



UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA

DIPARTIMENTO DI  
INGEGNERIA INFORMATICA,  
MODELLISTICA, ELETTRONICA  
E SISTEMISTICA

DIMES

# **Risoluzione del problema del Vertex Cover con gli algoritmi QAOA e VQE ed esecuzione dell'algoritmo VQE su macchina quantistica reale.**

Anno Accademico 2024-2025

Studente:  
Francesco Cozza  
matr. 252420

Docenti:  
Prof. Francesco Plastina  
Prof. Carlo Mastroianni  
Prof. Andrea Vinci

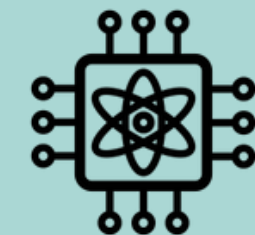
# Scopo del Progetto

Lo scopo del progetto è stato quello di fornire un'**implementazione quantistica** alla risoluzione del problema del Vertex Cover.



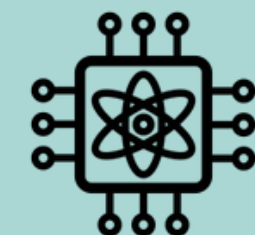
## Risoluzione classica:

Il problema è stato risolto prima con un **approccio classico** - senza componente quantistica - al fine di fornire i risultati e i costi reali delle soluzioni.



## Risoluzione con QAOA:

Il problema è stato risolto con l'algoritmo **QAOA** (Quantum Approximate Optimization Algorithm), analizzando poi le migliori configurazioni in termini di profondità dell'Ansatz e di algoritmi per l'ottimizzazione dei parametri.



## Risoluzione con VQE:

Il problema è stato risolto con l'algoritmo **VQE** (Variational Quantum Eigensolver), analizzando poi le migliori configurazioni in termini di algoritmi per l'ottimizzazione dei parametri. Oltre all'esecuzione sul simulatore, questo approccio è stato testato anche su **macchina quantistica reale**.

# Il Problema del Vertex Cover

Il Vertex Cover è un problema fondamentale della teoria dei grafi.

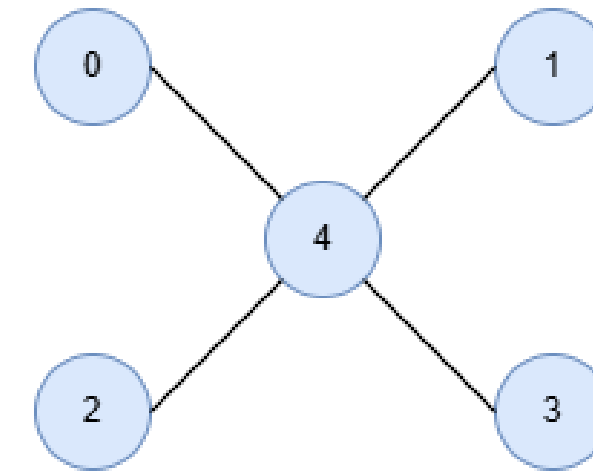
## Definizione e Obiettivo

Dato un grafo, si cerca un sottoinsieme di vertici in modo che ogni arco abbia almeno un estremo in questo sottoinsieme. L'obiettivo è trovare il **sottoinsieme più piccolo possibile**.

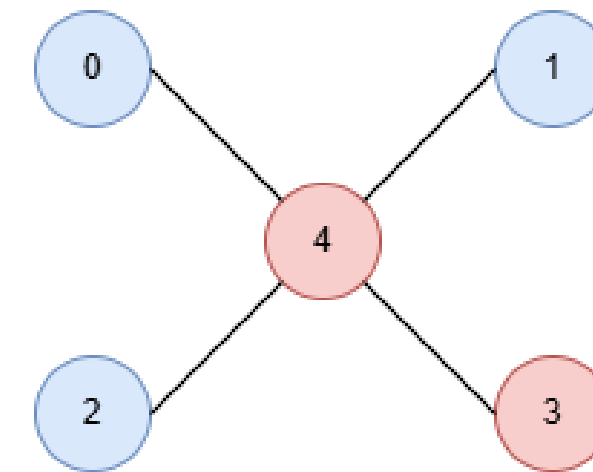
## Complessità e Applicazioni

È un problema NP-completo, ovvero la complessità è esponenziale rispetto all'input. Trova applicazioni in ottimizzazione di reti e sicurezza informatica.

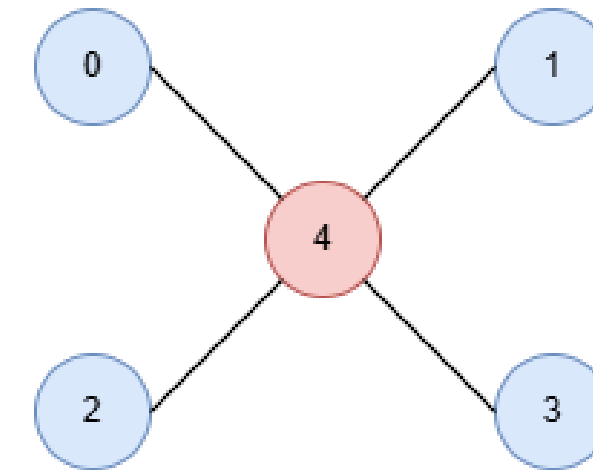
Un esempio è minimizzare i server per coprire le connessioni di una rete.



Grafo

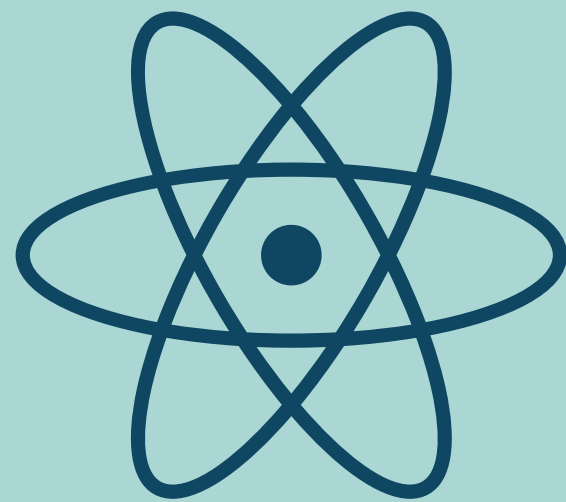


Vertex Cover valido  
ma non minimo



Vertex Cover valido  
e minimo

# FORMULAZIONE HAMILTONIANA DEL VERTEX COVER



## Obiettivo della Formulazione

- Rappresentare il problema del Vertex Cover come un problema di minimizzazione dell'energia (Hamiltoniana), risolvibile tramite algoritmi quantistici come QAOA e VQE.

