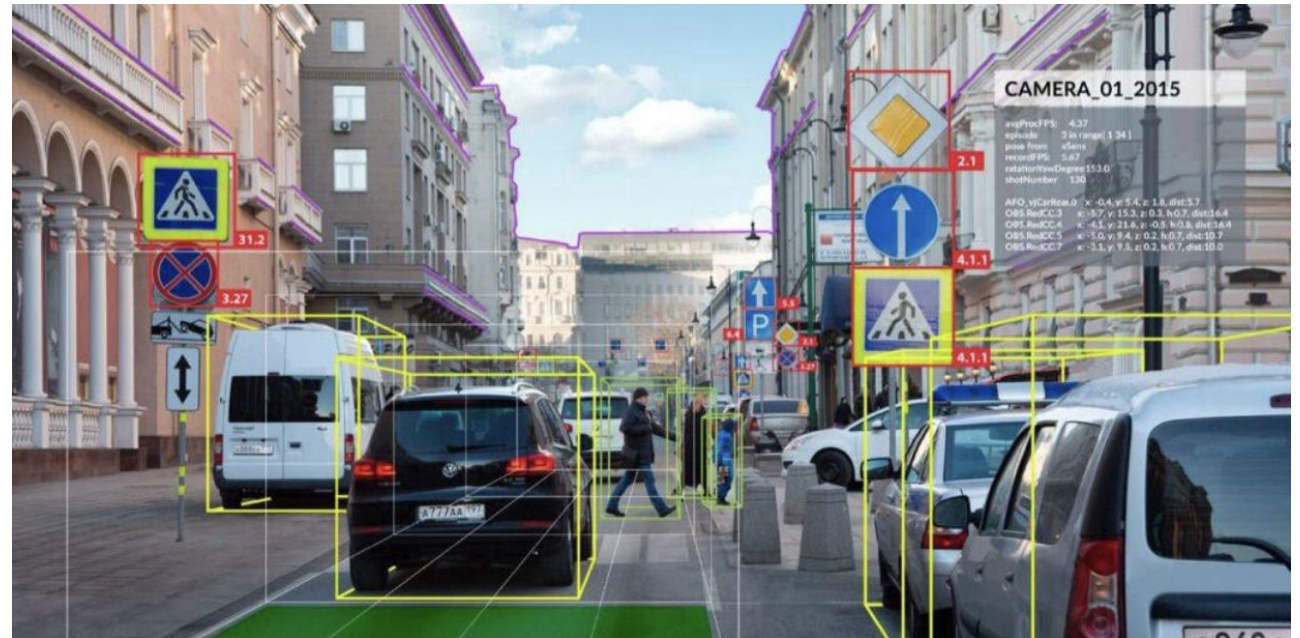


Visión Computacional para imágenes y video

Módulo 1

Tema 1.2 Ecuación por histogramas

Gilberto Ochoa Ruiz, PhD
Associate Professor
Researcher in Computer Vision



Computer Science Dept.
Advanced AI Research Group
gilberto.ochoa@tec.mx

“It makes all the difference whether one sees darkness through the light or brightness through the shadows”

David Lindsay
(Scottish Novelist)

Mejora y restauración de imágenes digitales

Representación de imágenes



**Localizacion del
pixel (m,n)**

Intensidad $\square I(m,n)$

Mejora y restauración de imágenes digitales

Representación de imágenes

La mayoría de las operaciones de mejoramiento de imágenes en el dominio espacial se puede reducir a la forma

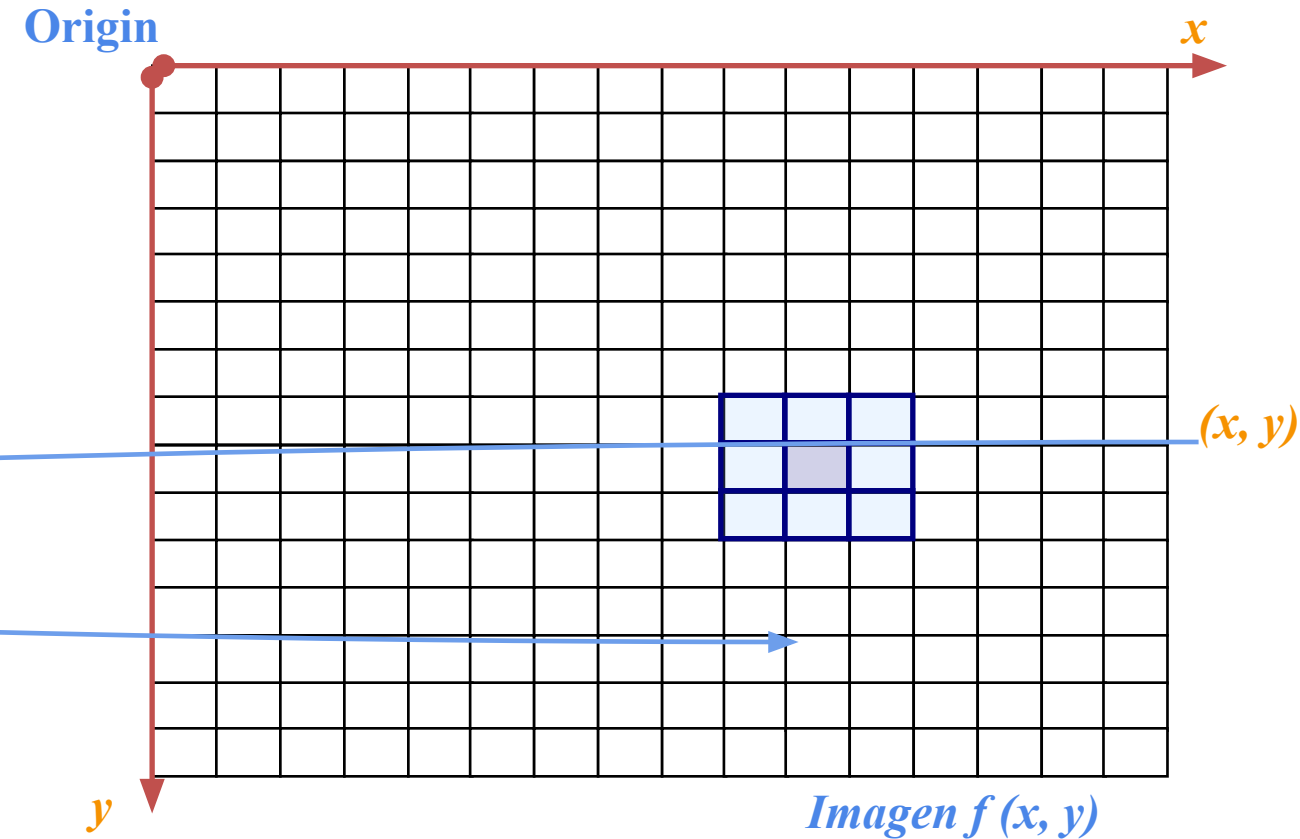
$$g(x, y) = T[f(x, y)] \text{ donde}$$

$f(x, y)$ □ imagen de entrada

$g(x, y)$ □ imagen de salida

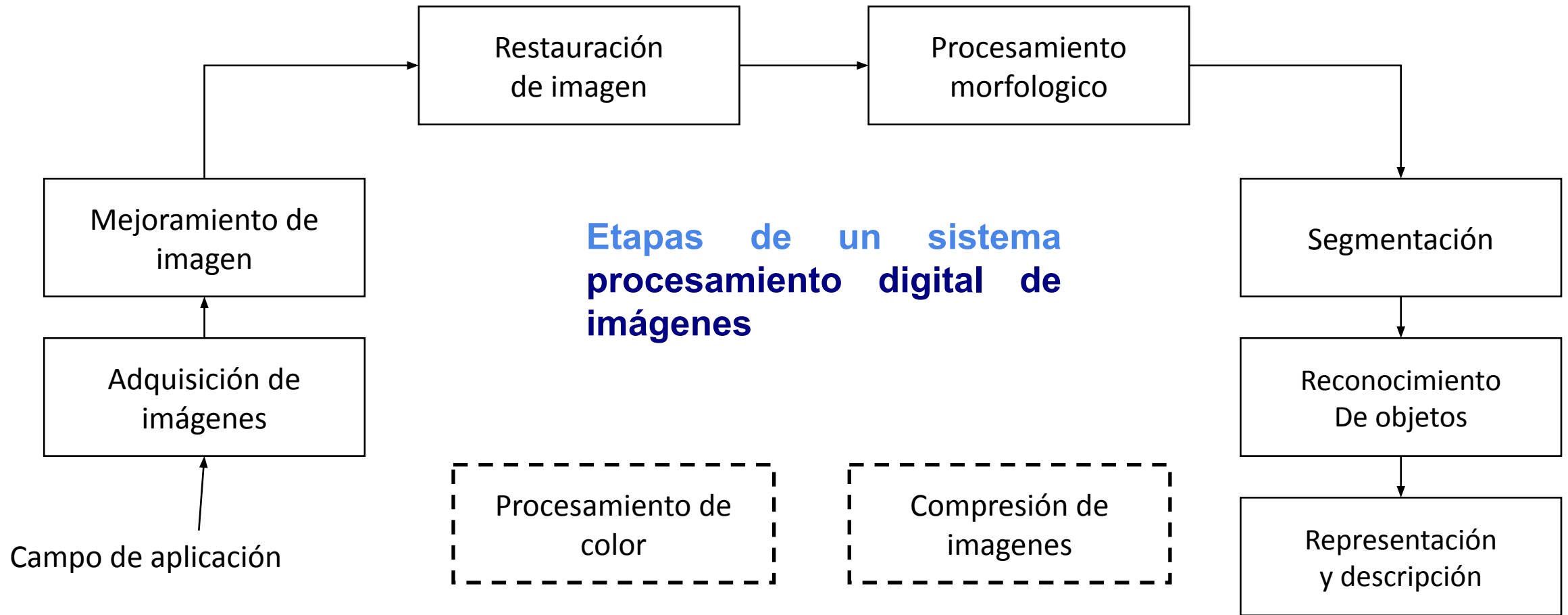
$T(x, y)$ □ operador matematico

Puede ser por punto o una convolución



Mejora y restauración de imágenes digitales

Representación de imágenes



Mejora y restauración de imágenes digitales

Pixel-wise image enhancement

- Procesar píxeles de forma independiente de los otros
- Operadores generalmente de tipo aritmético sobre píxeles
- P.E., usando para corregir brillo y contraste de forma remota

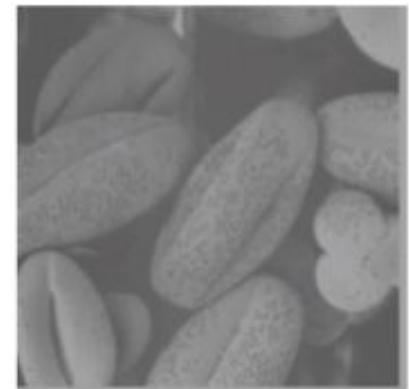
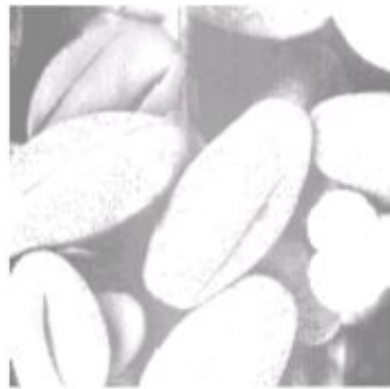
Correcto

Sobrexpuesto

Subexpuesto

Muy alto

Muy bajo



Corrección de brillo

Corrección de contraste

Mejora y restauración de imágenes digitales

Pixel-wise image enhancement

- El brillo es la intensidad de un pixel, para cambiarlo $+ b$
- Para cada pixel en $f(x,y)$, $g(x,y) = f(x,y) + b$
- Si $b > 0$ □ imagen mas brillante, si $b < 0$, imagen más oscura

Corrección de brillo



Mejora y restauración de imágenes digitales

Pixel-wise image enhancement

- Contraste \square nivel de detalle en escena, para cambiarlo $\ast b$
- Para cada pixel en $f(x,y)$, $g(x,y) = a \ast f(x,y)$
- Si $b > 0 \square$ mas contraste , si $b < 0$, menos contraste y detalles

Corrección de contraste



Mejora y restauración de imágenes digitales

Pixel-wise image enhancement

- Efectos no deseados pueden ocurrir ☐ overflow/underflow
- Valores fuera de rango por operaciones en los límites

Corrección de brillo y
contraste

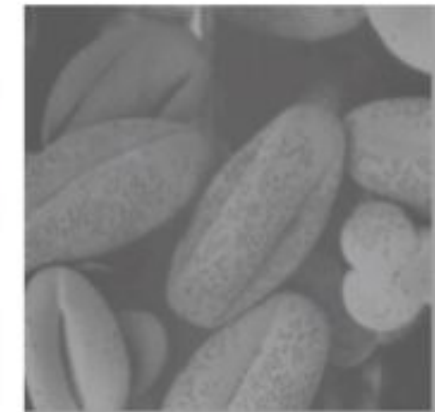
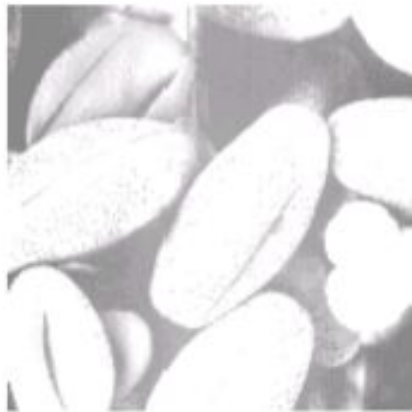
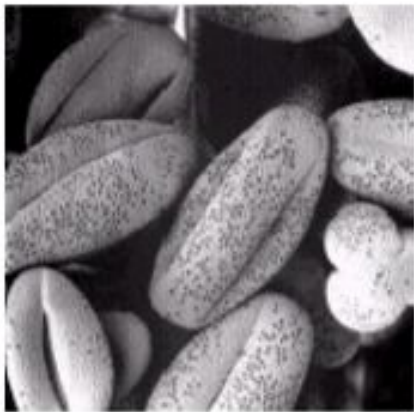
Correcto

