一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设事件 A,B 仅发生一个的概率为 0.3，且 $P(A)+P(B)=0.5$，则 A,B 至少有一个不发生的概率为__________.

答案：0.3

解：

$$P(A\overline{B}+\overline{A}B)=0.3$$

即

$$0.3=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)=0.5-2P(AB)$$

所以

$$P(AB)=0.1$$
$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.9.$$

2．设随机变量 X 服从泊松分布，且 $P(X\le 1)=4P(X=2)$，则 $P(X=3)=$______.

答案：

$$\frac{1}{6}e^{-1}$$

解答：

$$P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda},\quad P(X=2)=\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}$$

由　$P(X\le 1)=4P(X=2)$　知　$e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda}=2\lambda^2 e^{-\lambda}$

即　$2\lambda^2-\lambda-1=0$　　解得　$\lambda=1$，故

$$P(X=3)=\frac{1}{6}e^{-1}$$

3．设随机变量 X 在区间 $(0,2)$ 上服从均匀分布，则随机变量 $Y=X^2$ 在区间 $(0,4)$ 内的概率密度为 $f_Y(y)=$_________.

答案：

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{y}}, & 0<y<4,\\ 0\ , & \text{其它.}\end{cases}$$

解答：设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$, X 的分布函数为 $F_X(x)$，密度为 $f_X(x)$ 则

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

因为 $X\sim U(0,\ 2)$，所以 $F_X(-\sqrt{y})=0$，即 $F_Y(y)=F_X(\sqrt{y})$

故

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{y}}, & 0<y<4,\\ 0\ , & 其它.\end{cases}$$

另解　在$(0,2)$上函数$y=x^2$严格单调，反函数为$h(y)=\sqrt{y}$

所以

$$f_Y(y)=f_X(\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{y}}, & 0<y<4,\\ 0\ , & 其它.\end{cases}$$

4．设随机变量X,Y相互独立，且均服从参数为λ的指数分布，$P(X>1)=e^{-2}$，则$\lambda=$________，$P\{\min(X,Y)\le 1\}=$________.

答案：$\lambda=2$，$P\{\min(X,Y)\le 1\}=1-\mathrm{e}^{-4}$

解答：

$$P(X>1)=1-P(X\le 1)=e^{-\lambda}=e^{-2}，故\ \lambda=2$$

$$\begin{aligned}P\{\min(X,Y)\le 1\}&=1-P\{\min(X,Y)>1\}\\&=1-P(X>1)P(Y>1)\\&=1-e^{-4}.\end{aligned}$$

5．设总体X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & 其它\end{cases}\qquad \theta>-1.$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自X的样本，则未知参数θ的极大似然估计量为________.

答案：

$$\hat{\theta}=\frac{1}{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$$

解答：

似然函数为

$$L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^{\theta}=(\theta+1)^n(x_1,\cdots,x_n)^{\theta}$$

$$\ln L=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\quad 0$$

解似然方程得θ的极大似然估计为

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i} - 1.$$

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设 A, B, C 为三个事件，且 A, B 相互独立，则以下结论中不正确的是

（A）若 $P(C) = 1$，则 AC 与 BC 也独立.

（B）若 $P(C) = 1$，则 $A \cup C$ 与 B 也独立.

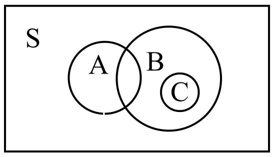
（C）若 $P(C) = 0$，则 $A \cup C$ 与 B 也独立.

（D）若 $C \subset B$，则 A 与 C 也独立.　　　　　　　　　　（　　）

答案：（D）.

解答：因为概率为 1 的事件和概率为 0 的事件与任何事件独立，所以（A），（B），（C）都是正确的，只能选（D）.

事实上由图



可见 A 与 C 不独立.

2．设随机变量 $X \sim N(0,1)$, X 的分布函数为 $\Phi(x)$，则 $P(|X| > 2)$ 的值为

（A）$2[1-\Phi(2)]$.　　　　（B）$2\Phi(2)-1$.

（C）$2-\Phi(2)$.　　　　（D）$1-2\Phi(2)$.　　　　　　（　　）

答案：（A）

解答：　$X \sim N(0,1)$ 所以 $P(|X| > 2) = 1 - P(|X| \le 2) = 1 - P(-2 < X \le 2)$

$= 1 - \Phi(2) + \Phi(-2) = 1 - [2\Phi(2) - 1] = 2[1 - \Phi(2)]$　　　　应选（A）.