## Formulazione QUBO

$$\min_{x \in \{0,1\}^n} A \sum_{(i,j) \in E} (1 - x_i)(1 - x_j) + B \sum_{i \in V} x_i$$

con  $A > B$

Dove:

- $x_i \in \{0,1\}$ : 1 se il nodo  $i$  è nel vertex cover
- $A, B$ : parametri di penalizzazione
- Il primo termine penalizza gli archi non coperti, il secondo minimizza il numero di vertici scelti nel cover

## Formulazione ISING

Si ottiene ponendo:

$$x_\alpha \equiv \frac{s_\alpha + 1}{2}$$

Sostituendo, si ottiene l'Hamiltoniana espressa in termini di operatori di Pauli Z.

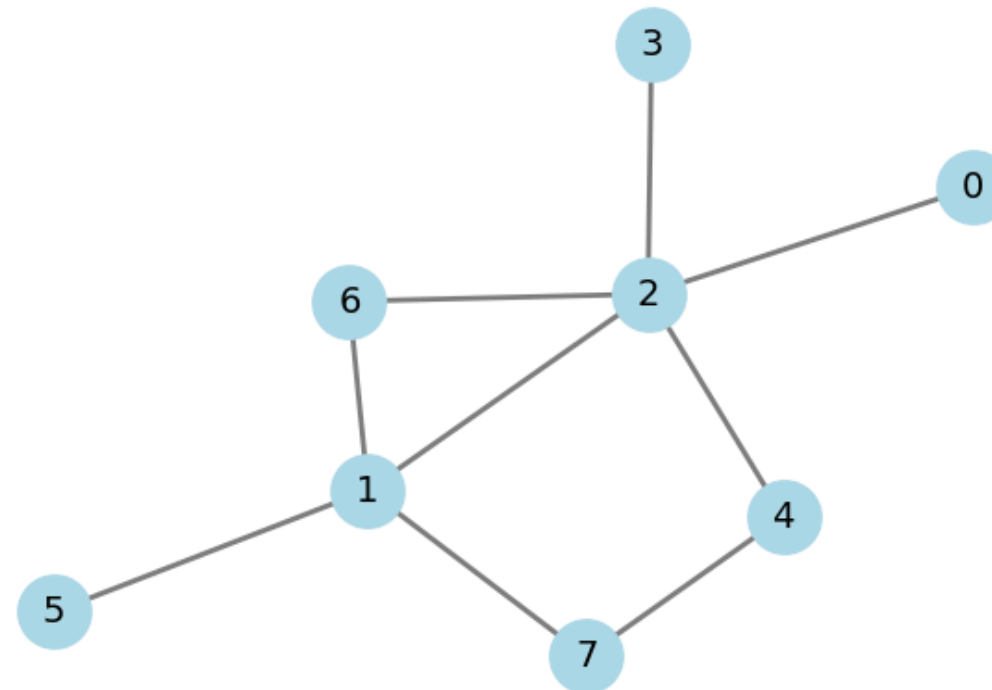
# RISOLUZIONE CLASSICA



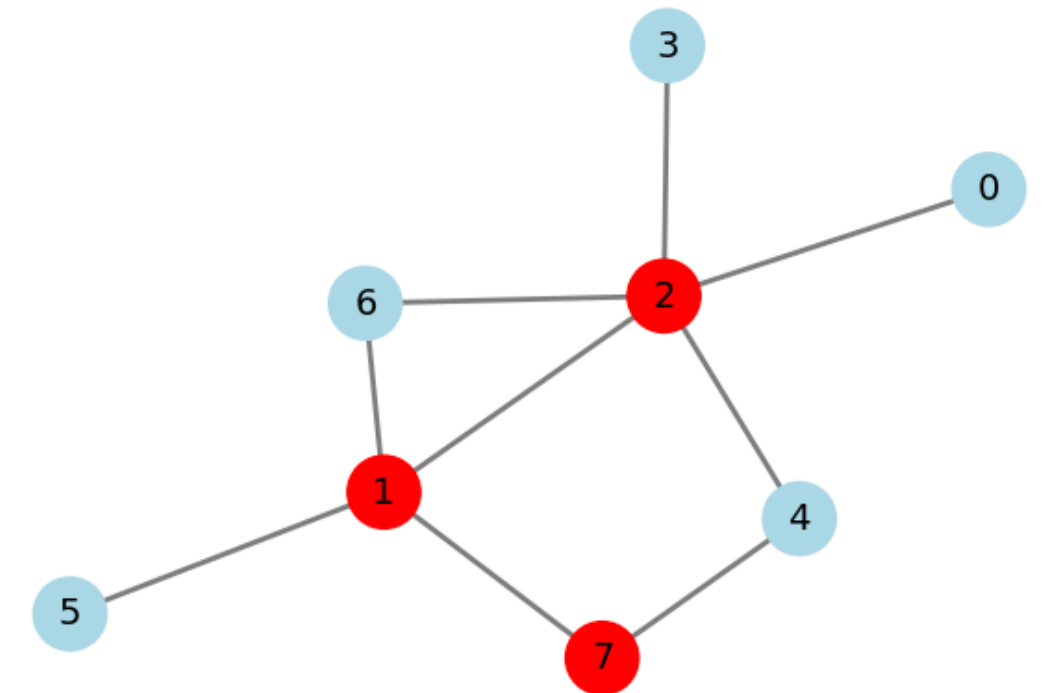
## Motivazione

- Per disporre di un **riferimento** utile nella valutazione delle soluzioni ottenute dagli algoritmi quantistici. In particolare, tutte le analisi verranno effettuate **sullo stesso grafo d'esempio**.

