Конспект по Алгебре

Коченюк Анатолий

2 октября 2018 г.

Глава 1

1 четверть

03.09.2018
06.09.2018
12.09.2018

Теорема 1.1. $f : X \to Y$ *– инъективно* $\iff \forall y, h : Y \to X : f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$

Доказательство. $\Rightarrow$:
фиксируем $g, h : f \circ g = f \circ h$. Нужно доказать, что $\forall y \quad g(y) = h(y)$
фиксируем $y \in Y$. $\sqsupset g(y) \neq h(y) \Rightarrow f \circ g(y) \neq f \circ h(y)$?!!
$\Leftarrow$:
фиксируем $x_1, x_2 : f(x_1) = f(x_2) \quad x_1 = x_2$?
фиксируем $g(y) = x_1 . h(y) = x_2$
$f \circ g(y) = f(x_1)$
$f \circ h(y) = f(x_2)$
$g(y) = h(y) \Rightarrow x_1 = x_2$ □

Теорема 1.2. $f : x \to Y$ *– сюръективна* $\iff \forall g . h : Y \to X : g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$

Доказательство. $\Rightarrow$:
фиксируем $g, h : g \circ f = h \circ f \quad \forall y \quad h(y) = g(y)$?
фиксируем $y \quad \sqsupset: h(y) \neq g(y) \quad \forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) \neq h(y) = h(f(x)) = (h \circ f)(x)$, т.е. $g \circ f \neq h \circ f$?!!
$\Leftarrow$:
h/w □

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x, y) \mapsto (2x + y - 3, x - y - 1)$
Инъективна: фиксируем $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \sqsupset f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$
$f(x_1, y_1) = (2x_1 + y_1 - 3, x_1 - y_1 - 1)$
$f(x_2, y_2) = (2x_2 + y_2 - 3, x_2 - y_2 - 1)$
$(2x_1 + y_1 - 3, x_1 - y_1 - 1) = (2x_2 + y_2 - 3, x_2 - y_2 - 1)$
$2x_1 + y_1 - 3 = 2x_2 + y_2 - 3 \quad x_1 - y_1 - 1 = x_2 - y_2 - 1$
$3x_1 - 4 = 3x_2 - 4$
$x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$

1.1 Преобразования конечных множеств.

A – конечна $A = \{1, \ldots, n\} \quad |A| = n$

Определение 1.1. $F(A) = F_n$ *– совокупность преобразований* A

$\alpha : A \to A$ – пеобразование
$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ – перестановка $\iff \forall i \neq j \quad a_i \neq a_j$

$\beta = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$

$\beta \circ \alpha = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$

Д/З:

1. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (x - y + 2, 2x + y)$
2. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \mapsto (2x - y, 7y + 3x, 0))$
3. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \mapsto (x - 5 + y + z, x - y + z + 4, 2(x + 1) + 2z - 3)$
4. При каких $a, b, c \in \mathbb{R}$
   $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto ax + b$
   $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto cx^2$
   $f(g(x)) = g(f(x))$
5. При каких $a, b \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax + b$
   $f(\sin(x)) = \sin(f(x))$

14.09.2018

Глава 2

Теория Групп

2.1 Алгебраические операции

Определение 2.1. *Алгебраическая операция на множестве* A *– отображение* $f : AxA \to A$

Примеры:

- $''+'' : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- $''\cdot'' : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- на 2^M операция объединения. $X \cup Y = \{x | x \in X$ или $x \in Y\}$
- $\circ : F(A) \times F(A) \to F(A) \quad (f, g) \mapsto f \circ g$
- $A = \{0, 1, 2, 3\} \quad a, b \in A \quad a \triangle b = a + b(mod4)$

$\triangle$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Определение 2.2. $(A, *)$ *– группоид, если* A*–множество и* $*$ *– операция на* A

$(\mathbb{N}, \div)$ – не группоид
$(\mathbb{R}, \div)$ – группоид

Определение 2.3. $(A, *)$ *– коммутативный, если* $\forall a, b \in A \quad a * b = b * a$

$(\mathbb{R}, -)$ – не коммутативный
$(F(A), \circ)$ – не коммутативный
$(\mathbb{R}, \cdot)$

Определение 2.4. $(A, *$ *– ассоциативный, если* $\forall a, b, c \in \quad (a * b) * c = a * (b * c)$

$(\mathbb{N}, +)$ – ассоциативный
$(\mathbb{R}, -)$ – не ассоциативный

Определение 2.5. $(A, *)$ *– группоид с сокращением (левым, правым).* $\forall a, b, c \in A$
$q * b = q * c \Rightarrow b = c$*(лев)*
$b * a = c * a \Rightarrow b = c$*(прав)*

$\triangleright : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad (n, m) \mapsto m$
$(\mathbb{N}, \triangleright)$ – не сократим справа $2 \triangleright 2 = 5 \triangleright 3, \quad 2 \neq 5$
Сократим справа.

