概率论与数理统计期中试卷（2014）

姓名:__________ 班级:__________班内序号:__________ 得分:__________

填空题

1. 设随机事件 A，B 相互独立，且 $P(A)=0.3$，$P(\bar{B})=0.6$，若事件 C 的发生必然导致 A 与 B 同时发生，则 A，B，C 都不发生的概率为：__________

2. 设两两独立的事件 A,B,C 满足 ABC= Φ，P(A)=P(B)=P(C)< $\frac{1}{2}$，且 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，则 P(A)=__________

3. 已知随机变量 X~N（0，1），定义函数 $g(x)=\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du$ 求 Y=g（X）的密度函数 ________

4. 设 $X\sim U(0,1)$，$Y\sim U(0,1)$，且 X 与 Y 相互独立，则二次方程 $x^2+2Xx+Y=0$ 有实根的概率为________

5. 设随机变量 X 的密度函数为： $f(x)=\begin{cases}\frac{k}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

且已知 $P(X>1)=\frac{1}{2}$，则 $\theta=$__________

6. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ a, & 1\leq x<3\\ 1, & x\geq 3\end{cases}$，（a 为常数）且 $E(X)=1.8$ 则 $a=$__

7. 设 Y=lnX，$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P\{e^{\mu}<X<e^{\mu+0.5\sigma}\}=$____（$\Phi(0.5)=0.6915$，$\Phi(0.25)=0.5987$）

8. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{16}xy, & 0\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq x^2\\ 0, & 其它\end{cases}$

Y 的数学期望 $EY=$________和方差 $DY=$________

9. 设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}cx, & 0<x<1,|y|<x\\ 0, & 其它\end{cases}$，求

（1）常数 c____；(2)关于 y 的边缘概率密度____(3) $f_{X|Y}(x\mid y)$=____

10. 设随机变量 X,Y 相互独立，且都服从 N（0，$\frac{1}{2}$），则 $D(|X-Y|)$=____

概率论试题 2004.4

班级 ________ 姓名 ________ 学号 ________

一、填空题 (每小题 5 分，共 40 分)(注意：将答案写在答题纸上)：

1. 设有 10 个灯泡，其中有 3 个是坏的，从中任取 5 个，则取出的 5 个中恰有 2 个是坏灯泡的概率为 ____；

2. 在四次重复独立试验中，若已知事件 A 至少出现一次的概率为 $\frac{65}{81}$，则在一次试验中事件 A 出现的概率 $P(A)=$ ____；

3. 设随机变量 $X\sim\pi(\lambda)$，且 $P\{X=2\}=P\{X=3\}$，则 $P\{X=4\}=$ ____；

4. 设随机变量 $X\sim U(2,3)$，则 $Y=\ln X$ 的概率密度为 ____；

5. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2}x, & 0<x<1,-x<y<x,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

则关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(x)=$ ____；

6. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

当 $x>0$ 时，在 $X=x$ 条件下，Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}e^{x-y}, & y>x,\\ 0, & y\le x,\end{cases}$$

则 $P\{X+Y>1\}=$ ____；

7. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$，且 X 与 Y 独立，则 $D(2X-3Y)=$ ____；

8. 已知二维随机变量 (X,Y) 的协方差矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$，则 $U=X+Y$ 与 $V=X-Y$ 的相关系数 $\rho_{UV}=$ ____.

二 (10 分). 某工厂的车床、钻床、磨床、刨床的台数之比为 9:3:2:1，它们在一定的时间内需要维修的概率之比为 1:2:3:1．在这段时间内，当有一台机床需要维修时，求这台机床是车床的概率.

三 (10 分). 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}Ae^{x}, & x<0,\\ Ae^{-2x}, & x\ge 0,\end{cases}$$

求：(1) 常数 A；

(2) $P\{-1<X<1\}$；

(3) X 的分布函数 $F(x)$.

四 (10 分). 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<y<x,0<x<1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

求：(1) $P\{X+Y<1\}$；

(2) $Z=X-Y$ 的概率密度.

五 (12 分). 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

六 (10 分). 某地区引进小麦新品种在一万亩土地上进行推广种植，若该小麦品种单位 (以百亩为单位) 面积的增产量 X 在 (200, 800)(单位公斤) 上服从均匀分布．假定各单位面积上的增产量相互独立，计算在一万亩土地上种植的总增产量超过 4.5 万公斤的概率 (已知 $\Phi(2.89)=0.9981$).

