《概率论与数理统计》 试卷A

（考试时间：90分钟；　　考试形式：闭卷）

（注意：请将答案填写在答题专用纸上，并注明题号。答案填写在试卷和草稿纸上无效）

一、单项选择题(本大题共20小题，每小题2分，共40分)

1、A，B为二事件，则 $\overline{A \cup B} = (\quad)$

A、AB　B、$\overline{A}\,\overline{B}$　C、$A\overline{B}$　D、$\overline{A} \cup \overline{B}$

2、设A，B，C表示三个事件，则 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 表示 $(\quad)$

A、A，B，C中有一个发生

B、A，B，C中恰有两个发生

C、A，B，C中不多于一个发生　D、A，B，C都不发生

3、A、B为两事件，若 $P(A \cup B) = 0.8$，$P(A) = 0.2$，$P(\overline{B}) = 0.4$，

则 $(\quad)$ 成立

A、$P(A\overline{B}) = 0.32$　B、$P(\overline{A}\,\overline{B}) = 0.2$

C、$P(B - A) = 0.4$　D、$P(\overline{B}A) = 0.48$

4、设A，B为任二事件，则 $(\quad)$

A、$P(A - B) = P(A) - P(B)$　B、$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

C、$P(AB) = P(A)P(B)$　D、$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$

5、设事件A与B相互独立，则下列说法错误的是 $(\quad)$

A、A 与 $\overline{B}$ 独立　B、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立

C、$P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B)$　D、A 与 B 一定互斥

6、设离散型随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	0.3	0.5	0.2

其分布函数为 $F(x)$，则 $F(3) = (\quad)$

A、0　B、0.3　C、0.8　D、1

7、设离散型随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} cx^4, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$，则常数 $c = (\quad)$

A、$\frac{1}{5}$　B、$\frac{1}{4}$　C、4　D、5

8、设 $X \sim N(0,1)$，密度函数 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，则 $\varphi(x)$ 的最大值是 $(\quad)$

A、0　　B、1　　C、$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$　　D、$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

9、设随机变量 X 可取无穷多个值 0,1,2,⋯,其概率分布为 $p(k;3)=\frac{3^k}{k!}e^{-3},k=0,1,2,\cdots$，则下式成立的是

$(\quad)$

A、$EX=DX=3$　B、$EX=DX=\frac{1}{3}$

C、$EX=3$, $DX=\frac{1}{3}$　　D、$EX=\frac{1}{3}$, $DX=9$

10、设 X 服从二项分布 B(n,p),则有 $(\quad)$

A、$E(2X-1)=2np$　　B、$D(2X+1)=4np(1-p)+1$

C、$E(2X+1)=4np+1$　　D、$D(2X-1)=4np(1-p)$

11、独立随机变量 X,Y，若 X～N(1,4)，Y～N(3,16)，下式中不成立的是 $(\quad)$

A、$E(X+Y)=4$　B、$E(XY)=3$　C、$D(X-Y)=12$　D、$E(Y+2)=16$

12、设随机变量 X 的分布列为：

X	1	2	3
p	1/2	c	1/4

则常数 c=$(\quad)$

A、0　　B、1　　C、$\frac{1}{4}$　　D、$-\frac{1}{4}$

13、设 $X \sim N(0,1)$,又常数 c 满足 $P\{X \geq c\}=P\{X<c\}$,则 c 等于 $(\quad)$

A、1　　B、0　　C、$\frac{1}{2}$　　D、-1

14、已知 $EX=-1,\ DX=3$,则 $E\left[3\left(X^2-2\right)\right]$=$(\quad)$

A、9　B、6　C、30　D、36

15、当 X 服从(　　)分布时, $EX=DX$ 。

A、指数　B、泊松　C、正态　D、均匀

16、下列结论中，$(\quad)$ 不是随机变量 X 与 Y 不相关的充要条件。

A、$E(XY)=E(X)E(Y)$　　B、$D(X+Y)=DX+DY$

C、$Cov(X,Y)=0$　　D、X 与 Y 相互独立

17、设 $X \sim b(n,p)$ 且 $EX=6, DX=3.6$，则有 $(\quad)$

A、$n=10$，$p=0.6$　B、$n=20$，$p=0.3$

C、$n=15$，$p=0.4$　D、$n=12$，$p=0.5$

18、设 $p(x,y), p_{\xi}(x), p_{\eta}(y)$ 分别是二维随机变量 (ξ,η) 的联合密度函数及边缘密度函数，则 $(\quad)$ 是 ξ 与 η 独立的充要条件。

A、$E(\xi+\eta)=E\xi+E\eta$　　B、$D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta$

C、ξ 与 η 不相关　　D、对 $\forall x, y$，有 $p(x,y)=p_{\xi}(x)p_{\eta}(y)$

19、设是二维离散型随机变量，则 X 与 Y 独立的充要条件是 $(\quad)$

A、$E(XY)=EXEy$　B、$D(X+Y)=DX+DY$　C、X 与 Y 不相关

D、对 (X,Y) 的任何可能取值 (x_i, y_j)　$P_{ij}=P_i P_j$

20、设 (X,Y) 的联合密度为 $p(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0\le x, \mathrm{y}\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，

若 $F(x,y)$ 为分布函数，则 $F(0.5,2)=(\quad)$

A、0　B、$\dfrac{1}{4}$　C、$\dfrac{1}{2}$　D、1

二、计算题(本大题共 6 小题，每小题 7 分，共 42 分)

1、 若事件 A 与 B 相互独立，$P(A)=0.8$　$P(B)=0.6$。求：$P(A+B)$ 和 $P\{\overline{A}|(A+B)\}$

2、 设随机变量 X　$N(2,4)$，且 $\Phi(1.65)=0.95$。求 $P(X\ge 5.3)$

3、 已知连续型随机变量ξ的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x}{4}, & 0<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$，求Eξ和Dξ。

