Конспект по Алгебре

Коченюк Анатолий

21 марта 2019 г.

Глава 1

1 четверть

03.09.2018
06.09.2018
12.09.2018

Теорема 1.1. *$f : X \to Y$ – инъективно* $\iff \forall y, h : Y \to X : f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$

Доказательство. $\Rightarrow$:
фиксируем $g, h : f \circ g = f \circ h$. Нужно доказать, что $\forall y \quad g(y) = h(y)$
фиксируем $y \in Y$. $\sqsupset g(y) \neq h(y) \Rightarrow f \circ g(y) \neq f \circ h(y)$?!!
$\Leftarrow$:
фиксируем $x_1, x_2 : f(x_1) = f(x_2) \quad x_1 = x_2$?
фиксируем $g(y) = x_1 . h(y) = x_2$
$f \circ g(y) = f(x_1)$
$f \circ h(y) = f(x_2)$
$g(y) = h(y) \Rightarrow x_1 = x_2$ □

Теорема 1.2. *$f : x \to Y$ – сюрьективна* $\iff \forall g . h : Y \to X : g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$

Доказательство. $\Rightarrow$:
фиксируем $g, h : g \circ f = h \circ f \quad \forall y \quad h(y) = g(y)$?
фиксируем $y \quad \sqsupset$: $h(y) \neq g(y) \quad \forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) \neq h(y) = h(f(x)) = (h \circ f)(x)$, т.е. $g \circ f \neq h \circ f$?!!
$\Leftarrow$:
h/w □

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x, y) \mapsto (2x + y - 3, x - y - 1)$
Инъективна: фиксируем $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \sqsupset f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$
$f(x_1, y_1) = (2x_1 + y_1 - 3, x_1 - y_1 - 1)$
$f(x_2, y_2) = (2x_2 + y_2 - 3, x_2 - y_2 - 1)$
$(2x_1 + y_1 - 3, x_1 - y_1 - 1) = (2x_2 + y_2 - 3, x_2 - y_2 - 1)$
$2x_1 + y_1 - 3 = 2x_2 + y_2 - 3 \quad x_1 - y_1 - 1 = x_2 - y_2 - 1$
$3x_1 - 4 = 3x_2 - 4$
$x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$

1.1 Преобразования конечных множеств.

A – конечна $A = \{1, \dots, n\} \quad |A| = n$

Определение 1.1. *$F(A) = F_n$ – совокупность преобразований A*

$\alpha : A \to A$ – пеобразование
$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ – перестановка $\iff \forall i \neq j \quad a_i \neq a_j$

$\beta = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$

$\beta \circ \alpha = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$

Д/З:

1. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (x - y + 2, 2x + y)$
2. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \mapsto (2x - y, 7y + 3x, 0))$
3. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \mapsto (x - 5 + y + z, x - y + z + 4, 2(x + 1) + 2z - 3)$
4. При каких $a, b, c \in \mathbb{R}$
   $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto ax + b$
   $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto cx^2$
   $f(g(x)) = g(f(x))$
5. При каких $a, b \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax + b$
   $f(\sin(x)) = \sin(f(x))$

14.09.2018

Глава 2

Теория Групп

2.1 Алгебраические операции

Определение 2.1. *Алгебраическая операция на множестве A – отображение $f : AxA \to A$*

Примеры:

- $''+'' : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- $''\cdot'' : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- на 2^M операция объединения. $X \cup Y = \{x | x \in X$ или $x \in Y\}$
- $\circ : F(A) \times F(A) \to F(A) \quad (f, g) \mapsto f \circ g$
- $A = \{0, 1, 2, 3\} \quad a, b \in A \quad a \triangle b = a + b (mod 4)$

$\triangle$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Определение 2.2. $(A, *)$ *– группоид, если A–множество и $*$ – операция на A*

$(\mathbb{N}, \div)$ – не группоид
$(\mathbb{R}, \div)$ – группоид

Определение 2.3. $(A, *)$ *– коммутативный, если $\forall a, b \in A \quad a * b = b * a$*

$(\mathbb{R}, -)$ – не коммутативный
$(F(A), \circ)$ – не коммутативный
$(\mathbb{R}, \cdot)$

Определение 2.4. $(A, *$ *– ассоциативный, если $\forall a, b, c \in \quad (a * b) * c = a * (b * c)$*

$(\mathbb{N}, +)$ – ассоциативный
$(\mathbb{R}, -)$ – не ассоциативный

Определение 2.5. $(A, *)$ *– группоид с сокращением (левым, правым). $\forall a, b, c \in A$*
$q * b = q * c \Rightarrow b = c$(лев)
$b * a = c * a \Rightarrow b = c$(прав)

$\triangleright : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad (n, m) \mapsto m$
$(\mathbb{N}, \triangleright)$ – не сократим справа $2 \triangleright 2 = 5 \triangleright 3, \quad 2 \neq 5$
Сократим справа.

Определение 2.6. $(A, *)$ *– инверсивный, если $\forall a, b \in A \exists x, y \in A : a * x = b, y * a = b$*

$(\mathbb{N},+)$ – не инверсивный. $5,5\in\mathbb{N}\quad 5+x=5, y+5=y\quad x,y\notin\mathbb{N}$
$(\mathbb{Z},-)$ – инверсивный.$a,b\in\mathbb{Z}\quad a+(b-a)=b\quad (b-a)+a=b$

Определение 2.7. *$(A,*)$ – группоид. a– идемпотент, если $a*a=a$*

$(\mathbb{N},\triangleright)$ – любой элемент – идемпотент

Определение 2.8. *$(A,*)\ni\theta$ – аннулятор, если $\forall a\in A$*
$a*\theta=\theta$
$\theta*a=\theta$

Определение 2.9. *$(A,*)$ с нейтральным элементом $a'\in A$ называется обратным к a*
$a*a'=e$
$a'*a=e$

Определение 2.10. *$(A,*)$ – группоид. $B\subseteq A$ и $\forall a,b\in B\quad a*b\in B$. Тогда $(B,*)$ – подгруппоид группоида A*

$(\mathbb{N},+)$ – подгруппоид $(\mathbb{Z},+)$

Лемма 2.1. *$(A,*)$ – ассоциативный, инверсивный группоид с нейтральным элементом$\Rightarrow$ $(A,*)$ – сократимый*

Доказательство. $a*y=a*x$
По инверсивности $\exists a'\in A: a'*a=e$
$a'*(a*x)=a'*(a*y)$
$(a'*a)*x=(a'*a)*y$
$e*x=e*y$
$x=y$ □

Д/З:

Письменно(на листочке, подписанном с табличкой):

1. .

*	1	2	3
1	2	3	1
2	3	3	2
3	1	2	1

Проверить Коммутативность, Ассоциативность, Сократимость, Инверсивность, Нейтральный элемент

2. группоид поворотов квадрата
3. $(\mathbb{N},\text{НОК})$
4. $(\mathbb{N},\text{НОД})$

Устно:

5. $|A|=3\quad (F(A),\circ)$ найти все подгруппоиды
6. $(M,*)\quad M$ – конечный, ассоциативный, сократимый. Существует ли нейтральный элемент
7. $(A,*)$ – ассоциативное с нейтральным элементом. ? $(A',\circ)$ – подгруппоид (A' – множество обратимых элементов)

18.09.2018
ДЗ:

1. найти все подгруппоиды группоида $(F(A),\circ),|A|=3$ (их строго больше 6?) – устно
2. Составить таблицу Кэли, где $A=\{a,b\}$, для:
   - $(2^A,\cap)$
   - $(2^A,\triangle)$

3. $M_{2x2}(\mathbb{R})$ – множество матриц

   $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_{2x2}(\mathbb{R})$

   $b = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \right\} \subseteq M_{2x2}(\mathbb{R})$

   $(M_{2x2}(\mathbb{R}), \cdot), (A, \cdot), (B, \cdot)$ – все свойства

4. $(\mathbb{Z}, *) \quad a * b = |a - b|$ – все свойства

5. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ – инъективность, сюръективность. Построить обратное, если возможно.

   $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n} - ?$

Теорема 2.1. *M – конечно $(M, *)$ – асс, сокр $\Rightarrow \exists e$*

Доказательство. фиксируем $a \in quada^2 \in M$

$n > i \quad a^n = a^i$, т.к. M – конечно

$a^{n-i}a^i = a^i \Rightarrow a^{n-i} * a = a$

a^{n-i} – нейтральный?

фиксируем $x \in M \quad x * a = x * a = z * a^{n-i} * a \Rightarrow x = xa^{n-i}$ Таким образом a^{n-i} – правый нейтральный. То, что он также и левый нейтральный доказывается аналогично.

$a * x = a * a^{n-i} * x$

$a * x = aa^{n-i} * x$ □

2.2 Группы. Основные понятия

Определение 2.11. $(G, *)$ *– группоид называется полугруппа, если выполняется ассоциативность*

Определение 2.12. $(G, *)$ *– группоид называется группой, если выполняется:*

1. *Ассоциативность:* $\forall a, b, c \in G \quad (a * b) * c = a * (b * c)$

2. *Существование нейтрального элемента* $\exists e \in G \quad \forall g \in G \quad e * g = g * e = g$

3. *Существование обратного элемента* $\forall a \in G \ \exists b \in G \quad a * b = b * a = e$

   e – единица. $b =: a - 1$

Альтернативное определение: группа – множество и 3 операции:

1. *бинарная операция* $*$

2. *унарная операция* $.^{-1}$

3. *нульарная операция* e

Утверждение 2.1. 1. *e – единственное*

2. *a^{-1} – единственный*

Доказательство. б $\sqsupset \exists a_1$ и a_2:

$$a * a_1 = a_1 * a = e$$
$$a * a_2 = a_2 * a = e$$

$(a_2 * a) * a_1 = e * a_1 = a_1$

$a_2 * (a * a_1) = a_2 * e = a_2$

$a_1 = a_2$ по ассоциативности

□

Определение 2.13. *$(G, *)$ – группа называется абелевой, если выполняется коммутативность.* $\forall a, b \quad a * b = b * a$

Примеры:

1. $(\mathbb{Z}, +)$ – абелева группа

2. $(S(A), \circ) = S_n, n = |A|$ – не абелева группа при $n \geqslant 3$

Определение 2.14 (центр группы)**.** $Z(G) = \{z \in G | zg = gz \forall g \in G\}$

Замечание 2.1. *$(G, \cdot)$ – абелева $\Rightarrow Z(G) = G$*

Определение 2.15. *G – конечно $\Rightarrow (G, *)$ – конечна*
G – бесконечно $\Rightarrow (G, *)$ – бесконечно

Теорема 2.2. *конечная полугруппа $(S, *)$ является группой $\iff$ выполняется сократимость.*

Доказательство. .

$\Rightarrow$ $\sqsupset a * x = b * a$
$\exists x^{-1} : a * x * x^{-1} = b * x * x^{-1}$
$a = b$ ч.т.д.

