Конспект по геометрии

Коченюк Анатолий

15 апреля 2019 г.

Глава 1

1 четверть

Задача 1.1. $\alpha \cap \beta = \emptyset$
a пересекает $\alpha \Rightarrow$ *a пересекает* β

Доказательство. фиксируем прямую α пересекающую α
Через a и плоскость B можно провести единственную плоскость γ
$\gamma \cap \alpha = x$ – прямая
$\gamma \cap \beta = y$ – прямая (есть общая точка B)
$x \cap y = \emptyset$, т.к. α и β не пересекаются
$x, y, a \subseteq \gamma \quad x||y$
$a \cap x = A \Rightarrow$ а пересекается с $y \Rightarrow x$ пересекается с β □

1.1 Взаимное расположение прямых в пространстве

1. Прямые пересекаются (в какой-то плоскости)
2. Прямые параллельны (в одной плоскости, но не пересекаются)
3. Прямые скрещиваются (в разных плоскостях)

Признак 1.1. *Если две прямые содержат четыре точки, которые не лежат в одной плоскости, то эти прямые скрещивающиеся*

Признак 1.2. *Прямая, пересекающая плоскость, скрещивается с каждой прямой, лежащей в этой плоскости и не проходящей через точку пересечения.*

Д/З – доказать признак 1.2

Теорема 1.1. *Через каждую точку пространства, не лежащую на данной прямой проходит прямая, параллельная данной и при том только одна.*

Доказательство. фиксируем прямую a и точку $A \notin a \quad \exists! \alpha : A \in \alpha, a \in \alpha$ Тогда в $\alpha \exists! b : a||b$

- Единственность

  $\sqsupset b_1.b_2 \ni A$ и $b_1||a \Rightarrow b_1 \in \alpha \quad b_2||a \Rightarrow b_2 \in \alpha$

  $b_1 \cap b_2 = A \quad b_1, b_2||\alpha$ в плоскости $\alpha \Rightarrow b_1 = b_2$

□

Теорема 1.2 (свойство транзитивности)**.** $a||b$ & $b||c \Rightarrow a||c$

Доказательство.

Лемма 1.1. *Если плоскость пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает вторую*

Доказательство. **Д/З** □

$a||b \Rightarrow$ они лежат они лежат в одной плоскости
$b||c \Rightarrow$ они лежат в одной плоскости a, c – 3 варианта:

- они пересекутся в точке $X \Rightarrow$ Через точку X провели две прямые параллельные b??!
- они параллельны
- они скрещиваются

Докажем, что они лежат в одной плоскости.
$\sqsupset$ a, c не лежат в одной плоскости
фиксируем $A \in a$ и c лежат в плоскости γ
a не пересекает γ и $a||b \Rightarrow b$ пересекает γ и $b||c \Rightarrow c$ пересекает γ $\square$

1.2 Параллельное проектирование

Определение 1.1 (проекция точки). *плоскость α, прямая a пересекающая α*
фиксируем точку $x \Rightarrow \exists! a'||a, \quad a' \ni X$
a' пересекается с α (по лемме)
*$x' = a' \cap a$ – будет называться **проекцией** точки X на плоскость α при проектировании параллельно прямой a*
α – плоскость проекции
a – направление проекции

Определение 1.2. *Проекция фигуры F – множество проекций всех точек F*

Теорема 1.3 (о параллельном проектировании). *α, a. Прямые не параллельны a. Отрезки лежат на прямых не параллельных a*

1. *Проекция отрезка – отрезок*

   Проекция прямой – прямая
2. *Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают*
3. *Отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых равно отношению самих отрезков.*

Доказательство. 1. Построим проекцию прямой b

$a_1||a$. a_1 пересекает b

β – плоскость, проходящая через a_1 и b

β пересекается с α (т.к. a_1 пересекается с α)

Докажем, что $b' = \beta \cap \alpha$:

$X \in \beta \Rightarrow$ прямая, параллельная a_1 и проходящая через X пересекает b' в точке X'

$Y' \in b'$ по аналогии $Y \in b$

$AB \in b$, b' – проекция $b \Rightarrow (A \to A' \in b')$ и $(B \to B' \in b')$

Тогда $\forall x \in AB \quad x' \in A'B'$ (прямые AA', BB', CC' лежат в одной плоскости)

2. $b||c \quad \sqsupset l||a$ пересекает b и $c \Rightarrow \exists! \beta$, которая содержит l, b и $\Rightarrow b' = c' = \beta \cap \alpha$

   $\sqsupset \nexists l$ пересекающая b и c одновременно $\Rightarrow$

   $l_1||a$ пересекается с b по l_1 и b построим β

   $l_2||a$ пересекается с c по l_2 и c построим γ

   $b' = \alpha \cap \beta \quad c' = \alpha \cap \gamma$ и $\beta \cap \gamma = \emptyset \Rightarrow b' \cap c' = \emptyset, b', c' \in \alpha \Rightarrow b'||c'$

3. $b \not\parallel a \quad A,B,C,D \in b \Rightarrow b$ и b' лежат в одной плоскости β

   AA', BB', CC', DD' параллельны в плоскости β (т.к. параллельны прямой a)$\Rightarrow \dfrac{|AB|}{|CD|} = \dfrac{|A'B'|}{C'D'}$ (по обобщению теоремы Фалеса из планиметрии)

   фиксируем $b||c \quad Ab \subseteq b \quad CD \subseteq c$

   γ – плоскость, в которой $b||c$

   Проведём через $A \in \gamma$ прямую. Она пересекает c в точке A_1

   Через B проведём прямую, параллельную $AA1$

   Тогда ABB_1A_1 – параллелограмм

   Тогда $|AB| = |A_1B_1| \quad A'B'A_1'B_1'$ – параллелограмм (т.к $A'B'||A_1'B_1'$)

   $A'A_1'||B'B_1'$(по предыдущим пунктам) $\Rightarrow |A'B'| = |A_1'B_1'|$

   CD и A_1B_1 лежат на $c \Rightarrow \dfrac{|A_1B_1|}{|CD|} = \dfrac{|A_1'B_1'|}{|C'D'|} \Rightarrow \dfrac{|AB|}{|CD|} = \dfrac{|A'B'|}{|C'D'|}$

□

Д/З(на 18.09.2018) на двойном листочке, который подписан и на котором табличка (на полях) с номером задания (по возрастанию). должен быть номер и, если требуется ответ, красиво аккуратно оформленный:

Письменно: 2.15, 2.16, 3.1, 3.2, 3.3, 3.8

Устно: 3.6, 3.16, 3.19 + Упр

ДЗ(на 21.09.2018)

AB и CD скрещиваются $\Rightarrow AC$ и BD скрещиваются

$4.5, I.2, I.4, I.10$ стр 50

всё письменно

21.09.2018

Лемма 1.2. $a||b, \alpha \cap a = \{A\} \Rightarrow \alpha \cap \beta = \{B\}$

Доказательство. $a||b \Rightarrow \exists \beta : a, b \subseteq \beta$

$a \cap b \neq \emptyset$?