七 (8 分). 设二维随机变量 (X,Y) 满足：

$$E(X)=E(Y)=0,\quad D(X)=D(Y)=1,\quad \rho_{XY}=\rho,$$

证明：(1) $E[\max(X^2,Y^2)]\le 1+\sqrt{1-\rho^2}$，

(2) $P\{|X|<\varepsilon,|Y|<\varepsilon\}\ge 1-\frac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\varepsilon^2}$ ($\varepsilon>0$为常数).

北京邮电大学信息工程学院 2007-2008 学年第 2 学期

《概率论与数理统计》期中考试试题

注: $\Phi(1)=0.8413$, $\Phi(-17.32)=0$, $\Phi(2.88)=0.9980$,
$\Phi(2.89)=0.9981$, $\Phi(1.3416)=0.9099$, $\Phi(2.0785)=0.9812$.

一、填空题 (每小题 4 分, 共 32 分)

1. 设一批产品中一、二、三等品占 60%、30%、10%, 从中随意地取出一件, 结果不是三等品, 则取到的是一等品的概率是 $\underline{2/3}$.

2. 对某一目标依次进行了三次独立的射击, 设第一、二、三次射击命中的概率分别为 0.4, 0.5 和 0.7, 则三次射击中恰好有一次命中的概率是 $\underline{0.36}$, 三次射击中至少有一次命中的概率是 $\underline{0.91}$.

3. 设 (X,Y) 服从区域 $D=\{(x,y)|0\leqslant y\leqslant 1-x^2\}$ 上的均匀分布, 则 (X,Y) 的联合密度函数为 ______, $P\{Y\geqslant X^2\}=$ ______.

4. 设相互独立的随机变量 X 和 Y 具有相同的分布律, 且 X 的分布律为

X	0	1
p_k	0.5	0.5

Y 0 1
0.5 0.5
0.5×0.5

则随机变量 $Z=\max(X,Y)$ 的分布律为 ______, $W=\min(X,Y)$ 的分布律为 ______.

5. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$P(X\leq x)$ 0.1

$F_X(x)=\begin{cases}1 & x\geq1\\ \int_0^x 2x\,dx=x^2 & 0<x<1\\ 0 & x\leq0\end{cases}$ $\quad x^2|_0^x=x^2$

现对 X 进行 n 次独立重复观测, 以 V_n 表示观测值 $\boxed{\text{不大于}}$ 0.1 的次数, 则 V_n 的概率分布是 ______.

$P(X\leq0.1)=0.01$ $\quad C_n^k(0.01)^k(0.99)^{n-k}$

6. 已知二维随机变量 (X,Y) 服从联合正态分布, 且 $EX=0$, $EY=0$, $D(X)=1$, $D(Y)=4$, X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\frac{1}{2}$, 则当 $a=\underline{-4}$ 时, 随机变量 $Z=aX+Y$ 与 Y 独立.

$\rho(x,y)=\frac{cov(x,y)}{\sqrt{1}\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$ $\quad cov(Z,Y)=0$

7. 设 X 是区间 $[a,b]$ 上的均匀分布, Y 服从参数为 θ 指数分布

$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}\\ 0\end{cases}$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-y/\theta}, & y>0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$

并且 X,Y 相互独立, 则 $E(X^2e^{-Y})=$ ______.

$\int_a^b\frac{x^2}{b-a}$ $\quad E(x^2)E(e^{-y})$ $\quad \int_0^\infty e^{-y}\frac{1}{\theta}e^{-y/\theta}$ $\quad =\frac{1}{\theta}\int_0^\infty e^{-y}e^{-\frac{y}{\theta}}dy$

8. 计算器在进行加法时, 将每个加数舍入最靠近它的整数, 设所有舍入误差是独立的且在区间 $(-0.5,0.5)$ 上服从均匀分布. 若将 1500 个数相加, 则误差总和的绝对值超过 15 的概率是 ______.

$|\sum_{i=1}^{1500}X_i|>15$ $\quad \sum X_i\geq15$ $\quad \sum\leq-15$

二、计算或证明题.

