

Задача 5. Крадущаяся змея, затаившееся полимино

Коченюк Анатолий

Школы 564

26 - 31 марта 2019 года, г. Санкт-Петербург

Введение

- 1 Ломаную можно представить как путь в $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z} \text{ или } y \in \mathbb{Z}\}$ Введём специальные обозначения, для задания ломаной.

a, A – отрезки направленные вправо и влево

b, B – вверх и вниз

Для удобства будут также использоваться аналоги:

■ $a^{-1} = A$

■ $b^{-1} = B$

- 2 Общее количество таких отрезков будем называть длиной ломаной.

Допускается случай ломаной с длиной $0 - \varepsilon$

- 1 Ломаная замкнутая, если её конец совпадает с началом
- 2 Ломаная простая, если у неё нет самопересечений по вершинам (допускается пересечение начала и конца – случай замкнутой ломаной)
- 3 За алфавит S будем обозначать множество $S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\} = \{a, b, A, B\}$

Введём 2 операции над ломаными:

- 1 Вытягивание и затягивание – добавление в любое место пути $l \in \{aA, Aa, bB, Bb\}$
- 2 Перенос – мы можем свободно перемещать в любое место пути определённые комбинации.

Дополнительные определения

- 1 $l_1 \equiv l_2 \iff$ одну можно перевести в другую
- 2 Префикс l – ломаная, идущая по тому же маршруту и не превышающая по длине
- 3 Ломаная кратчайшая \iff нет эквивалентной с меньшей длиной
- 4 Ломаная максимальная \iff ломаная кратчайшая и единственная кратчайшая ломаная, префиксом которой она является – это она сама

Также стоит ввести такую конструкцию, как коммутатор:

Определение

Коммутатор двух букв x, y из алфавита s $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$

Понятно, что каждый коммутатор либо эквивалентен пустому слову, либо по второму движению коммутативен со всеми элементами.

Кроме того, с его помощью можно менять местами буквы следующим образом:

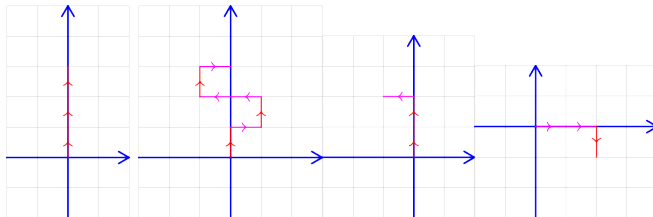
$$[a, b]ba = aba^{-1}b^{-1}ba \equiv ab$$

Аналогично меняются местами другие буквы. В ячейке я буду записывать то, что нужно добавить.

	a	b	a^{-1}	b^{-1}
a	\times	$[a, b]$	\times	$[a, b]^{-1}$
b	$[a, b]^{-1}$	\times	$[a, b]$	\times
a^{-1}	\times	$[a, b]^{-1}$	\times	$[a, b]$
b^{-1}	$[a, b]$	\times	$[a, b]^{-1}$	\times

Пункт 1 а, б

- 1 $bbb \equiv babAAb a \quad babA[AbaB]BB \equiv ba[AbaB]bABB =$
 $b[aA]ba[Bb]ABB \equiv bb[aA]BB \equiv b[bB]B \equiv bB \equiv \varepsilon \Rightarrow bbb \equiv bbabAAb a$
- 2 $bbA \not\equiv aaB$. Отметим, что никакое движение не изменяет конечную точку и сумму степеней при каждой из букв (если заменить A и B на a^{-1} и b^{-1}).



Пункт 1 в

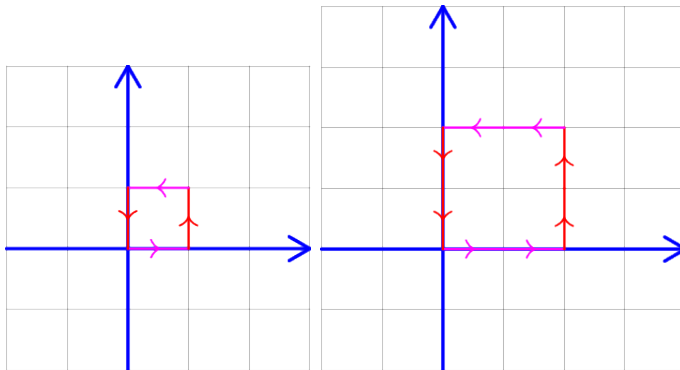
$$abAB \not\equiv aabbAABV$$

Определение

У отрезков ломаной есть направление. Будем считать, что если в многоугольнике стороны направлены против часовой стрелке, то площадь положительна. В противном случае считаем её отрицательной.