$\alpha \cap a \Rightarrow \alpha \cap \beta = c \Rightarrow c \subseteq \alpha, \beta \& a \neq c \& a \cap c = \{Y\} \Rightarrow c \cap b = \{Y\} \Rightarrow \alpha \cap b = \{Y\}$ □

Глава 2

Перпендикулярность и параллельность

2.1 Перпендикулярность прямой и плоскости

Определение 2.1. ***Прямая*** *называется* ***перпендикулярной*** *плоскости, если она пересекает плоскость и она перпендикулярна всем прямым в этой плоскости, проходящим через точку пересечения.*

Определение 2.2. ***Отрезок и луч*** *называются* ***перпендикулярными*** *к плоскости, если они пересекают её и лежат на прямой, перпендикулярной этой плоскости.*

Определение 2.3. ***Перпендикуляр*** *– отрезок, имеющий общую точку с плоскостью (один конец) и перпендикулярный этой плоскости.*

Определение 2.4. ***Наклонная*** *– отрезок, имеющий общую точку с плоскостью (конец отрезка) и не перпендикулярный этой плоскости.*

Задача 2.1. *α – плоскость, $B \notin \alpha$ Тогда BA – перпендикуляр который короче любой наклонной.*

Утверждение 2.1. *Через любую точку проходит не более полной перпендикулярной прямой к данной плоскости.*

Доказательство. $\sqsupset$ через точку O проходят $b, c : b \perp \alpha, c \perp \alpha$
тогда $\exists! \beta \supset b, c$
$a = \beta \cap \alpha$ Тогда в плоскости β через точку O построенные две прямые, перпендикулярные a?!! □

Признак 2.1 (перпендикулярности прямой и плоскости)**.** *Прямая, перпендикулярная двум пересекающимся прямым в данной плоскости, перпендикулярна плоскости.*

Доказательство. фиксируем две прямые $b, c \in \alpha \quad b \cap c = O \quad a \perp b \quad a \perp c$
фиксируем $d \subseteq \alpha \quad d \ni O$
Возьмём $A \in a, B \in b : \quad BC \cap d = D \quad B_1, C_1, D_1$ – симметричны относительно точки O точкам B, C, D
Тогда $OD = OD_1 \quad BC = B_1C_1 \quad BD = B_1D_1$
Возьмём на a точку $A \neq O$
$a \perp b \quad BO = OB_1 \Rightarrow AO$ – серединный перпендикуляр
$a \perp c, CO = OC_1 \Rightarrow AO$ – серединный перпендикуляр к CC_1
$\Rightarrow AC = AC_1$ и $AB = AB_1$ и $BC = B_1C_1 \Rightarrow \triangle ABC = \triangle AB_1C_1 \Rightarrow \triangle ADB = \triangle AD_1B_1 \Rightarrow AD = AD_1 \quad OD = OD_1 \Rightarrow A$ лежит на серединном перпендикуляре к $DD_1 \Rightarrow a \perp d$ □

Теорема 2.1. *Через любую точку можно провести плоскость, перпендикулярную данной прямой. и при том только одну.*

Доказательство. 1. $A \in a \quad b \in \beta : b \perp a \quad b \cap a = A \quad c \in \gamma : c \perp a \quad c \cap a = A$

$\Rightarrow \exists! \alpha \supseteq b, c$ по теореме $a \perp \alpha$

Единственность: $\sqsupset \alpha, \beta \ni A \quad a \perp \alpha \quad a \perp \beta$

$P \subseteq \beta \quad a \perp p \quad p \nsubseteq$

Через a и p построим $\gamma \quad \gamma$ пересекается с $\alpha \quad q := \alpha \cap \gamma \quad q \subseteq \gamma \quad p \subseteq \gamma \quad a \subseteq \gamma$

Построили через точку A две прямые, перпендикулярные данной a)

2.

Задача 2.2. $A \notin a$

□

Теорема 2.2 (о параллельности перпендикуляра)**.** *Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости параллельны.*

Доказательство. $a \perp \alpha \quad b \perp \alpha \quad a \cap \alpha = A \quad b \cap \alpha = B$
$\exists! \beta \ni B, \beta \ni \quad (!) b \subset B$
$M, N \in \alpha : MN \perp Ab \quad AM = AN$ Тогда $B, = BN$
фиксируем $C \in b, c \neq B$
Рассмотрим прямоугольные треугольники $\triangle CBN = \triangle CBM \Rightarrow CM = CN$
$\triangle CMN$ – равнобедренный, высота совпадает с медианой CA – высота, т.е. $CA \perp MN$
$a \perp MN, AC \perp MN, AB \perp MN$

Задача 2.3. *a –прямая, $A \in a \Rightarrow$ все прямые, проходящие через точку A, лежат в одной плоскости*

$\Rightarrow a, AC, AB$ лежат в одной плоскости. это может быть только $\beta \Rightarrow C \in \beta \Rightarrow b \subseteq \beta$
Тогда в плоскости $\beta \quad a \perp AB, b \perp Ab \Rightarrow a||b$ □

ДЗ:
$7.1, 7.2, 7.3, 7.15$ – письменно
24.09.2018

Теорема 2.3. *Если все точки пересечения различны, тогла прямые лежат в одной плоскости*

Доказательство. a и b пересекаются в точке O? лежат в γ
фиксируем $d: \quad d \cap a = A \quad d \cap b = B$
$d \cap \gamma \ni A, B \Rightarrow d \in \gamma$ □

Определение 2.5. *Параллелепипед – многогранник у которого все стороны параллелограммы.*

Теорема 2.4.

Доказательство. 1. $x||a \& y||a \quad \alpha = (ABC) \Rightarrow a \perp \alpha$

2. ф $X \in \alpha \quad X = (XA) \Rightarrow a \perp x$

□

2.2 О построении

В плоскости

– доказывать возможность построения

– построение циркулем и линейкой

В пространстве

– Можем доказывать возможность построения

– Утверждения о существовании и единственности

– Построение на поверхности тел

– Построение на изображении (чертеже)

Изображение – проекция на плоскость. Оно должно быть:

– правильным

– наглядным

Определение 2.6. *Куб – многогранник, у которого шесть граней и все они квадраты*

Определение 2.7. *Параллелепипед – многогранник, у которого шесть граней и все они параллелограммы.*

Определение 2.8. *n-угольная пирамида – многоугольник, у которого одна грань (называемая основанием) – n-угольник, а n других – треугольники с общей вершиной (называемой вершиной пирамиды)*
Если $n = 3 \Rightarrow$ пирамида – тетраэдр
Пирамида называется правильной, если её основание – правильная фигура

Определение 2.9. *n - угольная призма – многогранник, две грани которого (называемые основаниями) – равные n-угольники, а остальные n граней – параллелограммы*

Определение 2.10. *След секущей плоскости на плоскости грани – прямая, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью грани*

ДЗ:1, 2, 3, 4, 5
ДЗ (с 08.10.2018): 7.4, 7.5 – устно из учебника. 7.7 – письменно на листочке (в табличке указать все пункты)

Теорема 2.5. *Через каждую точку проходит прямая, перпендикулярная данной плоскости*

Доказательство.

1. $a \in \alpha$ Тогда построим прямую $a : A \in a \subset \alpha$

   Построим плоскость $\beta \perp a$ в точке A. Тогда через $b = \alpha \cap \beta \ni A$

   Построим прямую $c \perp b$ в точке a.

   $c \perp b$ и $c \perp a$ (т.к. $c \subset \beta$ и $\beta \perp a$) Следует, что $c \perp \alpha$

2. $a \notin \alpha$ Возьмём точку $B \in \alpha$ Тогда существует $b \ni B : b \perp \alpha$

   Если b содержит точку A, то всё ок

   Если $A \notin b$, то проведём через точку A прямую $a : a||b$

   Т.к. $b \perp \alpha$ и $b||a \Rightarrow a \perp \alpha$

□

Через любую точку пространства модно провести 3 перпендикулярных прямых.

Как? Возьмём точку. Построим какую-то прямую, проходящую через неё.В этой плоскости проведём прямую, перпендикулярную первой. По только что доказанной теореме проведём через данную точку перпендикуляр через эту плоскость в этой точке. Больше перпендикулярных прямых не провести.

Когда говорят проекция, обычно подразумевают параллельное проектирование относительно перпендикулярной прямой.