$\Leftarrow$ (S, *) – ассоциативна, сократима и S – конечно $\overset{\text{Упр}}{\Rightarrow}$ существует нейтральный элемент, $(S, *)$ – обратима $\Rightarrow (S, *)$ – группа

□

Замечание 2.2. *обратный переход неверен, если S – бесконечно. Пример – $(\mathbb{N}, +)$*

Определение 2.16. *порядок элемента $g \in (G, *)$ – наименьший $n \in N : f^n = e$. Если такого n не существует, то элемент называется элементом бесконечного порядка.*

Утверждение 2.2. *$a \in (G, *)$ – конечного порядка n*
Тогда $e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ – различные элементы и $\forall m \in \mathbb{Z} \quad a^m$ совпадает с одним из них

Доказательство. $\lessdot a^i = a^j \quad i > jquada^{i-j} = e$ $i - j < n$, n – минимальное такое число, что $a^n = e$??!
$\forall m \in \mathbb{Z} \exists i : a^m = a^i \quad m = n * q + r \quad a^m = a^{n*q+r} = e * a^r$ □

Замечание 2.3. *В конечной группе у всех элементов конечный порядок*

Определение 2.17. *Если $H \subseteq G \neq \emptyset \Rightarrow (H, *)$ – подгруппоид, если:*

- $\forall a, b \in H \quad a * b \in H$

- $\forall a \in H \quad a^{-1} \in H$

Упражнение 2.1. *$(H, *)$ – подгруппа группы $(G, *)$ – группа*

Определение 2.18. *$\{e\}, G$ – несобственные подгруппы, все остальные собственные.*
$H \leqslant G$ – H подгруппа G
$H < G$ – H собственная подгруппа G

Теорема 2.3. *$B \subset A \quad (A, *)$ – конечная группа $\quad e \in B, B$ замкнута относительно $* \Rightarrow (B, *)$ – подгруппа*

Доказательство. из определения подгруппы нам осталось проверить только обратимость
фиксируем $b \in B$. Так как B – конечно, то порядок b конечен $\Rightarrow \exists n : b^n = e \Rightarrow b * b^{n-1} = e = b^{n-1} * b \Rightarrow b^{-1} = b^{n-1}$ □

Теорема 2.4. *$\{(B_\alpha, *)\}_{\alpha \in I}$ – семейство подгрупп $(G, *)$*
$B = \bigcap\limits_{\alpha \in I} = B_\alpha \Rightarrow (B, *)$ – подгруппа

Доказательство. фиксируем $a, b \in B \Rightarrow a?b \in B_\alpha \forall \alpha \Rightarrow a * b \in B_\alpha \forall \alpha \Rightarrow a * b \in B$
$\forall a \in B \quad a^{-1} \in B$ аналогично □

Определение 2.19. $S \subset G$
$C_G(S) = \{g \in G | sg = gs \forall s \in S\}$ - *централизатор*
$N_G(S) = \{g \in G | gS = Sg\}$

ДЗ:

1. 2.1 (ссылка)
2. на $\mathbb{R}_+$ ограниченные функции:
   - $f_1(x) = x$
   - $f_2(x) = -x$
   - $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$
   - $f_4(x) = -\dfrac{1}{x}$

   – группа относительно композиции? Абелева группа?
3. (!)Любая группа третьего порядка – абелева
4. (!)Если $\forall g \in G \quad g \leqslant 2 \Rightarrow G$ – абелева
5. (!)$C_G(S) \leqslant G$
6. (!)$\mathbb{Z}(G) = \bigcup\limits_{g \in G} C_G(g)$
7. (!)$\mathbb{N}_G(S) \leqslant G$

ДЗ (на 2 октября):

1. $H \leqslant G \Longleftrightarrow HH \subseteq H$ и $H^{-1} \subseteq H$
2. Множество функций $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad ad - bc \neq 0$ — группа относительно композиции
3. (!)$F \leqslant H \leqslant G \Rightarrow F \leqslant G$
4. (!)$A, B, C \leqslant G$ и $C \subseteq A \cap B \Rightarrow C \leqslant A$ или $C \leqslant B$

Определение 2.20. $S \subset G, S \neq \emptyset \Rightarrow \langle S \rangle = \bigcap\limits_{S \subseteq H \leqslant G}$ – *подгруппа, порождённая* S

Замечание 2.4. *Это наименьшая подгруппа, содержащаяся в* S

Определение 2.21. *Подгруппа* $H \leqslant G$ *– называется циклической, если* $\exists g \in G : \quad H = \langle \{g\} \rangle$

Пример: $(\mathbb{Z}, +) \quad 1$ – порождающий элемент

Теорема 2.5. $\forall S \subset G \quad \langle S \rangle = \{S_i \dots S_n | S_i \in S \cup S^{-1}, i \in \mathbb{N}_0\} =: T$

Доказательство. .

$\subseteq$ $T \leqslant G \quad$ т.к. $T \neq \emptyset$:

– $\forall t_1, t_2 \in T \quad t_1 \cdot t_2 \in T$
– $\forall t_1, t_2 \in T \quad t^{-1} \in T$

$\langle S \rangle \subseteq T$ т.к. T входит в пересечение

$\supseteq$ $t \in T \quad t = s_1 \dots s_n \in \langle S \rangle$
$\forall S \subset H \leqslant G$ т.к. $S_1 \dots S_n \in H$

∎

2.3 Примеры групп

1. Группа вычетов по модулю n

   $n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{Z}_n$ – группа вычетов по модулю n

   $[a]_m = \{b \in \mathbb{Z} : b \equiv a(mod\ n)\}$

   $[a]_m + [b]_m = [a+b]_m$

   Упражнение 2.2. $(\mathbb{Z}_n, +)$ – *абелева группа*

2. Группа Матриц

   2.1 Полная линейная группа
   F – поле $\quad GL_n(F) = \{A \in M_{n\times n}(F) | detA \neq 0\}$

   2.2 Специальная линейная группа
   F – поле $\quad SL_n(F) = \{A \in M_{n\times n}(F) | detA = 1\}$

   $det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

   Утверждение 2.3. $A \in M_{n\times n}(F) \quad \exists A^{-1} \Longleftrightarrow detA \neq 0$

   Упражнение 2.3. $Aff_1(\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \quad b \in \mathbb{R}\}$

   (1) $\quad Aff_1(\mathbb{R}) \subset SL_2(\mathbb{R})$

3. Группа биективных преобразований множества $A \quad (B(A), \circ)$

4. Группа биективных преобразований конечного множества $A \quad S_n$

   Определение 2.22. *$\alpha \in S_n$ называется циклом длины k, если она перемещает ровно k элементов*
   $i-1, i_2 \dots i_k : \quad \alpha(i_1) = i_2, \alpha(I-2) = i_3, \dots, \alpha(i_k) = i_1$

   Пример: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (1324)$

   Теорема 2.6. *Любая перестановка разлагается однозначно с точностью до порядка на произведение попарно независимых циклов*

   Доказательство. $\alpha \in S_n \quad i_1$ – первый перемещаемый элемент
   $i_2 = \alpha(i_1) \quad i_3 = \alpha(i_2) \quad i_k = i_j$
   $j = 1$ т.к. α – биективно
   Остались недвинутые элементы.
   Возьмём следующий наименьший, который α перемещает. $i_k + 1$ и продолжим
   Т.к. α – конечно, то мы однажды переберём их все. $\alpha = (i_1 \dots i_l)(i_{k+1} \dots i_{k+l}) \dots$
   Возьмём следующий □

   Определение 2.23. *цикл длины 2 называется транспозицией*

   Утверждение 2.4. *Любой цикл можно разложить в произведение транспозиций*

   Доказательство. $(i_1 \dots i_k) = (i_1 i_k) \dots (i_1 i_3)(i_1 i_2)$ □

   Определение 2.24. *$\alpha \in S_n \quad \alpha = \tau_1 \dots \tau_n$ – разложение в транспозицию*
   Тогда $sgn\ \alpha = (-1)^m$

   Теорема 2.7. *Определение sgn корректно*

Замечание 2.5. *Знак транспозиции* $= -1$

Определение 2.25. $\alpha \in S_n$ *– чётная, если* $sgn\ \alpha = 1$.

Нечётная, если $sgn\ \alpha = -1$

Определение 2.26. $A_n = \{\alpha \in S_n | \alpha - \text{чёт}\}$

Упражнение 2.4. *(a)* $(!) A_n \leqslant S_n$

(b) множество нечётных перестановок не подгруппа

Утверждение 2.5. *Всякую транспозицию можно представить в виде произведения траспозиций вида:*

(1) $(i, i+1), \quad i \in \{1, \ldots, n-1\}$

Доказательство. (1) $(i, j) = (1, i)(1, j)(1, i)$

(2) Упражнение . Подсказка $(i, i+1)$ в виде произведения $(1, k)$

□

5. Группа движений плоскости

Определение 2.27. *Движение плоскости* f *– симметрия фигуры* $F, f(F) = F$

Пример – группа симметрий треугольника

Определение 2.28. *Диэдральная группа – группа симметрий правильного* n *- угольника*

Дз:
Письменно:

1. (!) D_n – не абелева
2. (!) $!\langle\{(1,2); (12\ldots n)\}\rangle = S_n$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 7 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ В виде цикла; разложить в транспозиции; вычислить знак.

Устно (список ссылок на упражнения):

1. 2.2
2. 2.4
3. 4

2.4 Теоретико-групповые конструкции

G – группа, $H \leqslant G$
$R \subseteq G \times G : (x, y) \in R \Longleftrightarrow x * y^{-1} \in H$

Упражнение 2.5. *Упр:* R *– рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. отношение эквивалентности*

Определение 2.29. *Классы эквивалентности отношения* R *называются правыми смежными классами по подгруппе* $H \quad Ha = \{ha | h \in H\}$

Утверждение 2.6. $\forall Ha, Hb$ *либо не пересекаются (*$Ha \cap Hb = \emptyset$*), либо совпадают (*$Ha = Hb$*)*

Доказательство. $\exists\, x \in Ha \cap Hb$, тогда $x = h_a \cdot a = h_b \cdot b, h_a, h_b \in H$
$h_a a = h_b b$
$a = h_a h_b b$
$a \in Hb$, т.к. $h_a h_b \in H$
ф. $y \in Ha \quad y = h_y \cdot a = h_y h_a h_b b \in Hb$

□

Замечание 2.6. *Аналогично определяется левый смежный класс.*

Следствие 2.1. $G = \bigsqcup\limits_{H_a \leqslant G} H_{a_i}$

Доказательство. $g \in G \quad \exists Hg \ni g$ □

Упражнение 2.6. *Если G – абелева, то $\forall Ha \exists b \neq a : H : Ha = bH$*

Упражнение 2.7. *G – группа, $H \leqslant G$*
Тогда $H \to aH \quad h \mapsto ah$ – биекция

Доказательство.

