Конспект по матану 10 класс

Коченюк Анатолий

12 апреля 2019 г.

Глава 1

1 четверть

1.1 Функция

$f(x) : X \to Y \quad X, Y \subseteq \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

a – предельная точка X

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in O_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(A)$

$A \neq f(a)$, потому что она там может быть даже не определена

$$\begin{cases} a \in \mathbb{R}, O_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta) \\ a = +\infty, O_\delta(a) = (\delta, +\infty) \\ a = -\infty, O_\delta(a) = (-\infty, -\delta) \end{cases}$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(O_{\delta(a)}) \subset O_\varepsilon(A)$

Определение 1.1. $f(x)$ – *б.б.* $\Longleftrightarrow |f(x)| \to \infty, x \to a \in \overline{\mathbb{R}}$

$\Longleftrightarrow \forall k > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in O_\delta(a), x \neq a |f(x)| \geqslant K$

Определение 1.2. $f(x)$ – *б.м.* $\Longleftrightarrow |f(x)| \to 0, x \to a \in \overline{\mathbb{R}}$

Теорема 1.1 (О представлении)**.** $A = \lim\limits_{x \to a} f(x) \Longleftrightarrow f(x) = A + g(x), g(x)$ – *б.м. при* $x \to a$

Определение 1.3 (По Гейне)**.** $A = \lim\limits_{x \to a} f(x) \Longleftrightarrow \forall x_n \to a (x_n \in X, x_n \neq a)$ *выполняется* $f(x_n) \to A$

Пример:

Доказать на языке $\varepsilon - \delta$

$\lim\limits_{x \to 1}(3x - 2) = 1$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)$: $|x - 1| < \delta \Rightarrow |3x - 2 - 1| < \varepsilon$

Уметь по $\forall \varepsilon$ предъявлять соответствующее δ

$|3x - 3| < \varepsilon \Leftarrow 3|x - 1| < \varepsilon \Leftarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta$

$\sqsupset \delta = \frac{\varepsilon}{3}$ – искомое

Пример:

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x - 1}{x + 3} = -\dfrac{1}{2}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : |x + 1| < \delta \Rightarrow \left| \dfrac{2x + 1}{x + 3} + \dfrac{1}{2} \right| < \varepsilon$

$\left| \dfrac{5(x + 1)}{2(x + 3)} \right| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \dfrac{1}{2} min\{1; \dfrac{2\varepsilon}{5}\}$

$\sqsupset |x + 1| < \delta$

$\delta < 1 \Rightarrow |x + 3| > 1$

А тогда $\left| \dfrac{2x + 1}{x + 3} + \dfrac{1}{2} \right| = \left| \dfrac{5(x + 1)}{2(x + 3)} \right| = \dfrac{5|x + 1|}{2|x + 3|} < \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{\delta}{1} \leqslant \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2\varepsilon}{5} = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ ч.т.п.

$\sqsupset f(x) : E \to \mathbb{R} \quad E \subseteq \mathbb{R}$

Определение 1.4. *$f(x)$ – ограничена сверху или ограничена снизу или ограничена на $E \iff \exists K \geqslant 0 : \forall x \in E$ выполняется $f(x) \leqslant K \vee -k \leqslant f(x) \vee |f(x)| \leqslant L$*

Определение 1.5. *$f(x)$ называется локально ограниченной в точке a, которая либо принадлежит E, либо является предельной для $E \quad (a \in \overline{E}) \iff \exists K \geqslant 0, \exists O(a) : |f(x)| \leqslant K \forall x \in O(a) \cap E$*

Лемма 1.1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\left(\dfrac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}\right)}{\left(\dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}\right)}$ *f – локально ограничена $\forall a \in \overline{E} \not\Rightarrow f$ – ограничено на E*

Доказательство. $f(x) = x \quad E = \mathbb{R}$

в $\forall a \in \mathbb{R}$ она локально ограничена

$\exists K = max\{|a+1|, |a-1|\}$

$\forall x \in O_1(a)$ выполняется $|x| \leqslant K \quad O_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$

$\overline{E} = E \cup \partial E$

$\exists O(a) \subset E$ □

1.2 Предельный переход в неравенствах

Теорема 1.2 (1). *$\sqsupset \exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ и $\sqsupset A < B \Rightarrow \exists O(a) : \forall x \in \overset{\circ}{O}(a) \cap E$ выполняется $f(x) < B$*

Доказательство. $\sqsupset \varepsilon > 0 : A + \varepsilon_1 < B$

По определению предела для этого $\varepsilon_1 \exists \delta : \forall x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E \quad |f(x) - A| < \varepsilon_1 \Rightarrow -\varepsilon_1 < f(x) - A < \varepsilon_1 \Rightarrow f(x) < A + \varepsilon_1 < B$

т.о. (таким образом) эта $O_\delta(a)$ – искомая окрестность. □

ДЗ:

Теорема 1.3 (2). *$\sqsupset f(x) < g(x) \forall x \in E$ и $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A, \exists \lim\limits_{x \to a} g(x) = B \Rightarrow A \leqslant B$*

2а) контрпример, почему нельзя писать $A < B$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = ?$

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$

5)

Лемма 1.2. *f – ограничена на $E \Rightarrow f$ – локально ограничена $\forall a \in \overline{E}$*

1.3 Неопределённости

$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0 \cdot \infty; \infty - \infty; 1^\infty$

Теорема 1.4 (Безу). *$P_n(x) = (x - x_0) Q_{n-1}(x)$*

$$\lim x + to - 1 \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x + to - 1} \frac{x + 2}{x^2 - x + 1} = \frac{\lim\limits_{x \to -1}(x + 2)}{\lim\limits_{x + \to -1}(x^2 - x + 1)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -1} x + \lim\limits_{x \to -1} 2}{\lim\limits_{x \to -1} x \cdot \lim\limits_{x \to -1} x - \lim\limits_{x \to -1} x + \lim\limits_{x \to -1} 1}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 1} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 1} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{x + 2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{3} \right| = \frac{|2x + 6 - x^2 + x - 1|}{|3(x^2 - x + 1)|} = \frac{|x^2 - 4x + 5|}{3(x^2 - x + 1)} = \frac{|x + 1| \cdot |x - 5|}{3(x^2 - x + 1)}$$

$x^2+pz+q=(x+\dfrac{p}{2})^2+q-\dfrac{p^2}{4}$
$\leqslant \dfrac{|x+1|\cdot 7}{2\cdot\frac{3}{4}} < \dfrac{\delta\cdot 28}{9} = \varepsilon$
Пусть $\exists\delta = min\{1, \dfrac{0\varepsilon}{28}\}$ Решено.

Теорема 1.5 (о двух милиционерах)**.** $\sqsupset \forall x\in E \quad f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$
$\sqsupset \exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$
$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$

Доказательство. Воспользуемся языком последовательностей (Гейне)
Берём для $\forall x_n\to a$
$f(x_n)\leqslant g(x_n)\leqslant h(x_n)$ Пользуемся теоремой о двух милиционерах для последовательностей.
Таким образом $g(x_m)\to A \forall x_n\to A \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} g(x)=A$ □

1.4 Замечательные пределы

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1 \quad \left(\dfrac{0}{0}\right)$ Было доказано, что $\forall x_n\to 0 \quad \sin x\to\sin 0 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$ (непрерывность $y=\sin x$ в 0)

   Определение 1.6. *Пусть $f: E\to\mathbb{R}$ Функция f непрерывно в точке $a\in E$ (т.е. $f(a)$ – определено заранее) $\iff \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $A = f(a)$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(\lim\limits_{x\to a} x) = f(a)$.*

   f коммутирует с пределом.

   Было доказано (вопрос 13 п. 5), что $\forall x_n\to a \quad \sin x\to\sin a \iff \exists\lim\limits_{x\to a}\sin x = sina \iff$ Функция была непрерывна в каждой точке из $\mathbb{R}$

   Определение 1.7. $f: E\to\mathbb{R}$. *Говорят, что f непрерывно на E, если f непрерывно в каждой точке из E.*

   Множество функций, непрерывных на E обозначают $C(E)$
   $x\in(0,\frac{\pi}{2}) \quad \sin x < x < \operatorname{tg} x$

   - $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{|\sin x|}{|x|} < 1, \forall x\in \overset{\circ}{O}_\delta(0), \quad \delta < \dfrac{\pi}{2}$
   - $|\cos x| < \left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$

   Задача 1.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$

   Доказательство. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{3x}{\sin 3x}\cdot\dfrac{2}{3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 3x}\dfrac{2}{3}$
   $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}$ □

   Следствия из предела №1:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2} \quad \left(\dfrac{0}{0}\right)$
   $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
   $\cos x = 1-2\sin^2\dfrac{x}{2} \Rightarrow 1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$
   $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \dfrac{1}{2}$
   $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{x^2}{1-\cos x}\cdot\dfrac{\sin x}{x} = 2\cdot 1 = 2)$ можем заменить предел произведения, так как оба выражения имеют предел

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\cos x \cdot x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1\cdot 1$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = 1$

$\arcsin = (\sin|_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]})^{-1}$

$\arcsin(\sin x) \neq x$, но $\sin(\arcsin x) = x$

$\arcsin a$ – тот корень уравнения $\sin x = a$, при котором $a \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$y = \arcsin x$

$x \to 0; x \in O_\delta(0) \Rightarrow x = \sin y$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = \lim y \to ?\dfrac{y}{\sin y}$

Лемма 1.3. *Покажем (на языке Гейне)* $x_n \to 0 \Rightarrow y_n \to 0 \forall x_n$

Доказательство. $x_n = m\sin y_n, y \quad y_n \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \{y_n\}$ – огр $\Rightarrow$ сх п/п y_{n_k}

Но мы только что доказали, что любая сходящаяся подпоследовательность $y_{n_k} \to 0 \Rightarrow$ сама $y_n \to 0$

Допустим противное:

$\sqsupset y_n \not\to 0$ пишем отрицание существования предела

$\exists\varepsilon_0\forall N : \exists n_N \geqslant N : |y_{n_N}| \geqslant \varepsilon_0 \quad N = 1,2,3,\dots$

рассмотрим последовательность $\{y_{n_N}\} \cap O_{\varepsilon_0}(0) = \emptyset$, но $\{y_{n_N}\} \subset [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ – огр!$\Rightarrow \{y_n\}$ – огр. □

Ещё один пример доказательства предела на языке $\varepsilon - \delta$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim x \to 1\dfrac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt(x)-1)(\sqrt{x}+1)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2}$ Мы почитали этот предел, а теперь докажем это на языке $\varepsilon - \delta$

$\forall\varepsilon > 0\exists\delta = \delta(\varepsilon) : \forall x \quad 0 < |x-1| < \delta$ выполнено $\left|\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$

$\left|\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} - \dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right| = \dfrac{1}{2}\dfrac{|\sqrt{x}-1|}{|\sqrt{x}+1|} \leqslant \dfrac{1}{2}|\sqrt{x}-1| = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}|(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)| = \dfrac{1}{2}|x-1| < \dfrac{\delta}{2} = \varepsilon$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x} = \lim x \to 0\dfrac{y}{\tan y}$

$x_n \to 0 \overset{?}{\Rightarrow} y_n \to 0 \quad y_n = \arctan x_n$

При $x \to 0 \sin x \to 0, \cos x \to 1 \Rightarrow \tan x \to 0$ при $x \to 0$

$\sqsupset x_n \to 0 \quad |\arctan x_n| < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \exists$ сходящаяся подпоследовательность

$\exists\varepsilon_0 > 0 : \forall N (= 1,2,3)\exists n_N > N$ и $|y_{n_N}| > \varepsilon_0$

рассмотрим $y_{n_N} = \arctan x_{n_k} \to a$ – ограничена $\Rightarrow \exists$ сходящаяся подпоследовательность $y_{n_N} > 0$

Лемма 1.4. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e \quad (1^\infty)$

Доказательство. Классический вариант $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

$\lim\limits_{n\to-\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

$\forall x_n \to \pm\infty \quad \lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{1}{x_n})^{x_n} = e$ □

Следствие: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to\infty}(1\dfrac{1}{y})^y = e, \quad y = \dfrac{1}{x}$

Лемма 1.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Доказательство. $\lim\limits_{x_n\to 0}\dfrac{1}{x_n}ln(1+x_n) = \lim\limits_{x_n\to 0} ln(1+x_n)^{\dfrac{1}{x_n}} = lne = 1 \quad \forall x_n$ □

Следствие:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}=a$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$

ДЗ:

1. $y=\arcsin(\sin x)$ – нарисовать график
2. $y=\arctan(\tan x)$ – нарисовать график
3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\operatorname{ctg} x} \quad (1^{\infty})$
4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}}$
5. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x}$
6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$
7. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{ln(2+e^{3x})}{ln(3+e^{2x})}$
8. Прошлое дз (на фотке в беседе)

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

$x_n\to a\Rightarrow \ln x_n\to\ln a$

$f(x)\to A\Rightarrow \ln f(x)\to \ln A$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)^{\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cdot\ln(\sin x)}{\cos x}\overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\cos t\cdot\ln(\cos t)}{\sin t}=\lim_{t\to o}\frac{\cos t\cdot\ln(1+(\cos t-1))}{\sin t\cdot(\cos t-1)}\cdot(\cos t-1)\overset{y=\cos t-1}{=}$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{\cdot(\cos t-1)}{\sin t}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}\cdot\lim_{t\to 0}\cos t=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\cdot\frac{-(1-\cos t)^2}{t^2}\frac{-t^2}{t}=0$$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)^{\operatorname{tg} x}=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}=1$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

$\sqsupset y=e^x-1 \quad x\to 0\Rightarrow y\to 0 \quad e^x=1+y \quad x=\ln(1+y)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{ln(1+y)}\overset{3}{=}1$

Следствие 1.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\ln a}-1}{(x\cdot\ln a)}\cdot\ln a=\ln a$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha \quad \alpha\in\mathbb{R}\sqsupset y=(1+x)^{\alpha}-1 \quad x\to 0\Rightarrow y\to 0$

$(1+x)^{\alpha}=1+y \quad \alpha\ln(1+x)=\ln(1+y)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}=\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\frac{\ln(1+y)}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=1\cdot\alpha\cdot 1=\alpha$$

Следствие 1.2. *Покажем,* $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1},\alpha\neq 0$

$$(x^{\alpha})'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{\alpha}-x^{\alpha}}{\Delta x}=\lim\Delta x\to 0\frac{x^{\alpha}(1+\frac{\Delta x}{x})^{\alpha}-x^{\alpha}}{\Delta x}=x^{\alpha}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}\cdot x}=x^{\alpha-1}\cdot\alpha$$

$$x=0 \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(0+\Delta x)^{\alpha}-0^{\alpha}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^{\alpha-1}=\left[\begin{array}{ll}0 & \alpha>1\\ 1 & \alpha=1\\ \infty & \alpha<1\end{array}\right.$$

$$x^{\alpha-1}\cdot\alpha|_{x=0}=\left[\begin{array}{cc}0 & \alpha>1\\ 1=\alpha & \alpha=1\\ \infty & \alpha<1\end{array}\right.$$

Примеры:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1+\sqrt{\cos x}}\cdot\frac{cy^2}{1-\cos\sqrt{x}\cdot cy^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2\cdot x^2}\cdot x^2\cdot\frac{(\sqrt{x})^2}{1-\cos\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{(\sqrt{x})^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}=0$$

.

