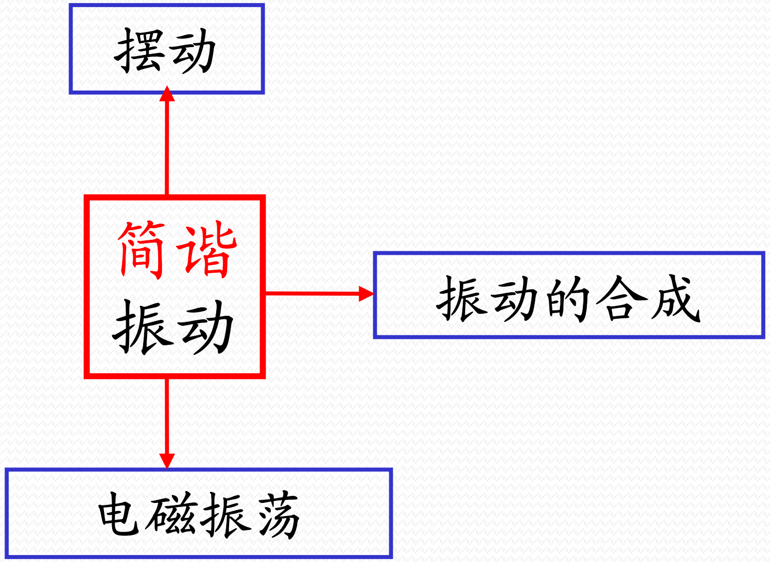
期末总复习（二）

第三部分：振动与波动

第7章 振动

结构框图



重点

简谐振动（运动方程、特征量、能量、振动的合成）

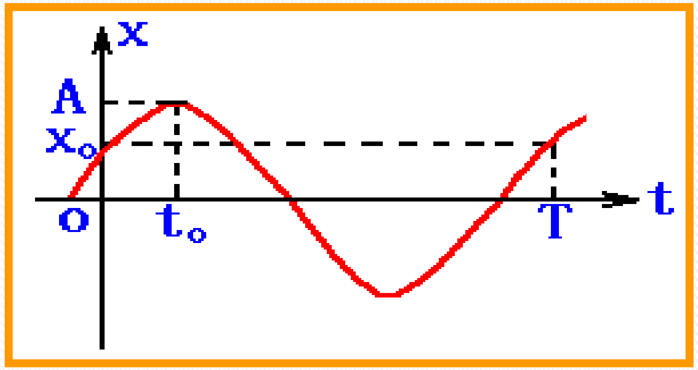
内容提要

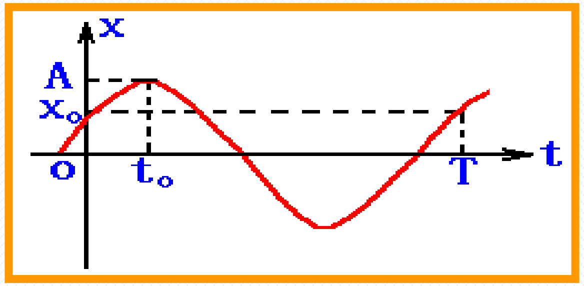
1. 运动方程和振动曲线

$$F=-kx$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0$$

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$





$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$$

初始条件:　在 $t=0$ 时刻 $\begin{cases} x_0=A\cos\varphi_0 \\ v_0=-A\omega\sin\varphi_0 \end{cases}$

2. 特征量

1) $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ $\quad T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ 由系统本身决定

2) $A = |x_{\max}| = \sqrt{x_o^2 + \dfrac{v_o^2}{\omega^2}}$ 由初始条件决定

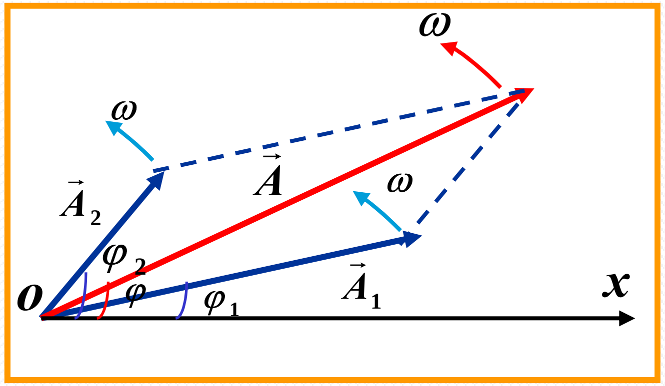
3) $\cos\varphi = \dfrac{x_o}{A}$ $\quad \sin\varphi = -\dfrac{v_o}{\omega A}$

或 $\varphi = -\dfrac{t_o}{T}\cdot 2\pi$ 由初始条件决定

3. 能量

机械能守恒 $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$

4. 同一直线上同频率的谐振动合成



$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

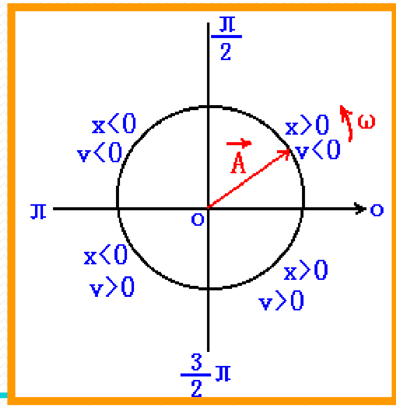
$$\varphi = \text{arctg}\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

5. 解题注意

1）以振动系统的平衡位置为坐标原点和势能零点

2）正确写出特征量和初始条件

3）尽可能使用旋转矢量法，使求解简便



习题类型

- 振动问题
  - 谐振动的判定
  - 谐振动方程的建立
  - 由谐振动方程求各量
    - 特征参量
    - 速度、加速度
    - 能量
  - 谐振动的合成
    - 两同方向、同频率谐振动合成的振动方程

解题思路

1、谐振动的判定

解这类习题的基本思路是：通过选取研究对象、受力分析、选择适当坐标系，视题设条件方便，列出物体运动的动力学方程或微分方程，然后与谐振动的三种等价定义比较，即可判断出该物体是否做简谐振动。在有些问题中，特别是振动物体不能视为质点的情况下（如 U 型管中振动的液体），从分析能量出发，由机械能表达式对时间求导来判断物体是否做简谐振动，会更加方便。

2、谐振动方程的建立

这部分习题要在理解振动方程的物理意义，熟悉振动方程的标准形式（$x = A\cos(\omega t + \varphi)$）基础上，根据振动系统的力学条件、题设初始条件和谐振动的三种描述方法中任一种方法来确定三个特征量 ω、A、φ，然后写出振动方程。

3、由谐振动方程求各量

这部分习题相对较容易，只要将所给方程化成标准形式，从中找出各相应的物理量即可。速度、加速度则可通过对振动方程也即运动方程分别求一阶导数和二阶导数而得到。

4、谐振动的合成

这部分习题重点是掌握同方向、同频率的两个谐振动的合成问题，熟悉合振动的振幅、初相的计算公式及合振动加强、减弱条件。

例题分析

1、简谐振动的判定

【例】 将一厚度为 28.6cm , 密度为 $0.7g/cm^3$ 的木块投入水中，试证明木块将沿竖直方向做简谐振动，并求它的固有频率是多少(不计水的表面张力和粘滞性)?

【解】　取 x 轴竖直向上，并以木块在水平面上的静止平衡位置为坐标原点。设木块的水平截面积为 s，已知其厚度 $h=28.6\text{cm}$，木块与水的密度分别为 $\rho=0.7\text{g}/\text{cm}^3$，$\rho_0=1\text{g}/\text{cm}^3$。当木块静止时，重力与浮力达到平衡。设想木块向上偏离平衡位置 x，此时木块所受的浮力减小 $\rho_0 gsx$，故它所受的合力竖直向下，大小为 $\rho_0 gsx$。同样，当木块向下偏离平衡位置 x 时，它所受的合力大小仍为 $\rho_0 gsx$，但方向竖直向上。可见木块受的力具有线性恢复力的特征，即有

$$\boxed{F=-\rho_0 gsx=-kx} \qquad (1)$$

或者可以列出木块的运动微分方程：

$$\boxed{\rho hs\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\rho_0 sgx}$$

即

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\rho_0 g}{\rho h}x = 0} \qquad (2)$$

此即该谐振动的运动微分方程。

由(1)或(2)可以看出，木块将沿竖直方向做简谐振动，其圆频率为

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{\rho_0 g}{\rho h}} = \sqrt{\frac{1\times 980}{0.7\times 28.6}} \approx 7\mathrm{rad/s}}$$

