

Конспект по Алгебре

Коченюк Анатолий

23 апреля 2019 г.

Глава 1

1 четверть

03.09.2018

06.09.2018

12.09.2018

Теорема 1.1. $f : X \rightarrow Y$ – инъективно $\iff \forall y, h : Y \rightarrow X : f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$

Доказательство. \Rightarrow :

фиксируем $g, h : f \circ g = f \circ h$. Нужно доказать, что $\forall y \quad g(y) = h(y)$

фиксируем $y \in Y$. $\square g(y) \neq h(y) \Rightarrow f \circ g(y) \neq f \circ h(y)??!$

\Leftarrow :

фиксируем $x_1, x_2 : f(x_1) = f(x_2) \quad x_1 = x_2?$

фиксируем $g(y) = x_1, h(y) = x_2$

$f \circ g(y) = f(x_1)$

$f \circ h(y) = f(x_2)$

$g(y) = h(y) \Rightarrow x_1 = x_2$

□

Теорема 1.2. $f : x \rightarrow Y$ – сюръективна $\iff \forall g, h : Y \rightarrow X : g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$

Доказательство. \Rightarrow :

фиксируем $g, h : g \circ f = h \circ f \quad \forall y \quad h(y) = g(y)?$

фиксируем $y \quad \square: h(y) \neq g(y) \quad \forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) \neq h(y) = h(f(x)) = (h \circ f)(x)$, т.е. $g \circ f \neq h \circ f??!$

\Leftarrow :

h/w

□

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \mapsto (2x + y - 3, x - y - 1)$

Инъективна: фиксируем $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \square f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$

$f(x_1, y_1) = (2x_1 + y_1 - 3, x_1 - y_1 - 1)$

$f(x_2, y_2) = (2x_2 + y_2 - 3, x_2 - y_2 - 1)$

$(2x_1 + y_1 - 3, x_1 - y_1 - 1) = (2x_2 + y_2 - 3, x_2 - y_2 - 1)$

$2x_1 + y_1 - 3 = 2x_2 + y_2 - 3 \quad x_1 - y_1 - 1 = x_2 - y_2 - 1$

$3x_1 - 4 = 3x_2 - 4$

$x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$

1.1 Преобразования конечных множеств.

A – конечна $A = \{1, \dots, n\} \quad |A| = n$

Определение 1.1. $F(A) = F_n$ – совокупность преобразований A

$\alpha : A \rightarrow A$ – преобразование

$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ – перестановка $\iff \forall i \neq j \quad a_i \neq a_j$

$$\beta = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

$$\beta \circ \alpha = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

\mathcal{D}/\mathcal{Z} :

1. $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (x - y + 2, 2x + y)$
2. $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \mapsto (2x - y, 7y + 3x, 0)$
3. $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \mapsto (x - 5 + y + z, x - y + z + 4, 2(x + 1) + 2z - 3)$
4. При каких $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto ax + b$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto cx^2$$

$$f(g(x)) = g(f(x))$$
5. При каких $a, b \in \mathbb{R}$ $f(x) = ax + b$

$$f(\sin(x)) = \sin(f(x))$$

14.09.2018

Глава 2

Теория Групп

2.1 Алгебраические операции

Определение 2.1. Алгебраическая операция на множестве A – отображение $f : A \times A \rightarrow A$

Примеры:

- $"+" : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- $" \cdot " : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- на 2^M операция объединения. $X \cup Y = \{x | x \in X \text{ или } x \in Y\}$
- $\circ : F(A) \times F(A) \rightarrow F(A) \quad (f, g) \mapsto f \circ g$
- $A = \{0, 1, 2, 3\} \quad a, b \in A \quad a \triangle b = a + b \pmod{4}$

| \triangle | 0 | 1 | 2 | 3 |
|-------------|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |

Определение 2.2. $(A, *)$ – группоид, если A – множество и $*$ – операция на A

(\mathbb{N}, \div) – не группоид

(\mathbb{R}, \div) – группоид

Определение 2.3. $(A, *)$ – коммутативный, если $\forall a, b \in A \quad a * b = b * a$

$(\mathbb{R}, -)$ – не коммутативный

$(F(A), \circ)$ – не коммутативный

(\mathbb{R}, \cdot)

Определение 2.4. $(A, *)$ – ассоциативный, если $\forall a, b, c \in A \quad (a * b) * c = a * (b * c)$

$(\mathbb{N}, +)$ – ассоциативный

$(\mathbb{R}, -)$ – не ассоциативный

Определение 2.5. $(A, *)$ – группоид с сокращением (левым, правым). $\forall a, b, c \in A$

$q * b = q * c \Rightarrow b = c$ (лев)

$b * a = c * a \Rightarrow b = c$ (прав)

$\triangleright : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad (n, m) \mapsto m$

$(\mathbb{N}, \triangleright)$ – не сократим справа $2 \triangleright 2 = 5 \triangleright 3, \quad 2 \neq 5$

Сократим справа.

Определение 2.6. $(A, *)$ – инверсивный, если $\forall a, b \in A \exists x, y \in A : a * x = b, y * a = b$

$(\mathbb{N}, +)$ – не инверсивный. $5, 5 \in \mathbb{N} \quad 5 + x = 5, y + 5 = y \quad x, y \notin \mathbb{N}$
 $(\mathbb{Z}, -)$ – инверсивный. $a, b \in \mathbb{Z} \quad a + (b - a) = b \quad (b - a) + a = b$

Определение 2.7. $(A, *)$ – группоид. a – идемпотент, если $a * a = a$

$(\mathbb{N}, \triangleright)$ – любой элемент – идемпотент

Определение 2.8. $(A, *) \ni \theta$ – аннулятор, если $\forall a \in A$

$$a * \theta = \theta$$

$$\theta * a = \theta$$

Определение 2.9. $(A, *)$ с нейтральным элементом $a' \in A$ называется обратным к a

$$a * a' = e$$

$$a' * a = e$$

Определение 2.10. $(A, *)$ – группоид. $B \subseteq A$ и $\forall a, b \in B \quad a * b \in B$. Тогда $(B, *)$ – подгруппоид группоиды A

$(\mathbb{N}, +)$ – подгруппоид $(\mathbb{Z}, +)$

Лемма 2.1. $(A, *)$ – ассоциативный, инверсивный группоид с нейтральным элементом $\Rightarrow (A, *)$ – сократимый

Доказательство. $a * y = a * x$

По инверсивности $\exists a' \in A : a' * a = e$

$$a' * (a * x) = a' * (a * y)$$

$$(a' * a) * x = (a' * a) * y$$

$$e * x = e * y$$

$$x = y$$

□

Д/З:

Письменно (на листочке, подписанном с табличкой):

| | | * | 1 | 2 | 3 | Проверить Коммутативность, Ассоциативность, Сократимость, Инверсивность, Нейтральный элемент |
|----|---|---|---|---|---|--|
| 1. | . | 1 | 2 | 3 | 1 | |
| | . | 2 | 3 | 3 | 2 | |
| | . | 3 | 1 | 2 | 1 | |

2. группоид поворотов квадрата

3. $(\mathbb{N}, \text{НОК})$

4. $(\mathbb{N}, \text{НОД})$

Устно:

5. $|A| = 3 \quad (F(A), \circ)$ найти все подгруппоиды

6. $(M, *)$ M – конечный, ассоциативный, сократимый. Существует ли нейтральный элемент

7. $(A, *)$ – ассоциативное с нейтральным элементом. ? (A', \circ) – подгруппоид (A' – множество обратимых элементов)

18.09.2018

ДЗ:

1. найти все подгруппоиды группоиды $(F(A), \circ), |A| = 3$ (их строго больше 6?) – устно

2. Составить таблицу Кэли, где $A = \{a, b\}$, для:

- $(2^A, \cap)$
- $(2^A, \triangle)$

3. $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ – множество матриц

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$b = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \subseteq M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$(M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \cdot), (A, \cdot), (B, \cdot)$ – все свойства

4. $(\mathbb{Z}, *) \quad a * b = |a - b|$ – все свойства

5. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ – инъективность, сюръективность. Построить обратное, если возможно.

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n - ?$$

Теорема 2.1. M – конечно $(M, *)$ – асс, сокp $\Rightarrow \exists e$

Доказательство. фиксируем $a \in M$

$n > i \quad a^n = a^i$, т.к. M – конечно

$$a^{n-i} a^i = a^i \Rightarrow a^{n-i} * a = a$$

a^{n-i} – нейтральный?

фиксируем $x \in M \quad x * a = x * a = z * a^{n-i} * a \Rightarrow x = x a^{n-i}$ Таким образом a^{n-i} – правый нейтральный.

То, что он также и левый нейтральный доказывается аналогично.

$$a * x = a * a^{n-i} * x$$

$$a * x = a a^{n-i} * x$$

□

2.2 Группы. Основные понятия

Определение 2.11. $(G, *)$ – группоид называется полугруппа, если выполняется ассоциативность

Определение 2.12. $(G, *)$ – группоид называется группой, если выполняется:

1. Ассоциативность: $\forall a, b, c \in G \quad (a * b) * c = a * (b * c)$

2. Существование нейтрального элемента $\exists e \in G \quad \forall g \in G \quad e * g = g * e = g$

3. Существование обратного элемента $\forall a \in G \quad \exists b \in G \quad a * b = b * a = e$

e – единица. $b =: a^{-1}$

Альтернативное определение: группа – множество и 3 операции:

1. бинарная операция $*$

2. унарная операция $^{-1}$

3. нульарная операция e

Утверждение 2.1. 1. e – единственное

2. a^{-1} – единственный

Доказательство. б $\square \exists a_1$ и a_2 :

$$a * a_1 = a_1 * a = e$$

$$a * a_2 = a_2 * a = e$$

$$(a_2 * a) * a_1 = e * a_1 = a_1$$

$$a_2 * (a * a_1) = a_2 * e = a_2$$

$$a_1 = a_2 \text{ по ассоциативности}$$

□

Определение 2.13. $(G, *)$ – группа называется абелевой, если выполняется коммутативность. $\forall a, b \quad a * b = b * a$

Примеры:

1. $(\mathbb{Z}, +)$ – абелева группа
2. $(S(A), \circ) = S_n, n = |A|$ – не абелева группа при $n \geq 3$

Определение 2.14 (центр группы). $Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz \forall g \in G\}$

Замечание 2.1. (G, \cdot) – абелева $\Rightarrow Z(G) = G$

Определение 2.15. G – конечно $\Rightarrow (G, *)$ – конечна

G – бесконечно $\Rightarrow (G, *)$ – бесконечно

Теорема 2.2. конечная полугруппа $(S, *)$ является группой \iff выполняется сократимость.

Доказательство. .

$$\Rightarrow \square \quad a * x = b * a$$

$$\exists x^{-1} : a * x * x^{-1} = b * x * x^{-1}$$

$$a = b \text{ ч.т.д.}$$

$$\Leftarrow (S, *) \text{ – ассоциативна, сократима и } S \text{ – конечно} \xrightarrow{\text{упр}} \text{существует нейтральный элемент, } (S, *) \text{ – обратима} \\ \Rightarrow (S, *) \text{ – группа}$$

□

Замечание 2.2. обратный переход неверен, если S – бесконечно. Пример – $(\mathbb{N}, +)$

Определение 2.16. порядок элемента $g \in (G, *)$ – наименьший $n \in \mathbb{N} : g^n = e$. Если такого n не существует, то элемент называется элементом бесконечного порядка.

Утверждение 2.2. $a \in (G, *)$ – конечного порядка n

Тогда $e, a, a^2, \dots, a^{n-1}$ – различные элементы и $\forall m \in \mathbb{Z} \quad a^m$ совпадает с одним из них

Доказательство. $\langle a^i = a^j \quad i > j \text{ тогда } a^{i-j} = e \quad i - j < n, n \text{ – минимальное такое число, что } a^n = e \text{?!}$

$$\forall m \in \mathbb{Z} \exists i : a^m = a^i \quad m = n * q + r \quad a^m = a^{n*q+r} = e * a^r$$

□

Замечание 2.3. В конечной группе у всех элементов конечный порядок

Определение 2.17. Если $H \subseteq G \neq \emptyset \Rightarrow (H, *)$ – подгруппоид, если:

- $\forall a, b \in H \quad a * b \in H$
- $\forall a \in H \quad a^{-1} \in H$

Упражнение 2.1. $(H, *)$ – подгруппа группы $(G, *)$ – группа

Определение 2.18. $\{e\}, G$ – несобственные подгруппы, все остальные собственные.

