Конспект по геометрии

Коченюк Анатолий

21 сентября 2018 г.

Глава 1

1 четверть

Задача 1.1. $\alpha \cap \beta = \emptyset$
a пересекает $\alpha \Rightarrow$ *a пересекает* β

Доказательство. фиксируем прямую α пересекающую α
Через a и плоскость B можно провести единственную плоскость γ
$\gamma \cap \alpha = x$ – прямая
$\gamma \cap \beta = y$ – прямая (есть общая точка B)
$x \cap y = \emptyset$, т.к. α и β не пересекаются
$x, y, a \subseteq \gamma \quad x||y$
$a \cap x = A \Rightarrow$ а пересекается с $y \Rightarrow x$ пересекается с β □

1.1 Взаимное расположение прямых в пространстве

1. Прямые пересекаются (в какой-то плоскости)
2. Прямые параллельны (в одной плоскости, но не пересекаются)
3. Прямые скрещиваются (в разных плоскостях)

Признак 1.1. *Если две прямые содержат четыре точки, которые не лежат в одной плоскости, то эти прямые скрещивающиеся*

Признак 1.2. *Прямая, пересекающая плоскость, скрещивается с каждой прямой, лежащей в этой плоскости и не проходящей через точку пересечения.*

Д/З – доказать признак 1.2

Теорема 1.1. *Через каждую точку пространства, не лежащую на данной прямой проходит прямая, параллельная данной и при том только одна.*

Доказательство. фиксируем прямую a и точку $A \notin a \quad \exists! \alpha : A \in \alpha, a \in \alpha$ Тогда в $\alpha \exists! b : a||b$

- Единственность

  $\sqsupset b_1.b_2 \ni A$ и $b_1||a \Rightarrow b_1 \in \alpha \quad b_2||a \Rightarrow b_2 \in \alpha$

  $b_1 \cap b_2 = A \quad b_1, b_2||\alpha$ в плоскости $\alpha \Rightarrow b_1 = b_2$

□

Теорема 1.2 (свойство транзитивности)**.** $a||b \ \& \ b||c \Rightarrow a||c$

Доказательство.

Лемма 1.1. *Если плоскость пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает вторую*

Доказательство. **Д/З** □

$a||b \Rightarrow$ они лежат они лежат в одной плоскости
$b||c \Rightarrow$ они лежат в одной плоскости a, c – 3 варианта:

- они пересекутся в точке $X \Rightarrow$ Через точку X провели две прямые параллельные b??!
- они параллельны
- они скрещиваются

Докажем, что они лежат в одной плоскости.
$\sqsupset$ a, c не лежат в одной плоскости
фиксируем $A \in a$ и c лежат в плоскости γ
a не пересекает γ и $a||b \Rightarrow b$ пересекает γ и $b||c \Rightarrow c$ пересекает γ □

1.2 Параллельное проектирование

Определение 1.1 (проекция точки). *плоскость α, прямая a пересекающая α*
фиксируем точку $x \Rightarrow \exists! a'||a, \quad a' \ni X$
a' пересекается с α (по лемме)
*$x' = a' \cap a$ – будет называться **проекцией** точки X на плоскость α при проектировании параллельно прямой a*
α – плоскость проекции
a – направление проекции

Определение 1.2. *Проекция фигуры F – множество проекций всех точек F*

Теорема 1.3 (о параллельном проектировании). *α, a. Прямые не параллельны a. Отрезки лежат на прямых не параллельных a*

1. *Проекция отрезка – отрезок*

   Проекция прямой – прямая

2. *Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают*

3. *Отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых равно отношению самих отрезков.*

Доказательство. 1. Построим проекцию прямой b

   $a_1||a$. a_1 пересекает b

   β – плоскость, проходящая через a_1 и b

   β пересекается с α (т.к. a_1 пересекается с α)

   Докажем, что $b' = \beta \cap \alpha$:

   $X \in \beta \Rightarrow$ прямая, параллельная a_1 и проходящая через X пересекает b' в точке X'

   $Y' \in b'$ по аналогии $Y \in b$

   $AB \in b$, b' – проекция $b \Rightarrow (A \rightarrow A' \in b')$ и $(B \rightarrow B' \in b')$