2、简谐振动方程的建立

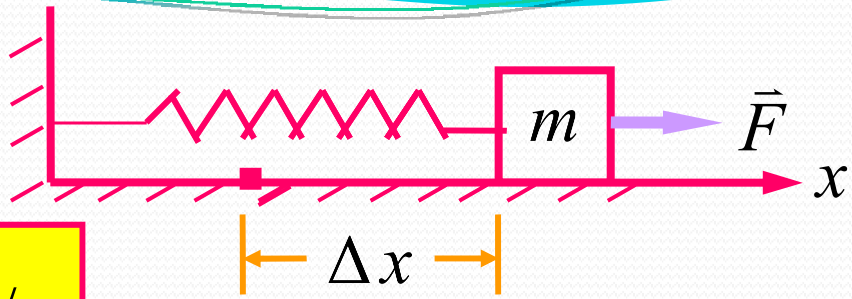
【例】 一弹簧振子， 现用 $F = 1\text{N}$ 的力拉振子时，弹簧伸长为 $\triangle x=5.0\times10^{-3}\text{m}$， 已知振子的质量为 $m = 0.064\text{kg}$ 。

(1) 当时间 $t = 0$ 时，振子的初位移 $x_0= 4\text{cm}$，初速 $v_0=0$，写出弹簧振子的振动方程；

(2) 当 $t = 0$ 时，振子的初位移 $x_0= 0$，初速 $v_0=118.6\text{cm/s}$，写出弹簧振子的振动方程。

【解】 (1)先求特征量

弹簧的倔强系数为



$$k=\frac{F}{\Delta x}=\frac{1}{5.0\times10^{-3}}=200\ \mathrm{N/m}$$

圆频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{200}{0.064}}\approx55.9\ \mathrm{rad/s}$$

振幅为

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=\sqrt{(4\times10^{-2})^2+0^2}=0.04\ \mathrm{m}$$

初相位为

$$\varphi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{-v_0}{\omega x_0}\right) = \mathrm{tg}^{-1}0 = 0$$

将特征量ω、A 和φ 的值代入标准方程

$$x = A\cos(\quad t + \quad)$$

得弹簧振子的振动方程为

$$\begin{aligned} x &= 0.04\cos(55.9t + 0) \\ &= 0.04\cos 55.9t \ \ \mathrm{m} \end{aligned}$$

(2) 此时的振幅为

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{0^2 + \frac{(111.8\times 10^{-2})^2}{55.9^2}} \approx 0.02\,\mathrm{m}$$

其初相位为

$$\boxed{\varphi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{-\mathrm{v}_0}{\omega x_0}\right) = \mathrm{tg}^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}}$$

则弹簧振子的振动方程为

$$\boxed{x = 0.02\cos(55.9t - \frac{\pi}{2})\ \mathrm{m}}$$

3、由谐振动方程求各量

【例】 一物体竖直悬挂在倔强系数为 k 的弹簧上做简谐振动。设振幅 $A = 0.24\mathrm{m}$，周期 $T = 4.0\mathrm{s}$ ，开始时在平衡位置下方0.12m处向上运动。求：(1)物体的运动方程；(2)物体在任意时刻的速度；(3)物体由初始位置运动到平衡位置上方0.12m处所需的最短时间；(4)物体在上述位置所受的弹力。设物体的质量为 $m = 1.0\mathrm{kg}$ 。

【解】 由题意物体做简谐振动，选向下为 x 轴正方向，设其运动方程为

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

(1) 由 $A = 0.24\mathrm{m}$ 和 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$，根据初始条件 $x_0 = 0.12\mathrm{m}$，$v_0 < 0$ 可得

$$0.24\cos\varphi = 0.12$$

$$-\frac{\pi}{2}\times 0.24\sin\varphi < 0$$

由此解出

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{1}{2}\text{ , }\varphi = \pm\frac{\pi}{3}}$$

因 $\sin\varphi > 0$ ， 故取$\varphi = \dfrac{\pi}{3}$。于是，可得物体的运动方程为

$$\boxed{x = 0.24\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3})\ \mathrm{m}}$$

(2)物体运动速度为

$$\boxed{\mathrm{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -0.12\pi\sin(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3})\ \mathrm{m/s}}$$

（3）***A***. 用解析法：

物体在平衡位置上方 0.12m 时，以$x = -0.12$m 代入运动方程，即得

$$-0.12 = 0.24\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3})$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3} = \pm\frac{2}{3}\pi$$

因所求时间为最短时间，物体到达该时刻应该向上运动，即

$$v = -0.12\pi\sin(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}) < 0$$

故

$$\boxed{\sin(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3})>0}$$

应取

$$\boxed{\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi}$$

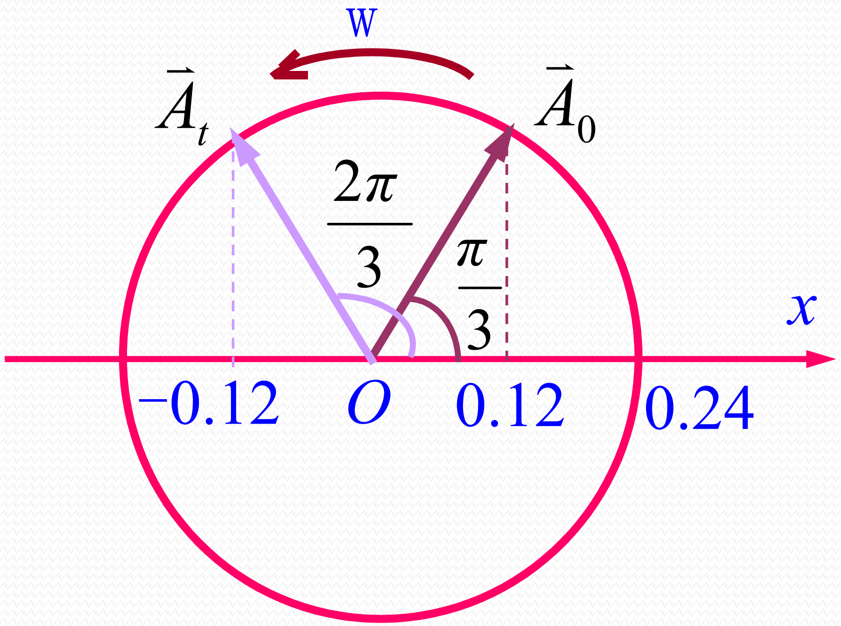
得

$$\boxed{t=(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{3})\Big/\frac{\pi}{2}=\frac{2}{3}\,\mathrm{s}}$$

B. 用旋转矢量法：

根据本题中$A=0.24\mathrm{m}$ 和 $\begin{cases}x_0=0.12\,\mathrm{m}\\ \mathrm{v}_0<0\end{cases},\begin{cases}x_t=-0.12\,\mathrm{m}\\ \mathrm{v}_t<0\end{cases}$

在旋转矢量图中不难确定初始时刻和所求 t 时刻旋转矢量 $\vec{A}_0$ 和 $\vec{A}_t$ 的位置。根据简单的几何关系即得它们与 x 轴的夹角分别为



$$\boxed{\varphi = \frac{\pi}{3} \qquad \varphi_t = \frac{2}{3}\pi}$$

$\varphi = \frac{\pi}{3}$ 即为振动的初相位，进而

$$\boxed{\Delta t = \frac{\varphi_t - \varphi}{\omega} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3})/\frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}\ \text{s}}$$

即为由初始位置到达所求位置所需的最短时间。

(4) 物体在振动过程中受重力 $m\vec{g}$ 和弹力 $\vec{F}$ 的作用，因其合力

$$\boxed{F + mg = -kx = -m\omega^2 x}$$

故

$$\boxed{F = -m\left(g + \omega^2 x\right)}$$

以 $m = 1.0\text{kg}$，$g = 9.8\text{m/s}^2$，$\omega = \dfrac{\pi}{2}$ 和 $x = -0.12\text{m}$ 代入，可得

$$\boxed{F = -9.5\ \text{N}}$$

负号表示弹力向上，弹簧在该位置仍处于拉伸状态。

4、谐振动的合成

【例】 某质点同时参与两个同方向、同频率的谐振动，其振动规律为

$$x_1 = 0.4\cos(3t+\frac{\pi}{3})\ \text{m}$$

$$x_2 = 0.3\cos(3t-\frac{\pi}{6})\ \text{m}$$

求：(1) 合振动的表达式；

(2) 若另一同方向、同频率的谐振动 $x_3 = 0.5\cos(\omega t+\varphi)$ m，当 φ 等于多少时，x_1、x_1、x_3 的合成振动振幅最大？又 φ 等于多少时，合成振动的振幅最小？

【解】 用旋转矢量法求解。

(1) 画出$t=0$ 时刻的振幅矢量 $\vec{A}_1$和$\vec{A}_2$，如图所示，两者夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$，故合振幅