$H \leq G$ – H подгруппа G

$H < G$ – H собственная подгруппа G

Теорема 2.3. $B \subset A \quad (A, *)$ – конечная группа $e \in B, B$ замкнута относительно $*$ $\Rightarrow (B, *)$ – подгруппа

Доказательство. из определения подгруппы нам осталось проверить только обратимость

фиксируем $b \in B$. Так как B – конечно, то порядок b конечен $\Rightarrow \exists n : b^n = e \Rightarrow b * b^{n-1} = e = b^{n-1} * b \Rightarrow b^{-1} = b^{n-1}$

□

Теорема 2.4. $\{(B_\alpha, *)\}_{\alpha \in I}$ – семейство подгрупп $(G, *)$

$$B = \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \Rightarrow (B, *) \text{ – подгруппа}$$

Доказательство. фиксируем $a, b \in B \Rightarrow a, b \in B_\alpha \forall \alpha \Rightarrow a * b \in B_\alpha \forall \alpha \Rightarrow a * b \in B$

$$\forall a \in B \quad a^{-1} \in B \text{ аналогично}$$

□

Определение 2.19. $S \subset G$

$C_G(S) = \{g \in G | sg = gs \forall s \in S\}$ - централизатор

$N_G(S) = \{g \in G | gS = Sg\}$

ДЗ:

1. 2.1 (ссылка)

2. на \mathbb{R}_+ ограниченные функции:

- $f_1(x) = x$
- $f_2(x) = -x$
- $f_3(x) = \frac{1}{x}$
- $f_4(x) = -\frac{1}{x}$

– группа относительно композиции? Абелева группа?

3. (!) Любая группа третьего порядка – абелева

4. (!) Если $\forall g \in G \quad g \leq 2 \Rightarrow G$ – абелева

5. (!) $C_G(S) \leq G$

6. (!) $Z(G) = \bigcup_{g \in G} C_G(g)$

7. (!) $N_G(S) \leq G$

ДЗ (на 2 октября):

1. $H \leq G \iff HH \subseteq H$ и $H^{-1} \subseteq H$

2. Множество функций $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ $a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad ad - bc \neq 0$ – группа относительно композиции

3. (!) $F \leq H \leq G \Rightarrow F \leq G$

4. (!) $A, B, C \leq G$ и $C \subseteq A \cap B \Rightarrow C \leq A$ или $C \leq B$

Определение 2.20. $S \subset G, S \neq \emptyset \Rightarrow \langle S \rangle = \bigcap_{S \subseteq H \leq G} H$ – подгруппа, порождённая S

Замечание 2.4. Это наименьшая подгруппа, содержащаяся в S

Определение 2.21. Подгруппа $H \leq G$ – называется циклической, если $\exists g \in G : H = \langle \{g\} \rangle$

Пример: $(\mathbb{Z}, +)$ 1 – порождающий элемент

Теорема 2.5. $\forall S \subset G \quad \langle S \rangle = \{S_i \dots S_n | S_i \in S \cup S^{-1}, i \in \mathbb{N}_0\} =: T$

Доказательство. .

$\subseteq T \leq G$ т.к. $T \neq \emptyset$:

- $\forall t_1, t_2 \in T \quad t_1 \cdot t_2 \in T$
- $\forall t_1, t_2 \in T \quad t^{-1} \in T$

$\langle S \rangle \subseteq T$ т.к. T входит в пересечение

$\supseteq t \in T \quad t = s_1 \dots s_n \in \langle S \rangle$

$\forall S \subset H \leq G$ т.к. $S_1 \dots S_n \in H$

□

2.3 Примеры групп

1. Группа вычетов по модулю n

$n \in \mathbb{N}$ \mathbb{Z}_n – группа вычетов по модулю n

$$[a]_m = \{b \in \mathbb{Z} : b \equiv a \pmod{m}\}$$

$$[a]_m + [b]_m = [a + b]_m$$

Упражнение 2.2. $(\mathbb{Z}_n, +)$ – абелева группа

2. Группа Матриц

- 2.1 Полная линейная группа

$$F \text{ – поле} \quad GL_n(F) = \{A \in M_{n \times n}(F) | \det A \neq 0\}$$

- 2.2 Специальная линейная группа

$$F \text{ – поле} \quad SL_n(F) = \{A \in M_{n \times n}(F) | \det A = 1\}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Утверждение 2.3. $A \in M_{n \times n}(F) \quad \exists A^{-1} \iff \det A \neq 0$

Упражнение 2.3. $Aff_1(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad b \in \mathbb{R} \right\}$

$$(1) \quad Aff_1(\mathbb{R}) \subset SL_2(\mathbb{R})$$

3. Группа биективных преобразований множества A $(B(A), \circ)$

4. Группа биективных преобразований конечного множества A S_n

Определение 2.22. $\alpha \in S_n$ называется циклом длины k , если она перемещает ровно k элементов

$$i - 1, i_2 \dots i_k : \quad \alpha(i_1) = i_2, \alpha(i_2) = i_3, \dots, \alpha(i_k) = i_1$$

Пример: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (1324)$

Теорема 2.6. Любая перестановка разлагается однозначно с точностью до порядка на произведение попарно независимых циклов

Доказательство. $\alpha \in S_n$ i_1 – первый перемещаемый элемент

$$i_2 = \alpha(i_1) \quad i_3 = \alpha(i_2) \quad i_k = i_j$$

$j = 1$ т.к. α – биективно

Остались недвинутые элементы.

Возьмём следующий наименьший, который α перемещает. $i_k + 1$ и продолжим

Т.к. α – конечно, то мы однажды переберём их все. $\alpha = (i_1 \dots i_l)(i_{k+1} \dots i_{k+l}) \dots$

Возьмём следующий □

Определение 2.23. цикл длины 2 называется транспозицией

Утверждение 2.4. Любой цикл можно разложить в произведение транспозиций

Доказательство. $(i_1 \dots i_k) = (i_1 i_k) \dots (i_1 i_3)(i_1 i_2)$ □

Определение 2.24. $\alpha \in S_n$ $\alpha = \tau_1 \dots \tau_n$ – разложение в транспозицию

Тогда $\operatorname{sgn} \alpha = (-1)^m$

Теорема 2.7. Определение sgn корректно

Замечание 2.5. Знак транспозиции $= -1$

Определение 2.25. $\alpha \in S_n$ – чётная, если $\text{sgn } \alpha = 1$.

Нечётная, если $\text{sgn } \alpha = -1$

Определение 2.26. $A_n = \{\alpha \in S_n | \alpha \text{ – чёт}\}$

Упражнение 2.4. (a) $(!) A_n \leq S_n$

(b) множество нечётных перестановок не подгруппа

Утверждение 2.5. Всякую транспозицию можно представить в виде произведения траспозиций вида:

$$(1) (i, i+1), \quad i \in \{1, \dots, n-1\}$$

Доказательство. (1) $(i, j) = (1, i)(1, j)(1, i)$

(2) Упражнение . Подсказка $(i, i+1)$ в виде произведения $(1, k)$

□

5. Группа движений плоскости

Определение 2.27. Движение плоскости f – симметрия фигуры F , $f(F) = F$

Пример – группа симметрий треугольника

Определение 2.28. Диздральная группа – группа симметрий правильного n - угольника

Дз:

Письменно:

1. $(!) D_n$ – не абелева
2. $(!) !\{(1, 2); (12 \dots n)\} = S_n$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 7 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ В виде цикла; разложить в транспозиции; вычислить знак.

Устно (список ссылок на упражнения):

1. 2.2
2. 2.4
3. 4

2.4 Теоретико-групповые конструкции

G – группа, $H \leq G$

$$R \subseteq G \times G : (x, y) \in R \iff x * y^{-1} \in H$$

Упражнение 2.5. Упр: R – рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. отношение эквивалентности

Определение 2.29. Классы эквивалентности отношения R называются правыми смежными классами по подгруппе H $Ha = \{ha | h \in H\}$

Утверждение 2.6. $\forall Ha, Hb$ либо не пересекаются ($Ha \cap Hb = \emptyset$), либо совпадают ($Ha = Hb$)

Доказательство. $\square x \in Ha \cap Hb$, тогда $x = h_a \cdot a = h_b \cdot b, h_a, h_b \in H$

$$h_a a = h_b b$$

$$a = h_a h_b b$$

$$a \in Hb, \text{ т.к. } h_a h_b \in H$$

$$\Phi. y \in Ha \quad y = h_y \cdot a = h_y h_a h_b b \in Hb$$

□

Замечание 2.6. Аналогично определяется левый смежный класс.

Следствие 2.1. $G = \bigsqcup_{H_a \leq G} H_{a_i}$

Доказательство. $g \in G \quad \exists Hg \ni g$ □

Упражнение 2.6. Если G – абелева, то $\forall Ha \exists b \neq a : H : Ha = bH$

Упражнение 2.7. G – группа, $H \leq G$

Тогда $H \rightarrow aH \quad h \mapsto ah$ – биекция

Доказательство.

- Инъективность $\forall h_i, h_j \quad ah_i = ah_j \Rightarrow h_i = h_j$
 - Сюръективность $x \in aH \quad x = ah_a, h_a \in H \quad h_a \mapsto x$
-

Теорема 2.8. Порядок любой подгруппы конечной группы делит порядок группы.

G – конечная группа $n = |G| \quad m = |H| \Rightarrow n : m$

Доказательство. $G = a_1H \sqcup a_2H \sqcup \dots \sqcup a_iH$

$\forall aH \quad |aH| = H \quad (H \rightarrow aH \text{ – биекция}) \quad G = i \cdot m \text{ чтд}$ □

Определение 2.30. Число левых смежных классов группы G по подгруппе H называется индексом подгруппы H в группе G

$|G : H|$

G/H – множество левых смежных классов

$H \backslash G$ – множество правых смежных классов

Упражнение 2.8. $H \leq G$ тогда $H \backslash G \rightarrow G/H \quad Hx \mapsto x^{-1}H$

Определение 2.31. $H \leq G$ – называется нормальной, если $\forall a \in G \quad aH = Ha$

$H \trianglelefteq G$

Примеры:

1. $G \trianglelefteq G$ т.к. $\forall a \quad aG = G = Ga$
2. $\{e\} \trianglelefteq G \quad a\{e\} = \{a\} = \{e\}a$
- 3.

Теорема 2.9. Если $|G : H| = 2 \Rightarrow H \trianglelefteq G$

Доказательство. $H \sqcup Hb = G = H \sqcup aH \quad Hb = aH$

Если $xH = H = Hx$

Если $xH = aH = Ha \quad aH \neq H$ □

4.

Упражнение 2.9. $H \trianglelefteq G$ и $K \trianglelefteq H$ тогда $K \trianglelefteq G$

Определение 2.32. Гамильтонова группа – не абелева группа такая, что выполняется $\forall H \leq G \quad H \trianglelefteq G$

Определение 2.33. Группа называется простой если у неё только 2 нормальные подгруппы

A_n – простая

Лемма 2.2. Если $H \trianglelefteq G$ то $\forall h \in H, a \in G \quad aha^{-1} \in H$

Доказательство. фиксируем $h \in H, a \in G \quad ah \in aH$
 $aH = Ha$, т.к. $H \trianglelefteq G$
 $ah = xa$, где $x \in H$
 $aha^{-1} = x \in H$

□

Теорема 2.10. (G, \cdot) - группа $H \trianglelefteq G$
 Тогда $(G/H, \cdot)$ - группа

Доказательство. $aH \cdot bH = (ab)H$ - определения операции

1. Корректность определения. $\square \quad a_1H = a_2H \quad b_1H = b_2H$
 $a_1b_1 = (a_2h_a)(b_2h_b) = a_2(b_2b_2^{-1})h_ab_2h_b = a_2b_2h, h \in H$. По лемме $b_2^{-1}h_ab_2 \in H$
 $\Rightarrow a_1b_1 \in a_2b_2H \Rightarrow a_1b_1Ha_2b_2H$
2. ассоциативность $aH \cdot (bH \cdot cH) = aH(bc)H = a(bc)H = (ab)cH = (ab)H \cdot cH = (aH \cdot bH) \cdot cH$
3. нейтральный элемент $eH = H$
4. обратный к aH - $a^{-1}H$

□

ДЗ на 16.10.2018

1. $A \trianglelefteq G, B \trianglelefteq G \Rightarrow AB \trianglelefteq G$
2. найти все нормальные подгруппы в S_3
3. Написать таблицу Кэли для $\mathbb{Z}/D \quad D = \{0, 2\}$
4. Доказать, что $A_n \trianglelefteq S_n$

Определение 2.34. Группа G/H - фактор группа по подгруппе H

Примеры:

1. $n\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$ т.к. \mathbb{Z} - абелева
 Тогда $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$

Определение 2.35 (Прямое произведение групп). $(G, *), (F, \circ)$ - группы
 $(G \times F, \square)$ - прямое произведение
 $(g_1, f_1) \square (g_2, f_2) = (g_1 * g_2, f_1 \circ f_2)$

Утверждение 2.7. Прямое произведение является группой:

Доказательство. 1. корректность очевидна

2. ассоциативность (Упр!)
3. нейтральный элемент (e_G, e_F)
4. обратный к $(g_1, f_1) - (g^{-1}, f^{-1})$ (Упр!)

