Конспект по геометрии

Коченюк Анатолий

12 октября 2018 г.

Глава 1

1 четверть

Задача 1.1. $\alpha \cap \beta = \emptyset$
a пересекает $\alpha \Rightarrow$ *a пересекает* β

Доказательство. фиксируем прямую α пересекающую α
Через a и плоскость B можно провести единственную плоскость γ
$\gamma \cap \alpha = x$ – прямая
$\gamma \cap \beta = y$ – прямая (есть общая точка B)
$x \cap y = \emptyset$, т.к. α и β не пересекаются
$x, y, a \subseteq \gamma \quad x || y$
$a \cap x = A \Rightarrow$ а пересекается с $y \Rightarrow x$ пересекается с β □

1.1 Взаимное расположение прямых в пространстве

1. Прямые пересекаются (в какой-то плоскости)
2. Прямые параллельны (в одной плоскости, но не пересекаются)
3. Прямые скрещиваются (в разных плоскостях)

Признак 1.1. *Если две прямые содержат четыре точки, которые не лежат в одной плоскости, то эти прямые скрещивающиеся*

Признак 1.2. *Прямая, пересекающая плоскость, скрещивается с каждой прямой, лежащей в этой плоскости и не проходящей через точку пересечения.*

Д/З – доказать признак 1.2

Теорема 1.1. *Через каждую точку пространства, не лежащую на данной прямой проходит прямая, параллельная данной и при том только одна.*

Доказательство. фиксируем прямую a и точку $A \notin a \quad \exists! \alpha : A \in \alpha, a \in \alpha$ Тогда в $\alpha \exists! b : a || b$

- Единственность
  $\sqsupset b_1 . b_2 \ni A$ и $b_1 || a \Rightarrow b_1 \in \alpha \quad b_2 || a \Rightarrow b_2 \in \alpha$
  $b_1 \cap b_2 = A \quad b_1, b_2 || \alpha$ в плоскости $\alpha \Rightarrow b_1 = b_2$

□

Теорема 1.2 (свойство транзитивности)**.** $a||b$ & $b||c \Rightarrow a||c$

Доказательство.

Лемма 1.1. *Если плоскость пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает вторую*

Доказательство. **Д/З** □

$a||b \Rightarrow$ они лежат они лежат в одной плоскости
$b||c \Rightarrow$ они лежат в одной плоскости a, c – 3 варианта:

- они пересекутся в точке $X \Rightarrow$ Через точку X провели две прямые параллельные b??!
- они параллельны
- они скрещиваются

Докажем, что они лежат в одной плоскости.
$\sqsupset$ a, c не лежат в одной плоскости
фиксируем $A \in a$ и c лежат в плоскости γ
a не пересекает γ и $a||b \Rightarrow b$ пересекает γ и $b||c \Rightarrow c$ пересекает γ $\square$

1.2 Параллельное проектирование

Определение 1.1 (проекция точки). *плоскость α, прямая a пересекающая α*
фиксируем точку $x \Rightarrow \exists! a'||a, \quad a' \ni X$
a' пересекается с α (по лемме)
$x' = a' \cap a$ – будет называться ***проекцией*** *точки X на плоскость α при проектировании параллельно прямой a*
α – плоскость проекции
a – направление проекции

Определение 1.2. *Проекция фигуры F – множество проекций всех точек F*

Теорема 1.3 (о параллельном проектировании). *α, a. Прямые не параллельны a. Отрезки лежат на прямых не параллельных a*

1. *Проекция отрезка – отрезок*

   Проекция прямой – прямая

2. *Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают*

3. *Отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых равно отношению самих отрезков.*

Доказательство. 1. Построим проекцию прямой b

   $a_1||a$. a_1 пересекает b

   β – плоскость, проходящая через a_1 и b

   β пересекается с α (т.к. a_1 пересекается с α)

   Докажем, что $b' = \beta \cap \alpha$:

   $X \in \beta \Rightarrow$ прямая, параллельная a_1 и проходящая через X пересекает b' в точке X'

   $Y' \in b'$ по аналогии $Y \in b$

   $AB \in b$, b' – проекция $b \Rightarrow (A \to A' \in b')$ и $(B \to B' \in b')$

