
*Задача 4. Поймай меня, если
сможешь*

Анатолий Коченюк, команда ЛНМО#2

Март 2019

1 Считающие функции

Определение 1.1. Назовём функцию считающей, если её можно представить в виде

$$h(x) = c_1 \lfloor x \rfloor + c_2 \lfloor x/2 \rfloor + c_3 \lfloor x/3 \rfloor + \dots$$

где c_1, c_2, \dots – целочисленные коэффициенты, а $\lfloor x \rfloor$ – целая часть x

Далее $h(x)$ – считающая функция

1.1 Равенство целой части и образа считающей функции

Теорема 1.1. $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor \Rightarrow h(x) = h(y)$

Доказательство. Если целые части равны, то x, y можно представить следующим образом:

$x = z + w_x$ $y = z + w_y$, где z – целая часть x и y , а $w_x, w_y < 1$ – их дробные части

Для доказательства теоремы будет достаточно условия $\forall n \lfloor x/n \rfloor = \lfloor y/n \rfloor$

Или, что то же самое $\forall n \lfloor z/n + w_x/n \rfloor = \lfloor z/n + w_y/n \rfloor$

Рассмотрим случай, когда $n = 2$

$$\lfloor z/2 + w_x/2 \rfloor = \lfloor z/2 + w_y/2 \rfloor$$

т.к. z – целое, то может быть два случая:

1. $z/2$ – целое, а тогда $\lfloor z/2 + w_x/2 \rfloor = \lfloor z/2 + w_y/2 \rfloor$, т.к. вторые слагаемые < 1

2. $z/2 = z' + \frac{1}{2}$, $z' \in \mathbb{Z}$ в таком случае $\lfloor z/2 + w_x/2 \rfloor = \lfloor z/2 \rfloor$, т.к. $w_x/2 < \frac{1}{2}$ аналогично
 $\lfloor z/2 + w_y \rfloor = \lfloor z/2 \rfloor \Rightarrow \lfloor z/2 + w_x/2 \rfloor = \lfloor z/2 + w_y/2 \rfloor$

А значит в любом случае $\lfloor z/2 + w_x/2 \rfloor = \lfloor z/2 + w_y/2 \rfloor$

Теперь рассмотрим произвольное n .

Здесь аналогично может быть n случаев z/n – целое $z' + \frac{i}{n}$, $i = \overline{0, n-1}$, но $w_x/n, w_y/n < 1/n$ и аналогично случаю с $n = 2$ не могут повлиять на целую часть.

А значит $\forall n \lfloor x/n \rfloor = \lfloor y/n \rfloor$, т.е. все элементы $h(x)$ и $h(y)$ равны, а значит $h(x) = h(y)$ \square

1.2 $h(n) - h(n-1)$

$n \in \mathbb{Z}$

$$h(n) = c_1 \lfloor n \rfloor + c_2 \lfloor n/2 \rfloor + c_3 \lfloor n/3 \rfloor + \dots$$

$$h(n-1) = c_1 \lfloor n-1 \rfloor + c_2 \lfloor n/2 - 1/2 \rfloor + c_3 \lfloor n/3 - 1/3 \rfloor + \dots$$

$$\triangleleft h(n) - h(n-1) = c_1(\lfloor n \rfloor - \lfloor n-1 \rfloor) + c_2(\lfloor n/2 \rfloor - \lfloor n/2 - 1/2 \rfloor) + c_3(\lfloor n/3 \rfloor - \lfloor n/3 - 1/3 \rfloor)$$