

# 北京邮电大学 2018-2019 学年第一学期

## 《数学分析（上）》期末考试试题（A）

考试注意事项：

学生必须将答题内容写在答题纸上，写在试题纸上一律无效

一. 填空题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 极限  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n + \frac{1}{k}} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

3. 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上存在原函数  $F(x)$ ，则  $\underline{\hspace{2cm}}$ . (单选题)

(A)  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积；(B)  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续；

(C)  $F(x)$  在  $[a, b]$  上可导；(D)  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

4. 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 不定积分  $\int x^2 \ln x dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

6. 设  $F(x) = \int_{\sin x}^1 \frac{t}{1-t^2} dt$ ，则  $F'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ . (要化简)

7. 设  $f(x)$  在  $x=1$  处可导，且  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + e^{x-1} - 3}{x-1} = -3$ ，则  $f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

8. 积分  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

9. 反常积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2}$  是  $\underline{\hspace{2cm}}$ . (填收敛还是发散)

10. 微分方程  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y^3 + x}$  的满足条件  $y(0) = 1$  的特解为\_\_\_\_\_.

二 (12 分). (1) 确定  $a, b$  的值, 使得  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt}{bx - \sin x} = 1$ .

(2) 已知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+c}{x-c} \right)^x = \int_{-\infty}^c x e^{2x} dx$ , 求  $c$ .

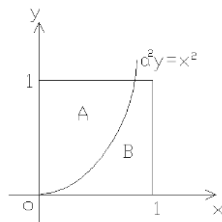
三 (12 分). (1) 函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{1+e^x}, & x < 0 \end{cases}$ . 求  $\int_0^2 f(x-1) dx$ .

(2) 求心形线  $\rho = a(1 + \cos \theta), a > 0$  的面积。

四 (18 分) 设函数  $f(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$ , (1) 求函数  $f(x)$  的单调区间和极值; (2) 求曲线  $y = f(x)$  的凹凸区间和拐点; (3) 求曲线  $y = f(x)$  的所有渐近线。

五 (8 分). 曲线  $a^2 y = x^2, 0 < a < 1$  将右图中边长为 1

的正方形分成  $A, B$  两部分. (1) 求  $A$  绕  $y$  轴旋转一周所成旋转体的体积; (2) 求  $B$  绕  $x$  轴旋转一周所成旋转体的体积。



六 (10 分). 证明: 当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时, 不等式  $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$  成立。

七 (10 分). 求微分方程  $y'' + y = x + 2 \cos x$  的通解。