# *Задача 5. Крадущаяся змея, затаившееся полимино.*

Анатолий Коченюк, команда ЛНМО#2

Март 2019

**Аннотация**

*В этой статье полностью решён первый пункт, а также решена часть второго пункта.
Были доказаны некоторые леммы, позволяющие удобно работать с эквивалентностью ломаных. Также были доказаны два условия того, что ломаная является кратчайшей.*

# Содержание

# Введение

Рассмотрим множество ломаных на решётке $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ с началом в точке $(0, 0)$

1. Ломаную можно представить как путь в $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z}$ или $y \in \mathbb{Z}\}$ Введём специальные обозначения, для задания ломаной.

   $a, A$ – отрезки направленные вправо и влево

   $b, B$ – вверх и вниз

2. Общее количество таких отрезков будем называть длиной ломаной.

   Допускается случай ломанной с длиной $0$ – $\varepsilon$

3. Ломаная замкнутая, если её конец совпадает с началом $[(0, 0)]$

4. Ломаная простая, если у неё нет самопересечений по вершинам (допускается перечение начала и конца – случай замкнутой ломаной)

Введём 2 операции над ломанными:

1. Вытягивание и затягивание – добавление в любое место пути $l \in \{aA, Aa, bB, Bb\}$

2. Перенос – мы можем свободно перемещать в любое место пути определённые комбинации. В Теории групп есть понятие описывающие такие конструкции – коммутатор.

   Коммутатор – для $f, g \in G$ $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$.

   Если рассмотреть группу $G = \langle a, b \rangle$ (Положим, что $A = a^{-1}$ и $B = b^{-1}$)

Говоря о теории групп, можно задать группу всех ломанных с учётом операций:
$G = \langle a, b \mid [x, y]z = z[x, y], x, y, z \in \{a, b, A, B\} \rangle$ (первая операция будет автоматически учтена, т.к. в группе произведение)

**Определение 0.1.** *Обратное слово – конкатенация обратных элементов в обратном порядке*

**Замечание 0.1.** *Если два слова эквивалентны, то произведение первого на обратное ко второму эквивалентно пустому слову.*

*Доказательство.* $l \equiv m$
$lm^{-1} \equiv ll^{-1} \equiv \varepsilon$ □

**Замечание 0.2.** *Преобразования не изменяют конечную точку*

*Доказательство.*
1. мы добавляем движение в любую сторону и обратное к нему. Таким образом мы приходим в ту же точку

2. ломаная двигается по квадрату, приходя в ту же точку

□

# 1 Проверка на эквивалентность

1. $babAAba$ и $bbb$. $babA[AbaB]BB \equiv ba[AbaB]bABB = b[aA]ba[Bb]ABB \equiv bb[aA]BB \equiv b[bB]B \equiv bB \equiv \varepsilon \Rightarrow bbb \equiv bbabAAba$

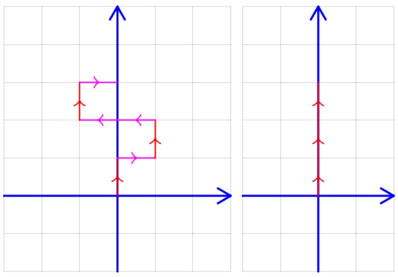
2. C.

   **Замечание 1.1.** *что никакое движение не изменяет чётность количества букв $a$ и $b$ (и заглавных и строчных)*

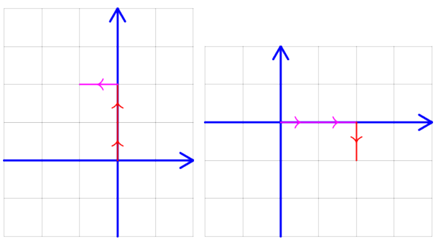
   - *вставка $zZ, z \in \{a, b, A, B\}$ – добавляет две одинаковые буквы. чётность не меняется*
   - *по сути это просто перемещение определённой группы букв, что не меняет их количество совсем.*

   В этих словах разное по чётности количество букв $a$ и $b \Rightarrow$ они не эквивалентны

3. $aabbAABB$ и $abAB$.



$babAAba$ и $bbb$. $babA[AbaB]BB \equiv ba[AbaB]bABB = b[aA]ba[Bb]ABB \equiv bb[aA]BB \equiv b[bB]B \equiv bB \equiv \varepsilon \Rightarrow bbb \equiv bbabAAba$

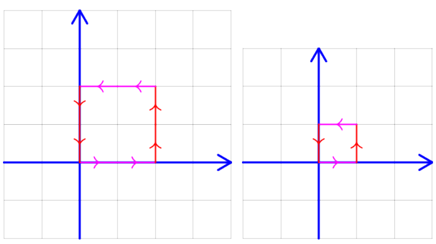


$aabbAABB$ и $abAB$

**Замечание 1.2.** *что никакое движение не изменяет чётность количества букв $a$ и $b$ (и заглавных и строчных)*

- *вставка $zZ, z \in \{a, b, A, B\}$ – добавляет две одинаковые буквы. чётность не меняется*
- *по сути это просто перемещение определённой группы букв, что не меняет их количество совсем.*