 **Grafo d'esempio**



 **Soluzione**

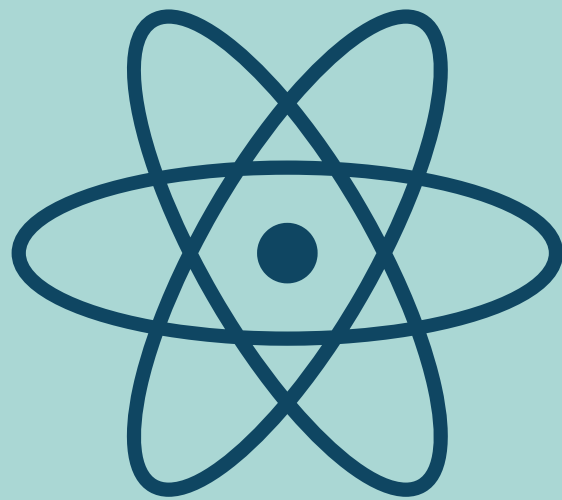


**Minimo Costo Trovato: 3.0.**

**Tempo di esecuzione dell'algoritmo: 0.005 sec.**



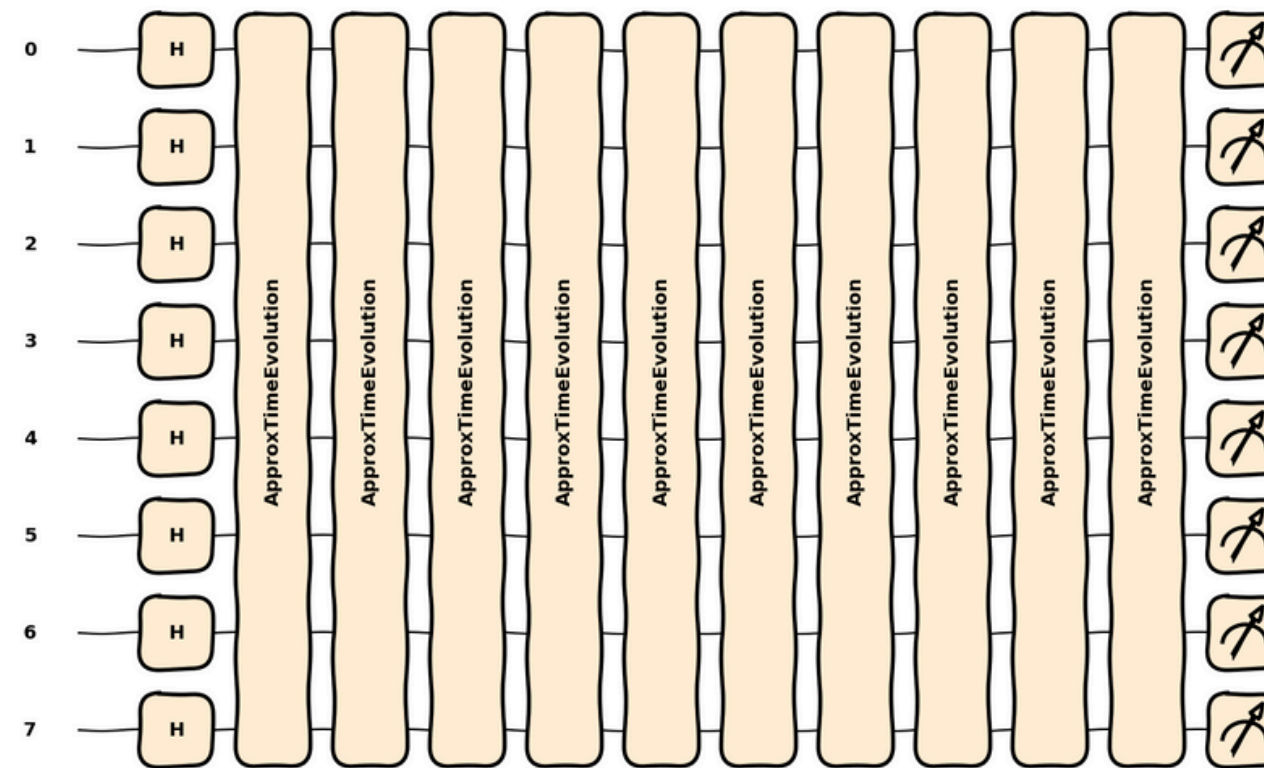
# RISOLUZIONE CON QAOA – PRIMA IMPLEMENTAZIONE



## Parametri

- È stato, in prima battuta, implementato l'algoritmo QAOA con profondità  $p=5$ , utilizzando l'AdamOptimizer per la ricerca dei parametri ottimali. Inoltre, per  $H_f$ , si è scelto  $A=2$  e  $B=1$ .

## Circuito



Il circuito è composto da una sequenza alternata di operatori:

- l'Hamiltoniana del problema.
- il "mixer".

## Obiettivo:

Ottenere una sovrapposizione di stati che massimizzi la probabilità di osservare una soluzione valida e ottima.

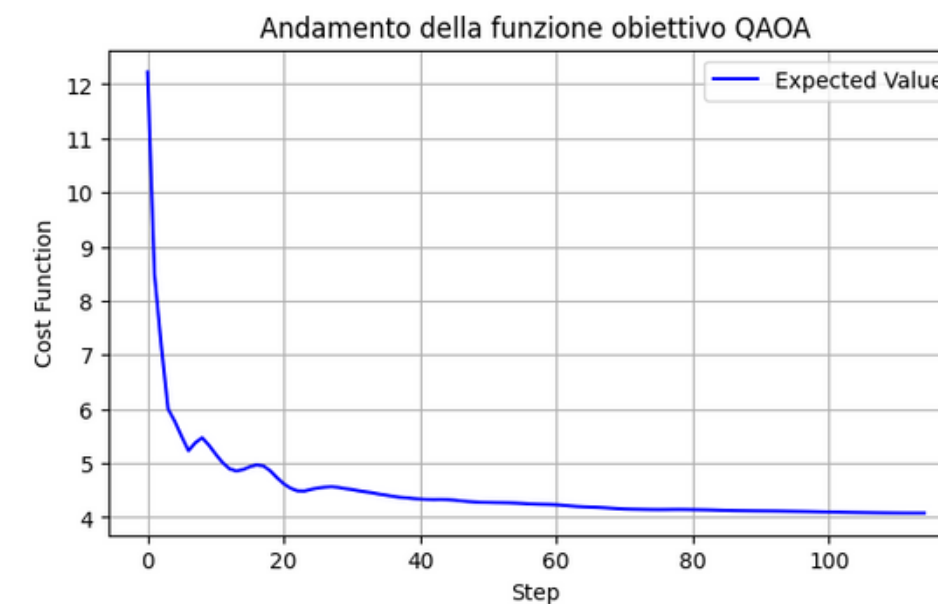
# RISOLUZIONE CON QAOA – PRIMA IMPLEMENTAZIONE



## Risultati

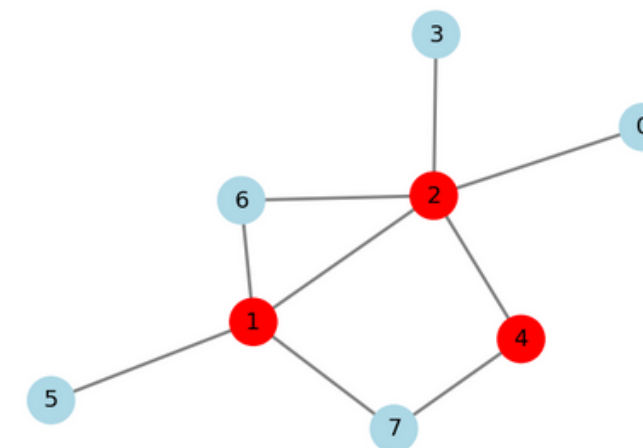
- Impostando a 500 il numero massimo di iterazioni dell'ottimizzatore classico, è stato eseguito QAOA sfruttando il simulatore offerto da PennyLane.