1. (12 分) 已知 5% 的男人和 10% 的女人具有大专文化程度, 现随机地挑选一人, 此人恰具有大专文化程度, 倘若男人, 女人各占人数的一半, 试求此人是男人的概率.

2. (16 分) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=Ce^{-\frac{|x|}{a}},\quad (a>0),$$

试求: (1) 常数 C; (2) 分布函数 $F(x)$; (3) $P\{|X|<2\}$; (4) $Y=\frac{1}{4}X^2$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

$=\int_{-\infty}^x f(x)dx$

3. (15 分) 设随机向量 (X,Y) 的二维概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

试求: (1) X,Y 各自的边缘概率密度, 判别 X 与 Y 是否独立;
(2) $f_{Y|X}(y|x)$ 与 $f_{X|Y}(x|y)$.
(3) $P\{X>2|Y<4\}$.

4. (15 分) 设某车间有 200 台车床, 每台车床由于种种原因出现停车, 且每台车床开车的概率为 0.6, 假定每台车床停车或开车是相互独立的, 若每台车床开车时需耗电能 1 千瓦, 试问要以 99.8% 以上的概率保证该车间不致因供电不足而影响生产, 需供应多少千瓦电能?

n 0.6 $\quad X_i=\begin{cases}1 & \text{第i台开车}\\ 0 & \text{第i台停车}\end{cases}$ $\quad$ 总耗电: $\sum_{i=1}^{200}X_i$

$P(\sum_{i=1}^{200}X_i\leq x)\geq0.998$

5. (10 分) 设随机向量 (X,Y) 的二维概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)},$$

令 $\xi=\sqrt{X^2+Y^2}$, 试证: $D\xi=2-\frac{\pi}{2}$.

$\int\xi^2 f(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\xi^2}{2}}=$

$E(\xi^2)$

$\int_0^y dx\int_x^\infty\frac{1}{y}dy$ $\quad =\int_x^\infty dy\int_0^y\frac{1}{y}dx$

北京邮电大学信息工程学院 2006-2007 学年第 2 学期

《概率论与数理统计》期中考试试题标准答案 2007.5

注：$\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(0)=0.5$，$\Phi(3.1)=0.999$，$\Phi(2.33)=0.9901$

$\Phi(0.3)=0.6179$，$\Phi(0.5)=0.6915$.

一．填空题 (每小题 4 分，共 32 分)

1. 已知男人寿命大于 60 岁的概率为 70%，大于 50 岁的概率是 85%，若某人今年已 50 岁，则他活到 60 岁的概率是 ______.

解 记："A = 某人活到 50 岁"；"B = 某人活到 60 岁" 于是

$$P(A) = 0.70;\quad P(B)=0.85;$$

并且

$$\begin{aligned} P(B|A) &= P(AB)/P(A)=P(B)/P(A) \qquad (\text{因为} AB=B) \\ &= \frac{0.70}{0.85}=0.8235. \qquad (4\text{ 分}) \end{aligned}$$

2. 对某一目标依次进行三次独立的射击，设第一，二，三次射击命中的概率分别为 0.4, 0.5 和 0.7，则三次射击中恰好有一次命中的概率是 ______. 三次射击中至少有一次命中的概率是 ______.

解 记：A_i 表示第 i 次射击命中，B 表示恰好有一次射击命中，C 表示至少有一次射击命中．根据题意，有

$$B=(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3).$$

$$C=A_1\cup A_2\cup A_3.$$

所以

$$\begin{aligned} P(B) &= P[(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)] \\ &= P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3) \\ &= P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) \\ &= 0.4\cdot0.5\cdot0.3+0.6\cdot0.5\cdot0.3+0.6\cdot0.5\cdot0.7 \\ &= 0.36. \qquad (2\text{ 分}) \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) \\ &= 1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) \\ &= 1-0.6\cdot0.5\cdot0.3=0.91. \qquad (2\text{ 分}) \end{aligned}$$

3. 设随机变量 $X\sim N(1,4)$，则 $P\{0<X<1.6\}=$ ______.