В этих словах разное по чётности количество букв $a$ и $b \Rightarrow$ они не эквивалентны



$aabbAABB$ и $abAB$

**Определение 1.1.** *У отрезков ломаной есть направление. Будем считать, что если в многоугольнике стороны направлены против часовой стрелке, то площадь положительна. В противном случае считаем её отрицательной.*

**Замечание 1.3.** *При действии движе-*

*ний, если рассматривать многоугольник составленный из точек ломаной в порядке букв в слове, то его ориентированная площадь не изменится. Такой многоугольник существует, когда ломаная замкнутая.*

*Доказательство.* Итак рассмотрим оба движения:

1. вытягивание создаст две новых точки, но не добавит площади, т.к. на графике появится новый отрезок.

2. вытягивание аналогично уберёт такой отрезок.

3. перетаскивание квадрата вдоль сторон не изменит площадь, ведь площадь этого квадрата прибавляется к площади остальной фигуры, а его перемещение не меняет остальные стороны.

Понятно, что у слова $aabbAABB$ – площадь 4, а у $abAB$ – 1. А значит они не эквивалентны. □

# 2 Кратчайшие ломаные

**Определение 2.1.** *Ломаная является кратчайшим, если с помощью наших движений её нельзя перевести в ломаную с меньшей длиной.*

## 2.1 Проверка того, что слово кратчайшее

Является ли $abABabAB$ кратчайшей? $abAB[abAB] \equiv a[abAB]bAB \equiv aabAAB$. Мы с помощью движений получили слово меньшей длины, следовательно изначальной слово не является кратчайшим.

## 2.2 Максимальные ломаные

**Определение 2.2.** *Префикс ломаной $L$ – любая ломаная, не превосходящая по длине ломаную $L$ и идущая по тому же маршируту.*

**Определение 2.3.** *Ломаная называется максимальной, если она является кратчайшей и единственная кратчайшая ломаная для которой она является префиксом – она сама.*

**Теорема 2.1.** *У каждой ломаной есть единственное представление в виде $[a,b]^z a^x b^y$, где $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ а степень – конкатенация, т.е. $[a,b]^2 = [a,b][a,b]$*

*Доказательство.* Сначала покажем, что такое представление в принципе есть:

Если у нас есть слово $xy$, то мы можем 'переставить' их слудующим образом :

Таким образом мы можем переставить все $b$ влево, а все $a$ вправо. При этом накопится некоторое количество коммутаторов. С помощью действия 2 перемещаем их все влево и получаем форму $[a,b]^z a^x b^y$ □

**Теорема 2.2.** *Любая кратчайшая замкнутая ломаная – максимальная.*

*Доказательство.* □

## 2.3 Каждая кратчайшая ломаная простая?

<...>

## 2.4 Достаточные условия кратчайшей ломаной

**Определение 2.4.** *Ломаную мы будем называть кратчайшей, если её нельзя с помощью вытягивания, затягивания или переноса привести к ломаной, имеющей меньшую длину.*

**Условие 2.1.** $L$– *кратчайшая* $\Longleftrightarrow \nexists L' : L' \equiv L \ \& \ len(L') < len(L)$

*Доказательство.* Пусть $\exists L' : L' \equiv L \ \& \ len(L') < len(L)$, а тогда мы можем движениями (вытягиваниями, затягиваниями и переносами) преивести ломаную $L$ к ломаной $L'$, что противоречит определению кратчайшести. □

**Условие 2.2.** *Ломаная кратчайшая, когда она является частью кратчайшей ломаной*

*Доказательство.* Допустим противное: пусть ломаная $L$ является частью кратчайшей ломаной $M$ и при этом сама $L$ не является кратчайшей. Тогда существует ломаная $L'$ : $L' \equiv L \ \& \ len(L') < len(L)$

А значит, что ломаную $L$ можно движениями привести к меньшей по длине ломаной $pL$. Но все тежи самые движения можно провести внутри ломаной $M$. Представим ломаную $M$ как $m + L + m'$, где $m$ и $m'$ – части ломаной до и после ломаной $L$, а '+' означает конкатенацию.

Т.к. $L \equiv L'$, то $m + L + m' \equiv m + L' + m'$. Длина ломаной при конкатенации считается, как сумма длин её частей. Получается, что $len(M) = len(m + L + m') = len(m) + len(L) + len(m') < len(m) + len(L') + len(m') = len(m + L' + m')$ и при этом $m + L + m' \equiv m + L' + m'$. Но это противоречит условию, что $M$ – кратчайшая?!

□

# 3 Замкнутые кратчайшие ломаные

# 4 Описание максимальных ломаных