3．设随机变量 X 和 Y 不相关，则下列结论中正确的是

（A）X 与 Y 独立.　　　　（B）$D(X-Y) = DX + DY$.

（C）$D(X-Y) = DX - DY$.　　（D）$D(XY) = DXDY$.　　　　（　　）

答案：（B）

解答：由不相关的等价条件知，$\rho_{\mathrm{xy}}=0 \Rightarrow \operatorname{cov}$（x，y）$=0$

$D(X-Y)=DX+DY+2\operatorname{cov}$（x，y）

应选（B）.

4．设离散型随机变量X和Y的联合概率分布为

(X,Y)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$	α	β

若X,Y独立，则α,β的值为

（A）$\alpha=\frac{2}{9},\quad \beta=\frac{1}{9}$.　　　　（A）$\alpha=\frac{1}{9},\quad \beta=\frac{2}{9}$.

（C）$\alpha=\frac{1}{6},\quad \beta=\frac{1}{6}$　　　　（D）$\alpha=\frac{5}{18},\quad \beta=\frac{1}{18}$.　　　（　　）

答案：（A）

解答： 若 X,Y 独立则有

	1	2	3	
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β	$\frac{1}{3}+\alpha+\beta$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}+\alpha$	$\frac{1}{18}+\beta$	

$$\alpha = P(X=2,\ Y=2) = P(X=2)P(Y=2)$$

$$=(\frac{1}{3}+\alpha+\beta)(\frac{1}{9}+\alpha)=\frac{2}{3}(\frac{1}{9}+\alpha)$$

$$\therefore \quad \alpha=\frac{2}{9}, \qquad \beta=\frac{1}{9}$$

故应选（A）.

5．设总体 X 的数学期望为 $\mu, X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自 X 的样本，则下列结论中正确的是

（A） X_1 是 μ 的无偏估计量. （B） X_1 是 μ 的极大似然估计量.
（C） X_1 是 μ 的相合（一致）估计量. （D） X_1 不是 μ 的估计量. （ ）

答案：（A）

解答：

$EX_1=\mu$，所以 X_1 是 μ 的无偏估计，应选（A）.

三、（7 分）已知一批产品中 90%是合格品，检查时，一个合格品被误认为是次品的概率为 0.05，一个次品被误认为是合格品的概率为 0.02，

求（1）一个产品经检查后被认为是合格品的概率；

（2）一个经检查后被认为是合格品的产品确是合格品的概率.

解：设 $A=$‘任取一产品，经检验认为是合格品’

$B=$‘任取一产品确是合格品’

则（1） $P(A)=P(B)P(A\mid B)+P(\bar{B})P(A\mid \bar{B})$

$$=0.9\times 0.95+0.1\times 0.02=0.857.$$

（2） $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.9\times 0.95}{0.857}=0.9977$.

四、（12 分）

从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗，假设在各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的，并且概率都是 2/5. 设 X 为途中遇到红灯的次数，

求 X 的分布列、分布函数、数学期望和方差.

解：X 的概率分布为

$$P(X=k)=C_3^k(\frac{2}{5})^k(\frac{3}{5})^{3-k} \qquad k=0,1,2,3.$$

即

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

X 的分布函数为

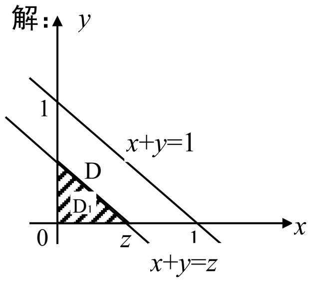
$$F(x)=\begin{cases} 0\ , & x<0, \\ \frac{27}{125}, & 0\le x<1, \\ \frac{81}{125}, & 1\le x<2, \\ \frac{117}{125}, & 2\le x<3, \\ 1\ , & x\ge 3. \end{cases}$$

$$EX=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5},$$

$$DX=3\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{18}{25}.$$

五、（10 分）设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1\}$ 上服从均匀分布. 求（1）(X,Y) 关于 X 的边缘概率密度；（2）$Z=X+Y$ 的分布函数与概率密度.

