ФОНД
ПРЕЗИДЕНТСКИХ
ГРАНТОВ

ВРЕМЯ
НАУКИ

ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ 2019

9–11 классы

spbtym.ru

Задача №1 Автостопом по галактике

В одной очень далекой галактике расположено бесконечное число планет, каждая из которых имеет свой уникальный номер — целое число. На галактику воздействует звёздный ветер, который приводит в движение планеты вдоль некоторых орбит. Мы хотим изучить это явление в математическом контексте.

Перестановкой назовём биективную функцию $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$. Перестановка f называется конечной, если множество $\{n \in \mathbb{Z} \mid f(n) \neq n\}$ конечно. Для $n \in \mathbb{Z}$ множество $\mathcal{O}_f(n) = \{n, f(n), f(f(n)), \ldots\} \cup \{f^{-1}(n), f^{-1}(f^{-1}(n)), \ldots\}$ называется орбитой n под действием f. Перестановка f называется локально конечной, если у всех $n \in \mathbb{Z}$ орбиты $\mathcal{O}_f(n)$ конечны. Например, среди перестановок $f_m(n) = n + m$, где $m \in \mathbb{Z}$, все кроме f_0 не являются ни конечными, ни локально конечными.

1. Исследуйте поведение перестановок относительно взятия композиции $f \circ g$ функций.
   (a) Верно ли, что композиция двух конечных перестановок является конечной перестановкой?
   (b) Верно ли, что композиция двух локально конечных перестановок является локально конечной перестановкой?
   (c) Верно ли, что композиция локально конечной перестановки и конечной перестановки является локально конечной перестановкой?
2. Обозначим через F множество всех конечных перестановок, через LF множество всех локально конечных перестановок, а через P множество всех перестановок. Для подмножества $X \subseteq P$ через $\langle X \rangle \subseteq P$ обозначим множество таких перестановок, которые могут быть получены из X по следующим правилам:
   - если $f \in X$, то $f \in \langle X \rangle$;
   - если $f, g \in \langle X \rangle$, то $f \circ g \in \langle X \rangle$;
   - если $f \in \langle X \rangle$, то $f^{-1} \in \langle X \rangle$.

   Тем самым, перестановка $f \in P$ принадлежит $\langle X \rangle$ в том и только в том случае, когда она может быть получена из перестановок в X с помощью конечного числа таких выводов. Например, если $f, g \in X$, то $f^{10}, \mathrm{id}, f^{-1} \circ g \circ f, g^{-7} \circ f \in \langle X \rangle$.
   (a) Существует ли такой конечный набор перестановок X, что $F = \langle X \rangle$?
   (b) Существует ли такой конечный набор перестановок X, что $F \subseteq \langle X \rangle$?
   (c) Верно ли, что $LF \subseteq \langle F \rangle$?
   (d) Существует ли такой конечный набор перестановок X, что $LF \subseteq \langle X \rangle$?
3. Верно ли, что $P \subseteq \langle LF \rangle$?
4. Будем говорить, что перестановка f является кольцевой, если она задаёт лишь конечное число орбит. Это означает, что множество $\{\mathcal{O}_f(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ конечно. Например, все перестановки f_m с $m \neq 0$ являются кольцевыми, поскольку каждая из них имеет $|m|$ различных орбит. Множество всех кольцевых перестановок мы обозначим через R.
   (a) Верно ли, что $R \subseteq \langle LF \rangle$?
   (b) Верно ли, что $F \subseteq \langle R \rangle$?
   (c) Верно ли, что $LF \subseteq \langle R \rangle$?
   (d) Верно ли, что $P \subseteq \langle R \rangle$?
5. Предложите собственные развития этой задачи и изучите их.

Задача №2 Нет монет

Рассмотрим конечное множество денежных номиналов $S = \{s_1, \ldots, s_m\} \subseteq \mathbb{N}$. Предположим, что числа из S взаимно просты (их наибольший общий делитель равен единице), и что $|S| \geq 2$. Обозначим через

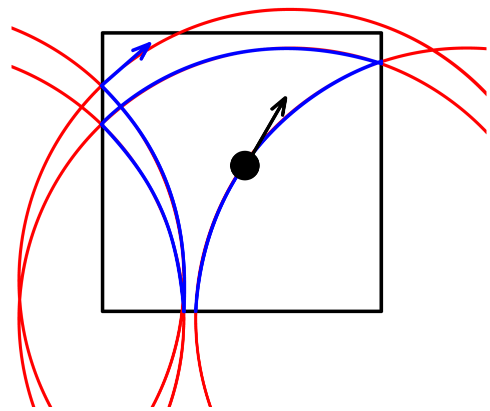
$$S^+ = \{n_1 s_1 + n_2 s_2 + \ldots + n_m s_m \mid n_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$$

множество тех денежных сумм, которые можно собрать с помощью монет, номиналы которых принадлежат S.