Определение 2.6. $(A, *)$ *– инверсивный, если* $\forall a, b \in A \exists x, y \in A : a * x = b, y * a = b$

$(\mathbb{N}, +)$ – не инверсивный. $5, 5 \in \mathbb{N} \quad 5 + x = 5, y + 5 = y \quad x, y \notin \mathbb{N}$
$(\mathbb{Z}, -)$ – инверсивный.$a, b \in \mathbb{Z} \quad a + (b - a) = b \quad (b - a) + a = b$

Определение 2.7. *$(A, *)$ – группоид. a– идемпотент, если $a * a = a$*

$(\mathbb{N}, \triangleright)$ – любой элемент – идемпотент

Определение 2.8. *$(A, *) \ni \theta$ – аннулятор, если $\forall a \in A$*
$a * \theta = \theta$
$\theta * a = \theta$

Определение 2.9. *$(A, *)$ с нейтральным элементом $a' \in A$ называется обратным к a*
$a * a' = e$
$a' * a = e$

Определение 2.10. *$(A, *)$ – группоид. $B \subseteq A$ и $\forall a, b \in B \quad a * b \in B$. Тогда $(B, *)$ – подгруппоид группоида A*

$(\mathbb{N}, +)$ – подгруппоид $(\mathbb{Z}, +)$

Лемма 2.1. *$(A, *)$ – ассоциативный, инверсивный группоид с нейтральным элементом$\Rightarrow$ $(A, *)$ – сократимый*

Доказательство. $a * y = a * x$
По инверсивности $\exists a' \in A : a' * a = e$
$a' * (a * x) = a' * (a * y)$
$(a' * a) * x = (a' * a) * y$
$e * x = e * y$
$x = y$ □

Д/З:

Письменно(на листочке, подписанном с табличкой):

1. .

*	1	2	3
1	2	3	1
2	3	3	2
3	1	2	1

Проверить Коммутативность, Ассоциативность, Сократимость, Инверсивность, Нейтральный элемент

2. группоид поворотов квадрата
3. $(\mathbb{N}, \text{НОК})$
4. $(\mathbb{N}, \text{НОД})$

   Устно:
5. $|A| = 3 \quad (F(A), \circ)$ найти все подгруппоиды
6. $(M, *) \quad M$ – конечный, ассоциативный, сократимый. Существует ли нейтральный элемент
7. $(A, *)$ – ассоциативное с нейтральным элементом. ? $(A', \circ)$ – подгруппоид (A' – множество обратимых элементов)

18.09.2018
ДЗ:

1. найти все подгруппоиды группоида $(F(A), \circ), |A| = 3$ (их строго больше 6?) – устно
2. Составить таблицу Кэли, где $A = \{a, b\}$, для:
   - $(2^A, \cap)$
   - $(2^A, \triangle)$

3. $M_{2x2}(\mathbb{R})$ – множество матриц

   $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_{2x2}(\mathbb{R})$

   $b = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \right\} \subseteq M_{2x2}(\mathbb{R})$

   $(M_{2x2}(\mathbb{R}), \cdot), (A, \cdot), (B, \cdot)$ – все свойства

4. $(\mathbb{Z}, *) \quad a * b = |a - b|$ – все свойства

5. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ – инъективность, сюръективность. Построить обратное, если возможно.

   $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n}$ — ?

Теорема 2.1. *M – конечно $(M, *)$ – асс, сокр $\Rightarrow \exists e$*

Доказательство. фиксируем $a \in quada^2 \in M$

$n > i \quad a^n = a^i$, т.к. M – конечно

$a^{n-i}a^i = a^i \Rightarrow a^{n-i} * a = a$

a^{n-i} – нейтральный?

фиксируем $x \in M \quad x * a = x * a = z * a^{n-i} * a \Rightarrow x = xa^{n-i}$ Таким образом a^{n-i} – правый нейтральный. То, что он также и левый нейтральный доказывается аналогично.

$a * x = a * a^{n-i} * x$

$a * x = aa^{n-i} * x$ □

2.2 Группы. Основные понятия

Определение 2.11. *$(G, *)$ – группоид называется полугруппа, если выполняется ассоциативность*

Определение 2.12. *$(G, *)$ – группоид называется группой, если выполняется:*

1. *Ассоциативность: $\forall a, b, c \in G \quad (a * b) * c = a * (b * c)$*
2. *Существование нейтрального элемента $\exists e \in G \quad \forall g \in G \quad e * g = g * e = g$*
3. *Существование обратного элемента $\forall a \in G \ \exists b \in G \quad a * b = b * a = e$*

   e – единица. $b =: a - 1$

Альтернативное определение: группа – множество и 3 операции:

1. *бинарная операция $*$*
2. *унарная операция $.^{-1}$*
3. *нульарная операция e*

Утверждение 2.1. *1. e – единственное*

2. a^{-1} – единственный

Доказательство. б $\sqsupset \exists a_1$ и a_2:

$$a * a_1 = a_1 * a = e$$
$$a * a_2 = a_2 * a = e$$

$(a_2 * a) * a_1 = e * a_1 = a_1$

$a_2 * (a * a_1) = a_2 * e = a_2$

$a_1 = a_2$ по ассоциативности

□

Определение 2.13. *$(G, *)$ – группа называется абелевой, если выполняется коммутативность.* $\forall a, b \quad a * b = b * a$

