

Конспект по матану 10 класс

Коченюк Анатолий

1 октября 2018 г.

Глава 1

1 четверть

1.1 Функция

$f(x) : X \rightarrow Y \quad X, Y \subseteq \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

a – предельная точка X

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in O_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(A)$$

$A \neq f(a)$, потому что она там может быть даже не определена

$$\begin{cases} a \in \mathbb{R}, O_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta) \\ a = +\infty, O_\delta(a) = (\delta, +\infty) \\ a = -\infty, O_\delta(a) = (-\infty, -\delta) \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(O_\delta(a)) \subset O_\varepsilon(A)$$

Определение 1.1. $f(x)$ – б.б. $\iff |f(x)| \rightarrow \infty, x \rightarrow a \in \overline{\mathbb{R}}$
 $\iff \forall k > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in O_\delta(a), x \neq a |f(x)| \geq k$

Определение 1.2. $f(x)$ – б.м. $\iff |f(x)| \rightarrow 0, x \rightarrow a \in \overline{\mathbb{R}}$

Теорема 1.1 (О представлении). $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \iff f(x) = A + g(x), g(x)$ – б.м. при $x \rightarrow a$

Определение 1.3 (По Гейне). $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \iff \forall x_n \rightarrow a (x_n \in X, x_n \neq a)$ выполняется $f(x_n) \rightarrow A$

Пример:

Доказать на языке $\varepsilon - \delta$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2) = 1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : |x - 1| < \delta \Rightarrow |3x - 2 - 1| < \varepsilon$$

Уметь по $\forall \varepsilon$ предъявлять соответствующее δ

$$|3x - 3| < \varepsilon \iff 3|x - 1| < \varepsilon \iff |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta$$

$$\square \delta = \frac{\varepsilon}{3} - \text{искомое}$$

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - 1}{x + 3} = -\frac{1}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : |x + 1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{2x - 1}{x + 3} + \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{5(x + 1)}{2(x + 3)} \right| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{1}{2} \min \left\{ 1; \frac{2\varepsilon}{5} \right\}$$

$$\square |x + 1| < \delta$$

$$\delta < 1 \Rightarrow |x + 3| > 1$$

$$\text{А тогда } \left| \frac{2x - 1}{x + 3} + \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{5(x + 1)}{2(x + 3)} \right| = \frac{5|x + 1|}{2|x + 3|} < \frac{5}{2} \cdot \frac{\delta}{1} \leq \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2\varepsilon}{5} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \text{ ч.т.п.}$$

$$\sqsubset f(x) : E \rightarrow \mathbb{R} \quad E \subseteq \mathbb{R}$$

Определение 1.4. $f(x)$ – ограничена сверху или ограничена снизу или ограничена на $E \iff \exists K \geq 0 : \forall x \in E$ выполняется $f(x) \leq K \vee -k \leq f(x) \vee |f(x)| \leq L$

Определение 1.5. $f(x)$ называется локально ограниченной в точке a , которая либо принадлежит E , либо является предельной для E ($a \in \bar{E}$) $\iff \exists K \geq 0, \exists O(a) : |f(x)| \leq K \forall x \in O(a) \cap E$

Лемма 1.1. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\left(\frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}\right)}{\left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}\right)} f$ – локально ограничена $\forall a \in \bar{E} \nRightarrow f$ – ограничено на E

Доказательство. $f(x) = x \quad E = \mathbb{R}$

в $\forall a \in \mathbb{R}$ она локально ограничена

$$\exists K = \max\{|a + 1|, |a - 1|\}$$

$\forall x \in O_1(a)$ выполняется $|x| \leq K \quad O_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$

$$\bar{E} = E \cup \partial E$$

$$\exists O(a) \subset E$$

□

1.2 Предельный переход в неравенствах

Теорема 1.2 (1). $\sqsubset \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $\sqsubset A < B \Rightarrow \exists O(a) : \forall x \in \overset{\circ}{O}(a) \cap E$ выполняется $f(x) < B$

Доказательство. $\sqsubset \varepsilon > 0 : A + \varepsilon_1 < B$

По определению предела для этого $\varepsilon_1 \exists \delta : \forall x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E \quad |f(x) - A| < \varepsilon_1 \Rightarrow -\varepsilon_1 < f(x) - A < \varepsilon_1 \Rightarrow f(x) < A + \varepsilon_1 < B$

т.о. (таким образом) эта $O_\delta(a)$ – искомая окрестность.