解:



（1）(X,Y) 的概率密度为

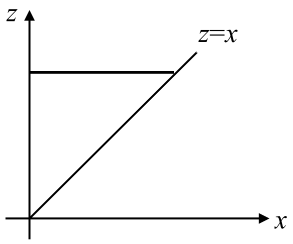
$$f(x,y)=\begin{cases} 2, & (x,y)\in D \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} 2-2x, & 0\le x\le 1 \\ 0\ , & 其它 \end{cases}$$

（2）利用公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ z-x)dx$

其中 $f(x,z-x)=\begin{cases} 2, & 0\le x\le 1, 0\le z-x\le 1-x \\ 0, & 其它 \end{cases}=\begin{cases} 2, & 0\le x\le 1,\quad x\le z\le 1. \\ 0, & 其它. \end{cases}$

当 $z<0$ 或 $z>1$ 时 $f_Z(z)=0$



$0\le z\le 1$ 时 $f_Z(z)=2\int_0^z dx=2x\big|_0^z=2z$

故 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}2z,\ 0\le z\le 1,\\ 0,\ \text{其它}.\end{cases}$$

Z 的分布函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}f_Z(y)dy=\begin{cases}0, & z<0\\ \int_0^z 2ydy, & 0\le z\le 1\\ 1, & z>1\end{cases}=\begin{cases}0\ , & z<0,\\ z^2, & 0\le z\le 1,\\ 1\ , & z>1.\end{cases}$$

或利用分布函数法

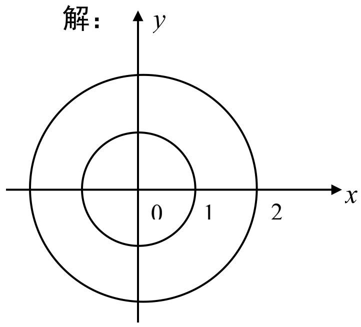
$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\begin{cases}0\ , & z<0,\\ \iint\limits_{D_1}2dxdy, & 0\le z\le 1,\\ 1\ , & z>1.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0\ , & z<0,\\ z^2\ , & 0\le z\le 1,\\ 1\ , & z>1.\end{cases}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}2z, & 0\le z\le 1,\\ 0\ , & \text{其它}.\end{cases}$$

六、（10 分）向一目标射击，目标中心为坐标原点，已知命中点的横坐标 X 和纵坐标 Y 相互独立，且均服从 $N(0,2^2)$ 分布. 求（1）命中环形区域 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 2\}$ 的概率；（2）命中点到目标中心距离 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的数学期望.

解：



（1）$P\{X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

$$=\iint\limits_D\frac{1}{2\pi\cdot 4}e^{-\frac{x^2+y^2}{8}}dxdy=\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\int_1^2 e^{-\frac{r^2}{8}}rdrd\theta$$

$$=-\int_1^2 e^{-\frac{r^2}{8}}d(-\frac{r^2}{8})=-e^{-\frac{r^2}{8}}\Big|_1^2=e^{-\frac{1}{8}}-e^{-\frac{1}{2}};$$

（2）$EZ=E(\sqrt{X^2+Y^2})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{8\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{8}}dxdy$

$$=\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}re^{-\frac{r^2}{8}}rdrd\theta=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{r^2}{8}}r^2dr$$

$$= -re^{-\frac{r^2}{8}}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{8}}dr = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{r^2}{8}}dr = \sqrt{2\pi}\ .$$

七、（11 分）设某机器生产的零件长度（单位：cm）$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，今抽取容量为 16 的样本，测得样本均值 $\bar{x}=10$，样本方差 $s^2=0.16$．（1）求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间；（2）检验假设 $H_0:\sigma^2 \le 0.1$（显著性水平为 0.05）．

（附注）$t_{0.05}(16)=1.746,\ t_{0.05}(15)=1.753,\ t_{0.025}(15)=2.132,$

$$\chi^2_{0.05}(16)=26.296,\ \chi^2_{0.05}(15)=24.996,\ \chi^2_{0.025}(15)=27.488.$$

解：（1）μ 的置信度为 $1-\alpha$ 下的置信区间为

$$(\bar{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\quad \bar{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$$

$$\bar{X}=10,\ s=0.4,\ n=16,\ \alpha=0.05,\ t_{0.025}(15)=2.132$$

所以 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为（9.7868，10.2132）

（2）$H_0:\sigma^2 \le 0.1$ 的拒绝域为 $\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha}(n-1)$．

$$\chi^2 = \frac{15S^2}{0.1} = 15\times 1.6 = 24\text{，}\ \chi^2_{0.05}(15)=24.996$$

因为　$\chi^2 = 24 < 24.996 = \chi^2_{0.05}(15)$，所以接受 H_0．

《概率论与数理统计》期末考试试题（A）

专业、班级：__________________ 姓名：____________ 学号：_____________

一、　**单项选择题**(每题 3 分 共 18 分)

1．D　2．A　3．B　4．A　5．A　6．B

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	总成绩
得 分													

一、单项选择题(每题 3 分 共 18 分)

（1）

若事件 A、B 适合 $P(AB)=0$，则以下说法正确的是 (　　).