.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{3x}(2e^{-3x}+1))}{\ln(e^{2x}(3e^{-2x}+1))}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\ln(1+2e^{-3x})}{2x+ln(1+3e^{-2x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\dfrac{ln(1+2e^{-3x})}{x}}{2+\dfrac{\ln(1+3e^{-2x})}{x}}=\frac{3}{2}$$

.

.

$$\lim_{x\to 0}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{y\to\infty}\tfrac{e^y-1}{y}$$

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{-}1y=+\infty$$

ДЗ на 25.09.2018

1. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x^3-3}{x-e}$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1}{2\sin^2 x-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\sin x)}{3^{\operatorname{tg}x}-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-x^2}{x-2}$

$$\left(\frac{0}{0}\right)\quad\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+x}-\sqrt[4]{1+x}}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{5}}-1-((1+x)^{\frac{1}{4}}+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^{\frac{1}{5}}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{4}}-1}{x}=$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$$

$$\left(\frac{0}{0}\right)\quad\lim_{x\to-\frac{pi}{2}}\lim_{-\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x+1)^2}{(\sin x+1)(\sin x+2)}=\frac{0}{-3}=0$$

$$\left(\frac{0}{0}\right)\quad\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x^2-x}+\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}\frac{x}{x^2-x}+\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}\frac{x}{x^2-x}=$$

$$=\ln 2\cdot(-1)+\ln 3\cdot(-1)=-\ln 6$$

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\quad\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt[4]{x^3+1}+\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2-\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{1+\frac{3}{4}}\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+x^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x^2(1-\frac{\sqrt{x+2}}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{-\frac{1}{4}}\sqrt{1+x^{-3}}+x^{-1\frac{1}{3}}\sqrt{1-x^{-2}}}{1-\frac{\sqrt{x+2}}{x^2}}=0$$

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\quad\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{4})}{\operatorname{tg}2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left(\dfrac{\operatorname{tg}x+1}{1-\operatorname{tg}x}\right)}{\left(\dfrac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}\right)}\stackrel{t}{=}\operatorname{tg}x\lim_{t\to 1}\frac{(1+t)(1-t^2)}{(1-t)\cdot 2t}=\frac{2\cdot 2}{2}=2$$

$$(\infty-\infty)\quad\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$(\infty-\infty)\quad\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{4(x-2)}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{4-x-2}{4(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{4(x-2)(x+2)}=-\frac{1}{16}$$

$$(\infty-\infty)\quad\lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x-\tfrac{1}{\sin x})=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{2}\cdot 0\cdot 1=0$$

$$(\infty-\infty)\quad\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x}{x}-\frac{3^x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x}=\ln 2-\ln 3$$

$$(\infty\cdot ?)\quad\lim_{x\to\infty}x(\ln(1+x)-\ln x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\stackrel{t}{=}\tfrac{1}{x}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

$$\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{\infty}\right)\quad\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\operatorname{arctg}x=0$$

$(\infty \cdot 0) \quad \lim\limits_{\to\infty} x(2^{\frac{1}{x}} - 1) \overset{t}{=} \tfrac{1}{x} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2^t - 1}{t} = \ln 2$

$(1^\infty) \quad \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^A = e^{-1}$

$Limx\frac{\pi}{4} \ln(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} \cdot \ln(\operatorname{tg} x) \overset{\operatorname{tg} x}{=} 1 - t \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2(1-t)}{t(2-t)} \ln(1-t) = \dfrac{2\cdot(-1)}{2} = -1$

$(\infty \cdot 0) \quad \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\ln(1+2\operatorname{arctg} x(x\sqrt{x^5+x^2}))}{(1+\arcsin(x^2))^{\frac{3}{4}} - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x^2)}{\frac{3}{4}x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2}{\frac{3}{4}x^2} = \dfrac{8}{3}$

$\operatorname{arctg}(x\sqrt{x^5+x^2}) = \operatorname{arctg}\sqrt{x^7+x^4} \sim \operatorname{arctg} x \sim x^2$

$(1+\arcsin(x^2))^{\frac{3}{4}} - 1 \sim \dfrac{3}{4}\arcsin x^2 \sim \dfrac{3}{4}x^2$

$\dfrac{\arcsin x}{x} \to 1 \quad \arcsin x \sim x$

$\ln(1+t) \sim t \Rightarrow \ln(1+2x^2) \sim 2x^2$

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+\sqrt(2x)}{x+\sqrt{3x}}\right)^{\sqrt{x}} = e^A$

$A = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} \ln\left(\dfrac{x+\sqrt{2x}}{x+\sqrt{3x}}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} \ln\left(\dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}}{1+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}) - \ln(1+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}})}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \overset{t}{=} \tfrac{1}{\sqrt{x}} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+\sqrt{2}t) - \ln(1+\sqrt{3})}{t} =$

$\sqrt{2} - \sqrt{3}$

ДЗ:

- готовиться к работе по нахождению пределов.
- $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\arcsin 2x}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 3} - \sqrt{x^2 - 3x - 4})$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+2}{x^2-3}\right)^{x^2}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{\sin\frac{1}{x}} - 1)$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{\sin x} + 2^{2x} - 2}{x - \sqrt{x}}$

1.5 Односторонние пределы

$f : E \to \mathbb{R}$, $\sqsupset a$ – предельная точка E $\quad (E \cap \overset{\circ}{O}(a) \neq \emptyset$, где $\overset{\circ}{O}(a)$ – произвольная проколотая окрестность.

$f(x) \to A, (x \in E) \to a \iff \forall\varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{O}_\Delta(a) : \forall x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$

1.5.1 Левосторонний предел

$\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A \iff \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in E \cap (a-b, a)$ и $-\delta < x - a < 0$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon|$

1.5.2 Правосторонний

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A \iff \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in E \cap (a, a+b)$ и $-\delta < x - a < 0$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon|$

Если $a = 0$, то пишут просто $x \underset{x<0}{\to} -0$ и $x \underset{x>0}{\to} +0$

$sign\ x = \left[\begin{array}{ll} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{array}\right.$

$\lim\limits_{x\to+0} sign\ x = 1 \quad \lim\limits_{x\to-0} sign\ x = -1$

Теорема 1.6 (Признак существования $\lim f(x)$ при $x \to a$)**.** $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *– существует* $\Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f()$

Доказательство.

$\Rightarrow$ – очевидно, потому что определение полного предела не исключает возможности, что x только $< a$ или только $> a$, а тогда и будут получаться односторонние пределы.

$\Leftarrow$ От противного. $\sqsupset$ односторонние пределы существуют и равны, а полный предел не существует. Напишем отрицание существования предела.

$\exists \varepsilon_o > 0 : \forall\delta > 0 \exists x_\delta \in E \cap \overset{\circ}{O}(a)$ для которого $|f(x_\delta) - A| \geqslant \varepsilon_0$

В качестве $\delta = \dfrac{1}{n} \to 0, n \in \mathbb{N}$ и тогда $\exists x_n \in E \cap \overset{\circ}{O}_{\frac{1}{n}}(a) : |f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0$

Имеем бесконечное количество точек $\{x_n\}$. Каждое x_n либо > 0 либо < 0.

Ясно, $\exists\infty$ много номеров, для которых выполняется: либо $> a$ либо $< a$

Таким образом $\exists x_{n_k} : x_{n_k} < a$ либо $x_{n_k} > a$

Не умаляя общности (далее НУО) считаем, что $\exists x_{n_k} > a$

Но тогда получается, что нашлось такое $\varepsilon_0 > 0 : \forall\delta > 0 \exists x_{n_k} \in E \cap (a, a+\delta)$ и при этом $|f(x_{n_k}) - A| > \varepsilon_0$

Это означает, что $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ не существует.??!

□

Очевидные свойства переводятся на
Пример:

$$\left(\frac{0}{0}\right) \quad \lim_{x\to+0} \frac{\sqrt{x^2+x^3}}{x} = \lim_{x\to+0} \sqrt{\frac{x^2+x^3}{x^2}} = \lim_{x\to+0} \sqrt{1+x} = 1$$

$$\left(\frac{0}{0}\right) \quad \lim_{x\to-0} \frac{\sqrt{x^2+x^3}}{x} = \lim_{x\to-0} \left(-\sqrt{\frac{x^2+x^3}{x^2}}\right) = -1$$

Ещё один признак существования предела
последовательность $\{x_n\}$ – фундаментальная или последовательность Коши $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m \geqslant N \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$

Теорема 1.7. *Коши Последовательность x_n – сходится $\Longleftrightarrow$ x_n – фундаментальная последовательность*

Теорема 1.8. *Коши $\sqsupset f : E \to \mathbb{R}$, $\quad a$ – конечная предельная точка $a \in E$ Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ – конечный $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x', x'' \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E$ выолняется $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$*

Доказательство.

$\Rightarrow$ $\sqsupset \exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

т.е. по $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta : \forall x \in \overset{\circ}{O}(a) \cap E \quad |f(x) - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Теперь возьмём любые две точки $x'x'' \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E$

Рассмотрим $|f(x') - f(x'')| = |(f(x') - A) + (A - f(x''))| \leqslant |f(x') - A| + |A - f(x'')| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Leftarrow$ Воспользуемся я языком Гейне. Возьмём $\forall$ последовательность $x_n \in \overset{\circ}{O}(a) \cap E : x_n \to a$

Покажем, что последовательность $\{f(x_n)\}$ – фундаментальна

Берём $\forall\varepsilon > 0$ по условию $\exists\delta : \forall x'x'' \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E$ выполняется $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Так как $x_n \to a \Rightarrow \exists N : \forall n \geqslant N \quad x_n \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E$

Доказано: $\sqsupset n, m \geqslant N \Rightarrow x_n, x_m \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$

Таким образом $\{f(x_n)\}$ – фундаментальная

По теореме Коши $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

Покажем, что A не зависит от выбранной последовательности x_n, т.е. если взять два ряда: последовательности $\overline{x_n}, \overline{\overline{x_n}}$ $\quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} (\overline{x_n}) = \overline{A} \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(\overline{\overline{x_n}}) = \overline{\overline{A}}$

Рассмотрим последовательность $y_n = \{\overline{x_1}, \overline{\overline{x_1}}, \dots \overline{x_n}, \overline{\overline{x_n}}\}$

Очевидно $y_n \to a \Rightarrow y_n$ – фундаментальная $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = A$<...>

□

<...>

1.6 Сравнение асимптотического поведения функций

Определение 1.8. $\sqsupset f, g : E \to \mathbb{R}$

$\sqsupset a$ – предельная точка E. Если $\exists$ функция $\varphi(x) : E \to \mathbb{R}$ и такая $\overset{\circ}{O}(a) \cap E$ выполняется $f(x) = \varphi(x)g(x)$ То:

1. *Если $\varphi(x)$ локально ограничено в окрестности a, то говорят, что $f = O(g)$ при $x \to a$*

   f – O-большое от g (при x, стремящемся к a)

2. *Если $\varphi(x) \to 0$ при $x \to a$, то говорят, что $f = o(g)$ при $x \to a$*

   f – о-маленькое от g (при x, стремящемся к a)

3. *Если $\varphi(x) \to 1$ при $x \to a$, то говорят, что $f \sim g$ при $x \to a$*

   f (асимптотически) эквивалентно g (при x, стремящемся к a)

Определение 1.9. *Если одновременно $f = O(g) \& g = O(f)$ при $x \to a$, то говорят, что f, g zсравнимы при $x \to a$*

