Задача 5. Крадущаяся змея, затаившееся полимино

Коченюк Анатолий

Школы 564

26 - 31 марта 2019 года, г. Санкт-Петербург

Введение

1. Ломаную можно представить как путь в $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z}$ или $y \in \mathbb{Z}\}$ Введём специальные обозначения, для задания ломаной.

   a, A – отрезки направленные вправо и влево
   b, B – вверх и вниз
   Для удобства будут также использоваться аналоги:
   - $a^{-1} = A$
   - $b^{-1} = B$

2. Общее количество таких отрезков будем называть длиной ломаной.

   Допускается случай ломаной с длиной 0 — ε

1. Ломаная замкнутая, если её конец совпадает с началом
2. Ломаная простая, если у неё нет самопересечений по вершинам (допускается пересечение начала и конца – случай замкнутой ломаной)
3. За алфавит S будем обозначать множество $S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\} = \{a, b, A, B\}$

Введём 2 операции над ломаными:

1. Вытягивание и затягивание – добавление в любое место пути $l \in \{aA, Aa, bB, Bb\}$
2. Перенос – мы можем свободно перемещать в любое место пути определённые комбинации.

Дополнительные определения

1. $l_1 \equiv l_2 \iff$ одну можно перевести в другую
2. Префикс l – ломаная, идущая по тому же маршруту и не превышающая по длине
3. Ломаная кратчайшая $\iff$ нет эквивалентной с меньшей длиной
4. Ломаная максимальная $\iff$ ломаная кратчайшая и единственная кратчайшая ломаная, префиксом которой она является – это она сама

Также стоит ввести такую конструкцию, как коммутатор:

Определение

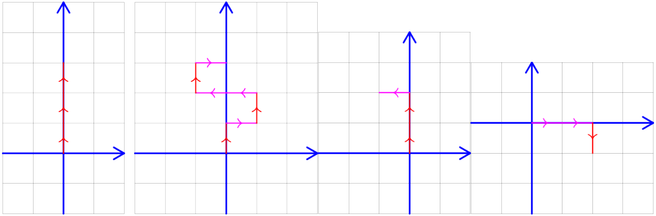
Коммутатор двух букв x, y *из алфавита* s $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$

Понятно, что каждый коммутатор либо эквивалентен пустому слову, либо по второму движению коммутативен со всеми элементами.
Кроме того, с его помощью можно менять местами буквы следующим образом:
$[a, b]ba = aba^{-1}b^{-1}ba \equiv ab$
Аналогично меняются местами другие буквы. В ячейке я буду записывать то, что нужно добавить.

	a	b	a^{-1}	b^{-1}
a	$\times$	$[a, b]$	$\times$	$[a, b]^{-1}$
b	$[a, b]^{-1}$	$\times$	$[a, b]$	$\times$
a^{-1}	$\times$	$[a, b]^{-1}$	$\times$	$[a, b]$
b^{-1}	$[a, b]$	$\times$	$[a, b]^{-1}$	$\times$

Пункт 1 а, б

1. $bbb \equiv babAAba$ $\quad babA[AbaB]BB \equiv ba[AbaB]bABB = b[aA]ba[Bb]ABB \equiv bb[aA]BB \equiv b[bB]B \equiv bB \equiv \varepsilon \Rightarrow bbb \equiv bbabAAba$
2. $bbA \not\equiv aaB$. Отметим, что никакое движение не изменяет конечную точку и сумму степеней при каждой из букв (если заменить A и B на a^{-1} и b^{-1}).



Пункт 1 в

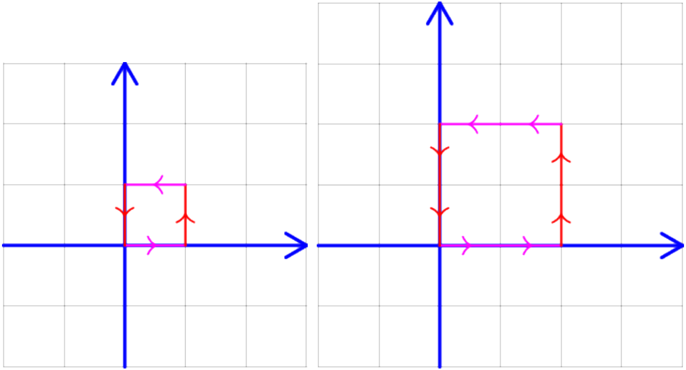
$$abAB \not\equiv aabbAABB$$

Определение

У отрезков ломаной есть направление. Будем считать, что если в многоугольнике стороны направлены против часовой стрелке, то площадь положительна. В противном случае считаем её отрицательной.

Теорема

При действии движений, если рассматривать многоугольник составленный из точек ломаной в порядке букв в слове, то его ориентированная площадь не изменится. Такой многоугольник существует, когда ломаная замкнутая.



Очевидно, что площадь первой ломаной (1) не равна площади второй (4), а значит они неэквивалентны.

Пункт 2