(A) A 与 B 互斥 (互不相容);

(B) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$;

(C) A 与 B 同时出现是不可能事件;

(D) $P(A)>0$，则 $P(B|A)=0$.

（2） 设随机变量 X 其概率分布为

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.3	0.1	0.4

则 $P\{X\le 1.5\}=$（　　）。

(A) 0.6　　(B) 1　　(C) 0　　(D) $\frac{1}{2}$

（3）

设事件 A_1 与 A_2 同时发生必导致事件 A 发生，则下列结论正确的是（　　）

（A）$P(A)=P(A_1A_2)$　　（B）$P(A)\ge P(A_1)+P(A_2)-1$

（C）$P(A)=P(A_1\cup A_2)$　　（D）$P(A)\le P(A_1)+P(A_2)-1$

（4）

设随机变量 $X\sim N(-3,\ 1)$，$Y\sim N(2,\ 1)$，且 X 与 Y 相互独立，令 $Z=X-2Y+7$，则 $Z\sim$ (　　).

(A) $N(0,\ 5)$;　(B) $N(0,\ 3)$;　(C) $N(0,\ 46)$;　(D) $N(0,\ 54)$.

（5）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本，其中 $\sigma = 2, \mu$ 未知，则（　　）是一个统计量。

(A) $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sigma^2$　　　　(B) $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$

(C) $\overline{X} - \mu$　　　　(D) $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma}$

（6）设样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 未知。统计假设为 H_0：$\mu = \mu_0$（μ_0已知） H_1：$\mu \neq \mu_0$。 则所用统计量为（　　）

(A) $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$　　　　(B) $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$

(C) $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$　　　　(D) $\chi^2 = \dfrac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$

二、填空题(每空 3 分 共 15 分)

（1）如果 $P(A) > 0, P(B) > 0, P(A|B) = P(A)$，则 $P(B|A) =$ __________ .

（2）设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - (1+x)e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

则 X 的密度函数 $f(x) =$ __________________ ，$P(X > 2) =$ _________ .

（3）

设 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3$ 是总体分布中参数 θ 的无偏估计量, $\hat{\theta} = a\hat{\theta}_1 - 2\hat{\theta}_2 + 3\hat{\theta}_3$, 当 $a =$ ________ 时, $\hat{\theta}$ 也 θ 是的无偏估计量.

（4） 设总体 X 和 Y 相互独立,且都服从 $N(0,1)$，$X_1, X_2, \cdots X_9$ 是来自总体 X 的样本，$Y_1, Y_2, \cdots Y_9$ 是来自总体 Y 的样本，则统计量 $U = \dfrac{X_1 + \cdots + X_9}{\sqrt{Y_1^2 + \cdots + Y_9^2}}$ 服从 _________ 分布（要求给出自由度）。

二、填空题(每空 3 分 共 15 分)

1. $P(B)$ 2. $f(x)=\begin{cases} xe^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$, $3e^{-2}$ 3. -1 4. $t(9)$

三、(6 分) 设 A, B 相互独立，$P(A)=0.7$，$P(A\cup B)=0.88$，求 $P(A-B)$.

解： $0.88 = P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$ (因为 A, B 相互独立)……..2 分

$=0.7+P(B)-0.7P(B)$ …………3 分

则 $P(B)=0.6$ …………4 分

$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)$

$=0.7-0.7\times 0.6=0.28$ …………6 分

四、（6 分）某宾馆大楼有 4 部电梯，通过调查，知道在某时刻 T，各电梯在运行的概率均为 0.7，求在此时刻至少有 1 台电梯在运行的概率。

解：用 X 表示时刻 T 运行的电梯数， 则 $X\sim b(4,\ 0.7)$ ………...2 分

所求概率 $P\{X\ge 1\}=1-P\{X=0\}$ …………4 分

$=1-C_4^0(0.7)^0(1-0.7)^4=0.9919$ ………….6 分

五、（6 分）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\ge 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ ，