   Тогда $\forall x \in AB \quad x' \in A'B'$ (прямые AA', BB', CC' лежат в одной плоскости)

2. $b||c \quad \sqsupset l||a$ пересекает b и $c \Rightarrow \exists! \beta$, которая содержит l, b и $\Rightarrow b' = c' = \beta \cap \alpha$

   $\sqsupset \nexists l$ пересекающая b и c одновременно $\Rightarrow$

   $l_1||a$ пересекается с b по l_1 и b построим β

   $l_2||a$ пересекается с c по l_2 и c построим γ

   $b' = \alpha \cap \beta \quad c' = \alpha \cap \gamma$ и $\beta \cap \gamma = \emptyset \Rightarrow b' \cap c' = \emptyset, b', c' \in \alpha \Rightarrow b'||c'$

3. $b \not\parallel a \quad A, B, C, D \in b \Rightarrow b$ и b' лежат в одной плоскости β

AA', BB', CC', DD' параллельны в плоскости β (т.к. параллельны прямой a)$\Rightarrow \dfrac{|AB|}{|CD|} = \dfrac{|A'B'|}{C'D'}$ (по обобщению теоремы Фалеса из планиметрии)

фиксируем $b||c \quad Ab \subseteq b \quad CD \subseteq c$

γ – плоскость, в которой $b||c$

Проведём через $A \in \gamma$ прямую. Она пересекает c в точке A_1

Через B проведём прямую, параллельную $AA1$

Тогда ABB_1A_1 – параллелограмм

Тогда $|AB| = |A_1B_1| \quad A'B'A'_1B'_1$ – параллелограмм (т.к $A'B'||A'_1B'_1$)

$A'A'_1||B'B'_1$(по предыдущим пунктам) $\Rightarrow |A'B'| = |A'_1B'_1|$

CD и A_1B_1 лежат на $c \Rightarrow \dfrac{|A_1B_1|}{|CD|} = \dfrac{|A'_1B'_1|}{|C'D'|} \Rightarrow \dfrac{|AB|}{|CD|} = \dfrac{|A'B'|}{|C'D'|}$

□

Д/З(на 18.09.2018) на двойном листочке, который подписан и на котором табличка (на полях) с номером задания (по возрастанию). должен быть номер и, если требуется ответ, красиво аккуратно оформленный:

Письменно: 2.15, 2.16, 3.1, 3.2, 3.3, 3.8

Устно: 3.6, 3.16, 3.19 + Упр

ДЗ(на 21.09.2018)

AB и CD скрещиваются $\Rightarrow AC$ и BD скрещиваются

$4.5, I.2, I.4, I.10$ стр 50

всё письменно

21.09.2018

Лемма 1.2. $a||b, \alpha \cap a = \{A\} \Rightarrow \alpha \cap \beta = \{B\}$

Доказательство. $a||b \Rightarrow \exists \beta : a, b \subseteq \beta$

$a \cap b \neq \emptyset$?

$\alpha \cap a \Rightarrow \alpha \cap \beta = c \Rightarrow c \subseteq \alpha, \beta \& a \neq c \& a \cap c = \{Y\} \Rightarrow c \cap b = \{Y\} \Rightarrow \alpha \cap b = \{Y\}$ □

Глава 2

Перпендикулярность и параллельность

2.1 Перпендикулярность прямой и плоскости

Определение 2.1. ***Прямая*** *называется* ***перпендикулярной*** *плоскости, если она пересекает плоскость и она перпендикулярна всем прямым в этой плоскости, проходящим через точку пересечения.*

Определение 2.2. ***Отрезок и луч*** *называются* ***перпендикулярными*** *к плоскости, если они пересекают её и лежат на прямой, перпендикулярной этой плоскости.*

Определение 2.3. ***Перпендикуляр*** *– отрезок, имеющий общую точку с плоскостью (один конец) и перпендикулярный этой плоскости.*

Определение 2.4. ***Наклонная*** *– отрезок, имеющий общую точку с плоскостью (конец отрезка) и не перпендикулярный этой плоскости.*

Задача 2.1. α *– плоскость,* $B \notin \alpha$ *Тогда* BA *– перпендикуляр который короче любой наклонной.*

Утверждение 2.1. *Через любую точку проходит не более полной перпендикулярной прямой к данной плоскости.*