1. Зададимся вопросом о том, какие величины можно собрать с помощью номиналов из S.
   (a) Пусть $S = \{3, 5\}$. Докажите, что с помощью номиналов из S можно собрать любую денежную сумму $n \geq 8$. Опишите множество S^+.
   (b) Докажите, что при любом выборе S верно равенство
   $$\{n_1 s_1 + n_2 s_2 + \ldots + n_m s_m \mid n_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, 2, \ldots, m\} = \mathbb{Z}.$$
2. (a) Докажите, что при всех S существует такое $N = N(S) \in \mathbb{N}$, что при всех $n \geq N$ верно $n \in S^+$. Иными словами, докажите, что множество $\mathbb{N} \setminus S^+$ конечно.
   (b) В терминах элементов множества S дайте какую–нибудь верхнюю оценку на наименьшее из таких чисел $N(S)$.
3. Мы обозначим $S^{-1} := \{-s \mid s \in S\}$. Из результата пункта 1(b) следует, что каждое целое число можно получить из числа 0 с помощью некоторого количества прибавлений элементов из $S \cup S^{-1}$. Для $n \in \mathbb{Z}$ обозначим через $M_S(n)$ наименьшее количество прибавлений, которые требуется сделать, чтобы получить n. Например, нетрудно проверить, что при $S = \{1, 3, 5\}$ имеем $7 = 5+3+(-1)$ и, вообще, $M_S(7) = 3$. Стоит отметить, что в общем случае $M_S(n+k) \leq M_S(n)+M_S(k)$ и, в частности, $M_S(n + s) \leq M_S(n) + 1$ при всех $s \in S \cup S^{-1}$.
   (a) Число $n \in \mathbb{N}$ будем называть неудачным относительно S, если $M_S(n + s) < M_S(n) + 1$ при всех $s \in S \cup S^{-1}$. Множество всех неудачных чисел относительно S мы обозначим через $F(S)$. Для $S = \{7, 9\}$ дайте явное описание множества $F(S)$ и опишите $\{n/16 \mid n \in F(S)\}$.
   (b) Как связаны множества S^+ и $F(S)$?
   (c) Для произвольных взаимно простых $a, b \in \mathbb{N}$ опишите все неудачные относительно $S = \{a, b\}$ числа.
4. Исследуйте поведение неудачных чисел для $S = \{a, b, c\}$.
   (a) Для $S = \{7, 9, 11\}$ опишите множества S^+ и $F(S)$.
   (b) Дайте явное описание для множества $F(S)$ в общем случае $|S| = 3$.
5. Предложите собственные направления в этой задаче и изучите их. Например, исследуйте поведение функции $M_S(n)$.

Задача №3 Артистический бильярд

Рассмотрим квадрат $F = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$, играющий роль бильярдного стола. В центре квадрата в точке $P = (1/2, 1/2)$ находится бильярдный шар. Как известно, в артистическом бильярде шар запускают по странным траекториям, изображающим на столе разные геометрические узоры. Мы идеализируем эту идею в следующей модели. Наш шар будет бесконечно перемещаться по дугам невидимых окружностей, как показано на рисунке. Тем самым, для того, чтобы толкнуть шар, требуется задать радиус окружности, расположение этой окружности, не обязательно содержащейся в квадрате и проходящей через начальную точку, и направление движения шарика вдоль дуги такой окружности. После того, как шарик ударится о стенку, он продолжит движение, но уже по новой дуге, которая вычисляется следующим образом. Нужно заменить окружность, по дуге которой движется шарик, на зеркально–симметричную относительно прямой, содержащий отрезок квадрата, о который ударился шарик. Если шарик попадает в точку пересечения двух сторон квадрата, такое отражение проводится дважды — относительно каждой из двух сторон. Шарик продолжит движение по единственной содержащейся в квадрате дуге получающейся окружности.



Траекторией в F называется подмножество в F, которое является объединением дуг окружностей, имеющих своими концами стенки F, и которое может быть получено в виде "следа" некоторого движения шарика (если траектория замкнута, то есть в некоторый момент начинает идти по тому же самому маршруту, то количество таких дуг конечно, а в противном случае это количество бесконечно). Нас интересует поведение траекторий внутри F.

