

# Задача 5. Крадущаяся змея, затаившееся полимино

Коченюк Анатолий

Школы 564

26 - 31 марта 2019 года, г. Санкт-Петербург

# Введение

- 1 Ломаную можно представить как путь в  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z} \text{ или } y \in \mathbb{Z}\}$  Введём специальные обозначения, для задания ломаной.

$a, A$  – отрезки направленные вправо и влево

$b, B$  – вверх и вниз

Для удобства будут также использоваться аналоги:

■  $a^{-1} = A$

■  $b^{-1} = B$

- 2 Общее количество таких отрезков будем называть длиной ломаной.

Допускается случай ломаной с длиной  $0 - \varepsilon$

- 1 Ломаная замкнутая, если её конец совпадает с началом
- 2 Ломаная простая, если у неё нет самопересечений по вершинам (допускается пересечение начала и конца – случай замкнутой ломаной)
- 3 За алфавит  $S$  будем обозначать множество  $S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\} = \{a, b, A, B\}$

Введём 2 операции над ломаными:

- 1 Вытягивание и затягивание – добавление в любое место пути  $l \in \{aA, Aa, bB, Bb\}$
- 2 Перенос – мы можем свободно перемещать в любое место пути определённые комбинации.

## Дополнительные определения

- 1  $l_1 \equiv l_2 \iff$  одну можно перевести в другую
- 2 Префикс  $l$  – ломаная, идущая по тому же маршруту и не превышающая по длине
- 3 Ломаная кратчайшая  $\iff$  нет эквивалентной с меньшей длиной
- 4 Ломаная максимальная  $\iff$  ломаная кратчайшая и единственная кратчайшая ломаная, префиксом которой она является – это она сама

Также стоит ввести такую конструкцию, как коммутатор:

### Определение

Коммутатор двух букв  $x, y$  из алфавита  $S$   $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$

Понятно, что каждый коммутатор либо эквивалентен пустому слову, либо по второму движению коммутативен со всеми элементами.

Кроме того, с его помощью можно менять местами буквы следующим образом:

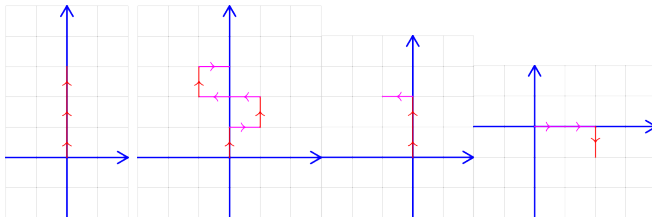
$$[a, b]ba = aba^{-1}b^{-1}ba \equiv ab$$

Аналогично меняются местами другие буквы. В ячейке я буду записывать то, что нужно добавить.

	$a$	$b$	$a^{-1}$	$b^{-1}$
$a$	$\times$	$[a, b]$	$\times$	$[a, b]^{-1}$
$b$	$[a, b]^{-1}$	$\times$	$[a, b]$	$\times$
$a^{-1}$	$\times$	$[a, b]^{-1}$	$\times$	$[a, b]$
$b^{-1}$	$[a, b]$	$\times$	$[a, b]^{-1}$	$\times$

# Пункт 1 а, б

- 1  $bbb \equiv babAAb a \quad babA[AbaB]BB \equiv ba[AbaB]bABB =$   
 $b[aA]ba[Bb]ABB \equiv bb[aA]BB \equiv b[bB]B \equiv bB \equiv \varepsilon \Rightarrow bbb \equiv bbabAAb a$
- 2  $bbA \not\equiv aaB$ . Отметим, что никакое движение не изменяет конечную точку и сумму степеней при каждой из букв (если заменить  $A$  и  $B$  на  $a^{-1}$  и  $b^{-1}$ ).



# Пункт 1 в

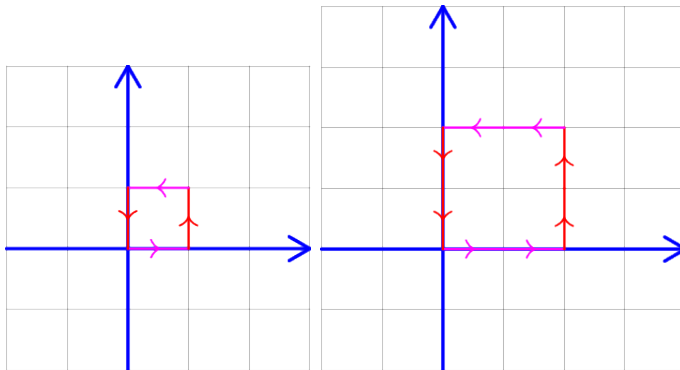
$$abAB \not\equiv aabbAABV$$

## Определение

*У отрезков ломаной есть направление. Будем считать, что если в многоугольнике стороны направлены против часовой стрелке, то площадь положительна. В противном случае считаем её отрицательной.*

## Теорема

*При действии движений, если рассматривать многоугольник составленный из точек ломаной в порядке букв в слове, то его ориентированная площадь не изменится. Такой многоугольник существует, когда ломаная замкнутая.*



Очевидно, что площадь первой ломаной (1) не равна площади второй (4), а значит они неэквивалентны.