解 因为

$$P\{0<X<1.6\}=F_X(1.6)-F_X(0)=\Phi\left(\frac{1.6-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{0-\mu}{\sigma}\right),$$

其中 $\mu=1,\sigma^2=4$. 代入已知数据，并查表得

$$\begin{aligned} P\{0<X<1.6\} &= \Phi\left(\frac{1.6-1}{2}\right)-\Phi\left(\frac{0-1}{2}\right) \\ &= \Phi(0.3)-\Phi(-0.5)=\Phi(0.3)-(1-\Phi(0.5)) \\ &= 0.6179+0.6915-1=0.3094. \qquad (4\text{ 分}) \end{aligned}$$

4. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}(1+xy)/4, & |x|<1,|y|<1, \\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则 X 的概率密度是 ______，X^2 的分布函数是 ______.

解 X 的概率密度是

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1+xy}{4}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}, & |x|<1, \\ 0, & \text{其他},\end{cases} \qquad (2\text{ 分})$$

而 X^2 的分布函数是

$$F_{X^2}(u)=P\{X^2\leqslant u\}=\begin{cases}0, & u<0, \\ \displaystyle\int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\sqrt{u}, & 0\leqslant u<1, \\ 1, & u\geqslant 1.\end{cases} \qquad (2\text{ 分})$$

5. 设 X,Y 为两个随机变量，且

$$P\{X\geqslant0,Y\geqslant0\}=\frac{3}{7},\quad P\{X\geqslant0\}=P\{Y\geqslant0\}=\frac{4}{7},$$

则 $P\{\max(X,Y)\geqslant0\}=$ ______.

解 根据加法公式，有

$$\begin{aligned} P\{\max(X,Y)\geqslant0\} &= P\{(X\geqslant0)\cup(Y\geqslant0)\} \\ &= P\{X\geqslant0\}+P\{Y\geqslant0\}-P\{X\geqslant0,Y\geqslant0\}=\frac{5}{7}. \qquad (4\text{ 分}) \end{aligned}$$

6. 设 $Z=X-Y$，其中随机变量 X,Y 相互独立，且都服从均值为 0，方差为 $\frac{1}{2}$ 的正态分布，则 $E(|Z|)$______，$D(|Z|)=$______.

解 令 $Z=X-Y$，因为 $X\sim N\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$Y\sim N\left(0,\frac{1}{2}\right)$，且 X 和 Y 相互独立，所以：$Z\sim N(0,1)$. Z 的概率密度是

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}},\quad -\infty<z<+\infty.$$

因为

$$D(|Z|) = E(|Z|^2) - [E(|Z|)]^2 = E(Z^2) - [E(|Z|)]^2.$$

其中,

$$E(Z^2) = D(Z) = 1.\ (因为E(Z)=0),$$
$$E(|Z|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (2\ 分)$$

所以 $D(|Z|) = 1 - \frac{2}{\pi}$ (2 分).

7. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$, 其分布函数为 $\Phi(x)$, 则随机变量 $Y = \Phi(X)$ 的分布函数是 ________

解 设 Y 的分布函数为 $G(y)$, 则

$$G(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{\Phi(X) \leqslant y\}.$$

由于 $\Phi(x)$ 为 X 的分布函数, 其值域范围为 $[0,1]$, 故当 $y<0$ 时, $G(y) = P\{\emptyset\} = 0$; 当 $y \geqslant 1$ 时, $G(y) = P\{\Omega\} = 1$.

当 $0 \leqslant y \leqslant 1$ 时, 由于 $\Phi(x)$ 严格单调, 故

$$G(y) = P\{\Phi(X) \leqslant y\} = P\{X \leqslant \Phi^{-1}(y)\} = \Phi(\Phi^{-1}(y)) = y.$$

综上所述, Y 的分布函数为

$$G(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ y, & 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 1, & y > 1. \end{cases} \quad (4\ 分)$$

8. 将一枚硬币, 重复抛 n 次, 以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数, 则 $D(X) =$ ______, $D(Y) =$ ______, $\mathrm{Cov}(X,Y) =$ ______, X 和 Y 的相关系数 $\rho_{XY} =$ ______

解 由于 $X \sim b\left(n, \frac{1}{2}\right)$, 所以

$$E(X) = \frac{n}{2}, \quad D(X) = \frac{n}{4} \quad (1\ 分)$$

由 $Y = n - X$, 所以

$$E(Y) = \frac{n}{2}, \quad D(Y) = \frac{n}{4}. \quad (1\ 分)$$

并且

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X, n-X) = -\mathrm{Cov}(X,X) = -D(X) = -\frac{n}{4}. \quad (1\ 分)$$

X 和 Y 的相关系数

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = -1. \quad (1\ 分)$$

二. 计算或证明题.