1. Пусть $T(F)$ — это множество таких $n \in \mathbb{N}$, для которых существует траектория движения (с указанием направления) на F, перемещаясь вдоль которой из P шарик попадает в ту же точку P ровно через n отражений от стенок F. Например, можно направить шарик по дуге окружности, которая пересекает стенку F под прямым углом. В таком случае после отражения шарик пойдёт по той же самой дуге в обратную сторону, и поэтому $1 \in T(F)$.
   (a) Верно ли, что множество $T(F)$ бесконечно?
   (b) Верно ли, что $T(F) = \mathbb{N}$?
2. Пусть $C(F)$ — это множество таких $n \in \mathbb{N}$, для которых существует *замкнутая* траектория движения (с указанием направления) на F, которая касается стенок F ровно n раз.
   (a) Верно ли, что $C(F) \neq \varnothing$?
   (b) Верно ли, что множество $C(F)$ бесконечно?
   (c) Опишите множество $C(F)$.
3. Дана траектория движения шарика в F. Дайте необходимые и достаточные условия, при которых она является замкнутой.
4. Пусть $B(F)$ — это множество таких $n \in \mathbb{N}$, для которых существует замкнутая траектория движения (с указанием направления) на F, которая проходит через точку P ровно n раз (начало и конец этой замкнутой траектории считаются за один раз).
   (a) Верно ли, что множество $B(F)$ бесконечно?
   (b) Верно ли, что $B(F) = \mathbb{N}$?

5. Исследуйте аналогичные вопросы в том случае, когда в качестве фигуры F выступает не квадрат, а (a) правильный треугольник; (b) правильный шестиугольник; (c) произвольный треугольник; (d) произвольный четырёхугольник; (e) правильный пятиугольник; (f) произвольное полимино. В качестве начальной точки можно выбрать любую. Предложите собственные развития этой задачи и изучите их.

Задача №4 Поймай меня, если сможешь

1. Назовём функцию $h : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{Z}$ считающей, если её можно представить в виде

$$h(x) = c_1\lfloor x\rfloor + c_2\lfloor x/2\rfloor + c_3\lfloor x/3\rfloor + \ldots$$

для некоторых целых $c_1, c_2, c_3 \ldots$, которые называются коэффициентами считающей функции (при каждом $x \geq 0$ сумма в правой части состоит из $\lfloor x\rfloor$ ненулевых слагаемых), где $\lfloor x\rfloor$ обозначает целую часть числа $x \in \mathbb{R}$. Пусть далее h — считающая функция.

   (a) Верно ли, что если $\lfloor x\rfloor = \lfloor y\rfloor$, то $h(x) = h(y)$?

   (b) Что можно сказать про выражение $h(n) - h(n-1)$ при целых n?

2. В 1844 году Ф.Эйзенштейн предложил точную формулу для числа точек с целыми координатами внутри круга радиуса r на плоскости. Он использовал для этого считающие функции. А именно, если $S(r)$ обозначает количество целых точек внутри круга радиуса $\sqrt{r}$ с центром в начале координат, то

$$S(r) = 1 + 4\lfloor r\rfloor - 4\lfloor r/3\rfloor + 4\lfloor r/5\rfloor - 4\lfloor r/7\rfloor + \ldots.$$

Докажите эту формулу.

3. Найдите аналоги формулы Эйзенштейна в $\mathbb{R}^n$ при

   (a) $n = 1$

   (b) $n = 4$

   (c) $n \in \mathbb{N}$

4. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Результат гомотетии D с коэффициентом $r \geq 0$ относительно начала координат обозначим через $rD := \{(rx_1, \ldots, rx_n) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in D\}$. Обозначим $f(D, r) = |\{\sqrt{r}D \cap \mathbb{Z}^n\}|$. Например, из формулы Эйзенштейна следует, что $h(r) = f(B_2(1)\setminus\{(0,0)\}, r)$ является считающей функцией, где $B_m(1) \subseteq \mathbb{R}^m$ — единичный m–мерный шар с центром в начале координат. Пусть $q = ax^2 + bxy + cy^2$ — многочлен от двух переменных x, y с целыми коэффициентами. Определим $F_q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < q(x, y) \leq 1\}$.

   (a) Пусть $q = x^2 + xy + y^2$. Является ли $h(r) = f(F_q, r)$ считающей функцией? Если да, найдите её коэффициенты.

   (b) Пусть $p = x^2 + 5y^2$ и $q = 2x^2 + 2xy + 3y^2$. Является ли функция $h(r) = f(F_p, r) + f(F_q, r)$ считающей? Если да, найдите её коэффициенты.