- Иньективность $\forall h_i, h_j \quad ah_u = ah_j \Rightarrow h_i = h_j$
- Сюръективность $x \in aH \quad x = ah_a, h_a \in H \quad h_a \mapsto x$

□

Теорема 2.8. *Порядок любой подгруппы конечной группы делит порядок группы.*

G – конечная группа $n = |G| \quad m = |H| \Rightarrow n \vdots m$

Доказательство. $G = a_1 H \bigsqcup a_2 H \bigsqcup \cdots \bigsqcup a_i H$
$\forall aH \quad |aH| = H$ ($H \to aH$ − биекция) $\quad G = i \cdot m$ чтд □

Определение 2.30. *Число левых смежных классов группы G по подгруппе H называется индексом подгруппы H в группе G*
$|G : H|$
G/H – множество левых смежных классов
$H \backslash G$ – множество правых смежных классов

Упражнение 2.8. *$H \leqslant G$ тогда $H \backslash G \to G/H \quad Hx \mapsto x^{-1}H$*

Определение 2.31. *$H \leqslant G$ – называется нормальной, если $\forall a \in G \quad aH = Ha$*
$H \trianglelefteq G$

Примеры:

1. $G \trianglelefteq G$ т.к. $\forall a \quad aG = G = Ga$
2. $\{e\} \trianglelefteq G \quad a\{e\} = \{a\} = \{e\}a$
3. **Теорема 2.9.** *Если $|G : H| = 2 \Rightarrow H \trianglelefteq G$*

   Доказательство. $H \bigsqcup Hb = G = H \bigsqcup aH \quad Hb = aH$

   Если $xH = H = Hx$

   Если $xH = aH = Ha \quad aH \neq H$ □

4. **Упражнение 2.9.** *$H \trianglelefteq G$ и $K \trianglelefteq H$ тогда $K \trianglelefteq G$*

Определение 2.32. *Гамильтонова группа – не абелева группа такая, что выполняется $\forall H \leqslant G \quad H \trianglelefteq G$*

Определение 2.33. *Группа называется простой если у неё только 2 нормальные подгруппы*

A_n – простая

Лемма 2.2. *Если $H \trianglelefteq G$ то $\forall h \in H, a \in G \quad aha^{-1} \in H$*

Доказательство. фиксируем $h \in H, a \in G \quad ah \in aH$
$aH = Ha$, т.к. $H \trianglelefteq G$
$ah = xa$, где $x \in H$
$aha^{-1} = x \in H$ □

Теорема 2.10. $(G, \cdot)$ - *группа* $H \trianglelefteq G$
Тогда $(G/H, \cdot)$ – *группа*

Доказательство. $aH \cdot bH = (ab)H$ – определения операции

1. Корректность определения. $\sqsupset a_1H = a_2H \quad b_1H = b_2H$
   $a_1b_1 = (a_2h_a)(b_2h_b) = a_2(b_2b_2^{-1})h_ab_2h_b = a_2b_2h, h \in H$. По лемме $b_2^{-1}h_ab_2 \in H$
   $\Rightarrow a_1b_1 \in a_2b_2H \Rightarrow a_1b_1Ha_2b_2H$
2. ассоциативность $aH \cdot (bH \cdot cH) = aH(bc)H = a(bc)H = (ab)cH = (ab)H \cdot cH = (aH \cdot bH) \cdot cH$
3. нейтральный элемент $eH = H$
4. обратный к ah– $a^{-1}H$

□

ДЗ на 16.10.2018

1. $A \trianglelefteq G, B \trianglelefteq G \Rightarrow AB \trianglelefteq G$
2. найти все нормальные подгруппы в S_3
3. Написать таблицу Кэли для $\mathbb{Z}/D \quad D = \{0, 2\}$
4. Доказать, что $A_n \trianglelefteq S_n$

Определение 2.34. *Группа* G/H – *фактор группа по подгруппе* H

Примеры:

1. $n\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$ т.к. $\mathbb{Z}$ – абелева
   Тогда $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$

Определение 2.35 (Прямое произведение групп)**.** $(G, *), (F, \circ)$ – *группы*
$(G \times F, \square)$ – *прямое произведение*
$(g_1, f_1)\square(g_2, f_2) = (g_1 * g_2, f_1 \circ f_2)$

Утверждение 2.7. *Прямое произведение является группой:*

Доказательство. 1. корректность очевидна

2. ассоциативность (Упр!)
3. нейтральный элемент (e_G, e_F)
4. обратный к (g_1, f_1) – (g^{-1}, f^{-1}) (Упр!)

□

Упражнение 2.10. F – *циклическая группа порядка* p
G – *циклическая группа порядка* q
p, q – *простые* $\Rightarrow F \times G$ – *циклическая группа порядка* pq

Упражнение 2.11. F, G – *конечные группы* $\Rightarrow |F \times G| = |F| \cdot |G|$

2.5 Отображения групп

Определение 2.36. *гомоморфизм группы* $(A, *)$ *в группу* $(B, \circ)$ *называется отображение* $f : A \to B$: $f(a_1 * a_2) = f(a_1) \circ f(a_2)$

Утверждение 2.8. *1.* $f(e_B) = e_B$

2. $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$ *f:A*

Определение 2.37. *.*
f:A $Ker\ f = \{a \in A | f(a) = e_B\}$
$Im\ f = \{f(a) | a \in A\}$

3. $Ker\ f \trianglelefteq A$

4. $Im\ f \leqslant B$

5. f *– инъективна* $\Longleftrightarrow Ker\ f = \{e\}$

6. f *– сюрьектина* $\Longleftrightarrow Im\ f = B$

Доказательство. 1. Пусть $x = f(e_A)$

$x = f(e_A) = f(e_a * e_a) = f(e_a) \circ f(e_A) = x \circ x$

ф. $b \in B \quad x \circ b = (x \circ x) \circ b$

$b = x \circ b$ аналогично $b = b \circ x \Rightarrow x = e_B$

2. Упр
3. Упр
4. Упр
5. Упр
6. Очевидно

□

Определение 2.38. *Изоморфизм групп – биективный гомоморфизм*
„A изоморфна B” $A \cong$

Теорема 2.11. *Изоморфность групп – отношение эквивалентности на множестве всевозможных групп*

Доказательство.

Рефлективность $G \cong G \quad id : G \to G \quad l2018.10.16.3 g \mapsto g$ – изоморфизм

Симметричность $(G, *) \quad (F, \circ)$ Пусть G изоморфна F т.е. $f : G \to F$ – биективный гомоморфизм
$f^{-1} : F \to G$ – биективный гомоморфизм.

Транзитивность. $f_1 : G \to F \quad f_2 : F \to H \quad f_3 = f_2 \circ f_1 : G \to H$ – биективный гомоморфизм.
$f_3(g_1 * g_2) = f_2(f_1(g_1 * g_2)) = f_2(f_1(g_1) \circ f_1(g_2)) = f_2(f_1(g_1)) \square f_2(f_1(g_2)) = f_3(g_1) \square f_3(g_2)$ □

Определение 2.39. *Абстрактная группа – множество всех классов эквивалентности по отношению изоморфности.*

Примеры:

1. $S_2 \cong \mathbb{Z}$
2. $\mathbb{Z} \cong n\mathbb{Z} \quad x \mapsto nx$

   понятно, что это биективное отображение. Докажем, что это гомоморфизм.

   $x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \quad f(x_1 + x_2) = n(x_1 + x_2) = nx_1 + nx_2 = f(x_1) + f(x_2)$
3. $D_3 \cong S_3$

4. $(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \quad exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>} \quad x \mapsto e^x$

   exp – биективна

   ф. $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$

   Замечание 2.7. *Основание может быть любым* $\neq 1, > 0$

Утверждение 2.9. *Любые две группы простого порядка изоморфны*

Доказательство. $|G| = p$

1. Любая группа простого порядка циклическая.

   ф. $g \in G \quad < x >=: H$

   $|G| \vdots |H|$ по теореме Лагранжа $\Rightarrow |H| = 1 \vee |H| = p$

   т.е. $H = \{e\} \vee |H| = G$

   любой элемент порождает нашу группу $\Rightarrow$ она циклическая

2. $|G| = p = |H| \quad (G, \circ) \quad (H, *)$

   $< g >= G \quad < h >= H$

   $f : G \to H \quad g^i \mapsto h^i$

   (a) f – биективно

   $h_1, h_2 \in H, h_1 \neq h_2 \quad h_1 = h^i \quad h^2 = h^j$ т.к. $h^i \neq h^j$ то $i \not\equiv j(mod\ p) \Rightarrow g^i \neq g^j \Rightarrow$ выполняется инъективность.

   G, H – конечны $\Rightarrow f$ – биективна

   (b) f – гомомрфизм

   ф $g^i, g^j \in G \quad f(h^i \circ g^j) = f(g^{i+j}) = h^{i+j} = h^i * h^j = f(g^i) * f(g^j)$

□

Упражнение 2.12. $G_1 \times \{e_2\} \leqslant G_1 \times G_2$
Тогда доказать, что это нормальная подгруппа и $G_1 \times G_2 / G_1 \times \{e_2\} \cong G_1$

Теорема 2.12. A, B *– две группы* $f : A \to B$ *– гомоморфизм.*
Тогда:

1. $Ker\ f \trianglelefteq A$

2. $Im\ f \leqslant B$

3. $Im\ f \cong A/Ker\ f$

Доказательство. 1. $e_A \in Ker\ f$

   $a, b \in Ker\ f$ тогда $f(a * b) = f(a) \circ f(b) = e_B \circ e_B = e_B \Rightarrow a * b \in Ker\ f$

   $a \in Ker\ f \quad f(a^{-1}) = f(a)^{-1} = e_B^{-1} = e_B \Rightarrow a^{-1} \in Ker\ f$

   Т.О. $Ker\ f \leqslant A$

   $(!) a(ker\ f) = (Ker\ f)a$

   ф. $ak \in aKer\ f \Rightarrow aka^{-1} \in Ker\ f \Rightarrow (aka^{-1})a \in Ker\ fa \Rightarrow ak \in Ker\ fa$

   Т.О. $Ker\ f \trianglelefteq A$

2. (a) $f(e_A) = e_B \Rightarrow e_B \in Im\ f \Rightarrow Im\ f \neq \emptyset$

   (b) ф. $b_1, b_2 \in Im\ f \quad b_1 \circ b_2 = f(a_1) \circ f(a_2) = f(a_1 * a_2) \in Im\ f$

   (c) ф. $b \in \Im\ f \quad b = fa) \quad f(a^{-1}) = b^{-1} \Rightarrow b^{-1} \in \Im\ f$

   Т.О. $Im\ f \leqslant B$

3. $\varphi : A/Ker\ f \to Im\ f \quad a(Ker\ f) \mapsto f(a)$

   Докажем, что φ изоморфизм

   (a) Корректность
   Пусть $a(Ker\ f) = b(Ker\ f) \Rightarrow a \in b(Ker\ f) \quad a = b * k, k \in Ker\ f$
   $f(a) = f(b * k) = f(b) circ f(k) = f(b) \circ e_B = f(b)$

   (b) Сюръективность очевидна (у каждого образа действительно есть прообраз)

   (c) Инъективность Пусть $f(a) = f(b)$ Тогда $f^{-1}(a) \circ f(b) = e_B$
   $f(a^{-1}) \circ f(b) = e_B \quad f(a^{-1} * b) = e_B$
   $a^{-1} * b \in Ker\ f \Rightarrow a(Ker\ f) = b(Ker\ f)$

   (d) φ – гомоморфизм
   $\varphi(a(ker\ f) * b(Ker\ f)) = \varphi((a * b)(ker\ f)) = f(a * b) = f(a) \circ f(b) = \varphi(a(Ker\ f)) \circ \varphi(b(Ker\ f))$

   Т.О. φ – изоморфизм, что и требовалось доказать

$\square$

Теорема 2.13 (Кэли)**.** *Всякая конечная группа порядка n изоморфна подгруппе S_n*

