Задача 1. Автостопом по галактике.

Анатолий Коченюк, команда ЛНМО#2

Март 2019

Содержание

Введение

Определение 0.1. *Перестановка – биективная функция* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

Определение 0.2. *Перестановка* f *называется конечной, если множество* $N_f = \{n \in \mathbb{Z} \mid f(n) \neq n\}$ *– конечно.*

Определение 0.3. *Для* $n \in \mathbb{Z}$ *множество* $\mathcal{O}_f(n) = \{n, f(n), f(f(n)) \dots\} \cup \{f^{-1}(n), f^{-1}(f^{-1}(n)) \dots\}$ *называется орбитой* n *под действием* f.

Определение 0.4. *Перестановка* f *называется локально конечной, если у всех* $n \in \mathbb{Z}$ *орбиты* $\mathcal{O}_f(n)$ *конечны.*

1 Композиция

1.1 Композиция конечных

Теорема 1.1. *Композиция двух конечных перестановок является конечной перестановкой*

Доказательство. Рассмотрим две конечные перестановки f, g, а также их композицию $f \circ g(x) = f(g(x))$.

$N_f = \{n \in \mathbb{Z} \mid f(n) \neq n\} \quad N_g = \{n \in \mathbb{Z} \mid g(n) \neq n\}$

$f\mid_{\mathbb{Z} \setminus N_g}(n) = f(n)$

$N_{f \circ g} \cap N_g \subset N_f$ потому на первом множестве $f \circ g(n) \neq n$, а на втором $f \circ g(n) = f(n)$, т.е. f ведёт себя так же, как и $f \circ g$, т.е. $f(n) = f \circ g(n) \neq n$

$N_{f \circ g} \cap N_g$ – конечно как пересечение с конечным множеством

$(N_{f \circ g} \cap Z \setminus N_g) \cup (N_{f \circ g} \cap N_g) = N_{f \circ g}$ по теории множеств и конечно, как объединение конечных множеств, а значит $N_{f \circ g}$ – конечна $\Rightarrow f \circ g$ – конечна $\square$

1.2 Композиция локально конечных

Композиция двух локально конечных не всегда локально конечна.

Контрпример: рассмотрим две функции:

1. $f(x) = -x - 1 \quad f(f(x)) = -(-x-1) - 1 = x$
2. $g(x) = -x \quad g(g(x)) = -(-x) = x$

т.е. $\mathcal{O}_f, \mathcal{O}_g$ – конечны, а значит f, g – локально конечны

А теперь рассмотрим $h(x) = f \circ g(x) = -(-x) - 1 = x - 1$. $h(x) = x - 1 \quad h(h(x)) = (x-1) - 1 = x - 2$

Таким образом $\underbrace{h(h \dots (h}_{n}(x)) \dots) = x - n$ и так продолжается до бесконечности, т.е. $\mathcal{O}_{f \circ g}(x)$ – не конечен $\Rightarrow f \circ g$ – не локально конечна