \in (a; b)$. Тогда

$$1. \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha f(x) + \beta g(x))^{(n)}|_{(x_0)} = \alpha f^{(n)}(x_0) + \beta g^{(n)}(x_0)$$

$$2. \quad \text{Формула Лейбница } (fg)^{(n)}|_{x=x_0} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x_0)g^{(n-k)}(x_0)$$

Доказательство. (по индукции)

$$n = 1 \quad \text{всё известно } (fg)' = f'g + fg'$$

$n \rightarrow n+1$ п.1 – очевиден

$$(\alpha f + \beta g)^{(n+1)} = ((\alpha f + \beta g)^{(n)})' = (\alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)})' = \dots$$

$$(fg)^{(n+1)} = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} \right)' = \sum_{k=0}^n C_n^k (f^{(k)} g^{(n-k)})' = \sum_{k=0}^n C_n^k (f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}) = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} +$$

$$\sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} = f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} = f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} +$$

$$\sum_{i=1}^n C_{n-1}^{i-1} f^{(i)} g^{(n-i+1)} + \sum_{k=1}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} = f g^{(n+1)} + f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^n (C_{n-1}^{k-1} + C_n^k) f^{(k)} g^{(n-k+1)} = f g^{(n+1)} + f^{(n+1)} g +$$

$$\sum_{k=1}^n (C_{n+1}^k) f^{(k)} g^{(n-k+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} \quad \square$$

Примеры:

$$1. \quad (x^\alpha)^{(n)} = \alpha \cdot (\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1) x^{\alpha-n}$$

$$2. \quad \square \alpha = -1 \quad \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \text{ ДЗ – проверить В}$$

$$3. \quad (\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n} \text{ ДЗ – проверить}$$

$$4. \quad (a^x)^{(n)} = ((a^x)')^{(n-1)} = (a^x \ln a)^{(n-1)} = a^x (\ln a)^n$$

5. $L = \langle \cos, \sin \rangle = \{ \alpha \cos x + \beta \sin x \mid \alpha, \beta, x \in \mathbb{R} \}$

$P : L \rightarrow L$ "поворот на 90 градусов против часовой стрелки"

$$(P(\cos))(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \quad (P(\sin))(x) = \sin(x + \pi/2)$$

$$\sin^{(n)} = P^n(\sin) \quad \cos^{(n)} = P^n(\cos)$$

1.2 Формула Тейлора

$\square T_n(x)$ какой-то многочлен степени $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$$

$$n=1 \quad T_n(x) = ax + b = a(x - x_0) + b - ax_0 \quad a_1 = a \quad a_0 = b - ax_0$$

$$n \rightarrow n+1 \quad T_{n+1}(x) = P_n(x) \cdot (x - x_0) + T_{n+1}(x_0) \quad P_n - \text{какой-то многочлен, на который мы делим}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x - x_0)^k \text{ всё}$$

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x$$

$$T_n^{(m)} = \sum_{k=m}^n a_k k(k-1) \cdot (k-m+1) (x - x_0)^{k-m}$$

$$T_n^{(m)}(x_0) = a_m m(m-1) \dots 1 = a_m \cdot m!$$

$$a_m = \frac{T_n^{(m)}(x_0)}{m!} - \text{готовая формула для } a_m$$

T.O.

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{T_n^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$\square f$ - произвольная функция $(a; b) \rightarrow \mathbb{R}$

$\square f$ - n раз дифференцируемая а $x_0 \in (a; b)$

Конечно, формула

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

неверна, но оказывается, что она даёт хорошее приближение к функции f

Определение 1.5. Многочленом Тейлора степени n для функции f в точке x_0 называется

$$T_{n,x_0}(f) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)$$

T - Тейлор Taylor

Определение 1.6. Остаток $R_{n,x_0} f(x) = f(x) - T_{n,x_0} f(x)$ (остаточный член)

Определение 1.7. Формула Тейлора

$$f(x) = T_{n,x_0} f(x) + R_{n,x_0} f(x)$$

Пока что эта формула полностью бессодержательная и просто является переписанным определением остатка

Содержание появляется, когда что-то говорить о R_{n,x_0} в смысле малости, ограниченности и т.п.

Существуют разные формулы записи этого остатка: Пеано, Лагранжа и Коши.

Лемма 1.2. $\forall m = \overline{0, n} \quad f^{(m)}(x_0) = T_{n,x_0}^{(m)}(x_0)$

Доказательство. было доказано, что $T(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k \implies T^{(m)}(x_0) = m! a_m$

$$\text{Из этого} \implies T_{n,x_0}^{(m)} f(x_0) = a_m \cdot m! = f^{(m)}(x_0) \quad m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} \quad \square$$

Замечание 1.4. Существует единственный многочлен степени n , обладающим свойством из леммы выше (для данной функции $f(x)$) и именно он и есть многочлен Тейлора

Теорема 1.2 (Формула Тейлора - Пеано). $\square n \in \mathbb{N}, \square f - n$ раз дифференцируема в $x_0 \in (a; b)$. Тогда

$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + o((x - x_0)^n) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

$$\text{т.е. } R_{n,x_0}f(x) = o((x - x_0)^n)$$

Доказательство. Для упрощения записи пишем $T(x)$ вместо $T_{n,x_0}f(x)$ и $R(x)$ вместо $R_{n,x_0}f(x)$

Дано $R(x) = f(x) - T(x)$ и по лемме $f^{(m)}(x_0) = T^{(m)}(x_0) \forall m = \overline{0, n}$

т.е. $R^{(m)}(x_0) = 0 \forall m = \overline{0, n}$

Достаточно доказать такую лемму

Лемма 1.3. *if* $R^{(m)}(x_0) = 0 \quad \forall m = \overline{0, n} \implies R(x) = o((x - x_0)^n)$

Из этой Леммы очевидно следует теорема

Доказательство. $n = 0 \quad R(x) = f(x) - T(x) = f(x) - f(x_0) \quad T_{0,x_0}f(x) = f(x_0)$

т.к. f - непрерывна в 0 $f(x) - f(x_0) = 0(1), x \rightarrow x_0$ (по определению)

(0 - дифференцируемость - непрерывность)

$n = 1 \quad R(x) = f(x) - T_{1,x_0}f(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$ (по определению дифференцируемости в x_0)

$n \rightarrow n + 1 \square R(x) = o((x - x_0)^m)$, т.е. $\frac{R(x)}{(x - x_0)^m} \rightarrow 0 \quad x \rightarrow x_0 (x \neq x_0) \quad m = \overline{0, n}$