Доказательство. $|G| = n = \{a_1 \dots a_n\}$, где $a_1 = e$
$g \in G$ тогда $\alpha_g := \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ g * a_1 & \dots & g * a_n \end{pmatrix}$
α_g – перестановка $a_i \neq a_j$ тогда $g * a_i \neq g * a_j$
$H = \{\alpha_{a_1}, \alpha_{a_2}, \dots, \alpha_{a_n}\} \subseteq S_n$
Композиция перестановок такого вида – перестановка такого вида.
ф. $\alpha_g, \alpha_f \in H$
ф. $x \in G \quad \alpha_g \circ \alpha_f(x) = \alpha_g(\alpha_f(x)) = \alpha_g(f * x) = g * (f * x) = (g * f) * x = \alpha_{g*f}(x)$
$\alpha_g \in H$ Тогда $\alpha_{g^{-1}}$ будет обратным.
Т.О. $H \leqslant S_n$
Докажем, что $H \cong G$
$\varphi : G \to H \quad g \mapsto \alpha g$
Сюръективность очевидна
Инъективность $\alpha_{g_1} = \alpha_{g_2} \Rightarrow \alpha_{g(1)}(a_1) = \alpha_{g_2}(a_1) \Rightarrow g_1 * e = g_2 * e \Rightarrow g_1 = g_2$
Гомоморфизм ф. $x \in G \quad \alpha_{g-1*g_2}(x) = g_1 * g_2 * x = (\alpha_{g_1} \circ \alpha_{g_2})(x)$
Т.О. φ – изоморфизм $\square$

Глава 3

Комплексные числа

3.1 Поля

Определение 3.1. $(K, +, \cdot)$ – *поле, если:*

I Абелева группа по сложению

(a) *Сложение коммутативно* $\forall a, b \in K \quad a + b = b + a$

(b) *Сложение ассоциативно* $\forall a, b, c \in K \quad (a + b) + c = a + (b + c)$

(c) *Существует нейтральный по сложению* $\exists 0 \in \quad K : \forall a \in K 0 + a = a$

(d) *Существует обратный по сложению* $\forall a \in K \exists (-a) \in K : \quad a + (-a) = 0$

II Без 0 – абелева группа по умножению

(a) $\forall a, b \in K \quad ab = ba$

(b) $\forall a, b, c \in K \quad (ab)c = a(bc)$

(c) $\exists 1 \in K : \forall a \in K \quad q \cdot a = a$

(d) $\forall a \in K, a \neq 0 \quad \exists a^{-1} : \quad a \cdot a^{-1} = 1$

III $\forall a, b, c \in K \quad (a + b)c = ac + bc$

Замечание 3.1. $I.1 - -I.4 \quad (K, +)$ – *абелева группа*
$II.1 - -II.4 \quad (K/\{0\}, \cdot)$ – *абелева группа*
$I.1 - -I.4 + II.2+$ *лев. и прав. дистрибутивность* $\quad (K, +, \cdot)$ – *кольцо*
$+ \ II.1$ *коммутативное кольцо*
$+ \ II.3$ *кольцо с единицей*
Коммутативное кольцо с единицей называется телом
Если нет делителей нуля (двух ненулевых элементов, произведение которых – 0), то область целостности

Примеры:

1. $(Q, +, \cdot)$ – поле
2. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ – поле
3. $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ – поле
4. $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ – НЕ поле, т.к. есть делители нуля $[2]_4 \cdot [2]_4 = [4]_4 = [0]_4$
5. $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$, – поле (упр) (p – простое)

Определение 3.2. $(K_1, +, 0, 1), (K_2, \bigoplus, \bigodot, \widehat{0}, \widehat{1})$ – *поля*
$f : L_1 \to K_2$ – *называется гомоморфизмом, если:*

1. $\forall a, b \in K_1 \quad f(a + b) = f(a) \bigoplus f(b)$

2. $\forall a, b \in K_1 \quad f(a \cdot b) = f(a) \bigodot f(b)$

Свойства:

1. $f(0) = \widehat{0}$
2. $f(1) = \widehat{1}$
3. $f(-a) = -f(a)$
4.

Теорема 3.1. *f – гомоморфизм полей , тогда или f – инъективен или $f \equiv 0$*

Доказательство. Пусть $f(a) = f(b)$
Тогда $0 = f(a) - f(b) = f(a - b)$
Если $a = b$, то f – инъективен
Если $a \neq b$ тогда $a - b = x \neq 0$ и $f(x) = 0$
фиксируем $y \in K_1$ тогда $f(y) = f(y \cdot x \cdot x^{-1}) = f(y) \bigodot f(x) \bigodot f(x^{-1}) = 0$
Т.О.$f : K_1 \to K_2$ – гомоморфизм $\exists a \neq 0 : f(a) \neq 0$
Тогда $Im\ f \cong K_1$ □

Определение 3.3. *Изоморфизм полей*
$fK_1 \to K_2$ – изоморфизм полей, если:

1. *f – биективно*
2. *f – гомоморфизм*

Определение 3.4. *K – подполе L, если:*

1. *K – подмножество L*
2. *K относительно тех же операций является полем*

Определение 3.5. *L называется расширением поля K, если L – поле и K – подполе L*

Пример $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ – расширение $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

3.2 Поле комплексных чисел

$k = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ на K введём операции

$\bigoplus$ $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K \quad (x_1, y_1) \bigoplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$\bigodot$ $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K \quad (x_1, y_1) \bigodot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$

$\widehat{0}; \quad (0, 0) = \widehat{0}$
$\widehat{1} : \quad (1, 0) = \widehat{1}$

Теорема 3.2. $(K, \bigoplus, \bigodot, \widehat{0}, \widehat{1})$

Доказательство. $I.1 - -I.4$ – упражнение
$II.1$ фиксируем $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K$
$(x_1, y_1) \bigodot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) = (x_2 x_1 - y_2 y_1, x_2 y_1 + x_1 y_2) = (x_2 y_2) \bigodot (x_1, y_1)$
$II.2$ – упражнение
$II.3$ фиксируем $(x, y) \in K \quad (x, y) \bigodot (1, 0) = (x \cdot -y \cdot 0, x \cdot 0 + 1 \cdot y) = (x, y)$
$II.4$ фиксируем $(x, y) \in K$ тогда $(x, y)^{-1} = (\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{-y}{x^2 + y^2})$ при $x, y \neq 0$ упр – проверить □

Утверждение 3.1. *$f : \mathbb{R} \to K \quad x \mapsto (x, 0)$ – гомоморфизм*

Доказательство. 1. фиксируем $x, y \in \mathbb{R}$ тогда
$f(x+y) = (x+y, 0) = (x, 0) \bigoplus (y, 0) = f(x) \bigoplus f(y)$

2. фиксируем $x, y \in \mathbb{R}$ $f(x \cdot y) = (x \cdot y, 0) = (x, 0) \bigodot (y, 0) = f(x) \bigodot f(y)$

$\square$

Следствие 3.1. $\mathbb{R} \cong Im\ f$

Замечание 3.2. $u = (0, 1) \in K$
$u^2 = (0, 1) \bigodot (0, 1) = (0 \cdot -1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + o \cdot 1) = (-1, 0) = -(1, 0) = -\widehat{1}$

Теорема 3.3. *Пусть* $(K', +, \cdot, 0, 1)$ *– такое поле, что:*

1. $\mathbb{R}$ *– подполе* K'
2. $\exists u' \in K' : (u')^2 = -1$
3. $\forall z \in K' \exists ! x, y \in \mathbb{R} : z = x + y \cdot u'$

Тогда $K' \cong K$

Доказательство. $f : K' \to K \quad x + y \cdot u' = z \mapsto (x, y)$

1. биективно – очевидно
2. f – гомоморфизм
   (a) фиксируем $z_1, z_2 \in K' \quad z_1 = x_1 + y_1 \cdot u' \quad z_2 = x_2 + y_2 \cdot u'$
   $f(z_1+z_2) = f(x_1+y_1u'+x_2+y_2u') = f((x_1+x_2)+(y_1+y_2)u') = (x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1, y_1) \bigoplus (x_2, y_2) = f(z_1) \bigoplus f(z_2)$
   (b) фиксируем $z_1, z_2 \in K'$
   $f(z_1z_2) = f((x_1+y_1u')(x_2+y_2u')) = f(x_1x_2 + x_1y_2u' + x_2y_1u' + y_1y_2(u')^2) = f(x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)u') = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) = (x_1, y_1) \bigodot (x_2, y_2) = f(z_1) \bigodot f(z_2)$

$\square$

Определение 3.6. *Поле комплексных чисел – некоторое фиксированное поле* $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$*:*

1. $\mathbb{C}$ *– расширение* $\mathbb{R}$
2. $\exists i \in \mathbb{C} : \quad i^2 = -1$
3. $\forall z \in \mathbb{C} \exists ! x, y \in \mathbb{R} : \quad z = x + y \cdot i$

Терминология:

- элементы поля $\mathbb{C}$ называются комплексными числами
- i – мнимой единицей
- $z = x + y \cdot i$ – алгебраическая запись комплексного числа
  x – вещественная часть $RE\ z$
  y – мнимая часть $Im\ z$

Примеры:

- $i^3 = i^2 \cdot i = -i$
- $\frac{1}{i^3} = \frac{i^4}{i^3} = i$
- $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

Д/З с 6 ноября:

- $(2^A, \triangle, \cap)$ – коммутативное кольцо с единицей, но не поле
- Посчитать:
  1. $(2+3i)(7-2i)$
  2. $(\sqrt{2}+i)(\sqrt{5}+\sqrt{2}+i)$
  3. $i^{17}+i^{41}$
  4. $(1+i)^3$
  5. $(1-i)^4-(1+i)^4$
- Устные упражнения(ниже ссылки на упражнения):
  1. 5
  2. 3.2
  3. 3.2
  4. 3.2

Упражнение 3.1. *Найти все такие* $x, y \in \mathbb{R}: \quad (2x+3y)+(x-y)i = 2+(2x+y)i$

Доказательство. т.е. $2x+3y=2$ и $x-y=2x+y$ $\square$

Д/З с 8 ноября:

упр 1 $C = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\}$

1. Найти $x, y \in \mathbb{R}$:
   (a) $(3+i)x-(1-2i)y=7$
   (b) $(4-i)x+(2+5i)y=8+9i$
2. Найти такие $x, y \in \mathbb{C}$
   (a) $x^2-1=0$
   (b) $x^4-1=0$
   (c) $x^2+1=0$
   (d) $x^4+1=0$
   (e) $\begin{cases} ix-2y=-i \\ (1+i)x-2iy=3+i \end{cases}$

3.3 Представление комплексных чисел в виде матриц.