$f \asymp g$

Лемма 1.6. *1)$f = O(g)$ при $x \to a \iff \exists c > 0 \& \overset{\circ}{O}(a) \quad ())$, что выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant c|g(x)| \forall x \in \overset{\circ}{O}_a \cap E$ 2) $f = o(g)$ при $x \to a \iff \forall \varepsilon > o \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E$ выполняется $|f(x)| < \varepsilon |g(x)|$*

Доказательство. .
1)$f = O(g)$ при $x \to a$

$f(x) = \varphi(x)g(x)$, где $\varphi(x)$ – локально ограничена, т.е. $\exists C > 0$ и $\exists \overset{\circ}{O}; |\varphi(x)| \leqslant C \forall x \in \overset{\circ}{O}(a) \cap E$
Тогда $|f(x)| = |\varphi(x)g(x)| = |\varphi(x)| \cdot |g(x)| \leqslant C|g(x)| \Rightarrow |f(x)| \leqslant C|g(x)|$

Обратно: $\sqsupset$ выполняется $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$ Будем брать $x \in \overset{\circ}{O}(a) \cap E$
Заметим, что если $g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

Положим $\varphi(x) \overset{def}{=} \begin{cases} \dfrac{f(x)}{g(x)} & , g(x) \neq 0 \\ 0 & , g(x) = 0 \end{cases}$

$\varphi : \overset{\circ}{O}(a) \cap E \to \mathbb{R}$

Выполняется $f(x) = \varphi(x)g(x), \quad \forall x \in \overset{\circ}{O}(a) \cap E$
Покажем, что $\varphi(x)$ – локально ограничена $|\varphi(x) < C|$, где C взято из (4)
Если $g(x) \neq 0 \quad \varphi(x) = \dfrac{f}{g}$ и т.к. $|f| \leqslant C|g|$
Если $g(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) \leqslant C$
Таким образом в любом случае $|\varphi(x)| \leqslant C$ чтп 2)<...> □

В 99% практических задач встречается случай, когда $g(x) \neq 0$ в $\overset{\circ}{O}(a) \cap E$
Тогда можно дать "упрощённые"переформулировки для O-символ

1. $f = O(g)$ при $x \to a \iff \dfrac{f}{g}$ – локально ограниченная функция
2. $f = o(g) \iff \dfrac{f}{g} \to 0$ при $x \to a$
3. $f \sim g \iff \dfrac{f}{g} \to 1$ при $x \to a$

ДЗ:
Доказать:

1. $f \sim g$ – отношение эквивалентности
2. $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$
3. $f \sim g \iff f = g + o(g) \iff f = g + o(f)$
4. Если $f \sim \alpha g, \alpha \neq 0 \Rightarrow f \asymp g$
5. $o(g) + o(g) = o(g)$
   $o(g) - o(g) = o(g)$, а не 0!, как можно подумать . Привести пример
   $2O(g) = O(g)$
   $O(g)O(h) = O(gh)$

Вернёмся к замечательным пределам <...>

Теорема 1.9 (о замене на эквивалентное при вычислении пределов). *$\sqsupset f, g, \widetilde{f}, \widetilde{g} : E \to \mathbb{R}$*
$\sqsupset a$ – предельная точка E
$\sqsupset f \sim \widetilde{f}, g \sim \widetilde{g}$ при $x \to a$
$(f = \widetilde{f} + o(\widetilde{f}), g = \widetilde{g} + o(\widetilde{g}))$
Тогда справедливы равенства:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to a} \widetilde{f}(x)\widetilde{g}(x)$
2. *Если $\exists \overset{\circ}{O}(a)$ в которой $g(x) \neq 0$, то* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\widetilde{f}(x)}{\widetilde{g}(x)}$

Равенства надо понимать так: Предел стоящий справа и слева существует и не существует одновременно.

Доказательство. По определению эквивалентности $\exists \varphi(x) : f(x) = \varphi(x)\widetilde{f}(x)$ в некоторой $\overset{\circ}{O}_1(a) \cap E$ и $\varphi(x) \to 1, x \to a$
$\exists \psi(x) : g(x) = \psi(x)\widetilde{g}(x)$ в некоторой $\overset{\circ}{O}_2(a) \cap E$ и $\psi(x) \to 1, x \to a$
$\forall x \in \overset{\circ}{O}_1(a) \cap \overset{\circ}{O}_2(a) \cap E$
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) =$ <...> $\square$

Замечание 1.1. *Из теоремы не следует, что то же самое можно делать для $f(x) \pm g(x)$*
Вообще говоря $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) \pm \lim\limits_{x\to a}(\varphi(x)\widetilde{f}(x) \pm \varphi(x)\widetilde{g}(x))$
Пример: $a = +\infty \quad f(x) = x + 1 \quad \widetilde{f}(x) = g(x) = \widetilde{g}(x) = x \quad f \sim \widetilde{f}(x)$
$\lim\limits_{x\to+\infty}(f - g) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x + 1 - x) = 1$
$\lim\limits_{x\to+\infty}(\widetilde{f}(x) - \widetilde{g}(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x - x) = 0$
$(0 \cdot \infty, \dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty})$ – бро
$(\infty - \infty)$ – не бро

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\arcsin 3x-5x^3}{\sin 2x+\operatorname{tg}^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+o(x+x^2)+3x+o(3x)-5x^3}{2x+o(2x)+(x+o(x))^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4x+o(x)}{2x+o(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4+\frac{o(x)}{x}}{2+\frac{o(x)}{x}}=$$
$$=\frac{4+0}{2+0}=2$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+x}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}-3}\overset{y=x+1}{=}\lim_{y\to 0}$$

ДЗ на 16.10.2018:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{log(1+2arsin\ x^2)}{(\cos x)^{\frac{3}{2}}-1}$
2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}\frac{x}{2})^{\dfrac{1}{\cos x}}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^2-x-1}$

1.7 Формулы Тейлора

1. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dots+\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$
2. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dots+\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n})$
3. $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2+\dots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot n}$
4. $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$
5. $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dots 1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+o(x^n)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-\cos x}{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{-\frac{x^2}{8}+o(x^2)}=-8$$

1.8 Асимптоты

(асимптотическое представление функции на бесконечность)
$\sqsupset f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Определение 1.10. *Вертикальная прямая $x=a$ называется асимптотой, если $\exists\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ и $\exists\lim\limits_{x\to a-0}$ равные либо $+\infty$, либо $-\infty$*

Определение 1.11. $\sqsupset f:<a,+\infty)\to\mathbb{R}$
прямая $y=kx+b$ называется наклонной асимптотой функции $f(x)$ при $x\to+\infty$, если $f(x)=kx+b+o(1)$ при $x\to+\infty$

Асимптота при $x\to-\infty$ аналогично определяется
Если $k=0$, то асимптота называется горизонтальной

Утверждение 1.1. *$y=kx+b$ – асимптота функции f, если $f(kx+b)to0$*

Утверждение 1.2. *$y=b$ является горизонтальной асимптотой для f при $x\to+(-)\infty\iff\lim\limits_{x\to+(-)\infty}f(x)=b$*

Доказательство. $y = b$ является горизонтальной асимптотой для $f \iff f(x) = b + o(1), x \to +(-)\infty \iff \exists \lim\limits_{+(-)\infty \to f}(x) = b$ По теореме о преставлении предела.

$o(1)$ – любая бесконечно малая функция при $x \to +(-)\infty$ □

Примеры:

1. $y = \sin x$ – нет горизонтальной асимптоты, т.к. $\nexists \lim\limits_{x\to\infty} \sin x$
2. $y = \operatorname{tg} x$ – есть вертикальная асимптота (см. рисунок в вики)
3. $y = \sqrt{x}$ – $\nexists \lim\limits_{x\to\infty}$ <u>конечного</u>
4. $y = \ln x$ – $\nexists$ конечного $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x$
5. $y = \operatorname{arctg} x$ – $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2} \quad y = \dfrac{\pi}{2}$ – горизонтальная асимптота $\exists \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2} \quad y = -\dfrac{\pi}{2}$

Теорема 1.10. $\sqsupset f :< a, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$\text{прямая } y = kx + b \text{ будет наклонной асимптотой} \iff \begin{cases} \exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \\ \exists \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b \end{cases}$$

Доказательство.

$$\Rightarrow \sqsupset y = kx+b - \text{наклонная асимптота} \overset{def}{\Rightarrow} f(x) = kx+b+o(1) \Rightarrow \begin{cases} f(x) - kx = b + o(1) \\ \dfrac{f(x)}{x} = k + \dfrac{b}{x} + \dfrac{o(1)}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = b \\ \exists \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \end{cases}$$

$\Leftarrow$ По условию $\exists \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$

По условию $\exists \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = b \Rightarrow f(x) - kx = b + o(1) \Rightarrow f(x) = kx + b + o(1)$

□

1.9 Непрерывные функции

$\sqsupset f : E \to \mathbb{R}$

Определение 1.12. $\sqsupset x_0 \in E$ *Функция f называется <u>непрерывной</u> в точке x_0, если выполняется любое одно из следующих утверждений:*

1 Предел функции f в точке x_0 существует и равен $f(x_0)$ т.е. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ (это определение работает только для случая когда x_0 – предельная точка E)

язык $\varepsilon - \delta$ *2 $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in E \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (Если x_0 – изолированная точка $\Rightarrow$ из $|x - x_0| < \delta$ – достаточно мало $\Rightarrow x = x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ автоматически выполнено). Поэтому, если x_0 – изолированная точка E, то автоматически f будет непрерывна в x_0*

язык окрестностей *3 $\forall O_\varepsilon(f(x_1)) \exists O_\delta(x_0) : f(O_\delta \cap E) \subset O_\varepsilon(f(x_0))$ ($O_\delta \cap E = \{x | x \in E \& |x - x_0| < \delta\}$). Если δ мало то $E \cap O_\delta(x_0) = \{x_0\}$ и есть $f(x_0) \in O_\varepsilon(f(x_0))$*

язык Гейне *4 $\forall x_n \in E$ и $x_n \to x_0$ выполняется $f(x_n) \to f(x_0)$ (это тоже работает тогда, когда x_0 – предельная точка E)*

язык приращений *5 Бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции. Т.е. $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$. $x \in E \quad \Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$ (раз появляется $\Delta x \to 0 \Rightarrow x_0$ должна быть предельной точкой E)*

Из плодотворной и оживлённой дискуссии во время лекции $\Rightarrow$ все 5 определений эквивалентны.

Эквивалентность $1 \sim 2 \vee 3$ – определение $\lim$ Эквивалентность $4 \sim 2$ – эквивалентность $\varepsilon - \delta$ и языка Гейне 5 – другая переформулировка 1

Определение 1.13. *f называется непрерыной на множестве E, если она непрерывна в каждой точке E*
обозначение: $f \in C(E)$

Определение 1.14. *$\supseteq f : E \to \mathbb{R}, x_0 \in E$. Если f не является непрерывной в точке x_0, то x_0 называется точкой разрыва f. (f терпит разрыв в x_0, f разрывна в x_0)*

Определение 1.15. *$\supseteq f : E \to \mathbb{R}, x_0 \in E$*
Обозначим: $E_- = (-\infty; x_0] \cap E \quad E_+ = [x_0, +\infty) \cap E$
Если сужение ${}^f|_{E_-}$ – непрерывно в x_0, то говорят, что f непрерывно в x_0 слева
Если сужение ${}^f|_{E_+}$ – непрерывно в x_0, то говорят, что f непрерывно в x_0 справа

Замечание 1.2. *Если f непрерывна в x_0 слева $\Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} = f(x_0)$*
аналогично Если f непрерывна в x_0 справа $\Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} = f(x_0)$ (убедиться)

Замечание 1.3. *Помним: $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \\ \exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \end{cases}$ и они равны*
Из этого следует: f – непрерывна в $x_0 \Longleftrightarrow f$ непрерывна в x_0 слева и справа

Замечание 1.4. *обозначения:*
$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$
$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$

$\sqsupset x_0$ – точка разрыва

Определение 1.16. *Если $\exists$ конечные числа $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$, но не все 3 числа $f(x_0 - 0), f(x_0), f(x_0 + 0)$ равны между собой $\Rightarrow x_0$ – точка разрыва 1 рода*
разрыв первого рода также называют скачком
Существует терминология:
скачком называют разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$
$f(x_0 + 0) - f(x_0)$ – правый скачок
$f(x) - f(x_0 - 0)$ – левый скачок
Бывает, что f определена в проклотой окрестности x_0, но в x_0 не определена.
Если $\exists$ конечные $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$, которые не равны, то также говорят, что x_0 – точка разрыва 1 рода

Определение 1.17. *Если точка разрыва x_0 не является разрывом 1 рода, то x_0 – точка разрыва 2 рода*
т.е. Либо хотя бы одно из чисел $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ "равно"∞, либо вообще не существует
аналогично случаю разрыва 1 рода, если f определено в проколотой окрестности x_0, но не в самой x_0 и хотя бы одно из чисел $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ либо не существует либо "равен"∞, то x_0 также называется точкой разрыва 2 рода.