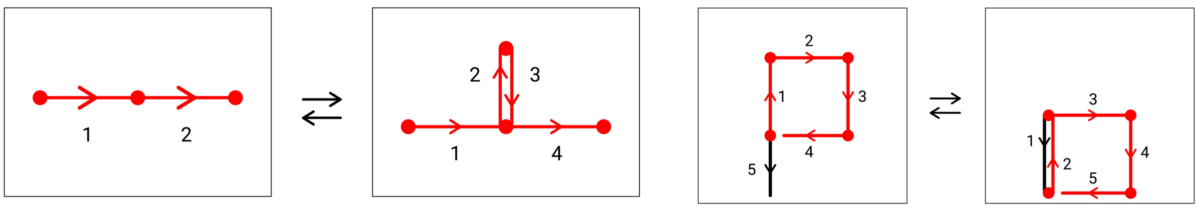
   (c) Пусть $p = x^2 + 5y^2$. Является ли функция $h(r) = f(F_p, r)$ считающей? Если да, попробуйте найти её коэффициенты.

5. Для $k \in \mathbb{N}$ пусть $q_k = x^2 + ky^2$. Является ли функция $h(r) = f(F_{q_k}, r)$ считающей? Исследуйте её коэффициенты при разных k.

6. Предложите собственные направления исследования этой задачи и изучите их.

Задача №5 Крадущаяся змея, затаившееся полимино

Рассмотрим множество всех ломаных на решетке $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, которые начинаются в точке $(0,0)$ и, возможно, имеют самопересечения как по вершинам, так и по рёбрам. Каждая такая ломаная представляет из себя путь в $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{Z} \text{ или } y\in\mathbb{Z}\}$, состоящий из вертикальных и горизонтальных отрезков длины 1, общее количество которых называется длиной ломаной (длина является целым неотрицательным числом — мы не исключаем случай пустой ломаной, начинающейся и заканчивающейся в $(0,0)$). Ломаная может быть задана строкой вида $aAbbBaBAA$, где a,b,A,B кодируют отрезки, направленные вправо, вверх, влево и вниз соответственно. Ломаная называется замкнутой, если её конечная вершина совпадает с начальной. Ломаная называется простой, если она либо вовсе не имеет самопересечений по вершинам, либо имеет ровно одно самопересечение по конечной и начальной вершине (в этом случае она является замкнутой). Мы введём две операции над ломаными:



1. *Вытягивание и затягивание.* Эта операция заключается в том, чтобы в любом месте ломаной потянуть за вершину и добавить ещё два отрезка, как показано на рисунке. Разрешается также провести это действие в обратную сторону.

2. *Перенос.* Эта операция заключается в том, чтобы выбрать на ломаной ориентированный квадрат 1×1 и сдвинуть его вдоль любого смежного к нему отрезка ломаной, как показано на рисунке.

На языке строк первая операция вытягивания и затягивания может быть описана фразой "в любое место строки можно вставить или удалить aA, Aa, bB или Bb" (на рисунке выше в качестве примера приведено $aa \longleftrightarrow abBa$), а вторая операция переноса — фразой "разрешается заменить в любом месте строки $xuvUV$ на $uvUVx$, $xUVuv$ на $UVuvx$, $xuVUv$ на $uVUvx$ или $xUvuV$ на $UvuVx$, где $x\in\{a,b,A,B\}$ и $u,v\in\{a,b\}$, и наоборот (провести замену в обратную сторону)" (на рисунке выше в качестве примера приведено $baBAB \longleftrightarrow BbaBA$). Например, из $baBa$ можно получить $baBAaa$, а затем $abaBAa$ и $abaB$. Будем говорить, что две ломаные эквивалентны, если вторую из них можно получить из первой с помощью этих операций.

1. Верно ли, что ломаные $babAAba$ и bbb эквивалентны? А ломаные bbA и aaB? А ломаные $aabbAABB$ и $abAB$?

2. Ломаную мы будем называть кратчайшей, если её нельзя с помощью вытягивания, затягивания или переноса привести к ломаной, имеющей меньшую длину.

   (a) Верно ли, что ломаная $abABabAB$ является кратчайшей?

   (b) Префиксом ломаной L будем называть любую ломаную, которая идёт по тому же маршруту, что и L, и не превосходит её по длине. Если ломаная L имеет длину n, то у L есть ровно $n+1$ префикс (считая саму ломаную и пустую ломаную длины 0). Например, префиксами ломаной abA являются $-, a, ab, abA$. Ломаная называется максимальной, если она является кратчайшей и единственная кратчайшая ломаная, для которой она является префиксом, — это она сама. Например, ломаная aaa не является максимальной, потому что является префиксом кратчайшей ломаной $aaaa$. Докажите, что любая кратчайшая замкнутая ломаная является максимальной.

   (c) Верно ли, что кратчайшая ломаная обязательно является простой?

(d) Дайте какие–нибудь достаточные условия, при которых ломаная является кратчайшей.

3. Дайте какое–нибудь геометрическое описание замкнутых кратчайших ломаных.

4. Опишите все максимальные ломаные.

