Задача 5. Крадущаяся змея, затаившееся полимино

Коченюк Анатолий

Школы 564

26 - 31 марта 2019 года, г. Санкт-Петербург

Введение

1. Ломаную можно представить как путь в $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z} \text{ или } y \in \mathbb{Z}\}$ Введём специальные обозначения, для задания ломаной.

   a, A – отрезки направленные вправо и влево
   b, B – вверх и вниз
   Для удобства будут также использоваться аналоги:
   - $a^{-1} = A$
   - $b^{-1} = B$

2. Общее количество таких отрезков будем называть длиной ломаной.

   Допускается случай ломаной с длиной 0 — ε

1. Ломаная замкнутая, если её конец совпадает с началом
2. Ломаная простая, если у неё нет самопересечений по вершинам (допускается пересечение начала и конца – случай замкнутой ломаной)
3. За алфавит S будем обозначать множество $S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\} = \{a, b, A, B\}$

Введём 2 операции над ломаными:

1. Вытягивание и затягивание – добавление в любое место пути $l \in \{aA, Aa, bB, Bb\}$
2. Перенос – мы можем свободно перемещать в любое место пути определённые комбинации.

Дополнительные определения

1. $l_1 \equiv l_2 \iff$ одну можно перевести в другую
2. Префикс l – ломаная, идущая по тому же маршруту и не превышающая по длине
3. Ломаная кратчайшая $\iff$ нет эквивалентной с меньшей длиной
4. Ломаная максимальная $\iff$ ломаная кратчайшая и единственная кратчайшая ломаная, префиксом которой она является – это она сама

Также стоит ввести такую конструкцию, как коммутатор:

Определение

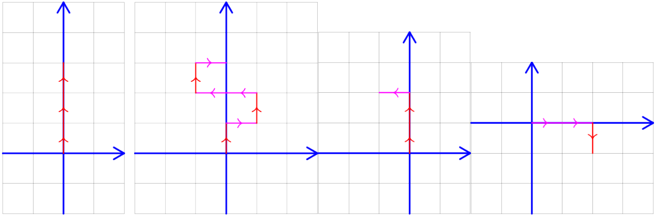
Коммутатор двух букв x, y из алфавита S $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$

Понятно, что каждый коммутатор либо эквивалентен пустому слову, либо по второму движению коммутативен со всеми элементами.
Кроме того, с его помощью можно менять местами буквы следующим образом:
$[a, b]ba = aba^{-1}b^{-1}ba \equiv ab$
Аналогично меняются местами другие буквы. В ячейке я буду записывать то, что нужно добавить.

	a	b	a^{-1}	b^{-1}
a	$\times$	$[a, b]$	$\times$	$[a, b]^{-1}$
b	$[a, b]^{-1}$	$\times$	$[a, b]$	$\times$
a^{-1}	$\times$	$[a, b]^{-1}$	$\times$	$[a, b]$
b^{-1}	$[a, b]$	$\times$	$[a, b]^{-1}$	$\times$

Пункт 1 а, б

1. $bbb \equiv babAAba$ $\qquad babA[AbaB]BB \equiv ba[AbaB]bABB = b[aA]ba[Bb]ABB \equiv bb[aA]BB \equiv b[bB]B \equiv bB \equiv \varepsilon \Rightarrow bbb \equiv bbabAAba$
2. $bbA \not\equiv aaB$. Отметим, что никакое движение не изменяет конечную точку и сумму степеней при каждой из букв (если заменить A и B на a^{-1} и b^{-1}).



Пункт 1 в

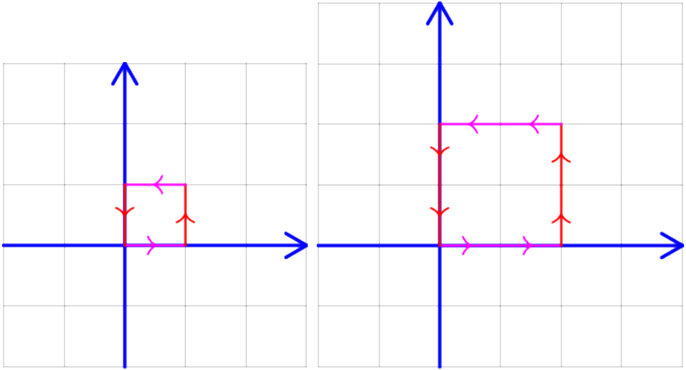
$$abAB \not\equiv aabbAABB$$

Определение

У отрезков ломаной есть направление. Будем считать, что если в многоугольнике стороны направлены против часовой стрелке, то площадь положительна. В противном случае считаем её отрицательной.

Теорема

При действии движений, если рассматривать многоугольник составленный из точек ломаной в порядке букв в слове, то его ориентированная площадь не изменится. Такой многоугольник существует, когда ломаная замкнутая.