## Andamento della funzione obiettivo

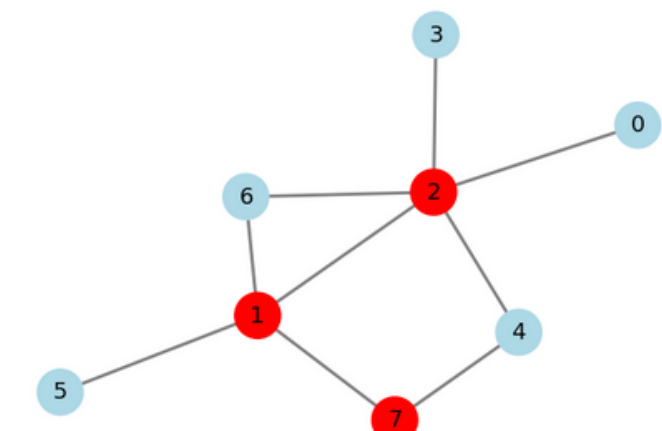


Probabilità di trovare una soluzione **valida**:  
**0,87**

## Soluzioni (ottime) trovate



Probabilità: 0,23



Probabilità: 0,24

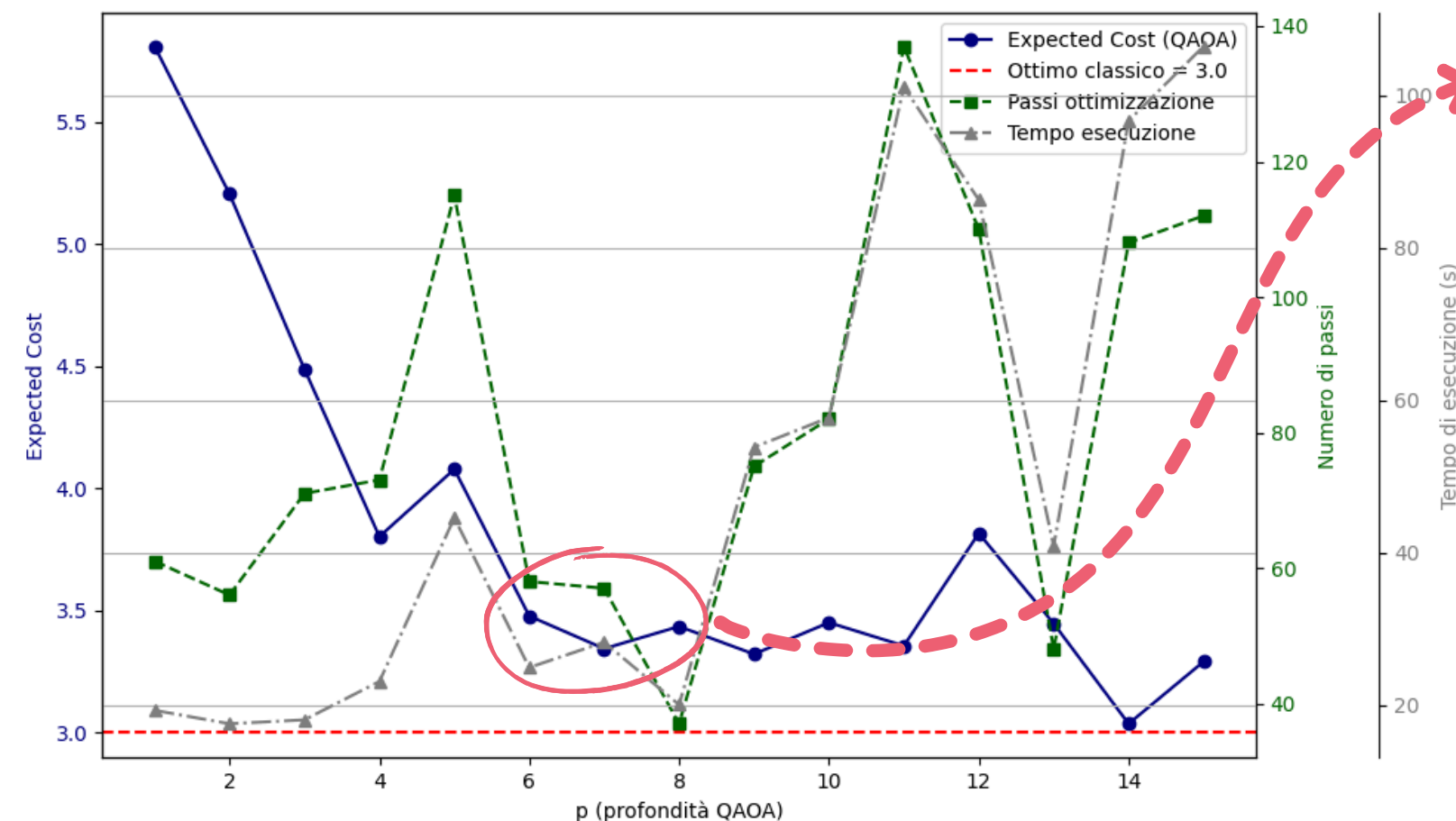
# RISOLUZIONE CON QAOA – ANALISI PROFONDITÀ CIRCUITO



## Motivazione

- Analizzare l'influenza della profondità del circuito  $p$  sulle prestazioni di QAOA permette di comprendere il **trade-off** tra *qualità della soluzione* e *costo computazionale*.

 Grafico risultate l'analisi



All'aumentare di  $p$ , l'expected cost tende a **diminuire**; tuttavia, si osserva anche un **aumento significativo** del tempo di esecuzione e dei passi dell'ottimizzatore. Questo perché circuiti più profondi sono **più difficili da simulare** e più **sensibili al rumore** su macchine reali.