□

Упражнение 2.10. F - циклическая группа порядка p
 G - циклическая группа порядка q
 p, q - простые $\Rightarrow F \times G$ - циклическая группа порядка pq

Упражнение 2.11. F, G - конечные группы $\Rightarrow |F \times G| = |F| \cdot |G|$

2.5 Отображения групп

Определение 2.36. гомоморфизм группы $(A, *)$ в группу (B, \circ) называется отображение $f : A \rightarrow B$:
 $f(a_1 * a_2) = f(a_1) \circ f(a_2)$

Утверждение 2.8. 1. $f(e_B) = e_B$

$$2. f(a^{-1}) = (f(a))^{-1} \quad f: A$$

Определение 2.37. .

$$f: A \quad \text{Ker } f = \{a \in A \mid f(a) = e_B\}$$

$$\text{Im } f = \{f(a) \mid a \in A\}$$

$$3. \text{Ker } f \trianglelefteq A$$

$$4. \text{Im } f \leq B$$

$$5. f - \text{инъективна} \iff \text{Ker } f = \{e\}$$

$$6. f - \text{сюръективна} \iff \text{Im } f = B$$

Доказательство. 1. Пусть $x = f(e_A)$

$$x = f(e_A) = f(e_a * e_a) = f(e_a) \circ f(e_a) = x \circ x$$

$$\text{ф. } b \in B \quad x \circ b = (x \circ x) \circ b$$

$$b = x \circ b \text{ аналогично } b = b \circ x \Rightarrow x = e_B$$

2. Упр

3. Упр

4. Упр

5. Упр

6. Очевидно

□

Определение 2.38. Изоморфизм групп – биективный гомоморфизм
 „ A изоморфна B ” $A \cong B$

Теорема 2.11. Изоморфность групп – отношение эквивалентности на множестве всевозможных групп

Доказательство.

Рефлексивность $G \cong G \quad id : G \rightarrow G \quad l2018.10.16.3g \mapsto g$ – изоморфизм

Симметричность $(G, *) \quad (F, \circ)$ Пусть G изоморфна F т.е. $f : G \rightarrow F$ – биективный гомоморфизм
 $f^{-1} : F \rightarrow G$ – биективный гомоморфизм.

Транзитивность. $f_1 : G \rightarrow F \quad f_2 : F \rightarrow H \quad f_3 = f_2 \circ f_1 : G \rightarrow H$ – биективный гомоморфизм.

$$f_3(g_1 * g_2) = f_2(f_1(g_1 * g_2)) = f_2(f_1(g_1) \circ f_1(g_2)) = f_2(f_1(g_1)) \circ f_2(f_1(g_2)) = f_3(g_1) \circ f_3(g_2)$$

□

Определение 2.39. Абстрактная группа – множество всех классов эквивалентности по отношению изоморфности.

Примеры:

$$1. S_2 \cong \mathbb{Z}$$

$$2. \mathbb{Z} \cong n\mathbb{Z} \quad x \mapsto nx$$

понятно, что это биективное отображение. Докажем, что это гомоморфизм.

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \quad f(x_1 + x_2) = n(x_1 + x_2) = nx_1 + nx_2 = f(x_1) + f(x_2)$$

$$3. D_3 \cong S_3$$

4. $(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \quad x \mapsto e^x$
 \exp – биективна
 $\phi. x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$

Замечание 2.7. Основание может быть любым $\neq 1, > 0$

Утверждение 2.9. Любые две группы простого порядка изоморфны

Доказательство. $|G| = p$

1. Любая группа простого порядка циклическая.

$\phi. g \in G \quad \langle g \rangle =: H$

$|G| : |H|$ по теореме Лагранжа $\Rightarrow |H| = 1 \vee |H| = p$

т.е. $H = \{e\} \vee |H| = G$

любой элемент порождает нашу группу \Rightarrow она циклическая

2. $|G| = p = |H| \quad (G, \circ) \quad (H, *)$

$\langle g \rangle = G \quad \langle h \rangle = H$

$f : G \rightarrow H \quad g^i \mapsto h^i$

(a) f – биективно

$h_1, h_2 \in H, h_1 \neq h_2 \quad h_1 = h^i \quad h_2 = h^j$ т.к. $h^i \neq h^j$ то $i \not\equiv j \pmod{p} \Rightarrow g^i \neq g^j \Rightarrow$ выполняется инъективность.

G, H – конечны $\Rightarrow f$ – биективна

(b) f – гомоморфизм

$\phi. g^i, g^j \in G \quad f(h^i \circ g^j) = f(g^{i+j}) = h^{i+j} = h^i * h^j = f(g^i) * f(g^j)$

□

Упражнение 2.12. $G_1 \times \{e_2\} \leq G_1 \times G_2$

Тогда доказать, что это нормальная подгруппа и $G_1 \times G_2 / G_1 \times \{e_2\} \cong G_2$

Теорема 2.12. A, B – две группы $f : A \rightarrow B$ – гомоморфизм.

Тогда:

1. $\text{Ker } f \trianglelefteq A$

2. $\text{Im } f \leq B$

3. $\text{Im } f \cong A / \text{Ker } f$

Доказательство. 1. $e_A \in \text{Ker } f$

$a, b \in \text{Ker } f$ тогда $f(a * b) = f(a) \circ f(b) = e_B \circ e_B = e_B \Rightarrow a * b \in \text{Ker } f$

$a \in \text{Ker } f \quad f(a^{-1}) = f(a)^{-1} = e_B^{-1} = e_B \Rightarrow a^{-1} \in \text{Ker } f$

Т.О. $\text{Ker } f \leq A$

(!) $a(\text{Ker } f) = (\text{Ker } f)a$

$\phi. ak \in a\text{Ker } f \Rightarrow aka^{-1} \in \text{Ker } f \Rightarrow (aka^{-1})a \in \text{Ker } fa \Rightarrow ak \in \text{Ker } fa$

Т.О. $\text{Ker } f \trianglelefteq A$

2. (a) $f(e_A) = e_B \Rightarrow e_B \in \text{Im } f \Rightarrow \text{Im } f \neq \emptyset$

(b) $\phi. b_1, b_2 \in \text{Im } f \quad b_1 \circ b_2 = f(a_1) \circ f(a_2) = f(a_1 * a_2) \in \text{Im } f$

(c) $\phi. b \in \Im f \quad b = f(a) \quad f(a^{-1}) = b^{-1} \Rightarrow b^{-1} \in \Im f$

Т.О. $\text{Im } f \leq B$

3. $\varphi : A/Ker f \rightarrow Im f \quad a(Ker f) \mapsto f(a)$

Докажем, что φ изоморфизм

(а) Корректность

Пусть $a(Ker f) = b(Ker f) \Rightarrow a \in b(Ker f) \quad a = b * k, k \in Ker f$

$f(a) = f(b * k) = f(b) \circ f(k) = f(b) \circ e_B = f(b)$

(б) Сюръективность очевидна (у каждого образа действительно есть прообраз)

(с) Инъективность Пусть $f(a) = f(b)$ Тогда $f^{-1}(a) \circ f(b) = e_B$

$f(a^{-1}) \circ f(b) = e_B \quad f(a^{-1} * b) = e_B$

$a^{-1} * b \in Ker f \Rightarrow a(Ker f) = b(Ker f)$

(д) φ – гомоморфизм

$\varphi(a(Ker f) * b(Ker f)) = \varphi((a * b)(Ker f)) = f(a * b) = f(a) \circ f(b) = \varphi(a(Ker f)) \circ \varphi(b(Ker f))$

Т.О. φ – изоморфизм, что и требовалось доказать

□

Теорема 2.13 (Кэли). *Всякая конечная группа порядка n изоморфна подгруппе S_n*

Доказательство. $|G| = n = \{a_1 \dots a_n\}$, где $a_1 = e$

$g \in G$ тогда $\alpha_g := \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ g * a_1 & \dots & g * a_n \end{pmatrix}$

α_g – перестановка $a_i \neq a_j$ тогда $g * a_i \neq g * a_j$

$H = \{\alpha_{a_1}, \alpha_{a_2}, \dots, \alpha_{a_n}\} \subseteq S_n$

Композиция перестановок такого вида – перестановка такого вида.

ф. $\alpha_g, \alpha_f \in H$

ф. $x \in G \quad \alpha_g \circ \alpha_f(x) = \alpha_g(\alpha_f(x)) = \alpha_g(f * x) = g * (f * x) = (g * f) * x = \alpha_{g*f}(x)$

$\alpha_g \in H$ Тогда $\alpha_{g^{-1}}$ будет обратным.

Т.О. $H \leq S_n$

Докажем, что $H \cong G$

$\varphi : G \rightarrow H \quad g \mapsto \alpha_g$

Сюръективность очевидна

Инъективность $\alpha_{g_1} = \alpha_{g_2} \Rightarrow \alpha_{g_1}(a_1) = \alpha_{g_2}(a_1) \Rightarrow g_1 * e = g_2 * e \Rightarrow g_1 = g_2$

Гомоморфизм ф. $x \in G \quad \alpha_{g_1 * g_2}(x) = g_1 * g_2 * x = (\alpha_{g_1} \circ \alpha_{g_2})(x)$

Т.О. φ – изоморфизм

□

Глава 3

Комплексные числа

3.1 Поля

Определение 3.1. $(K, +, \cdot)$ – поле, если:

I Абелева группа по сложению

- (a) Сложение коммутативно $\forall a, b \in K \quad a + b = b + a$
- (b) Сложение ассоциативно $\forall a, b, c \in K \quad (a + b) + c = a + (b + c)$
- (c) Существует нейтральный по сложению $\exists 0 \in K : \forall a \in K \quad 0 + a = a$
- (d) Существует обратный по сложению $\forall a \in K \exists (-a) \in K : \quad a + (-a) = 0$

II Без 0 – абелева группа по умножению

- (a) $\forall a, b \in K \quad ab = ba$
- (b) $\forall a, b, c \in K \quad (ab)c = a(bc)$
- (c) $\exists 1 \in K : \forall a \in K \quad 1 \cdot a = a$
- (d) $\forall a \in K, a \neq 0 \quad \exists a^{-1} : \quad a \cdot a^{-1} = 1$

III $\forall a, b, c \in K \quad (a + b)c = ac + bc$

Замечание 3.1. *I.1 – – I.4 $(K, +)$ – абелева группа*

II.1 – – II.4 $(K/\{0\}, \cdot)$ – абелева группа

I.1 – – I.4 + II.2+ лев. и прав. дистрибутивность $(K, +, \cdot)$ – кольцо

+ II.1 коммутативное кольцо

+ II.3 кольцо с единицей

Коммутативное кольцо с единицей называется телом

Если нет делителей нуля (двух ненулевых элементов, произведение которых = 0), то область целостности

Примеры:

1. $(Q, +, \cdot)$ – поле
2. $(R, +, \cdot)$ – поле
3. $(Z_2, +, \cdot)$ – поле
4. $(Z_4, +, \cdot)$ – НЕ поле, т.к. есть делители нуля $[2]_4 \cdot [2]_4 = [4]_4 = [0]_4$
5. $(Z_p, +, \cdot)$, – поле (упр) (p – простое)

Определение 3.2. $(K_1, +, 0, 1), (K_2, \oplus, \odot, \hat{0}, \hat{1})$ – поля

$f : K_1 \rightarrow K_2$ – называется гомоморфизмом, если:

1. $\forall a, b \in K_1 \quad f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$

$$2. \forall a, b \in K_1 \quad f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$$

Свойства:

1. $f(0) = \widehat{0}$
2. $f(1) = \widehat{1}$
3. $f(-a) = -f(a)$
- 4.