Задача 2.4. *В правильной n-угольной пирамиде вершина проектируется в центр основания. Что из этого следует.*

Доказательство. Спроектируем вершину на основание. Фиксируем некоторые две точки A, B принадлежащие основанию. P – вершина. $PO \perp OA \quad PO \perp OB \Rightarrow \triangle POA, \triangle POB$ – прямоугольные. $PA = PB$, т.к. это правильная пирамида. PO – общая $\Rightarrow \triangle POA = \triangle POB \Rightarrow OA = OB$ Это выполняется для любых двух вершин $\Rightarrow O$ – центр основания □

Определение 2.11. *Расстояние между двумя точками определено по аксиоме VI как расстояние в какой-то плоскости*

Определение 2.12. *Расстояние от точки до прямой – расстояние от точки до её проекции*

Определение 2.13. *Расстояние от точки до плоскости – расстояние от точки до её проекции на данную плоскостью*

Задача 2.5. $A \in \alpha \quad AB \perp AC, AD \subset \alpha$
$BA = BA_1$
фиксируем $AK \neq AC, AD \& L \in CD$
AD *– общая* $\& AD = Ab \& AB \perp AD \Rightarrow BD = DB_1 \&$
$<...> \triangle BCD = \triangle B_1CD \Rightarrow <...>$

ДЗ: 7.12 (а, б, в), 7.23 – Письменно
7.25, 7.17 – Устно
Готовится к к/р по всему пройденному

Теорема 2.6 (Обобщённая теорема Фалеса)**.** *Если $AA'||BB'$ пересекают стороны угла, то* $\dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{AB}{A'B'}$

2.3 Теорема о трёх перпендикулярах

Определение 2.14. *Ортогональное проектирование – это параллельное проектирование относительно прямой, перпендикулярной плоскости проектирования.*

Определение 2.15. *Две скрещивающиеся прямые* a, b *будем называть перпендикулярными, если* $\exists c: \quad c||b \;\&\; c \perp b$

Теорема 2.7 (Корректность)**.** *:* $c_1, c_2 || b \quad c_1 \cap a \neq \emptyset \quad c_2 \cap a \neq \emptyset$ *Если* $c_1 \perp a$ *то и* $c_2 \perp a$

Доказательство. $c_1 || c_2 \quad \exists \alpha \supseteq c_1, c_2$ т.к. $c_1 \cap a \neq \emptyset \quad c_2 \cap a \neq \emptyset$ то $a \subseteq \alpha$

В плоскости $\alpha \quad a \perp c_1$ и $c_1 || c_2 \Rightarrow a \perp c_2$ □

Теорема 2.8 (О трёх перпендикулярах)**.** *Если прямая, лежащая на плоскости, перпендикулярна ортогональной проекции наклонной на эту плоскость, то данная прямая перпендикулярна и самой плоскости.*

Доказательство. AB – наклонная. $AC \perp \alpha$– ортогональная проекции $\quad m \perp BC$ – какая-то прямая. Давайте построим прямую $m' || m$ проходящую через точку C

т.к. $AC \perp \alpha \Rightarrow AC \perp m'$

$m' \perp AC$ и $m'BC \Rightarrow m' \perp (ABC)$

$m'' || m$ проходит через точку B

Тогда $m'' \perp (ABC) \Rightarrow m'' \perp AB \Rightarrow m \perp AB$ □

2.4 Перпендикулярность плоскостей

Определение 2.16. *Две плоскости называются взаимно перпендикулярными* $\alpha \perp \beta$*, если в каждой из них через любую точку проходит прямая , перпендикулярная второй плоскости*

Замечание 2.1. *Если* $\alpha \perp \beta$*, то* $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$

Замечание 2.2. $\alpha \perp \beta$*, если каждая из них покрыта перпендикулярами к другой.*

Свойство 2.1. $\alpha \perp \beta \quad a \perp b$ *и* $\alpha \cap a$*, то* $a \subset \alpha$

Доказательство. $A \in \alpha \cap a$ возьмём прямую $b \perp \beta$, проходящую через A. $A \in a \perp \beta$ и $A \in b \perp \beta$ т.е. мы нашли две перпендикулярные прямые, но она единственна, а значит $a = b \subset \alpha$ □

Свойство 2.2. $\alpha \perp \beta \quad a \subset \alpha \quad a \perp \alpha \cap \beta$*, тогда* $a \perp \beta$

Доказательство. $A = a \cap b \quad c$ – прямая в β проходящая через точку A, перпендикулярно α

$c \perp \alpha \Rightarrow c \perp a \quad a \perp b \Rightarrow a \perp \beta$ □

Теорема 2.9 (Первый признак перпендикулярности плоскостей)**.** *Если в плоскости есть хотя бы одна прямая перпендикулярная другой плоскости, то эти плоскости взаимно перпендикулярны*

Доказательство. $a \subset \alpha \quad a \perp \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = c$

ф. $X \in \alpha$ Тогда опустим перпендикуляр из этой точки к прямой $c \quad b \perp C$ и $b \ni X$

т.к. $C \in \beta \Rightarrow a \perp c$

$a \perp c$ и $b \perp c$ и $a, c \subset \alpha \Rightarrow a || b$ и $a \perp b \Rightarrow b \perp \beta$

ф. $Y \in \beta$ построим $b \perp c$ и $b \ni Y$

$b \perp c \Rightarrow A = b \cap c$

Через точку A построим прямую a' в плоскости $\alpha: \quad a' || a$

т.к. $a' || a$ и $a \perp b \Rightarrow a' \perp \beta$

$a' \perp \beta \Rightarrow a' \perp b$

$a' \perp b$ и $c \perp b$ и $a', c \subset \alpha \Rightarrow b \perp \alpha$ □

Теорема 2.10 (Второй признак перпендикулярности двух плоскостей)**.** *Две пересекающиеся плоскости перпендикулярны, если они содержат две взаимно перпендикулярные прямые, перпендикулярные общей прямой*

Доказательство. $\alpha \cap \beta \subset c$
$a \in \alpha, b \in \beta, a \perp c \quad b \perp c \quad a \perp b \qquad (!)\alpha \perp \beta$
$A = a \cap c$ Тогда проведём через A прямую $b'||b$
Тогда $b' \perp a$ и $b' \perp c$
$a \perp b$ и $a \perp c$ и $c, b \in \beta \Rightarrow a \perp b$
$\Rightarrow$ по первому признаку $\alpha \perp \beta$ □

Теорема 2.11. *Если две плоскости, перпендикулярны третьей плоскости, пересекаются, то прямая их пересечения перпендикулярна третьей плоскости*

Доказательство. Упр □

$\alpha \perp \beta$ и $\alpha \perp \gamma$ и $\gamma \cap \beta$ Что можно сказать о прямых их пересечений. – упражнение

Задача 2.6. *Даны два равносторонних треугольника на перпендикулярных плоскостях*
$(ABC) \perp (ADC)$ *равносторонние.* $|AC| = 1$ $|BD| =?$

Доказательство. DH – высота ADC Тогда DH – медиана, Тогда BH – высота ABC
$DH \perp AC$ и $(ABC) \perp (ADC) \Rightarrow$ по свойству 2 $DH \perp (ABC) \Rightarrow \triangle BHD$ – прямоугольный
$Dh = BH = \sqrt{0,75}$ $BD = \sqrt{1,5}$ □

Дз с 9 ноября: задачи: 10.3, 10.5, 10.12, 10.14(а, б) устные упражнения: 2.4, 2.4
ДЗ с 12 ноября: 10.13, 10.8, 10.14(г, д), 10.16(а, б, в, г)