$K = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\}$

Теорема 3.4. $\{K, +, \cdot, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ *– поле*

Доказательство. I 1. Коммутативность. $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -(a_2) & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -(b_2) & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ -b_1+(-b_2) & a_1+a_2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -(b_2) & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -(b_1) & a_1 \end{pmatrix}$

2. Ассоциативность. $\left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -(b_1) & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -(b_2) & a_2 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ -(b_3) & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ -(b_1+b_2) & a_1+a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ -(b_3) & a_3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3 & b_1+b_2+b_3 \\ -(b_1+b_2+b_3) & a_1+a_2+a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -(b_1) & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2+a_3 & b_2+b_3 \\ -(b_2+b_3) & a_2+a_3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -(b_1) & a_1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -(b_2) & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ -(b_3) & a_3 \end{pmatrix}\right]$

3. Нейтральный элемент. $\begin{pmatrix} a & b \\ -(b) & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -(b) & a \end{pmatrix}$

4. Обратный элемент. $\begin{pmatrix} a & b \\ -(b) & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

II 1. Коммутативность. $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -(b_1) & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -(b_2) & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1(-b_2) & a_1b_2 + b_1a_2 \\ -b_1a_2 + a_1(-b_2) & -b_1b_2 + a_1a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -(b_2) & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -(b_1) & a_1 \end{pmatrix}$

2. Ассоциативность. <...>

3. Нейтральный элемент. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Обратный элемент к $\begin{pmatrix} a & b \\ -(b) & a \end{pmatrix}$ – $\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

$\square$

Теорема 3.5. $K \cong \mathbb{C}$

Доказательство. $f : \mathbb{C} \to K \quad z = x + yi \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ -(y) & x \end{pmatrix}$

- f – гомоморфизм.

  $f(z_1 + z_2) = f(x_1 + y_1 i + x_2 + y_2 i) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ -(y_1 + y_2) & x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} = f(z_1) + f(z_2)$

  $f(z_1 z_2) = f(x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)) = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & x_1y_2 + x_2y_1 \\ -(x_1y_2 + x_2y_1) & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -(y_1) & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -(y_2) & x_2 \end{pmatrix} = f(x_1) \cdot f(z_2)$

$\square$

Замечание 3.3. $\mathbb{R} \to K \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ – *инъективный гомоморфизм*

Замечание 3.4. $f(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$f(i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

3.4 Комплексная сопряжённость

Теорема 3.6. $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad F(x + yi) = x - yi$ – *иззоморфизм, т.е. автоморфизм*

Доказательство. $x_1 + y_1 i \neq x_2 + y_2 i$ тогда $F(x + y_1 i) = x_1 - y_1 i \neq x_2 - y_2 i = F(x_2 + y_2 i)$

Т.О. F – биективно

(!) F – гомоморфизм

$F(x_1 + y_1 i + x_2 + y_2 i) = F(x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i) = x_1 + x_2 - (y_1 + y_2)i = x_1 - y_1 1i + x_2 - y_2 i = F(x_1 + y_1 i) + F(x_2 + y_2 i)$

$F((x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i)) = F(x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1x_2 + y_1x_2)i) = x_1x_2 - y_1y_2 + x_1(-y2)i + (-y_1)x_2 i = (x_1 - y_1 i)(x_2 - y_2 i) = Fx_1 + y_1 i(F(x_2 + y_2 i))$

Т.О. F – изоморфизм , т.е. автоморфизм $\square$

Определение 3.7. $z \in \mathbb{C} \quad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$

Тогда $\overline{z} = x - iy$ – *называется комплексным сопряжённым к числу* z

Замечание 3.5. $\overline{\begin{pmatrix} x & y \\ -(y) & x \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$

Теорема 3.7. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}:$

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

3. $\overline{\overline{z}} = z$

4. $\overline{z_1} = z_1 \iff z_1 \in \mathbb{R}$

5. $z_1 + \overline{z_1} = 2Re\ z_1$

6. $z_1 - \overline{z_1} = 2Im\ z - 1$

7. $z_1 = x + iy \Rightarrow z_! \overline{z_1} = x^2 + y_2$
   и если $z_1 \neq 0 \Rightarrow z_{1\mathbb{1}} > 0$

8. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Доказательство. Упражнение □

ДЗ с 13 ноября:
Упражнение сверху

1. $\dfrac{2i + \frac{1}{3}}{4i + \frac{1}{5}} : \dfrac{i-1}{i+1}$

2. $(2i+1)(1-i)(4+3i)$

3. $\dfrac{2i+3}{4-\sqrt{3}i} + \dfrac{\sqrt{3}-i}{i+4}$

4. $\overline{\left(\dfrac{i+2}{(i+4)(2-i)}\right)}$

5. $\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 4 \\ z_1 i - iz_2 = 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} z_1 + \overline{z_2} = 4 \\ \overline{z_1} - 2z_2 = 1 \end{cases}$

3.5 Квадратный корень из комплексного числа

$z \in \mathbb{C} \quad z = x + iy$ мы хотим найти такое $d = t + is$, что $d^2 = z$, т.е. $(z + is)^2 = x + iy$

$(t^2 + s^2) + 2tsi - x + iy$

т.е. $\begin{cases} t^2 - s^2 = x \\ 2ts = y \end{cases}$

$(t^2 - s^2)^2 + (2ts)^2 = x^2 + y^2$

$(t^2 + s^2)^2 = x^2 + y^2 \quad ((t^2 + s^2) = t^4 + 2t^2 s^2 + s^2)$

$\begin{cases} t^2 + s^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \\ t^2 - s^2 = x \end{cases}$

$\begin{cases} t^2 = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2} \\ s^2 = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2} \end{cases}$

$ts = \dfrac{y}{2}$, т.е. знак фиксирован

Если $y \geqslant 0 \quad d = \pm(\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}i)$

Если $y < 0 \quad d = \pm(\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}i)$

3.6 Геометрическая интерпретация комплексных чисел

$K = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (K, \bigoplus, \bigodot, \widehat{0}, \widehat{1})$

$\mathbb{C} \to K$ изоморфизм $z = x + iy \mapsto (x, y)$

На плоскости можем сопоставить числу точку, а можем вектор

Определение 3.8. *Модуль комплексного числа - длина вектора, его задающего.* $|z| = |\overrightarrow{a}| = x^2 + y^2$

Свойства:

1. $|z| \in \mathbb{R}$
2. $|z \cdot x| = |z||x| \quad z \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$ док-во – упражнение
3. $\forall z \in \mathbb{C} \quad z = x + iy$

   $z = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}i\right)$

   $z = |z| \cdot z_1, \quad |z_1| = 1$

   $a = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   $b = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   Числу z_1 соответствует точка a, b на единичной окружности.

   Т.е. существует угол $\theta : \sin\theta = b, \cos\theta = a$

   Для z существует тригонометрическая форма записи: $z = |z|(\cos\theta + \sin\theta i)$

   $|z|$ – модуль комплексного числа

   θ – аргумент комплексного числа ($Arg\ z$). Понятно, что их бесконечно много.

ДЗ:

Упражнение выше (2 свойство определения 3.8)

Найти квадратные корни:

1. -2
2. -4
3. $1 + i$
4. $3 + 4i$
5. $\cos\alpha + i\sin\alpha, \alpha$ – фиксированный угол

Изобразить множества на плоскости:

1. $Im\ z = 3$
2. $Re\ z = 4$
3. $Im(z + 2) = 2$
4. $Re\ z \leqslant 4$

Теорема 3.8. *Если* $z \in \mathbb{C} \quad z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, *где* $r > 0, r \in$, *то* $r = |z|$, *а* θ *– один из аргументов* z

Доказательство. $|z| = r\cos\theta + r\sin]thetai| = |r| \cdot |\cos\theta + i\sin\theta| = r(\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}) = r$
Кроме того $z \in \mathbb{C} \quad \exists x, y \in \mathbb{R} : z = x + iy$
$x = r\cos\theta \quad y - r\sin\theta$
$\cos\theta = \dfrac{x}{r} \quad \sin]theta = \dfrac{y}{r}$, т.к. $r = |z|$
$\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \theta$ – является одним из аргументов □

Следствие 3.2. $r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, *тогда* $r_1 = r_2$ *и* $\theta_1 - \theta_2 \vdots 2\pi$

$z(x, y)$ – точка плоскости, тогда $z = x + iy$ – комплексные координаты этой точки
Если $\vec{OZ}$ – вектор, тогда $z = x + iy$ – комплексные координаты вектора

3.7 Упорядоченность поля комплексных чисел

Определение 3.9. *Поле K – называется упорядоченным, если на K задан линейный порядок ($\leqslant$)*

1. $\forall x \in K \quad x \leqslant x$ – *рефлексивность*
2. $\forall x, y \in K \quad x \leqslant y$ *и* $y \leqslant x$, *то* $x = y$ – *ассиметричность*
3. $\forall x, y, z \quad x \leqslant y, y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$ – *транзитивность*
4. $\forall x, y \in K, x \leqslant y \vee y \leqslant x$ – *линейность*

И отношение порядка согласовано с операциями

1. $\forall x, y, z \in K$ *Если* $x \leqslant y$, *то* $x + z \leqslant y + z$
2. $\forall x, y \in K$ *Если* $0 \leqslant x, 0 \leqslant y$, *то* $0 \leqslant x \cdot y$

Теорема 3.9. $\mathbb{C}$ *не является упорядоченным полем*

Доказательство. $\sqsupset$ есть порядок. $P = \{x \in \mathbb{C} \mid x > 0\}$
Если $x \in P$, то $-x \notin P$
$0 < x \quad -x < 0 \Rightarrow -x$ не может быть больше 0, т.е. $-x \notin P$
Если $i \in P$, тогда $i^2 \in P \Rightarrow -1 \in P$?!!
Если $i \notin P$, тогда $-i \in P$ тогда $(-i)^2 \in P$, т.е. $-1 \in P$ □

ДЗ с 23 ноября:

1. $M = \{z \in \mathbb{C} \mid Re\ z = 0\}$

   Изобразить множество точек:

   (a) $u = z^2$
   (b) $u = (z+1)^2$

2. Изобразить множество точек z:

   (a) $arg\ z = \dfrac{\pi}{4}$
   (b) $arg\ \dfrac{1}{z} = \dfrac{\pi}{4}$
   (c) $0 < arg\ z < \dfrac{\pi}{4}$
   (d) $arg(z - i + 1) = \dfrac{\pi}{4}$

   Где $arg\ z$ – **главный аргумент**

3. Записать в тригонометрической форме:

(a) 1
(b) -5
(c) $+3i$
(d) $1 - i\sqrt{3}$
(e) $-3\left(\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}\right)$
(f) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\frac{\pi}{2}$
(g) $\sin\frac{2\pi}{5} + i\left(1 - \cos\frac{2\pi}{5}\right)$
(h) $\sin\frac{2\pi}{5} + i\left(1 + \cos\frac{2\pi}{5}\right)$

4. Решить систему: $\begin{cases} z_1 + iz_2 - z_3 = 2 + i \\ 2z_1 + iz_3 = 5 \\ z_2 + z_3 = i - 1 \end{cases}$

5. (a) $\sqrt{\frac{2}{3} + i}$
   (b) $\sqrt[3]{1+i}$

3.8 Свойства модуля комплексного числа

Определение 3.10. $z \in \mathbb{C} \quad |z| = \sqrt{z\overline{z}}$

Теорема 3.10. $\forall z, w \in \mathbb{C}$

1. $|z| \geqslant 0$

2. $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$

3. *Если* $Im\ z = 0$*, то* $|z|_{\mathbb{C}} = |z|_{\mathbb{R}}$

4. $|-z| = |z|$

5. $|z \cdot w| = |z||w|$

6. *Если* $z \neq 0$*, то* $|z^{-1}| = |z|^{-1}$

7. $|z + w| \leqslant |z| + |w|$

8. $||z| - |w|| \leqslant |z - w|$

Доказательство. 1-4 – Упражнение.