Определение 1.18. *$\sqsupset x_0$ – точка разрыва 1 рода и $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0 = A)$, но $f(x_0) \neq A$, тогда x_0 называют точкой устранимого разрыва (сам разрыв или скачок называется устранимым).*
Мотивация. Если у f поменять значение в x_0 на A(вместо x_0), т.е. рассмотреть функцию
$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), x \neq x_0 \\ A, x = x_0 \end{cases}$, то $\widetilde{f}$ становится непрерывна в x_0

Примеры:

1. $f(x) = signx = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$

   $x_0 = 0$ – разрыв 1 рода не устранимый

2. $f(x) = sign^2 x = \begin{cases} 1, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$ – устранимый разрыв

3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ – гипербола

   $f(-0) = -\infty \quad f(+0) = +\infty$ разрыв второго рода

   x_0 – разрыв второго рода (хоть функция в 0 не определена)

   Если $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, x \neq 0 \\ A, x = 0 \end{cases}$ всё равно 0 – разрыв 2 рода

4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad x_0 = 0 \quad f(-0) = f(0) = +\infty$ разрыв 2 рода

5. $f(x) \equiv \dfrac{x-1}{x^2-1}$ в $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$

   ясно $f = \dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1}{x+1}$

   $x_0 = -1$

   $f(-1-0) = \dfrac{1}{-0} = -\infty \quad f(-1+0) = \dfrac{1}{+0} = +\infty$

   $x_0 = 1$

   $f(1+0) = f(1-0) = \dfrac{1}{2}$ устранимый разрыв разрыв 2 рода

6. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$

   Теорема 1.11. $x_0 = 0$ *разрыв 2 рода, т.к.* $f(+0)$ $\nexists$

   Доказательство. $\neg\exists \lim\limits_{x\to+0} f(x)$ – надо доказать

   $\sqsupset x_n^{(1)} = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \to +0 \quad sin(\frac{1}{x_n^{(1)}}) = 1 \forall n$

   $\sqsupset x_n^{(2)} = \dfrac{1}{\pi n} \to +0 \quad \sin(\frac{1}{x_n^{(2)}}) = 0 \forall n$ □

7. $f(x) = x\sin x$ в $\widehat{\mathbb{R}}\backslash\{0\}$

   $x_0 = 0$ – 1 рода, устранимый ($f(+0) = f(-0) = 0 \quad |f(x)| \leqslant |x| \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm0} f(x) = 0$)

8. $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ на $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

   $f(-0) = 2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} = \dfrac{1}{2^{\infty}} = 0$

   $f(+0) = 2^{\frac{1}{+0}} = 2^{\infty} = \infty$

   $x_0 = 0$ – разрыв 2 рода

   $y = 1$ – горизонтальная асимптота

9. Функция Дирихле $\chi(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

   Лемма 1.7. *В любой точке из* $\mathbb{R}$ *у* χ *разрыв 2 рода*

   Доказательство. достаточно доказать, что в любой точке x_0 не существует $f(x_0+0)$

   (a) $x_0 \in \mathbb{Q} \quad x_n^{(1)} = x_0 + \frac{\pi}{n} \downarrow x_0 \quad \chi(x_n^(1) + 0) \to 0$
   $x_n^{(2)} = x_0 + \frac{1}{n} \downarrow x_0 + 0 \in \mathbb{Q} \quad \chi(x_n^{(2)} + 0) = 1 \neq 0 = \chi(x^{(1)} + 0)$

(b) $x_0 \notin \mathbb{Q}$
$\sqsupset r_n \in \mathbb{Q}$ и $r_n \to x_0 + 0$ – последовательность десятичных дробей
$\chi(r_n) \to 1, n \to \infty$
$\mathbb{Q} \not\ni x_n = x_0(1 + \frac{1}{n}) \quad \chi(x_n) \to 0, n \to \infty$ снова предела не существует

$\square$

Дз с 13 ноября:

1. Функция Римана $\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, x = \dfrac{p}{q1} - \text{несократимая} \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

   Доказать:

   - ψ непрерывна во всех иррациональных точек
   - имеет разрыв 1 рода во всех рациональных точках

2. Построить график и исследовать на разрывность/непрерывность

   $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2 - 1|}{x^2 - 1}, x \neq \pm 1 \\ 0, x = -1 \\ 1, x = 1 \end{cases}$$

3. Подобрать $k : f(x) = \dfrac{\sqrt{1 - 2x} - 1 + x}{x^k}$ была бы непрерывна в 0

1.9.1 Свойства непрерывных функций

$f : E \to \mathbb{R} \quad E \subset \mathbb{R}$
$x_0 \in E$ возможны два случая:

- x_0 – изолированная точка
- x_0 – предельная точка

Теорема 1.12. $\sqsupset f$ *– непрерывна в* $x_0 \Rightarrow f$ *– локально ограничена в* x_0

Доказательство. f – локально ограничена $\Longleftrightarrow \exists K \geqslant 0$ и $\exists$ окрестность $O(x_0) \quad |f(x)| \leqslant k \quad \forall x \in O(x_0) \cap E$

Если x_0 – изолированная точка, то всё очевидно, т.к. достаточно малая окрестность $O(x_0 \cap E = \{x_0\})$ и для этой окрестности $K = |f(x_0)|$ (т.к. $\forall x \in O(x_0) \cap E \Rightarrow x = x_0$ и $|f(x) = |f(x_0)| \leqslant k$) [для этого случая непрерывность не нужна]

$\sqsupset x_0$ – не изолированная точка. Воспользуемся определением непрерывности на языке $\varepsilon - \delta$

Возьмём $\varepsilon = 1$. По непрерывности $\exists \delta > 0 : \forall x \in O_\delta(x_0) \cap E \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < 1 \Rightarrow |f(x) < 1 + |f(x_0)|| \quad k = 1 + |f(x_0)||$

Т.о. мы нашли k и окрестность $O_\delta(x_0)$ $\square$

Теорема 1.13 (О стабилизации знака)**.** f *– непрерывна в* x_0 *и* $f(x_0) \neq 0$*, тогда* $\exists$ *такая окрестность* x_0*, в которой знак* $f(x)$ *совпадает со знаком* $f(x_0)$

Т.е. $iff(x_0) > 0 \Rightarrow \exists$ *окрестность* $O(x_0) : \forall x \in O(x_0) \cap E \quad f(x) > 0$
$iff(x_0) < 0 \Rightarrow \exists$ *окрестность* $O(x_0) : \forall x \in O(x_0) \cap E \quad f(x) < 0$

Доказательство. Рассмотрим случай $f(x_0) > 0 \quad (f(x_0) < 0$ – аналогично)

$\sqsupset \varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$ по определению непрерывности $\exists \delta : x \in O_\delta(x_0) \cap E$ выполняется $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$

Вспомним $|a| + |b| \geqslant |a - b| \geqslant ||a| - |b||$

$||f(x)| - |f(x_0)|| < \dfrac{f(x_0)}{2}$

$-|f(x)| + |f(x_0)| < \dfrac{f(x_0)}{2}$

$f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x)$

$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0 \quad \forall x \in O_\delta(x_0) \cap E$ □

Теорема 1.14 (Арифметические действия над непрерывными функциями)**.** $\sqsupset f, g : E \to \mathbb{R} \quad \sqsupset f, g$ – *непрерывны в* x_0

Тогда:

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha f(x) + \beta g(x)$ – *непрерывна в* x_0
2. $f \cdot g$ – *непрерывно в* x_0
3. *Если* $g(x_0) \neq 0$, *то* $\frac{f}{g}$ – *непрерывна в* x_0

Доказательство. Если x_0 – изолированная точка, то всё тривиально

$\sqsupset x_0$ – предельная точка E и воспользуемся языком Гейне

Возьмём произвольную последовательность $x_n \to x_0$

По непрерывности $f(x_n) \to f(x_0), g(x_n) \to g(x_0)$

Тогда из Теоремы об арифметических действиях над пределами следует $\alpha f(x_n) + \beta g(x_n) \to \alpha f(x_0) + \beta g(x_0)$ $f(x_n) g(x_n) \to f(x_0) \to g(x_0)$ и Если $g(x \neq 0)$, то $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{f(x-0)}{g(x_0)}$ это и означает непрерывность

Замечание к 3. Т.к. $g(x_0) \neq 0$ по теореме о стабилизации знака $g(x) \neq 0$ в некоторой окрестности $O(x) \Rightarrow$ функция $\frac{f}{g}$ корректно определена в $O(x_0)$ □

Класс элементарных функций:

1. Все многочлены (включая константы)
2. $a^x (a > 0)$
3. $\log_a x (a > 0, a \neq 1)$
4. $sinx, cosx$

---

5. Любая комбинация, произведение, частное элементарных функций снова считается элементарной (добавляются все рациональные функции $= \frac{\text{многочлен}}{\text{многочлен}}$ и все тригонометрические функции)
6. Композиция элементарных функций – элементарная функция.
   (добавляется $\lg(x+1) \quad lg(x^2 - 3x + 1) \quad x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$)

Теорема 1.15 (О непрерывности композиции)**.** $\sqsupset f : E \to M; g : M \to \mathbb{R}$

$E \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$\sqsupset f$ – *непрерывна в* $x_0 \in E$, *а* g *непрерывно в* $f(x_0) \in M \Rightarrow$ *композиция* $g \circ f = g(f(x))$ *непрерывна в* x_0

Доказательство. обозначим $y_0 = f(x_0)$ на языке последовательностей (Гейне).

Возьмём $x_n \to x_0$ Т.к. f – непрерывна в точке $x_0 \Rightarrow f(x_n \to f(x_0))$

$\sqsupset y_n = f(x_n)$, тогда $y - n \to y_0$

Т.к. g непрерывна в $y_0 \Rightarrow g(y_n) \to g(y_0)$

Окончательно $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$ Т.е. $g(f(x))$ – непрерывно в x_0 □

Пример: $f(x) = x \sin \frac{1}{x} \quad g(y) = |sign\ y|$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0, g(0) = 0$

Однако $\lim\limits_{x \to 0} g(f(x))$ – не существует !!! (=0?)

Это не всё: кто-то заявит, что это "понятно т.к. f не является непрерывной в 0

Другой парадокс: $\lim\limits_{y \to 0} g(y) = 1$ – существует!!

Но снова $\lim\limits_{x \to 0} g(f(x)) \neq 1$, т.к. он вообще не существует

Покажм, что $\lim\limits_{x \to 0} g(f(x))$ – не существует

$\sqsupset x_n = \dfrac{1}{\pi n} \quad f(x_n) = \dfrac{1}{\pi n}\sin \pi n = 0$
$g(f(x_n)) = 0 \to 0, n \to \infty$
$\sqsupset x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n} \to 0 \quad f(x_n) = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\cdot \sin(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n) = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n} > 0$
$g(f(x)) = 1 \to 1$

Теорема 1.16. *Все элементарные функции непрерывны на своей области определения*

Теорема 1.17 (1-ая Больцано-Коши о промежуточном значении)**.** $\sqsupset f \in C([a;b]), \sqsupset f(a), f(b) < 0$
Тогда $\exists c \in (a;b) : f(c) = 0$

Доказательство. Метод половинного деления Кантора
$\lessdot x_1 = \dfrac{a+b}{2}$ Если $f(x_1) = 0$ – теорема доказана
Если $f(x_1) \neq 0$, то оно либо > 0, либо < 0
Тогда берём отрезок либо $[a, x_1]$, либо $[x_1, b]$ так, чтобы выполнялось $f(a)f(x_1) < 0 \vee f(x_1)f(b) < 0$
В итоге получаем последовательность вложенных отрезков, где длина каждого следующего в два раза меньше предыдущего.
$[a, b] \supset [a_1, x_1] \supset [x_2, x_1] \supset \dots \supset [x_n, x_{n+1}] \supset \dots$
$|x_{n+1} - x_n| \leqslant \dfrac{b-a}{2^{n-1}}$
$\forall n \quad f(x_n)f(x_{n+1}) < 0$
По теореме Коши $\exists! c = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [x_n, x_{n+1}]$
Покажем, что $f(c) = 0$
От противного $\sqsupset f(c) \neq 0$
Тогда по тереме о стабилизации знака $\exists$ окрестность $(c-\delta, c+\delta)$ точки c, в которой $f(x)$ принимает тот же знак, что и $f(c)$
Ясно, что НСНМ $[x_n, x_{n+1} \subset (c-\delta, c+\delta)] \quad (x_n, x_{n+1} \to c) \Rightarrow f(x_n)f(x_{n+1}) > 0$, что невозможно
Т.О. $f(c) = 0$ ч.т.д. □

Доказательство. Будем считать для определённости, что $f(a) < 0 < f(b)$
$M \overset{def}{=} \{x | x \in [a, b], f(x) < 0\}$
$M \neq \emptyset$, т.к. $a \in M$
M – ограничено, не $\emptyset \Rightarrow \exists \sup M = c \in [a, b]$ –замкнутое
Покажем, что $f(c) = 0$
От противного. Если $f(c) > 0$, то по теореме о стабилизации знака $\exists (c-\delta, c+\delta) : f(x) > 0 \Rightarrow c$ – не sup для $f(x) < 0$, т.к. в любой окрестности sup должны лежать точки из M
Если $f(c) < 0$, то по теореме о стабилизации знака $f(x) < 0$ на $(c-\delta, c+\delta) \Rightarrow$ нашлись точки из M : $(c, c+\delta) \cap M \quad f(x < 0)$, но $x > c$
Это невозможно, т.к. c наибольшее из таких чисел □

Теорема 1.18 (2-ая Больцано-Коши о промежуточном значении)**.** $\sqsupset f \in C([a;b])$ *Тогда* $\forall$ *числа* c *, лежащего между числами* $f(a)$ *и* $f(b) \exists x \in [a, b] : c = f(x)$
Иными словами, непрерывная функция принимает все значения, заключённые между $f(a)$ *и* $f(b)$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = f(x - c)$ Ясно, что $g \in C([a, b])$
Т.к. c лежит между $f(a)$ и $f(b)$, то $(f(a) - c)(f(b) - c) < 0 \iff (f(a) < c < f(b) \vee f(a) > c > f(b)) \iff g(a)g(b) < 0$
Тогда по 1-ой ТБК $\exists x \in (a, b) : g(x) = 0 \iff f(x) = C$ (нашлось значение) □

Следствие 1.3 (Лемма о сохранении промежутка)**.** *Непрерывный образ промежутка есть снова промежуток*

Доказательство. $< a; b >$ – промежуток $(a \geqslant -\infty, b \leqslant +\infty)$ – Связное множество (т.е. без дыр)

Лемма 1.8. *Характеристическое свойство промежутка –* I *– промежуток* $\iff \forall x_1, x_2 \in I$ *выполняется* $[x, x_2] \subset I$.