Надо показать, что $R(x) = o((x - x_0)^{n+1}) \iff \frac{R(x)}{(x - x_0)^{n+1}} \rightarrow 0$, при $x \rightarrow x_0$

Воспользуемся языком последовательностей (языком Гейне)

$\square x_i \rightarrow x_0$ и $x_i \neq x_0$ - произвольная последовательность

Считаем x_i лежит между x_0 и x

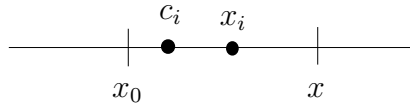


Рис. 1.1: xs

$$\triangleleft \frac{R(x_i)}{(x_i - x_0)^{n+1}} = \frac{R(x_i) - R(x_0)}{(x_i - x_0)^{n+1}} = (*)$$

Формула Лагранжа $R(x_i) - R(x_0) = R'(c_i)(x_i - x_0) \quad (c_i \text{ между } x_0 \text{ и } x_i) \quad |c_i - x_0| \leq |x_i - x_0|$

$$(*) = \frac{R'(c_i)(x_i - x_0)}{(x_i - x_0)^{n+1}} = \frac{R'(c_i)}{(x_i - x_0)^n} \rightarrow 0, x \rightarrow x_0$$

$$\left| \frac{R(x_i)}{(x_i - x_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{|R'(c_i)|}{|x_i - x_0|^n} \leq \frac{|R'(c_i)|}{|c_i - x_0|^n}$$

$R'(c_i)$ - уже удовлетворяет индукционному предположению

$R - n + 1$ раз дифференцируема $\implies \tilde{R} = R'$ и .. дифференцируемо в x_0 и $\tilde{R}^{(m)}(x_0) = 0, m = \overline{0, n} \implies \frac{\tilde{R}(c_i)}{(c_i - x_0)^n} \rightarrow 0, c_i \rightarrow x_0$

□

□

Определение 1.8. Формула Тейлора для $x_0 = 0$ называется формулой Маклорена

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

Замечание 1.5. \square выполнено условие теоремы и $\square P_n(x)$ – это такой многочлен степени n : $f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n) \Rightarrow P_n(x) = T_{n,x_0}f(x)$

Иногда это замечание берут в качестве определения многочлена Тейлора

Если f – n раз дифференцируема в x_0 (т.е. условие теоремы), то оба определения совпадают
но, если f – не дифференцируема, то второе определение шире

Пример 1.1. $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin \mathbb{Q} \\ x^n, x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

f – непрерывна на \mathbb{R} (непрерывна только в 0), в остальных точках разрыв

Т.е. это означает, что f – не дифференцируема при $x \neq 0$

Но в 0 $\nexists f''$

$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - 0} = \nexists$, т.к. $f'(x)$ – не определена

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & , x \notin \mathbb{Q} \\ x^{n-2} & , x \in \mathbb{Q} \end{cases} = 0$$

У f отсутствует $T_{2,0}f(x) \Rightarrow T_{\geq 2,0}f(x)$ тоже не существует

Но $P_{n-1}(x)$ в смысле второго определения существует $P_{n-1} \equiv 0$

$f(x) = 0 + o(x^{n-1}) \iff$ сама f есть $p(x^{n-1})$

Теорема 1.3 (Глобальная формула Тейлора). $\square f$ – $n+1$ раз дифференцируема на $(a; b)$

$\square \phi$ – произвольная функция, 1 раз дифференцируемая на $(a; b)$ и $\phi' \neq 0$ на $(a; b)$ $\square x_0 \in (a; b)$ Тогда $\forall x \in (a; b)$

$\exists C_x$, лежащие между x_0, x :

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{\phi'(C_x)n!} f^{(n+1)}(C_x)(x - C_x)^n$$

Доказательство. На $(a; b)$ рассмотрим функцию

$$F(t) = f(x) - T_{n,x}f(t) = f(x) - \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right)$$

– как бы фиксируется, а t – как бы меняется

$f - (n+1)$ раз дифференцируема на $(a; b) \Rightarrow F(t) - 1$ раз дифференцируема

$$F'(t) = - \left(f'(t) + (-f'(t)) + f''(t)(x-t) + f''(t)(x-t)(-1) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}(-1) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \right)$$

Применим к F и ϕ формулу Коши. $\exists C_x$ между x_0, x : $\frac{F(x) - F(x_0)}{\phi(x) - \phi(x_0)} = \frac{F'(C_x)}{\phi'(C_x)}$

Заметим: $F(x) = F(t) |_{t=0} = 0$; $F(x_0) = f(x) - T_{n,x_0}f(x) = R_{n,x_0}f(x)$

$$\frac{0 - R_{n,x_0}f(x)}{\phi(x) - \phi(x_0)} = \frac{\left(-\frac{f^{(n+1)}(C_x)}{n!} \right) (x - C_x)^n}{\phi'(C_x)}$$

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{\phi'(C_x)n!} \cdot f^{(n+1)}(C_x) \cdot (x - C_x)^n$$

\square

Следствие 1.1. 1. $\square \phi(t) = x - t$ $\phi(x) = 0$ и $\phi(x_0) = x - x_0$ $\phi'(t) = -1$

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{-(x-x_0)}{(-1)n!} f^{(n+1)}(C_x) \cdot (x - C_x)^n = \frac{f^{(n+1)}(C_x)}{n!} (x - x_0)(x - C_x)^n$$

$$\square \theta \in [0; 1] : (x - C_x) = (1 - \theta)(x - x_0) \quad \theta = \frac{C_x - x_0}{x - x_0} \quad C_x = x_0 \quad \theta = 0 \quad C_x = x \quad \theta = 1$$

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(C_x)}{n!} (1 - \theta)^n (x - x_0)^{n+1}, \text{ где } \theta = \frac{C_x - x_0}{x - x_0} \in [0; 1]$$

Остаточный член в формуле Коши

$$2. \square \phi(t) = (x - t)^{n+1} \quad \phi(x) = 0, \quad \phi(x_0) = (x - x_0)^{n+1} \quad \phi'(t) = -(n+1)(x - t)^n$$

$$R_{n,x_0} = \frac{0 - (x - x_0)^{n+1}}{-(n+1)(x - C_x)^n n!} f^{(n+1)}(C_x) \cdot (x - C_x)^n = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