5 $|z \cdot w|^2 = z \cdot w \cdot (\overline{zw}) = z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w} = |z|^2 \cdot |w|^2 \Rightarrow |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

6 $z \cdot z^{-1} = 1$, т.е. $|1| = |z \cdot z^{-1}| = |z||z^{-1}| \Rightarrow |z^{-1}| = |z|^{-1}$

7 $|z + 1| \leqslant |z| + 1$
$|z + 1|^2 = (z + 1)(\overline{z} + 1) = z\overline{z} + \overline{z} + \overline{z} + 1 = |z|^2 + 1 + 2x$
$x^2 + y^2 > x^2$
$\sqrt{x^2 + y^2} \geqslant x$
$2|z| = 2\sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 2x$
Если $w = 0$
Если $w \neq 0$ тогда $\exists w^{-1}$
$z + w = |(zw^{-1} + 1)w| = |zw^{-1} + 1||w| \leqslant (|zw^{-1}| + 1)|w| = (|z||w|^{-1} + 1)|w| = |z| + |w|$

8 $|z| = |w + (z - w)| \leqslant |w| + |z - w|$
$|z| - |w| \leqslant |z - w|$
Если $|z| - |w| \geqslant 0$, то $||z| - |w|| = |z - |w \leqslant |z - w|$
Если $|z| - |w| < 0$, то $||z| - |w|| = |w| - |z| \leqslant |w - z| = |z - w|$

□

ДЗ:

1. Изобразить множество точек:
   (a) $|z| > 5$
   (b) $|z| \leqslant 4$
   (c) $|z + 3i| < 4$
   (d) $|z + 3 - i| > 4$
   (e) $2 < |z| < 3$
2. Какая фигура?
   (a) $|z - a| + |z - b| = 5 \quad a.b \in \mathbb{C}$
   (b) $|z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 4$
   (c) $|z| = |z - \frac{i}{3}|$
   (d) $|z| \leqslant Re\ z + Im\ z$
3. $z = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi \quad arg\ z_1 -?$, если
   (a) $z_1 = z^2 - z$
   (b) $z_1 = z^3 + z^2$
   (c) $z_1 = z^2 + \overline{z}$

3.9 Тригонометрическая форма записи комплексного числа (продолжение)

Теорема 3.11. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
$z_1 = r_1(cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$
$z_2 = r_2(cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$
Тогда:

1. $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$

2. $\overline{z}_1 = r_1(\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1))$

3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)) \quad z_2 \neq 0$

Доказательство. 1. $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos\theta_1\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + i(\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_2)\cos(\theta_1)))$

2. $\begin{array}{ccc} \cos\theta_1 & = & \cos(-\theta_1) \\ -\sin(\theta_1) & = & \sin(-\theta_1) \end{array}$

3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \dfrac{r_1 r_2(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i(\sin(\theta_1 - \theta_2)))}{r_2 r_2(\cos(\theta_2 - \theta_2) + i(\sin(\theta_2 - \theta_2)))} = \dfrac{r_1 r_2(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i(\sin(\theta_1 - \theta_2)))}{r_2 r_2} =$
$= \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$

□

Замечание 3.6. *1.* $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

2. $z_1, z_2 \neq 0 \quad Argz_1 z_2 = Argz_1 + Argz_2$

Следствие 3.3 (Формула Муавра). $\forall z \in \mathbb{C} \quad z \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$z^n = (r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$
$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$
$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = \cos\theta(\cos^2\theta - 3\sin^2\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$
$\sin\theta(3\cos^2\theta - \sin^2\theta) = -4\sin^3\theta + 3\sin\theta$
ДЗ: прошлое
Записать в алгебраической форме:

1. $(z+1)^6$
2. $(\sqrt{3}+i)^{17}$
3. $(3i-1)^5 - (3i+1)^5$

ДЗ:

1. 2.46
2. 2.47
3. 2.48
4. 2.49
5. 2.43

ДЗ с 11 декабря:

1. 2.49
2. 2.50
3. 2.51
4. 2.54

3.10 Корни n-ой степени из комплексных чисел

Теорема 3.12. $d \in \mathbb{C}, d \neq 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists$ *ровно* n *чисел* $z \in \mathbb{C} : z^n = d$
Если $d = |d|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \varphi = arg\ d$, *тогда* $z_k = \sqrt[n]{|d|}(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{2\pi k}{n})$

Доказательство. $z_k^n = (\sqrt[n]{|d|})^n(\cos\dfrac{\varphi+2\pi}{k}\cdot n + i\sin\dfrac{\varphi+2\pi}{k}\cdot n) = |d|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = d$
$0 \leqslant \dfrac{\varphi+2\pi k}{n} < 2\pi$
Если $k \neq l$, то $\dfrac{\varphi+2\pi k}{n} \neq \dfrac{\varphi+2\pi l}{n}$
А тогда все z_k различны
Заметим, что всякий корень n-ой степени из d является корнем уравнения $z^n - d = 0$, а у такого уравнение не более чем n корней □

Определение 3.11. $n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}, z \neq 0$. *Через* $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos\dfrac{\varphi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi}{n})$ *и назовём это главным корнем n-ой степени из комплексного числа*

3.11 Корни n-ой степени из 1

Теорема 3.13. $n \in \mathbb{N}$ $\omega_k = \cos\dfrac{2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{2\pi k}{n}, k = \overline{0, n-1}$

$\Omega_n = \{\omega_k | k = \overline{0, n-1}\}$

1. *ω_k – корни n-ой степени из 1*
2. *$(\Omega, \cdot)$ – абелева группа*

Доказательство. 1. очевидно

2. ассоциативно, коммутативно
   1 – нейтральный элемент (ω_0)
   обратный – $\omega_k^{-1} = \omega_{n-k}$
   замкнутость $\omega_k\omega_l = \omega_x, x \equiv k + l(modn)$

□

Замечание 3.7. *$(\Omega, \cdot)$ – циклическая группа порядка n $\Omega_n = \langle\{\omega_1\}\rangle$*

Замечание 3.8. *элементы Ω_n расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность*

ДЗ:

1. Упражнение: доказать, что два метода вычисления квадратного корня дают один и тот же результат

3.12 Экспоненциальная форма записи комплексного числа

Обозначения: $exp(i\varphi) = [e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi]$ – Формула Эйлера

Теорема 3.14. $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

1. $e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
2. $e^{-i\varphi} = \dfrac{1}{e^{i\varphi}}$
3. $(e^{i\varphi_1})^n = e^{in\varphi_1}$ *– Формула Муавра*

Доказательство. 1. Умножение комплексных чисел

2. $ei\varphi_1 \cdot e^{-i\varphi_1} = e^{i(\varphi_1-\varphi_1)} = e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$
3. Формула Муавра

□

Следствие 3.4. *1.* $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$

2. $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$
3. $\sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$
4. $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{i(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})}$
5. $\operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{i(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}$

Теорема 3.15. $(\sqrt[m]{z})^n$ *имеет ровно* $\dfrac{m}{НОД(m,n)}$

Замечание 3.9. $\sqrt[n]{z^m} \neq (\sqrt[n]{z})^n$

Глава 4

Повторения

4.1 Определение тригонометрических функций

$\mathcal{O} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$

$$E(x) = \begin{cases} P_x, AP_x = x, x > 0 \\ A, x = 0 \\ Px, P_xA = |x|, x < 0 \end{cases}$$

Длина окружности – 2π

Главный период $E(x)$ – 2π

Период $2\pi k, k \in \mathbb{Z} E(x + 2\pi k) = E(x)$

Важное свойство: $\forall P_x \in \mathcal{O} \exists! \alpha \in [0, 2\pi) \quad E(\alpha) = P_x$

α определяется углом между $\vec{OA}$ и $\vec{AP_x}$

$P_{r_1} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto x$

$P_{r_2} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto y$

$\widetilde{E} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad x \mapsto E(x)$

$P_{r_1} \circ \widetilde{E} = \cos \qquad P_{r_2} \circ \widetilde{E} = \sin$

4.2 Свойства синуса и косинуса

cos	sin
$E_{\cos} = \mathbb{R}$	$E_{\sin} = R$
$D_{\cos} = [-1, 1]$	$D_{\sin} = [-1, 1]$
период : $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	период : $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
главный период : 2π	главный период : 2π
$\cos(-x) = \cos x$чётная функция	$\sin(-x) = x$нечётная функция
$\downarrow [2\pi k, 2\pi k + \pi], \uparrow [2\pi k - \pi, 2\pi k]$	$\uparrow [2\pi k, 2\pi k + \frac{\pi}{2}], \downarrow [\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k], \uparrow [2\pi k - \frac{\pi}{2}, 2\pi k]$

Важное свойство: $\forall x_1, x_2 \quad x_1^2 + x_2^2 \quad \exists! \alpha \in [0, 2\pi) \quad \cos\alpha = x_1, \sin\alpha = x_2$

$\operatorname{tg} : \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \quad \operatorname{tg}(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\operatorname{ctg} : \mathbb{R} \backslash \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \quad \operatorname{ctg}(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

Упражнение:расписать свойства тангенса и котангенса

4.3 Основные тригонометрические формулы

1. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

2.

Теорема 4.1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Доказательство. $P_\alpha, P_{\alpha+\beta}, P_\beta$

$\overset{\smile}{P_{\alpha+\beta}A} = \overset{\smile}{P_\alpha P_{-\beta}}$

$P_{\alpha+\beta}(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$

$P_\alpha(\cos\alpha, \sin\alpha)$

$P_{-\beta}(\cos(-\beta), \sin(-\beta))$

По геометрии две хорды $P_{\alpha+\beta}A$ и $P_\alpha P_{-\beta}$ равны

$(\cos(\alpha+\beta)-1)^2 + \sin^2(\alpha+\beta) = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2$

$\cos^2(\alpha+\beta) + 1 - 2\cos(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta + \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta$

$2 - 2\cos(\alpha+\beta) = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ □

ДЗ:

1. Найти все $a, b \in \mathbb{R} : f(\alpha) = a\sin\alpha + b\cos\alpha$ – чётная
2. Найти период $f(\alpha) = \sin\alpha + \cos\frac{\alpha}{3} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{10}$
3. Вычислить:
   (a) $\cos\dfrac{123\pi}{4}$
   (b) $\sin\dfrac{-117\pi}{4}$
   (c) $\cos\dfrac{-205\pi}{6}$
   (d) $\operatorname{tg}\dfrac{1011\pi}{4}$

Упражнения:

1. 4.2
2. Доказать $\cos(\alpha-\beta)$
3. Доказать формулы приведения $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha), \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha), \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha), \sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)$

4.4 Функции arcsin и arccos

$\sin \upuparrows [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\sin_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$
У этой функции есть обратная, т.к. она монотонная и непрерывная. назовём её arcsin
$\cos \downdownarrows [0, \pi]$
$\cos_{[0,\pi]} : [0, \pi] \to [-1, 1]$
У этой функции есть обратная, т.к. она монотонная и непрерывная. Назовём её arccos

