2018-2019学年高数A(上)填空题.

一.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{3}{x})^x = \underline{\ e^{-3}\ }$.

解: $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{3}{x})^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+\frac{-3}{x})^{-\frac{x}{3}}\right]^{x\cdot(-\frac{3}{x})} = e^{-3}$

■第2个重要极限的考查.

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$. 即遇到$1^\infty$型的极限.可以考虑取对数利用洛必达法则,也可以整理成重要极限的形式.

此外,对于第1个重要极限.注意 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, 但 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1) = \underline{\ \frac{1}{4}\ }$.

解: $\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1 = \frac{\sqrt{n^2+k}-n}{n} = \frac{k}{n\cdot(\sqrt{n^2+k}+n)}$.

$2n \le \sqrt{n^2+k}+n \le 2\sqrt{n^2+n}$. 故 $\frac{k}{2n\cdot\sqrt{n^2+n}} \le \frac{k}{n(\sqrt{n^2+k}+n)} \le \frac{k}{2n^2}$

$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{2n\sqrt{n^2+n}} = \frac{(1+n)n}{4n\sqrt{n^2+n}}$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2} = \frac{(1+n)n}{4n^2}$.

即 $\frac{(1+n)n}{4n\sqrt{n^2+n}} \le \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n(\sqrt{n^2+k}+n)} \le \frac{(1+n)n}{4n^2}$. ,由夹逼定理可得为$\frac{1}{4}$.

■夹逼定理应用的考查.

需要对原式进行等价变形或放缩.进而由夹逼定理判断极限.

此外.形如. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.极限的计算有时可转化为定积分计算.

如. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\sqrt{n^2-k^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\int_0^x \cos t^2\,dt}{\ln(1+x^5)}=$ $\underline{\dfrac{1}{10}}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\int_0^x\cos t^2\,dt}{x^5}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{5x^4}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(x^2)^2}{5x^4}=\dfrac{1}{10}$.

等价无穷小代换、洛必达法则及变限积分求导的考查

常用的等价无穷小代换：$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim\arcsin x\sim e^x-1$

$\sim\ln(1+x)$ $(x\to 0)$.

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$，$2^x-1\sim\ln 2\cdot x$. $(x\to 0)$

变限积分求导：$\left[\int_{a(x)}^{b(x)}f(t)\,dt\right]'=f[b(x)]\cdot b'(x)-f[a(x)]\cdot a'(x)$.

4. $xy+e^y+x^2-e=0$ 上点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $\underline{y=-\frac{1}{e}x+1}$.

解：两边关于 x 求导 $1\cdot y+x\cdot y'(x)+e^y\cdot y'(x)+2x=0$. 代入 $(0,1)$.

即 $1+0\cdot y'(0)+e\cdot y'(0)+2\cdot 0=0$ 得 $y'(0)=-\frac{1}{e}$. 为切线斜率.

故切线方程为 $y-1=-\frac{1}{e}(x-0)$. 即 $y=-\frac{1}{e}x+1$

隐函数求导及切线方程的考查.

隐函数求导注意不要漏项，如上例中 xy、e^y 关于 x 的求导.

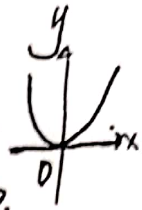
5. $y=x^2e^{-x}$ 的上凸区间是 $\underline{(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})}$.

解：$y'=(2x-x^2)e^{-x}$. $y''=(2-4x+x^2)e^{-x}$. 则由 $y''=0$. 得

$x_1=2-\sqrt{2}$，$x_2=2+\sqrt{2}$.

x	$(-\infty,2-\sqrt{2})$	$2-\sqrt{2}$	$(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$	$2+\sqrt{2}$	$(2+\sqrt{2},+\infty)$
y''	+	0	−	0	+
y'	↗		↘		↗

函数凹凸性的考查



上凹函数：$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$. 如：$y=x^2$ 图像

由图像易知，曲线上每点切线的斜率是 $(-\infty\to 0\to+\infty)$ 单调递增的.

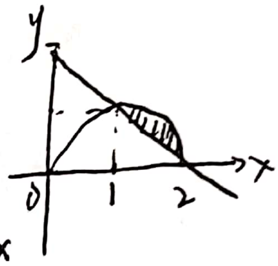
而进一步由单调充要条件，可知 $f(x)$ 上凹 $\Leftrightarrow f'(x)$ 单增 $\Leftrightarrow f''(x)\ge 0$.

同理上凸函数．$f(x)$ 上凸 $\Leftrightarrow f'(x)$ 单减 $\Leftrightarrow f''(x)\le 0$.

因此，一般确定函数的凹凸区间，通常是求出二阶导数为0的点或不可导点，然后由这些点将区间分隔，进而分别判定 $f''(x)$ 的正负性.