3. Формула Лагранжа – частный случай формулы Тейлора-Лагранжа для $n = 0$

$$f(x) - f(x_0) = f'(C_x) \cdot (x - x_0)$$

4. \square известно, что $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ на $(a; b)$

$$\text{Тогда } |R_{n,x_0}f(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}$$

5. Сравним Тейлора-Пеано и Тейлора-Лагранжа

Из Пеано $R_{n,x_0}f(x) = O((x - x_0)^{n+1})$ (в случае, если $f^{(n+1)}$ локально ограничено в x_0)

$O((x - x_0)^{n+1}) = o((x - x_0)^n)$, но $o((x - x_0)^n) \neq O((x - x_0)^{n+1})$

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(C_x)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

6. Снова рассмотрим в качестве $f(x) = T_n(x)$ – многочлен Лагранжа

$$\text{т.к. } T_n^{(n+1)}(x) \equiv 0$$

$$\text{Из формулы Тейлора-Лагранжа: } T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{T_n^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + 0$$

7. $f - \infty$ число раз дифференцируема на $(a; b)$ $f \in C^\infty(a; b)$

\square все $f^{(k)}(x)$ равномерно ограничено на $(a; b) \iff \exists M : |f^{(k)}(x)| \leq M \forall k \in \mathbb{Z}^+, \forall x \in (a; b)$

$$|R_{n,x_0}f(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \quad \forall n$$

$$\implies |f(x) - T_{n,x_0}f(x)| = |R_{n,x_0}f(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \text{ т.к. } \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{n,x_0}f(x)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Ряд Тейлора

Любую n раз дифференцируемую функцию можно разложить с помощью формулы Тейлора-Пеано

Но не любую, даже ∞ раз дифференцируемую функцию можно представить рядом Тейлора

Если функция в x_0 совпадает со своим рядом Тейлором, они называются аналитическими

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}), f^{(k)}(0) = 0 \quad T_{n,0}f(x) \equiv 0 \implies \text{ряд Тейлора} \equiv 0$$

1.3 Преобразование уравнений и неравенств

$$(1) f(x) \quad (2) g(x) = 0$$

Если любой корень (1) является корнем (2), то (2) – следствие (1) (корни не теряются) $f(x) \implies g(x)$

Если любой корень (1) является корнем (2) и любой корень (2) является корнем (1), то уравнения называются равносильными $f(x) \iff g(x)$

корни не теряются и лишние не появляются

Типичные преобразования:

приведение подобных слагаемых

$$f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$$

$$f(x) = g(x)$$

приведение расширяет ОДЗ, добавление же, наоборот, сужает

$$f + h = g + h \iff \begin{cases} f = g \\ \text{ОДЗ} \end{cases}$$

Деление на общий множитель Не делим, а расщипляем

$$fh = gh \iff fh - gh = 0 \iff (f - g)h = 0$$

Когда можно "делить"?

Когда область определения функции h это всё \mathbb{R} и $h(x) \neq 0 \forall x$

Возведение в квадрат

$$f(x) = g(x) \implies f^2(x) = g^2(x)$$

1.4 Формулы (ряды) Тейлора для элементарных функций

1. $f(x) = e^x$

Ясно, что $(e^x)^{(k)} = e^x \quad (e^x)^{(k)}|_{x=0} = 1$

Формула Тейлора-Пеано $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + o(x^n)$

Формула Тейлора-Лагранжа $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \theta \in [0, x], x > 0 \quad (\text{либо } x \in [x, 0], \text{ если } x < 0)$

или $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \theta \in [0, 1]$

Из этого $\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{e^{\theta x} \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!}$

Если x – фиксирована $\frac{e^{\theta x} \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow \left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty \iff e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (по определению ряда) – аналитическая функция

в частности $x = 1 \quad e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

Теорема 1.4. e – иррациональное

Доказательство. Пусть не так $\Rightarrow e = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$

Т.к. $2 < e < 3$ – известная грубая оценка, то $e \notin \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n \geq 2$

Пишем Формулу Тейлора-Лагранжа $e = \frac{m}{n} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1}$

$(n+1)!m = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} + \frac{e^\theta}{n+1} \Rightarrow \frac{e^\theta}{n+1} \in \mathbb{Z}$, что невозможно, т.к. $n+1 \geq 3 \quad 1 < e^\theta < 3$ □

2. $f(x) = \sin x$

$$f^{(k)}(x) = (D^k \sin)x = \sin(x + \frac{\pi k}{2})$$

$L = \langle \sin x, \cos x \rangle = \{a \cos x + b \sin x | a, b \in \mathbb{R}\}$ – линейное пространство

$$L \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad a \cos x + b \sin x \rightarrow (a, b)$$

$$D : L \rightarrow L$$

$$D \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$(\sin x)^{(m)} = \sin(x + \frac{\pi m}{2}) \quad x_0 = 0$$

$$(\sin x)^{(2k)}|_{x=0} = \sin(0 + \pi k) = 0$$

$$(\sin x)^{(2k+1)}|_{x=0} = \sin(\frac{\pi}{2} + \pi k) = (-1)^k$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + O(x^{2n+1}) \quad \text{ФТП}$$

$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{\sin \theta}{(2n+3)!} x^{2n+3} \quad \theta \in [0, 1]$ (формулы как бы до $(n+1)$ просто $(n+1)$ -ое слагаемое не учитывается)

Т.к. $\left| \frac{\sin \theta x \cdot x^{2n+3}}{(2n+3)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

Т.о. $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

3. $f(x) = \cos x$ – всё по аналогии

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(2^{2n}) \quad \text{ФТП}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \frac{\cos \theta x}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

$$\text{ФТЛ} \left| \cos x - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \right| \leq \left| \frac{\cos \theta x}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right|$$

$\cos x$ – аналитическая функция

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i)^k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

$$\boxed{e^{\pi i} = -1}$$

4. $f(x) = \ln(1+x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f^{IV}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{(1+x)^4}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot (n-1)! \quad x_0 = 0$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot x^k + \frac{(-1)^{n+2} n!}{(1+\theta x)^{n+1} \cdot (n+1)!} x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \frac{(-1)^{n+2} x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1} (n+1)} \quad \text{ФТЛ}$$

$$\text{ФТП} \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + o(x^n)$$

При каких x ряд Тейлора будет сходиться к $\ln(1+x)$

$$|R_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1} (n+1)} \right| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

$$\theta \in [0, 1]$$

$$x = 1 \quad \left| \frac{1}{(1+\theta)^{n+1} (n+1)} \right| \rightarrow 0$$

$$\square x \in [0, 1) \quad |R_n(x)| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} < \frac{x^{n+1}}{n+1} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

$$x = 1 \quad \text{ряд} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots = \ln 2 \quad R_N = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

$$x > 1 \quad |R_n(x)| \rightarrow \infty \quad \text{ряд расходится} \quad \frac{x^n}{n} \not\rightarrow 0$$