1. $\alpha \in \mathbb{R} : \sin\alpha = a, a \in [-1, 1]$
   $\alpha = \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
   $\alpha = \pi - \arcsin\alpha + 2\pi k$
2. $\alpha \in \mathbb{R} : \cos\alpha = a, a \in [-1, 1]$
   $\alpha = \pm\arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Упражнение 4.1. *Определить обратные* tg *и* ctg. *Решить уравнения* $\operatorname{tg}\alpha = a, \operatorname{ctg}\alpha = a$

Упражнение 4.2. *Доказать:* $\sin(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Доказательство. $y = \operatorname{arctg} x \quad \operatorname{tg} y = x \quad -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$

$-1 < \sin y < 1 \qquad 0 < \cos y < 1$

$\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 y = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$

$\cos y = \sqrt{\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}}$

$\sin y = \pm\sqrt{1 - \cos^2 y} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{tg}^2 y - 1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}} = \pm\sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}^2 y}{1 + \operatorname{tg}^2 y}} = \pm\dfrac{|\operatorname{tg} y|}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 y}}$ □

Упражнение 4.3. $f(x) = \cos(ax + \sin(bx)) \quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{n}{m} \quad n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$

$T = \dfrac{1}{b} \cdot n2\pi$

ДЗ: $1.42 - 1.44$

(!) $\operatorname{tg}(|\operatorname{arctg}|) = |x|$

(!) $\cos(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + X^2}}$

Найти $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$ и $\pi < \alpha\dfrac{3\pi}{2}$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Утверждение 4.1. $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) =?$

Доказательство. $\alpha + \beta \neq \pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z}$

$\alpha \neq \pi k_2, k_2 \in \mathbb{Z}$

$\beta \neq \pi k_3, k_3 \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \dfrac{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \dfrac{1 - \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}}{\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}} = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$

□

Следствие 4.1. $\alpha - \beta \neq \pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z}$

$\alpha \neq \pi k_2, k_2 \in \mathbb{Z}$

$\beta \neq \pi k_3, k_3 \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}$

Утверждение 4.2. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}$

Доказательство. $\alpha = \dfrac{\alpha + \beta}{2} + \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$\beta = \dfrac{\alpha + \beta}{2} - \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin\alpha = \sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2} + \sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}$

$\sin\beta = \sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2} - \sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}$

Теорема доказана □

Утверждение 4.3. $\alpha \neq= \dfrac{\pi}{2} + \pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z}$

$\beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k_2, k_2 \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

Доказательство. $\operatorname{th}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ □

Утверждение 4.4. $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$

Доказательство. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta$ $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta$ □

Утверждение 4.5. $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$

Утверждение 4.6. $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

Замечание 4.1. $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}$

$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}$

$\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}$

4.5 Формулы универсальной подстановки

Утверждение 4.7. *1.* $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2})}{1+\operatorname{tg}^2(\frac{\alpha}{2})}$

2. $\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2(\frac{\alpha}{2})}{1+\operatorname{tg}^2(\frac{\alpha}{2})}$

3. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

4. $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$

Доказательство. 1. $sin\alpha = \sin(2\frac{\alpha}{2}) = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{1} = \dfrac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2\operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2})}{1+\operatorname{tg}^2(\frac{\alpha}{2})}$

2. $\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

□

Утверждение 4.8. $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1}}$

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

Упр:

1. $\operatorname{tg}(\alpha - \frac{\pi}{2})$
2. $\operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{2})$
3. $\operatorname{ctg}(\alpha - \frac{\pi}{2})$
4. $\operatorname{ctg}(\alpha + \frac{\pi}{2})$
5. $\cos\alpha + \cos\beta$
6. $\cos\alpha - \cos\beta$
7. Универсальная подстановка для $\cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$

ДЗ:

1. 24
2. 26
3. 30
4. 27-40
5. 51
6. 50(л,н,м,о)

4.6 Универсальное тригонометрическое преобразование

Теорема 4.2. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 \neq 0$

$$a \sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(\alpha+\varphi), \quad \varphi : \cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\begin{cases} b \geqslant 0, \varphi = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ b < 0, \varphi = -\arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \end{cases}$$

Доказательство. $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$|\sin\varphi| = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$0 < |\varphi| \leqslant \pi$

$$\begin{cases} b > 0, |\sin\varphi| = \sin\varphi \\ b < 0, |\sin\varphi| = -\sin\varphi \end{cases}$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}\cos}\alpha\right) = \sqrt{a^2+b^2}(\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$$ □

Глава 5

Многочлены

Определение 5.1. $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n}, a_n \neq 0, a_n \in K$ *– многочлен*

также $P(x)$ *– функция*

$P(x) : E \to K, \quad E \subseteq K$

Теорема 5.1. $\begin{cases} P(x) = g(x) \forall x \in E \\ P(x) : E \to K \\ g(x) : E \to K \end{cases} \iff degP(x) = degg(x)$ *и все коэффициенты равны*

Доказательство.

$\Leftarrow$ Очевидно

$\Rightarrow$ $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$

$g(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} b_i x^i$

$x = 0 \quad g(0) = b_0 \quad p(0) = a_0, p(0) = g(0)$

$p(x) = g(x) \Rightarrow p'(x) = g'(x)$

$p'(0) = g'(0) \Rightarrow a_1 = b_1$

Не умаляя общности $n < m \quad a_m = b_m \quad a_{m+1} = b_{m+1} = 0$

□

Теорема 5.2 (Основная теорема алгебры)**.** $\forall p(x) \in \mathbb{C}[x] \exists x_0 \in \mathbb{C} : p(x_0) = 0$

Доказательство.

Теорема 5.3 (Вейерштрасса)**.** $f : X \to \mathbb{R}$ *– непрерывно, где* X *– компакт. Тогда* f *достигает максимального и минимального значения*

Доказательство. $X_n = f^{-1}((-n, n)) \subset \mathbb{R}$ (полный прообраз)

$X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ и X_i – открытое, т.к. X_i – прообраз открытого множества при непрерывном отображении.

Т.к. X – компакт, то можно выделить конечное подпокрытие X_{i_k}

$\forall x \in X f(x) \leqslant max\{i_k\}$

$\forall x \in X f(x) \geqslant min\{-i_k\}$

Упражнение 5.1. *Доказать, что* $f(x)$ *достигает* sup *и* inf *либо для произвольного компакта, либо на* $X \subset \mathbb{R}^2$

□

Лемма 5.1. $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ $\forall c \exists r > 0 : \forall |x| \geqslant r \quad |P(x)| > c$

Доказательство. ф. $C > 0$

$|P(x)| = |a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0| \geqslant |a_n x^n| - |a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0| \geqslant |a_n||x^n| - (|a_{n-1}||x^{n-1}| + \dots + |a_0|) \geqslant$

[мы можем взять $r > 1$т.е.$|x| > 1 \quad |x^{n-1}| > |x^i|, i < n-1$]

$\geqslant |a_n||x^n| - |x^{n-1}| \sum\limits_{i=0}^{n-1} |a_i| = |x|^{n-1}(|a_n||x| - \sum\limits_{i=0}^{n-1} |a_i|) \geqslant |a_n||x| - \sum\limits_{i=0}^{n-1} |a_i| \geqslant C$

$|x| \geqslant \dfrac{C + \sum\limits_{i=0}^{n-1} |a_i|}{|a_n|} = r'$

И для выполнения возьмём $r = max(r', 1)$ □

Лемма 5.2. $q(x) \in \mathbb{C}[x] \quad q(0) = 1$

$\forall \delta > 0 \exists x_0 : |x_0| < \delta| \quad |q(x_0)| < 1$

Доказательство. $q(x) = 1 + a_k x^k + a_{k+1}x^{k+1} \dots + a_n x^n \qquad a_k$ – первый такой $a_1 \neq 0, i \neq 0$

E_k – корень k-ой степени из $-\dfrac{1}{a_k}$

$\lhd p(t) := q(t \cdot \varepsilon_k), \quad t \in \mathbb{R}$

$p(t) = 1 + a_k \cdot \dfrac{-1}{a_k} + a_{k+1} \cdot \varepsilon_k^{k+1} \cdot t^{k+1} + \dots + a_n \varepsilon_k^n \cdot t^n$

$p(0) = 0$

$|p(t)| \leqslant |1 - t^k| + |a_{k+1}\varepsilon_k^{k+1} \cdot t^{k+1} + \dots + a_n \varepsilon_k^n t^n| = |1 - t^k| + t^k |a_{k+1}\varepsilon_k^{k+1} + \dots + a_n \varepsilon_k^n t^{n-k}|$

[$|t| < 1$]

$= 1 - t^k + |t^k|| - // - | \leqslant|$

$\varphi(t) = |a_{k+1}\varepsilon_k^{k+1} + \dots + a_n \varepsilon_k^n t^{n-k}|$ – непрерывна и равна 0 в 0 $\varphi(0) = 0$

$\exists (0, \alpha) \in \mathbb{R} : \forall t \in (0, \alpha) \varphi(t) < \dfrac{1}{2}$

$| \leqslant 1 - t^x + t^k \cdot \dfrac{1}{2} = 1 - \dfrac{1}{2} t^k < 1$

фиксируем $\delta > 0 \quad \forall t \in (0, \alpha) \quad q(t + \varepsilon_k) < 1$

$t \cdot |\varepsilon_k| < \delta$

$t = min \left(\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\delta}{|\varepsilon_k|} \right)$

$x_0 = t_0 \cdot k \qquad q(x_0) < 1$ □

Доказательство основной теоремы алгебры:

$\sqsupset P(\mathbb{Z}) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ – многочлен над целыми числами

Пусть $\forall z \in \mathbb{C} \quad P(\mathbb{Z}) \neq 0$

По лемме: $\exists r : \forall z \quad |z| \geqslant r \quad |P(z)| > |P(0)|$

раз для $|z| \geqslant r$, то и для $|z| = r$

Рассмотрим круг $|z| \leqslant r$

По теореме Вйерштрасса $|P(z)|$ принимает на этом множестве минимальное и максимальное значение

$|P(a)| = \min\limits_{|z| \leqslant r} |P(z)|$

Заметим, что $|a| < r$. Если бы $|a| = r$, то $|P(a)| > |P(0)|$?!

$z = w + a$

$P(z) = P(w + a) = P(a) + C_k w^k + \dots C_n w^n$, где C_k – первый ненулевой коэффициент.