Примеры:

1. $(\mathbb{Z}, +)$ – абелева группа
2. $(S(A), \circ) = S_n, n = |A|$ – не абелева группа при $n \geqslant 3$

Определение 2.14 (центр группы)**.** $Z(G) = \{z \in G | zg = gz \forall g \in G\}$

Замечание 2.1. *$(G, \cdot)$ – абелева $\Rightarrow Z(G) = G$*

Определение 2.15. *G – конечно $\Rightarrow (G, *)$ – конечна*
G – бесконечно $\Rightarrow (G, *)$ – бесконечно

Теорема 2.2. *конечная полугруппа $(S, *)$ является группой $\iff$ выполняется сократимость.*

Доказательство. .

$\Rightarrow$ $\sqsupset a * x = b * a$
$\exists x^{-1} : a * x * x^{-1} = b * x * x^{-1}$
$a = b$ ч.т.д.

$\Leftarrow$ (S, *) – ассоциативна, сократима и S – конечно $\overset{\text{Упр}}{\Rightarrow}$ существует нейтральный элемент, $(S, *)$ – обратима $\Rightarrow (S, *)$ – группа

$\square$

Замечание 2.2. *обратный переход неверен, если S – бесконечно. Пример – $(\mathbb{N}, +)$*

Определение 2.16. *порядок элемента $g \in (G, *)$ – наименьший $n \in N : f^n = e$. Если такого n не существует, то элемент называется элементом бесконечного порядка.*

Утверждение 2.2. *$a \in (G, *)$ – конечного порядка n*
Тогда $e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ – различные элементы и $\forall m \in \mathbb{Z} \quad a^m$ совпадает с одним из них

Доказательство. $\lessdot a^i = a^j \quad i >$ æ$quada^{i-j} = e$ $i - j < n$, n – минимальное такое число, что $a^n = e$??!
$\forall m \in \mathbb{Z} \exists i : a^m = a^i \quad m = n * q + r \quad a^m = a^{n*q+r} = e * a^r$ $\square$

Замечание 2.3. *В конечной группе у всех элементов конечный порядок*

Определение 2.17. *Если $H \subseteq G \neq \emptyset \Rightarrow (H, *)$ – подгруппоид, если:*

- $\forall a, b \in H \quad a * b \in H$
- $\forall a \in H \quad a^{-1} \in H$

Упражнение 2.1. *$(H, *)$ – подгруппа группы $(G, *)$ – группа*

Определение 2.18. *$\{e\}, G$ – несобственные подгруппы, все остальные собственные.*
$H \leqslant G$ – H подгруппа G
$H < G$ – H собственная подгруппа G

Теорема 2.3. *$B \subset A \quad (A, *)$ – конечная группа $\quad e \in B, B$ замкнута относительно $* \Rightarrow (B, *)$ – подгруппа*

Доказательство. из определения подгруппы нам осталось проверить только обратимость
фиксируем $b \in B$. Так как B – конечно, то порядок b конечен $\Rightarrow \exists n : b^n = e \Rightarrow b * b^{n-1} = e = b^{n-1} * b \Rightarrow b^{-1} = b^{n-1}$ $\square$

Теорема 2.4. *$\{(B_\alpha, *)\}_{\alpha \in I}$ – семейство подгрупп $(G, *)$*
$B = \bigcap\limits_{\alpha \in I} = B_\alpha \Rightarrow (B, *)$ – подгруппа

Доказательство. фиксируем $a, b \in B \Rightarrow a?b \in B_\alpha \forall \alpha \Rightarrow a * b \in B_\alpha \forall \alpha \Rightarrow a * b \in B$
$\forall a \in B \quad a^{-1} \in B$ аналогично $\square$

Определение 2.19. $S \subset G$

$C_G(S) = \{g \in G | sg = gs \forall s \in S\}$ - *централизатор*

$N_G(S) = \{g \in G | gS = Sg\}$

ДЗ:

1. 2.1 (ссылка)
2. на $\mathbb{R}_+$ ограниченные функции:
   - $f_1(x) = x$
   - $f_2(x) = -x$
   - $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$
   - $f_4(x) = -\dfrac{1}{x}$

   – группа относительно композиции? Абелева группа?
3. (!)Любая группа третьего порядка – абелева
4. (!)Если $\forall g \in G \quad g \leqslant 2 \Rightarrow G$ – абелева
5. (!)$C_G(S) \leqslant G$
6. (!)$\mathbb{Z}(G) = \bigcup\limits_{g \in G} C_G(g)$
7. (!)$\mathbb{N}_G(S) \leqslant G$

ДЗ (на 2 октября):

1. $H \leqslant G \Longleftrightarrow HH \subseteq H$ и $H^{-1} \subseteq H$
2. Множество функций $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad ad - bc \neq 0$ — группа относительно композиции
3. (!)$F \leqslant H \leqslant G \Rightarrow F \leqslant G$
4. (!)$A, B, C \leqslant G$ и $C \subseteq A \cap B \Rightarrow C \leqslant A$ или $C \leqslant B$