Доказательство.

$\Rightarrow$ Это следует из определения промежутка.

I – промежуток $\iff I =< a, b >= \{x \mid a \overset{\leqslant}{<} x \overset{\leqslant}{<} b\}$

$a \leqslant x_1 \leqslant xb \quad a \leqslant x_2 \leqslant b \Rightarrow \forall x \in [x_1, x_2] \quad a \leqslant x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \leqslant b$

Т.е. $[x_1, x_2] \in < a, b >$

$\Leftrightarrow$ $\sqsupset a = \inf \ I, b = \sup I$ (может быть, что $a = -\infty \vee b = +\infty$)

Ясно, что $I \subset [a; b]$ Если $a = -\infty \vee b = +\infty$, то пишем '(', ')'

Покажем, что $(a, b) \subset I$, тогда понятно, что I либо совпадает с (a, b) и это промежуток, либо I получается из (a, b) добавлением одной или двух точек из a и b

Т.е. $I = [a, b\rangle \vee \langle a, b] \vee [a, b]$ и это тоже промежуток

$\sqsupset x \in (a, b) \Rightarrow a < x < b$

т.к. $a = \inf I \Rightarrow \exists x_1 \in I : a < x_1 < x$

аналогично $b = \sup I \Rightarrow \exists x_2 \in I : x < x_2 < b$

Т.о. нашёлся отрезок $[x_1, x_2] \ni x$ и такой что $x_1 \in I, x_2 \in I$ По условию $[x - 1, x_2 \in I] \Rightarrow x \in I$ Т.о. $(a, b) \in I$

□

Возвращаемся к лемме.
$\sqsupset I = f(< a, b >)$
берём $c_1 \in I \Rightarrow \exists x_1 \in < a, b >: f(x - 1 = c_1)$
$c_2 \in I \Rightarrow x_2 \in < a, b >: f(x_2) = c_2$
По Т2БК $\forall c \in [c_1, c_2] \exists x \in < a, b > \quad f(x) = c$, т.е. $c \in f(< a, b >)$, т.е. $[c_1, c_2] \subset f(< a, b >) \Rightarrow f(< a, b >)$ – промежуток □

Теорема 1.19 (1-ая Теорема Вейрштрасса). $\sqsupset f \in C([a, b]) \Rightarrow f$ *– ограничено на* $[a, b]$

Доказательство. От противного. $\sqsupset f$ – неограничена $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a, b] : |g(x_n)| > n$
Рассмотрим последовательность $\{x_n\} \subset [a, b] \Rightarrow$ это ограниченная последовательность
По теореме Больцано-Коши из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to x^*$. Т.к. $[a, b]$ – замкнутое множество $\Rightarrow x^{\in}[a, b]$
Т.к. f – непрерывно $\Rightarrow f$ – локально ограничено, в частности в окрестности точки $x^* \exists K$ и $O_\delta(x^*) : \forall x \in O_\delta(x^*) |f(x)| \leqslant K$
с другой стороны $x_{n_k} \to x^* \Rightarrow$ НСНМ $x_{n_k} \in O_{\delta(x^*)}$ при этом $|f(x_{n_k})| > n_k \to +\infty$
Это несовместимо с неравенством $|f(x_{n_k})| \leqslant K$?!! □

Теорема 1.20 (2-ая Теорема Вейрштрасса). *Непрерывная функция на отрезка принимает (достигает) своих наибольших и наименьших значений*
$m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x), M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$ *Тогда* $\exists x_1, x_2 \in [a, b] : m = f(x - 1), M = f(x_2)$
$\inf\limits_{[a,b]} = \min\limits_{[a,b]}$, *т.е.* $\exists \max\limits_{[a,b]} f(x) = f(x_2) - \sup\limits_{[a,b]} f$

Доказательство. Докажем, что достигается M (для m надо рассмотреть просто $-f(x)$)
Т.к. $M = \sup f \Rightarrow \forall x \in [a, b] \quad f(x) \leqslant M$
Предположим противное $\forall x \in [a, b] f(x) < M$
Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)} > 0$, т.к. знаменатель $\neq 0$, то это снова непрерывная функция на $[a, b]$
По Т1БВ она ограничена $\Rightarrow \exists \mu > 0 : g(x) \leqslant \mu$
$\dfrac{1}{M - f(x)} \leqslant \mu \Rightarrow \dfrac{1}{\mu} \leqslant M - f(x)$
$\Rightarrow f(x) \leqslant M - \dfrac{1}{\mu}$ выполнятеся $\forall x \in [a, b]$
$\sup\limits_{[a,b]} f(x) \leqslant M - \dfrac{1}{\mu}$, а он равен M??! □

Теорема 1.21. *Если $f(x)$ непрерывна и обратима на $[a,b]$, то обратная к ней тоже непрерывна*

Более аккуратно $\sqsupset$ $f \in C([a,b])$ *и* $f : [a,b] \to [A,B]$ *и* f *– обратима* : $\exists f^{-1} : [A,B] \to [a,b]$ *Тогда* $f^{-1} \in C([A,B])$

Доказательство. $y = f(x) \quad x = f^{-1}(y)$

Замечание 1.5. $f([a;b]) = [A;B]$ *это следует из предыдущей теоремы*

$\sqsupset y_0 \in [A;B]$ по теореме о промежуточном значении $\exists x_0 \in [a;b] : y_0 = f(x_0)$
Возьмём $\forall \varepsilon > 0$ и $\lessdot (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$
$\sqsupset \sigma > 0$ такое маленькое число $[x_0 - \sigma, x_0 + \sigma] \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$
$\lessdot f([x_0 - \sigma, x_0 + \sigma]) = [\alpha, \beta]$ т.к. непрерывный образ отрезка – отрезок
Ясно, что $y_0 \in (\alpha, \beta) \quad (y_0 \neq \alpha$ иначе $y_0 = f(x_0) = f(x_0 - \sigma)$ аналогично $y_0 \neq \beta \quad f$ – биекция?!)
А теперь, наконец, подумаем, что же надо доказать?
f^{-1} – непрерывна в $y_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f^{-1}(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$
Так мы это уже и доказали: по $\forall \varepsilon$ мы нашли $\delta : y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset [\alpha, \beta] \Rightarrow x = f^{-1}(y) \subset [x_0 - \sigma, x_0 + \sigma] \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ что и требовалось доказать ☐

Следствие 1.4 (Непрерывность обратных элементарных функций).

- $y = x6n, n > 0$ *на* $[0, +\infty), \uparrow \Rightarrow$ *она обратима и непрерывна (мы это знаем из того* $\forall x_n^\alpha \to x_0^\alpha$ *и эквивалентность языка Гейне и языка* $\varepsilon - \delta$*)*$\Rightarrow x^{\frac{1}{n}}$ *– непрерывна (т.е.* $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$ *и т.д.)*

- *Если мы доказали, что* e^x *– непрерывна и возрастает, то из этого уже бы следовало, что* $\ln x$ *непрерывна*

- $f = \sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$

  $f \uparrow$ *и непрерывна* $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$

  $\exists f^{-1} = \arcsin : [-11] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \uparrow$

  $\arcsin$ *– непрерывен* $f(x) = a \iff x = f^{-1}(a)$

  $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

- $f = \cos|_{[0,\pi]}, \downarrow$

  $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$

  $\exists f^{-1} = \arccos$

  $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$

  $\arccos(-x) =$

  $\arccos \downarrow$ *и непрерывен*

- $f = \mathrm{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}: (-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}, \uparrow$

  $\exists f^{-1} = \mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \uparrow$*, непрерывен*

  вертикальные асимптоты tg *превращаются в горизонтальные асимптоты* arctg

- $f = \mathrm{cth}|_{(0,\pi)}$

  $\exists f^{-1} = \mathrm{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi), \downarrow$*, непрерывен*

  вертикальные асимптоты переходят в горизонтальные

Теорема 1.22 (Непрерывность, обратимость, монотонность)**.** *Если f непрерывна на $[a,b]$ и обратима на нём, то f монотонна (строго) на $[a,b]$*

Доказательство. От противного $\Rightarrow \exists x_1 < x_2 < x_3$, в которых будет реализовываться следующие картинки
$\sqsupset c \in (min\{f(x_1), f(x_3)\}, f(x_2))$ По теореме о промежуточном значении $\exists x' \in (x_1, x_2) : c = f(x')$
$\exists x'' \in (x_2, x_3) : c = f(x'') \Rightarrow f(x') = f(x'')$, но $x' \neq x''$ это противоречит обратимости. ☐

Теорема 1.23 (Теорема о непрерывности монотонной функции)**.** $\sqsupset f :< a; b >\to \mathbb{R}$ *– монотонная*

Тогда она не может иметь разрывов 2 рода и непрерывность функции f равносильно тому, что множество значений, т.е. $f(< a; b >)$, есть промежуток

Доказательство. Пусть для определённости она монотонно возрастающая. В противном случае нужно рассматривать $-f$

$\sqsupset x_0 \in (a; b >\quad \sqsupset x_1 \in < a; x_0)$

Тогда $\forall x \in (x_1, x_0)$ выполняется, что $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_0)$

$\forall x_n \in (x_1, x_0)$ и $x_n \uparrow x_0$

получаем $f(x_1) \leqslant f(x_n) \leqslant f(x_0)$ и $f(x_n) \uparrow$

По теореме Больцано-Вейрштрасса $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

Для $\forall$ другой последовательности $\overline{x_n} \uparrow x_0$

$\lim f(\overline{x_n}) = \lim f(x_n)$ – совпадают

$x_1 < \overline{x_1} < x_2 < \overline{x_2} < \dots$

$\sqsupset x_0 \in < a; b), \sqsupset x_2 \in (x_0, b >$ и аналогично доказываем $\exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$ □

$$\frac{(x^3+1)(x^2-4x+3)}{x^2-6x+8} \geqslant 0$$

$$\frac{(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)} \geqslant 0$$

метод интервалов

$a_n t^n + \ldots + a_0 = 0 \quad a_n, a_0 \in \mathbb{Z}$

$$t = \frac{p}{q} \Rightarrow \begin{cases} a_0 \vdots p \\ a_n \vdots q \end{cases}$$

Теорема 1.24. *Любое уравнение нечётной степени имеет хотя бы один вещественный корень*

1.10 Равномерная непрерывность

Обычной непрерывности может не хватать. Например $f(x)_n = x^n \to \begin{cases} 1, x = 1 \\ 0, 0 \leqslant x < 1 \end{cases}$

Определение 1.19. $\sqsupset f : E \to \mathbb{R}$

f – непрерывна на $E \iff f$ – непрерывна в $\forall$ точке E

т.е. $\forall \overline{x} \in E \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, \overline{x}) : \forall x \in O_\delta(\overline{x}) \cap E \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(f(\overline{x}))$

В двух словах равномерная непрерывность $\iff \delta$ не зависит от $\overline{x}$, т.е для всех точек $\overline{x}$ из $E\quad \delta$ можно выбрать одинаковой (по ε

Определение 1.20. *f – равномерно непрерывно на множестве $E \iff \forall \overline{x} \in E, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \underline{\delta(\varepsilon)} > 0$ (δ зависит только от ε)*: $\forall x \quad |x - \overline{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon$

Лемма 1.9 (равносильное определение)**.** *f – равномерно непрерывна на $E \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \overline{x}\overline{\overline{x}} \in E \quad |\overline{x} - \overline{\overline{x}}| < \delta \Rightarrow |f(\overline{x}) - f(\overline{\overline{x}})| < \varepsilon$*

Доказательство.

- $\Leftarrow$ очевидно (считаем, что $x - \overline{\overline{x}}$)
- $\Rightarrow$ Если по любому $\overline{x}$ и по любому ε выбрать $\delta = \delta(\varepsilon)$, то

  $\forall \overline{x} \in E \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall \overline{\overline{x}} \in E \quad |\overline{\overline{x}} - \overline{x}| < \varepsilon \Rightarrow |f(\overline{\overline{x}}) - f(\overline{x})| < \varepsilon$ Квантер для $\overline{\overline{x}}$ можно занести внутрь, получив утверждение из леммы

□

Замечание 1.6. *Из равномерной непрерывности, конечно же, следует обычная непрерывность.*

Обратное неверно (будут примеры).