2.5 Параллельные плоскости

Определение 2.17. *ДВе плоскости называются параллельным ($\alpha||\beta$), если у них нет общих точек*

Теорема 2.12. *Две плоскости, перпендикулярные одной прямой параллельны*

Доказательство. $a \perp \alpha, a \perp \beta$
$\sqsupset \alpha \cap \beta \ni A$ тогда через точку А проведены две плоскости, перпендикулярные а
$\Rightarrow \alpha \cap \beta = \emptyset$ □

Следствие 2.1. *Параллельные плоскости существуют*

Лемма 2.1 (О пересечении параллельных плоскостей третьей плоскостью)**.** *Прямые по которым две параллельные плоскости пересекают третью параллельны.*

Доказательство. $\alpha||\beta, \gamma \cap \alpha = \gamma \quad d \cap \beta = b$
a, b лежат в γ и не имеют общих точек $\Rightarrow a||b$ □

Лемма 2.2 (О пересечении прямой двум параллельными плоскостями)**.** *Если прямая пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.*

Доказательство. $c \cap \alpha = A \quad \alpha||\beta$
ф. $B \in \beta \quad \gamma$ – плоскость, проходящая через c и B
$\gamma \ni B \Rightarrow \gamma \cap \beta = a$
$\gamma \ni A \Rightarrow \gamma \cap \alpha = a$
$a||b$ по предыдущей лемме
$a \subseteq \gamma, b \subseteq \gamma, a||b, c \cap a \Rightarrow c \cap b, b \subseteq \beta \Rightarrow c \cap \beta$ □

Теорема 2.13 (Основная теорема о параллельных плоскостях)**.** *Через каждую точку, не лежащую на данной плоскости проходит параллельная плоскость и при том только одна.*

Доказательство. $A \notin \alpha$

1. Существование. AB – перпендикуляр из A к α

   Тогда $\beta \perp AB$ и $\beta \ni A$

   По первой теореме $\beta||\alpha$

2. Единственность. $\sqsupset \beta, \gamma || \alpha$ и содержат точку A

   $a = \beta \cap \gamma$

   $<...>$

$\square$

Следствие 2.2. *Если плоскость пересекает одну из параллельны плоскостей, то она пересекает и другую.*

Доказательство. $\alpha || \beta \quad \alpha \cap \gamma = c$ Тогда $\sqsupset \gamma \cap \beta = \emptyset$ т.е. они параллельны. Тогда мы через точку C мы построили две плоскости α, γ параллельные β?!! $\square$

Следствие 2.3. *Две плоскости, параллельные третьей параллельные третьей параллельны.*

Доказательство. $\alpha || \gamma$ и $\beta || \gamma$
$\sqsupset \alpha \cap \beta$
Через точку C построили две плоскости параллельные γ?!! $\Rightarrow \alpha || \beta$ $\square$

Теорема 2.14. *Если две плоскости параллельны, то прямая перпендикулярная одной из них перпендикулярна и второй*

Доказательство. $\alpha || \beta \quad a \perp a$
По лемме 2: $a \cap \beta = b$
$\sqsupset a$ не перпендикулярна β
Построим через B плоскость γ, перпендикулярную a
По первой теореме: $\gamma || \alpha$
Т.О. через B построим две плоскости β и γ параллельные α $\square$

Задача 2.7 (8.7 д)**.** *Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью $KLM \quad K \in A_1B_1 \quad L \in DD_1 \quad M \in BC$*

Доказательство. Построим точку $M' : MM' || CC_1$
Построим прямую pMD_1 построим прямую ML
$S_1 = M'D_1 \cap ML$ построим KS_1
мы знаем, что (KML) пересекает $(A_1B_1C_1)$ по прямой $KX \Rightarrow$ он пересекает (ABC) по прямой $||KX$
Построим $MY || KX$
плоскость (KLM) пересекает AA_1D_1 по прямой $XL \Rightarrow$ $\square$

онаа пересекает плоскость BB_1C_1 по прямой параллельной L. Построим прямую $MZ || XL$

2.6 Взаимное положение прямой и плоскости

1. $a \subseteq \alpha$
2. $a \cap \alpha = A$
3. $a \cap \alpha = \emptyset$

Определение 2.18. *Если прямая и плоскость не имеют общих точек, то они называются параллельными!*

Лемма 2.3 (О плоскости параллелей)**.** *Прямые, параллельные плоскости и проходящие через данную точку, не лежащую на данной плоскости, содержатся в плоскости параллельной данной заполняют её.*

Доказательство. $A \notin \alpha \quad \beta || \alpha$
тогда $\forall b \in \beta, b \ni A \quad b || \alpha$ такие прямые замощают β
ф. $c \ni A$ и $c \nsubseteq \beta$
т.е. c пересекает $\beta \Rightarrow C$ пересекает α (т.е. c не параллельна α) $\square$

Теорема 2.15 (признак параллельности прямой и плоскости)**.** *Если Если прямая параллельна некоторой прямой, лежащей в данной плоскости и не содержится в ней, то она параллельна той плоскости*

Доказательство. $a \nsubseteq \alpha$ и $a || b$ и $b \subseteq \alpha$
$\sqsupset a \cap \alpha \neq \emptyset$ и $a \nsubseteq \alpha$ (т.е. a пересекает α) $\Rightarrow b$ пересекает α?!! $\square$

Теорема 2.16 (2 признак параллельности прямой и плоскости)**.** *Если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости соответственно параллельны двум прямым , лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны.*

Доказательство. $a, b \subseteq \alpha \quad a \cap b = C \quad c, d \subseteq \beta \quad a||c$ и $b||d$
$a||c \Rightarrow a||\beta$
$b||d \Rightarrow b||\beta$
a, b содержатся а лоскости параллельной β(по лемме) $\Rightarrow \alpha||\beta$ □

ДЗ: Задачи:

1. 8.2
2. 8.6
3. 8.7
4. 9.8

Упражнения:

1. 8.1
2. 8.3
3. 8.4

Построить граф утверждений. что из чего следует.
ДЗ с 22 ноября:

1. 8.15
2. 9.3

Задача 2.8. *$ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма*
все рёбра $= a \quad M \in AB \quad AV : MB = 3 : 1 \quad N$ *– середина* B_1C_1

- *сечение α через точку M параллельно плоскости (A_1BC)*
- *найдите периметр сечения*
- *найдите площадь сечения*

Доказательство. плоскость (ABC) пересекает (A_1BC) и α по параллельным прямым $(MD||BC)$
плоскость (ABB_1) пересекает (A_1BC) и α по параллельным прямым $(ME||A_1B)$
Т.О. MBE – сечение
$ME = \frac{3}{4}\sqrt{2}a$
$MD = \frac{3}{4}a$
$P = \frac{\frac{3}{4}}{2a + \sqrt{2}}$ □

ДЗ:
Упражнения

1. 10.1
2. 10.2
3. 0.10
4. 9.11

Письменно:

1. 9.14

2. 9.27
3. 10.16

ДЗ на 3 ноября:

1. 4.018
2. 4.014
3. 4.020
4. 4.021
5. 4.022
6. 4.025

2.7 Ортогональное проектирование

Определение 2.19. *++ Ортогональное проектирование точки на прямую или плоскость – основание перпендикуляра, опущенного на прямую или плоскость*

Определение 2.20. *Ортогональное проектирование фигуры – множество ортогональных проекций точек этой фигуры*

Теорема 2.17. *Ортогональная проекция точки на прямую в пространстве – точка пересечения прямой и перпендикулярной ей плоскости, проходящей через эту точку.*

Доказательство. $\exists!\alpha : A \in \alpha \& \alpha \perp a$
$A' = \alpha \cap a$
$AA' \perp a$ по определению перпендикулярной плоскости. □