   Тогда $\forall x \in AB \quad x' \in A'B'$ (прямые AA', BB', CC' лежат в одной плоскости)

2. $b||c \quad \sqsupset l||a$ пересекает b и $c \Rightarrow \exists! \beta$, которая содержит l, b и $\Rightarrow b' = c' = \beta \cap \alpha$

   $\sqsupset \nexists l$ пересекающая b и c одновременно $\Rightarrow$

   $l_1||a$ пересекается с $b \quad$ по l_1 и b построим β

   $l_2||a$ пересекается с $c \quad$ по l_2 и c построим γ

   $b' = \alpha \cap \beta \quad c' = \alpha \cap \gamma$ и $\beta \cap \gamma = \emptyset \Rightarrow b' \cap c' = \emptyset, b', c' \in \alpha \Rightarrow b'||c'$

3. $b \not\parallel a \quad A, B, C, D \in b \Rightarrow b$ и b' лежат в одной плоскости β

   AA', BB', CC', DD' параллельны в плоскости β (т.к. параллельны прямой a)$\Rightarrow \dfrac{|AB|}{|CD|} = \dfrac{|A'B'|}{C'D'}$ (по обобщению теоремы Фалеса из планиметрии)

   фиксируем $b||c \quad Ab \subseteq b \quad CD \subseteq c$

   γ – плоскость, в которой $b||c$

   Проведём через $A \in \gamma$ прямую. Она пересекает c в точке A_1

   Через B проведём прямую, параллельную $AA1$

   Тогда ABB_1A_1 – параллелограмм

   Тогда $|AB| = |A_1B_1| \quad A'B'A_1'B_1'$ – параллелограмм (т.к $A'B'||A_1'B_1'$)

   $A'A_1'||B'B_1'$(по предыдущим пунктам) $\Rightarrow |A'B'| = |A_1'B_1'|$

   CD и A_1B_1 лежат на $c \Rightarrow \dfrac{|A_1B_1|}{|CD|} = \dfrac{|A_1'B_1'|}{|C'D'|} \Rightarrow \dfrac{|AB|}{|CD|} = \dfrac{|A'B'|}{|C'D'|}$

□

Д/З(на 18.09.2018) на двойном листочке, который подписан и на котором табличка (на полях) с номером задания (по возрастанию). должен быть номер и, если требуется ответ, красиво аккуратно оформленный:

Письменно: 2.15, 2.16, 3.1, 3.2, 3.3, 3.8

Устно: 3.6, 3.16, 3.19 + Упр

ДЗ(на 21.09.2018)

AB и CD скрещиваются $\Rightarrow AC$ и BD скрещиваются

$4.5, I.2, I.4, I.10$ стр 50

всё письменно

21.09.2018

Лемма 1.2. $a||b, \alpha \cap a = \{A\} \Rightarrow \alpha \cap \beta = \{B\}$

Доказательство. $a||b \Rightarrow \exists \beta : a, b \subseteq \beta$

$a \cap b \neq \emptyset$?

$\alpha \cap a \Rightarrow \alpha \cap \beta = c \Rightarrow c \subseteq \alpha, \beta \& a \neq c \& a \cap c = \{Y\} \Rightarrow c \cap b = \{Y\} \Rightarrow \alpha \cap b = \{Y\}$ □

Глава 2

Перпендикулярность и параллельность

2.1 Перпендикулярность прямой и плоскости

Определение 2.1. ***Прямая*** *называется* ***перпендикулярной*** *плоскости, если она пересекает плоскость и она перпендикулярна всем прямым в этой плоскости, проходящим через точку пересечения.*

Определение 2.2. ***Отрезок и луч*** *называются* ***перпендикулярными*** *к плоскости, если они пересекают её и лежат на прямой, перпендикулярной этой плоскости.*

Определение 2.3. ***Перпендикуляр*** *– отрезок, имеющий общую точку с плоскостью (один конец) и перпендикулярный этой плоскости.*

Определение 2.4. ***Наклонная*** *– отрезок, имеющий общую точку с плоскостью (конец отрезка) и не перпендикулярный этой плоскости.*