此外，若求拐点 注意是 $(x_0, f(x_0))$. 而非 $x=x_0$.

6. 由 $x^2+y^2\le 2x$ 与 $y\ge 2-x$ 所确定的平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为 $\frac{\pi}{3}$.



解: $V=\pi\int_1^2 y_{圆}^2\,dx-\pi\int_1^2 y_{直}^2\,dx$

$=\pi\int_1^2\left[(2x-x^2)-(2-x)^2\right]dx=\pi\int_1^2(-2x^2+6x-4)\,dx$

$=\pi\cdot\left(-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right)\Big|_1^2=\frac{\pi}{3}$.

旋转体体积的考查.(定积分几何应用的考查，还有面积、弧长等).

$V_{旋}=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$. 此外若曲线为参数方程时 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $\alpha\le t\le\beta$.

则 $V_{旋}=\pi\int_\alpha^\beta \psi^2(t)\cdot d\varphi(t)=\pi\int_\alpha^\beta \psi^2(t)\varphi'(t)\,dt$.

如：求 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ 绕 x 轴一周的体积.

解: $V=\pi\int_0^{2\pi}[a(1-\cos t)]^2\cdot a(1-\cos t)\,dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt$

$=8\pi a^3\int_0^{2\pi}\sin^6\frac{t}{2}\,dt\overset{u=\frac{t}{2}}{=\!=}16\pi a^3\int_0^{\pi}\sin^6 u\,du$

$=32\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 u\,du=32\pi a^3\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=5\pi^2a^3$

7. $\int \frac{e^x(1+e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \underline{\arcsin e^x - \sqrt{1-e^{2x}}+C}$.

解：原式 $=\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx+\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}de^x+\int \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-e^{2x}}}de^{2x}$

$=\arcsin e^x-\sqrt{1-e^{2x}}+C$.

不定积分第一换元法（凑微分法）的考查.

利用"凑微分法"时特别注意一些系数的变化. 此外，不定积分最后结果不要漏了积分常数 C

8. $\int_0^2 (x+4)\sqrt{2x-x^2}\,dx$

解：原式 $\xlongequal{x=t+1} \int_{-1}^1 (t+5)\sqrt{2t+2-(t+1)^2}\,dt=\int_{-1}^1(t+5)\sqrt{1-t^2}\,dt$

$\xlongequal{\text{奇偶性}} 0+2\int_0^1 5\sqrt{1-t^2}\,dt=10\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt=10\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{5}{2}\pi$

定积分换元法及一些性质的考查.

当 $-f(x)=f(-x)$. $\int_{-a}^a f(x)dx=0$.

当 $f(x)=f(-x)$, $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$.

当 $f(x)=f(x+T)$, $\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$. $\int_a^{a+nT}f(x)dx=n\int_0^T f(x)dx$.

当出现 $\sqrt{ax^2+bx+c}$，可以考虑配方成 $\sqrt{u^2+A^2}$，$\sqrt{u^2-A^2}$ 或 $\sqrt{A^2-u^2}$ 的形式进而可以考虑换元处理，如本例 $\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{-(x^2-2x+1)+1}=\sqrt{1-(x-1)^2}$. 因此可先考虑设 $t=x-1$，进而得到关于 t 的定积分，且利用奇偶性，简化计算.

9. $I=\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \underline{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$.

解：$I \xlongequal{x=\cos t} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-\sin t\, dt}{(1+\cos^2 t)\cdot \sin t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\sec^2 t+1} dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\tan^2 t} d\tan t \xlongequal{u=\tan t} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+u^2} du$

$= \lim_{s\to+\infty} \int_0^s \frac{1}{2[1+(\frac{\sqrt{2}}{2}u)^2]} du = \lim_{s\to+\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^s \frac{1}{1+(\frac{\sqrt{2}}{2}u)^2} d(\frac{\sqrt{2}}{2}u)$.

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{s\to+\infty} \arctan \frac{\sqrt{2}}{2}u \Big|_0^s = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

■ 反常积分计算的考查.

$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{u\to+\infty} \int_0^u f(x)dx$. 无穷积分.

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u\to a^+} \int_u^b f(x)dx$ 瑕积分 ($x=a$ 是瑕点).

当反常积分收敛时，计算基本和定积分一致（包括换元法、性质、N-L公式运用）.

10. $y'=(x+y+1)^2$ 的通解. $\underline{\arctan(x+y+1)=x+C}$.

解：令 $u=x+y+1$，则 $du=dx+dy$. $\frac{du}{dx}=1+\frac{dy}{dx}=1+u^2$. 分离变量得

$\frac{1}{1+u^2}du = dx$ 两边积分得 $\int \frac{1}{1+u^2}du = \int 1\, dx$. 即 $\arctan u = x+C$.

回代 得隐式通解. $\arctan(x+y+1)=x+C$.

■ 常微分方程通解的考查.