Теорема 2.18. *Ортогональная проекция отрезка на прямую – точка, если отрезок перпендикулярен прямой и отрезок, если не перпендикулярен.*

Аналогично с проекцией на плоскость

Задача 2.9. *Ортогональная проекция ромба $ABCD$ на плоскость, проходящую через вершины A и параллельную его диагонали BD является квадратом $AB_1C_1D_1$ со стороной a. Найдите периметр ромба, если $AC = m$*

ДЗ:

1. 9.21
2. 10.26
3. 11.1
4. 11.2
5. $II.3$
6. $II.7$
7. Упражнения:
   (a) 11.4
   (b) 11.14

Глава 3

Расстояние и углы

3.1 Расстояние между фигурами

X, Y – две точки можно провести единственную прямую. $|XY|$ – длина отрезка XY

1. $|XX| = 0$
2. $|XY| = |YX|$
3. $|XY| \leqslant |XZ| + |ZY|$

Определение 3.1. *X – точка, F – фигура. Тогда* $|XF| = \inf\{|XY| \mid Y \in F\}$

Определение 3.2 (Ближайшая точка)**.** *A – точка, F – фигура, тогда $B \in F$ называется ближайшей точкой к A, если $\forall X \in F \quad |AB| \leqslant |AX|$*

Замечание 3.1. *Если ближайшая точка есть, то расстояние до неё ровно расстояние до фигуры.*

Лемма 3.1. *A – точка, B – её проекция на α*
Тогда $\forall X \in \alpha \quad |AX|^2 = |AB|^2 + |BX|^2$

Теорема 3.1 (Теорема о ближайшей точке)**.** *Точка плоской фигуры K является ближайшей к некоторой точке тогда и только тогда, когда эта точка фигуры ближайшая к проекции данной точки на плоскость фигуры*

Доказательство.

1. Если $A \in \alpha$, то $A' = A$
2. Если $A \notin \alpha$, тогда $\forall X \in F \quad |AX|^2 = |AA'|^2 + |A'X|^2$, $|A'A|$ – постоянное
   Чем меньше $|AX|$, тем меньше $|A'X|$ и наоборот

□

Следствие 3.1 (Теорема о проекциях)**.** *A – точка, a – прямая в плоскости α. Тогда проекции A и A' на прямую a совпадают*

Доказательство. B – ближайшая точка прямой a к A(т.е. проекция точки A на a)
B – ближайшая точка прямой a к точке A' (т.е. проекция точки A' на a) □

Следствие 3.2 (Теорема о трёх перпендикулярах)**.** *Прямая лежащая в плоскости перпендикулярна наклонной к этой плоскости тогда и только тогда, когда она перпендикулярна её проекциям*

Доказательство. AA' – перпендикуляр к α, тогда: $a \perp AB \Leftrightarrow a \perp A'B$ □

Определение 3.3. *F_1, F_2 – фигуры, тогда* $|F_1F_2| = \inf\{|XF_2| \mid X \in F_1\}$

Определение 3.4 (Ближайшая точка фигуры F_1 к фигуре F_2)**.** *это $B \in F_1 : \forall X \in F_1 \quad |BF_2| \leqslant |XF_2|$*

Замечание 3.2. *Если есть ближайшие точки фигур друг к другу, то расстояние между ними – расстояние между фигурами.*

Замечание 3.3.

- *Расстояние от точки до прямой – длина перпендикуляра*

- *Расстояние от точки до плоскости – длина перпендикуляра*
- *Расстояние между двумя параллельными плоскостями – длина общего перпендикуляра*
- *Расстояние между прямой и параллельной ей плоскости – длина их общего перпендикуляра*
- *Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми. a и b скрещивающиеся. Возьмём $X \in B$. Построим $a'||a$ через точку X*

  β – плоскость, построенная по a' и b

  Спроектируем a на плоскость β

  $a''||a' \Rightarrow a'' \cap b \neq 0(= \{Y\})$

  YY' перпендикуляр на a, тогда $|ab| = |YY'|$

Лемма 3.2. *Параллельные отрезки с концами на двух параллельных плоскостях равны.*

Доказательство. Беседин доказывал □

ДЗ:

1. 12.13
2. 12.14
3. 12.23
4. 12.37

Упражнение:

1. 12.1

3.2 Пространственная теорема Пифагора

Теорема 3.2 (Пространственная Теорема Пифагора)**.** *Квадрат длины любого отрезка равен сумме квадратов длин его проекций на три взаимно перпендикулярные прямые.*

Доказательство. $\sqsupset a, b, c$ – три взаимно перпендикулярные прямые и есть отрезок в этом пространстве AB
γ – плоскость, проходящая через a и b. Спроектируем отрезок AB на плоскость $\gamma \to A'B'$

1. $A' = B' \Rightarrow AB||c$. Возьмём его проекцию на прямую c. Образуется параллелограмм, а тогда $A_3B_3 = AB$.

   Проекция AB на a совпадает с проекцией точки A'.

   Проекция AB на b совпадает с проекцией точки B'

   А в таком случае $|AB|^2 = |A_1, B_1|^2 + |A_2B_2|^2 + |A_3B_3|^2$, где первые два слогаемых нулевые.

2. $A'B'$ – отрезок. Тогда $|A'B'|^2 = |A_1B_1|^2 + |A_2B_2|^2$

   Возьмём плоскость, проходящую через точку A параллельно плоскости $\gamma \to \alpha$. И плоскость β, проходящую через точку B параллельно плоскости γ.

   (a) $\alpha = \beta$ – Упражнение

   (b) $A_3 = \alpha \cap c \quad B_3 = \beta \cap c$
   $A'' = AA' \cap \beta \Rightarrow A'A''BB'$ – параллелограмм ($A''A'||BB'$, т.к. $A'B'$ – проекция. А тогда все 4 точки лежат в одной плоскости, т.е. это плоская фигура. $A'B'||A''B$, т.к. лежат в параллельных плоскостях. $\Rightarrow A''B = A'B'$)
   Кроме того $AA_3 \perp c$(т.к. $c \perp \gamma, \alpha||\gamma$).
   $BB_3 \perp c$(т.к. $c \perp \gamma, \beta||\gamma$)
   А тогда A_3B_3 – проекция AB на c
   $AA'' = A_3B_3$ (как параллельные отрезки между параллельными плоскостями)
   В треугольнике $ABA'' \quad |AB|^2 = |AA''|^2 + |A''B|^2$
   $|AB|^2 = |A_3B_3|^2 + |A_1B_1|^2 + |A_2B_2|^2$

□

ДЗ:
Александров:

1. 13.1
2. 13.6
3. 13.11

Листочек:

1. 9
2. 12
3. 15.д
4. 32
5. 26

3.3 Углы в пространстве

Определение 3.5. *Два луча в пространстве называются сонаправленными, если:*

1. *один из них содержит другой*
2. *лежат на параллельных прямых и находятся в одной полуплоскости относительно прямой, проходящей через их начала.*

Определение 3.6 (Угол между двумя лучами)**.** *Если два луча имеют общее начало, то угол между ними – угол в плоскости, которая их содержит*

Если у них разные начала, то возьмём в пространстве некую точку и отложим от неё луч, сонаправленный первому и луч сонаправленный второму лучу. Тогда угол между этими лучами будет углом между исходными лучами.