Теорема

При действии движений, если рассматривать многоугольник составленный из точек ломаной в порядке букв в слове, то его ориентированная площадь не изменится. Такой многоугольник существует, когда ломаная замкнутая.



Очевидно, что площадь первой ломаной (1) не равна площади второй (4), а значит они неэквивалентны.

Пункт 2а

Определение

Ломаная является кратчайшей, если с помощью наших движений её нельзя перевести в ломаную с меньшей длиной.

$$abAB[abAB] \equiv a[abAB]bAB \equiv aabAAB$$

Пункт 26

Теорема

У каждой ломаной есть единственное представление в виде $[a, b]^z b^y a^x$, где $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$, степень — конкатенация, т.е. $[a, b]^2 = [a, b][a, b]$, $a, x, y, z \in \mathbb{Z}$

Тогда классы ломаных можно обозначать за $(z, y, x) = [[a, b]^z b^y a^x]$

Лемма

Если у ломаной неkratчайший префикс, то сама ломаная — неkratчайшая.

Определение

*Класс (z, y, x) будем называть максимальным, если $\text{len}((z, y, x) * \text{class}(s)) < \text{len}((z, y, x)), \forall s \in S$. Если в классе есть максимальная ломаная, то класс максимальный, а если класс максимальный, то все кратчайшие ломаные в этом классе — максимальные*

Пункт 26

Теорема

Для кратчайшей ломаной l и буквы s выполнятся следующее
 ls – кратчайшая ломаная \iff в классе $[l]$ нет кратчайшего
представителя, оканчивающегося на s^{-1}

Доказательство.

\Rightarrow ls – кратчайшая. Пусть есть такой представитель $l's^{-1} \equiv l$

$[ls] = [l'ss^{-1}] = [l']$ $l's^{-1}$ – кратчайшая в классе

$[l] \Rightarrow |l| = |l's^{-1}| = |l'| + 1 \Rightarrow |l'| = |l| - 1$

l' – кратчайшая в классе $[ls] \Rightarrow |l'| = |ls| = |l| + 1$

Мы получили два противоречащих равенства \Rightarrow допущение неверно.



Доказательство.

⇐ Пусть в классе $[l]$ нет кратчайшего представителя, оканчивающегося на s^{-1} . И пусть ls – не кратчайшая. $[ls] = [l'], l'$ – кратчайшая

$len([l]) - 1 \leq len([ls]) \leq len([l]) + 1$. Второе неравенство выполняется по неравенству треугольника в метрике на графе Кэли группы всех слов.

Первое неравенство (тоже по неравенству треугольника):

$$len([ls]) \geq len(lss^{-1}) - len([s^{-1}]) = len([l]) - 1$$

А тогда $|w| - 1 \leq |l'| = len([ls])$

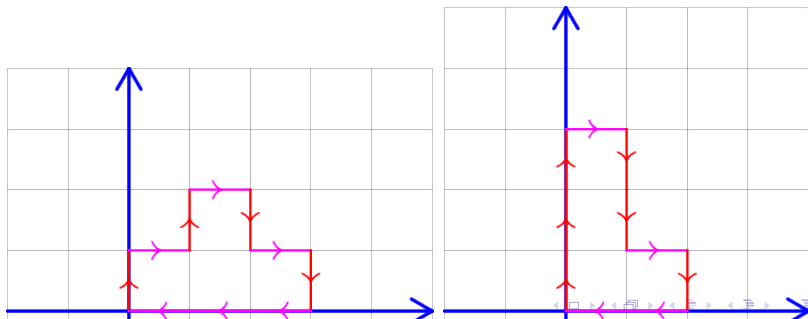


Пункт 3

Замкнутые кратчайшие ломаные – максимальные – простые.

Определение

Полимино – плоские геометрические фигуры, образованные путём соединения нескольких одноклеточных квадратов по их сторонам



Благодарность

Спасибо за внимание!