Теорема 3.1. f – гомоморфизм полей, тогда или f – инъективен или $f \equiv 0$

Доказательство. Пусть $f(a) = f(b)$

Тогда $0 = f(a) - f(b) = f(a - b)$

Если $a = b$, то f – инъективен

Если $a \neq b$ тогда $a - b = x \neq 0$ и $f(x) = 0$

фиксируем $y \in K_1$ тогда $f(y) = f(y \cdot x \cdot x^{-1}) = f(y) \odot f(x) \odot f(x^{-1}) = 0$

Т.О. $f : K_1 \rightarrow K_2$ – гомоморфизм $\exists a \neq 0 : f(a) \neq 0$

Тогда $\text{Im } f \cong K_1$

□

Определение 3.3. Изоморфизм полей

$f : K_1 \rightarrow K_2$ – изоморфизм полей, если:

1. f – биективно
2. f – гомоморфизм

Определение 3.4. K – подполе L , если:

1. K – подмножество L
2. K относительно тех же операций является полем

Определение 3.5. L называется расширением поля K , если L – поле и K – подполе L

Пример $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ – расширение $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

3.2 Поле комплексных чисел

$k = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ на K введём операции

$$\oplus \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K \quad (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\odot \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K \quad (x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

$$\begin{aligned} \widehat{0} &: (0, 0) = \widehat{0} \\ \widehat{1} &: (1, 0) = \widehat{1} \end{aligned}$$

Теорема 3.2. $(K, \oplus, \odot, \widehat{0}, \widehat{1})$

Доказательство. I.1 – I.4 – упражнение

II.1 фиксируем $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K$

$$(x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) = (x_2 x_1 - y_2 y_1, x_2 y_1 + x_1 y_2) = (x_2 y_2) \odot (x_1, y_1)$$

II.2 – упражнение

$$\text{II.3 фиксируем } (x, y) \in K \quad (x, y) \odot (1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + 1 \cdot y) = (x, y)$$

II.4 фиксируем $(x, y) \in K$ тогда $(x, y)^{-1} = (\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2})$ при $x, y \neq 0$ упр – проверить

□

Утверждение 3.1. $f : \mathbb{R} \rightarrow K \quad x \mapsto (x, 0)$ – гомоморфизм

Доказательство. 1. фиксируем $x, y \in \mathbb{R}$ тогда

$$f(x + y) = (x + y, 0) = (x, 0) \oplus (y, 0) = f(x) \oplus f(y)$$

$$2. \text{ фиксируем } x, y \in \mathbb{R} \quad f(x \cdot y) = (x \cdot y, 0) = (x, 0) \odot (y, 0) = f(x) \odot f(y)$$

□

Следствие 3.1. $\mathbb{R} \cong \text{Im } f$

Замечание 3.2. $u = (0, 1) \in K$

$$u^2 = (0, 1) \odot (0, 1) = (0 \cdot -1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = -(1, 0) = -\hat{1}$$

Теорема 3.3. Пусть $(K', +, \cdot, 0, 1)$ – такое поле, что:

1. \mathbb{R} – подполе K'
2. $\exists u' \in K' : (u')^2 = -1$
3. $\forall z \in K' \exists! x, y \in \mathbb{R} : z = x + y \cdot u'$

Тогда $K' \cong K$

Доказательство. $f : K' \rightarrow K \quad x + y \cdot u' = z \mapsto (x, y)$

1. биективно – очевидно
2. f – гомоморфизм
 - (a) фиксируем $z_1, z_2 \in K' \quad z_1 = x_1 + y_1 \cdot u' \quad z_2 = x_2 + y_2 \cdot u'$

$$f(z_1 + z_2) = f(x_1 + y_1 u' + x_2 + y_2 u') = f((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) u') = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = f(z_1) \oplus f(z_2)$$
 - (b) фиксируем $z_1, z_2 \in K'$

$$f(z_1 z_2) = f((x_1 + y_1 u')(x_2 + y_2 u')) = f(x_1 x_2 + x_1 y_2 u' + x_2 y_1 u' + y_1 y_2 (u')^2) = f(x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) u') = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) = (x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) = f(z_1) \odot f(z_2)$$

□

Определение 3.6. Поле комплексных чисел – некоторое фиксированное поле $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$:

1. \mathbb{C} – расширение \mathbb{R}
2. $\exists i \in \mathbb{C} : i^2 = -1$
3. $\forall z \in \mathbb{C} \exists! x, y \in \mathbb{R} : z = x + y \cdot i$

Терминология:

- элементы поля \mathbb{C} называются комплексными числами
- i – мнимой единицей
- $z = x + y \cdot i$ – алгебраическая запись комплексного числа
 - x – вещественная часть $Re \ z$
 - y – мнимая часть $Im \ z$

Примеры:

- $i^3 = i^2 \cdot i = -i$
- $\frac{1}{i^3} = \frac{i^4}{i^3} = i$
- $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

Д/З с 6 ноября:

- $(2^A, \triangle, \cap)$ – коммутативное кольцо с единицей, но не поле
- Посчитать:
 1. $(2 + 3i)(7 - 2i)$
 2. $(\sqrt{2} + i)(\sqrt{5} + \sqrt{2} + i)$
 3. $i^{17} + i^{41}$
 4. $(1 + i)^3$
 5. $(1 - i)^4 - (1 + i)^4$
- Устные упражнения(ниже ссылки на упражнения):
 1. 5
 2. 3.2
 3. 3.2
 4. 3.2

Упражнение 3.1. Найти все такие $x, y \in \mathbb{R}$: $(2x + 3y) + (x - y)i = 2 + (2x + y)i$

Доказательство. т.е. $2x + 3y = 2$ и $x - y = 2x + y$

□

Д/З с 8 ноября:

упр 1 $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

1. Найти $x, y \in \mathbb{R}$:
 - (a) $(3 + i)x - (1 - 2i)y = 7$
 - (b) $(4 - i)x + (2 + 5i)y = 8 + 9i$
2. Найти такие $x, y \in \mathbb{C}$
 - (a) $x^2 - 1 = 0$
 - (b) $x^4 - 1 = 0$
 - (c) $x^2 + 1 = 0$
 - (d) $x^4 + 1 = 0$
 - (e) $\begin{cases} ix - 2y = -i \\ (1 + i)x - 2iy = 3 + i \end{cases}$

3.3 Представление комплексных чисел в виде матриц.

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Теорема 3.4. $\{K, +, \cdot, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ – поле

Доказательство. I 1. Коммутативность. $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -(a_2) & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -(b_2) & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ -b_1 + (-b_2) & a_1 + a_2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -(b_2) & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -(b_1) & a_1 \end{pmatrix}$$

2. Ассоциативность. $\left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -(b_1) & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -(b_2) & a_2 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ -(b_3) & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ -(b_1 + b_2) & a_1 + a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ -(b_3) & a_3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & b_1 + b_2 + b_3 \\ -(b_1 + b_2 + b_3) & a_1 + a_2 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -(b_1) & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 + a_3 & b_2 + b_3 \\ -(b_2 + b_3) & a_2 + a_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -(b_1) & a_1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -(b_2) & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ -(b_3) & a_3 \end{pmatrix} \right]$$

3. Нейтральный элемент. $\begin{pmatrix} a & b \\ -(b) & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -(b) & a \end{pmatrix}$
4. Обратный элемент. $\begin{pmatrix} a & b \\ -(b) & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- II 1. Коммутативность. $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -(b_1) & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -(b_2) & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1(-b_2) & a_1 b_2 + b_1 a_2 \\ -b_1 a_2 + a_1(-b_2) & -b_1 b_2 + a_1 a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -(b_2) & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -(b_1) & a_1 \end{pmatrix}$
2. Ассоциативность. $\langle \dots \rangle$
3. Нейтральный элемент. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. Обратный элемент к $\begin{pmatrix} a & b \\ -(b) & a \end{pmatrix} - \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

□

Теорема 3.5. $K \cong \mathbb{C}$

Доказательство. $f : \mathbb{C} \rightarrow K \quad z = x + yi \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ -(y) & x \end{pmatrix}$

- f – гомоморфизм.

$$f(z_1 + z_2) = f(x_1 + y_1 i + x_2 + y_2 i) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ -(y_1 + y_2) & x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} = f(z_1) + f(z_2)$$

$$f(z_1 z_2) = f(x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 & x_1 y_2 + x_2 y_1 \\ -(x_1 y_2 + x_2 y_1) & x_1 x_2 - y_1 y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -(y_1) & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -(y_2) & x_2 \end{pmatrix} = f(x_1) \cdot f(z_2)$$

□

Замечание 3.3. $\mathbb{R} \rightarrow K \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ – инъективный гомоморфизм

Замечание 3.4. $f(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

3.4 Комплексная сопряжённая

Теорема 3.6. $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad F(x + yi) = x - yi$ – изоморфизм, т.е. автоморфизм

Доказательство. $x_1 + y_1 i \neq x_2 + y_2 i$ тогда $F(x + y_1 i) = x_1 - y_1 i \neq x_2 - y_2 i = F(x_2 + y_2 i)$

Т.О. F – биективно

(!) F – гомоморфизм

$$F(x_1 + y_1 i + x_2 + y_2 i) = F(x_1 + x_2 + (y_1 + y_2) i) = x_1 + x_2 - (y_1 + y_2) i = x_1 - y_1 i + x_2 - y_2 i = F(x_1 + y_1 i) + F(x_2 + y_2 i)$$

$$F((x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i)) = F(x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + x_1(-y_2) i + (-y_1) x_2 i = (x_1 - y_1 i)(x_2 - y_2 i) = F(x_1 + y_1 i) F(x_2 + y_2 i)$$

Т.О. F – изоморфизм, т.е. автоморфизм

□

Определение 3.7. $z \in \mathbb{C} \quad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$

Тогда $\bar{z} = x - iy$ – называется комплексным сопряжённым к числу z

Замечание 3.5. $\overline{\begin{pmatrix} x & y \\ -(y) & x \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$

Теорема 3.7. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$1. \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$2. \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$3. \overline{\overline{z}} = z$$

$$4. \overline{z_1} = z_1 \iff z_1 \in \mathbb{R}$$

$$5. z_1 + \overline{z_1} = 2\operatorname{Re} z_1$$

$$6. z_1 - \overline{z_1} = 2i\operatorname{Im} z_1$$

$$7. z_1 = x + iy \Rightarrow z_1 \overline{z_1} = x^2 + y^2$$

$$\text{и если } z_1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Arg} z_1 > 0$$

$$8. \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

Доказательство. Упражнение

□

ДЗ с 13 ноября:

Упражнение сверху

$$1. \frac{2i + \frac{1}{3}}{4i + \frac{1}{5}} : \frac{i - 1}{i + 1}$$

$$2. (2i + 1)(1 - i)(4 + 3i)$$

$$3. \frac{2i + 3}{4 - \sqrt{3}i} + \frac{\sqrt{3} - i}{i + 4}$$

$$4. \overline{\left(\frac{i + 2}{(i + 4)(2 - i)}\right)}$$

$$5. \begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 4 \\ z_1 i - iz_2 = 2 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} z_1 + \overline{z_2} = 4 \\ \overline{z_1} - 2z_2 = 1 \end{cases}$$

3.5 Квадратный корень из комплексного числа

$z \in \mathbb{C}$ $z = x + iy$ мы хотим найти такое $d = t + is$, что $d^2 = z$, т.е. $(z + is)^2 = x + iy$

$$(t^2 + s^2) + 2tsi - x + iy$$

$$\text{т.е. } \begin{cases} t^2 - s^2 = x \\ 2ts = y \end{cases}$$

$$(t^2 - s^2)^2 + (2ts)^2 = x^2 + y^2$$

$$(t^2 + s^2)^2 = x^2 + y^2 \quad ((t^2 + s^2) = t^4 + 2t^2s^2 + s^4)$$

$$\begin{cases} t^2 + s^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \\ t^2 - s^2 = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2} \\ s^2 = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2} \end{cases}$$

$$ts = \frac{y}{2}, \text{ т.е. знак фиксирован}$$

$$\begin{aligned} \text{Если } y \geq 0 \quad d &= \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}} i \right) \\ \text{Если } y < 0 \quad d &= \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}} i \right) \end{aligned}$$

3.6 Геометрическая интерпретация комплексных чисел

$$K = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (K, \oplus, \odot, \hat{0}, \hat{1})$$

$\mathbb{C} \rightarrow K$ изоморфизм $z = x + iy \mapsto (x, y)$

На плоскости можем сопоставить числу точку, а можем вектор

Определение 3.8. Модуль комплексного числа - длина вектора, его задающего. $|z| = |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Свойства:

1. $|z| \in \mathbb{R}$
2. $|z \cdot x| = |z||x| \quad z \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$ док-во – упражнение
3. $\forall z \in \mathbb{C} \quad z = x + iy$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} i \right)$$

$$z = |z| \cdot z_1, \quad |z_1| = 1$$

$$a = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$b = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Числу z_1 соответствует точка a, b на единичной окружности.

