Конспект по матану 10 класс

Коченюк Анатолий

23 октября 2018 г.

Глава 1

1 четверть

1.1 Функция

$f(x) : X \to Y \quad X, Y \subseteq \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

a – предельная точка X

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in O_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(A)$

$A \neq f(a)$, потому что она там может быть даже не определена

$$\begin{cases} a \in \mathbb{R}, O_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta) \\ a = +\infty, O_\delta(a) = (\delta, +\infty) \\ a = -\infty, O_\delta(a) = (-\infty, -\delta) \end{cases}$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(O_{\delta(a)}) \subset O_\varepsilon(A)$

Определение 1.1. $f(x)$ – *б.б.* $\iff |f(x)| \to \infty, x \to a \in \overline{\mathbb{R}}$

$\iff \forall k > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in O_\delta(a), x \neq a |f(x)| \geqslant K$

Определение 1.2. $f(x)$ – *б.м.* $\iff |f(x)| \to 0, x \to a \in \overline{\mathbb{R}}$

Теорема 1.1 (О представлении)**.** $A = \lim\limits_{x \to a} f(x) \iff f(x) = A + g(x), g(x)$ – *б.м. при* $x \to a$

Определение 1.3 (По Гейне)**.** $A = \lim\limits_{x \to a} f(x) \iff \forall x_n \to a (x_n \in X, x_n \neq a)$ *выполняется* $f(x_n) \to A$

Пример:

Доказать на языке $\varepsilon - \delta$

$\lim\limits_{x \to 1} (3x - 2) = 1$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)$: $|x - 1| < \delta \Rightarrow |3x - 2 - 1| < \varepsilon$

Уметь по $\forall \varepsilon$ предъявлять соответствующее δ

$|3x - 3| < \varepsilon \Leftarrow 3|x - 1| < \varepsilon \Leftarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta$

$\sqsupset \delta = \frac{\varepsilon}{3}$ – искомое

Пример:

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x - 1}{x + 3} = -\dfrac{1}{2}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : |x + 1| < \delta \Rightarrow \left| \dfrac{2x + 1}{x + 3} + \dfrac{1}{2} \right| < \varepsilon$

$\left| \dfrac{5(x + 1)}{2(x + 3)} \right| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \dfrac{1}{2} min\{1; \dfrac{2\varepsilon}{5}\}$

$\sqsupset |x + 1| < \delta$

$\delta < 1 \Rightarrow |x + 3| > 1$

А тогда $\left| \dfrac{2x + 1}{x + 3} + \dfrac{1}{2} \right| = \left| \dfrac{5(x + 1)}{2(x + 3)} \right| = \dfrac{5|x + 1|}{2|x + 3|} < \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{\delta}{1} \leqslant \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2\varepsilon}{5} = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ ч.т.п.

$\sqsupset f(x) : E \to \mathbb{R} \quad E \subseteq \mathbb{R}$

Определение 1.4. $f(x)$ – *ограничена сверху или ограничена снизу или ограничена на* $E \iff \exists K \geqslant 0 : \forall x \in E$ *выполняется* $f(x) \leqslant K \vee -k \leqslant f(x) \vee |f(x)| \leqslant L$

Определение 1.5. $f(x)$ *называется локально ограниченной в точке* a, *которая либо принадлежит* E, *либо является предельной для* $E \quad (a \in \overline{E}) \iff \exists K \geqslant 0, \exists O(a) : |f(x)| \leqslant K \forall x \in O(a) \cap E$

Лемма 1.1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\left(\dfrac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}\right)}{\left(\dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}\right)}$ f – *локально ограничена* $\forall a \in \overline{E} \not\Rightarrow f$ – *ограничено на* E

Доказательство. $f(x) = x \quad E = \mathbb{R}$

в $\forall a \in \mathbb{R}$ она локально ограничена

$\exists K = max\{|a+1|, |a-1|\}$

$\forall x \in O_1(a)$ выполняется $|x| \leqslant K \quad O_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$

$\overline{E} = E \cup \partial E$

$\exists O(a) \subset E$ ☐

1.2 Предельный переход в неравенствах

Теорема 1.2 (1)**.** $\sqsupset \exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ *и* $\sqsupset A < B \Rightarrow \exists O(a) : \forall x \in \overset{\circ}{O}(a) \cap E$ *выполняется* $f(x) < B$