$\dfrac{|P(z)|}{|P(a)|} = |1 + C'_k w_k + \dots C_n w^n|, \quad C'_k = \dfrac{C_k}{|P(a)|}$

По лемме: $\forall \delta > 0 \exists \delta > 0 \exists |w_b| < \delta : \dfrac{|P(w_\delta + a)|}{|P(a)|} < 1$

$\mathcal{O}_{\delta_a}(a) \subset \mathcal{O}_r(0)$

Тогда $(a + w_{\delta_a}) \in \mathcal{O}_{\delta_a}(a) \quad \in \mathcal{O}_r(0)$

□

Следствие 5.1. $\forall P(z) \in \mathbb{C}[z]$

$P(z) = a_n(z - z_n)(z - z_{n-1}) \dots (z - z_1)$, *где* $z_1, z_2 \dots z_n$ *– корни и* $n = deg P(z)$

Следствие 5.2. $\forall P(x) \in \mathbb{R}[x]$

$P(x) = a_n(x - x_1) \dots (x - x_n) \cdot (x^2 + p_1 x + q_1) \dots (x^2 + x^2 + p_n x + q_n)$

$x_1, \dots x_n$ *– вещественные корни.* $p_i^2 - 4q_i < 0$ *и* $(n + 2m) = deg P(x)$

Доказательство. Рассмотрим этот многочлен, как многочлен над полем $\mathbb{C}$
$P(x) = a_n(x - x_1)\dots(x - x_n)\cdot(x - z_n)\cdot\dots(x - z_n)$, где $x_1, x_2 \dots x_n \in \mathbb{R}$

Замечание 5.1. *Если $P(z) = 0$, то $P(\overline{z}) = 0$*

Доказательство. Пусть $P(z) = 0$
$0 = \overline{P(z)} = \overline{(a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0)} = (a_n \overline{z}^n + \dots + a_1\overline{z} + a_0)$, т.е. $P(\overline{z}) = 0$
т.к. $a_i \in \mathbb{R}$, то $\overline{a_i} = a_i$ □

Т.о. l – чётное и все комплексные корни разбиваются на пары
$(x - z_i)(x - \overline{z_i}) = x^2 - (z_1 + \overline{z_i})x + z_i\overline{z_i} \quad p_j = (z_i + \overline{z_i}) \quad q_i = z_i\overline{z_i}$
$p_i^2 - 4q_i = z_1^2 + 2z_1\overline{z_i} + \overline{z_i}^2 - 4z_i\overline{z_i} = z_i^2 - 2z_i\overline{z_i} + z_i^2 = (z_i - \overline{z_i})^2 = (2Imz_i)^2 < 0$ □

5.1 Деление многочленов

$P(x)$ делим на $q(x)$
$p(x) = q(x)\cdot g(x) + r(x) \quad deg\ r(x) < deg\ q(x)$

Определение 5.2. *$p(x)$ делится на $q(x)$, если $r(x) = 0$* $\qquad p(x)\vdots q(x)$

Лемма 5.3 (Безу)**.** *Если $p(x_0) = 0$, то $p(x_0)\vdots(x - x_0)$*

Доказательство. $p(x) = (x - x_0)\cdot g(x) + r(x)$
$0 = p(x_0) = 0 + r(x_0) \quad r(x_0) = 0$
и $degr(x) < deg(x - x_0) = 1$
$defr(x) = 0$
$r(x) = 0$ □

ДЗ:

1. $-ix^2 + 2ix - 1 = 0$
2. $x^2 - 5i = 9$
3. $3x^2 - 4ix + 2i = 0$
4. $2x^3 + 3x^2 - 4x - 9 = 0$
5. $x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0$
6. $x^5 + 7x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x + 2$ разделить на $x^2 + 2x - 1$
7. $x^7 - x^6 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 + 1$ на $x^3 - x^2 + x - 2$

5.2 Ещё одна модель комплексных чисел

Упражнение 5.2. $\mathbb{R}[x]$ *– кольцо*

$(x^2 + 1) = \{(x^2 + 1)P(x) \mid P(x) \in \mathbb{R}[x]\}$ – идеал кольца $\mathbb{R}[x]$

Определение 5.3. *I – идеал кольца R, если:*

1. *I – подкольцо*
2. *$\forall r \in R, \forall i \in I \quad ri, ir \in I$*

Введём на $R[x]$: отношение эквивалентности: $P_1(x) \sim P_2(x) \Longleftrightarrow (P_1(x) - P_2(x))\vdots(x^2 + 1)$
Докажем, что это отношение эквивалентности. Это очевидно -.-
$\mathbb{R}/_\sim \quad P(x) \in \mathbb{R}$
$[P(x)] = [ax + b]$
$P(x) = (x^2 + 1)q(x) + ax + b \quad degP(x) = n, deg(x^2 + 1) = 2, degq(x) = n - 2$

Теорема 5.4. *Остаток при делении двух многочленов единственен*

Доказательство. $P(x)$ делится на $G(x)$
$P(x) = G(x)Q_1(x) + R_1(x)$
$P(x) = G(x)Q_2(x) + R_2(x)$
$0 = G(x)(Q_1(x) - Q_2(x)) + R_1(x) - R_2(x)$

Упражнение 5.3. *Доделать*

□

ДЗ:

1. $z^2 + (3+2i)z - 7 + 17i = 0$ – решить
2. $2z^6 + 5 = 0$ – решить
3. $z^{2n} - 1$ – разложить
4. $(a-1)z^4 - 4z^2 + a + 2 = 0$ Найти a при которых уравнение имеет только мнимые (вещественная часть равна 0) корни

Теорема 5.5. *K – поле $f(x), g(x) \in K[x]$ $\quad g(x \neq 0)$ Тогда существует единственные $q(x), r(x) \in K[x]$*
$f(x) = g(x)a(x) + r(x) \quad deg\ r(x) < deg\ g(x)$

Доказательство.

Единственность От противного. $\sqsupset f(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x) \quad f(x) = g(x) \cdot q_2(x) + r_2(x)$
$deg\ r_1(x), deg r_2(x) < deg\ g(x)$
$g(x)(q_1(x) - q_2(x)) = r_2(x) - r_1(x)$
При $g_1(x) - g_2(x) \neq 0$ степень левой части больше степени правой части?!
Таким образом $q_1(x) = q_2(x) \Rightarrow r_1(x) = r_2(x)$

Существование $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i \quad g(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} b_j x^j$
Если $n < m$, то очевидно
Если $m < n \qquad r_1(x) = f(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x)$
n_1 – степень $r_1(x), C'_n$ – степень коэффициента
$m < n_1 \qquad r_2(x) = r_1(x) - C'_{n_1} b_m^{-1} x^{n_1 - m} g(x)$
$n > n_1 > n_2 > \dots > n_k \quad n_k < m$
$r_k(x) = f(x) - g(x)(a_n b_m^{-1} x^{n-m} + \dots)$
$f(x) = g(x)(\quad) + r_k(x)$

□

$p(x) \in \mathbb{R}[x] \quad [p(x)] = [a + bx]$
$[p(x)] + [g(x)] = [p(x) + g(x)]$
$[p(x)] + [g(x)] = [p(x) \cdot g(x)]$
$[0]$ – нейтральный относительно сложение
$[1]$ – нейтральный относительно умножение

Упражнение 5.4. $(\mathbb{R}/_\sim, +, \cdot)$ *– поле*

Теорема 5.6. $\mathbb{R}/_\sim \cong \mathbb{C}$

Доказательство. $h : \mathbb{R}/_\sim \to \mathbb{C} \quad [p(x)] \mapsto p(i)$
h – сюръективно? фиксируем $a + bi = z \in \mathbb{C}$ тогда существует $[a + bx] \in \mathbb{R}/_\sim$
h – инъективно? $h([p(x)]) = 0 \quad h([p(x)]) = a + bi \Rightarrow a = 0, b = 0 \Rightarrow [p(x)] = [0 + 0x] = [0]$ т.е. $Ker\ h = 0$
h – гомоморфизм колец
$h([p(x)] + [g(x)]) = h([a_1 + b_1 x] + [a_2 + b_2 x]) = h([a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)x]) = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i = h([a_1 + b_1 x]) + h([a_2 + b_2 x]) = h([p(x)]) + h([g(x)])$

Упражнение 5.5. *Умножение*

□

5.2.1 Обобщённые комплексные числа

вместо уравнения $x^2+1=0$ возьмём $x^2+px+q=0 \quad D=p^2-4q<0$

Пусть I – это такой символ, что $I^2+pI+q=0$

$K=\{a+bI|a,b\in\mathbb{R}\}$

Утверждение 5.1. $a_1+b_1I=a_2+b_2I \iff \begin{cases} a_1=a_2 \\ b_1=b_2 \end{cases}$

Доказательство. $\sqsupset (a_1-a_2)=(b_2-b_1)I$

$(a_1-a_2)^2=(b_2-b_1)^2I^2=(b_2-b_1)^2(-pI-q)$

(a) Если $b_2-b_1=0 \Rightarrow a_1-a_2=0$

(b) Если $b_2-b_1\neq 0 \quad -pI-q=\dfrac{(a_1-a_2)^2}{(b_2-b_1)^2}$

$pI=-\dfrac{(a_1-a_2)^2}{(b_2-b_1)^2}-q$

Если $p=0 \qquad (a_1-a_2)^2=-q(b_2-b_1)^2$, то т.к.$D<0\Rightarrow q>0$. получается в левой части положительное выражение, а в правой – отрицательное

Если $p\neq 0 \quad I\in\mathbb{R}$

□

1. $(a_1+b_1I)+(a_2+b_2I)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)I$
2. $(a_1+b_1I)\cdot(a_2+b_2I)=a_1a_2+(a_1b_2+a_2b_1)I+b_1b_2I^2=a_1a_2+(a_1b_2+a_2b_1)I-pb_1b_2I-qb_1b_2=(a_1a_2-qb_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1-pb_1b_2)I$

Упражнение 5.6. x^2+px+q *не имеет решений в* $\mathbb{R}$*[нужно показать, что нужно извелекать корень из отрицательного числа, а решение* $x^2+1=0$ *не решается в* $\mathbb{R}$*]*

Определение 5.4. *Операция сопряжения*

$K\ni z=a+bi$ *тогда* $\overline{z}=(a-pb)-bI$

Упражнение 5.7. $0\leqslant z\overline{z}\in\mathbb{R}$

Упражнение 5.8. $\forall z\in K: z\neq 0\exists! z^{-1}$

Упражнение 5.9. $(K,+,\cdot)$ *– поле*

Определение 5.5. $|z|=\sqrt{z\overline{z}}$

Упражнение 5.10. $p(x),g(x)\in\mathbb{R} \qquad p(x)\sim g(x)\iff (p(x)-g(x))\vdots(x62+px+q)$

Тогда $\mathbb{R}/_\sim\cong K$

Теорема 5.7. $K=\mathbb{C}$

Доказательство. $x^2+px+q=0$ решим уравнение

$x_{1,2}=\dfrac{-p\pm i\sqrt{-p^2+4q}}{2}$

$I=\dfrac{-p+i\sqrt{-p^2+4q}}{2}$

1. $K\subseteq\mathbb{C}$

   фиксируем $a+bI\in K \qquad a+bI==a+b\dfrac{-p+i\sqrt{|D|}}{2}=(a-\dfrac{p}{2}b)+\dfrac{b\sqrt{|D|}}{2}\cdot i\in\mathbb{C}$

   $2I+p=i\sqrt{|D|}$

   $i=\dfrac{2I+p}{\sqrt{|D}}$

2. $\mathbb{C} \subseteq K$

   фиксируем $(a + bi) \in \mathbb{C}$

   $$a + b - \frac{2I + p}{\sqrt{|D|}} = a + \frac{bp}{\sqrt{|D|}} + \frac{2b}{\sqrt{|D|}} \cdot I$$

$\square$

ДЗ(письменное):

1. $\sqsupset I$ является решением $x^2 + x + 1$

   Найти решения в обобщённых комплексных чисел:

   (a) $x^2 + 1 = 0$

   (b) $x^2 - 2x - 2 = 0$