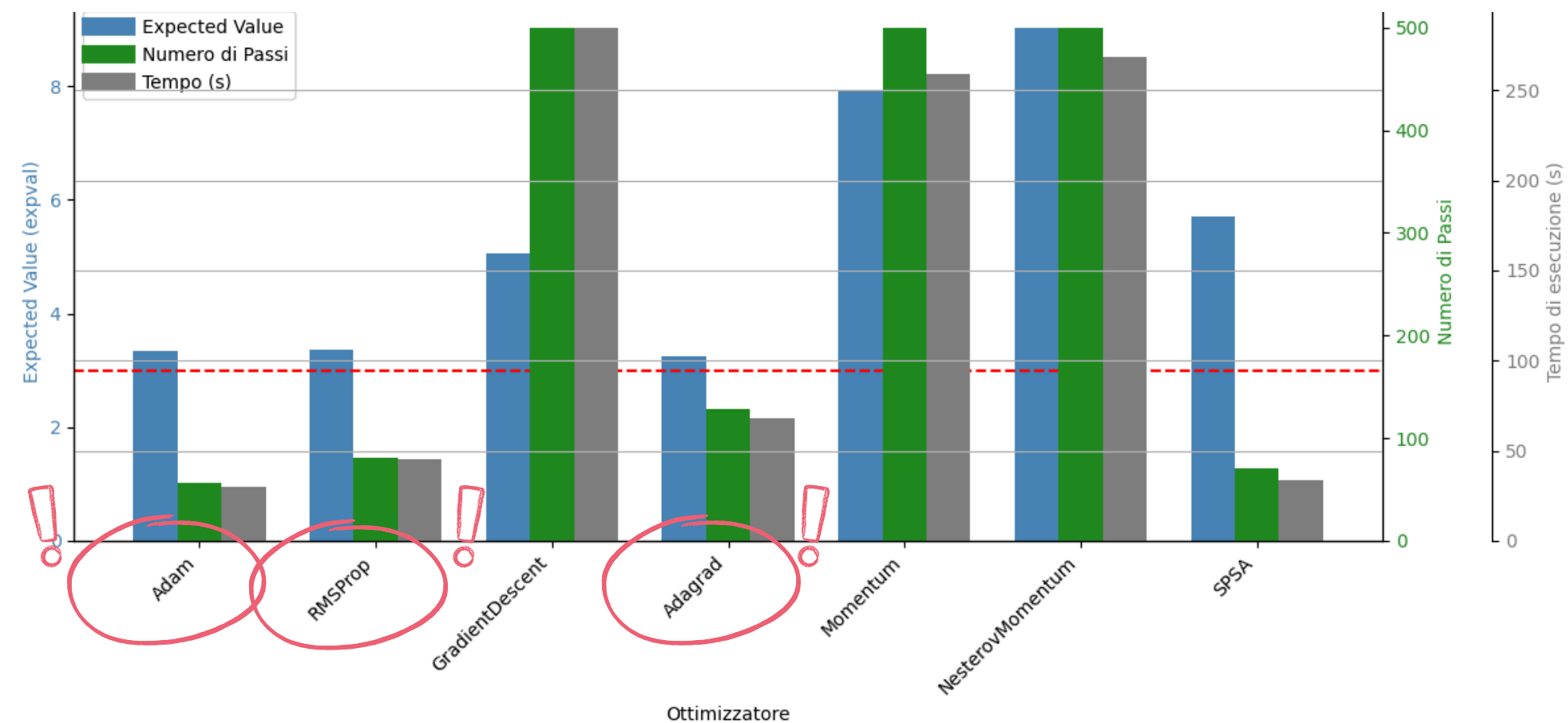
# RISOLUZIONE CON QAOA – ANALISI OTTIMIZZATORE



## Motivazione

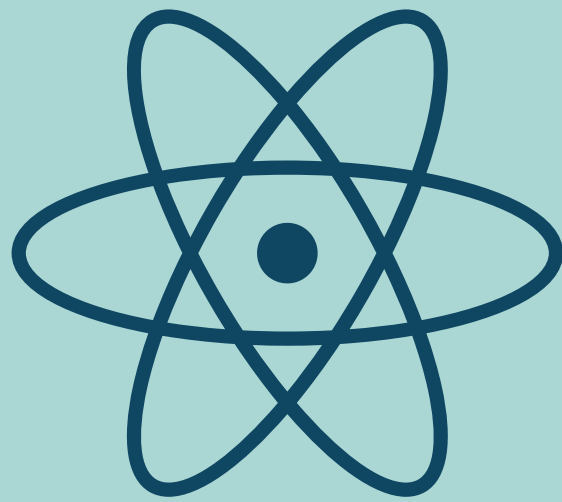
- L'ottimizzatore classico utilizzato per aggiornare i parametri del QAOA influisce significativamente sulla qualità della soluzione finale e sulla velocità di convergenza.

 Grafico risultate l'analisi



Una volta scelto il valore di  $p$  ottimale, l'ottimizzatore classico gioca un ruolo fondamentale nel determinare l'efficacia dell'algoritmo QAOA, poiché **guida la ricerca dei parametri variabili ( $\gamma, \beta$ )** che definiscono il comportamento del circuito.

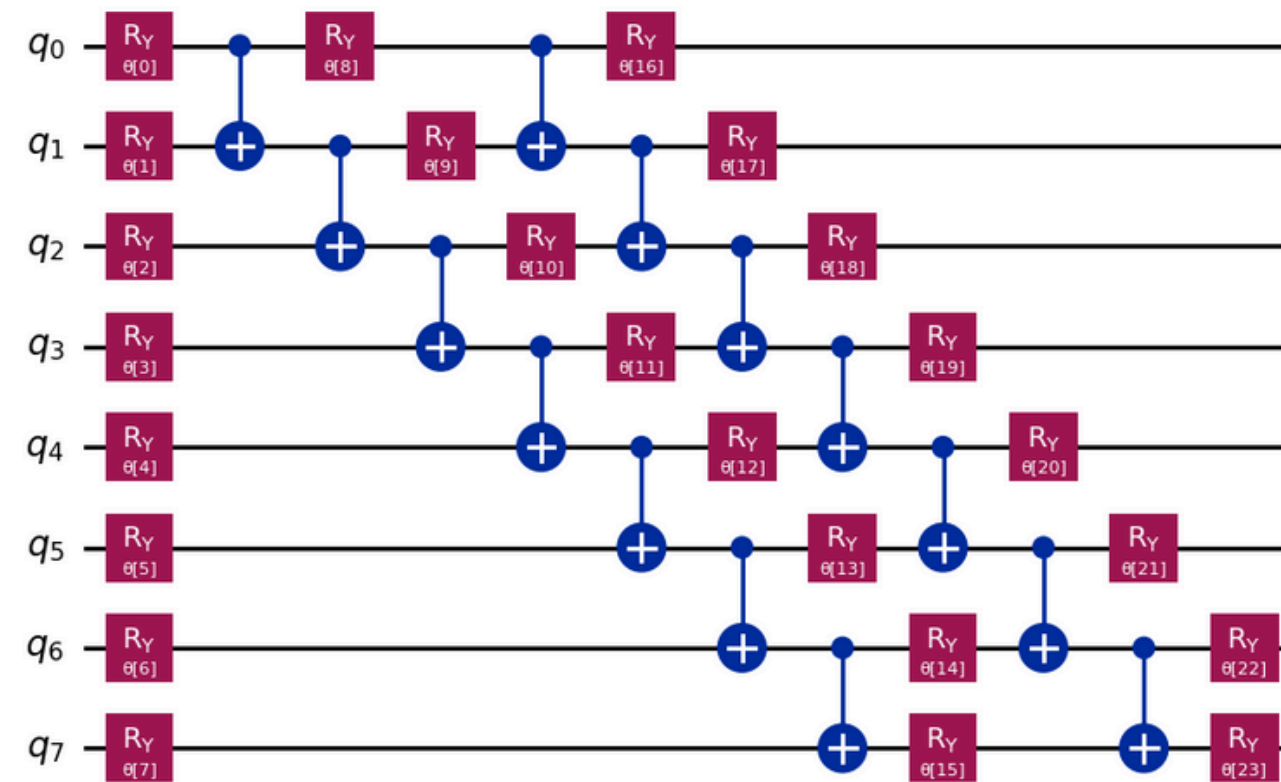
# RISOLUZIONE CON VQE- PRIMA IMPLEMENTAZIONE



## Parametri

- È stato, in prima battuta, implementato l'algoritmo VQE sfruttando l'Ansatz **Two Local** e l'ottimizzatore **Cobyla**. Inoltre, per l'Hamiltoniana del problema, si è scelto **A=2** e **B=1**.