求随机变量 Y=2X+1 的概率密度。

解：因为 $y=2x+1$ 是单调可导的，故可用公式法计算 ………….1 分

当 $X\ge 0$ 时，$Y\ge 1$ ………….2 分

由 $y=2x+1$， 得 $x=\frac{y-1}{2}$, $x'=\frac{1}{2}$ …………4 分

从而 Y 的密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases} f(\frac{y-1}{2})\cdot\frac{1}{2} & y\ge 1 \\ 0 & y<1 \end{cases}$ …………..5 分

$$=\begin{cases} \frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{y-1}{2}} & y \geq 1 \\ 0 & y < 1 \end{cases}$$ …………..6 分

五、(6 分)设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\ge 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$,

求随机变量 Y=2X+1 的概率密度。

解：因为 $y=2x+1$ 是单调可导的，故可用公式法计算 …………1 分

当 $X\ge 0$ 时，$Y\ge 1$ …………2 分

由 $y=2x+1$， 得 $x=\dfrac{y-1}{2}$， $x'=\dfrac{1}{2}$ …………4 分

从而 Y 的密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases} f(\dfrac{y-1}{2})\cdot\dfrac{1}{2} & y\ge 1 \\ 0 & y<1 \end{cases}$ …………..5 分

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{2}\cdot e^{-\frac{y-1}{2}} & y\ge 1 \\ 0 & y<1 \end{cases}$$ …………..6 分

六、(8 分) 已知随机变量 X 和 Y 的概率分布为

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

而且 $P\{XY=0\}=1$.

(1) 求随机变量 X 和 Y 的联合分布;

(2)判断 X 与 Y 是否相互独立?

解：因为 $P\{XY=0\}=1$，所以 $P\{XY\ne 0\}=0$

(1)根据边缘概率与联合概率之间的关系得出

Y \ X	-1	0	1	
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

…………4 分

(2) 因为 $P\{X=0,Y=0\}=0\neq P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

所以 X 与 Y 不相互独立

…………8 分

七、（8 分）设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}12e^{-(3x+4y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求：（1）$P(0\le X\le 1,0\le Y\le 2)$；（2）求 X 的边缘密度。

解：（1）$P(0\le X\le 1,0\le Y\le 2)=\int_0^1 dx\int_0^2 12e^{-(3x+4y)}dy$ …………..2 分

$$=\int_0^1 3e^{-3x}dx\cdot\int_0^2 4e^{-4y}dy=\left[-e^{-3x}\right]_0^1\left[-e^{-4y}\right]_0^2$$

$=[1-e^{-3}][1-e^{-8}]$ …………4 分

（2） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}12e^{-(3x+4y)}dy$ …………..6 分

$$=\begin{cases}3e^{-3x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$ ……………..8 分

八、（6 分）一工厂生产的某种设备的寿命 X（以年计）服从参数为 $\frac{1}{4}$ 的指数分布。工厂规定，出售的设备在售出一年之内损坏可予以调换。若工厂售出一台设备盈利 100 元，调换一台设备厂方需花费 300 元，求工厂出售一台设备净盈利的期望。

解： 因为 $X\sim e(\frac{1}{4})$ 得 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ …………2 分

用 Y 表示出售一台设备的净盈利

$$Y=\begin{cases}100 & X\geq 1\\ 100-300 & 0<X<1\end{cases}$$ …………3 分

则 $P(Y=100)=\int_1^{+\infty}\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx=e^{-\frac{1}{4}}$

$P(Y=-200)=\int_0^1\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx=1-e^{-\frac{1}{4}}$ ………..4 分

所以 $EY=100\times e^{-\frac{1}{4}}+(-200)\times(1-e^{-\frac{1}{4}})$

$=300e^{-\frac{1}{4}}-200\approx 33.64$（元） ………..6 分

九、（8 分）设随机变量 X 与 Y 的数学期望分别为 -2 和 2，方差分别为 1 和 4，而相关系数为 -0.5，求 $E(2X-Y),\ \ D(2X-Y)$。

解：已知 $EX=-2,\quad EY=2,\quad DX=1,\quad DY=4,\quad \rho_{XY}=-0.5$

则 $E(2X-Y)=2EX-EY=2\times(-2)-2=-6$ ……….4 分

$D(2X-Y)=D(2X)+DY-2\operatorname{cov}(2X,Y)$ ……….5 分

$=2DX+DY-4\operatorname{cov}(X,Y)$ ……….6 分

$=2DX+DY-4\sqrt{DX}\sqrt{DY}\rho_{XY}$=12 …………..8 分

十、（7 分）设供电站供应某地区 1 000 户居民用电，各户用电情况相互独立。已知每户每日用电量（单位：度）服从[0，20]上的均匀分布，利用中心极限定理求这 1 000 户居民每日用电量超过 10 100 度的概率。（所求概率用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 的值表示）.