□

ДЗ:

Теорема 1.3 (2). $\sqsubset f(x) < g(x) \forall x \in E$ и $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \Rightarrow A \leq B$

2а) контрпример, почему нельзя писать $A < B$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = ?$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$$

5)

Лемма 1.2. f – ограничена на $E \Rightarrow f$ – локально ограничена $\forall a \in \bar{E}$

1.3 Неопределённости

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0 \cdot \infty; \infty - \infty; 1^\infty$$

Теорема 1.4 (Безу). $P_n(x) = (x - x_0)Q_{n-1}(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} x + \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{x^2 - x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (x+2)}{\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1)} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow -1} x + \lim_{x \rightarrow -1} 2}{\lim_{x \rightarrow -1} x \cdot \lim_{x \rightarrow -1} x - \lim_{x \rightarrow -1} x + \lim_{x \rightarrow -1} 1} \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - 1| < \delta &\Rightarrow \left| \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 1} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon \\ \left| \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 1} - \frac{1}{3} \right| &= \left| \frac{x+2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{3} \right| = \frac{|2x + 6 - x^2 + x - 1|}{|3(x^2 - x + 1)|} = \frac{|x^2 - 4x + 5|}{3(x^2 - x + 1)} = \frac{|x+1| \cdot |x-5|}{3(x^2 - x + 1)} \end{aligned}$$

$$x^2 + pz + q = (x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

$$\leq \frac{|x+1| \cdot 7}{2 \cdot \frac{3}{4}} < \frac{\delta \cdot 28}{9} = \varepsilon$$

Пусть $\exists \delta = \min\{1, \frac{0\varepsilon}{28}\}$ Решено.

Теорема 1.5 (о двух милиционерах). $\square \forall x \in E \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

$$\square \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$$

Доказательство. Воспользуемся языком последовательностей (Гейне)

Берём для $\forall x_n \rightarrow a$

$f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$ Пользуемся теоремой о двух милиционерах для последовательностей.

Таким образом $g(x_m) \rightarrow A \forall x_n \rightarrow A \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$

□

1.4 Замечательные пределы

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \left(\frac{0}{0} \right)$ Было доказано, что $\forall x_n \rightarrow 0 \quad \sin x \rightarrow \sin 0 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ (непрерывность $y = \sin x$ в 0)

Определение 1.6. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ Функция f непрерывно в точке $a \in E$ (т.е. $f(a)$ – определено заранее) $\iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $A = f(a)$, т.е. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x) = f(a)$.

f коммутирует с пределом.

Было доказано (вопрос 13 п. 5), что $\forall x_n \rightarrow a \quad \sin x \rightarrow \sin a \iff \exists \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \iff$ Функция была непрерывна в каждой точке из \mathbb{R}

Определение 1.7. $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Говорят, что f непрерывно на E , если f непрерывно в каждой точке из E .

Множество функций, непрерывных на E обозначают $C(E)$

$$x \in (0, \frac{\pi}{2}) \quad \sin x < x < \operatorname{tg} x$$

- $\frac{\sin x}{x} = \frac{|\sin x|}{|x|} < 1, \forall x \in \overset{\circ}{O}_\delta(0), \quad \delta < \frac{\pi}{2}$
- $|\cos x| < \left| \frac{\sin x}{x} \right|$

Задача 1.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

Доказательство. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{2}{3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{2}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$$

□

Следствия из предела №1:

(а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \Rightarrow 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{1 - \cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = 2 \cdot 1 = 2$$

можем заменить предел произведения, так как оба выражения имеют предел

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\arcsin = (\sin|_{[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}])^{-1}$$

$$\arcsin(\sin x) \neq x, \text{ но } \sin(\arcsin x) = x$$

$$\arcsin a - \text{ тот корень уравнения } \sin x = a, \text{ при котором } a \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$y = \arcsin x$$

$$x \rightarrow 0; x \in O_\delta(0) \Rightarrow x = \sin y$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} y \rightarrow ? \frac{y}{\sin y}$$

Лемма 1.3. Покажем (на языке Гейне) $x_n \rightarrow 0 \Rightarrow y_n \rightarrow 0 \forall x_n$

Доказательство. $x_n = m \sin y_n, y_n \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \{y_n\} - \text{огр} \Rightarrow \text{сх п/п } y_{n_k}$