Доказательство. $\sqsupset \varepsilon > 0 : A + \varepsilon_1 < B$

По определению предела для этого $\varepsilon_1 \exists \delta : \forall x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E \quad |f(x) - A| < \varepsilon_1 \Rightarrow -\varepsilon_1 < f(x) - A < \varepsilon_1 \Rightarrow f(x) < A + \varepsilon_1 < B$

т.о. (таким образом) эта $O_\delta(a)$ – искомая окрестность. ☐

ДЗ:

Теорема 1.3 (2)**.** $\sqsupset f(x) < g(x) \forall x \in E$ *и* $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A, \exists \lim\limits_{x \to a} g(x) = B \Rightarrow A \leqslant B$

2а) контрпример, почему нельзя писать $A < B$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) =?$

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$

5)

Лемма 1.2. f – *ограничена на* $E \Rightarrow f$ – *локально ограничена* $\forall a \in \overline{E}$

1.3 Неопределённости

$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0 \cdot \infty; \infty - \infty; 1^\infty$

Теорема 1.4 (Безу)**.** $P_n(x) = (x - x_0) Q_{n-1}(x)$

$$\lim x + to - 1 \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x + to - 1} \frac{x + 2}{x^2 - x + 1} = \frac{\lim\limits_{x \to -1} (x + 2)}{\lim\limits_{x + \to -1} (x^2 - x + 1)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -1} x + \lim\limits_{x \to -1} 2}{\lim\limits_{x \to -1} x \cdot \lim\limits_{x \to -1} x - \lim\limits_{x \to -1} x + \lim\limits_{x \to -1} 1}$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \left| \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 1} - \dfrac{1}{3} \right| < \varepsilon$

$$\left| \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 1} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{x + 2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{3} \right| = \frac{|2x + 6 - x^2 + x - 1|}{|3(x^2 - x + 1)|} = \frac{|x^2 - 4x + 5|}{3(x^2 - x + 1)} = \frac{|x + 1| \cdot |x - 5|}{3(x^2 - x + 1)}$$

$x^2 + pz + q = (x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}$
$\leqslant \frac{|x+1| \cdot 7}{2 \cdot \frac{3}{4}} < \frac{\delta \cdot 28}{9} = \varepsilon$
Пусть $\exists \delta = min\{1, \frac{0\varepsilon}{28}\}$ Решено.

Теорема 1.5 (о двух милиционерах). $\sqsupset \forall x \in E \quad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$
$\sqsupset \exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = A$
$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to a} g(x) = A$

Доказательство. Воспользуемся языком последовательностей (Гейне)
Берём для $\forall x_n \to a$
$f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n)$ Пользуемся теоремой о двух милиционерах для последовательностей.
Таким образом $g(x_m) \to A \forall x_n \to A \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to a} g(x) = A$ □

1.4 Замечательные пределы

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \left(\frac{0}{0}\right)$ Было доказано, что $\forall x_n \to 0 \quad \sin x \to \sin 0 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$ (непрерывность $y = \sin x$ в 0)

   Определение 1.6. *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ Функция f непрерывно в точке $a \in E$ (т.е. $f(a)$ – определено заранее) $\iff \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ и $A = f(a)$, т.е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(\lim\limits_{x \to a} x) = f(a)$.*

   f коммутирует с пределом.

   Было доказано (вопрос 13 п. 5), что $\forall x_n \to a \quad \sin x \to \sin a \iff \exists \lim\limits_{x \to a} \sin x = sin a \iff$ Функция была непрерывна в каждой точке из $\mathbb{R}$

   Определение 1.7. $f : E \to \mathbb{R}$. *Говорят, что f непрерывно на E, если f непрерывно в каждой точке из E.*

   Множество функций, непрерывных на E обозначают $C(E)$
   $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \quad \sin x < x < \operatorname{tg} x$

   - $\frac{\sin x}{x} = \frac{|\sin x|}{|x|} < 1, \forall x \in \overset{\circ}{O}_\delta(0), \quad \delta < \frac{\pi}{2}$
   - $|\cos x| < \left|\frac{\sin x}{x}\right|$

   Задача 1.1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

   Доказательство. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{2}{3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{3x}{\sin 3x} \frac{2}{3}$
   $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t}$ □

   Следствия из предела №1:

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$
   $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
   $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} \Rightarrow 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$
   $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$
   $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} (\frac{x^2}{1 - \cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 2 \cdot 1 = 2)$ можем заменить предел произведения, так как оба выражения имеют предел

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\cos x\cdot x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1\cdot 1$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = 1$