4、 设连续型随机变量X的分布函数为$F(x)=A+Barctgx \qquad -\infty<x<+\infty$

求：（1）常数A和B；

（2）X落入（-1，1）的概率；

（3）X的密度函数$f(x)$

5、某射手有3发子弹，射一次命中的概率为$\dfrac{2}{3}$，如果命中了就停止射击，

否则一直独立射到子弹用尽。

求：（1）耗用子弹数X的分布列；（2）EX；（3）DX

6、设(ξ,η)的联合密度为$p(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0\le x, y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$，

求：（1）边际密度函数$p_{\xi}(x), p_{\eta}(y)$；（2）$E\xi, E\eta$；（3）ξ与η是否独立

三、解答题(本大题共 2 小题，每小题 9 分，共 18 分)

1、 设X_1，X_2是来自正态总体$N(\mu,1)$的样本，下列三个估计量是不是参数μ 的无偏估计量，若是无偏估计量，试判断哪一个较优？

$\mu_1=\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2$ ，$\mu_1=\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2$，$\mu_1=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2$。

2、设$\xi\sim f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & 其它\end{cases}$ $(\theta>0)$ $x_1,x_2,\dots,x_n$。为 ξ的一组观察值，求θ的极大似然估计。

概率论与数理统计试卷答案及评分标准

一、单项选择题(本大题共 20 小题，每小题 2 分，共 40 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	D	C	D	D	D	D	C	A	D
题号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答案	C	C	B	B	B	D	C	D	D	B

二、计算题(本大题共 6 小题，每小题 7 分，共 42 分)

1、 解：∵A 与 B 相互独立

$\therefore P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ ………（1 分）

$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$ ………（1 分）

$=0.8+0.6-0.8\times 0.6$

$=0.92$ ………（1 分）

又 $P(\overline{A}|A+B)=\dfrac{P[\overline{A}(A+B)]}{P(A+B)}$ ………（1 分）

$=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(A+B)}=\dfrac{P(\overline{A})P(B)}{P(A+B)}$ ………（2 分）

$=0.13$ ………（1 分）

2、 解：$P(X\geq 5.3)=1-\Phi\left(\dfrac{5.3-2}{2}\right)$ ………（5 分）

$=1-\Phi(1.65)=1-0.95=0.05$ ………（2 分）

3、解：由已知有 $\xi \quad U(0,4)$ ………（3 分）

则：$E\xi=\dfrac{a+b}{2}=2$ ………（2 分）

$D\xi=\dfrac{(b-a)^2}{12}=\dfrac{4}{3}$ ………（2 分）

4、解：(1) 由 $F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$

有：$\begin{cases} A-\dfrac{\pi}{2}B=0 \\ A+\dfrac{\pi}{2}B=1 \end{cases}$

解之有：$A=\dfrac{1}{2}$，$B=\dfrac{1}{\pi}$ ………（3 分）

(2) $P(-1<X<1)=F(1)-F(-1)=\dfrac{1}{2}$ ………（2 分）

(3) $f(x)=F'(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ ………（2 分）

5、解：(1)

………

X	1	2	3
P	2/3	2/9	1/9

（3 分）

(2) $EX=\sum_{i=1}^{3}x_ip_i=1\times\dfrac{2}{3}+2\times\dfrac{2}{9}+3\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{13}{9}$ ………（2 分）

(3) $\because EX^2=\sum_{i=1}^{3}x_i^2p_i=1^2\times\dfrac{2}{3}+2^2\times\dfrac{2}{9}+3^2\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{23}{9}$

$\therefore DX=EX^2-(EX)^2=\dfrac{23}{9}-(\dfrac{13}{9})^2=\dfrac{38}{81}$ ………（2 分）

6、解：(1) $\because p_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x，y)dy=\int_0^1 4xydy=2x$

$\therefore p_\xi(x)=\begin{cases}2x， & 0\le x\le 1\\ 0， & 其它\end{cases}$

同理：$p_\eta(x)=\begin{cases}2y， & 0\le y\le 1\\ 0， & 其它\end{cases}$ ………（3 分）

(2) $E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_\xi(x)dx=\int_0^1 2x^2dx=\dfrac{2}{3}$

同理：$E\eta=\dfrac{2}{3}$ ………（2 分）

(3) $\because p(x,y)=p_\xi(x)p_\eta(y)$

$\therefore \xi$ 与 η 独立 ………（2 分）

三、应用题(本大题共 2 小题，每小题 9 分，共 18 分)

1、 解：$\because E\mu_1=E(\dfrac{2}{3}X_1+\dfrac{1}{3}X_2)=\mu$

同理：$E\mu_2=E\mu_3=\mu$

$\therefore \mu_1,\mu_2,\mu_3$ 为参数 μ 的无偏估计量………（3 分）

又 $\because D\mu_1=D(\dfrac{2}{3}X_1+\dfrac{1}{3}X_2)=\dfrac{4}{9}DX_1+\dfrac{1}{9}DX_2=\dfrac{5}{9}\sigma^2$

同理：$D\mu_2=\dfrac{10}{16}\sigma^2$，$D\mu_3=\dfrac{2}{4}\sigma^2$

且 $D\mu_3<D\mu_1<D\mu_2$

$\therefore$ μ_3 较优 ………（6 分）

2、 解：$x_1, x_2, ..., x_n$ 的似然函数为：

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}} = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$ ………（3 分）

$$Ln(L) = -n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{dLn(L)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

解之有：$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{X}$ ………（6 分）