

每日一题0629

无8健康自摸联盟荣誉出品

【题目描述】

(2015真题)

股票市场每天都是交易日，每天的收盘点数是独立同分布的随机变量。从起始日开始，称某天为拐点，如果起始日到此日之间每日点数都上涨，紧随该日的后一天点数下降。请计算起始日到拐点之间的天数均值。

• 解答 from wyf

- 求和方法太妙了。红色是wyf的修正，强调定义“间隔天数”，如此则e-2。

假设拐点在第 N 天 (N 为随机变量)；第 i 天的收盘点数为 X_i ，则

$$X_1 < X_2 < \dots < X_N > X_{N+1}$$

由于 $\{X_1, \dots, X_N, X_{N+1}\}$ 是一组独立同分布的随机变量，因此将其从小到大排布，每一种排布方法出现概率相同，上述排布出现概率为

总共 $n+1$ 个随机变量排列，有 $(n+1)!$ 种方法

$$P(N=n) = \frac{n}{(n+1)!}$$

前 N 个已经排好了， X_{N+1} 从这 N 个空位中选一个，共有 n 种可能

$\downarrow X_1 \downarrow X_2 \downarrow X_3 \downarrow \dots \downarrow X_{N-1} \downarrow X_N$

期望 $E(N) = \sum_{n=1}^{\infty} n P(N=n)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

用 $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ 算

$\sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) = 1$

$$E(N) = e - 1$$