Лемма 3.3. *Углы с соответственно сонаправленными сторонами равны.*

Доказательство. Дано два угла: $(O, p, q); (O', p', q') \quad p||p', q||q'$

$\sqsupset A \in p, B \in q$ На другом угле отложим равные отрезки $O'A'$ и $O'B'$ $\qquad OA = O'A' \quad OB = O'B'$

$\left.\begin{matrix} OA = O'A' \\ OA||O'A' \end{matrix}\right\} \Rightarrow O'OAA'$ – параллелограмм $\Rightarrow OO' = AA' \quad OO'||AA'$

$\left.\begin{matrix} OB = O'B' \\ OB||O'B' \end{matrix}\right\} \Rightarrow O'OBB'$ – параллелограмм $\Rightarrow OO' = BB' \quad OO'||BB'$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} AA' = BB' \\ AA'||BB' \end{matrix}\right\} \Rightarrow ABB'A'$ – параллелограмм $\Rightarrow AB = A'B'$

$\cos\angle AOB = \dfrac{-AB^2 + OA^2 + OB^2}{2\ OA \cdot OB}$

$\cos\angle A'O'B' = \dfrac{O'A'^2 + O'B'^2 - A'B'^2}{2\ O'A' \cdot O'B'}$

Косинусы равны, а значит равны и углы □

Лемма 3.4. $a \upuparrows b, b \upuparrows c$ *Тогда* $a \upuparrows c$

Доказательство. Если лучи лежат на одной плоскости, то a, b лежат по одну сторону от прямой AB, b, c лежат по одну сторону от прямой BC

Рассмотрим прямую AC. Пусть есть точка луча a и точка луча c

Пусть лучи не лежат на одной плоскости, тогда проведём плоскость через точки $A, B, C - \psi$

Проведём ещё три плоскости:

1. α через a, b

2. β через b, c

3. γ через c, a

$\alpha \cap \psi = AB \quad a, b$ – по одну сторону от $AB \Rightarrow$ в одном полупространстве относительно ψ
$\beta \cap \psi = BC \quad b, c$ – тоже в одном полупространстве относительно ψ
А значит a, c – в одном полупространстве относительно ψ
$\gamma \cap \psi = AC \Rightarrow a, c$ находятся в одной полуплоскости относительно $AC \Rightarrow a \upuparrows c$ □

Теорема 3.3. *Определение угла между лучами корректно*

Доказательство. p, q – лучи
A, p', q' – сонапрваленные лучи через A
B, p'', q'' – сонаправленные лучи через B
$p' \upuparrows p \upuparrows p'' \Rightarrow p' \upuparrows p''$ $q' \upuparrows q''$ аналогично
А тогда по лемме углы равны. А тогда определяется один и тот же угол независимо от выбранной точки, т.е. определение корректно □

Определение 3.7 (Угол между прямыми)**.**

1. *Если прямые параллельны, угол равен нулю*

2. *Если пересекаются, образуются четыре луча. Выбираем меньший из возможных углов.*

3. *Если скрещиваются, возьмём точку в пространстве, проведём через неё две прямые параллельные данным и угол между получившимися прямыми примем за угол между исходными.*

   Корректно, потому что если взять две точки, то образуется четыре параллельных угла (между лучами), которые равны.

Определение 3.8. *Угол между прямой и плоскостью – угол между прямой и её проекцией (ортогональной) на данную плоскость.*
Если проекция – точка, то угол будем считать прямым

Задача 3.1. *a, b – прямые*
$a \perp b$ в общем смысле $\Longleftrightarrow$ угол между a, b прямой

Утверждение 3.1. *Угол между прямой и плоскостью – наименьший среди углов между прямой и содержащимися в этой плоскости прямыми*

Доказательство. Если проекция прямой – точка, то угол между этой прямой и любой прямой в этой плоскости – прямой.
Если проекция прямой – прямая, рассмотрим угол между исходной прямой и прямой, проходящей через точку пересечения исходной прямой и плоскости параллельно прямой в плоскости. Отложим на последней прямой $OB = OA'$ – длине отрезка между точкой пересечения O и проекции выбранной точкой A
φ угол между исходной прямой и её проекцией
ψ – угол AOB
$\cos\varphi = \dfrac{OA^2 + OA'^2 - AA'^2}{2\, OA \cdot OA'}$
$\cos\psi = \dfrac{OA^2 - AB^2 + OB^2}{2\, OA \cdot OB}$
т.к. $AB^2 > AA'^2$, то $\cos\varphi > \cos\psi \Rightarrow \varphi < \psi$ □

Упр:

1. 14.1

2. 14.3

ДЗ:

1. 14.9

2. 14.10

3. 14.18

4. 14.21

Определение 3.9. *Двугранный угол – часть пространства, ограниченная двумя полуплоскостями, имеющими общую граничную прямую и не лежащими в одной плоскости и сами полуплоскости.*

Полуплоскости называются гранями, а прямая называется ребром.

Определение 3.10. *Линейный угол двугранного угла – плоский выпуклый угол, вершина которого лежит на ребре данного угла, а стороны лежат на его гранях и перпендикулярны его ребру.*

Лемма 3.5. *Величины любых двух линейных углов данного двугранного угла равны.*

Доказательство. Рассмотрим два линейных угла данного двугранного угла

$OA \upuparrows O_1A_1$ (т.к. $\perp OO_1$ и лежат в одной плоскости)

аналогично $OB \upuparrows O_1B_1 \Rightarrow$ это два угла равной величины

А тогда величина двугранного угла равна величине любого линейного угла. □

Определение 3.11. *Если две плоскости пересекаются, то угол между ними – наименьший из углов, образованных ими двугранных углов.*

В противном случае, если плоскости параллельны, то угол равен 0 *радиан.*

Упр:

1. **Задача 3.2.** a, b *– прямые*

   $a \perp b$ *в общем смысле* $\iff$ *угол между* a, b *прямой*

2. 14.3

3. 14.4

ДЗ:

1. 14.13

2. 14.19

3. 14.22

4. 14.37

ДЗ+:

1. 4

2. 6

3. 7

4. 14

5. 17

6. 20

7. 21

8. 22

3.4 Трёхгранные углы

a, b, c – три луча с общим началом.

$\measuredangle a, b - \gamma$

$\measuredangle b, c - \alpha$

$\measuredangle c, a - \beta$

Объединение α, β и γ – трёхгранный угол O_{abc}

лучи a, b и c – рёбра

α, β, γ – грани

$\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}$ – величины двугранных углов.

плоскости, содержащие γ и β – составляют двугранный угол $\widehat{\alpha}$

3.4.1 Теорема косинусов для трёхгранного угла

Теорема 3.4. $\cos\widehat{\gamma} = \cos\widehat{\alpha}\cdot\cos\widehat{\beta} + \sin\widehat{\alpha}\cdot\sin\widehat{\beta}\cdot\cos\widehat{c}$

Доказательство. $C \in c \quad \widehat{\alpha}, \widehat{\beta} < \dfrac{\pi}{2}$

$OA^2 = AC^2 + OC^2$

$OB^2 = OC^2 + BC^2$

$\measuredangle ACB = \widehat{C}$

$\measuredangle AOB = \widehat{\gamma}$

$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC\cdot CB\cdot\cos\widehat{C}$

$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO\cdot BO\cdot\cos\widehat{\gamma}$

$AC^2 + CB^2 - 2AC\cdot CB\cdot\cos\widehat{C} = AO^2 + BO^2 - 2AO\cdot BO\cdot\cos\widehat{\gamma}$

$AO^2 - AC^2 + BO^2 - CB^2 = 2AC\cdot CB\cdot\cos\widehat{c} - 2AO\cdot BO\cdot\cos\widehat{\gamma}$

$OC^2 = AC\cdot CB\cdot\cos\widehat{c} - AO\cdot BO\cdot\cos\widehat{\gamma}$

$\cos\widehat{\gamma} = \dfrac{AC\cdot CB}{AO\cdot BO}\cos\widehat{c} + \dfrac{OC^2}{AO\cdot BO}$