$\arcsin = (\sin|_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]})^{-1}$

$\arcsin(\sin x)\neq x$, но $\sin(\arcsin x) = x$

$\arcsin a$ – тот корень уравнения $\sin x = a$, при котором $a\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$y = \arcsin x$

$x\to 0; x\in O_\delta(0)\Rightarrow x = \sin y$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = \lim y\to ?\dfrac{y}{\sin y}$

Лемма 1.3. *Покажем (на языке Гейне)* $x_n\to 0\Rightarrow y_n\to 0\forall x_n$

Доказательство. $x_n = m\sin y_n, y \quad y_n\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\{y_n\}$ – огр $\Rightarrow$ сх п/п y_{n_k}

Но мы только что доказали, что любая сходящаяся подпоследовательность $y_{n_k}\to 0\Rightarrow$ сама $y_n\to 0$

Допустим противное:

$\sqsupset y_n\not\to 0$ пишем отрицание существования предела

$\exists\varepsilon_0\forall N:\exists n_N\geqslant N: |y_{n_N}|\geqslant\varepsilon_0 \quad N = 1,2,3,\ldots$

рассмотрим последовательность $\{y_{n_N}\}\cap O_{\varepsilon_0}(0) = \emptyset$, но $\{y_{n_N}\}\subset[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ – огр!$\Rightarrow\{y_n\}$ – огр. □

Ещё один пример доказательства предела на языке $\varepsilon-\delta$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim x\to 1\dfrac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{(x)}-1)(\sqrt{x}+1)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2}$ Мы почитали этот предел, а теперь докажем это на языке $\varepsilon-\delta$

$\forall\varepsilon>0\exists\delta=\delta(\varepsilon):\forall x\quad 0<|x-1|<\delta$ выполнено $\left|\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$

$\left|\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}-\dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right| = \dfrac{1}{2}\dfrac{|\sqrt{x}-1|}{|\sqrt{x}+1|}\leqslant\dfrac{1}{2}|\sqrt{x}-1| = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}|(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)| = \dfrac{1}{2}|x-1|<\dfrac{\delta}{2}=\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x} = \lim x\to 0\dfrac{y}{\tan y}$

$x_n\to 0\overset{?}{\Rightarrow} y_n\to 0\quad y_n = \arctan x_n$

При $x\to 0 \sin x\to 0, \cos x\to 1\Rightarrow\tan x\to 0$ при $x\to 0$

$\sqsupset x_n\to 0\quad |\arctan x_n|<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\exists$ сходящаяся подпоследовательность

$\exists\varepsilon_0>0:\forall N(=1,2,3)\exists n_N>N$ и $|y_{n_N}|>\varepsilon_0$

рассмотрим $y_{n_N} = \arctan x_{n_k}\to a$ – ограничена $\Rightarrow\exists$ сходящаяся подпоследовательность $y_{n_N}>0$

Лемма 1.4. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e\quad(1^\infty)$

Доказательство. Классический вариант $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

$\lim\limits_{n\to-\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

$\forall x_n\to\pm\infty\quad\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{1}{x_n})^{x_n} = e$ □

Следствие: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to\infty}(1\dfrac{1}{y})^y = e,\quad y = \dfrac{1}{x}$

Лемма 1.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Доказательство. $\lim\limits_{x_n\to 0}\dfrac{1}{x_n}ln(1+x_n) = \lim\limits_{x_n\to 0}ln(1+x_n)^{\dfrac{1}{x_n}} = lne = 1\quad\forall x_n$ □

Следствие:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}=a$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$

ДЗ:

1. $y=\arcsin(\sin x)$ – нарисовать график
2. $y=\arctan(\tan x)$ – нарисовать график
3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\operatorname{ctg} x}\quad(1^\infty)$
4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^x$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ln(2+e^{3x})}{ln(3+e^{2x})}$
8. Прошлое дз (на фотке в беседе)

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

$x_n\to a\Rightarrow \ln x_n\to\ln a$

$f(x)\to A\Rightarrow \ln f(x)\to \ln A$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)^{\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cdot\ln(\sin x)}{\cos x}\overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\cos t\cdot\ln(\cos t)}{\sin t}=\lim_{t\to o}\frac{\cos t\cdot\ln(1+(\cos t-1))}{\sin t\cdot(\cos t-1)}\cdot(\cos t-1)\overset{y=\cos t-1}{=}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cdot(\cos t-1)}{\sin t}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}\cdot\lim_{t\to 0}\cos t=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\cdot\frac{-(1-\cos t)^2}{t^2}\frac{-t^2}{t}=0$$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)^{\operatorname{tg} x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}=1$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