解：用 X_i 表示第 i 户居民的用电量，则 $X_i\sim U[0,20]$

$EX_i=\frac{0+20}{2}=10\qquad DX_i=\frac{(20-0)^2}{12}=\frac{100}{3}$ ………2 分

则 1000 户居民的用电量为 $X=\sum_{i=1}^{1000}X_i$，由独立同分布中心极限定理

$$P\{X > 10100\} = 1 - P\{X \le 10100\}$$ ………3 分

$$=1 - P\left\{ \frac{X - 1000\times 10}{\sqrt{1000 \times \frac{100}{3}}} \le \frac{10100 - 1000\times 10}{\sqrt{1000 \times \frac{100}{3}}} \right\}$$ ………4 分

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{10100 - 1000\times 10}{\sqrt{1000\times\frac{100}{3}}}\right)$$ ……….6 分

$$=1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{3}{10}}\right)$$ ………7 分

十一、（7 分）设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是取自总体 X 的一组样本值，X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^{\theta}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 未知，求 θ 的最大似然估计。

解:　最大似然函数为

$$L(x_1, \cdots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} (\theta+1) x_i^{\theta}$$ ……….2 分

$$= (\theta+1)^n (x_1, \cdots, x_n)^{\theta}$$ ……… .3 分

则

$$\ln L(x_1, \cdots, x_n, \theta) = n\ln(\theta+1) + \theta \ln(x_1, \cdots, x_n)$$

$$0 < x_1, \cdots, x_n < 1$$ ………..4 分

令 $\dfrac{d\ln L}{d\theta} = \dfrac{n}{\theta+1} + \ln(x_1, \cdots, x_n) = 0$ ………..5 分

于是 θ 的最大似然估计：

$$\hat{\theta} = -1 - \frac{n}{\ln\ln(x_1, \cdots, x_n)}。$$ ……….7 分

十二、（5 分）某商店每天每百元投资的利润率 $X \sim N(\mu, 1)$ 服从正态分布，均值为 μ，长期以来方差 σ^2 稳定为 1，现随机抽取的 100 天的利润，样本均值为 $\bar{x} = 5$，试求 μ 的置信水平为 95% 的置信区间。（$t_{0.05}(100) = 1.99$,

$\Phi(1.96)=0.975$）

解：因为σ已知，且$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ …………1 分

故 $P\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\le U_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$ …………2 分

依题意 $\alpha=0.05$, $U_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$, $n=100$, $\sigma=1$, $\overline{x}=5$

则μ的置信水平为 95%的置信区间为

$$[\overline{x}-U_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+U_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$ …………4 分

即为 [4.801,5.199] …………5 分

《概率论与数理统计》课程期末考试试题（B）

专业、班级：________________ 姓名：_____________ 学号：____________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	总成绩
得 分													

一、单项选择题(每题 3 分 共 15 分)

（1）

若事件 A、B 适合 $P(AB)=0$，则以下说法正确的是 ( ).

(A) A 与 B 互斥 (互不相容);

(B) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$;

(C) A 与 B 同时出现是不可能事件;

(D) $P(A)>0$，则 $P(B|A)=0$.

（2）

离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=b\lambda^k$，$(k=1, 2, \cdots)$ 的充分必要条件是 ( ).

(A) $b>0$ 且 $0<\lambda<1$; (B) $b=1-\lambda$ 且 $0<\lambda<1$;

(C) $b=\frac{1}{\lambda}-1$ 且 $\lambda<1$; (D) $\lambda=\frac{1}{1+b}$ 且 $b>0$.

（3）

连续随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1 \\ 2-x, & 1<x\le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

则随机变量 X 落在区间 (0.4, 1.2) 内的概率为( ).

(A) 0.64 ; (B) 0.6; (C) 0.5; (D) 0.42.

（4）

设随机变量 $X\sim N(-3, 1)$，$Y\sim N(2, 1)$，且 X 与 Y 相互独立，令 $Z=X-2Y+7$，则 $Z\sim$ ( ).

(A) $N(0, 5)$; (B) $N(0, 3)$; (C) $N(0, 46)$; (D) $N(0, 54)$.