Доказательство. $\sqsupset$ через точку O проходят $b, c : b \perp \alpha, c \perp \alpha$
тогда $\exists! \beta \supset b, c$
$a = \beta \cap \alpha$ Тогда в плоскости β через точку O построенные две прямые, перпендикулярные a?!! □

Признак 2.1 (перпендикулярности прямой и плоскости)**.** *Прямая, перпендикулярная двум пересекающимся прямым в данной плоскости, перпендикулярна плоскости.*

Доказательство. фиксируем две прямые $b, c \in \alpha \quad b \cap c = O \quad a \perp b \quad a \perp c$
фиксируем $d \subseteq \alpha \quad d \ni O$
Возьмём $A \in a, B \in b : \quad BC \cap d = D \quad B_1, C_1, D_1$ – симметричны относительно точки O точкам B, C, D
Тогда $OD = OD_1 \quad BC = B_1C_1 \quad BD = B_1D_1$
Возьмём на a точку $A \neq O$
$a \perp b \quad BO = OB_1 \Rightarrow AO$ – серединный перпендикуляр
$a \perp c, CO = OC_1 \Rightarrow AO$ – серединный перпендикуляр к CC_1
$\Rightarrow AC = AC_1$ и $AB = AB_1$ и $BC = B_1C_1 \Rightarrow \triangle ABC = \triangle AB_1C_1 \Rightarrow \triangle ADB = \triangle AD_1B_1 \Rightarrow AD = AD_1 \quad OD = OD_1 \Rightarrow A$ лежит на серединном перпендикуляре к $DD_1 \Rightarrow a \perp d$ □

Теорема 2.1. *Через любую точку можно провести плоскость, перпендикулярную данной прямой. и при том только одну.*

Доказательство. 1. $A \in a \quad b \in \beta : b \perp a \quad b \cap a = A \quad c \in \gamma : c \perp a \quad c \cap a = A$

$\Rightarrow \exists! \alpha \supseteq b, c$ по теореме $a \perp \alpha$

Единственность: $\sqsupset \alpha, \beta \ni A \quad a \perp \alpha \quad a \perp \beta$

$P \subseteq \beta \quad a \perp p \quad p \nsubseteq$

Через a и p построим $\gamma \quad \gamma$ пересекается с $\alpha \quad q := \alpha \cap \gamma \quad q \subseteq \gamma \quad p \subseteq \gamma \quad a \subseteq \gamma$

Построили через точку A две прямые, перпендикулярные данной a)

2.

Задача 2.2. $A \notin a$

□

Теорема 2.2 (о параллельности перпендикуляра). *Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости параллельны.*

Доказательство. $a \perp \alpha \quad b \perp \alpha \quad a \cap \alpha = A \quad b \cap \alpha = B$
$\exists! \beta \ni B, \beta \ni \quad (!) b \subset B$
$M, N \in \alpha : MN \perp Ab \quad AM = AN$ Тогда $B, = BN$
фиксируем $C \in b, c \neq B$
Рассмотрим прямоугольные треугольники $\triangle CBN = \triangle CBM \Rightarrow CM = CN$
$\triangle CMN$ – равнобедренный, высота совпадает с медианой CA – высота, т.е. $CA \perp MN$
$a \perp MN, AC \perp MN, AB \perp MN$

Задача 2.3. *a –прямая, $A \in a \Rightarrow$ все прямые, проходящие через точку A, лежат в одной плоскости*

$\Rightarrow a, AC, AB$ лежат в одной плоскости. это может быть только $\beta \Rightarrow C \in \beta \Rightarrow b \subseteq \beta$
Тогда в плоскости $\beta \quad a \perp AB, b \perp Ab \Rightarrow a || b$ □

ДЗ:
$7.1, 7.2, 7.3, 7.15$ – письменно
24.09.2018

Теорема 2.3. *Если все точки пересечения различны, тогла прямые лежат в одной плоскости*

Доказательство. a и b пересекаются в точке O? лежат в γ
фиксируем $d : \quad d \cap a = A \quad d \cap b = B$
$d \cap \gamma \ni A, B \Rightarrow d \in \gamma$ □

Определение 2.5. *Параллелепипед – многогранник у которого все стороны параллелограммы.*

Теорема 2.4.