5. Обозначим через a_n количество максимальных ломаных длины n. Найдите явную или рекуррентную формулу для a_n, а также попробуйте вычислить производящую функцию

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

6. Предложите собственные направления в этой задаче и изучите их.

Задача №6 Фестиваль языков

На международном фестивале языков обмениваются знаниями о разных языках и изучают их. В этом году состоится уже шестой ($n = 6$) по счёту фестиваль. Каждый год на него приглашается, вообще говоря, бесконечное число людей из разных стран, которые знают ровно один язык — свой родной. Кроме того, на n–ом фестивале собирается ровно n различных языков.

Участники фестиваля были пронумерованы целыми числами, распределены по группам и отправлены в комнаты, соответствующие их родному языку (каждая комната представлена одним языком), в которых они были посажены на стулья согласно их нумерации. На рисунке ниже показана бесконечная схема мероприятия: числа соответствуют людям (и стульям), а строчки — комнатам (и языку). Тем самым, каждое целое число задаёт некоторого человека.

...	-24	-18	-12	-6	0	6	12	18	...
...	-23	-17	-11	-5	1	7	13	19	...
...	-22	-16	-10	-4	2	8	14	20	...
...	-21	-15	-9	-3	3	9	15	21	...
...	-20	-14	-8	-2	4	10	16	22	...
...	-19	-13	-7	-1	5	11	17	23	...

В комнате, соответствующей языку, всех желающих обучают этому языку и рассказывают о его особенностях. Каждый участник фестиваля имеет право взять на себя роль организатора и перераспределить людей между комнатами. А именно, организатор m отправляет человека, сидящего в данный момент на стуле x, на стул под номером xm. Каждый человек на фестивале побывал организатором.

1. Известно, что через некоторое время после того, как очередной человек выполняет роль организатора, тренинг заканчивается, все люди возвращаются на свои стулья, и выбирается новый организатор.

   (a) Докажите, что если человек ходил учить некоторый язык, то и все его соседи по комнате ходили в тот же момент учить тот же самый язык.

   (b) В конце дня для практики в виде реального общения участники разбились на группы следующим образом: два человека в одной группе, если каждый из них учил язык другого. Схематично опишите разбиение людей на группы (при $n = 6$).

   (c) В алгебраических терминах укажите, когда два человека $x, y \in \mathbb{Z}$

      i. имеют один и тот же родной язык

      ii. в конце дня попадают в одну группу

(d) Исследуйте предыдущие вопросы для других фестивалей: на n–ом фестивале людей распределяют по комнатам с помощью бесконечной влево и вправо лентой с n строчками, аналогичной ленте выше. Все дальнейшие вопросы этой задачи также относятся к общему случаю $n \in \mathbb{N}$.

2. Участник $x \in \mathbb{Z}$ фестиваля называется продвинутым, если на нём он учил все языки.

   (a) При $n = 6$ выясните, в каких комнатах находятся продвинутые участники. Докажите, что на каждом фестивале $n \in \mathbb{N}$ все продвинутые участники попадают в одну группу.

   (b) Что можно сказать про число $n \in \mathbb{N}$, если все участники фестиваля n оказались продвинутыми?

   (c) Какие языки ходили учить люди, когда роль организаторов брали на себя продвинутые участники фестиваля?

   (d) Выясните, как по данному числу n понять, сколько групп образуется на фестивале. Закодируйте получающиеся группы какой–нибудь алгебраической характеристикой числа n. Как в терминах Вашего кодирования понять по данным людям $x, y \in \mathbb{Z}$, ходил ли x учить родной язык человека y?

3. Группу будем называть дружной, если каждый её участник обладает тем свойством, что при выполнении роли организатора он отправляет людей из своей группы на стулья людей своей же группы.

   (a) Докажите, что каждый год $n \in \mathbb{N}$ группа, в которой состоят продвинутые участники фестиваля, является дружной.

   (b) Какие группы являются дружными на фестивале $n = 12$? А на фестивале $n = 60$?

   (c) Участник фестиваля называется ленивым, если в тот момент, когда он выполняет роль организатора, все участники из его группы (в том числе он сам) остаются в своих комнатах. В каких группах есть ленивые люди?

4. Уберём условие п. **1** о том, что все люди возвращаются на свои стулья после завершения тренинга. Пусть $x \in \mathbb{Z}$ — участник фестиваля. Отправим его работать организатором много раз подряд. Будем говорить, что те языки, учить которые он ходил во время работы, ему нравятся.