（5）

设 (θ_1,θ_2) 是参数 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的区间估计，则以下结论正确的是 (   ).

(A) 参数 θ 落在区间 (θ_1,θ_2) 之内的概率为 $1-\alpha$；

(B) 参数 θ 落在区间 (θ_1,θ_2) 之外的概率为 α；

(C) 区间 (θ_1,θ_2) 包含参数 θ 的概率为 $1-\alpha$；

(D) 对不同的样本观测值，区间 (θ_1,θ_2) 的长度相同.

二、**填空题**(每空 2 分 共 12 分)

（1）

设总体 X 与 Y 相互独立，且都服从正态分布 $N(0,1)$.$(X_1,\cdots,X_9)$ 是从总体 X 中抽取的一个样本，$(Y_1,\cdots,Y_9)$ 是从总体 Y 中抽取的一个样本，则统计量

$$U=\frac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots Y_9^2}}$$

服从 ______ 分布，参数为 _______.

（2）

设 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_3$ 是总体分布中参数 θ 的无偏估计量，$\hat{\theta}=a\hat{\theta}_1-2\hat{\theta}_2+3\hat{\theta}_3$，当 $a=$ ________时，$\hat{\theta}$ 也 θ 是的无偏估计量.

（3）

设总体 $X\sim N(\mu,1)$，μ 是未知参数，X_1,X_2 是样本，则

$$\mu_1=\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2 \text{ 及 } \mu_2=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2$$

都是 μ 的无偏估计，但 _______ 有效.

（4）

设样本 $(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n)$ 抽自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. μ,σ^2 均未知. 要对 μ 作假设检验，统计假设为 H_0: $\mu=\mu_0$，(μ_0 已知)，H_1: $\mu\neq\mu_0$，则要用检验统计量为 ______，给定显著水平 α，则检验的拒绝区间为 ________ .

三、(7 分) 已知 $P(A)=0.5,\quad P(B)=0.6$，条件概率 $P(B|A)=0.8,\quad$ 试求$P(AB)$..

四、(9 分).设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=A+B\arctan x,\ -\infty<x<+\infty$，

求:（1）常数 A,B；（2） $P(|X|<1)$；（3）随机变量 X 的密度函数。

五、(6 分) 某工厂有两个车间生产同型号家用电器，第 1 车间的次品率为 0.15，第 2 车间的次品率为 0.12. 两个车间生产的成品都混合堆放在一个仓库中，假设 1、2 车间生产的成品比例为 2：3，今有一客户从成品仓库中随机提台产品，求该产品合格的概率.

六、(8 分) 已知甲、乙两箱装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品，从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后，求乙箱中次品件数的分布律及分布函数 $F(x)$.

七、(7 分) 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\ge 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求随机变量的函数 $Y=e^{x}$ 的密度函数 $f_Y(y)$。

八、(6 分) 现有一批钢材，其中 80%的长度不小于 3 m，现从钢材中随机取出 100 根，试用中心极限定理求小于 3 m 的钢材不超过 30 的概率。(计算结果用标准正态分布函数值表示)

九、(10 分) 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}12e^{-(3x+4y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求：（1）$P(0\le X\le 1,0\le Y\le 2)$；（2）求$X$,$Y$的边缘密度;（3）判断$X$与$Y$是否相互独立

十、(8 分)．设随机变量（X,Y）的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0\le y\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求$E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$，进一步判别X与Y是否不相关。

十一、(7 分) .设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本，总体 X 的密度函数为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta^2}, & 0<x<\theta, \\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求 θ 的矩估计量。

十二、（5 分）总体 $X \sim N(\mu,1)$ 测得样本容量为 100 的样本均值 $\bar{X}=5$，求 X 的数学期望 μ 的置信度等于 0.95 的置信区间。（ $t_{0.05}(100)=1.99$, $\Phi(1.96)=0.975$)

一、单项选择题：（15 分）

1、D

2、D

3、B

4、A

5、C

二、填空题：（12 分）

1、t, 9；

2、-1

3、μ_2更

4、$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$，$(\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}})$；

三、（7 分）

解：

$P(AB)=P(A)P(B\mid A)$................................4分

$=0.5\times 0.8=0.4$..................................7分

四、（9 分）

解：（1）由 $1=F(+\infty)=A+B\cdot\dfrac{\pi}{2}$ 1分

$0=F(-\infty)=A-B\cdot\dfrac{\pi}{2}$ 2分

得 $A=\dfrac{1}{2}$, $B=\dfrac{1}{\pi}$ 3分

$F(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arctan x$ 4分

（2）$P(|X|)=F(1)-F(-1)=\dfrac{1}{2}$ 6分

（3）$f(x)=F'(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ $(-\infty<x<+\infty)$ 9分