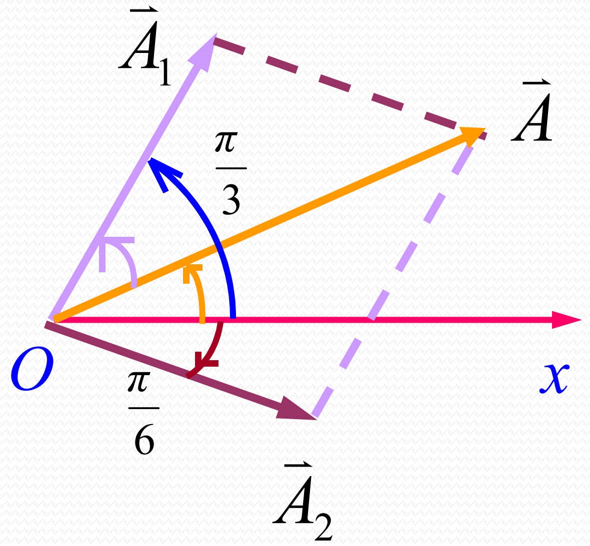
$$\boxed{A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}=0.5\,\mathrm{m}}$$

又

$$\boxed{\alpha=\mathrm{tg}^{-1}\frac{A_2}{A_1}=\mathrm{tg}^{-1}\frac{3}{4}=0.21\pi}$$

所以

$$\boxed{\varphi=\frac{\pi}{3}-\alpha=0.12\pi}$$



于是合振动的表达式为

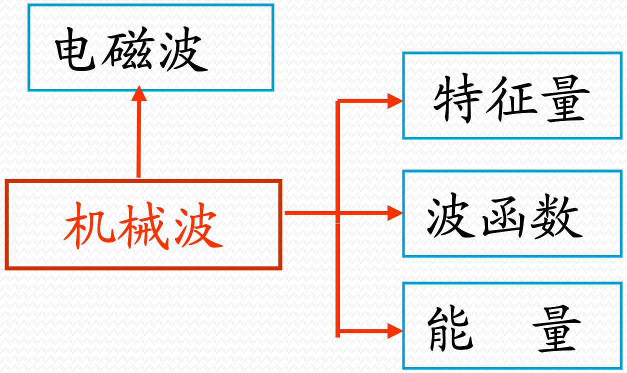
$$\boxed{x = 0.5\cos(\ 3t + 0.12\pi\ )\ \mathrm{m}}$$

(2) x_1、x_1、x_3 的合振幅最大，就是 x_3 与 x 的合振幅最大。按矢量图可知，$\vec{A}_3$ 应与 $\vec{A}$ 方向一致，故应该有 $\varphi_3 = \varphi = 0.12\pi$，此时总振幅为 $\sum_{i=1}^{3} A_i = A + A_3 = 1.0\ \mathrm{m}$。

x_1、x_1、x_3 的合振幅最小，就是 x_3 与 x 的合振幅最小。按矢量图可知，$\vec{A}_3$ 应与 $\vec{A}$ 反方向，故应该有 $\varphi_3 = \varphi \pm \pi = 1.12\pi$ 或 (-0.88π) 此时合振幅最小为 $\left|\sum_{i=1}^{3} A_i\right| = A - A_3 = 0$。

第8章　　波动学基础

结构框图：



重点：

波动与振动的关系　　　波的特征量

平面简谐波的波函数，波形曲线　　　波的能流密度

难点：

平面简谐波的波函数　　电磁波的产生和传播

内容提要

平面简谐行波

波—振动在空间的传播，介质中质点振动的集体效应

注意 $\begin{cases} \text{空间、时间上的周期性} \\ \text{沿波传播方向的滞后效应} \end{cases}$

1. 特征量

周期：　描述波的时间周期性，由波源决定

$$T = \frac{1}{\gamma}$$

波速 u：由介质决定，传播的是相位和能量

1. 特征量

波长：　描述波的空间周期性，与波源、介质均有关

$$\lambda = uT$$

2. 波函数（波动方程的积分形式）

参考点（原点）振动方程　　$y_o = A\cos(\omega t + \varphi)$

波动方程

$$y = A\cos[\omega(t \pm \frac{x}{u}) + \varphi] = A\cos(\omega t + \varphi \pm 2\pi\frac{x}{\lambda})$$

注意

(1) x: 离参考点的距离

(2) $\pm$: 由传播方向决定 $\begin{cases} \text{比参考点相位滞后 “-”} \\ \text{比参考点相位超前 “+”} \end{cases}$

(3) $y = y(x,t)$ 跑动的波形

x一定 $y = y(t)$ 振动曲线方程

t一定 $y = y(x)$ 波形曲线方程

3. 波的能量

媒质元 $\begin{cases} \text{非孤立系统，} E \text{不守恒} \\ E_p, \quad E_k \text{ 同步调变化} \end{cases}$

能流密度 $\quad \vec{I} = \dfrac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 \vec{u}$

4. 波的干涉

相干条件：振动方向相同；频率相同；相位差恒定。

强度分布：
$$I = I_1 + I_2 + \underline{2\sqrt{I_1\, I_2}\cos\Delta\varphi}$$ 干涉项

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi\frac{(r_2 - r_1)}{\lambda}$$

强弱条件：

$$\Delta\varphi = \begin{cases} \pm\, 2\pi k & \text{相长} \\ \pm(2k+1)\pi & \text{相消} \end{cases} \qquad k = 0,\ 1\ ,2\cdots$$

5. 驻波

形成驻波的条件；　驻波特点；　半波损失；

求驻波方程，　波腹 、波节位置

习题类型

- 波动问题
  - 由已知条件建立波动方程
    - 已知特征参量求波动方程
    - 据振动方程(或曲线)建立波动方程
  - 由波动方程求
    - 某些物理量(波长、频率、波速及波的特征量)
    - 其它方程
      - 某质点振动方程
      - 某时刻波形方程
      - 反射波波动方程(半波损失应用)
  - 相干波的干涉问题
    - 两相干波在某点的干涉问题
    - 驻波的有关计算
  - 波的能量问题
    - 波动能量特点
    - 波动能量计算

解题思路

1、由已知条件建立波动方程

这类习题主要有两部分内容，其中已知各特征量求波动方程的习题比较简单，只要将有关参量代入相应的标准化方程化简后即可。另一部分主要根据题设振动方程或给出的振动曲线来建立波动方程，这这部分习题的一般解体步骤如下：

(1) 画出某一波线，建立一维坐标系(坐标轴与波线重合)，并标出波速传播方向；

(2) 由题设条件写出坐标轴上某已知点(常取坐标原点)的振动方程：$y = A\cos(\omega t + \varphi)$；

(3) 在坐标轴上任取一点 P (距原点为 x)的振动方程，即将其中的时间t，减去(若落后)或加上(若超前)这一段时间Δt，就得该平面简谐波的波动方程。

2、由波动方程求某些物理量和其它方程

(1) 由波动方程求某些物理量比较容易，只要将题目所给方程写成标准形式，然后与标准波动方程相比较，就能找出相应的物理量。

(2) 由波动方程还可以求出波线上某点的振动方程和某一时刻的波形曲线方程，其方法是将该点的坐标或者已知的时刻分别代入波动方程并化简之。

(3) 由入射波的波动方程(或某一参考点，如原点的振动方程)还可以获得经某一点反射后的反射波的波动方程和任一点的合振动方程，其方法有两种：

第一种，直接“振动的叠加”法(这是一种由“振动”到“振动”的直接叠加法)。

第二种，间接“波的叠加”法(这是一种由“振动”到“波动”再到“振动”的间接叠加法)。

无论哪一种方法，关键在于理解波线上任意一点的振动

方程就是这一列波的波动方程。通常分三步计算：①由入射波的波动方程写出入射波在反射点 P 的振动方程；②根据反射面有无半波损失，写出反射波在 P 点的振动方程；③在反射波的波线上任取一点 x，根据波的转播方向，比较 x 点与 P 点的相位关系，写出反射波在 x 点的振动方程，即为反射波的波动方程。

3、相干波的干涉问题

这类习题主要包括判断与计算两相干波在某点干涉加强或减弱问题，以及两相干波相向转播形成驻波的有关计算问题。前者应首先判断是否符合相干条件，然后在同一坐标系中用同一时间起点写出两波的波动方程，求出该点两波振动的相位差，最后用干波的加强与减弱条件以及振动合成知识去判断与计算。对于驻波的习题，重点是根据驻波的特点，会确定与计算波节和波腹的位置。