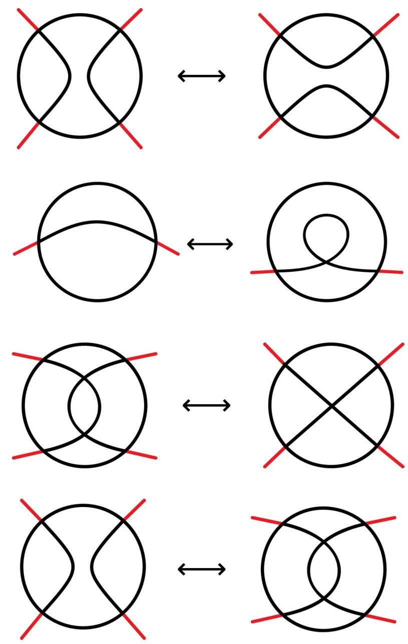
   (a) Каким людям нравится свой родной язык?

   (b) Будем говорить, что группа пребывает в гармонии (или ”является гармоничной”), если в ней существует участник, которому нравятся все языки этой группы. Как связаны свойства группы ”быть гармоничной” и ”быть дружной”?

   (c) Опишите те группы, которые являются гармоничными.

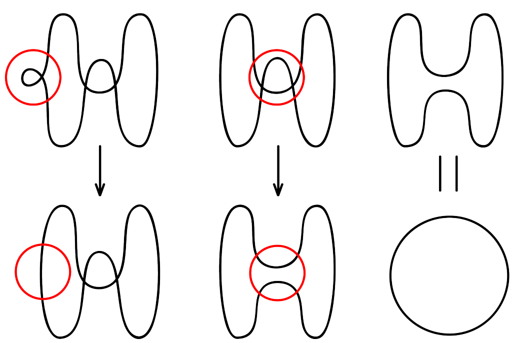
5. Предложите собственные направления исследования этой задачи и изучите их.

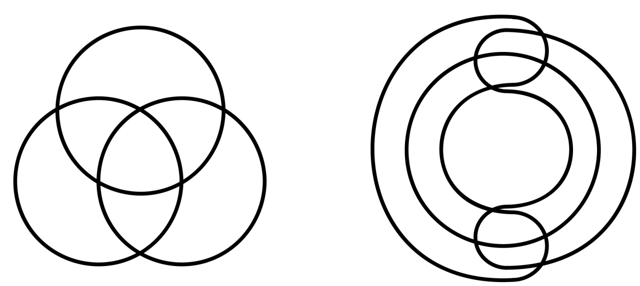
Задача №7 Бой с тенью



Тенью будем называть непустое подмножество плоскости, являющееся объединением нескольких замкнутых кривых, которым разрешено пересекаться (и самопересекаться) в конечном числе точек, в каждой из которых сходятся две кривые под почти прямым углом. Будем говорить, что две тени равны, если одну из них во вторую можно перевести небольшой деформацией, не меняющей комбинаторику картинки, т.е. такими шевелениями, при которых пересечения кривых не нарушаются. Множество всех теней мы обозначим через $\mathbb{T}$. Сейчас мы определим несколько преобразований, движений теней. Каждое такое движение осуществляется локально, а именно, для того, чтобы его применить, необходимо выбрать на плоскости некоторый (возможно, растянутый) кружок, граница которого пересекает тень в двух или четырёх точках, и сделать внутри этого круга замену, которую предполагает то или иное движение. В качестве таких локальных движений мы рассмотрим "мутирование", "заузливание", "затягивание" и "прыжок", которые изображены на четырёх рисунках справа (порядок сохранён) и которые мы назовём буквами M, K, W, D.

Мы интересуемся, как ведут себя тени при таких преобразованиях. Формально, для каждого подмножества $X \subseteq \{M, K, W, D\}$ мы вводим на множестве $\mathbb{T}$ своё отношение эквивалентности, при котором тени t_1, t_2 эквивалентны в том случае, когда от t_1 можно перейти к t_2 за конечное число локальных движений, соответствующих элементам множества X (будем говорить, что такие тени эквивалентны относительно X). Например, как показывает рисунок слева, левая верхняя тень эквивалентна обычной окружности относительно $X = \{K, D\}$



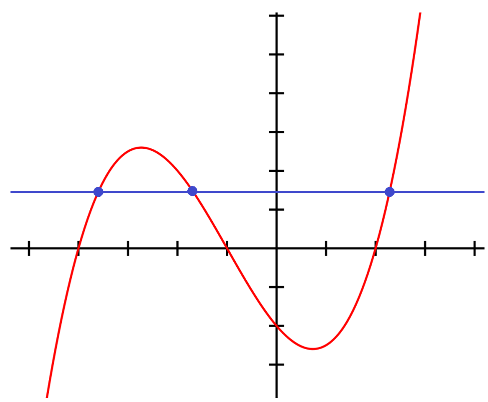


1. При каких $X \subseteq \{M, K, W, D\}$ две тени на рисунке справа эквивалентны относительно X?
2. Для каждого из 2^4 вариантов $X \subseteq \{M, K, W, D\}$ выясните, верно ли, что любые две тени эквивалентны относительно X.
3. Составьте диаграмму, в которой будут приведены все возможные подмножества $X \subseteq \{M, K, W, D\}$, а также стрелки, которые проводятся по следующему правилу. Правило состоит в том, чтобы провести стрелку от X к Y, если верно утверждение "$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{T}$ если тени t_1, t_2 эквивалентны относительно X, то они эквивалентны и относительно Y".

