每日一题0628

【题目描述】

（2015真题）

一个粒子在二维空间中运动，每秒运动步长1，方向上、下、左、右等概率。以第n秒时粒子位置与坐标原点的连线为半径做圆，求这个圆的面积的期望。

解答一from hqy

- **郝氏变量法**——熟练使用类似示性函数的±1作为变量值

解：设有 a 次"上/下"移动，b 次"左/右"移动

$$a + b = n$$

记第 k 次"上/下"移动量为 I_K $(I_1, I_2 \cdots\cdots I_a = \pm 1)$

$$X = \sum_{k=1}^{a} I_K$$

$$E(X^2) = E\left[\left(\sum_{k=1}^{a} I_K\right)^2\right] = E\left(\sum_{k=1}^{a} I_k^2\right) + E\left(\sum_{m\neq n} I_m I_n\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{a} E(I_k^2) + \sum_{m\neq n} E(I_m)E(I_n)$$

$$= a\times 1 + 0 \quad = a$$

同理 $E(Y^2) = b$

$\therefore E(S) = \pi E(X^2+Y^2)$

$= \pi(a+b) = n\pi$

解答二from wyf

- 神奇的事情是，固定每个左右游走次数，得到的值是相同的

假设在 n 次随机游动中有 K 次"左右"游动，$(n-k)$ 次"上下"游动，则 $K \sim B(n, \frac{1}{2})$。假设停止点的横坐标为 X，纵坐标为 Y，则通过平移和伸缩可得：

对于固定的 $K=k$，

$$\frac{X+k}{2} \sim B(k, \tfrac{1}{2})$$

$$\frac{Y+n-k}{2} \sim B(n-k, \tfrac{1}{2})$$

由此 $Var(\frac{X+k}{2}) = Var(\frac{X}{2}) = \frac{1}{4}Var(X) = \frac{1}{4}\{E(X^2)-[E(X)]^2\} = \frac{1}{4}E(X^2)$

又由于 $\frac{X+k}{2} \sim B(k, \frac{1}{2})$，因此 $Var(\frac{X+k}{2}) = k \times \frac{1}{2} \times (1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}k$

$$E(X^2) = k$$

同理：$E(Y^2) = n-k$

在 $K=k$ 的条件下，待求的面积为（此时 X^2 和 Y^2 相互独立）

$$\begin{aligned} E[\pi(X^2+Y^2) \mid K=k] &= \pi[E(X^2 \mid K=k) + E(Y^2 \mid K=k)] \\ &= \pi[k+n-k] \\ &= \pi n \end{aligned}$$

再考虑任意 K：

$$E[\pi(X^2+Y^2)] = E\{E[\pi(X^2+Y^2) \mid K=k]\} = E\{\pi n\} = \pi n$$