$\sqsupset y=e^x-1\quad x\to 0\Rightarrow y\to 0\quad e^x=1+y\quad x=\ln(1+y)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{ln(1+y)}\overset{3}{=}1$

Следствие 1.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\ln a}-1}{(x\cdot\ln a)}\cdot\ln a=\ln a$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha\quad\alpha\in\mathbb{R}\sqsupset y=(1+x)^\alpha-1\quad x\to 0\Rightarrow y\to 0$

$(1+x)^\alpha=1+y\quad\alpha\ln(1+x)=\ln(1+y)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}=\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\frac{\ln(1+y)}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=1\cdot\alpha\cdot 1=\alpha$$

Следствие 1.2. *Покажем,* $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1},\alpha\neq 0$

$$(x^\alpha)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^\alpha-x^\alpha}{\Delta x}=\lim\Delta x\to 0\frac{x^\alpha(1+\frac{\Delta x}{x})^\alpha-x^\alpha}{\Delta x}=x^\alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^\alpha-1}{\frac{\Delta x}{x}\cdot x}=x^{\alpha-1}\cdot\alpha$$

$$x=0\quad\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(0+\Delta x)^\alpha-0^\alpha}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^{\alpha-1}=\left[\begin{array}{ll}0&\alpha>1\\1&\alpha=1\\\infty&\alpha<1\end{array}\right.$$

$$x^{\alpha-1}\cdot\alpha|_{x=0}=\left[\begin{array}{cc}0&\alpha>1\\1=\alpha&\alpha=1\\\infty&\alpha<1\end{array}\right.$$

Примеры:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1+\sqrt{\cos x}}\cdot\frac{cy^2}{1-\cos\sqrt{x}\cdot cy^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2\cdot x^2}\cdot x^2\cdot\frac{(\sqrt{x})^2}{1-\cos\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{(\sqrt{x})^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}=0$$

.

.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{3x}(2e^{-3x}+1))}{\ln(e^{2x}(3e^{-2x}+1))}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\ln(1+2e^{-3x})}{2x+ln(1+3e^{-2x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\dfrac{ln(1+2e^{-3x})}{x}}{2+\dfrac{\ln(1+3e^{-2x})}{x}}=\frac{3}{2}$$

.

.

$\lim\limits_{x\to 0}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{e^y-1}{y}$

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{-}1y=+\infty$$

ДЗ на 25.09.2018

1. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x^3-3}{x-e}$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1}{2\sin^2x-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\sin x)}{3^{\operatorname{tg}x}-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-x^2}{x-2}$

$$\left(\frac{0}{0}\right)\quad\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+x}-\sqrt[4]{1+x}}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{5}}-1-((1+x)^{\frac{1}{4}}+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^{\frac{1}{5}}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{4}}-1}{x}=$$
$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$$

$$\left(\frac{0}{0}\right)\quad\lim_{x\to-\frac{pi}{2}}\lim_{-\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x+1)^2}{(\sin x+1)(\sin x+2)}=\frac{0}{-3}=0$$

$$\left(\frac{0}{0}\right)\quad\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x^2-x}+\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}\frac{x}{x^2-x}+\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}\frac{x}{x^2-x}=$$
$$=\ln 2\cdot(-1)+\ln 3\cdot(-1)=-\ln 6$$

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\quad\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt[4]{x^3+1}+\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2-\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{1+\frac{3}{4}}\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+x^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x^2(1-\frac{\sqrt{x+2}}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{-\frac{1}{4}}\sqrt{1+x^{-3}}+x^{-1\frac{1}{3}}\sqrt{1-x^{-2}}}{1-\frac{\sqrt{x+2}}{x^2}}=0$$

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\quad\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{4})}{\operatorname{tg}2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left(\dfrac{\operatorname{tg}x+1}{1-\operatorname{tg}x}\right)}{\left(\dfrac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}\right)}\overset{t}{=}\operatorname{tg}x\lim_{t\to 1}\frac{(1+t)(1-t^2)}{(1-t)\cdot 2t}=\frac{2\cdot 2}{2}=2$$

$$(\infty-\infty)\quad\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$(\infty-\infty)\quad\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{4(x-2)}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{4-x-2}{4(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{4(x-2)(x+2)}=-\frac{1}{16}$$

$$(\infty-\infty)\quad\lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x-\tfrac{1}{\sin x})=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{2}\cdot 0\cdot 1=0$$

$$(\infty-\infty)\quad\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x}{x}-\frac{3^x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x}=\ln 2-\ln 3$$

$$(\infty\cdot?)\quad\lim_{x\to\infty}x(\ln(1+x)-\ln x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\overset{t}{=}\tfrac{1}{x}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

$$\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{\infty}\right)\quad\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\operatorname{arctg}x=0$$