4. Для тени $t \in \mathbb{T}$ точки, в которых происходит пересечение замкнутых кривых, будем называть двойными. Обозначим через $C(t)$ количество двойных точек t. Пусть тень t разбивает плоскость на некоторые подмножества–компоненты. Каждая такая компонента имеет границу, которая состоит из кривых, на которых, возможно, находятся двойные точки. Будем говорить, что компонента является n–угольником, если её граница является связным множеством, на котором есть ровно n двойных точек. Тень t называется минимальной относительно $X \subseteq \{M, K, W, D\}$, если для любой тени $s \in \mathbb{T}$, которая эквивалентна t относительно X, верно неравенство $C(t) \leq C(s)$.
   (a) Пусть $X = \{K, D\}$. Верно ли, что если среди компонент t нет одноугольников и двуугольников, то t минимальна?
   (b) Для $X \subseteq \{M, K, W, D\}$ найдите какие–нибудь критерии минимальности теней $t \in \mathbb{T}$ относительно X.
5. Предложите свои собственные направления исследования и изучите их.

Задача №8 Расслоения

Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Для $a \in \mathbb{R}$ введём обозначение $f^{-1}(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = a\}$. Далее мы будем предполагать, что f непрерывна, а все множества $f^{-1}(a)$ конечны. По f определим функцию $f^\circ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$, вычисляющую мощности прообразов функции f над точками, по правилу $f^\circ(a) = |f^{-1}(a)|$.



1. Пусть в этом пункте f — многочлен степени $d \geq 0$.
   (a) Какое наибольшее значение может принимать f°?
   (b) Дайте необходимые и достаточные условия на многочлен f, при которых f° принимает все промежуточные целые значения между наименьшим и наибольшим.
   (c) Верно ли, что для любого конечного множества $A \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ найдётся такой многочлен f, что $A \subseteq f^\circ(\mathbb{R})$?
2. Выясните, может ли функция f° оказаться постоянной: $f^\circ(a) = n$ при всех $a \in \mathbb{R}$. Для каких именно $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ это возможно?
3. (a) Может ли f° принимать только четные значения для некоторой функции f?
   (b) Может ли такое произойти в том случае, когда f — многочлен?
4. (a) Выясните, существует ли непустое множество $T \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$, которое не может быть получено в виде $f^\circ(\mathbb{R})$ ни при каких f.
   (b) Если в предыдущем пункте вы ответили утвердительно, попробуйте дать достаточные условия, при которых $T \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ может быть получено в виде $T = f^\circ(\mathbb{R})$.
5. Предложите собственные развития этой задачи и изучите их.

Задача №9 Жажда скорости

Эта задача посвящена теории дифференциальных неравенств. Для погружения в эту задачу необходимо владеть базовой техникой теории дифференциальных уравнений (равномерная сходимость последовательности функций, теоремы Пеано, Пикара и Арцела–Асколи). Пусть $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ — непрерывная функция. Формальная запись

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

называется дифференциальным уравнением. Решением такого уравнения на интервале (a, b) называется непрерывно дифференцируемая функция $y : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, для которой верно равенство $y'(x) = f(x, y(x))$ при всех $x \in (a, b)$. Аналогично определяются строгое и нестрогое дифференциальные неравенства

$$y' < f(x, y), \quad y' \leq f(x, y), \tag{2}$$

геометрический смысл которых аналогичен геометрическому смыслу дифференциального уравнения. Например, можно доказать, что множество решений неравенства $y' \leq 0$ на интервале (a, b) совпадает с множеством непрерывно дифференцируемых на (a, b) монотонно убывающих функций.