Доказательство. 1. $x || a \& y || a \quad \alpha = (ABC) \Rightarrow a \perp \alpha$

2. ф $X \in \alpha \quad X = (XA) \Rightarrow a \perp x$

□

2.2 О построении

В плоскости

– доказывать возможность построения

– построение циркулем и линейкой

В пространстве

– Можем доказывать возможность построения

– Утверждения о существовании и единственности

– Построение на поверхности тел

– Построение на изображении (чертеже)

Изображение – проекция на плоскость. Оно должно быть:

– правильным

– наглядным

Определение 2.6. *Куб – многогранник, у которого шесть граней и все они квадраты*

Определение 2.7. *Параллелепипед – многогранник, у которого шесть граней и все они параллелограммы.*

Определение 2.8. *n-угольная пирамида – многоугольник, у которого одна грань (называемая основанием) – n-угольник, а n других – треугольники с общей вершиной (называемой вершиной пирамиды)*
Если $n = 3 \Rightarrow$ пирамида – тетраэдр
Пирамида называется правильной, если её основание – правильная фигура

Определение 2.9. *n - угольная призма – многогранник, две грани которого (называемые основаниями) – равные n-угольники, а остальные n граней – параллелограммы*

Определение 2.10. *След секущей плоскости на плоскости грани – прямая, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью грани*

ДЗ:1, 2, 3, 4, 5
ДЗ (с 08.10.2018): 7.4, 7.5 – устно из учебника. 7.7 – письменно на листочке (в табличке указать все пункты)

Теорема 2.5. *Через каждую точку проходит прямая, перпендикулярная данной плоскости*

Доказательство.

1. $a \in \alpha$ Тогда построим прямую $a : A \in a \subset \alpha$

   Построим плоскость $\beta \perp a$ в точке A. Тогда через $b = \alpha \cap \beta \ni A$

   Построим прямую $c \perp b$ в точке a.

   $c \perp b$ и $c \perp a$ (т.к. $c \subset \beta$ и $\beta \perp a$) Следует, что $c \perp \alpha$

2. $a \notin \alpha$ Возьмём точку $B \in \alpha$ Тогда существует $b \ni B : b \perp \alpha$

   Если b содержит точку A, то всё ок

   Если $A \notin b$, то проведём через точку A прямую $a : a || b$

   Т.к. $b \perp \alpha$ и $b || a \Rightarrow a \perp \alpha$

□

Через любую точку пространства модно провести 3 перпендикулярных прямых.

Как? Возьмём точку. Построим какую-то прямую, проходящую через неё.В этой плоскости проведём прямую, перпендикулярную первой. По только что доказанной теореме проведём через данную точку перпендикуляр через эту плоскость в этой точке. Больше перпендикулярных прямых не провести.

Когда говорят проекция, обычно подразумевают параллельное проектирование относительно перпендикулярной прямой.

Задача 2.4. *В правильной n-угольной пирамиде вершина проектируется в центр основания. Что из этого следует.*

Доказательство. Спроектируем вершину на основание. Фиксируем некоторые две точки A, B принадлежащие основанию. P – вершина. $PO \perp OA \quad PO \perp OB \Rightarrow \triangle POA, \triangle POB$ – прямоугольные. $PA = PB$, т.к. это правильная пирамида. PO – общая $\Rightarrow \triangle POA = \triangle POB \Rightarrow OA = OB$ Это выполняется для любых двух вершин $\Rightarrow O$ – центр основания □

Определение 2.11. *Расстояние между двумя точками определено по аксиоме VI как расстояние в какой-то плоскости*

Определение 2.12. *Расстояние от точки до прямой – расстояние от точки до её проекции*

Определение 2.13. *Расстояние от точки до плоскости – расстояние от точки до её проекции на данную плоскостью*

Задача 2.5. $A \in \alpha \quad AB \perp AC, AD \subset \alpha$
$BA = BA_1$
фиксируем $AK \neq AC, AD \& L \in CD$
AD *– общая* $\& AD = Ab \& AB \perp AD \Rightarrow BD = DB_1 \&$
$<\ldots> \triangle BCD = \triangle B_1CD \Rightarrow <\ldots>$

ДЗ: 7.12 (а, б, в), 7.23 – Письменно
7.25, 7.17 – Устно
Готовится к к/р по всему пройденному