Но мы только что доказали, что любая сходящаяся подпоследовательность $y_{n_k} \rightarrow 0 \Rightarrow$ сама $y_n \rightarrow 0$

Допустим противное:

$\square y_n \not\rightarrow 0$ пишем отрицание существования предела

$\exists \varepsilon_0 \forall N : \exists n_N \geq N : |y_{n_N}| \geq \varepsilon_0 \quad N = 1, 2, 3, \dots$

рассмотрим последовательность $\{y_{n_N}\} \cap O_{\varepsilon_0}(0) = \emptyset$, но $\{y_{n_N}\} \subset [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] - \text{огр!} \Rightarrow \{y_n\} - \text{огр.} \quad \square$

Ещё один пример доказательства предела на языке $\varepsilon - \delta$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x \rightarrow 1 \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

жем это на языке $\varepsilon - \delta$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x \quad 0 < |x - 1| < \delta \text{ выполнено } \left| \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right| = \frac{1}{2} \frac{|\sqrt{x} - 1|}{|\sqrt{x} + 1|} \leq \frac{1}{2} |\sqrt{x} - 1| = \frac{1}{2} \left| \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1} \right| \leq \frac{1}{2} (|\sqrt{x} - 1|)$$

$$1)(\sqrt{x} + 1)| = \frac{1}{2} |x - 1| < \frac{\delta}{2} = \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \rightarrow 0 \frac{y}{\tan y}$$

$$x_n \rightarrow 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} y_n \rightarrow 0 \quad y_n = \arctan x_n$$

При $x \rightarrow 0 \sin x \rightarrow 0, \cos x \rightarrow 1 \Rightarrow \tan x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$

$\square x_n \rightarrow 0 \quad |\arctan x_n| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \exists$ сходящаяся подпоследовательность

$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall N (= 1, 2, 3) \exists n_N > N \text{ и } |y_{n_N}| > \varepsilon_0$

рассмотрим $y_{n_N} = \arctan x_{n_k} \rightarrow a - \text{ограничена} \Rightarrow \exists$ сходящаяся подпоследовательность $y_{n_N} > 0$

Лемма 1.4. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e \quad (1^\infty)$

Доказательство. Классический вариант $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

$$\forall x_n \rightarrow \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{x_n})^{x_n} = e$$

\square

$$\text{Следствие: } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{y})^y = e, \quad y = \frac{1}{x}$$

Лемма 1.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$

Доказательство. $\lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{1}{x_n} \ln(1 + x_n) = \lim_{x_n \rightarrow 0} \ln(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \ln e = 1 \quad \forall x_n$

\square

Следствие:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} = a$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$

ДЗ:

1. $y = \arcsin(\sin x)$ – нарисовать график
2. $y = \arctan(\tan x)$ – нарисовать график
3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\operatorname{ctg} x} \quad (1^\infty)$
4. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}}$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^x$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$$

8. Прошлое дз (на фотке в беседе)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$$

$$x_n \rightarrow a \Rightarrow \ln x_n \rightarrow \ln a$$

$$f(x) \rightarrow A \Rightarrow \ln f(x) \rightarrow \ln A$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)^{\operatorname{tg} x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \ln(\sin x)}{\cos x} \stackrel{x=\frac{\pi}{2}-t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t \cdot \ln(\cos t)}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t \cdot \ln(1 + (\cos t - 1))}{\sin t \cdot (\cos t - 1)} \cdot (\cos t - 1)^{y=\cos t-1} \stackrel{y=\cos t-1}{=} \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\cos t - 1)}{\sin t} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \cos t &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} \cdot \frac{-(1 - \cos t)^2 - t^2}{t^2} \cdot \frac{-t^2}{t} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)^{\operatorname{tg} x} &= 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = 1 \end{aligned}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\square y = e^x - 1 \quad x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \quad e^x = 1 + y \quad x = \ln(1 + y)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} \stackrel{3}{=} 1$$

Следствие 1.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\ln a \cdot x} - 1}{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = \ln a$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \square y = (1+x)^\alpha - 1 \quad x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0$$

$$(1+x)^\alpha = 1+y \quad \alpha \ln(1+x) = \ln(1+y)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} \cdot \frac{\ln(1+y)}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} = 1 \cdot \alpha \cdot 1 = \alpha$$