Теорема 1.25 (Кантор)**.** *Если f определена на отрезке $[a; b]$ и непрерывна на нём, то она равномерно непрерывна на отрезке*

Доказательство. $\sqsupset f \in C([a;b])$

От противного.Напишем отрицание определения равномерной непрерывности(из леммы):

$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists \overline{x}_\delta, \overline{\overline{x}}_\delta \in [a;b]; |\overline{x}_\delta - \overline{\overline{x}}_\delta| < \delta$, но $|f(\overline{x}_\delta) - f(\overline{\overline{x}}_\delta)| \geqslant \varepsilon_0 \quad (*)$

Будем брать $\delta = \dfrac{1}{n} \to 0, n \in \mathbb{N}$

Получим $\exists \overline{x}_n, \overline{\overline{x}}_n : |\overline{x}_n - \overline{\overline{x}}_n| < \dfrac{1}{n} \Rightarrow |f(\overline{x}_n) - f(\overline{\overline{x}}_n)| \geqslant \varepsilon_0$

Мы имеем две последовательности $\{\overline{x}_n\}$ и $\{\overline{\overline{x}}_n\}$ из отрезка $[a;b]$

Из $\{\overline{x}_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность

$\sqsupset \overline{x}_{n_k} \to c \in [a;b]$

Тогда и $\overline{\overline{x}}_{n_k} \to x$, т.к. $|\overline{x}_{n_k} - \overline{\overline{x}}_{n_k}| < \dfrac{1}{n_k} \to 0$

$|\overline{\overline{x}}_{n_k} - c| = |\overline{\overline{x}}_{n_k} - \overline{x}_{n_k} + \overline{x}_{n_k} - c| \leqslant |\overline{\overline{x}}_{n_k} - \overline{x}_{n_k}| + |\overline{x}_{n_k} - c|$ Первое слогаемое стремится к 0, т.к. $< \dfrac{1}{n_k} \to 0$. А второе стремится к 0, т.к. $c = \lim \overline{x}_{n_k}$

Тогда $|f(\overline{x}_{n_k}) - f(\overline{\overline{x}}_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0 \quad (*)$

f – непрерывна и монотонно убывает $n_k \to \infty$

$|f(c) - f(c)| \geqslant \varepsilon_0 \quad 0 \geqslant \varepsilon_0$ странно □

1.10.1 Примеры

1. $f(x) = x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – равномерно непрерывно

   $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \varepsilon \quad |\overline{x} - \overline{\overline{x}}| < \delta \Rightarrow |f(\overline{x}) - f(\overline{\overline{x}})| = |\overline{x} - \overline{\overline{x}}| < \varepsilon?$

2. Но $f(x) = x^2$ – не равномерно непрерывная на $\mathbb{R}$ (но само x^2 непрерывно на $\mathbb{R}$).

   Возьмём $\varepsilon_0 = 1$, возьмём $\forall \delta > 0$

   $\sqsupset \overline{x} = \dfrac{1}{\delta}, \overline{\overline{x}} = \dfrac{1}{q} + \dfrac{\delta}{2}$

   Тогда $|\overline{x} - \overline{\overline{x}}| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$

   Но $|f(\overline{x}) - f(\overline{\overline{x}})| = |(\overline{x} - \overline{\overline{x}})(\overline{x} - \overline{\overline{x}})| = \left|\dfrac{\delta}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{\delta} + \dfrac{1}{\delta} + \dfrac{\delta}{2}\right)\right| = \left|\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\delta^2}{4}\right| > \varepsilon_0$

Определение 1.21. *Колебания $f(x)$ н $\langle a, b\rangle$* $\quad \omega_{\langle a,b\rangle}(f) = \sup\limits_{\overline{x}, \overline{\overline{x}} \in \langle a,b\rangle} |f(\overline{x}) - f(\overline{\overline{x}})|$

ДЗ(прошлый листок):

1. 572.1
2. 573.1
3. 574.1
4. 579.1

Глава 2

Дифференциальные исчисления (функции от одной переменной)

2.1 Дифференцируемость

Определение 2.1 (Скорость). $\upsilon = \dfrac{S}{t}$ *– средняя скорость на отрезке. Непригодно для характеризации движения.*

Определение 2.2 (Мгновенная скорость). $\exists \lim\limits_{\Delta t \to 0} \upsilon_{ср} = \upsilon_{мгн}$

$s(\Delta t) = x(t + \Delta t) - x(t) = \Delta x$

$\upsilon_{мгн} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{x(t + \Delta t) - x(t)}{x(t)} = \dot{x}(t)$ *– флюксия (Ньютон), производная.*

Определение 2.3 (ускорение). $a(t) = \dot{\upsilon}(t) = \ddot{x}(t)$

$m\ddot{x}(t) = F(t, x(t), \dot{x}(t))$

Ньютон изобрёл дифференциальные уравнения.

2.1.1 Задача о касательной (Лейбниц)

Определение 2.4. *Касательная – предельное положение секущей*

$(x_), f(x_0))$ и $(x_1, f(x_1))$

$\dfrac{y - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ по подобности треугольников.

$l_{x_1}(x) : y = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0) + f(x_0), x_1 \to x_0$

$l_{x_0} \exists \Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{x_1 \to x_0} \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$

Определение 2.5 (Определение 1). $\sqsupset f :< a, b > \to \mathbb{R}$

$\sqsupset x_0 \in< a, b >$ *Если* $\exists$ *число A: выполняется* $f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$, *то говорят, что:*

1. *f дифференцируется в x_0*
2. *Число A – называется производной функции f в x_0*

Определение 2.6 (Определение 2). $\sqsupset f :< a, b > \to \mathbb{R}$

$\sqsupset x_0 \in< a, b >$. *Если* $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, *то f называется дифференцируемой, а конечное значение предела называют производной f в точке x_0.*

Теорема 2.1. *Два определения выше эквивалентны*

Доказательство.

1. $\Rightarrow$ Пусть выполняется (1)

   Во-первых $o(x-x_0) = \varphi(x)\cdot(x-x_0), \varphi(x) \to 0, x \to x_0$

   $f(x) - f(x_0) = A\cdot(x-x_0) + \varphi(x)\cdot(x-x_0) \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A + \varphi(x) \to A, x \to x_0 \Rightarrow$ предел из 2-го определения существует и равен A

2. $\Leftarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A \in \mathbb{R}$

   $$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - A & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{cases}$$

   Из 2-го определения следует, что $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$ и Т.О. $\varphi(x)$ непрерывна в x_0

   Тогда $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A + \varphi(x) \Rightarrow f(x) = f(x_0) + A\cdot(x-x_0) + \varphi(x)\cdot\underbrace{(x-x_0)}_{o(x-x_0)}$, т.к$\varphi(x) \to 0, x \to x_0$

   Т.е. выполняется равенство из 1-го определения

$\square$

Замечание 2.1. *В виду теоремы о единственности предела получаем, что производная в точке определяется однозначно*

Обозначения для производной:

$f'(x_0)$	Лагранж
$\dfrac{df(x_0)}{x_0}$	Лейбниц
$Df(x_0)$	Коши
$\dot{x}(t)$	Ньютон

В последнем примере $x(t)$ – функция от времени t

Дробь $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ – разностное отношение

Введём обозначение: $u = f(x), y_0 = f(x_0) \quad \Delta y = y - y_0 = \Delta_{x_0} f$ – приращение функции (в точке x_0)

А тогда предел из второго определения можно записать следующим образом :

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta_{x_0} f}{\Delta x} = f'(x_0)$

Также производной от f называется сопоставление $x \to f'(x)$

Найти $(x^2)'$ (обычно (2) удобнее, чем (1))

$\lhd \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{x^2 + 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x + \Delta x) = 2x$

ДЗ – посчитать производные:

1. $(x^n)', n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{R}$
2. $(\sqrt{x})'$
3. $\left(\dfrac{1}{x}\right)'$
4. $(\sin x)' = \cos x$ и вывести из неё $(\cos x)' = \sin x$
5. $(e^x)' = e^x$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \quad (*)$

Определение 2.7. *Рассмотрим приращение функции f в точке x_0 как функцию от Δx :* $\quad (\Delta x_0 f)(\Delta x)$
Если f дифференцируема в точке x_0, то справедлива формула$(*)$ (это просто определение)
$(\Delta_{x_0} f)(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \qquad f'(x_0)\Delta x$ *– линейная/главная часть*
Дифференциалом f в точке x_0 называется линейная (главная) часть приращения f, т.е. $f'(x_0)\Delta x$
Понимаем так: Дифференциал – линейная функция от Δx
Обозначение: коротко df, целое $d_{x_0} f$, подробное $(d_{x_0} f)\Delta x$
$(d_{x_0} f)(\Delta x) \overset{def}{=} f'(x_0)\Delta x \quad (**)$
Более абстрактно $(d_{x_0} f)h = f'(x_0) \cdot h \forall h \in \mathbb{R}$
$\sqsupset f(x) = x \quad f'(x) = 1 \qquad (d_{x_0} x)(\Delta x) = \Delta x$ *позволяет сделать отождествление $\Delta x = dx$*
$(**) \iff (d_{x_0} f) = f'(x_0)dx$ *или совсем коротко $df = f'dx$*
Эта формула оправдывает обозначение Лейбница для производной $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$ – это <u>дробь</u>
dx – конечное приращение $\forall \qquad df(x) = (d_x f)(dx) = f'(x) \cdot dx$ – конечно

Вычислить дифференциал функции x^2 в точке $x_0 = 1$ для приращения $dx = 3 \qquad dx^2 = 2xdx$
$(d_{x_0} x^2)h = 2 \cdot x_0 \cdot h \quad (d_2 x^2)(3) = 2 \cdot x \,|_{x=1} \cdot 3 = 6$
ДЗ:

1. Написать функцию, которая дифференцируема только в нуле

<...>

Допускается, чтобы $f'(x_0), f'_+(x_0) \vee f'_-(x_0)$ равны $\pm\infty$
Но диффиренцируемость означает $\exists$ <u>конечная</u> производная
Функция $f(x)$ называется <u>гладкой</u> на $\langle a, b\rangle$, если дифференцируема на $\langle a, b\rangle$
Класс гладких функций $C^2(\langle a, b\rangle)$

Лемма 2.1. *Если функция дифференцируема в $x_0 \Rightarrow f$ – непрерывна в x_0*

Доказательство. По определению дифференцируемости $f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$
$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \lim\limits_{x\to x_0} o(x - x_0) = 0$
Т.О. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f$ − непрерывна в x_0 ☐

Примеры:

1. $f(x) = x^2 \quad$ покажем, что $f \in C^1(\mathbb{R})$
   $\Delta f = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = 2x_0\Delta x + o(\Delta x)$
   выпишем определение дифференцируемости $f'(x_0) = 2x_0 \quad x_0 \in \mathbb{R}$ − любое
   или $f'(x) = 2x$

2. $f(x) = \sqrt{x} \in C^1(0, +\infty)$ в $x_0 = 0 \quad f'(0) = +\infty \Rightarrow$ дифференцируемости нет
   $\sqsupset x_0 \neq 0$
   $$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} - -\exists$$
   Т.О. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
   Если $x_0 = 0 \quad f'(0) = f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x\to +0} \dfrac{\sqrt{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta\to +0} \dfrac{1}{\sqrt{\Delta x}} = +\infty$
   Кстати, $\sqrt{x}$ в 0 непрерывен, таким образом из нерперрывности $\not\Rightarrow$ дифференцируемость

3. $f(x) = |x| \in C^1(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, а в 0– не дифференцируема
   $$x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \Rightarrow \begin{cases} x \in (0, +\infty & f(x) = x \qquad f'(x) = 1 \\ x \in (-\infty, 0) & f(x) = -x \quad f'(x) = -1 \end{cases}$$
   $x = 0 \quad f'(0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ − не $\exists$
   $f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x\to +0} \dfrac{+\Delta x}{\Delta x} = +1, \qquad f'_-(0) = \lim\limits_{\Delta x\to -0} \dfrac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$
   Лево- и право-сторонние производные существуют, но производной f' – нет

∀ $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$

$f'(0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} sin\dfrac{1}{\Delta x}$ – не сущетсвует даже односторонней, но при этом есть непрерыность

5 Согласно лемме: дифференцируемость в точке $\Rightarrow$ непрерывность

но $\exists$ произодная в точке $\not\Rightarrow$ непрерыность в точке

$f(x) = signx$ в $x = 0$

$f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x\to +0} = \dfrac{sign\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\Delta x} = +\infty$

$f'_-(0) = \lim\limits_{\Delta x\to -0} = \dfrac{sign\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-1}{\Delta x} = -\infty$

2.1.2 К задаче о касательной

Определение 2.8. $\supseteq f$ *– дифференцируема в* x_0

касательная к f *в точке* $(x_0, f(x_0))$ *(обычно говорят коротко: в точке* x_0*) называется прмая, задаваемая формулой* $y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$

Обсуждение: $\triangleleft$ множество всех прямых, проходящих через $(x_0, f(x_0))$
$y = k(x - x_0) + f(x_0), k$ – угловой коэффициент, параметр
Поставим вопрос: Какая прямая "лучше"всего приближает график f в окретсности точки $(x_0, f(x-0))$
$\triangleleft f(x) - k(x - x_0) - f(x_0) = (f(x) - f(x_0)) - k(x - x_0) = f'(x-0)\cdot(x - x_0) + o(x - x_0) - k(x - x_0) = (f'(x_0) - k)\cdot(x_0) + o(x - x_0) \overset{def}{=} \Delta$
Если $f'(x_0) \neq k \quad \Delta = O(x - x_0)\ \dfrac{\Delta}{x - x_0} \to f'(x_0) - k \neq 0$
Если $f'(x_0) = k \quad \Delta = o(x - x_0)!\ \dfrac{\Delta}{x - x_0} \to 0$
Лучше 2-ой вариант
Т.О. $f(x) - k(x - x_0) - f(x_0) = o(x - x_0) \Longleftrightarrow k = f'(x_0)$ и прямая касательная
Заметим, что уравнение касательной возникает в самой формуле дифференцируемости
$f(x) = \underbrace{f(x_0) + A\cdot(x - x_0)}_{\text{уравнение касательной}} + o(x - x_0)$
Уравенние касательной – линейные члены разложения в ряд Тейлора.
Факт: $\exists$ касательная $\Longleftrightarrow$ дифференцируемость в x_0
Если $f'(x_0) = \pm\infty$, то можно говорить о вертикальной касательной
$f(x) = \sqrt[3]{x}$
$f'(x) = \dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$
$f'(0) = \infty$
Если $\exists f'_\pm(x_0)$, то можно говорить о лево и право сторонних касательных
$y = |x|$
$y = -x$ – касательная ко всем точкам $(-\infty, 0)$ и левосторонняя касательная в 0
$y = x$ – касательная ко всем точкам $(0, +\infty)$ и правосторонняя касательная в 0
$f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, то касательная "терпит"скачок
График имеет угол $\Rightarrow$ т.е. он не гладкий

Замечание 2.2. $f(x) = \sqrt{|x|}$
$f'_+(0) = +\infty \qquad f_-(0) = -\infty$
не гладкая, хотя лево и право сторонние касательные в 0 совпадают. Касательные меняются непрерывно, но это не означает гладкость функции

2.2 Правила Дифференцирования

1. Пишем x вместо x_0
2. $\Delta x \longleftrightarrow h$
3.