① 分离变量法：有时需通过 如 $u=\frac{y}{x}$, $u=xy$, $u=x+y$ 等变换化为可分离变量方程 $\frac{dy}{dx}=p(x)Q(y)$. 进而利用 $\frac{dy}{Q(y)}=p(x)dx$. 两边积分求解. 此时注意讨论 $Q(y)=0$ 是否含解的问题.

② 降阶法：i) $y''=f(x,y')$，令 $p(x)=y'$ 化为 $p'(x)=f(x,p)$.

ii) $y''=f(y,y')$ 令 $g(y)=y'$，化为 $g\cdot\frac{dg}{dy}=f(y,p)$.

③ 常数变易法. i) 对于一阶. $y'+p(x)y=Q(x)$

先求 $y'+p(x)y=0$ 通解. $y=\varphi(x,C)$；其次设 $y=\varphi(x,C(x))$.

代入原方程，得到关于 $C(x)$ 的微分方程，通常为 $C'(x)=g(x)$.

只需积分即可，最后求得通解.

此外，对于一阶微分方程的求解时，如 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 不易求解时，

可考虑 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,y)}$ 进行求解.

ii) 对于二阶. $y''+p(x)y'+g(x)y=f(x)$.

先求 $y''+p(x)y'+g(x)y=0$ 的通解. $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$.

其次由 $\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0 \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x) \end{cases}$ 求出 $C_1'(x)$ 和 $C_2'(x)$，进而积分得 $C_1(x)$, $C_2(x)$.

最后可得非齐次通解.

④ 刘维尔公式. 已知 $y_1(x)\neq 0$ 是 $y''+p(x)y'+g(x)y=0$ 的解，则

与之线性无关解，可得 $y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)dx}dx$. 进而

齐次通解为 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$. $(C_1,C_2\in R)$

⑤ 特征值法和待定系数法.（常系数）.

$y''+py'+gy=f(x)$. $(p,g\in R)$.

i) 求 $y''+py'+gy=0$ 的通解. 由特征方程 $r^2+pr+g=0$. 求特征根.

当 $\Delta>0$，有两不同实根 r_1,r_2，则 $y_{齐通}=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$.

当 $\Delta=0$，有两个相同实根 $r_1=r_2=r$，则 $y_{齐通}=C_1e^{rx}+C_2xe^{rx}$.

当 $\Delta<0$，有一对共轭复根 $r_1=\alpha+\beta i$, $r_2=\alpha-\beta i$，则 $y_{齐通}=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

ii) 求 $y''+py'+qy=f(x)$ 的一个特解.

★当 $f(x)=e^{\lambda x}(a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m)$ 时.

设特解 $y^*_{非特}=e^{\lambda x}\cdot x^k(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)$.

其中,当 λ 不是特征根时 $k=0$,当 λ 是单根时 $k=1$,当 λ 是重根时 $k=2$.

★当 $f(x)=e^{\alpha x}[A_m(x)\cos\beta x+B_n(x)\sin\beta x]$ 时.

设特解 $y^*_{非特}=e^{\alpha x}\cdot x^k[Q_l(x)\cos\beta x+R_l(x)\sin\beta x]$. $l=\max\{m,n\}$.

其中当 $\alpha+\beta i$ 是特征根时 $k=1$,当 $\alpha+\beta i$ 不是根时,$k=0$.

对于二阶,一般 k 只能取0或1.(出现共轭复根时的情况).

iii). $y_{非齐通}=y_{齐通}+y^*_{非齐特}$

此外,当 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ 时,即 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 形式不一致时,

可以分别求 $y''+py'+qy=f_1(x)$ 和 $y''+py'+qy=f_2(x)$ 的

特解 y_1^* 和 y_2^*,则 $y''+py'+qy=f_1(x)+f_2(x)$ 的一个特解为 $y^*=y_1^*+y_2^*$.

例 $y''-2y'+2y=x^2+2e^x\cos^2\frac{x}{2}$. 写出其特解形式.

解: $r^2-2r+2=0$. 得 $r_1=1+i$, $r_2=1-i$.

$f(x)=x^2+2e^x\cos^2\frac{x}{2}=x^2+e^x+e^x\cos x=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$.

对于 y_1^*, $f_1(x)=x^2e^{0\cdot x}$. 由于0不是特征值,故设 $y_1^*=e^{0\cdot x}\cdot x^0\cdot(b_0+b_1x+b_2x^2)$.

对于 y_2^*. $f_2(x)=e^x\cdot 1$ 由于1不是特征值,故设 $y_2^*=e^x\cdot x^0\cdot c_0$.

对于 y_3^*. $f_3(x)=e^x\cos x$. 由于 $1+i$ 是特征值,故设 $y_3^*=e^x\cdot x^1\cdot(d_0\cos x+k_0\sin x)$.