Sobreexpuesto

Subexpuesto

Muy alto

Muy bajo



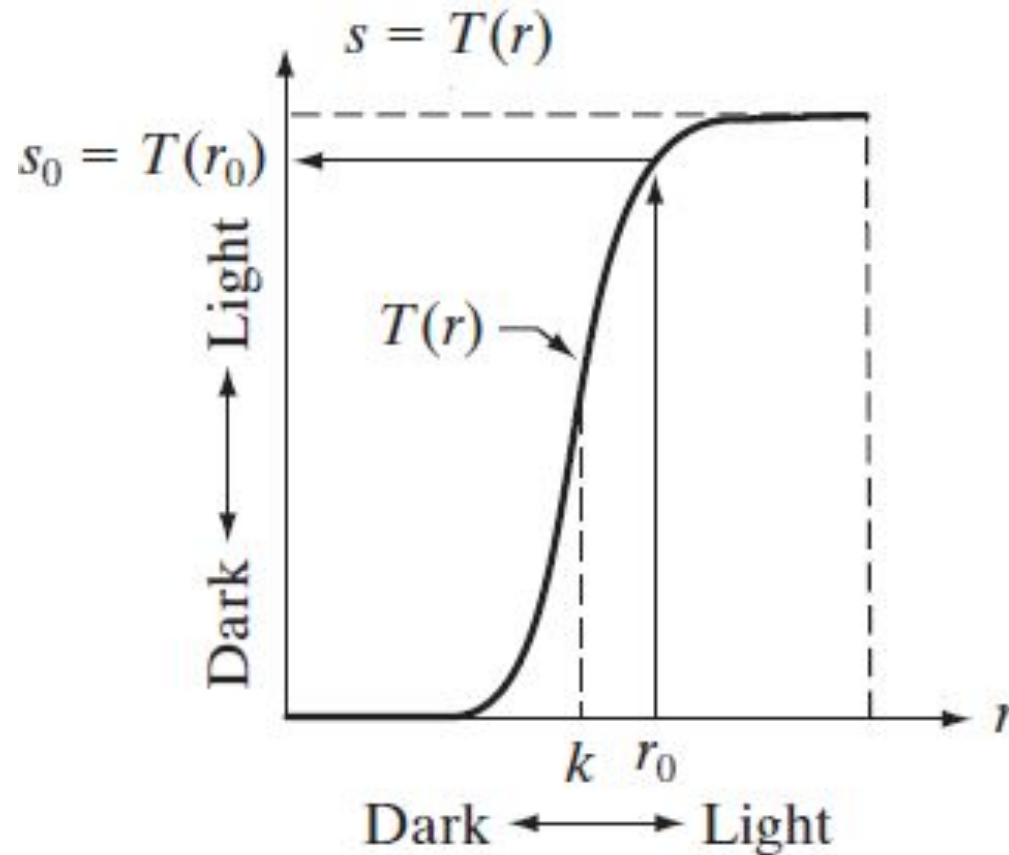
Corrección de brillo

Corrección de contraste

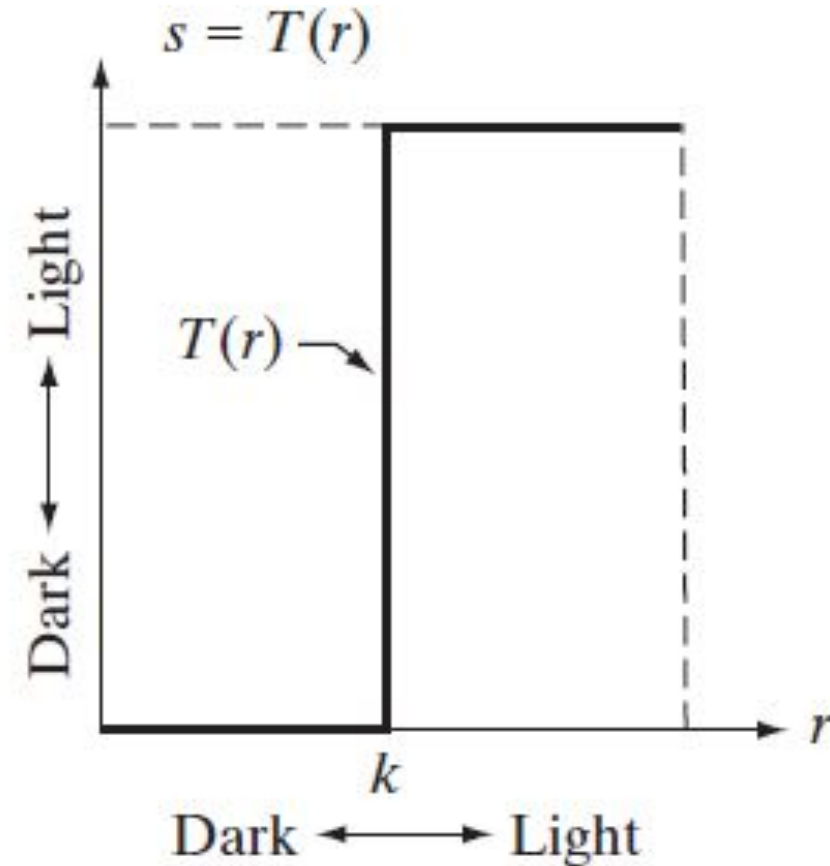
Mejora y restauración de imágenes digitales

Pixel-wise image enhancement

Contrast stretching

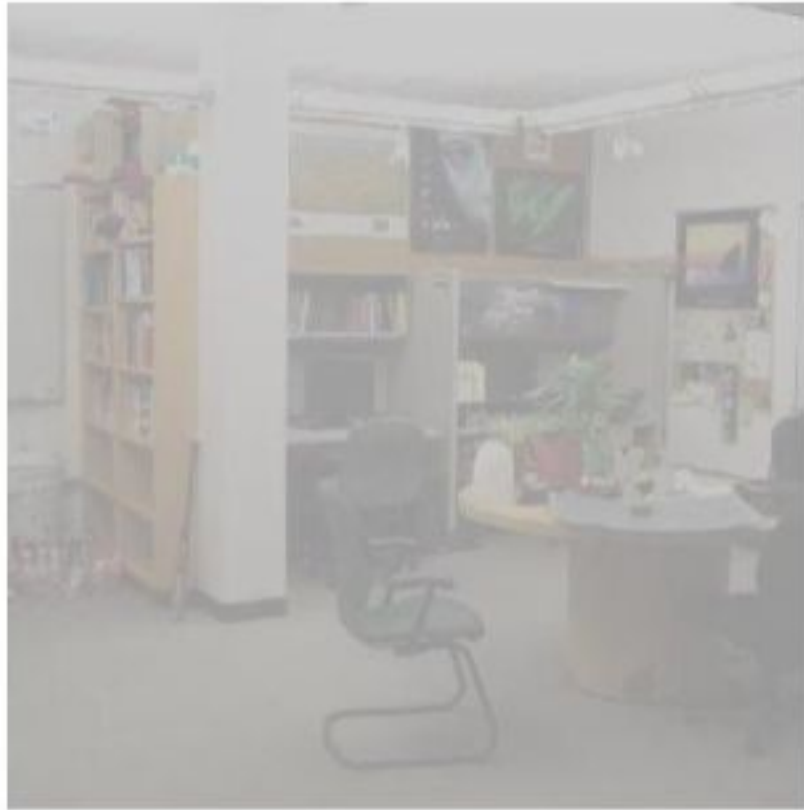


Thresholding

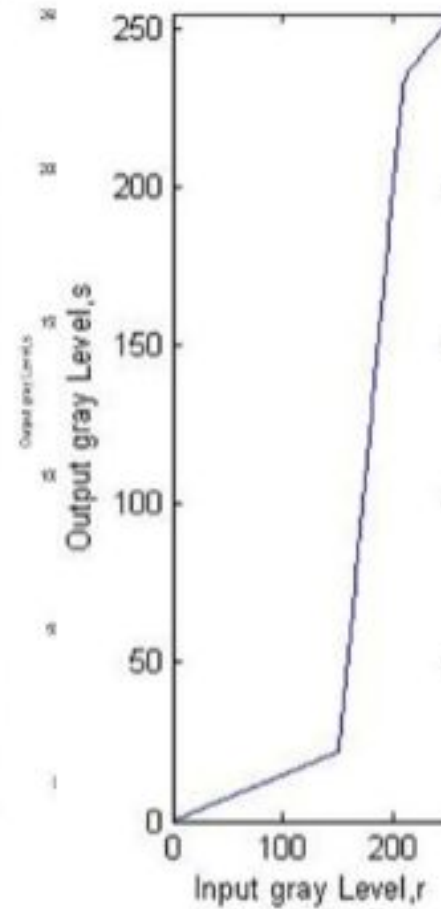


Mejora y restauración de imágenes digitales

Pixel-wise image enhancement



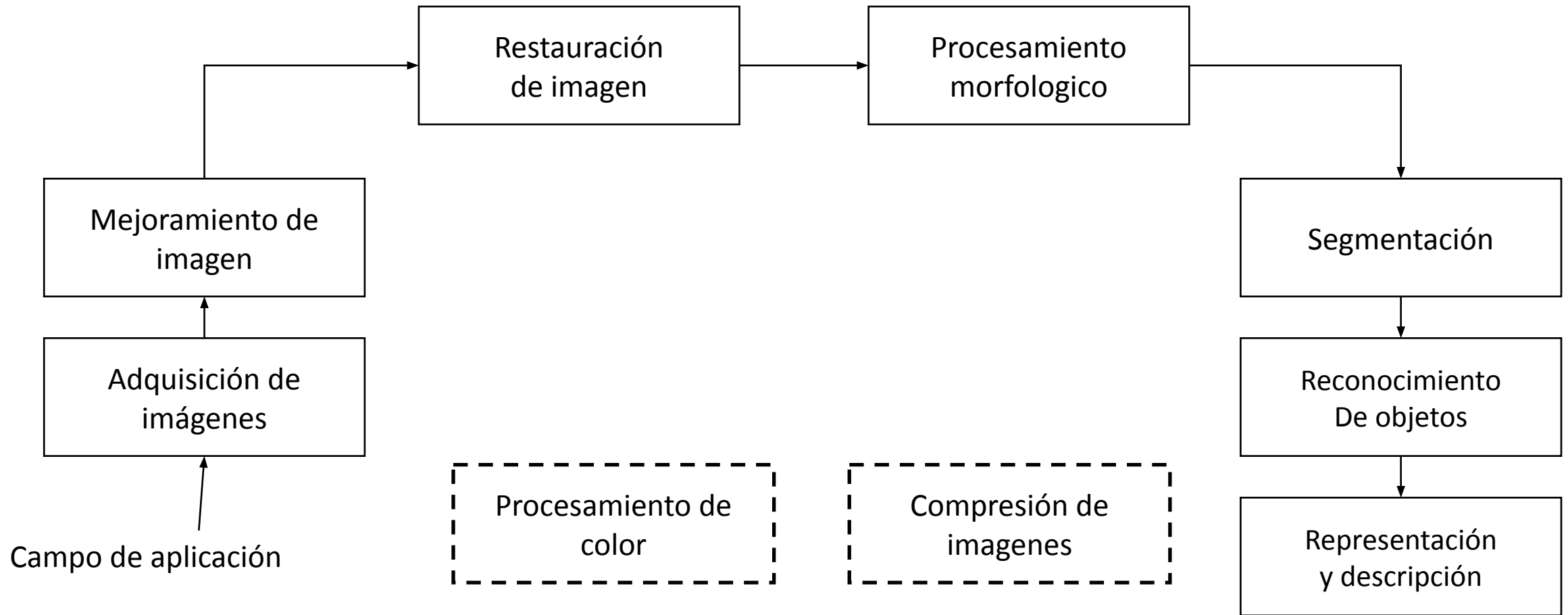
Original Image



Enhanced Image

Mejora y restauración de imágenes digitales

Pixel-wise image enhancement

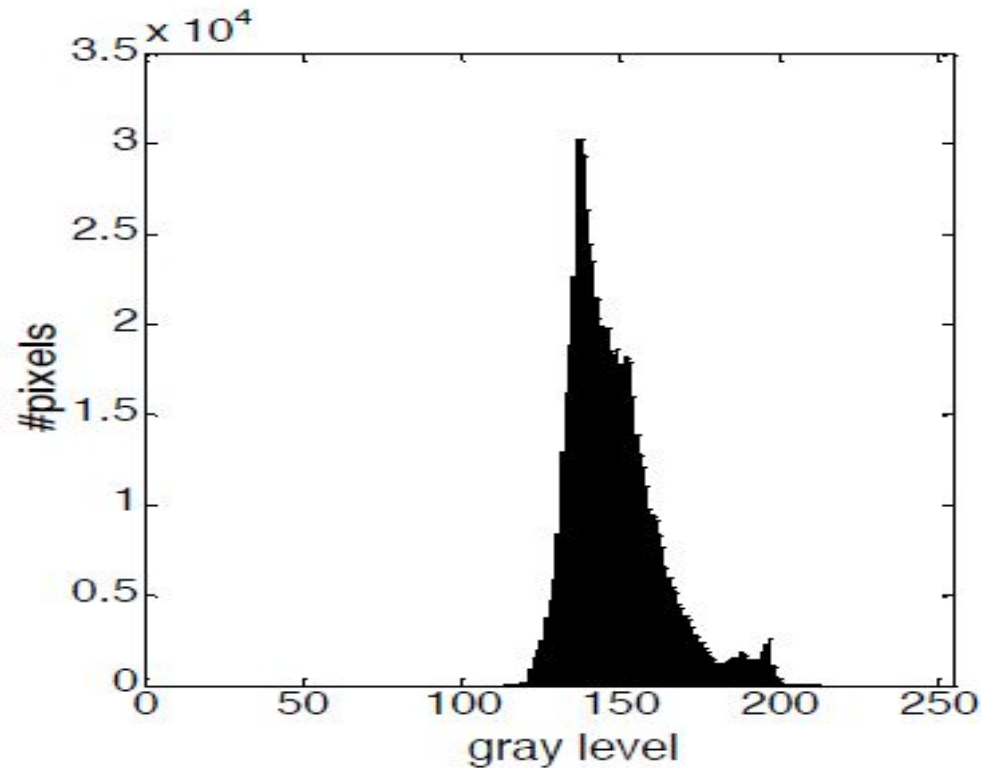


Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

Las de operaciones vistas antes actúan sobre la **totalidad de la imagen**

Sin tomar en cuenta la “**densidad**” de intensidades de los pixeles



Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

Esta “**densidad**”, codificada en histogramas, permite un mejor control de las transformaciones de **brillo y contraste**, como veremos a continuación



Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

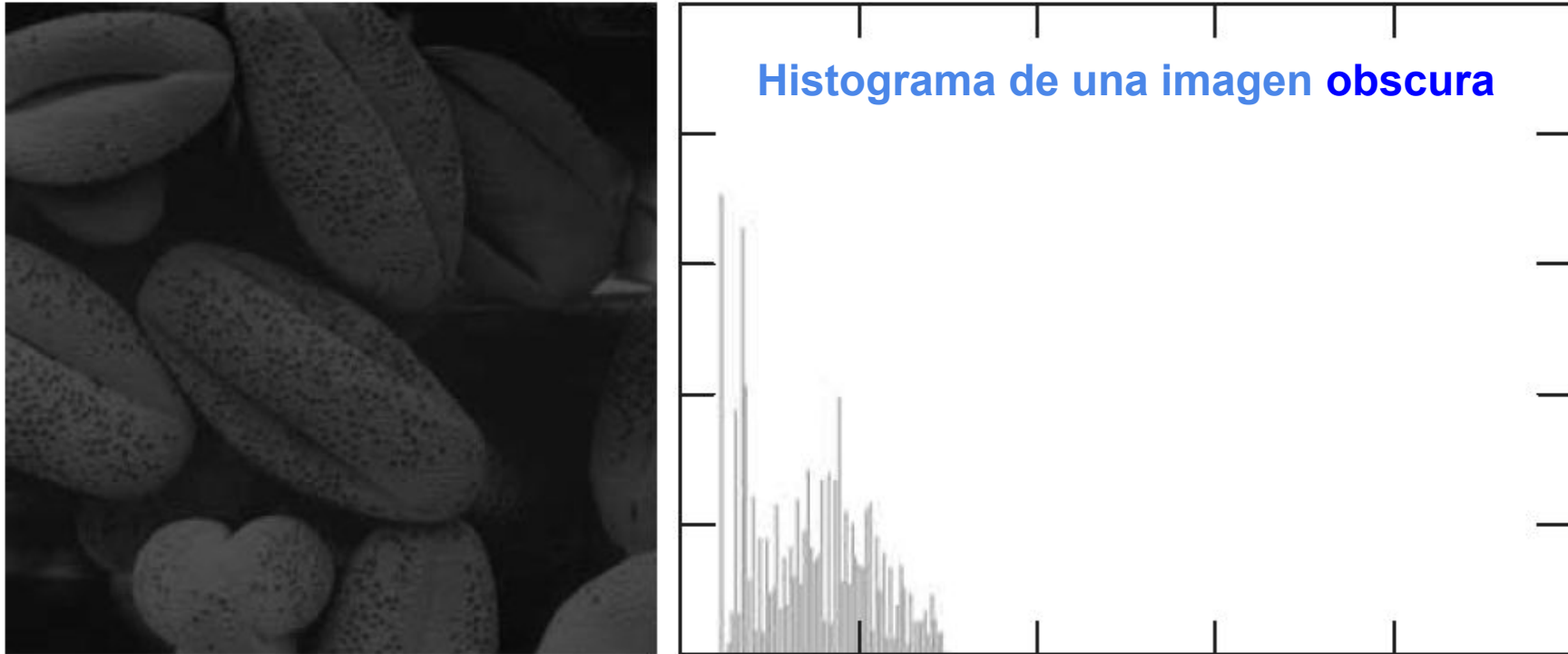
Trabajando con **manipulación de histogramas**, podemos separar las intensidades en “bins”, y procesar de forma mas **granular las imágenes**



Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

Histograma: nos da información sobre no. de pixeles por intensidad el eje de las X representa la **intensidad (0-255)**, Y en **núm. de pixeles**



Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

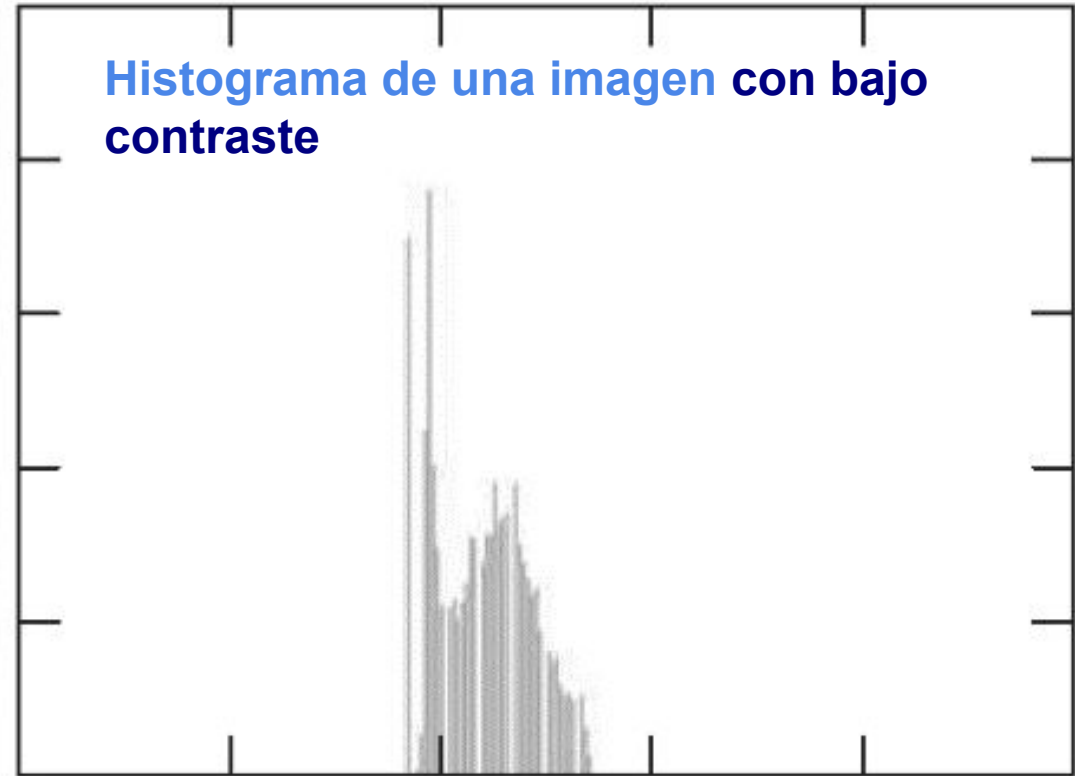
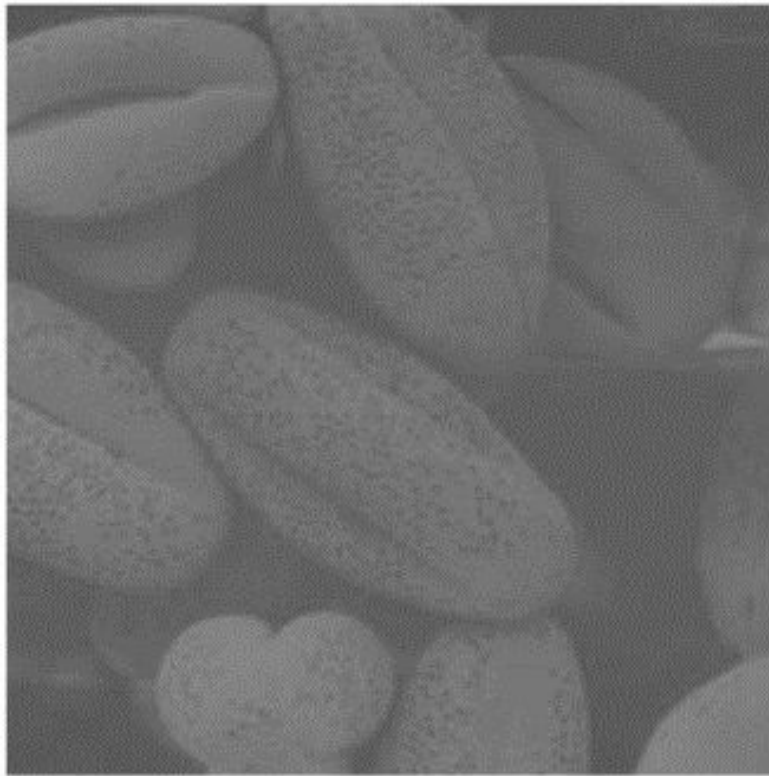
Histograma: nos da información sobre no. de pixeles por intensidad el eje de las X representa la **intensidad (0-255)**, Y en **núm. de pixeles**



Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

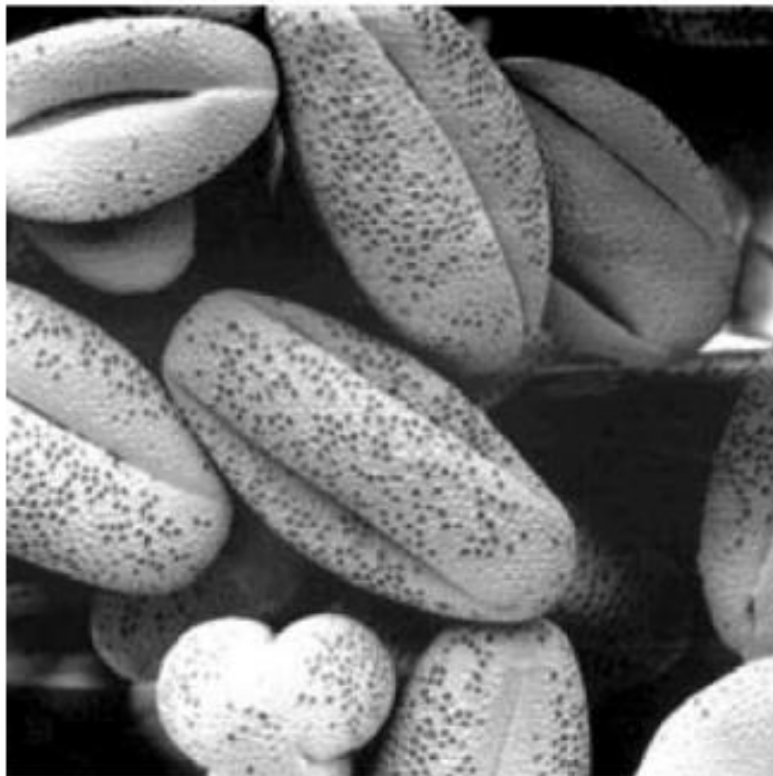
Histograma: nos da información sobre no. de pixeles por intensidad el eje de las X representa la **intensidad (0-255)**, Y en **núm. de pixeles**



Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

Histograma: nos da información sobre no. de pixeles por intensidad el eje de las X representa la **intensidad (0-255)**, Y en **núm. de pixeles**



Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

Ecualización de histogramas

Histograma: $h(r_k) = n_k$

Donde

r_k es el k-ésimo **valor de intensidad**

n_k el número de pixeles en la imagen con **intensidad r_k**

Histograma normalizado:

$$p(r_k) = \frac{n_k}{MN}$$

n_k es el numero de pixeles en la imagen con de M X N con intensidad r_k

Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

Consideremos por un momento **valores de intensidad continuos** y que la variable **r** denota las intensidades de la imagen a ser procesada, en el rango

$$0 \leq r \leq L-1$$

Donde **r = 0** representa un **pixel negro** y **r = L - 1** un **pixel blanco**

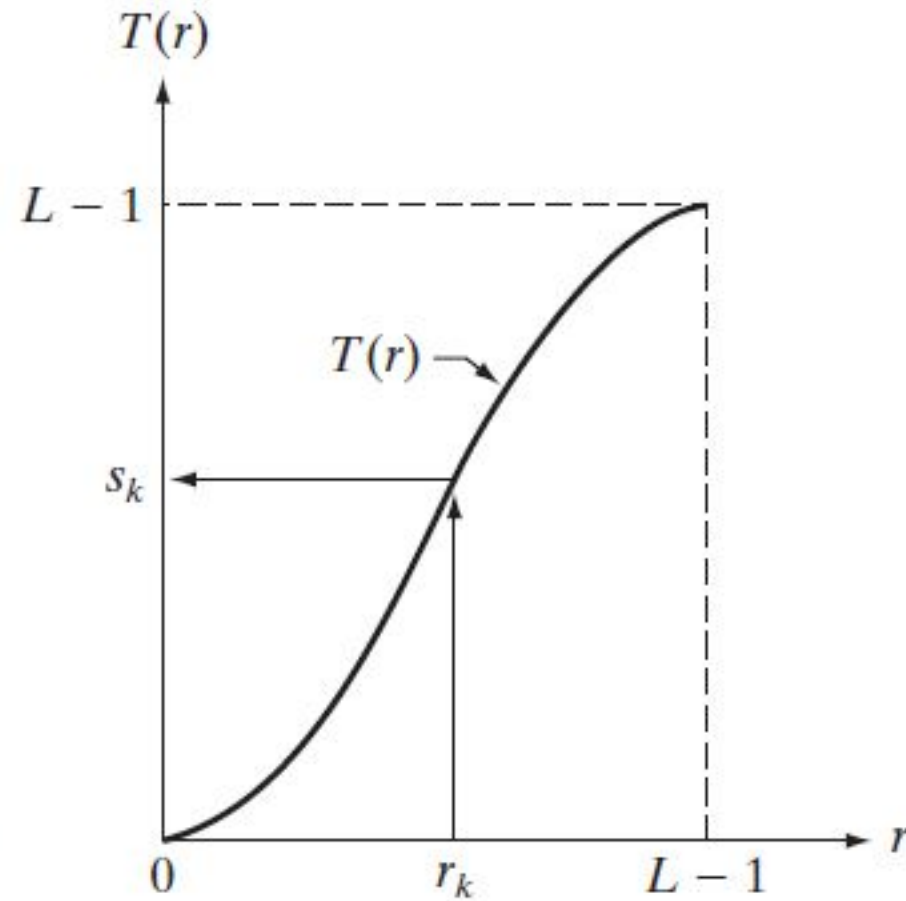
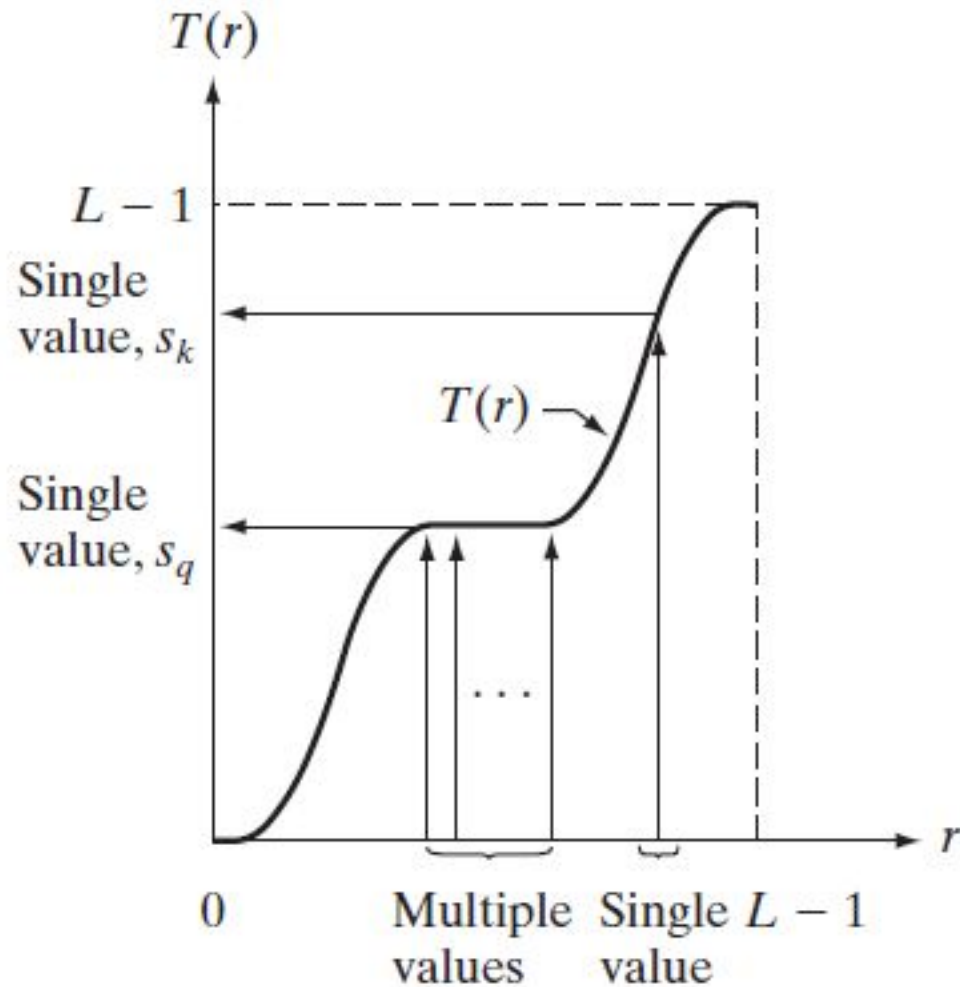
Para que **r satisfaga** estas condiciones, nos enfocaremos en transformaciones (**mapeos de intensidades**) de la forma

$$s = T(r) \quad 0 \leq r \leq L-1$$

Que produzca una **intensidad de salida s** para cada pixel en la imagen de **salida con intensidad r**

Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas



Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

a) $T(r)$ es una función **monotónicamente creciente** de forma estricta en el intervalo

$$0 \leq r \leq L-1$$

b) $0 \leq T(r) \leq L-1$ para $0 \leq r \leq L-1$

Además, $T(r)$ debe ser continua y diferenciable

Los **valores de los pixeles** pueden ser vistos como **variables aleatorias** en el intervalo

$$0 \leq r \leq L-1$$

Y ser descritas por funciones de **densidad de probabilidades (PDF)**

$$p_s(s)ds = p_r(r)dr$$

Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

$$s = T(r) = (L - 1) \int_0^r p_r(w) dw$$

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dr} &= \frac{dT(r)}{dr} = (L - 1) \frac{d}{dr} \left[\int_0^r p_r(w) dw \right] \\ &= (L - 1) p_r(r) \end{aligned}$$

$$p_s(s) = \frac{p_r(r) dr}{ds} = p_r(r) \bigg/ \left(\frac{ds}{dr} \right) = p_r(r) \bigg/ ((L - 1) p_r(r)) = \frac{1}{L - 1}$$

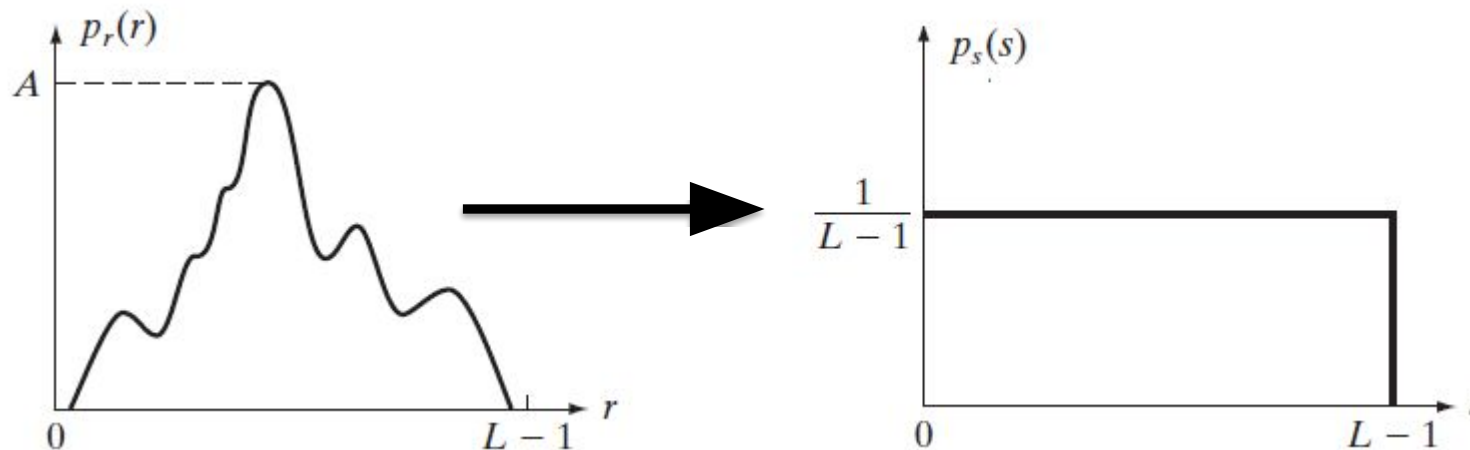
Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

Podemos reconocer simplemente por inspección que $p_s(s) = 1/(L-1)$

tiene la **forma de una PDF uniforme**. Esto es, hemos demostrado que llevando a cabo la transformación de intensidad

$s = T(r) = (L-1) \int_0^r p_r(w) dw$ produce una **PDF uniforme** a partir de. $p_r(s)$



Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

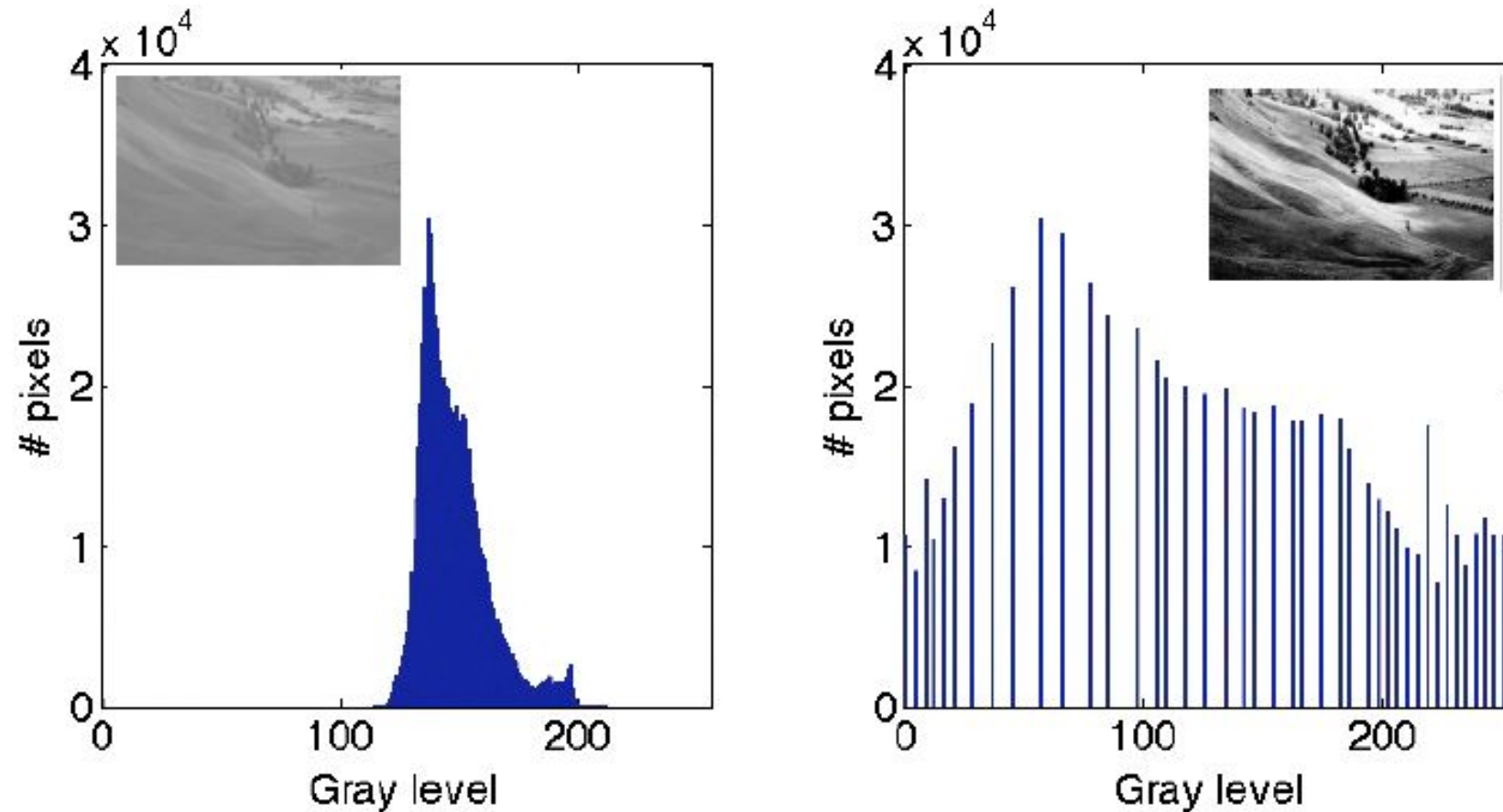
En este ejemplo podemos ver una **imagen con muy poco contraste**, la cual cuál fue corregida haciendo uso de ecualización de histogramas



Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

En este ejemplo podemos ver una **imagen con muy poco contraste**, la cual cuál fue corregida haciendo uso de ecualización de histogramas



Mejora y restauración de imágenes digitales

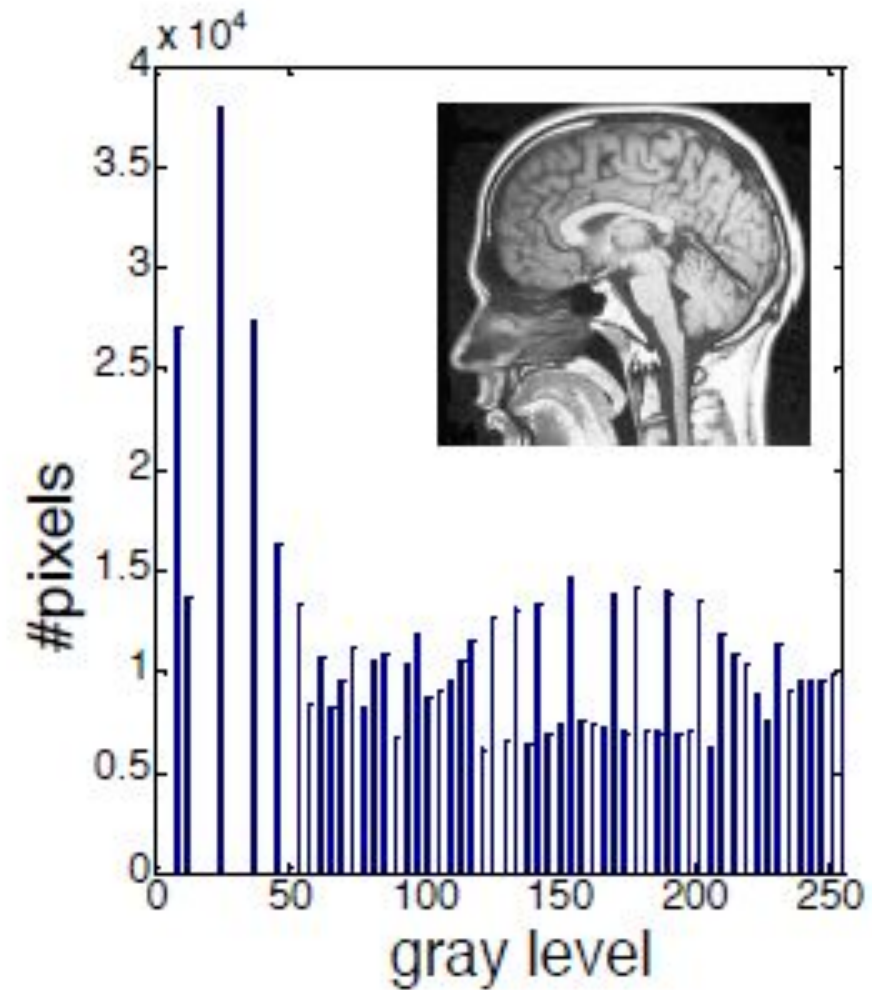
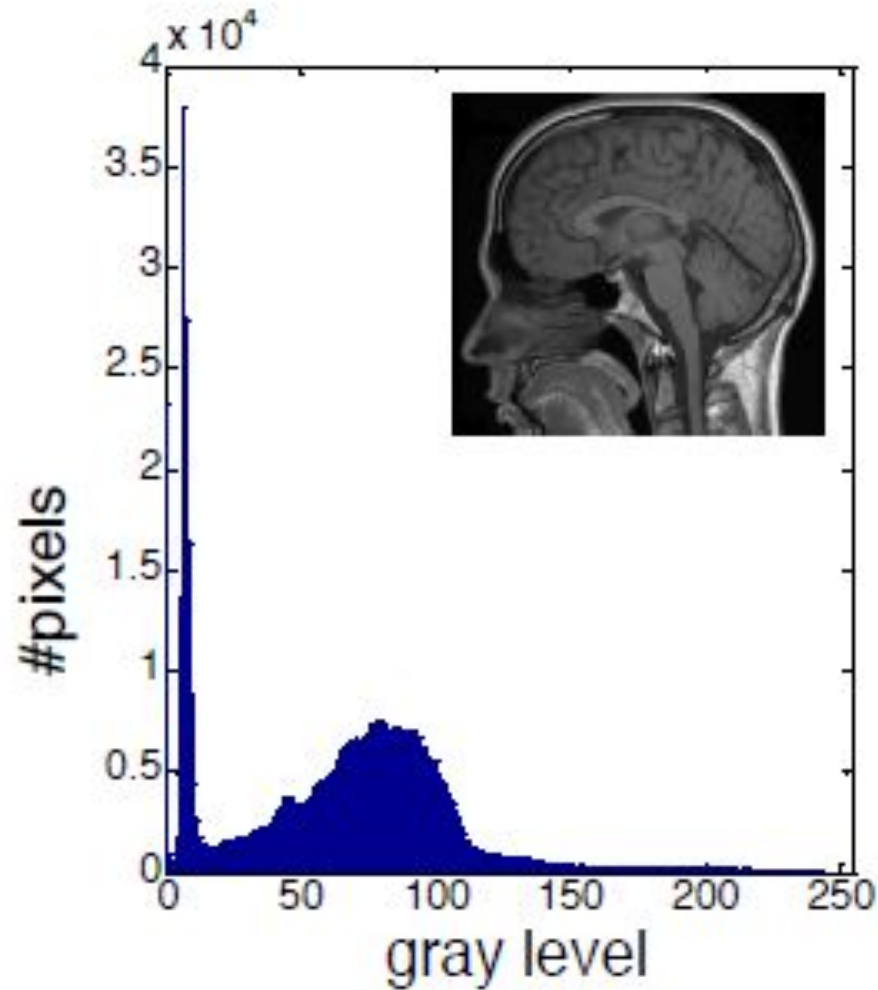
Mejoramiento por Histogramas

En este ejemplo podemos ver una **imagen con muy poco contraste**, la cual cuál fue corregida haciendo uso de ecualización de histogramas



Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas



Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

Supongamos que tenemos una **imagen a 3-bit (L=8) de 64×64 píxeles** ($MN = 4096$), que tiene una PDF de intensidades como la de la tabla

r_k	n_k	$p_r(r_k) = n_k/MN$
$r_0 = 0$	790	0.19
$r_1 = 1$	1023	0.25
$r_2 = 2$	850	0.21
$r_3 = 3$	656	0.16
$r_4 = 4$	329	0.08
$r_5 = 5$	245	0.06
$r_6 = 6$	122	0.03
$r_7 = 7$	81	0.02

Obtenga la **función de transformación** por Ec. De Hist. y dé $p_s(s_k)$ para cada s_k .

Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

$$s_0 = T(r_0) = 7 \sum_{j=0}^0 p_r(r_j) = 7 \times 0.19 = 1.33 \quad \rightarrow 1$$

$$s_1 = T(r_1) = 7 \sum_{j=0}^1 p_r(r_j) = 7 \times (0.19 + 0.25) = 3.08 \quad \rightarrow 3$$

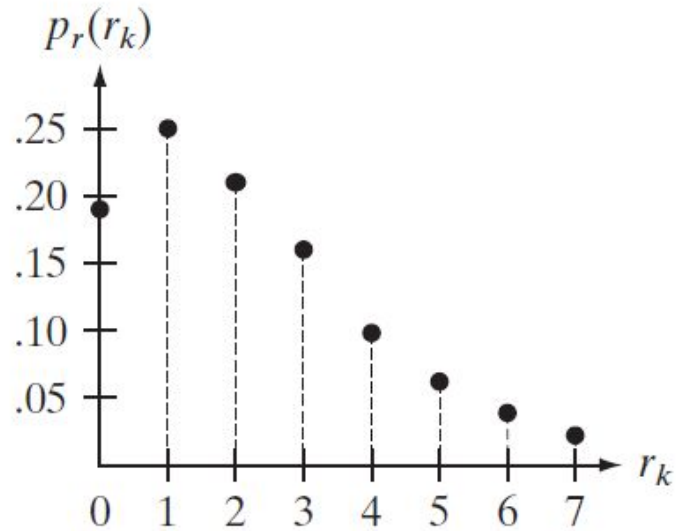
$$s_2 = 4.55 \quad \rightarrow 5 \qquad s_3 = 5.67 \quad \rightarrow 6$$

$$s_4 = 6.23 \quad \rightarrow 6 \qquad s_5 = 6.65 \quad \rightarrow 7$$

$$s_6 = 6.86 \quad \rightarrow 7 \qquad s_7 = 7.00 \quad \rightarrow 7$$

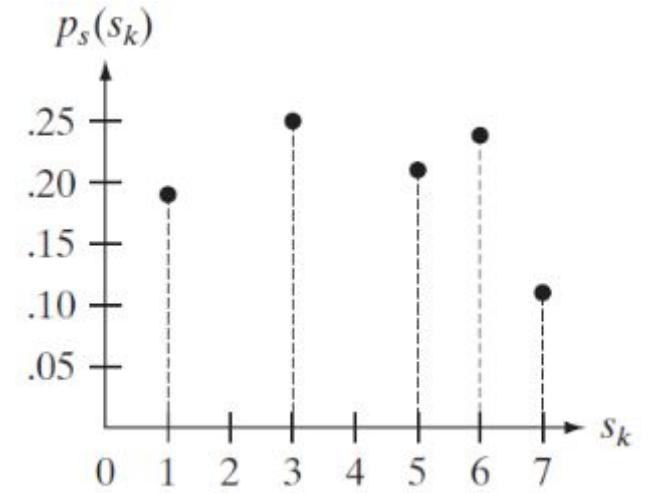
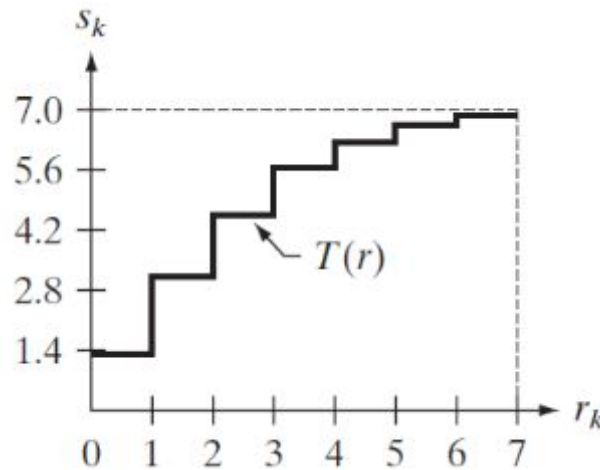
Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas



Histograma de entrada

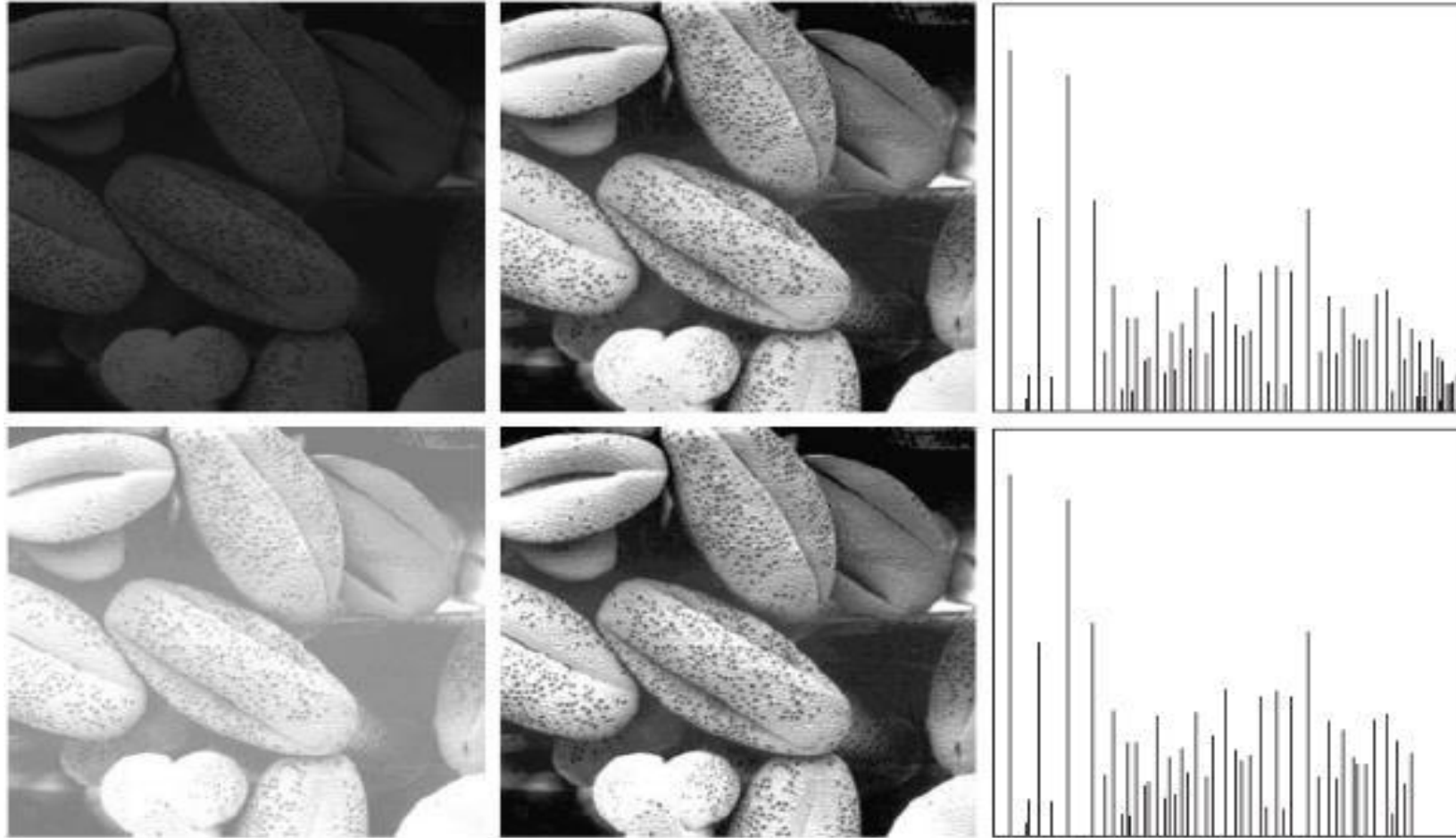
Función de transformación



Histograma de salida

Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

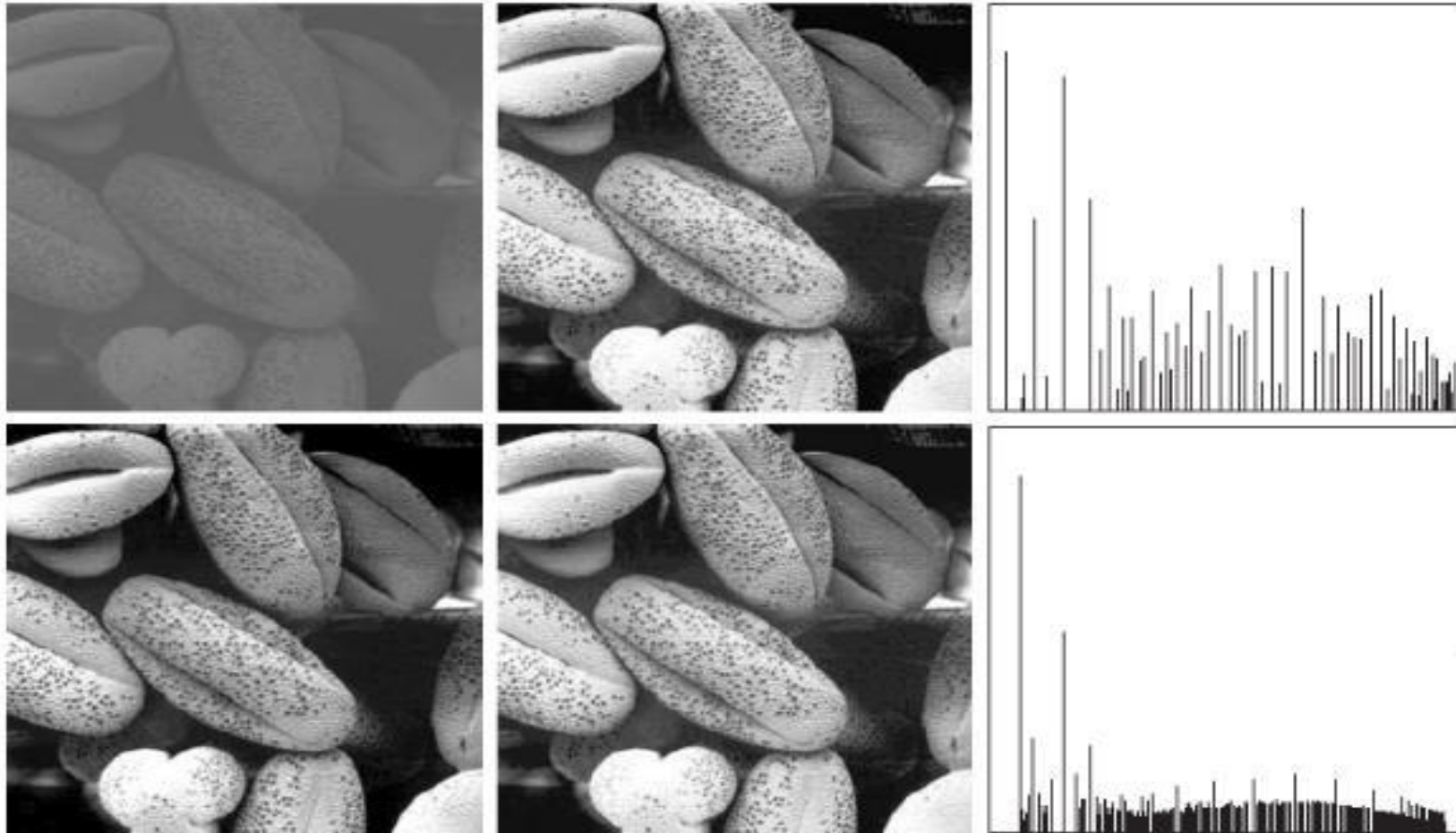


Histograma de una imagen **obscura** mejorada por E.H.

Histograma de una imagen **brillante** mejorada por E.H.

Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

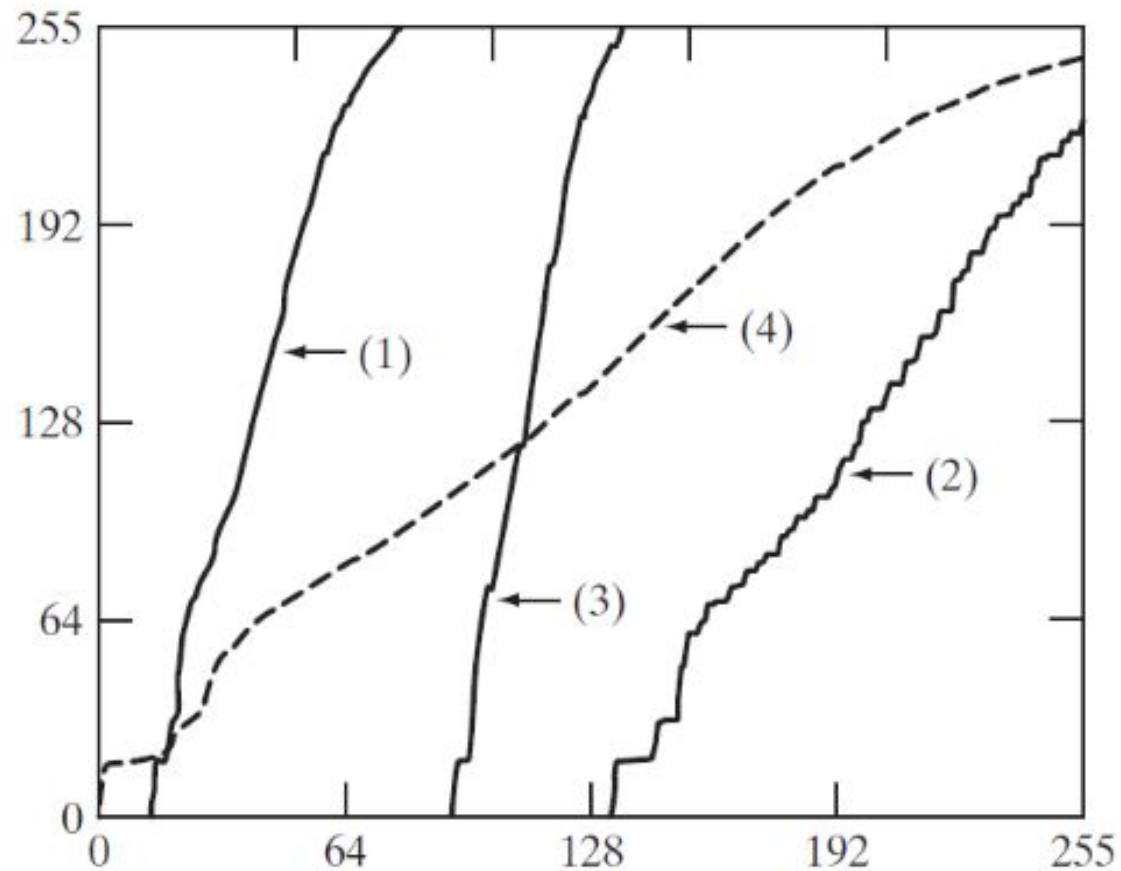


Histograma de una imagen con **poco contraste** mejorada por E.H.

Histograma de una imagen con **buen contraste** mejorada por E.H.

Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas



Los histogramas fueron obtenidos usando **funciones de transformación** obtenidas con

$$s_k = T(r_k) = (L - 1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j)$$
$$= \frac{(L - 1)}{MN} \sum_{j=0}^k n_j \quad k = 0, 1, 2, \dots, L - 1$$

Cada función de transformación produce un histograma, nótese que la **F.T. (4) es casi lineal**

Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

- * La **ecualización de histogramas** automáticamente determina una función de transformación que busca producir una imagen con un **histograma uniforme**
- * Sin embargo, existen **algunas aplicaciones** en las cuales basarse en un histograma uniforme **no es el mejor acercamiento**
- * En particular, es útil algunas veces poder **especificar la forma del histograma** que deseamos que la imagen procesada contenga
- * El método usado para **generar una imagen** con un histograma predeterminado se conoce como *histogram matching* o ***histogram specification***.

Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

Dejemos que s sea una **variable aleatoria** con la propiedad

$$s = T(r) = (L - 1) \int_0^r p_r(w) dw$$

Supongamos además que definimos una **variable z** con la propiedad

$$G(z) = (L - 1) \int_0^z p_z(t) dt = s$$

donde t es una variable de integración “dummy”. Sigue, a partir de estas dos ecuaciones que **$G(z) = T(z)$** y por lo tanto, que z debe satisfacer la condición

$$z = G^{-1}[T(r)] = G^{-1}(s)$$

$T(r)$ puede ser obtenida de (1) cuando **$p_r(r)$ haya sido estimada** de la imagen de entrada. De forma similar, **$G(z)$** puede ser obtenida (2) porque **$p_z(z)$ es dada**

Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

Estas expresiones muestran que una imagen cuyos niveles de intensidad tienen una **PDF especificada** puede ser **obtenida a partir de imagen dada** usando el procedimiento siguiente

1. Obtener $p_r(r)$ de una imagen de entrada y usar eq (1) para **determinar las s**.
2. Usar la **PDF especificada** (2) para obtener la **función de transf. $G(z)$** .
3. Obtener la inversa de $z = G^{-1}(s)$, pues z se obtiene de s , este proceso es un mapeo de s a z , donde los últimos son los **valores deseados**
4. Obtener la **imagen de salida** ecualizando la imagen de entrada con Eq. (1), los valores de los pixeles son las s . Para cada s , realizar $z = G^{-1}(s)$, para **obtener el pixel** correspondiente en la **imagen de salida**

Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

Asumiendo **valores de intensidad continuos**, supongamos que una imagen tiene la **PDF siguiente**

$$p_r(r) = \begin{cases} \frac{2r}{(L-1)^2}, & \text{for } 0 \leq r \leq L-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Encontrar la **función de transformación** que producirá **una imagen cuya PDF es**

$$p_z(z) = \begin{cases} \frac{3z^2}{(L-1)^3}, & \text{for } 0 \leq z \leq (L-1) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

Encontrar la **transformación** por E.H., para la **imagen de entrada**

$$s = T(r) = (L-1) \int_0^r p_r(w) dw = (L-1) \int_0^r \frac{2w}{(L-1)^2} dw = \frac{r^2}{L-1}$$

Encontrar la **transformación** por E.H. para el **histograma especificado**

$$G(z) = (L-1) \int_0^z p_z(t) dt = (L-1) \int_0^z \frac{3t^2}{(L-1)^3} dt = \frac{z^3}{(L-1)^2} = s$$

La **función de transformación** esta dada por

$$z = \left[(L-1)^2 s \right]^{1/3} = \left[(L-1)^2 \frac{r^2}{L-1} \right]^{1/3} = \left[(L-1) r^2 \right]^{1/3}$$

Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

Obtener $p_r(r_j)$ de la imagen de entrada, así como los valores de s_k , redondear el valor a un **entero en el rango $[0, L-1]$** .

$$s_k = T(r_k) = (L-1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j) = \frac{(L-1)}{MN} \sum_{j=0}^k n_j$$

Usar la **PDF especificada**, obtener la función de **transformación $G(z)$** , redondear el valor a un entero en el rango $[0, L-1]$.

$$G(z_q) = (L-1) \sum_{i=0}^q p_z(z_i) = s_k$$

Realizar el **mapeo de s_k a z_q**

$$z_q = G^{-1}(s_k)$$

Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

Supongamos que tenemos una **imagen de 3bit (L=8)** de 64×64 pixeles ($MN = 4096$), con una **PDF de intensidades** mostrada en la table izquierda.

Obtenga la **función de transformación** y la imagen de salida con el **histograma especificado** en la table de la derecha

r_k	n_k	$p_r(r_k) = n_k/MN$
$r_0 = 0$	790	0.19
$r_1 = 1$	1023	0.25
$r_2 = 2$	850	0.21
$r_3 = 3$	656	0.16
$r_4 = 4$	329	0.08
$r_5 = 5$	245	0.06
$r_6 = 6$	122	0.03
$r_7 = 7$	81	0.02

z_q	Specified $p_z(z_q)$	Actual $p_z(z_k)$
$z_0 = 0$	0.00	0.00
$z_1 = 1$	0.00	0.00
$z_2 = 2$	0.00	0.00
$z_3 = 3$	0.15	0.19
$z_4 = 4$	0.20	0.25
$z_5 = 5$	0.30	0.21
$z_6 = 6$	0.20	0.24
$z_7 = 7$	0.15	0.11

Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

Obtenemos los **valores del histograma ecualizado** (ej. anterior)

$$s_0 = 1, s_1 = 3, s_2 = 5, s_3 = 6, s_4 = 7, s_5 = 7, s_6 = 7, s_7 = 7.$$

Calculamos todos los valores de la **función de transformación G**,

$$G(z_0) = 7 \sum_{j=0}^0 p_z(z_j) = 0.00 \quad \rightarrow 0$$

$$G(z_1) = 0.00 \quad \rightarrow 0 \quad G(z_2) = 0.00 \quad \rightarrow 0$$

$$G(z_3) = 1.05 \quad \rightarrow 1 \quad G(z_4) = 2.45 \quad \rightarrow 2$$

$$G(z_5) = 4.55 \quad \rightarrow 5 \quad G(z_6) = 5.95 \quad \rightarrow 6$$

$$G(z_7) = 7.00 \quad \rightarrow 7$$

Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

$$s_0 = 1, s_1 = 3, s_2 = 5, s_3 = 6, s_4 = 7, s_5 = 7, s_6 = 7, s_7 = 7.$$

Mapeo de s_k a z_q

s_k	\rightarrow	z_q
1	\rightarrow	3
3	\rightarrow	4
5	\rightarrow	5
6	\rightarrow	6
7	\rightarrow	7



$$r_k \rightarrow z_q$$

$$0 \rightarrow 3$$

$$1 \rightarrow 4$$

$$2 \rightarrow 5$$

$$3 \rightarrow 6$$

$$4 \rightarrow 7$$

$$5 \rightarrow 7$$

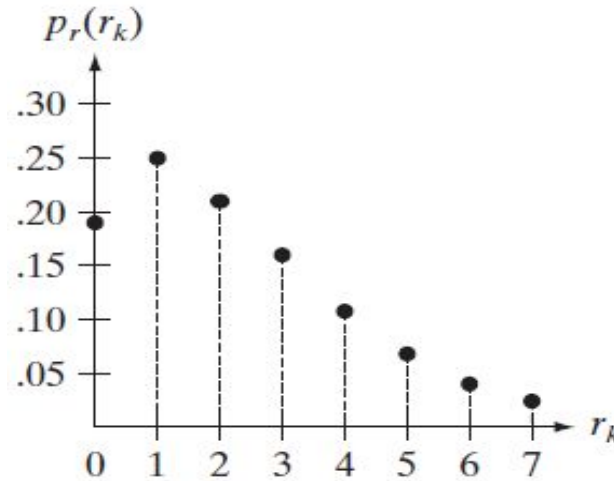
$$6 \rightarrow 7$$

$$7 \rightarrow 7$$

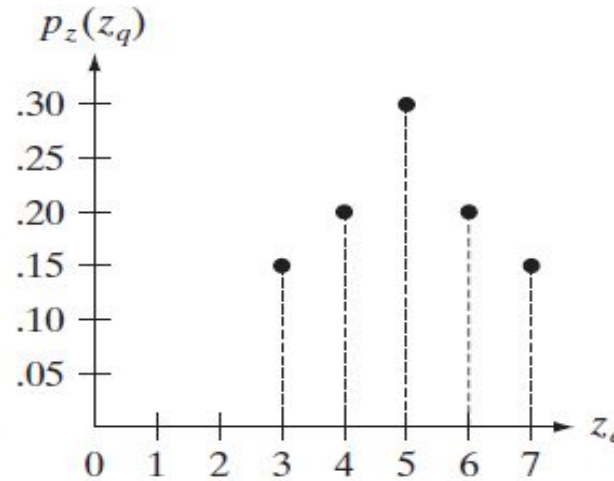
Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

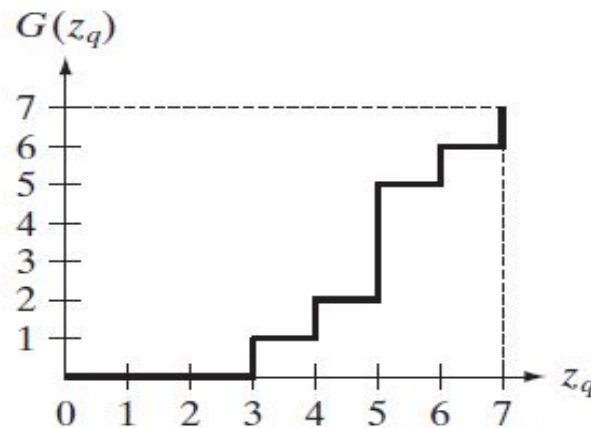
Histograma
de la imagen
de 3 bits



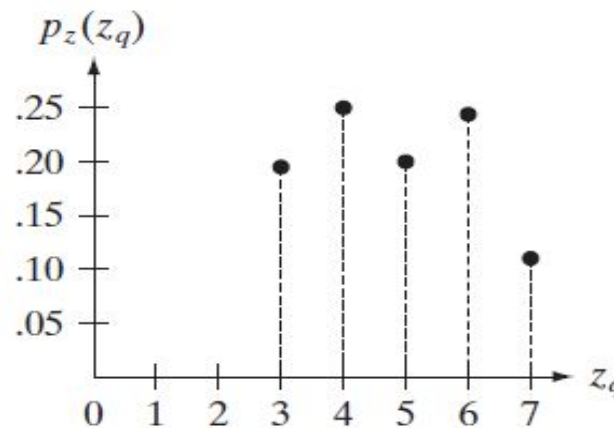
Histograma
especificado
para
transformación



Transformación
obtenida del
histograma
especificado



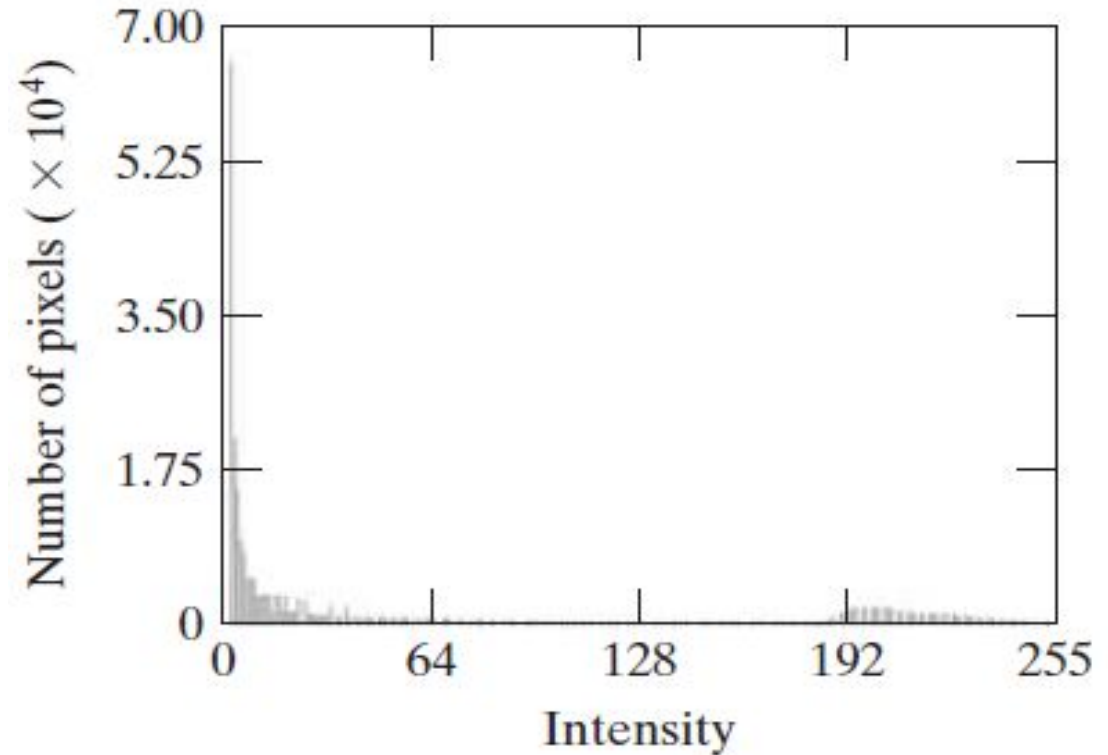
Histograma
Resultante
de la
transformación



Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

En este ejemplo podemos ver una **imagen con muy oscura** de la luna, en esta caso, un simple cambio de brillo y contraste no funcionaria



Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

a) Transformación

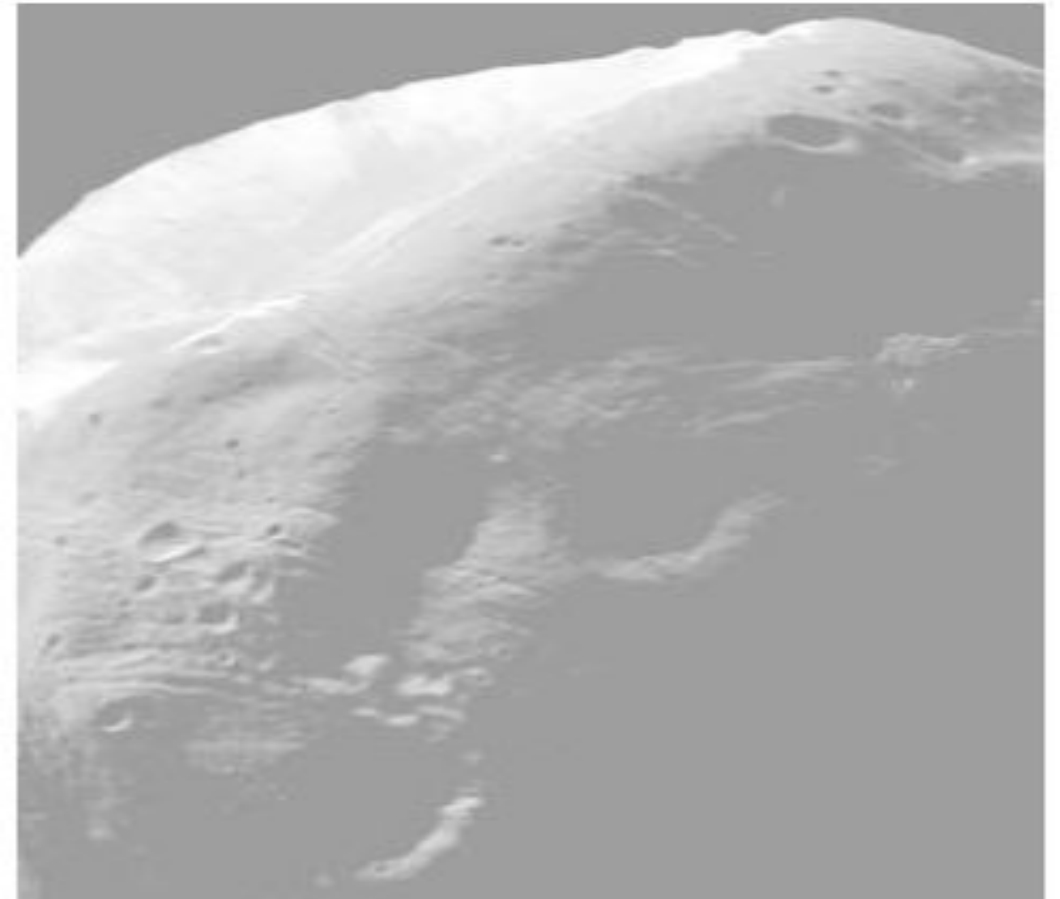
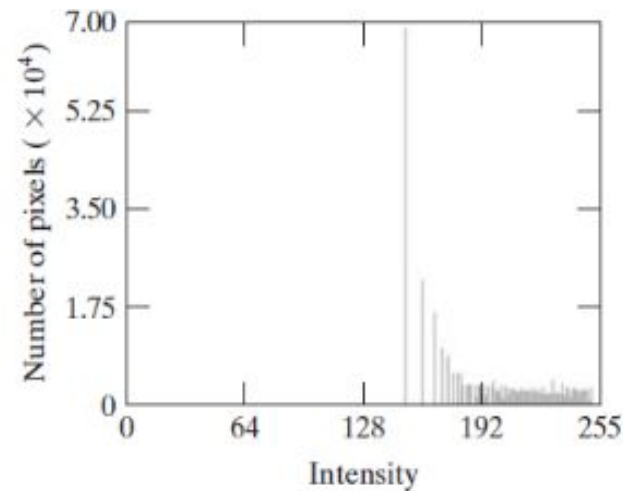
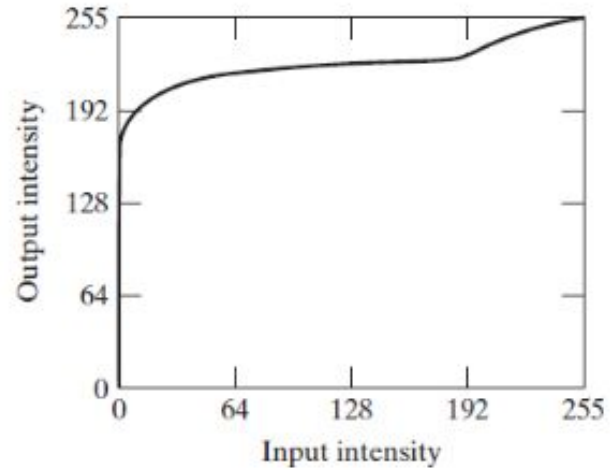
obtenida de la
ecualización de H
convencional

b) Histograma

resultante de la
transformación

c) Resultado

imagen de
Bajo contraste
“deslavada”

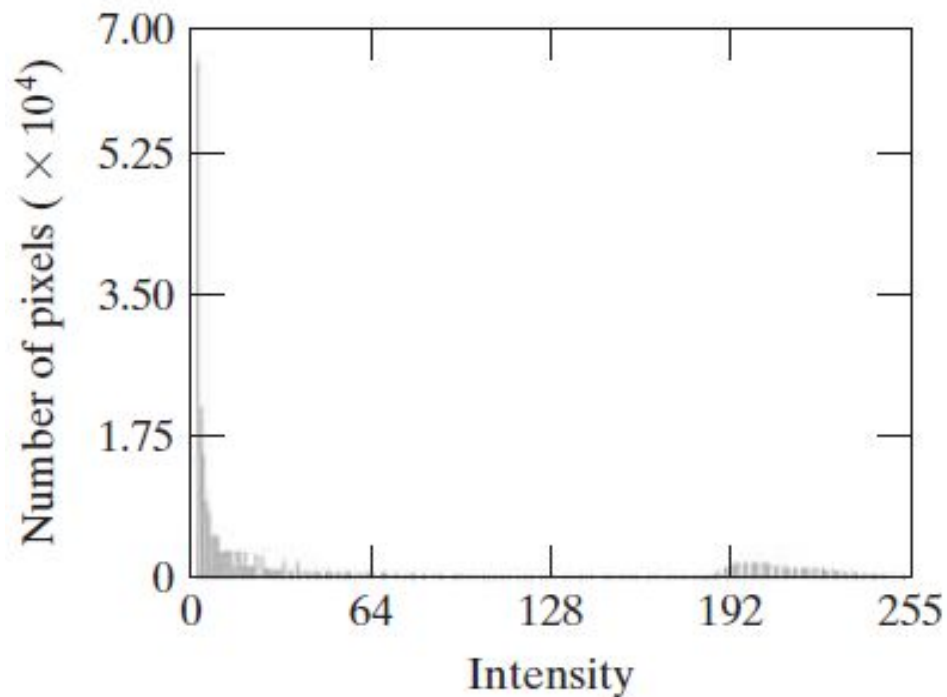


Mejora y restauración de imágenes digitales

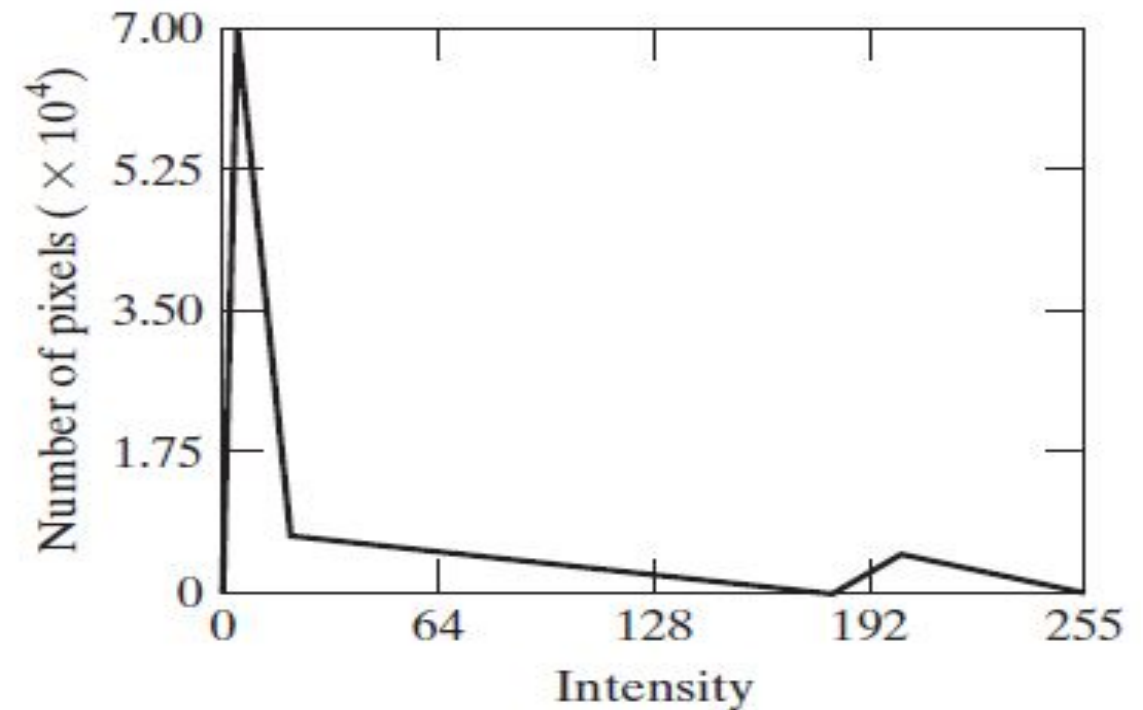
Mejoramiento por Histogramas

Para corregir el problema, podemos **especificar un histograma** con una **transición más suave** en la región de píxeles oscuros

Histograma original



Histograma especificado



Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

a) Transformación

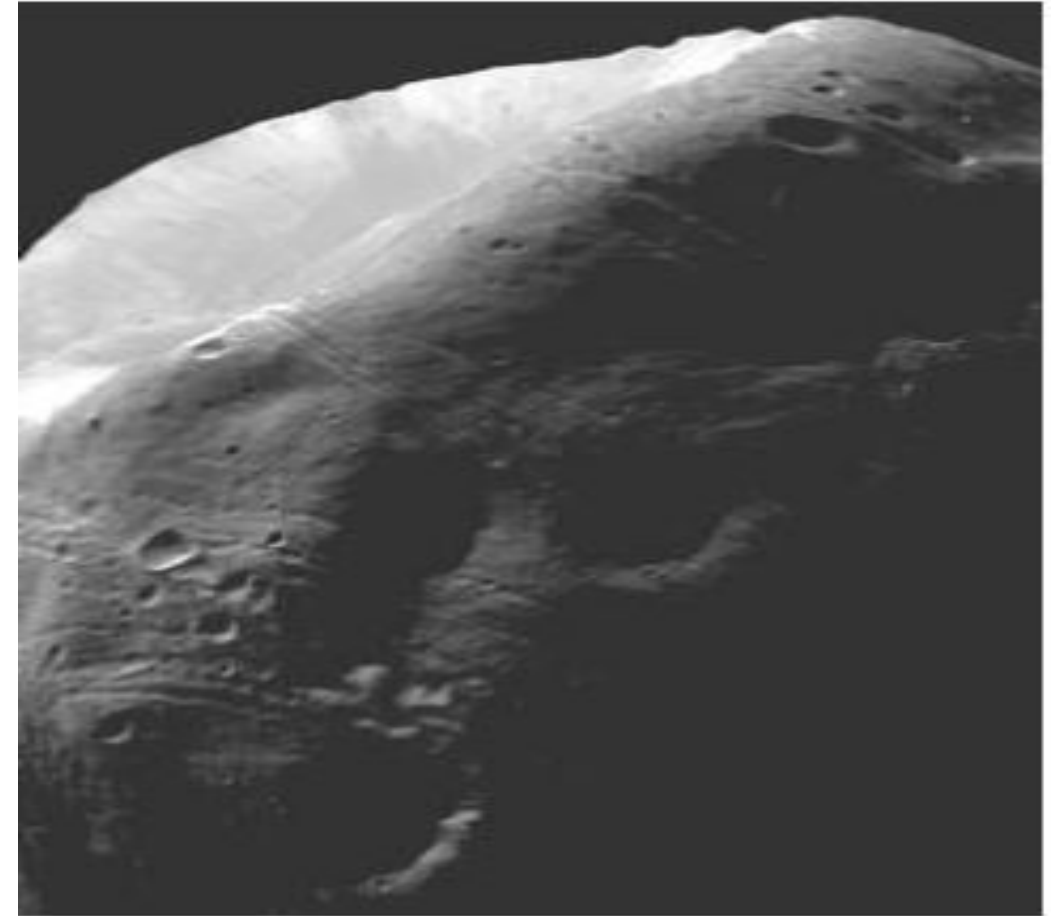
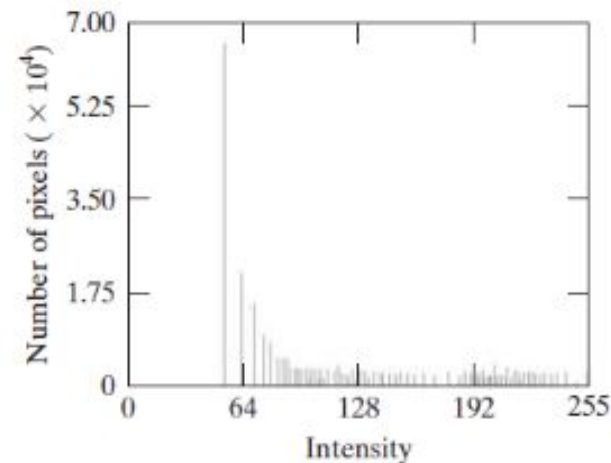
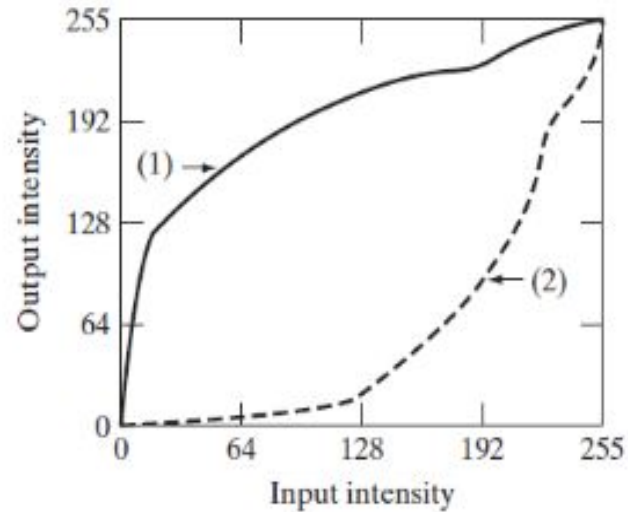
obtenida de la ecualización del hist. especificado y su inversa

b) Histograma

Resultante de aplicar la función De mapeo (2)

c) Resultado

Imagen con mejor distribución de niveles de gris



Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

The procedure is to define a neighborhood and move its center from pixel to pixel.