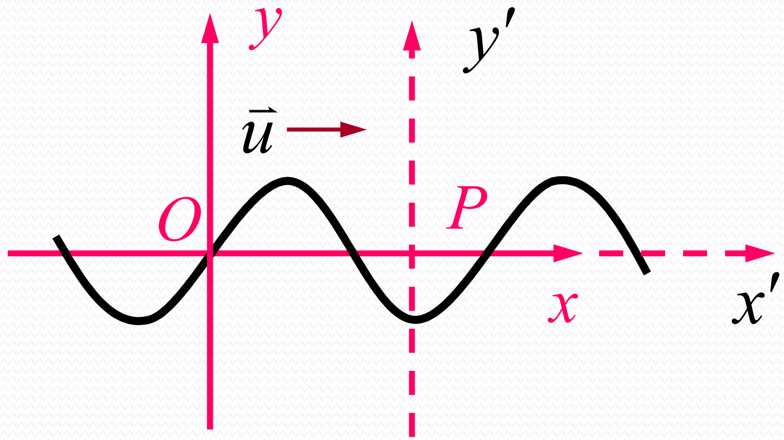
4、波的能量问题

这类习题的求解要注意搞清波动能量的特点以及它与振动能量特点的区别，在此基础上利用有关波动能量的一些公式，就可计算波动过程中的能量问题。

例题分析

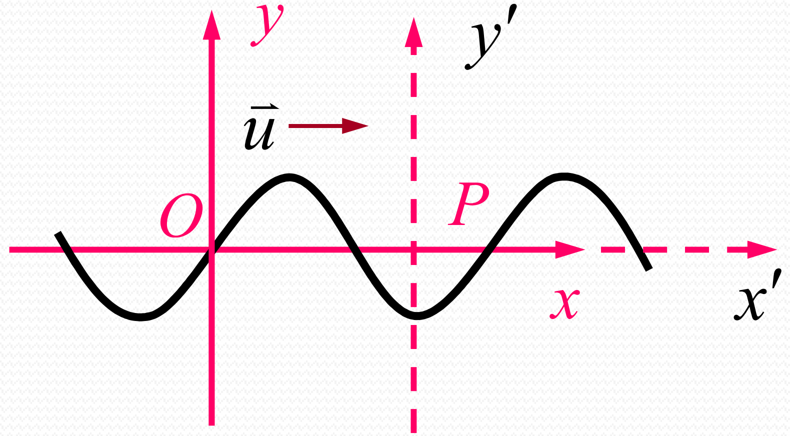
1、由已知条件建立波动方程

【例】 有一以速度 u 沿 x 轴正向传播的平面简谐波，其质点振动的振幅和圆频率分别为 A 和 ω，设某一瞬时的波形如图所示，并以此瞬时为记时起点，试分别以 O 和 P点坐标原点，写出波动方程。



【解】(1) 求以O点为坐标原点的波动方程，应先写出原点O 的振动方程，一般振动方程的标准形式为 $y = A\cos(\omega t+\varphi)$，其中$A$、$\omega$为已知量，初相 φ 由给定的初始条件确定，从图可知 $t = 0$时，

$$y_0 = A\cos\varphi$$
$$v_0 = -A\omega\sin\varphi < 0$$



所以得 $$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

于是原点O 处振动方程为

$$y_0 = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

以 O 为原点的波动方程为 $$\boxed{y = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\frac{\pi}{2}\right]}$$

(2) 求以 P 点为坐标原点的波动方程，先求 P 点的振动方程，由图可知， $t=0$ 时，

$$\boxed{\begin{aligned} y_0 &= A\cos\varphi = -A \\ \mathrm{v}_0 &= -A\omega\sin\varphi = 0 \end{aligned}}$$

所以得 $\boxed{\varphi = \pi}$

于是 P 点的振动方程为 $\boxed{y_P = A\cos(\omega t + \pi)}$

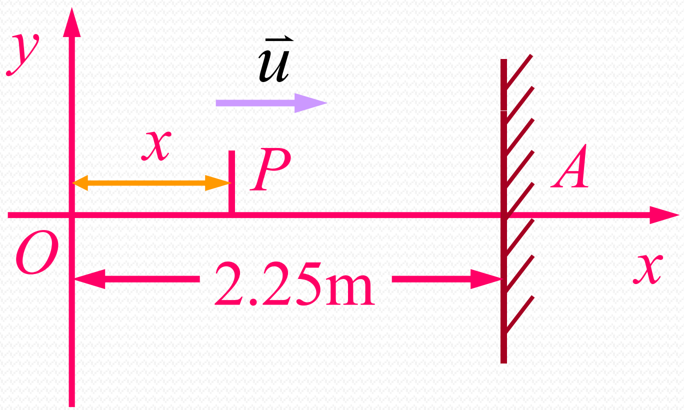
以 P 为原点的波动方程为 $$\boxed{y = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\pi\right]}$$

2、由波动方程求某些物理量和其它方程

【例】 沿 x 轴正向传播的平面简谐波方程为

$$y = 10^{-3}\cos\left[200\pi\left(t - \frac{x}{200}\right)\right]\mathrm{m}$$

在离原点为 2.25m 处的A 点发生反射，如图所示。若反射处为波节(反射后振幅不变)，求反射波的波动方程。



【解】 方法一：利用直接“振动的叠加”法。

本题已知入射平面简谐波的波动方程，因反射波波速的大小与入射波相同，因此不必再求波速，先确定波线上某点反射波的振动方程。由入射波波动方程，可得 O 点的振动方程为 $y_0 = 10^{-3}\cos(200\pi\, t)\,\mathrm{m}$，在波线上任选一点 P，考虑到 O 点的振动比 P 点的振动超前 $\Delta t = \dfrac{2\overline{OA}-x}{u} = \dfrac{2\times 2.25-x}{200} = \dfrac{4.50-x}{200}$ 。

又因反射点为波节，所以该点的反射波与入射波有 p相位差。因此反射波的波动方程为

$$\boxed{\begin{aligned} y &= 10^{-3}\cos\left[200\pi\left(t-\frac{4.50-x}{200}\right)-\pi\right]\mathrm{m} \\ &= 10^{-3}\cos\left[200\pi\left(t+\frac{x}{200}\right)+\frac{\pi}{2}\right]\mathrm{m} \end{aligned}}$$

方法二：利用间接“波的叠加”法。

由入射波的波动方程可得，入射波在 A 点的振动方程为 $y_A = 10^{-3}\cos(200\pi t - 2.25\pi)\,\mathrm{m}$。因反射点为波节，所以该点反射波与入射波有 π 的相位差。因此，反射波在 A 点的振动方程为

由反射波在 A 点的振动方程可确定反射波的波动方程，因反射波的波速 u 也等于200m/s，但方向与 x 轴相反。所以反射

$$\boxed{\begin{aligned} y_A &= 10^{-3}\cos(200\pi t - 2.25\pi - \pi) \\ &= 10^{-3}\cos(200\pi t - 3.25\pi)\,\mathrm{m} \end{aligned}}$$

波在波线上任一点 P 的振动要比 A 点的振动落后时间

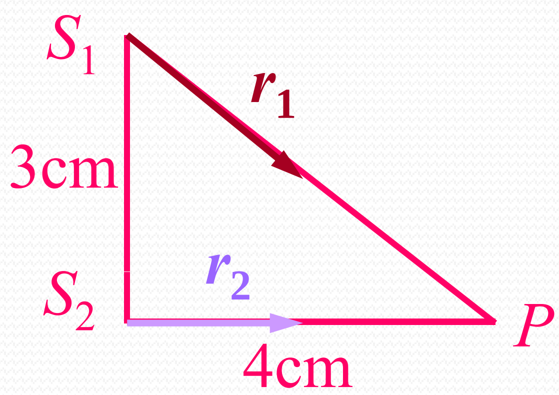
$$\Delta t = \frac{\left|\overline{AP}\right|}{u}$$

所以反射波的波动方程为

$$\boxed{\begin{aligned} y &= 10^{-3}\cos\left[200\pi\left(t-\frac{\left|\overline{AP}\right|}{200}\right)-3.25\pi\right] \\ &= 10^{-3}\cos\left[200\pi\left(t-\frac{2.25-x}{200}\right)-3.25\pi\right] \\ &= 10^{-3}\cos\left[200\pi\left(t+\frac{x}{200}\right)-5.5\pi\right] \\ &= 10^{-3}\cos\left[200\pi\left(t+\frac{x}{200}\right)+\frac{\pi}{2}\right]\ \mathrm{m} \end{aligned}}$$

3、相干波的干涉问题

【例】 已知两相干波源 S_1 和 S_2，频率 $\nu = 2.5\text{Hz}$，波速均为 $u = 10\text{m/s}$，振幅均为 5cm。波源 S_1 和 S_2 的初相分别为 $\varphi_1 = 0$，$\varphi_2 = \pi$ 。波源位置如图所示。求两列波传到 P 点时的振动方程。



【解】(1)先确定两波源的振动方程。

由已知条件可知，两振动的圆频率 $\omega=2\pi\nu=5\pi$，振幅 $A=5\text{cm}$。波源 S_1 和 S_2 的振动方程分别为

$$\boxed{\begin{aligned} y_{10} &= 5\cos 5\pi t \text{ cm} \\ y_{20} &= 5\cos(5\pi t+\pi) \text{ cm} \end{aligned}}$$

(2)先确定两列波的波动方程。

根据波源的振动方程，图2.2-3-1中所示的波源、P 点的位置。及波速 $u=10\text{m/s}$，可写出两列波的波动方程

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= 5\cos\left[5\pi\left(t-\frac{r_1}{10}\right)\right] \text{cm} \\ y_{20} &= 5\cos\left[5\pi\left(t-\frac{r_2}{10}\right)+\pi\right] \text{cm} \end{aligned}}$$