Следствие 1.2. Покажем, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \neq 0$

$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \rightarrow 0 \frac{x^\alpha (1 + \frac{\Delta x}{x})^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = x^\alpha \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{\Delta x}{x})^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x} \cdot x} = x^{\alpha-1} \cdot \alpha$$

$$x = 0 \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(0 + \Delta x)^\alpha - 0^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 & \alpha > 1 \\ 1 & \alpha = 1 \\ \infty & \alpha < 1 \end{cases}$$

$$x^{\alpha-1} \cdot \alpha|_{x=0} = \begin{cases} 0 & \alpha > 1 \\ 1 = \alpha & \alpha = 1 \\ \infty & \alpha < 1 \end{cases}$$

Примеры:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 + \sqrt{\cos x}} \cdot \frac{cy^2}{1 - \cos \sqrt{x} \cdot cy^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2 \cdot x^2} \cdot x^2 \cdot \frac{(\sqrt{x})^2}{1 - \cos \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{3x}(2e^{-3x} + 1))}{\ln(e^{2x}(3e^{-2x} + 1))} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \ln(1 + 2e^{-3x})}{2x + \ln(1 + 3e^{-2x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{\ln(1 + 2e^{-3x})}{x}}{2 + \frac{\ln(1 + 3e^{-2x})}{x}} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y - 1}{y}$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{-} 1y = +\infty$$

ДЗ на 25.09.2018

$$1. \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x^3 - 3}{x - e}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin x)}{3 \operatorname{tg} x - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}$$

$$\left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+x} - \sqrt[4]{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{5}} - 1 - ((1+x)^{\frac{1}{4}} + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^{\frac{1}{5}} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{4}} - 1}{x} =$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

$$\left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + 1)^2}{(\sin x + 1)(\sin x + 2)} = \frac{0}{-3} = 0$$

$$\left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x^2 - x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{x^2 - x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{x^2 - x} =$$

$$= \ln 2 \cdot (-1) + \ln 3 \cdot (-1) = -\ln 6$$

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sqrt[4]{x^3 + 1} + \sqrt[3]{x^2 - 1}}{x^2 - \sqrt{x + 2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1+\frac{3}{4}} \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^3}} + x^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}}}{x^2(1 - \frac{\sqrt{x+2}}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-\frac{1}{4}} \sqrt[4]{1 + x^{-3}} + x^{-1\frac{1}{3}} \sqrt[3]{1 - x^{-2}}}{1 - \frac{\sqrt{x+2}}{x^2}} = 0$$

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4})}{\operatorname{tg} 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\left(\frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}\right)}{\left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}\right)} \stackrel{t=\operatorname{tg} x}{=} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(1+t)(1-t^2)}{(1-t) \cdot 2t} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

$$(\infty - \infty) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)(x+1)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$(\infty - \infty) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{1}{4(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x - 2}{4(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{4(x-2)(x+2)} = -\frac{1}{16}$$

$$(\infty - \infty) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$(\infty - \infty) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x}{x} - \frac{3^x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x} = \ln 2 - \ln 3$$

$$(\infty \cdot ?) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(1+x) - \ln x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \stackrel{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{\infty}\right) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \operatorname{arctg} x = 0$$

$$(\infty \cdot 0) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x(2^{\frac{1}{x}} - 1) \stackrel{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2^t - 1}{t} = \ln 2$$

$$(1^\infty) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^A = e^{-1}$$

$$\operatorname{Lim} x^{\frac{\pi}{4}} \ln(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \cdot \ln(\operatorname{tg} x) \stackrel{\operatorname{tg} x=1-t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(1-t)}{t(2-t)} \ln(1-t) = \frac{2 \cdot (-1)}{2} = -1$$

$$(\infty \cdot 0) \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1 + 2 \operatorname{arctg} x(x\sqrt{x^5 + x^2}))}{(1 + \arcsin(x^2))^{\frac{3}{4}} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x^2)}{\frac{3}{4}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\frac{3}{4}x^2} = \frac{8}{3}$$

$$\operatorname{arctg}(x\sqrt{x^5 + x^2}) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^7 + x^4} \sim \operatorname{arctg} x \sim x^2$$

$$(1 + \arcsin(x^2))^{\frac{3}{4}} - 1 \sim \frac{3}{4} \arcsin x^2 \sim \frac{3}{4} x^2$$

$$\frac{\arcsin x}{x} \rightarrow 1 \quad \arcsin x \sim x$$

$$\ln(1+t) \sim t \Rightarrow \ln(1+2x^2) \sim 2x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + \sqrt{2x}}{x + \sqrt{3x}} \right)^{\sqrt{x}} = e^A$$