## Пункт 2а

### Определение

*Ломаная является кратчайшей, если с помощью наших движений её нельзя перевести в ломаную с меньшей длиной.*

$$abAB[abAB] \equiv a[abAB]bAB \equiv aabAAB$$

## Пункт 26

### Теорема

*У каждой ломаной есть единственное представление в виде  $[a, b]^z b^y a^x$ , где  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ , степень — конкатенация, т.е.  $[a, b]^2 = [a, b][a, b]$ ,  $a, x, y, z \in \mathbb{Z}^3$*

Тогда классы ломаных можно обозначать за  $(z, y, x) = [[a, b]^z b^y a^x]$

### Лемма

*Если у ломаной неkratчайший префикс, то сама ломаная — неkratчайшая.*

### Определение

*Класс  $(z, y, x)$  будем называть максимальным, если  $\text{len}((z, y, x) * \text{class}(s)) < \text{len}((z, y, x)), \forall s \in S$ . Если в классе есть максимальная ломаная, то класс максимальный, а если класс максимальный, то все кратчайшие ломаные в этом классе — максимальные*

## Теорема

Для кратчайшей ломаной  $l$  и буквы  $s$  выполнятся следующее  
 $ls$  – кратчайшая ломаная  $\iff$  в классе  $[l]$  нет кратчайшего  
представителя, оканчивающегося на  $s^{-1}$

## Доказательство.

$\Rightarrow$   $ls$  – кратчайшая. Пусть есть такой представитель  $l's^{-1} \equiv l$

$[ls] = [l'ss^{-1}] = [l']$      $l's^{-1}$  – кратчайшая в классе

$[l] \Rightarrow |l| = |l's^{-1}| = |l'| + 1 \Rightarrow |l'| = |l| - 1$

$l'$  – кратчайшая в классе  $[ls] \Rightarrow |l'| = |ls| = |l| + 1$

Мы получили два противоречащих равенства  $\Rightarrow$  допущение неверно.



## Доказательство.

⇐ Пусть в классе  $[l]$  нет кратчайшего представителя, оканчивающегося на  $s^{-1}$ . И пусть  $ls$  – не кратчайшая.  $[ls] = [l']$ ,  $l'$  – кратчайшая

$len([l]) - 1 \leq len([ls]) \leq len([l]) + 1$ . Второе неравенство выполняется, так как длина элемента – это метрика индуцированная из метрики графа Кэли, а как известно для метрики выполняется неравенство треугольника

Первое неравенство (тоже по неравенству треугольника):

$$len([ls]) \geq len(lss^{-1}) - len([s^{-1}]) = len([l]) - 1$$

$$\text{А тогда } |l| - 1 \leq |l'| = len([ls]) \leq |l| + 1$$

$|l| - 1 \leq |l'| < |ls| \leq |l| + 1$ . Между крайними числами в этом неравенстве есть 3 числа. Ни одно из средних чисел не равно  $l$ , а значит они "расходятся" по крайним. А значит  $|l| - 1 = |l'|$

Понятно, что  $[l] = [l's^{-1}]$

$len([l's^{-1}]) = len([l]) = |l| = |l'| + 1 = |l's^{-1}|$ . Таким образом существует слово в классе  $[w]$ , которое заканчивается на  $s^{-1}$ ??!

Противоречие с условием, а значит допущение неверно.



## Теорема (Условие на максимальность класса)

*Класс ломаных максимален  $\iff$  в этом классе есть кратчайшие слова, оканчивающиеся на все буквы алфавита  $S$*

## Теорема

*Любая кратчайшая замкнутая ломаная – максимальная*

## Пункт 2 с, d

### Теорема

*Любая кратчайшая ломаная – простая*

Условия:

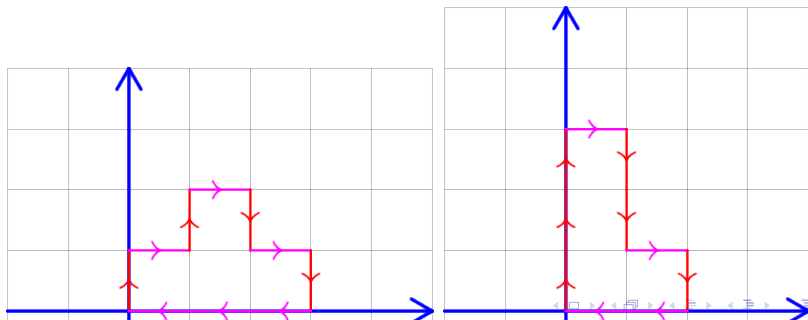
- 1  $L$  — кратчайшая  $\iff \nexists L' : L' \equiv L \ \& \ len(L') < len(L)$
- 2 Ломаная кратчайшая, когда она является частью кратчайшей ломаной

## Пункт 3

Замкнутые кратчайшие ломаные – простые.

### Определение

*Полимино – плоские геометрические фигуры, образованные путём соединения нескольких одноклеточных квадратов по их сторонам*



# Благодарность

Спасибо за внимание!