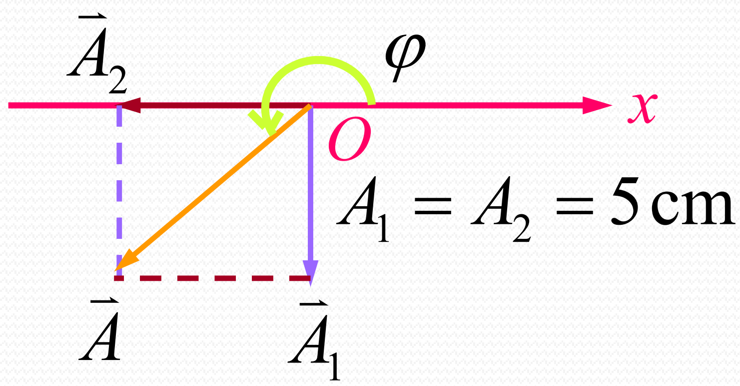
因，$r_1 = 5\text{m}$， $r_2 = 4\text{m}$ ，所以两列波传播到 P 点时的振动方程分别为

$$\boxed{\begin{aligned} y_{1P} &= 5\cos\left[5\pi\left(t-\frac{5}{10}\right)\right] = 5\cos\left(5\pi t-\frac{5\pi}{2}\right)\text{cm} \\ y_{2P} &= 5\cos\left[5\pi\left(t-\frac{4}{10}\right)+\pi\right] = 5\cos(5\pi t-\pi)\text{cm} \end{aligned}}$$

(3) P 点的合振动方程。

$$\boxed{y_P = y_{1P} + y_{2P} = A\cos(5\pi t + \varphi)}$$

由旋转矢量法(如图所示，可确定在 P 点的合振动的



$$A = 5\sqrt{2}\ \text{cm}$$

$$\varphi = \frac{5}{4}\pi\ \text{cm}$$

所以 P 点的振动方程为

$$y_P = 5\sqrt{2}\cos\left(5\pi t + \frac{5}{4}\pi\right)\ \text{cm}$$

4、波的能量问题

【例】 一平面简谐振的频率 $\nu = 500\text{Hz}$，在空气中以 340m/s 的速度传播。已知空气的密度别为 $1.3\times10^{-3}\text{g/cm}^3$，由此波到达人耳的振幅约 10^{-4} cm，试求耳中的平均能量密度和能流密度(即波强)。

【解】 由平均能量密度公式可得

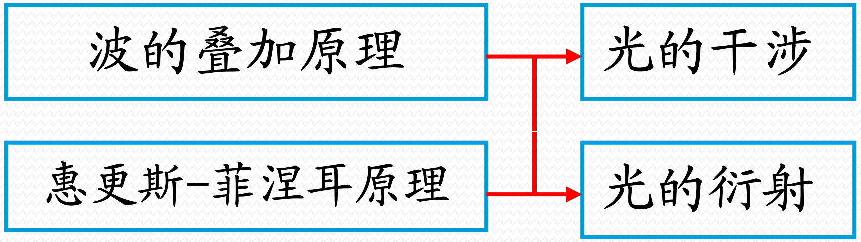
$$
\begin{aligned}
\overline{\varpi} &= \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\rho A^2 (2\pi\nu)^2 \\
&= \frac{1}{2}\times 1.3\times 10^{-3}\times 10^{3}\times \left(10^{-4}\times 10^{-2}\right)^2\times \left(2\pi\times 500\right)^2 \\
&\approx 6.41\times 10^{-6}\ \mathrm{J/m^3}
\end{aligned}
$$

其能流密度为

$$
\begin{aligned}
I &= \overline{\varpi}u = 6.41\times 10^{-6}\times 340 \\
&\approx 2.18\times 0^{-3}\ \mathrm{W/m^3}
\end{aligned}
$$

第四篇　波动光学

结构框图



重点：

惠更斯-菲涅耳原理，光程和光程差，杨氏双缝，劈尖，牛顿环，

单缝、光栅的夫琅和费衍射，

起偏和检偏，马吕斯定律，布儒斯特定律

难点：

光的空间相干性和时间相干性，光的衍射，双折射

第9章　光的干涉

内容提要

1. 干涉和衍射

1) 共同本质:

满足相干条件的波的叠加

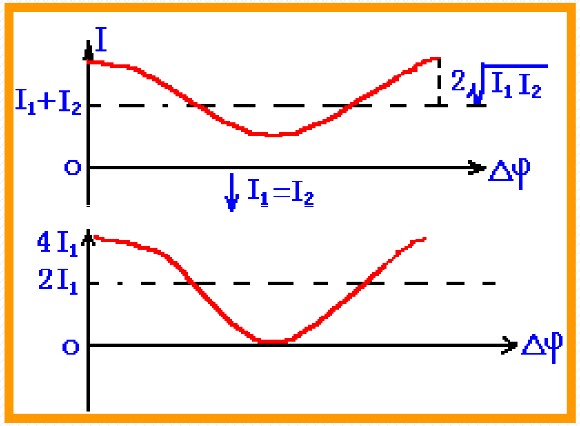
有限个分立的相干波的叠加 — 干涉
无限个子波相干叠加 — 衍射

2) 共同现象:

光强在空间非均匀、稳定分布

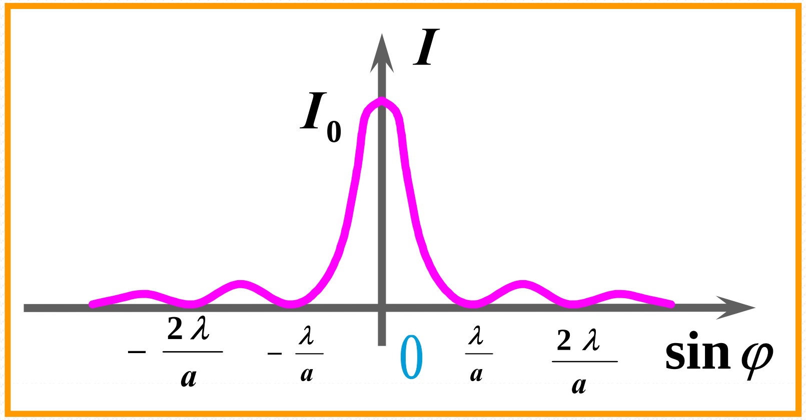
双光束干涉

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi$$



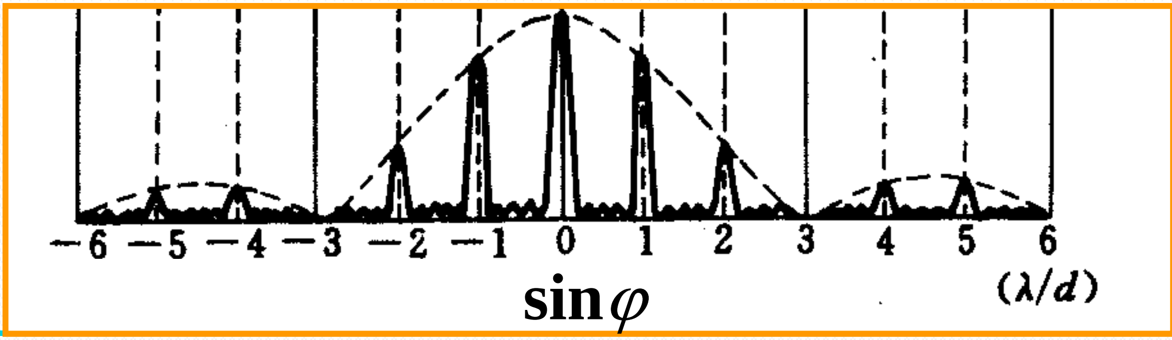
单缝衍射

$$I = I_o\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \qquad \alpha = \frac{\pi a \sin\varphi}{\lambda}$$



光栅衍射

$$I = I_o\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$



$$\alpha = \frac{\pi a \sin\varphi}{\lambda},$$

$$\beta = \frac{\pi d \sin\varphi}{\lambda}$$

3) 明暗纹条件

光程Δ（等效真空程）= 几何路程 × 折射率

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 + 2\pi\frac{\Delta}{\lambda} = \begin{cases} 2k\pi & \text{明} \\ (2k+1)\pi & \text{暗} \end{cases} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$$