Задача 2.1. α *– плоскость,* $B \notin \alpha$ *Тогда* BA *– перпендикуляр который короче любой наклонной.*

Утверждение 2.1. *Через любую точку проходит не более полной перпендикулярной прямой к данной плоскости.*

Доказательство. $\sqsupset$ через точку O проходят $b, c : b \perp \alpha, c \perp \alpha$

тогда $\exists! \beta \supset b, c$

$a = \beta \cap \alpha$ Тогда в плоскости β через точку O построенные две прямые, перпендикулярные a?!! ☐

Признак 2.1 (перпендикулярности прямой и плоскости)**.** *Прямая, перпендикулярная двум пересекающимся прямым в данной плоскости, перпендикулярна плоскости.*

Доказательство. фиксируем две прямые $b, c \in \alpha \quad b \cap c = O \quad a \perp b \quad a \perp c$

фиксируем $d \subseteq \alpha \quad d \ni O$

Возьмём $A \in a, B \in b : \quad BC \cap d = D \quad B_1, C_1, D_1$ – симметричны относительно точки O точкам B, C, D

Тогда $OD = OD_1 \quad BC = B_1C_1 \quad BD = B_1D_1$

Возьмём на a точку $A \neq O$

$a \perp b \quad BO = OB_1 \Rightarrow AO$ – серединный перпендикуляр

$a \perp c, CO = OC_1 \Rightarrow AO$ – серединный перпендикуляр к CC_1

$\Rightarrow AC = AC_1$ и $AB = AB_1$ и $BC = B_1C_1 \Rightarrow \triangle ABC = \triangle AB_1C_1 \Rightarrow \triangle ADB = \triangle AD_1B_1 \Rightarrow AD = AD_1 \quad OD = OD_1 \Rightarrow A$ лежит на серединном перпендикуляре к $DD_1 \Rightarrow a \perp d$ ☐

Теорема 2.1. *Через любую точку можно провести плоскость, перпендикулярную данной прямой. и при том только одну.*

Доказательство. 1. $A \in a \quad b \in \beta : b \perp a \quad b \cap a = A \quad c \in \gamma : c \perp a \quad c \cap a = A$

$\Rightarrow \exists! \alpha \supseteq b, c$ по теореме $a \perp \alpha$

Единственность: $\sqsupset \alpha, \beta \ni A \quad a \perp \alpha \quad a \perp \beta$

$P \subseteq \beta \quad a \perp p \quad p \nsubseteq$

Через a и p построим $\gamma \quad \gamma$ пересекается с $\alpha \quad q := \alpha \cap \gamma \quad q \subseteq \gamma \quad p \subseteq \gamma \quad a \subseteq \gamma$

Построили через точку A две прямые, перпендикулярные данной a)

2.

Задача 2.2. $A \notin a$

□

Теорема 2.2 (о параллельности перпендикуляра). *Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости параллельны.*

Доказательство. $a \perp \alpha \quad b \perp \alpha \quad a \cap \alpha = A \quad b \cap \alpha = B$

$\exists! \beta \ni B, \beta \ni \quad (!) b \subset B$

$M, N \in \alpha : MN \perp Ab \quad AM = AN$ Тогда $B, = BN$

фиксируем $C \in b, c \neq B$

Рассмотрим прямоугольные треугольники $\triangle CBN = \triangle CBM \Rightarrow CM = CN$

$\triangle CMN$ – равнобедренный, высота совпадает с медианой CA – высота, т.е. $CA \perp MN$

$a \perp MN, AC \perp MN, AB \perp MN$

Задача 2.3. *a –прямая, $A \in a \Rightarrow$ все прямые, проходящие через точку A, лежат в одной плоскости*

$\Rightarrow a, AC, AB$ лежат в одной плоскости. это может быть только $\beta \Rightarrow C \in \beta \Rightarrow b \subseteq \beta$

Тогда в плоскости $\beta \quad a \perp AB, b \perp Ab \Rightarrow a || b$ □

ДЗ:

$7.1, 7.2, 7.3, 7.15$ – письменно