1. Попробуйте найти и описать все решения нестрогого дифференциального неравенства на $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ в следующих случаях:
   (a) $f(x, y) = y$
   (b) $f(x, y) = 3y^{2/3}$
2. Средним значением функции y на (a, b) называется величина $\bar{y} := \frac{1}{b-a}\int_a^b y(x)\ dx$. Исследуйте вопрос о том, есть ли у неравенств из предыдущего пункта периодические (с некоторым периодом $T > 0$) решения. А есть ли среди периодических решений такие y, для которых среднее значение $\bar{y}$ на $(0, T)$ равно нулю?
3. Здесь и далее фиксируем функцию f. Рассмотрим непрерывно дифференцируемые функции $y_1, y_2 : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, одна из которых (скажем, y_2) является решением дифференциального уравнения. Пусть известно, что $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ при некотором $x_0 \in (a, b)$. Будем писать $y_1 \prec y_2$ и говорить, что y_1 растёт строго медленнее, чем y_2, если $y_2 < y_1$ на (a, x_0) и $y_1 < y_2$ на (x_0, b). Аналогично определяется нестрогий относительный рост $\preccurlyeq$.
   (a) Верно ли, что если y_1 является решением строгого дифференциального неравенства на (a, b), то $y_1 \prec y_2$?
   (b) Верно ли, что если y_1 является решением нестрогого дифференциального неравенства на (a, b), то $y_1 \preccurlyeq y_2$?
   (c) Точка $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ называется точкой единственности уравнения, если для любых двух решений y_1, y_2, для которых $y_1(u) = y_2(u) = v$, найдётся интервал $(c, d) \subseteq (a, b)$, на котором $y_1 = y_2$, и точкой ветвления в противном случае. Предположим, что все точки вида $(x, y_1(x))$ являются точками единственности. Докажите, что если y_1 является решением нестрогого дифференциального неравенства на (a, b), то $y_1 \preccurlyeq y_2$.
4. Обозначим через Φ и Ψ множества всех ограниченных по модулю (единой константой, например, $C = 100$) решений нестрогого и строгого дифференциальных неравенств на (a, b) соответственно. Определим на (a, b) функции φ, ψ по правилам $\varphi(x) = \sup\limits_{y \in \Phi} y(x)$ и $\psi(x) = \sup\limits_{y \in \Psi} y(x)$. Докажите, что φ и ψ являются решениями дифференциального уравнения.
5. Исследуйте решения нестрогого дифференциального неравенства на $\mathbb{R}$ для $f(x, y) = p(x)y + q(x)y^{2/3}$, где p, q — фиксированные непрерывно дифференцируемые функции. Даже частные случаи и общие свойства решений представляют интерес.
6. Предложите собственные направления исследования этой задачи и изучите их.

Задача №10 Эффект бабочки

Пусть a_n — числовая последовательность, а $S_m := \sum_{n=1}^{m} a_n$ — её частичные суммы. Напомним, что под бесконечной суммой $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ подразумевается число $\lim_{m\to\infty} S_m$, если предел действительно существует (в противном случае бесконечная сумма не определена).

1. Как известно, числовой ряд для $a_n = (-1)^{n+1}/n$ сходится, причем, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \log(2)$. Оказывается, что можно подобрать такую перестановку индексов $n \mapsto \pi(n)$, чтобы, например, число $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ оказалось равно нулю. Обобщите этот результат, объяснив, как нужно группировать члены ряда так, чтобы получить в пределе число $\log(p/q)$, где $p, q \in \mathbb{N}$ — заданные числа.

2. Нетрудно проверить, что частичные суммы S_n для $a_n = 1/n$ образуют неограниченную последовательность, а потому предела $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ не существует. Как мы видим, можно расставить знаки ± 1 так, чтобы предел существовал и был равен $\log(2)$. Верно ли, что любое число $L \in \mathbb{R}$ может быть получено в виде $L = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{1}{n}$ для некоторой последовательности $\lambda_n \in \{+1, -1\}$?

3. Пусть теперь a_n — произвольная числовая последовательность. Найдите какие–нибудь достаточные и необходимые условия на a_n, при которых для каждого $L \in \mathbb{R}$ существует такая последовательность λ_n из единиц и минус единиц, что $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n = L$.

4. Пусть A — заданное подмножество прямой $\mathbb{R}$. По данному $x_1 \in \mathbb{R}$ определим последовательность x_n по правилу

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 1/n & \text{если } x_n \in A; \\ x_n - 1/n & \text{если } x_n \notin A. \end{cases}$$

Обозначим через $l(x_1)$ предел последовательности x_n, если он существует. Определим множество возможных пределов x_n

$$L(A) = \{a \in \mathbb{R} \mid \exists x_1 \in \mathbb{R} : \ l(x_1) = a\}.$$

   (a) Верно ли, что для любого конечного множества $B \subseteq \mathbb{R}$ существует такое A, что $B \subseteq L(A)$?

   (b) Верно ли, что для любого конечного множества $B \subseteq \mathbb{R}$ существует такое A, что $B = L(A)$?

   (c) Верно ли, что существует такое A, что $L(A) = \mathbb{Z}$?

   (d) Верно ли, что существует такое A, что $L(A) = \mathbb{R}$?

5. Предложите собственные развития этой задачи и изучите их.