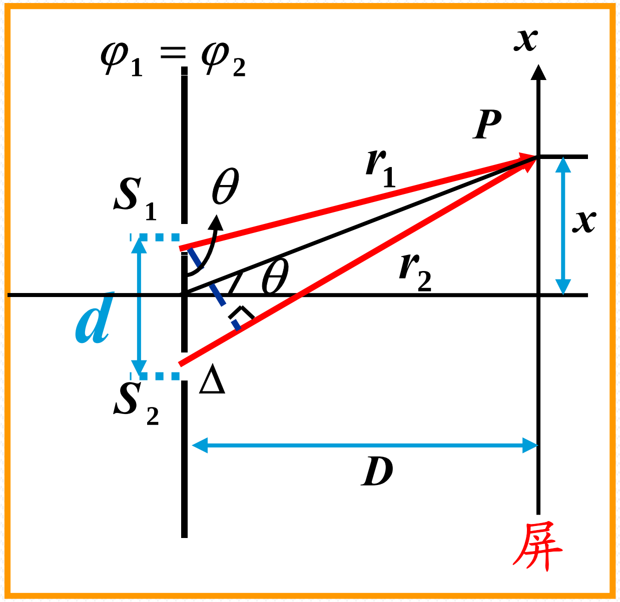
若 $\varphi_1 = \varphi_2$：

$$\Delta = \begin{cases} k\lambda & \text{明} \\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{暗} \end{cases} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$$

4）典型装置

用于具体问题得出不同计算式，弄清道理、掌握特点。

杨氏双缝干涉



$$\Delta = d\frac{x}{D}$$

$$x = \begin{cases} \pm\frac{kD}{d}\lambda & \text{明} \\ \pm(2k-1)\frac{D}{d}\cdot\frac{\lambda}{2} & \text{暗} \end{cases}$$

明 $k = 0,1,2,\cdots$

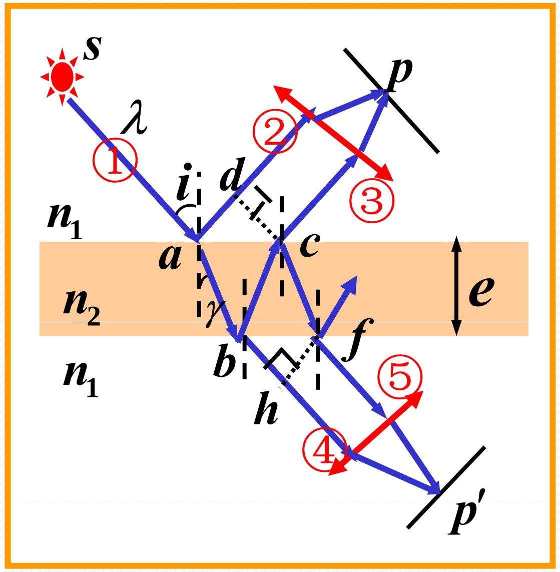
暗 $k = 1,2,\cdots$

k 取值与条纹级次一致

条纹间距： $\Delta x = \dfrac{D\lambda}{d}$

注意条纹的变化和演变 ⟶ 费涅耳双镜、洛埃镜……

薄膜干涉



$$\Delta_{反} = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \boxed{\frac{\lambda}{2}}$$

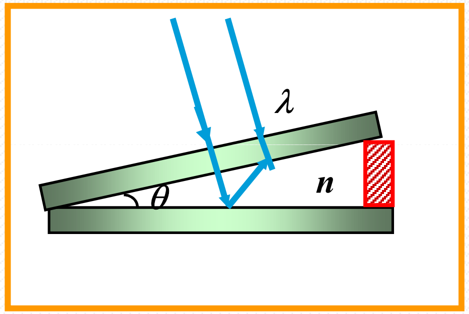
$$\Delta_{透} = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}$$

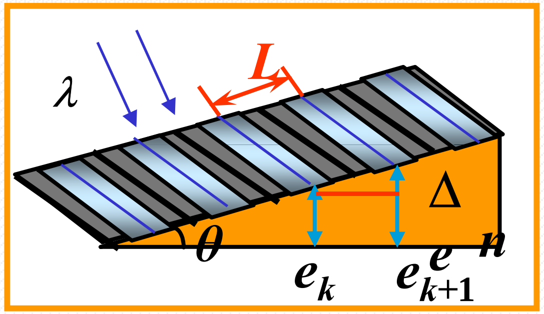
$\boxed{\frac{\lambda}{2}}$ 项：是否存在由具体情况决定

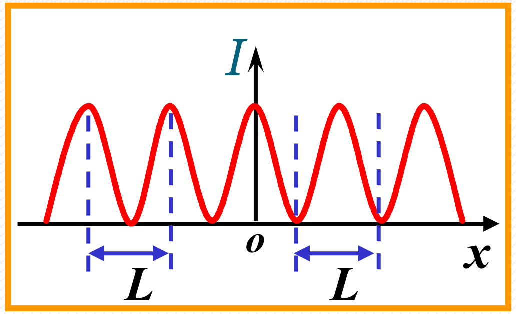
反射光和透射光明暗互补。

等厚干涉条纹形状和薄膜等厚线形状相同。

劈尖（单色、平行光垂直入射）







$$\Delta = 2ne + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda & \text{明} \quad k = 1、2\cdots \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} & \text{暗} \quad k = 0、1、2\cdots \end{cases}$$

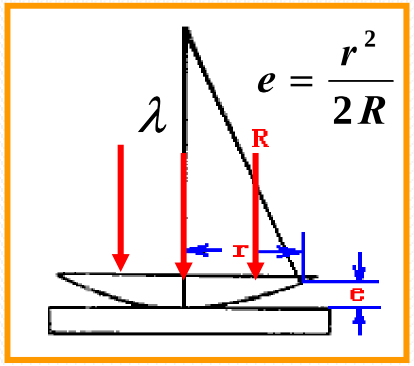
平行于棱边，明、暗相间条纹

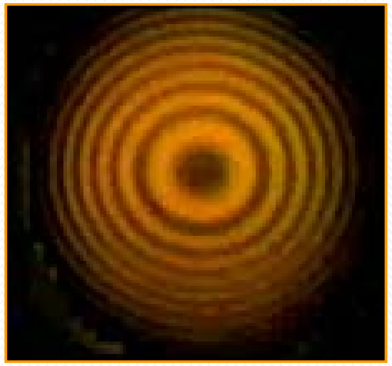
楔边处 $e = 0$ $\quad \Delta = \frac{\lambda}{2}$,为暗纹

相邻明（暗）纹对应薄膜厚度差： $\Delta e = \frac{\lambda}{2n}$

条纹宽度 $\quad L = \frac{\Delta e}{\sin\theta} = \frac{\lambda}{2n\sin\theta} \approx \frac{\lambda}{2n\theta}$

牛顿环（单色平行光垂直入射）



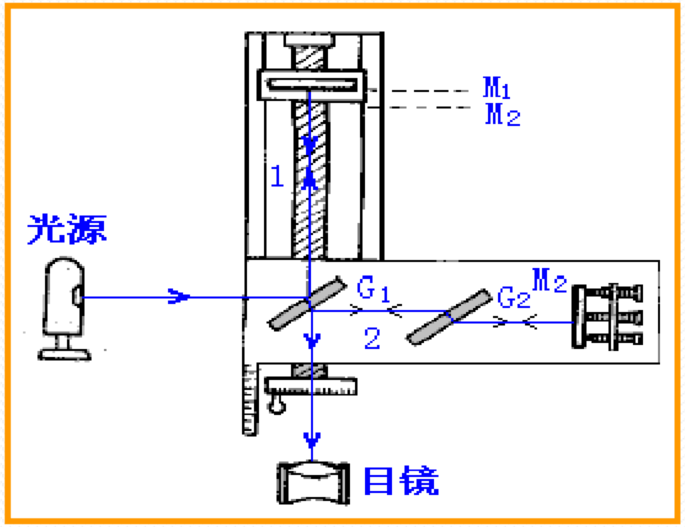


$$\Delta = 2ne + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda & \text{明} \quad k = 1、2、3\cdots \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} & \text{暗} \quad k = 0、1、2\cdots \end{cases}$$

条纹为以接触点为中心的明暗相间的同心圆环，条纹内疏外密

$$r = \begin{cases} \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2n}} & \text{明} \quad k = 1、2、3\cdots \\ \sqrt{\frac{kR\lambda}{n}} & \text{暗} \quad k = 0、1、2\cdots \end{cases}$$

迈克耳孙干涉仪



$$\Delta d = \Delta N \cdot \frac{\lambda}{2}$$

M_1垂直于M_2

$M_1 // M_2'$　　　　等倾干涉

M_2不严格垂直于 M_1

M_1不平行于M_2'　　　　等厚干涉

习题类型

光的干涉

- 干涉条纹静态分布问题
- 干涉条纹动态分布问题

解题思路

1、干涉条纹静态分布问题

这类习题比较简单，只要掌握了基本概念，熟记一些常用公式便能做到准确分析、求解。具体步骤一般为：

(1)明确题目所表述的物理内容是什么，给了何种实验装置，已知量有哪些，未知量有哪些，需要求解什么问题，并进而对确定的问题根据具体实验条件进行光的波动性质的分析；

(2)确定哪两束光相干，在什么地方相遇。计算两束光相干的光程差，并考虑几何路程、媒质折射率，以及光在媒质界面上反射时是否存在半波损失等问题；

(3)按照形成明暗条纹的条件，列出相应的公式进行运算。

2、干涉条纹动态分布问题

解这类习题时，关键要抓住引起条纹移动的原因是光程差的变化。具体有直接方法和间接方法：

(1)两种直接光程差法：

①跟踪某一特定级条纹(在杨氏双缝干涉中，一般为光程差为零的零级条纹，在光路中无任何附加媒质时，零级条纹也就是中央条纹)，分析判断它朝什么方向移动，移动了多少距离。

