北京邮电大学 2018-2019 学年第一学期

《数学分析（上）》期末考试试题（A）参考解答

考试注意事项：学生必须将答题内容写在答题纸上,写在试题纸上一律无效

一. 填空题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 答：0

2. 答：$\dfrac{1}{\ln 2}$

3. 答：C

4.答：$-\dfrac{1}{12}$

5. 答：$\dfrac{x^3}{3}\ln x-\dfrac{1}{9}x^3+C$

6.答：$-\tan x$

7.答：$f'(1)=-4$

8. 答：$\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi$

9. 答：发散

10.答：$x=\dfrac{y}{2}\left(y^2-1\right)$

二（12 分）.（1）确定 a,b 的值，使得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt}{bx-\sin x}=1$。

解：由洛必达法则 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt}{bx-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{b-\cos x}=1$，

因为上式分子为 $x\to 0$ 时的无穷小量，

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(b-\cos x\right)=0, b=1$。

此时 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{1-\cos x}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}=\dfrac{2}{\sqrt{a}}=1$，

所以 $a=4.$

（2）已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\int_{-\infty}^{c}xe^{2x}dx$，求 $c.$

解：左边 $=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{x+c}{x-c}-1\right)\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{2c}{x-c}\right)\right\}=e^{2c}.$

右边 $=\dfrac{1}{2}\left[xe^{2x}\Big|_{-\infty}^{c}-\int_{-\infty}^{c}e^{2x}dx\right]$

$=\int_{-\infty}^{c}xe^{2x}dx=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{c}xde^{2x}=\dfrac{1}{2}\left(ce^{2c}-\dfrac{1}{2}e^{2c}\right)=\left(\dfrac{c}{2}-\dfrac{1}{4}\right)e^{2c}$

所以 $e^{2c}=\dfrac{1}{2}\left(ce^{2c}-\dfrac{1}{2}e^{2c}\right)=\left(\dfrac{c}{2}-\dfrac{1}{4}\right)e^{2c}$，得 $c=\dfrac{5}{2}.$

三（12 分）.（1）函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, x\geq 0\\ \dfrac{1}{1+e^x}, x<0\end{cases}$.求函数 $\int_0^2 f(x-1)dx$。

解：令 $t=x-1$，则 $\int_0^2 f(x-1)dx=\int_{-1}^{1}f(t)dt$

$=\int_{-1}^{0}\dfrac{1}{1+e^t}dt+\int_0^1\dfrac{1}{1+t}dt=I_1+I_2.$

$I_1=\int_{-1}^{0}\dfrac{1}{1+e^t}dt\overset{x=e^t}{=\!=}\int_{e^{-1}}^{1}\dfrac{1}{x(1+x)}dx=\int_{e^{-1}}^{1}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x}\right)dx$

$=\left[\ln x-\ln(1+x)\right]\Big|_{e^{-1}}^{1}=\ln(e+1)-\ln 2$

$I_2=\int_0^1\dfrac{1}{1+t}dt=\ln(1+t)\Big|_0^1=\ln 2$

所以原积分 $I=I_1+I_2=\ln(e+1)-\ln 2+\ln 2=\ln(e+1).$

（3）求心形线 $\rho=a(1+\cos\theta), a>0$ 的面积。

解：$A=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\rho^2 d\theta=\int_0^{\pi}a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta$

$$=a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=a^2\left[\theta+2\sin\theta+\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]\Big|_0^{\pi}=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

四（18 分，每问 6 分）设函数 $f(x)=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$，（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值；（2）求曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间和拐点；（3）求曲线 $y=f(x)$ 的所有渐近线。

解 函数在其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$ 上连续。

（1） $f'(x)=x(4-x)\left(6x^2-x^3\right)^{-\frac{2}{3}}=\frac{4-x}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{(6-x)^2}}$，

令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=4$，点 $x=0, x=6$ 为导数不存在点。列表如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,4)$	4	$(4,6)$	6	$(6,+\infty)$
$f'(x)$	−	∞	+	0	−	∞	−
$f(x)$	$\downarrow$	极小	$\uparrow$	极大	$\downarrow$	非 极值	$\downarrow$

极大值 $f(4)=2\sqrt[3]{4}$. 极小值 $f(0)=0$.