## Circuito



È stato utilizzato un ansatz TwoLocal con gate **ry** e **cx**, con connettività lineare e 2 ripetizioni della struttura (**reps = 2**).

## Obiettivo:

Trovare il minimo atteso dell'**Hamiltoniana** utilizzando un circuito parametrizzato e un ottimizzatore classico per aggiornare i parametri.

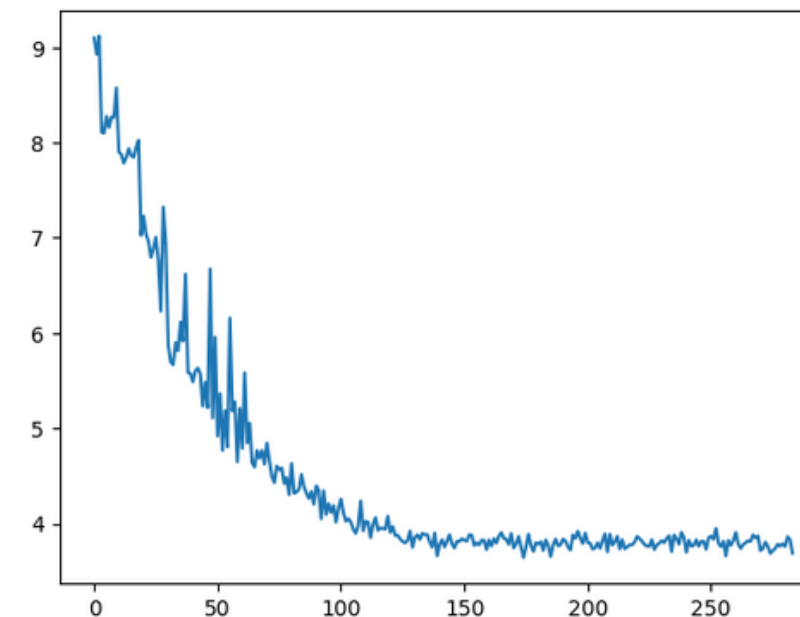
# RISOLUZIONE CON VQE – PRIMA IMPLEMENTAZIONE



## Risultati

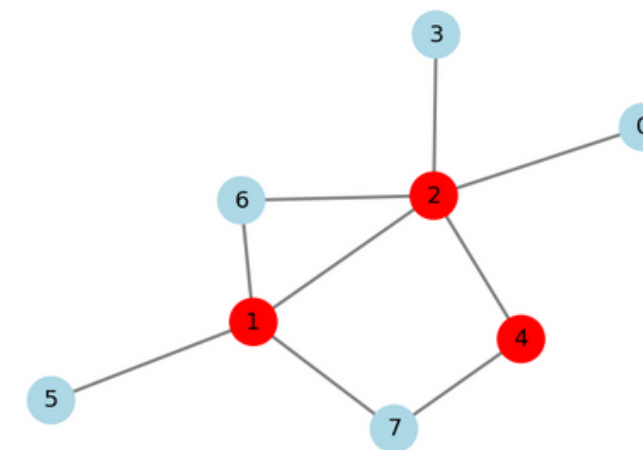
- Impostando a 5000 il numero massimo di iterazioni dell'ottimizzatore classico, è stato eseguito VQE sfruttando il simulatore offerto da Qiskit.