$(\infty \cdot 0) \quad \lim\limits_{\to\infty} x(2^{\frac{1}{x}} - 1) \overset{t}{=} \tfrac{1}{x} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2^t - 1}{t} = \ln 2$

$(1^\infty) \quad \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^A = e^{-1}$

$Limx\frac{\pi}{4} \ln(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \cdot \ln(\operatorname{tg} x) \overset{\operatorname{tg} x}{=} 1 - t \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2(1-t)}{t(2-t)} \ln(1-t) = \dfrac{2\cdot(-1)}{2} = -1$

$(\infty \cdot 0) \quad \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\ln(1 + 2\operatorname{arctg} x(x\sqrt{x^5 + x^2}))}{(1 + \arcsin(x^2))^{\frac{3}{4}} - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x^2)}{\frac{3}{4}x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2}{\frac{3}{4}x^2} = \dfrac{8}{3}$

$\operatorname{arctg}(x\sqrt{x^5 + x^2}) = \operatorname{arctg}\sqrt{x^7 + x^4} \sim \operatorname{arctg} x \sim x^2$

$(1 + \arcsin(x^2))^{\frac{3}{4}} - 1 \sim \dfrac{3}{4}\arcsin x^2 \sim \dfrac{3}{4}x^2$

$\dfrac{\arcsin x}{x} \to 1 \quad \arcsin x \sim x$

$\ln(1+t) \sim t \Rightarrow \ln(1+2x^2) \sim 2x^2$

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x + \sqrt(2x)}{x + \sqrt{3x}}\right)^{\sqrt{x}} = e^A$

$A = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} \ln\left(\dfrac{x + \sqrt{2x}}{x + \sqrt{3x}}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} \ln\left(\dfrac{1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}) - \ln(1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}})}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \overset{t}{=} \tfrac{1}{\sqrt{x}} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1 + \sqrt{2}t) - \ln(1 + \sqrt{3})}{t} =$
$\sqrt{2} - \sqrt{3}$

ДЗ:

- готовиться к работе по нахождению пределов.
- $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\arcsin 2x}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 3} - \sqrt{x^2 - 3x - 4})$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 3}\right)^{x^2}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{\sin\frac{1}{x}} - 1)$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{\sin x} + 2^{2x} - 2}{x - \sqrt{x}}$

1.5 Односторонние пределы

$f : E \to \mathbb{R}$, $\sqsupset a$ – предельная точка $E \quad (E \cap \overset{\circ}{O}(a) \neq \emptyset$, где $\overset{\circ}{O}(a)$ – произвольная проколотая окрестность.

$f(x) \to A, (x \in E) \to a \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{O}_\Delta(a) : \forall x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$

1.5.1 Левосторонний предел

$\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in E \cap (a - b, a)$ и $-\delta < x - a < 0$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon|$

1.5.2 Правосторонний

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in E \cap (a, a + b)$ и $-\delta < x - a < 0$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon|$

Если $a = 0$, то пишут просто $x \underset{x<0}{\to} -0$ и $x \underset{x>0}{\to} +0$

$$sign\ x = \left[\begin{array}{ll} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{array}\right.$$

$\lim\limits_{x\to+0} sign\ x = 1 \quad \lim\limits_{x\to-0} sign\ x = -1$

Теорема 1.6 (Признак существования $\lim f(x)$ при $x \to a$)**.** $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *– существует* $\iff \exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f()$

Доказательство.

- $\Rightarrow$ – очевидно, потому что определение полного предела не исключает возможности, что x только $< a$ или только $> a$, а тогда и будут получаться односторонние пределы.

- $\Leftarrow$ От противного. $\sqsupset$ односторонние пределы существуют и равны, а полный предел не существует. Напишем отрицание существования предела.

  $\exists \varepsilon_o > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in E \cap \overset{\circ}{O}(a)$ для которого $|f(x_\delta) - A| \geqslant \varepsilon_0$

  В качестве $\delta = \dfrac{1}{n} \to 0, n \in \mathbb{N}$ и тогда $\exists x_n \in E \cap \overset{\circ}{O}_{\frac{1}{n}}(a) : |f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0$

  Имеем бесконечное количество точек $\{x_n\}$. Каждое x_n либо > 0 либо < 0.