（2） $f''(x)=-\frac{8}{x^{4/3}\cdot(6-x)^{5/3}}$，

当 $x=0, x=6$ 时， $f''(x)$ 不存在。列表如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,6)$	6	$(6,+\infty)$
$f''(x)$	−	不存在	−	不存在	+
$f(x)$	凸	非拐点	凸	拐点	凹

拐点为$(6, f(6)) = (6,0)$.

（3）曲线 $y = f(x)$ 的无水平渐近线和铅直渐近线。

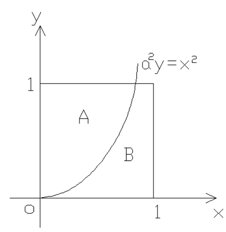
考虑极限$a = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{6x^2 - x^3}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{6}{x} - 1} = -1.$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - ax\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{6x^2 - x^3} - x\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{6x^2}{\sqrt[3]{\left(6x^2 - x^3\right)^2} - x\cdot\sqrt[3]{6x^2 - x^3} + x^2} = 2.$$

曲线有一条斜渐近线 $y = -x + 2.$

五(8 分).曲线$a^2y = x^2, 0 < a < 1$将图中边长为 1 的正方形分成 A、B 两部分. (1)求 A 绕 y 轴旋转一周所成旋转体的体积；(2)求 B 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积。



解：曲线与正方形的交点为$(a,1)$. ——1 分

（1）图形 A 绕 y 轴旋转一周所成旋转体的体积：

$$V_A = \int_0^1 \pi x^2 dy = \int_0^1 \pi a^2 y dy = \frac{\pi a^2}{2}.$$

（2）图形 B 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积分为两个部分：

$$V_B = \int_0^a \pi y^2 dx + \int_a^1 \pi y^2 dx$$

$$=\int_0^a \pi\left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2 dx+\int_a^1 \pi 1^2 dx$$

$$=\pi\left(1+\frac{a}{5}\right).$$

六（10 分）.证明:当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，不等式$\tan x>x+\dfrac{x^3}{3}$成立。

证明：设 $f(x)=\tan x-x-\dfrac{x^3}{3}, f(0)=0$

$$f'(x)=\sec^2 x-1-x^2=\tan^2 x-x^2$$

$$f''(x)=\sec^2 x-1-x^2=2\tan x\sec^2 x-2x$$

$$=2\left(\frac{\tan x}{\cos^2 x}-x\right)>2(\tan x-x)$$

令$g(x)=\tan x-x$，有$g'(x)=\sec^2 x-1>0$，所以$g(x)$在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调增加，故$g(x)=\tan x-x>g(0)=0.$

从而$f''(x)>0$，所以，$f'(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上严格单调增加，

即$f'(x)>f'(0)=0$，有$f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上严格单调增加，即

$f(x)>f(0)=0.$

所以$\tan x-x-\dfrac{x^3}{3}>0$，即$\tan x>x+\dfrac{x^3}{3}.$

七（10 分）.求微分方程$y''+y=x+2\cos x$的通解.

解：特征方程：$r^2+1=0, r=\pm i.$

齐次方程的通解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x$

因为 $\lambda=0$ 不是方程的特征根，故设对应于 $f_1(x)=x$ 的特解为:

$y_1^*=ax+b,$ 齐代入方程可得：$y_1^*=x.$

因为 $\lambda=i$ 是方程的特征根，故设对应于 $f_2(x)=2\cos x$ 的特解为:

$y_2^*=x(c\sin x+d\sin x),$

则 $y_2^{*\prime}=(d-cx)\sin x+(c+dx)\cos x,\ y_2^{*\prime\prime}=-2c\sin x+2d\cos x,$

代入方程可得：$y_2^*=x\sin x.$

所以非齐次方程的通解为: $y=c_1\cos x+c_2\sin x+x+x\sin x.$

其中 c_1,c_2 为任意常数。