Предложение 2.1. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

Доказательство. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(f\pm g)(x+h) - (f\pm g)(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(f(x+h)-f(x)) \pm (g(x+h)-g(x))}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \pm$
$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) \pm g'(x)$
Т.О. если $\exists f', g' \Rightarrow \exists (f\pm g)'$ □

Следствие 2.1. $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)\right)' = \sum\limits_{k=1}^{n} f'_k(x)$ *(доказательство проводится по индукции)*

Предложение 2.2. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Доказательство. $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h)$
$g(x+h) = g(x) + g'(x)h + o(h)$
$f(x+h)g(x+h) = (f(x) + f'(x)h + o(h)) \cdot (g(x) + g'(x)h + o(h)) =$
$= f(x)g(x) + (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))h + (f'(x) + g'(x))h \cdot o(h) + f'(x)g'(x)h^2 + (f(x) + g(x))o(h) + (o(h))^2 =$
$= f(x)g(x) + (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))h + o(h)$
$(f\cdot g)(x+h) - (fg)(x) = (f'g + fg')(x)\cdot h + o(h) \Rightarrow fg$ – дифференцируема и $(fg)' = f'g + fg'$
□

Следствие 2.2. $(cf(x))' = cf'(x)$
Более общий вариант – $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f(x) + \beta g(x)$

Доказательство. $(cf(x))' = c'f(x) + cf'(x) = cf'(x)$ □

Следствие 2.3. $(f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n)' = f'_1 f_2 \dots f_n + f_1 f'_2 \dots f_n + \dots + f_1 f_2 \dots f'_n$

Предложение 2.3. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ *при условии $g(x) \neq 0$ в окрестности рассматриваемой точки.*

Доказательство.

Лемма 2.2. $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$

Доказательство. $\Delta \frac{1}{g}(x) = \dfrac{1}{g(x)+h} - \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x)}$
$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta\frac{1}{g}}{h} = \lim_{h\to 0}\left(-\frac{g'(x)h + o(h)}{h\cdot g(x+h)g(x)}\right) = -\lim_{h\to 0}\frac{g'(x) + \frac{o(h)}{h}}{g(x+h)g(x)} = -\frac{g'}{g^2}$$ □

$$(f\cdot \tfrac{1}{g})' = f'\cdot \tfrac{1}{g} + f\cdot (\tfrac{2}{g})' = \frac{f'}{g} - \frac{f\cdot g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$
□

Предложение 2.4. $\sqsupset f$ *– дифференцируема в* x_0, *а* g *в* $f(x_0) \Rightarrow (g\circ f) = g(f(x))$ *– дифференцируема в* x_0
$(g(f(x_0)))' = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$

Доказательство. Из дифференцируем ости следует: $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h)$
$x = x_0, y_0 = f(x_0)$
$f(x_0+h) - f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$
$g(y_0+k) = g(y_0) + g'(y_0)k + o(k)$
$(g\circ f)(x_0+h) = g(f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)) = g(y_0 + g'(y_0) + g'(y_0)\cdot(f'(x_0)h + o(h)) + o(f'(x_0)h + o(h)) =$
$= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)\cdot h + g'(y_0)o(h) + o(f'(x_0)h + o(h)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)\cdot h + o(h)$ □

Следствие 2.4. $(f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n)' = f'(f_2 \circ \dots \circ f_n) \cdot f_2'(f_3 \circ \dots \circ f_n) \cdot \dots \cdot f_{n-1}'(f_n) \cdot f_n'$

ДЗ (посчитать производные):

1. $y = x^2 \cdot e^{2x}$
2. $y = e^{\sin(x^2)}$
3. $y = e^{x^3} \cdot (\cos x + \sin x)$
4. $y = \dfrac{\sin^4(5x)}{\cos^2(\sqrt{x})}$

Предложение 2.5 (производная обратной функции)**.** $\sqsupset f :< a, b > \to < \alpha, \beta >$ *– биективна и непрерывна на* $< a, b >$ *и дифференцируема в* $x_0 \in < a, b >$, *причём* $f'(x_0) \neq 0$, *тогда обратная функция* $x = g(y)$ *дифференцируема в* $y_0 = f(x_0) \in < \alpha, \beta >$, *при этом* $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

Замечание 2.3. *1. В условиях предложения 2.5 обратная функция* $x = g(y)$ *– непрерывна на* $< \alpha, \beta >$

2. Другая запись: $g'(y) = \dfrac{1}{f'(g(y_0))}$

Доказательство. Существование

$\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$ – Если он существуют, то он равен $g'(y_0)$. Надо показать, что этот предел существует и найти чему он равен.

$$\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{d(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Т.к. $f'(x_0) \neq 0$, то при x достаточно близких к x_0, то дробь $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq 0$ и потому значение $\neq 0$ в окрестности x_0 $(f(x) \to A > 0, x \to x_0 : \forall x \in O_\delta(x_0) \quad f(x) > \dfrac{A}{2} > 0)$ $\square$

2.3 Дифференцирование элементарных функций

1. $c' = 0$
2. $\sqsupset n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \quad (x^n)' = nx^{n-1}$

   <u>способ 1</u> $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^n - x^n}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x^n((a + \frac{h}{x})^n - 1)}{h} = x^n \lim\limits_{\substack{\to \\ n}\ \frac{h}{x} + o(\frac{h}{x})} h = x^n \cdot \dfrac{n}{x} = nx^{n-1}$

   $(1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + o(\alpha), \alpha \to 0$

   Всё это катит, пока $x \neq 0$

   Рассмотрим $x = 0$ – отдельно. Тогда, очевидно $n \geqslant 1$

   $(x^n)' \mid_{x=0} = nx^{n-1} \mid_{x=0} = \begin{cases} 1, n = 1 \\ 0, n > 1 \end{cases} \quad = 0$

   $(x^n)' \mid_{x=0} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(0 + h)^{-}0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h^{n-1} = \begin{cases} 1, n = 1 \\ 0, n > 1 \end{cases}$ чтд

   <u>способ 2</u> $\sqsupset n \in \mathbb{N}$

   $x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x$ по формуле Лейбница $(x^n)' = x' \cdot x \cdot \dots \cdot x + x \cdot x' \cdot \dots \cdot x + \dots + x \cdot \dots \cdot x \cdot x' = nx^{-1}$

   $n \in \mathbb{Z}_- = \{-1, -2, \dots\}$

   $(x^n)' = \left(\dfrac{1}{x^{-n}}\right)' = \dfrac{-(x^{-n})'}{(x^{-n})^2} = \dfrac{-(-n)x^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{2n-n-1} = nx^{n-1}$

3. $(e^x)' = e^x$

   $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = e^x$

   Следствие 2.5. $(a^x)' = a^x \cdot ln(a)$

   Доказательство. $a^x = e^{x\ln a} = g(f(x) \qquad g = e^x \quad f(x) = x\ln a$

   $(a^x)' = (e^{x\ln a})' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{f(x)} \cdot (x\ln a)' = e^{x\ln a} \ln ax' = a^x \ln a$ □

4. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

   <u>способ 1</u> $y = e^x \quad x = \ln y$

   $(\ln y)' = \dfrac{1}{(e^x)'} = \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{e^{\ln y}} = \dfrac{1}{y}$ чтд

   <u>способ 2</u> $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \dfrac{\ln(\frac{x+h}{x})}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h} = \dfrac{1}{x}$

   Следствие 2.6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

   Доказательство. $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ и всё □

5. Произвольная степенная функция $y = x^\alpha, \alpha \neq 0 \qquad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

   <u>способ 1</u> $x^\alpha = e^{\alpha\ln x}$ (это определение в классе элементарных функций)

   $x^\alpha = g(f(x)) \qquad g(y) = e^y \quad f(x) = \alpha\ln x$

   $(x^\alpha)' = g'(y) \cdot f'(x) = e^y \cdot (\alpha\ln x)' = e^{\alpha\ln x} \cdot \dfrac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \dfrac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$

   <u>способ 2</u> $(1+h)^\alpha = 1 + \alpha h + o(h)$

   $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x^\alpha((1+\frac{h}{x})^\alpha - 1)}{h} = x^\alpha \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1 + \alpha\frac{h}{x} + o(h) - 1}{h} = x^\alpha \cdot \dfrac{\alpha}{x} = \alpha x^{n-1}$

6. $(\sin x)' = \cos x$ (ясно)

   $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

   $(\cos x)' = (\sin(x + \frac{\pi}{2}))' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \cdot (x + \frac{\pi}{2})' = -\sin x \cdot 1$

   $(\cos x)' = -\sin x$

7. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

   $y = \arcsin x, x \in [-1, 1] \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$

   $x = \sin y \qquad \sin(\arcsin x) = x$

   $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{(\sin y)'} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{1}{+\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Д/З:

1. $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ (2 доказательства)

2. $(\operatorname{tg} x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

3. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

4. $(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$ (2 доказательства)

2.4 Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема 2.2 (Ферма). $\sqsupset f(x) : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
$\sqsupset x_0 \in (a, b) \quad \sqsupset f(x_0) = \max\limits_{\langle a,b\rangle} f(x)$ *или* $f(x_0) = \min\limits_{\langle a,b\rangle} f(x) \quad \sqsupset f$ *– дифференцируемо в* $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$
Геометрический смысл – касательные в точках минимума и максимума – горизонтальные

Доказательство. Пусть, для определённости, $f(x_0) = \max\limits_{\langle a,b\rangle} f(x) \Rightarrow \forall x < x_0 \quad f(x) \leqslant f(x_0)$
$\forall x > x_0 f(x) \leqslant f(x_0)$
$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$
$f'_+(x_0) = \lim\limits_{h\to+0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0$
$f'_-(x_0) = \lim\limits_{h\to-0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0$
$\Rightarrow f'(x_0) = 0$ □

Замечание 2.4. *Дифференцируемость важна.*
$f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$
Ясно, что 1 *– min, но* $f'(-1) \nexists$

Замечание 2.5. *Важно, что* x_0 *– внутренняя точка промежутка* $\langle a, b\rangle$
$f(x) = x^2, x \in [0, 1]$
min в $x_0 = 0$
и там $f'(x)$ *в* $x = 1$
$f'(1) = 2 \neq 0$

Теорема 2.3 (Роля). $\sqsupset f : [a, b] \to \mathbb{R}$
$f \in C[a, b] \quad \exists f'$
$f(a) = f(b)$
$\Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

Доказательство. .
$f \in C([a, b])$ по теореме Вейерштрасса $\sqsupset x_q, x_2 \in [a, b] : f(x_1) = f(x_0) = \max\limits_{[a,b]} f(x) \qquad f(x_2) = \min\limits_{[a,b]} f(x)$

1. $\{x_1, x_2\} = \{a, b\} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x) = const \Rightarrow f'(x) = 0$

2. Хотя бы одна точка x_1 или x_2 – внутренняя. Тогда – по теореме Ферма – в ней производная $= 0$

□

Теорема 2.4 (Лагранжа). $\sqsupset f$ *– непрерывна на* $[a, b]$ *и дифференцируема на* $(a, b) \Rightarrow \exists x \in (a, b) \quad \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = pf(c)$
геометрический смысл – угловой коэффициент хорды, соединяющей концы графика. И говорится, что есть точка, в которой касательная параллельна хорде

Теорема 2.5 (Коши). $\sqsupset f, g$ *– непрерывны на* $[a, b]$ *и дифференцируемы на* (a, b)*, причём* $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow \exists c \in (a, b) \quad \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$
Теорема Лагранжа – частный случай теоремы Коши при $g(x) = x$

Доказательство. Сведём теорему Коши к теореме Роля.
$\sphericalangle \varphi(x) = f(x) - k \cdot g(x), k \in \mathbb{R}$ пожберём k так, чтобы $\varphi(a) = \varphi(b)$
$f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) \quad k(g(b) - g(a)) = f(b) - f(a)$ заметим, что $g(b) \neq g(a)$, иначе по теореме Роля существовала бы точка $x \in (a, b) : g'(c) = 0$, а это запрещено по условию теоремы
$\Rightarrow k = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$, а значит такое k существует

Применим к $\varphi(x)$ теорему Роля $\exists x \in (a, b) : \varphi(c) = 0 \Longleftrightarrow f'(x) - kg'(c) = 0 \Longleftrightarrow k = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Таким образом, $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ □

Замечание 2.6 (К теоремам Лагранжа и Коши). 1. *Если $f(x)$ трактовать как расстояние, а x как время, то тогда $f(b) - f(a)$ – пройдённый путь, а $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ – средняя скорость, $b - a$ – затраченное время*

$f'(c)$ – мгновенная скорость в момент времени c

При любом движении существует такой момент времени c, в котором снгновенная скорость равна средней

2. *Формулу из теоремы Лагранжа часто записывают как $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$ и называют формулой Лагранжа/формулой конечных приращений (приращение функции = приращение аргумента на значение производной в некоторой точке)*

3. *Пусть $a = x, b = x + \Delta x$ Формула Лагранжа записывается, как $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x) \cdot \Delta x$, $\theta \in (0, 1)$*

   Пусть c между x и $x + \Delta x$ $\quad c = x + \theta\Delta x$

4.