$\dfrac{AC}{CO} = \sin\widehat{\beta} \qquad \dfrac{CB}{BO} = \sin\widehat{\alpha} \qquad \dfrac{OC}{AO} = \cos\widehat{\beta} \qquad \dfrac{OC}{BO} = \cos\widehat{\alpha}$

$\cos\widehat{\gamma} = \sin\widehat{\beta}\cdot\sin\widehat{\alpha}\cos\widehat{c} + \cos\widehat{\beta}\cdot\cos\widehat{\alpha}$

Если $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta} > \dfrac{\pi}{2}$

$\widehat{\alpha'} = \pi - \widehat{\alpha} \qquad \widehat{\beta'} = \pi - \widehat{\beta}$ – смежные углы

$\cos\widehat{\alpha'} = -\cos\widehat{\alpha} \qquad \cos\widehat{\beta'} = -\cos\widehat{\beta}$ формула та же

Тогда рассматриваем угол $O_{ac'b}$

Если $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta} = \dfrac{\pi}{2}$, т.е $a \perp c$ и $b \perp c$ А тогда $\widehat{\gamma} = \widehat{c}$

$\cos\widehat{\gamma} = \cos\widehat{c}$ □

3.4.2 Теорема синусов для трёхгранного угла

$$\cos\widehat{c} = \frac{\cos\widehat{\gamma} - \cos\widehat{\alpha}\cos\widehat{\beta}}{\sin\widehat{\alpha}\sin\widehat{\beta}}$$

$$\sin^2\widehat{c} = 1 - \frac{(\cos\widehat{\gamma} - \cos\widehat{\alpha}\cos\widehat{\beta})^2}{\sin^2\widehat{\alpha}\sin^2\widehat{\beta}}$$

$$\frac{\sin^2\widehat{c}}{\sin^2\widehat{\gamma}} = \frac{\sin^2\widehat{\alpha}\cdot\sin^2\beta - (\cos\widehat{\gamma} - \cos^2\widehat{\alpha}\cos\widehat{\beta})^2}{\sin^2\widehat{\alpha}\sin^2\widehat{\beta}\sin^2\widehat{\gamma}} = \frac{\sin^2\widehat{\alpha}\sin^2\widehat{\beta} - \cos^2\widehat{\gamma} + 2\cdot\cos\widehat{\alpha}\cos\widehat{\beta}\cos\widehat{\gamma} - \cos^2\widehat{\alpha}\cos^2\widehat{\beta}}{\sin^2\widehat{\gamma}\sin^2\widehat{\alpha}\sin^2\widehat{\beta}}$$

$$\sin^2\widehat{\alpha}\sin^2\widehat{\beta} = 1 + \cos^2\widehat{\alpha}\cdot\cos^2\widehat{\beta} - \cos^2\widehat{\alpha} - \cos^2\widehat{\beta}$$

$$\frac{1 - \cos^2\widehat{\alpha} - \cos^2\widehat{\beta} - \cos^2\widehat{\gamma} + 2\cos^2\widehat{\alpha}\cos^2\widehat{\beta}}{\sin^2\widehat{\alpha}\sin^2\widehat{\beta}\sin^2\widehat{\gamma}} = \frac{\sin^2\widehat{c}}{\sin^2\widehat{\gamma}}$$

$$\frac{\sin^2\widehat{c}}{\sin^2\widehat{\gamma}} = \frac{\sin^2\widehat{a}}{\sin^2\widehat{\alpha}} = \frac{\sin^2\widehat{b}}{\sin^2\widehat{\beta}}$$

Глава 4

Пространственные фигуры и тела

Определение 4.1. ***Сферой*** *называется множество точек пространства, удалённых от данной точки на заданное положительное расстояние. Данная точка называется* ***центром*** *сферы, а данное расстояние –* ***радиусом****.*

Определение 4.2. ***Шаром*** *называется множество точек пространства, находящихся от этой точки на расстоянии не больше данного положительного расстояния. Указанная точка называется* ***центром*** *шара, а расстояние –* ***радиусом*** *шара.*

Поверхность шара – $\{X : |OX| = R\}$ (т.о. поверхность шара – сфера)
Множество точек X шара таких, что $|OX| < R$ – называется внутренностью шара

Определение 4.3. ***Радиус*** *– отрезок, соединяющий центр шара с точкой на поверхности шара*

Определение 4.4. ***Диаметр*** *– удвоенный радиус.*
Диаметр *– отрезок прямой, проходящей через центр шара по которому прямая пересекает шар.*

4.1 Взаимное расположение шара и сферы с плоскостью

Пусть R – радиус шара/сферы с центром в точке O $\quad\alpha$ – плоскость. $\quad A$ – ближайшая точка α к точке O, тогда $d = |OA|$ – расстояние от центра шара/сферы до точки плоскости.

Пусть прямая OA пересекает сферу в точке B. Фиксируем какую-то точку $X \in \alpha$, а тогда, по теореме о ближайшей точке $|OX|^2 = |OA|^2 + |AX|^2$

1. $d > R \qquad |OX|^2 = d^2 + |AX|^2 > R^2$ Т.е. для любой точки $X \in \alpha \quad X$ не принадлежит шару/сфере
2. $d = R \qquad |OX|^2 = R^2 + |AX|^2$ Получается $|OX| = R \Longleftrightarrow |AX| = 0$

   Т.е. $X = A$ – единственная точка пересечения. Тогда говорят, что шар/сфера касаются плоскости.
3. $d < R \qquad |OX|^2 = d^2 + |AX|^2$. Нам нужно найти $X \in \alpha : |AX|^2 = R^2 - d^2 \quad |AX| = \sqrt{R^2 - d^2}$

   Т.е. пересечение сферы и α – окружность с центром в точке A и радиусом $\sqrt{R^2 - d^2}$

   а с шаром – диск $|AX| \leqslant \sqrt{R^2 - d^2}$

Упражнение 4.1 (1)**.** *Если шар(сфера) касается плоскости, то радиус, проведённый к точке касания – перпендикулярен плоскости.*

Упражнение 4.2 (2)**.** *Исследовать взаимное расположение двух сфер.*

Упражнение 4.3 (3)**.** *Ортогональная проекция шара или сферы на плоскость – круг.*

Определение 4.5. *Круг, по которому пересекает плоскость, проходящая через центр шара, сам шар, называется* ***большим кругом****.*

ДЗ:

1. Упражнения выше

2. Упражнения 15.1, 15.2
3. 15.7
4. 15.8
5. 15.20
6. 15.22

(конспект по трёхгранным углам в конце предыдущей главы)
ДЗ:

1. 14.53
2. 14.57
3. 14.59
4. 15.4
5. 15.18

4.2 Сферические треугольники

Сфера с центром в точке O и радиусом R. A, B, C не лежат на одной прямой

Определение 4.6. *Сферическим треугольником назовём фигурами, вершинами которой будут точки A, B и C, а сторонами – малые дуги между ними.*

Можно задать взаимно однозначное соответствие между треугольниками на сфере и трёхгранными углами с вершиной в центре сферы.
длина дуги $\gamma = R \cdot \widehat{\gamma}$

4.3 Опорная плоскость

Определение 4.7 (на плоскости)**.** *Прямая называется* ***опорной*** *для фигуры, если она имеет с фигурой хотя бы одну общую точку и эта фигура лежит по одну сторону от этой прямой. Т.е. фигура лежит в одной полуплоскости относительно прямой.*

Определение 4.8. *Плоскость называется****опорной*** *для фигуры, если она имеет хотя бы одну общую точку с этой фигурой и вся фигура лежит в одном полупространстве относительно этой плоскости.*

Три случая рсположения плоскости и фигуры:

1. плоскость не пересекает фигуру
2. плоскость является опорной для фигуры
3. плоскость пересекает фигуру.