Т.е. существует угол $\theta : \sin \theta = b, \cos \theta = a$

Для z существует тригонометрическая форма записи: $z = |z|(\cos \theta + \sin \theta i)$

$|z|$ – модуль комплексного числа

θ – аргумент комплексного числа ($\text{Arg } z$). Понятно, что их бесконечно много.

ДЗ:

Упражнение выше (2 свойство определения 3.8)

Найти квадратные корни:

1. -2
2. -4
3. $1 + i$
4. $3 + 4i$
5. $\cos \alpha + i \sin \alpha, \alpha$ – фиксированный угол

Изобразить множества на плоскости:

1. $\text{Im } z = 3$
2. $\text{Re } z = 4$
3. $\text{Im}(z + 2) = 2$
4. $\text{Re } z \leq 4$

Теорема 3.8. Если $z \in \mathbb{C} \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, где $r > 0, r \in \mathbb{R}$, то $r = |z|$, а θ – один из аргументов z

Доказательство. $|z| = r \cos \theta + r \sin \theta i$ $|z| = |r| \cdot |\cos \theta + i \sin \theta| = r(\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}) = r$

Кроме того $z \in \mathbb{C} \quad \exists x, y \in \mathbb{R} : z = x + iy$

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \quad \sin \theta = \frac{y}{r}, \text{ т.к. } r = |z|$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow \theta - \text{является одним из аргументов}$$

□

Следствие 3.2. $r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, тогда $r_1 = r_2$ и $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi$

$z(x, y)$ – точка плоскости, тогда $z = x + iy$ – комплексные координаты этой точки

Если \vec{OZ} – вектор, тогда $z = x + iy$ – комплексные координаты вектора

3.7 Упорядоченность поля комплексных чисел

Определение 3.9. Поле K – называется упорядоченным, если на K задан линейный порядок (\leq)

1. $\forall x \in K \quad x \leq x$ – рефлексивность
2. $\forall x, y \in K \quad x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$ – асимметричность
3. $\forall x, y, z \quad x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ – транзитивность
4. $\forall x, y \in K, x \leq y \vee y \leq x$ – линейность

И отношение порядка согласовано с операциями

1. $\forall x, y, z \in K$ Если $x \leq y$, то $x + z \leq y + z$
2. $\forall x, y \in K$ Если $0 \leq x, 0 \leq y$, то $0 \leq x \cdot y$

Теорема 3.9. \mathbb{C} не является упорядоченным полем

Доказательство. \square есть порядок. $P = \{x \in \mathbb{C} \mid x > 0\}$

Если $x \in P$, то $-x \notin P$

$0 < x \quad -x < 0 \Rightarrow -x$ не может быть больше 0, т.е. $-x \notin P$

Если $i \in P$, тогда $i^2 \in P \Rightarrow -1 \in P$!!!

Если $i \notin P$, тогда $-i \in P$ тогда $(-i)^2 \in P$, т.е. $-1 \in P$

□

ДЗ с 23 ноября:

1. $M = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0\}$

Изобразить множество точек:

(a) $u = z^2$

(b) $u = (z + 1)^2$

2. Изобразить множество точек z :

(a) $\arg z = \frac{\pi}{4}$

(b) $\arg \frac{1}{z} = \frac{\pi}{4}$

(c) $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$

(d) $\arg(z - i + 1) = \frac{\pi}{4}$

Где $\arg z$ – главный аргумент

3. Записать в тригонометрической форме:

- (a) 1
- (b) -5
- (c) $+3i$
- (d) $1 - i\sqrt{3}$
- (e) $-3 \left(\cos \frac{\pi}{7} - i \sin \frac{\pi}{7} \right)$
- (f) $\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \frac{\pi}{2}$
- (g) $\sin \frac{2\pi}{5} + i \left(1 - \cos \frac{2\pi}{5} \right)$
- (h) $\sin \frac{2\pi}{5} + i \left(1 + \cos \frac{2\pi}{5} \right)$

4. Решить систему:
$$\begin{cases} z_1 + iz_2 - z_3 = 2 + i \\ 2z_1 + iz_3 = 5 \\ z_2 + z_3 = i - 1 \end{cases}$$

5. (a) $\sqrt{\frac{2}{3} + i}$
 (b) $\sqrt[3]{1 + i}$

3.8 Свойства модуля комплексного числа

Определение 3.10. $z \in \mathbb{C} \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}}$

Теорема 3.10. $\forall z, w \in \mathbb{C}$

1. $|z| \geq 0$
2. $|z| = 0 \iff z = 0$
3. Если $\text{Im } z = 0$, то $|z|_{\mathbb{C}} = |z|_{\mathbb{R}}$
4. $|-z| = |z|$
5. $|z \cdot w| = |z||w|$
6. Если $z \neq 0$, то $|z^{-1}| = |z|^{-1}$
7. $|z + w| \leq |z| + |w|$
8. $||z| - |w|| \leq |z - w|$

Доказательство. 1-4 – Упражнение.

$$5 \quad |z \cdot w|^2 = z \cdot w \cdot (\overline{zw}) = z \cdot \bar{z} \cdot w \cdot \bar{w} = |z|^2 \cdot |w|^2 \Rightarrow |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$6 \quad z \cdot z^{-1} = 1, \text{ т.е. } |1| = |z \cdot z^{-1}| = |z||z^{-1}| \Rightarrow |z^{-1}| = |z|^{-1}$$

$$7 \quad |z + 1| \leq |z| + 1$$

$$|z + 1|^2 = (z + 1)(\bar{z} + 1) = z\bar{z} + \bar{z} + z + 1 = |z|^2 + 1 + 2x$$

$$x^2 + y^2 > x^2$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq x$$

$$2|z| = 2\sqrt{x^2 + y^2} \geq 2x$$

Если $w = 0$

Если $w \neq 0$ тогда $\exists w^{-1}$

$$z + w = |(zw^{-1} + 1)w| = |zw^{-1} + 1||w| \leq (|zw^{-1}| + 1)|w| = (|z||w|^{-1} + 1)|w| = |z| + |w|$$

$$8 \quad |z| = |w + (z - w)| \leq |w| + |z - w|$$

$$|z| - |w| \leq |z - w|$$

$$\text{Если } |z| - |w| \geq 0, \text{ то } ||z| - |w|| = |z - w| \leq |z - w|$$

$$\text{Если } |z| - |w| < 0, \text{ то } ||z| - |w|| = |w| - |z| \leq |w - z| = |z - w|$$

□

ДЗ:

1. Изобразить множество точек:

$$(a) \quad |z| > 5$$

$$(b) \quad |z| \leq 4$$

$$(c) \quad |z + 3i| < 4$$

$$(d) \quad |z + 3 - i| > 4$$

$$(e) \quad 2 < |z| < 3$$

2. Какая фигура?

$$(a) \quad |z - a| + |z - b| = 5 \quad a, b \in \mathbb{C}$$

$$(b) \quad |z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 4$$

$$(c) \quad |z| = |z - \frac{i}{3}|$$

$$(d) \quad |z| \leq \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$$

3. $z = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad \arg z_1 = ?$, если

$$(a) \quad z_1 = z^2 - z$$

$$(b) \quad z_1 = z^3 + z^2$$

$$(c) \quad z_1 = z^2 + \bar{z}$$

3.9 Тригонометрическая форма записи комплексного числа (продолжение)

Теорема 3.11. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

Тогда:

$$1. \quad z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$2. \quad \bar{z}_1 = r_1 (\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1))$$

$$3. \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)) \quad z_2 \neq 0$$

Доказательство. 1. $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2))$

$$2. \quad \begin{aligned} \cos \theta_1 &= \cos(-\theta_1) \\ -\sin \theta_1 &= \sin(-\theta_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{r_1 r_2 (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))}{r_2 r_2 (\cos(\theta_2 - \theta_2) + i \sin(\theta_2 - \theta_2))} = \frac{r_1 r_2 (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))}{r_2 r_2} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)) \end{aligned}$$

□

Замечание 3.6. 1. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

$$2. \quad z_1, z_2 \neq 0 \quad \operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$$

Следствие 3.3 (Формула Муавра). $\forall z \in \mathbb{C} \quad z \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$z^n = (r(\cos \theta + i \sin \theta))^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta)$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta) + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)$$

$$\cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = \cos \theta (\cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\sin \theta (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = -4 \sin^3 \theta + 3 \sin \theta$$

ДЗ: прошлое

Записать в алгебраической форме:

$$1. (z + 1)^6$$

$$2. (\sqrt{3} + i)^{17}$$

$$3. (3i - 1)^5 - (3i + 1)^5$$

ДЗ:

$$1. 2.46$$

$$2. 2.47$$

$$3. 2.48$$

$$4. 2.49$$

$$5. 2.43$$

ДЗ с 11 декабря:

$$1. 2.49$$

$$2. 2.50$$

$$3. 2.51$$

$$4. 2.54$$

3.10 Корни n-ой степени из комплексных чисел

Теорема 3.12. $d \in \mathbb{C}, d \neq 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists$ ровно n чисел $z \in \mathbb{C} : z^n = d$

$$\text{Если } d = |d|(\cos \varphi + i \sin \varphi), \varphi = \arg d, \text{ тогда } z_k = \sqrt[n]{|d|} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right)$$

$$\text{Доказательство. } z_k^n = (\sqrt[n]{|d|})^n \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \cdot n + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \cdot n \right) = |d|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = d$$

$$0 \leq \frac{\varphi + 2\pi k}{n} < 2\pi$$

$$\text{Если } k \neq l, \text{ то } \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \neq \frac{\varphi + 2\pi l}{n}$$

А тогда все z_k различны

Заметим, что всякий корень n -ой степени из d является корнем уравнения $z^n - d = 0$, а у такого уравнение не более чем n корней \square

Определение 3.11. $n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}, z \neq 0$. Через $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right)$ и назовём это главным корнем n -ой степени из комплексного числа

3.11 Корни n-ой степени из 1

Теорема 3.13. $n \in \mathbb{N}$ $\omega_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, k = \overline{0, n-1}$

$$\Omega_n = \{\omega_k | k = \overline{0, n-1}\}$$

1. ω_k – корни n-ой степени из 1
2. (Ω, \cdot) – абелева группа

Доказательство. 1. очевидно

2. ассоциативно, коммутативно

1 – нейтральный элемент (ω_0)

обратный – $\omega_k^{-1} = \omega_{n-k}$

замкнутость $\omega_k \omega_l = \omega_x, x \equiv k + l \pmod{n}$

□

Замечание 3.7. (Ω, \cdot) – циклическая группа порядка n $\Omega_n = \langle \{\omega_1\} \rangle$

Замечание 3.8. элементы Ω_n расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность

ДЗ:

1. Упражнение: доказать, что два метода вычисления квадратного корня дают один и тот же результат

3.12 Экспоненциальная форма записи комплексного числа

Обозначения: $\exp(i\varphi) = [e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi]$ – Формула Эйлера

Теорема 3.14. $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

1. $e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
2. $e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}$
3. $(e^{i\varphi_1})^n = e^{in\varphi_1}$ – Формула Муавра

Доказательство. 1. Умножение комплексных чисел

$$2. e^{i\varphi_1} \cdot e^{-i\varphi_1} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_1)} = e^{i0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

3. Формула Муавра

□

Следствие 3.4. 1. $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$

$$2. \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$3. \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$4. \operatorname{tg} \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{i(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})}$$

$$5. \operatorname{ctg} \varphi = \frac{i(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}$$

Теорема 3.15. $(\sqrt[n]{z})^n$ имеет ровно $\frac{m}{\operatorname{НОД}(m, n)}$

Замечание 3.9. $\sqrt[n]{z^m} \neq (\sqrt[n]{z})^n$

Глава 4

Повторения

4.1 Определение тригонометрических функций

$$\mathcal{O} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

$$E(x) = \begin{cases} P_x, AP_x = x, x > 0 \\ A, x = 0 \\ Px, P_x A = |x|, x < 0 \end{cases}$$

Длина окружности $- 2\pi$

Главный период $E(x) - 2\pi$

Период $2\pi k, k \in \mathbb{Z} E(x + 2\pi k) = E(x)$

Важное свойство: $\forall P_x \in \mathcal{O} \exists! \alpha \in [0, 2\pi) \quad E(\alpha) = P_x$

α определяется углом между \vec{OA} и \vec{AP}_x

$$P_{r_1} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto x$$

$$P_{r_2} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto y$$

$$\tilde{E} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad x \mapsto E(x)$$

$$P_{r_1} \circ \tilde{E} = \cos \quad P_{r_2} \circ \tilde{E} = \sin$$

4.2 Свойства синуса и косинуса

| cos | sin |
|--|--|
| $E_{\cos} = \mathbb{R}$ | $E_{\sin} = \mathbb{R}$ |
| $D_{\cos} = [-1, 1]$ | $D_{\sin} = [-1, 1]$ |
| период : $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ | период : $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ |
| главный период : 2π | главный период : 2π |
| $\cos(-x) = \cos x$ чётная функция | $\sin(-x) = -\sin x$ нечётная функция |
| $\downarrow [2\pi k, 2\pi k + \pi], \uparrow [2\pi k - \pi, 2\pi k]$ | $\uparrow [2\pi k, 2\pi k + \frac{\pi}{2}], \downarrow [\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k], \uparrow [2\pi k - \frac{\pi}{2}, 2\pi k]$ |
| Важное свойство: $\forall x_1, x_2 \quad x_1^2 + x_2^2 \quad \exists! \alpha \in [0, 2\pi) \quad \cos \alpha = x_1, \sin \alpha = x_2$ | |
| $\operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ | $\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ |
| $\operatorname{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ | $\operatorname{ctg}(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ |

Упражнение: расписать свойства тангенса и котангенса

4.3 Основные тригонометрические формулы

$$1. \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

2.