Очевидно, что площадь первой ломаной (1) не равна площади второй (4), а значит они неэквивалентны.

Пункт 2а

Определение

Ломаная является кратчайшей, если с помощью наших движений её нельзя перевести в ломаную с меньшей длиной.

$$abAB[abAB] \equiv a[abAB]bAB \equiv aabAAB$$

Пункт 2б

Теорема

У каждой ломаной есть единственное представление в виде $[a,b]^z b^y a^x$, где $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$, степень — конкатенация, т.е. $[a,b]^2 = [a,b][a,b]$, а $x, y, z \in \mathbb{Z}^3$

Тогда классы ломаных можно обозначать за $(z, y, x) = [[a,b]^z b^y a^x]$

Лемма

Если у ломаной некратчайший префикс, то сама ломаная – некратчайшая.

Определение

Класс (z, y, z) будем называть максимальным, если $len((z,y,x) * class(s)) < len((z,y,x)), \forall s \in S$ Если в классе есть максимальная ломаная, то класс максимальный, а если класс максимальный, то все кратчайшие ломаные в этом классе – максимальные

Теорема

Для кратчайшей ломаной l и буквы s выполнятся следующее ls – кратчайшая ломаная $\iff$ в классе $[l]$ нет кратчайшего представителя, оканчивающегося на s^{-1}

Доказательство.

$\Rightarrow$ ls – кратчайшая. Пусть есть такой представитель $l's^{-1} \equiv l$
$[ls] = [l'ss^{-1}] = [l']$ $\quad l's^{-1}$ – кратчайшая в классе $[l] \Rightarrow |l| = |l's^{-1}| = |l'| + 1 \Rightarrow |l'| = |l| - 1$
l' – кратчайшая в классе $[ls] \Rightarrow |l'| = |ls| = |l| + 1$
Мы получили два противоречащих равенства $\Rightarrow$ допущение неверно.

$\square$

Доказательство.

$\Leftarrow$ Пусть в классе $[l]$ нет кратчайшего представителя, оканчивающегося на s^{-1}. И пусть ls – не кратчайшая. $[ls] = [l'], l'$ – кратчайшая

$len([l]) - 1 \leqslant len([ls]) \leqslant len([l]) + 1$. Второе неравенство выполняется по неравенству треугольника в метрике на графе Кэли группы всех слов.

Первое неравенство (тоже по неравенству треугольника): $len([ls]) \geqslant len(lss^{-1}) - len([s^{-1}]) = len([l]) - 1$

А тогда $|l| - 1 \leqslant |l'| = len([ls]) \leqslant |l| + 1$

$|l| - 1 \leqslant |l'| < |ls| \leqslant |l| + 1$. Между крайними числами в этом неравенстве есть 3 числа. Ни одно из средних чисел не равно l, а значит они "расходятся"по крайним. А значит $|l| - 1 = |l'|$

Понятно, что $[l] = [l's^{-1}]$

$len([l's^{-1}]) = len([l]) = |l| = |l'| + 1 = |l's^{-1}|$. Таким образом существует слово в классе $[w]$, которое заканчивается на s^{-1}??!

Противоречие с условием, а значит допущение неверно.

Теорема (Условие на максимальность класса)

Класс ломаных максимален $\Longleftrightarrow$ в этом классе есть кратчайшие слова, оканчивающиеся на все буквы алфавита S

Теорема

Любая кратчайшая замкнутая ломаная – максимальная

Пункт 2 c, d

Теорема

Любая кратчайшая ломаная – простая

Условия:

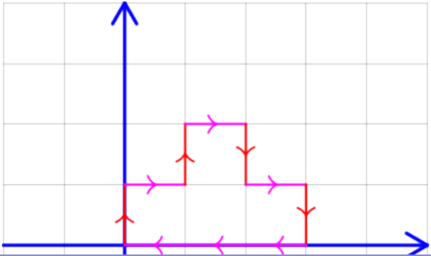
1. L— кратчайшая $\iff \nexists L' : L' \equiv L \ \& \ len(L') < len(L)$
2. Ломаная кратчайшая, когда она является частью кратчайшей ломаной

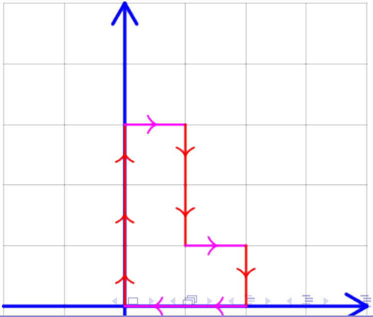
Пункт 3

Замкнутые кратчайшие ломаные – максимальные – простые.

Определение

Полимино – плоские геометрические фигуры, образованные путём соединения нескольких одноклеточных квадратов по их сторонам





Благодарность

Спасибо за внимание!