   Лемма 2.3 (об оценке приращения функции). *$\sqsupset$ f удовлетворяет условию теоремы Лагранжа и $\sqsupset \exists M : |f'(x)| \leqslant M \forall x \in (a, b) \Rightarrow |f(x + \Delta x) - f(x)| \leqslant M \cdot |\Delta x| \forall x, x + \Delta x \in (a, b)$*

   (Если функция удовлетворяет данному нарвенству, то говорят, что функция удовлетворяет условию Липшеца)

   Доказательство. $|f(x + \Delta x) - f(x)| = |f'(x + \theta\Delta x)| \cdot |\Delta x| \leqslant M \cdot |\Delta x|$ □

5. *f – непрерывна на (a, b) $\quad(a \geqslant -\infty; b \leqslant +\infty)$ и дифференцируема на (a, b) и производная ограничена $|f'(x)| \leqslant M |\forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ – равномерно непрерывна на (a, b)*

   Доказательство. f – равномерно непрерывна на $(a, b) \iff \forall\varepsilon > 0 \exists\delta = \delta(\varepsilon) : \forall x_1, x_2 \in (a, b) \quad |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$

   Берём ε, предъявляем $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$ – искомое?

   Берём $\forall x_1, x_2 : |x_2 - x_1| < \delta$

   $\lhd |f(x_2) - f(x_1)| = |f'(c)||x_2 - x_1| \leqslant M \cdot |x_2 - x_1| < M\delta = \varepsilon$ □

6. *$\sqsupset$ f – дифференцируема на (a, b), непрререывна на $[a, b]$ и $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$*

   Тогда $f(x) \uparrow$ (или $\downarrow$)

   Доказательство. $\sqsupset f'(x) > 0$

   Берём $\forall x_2 > x_1 \quad \lhd f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) \geqslant f(x_1)$ □

7. *Если $f'(c) \geqslant 0 (\leqslant 0)$, то f может (не обязательно строго) возрастать (или убывать)*

   "Контрпример"если f – дифференцируема в x_0 и $f'(x_0) > 0 \not\Rightarrow f \uparrow$ в окрестности x_0

   $$\lhd f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

   $f \in C(\mathbb{R}) \quad \lim\limits_{x\to 0} = f(0) = 0$

   т.к. $\lim\limits_{x\to 0}(x + 2x^2 \sin\frac{1}{x}) = 0$

   $$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x \sin\frac{1}{x} + 2x^2 \cos\frac{1}{x}(-\frac{1}{x^2}) = 1 + 4x \sin\frac{1}{x} - 2\cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

   $$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + 2x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}(1 + 2\sin\tfrac{1}{x}) = 1$$

   Т.О. $f'(0) = 1 > 0$

Замечание 2.7. 1. *f – дифференцируема на $[a,b]$*

$f'(x) > 0$ *на* $[a,b] \Rightarrow f(x)\uparrow$

2. *Если* $f'(x_0) > 0 \not\Rightarrow f\uparrow$ *в некоторой окрестности* x_0

$\Rightarrow f\uparrow$ *по отношению к* $x_0 \quad \forall x > x_0 \quad f(x) > f(x_0) \qquad \forall x < x_0 \quad f(x) < f(x_0)$

Теорема 2.6 (Сравнения 1)**.** *$\sqsupset f, g$ диффференциируемы на (a,b) и справедливы неравенства $f(x_0) \geqslant g(x_0), \quad f'(x_0) \geqslant g'(x_0) \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x) \geqslant g(x)$ на $[x_0, b)$ и $f(x) \leqslant g(x)$ на $(a, x_0]$*

Доказательство. $h(x) = f(x) - g(x)$
$\lessdot$ случай $[x_0, b)$ (случай $(a, x_0]$ рассматривается аналогично)
Докажем противное, т.е. $\exists x_1 \in (x_0, b) : h(x_1) < 0$, при этом $h(x_0 \geqslant 0)$
$h(x_1) - h(x_0) = h'(c) \cdot (x_1 - x_0)$, где $c \in (x_0, x_1) \Rightarrow h'(c) < 0$??!, но $h'(c) = f'(c) - g'(c) \geqslant 0$ □

Теорема 2.7 (Сравнения 2)**.** *То же самое условие, но неравенства такие $f(x_0) \geqslant g(x_0), \quad f'(x) \geqslant g'(x) \forall x \in (a,b)$*

Доказательство. $h(x) = f(x) - g(x)$
$\lessdot (x_0, b)$
Допустим противное: $\exists x_1 \in (x_0, b)$
$h(x_1) \leqslant 0$
$h(x_1) - h(x_2 = h'(c)(x_1 - x_0) \Rightarrow h'(c) \leqslant 0$??! □

$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \forall x > 0$
$f(x) = \cos x \quad g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \quad f(0) = g(0) = 0$
$f'(x) = -\sin x > g'(x) = -x$ (при $x > 0$ т.к. $sinx < x \quad \cos x < 1$)
По Т2
$f(x) = \sin x \quad g(x) = x - \frac{x^3}{6} \quad f(0) = g(0) = 0$
$f'(x) = \cos x > g'(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ по предыдущей задаче
$2\sqrt{x} < 3 - \frac{1}{x}$
$f(1) = g(1) = 2$
$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} > g'(x) = \frac{1}{x^2}$ чтд
$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} \forall x \geqslant 0$
$f(x) = e^x \quad g(x) = 1 + x \quad f(0) = g(0) = 1$
$f'(x) = e^x \geqslant g'(x) = 1 + x \quad f'(0) = g'(0) = 1$
$f''(x) = e^x \geqslant g''(x) = 1 \forall x \geqslant 0$
ДЗ:

1. 214.2
2. 216.2
3. Доказать неравенства:
   - $(a+b)^p \leqslant a^p + b^p \quad (0 \leqslant p \leqslant 1)$
   - $e^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2 e^x}{2!} \quad x \geqslant 0$
   - $\ln(1+x) \leqslant x\frac{x^2}{2} + 1\frac{x^3}{3} \quad \forall x \geqslant 0$

$f(x) = |x|$ дифференцируема в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

Производная функции не обязана быть непрерывной $\begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$\lessdot g(x) = \begin{cases} 1 & x \geqslant 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \qquad \exists f : f'(x) = g(x)$

Теорема 2.8 (Дарбу)**.** *$\sqsupset$ f – дифференцируема на $[a;b]$. Тогда $\forall$ числа C заключённого между $f'(a)$ и $f'(b)$ $\quad \exists C \in (a;b) : f'(c) = C$*

(Т.е. производная дифференцируемой функции обладает свойством принимать все промежуточные значения, как и непрерывная функция по Теореме Больцано-Коши)

Доказательство. • Пусть $f'(a)$ и $f'(b)$ – разных знаков и докажем, что $\exists c \in (a;b) : f'(c) = 0$

НУО $\sqsupset f'(a) < 0 < f'(b)$

Т.к. f – дифференцируема на $[a;b] \Rightarrow f \in C[a;b] \Rightarrow$ По теореме Вейерштрасса f достигает на $[a;b]$ наибольшего и наименьшего значения $\lessdot \min f(x)$

$\sqsupset x \in [a;b] : f(c) = \min\limits_{[a;b]} f(x)$

По теореме Ферма $f'(c) = 0$ Остаётся доказать, что $c \in (a;b)$

От противного $\sqsupset c = a \Rightarrow \forall x \in (a;b] \quad f(x) \geqslant f(a)$

$f'(a) = \lim\limits_{g \to +0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ правосторонняя производная

но $f(a+h) - f(a) \geqslant 0 \Rightarrow f'(a) \geqslant 0$, а у нас $f'(a) < 0$??!

Если $c = b \quad f(b) \geqslant f(x) \forall x \in [a;b)$

$f'(b) = \lim\limits_{h \to -0} \dfrac{f(b+h) - f(b)}{h} \leqslant 0 \quad f'(b) > 0$

• Считаем (НУО), что $f'(a) < f'(b)$ и берём $\forall C : f'(a) < C < f'(b)$

$\lessdot g(x) = f(x) - Cx$

$g'(a) = f'(a) - C < 0; g'(b) = f'(b) - C > 0$

По Случаю 1 $\exists c \in (a;b) : g'(c) = f'(c) - C = 0$

Т.е. $f'(c) = C$

□

Замечание 2.8. *Теорема Дарбу похожа на Теорему Больцано-Коши для непрерывных функций. Но производная дифференцируемой функции не обязана быть непрерывной*

$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

У $g(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ не существует предела в 0, т.е. 0 – разрыв 2 рода

Замечание 2.9. *Если $(\alpha;\beta) \subset [a;b]$ – проивзольный промежуток, то и $f'((a;b))$ – тоже промежуток*

Замечание 2.10. *Производная $f'(x)$ не может иметь разрывов 1-го рода (неустранимых) (в условии теоремы Дарбу)*

Доказательство. $\sqsupset x_0 \in (a,b)$ – разрыв 1-го рода неустранимый
$\exists \lim\limits_{h\to -0} f'(x_0+h) = f'(x_0-0) \neq \lim\limits_{h\to +0} f'(x_0+h) = f'(x_0+h)$
$\sqsupset f'(x_0-0) < f'(x_0+0)$
$\sqsupset \dfrac{f'(x_0+\delta) - f'(x_) - \delta)}{2} > \varepsilon$
$\exists \delta_1 : \forall x \in [a_0 - \delta_1, x_0] \quad |f'(x) - f'(x_0-0)| < \varepsilon$
$\exists \delta_2 : \forall x ß(x_0, x_0+\delta_2) \quad |f'(x) - f'(x_0+0)| < \varepsilon$
$\sqsupset \delta = min\{\delta_1, \delta_2\} \quad \sphericalangle$ отрезок $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$
На нём нарушается теорема Дарбу $C = \dfrac{f'(x_0+\delta) - f'(x_0-\delta)}{2} + f'(x_0-0)$ □

Лемма 2.4 (Базовая теорема единственности в теории дифференциальных уравнений)**.** $\sqsupset f$ *– дифференцируема на* (a,b) *и* $f'(x) = 0 \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x) \equiv const$

Доказательство. Пусть есть $x_1 \neq x_2 : f(x_1 \neq f(x_2))$. Применим формулу Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), x \in (x_1, x_2) \quad f'(c) = 0, f(x_2) - f(x_1) \neq 0??!$ □

2.5 Правило Лопиталя

Точнее говоря стоило бы говорить о правилах Иоганна Бернулли - Лопиталя

Теорема 2.9 (Правило Лопиталя для неопределённостей вида $\frac{0}{0}$)**.** $\sqsupset f(x), g(x)$ *– непрерывны на* $[a;b]$ *и дифференцируемы на* (a,b)*, при этом* $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a,b)$

Пусть выполняется:

1. $f(a) = g(a) = 0$

2. $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *и он* $= A$

   Т.е. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *Читается справа на лево. Обратно неверно.*

Доказательство. $\sqsupset x \in a; b]$ По теореме Коши $\exists c(x) \in (a,x) :\quad \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dfrac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$
Если $x \to a \Rightarrow c(x) \to a$ (По теореме о двух милиционерах)
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(c(x)}{g'(c(x))} = \lim\limits_{t\to a} \dfrac{f'(t)}{g'(t)} = A$ □

Замечание 2.11. *Справедлив правосторонний вариант эттой теоремы* $x \to b \quad f(b) = g(b) = 0 \quad g'(x) \neq 0 \quad \lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to b} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Примеры:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = \cos(0) = 1$ (в качестве доказательства это не законно, т.к. получается цикл)

2. $\lim\limits_{x\to +0} x^a \ln x = 0 \forall a > 0 \qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x^{-a}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-ax^{-a-1}} = -\dfrac{1}{a} \lim\limits_{x\to 0} x^a = 0$ (неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$)

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(a+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$

ДЗ (вычислить только по Лопиталю):

1. $\lim x0 \dfrac{x^2 \cos x}{\cos x - 1}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right)$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin(\sin x) - \sin^2 x}{x^6}$

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x - x^4} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[4]{x^3}}$