Теорема 4.1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

Доказательство. $P_\alpha, P_{\alpha+\beta}, P_\beta$

$$\widetilde{P_{\alpha+\beta}A} = \widetilde{P_\alpha P_{-\beta}}$$

$$P_{\alpha+\beta}(\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$$

$$P_\alpha(\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$P_{-\beta}(\cos(-\beta), \sin(-\beta))$$

По геометрии две хорды $P_{\alpha+\beta}A$ и $P_\alpha P_{-\beta}$ равны

$$(\cos(\alpha + \beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha + \beta) = (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2$$

$$\cos^2(\alpha + \beta) + 1 - 2 \cos(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha + \beta) = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta + \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$2 - 2 \cos(\alpha + \beta) = 2 - 2 \cos \alpha \cos \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

□

ДЗ:

1. Найти все $a, b \in \mathbb{R} : f(\alpha) = a \sin \alpha + b \cos \alpha$ – чётная
2. Найти период $f(\alpha) = \sin \alpha + \cos \frac{\alpha}{3} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{10}$
3. Вычислить:

(a) $\cos \frac{123\pi}{4}$

(b) $\sin \frac{-117\pi}{4}$

(c) $\cos \frac{-205\pi}{6}$

(d) $\operatorname{tg} \frac{1011\pi}{4}$

Упражнения:

1. 4.2
2. Доказать $\cos(\alpha - \beta)$
3. Доказать формулы приведения $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha), \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha), \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha), \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)$

4.4 Функции \arcsin и \arccos

$$\sin \uparrow \uparrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\sin_{[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$$

У этой функции есть обратная, т.к. она монотонная и непрерывная. назовём её \arcsin

$$\cos \downarrow \downarrow [0, \pi]$$

$$\cos_{[0, \pi]} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

У этой функции есть обратная, т.к. она монотонная и непрерывная. Назовём её \arccos

1. $\alpha \in \mathbb{R} : \sin \alpha = a, a \in [-1, 1]$
 $\alpha = \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $\alpha = \pi - \arcsin a + 2\pi k$
2. $\alpha \in \mathbb{R} : \cos \alpha = a, a \in [-1, 1]$
 $\alpha = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Упражнение 4.1. Определить обратные tg и ctg . Решить уравнения $\operatorname{tg} \alpha = a, \operatorname{ctg} \alpha = a$

Упражнение 4.2. Доказать: $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Доказательство. $y = \arctg x \quad \tg y = x \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

$$-1 < \sin y < 1 \quad 0 < \cos y < 1$$

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \Rightarrow 1 + \tg^2 y = \frac{1}{\ctg x}$$

$$\cos y = \sqrt{\frac{1}{1 + \tg^2 y}}$$

$$\sin y = \pm \sqrt{1 - \cos^2 y} = \pm \sqrt{\frac{1 + \tg^2 y - 1}{1 + \tg^2 y}} = \pm \sqrt{\frac{\tg^2 y}{1 + \tg^2 y}} = \pm \frac{|\tg y|}{\sqrt{1 + \tg^2 y}}$$

□

Упражнение 4.3. $f(x) = \cos(ax + \sin(bx)) \quad \frac{a}{b} = \frac{n}{m} \quad n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$

$$T = \frac{1}{b} \cdot n2\pi$$

ДЗ: 1.42 – 1.44

$$(!) \tg(|\arctg|) = |x|$$

$$(!) \cos(\arctg x) = \frac{1}{\sqrt{1 + X^2}}$$

Найти $\sin \alpha$, если $\tg \alpha = 2$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

$$\tg(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\tg \alpha + \tg \beta}{1 - \tg \alpha \tg \beta}$$

Утверждение 4.1. $\ctg(\alpha + \beta) = ?$

Доказательство. $\alpha + \beta \neq \pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z}$

$$\alpha \neq \pi k_2, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\beta \neq \pi k_3, k_3 \in \mathbb{Z}$$

$$\tg(\alpha + \beta) = \frac{\tg \alpha + \tg \beta}{1 - \tg \alpha \tg \beta}$$

$$\ctg(\alpha + \beta) = \frac{1 - \tg \alpha \tg \beta}{\tg \alpha + \tg \beta} = \frac{1 - \frac{1}{\ctg \alpha} + \frac{1}{\ctg \beta}}{\frac{1}{\ctg \alpha} + \frac{1}{\ctg \beta}} = \frac{\ctg \alpha \cdot \ctg \beta - 1}{\ctg \alpha + \ctg \beta}$$

□

Следствие 4.1. $\alpha - \beta \neq \pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z}$

$$\alpha \neq \pi k_2, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\beta \neq \pi k_3, k_3 \in \mathbb{Z}$$

$$\ctg(\alpha - \beta) = \frac{\ctg \alpha \cdot \ctg \beta + 1}{\ctg \alpha - \ctg \beta}$$

Утверждение 4.2. $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Доказательство. $\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}$

$$\beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha = \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sin \beta = \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Теорема доказана

□

Утверждение 4.3. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z}$

$$\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k_2, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\tg \alpha + \tg \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\tg \alpha - \tg \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

Доказательство. $\operatorname{th} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$ \square

Утверждение 4.4. $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$

Доказательство. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ \square

Утверждение 4.5. $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$
 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$

Утверждение 4.6. $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
 $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

Замечание 4.1. $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)}$$

4.5 Формулы универсальной подстановки

Утверждение 4.7. 1. $\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2})}{1 + \operatorname{tg}^2(\frac{\alpha}{2})}$

2. $\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\frac{\alpha}{2})}{1 + \operatorname{tg}^2(\frac{\alpha}{2})}$

3. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$

4. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$

Доказательство. 1. $\sin \alpha = \sin(2\frac{\alpha}{2}) = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2})}{1 + \operatorname{tg}^2(\frac{\alpha}{2})}$

2. $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$

\square

Утверждение 4.8. $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

Упр:

1. $\operatorname{tg}(\alpha - \frac{\pi}{2})$

2. $\operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{2})$

3. $\operatorname{ctg}(\alpha - \frac{\pi}{2})$

4. $\operatorname{ctg}(\alpha + \frac{\pi}{2})$

5. $\cos \alpha + \cos \beta$

6. $\cos \alpha - \cos \beta$

7. Универсальная подстановка для $\cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$

ДЗ:

1. 24
2. 26
3. 30
4. 27-40
5. 51
6. 50(Л,Н,М,О)

4.6 Универсальное тригонометрическое преобразование

Теорема 4.2. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 \neq 0$

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(\alpha + \varphi), \quad \varphi : \cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\begin{cases} b \geq 0, \varphi = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \\ b < 0, \varphi = -\arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \end{cases}$$

Доказательство. $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$|\sin \varphi| = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$0 < |\varphi| \leq \pi$$

$$\begin{cases} b > 0, |\sin \varphi| = \sin \varphi \\ b < 0, |\sin \varphi| = -\sin \varphi \end{cases}$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\begin{aligned} a \sin \alpha + b \cos \alpha &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \alpha \right) = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi) = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi) \end{aligned}$$

□

Глава 5

Многочлены

Определение 5.1. $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, a_n \neq 0, a_i \in K$ – многочлен
также $P(x)$ – функция
 $P(x) : E \rightarrow K, \quad E \subseteq K$

Теорема 5.1. $\begin{cases} P(x) = g(x) \forall x \in E \\ P(x) : E \rightarrow K \\ g(x) : E \rightarrow K \end{cases} \iff \deg P(x) = \deg g(x) \text{ и все коэффициенты равны}$

Доказательство.

\Leftarrow Очевидно

$$\Rightarrow P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

$$g(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i$$

$$x=0 \quad g(0) = b_0 \quad p(0) = a_0, p(0) = g(0)$$

$$p(x) = g(x) \Rightarrow p'(x) = g'(x)$$

$$p'(0) = g'(0) \Rightarrow a_1 = b_1$$

$$\text{Не умаляя общности } n < m \quad a_m = b_m \quad a_{m+1} = b_{m+1} = 0$$

□

Теорема 5.2 (Основная теорема алгебры). $\forall p(x) \in \mathbb{C}[x] \exists x_0 \in \mathbb{C} : p(x_0) = 0$

Доказательство.

Теорема 5.3 (Вейерштрасса). $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывно, где X – компакт. Тогда f достигает максимального и минимального значения

Доказательство. $X_n = f^{-1}((-n, n)) \subset \mathbb{R}$ (полный прообраз)

$X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ и X_i – открытое, т.к. X_i – прообраз открытого множества при непрерывном отображении.

Т.к. X – компакт, то можно выделить конечное подпокрытие X_{i_k}

$$\forall x \in X f(x) \leq \max\{i_k\}$$

$$\forall x \in X f(x) \geq \min\{-i_k\}$$

Упражнение 5.1. Доказать, что $f(x)$ достигает \sup и \inf либо для произвольного компакта, либо на $X \subset \mathbb{R}^2$

□

Лемма 5.1. $P(x) \in \mathbb{C}[x] \quad \forall c \exists r > 0 : \forall |x| \geq r \quad |P(x)| > c$

Доказательство. $\Phi. C > 0$

$$\begin{aligned} |P(x)| &= |a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0| \geq |a_n x^n| - |a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0| \geq |a_n| |x^n| - (|a_{n-1}| |x^{n-1}| + \dots + |a_0|) \geq \\ & \text{[мы можем взять } r > 1 \text{ т.е. } |x| > 1 \quad |x^{n-1}| > |x^i|, i < n-1] \\ & \geq |a_n| |x^n| - |x^{n-1}| \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| = |x|^{n-1} (|a_n| |x| - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|) \geq |a_n| |x| - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \geq C \end{aligned}$$

$$|x| \geq \frac{C + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|}{|a_n|} = r'$$

И для выполнения возьмём $r = \max(r', 1)$

□

Лемма 5.2. $q(x) \in \mathbb{C}[x] \quad q(0) = 1$

$$\forall \delta > 0 \exists x_0 : |x_0| < \delta \quad |q(x_0)| < 1$$

Доказательство. $q(x) = 1 + a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \dots + a_n x^n \quad a_k - \text{первый такой } a_i \neq 0, i \neq 0$