Определение 4.9. *Фигура называется* ***ограниченной****, если расстояние между любыми двумя её точками конечное расстояние*
В противном случае фигура ***неограниченная****.*

Утверждение 4.1. *В ограниченной фигуре найдутся две точки, расстояние между которыми максимальное. Расстояние между этими точками назовём* ***диаметром фигуры***

Теорема 4.1. *Плоскость, проходящая через один из концов диаметра фигуры и перпендикулярная ему не имеет с фигурой других общих точек и является опорной*

Доказательство. Пусть диаметр AC. плоскость α касается фигуры в точке $A: \quad \alpha \perp AC$.
Допустим, что есть ещё одна точка – $B \in \alpha \cap F$ – фигура
Но она является касательной к плоскости, а значит по теореме Пифагора $AB > AC$, но AC – диаметр, т.е. наибольшее такое расстояние, которое может возникнуть между двумя точками фигуры?!!
А тогда плоскость касается фигуры $\Rightarrow$ она является опорной $\square$

ДЗ: 16.2 – 16.14 (чётные)

4.4 Выпуклые фигуры

Определение 4.10. *Фигура называется выпуклой, если для любых двух точек $x, y \in F$ $\quad XY$ содержится в F*

Примеры:

1. Все выпуклые плоские фигуры
2. шар
3. точка и пустое множество

Теорема 4.2. *Пересечение двух выпуклых фигур – выпуклая фигура*

Доказательство. F_1, F_2 – выпуклые точки. Возьмём две точки из их пересечении $X, Y \in F_1 \cap F_2$
$X, Y \in F_1 \Rightarrow XY \in F_1$
$X, Y \in F_2 \Rightarrow XY \in F_2$
$XY \in F_1 \cap F_2$ □

Следствие 4.1. *Пересечение конечного числа выпуклы фигур – выпуклая фигура*

Задача 4.1. *Пересечение счётного числа?*

Следствие 4.2. *Пересечение выпуклой фигуры и плоскости – выпуклая фигура*

Следствие 4.3. *Каждая плоскость делит любую выпуклую фигуру на две выпуклые фигуры*

Теорема 4.3. *Проекция выпуклой фигуры – выпуклая фигура*

Доказательство. F – выпуклая фигура
F' – проекция на плоскость α или прямую a
Берём две точки проекции $X', Y' \in F'$ Есть по крайней мере один прообраз $X, Y \in F, XY \in F$
Проекция отрезка – отрезок с концами в проекциях точек конца (или точка)
$X'Y' \subset F'$ □

4.5 Определение движения

X, Y – два подмножества плоскости
$f : X \to Y$ – движение, если:

1. биекция
2. $A, B \in X \quad |AB| = |f(A)f(B)|$

Замечание 4.1. *Композиция движений – движение*

4.6 Определение и свойства цилиндра

Определение 4.11. $\alpha, F \subseteq \alpha, A \in \alpha, AA' \nsubseteq$
$\forall X \in F$ проведём отрезок XX' в том же полупространстве, что AA' и $XX'||AA'$ и $|XX'| = |AA'|$
Терминология:
F – основание цилиндра
AA' – образующий

Теорема 4.4. *F' состоит из всех точек X'*
Тогда:

1. *F' лежит в плоскости параллельной α*
2. *$F' = F$*

Доказательство. β – плоскость, проходящая через три конца отрезков (A', B', B').

$AA'C'C, AA'B'B, BB'C'C$ – параллелограммы $\Rightarrow \alpha||\beta$

$\sqsupset X' \notin \beta$

Луч XX' пересекает β а точке Y, т.е. $XY = XX'$, т.е. $Y = X'$

Докажем, что $F = F'$

$f : F \to F' \quad X \mapsto X'$

$A, B \in F$ тогда $f(A) = A', f(B) = B' \quad AA' = BB'$ и $AA'||BB'$ из определения цилиндра $\Rightarrow AB = A'B'$ ч.т.д. □

Замечание 4.2. *Фигура F' тоже называется основанием*

Следствие 4.4. *Все сечения цилиндра плоскостями параллельными плоскости основания равны основанию цилиндра*

Определение 4.12. *Высота цилиндра – перпендикуляр из точки одного основания на плоскость другого. (или же его длина)*

Определение 4.13. *Ширна фигуры – наименьшее расстояние между*

ДЗ:

1. 17.1
2. 17.2
3. 17.8
4. параграфы 18.2, 18.3
5. 18.1
6. 18.2
7. 18.4

Определение 4.14. *Цилиндр – прямой, если все его образующие перпендикулярны его основанию.*

Определение 4.15. *Прямой круговой цилиндр – прямой цилиндр с кругом в качестве основания*

Определение 4.16. *Поверхность цилиндра – объединение его оснований и боковой поверхности (образуется из образующих, который соединяют граничные точки его основания)*

Определение 4.17. *Ось цилиндра – отрезок, соединяющий центры оснований цилиндра.*

Замечание 4.3. *Сечение поверхности цилиндра является окружность*

Теорема 4.5. *Сечение цилиндра плоскостью, параллельной плоскости основания является окружностью (в случае кругового цилиндра)*

Доказательство. □

Определение 4.18. *Цилиндр выпуклый* $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ *его основания выпуклые*

Доказательство. Цилиндр выпуклый. Основания – пересечения цилиндра и плокостей, на которые он опирается. Пересечение выпуклых фигур – выпукло.

Основания выпуклы. Пусть есть две точки цилиндра, отрезок между ними не включён в цилиндр. Тогда рассмотрим какие-то образующие, проходящие через эти две точки. □

ДЗ:

1. 16.14
2. 18.6, 10, 13, 15, 16

4.7 Конус

Определение 4.19. $\sqsupset F$ *– плоская фигура и* O *– точка не лежащая в плоскости фигуры.*
Тогда конусом называется объединение всевозможных отрезков $OX, X \in F$
F *– основание, а* O *– вершина*

Определение 4.20. *Высота конуса – перпендикуляр к плоскости основания (длина перпендикуляра)*

Теорема 4.6. *Сечение конуса плоскостью , параллельной основанию есть фигура, подобная основанию.*

Доказательство. Пусть дан конус с вершиной O и основанием $F \subset \alpha$ и пусть дана плоскость $\beta || \alpha$
$\lhd OX, X \in F \quad OX \cap \beta = X' \quad F \to F' \quad X \mapsto X'$ (очевидно биективное отображение)
$\lhd OY, Y \in F, OY \cap beta = Y'$
O, Y, X – лежат в одной плоскости.
Есть два треугольника $\triangle OXY, \triangle OY'X' \quad YX || Y'X'$, т.к. $\alpha || \beta$
$\triangle OXY \sim \triangle OX'Y'$ Тогда коэффициент подобия будет равен $\dfrac{OX}{OX'}$
Возьмём точку $Z \in F$
$\dfrac{Y'X'}{YX} = \dfrac{OX'}{OX} \quad \dfrac{Z'X'}{ZX} = \dfrac{OX'}{OX} \Rightarrow \dfrac{Y'X'}{YX} = \dfrac{Y'X'}{YX} = \dfrac{Z'X'}{ZX}$ □

Определение 4.21. *Прямой круговой конус (конус вращения) – основание круг, а вершина проецируется в центр круга.*

Определение 4.22. *Боковая поверхность для кругового конуса – те отрезки, которые соединяют вершины с окружностью основания.*

ДЗ:

1. 19.16
2. 19.22
3. 19.23
4. Дана плоская фигура с диаметром 1. Доказать, что она может быть заключена в прямоугольник с площадью < 1