北京邮电大学 2018--2019 学年第 1 学期

《概率论与数理统计》期末试题答案（B）

一. 填空题（每空 4 分，共 4 0 分）

1. $P(A\cup B)=\dfrac{1}{3}$.

2. $P\{X>1\}=1-\int_0^1 \dfrac{x}{2}dx=\dfrac{3}{4}$.

3. $\dfrac{1}{2}$

4. $\dfrac{1}{4}$.

5. $\dfrac{5}{2}$

6. 0.383

7. $e^{2(e-1)}$.

8. (13.402,15.958)

9. $\dfrac{p(1-p)}{n}$

10. 2

二. (10 分)

解 (1) $P\{X=0\}=\dfrac{C_3^3}{C_5^3}=0.1$,

$$P\{X=1\}=\frac{C_2^1C_3^2}{C_5^3}=0.6,$$

$$P\{X=2\}=\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}=0.3.$$

X 的分布律为

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

……4 分

(2) $E(X)=0\times0.1+1\times0.6+2\times0.3=1.2$. ……3 分

(3) X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ 0.1, 0\le x<1,\\ 0.7, 1\le x<2,\\ 1, x\ge 2\end{cases}$$
……3 分

三．(10 分)

解:(1) (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, x>0, y>0\\ 0, \text{其他}\end{cases}$$

$$P\{X>2Y\}=\iint_{x>2y}f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^{\infty}dy\int_{2y}^{\infty}e^{-(x+y)}dx$$

$$=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-3y}dy$$

$$=\frac{1}{3}.$$
……3 分

(2) $Z=\min(X,Y)$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{\min(X,Y)\le z\}$$

$$=1-P\{\min(X,Y)>z\}$$

$$=1-P\{X>z,Y>z\}$$

$$=1-P\{X>z\}P\{Y>z\}$$

$$=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2z}, z\ge 0,\\ 0, z<0\end{cases}$$
……3 分

(3) $U=X+Y$ 的概率密度为

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,u-x)dx,$$

当 $u\le 0$ 时，$f_U(u)=0$;

当 $u>0$ 时,

$$f_U(u)=\int_0^u \mathrm{e}^{-u}du=u\mathrm{e}^{-u},$$

即得

$$f_U(u)=\begin{cases} u\mathrm{e}^{-u}u>0, \\ 0,\text{其他} \end{cases}.$$ ……4 分

四．(10 分)

解：（1）$E(X)=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x\cdot\frac{21}{4}x^2ydx=0$，

$$E(XY)=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xy\cdot\frac{21}{4}x^2ydx=0,$$

所以

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.$$ ……5 分

(2)当 $0<y<1$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2ydx=\frac{7}{2}y^{5/2}$，

$Y=y(0<y<1)$ 条件下，X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2y^{-3/2},-\sqrt{y}<x<\sqrt{y}, \\ 0,\text{其他}\end{cases}.$$ ……5 分

五．(10 分)

解：（1）似然函数为

$$L(\theta)=\frac{1}{\theta^n}(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{\theta}-1},$$

对数似然函数为

$$\ln[L(\theta)] = -n\ln\theta + (\frac{1}{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \text{ ,}$$

令

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln[L(\theta)] = -\frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0 \text{ ,}$$

得θ的最大似然估计量为

$$\hat{\theta} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i \text{ .}$$ ……5 分

（2） $E(\ln X) = \int_0^1 \ln x \cdot \frac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}-1} dx = -\int_0^1 x^{\frac{1}{\theta}-1} dx = -\theta$ ，

$$E(\hat{\theta}) = -\frac{1}{n}E\{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\} = -E(\ln X) = \theta \text{ ,}$$

所以θ的最大似然估计量$\hat{\theta}$是θ的无偏估计. ……5 分

六．(10 分)

解： （1）检验统计量的观察值为

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{5.06}{2.94} = 1.7211$$

由于$F_{0.95}(7,7) < F = 1.7211 < F_{0.05}(7,7)$,故不拒绝原假设,即认为 $\sigma_1 = \sigma_2$.

……5 分

(2) 需检验假设

H_0： $\mu_1 \le \mu_2$ H_1： $\mu_1 > \mu_2$

$$s_w^2 = \frac{7s_1^2 + 7s_2^2}{14} = 4,$$

检验统计量的观察值为

$$t=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{12.68-10.45}{\sqrt{4}\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}}=2.23,$$

由于$t=2.23>t_{0.05}(14)$,故拒绝原假设,即认为甲机器生产的部件的重量比乙机生产的部件的重量大. ……5 分

七．(10 分)

解: (1) $L_{xx}=\sum_{i=1}^{7}x_i^2-\frac{1}{7}(\sum_{i=1}^{7}x_i)^2=0.28$, $L_{xy}=\sum_{i=1}^{7}x_iy_i-\frac{1}{7}(\sum_{i=1}^{7}x_i)(\sum_{i=1}^{7}y_i)=5.1$,

$$\hat{\beta}_1=\frac{L_{xy}}{L_{xx}}=18.2143,$$

线性回归方程为

$$\hat{y}=\frac{147}{7}+18.2143(x-\frac{2.8}{7}),$$

即 $\hat{y}=13.7143+18.2143x$. ……5 分

(2) $L_{xx}=\sum_{i=1}^{7}y_i^2-\frac{1}{7}(\sum_{i=1}^{7}y_i)^2=94$,

回归平方和为

$$S_R=\frac{L_{xy}^2}{L_{xx}}=92.893,$$

残差平方和为

$$S_E=L_{yy}-S_R=1.107,$$

检验统计量的观察值为

$$F=\frac{S_R}{S_E/5}=419.57.$$

由于$F>F_{0.01}(1,5)$,故拒绝原假设,即在显著水平$\alpha=0.01$下，回归方程是显著的. ……5 分