Т.о. сходимость есть в $x \in [0, 1]$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + \frac{(-1)^n n!}{(1+c)^{n+1} n!} \cdot x \cdot (x-c)^n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1} (1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1} (1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

$$0 < \frac{1+\theta}{1+\theta x} < 1 \iff 1-\theta < 1+\theta x \iff 0 < \theta x + \theta = \theta(x+1) \text{ yes!}$$

$$\text{Фокус авансом} \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

$$\square |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1-t+t^2-t^3 \dots) dt = (t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4})|_0^x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$5. f(x) = (1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

$$f^{(k)}(0) = \alpha \dots (\alpha-k+1)$$

Если $\alpha \in \mathbb{N}$, то есть некоторое N $f^{(N)}(x) = 0$

А если α – ненатуральное ненулевое число, то производная считается бесконечное число раз

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + \frac{(-1)(-1-1)}{2!}x^2 + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!}x^3 + \dots = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = 1 - \frac{2}{1!}x + \frac{-2(-3)}{2!}x^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}x^3 + \dots + \frac{(-2)\dots(-n-1)}{n!}x^n + o(x^n) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots + (-1)^n(n+1)x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = -\left(\frac{1}{1+x}\right)' = (1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots)' = 1 - 2x + 3x^2 + \dots + (-1)^{n+1} n x^{n-1} + \dots$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \dots = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$$

$$6. f(x) = \operatorname{tg} x$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7)}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + O(x^8)} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7)}{1+t} = (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7))(1+t+t^2+O(t^3)) + (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7))(1+(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}) + (1+(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720})^2 + o(x^5))) = (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7))(1+(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}) + (1+(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720})^2 + o(x^5))) = (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7))(1+\frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)) = (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}) + (\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12}) + (\frac{5}{24}x^5) + o(x^5) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

до $o(x^5)$

$$7. \text{ Гиперболические функции}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\operatorname{ch}(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos x$$

$$\operatorname{sh}(ix) = i \sin x$$

$$\text{Если } f - \text{аналитическая} \iff f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$f(\varepsilon) = a_0 + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + \dots = a_0 + a_1 \varepsilon$$

$$\text{С другой стороны } f(\delta x) = f(0) + f'(0) \cdot \delta x + o(\delta x)$$

$$\text{Сравнивая } f'(0) = a_1 \quad f(\varepsilon) = f(0) + f'(0)\varepsilon]$$

$$8. \operatorname{arctg} x$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k - \text{степенной ряд}$$

интервал сходимости $|x-x_0| < R$ – радиус сходимости. не запрещено $R = \pm\infty$

Теорема

Теорема 1.5. *Степенной ряд, внутри интервала сходимости, можно почленно дифференцировать и интегрировать, при этом интервал сходимости не меняется*

$$1. f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$$

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$

ДЗ:

1. $\frac{1}{1+x^2} = \dots$ разложить в ряд по формуле геометрической прогрессии

2. $\arctg x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \dots$

1.5 Выпуклость функций

Определение 1.9. $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$

Тогда

1. f называется *выпуклой вниз* (или просто *выпуклой*), если $\forall x_1, x_2 \in]a, b[$ и $\forall t \in (0, 1)$ выполняется $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ ($1 \leq$)
2. f называется *выпуклой вверх* (или *вогнутой*), если выполняется противоположное неравенство $f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ ($1 \leq$)

Если неравенства строгие и $x_1 \neq x_2$, то говорят, что f строго выпуклая или строго вогнутая

Так как переменные x_1 и x_2 входят в неравенство симметрично, то можно всегда считать (для удобства), что $x_1 < x_2$

1.5.1 Геометрический смысл

$\square x_1, x_2 \in]a, b[$ и $x_1 < x_2$

$$\square x = tx_1 + (1-t)x_2 \implies x = t(x_1 - x_2) + x_2 \implies t = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

Тогда $1 - t = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}$

$$(1 \leq) \iff f(x) \leq \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} f(x_2)$$

$$x_1 < x < x_2$$

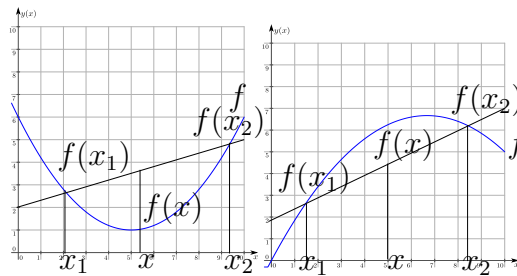


Рис. 1.2: Выпуклость

Выпуклость вниз означает, что график функции лежит не выше хорды, соединяющей точки графика. Или график функции, рассматриваемый между точками x_1, x_2 лежит ниже хорды

Аналогично, выпуклость вверх геометрически означает, что дуга графика лежит не ниже (выше) хорды, соединяющей точки графика.

Примеры:

1. $f(x) = kx + b$ – аффинная функция. Нестрого выпукла и вниз и вверх одновременно

2. $f(x) = x^2$ строго выпукла на \mathbb{R}
 $(tx_1 + (1-t)x_2)^2 = t^2x_1^2 + (1-t)^2x_2^2 + 2t(1-t)x_1x_2$
хотим $\leq tx_1^2 + (1-t)x_2^2$
 $< \dots >$

Теорема 1.6. Пусть f, g – выпуклы (или строго выпуклы). $\alpha > 0$ Тогда

1. $f + g$ – выпукла (строго)
2. αf – выпукла (строго)
3. $-f$ – вогнута

Теорема 1.7. $\square f$ – выпукла на $< a, b >$ и $x_1 < x_2$

Тогда на $< a, b > \setminus [x_1, x_2]$ выпукла

$$f(x) \geq \frac{x-x_2}{x_1-x_2}f(x_1) + \frac{x_1-x}{x_1-x_2}f(x_2)$$

Т.е. концы хорды на рисунке лежат ниже графика f

Доказательство. \triangleleft случай $a < x < x_1 < x_2$

Запишем $2 \leq$ заменим $x \leftrightarrow x_1$

$$f(x_1) \leq \frac{x_1-x_2}{x-x_2}f(x) + \frac{x-x_1}{x-x_2}f(x_2) \text{ Домножим на } (x-x_2) > 0$$

$$(x-x_2)f(x_1) \geq (x_1-x_2)f(x) + (x-x_1)f(x_2)$$

$$(x_2-x_1)f(x) \geq (x_2-x)f(x_1) + (x-x_1)f(x_2)$$

$$f(x) \geq \frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2) \text{ ЧТП}$$