②固定视场中某一位置(在杨氏双缝干涉中，一般为中央条纹，即 $x=0$ 处)，观察有多少条纹移过此位置。

由干涉理论可知，每移动一条干涉条纹，其光程差变化一个波长，若条纹移过 N 个距离，则光程差变化 $\triangle\delta$ 为：

$$\boxed{\triangle\delta = N\lambda}$$

据此可以按上述两种方法直接讨论条纹变化情况。

(2)间接公式法：

固定视场中某一位置(如杨氏双缝干涉中的中央条纹)，根据题意分别列出条纹变动前后干涉加强(或减弱)的光程差公式，即列出原来光程差时该处条纹是几级明(或暗)条纹，现在光程差变化后该处又是几级明 (或暗)条纹。

例题分析

1、干涉条纹静态分布问题

【例】 空气中的水平肥皂膜 $n = 1.33$，厚 e=320nm，如果用白光垂直照射，问肥皂膜的反射光呈现什么颜色？

【解】 在白光的 400~760nm 波长范围内，只有反射光干涉加强的那些颜色的光才能在反射方向明显看到。

由于空气的折射率近于 1，满足薄膜干涉中 $n_1 < n > n_2$ 的条件，在反射方向应该附加 $\lambda / 2$ 的额外光程差，因而干涉加强条件为

$$\boxed{2ne + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)}$$

从而，加强光的波长

$$\boxed{\lambda = \frac{2ne}{k - \frac{1}{2}}}$$

【解】 在白光的400~760nm波长范围内，只有反射光干涉加强的那些颜色的光才能在反射方向明显看到。

由于空气的折射率近于1，满足薄膜干涉中 $n_1 < n > n_2$ 的条件，在反射方向应该附加 $\lambda/2$ 的额外光程差，因而干涉加强条件为

$$\boxed{2ne + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)}$$

从而，加强光的波长

$$\boxed{\lambda = \frac{2ne}{k - \frac{1}{2}}}$$

将 $n = 1.33$，e=320nm 代入上式，可得干涉加强光的波长：

$$\boxed{\begin{aligned} k = 1, \lambda_1 &= 4ne = 1700 \text{ nm} \\ k = 2, \lambda_2 &= 4ne/3 = 567 \text{ nm} \\ k = 3, \lambda_3 &= 4ne/5 = 341 \text{ nm} \end{aligned}}$$

在白光的波长范围内，只有 $\lambda_2 = 567$nm 黄绿光得到反射加强，所以肥皂膜呈现黄绿色。

2、干涉条纹动态分布问题

【例】 用很薄的云母片($n = 1.58$)覆盖杨氏双缝实验中的一条缝上，这是屏幕上的中央明纹中心为原来的第 7 级明纹中心所占据。已知入射光的波长 $\lambda = 550\ \text{nm}$，试求云母片的厚度为多少？

【解】 本题可利用跟踪某一特定级条纹的方法求解。

由干涉理论可知，中央明纹每移动一个条纹间距，光程差

【解】 本题可利用跟踪某一特定级条纹的方法求解。

由干涉理论可知，中央明纹每移动一个条纹间距，光程差的改变量为一个波长，本题中，因覆盖云母片使中央明纹移动了7 个条纹间距，即 $N=7$。所以光程差的改变量与波长的关系为

$$\boxed{\triangle\delta = 7\lambda}$$

设该云母片的厚度为 d，当一条狭缝上覆盖云母片后，由此而引起的光程差的改变量为

$$\boxed{\triangle\delta = nd - d = d(n-1)}$$

所以

$$\boxed{d(n-1) = 7\lambda}$$

即

$$\boxed{d = \frac{7\lambda}{n-1} = \frac{7\times 550\times 10^{-9}}{1.58-1} = 6.6\times 10^{-6}\ \mathrm{m} = 6.6\times 10^{-3}\ \mathrm{mm}}$$

第10章　光的衍射

内容提要

1、单缝夫朗和费衍射　（半波带概念）

平行光垂直入射

$$\Delta = a\sin\varphi = \begin{cases} 0 & \text{中央明纹} \\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{明} \\ k\lambda & \text{暗} \end{cases} \qquad k = \pm 1, \pm 2 \cdots$$

平行光垂直入射

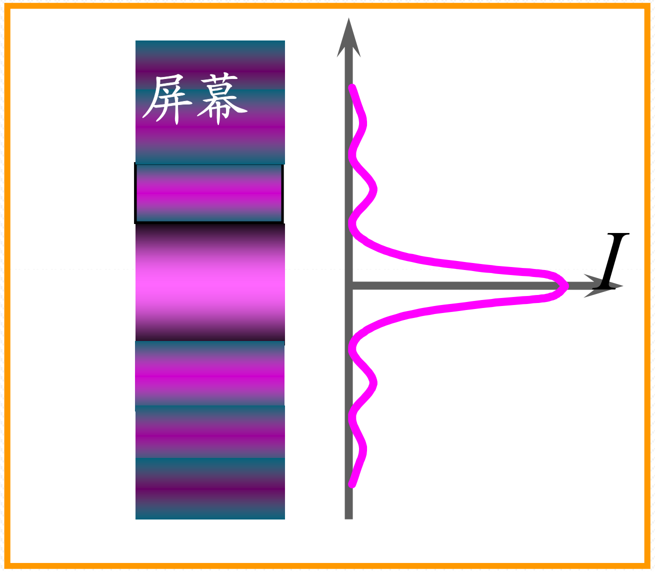
$$\Delta = a\sin\varphi = \begin{cases} 0 & \text{中央明纹} \\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{明} \\ k\lambda & \text{暗} \end{cases} \qquad k = \pm 1, \pm 2 \cdots$$

衍射条纹角宽度

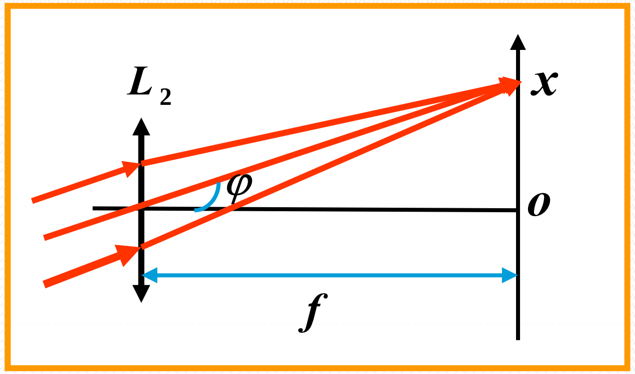
中央明纹 $\Delta\varphi = \dfrac{2\lambda}{a}$

其余明纹 $\Delta\varphi = \dfrac{\lambda}{a}$

中央明纹集中大部分能量，
明条纹级次越高亮度越弱.



衍射条纹线宽度



中央明纹 $\Delta x = \frac{2\lambda}{a} \cdot f$

其余明纹 $\Delta x = \frac{\lambda}{a} \cdot f$

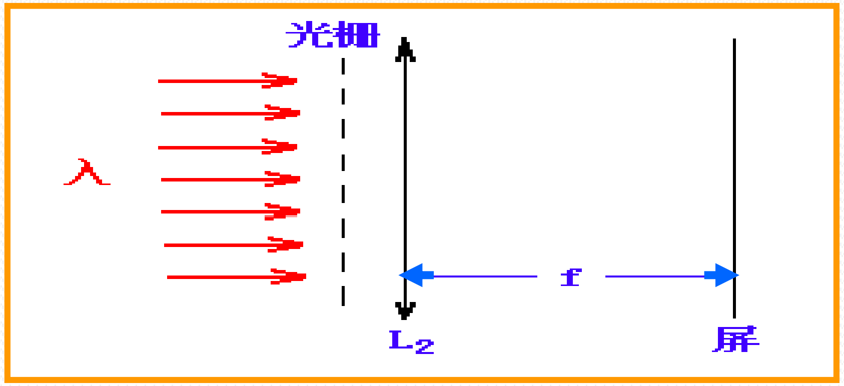
平行光非垂直入射

$\Delta = a\sin\theta + a\sin\varphi$

$\Delta = a\sin\theta - a\sin\varphi$

光栅夫朗和费衍射

光栅衍射是N缝干涉和N个单缝衍射的总效果



- 细窄明亮的主明纹

相邻主明纹间较宽暗区

（N-1条暗纹，N-2条次极大）

- 光栅常数 d

- 光栅公式 $d\sin\varphi = \pm k\lambda \quad (k = 0, 1, 2\cdots)$

- 缺级 $\begin{cases} d\sin\varphi = k\lambda \\ a\sin\varphi = k'\lambda \end{cases}$ $\quad k = \dfrac{d}{a}k' \quad (k' = \pm 1, \pm 2\cdots)$