  Ясно, $\exists\infty$ много номеров, для которых выполняется: либо $> a$ либо $< a$

  Таким образом $\exists x_{n_k} : x_{n_k} < a$ либо $x_{n_k} > a$

  Не умаляя общности (далее НУО) считаем, что $\exists x_{n_k} > a$

  Но тогда получается, что нашлось такое $\varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_{n_k} \in E \cap (a, a+\delta)$ и при этом $|f(x_{n_k}) - A| > \varepsilon_0$

  Это означает, что $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ не существует.??!

$\square$

Очевидные свойства переводятся на
Пример:

$$\left(\frac{0}{0}\right) \quad \lim_{x\to+0} \frac{\sqrt{x^2+x^3}}{x} = \lim_{x\to+0} \sqrt{\frac{x^2+x^3}{x^2}} = \lim_{x\to+0} \sqrt{1+x} = 1$$

$$\left(\frac{0}{0}\right) \quad \lim_{x\to-0} \frac{\sqrt{x^2+x^3}}{x} = \lim_{x\to-0} \left(-\sqrt{\frac{x^2+x^3}{x^2}}\right) = -1$$

Ещё один признак существования предела
последовательность $\{x_n\}$ – фундаментальная или последовательность Коши $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m \geqslant N \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$

Теорема 1.7. *Коши Последовательность* x_n *– сходится* $\iff x_n$ *– фундаментальная последовательность*

Теорема 1.8. *Коши* $\sqsupset f : E \to \mathbb{R}, \quad a$ *– конечная предельная точка* $a \in E$ *Тогда* $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *– конечный* $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E$ *выолняется* $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Доказательство.

- $\Rightarrow \sqsupset \exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

  т.е. по $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x \in \underset{\circ}{O}(a) \cap E \quad |f(x) - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

  Теперь возьмём любые две точки $x'x'' \in \underset{\circ}{O}_{\delta}(a) \cap E$

  Рассмотрим $|f(x') - f(x'')| = |(f(x') - A)|$

- $\Leftarrow$ Воспользуемся я языком Гейне. Возьмём $\forall$ последовательность $x_n \in \overset{\circ}{O}(a) \cap E : x_n \to a$

  Покажем, что последовательность $\{f(x_n)\}$ – фундаментальна

  Берём $\forall \varepsilon > 0$ по условию $\exists \delta : \forall x'x'' \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E$ выполняется $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

  Так как $x_n \to a \Rightarrow \exists N : \forall n \geqslant N \quad x_n \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E$

  Доказано: $\sqsupset n, m \geqslant N \Rightarrow x_n, x_m \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$

Таким образом $\{f(x_n)\}$ – фундаментальная

По теореме Коши $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

Покажем, что A не зависит от выбранной последовательности x_n, т.е. если взять два ряда: последовательности $\overline{x_n}, \overline{\overline{x_n}}$ $\quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} (\overline{x_n}) = \overline{A} \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(\overline{\overline{x_n}}) = \overline{\overline{A}}$

Рассмотрим последовательность $y_n = \{\overline{x_1}, \overline{\overline{x_1}}, \dots \overline{x_n}, \overline{\overline{x_n}}\}$

Очевидно $y_n \to a \Rightarrow y_n$ – фундаментальная $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = A$<...>

$\square$

<...>

1.6 Сравнение асимптотического поведения функций

Определение 1.8. $\sqsupset f, g : E \to \mathbb{R}$

$\sqsupset a$ – предельная точка E. Если $\exists$ функция $\varphi(x) : E \to \mathbb{R}$ и такая $\overset{\circ}{O}(a) \cap E$ выполняется $f(x) = \varphi(x)g(x)$ То:

1. *Если $\varphi(x)$ локально ограничено в окрестности a, то говорят, что $f = O(g)$ при $x \to a$*

   f – О-большое от g (при x, стремящемся к a)

2. *Если $\varphi(x) \to 0$ при $x \to a$, то говорят, что $f = o(g)$ при $x \to a$*

   f – о-маленькое от g (при x, стремящемся к a)

3. *Если $\varphi(x) \to 1$ при $x \to a$, то говорят, что $f \sim g$ при $x \to a$*

   f (асимптотически) эквивалентно g (при x, стремящемся к a)

Определение 1.9. *Если одновременно $f = O(g) \& g = O(f)$ при $x \to a$, то говорят, что f, g zсравнимы при $x \to a$*