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \ln \left(\frac{x + \sqrt{2x}}{x + \sqrt{3x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \ln \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}) - \ln(1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}})}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \stackrel{t=\frac{1}{\sqrt{x}}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sqrt{2}t) - \ln(1 + \sqrt{3}t)}{t} =$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

ДЗ:

- готовиться к работе по нахождению пределов.

- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\arcsin 2x}$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 3} - \sqrt{x^2 - 3x - 4})$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 3} \right)^{x^2}$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\sin \frac{1}{x}} - 1)$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sin x} + 2^{2x} - 2}{x - \sqrt{x}}$

1.5 Односторонние пределы

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $\square a$ – предельная точка E ($E \cap \overset{\circ}{O}(a) \neq \emptyset$, где $\overset{\circ}{O}(a)$ – произвольная проколота окрестность).

$f(x) \rightarrow A, (x \in E) \rightarrow a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{O}_\Delta(a) : \forall x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$

1.5.1 Левосторонний предел

$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \cap (a - \delta, a)$ и $-\delta < x - a < 0$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$

1.5.2 Правосторонний

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \cap (a, a + \delta)$ и $-\delta < x - a < 0$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$

Если $a = 0$, то пишут просто $x \rightarrow -0$ и $x \rightarrow +0$

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{sign} x = 1 \quad \lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{sign} x = -1$$

Теорема 1.6 (Признак существования $\lim f(x)$ при $x \rightarrow a$). $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ – существует $\iff \exists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$

Доказательство.

\Rightarrow – очевидно, потому что определение полного предела не исключает возможности, что x только $< a$ или только $> a$, а тогда и будут получаться односторонние пределы.

\Leftarrow От противного. \square односторонние пределы существуют и равны, а полный предел не существует. Напишем отрицание существования предела.

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in E \cap \overset{\circ}{O}(a) \text{ для которого } |f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon_0$$

$$\text{В качестве } \delta = \frac{1}{n} \rightarrow 0, n \in \mathbb{N} \text{ и тогда } \exists x_n \in E \cap \overset{\circ}{O}_{\frac{1}{n}}(a) : |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$$

Имеем бесконечное количество точек $\{x_n\}$. Каждое x_n либо > 0 либо < 0 .

Ясно, $\exists \infty$ много номеров, для которых выполняется: либо $> a$ либо $< a$

Таким образом $\exists x_{n_k} : x_{n_k} < a$ либо $x_{n_k} > a$

Не умаляя общности (далее НУО) считаем, что $\exists x_{n_k} > a$

Но тогда получается, что нашлось такое $\varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_{n_k} \in E \cap (a, a + \delta)$ и при этом $|f(x_{n_k}) - A| > \varepsilon_0$

Это означает, что $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ не существует.??!

\square

Очевидные свойства переводятся на

Пример:

$$\left(\frac{0}{0}\right) \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{x^2 + x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{x^2 + x^3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{1 + x} = 1$$

$$\left(\frac{0}{0}\right) \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{x^2 + x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \left(-\sqrt{\frac{x^2 + x^3}{x^2}}\right) = -1$$

Ещё один признак существования предела

последовательность $\{x_n\}$ – фундаментальная или последовательность Коши $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m \geq N \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$

Теорема 1.7. Коши Последовательность x_n – сходится $\iff x_n$ – фундаментальная последовательность

Теорема 1.8. Коши $\square f : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad a$ – конечная предельная точка $a \in E$ Тогда $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ – конечный $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E$ выполняется $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Доказательство.

$$\Rightarrow \square \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

$$\text{т.е. по } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E \quad |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Теперь возьмём любые две точки } x', x'' \in \overset{\circ}{O}_\delta(a) \cap E$$

$$\text{Рассмотрим } |f(x') - f(x'')| = |(f(x') - A)|$$

\square

ДЗ на 02.10.2018:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\pi - 4x}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{\arcsin \sqrt[5]{x}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 20}{2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 6}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2(2^{\frac{1}{x}} - 3^{\frac{1}{x}})$$