At each location, the histogram of the points in the neighborhood is computed and either a histogram equalization or histogram specification transformation function is obtained

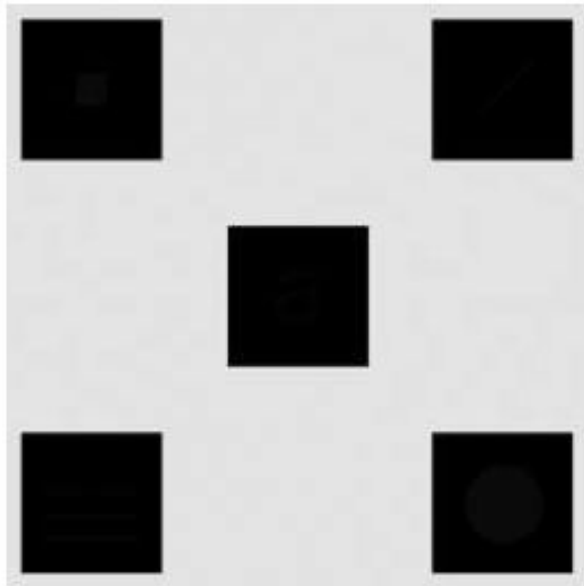
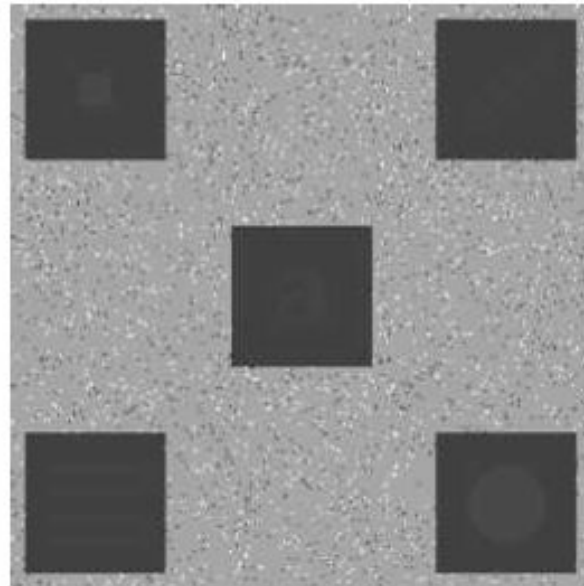
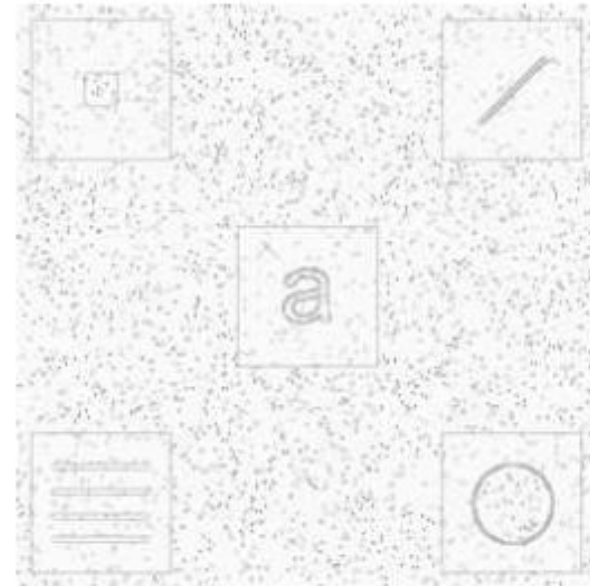


Imagen original



Histograma global



Histogramas locales

Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

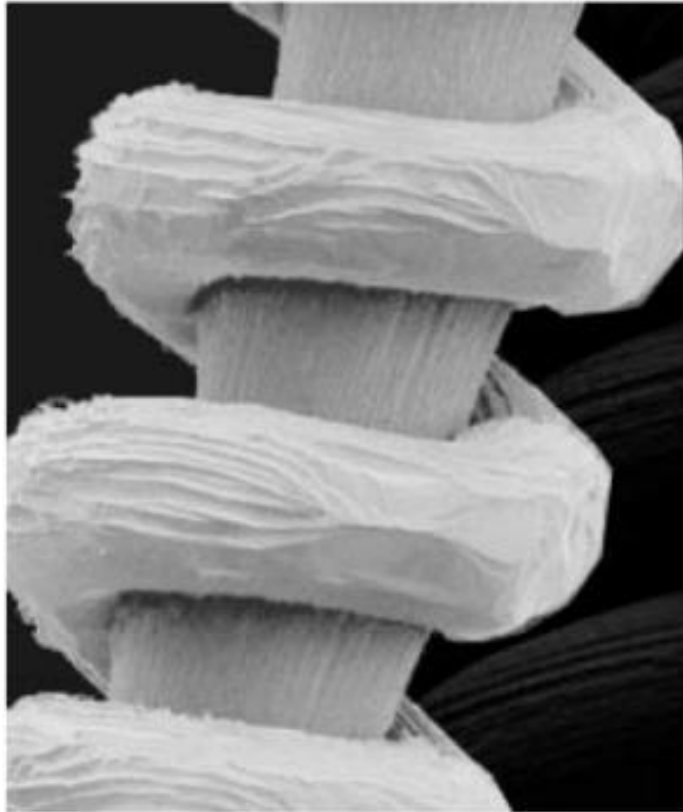
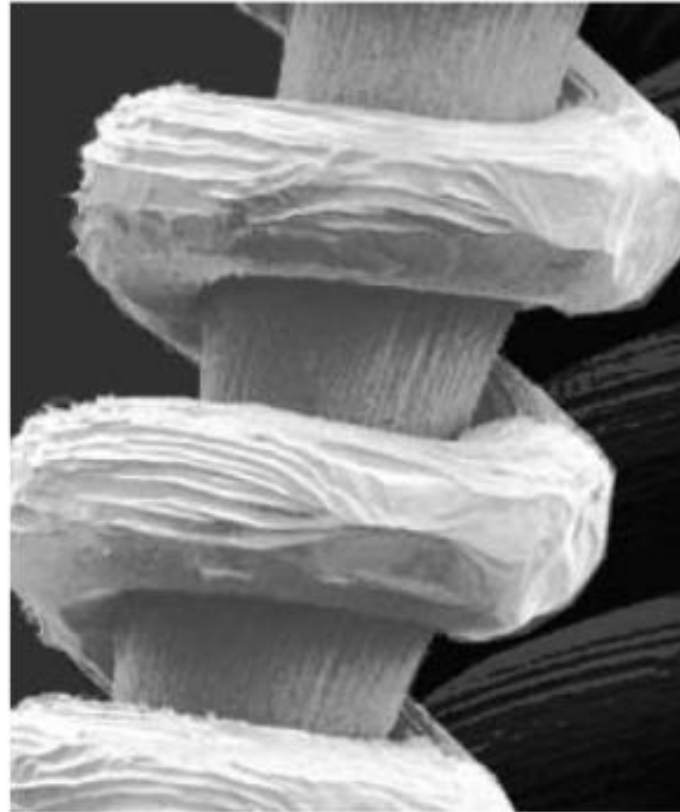


Imagen original



Histograma global

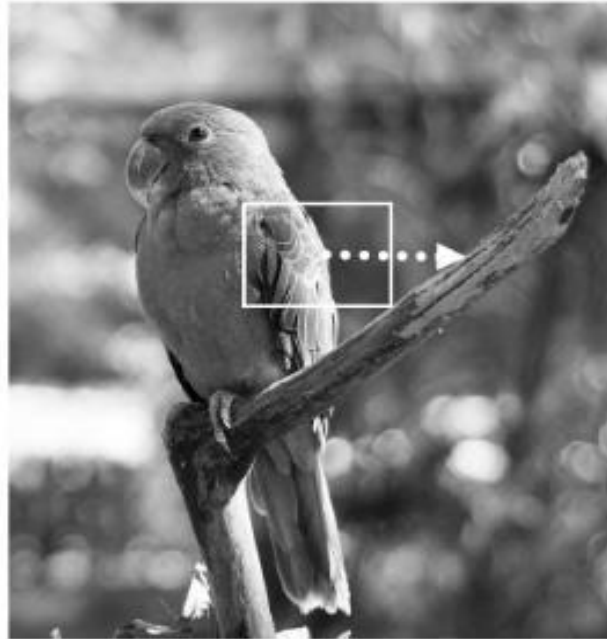


Histogramas locales

Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

Sliding
windows



Una ventana de cierto tamaño es deslizada a la largo de la imagen
histograma (y mapping) p/pixel



Tiling
windows



Subdividir imagen en regiones, calcular Histograma y mapping, mitigar efecto de **“blocking”**
usando smooth blending

Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

Imagen original
Perico



Histograma Global
Perico

Histograma Local
Perico
Tiles: 8 x 8



Histograma Local
Perico
Tiles: 16 x 16

Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

Imagen original
X-ray dental



Histograma Global
X-ray dental

Histograma Local
X-ray dental
Tiles: 8 x 8



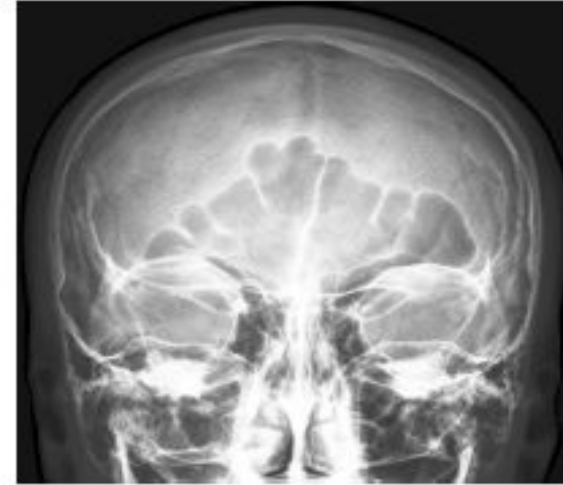
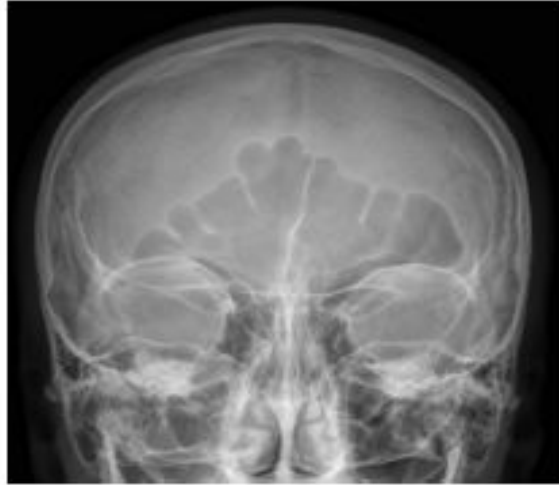
Histograma Local
X-ray dental
Tiles: 16 x 16

Mejora y restauración de imágenes digitales

Mejoramiento por Histogramas

**Imagen
original**

X-ray craneal

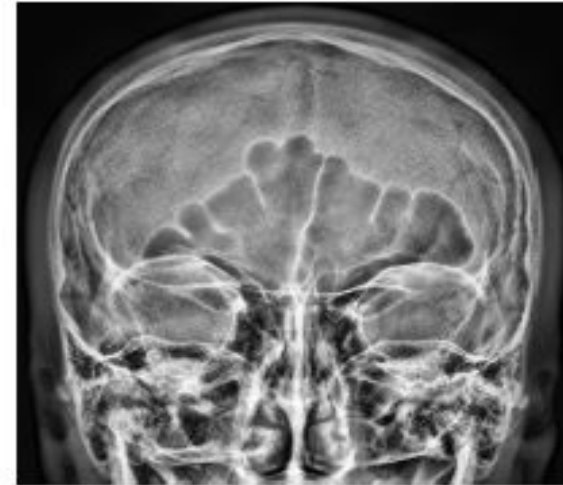
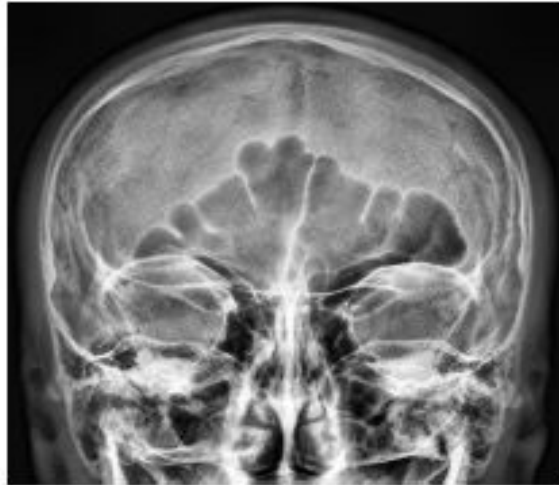


**Histograma
Global**

X-ray craneal

**Histograma
Local**

X-ray craneal
Tiles: 8 x 8



**Histograma
Local**

X-ray craneal
Tiles: 16 x 16