$f \asymp g$

Лемма 1.6. *1)$f = O(g)$ при $x \to a \iff \exists c > 0 \& \overset{\circ}{O}(a) \quad ())$, что выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant c|g(x)| \forall x \in \overset{\circ}{O}_a \cap E$ 2) $f = o(g)$ при $x \to a \iff \forall \varepsilon > o \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E$ выполняется $|f(x)| < \varepsilon|g(x)|$*

Доказательство. .
1)$f = O(g)$ при $x \to a$

$f(x) = \varphi(x)g(x)$, где $\varphi(x)$ – локально ограничена, т.е. $\exists C > 0$ и $\exists \overset{\circ}{O}; |\varphi(x)| \leqslant C \forall x \in \overset{\circ}{O}(a) \cap E$
Тогда $|f(x)| = |\varphi(x)g(x)| = |\varphi(x)| \cdot |g(x)| \leqslant C|g(x)| \Rightarrow |f(x)| \leqslant C|g(x)|$

Обратно: $\sqsupset$ выполняется $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$ Будем брать $x \in \overset{\circ}{O}(a) \cap E$
Заметим, что если $g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

Положим $\varphi(x) \overset{def}{=} \begin{cases} \dfrac{f(x)}{g(x)} & , g(x) \neq 0 \\ 0 & , g(x) = 0 \end{cases}$

$\varphi : \overset{\circ}{O}(a) \cap E \to \mathbb{R}$

Выполняется $f(x) = \varphi(x)g(x), \quad \forall x \in \overset{\circ}{O}(a) \cap E$
Покажем, что $\varphi(x)$ – локально ограничена $|\varphi(x) < C|$, где C взято из (4)
Если $g(x) \neq 0 \quad \varphi(x) = \dfrac{f}{g}$ и т.к. $|f| \leqslant C|g|$
Если $g(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) \leqslant C$
Таким образом в любом случае $|\varphi(x)| \leqslant C$ чтп 2)<...> $\square$

В 99% практических задач встречается случай, когда $g(x) \neq 0$ в $\overset{\circ}{O}(a) \cap E$
Тогда можно дать "упрощённые"переформулировки для О-символ

1. $f = O(g)$ при $x \to a \iff \dfrac{f}{g}$ – локально ограниченная функция

2. $f = o(g) \iff \dfrac{f}{g} \to 0$ при $x \to a$

3. $f \sim g \iff \dfrac{f}{g} \to 1$ при $x \to a$

ДЗ:
Доказать:

1. $f \sim g$ – отношение эквивалентности

2. $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$

3. $f \sim g \iff f = g + o(g) \iff f = g + o(f)$

4. Если $f \sim \alpha g, \alpha \neq 0 \Rightarrow f \asymp g$

5. $o(g) + o(g) = o(g)$

   $o(g) - o(g) = o(g)$, а не 0!, как можно подумать . Привести пример

   $2O(g) = O(g)$

   $O(g)O(h) = O(gh)$

Вернёмся к замечательным пределам <...>

Теорема 1.9 (о замене на эквивалентное при вычислении пределов). $\sqsupset f, g, \widetilde{f}, \widetilde{g} : E \to \mathbb{R}$
$\sqsupset a$ – предельная точка E
$\sqsupset f \sim \widetilde{f}, g \sim \widetilde{g}$ при $x \to a$
$(f = \widetilde{f} + o(\widetilde{f}), g = \widetilde{g} + o(\widetilde{g}))$
Тогда справедливы равенства:

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to a} \widetilde{f}(x)\widetilde{g}(x)$

2. *Если $\exists \overset{\circ}{O}(a)$ в которой $g(x) \neq 0$, то* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\widetilde{f}(x)}{\widetilde{g}(x)}$

Равенства надо понимать так: Предел стоящий справа и слева существует и не существует одновременно.

Доказательство. По определению эквивалентности $\exists \varphi(x) : f(x) = \varphi(x)\widetilde{f}(x)$ в некоторой $\overset{\circ}{O}_1(a) \cap E$ и $\varphi(x) \to 1, x \to a$

$\exists \psi(x) : g(x) = \psi(x)\widetilde{g}(x)$ в некоторой $\overset{\circ}{O}_2(a) \cap E$ и $\psi(x) \to 1, x \to a$

$\forall x \in \overset{\circ}{O}_1(a) \cap \overset{\circ}{O}_2(a) \cap E$

$\lim\limits_{x \to a}(f(x)g(x)) = <...>$ □

Замечание 1.1. *Из теоремы не следует, что то же самое можно делать для $f(x) \pm g(x)$*