## Andamento della funzione obiettivo

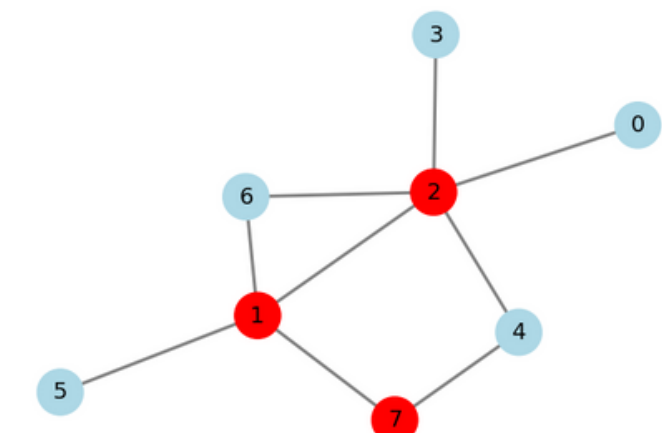


Probabilità di trovare  
una soluzione **valida**:  
**0.9**

## Soluzioni (ottime) trovate



Probabilità: **0.56**



Probabilità: **~0.0**

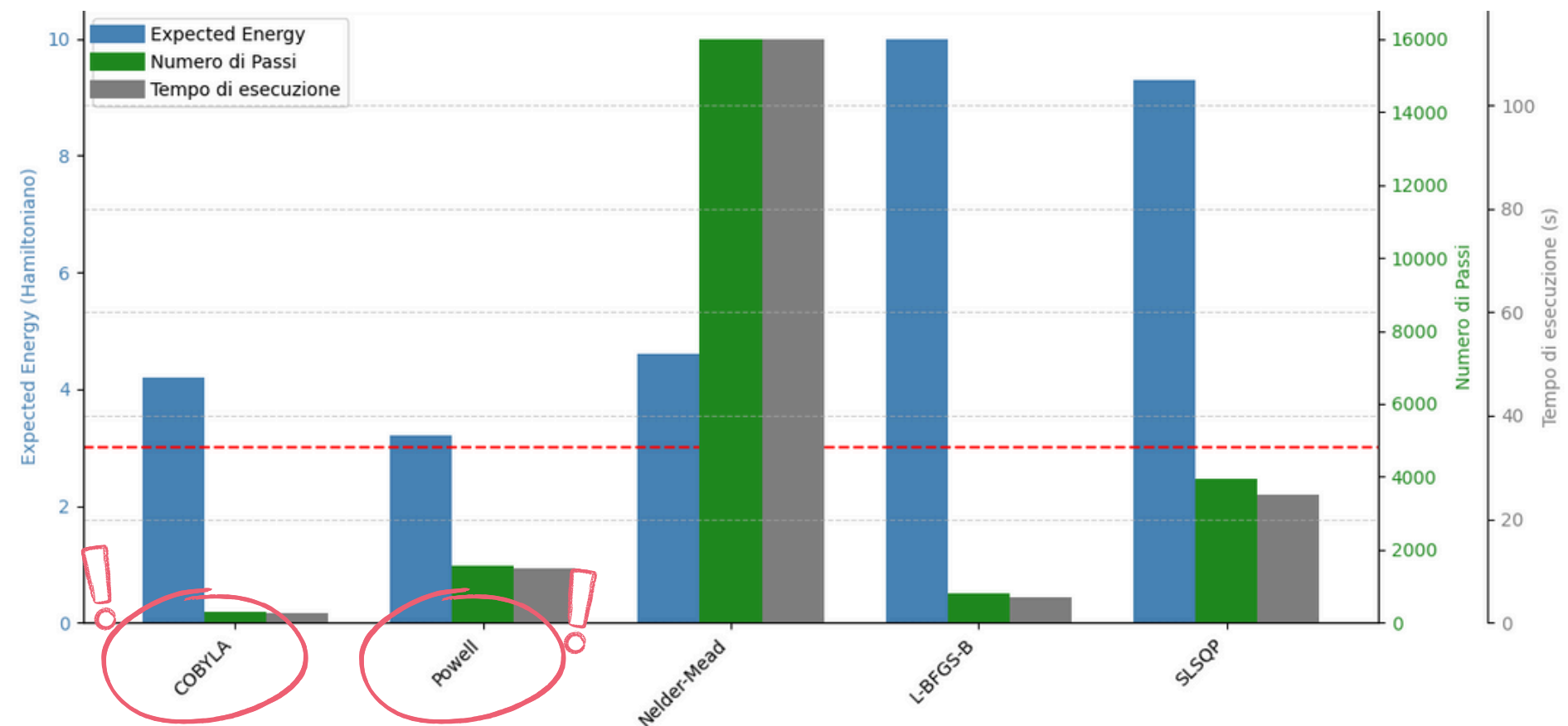
# RISOLUZIONE CON VQE – ANALISI OTTIMIZZATORE



## Motivazione

- L'ottimizzatore classico utilizzato per aggiornare i parametri in VQE ha un impatto diretto sulla qualità della soluzione ottenuta, e sul tempo di esecuzione complessivo.

 Grafico risultate l'analisi



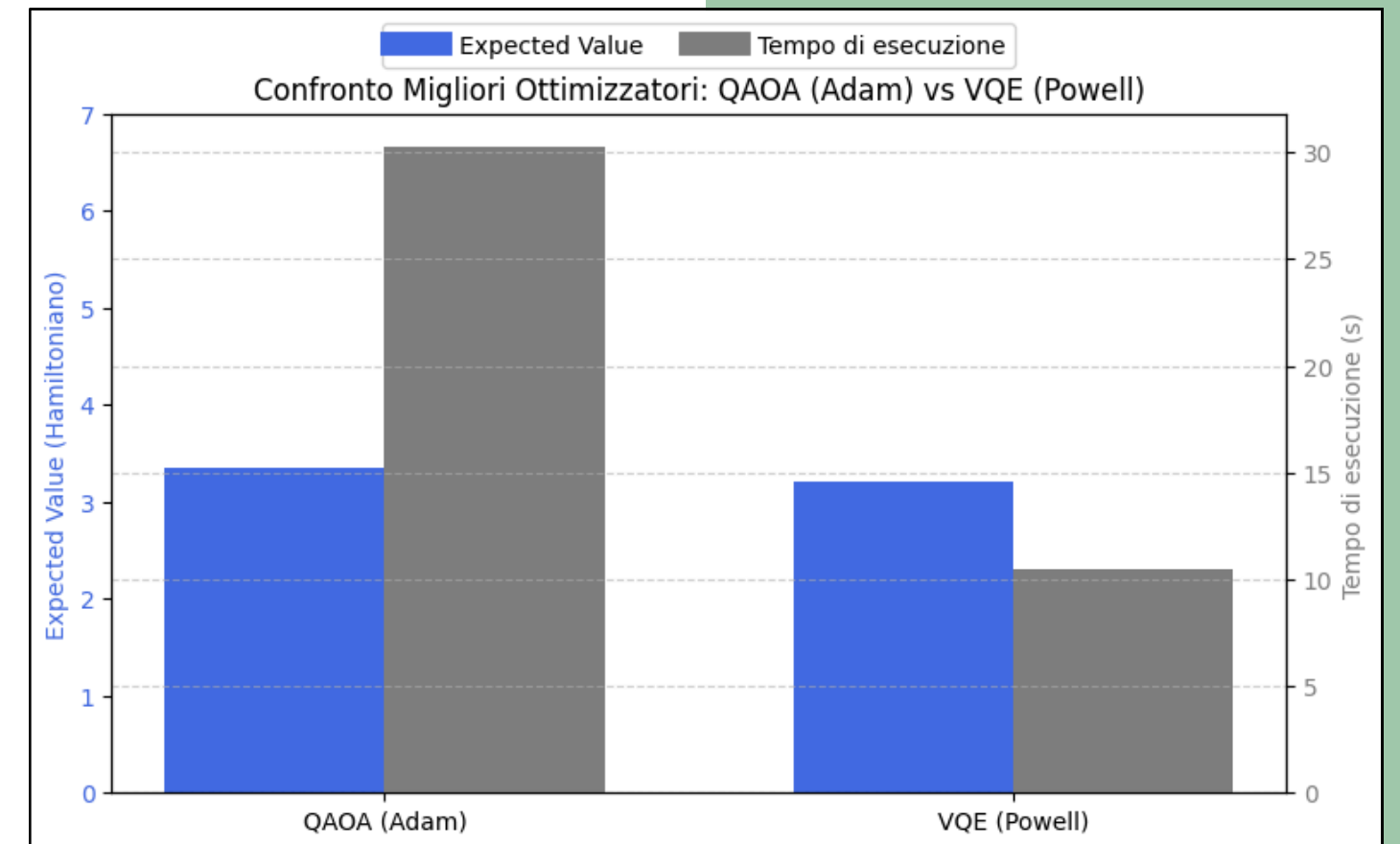
L'ottimizzatore classico gioca un ruolo fondamentale nel determinare l'efficacia dell'algoritmo VQE, poiché **guida la ricerca dei parametri variabili** che definiscono il comportamento del circuito.

# QAOA VS VQE

Dopo aver analizzato separatamente le performance di VQE e QAOA in diverse configurazioni (ottimizzatori e, per QAOA, profondità del circuito), si procede a un **confronto diretto tra i due algoritmi**.

Per ciascun metodo viene selezionata la **configurazione ottimale**, ovvero quella che ha ottenuto:

- il *valore atteso* più basso (accuratezza)
- il *tempo di esecuzione* più contenuto (efficienza)



Dal confronto emerge che QAOA e VQE ottengono **valori attesi molto simili**, a testimonianza della comparabile qualità delle soluzioni fornite. Tuttavia, VQE si distingue per un **tempo di esecuzione leggermente inferiore**.