五、（6 分）

解：$B=\{$从仓库随机提出的一台是合格品$\}$

$A_i=\{$提出的一台是第 i 车间生产$\}(i=1,2)$

$P(A_1)=\frac{2}{5}, P(A_2)=\frac{3}{5}$……………………………………………………………2分

$P(B|A_1)=1-0.15=0.85,\quad P(B|A_2)=1-0.12=0.88$…………… ……………3分

则 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$……………………… ……………………5分

$=\frac{2}{5}\times 0.85+\frac{3}{5}\times 0.88=0.868$……………… …………………………………6分

六、（8 分）

解：设用 X 表示乙箱中次品件数，则 X 的分布律为

$$P(X=0)=\frac{C_3^0C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}\qquad P(X=1)=\frac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}=\frac{9}{20}$$

$$P(X=2)=\frac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}=\frac{9}{20}\qquad P(X=3)=\frac{C_3^3C_3^0}{C_6^3}=\frac{1}{20}$$

……………………4分

X 的分布函数 $F(x)$ 为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{20} & 0\le x<1\\ \frac{1}{2} & 1\le x<2\\ \frac{19}{20} & 2\le x<3\\ 1 & 3\le x\end{cases}$$

……………………8分

七、（7 分）

解:

$Y=e^X$ 可能取值范围为 $[1,+\infty)$， Y 的分布函数为 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)$...........3分

当 $y<1$ 时，$F_Y(y)$＝0

当 $y\ge 1$ 时，$F_Y(y)$＝$P(X\le \ln y)=F_X(\ln y)$...................................5分

则 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}[F_X(\ln y)]' & y\ge 1\\ 0 & y<1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}e^{-\ln y}\cdot\dfrac{1}{y} & y\ge 1\\ 0 & y<1\end{cases}$$ 6分

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{y^2} & y\ge 1\\ 0 & y<1\end{cases}$$ 7分

八、（6 分）

解:

设 X 为100根钢材小于3m的钢材根数

则 $X\sim B(100,0.2)$..............................2分

$E(X)=100\times 0.2$＝20， $D(X)=100\times 0.2\times 0.8$＝16................ ....3分

由中心极限定理：

$$P(X\le 30)=P\left(\frac{X-20}{\sqrt{16}}\le\frac{30-20}{\sqrt{16}}\right)$$ 5分

$$\approx\Phi(2.5)=0.9938$$ 6分

.

九、（10 分）

解：

（1） $P(0\le X\le 1,0\le Y\le 2)=\int_0^1 dx\int_0^2 12e^{-(3x+4y)}dy$ 2分

$=(1-e^{-3})(1-e^{-8})$ 3分

（2）关于 X 的边缘分布：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$ 4分

$$=\begin{cases} 3e^{-3x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$ 6分

同理关于Y的边缘分布：

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} 4e^{-4y} & y>0 \\ 0 & y\le 0 \end{cases}$$ 8分

（3）因为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y) \qquad (-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)$$

所以X与Y相互独立。 10分

十、（8 分）

解：

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^x x\cdot 12y^2dxdy=\dfrac{4}{5}$ 2分

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^x y\cdot 12y^2dxdy=\dfrac{3}{5}$ 4分

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^x xy\cdot 12y^2dxdy=\dfrac{1}{2}$ 6分

因为 $E(XY)\neq E(X)E(Y)$，所以X与Y是相关的。.......................8分

十一、（7 分）

解：

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,\theta)dx=\int_0^\theta x\dfrac{2x}{\theta^2}dx=\dfrac{2}{\theta^2}.\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^\theta=\dfrac{2}{3}\theta$.........................3分

令$E(X)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$...5分

θ的矩估计为

$$\hat{\theta}=\frac{3}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$ 7分

十二、（5 分）

解：

因为σ=1，所以 μ 的置信度为 0.95=1－0.05 的置信区间为.....................1分

$$（\overline{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$ 3分

其中α=0.05，$\frac{\alpha}{2}$=0.025，$u_{\alpha/2}$=1.96，n=100，$\overline{X}=5$...4分

所求区间为　（4.804，5.196）...5分