Второй случай доказывается аналогично □

Теорема 1.8 (О трёх хордах). $\square f$ – выпуклая на $< a, b >$

$x_1, x_2, x_3 \in < a, b >$ и $x_1 < x_2 < x_3$

Тогда $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ (Если f – строго выпукла, то неравенства строгие)

Доказательство. □

ДЗ:

1. Доказать теорему

2. Доказать выпуклость:

(a) $x^n, n \in \mathbb{N}, x > 0$

(b) e^x на \mathbb{R}

3. Доказать неравенства

(a) $\frac{1}{2}(x^n + y^n) \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$

(b) $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)} \forall x \neq y; x, y > 0; n \in \mathbb{N}$

Теорема 1.9 (Об односторонней дифференцируемости выпуклых функций). $\square f$ – выпукла на промежутке $< a, b >$

Тогда $\forall x_0 \in (a, b) \quad \exists f'_-(x_0), f'_+(x_0)$ лево и правосторонние производные

Причём $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$

Доказательство. По теореме о 3-х хордах

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_4)}{x_3-x_4} \leq \dots$$

$$\triangleleft g(\xi) = \frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}, \xi \in (a, b) \text{ и } \xi \neq x_0$$

$g(\xi) \uparrow \iff$ Теорема о трёх хордах

$$\square \xi < x_0 < \eta \implies \frac{f(\xi)-f(\eta)}{\xi-\eta} \leq \frac{f(\eta)-f(x_0)}{\eta-x_0} (*)$$

$\square \eta$ – фиксированная ξ – меняется $\implies g(\xi) \uparrow$ и ограничена сверху числом $g(\eta) \implies \exists \lim_{\xi \uparrow x_0 - 0} g(\xi) = f'_-(x_0)$
чтд

Аналогично фиксируем ξ и меняем $\eta \implies g(\eta) \downarrow$ и ограничена снизу числом $g(\xi) \implies \exists \lim_{\eta \downarrow x_0 + 0} g(\eta) = f'_+(x_0)$

В (*) $\xi \uparrow x_0, \quad \eta \downarrow x_0 \implies f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$

□

Следствие 1.2. Если f выпукла на $\langle a; b \rangle$, то она непрерывна на $(a; b)$

Доказательство. дифференцируемость \implies непрерывность

$\square x_0 \in (a; b)$

Из левосторонней дифференцируемости \implies левосторонняя непрерывность в $x_0 \quad f(x) \rightarrow f(x_0), x \uparrow x_0$

Из правосторонней дифференцируемости \implies правосторонняя непрерывность $f(x) \rightarrow f(x_0), x \downarrow x_0$

$\implies f$ – просто непрерывна в x_0

□

Замечание 1.6. На концах промежутка могут быть разрывы

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2} & x \in (-1; 1) \\ 1 & x = \pm 1 \end{cases}$$

f – выпукла, но не непрерывна

Но, кстати, если разрешить несобственные значения для f'_\pm

$\exists f'_+(-1) = -\infty, \exists f'_-(1) = +\infty$, т.е. сама производная существует

Теорема 1.10 (выпуклость и касательные). $\square f$ – дифференцируема на $\langle a; b \rangle$. Тогда f будет выпуклой в том и только в том случае, если $\forall x_0, x \in \langle a; b \rangle$ выполняется $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

График f лежит выше касательной

Доказательство. Необходимость:

$\square f$ – выпукла. Если $x > x_0$. Возьмём $x_0 < \eta < x$

По теореме 1.8 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(\eta)-f(x_0)}{\eta-x_0}$

$\square h \downarrow x_0$

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq f'_+(x_0) = f'(x_0)$ Т.к. f дифференцируема по условию

$\implies f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ чтп

Если $x < x_0$

$\square x < \xi < x_0$

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}$

$\square \xi \uparrow x_0$

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq f'_-(x_0) = f'(x_0) \implies f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$ чтп

Достаточность:

$\square f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in \langle a; b \rangle$

$\square x_1 < x \leq x_2$ из $\langle a; b \rangle$

$$\begin{cases} f(x_1) \geq f(x) + f'(x)(x - x_1) \\ f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x)(x - x_2) \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{f(x_1)-f(x)}{x-x_1} \geq f'(x) \\ \frac{f(x_2)-f(x)}{x-x_2} \leq f'(x) \end{cases} \implies \frac{f(x_2)-f(x)}{x-x_2} \geq \frac{f(x_1)-f(x)}{x-x_2}$$

$$(x - x_2)(f(x_2) - f(x)) \leq (x - x_1)(f(x_1) - f(x))$$

$$f(x)((x - x_1) - (x - x_2)) \leq (x - x_1)f(x_1) - (x - x_2)f(x_2)$$

$$f(x) \leq \frac{x-x_1}{x_2-x}f(x_1) + \frac{x_2-x}{x_1-x}f(x_2)$$

Это неравенство из определения выпуклости $t = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

□

Замечание 1.7. Если для $x \neq x_0$ неравенство в условии теоремы строгое $\implies f$ будет строго выпуклой

Следствие 1.3. $\square f$ – произвольная выпуклая функция на $\langle a; b \rangle$. Тогда $\forall x_0 \in (a; b)$ по теореме 1.9 $\exists f'_\pm(x_0) \implies \exists$ лево и правосторонние касательные к f в точке x_0

Утверждается, что график f лежит выше \forall односторонней касательной

(правой) $y = f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0)$

(левой) $y = f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0)$

Доказательство. Если $x_0 = a$ или $x_0 = b$, то это частичный случай теоремы 1.10

$\square x_0 \in (a; b)$

\triangleleft случаи $f|_{<a; x_0]}$ $f|_{[x_0, b]}$ – оба выпуклые

По теореме 1.10 $\forall x \in <a; x_0] \quad f(x) \geq f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0)$

$\forall x \in [x_0, b) \quad f(x) \geq f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0)$

Теперь учтём $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$ (Теорема 1.9)

$x \in [x_0, b) \quad f(x) \geq f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0) \geq f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0)$