1 (14 分). 设连续型随机变量 ξ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} A + Be^{-\frac{x^2}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

(1) 求常数 A, B.

(2) 求 ξ 的概率密度 $f(x)$.

(3) 求 $P\{1 < \xi < 2\}$.

解 (1) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$, 所以有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(A + Be^{-\frac{x^2}{2}}\right) = A = 1. \quad (2\ 分)$$

即 $A=1$. 又由于 ξ 是连续型随机变量, $F(x)$ 是 x 的连续函数, 有

$$\lim_{x\to0^-} F(x) = 0 = \lim_{x\to0^+} F(x) = \lim_{x\to0}\left(A + Be^{-\frac{x^2}{2}}\right) = A + B.$$

所以 $A + B = 0$, $B = -A = -1$. (4 分)

代入 A, B 的值得

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases} \quad (6\ 分)$$

(2) 函数 $F(x)$ 求导得

$$F'(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \quad (8\ 分)$$

由概率密度的性质, 得 ξ 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \quad (10\ 分)$$

(3) 利用分布函数可得

$$\begin{aligned} P\{1 < \xi < 2\} &= F(2) - F(1) && (12\ 分) \\ &= e^{-\frac{1}{2}} - e^{-2} \approx 0.4712. && (14\ 分) \end{aligned}$$

2 (14 分). 一学生接连参加同一课程的两次考试. 第一次及格的概率为 p. 若第一次及格则第二次及格的概率也为 p; 若第一次不及格则第二次及格

的概率为 $p/2$. (1) 若至少有一次及格则他能取得某种资格，求他取得该资格的概率. (2) 若已知他第二次已经及格，求他第一次及格的概率.

解 设 E 表示一学生接连参加一门课程的两次考试. 以 A_i 表示事件"第 i 次考试及格"，$i=1,2$; 以 A 表示"他能取得该种资格".

(1) 按题意 $A = A_1 \cup \overline{A}_1 A_2$. 因为 $A_1 \cap \overline{A}_1 A_2 = \emptyset$, 且由已知条件:

$$P(A_1) = p, \qquad p(\overline{A}_1) = 1-p, \qquad (2\text{ 分})$$

$$P(A_2|A_1) = p, \qquad p(A_2|\overline{A}_1) = p/2, \qquad (4\text{ 分})$$

故

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup \overline{A}_1 A_2) = P(A_1) + P(\overline{A}_1 A_2) && (6\text{ 分}) \\ &= p + p(A_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_1) = p + (p/2)(1-p) \\ &= (3/2)p - (1/2)p^2. && (8\text{ 分}) \end{aligned}$$

(2) 根据贝叶斯公式，有

$$\begin{aligned} P(A_1|A_2) &= \frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)} && (10\text{ 分}) \\ &= \frac{P(A_2|A_1)P(A_1)}{P(A_2|A_1)P(A_1) + P(A_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)} && (12\text{ 分}) \\ &= \frac{p \times p}{p \times p + (p/2)(1-p)} = \frac{2p}{p+1}. && (14\text{ 分}) \end{aligned}$$

3(14 分). 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{A}{x^2y^3}, & x > \dfrac{1}{2}, y > \dfrac{1}{2}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求 A;

(2) 求 (X,Y) 的分布函数;

(3) 求 $P\{XY<1\}$.

解 (1) 由密度函数的性质，有

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{A}{x^2y^3}\mathrm{d}y = 1. \qquad (2\text{ 分})$$

解之得 $A = \frac{1}{4}$, 于是

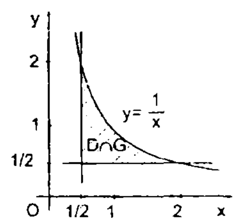
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4x^2y^3}, & x > \dfrac{1}{2}, y > \dfrac{1}{2}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \qquad (4\text{ 分})$$