Вообще говоря $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) \pm \lim\limits_{x \to a}(\varphi(x)\widetilde{f}(x) \pm \varphi(x)\widetilde{g}(x))$

Пример: $a = +\infty \quad f(x) = x + 1 \quad \widetilde{f}(x) = g(x) = \widetilde{g}(x) = x \quad f \sim \widetilde{f}(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty}(f - g) = \lim\limits_{x \to +\infty}(x + 1 - x) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty}(\widetilde{f}(x) - \widetilde{g}(x)) = \lim\limits_{x \to +\infty}(x - x) = 0$

$(0 \cdot \infty, \dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty})$ *– бро*

$(\infty - \infty)$ *– не бро*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x+x^2)+\arcsin 3x - 5x^3}{\sin 2x + \operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+x^2+o(x+x^2)+3x+o(3x)-5x^3}{2x+o(2x)+(x+o(x))^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4x+o(x)}{2x+o(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{4+\frac{o(x)}{x}}{2+\frac{o(x)}{x}} =$$
$$= \frac{4+0}{2+0} = 2$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+x}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}-3} \overset{y=x+1}{=} \lim_{y\to 0}$$

ДЗ на 16.10.2018:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{log(1+2arsin\ x^2)}{(\cos x)^{\frac{3}{2}}-1}$

2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}\frac{x}{2})^{\dfrac{1}{\cos x}}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^2-x-1}$

1.7 Формулы Тейлора

1. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dots + \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$

2. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dots + \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n})$

3. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2 + \dots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot n}$

4. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$

5. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dots 1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + o(x^n)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - \cos x}{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{-\frac{x^2}{8}+o(x^2)} = -8$$

1.8 Асимптоты

(асимптотическое представление функции на бесконечность)

$\sqsupset f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Определение 1.10. *Вертикальная прямая $x = a$ называется асимптотой, если $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\exists \lim\limits_{x\to a-0}$ равные либо $+\infty$, либо $-\infty$*

Определение 1.11. $\sqsupset f :< a, +\infty) \to \mathbb{R}$

прямая $y = kx+b$ называется наклонной асимптотой функции $f(x)$ при $x\to+\infty$, если $f(x) = kx+b+o(1)$ при $x\to+\infty$

Асимптота при $x\to-\infty$ аналогично определяется

Если $k = 0$, то асимптота называется горизонтальной

Утверждение 1.1. *$y = kx + b$ – асимптота функции f, если $f(kx + b)to0$*

Утверждение 1.2. *$y = b$ является горизонтальной асимптотой для f при $x \to +(-)\infty \iff \lim\limits_{x\to+(-)\infty} f(x) = b$*

Доказательство. $y = b$ является горизонтальной асимптотой для $f \iff f(x) = b + o(1), x \to +(-)\infty \iff \exists \lim\limits_{+(-)\infty \to f}(x) = b$ По теореме о преставлении предела.

$o(1)$ – любая бесконечно малая функция при $x \to +(-)\infty$ □

Примеры:

1. $y = \sin x$ – нет горизонтальной асимптоты, т.к. $\nexists \lim\limits_{x\to\infty} \sin x$
2. $y = \operatorname{tg} x$ – есть вертикальная асимптота (см. рисунок в вики)
3. $y = \sqrt{x}$ – $\nexists \lim\limits_{x\to\infty}$ конечного
4. $y = \ln x$ – $\nexists$ конечного $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x$
5. $y = \operatorname{arctg} x$ – $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2} \quad y = \dfrac{\pi}{2}$ – горизонтальная асимптота $\exists \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2} \quad y = -\dfrac{\pi}{2}$

Теорема 1.10. $\sqsupset f :< a, +\infty) \to \mathbb{R}$

прямая $y = kx + b$ *будет наклонной асимптотой* $\iff \begin{cases} \exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \\ \exists \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b \end{cases}$

Доказательство.

$\Rightarrow$ $\sqsupset y = kx+b$ – наклонная асимптота $\overset{def}{\Rightarrow} f(x) = kx+b+o(1) \Rightarrow \begin{cases} f(x) - kx = b + o(1) \\ \dfrac{f(x)}{x} = k + \dfrac{b}{x} + \dfrac{o(1)}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = b \\ \exists \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \end{cases}$

$\Leftarrow$ По условию $\exists \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$

По условию $\exists \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = b \Rightarrow f(x) - kx = b + o(1) \Rightarrow f(x) = kx + b + o(1)$

□