Т.е. график лежит и выше левосторонней касательной

Аналогично $x \in <a; x_0] \quad f(x) \geq f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0) \geq f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0)$ чтп \square

Определение 1.10. $\square f : <a; b> \rightarrow \mathbb{R}, \quad \square x_0 \in <a; b>$

прямая $y = l(x)$ называется опорной для функции f в точке x_0 , если выполняется $f(x_0) = l(x_0)$ и $f(x) \geq l(x) \forall x \in <a; b>$

Если же $f(x) > l(x) \forall x \in <a; b> \setminus \{x_0\}$, то $l(x)$ называется строго опорной

Следствие 1.4. Если f (строго) выпукла на $<a; b>$, то $\forall x \in <a; b> \exists$ (строго) опорная прямая

ДЗ:

1. $\square f$ – выпуклая на $<a; b>$. Тогда прямая $l(x) = f(x_0) + k(x - x_0)$ будет опорной к f в точке x_0 в том и только том случае, когда $k \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$
2. $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ на $(0; \frac{\pi}{2})$
3. $\ln(1+x) < x$ при $x > -1$ и $x \neq 0$
4. $\alpha > 1 \quad (1+x)^\alpha > 1 + \alpha x \quad \forall x \geq -1, x \neq 0$

Теорема 1.11 (Дифференциальные критерии выпуклости). 1. $\square f$ – непрерывна на $<a; b>$ и дифференцируема на $(a; b)$

Тогда f (строго) выпукла вниз $\iff f'(x)$ (строго) монотонна возрастает на $(a; b)$

2. $\square f$ непрерывна на $<a; b>$ и дважды дифференцируема на $<a; b>$. Тогда f выпукла вниз $\iff f''(x) \geq 0$ на $<a; b>$

Доказательство. 1. \implies По Теореме 1.10 f лежит выше касательной в любой точке. В $x_1 : f(x) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$

Возьмём $x = x_2 > x_1$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq f'(x_1) \quad (*)$$

В точке $x_2 : f(x) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2)$

Возьмём $x = x_1 < x_2$

$$-f'(x_2)(x_1 - x_2) \geq f(x_2) - f(x_1)$$

$$f'(x_2)(x_2 - x_1) \geq f(x_2) - f(x_1) \implies f'(x_2) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (**)$$

Из (*) и (**) $\implies f'(x_1) \leq f'(x_2) \implies f' \uparrow$

Если f строго выпукла, то неравенство будет строгим

$\iff \square f'(x) \uparrow$ на (a, b)

Возьмём $a < x_1 < x < x_2 < b$. По Теореме Лагранжа $\exists c_1 \in (x_1, x)$ и $\exists c_2 \in (x, x_2) : \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1)$ и $\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2)$

Т.к. $f' \uparrow$ и $c_2 > c_1 \implies f'(c_1) \leq f'(c_2)$

Т.о. $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad (***) \iff f(x) \geq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$ (см. теорему 10) А это определение выпуклости

(если $f \uparrow\uparrow$, то неравенство в (***) строгое \implies выпуклость строгая)

2. f – выпукла вниз $\iff f' \uparrow$ на (a, b)

По критерию монотонности $\iff (f')' \geq 0$ чтд

□

Замечание 1.8. В пункте 2 нельзя по аналогии с пунктом 1 сказать "Тогда и только тогда" Это неверно

Контпример: $f(x) = x^4$ – строго выпуклая вниз функция, т.к. график лежит строго выше касательной. Но $f''(x) = 12x^2$ и $f''(0) = 0$

Однако из $f''(x) > 0$ строгая выпуклость вытекает

Примеры:

1. $f(x) = a^x$ $f'(x) = a^x \ln a$ $f''(x) = a^x \ln^2(x) > 0 \implies f$ – строго выпукла вниз

2. $f(x) = \log_a x$ $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$ $f''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln a}$

Если $a > 1 \implies \ln a > 0 \implies f''(x) < 0 \implies f$ – строго вогнута (выпукла вверх)

Если $0 < a < 1 \implies \ln a < 0 \implies f''(x) > 0 \implies f$ – строго выпукла вверх

Определение 1.11. $\square f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in (a; b)$ Если:

1. \exists такое $\delta > 0$: f имеет разный характер выпуклости на $(x_0 - \delta, x_0]$ и $[x_0, x_0 + \delta)$

2. f – непрерывна в x_0

3. $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Замечание 1.9. Непрерывность \iff запрещаются разрывы первого рода

Запрещается, чтобы производная терпела разрывы

Замечание 1.10. Если $f \in C^2(a; b)$, то в точках перегиба $f''(x_0) = 0$ (необходимое условие перегиба)

Теорема 1.12 (Неравенство Йенсена). $\square f$ – выпукла вниз на $(a; b)$

$\square p_1, \dots, p_n$ – набор чисел, что $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

Тогда $\forall x_1, \dots, x_n \in (a; b)$ $f(\sum_{i=1}^n p_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n p_i f(x_i)$

Доказательство. Если $x_1 = x_2 = \dots = x_*$

$f(x_*) \leq f(x_*)$

Будем считать, что числа различные.

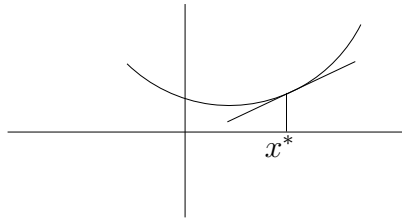


Рис. 1.3: оп

Можно брать любой набор чисел p_1, \dots, p_n и делить на их сумму

$$\square x^* = \sum_{k=1}^n p_k x_k \in (a, b) \forall k \quad a \leq x_k \leq b \quad a = \sum_{k=1}^n a \leq \sum_{k=1}^n p_k x_k \leq \sum_{k=1}^n p_k b = b$$

В точке x^* существует опорная прямая у графику $f(x) : l_{x^*}(x) = ax + b$

$l_{x^*}(x^*) = f(x^*)$ и $\forall x \quad f(x) \geq l_{x^*}(x)$

(причём, если f строго выпукла, то $f(x) > l_{x^*}(x) \forall x \neq x_*$)

Тогда $f(\sum_{k=1}^n p_k x_k) = f(x^*) = l_{x^*}(x^*) = l_{x^*}(\sum_{k=1}^n p_k x_k) = a \sum_{k=1}^n p_k x_k + b = \sum_{k=1}^n p_k (ax_k + b) = \sum_{k=1}^n p_k l_{x^*}(x_k) \leq$

