VII Санкт-Петербургский Турнир юных математиков
Санкт-Петербург 25 - 31 марта 2019 года

Зодача™ 10
Эффект Бабочки

Артем Семидетнов, ЛНМО

Полезные факты и определения

Теорема 0.1. *Теорема Римана : пусть* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *- условно расходящийся ряд, тогда* $\forall \psi \in \mathbb{R}$ *существует такая перестановка индексов* $n \to \pi(n)$*, что ряд будет сходиться к* ψ*.*
Доказано в [1]

Определение 0.2. $\alpha \in \mathbb{R}$ *определим* $\mathcal{O}_\varepsilon(\alpha) = (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon), \quad \varepsilon > 0$

Замечание 0.3. *Из теоремы Римана следует* **Пункт 1***: ряд* $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *сходится к нулю, в то время, как ряд его абсолютных значений - канонический, расходится, что значит, ряд* $\sum a_n$ *условно сходится. В доказательстве теоремы представлен алгоритм нахождения перестановки для любого вещественного числа, в том числе* $\ln(p/q)$

Теорема 0.4. *Для последовательности* (a_n)

$$\forall L \in \mathbb{R} \quad \exists(\lambda_n)\,, \forall n \quad \lambda_n \in \{1, -1\} \quad L = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot a_n$$

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ не сходится абсолютно} \quad \& \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Доказательство.
Достаточность ($\Rightarrow$) очевидна, докажем необходимость.
$\Leftarrow$:
Зафиксируем $L \in \mathbb{R}$, возьмем $\lambda_n = \mathrm{sign}(L - S^{\lambda}_{n-1}) \cdot \mathrm{sign}(a_n)$, где $S^{\lambda}_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \cdot a_k$. Считаем, что $S^{\lambda}_0 = 0$.
Докажем, что тогда

$$b_i = L - S^{\lambda}_i \longrightarrow 0 \iff S^{\lambda}_i \longrightarrow L$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$

$$a_i \longrightarrow 0 \implies \exists N\, \forall n \geqslant N\ |a_n| < \varepsilon \implies \forall n \geqslant N\ |\lambda_n \cdot a_n| < \varepsilon$$

Замечание 0.5. $\exists M \geqslant N$ *sign*$(b_M) \neq$ *sign*(b_N)

Доказательство.
Пусть это не так. Не умаляя общности, пусть $b_N > 0$(второй случай докажется аналогично)
Тогда

$$\forall n \geqslant N\ b_{n+1} = b_n - \mathrm{sign}(L - S^{\lambda}_n) \cdot \mathrm{sign}(a_n) \cdot a_n = b_n - \mathrm{sign}(b_n) \cdot |a_n| = b_n - |a_n|$$

То есть,

$$b_k = b_N - \sum_{i=1}^{k-1} |a_i|$$

,при этом $b_k > 0$(т.к мы предпологаем, что знак не изменится)
Заметим, что

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=N}^{k-1} |a_i| = +\infty, \text{ т.к } \sum |a_i| \text{ расходится}$$

То есть

$$\exists M \geqslant N \quad \sum_{i=N}^{M} |a_i| > 2 \cdot b_N$$

И тогда $b_k \leqslant b_N - 2b_N = -b_N < 0$ - *Противоречие.* ☐

Таким образом $\exists M \quad \mathrm{sign}(b_M) \neq \mathrm{sign}(b_{M+1})$ и $\forall n \geqslant M \quad |b_{n+1} - b_n| = |a_{n+1}| < \varepsilon$.

Предложение 0.6. *Докажем, что* $\forall n \geqslant M \quad |b_n| < \varepsilon$

Доказательство.
По индукции:
1) $|b_M| < \varepsilon$ & $|b_{M+1}| < \varepsilon$
2)Зафиксируем $n \geqslant M$, считаем, что $|b_n| < \varepsilon$. Заметим, что $\forall n \geqslant M$ справедливо либо $\mathrm{sign}(b_n) = \mathrm{sign}(b_{n+1})$ и тогда $|b_{n+1}| = |b_n| - |a_{n+1}| < |b_n| < \varepsilon$, либо $\mathrm{sign}(b_n) \neq \mathrm{sign}(b_{n+1})$ и тогда $|b_n|, |b_{n+1}| < \varepsilon$ ☐

То есть $\forall n \geqslant M \quad |b_n| < \varepsilon \Rightarrow b_n \longrightarrow 0$ $\square$

Следствие 0.7. *Решен* **Пункт 3** *- приведены необходимые и достаточные условия.*

Следствие 0.8. *Поскольу* **Пункт 3** *является обобщением* **Пункта 2** *- он тоже решен. Ответ - да,так как последовательность* $(a_n) = 1\backslash n$ *удовлетворяет условиям* **Теоремы 0.3**

Список литературы

[1] Riemann's Rearrangement Theorem. — Stewart Galanor, 134 West Ninety-third Street, New York, NY 10025