Доклад

Kochenyuk Anatoly

Здравствуйте участники турнира и уважаемые члены жюри. Я представляю команду ЛНМО и буду докладывать задачу 5 "Крадущаяся змея, затаившееся полимино".

В задаче предлагается исследовать поведение ломанные на объединении RZ и ZR. Их предложено обозначать с помощью заглавных строчных букв a, но я в своей работе в основном буду использовать вместо заглавных букв строчные с индексом -1. Множество этих букв я называю алфавитом. У каждой ломаной задана длина равная количеству букв в её обозначении.

В задаче вводятся определения замкнутых, простых ломаных. А также вводится эквивалентность с помощью двух движений: вытягивания/затягивания и переноса. Две ломаные, которые мы с помощью этиъ движений можем перевести друг в друга будем называть эквивалентными.

Дополнительно в задаче вводятся ещё три определения: префикса ломаной и свойств кратчайшести и максимальности.

И, наконец, я в работе пользуюсь такой конструкцией, как коммутатор двух букв. Он обозначается и определяется следующим образом [показывает на "экран"]. Очевидно, что такая конструкция коммутирует со всеми буквами. Кроме того с помощью этой конструкции можно менять две соседние буквы местами следующим образом. ["экран"]. В таблице представлены коммутаторы, которые нужно "добавить чтобы поменять местами две соседние буквы.

Теперь перейдём к самим пунктам задачи.

Первый пункт решается в одном случае чередой применений движений, во втором замечанием про сумму степеней при каждой из букв, а в третьем замечанием про сохранение ориентированной площади у замкнутых ломаных.

Второй пункт гораздо более громоздкий.

Её первый подпункт очевиден, а ответ отрицательным, так как можно предоставить эквивалентную ломаную с меньшей длиной.

А перед доказательством второго необходимо доказать ещё несколько фактов. Во-первых у каждого слова есть единственное представление следующего вида ["экран"]. А раз у любой ломаной есть единственное представление, то им логично обозначать класс эквивалентных ломаных, к тому же можно упростить обозначение такого класса до тройки целых чисел. Далее введём важную лемму гласящую, что если префикс ломаной некратчайший, то и сама ломаная некратчайшая. Раз мы завели конструкцию класса, то введём понятие макимальности класса следующим образом. Таким образом, если в классе есть максимальная ломаная, то класс максимален, а если класс макимален, то все кратчайшие в нём слова – максимальны. Далее сформулируем следующую теорему: Для кратчайшей ломаной l и буквы s из алфавита выполняется, что кратчайшесть ls эквивалентна тому, что в классе, образованном ломаной l нет кратчайшей ломаной, оканчивающейся на s^{-1}. В письменной работе предоставлено не совсем верное доказательство, так как была отправлена работа не с последней правкой. В связи с этим я сейчас предоставлю её доказательство.

Итак, сначала докажем необходимость: Дано, что ls – кратчайшая ломаная. Допустим, что найдётся нужный нам кратчайший представитель. Заметим, что следующие классы равны. Такое слово [показывает на $l's^{-1}$] – кратчайшее в классе l, а и l по условию кратчайшая, то их длины равны между собой и равны такой сумме. Из этого следует следующее равенство. l', как префикс кратчайшей ломаной – кратчайшая в классе ls, а тогда их длины равны и равны следующей сумме. Но эти два равенства противоречат друг другу, а значит допущение неверно.

Теперь докажем достаточность: Дано, что в классе $[l]$ нет кратчайшего представителя оканчивающегося на s^{-1}. Допустим, что ls – некратчайшая. Обозначим за l' кратчайшй представитель класса $[ls]$.

Заметим, что выполняется следующее неравенство: вторая часть из-за неравенства треугольника в метрике на графе Кэли группы всех слов. А первое доказывается следующим образом: применим неравенство треугольника и сделаем небольшие преобразования и вот она первая часть неравенства.

Теперь запишем это неравенство с помощью длин слов, а не классов. Так как ls – не кратчайший в классе с кратчайшим представителем l', то выполняется строгое неравенство $|l'| < |ls|$