$\sum_{k=1}^n p_k f(x_k)$ чтд

□

ДЗ:

$$1. \text{ еpi } f = \{(x, y) \mid x \in (a; b), y \geq f(x)\}$$

Доказать, что f – выпукла вниз \iff $\text{еpi } f$ – выпуклое множество

$$2. \square f(x) \text{ выпукла вниз на } (a; +\infty) \text{ и } y = \alpha x + \beta \text{ – её асимптота при } x \rightarrow \infty \implies f(x) \geq \alpha x + \beta \forall x \in (a; +\infty) \quad (\text{аналогично при } x \rightarrow -\infty)$$

Следствие 1.5. Если f строго выпукла вниз, а среди x -ов есть различные, то неравенство строгое

Следствие 1.6. Если f выпукла вверх (вогнута), то $f\left(\sum_{k=1}^n p_k x_k\right) \geq \sum_{k=1}^n p_k f(x_k)$

Следствие 1.7. В принципе можно $\Delta p_k \geq 0$ (просто нулевые коэффициенты удаляются из доказательства)

Замечание 1.11. $n = 2 \implies f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ (но это сразу следует из определения выпуклой функции)

Применение неравенства Йенсона:

$$1. \square x_1 \dots x_n > 0 \implies \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

$$f(x) = \ln x \quad f''(x) = \frac{1}{x} = ' - \frac{1}{x} < 0 \implies f \text{ – вогнутая (выпуклая вверх)}$$

$$\sum p_k x_k = \frac{1}{n} x_1 + \dots + \frac{1}{n} x_n$$

$$\implies \ln\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n}(\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n = \ln \sqrt[n]{x_1 \dots x_n})$$

2. Неравенство Гёльдера

Теорема 1.13.

Определение 1.12. Числа p и q называются сопряжёнными, если $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$p = \frac{q}{q-1} \quad p = \frac{q}{q-1}$$

Рассмотри набор чисел $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}$, который также трактуется как вектор

$$\square \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R} \quad \square p > 1 \text{ и } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\text{Тогда } \left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right|^{\frac{1}{p}} \cdot \left| \sum_{k=1}^n |b_k|^q \right|^{\frac{1}{q}}$$

Замечание 1.12. $p = q = 2 \implies$ Неравенство Коши-Буняковского Шварца

Доказательство. Т.к. очевидно, что $\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| |b_k|$ (неравенство треугольника)

То вместо a_k и b_k можно использовать $|a_k|$ и $|b_k|$, т.е. считать, что $a_k \geq 0$ $b_k \geq 0$

И надо доказать:

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Далее можно считать, что все $b_k > 0$ (слагаемые, где $b_k = 0$ можно просто отбросить)

$\triangleleft f(x) = x^p, p > 1$ – строго выпукла вниз на $[0, +\infty)$

$$\square p_k = b_k^q, x_k = a_k b_k^{1-q}$$

$$\text{Чтобы } \sum_{k=1}^n p_k x_k = \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

$$f\left(\frac{\sum_{k=1}^n p_k x_k}{\sum_{k=1}^n p_k}\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^n p_k f(x_k)}{\sum_{k=1}^n p_k} \quad \text{Напишем неравенство Йенсона в общей формулировке}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(\frac{\sum_{k=1}^n a_k b_k}{\sum_{k=1}^n b_k^q} \right)^p \leq \frac{\sum_{k=1}^n p_k x_k^p}{\sum_{k=1}^n b_k^q} = \frac{\sum_{k=1}^n a_k^p}{\sum_{k=1}^n b_k^q} \\
&p_k x_k^q = b_k^q a_k^p b_k^{p(1-q)} = a_k^p \quad p = \frac{q}{q-1} \\
&b_k^{p(1-q)} = b_k^{-q} \\
&\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^p \leq \sum_{k=1}^n \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{p-1} \quad \text{Возьмём корень } p \text{ степени и учтём, что } \frac{p-1}{p} = 1/q \\
&\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

□

ДЗ:

(а) Неравенство Гёльдера обращается в равенство если и только если выполнены два условия:

- i. Вектора $(|a_1|^p, \dots, |a_n|^p)$ и $(|b_1|^q, \dots, |b_n|^q)$ – сонаправлены
- ii. Все произведения $a_k b_k$ – одного знака

(б)

Определение 1.13. $\square n \in \mathbb{N}, r > 0, a_1, \dots, a_n \geq 0$ (или $r < 0, a_1, \dots, a_n > 0$)
 $M_r(\bar{a}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^r \right)^{\frac{1}{r}}$ Называется средним степенным порядка r чисел a_1, \dots, a_n
 $M_1(a)$ – среднее арифметическое, $M_2(a)$ – среднее квадратичное, $M_{-1}(a)$ – среднее гармоническое

Проверить:

- i. $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ $M_r(a) = \frac{1}{M_{-r}(\frac{1}{a})}$
- ii. $\min_{1 \leq k \leq n} a_k \leq M_r(a) \leq \max_{1 \leq k \leq n} a_k$
- iii. $\lim_{r \rightarrow +\infty} M_r(a) = \max_{1 \leq k \leq n} a_k$
 $\lim_{r \rightarrow -\infty} M_r(a) = \min_{1 \leq k \leq n} a_k$

Теорема 1.14 (О монотонности средних степенных). $\square 0 < r < s$ $a_1, \dots, a_n \geq 0$

$$\Rightarrow M_r(a) \leq M_s(a)$$

Доказательство. $\triangleleft f(x) = x^{\frac{s}{r}}$ т.к. $\frac{s}{r} > 1 \Rightarrow f$ – строго выпукла (вниз) на $[0, +\infty]$

Напишем неравенство Йенсена

$$f\left(\frac{a_1^r + \dots + a_n^r}{n}\right) \leq \frac{f(a_1^r) + \dots + f(a_n^r)}{n}$$

$$\left(\frac{a_1^r + \dots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{s}{r}} \leq \frac{a_1^s + \dots + a_n^s}{n} \quad \text{Берём корень } s\text{-ой степени}$$

$$\left(\frac{a_1^r + \dots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\frac{a_1^s + \dots + a_n^s}{n}\right)^{\frac{1}{s}}$$

□

Замечание 1.13. Т.к. f – строго выпукла, то если среди чисел a_1, \dots, a_n есть различные, то неравенство будет строгим.**Теорема 1.15.** $\square a_1, \dots, a_n > 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} M_r(a) = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \text{ – среднее геометрическое}$$