$E_k - \text{корень } k\text{-ой степени из } -\frac{1}{a_k}$

$$\triangleleft p(t) := q(t \cdot \varepsilon_k), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$p(t) = 1 + a_k \cdot \frac{-1}{a_k} + a_{k+1} \cdot \varepsilon_k^{k+1} \cdot t^{k+1} + \dots + a_n \varepsilon_k^n \cdot t^n$$

$$p(0) = 0$$

$$|p(t)| \leq |1 - t^k| + |a_{k+1} \varepsilon_k^{k+1} \cdot t^{k+1} + \dots + a_n \varepsilon_k^n t^n| = |1 - t^k| + t^k |a_{k+1} \varepsilon_k^{k+1} + \dots + a_n \varepsilon_k^n t^{n-k}|$$

$$[|t| < 1]$$

$$= 1 - t^k + |t^k| - // - | \leq |$$

$$\varphi(t) = |a_{k+1} \varepsilon_k^{k+1} + \dots + a_n \varepsilon_k^n t^{n-k}| - \text{непрерывна и равна 0 в 0} \quad \varphi(0) = 0$$

$$\exists (0, \alpha) \in \mathbb{R} : \forall t \in (0, \alpha) \varphi(t) < \frac{1}{2}$$

$$| \leq 1 - t^k + t^k \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} t^k < 1$$

$$\text{фиксируем } \delta > 0 \quad \forall t \in (0, \alpha) \quad q(t + \varepsilon_k) < 1$$

$$t \cdot |\varepsilon_k| < \delta$$

$$t = \min \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\delta}{|\varepsilon_k|} \right)$$

$$x_0 = t_0 \cdot k \quad q(x_0) < 1$$

□

Доказательство основной теоремы алгебры:

$$\square P(\mathbb{Z}) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 - \text{многочлен над целыми числами}$$

$$\text{Пусть } \forall z \in \mathbb{C} \quad P(\mathbb{Z}) \neq 0$$

$$\text{По лемме: } \exists r : \forall z \quad |z| \geq r \quad |P(z)| > |P(0)|$$

$$\text{раз для } |z| \geq r, \text{ то и для } |z| = r$$

$$\text{Рассмотрим круг } |z| \leq r$$

$$\text{По теореме Вейерштрасса } |P(z)| \text{ принимает на этом множестве минимальное и максимальное значение}$$

$$|P(a)| = \min_{|z| \leq r} |P(z)|$$

$$\text{Заметим, что } |a| < r. \text{ Если бы } |a| = r, \text{ то } |P(a)| > |P(0)| ?!$$

$$z = w + a$$

$$P(z) = P(w + a) = P(a) + C_k w^k + \dots + C_n w^n, \text{ где } C_k - \text{первый ненулевой коэффициент.}$$

$$\frac{|P(z)|}{|P(a)|} = |1 + C'_k w^k + \dots + C_n w^n|, \quad C'_k = \frac{C_k}{|P(a)|}$$

$$\text{По лемме: } \forall \delta > 0 \exists \delta > 0 \exists |w_b| < \delta : \frac{|P(w_\delta + a)|}{|P(a)|} < 1$$

$$\mathcal{O}_{\delta_a}(a) \subset \mathcal{O}_r(0)$$

$$\text{Тогда } (a + w_{\delta_a}) \in \mathcal{O}_{\delta_a}(a) \quad \in \mathcal{O}_r(0)$$

□

Следствие 5.1. $\forall P(z) \in \mathbb{C}[z]$

$$P(z) = a_n (z - z_n)(z - z_{n-1}) \dots (z - z_1), \text{ где } z_1, z_2 \dots z_n - \text{корни и } n = \deg P(z)$$

Следствие 5.2. $\forall P(x) \in \mathbb{R}[x]$

$$P(x) = a_n (x - x_1) \dots (x - x_n) \cdot (x^2 + p_1 x + q_1) \dots (x^2 + x^2 + p_n x + q_n)$$

$$x_1, \dots, x_n - \text{вещественные корни. } p_i^2 - 4q_i < 0 \text{ и } (n + 2m) = \deg P(x)$$

Доказательство. Рассмотрим этот многочлен, как многочлен над полем \mathbb{C}

$$P(x) = a_n(x - x_1) \dots (x - x_n) \cdot (x - z_n) \cdot \dots (x - z_n), \text{ где } x_1, x_2 \dots x_n \in \mathbb{R}$$

Замечание 5.1. Если $P(z) = 0$, то $P(\bar{z}) = 0$

Доказательство. Пусть $P(z) = 0$

$$0 = P(z) = (a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0) = (a_n \bar{z}^n + \dots + a_1 \bar{z} + a_0), \text{ т.е. } P(\bar{z}) = 0$$

т.к. $a_i \in \mathbb{R}$, то $\bar{a}_i = a_i$ □

Т.о. l – чётное и все комплексные корни разбиваются на пары

$$(x - z_i)(x - \bar{z}_i) = x^2 - (z_i + \bar{z}_i)x + z_i \bar{z}_i \quad p_j = (z_i + \bar{z}_i) \quad q_i = z_i \bar{z}_i$$

$$p_i^2 - 4q_i = z_1^2 + 2z_1 \bar{z}_i + \bar{z}_i^2 - 4z_i \bar{z}_i = z_i^2 - 2z_i \bar{z}_i + z_i^2 = (z_i - \bar{z}_i)^2 = (2Im z_i)^2 < 0$$
 □

5.1 Деление многочленов

$P(x)$ делим на $q(x)$

$$p(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x) \quad \deg r(x) < \deg q(x)$$

Определение 5.2. $p(x)$ делится на $q(x)$, если $r(x) = 0$ $p(x) : q(x)$

Лемма 5.3 (Безу). Если $p(x_0) = 0$, то $p(x) : (x - x_0)$

Доказательство. $p(x) = (x - x_0) \cdot g(x) + r(x)$

$$0 = p(x_0) = 0 + r(x_0) \quad r(x_0) = 0$$

$$\text{и } \deg r(x) < \deg(x - x_0) = 1$$

$$\text{def } r(x) = 0$$

$$r(x) = 0$$
 □

ДЗ:

1. $-ix^2 + 2ix - 1 = 0$
2. $x^2 - 5i = 9$
3. $3x^2 - 4ix + 2i = 0$
4. $2x^3 + 3x^2 - 4x - 9 = 0$
5. $x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0$
6. $x^5 + 7x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x + 2$ разделить на $x^2 + 2x - 1$
7. $x^7 - x^6 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 + 1$ на $x^3 - x^2 + x - 2$

5.2 Ещё одна модель комплексных чисел

Упражнение 5.2. $\mathbb{R}[x]$ – кольцо

$$(x^2 + 1) = \{(x^2 + 1)P(x) \mid P(x) \in \mathbb{R}[x]\} \text{ – идеал кольца } \mathbb{R}[x]$$

Определение 5.3. I – идеал кольца R , если:

1. I – подкольцо
2. $\forall r \in R, \forall i \in I \quad ri, ir \in I$

Введём на $R[x]$: отношение эквивалентности: $P_1(x) \sim P_2(x) \iff (P_1(x) - P_2(x)) : (x^2 + 1)$

Докажем, что это отношение эквивалентности. Это очевидно -.-

$$\mathbb{R}/\sim \quad P(x) \in \mathbb{R}$$

$$[P(x)] = [ax + b]$$

$$P(x) = (x^2 + 1)q(x) + ax + b \quad \deg P(x) = n, \deg(x^2 + 1) = 2, \deg q(x) = n - 2$$

Теорема 5.4. *Остаток при делении двух многочленов единственен*

Доказательство. $P(x)$ делится на $G(x)$

$$P(x) = G(x)Q_1(x) + R_1(x)$$

$$P(x) = G(x)Q_2(x) + R_2(x)$$

$$0 = G(x)(Q_1(x) - Q_2(x)) + R_1(x) - R_2(x)$$

Упражнение 5.3. *Доделать*

□

ДЗ:

1. $z^2 + (3 + 2i)z - 7 + 17i = 0$ – решить

2. $2z^6 + 5 = 0$ – решить

3. $z^{2n} - 1$ – разложить

4. $(a - 1)z^4 - 4z^2 + a + 2 = 0$ Найти a при которых уравнение имеет только мнимые (вещественная часть равна 0) корни

Теорема 5.5. K – поле $f(x), g(x) \in K[x]$ $g(x) \neq 0$ Тогда существуют единственные $q(x), r(x) \in K[x]$
 $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ $\deg r(x) < \deg g(x)$

Доказательство.

Единственность От противного. \square $f(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x)$ $f(x) = g(x) \cdot q_2(x) + r_2(x)$

$$\deg r_1(x), \deg r_2(x) < \deg g(x)$$

$$g(x)(q_1(x) - q_2(x)) = r_2(x) - r_1(x)$$

При $g_1(x) - g_2(x) \neq 0$ степень левой части больше степени правой части?!

$$\text{Таким образом } q_1(x) = q_2(x) \Rightarrow r_1(x) = r_2(x)$$

Существование $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$

Если $n < m$, то очевидно

$$\text{Если } m < n \quad r_1(x) = f(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x)$$

n_1 – степень $r_1(x)$, C'_n – степень коэффициента

$$m < n_1 \quad r_2(x) = r_1(x) - C'_{n_1} b_m^{-1} x^{n_1-m} g(x)$$

$$n > n_1 > n_2 > \dots > n_k \quad n_k < m$$

$$r_k(x) = f(x) - g(x)(a_n b_m^{-1} x^{n-m} + \dots)$$

$$f(x) = g(x)(\quad) + r_k(x)$$

□

$$p(x) \in \mathbb{R}[x] \quad [p(x)] = [a + bx]$$

$$[p(x)] + [g(x)] = [p(x) + g(x)]$$

$$[p(x)] \cdot [g(x)] = [p(x) \cdot g(x)]$$

$[0]$ – нейтральный относительно сложения

$[1]$ – нейтральный относительно умножения

Упражнение 5.4. $(\mathbb{R}/\sim, +, \cdot)$ – поле

Теорема 5.6. $\mathbb{R}/\sim \cong \mathbb{C}$

Доказательство. $h: \mathbb{R}/\sim \rightarrow \mathbb{C}$ $[p(x)] \mapsto p(i)$

h – сюръективно? фиксируем $a + bi = z \in \mathbb{C}$ тогда существует $[a + bx] \in \mathbb{R}/\sim$

h – инъективно? $h([p(x)]) = 0$ $h([p(x)]) = a + bi \Rightarrow a = 0, b = 0 \Rightarrow [p(x)] = [0 + 0x] = [0]$ т.е. $\text{Ker } h = 0$

h – гомоморфизм колец

$$h([p(x)] + [g(x)]) = h([a_1 + b_1x] + [a_2 + b_2x]) = h([a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)x]) = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i = h([a_1 + b_1x]) + h([a_2 + b_2x]) = h([p(x)]) + h([g(x)])$$

Упражнение 5.5. *Умножение*

□

5.2.1 Обобщённые комплексные числа

вместо уравнения $x^2 + 1 = 0$ возьмём $x^2 + px + q = 0$ $D = p^2 - 4q < 0$

Пусть I – это такой символ, что $I^2 + pI + q = 0$

$$K = \{a + bI | a, b \in \mathbb{R}\}$$

Утверждение 5.1. $a_1 + b_1I = a_2 + b_2I \iff \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$

Доказательство. \square $(a_1 - a_2) = (b_2 - b_1)I$

$$(a_1 - a_2)^2 = (b_2 - b_1)^2 I^2 = (b_2 - b_1)^2 (-pI - q)$$

(а) Если $b_2 - b_1 = 0 \Rightarrow a_1 - a_2 = 0$

(б) Если $b_2 - b_1 \neq 0$ $-pI - q = \frac{(a_1 - a_2)^2}{(b_2 - b_1)^2}$

$$pI = -\frac{(a_1 - a_2)^2}{(b_2 - b_1)^2} - q$$

Если $p = 0$ $(a_1 - a_2)^2 = -q(b_2 - b_1)^2$, то т.к. $D < 0 \Rightarrow q > 0$. получается в левой части положительное выражение, а в правой – отрицательное

Если $p \neq 0$ $I \in \mathbb{R}$

□

$$1. (a_1 + b_1I) + (a_2 + b_2I) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)I$$

$$2. (a_1 + b_1I) \cdot (a_2 + b_2I) = a_1a_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)I + b_1b_2I^2 = a_1a_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)I - pb_1b_2I - qb_1b_2 = (a_1a_2 - qb_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1 - pb_1b_2)I$$

Упражнение 5.6. $x^2 + px + q$ не имеет решений в \mathbb{R} [нужно показать, что нужно извлекать корень из отрицательного числа, а решение $x^2 + 1 = 0$ не решается в \mathbb{R}]

Определение 5.4. Операция сопряжения

$$K \ni z = a + bi \text{ тогда } \bar{z} = (a - pb) - bI$$

Упражнение 5.7. $0 \leq z\bar{z} \in \mathbb{R}$

Упражнение 5.8. $\forall z \in K : z \neq 0 \exists! z^{-1}$

Упражнение 5.9. $(K, +, \cdot)$ – поле

Определение 5.5. $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

Упражнение 5.10. $p(x), g(x) \in \mathbb{R}$ $p(x) \sim g(x) \iff (p(x) - g(x)) \cdot (x^2 + px + q)$

Тогда $\mathbb{R}/\sim \cong K$

Теорема 5.7. $K = \mathbb{C}$

Доказательство. $x^2 + px + q = 0$ решим уравнение

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm i\sqrt{-p^2 + 4q}}{2}$$

$$I = \frac{-p + i\sqrt{-p^2 + 4q}}{2}$$

1. $K \subseteq \mathbb{C}$

$$\text{фиксируем } a + bI \in K \quad a + bI = a + b \frac{-p + i\sqrt{|D|}}{2} = (a - \frac{p}{2}b) + \frac{b\sqrt{|D|}}{2} \cdot i \in \mathbb{C}$$

$$2I + p = i\sqrt{|D|}$$

$$i = \frac{2I + p}{\sqrt{|D|}}$$

2. $\mathbb{C} \subseteq K$

фиксируем $(a + bi) \in \mathbb{C}$

$$a + b - \frac{2I + p}{\sqrt{|D|}} = a + \frac{bp}{\sqrt{|D|}} + \frac{2b}{\sqrt{|D|}} \cdot I$$

□

ДЗ(письменное):

1. \square I является решением $x^2 + x + 1$

Найти решения в обобщённых комплексных чисел:

(a) $x^2 + 1 = 0$

(b) $x^2 - 2x - 2 = 0$

5.3 Двойные и дуальные числа

$$K = \{a + bE | a, b \in \mathbb{R}, E - \text{решение } E^2 + pE + q = 0\}$$

1. $a + bE = c + dE \xLeftrightarrow{def} \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$

2. $(a + bE) + (c + dE) \xLeftrightarrow{def} (a + c) + (b + d)E$

3.