# ESECUZIONE DI VQE SU MACCHINA QUANTISTICA REALE



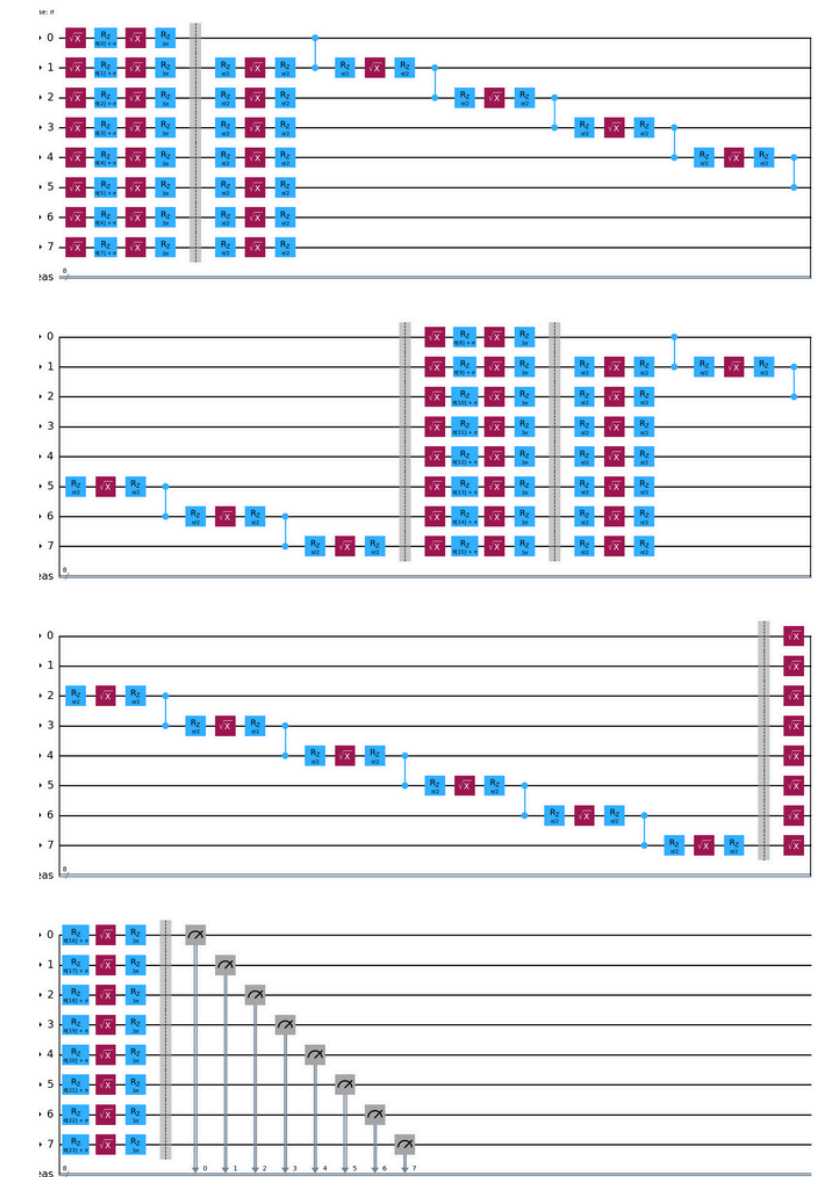
## Obiettivo

- Per valutare le prestazioni di VQE in un contesto più realistico, la miglior configurazione trovata in simulazione è eseguita su un vero dispositivo quantistico IBM.

## Specifiche di esecuzione

Dispositivo	IBM Torino
Ansatz	Two Local, con reps=2
Ottimizzatore	COBYLA
Shots	1024

## Circuito compilato





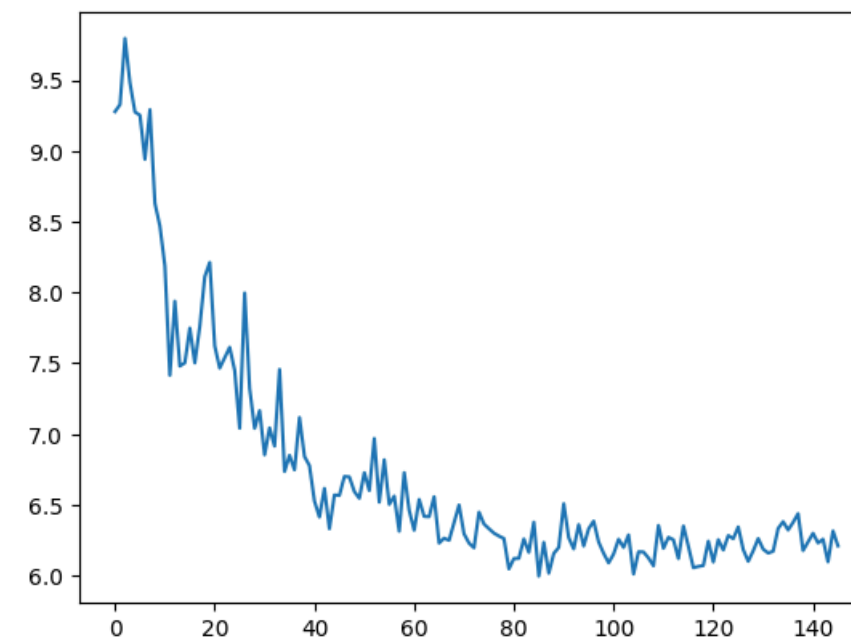
# RISOLUZIONE CON VQE – PRIMA IMPLEMENTAZIONE



## Risultati

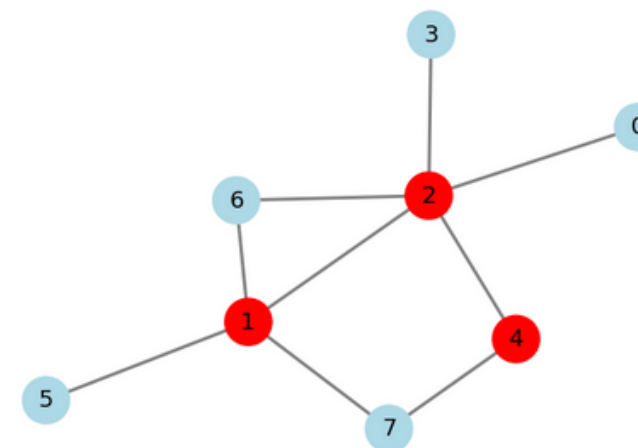
- Impostando a **150** il numero massimo di iterazioni dell'ottimizzatore classico, è stato eseguito VQE sfruttando la macchina quantistica offerta da **IBM Cloud**.

## Andamento della funzione obiettivo



Probabilità di trovare una soluzione **valida**:  
**0.239**

## Soluzione (ottima) trovata



Probabilità: **0.007**

Le **prestazioni limitate** !  
riscontrate sono principalmente dovute al **numero ridotto di iterazioni consentite**, legato ai pochi minuti di accesso gratuito offerti dalla piattaforma IBM Quantum.



UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA

DIPARTIMENTO DI  
INGEGNERIA INFORMATICA,  
MODELLISTICA, ELETTRONICA  
E SISTEMISTICA

DIMES

**Grazie per  
l'Attenzione**

Studente:  
Francesco Cozza  
matr. 252420

Docenti:  
Prof. Francesco Plastina  
Prof. Carlo Mastroianni  
Prof. Andrea Vinci