Доказательство. $M_r(a) = e^{\ln M_r(a)} = e^{\frac{1}{r} \ln \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^r} =$
 $a^r = 1 + r \cdot \ln a + O(r^2)$

$$\begin{aligned}
&= e^{\frac{1}{r} \ln \left(\frac{1}{n} (n + r \cdot (\ln a_1 + \dots + \ln a_n) + O(r^2)) \right)} = e^{\frac{1}{r} \ln \left(1 + \frac{r}{n} \ln(a_1 \dots a_n) + O(r^2) \right)} = \\
&\ln(1+z) = z + O(z^2) \\
&= e^{\frac{1}{r} \cdot \left(\frac{r}{n} \ln(a_1 \dots a_n) + O(r^2) \right)} = e^{\frac{1}{n} \ln(a_1 \dots a_n)} \cdot e^{\frac{O(r^2)}{r}} = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \cdot e^{O(r)} \rightarrow \sqrt[n]{a_1, \dots, a_n}
\end{aligned}$$

Следствие 1.8. Тогда при $r > 0$ $M_r(a) \geq M_0(a)$ (обобщённое неравенство Коши), причём равенство возможно лишь при равенстве всех a

$$\begin{aligned}
&\square a_1, \dots, a_n > 0 \quad \square s < r < 0 \implies 0 < -r < -s \\
&\text{По Th } M_{-r}\left(\frac{1}{a}\right) \leq M_{-s}\left(\frac{1}{a}\right) \\
&\frac{1}{M_r(a)} \leq \frac{1}{M_s(a)} \\
&\text{Т.к. средние степенные} > 0 \\
&M_s(a) \leq M_r(a) \quad M_s(a) \leq M_r(a) \leq M_0(a) \\
&\text{Вывод: Th справедлива и для отрицательных степеней} \\
&\text{Окончательно} \\
&r < s \text{ и } a_1, \dots, a_n > 0 \implies M_r(a) \leq M_s(a) \quad \forall r, s
\end{aligned}$$

Доказательство. 1. $0 < r < s$ – есть

2. $r < s < 0$ – есть

3. $r < 0 < s$ $M_r(a) \leq M_0(a) \leq M_s(a)$ – ок

□

$$\text{Знаменитое неравенство } \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{s_1 + \dots + s_n}{n} \quad M_{-1}(a) \leq M_0(a) \leq M_1(a)$$

4 Неравенство Менковского

$\square a, b \in \mathbb{R}^n, p \geq 1$ Тогда:

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство. $\square p = 1$

$$\sum_{k=1}^n |a_k + b_k| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| + \sum_{k=1}^n |b_k|$$

$\iff |a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|$ – неравенство Треугольника

$$\square p > 1 \quad \square q \text{ – сопряжённое к } p \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad q = \frac{p}{p-1}$$

$$\square A = \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p$$

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{k=1}^n |a_k + b_k| \cdot |a_k + b_k|^{p-1} \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \cdot |a_k + b_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |b_k| \cdot |a_k + b_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} + \\
&\left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} = \\
&(p-1)q = p \quad \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^{(p-1)q} = A \\
&= \left(\left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \cdot A^{\frac{1}{q}} \geq A \\
A^{1-\frac{1}{q}} &= A^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

□

ДЗ:

$$1. \square a_k > 0 \quad a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

$$2. \sum_{k=1}^n \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \geq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)^2}$$

$$3. a, b, c > 0 \quad \sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 3\sqrt{2}$$

$$4. \forall a, b, c, d > 0 \quad \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2$$

Теорема 1.16. $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла

$$\implies f(x) = \max_{t \in (a, b)} (f(t) + f'(t) \cdot (x - t))$$

Замечание 1.14. $l_t(x) = l(t) + f'(t) \cdot (x - t)$

$$f(x) \geq l_t(x) \quad \forall x \in (a, b) \forall t \in (a, b)$$

$$f(x) \geq \max_{t \in (a, b)} l_t(x)$$

$$l_t(x) |_{t=x} = f(x) \implies \text{максимум достигим} \implies \text{имеет место равенства}$$

Задача 1.1. $a, b, c, d > 0 \quad a + b + c + d = 4$

$$\frac{a}{a^3+4} + \frac{b}{b^3+4} + \frac{c}{c^3+4} + \frac{d}{d^3+4} \leq \frac{4}{5}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^3+4} \quad f'(x) = \frac{x^3+4-x \cdot 3x^2}{(x^3+4)^2} = \frac{4-2x^3}{(x^3+4)^2} \quad f'(x) = 0 \quad x = \sqrt[3]{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \implies \text{не выпукла}$$

$$f''(x) = \frac{-6x^2(x^3+4)^2 - (4-2x^3)2(x^3+4)3x^2}{(x^3+4)^4} = \frac{6x^2(x^3-8)}{(x^3+4)^3} \quad 2 - \text{точка перегиба}$$

$$l_1(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = \frac{1}{5} + \frac{2}{25}(x-1) = \frac{2x+3}{25}$$

$$\frac{x}{x^3+4} \leq \frac{2x+3}{25}$$

$$T.O. \quad \frac{a}{a^3+4} + \frac{b}{b^3+4} + \frac{c}{c^3+4} + \frac{d}{d^3+4} \leq \frac{1}{25}(2a+3+2b+3+2c+3+2d+3) = \frac{1}{25}(2 \cdot 4 + 12) = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} \quad \text{чтд}$$

$$\text{Можно рассмотреть неравенство } \frac{f(a)+f(b)+f(c)+f(d)}{4} \geq f\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)$$

Для чисел c в $(0, +\infty)$ мы можем взять единственное число $x \in (0, 2]$, чтобы $f(x) = f(c)$. А тогда мы можем применить неравенство, так как на $[0, 2]$ есть выпуклость.

Числа везде неотрицательны, а если в знаменателе, то больше 0

$$1. (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) > n^2$$

$$2. x^2 + y^2 + z^2 = 8 \implies x^3 + y^3 + z^3 \geq 16\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$3. n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad \forall n \geq 2$$

$$4. abc = 1 \implies \frac{1}{a^3(bc)} + \frac{1}{b^3(ca)} + \frac{1}{c^3(ab)} \geq \frac{3}{2}$$

5. Беккенбах

$$\sum_{k=1}^n \frac{(x_k + y_k)^2}{\sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n y_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{\sum_{k=1}^n x_k} + \frac{\sum_{k=1}^n y_k^2}{\sum_{k=1}^n y_k}$$