- 最高级次 $k_m < \dfrac{d}{\lambda}$

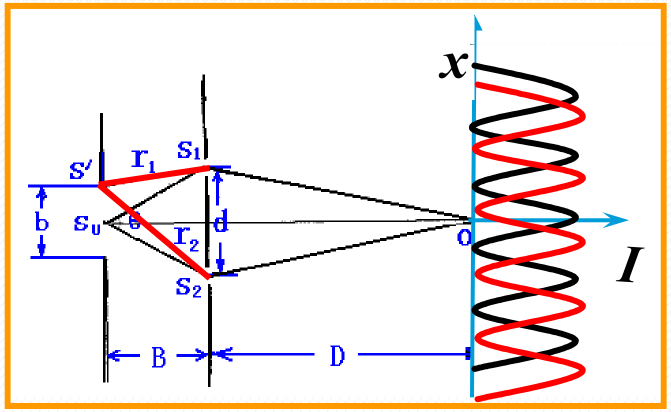
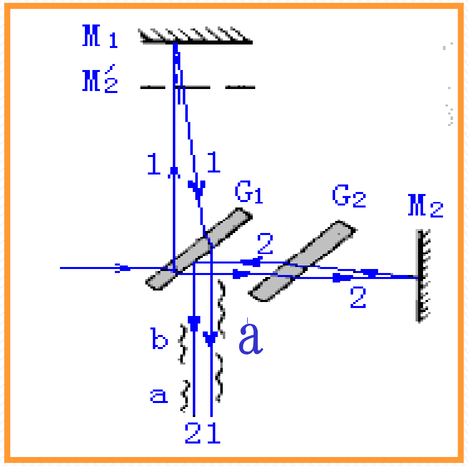
- 单缝中央明纹区主明纹条数: $2\left(\dfrac{d}{a}\right)_{\text{进整}} - 1$

- 白光入射中央零级主明纹为白色，其余各级为彩色光谱，高级次重叠

5）光学仪器分辨率

$$\Delta\varphi = 1.22\frac{\lambda}{D} \qquad \frac{1}{\Delta\varphi} = \frac{1}{1.22}\frac{D}{\lambda}$$

6）光的空间相干性和时间相干性

<table>
<tr><td></td><td>空间相干性</td><td>时间相干性</td></tr>
<tr><td>比较</td><td>波源线宽度对干涉条纹的影响，反映扩展光源不同部分发光的独立性

</td><td>波列长度对干涉条纹的影响，反映原子发光的断续性

</td></tr>
</table>

习题类型

光的衍射

- 衍射条纹静态分布问题
- 衍射条纹动态分布问题

解题思路

这类习题，重点在于掌握单缝衍射和光栅衍射的条纹分布规律，主要涉及到波动性质的几个方面的量值关系，如衍射条纹的位置、宽度、级数、光栅常数、光波波长、缺级现象、谱线重叠现象以及一些动态分布问题。

例题分析

【例】 单缝宽 $a = 0.5\text{mm}$，屏距缝 $D = 100\text{cm}$，如单色平行光垂直照射单缝，则在屏上形成衍射条纹；若在离屏上中央明条纹中心距离为 1.5mm 处的 P 点为一亮纹，求：

(1) 入射光的波长；

(2) P 点条纹的级数和这条纹对应的衍射角；

(3) 狭缝处的波面可分为几个半波带；

(4) 央明条纹的宽度。

【解】(1) 由单缝衍射的条件：

$$a\sin\varphi = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

因为 $\sin\varphi = \dfrac{x}{D}$，所以

$$\lambda = \frac{2ax}{(2k+1)D} = \frac{2\times 0.5\times 0.15}{(2k+1)100} = \frac{1.5\times 10^{-4}}{(2k+1)}\ \text{cm}$$

当 $k=1$ 时，

$$\lambda = 0.5\times 10^{-4}\ \text{cm} = 500\ \text{nm}$$

当 $k=2$ 时，

$$\lambda = 0.3\times 10^{-4}\ \text{cm} = 300\ \text{nm}$$

因为 k 越大得到的波长越小，所以当 $k\geq 2$ 时，求出的均不在可见光范围。又因 P 点是亮纹，所以入射光的波长一定是 500nm。

(2) 因为 P 点的明纹对应的 k 值等于 1，所以是第 1 级明条纹，这一明条纹对应的衍射角可由明条纹的条件

$$a\sin\varphi = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

得出。因为 $k=1$，所以有

$$a\sin\varphi = \frac{3}{2}\frac{\lambda}{a} = 1.5\times10^{-3}$$

$$\varphi = 0.086°$$

(3) 狭缝处的波面所分的半波带数和明条纹对应的级数关系为

$$\text{半波带数} = 2k+1$$

因为 $k=1$，所以狭缝处的波面可分为 3 个半波带。

(4) 中央明纹的宽度为左右第 1 暗条纹间距离

$$\Delta l_{\text{中央}} = 2\frac{D}{a}\lambda = \frac{2\times100\times5\times10^{-5}}{0.05} = 0.2\ \text{cm} = 2\ \text{mm}$$

【例】 波长 600mm 的单色光垂直入射在一光栅上，第一、第二级明纹分别出现在 $\sin\varphi = 0.20$ 与 $\sin\varphi = 0.30$ 的方向，第四级缺级。试求：(1) 光栅常数是多少？(2) 光栅上狭缝可能的最小宽度有多大？(3) 按上述要求选定的 a、b 值，试求屏上实际呈现的全部级数。

【解】(1) 由光栅公式 $(a+b)\sin\varphi = k\lambda$，将第二级(或第三级)明纹的数据代入，可得光栅常数

$$a+b=\frac{k\lambda}{\sin\varphi}=\frac{2\times 600\times 10^{-9}}{0.20}=6.0\times 10^{-4}\ \text{cm}$$

(2) 设第四级缺级时光栅的第四级明纹出现在单缝衍射的第 k 级暗纹处，因此，由光栅方程和单缝暗纹公式有方程

$$(a+b)\sin\varphi = 4\lambda$$
$$a\sin\varphi = k\lambda$$

解以上两个联立方程可得

$$\frac{a+b}{a}=\frac{4}{k}$$
$$a=\frac{k}{4}(a+b)$$

因为 k 必须是整数，且必须 $k<4$，于是有

$$\boxed{\begin{aligned} k=1,\ a&=\frac{a+b}{4}=1.5\times10^{-4}\ \text{cm}\\ k=2,\ a&=\frac{a+b}{2}=3.0\times10^{-4}\ \text{cm}\\ k=3,\ a&=\frac{3(a+b)}{4}=4.5\times10^{-4}\ \text{cm}\end{aligned}}$$

取其最小者，$a=1.5\times10^{-4}$cm。

(3) 由于最高级别条纹对应的衍射方向必须满足 $\sin\varphi<1$，由光栅方程 $(a+b)\sin\varphi=k\lambda$ 可得最高条纹级别

$$\boxed{k<\frac{a+b}{\lambda}=10}$$

所以，除第四和第八级缺级外，屏上出现的全部级别为

$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm5,\ \pm6,\ \pm7,\ \pm9$，共 15 条明纹。

（三）必须掌握的基本方法：

1）微元分析和叠加原理

$$\mathrm{d}q < \begin{matrix} \mathrm{d}\vec{E} \rightarrow \vec{E} \\ \mathrm{d}U \rightarrow U \end{matrix} \qquad \mathrm{d}I < \begin{matrix} \vec{B} \\ \vec{P}_m \end{matrix} \qquad \mathrm{Id}\vec{l} \rightarrow \vec{F};$$

$$\mathrm{d}S \rightarrow \varphi_e, \varphi_m; \qquad \mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \rightarrow A;$$

2）用求通量和环流的方法描述空间矢量场，求解具有某些对称性的场分布。

用静电场的高斯定理求电场强度;

用稳恒磁场的安培环路定理求磁感应强度;

迁移到引力场……

3）类比方法

动量、角动量、能量守恒条件的比较

静电场—稳恒电场;

静电场—感生电场;

极化—磁化;

电容 C – 自感 L – 互感 M 计算;

电场能 W_e – 磁场能 W_m

典型电荷的电场分布 – 典型电流的磁场分布

机械振动 – 电磁振荡

机械波 – 电磁波 ……

4） 模型方法

从实际问题——抽象出模型——解决问题

——修正模型——解决问题……趋近事物本质

导体中自由电子－“电子气”；

电介质分子 － 电偶极子 ；

磁介质分子 －分子电流;

点电荷、均匀带电球面、无限长带电直线、

无限大带电平面…...

无限长载流直线、无限大载流平面、长直螺旋管

简谐振动 简谐波 ……

（三）了解实际应用

静电屏蔽、磁屏蔽

尖端放电

电子感应加速器、涡流

磁聚焦

产生匀强电场、匀强磁场的方法

霍尔效应分辨半导体类型

……

祝考试成功！