(2) (X,Y) 的分布函数是

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \begin{cases} \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{x} \mathrm{d}u \int_{\frac{1}{2}}^{y} \frac{1}{4u^2v^3}\mathrm{d}v, & x > \dfrac{1}{2}, y > \dfrac{1}{2}, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} && (6\text{ 分}) \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{8}\left(2 - \dfrac{1}{x}\right)\left(4 - \dfrac{1}{y^2}\right), & x > \dfrac{1}{2}, y > \dfrac{1}{2}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} && (8\text{ 分}) \end{aligned}$$

(3) 记 $D = \left\{(x,y) \middle| x > \frac{1}{2}, y > \frac{1}{2}\right\}$, $G = \left\{(x,y) \middle| xy < 1\right\}$(如图). 因 $f(x,y)$ 仅在 D 内取非零值，故由密度函数的性质得

$$\begin{aligned} P\{XY<1\} &= \iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y && (10\text{ 分}) \\ &= \iint_{D\cap G} \frac{1}{4x^2y^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y && (12\text{ 分}) \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{x}} \frac{1}{4x^2y^3}\mathrm{d}y = \frac{9}{16}. && (14\text{ 分}) \end{aligned}$$



4(14 分). 银行为支付某日即将到期的债券须准备一笔现金，已知这批债券共发放了 500 张，每张须付本息 1000 元，设持券人 (1 人 1 券) 到期日到银行领取本息的概率为 0.4. 问银行于该日应准备多少现金才能以 99.9% 的把握满足客户的兑换.

解 设

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 个持券人到期日去银行兑换}, \\ 0, & \text{第 } i \text{ 个持券人到期日不去银行兑换}, \end{cases} \qquad (2\text{ 分})$$

则该日到银行兑换的总人数为 $\sum_{i=1}^{500} X_i$, 所须资金为 $1000\sum_{i=1}^{500} X_i$ (4 分). 为使银行能以 99.9% 的把握满足客户的兑换，即要求 x, 使得

$$P\left\{\sum_{i=1}^{500} X_i \leqslant x\right\} \geqslant 0.999. \qquad (6\text{ 分})$$

这里 $X_i, i=1,2,\cdots,500$ 服从 (0-1) 分布，$E(X_i)=p=0.4, D(X_i)=p(1-p)=0.24$ (8 分). 由中心极限定理知

$$
\begin{aligned}
P\left\{\sum_{i=1}^{500} X_i \leqslant x\right\} &= P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{500} X_i - 200}{\sqrt{120}} \leqslant \frac{x-200}{\sqrt{120}}\right\} \\
&\approx \Phi\left(\frac{x-200}{\sqrt{120}}\right) \geqslant 0.999, \qquad (10\text{ 分})
\end{aligned}
$$

查表得 $\frac{x-200}{\sqrt{120}} \geqslant 3.1, x \geqslant 233.96$(12 分). 所以银行只须准备 234000 元就能以 99.9% 的把握满足客户的兑换 (14 分).

5(12 分). 设二维随机变量 (ξ,η) 满足：

$$E(\xi)=E(\eta)=0,\ D(\xi)=D(\eta)=1,\ \mathrm{Cov}(\xi,\eta)=c,$$

证明： $E[\min(\xi^2,\eta^2)] \geqslant 1-\sqrt{1-c^2}$.

证 因为

$$
\begin{aligned}
E[\min(\xi^2,\eta^2)] &= E\left(\frac{\xi^2+\eta^2-|\xi^2-\eta^2|}{2}\right) \qquad (2\text{ 分}) \\
&= \frac{1}{2}[E(\xi^2)+E(\eta^2)-E(|\xi^2-\eta^2|)], \qquad (4\text{ 分})
\end{aligned}
$$

其中 $E(\xi^2)=D(\xi)=1, E(\eta^2)=D(\eta)=1$ (6 分). 并且

$$
\begin{aligned}
E(|\xi^2-\eta^2|) &= E(|\xi+\eta||\xi-\eta|) \\
&\leqslant \sqrt{E[(\xi+\eta)^2]E[(\xi-\eta)^2]} \qquad (8\text{ 分}) \\
&= 2\sqrt{1-c^2}. \qquad (10\text{ 分})
\end{aligned}
$$

于是得

$$E[\min(\xi^2,\eta^2)] \geqslant \frac{1}{2}(2-2\sqrt{1-c^2}) = 1-\sqrt{1-c^2}. \qquad (12\text{ 分})$$

——圆梦北邮赠