Упражнение 5.11. $(K, +)$ – абелева группа

4. $(a + bE) \cdot (c + dE) = (ac - qbd) + (ad + bc - pbd)E$

5.

Упражнение 5.12. (K, \cdot) – коммутативное кольцо с единицей

$$E^2 + pE + q = 0 \quad D = p^2 - 4q$$

1. $D < 0$ K – обобщённые комплексные числа

2. $D = 0$ K – дуальные числа

3. $D > 0$ K – двойные числа

$$(E + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2 - 4q}{4} = 0$$

$$\varepsilon = (E + \frac{p}{2}) \quad \varepsilon^2 = 0$$

Тогда в K есть нетривиальные делители нуля

Утверждение 5.2. У ε не существует обратного

Доказательство. Пусть существует, тогда $0 = \varepsilon^{-1} \cdot 0 = \varepsilon^{-1} \cdot \varepsilon^2 = \varepsilon^{-1} \varepsilon \varepsilon = 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon$

□

$$K_{II} = \{a + b\varepsilon | a, b \in \mathbb{R}\}$$

Упражнение 5.13. $K_{II} \cong \mathbb{R}/_{\text{mod } x^2}$ ($\text{mod } x^2$ – остаток по модулю x^2)

Упражнение 5.14. Когда $(a + b\varepsilon) \cdot (c + d\varepsilon) \in \mathbb{R}$

Определение 5.6. $z = a + b\varepsilon \in K_{II}$ $\bar{z} = a - b\varepsilon$

Упражнение 5.15. $0 \leq z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$

Определение 5.7. $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

Упражнение 5.16. Когда существует z^{-1}

5.4 Немного геометрии

Пусть у нас есть направленная ось.

$$|z| \neq 0, z \in K_2 \quad z = r(1 + \varphi\varepsilon), \varphi - \text{аргумент}, r - \text{модуль}$$

Тогда мы можем сопоставить числу прямую идущую под углом φ к оси так, что расстояние от точки 0 до этой прямой $= r$

5.5 Гиперкомплексные числа

E_1, E_2, \dots, E_n – решения уравнений $x^2 + p_i x + q_i = 0$

$$z = b_0 + b_1 E_1 + b_2 E_2 + \dots + b_n E_n \quad b_i \in \mathbb{R}$$

Если $n = 1, p_1 = 0, q_1 = 0$ – комплексные числа

$$z_1 + z_2 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)E_1 + \dots + (a_n + b_n)E_n$$

Для произведения нужно задать всевозможные произведения

$$E_i \cdot E_j = p_0^{i,j} + p_1^{i,j} E_1 + \dots + p_n^{i,j} E_n \quad p_k^{i,j} - \text{нужно задать } (n+1)n^2 \text{ чисел}$$

Замечание 5.2. Т.О. произведение может оказаться не коммутативным и не ассоциативным.

Чтобы произведение было ассоциативным, нужно $(E_i \cdot E_j) \cdot E_k = E_i \cdot (E_j \cdot E_k)$

Чтобы произведение было коммутативным, нужно $E_i \cdot E_j = E_j \cdot E_i$

5.5.1 Кватернионы

$$E_1 = i, E_2 = j, E_3 = k$$

| | i | j | k |
|-----|------|------|------|
| i | -1 | k | $-j$ |
| j | $-k$ | -1 | $-i$ |
| k | j | i | -1 |

$$p_1^{1,2} = 0$$

$$p_2^{1,2} = 0$$

$$p_3^{1,2} = 1$$

$$p_0^{1,2} = 0$$

Глава 6

Возвращение назад и вглубь Многочлены

Определение 6.1. K – произвольное ассоциативное кольцо с единицей. Тогда $K[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in K \quad \forall j > n \quad a_j = 0 \right\}$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \quad g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i$$

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \quad c_i = \sum_{j=0}^i a_j \cdot b_{i-j}$$

Упражнение 6.1. $K[x]$ – ассоциативное кольцо с единицей

Упражнение 6.2. Если K – коммутативное, то $K[x]$ – комм.

Определение 6.2. $\deg f(x) = \max\{i \mid a_i \neq 0\}$
 $\deg 0 = -\infty$

Теорема 6.1. \square K – область целостности. $\deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x))$

Доказательство. $\deg f(x) = n \quad \deg g(x) = m$

$$f(x) = a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x^1 + \dots + b_m x^m$$

$$f(x) \cdot g(x) = a_0 b_0 + \dots + a_n b_m x^{n+m} \quad a_n \cdot b_m \neq 0 \text{ (область целостности)}$$

Если $i > n + m$, то мы не можем получить его в виде суммы $i_1 \leq n$ и $i_2 \leq m$ \square

Замечание 6.1. 1. $\deg f(x)$ или $\deg g(x) = -\infty$, всё ещё верно

2. K – произвольное ассоциативное кольцо с единицей, то $\deg(f(x) \cdot g(x)) \leq \deg f(x) + \deg g(x)$

Следствие 6.1. K – область целостности, тогда множество обратимых элементов $K[x]^* = K^*$

Доказательство. Пусть $f(x)$ – обратимо $f^{-1}(x)$ – обратный элемент

$$\deg f(x) = n \quad \deg f^{-1}(x) = m$$

$$0 = \deg 1 = n + m \Rightarrow n = m = 0 \Rightarrow f(x) = a_0 \in K, a_0 \text{ – обратимо} \quad \square$$

Определение 6.3. K – коммутативно и K – область целостности

$f, g \in K[x]$ Говорят, что g делит f , если $\exists q \in K[x] : f = q \cdot g \quad f : g$

Упражнение 6.3. 1. $f : f$ и $f : 1$

2. Если $f : h$ и $g : h \Rightarrow (f + g) : h$

3. $f : h \Rightarrow (g \cdot f) : h$

$$4. \quad g \dot{\vdash} h \quad f \dot{\vdash} g \Rightarrow f \dot{\vdash} h$$

Определение 6.4. $f, g \in K[x]$ – ассоциированы, если $f \dot{\vdash} g \& g \dot{\vdash} f$

Утверждение 6.1. f и g – ассоциированы $\iff f = c \cdot g, c \in K^*$

Доказательство.

$$\Leftarrow \text{Докажем, что } f \dot{\vdash} g \quad f = c \cdot g, c \in K[x]$$

$$\text{Докажем, что } g \dot{\vdash} f. \text{ Т.к. } c \in K^*, \text{ то } \exists c^{-1} \quad f = c \cdot g \quad c^{-1} f = h \quad g = c^{-1} f, c^{-1} \in K[x]$$

$$\Rightarrow f = q_1 g \text{ и } g = q_2 f \quad q_1, q_2 \in K[x]$$

$$f = q_1 q_2 \cdot f$$

$$f(1 - q_1 q_2) = 0$$

$$q - q_1 q_2 = 0 \Rightarrow q_1 q_2 = 1 \Rightarrow q_1, q_2 \in K[x]^* \Rightarrow q_1, q_2 \in K^* \Rightarrow f = q_1 g, a_1 \in K^*$$

□

Теорема 6.2. $f, g \in K[x]$, старший коэффициент g – обратим. $\exists! h, r \in K[x] : f = h \cdot g + r$ и $\deg r < \deg g$

Доказательство. ДЗ

□

Теорема 6.3 (Лемма Безу). Уже было сформулировано и доказано. Так что дз – повторить

Теорема 6.4. $f \in K[x] \quad f \neq 0$ Тогда $f = (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_k)h$, $c_1, c_2 \dots c_m$ – корни f h – не имеет решений

Доказательство. ДЗ

□

6.1 НОД и НОК

K – поле

Определение 6.5. $f, g \in K[x]$

$d \in K[x]$ – называется наибольшим общим делителем, если $f \dot{\vdash} d, g \dot{\vdash} d \quad \forall r \in K[x] : f \dot{\vdash} r, g \dot{\vdash} r \quad d \dot{\vdash} r$
Будем считать, что старший коэффициент равен 1

Доказательство.

- Существование. Алгоритм Евклида

$$f, g \in K[x], \text{ тогда } \exists! h_1 r_1 : f = h_1 \cdot g + r_1, \deg r_1 < \deg g \text{ и } r_1 \neq 0$$

$$g = h_2 r_1 + r_2$$

$$r_1 = h_3 r_2 + r_3$$

...

$$r_{n-1} = h_{n+1} \cdot r_n + r_{n+1}, r_{n+1} = 0$$

Каждый раз степень уменьшается

Тогда r_n – НОД. $f \dot{\vdash} r_n$ и $g \dot{\vdash} r_n$

$$\text{Пусть } d \neq r_n \text{ и } f \dot{\vdash} d \text{ и } g \dot{\vdash} d \quad f = h_1 \cdot g + r_1 \Rightarrow r_1 \dot{\vdash} d$$

$$g = h_2 r_1 + r_2 \Rightarrow r_2 \dot{\vdash} d \Rightarrow r_n \dot{\vdash} d$$

- Единственность. Пусть $d_1, d_2 = \text{НОД}(f, g)$ и их старшие коэффициенты = 1

$$d_1 \neq d_2 \text{ Т.к. } d_1 - \text{НОД, а } d_2 - \text{делитель} \Rightarrow d_1 \dot{\vdash} d_2 \text{ аналогично } d_2 \dot{\vdash} d_1 \Rightarrow d_1 = c \cdot d_2, c \in K^* \Rightarrow c = 1 \Rightarrow d_1 = d_2$$

□

Упражнение 6.4. Придумать какой-нибудь порядок на $\mathbb{R}[x]$

Теорема 6.5 (Линейное представление многочлена). $\forall f, g \in L[x] \quad \exists u_0, v_0 \in K[x] : HOD(f, g) = u_0 f + v_0 g$

Доказательство. $I = \{uf + vg | u, v \in K[x]\}$

Степень ненулевого многочлена – 0 или натуральное

$d = u_0 f + v_0 g$ – минимальный по степени ненулевой многочлен

d – претендент на HOD

$$(!) f : d \quad f = h \cdot d + r = h(u_0 f + v_0 g) + r$$

$$r = f - h(u_0 f + v_0 g) = f - hu_0 f - hv_0 g = (1 - hu_0)f + (-hv_0)g \in I \Rightarrow r = 0$$

$$\deg r < \deg d$$

$$\text{Пусть } d' \in K[x] : f : d' \& g : d' \quad d = (u_0 f + v_0 g) : d'$$

□

Определение 6.6. $P \in K[x]$ – называют неприводимым, если $P \neq 0, P \notin K[x]^*$ и из того, что $P = f \cdot g, f, g \in K[x]$ следует, что P ассоциирован с f или P ассоциирован с g

Лемма 6.1. $f, g, P \in K[x], P$ – неприводимый, тогда если $fg : P$, то $f : p \vee g : p$

Доказательство. ДЗ

□

Определение 6.7. $HOK(f, g)$ – наименьшее общее кратное, т.е. $HOK(f, g) = S \in K[x] : S : f, S : g \& \forall S' : S' : f, S' : g \Rightarrow S' : S$

Теорема 6.6. $HOK(f, g) = \frac{fg}{HOD(f, g)}$

Доказательство. ДЗ

□

Упражнения:

$$1. HOD(pf, pg) = p HOD(f, g)$$

$$2. r - \text{общий делитель } f \text{ и } g, \text{ тогда } HOD\left(\frac{f}{r}, \frac{g}{r}\right) = \frac{HOD(f, g)}{r}$$

3. Найти НОД и НОК f и g :

$$(a) f(x) = x^5 - 3x + 1 \quad g(x) = x - 4$$

$$(b) f(x) = x^5 + 5x^4 - 13x^2 + 21x^2 - 34x + 8 \quad g(x) = x^2 + 7x - 2$$