


---

# SiCP2, SiCF2, SiGP2

## Documentation et théorie

---

*Auteur :*  
Stephan RUNIGO

22 août 2019

# Résumé

**Objet :** Ce document accompagne les programmes SiCP2, SiCF2 et SiGP2.

**Contenu :** Il contient un manuel d'installation et d'utilisation ainsi qu'un certain nombre de développements théoriques.

**Public concerné :** Les enseignants, les étudiants et les passionnés de physique et d'informatique.

SiCP2, SiCF2 et SiGP2 sont des simulateurs numériques d'équations physiques offrant une représentation graphique et une interaction dynamique avec les paramètres physiques. Destinés à un usage ludique et pédagogique, ils permettent de visualiser le comportement des systèmes physiques simulés. Cette documentation accompagne ces programmes.

Les deux premiers chapitres présentent les simulateurs, fournissent une procédure d'installation et précisent les commandes permettant l'interaction avec les programmes.

Les deux chapitres suivants fournissent un certain nombre de développements théoriques liés aux phénomènes physiques et à la numérisation des équations.

Enfin, le dernier chapitre rassemble les informations liées à la structure des programmes.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation</b>	<b>1</b>
1.1	Présentation des simulateurs	1
1.1.1	SiCP2, chaîne de pendules couplés	1
1.1.2	SiCF, corde vibrante et transformée de fourier	2
1.1.3	SiGP, thermodynamique statistique	2
1.2	Présentation du projet Boltzmann	4
1.3	Installation des simulateurs	4
<b>2</b>	<b>Utilisation des simulateurs</b>	<b>5</b>
2.1	SiCF et SiCP	5
2.1.1	Résumé des options	5
2.2	SiCP2	6
2.2.1	Panneau de droite	6
2.2.2	Panneau du bas	6
2.2.3	Panneau central	6
2.2.4	Clavier	6
2.2.5	Graphisme SiCP	6
2.2.6	Sauvegarde et ré-initialisation dans SiCF	6
2.2.6.1	Fonction élémentaire	6
2.2.6.2	Quanton	7
2.2.6.3	Fichiers de ré-initialisation	7
2.3	SiGP	7
2.3.1	Options et commande du clavier	7
2.3.1.1	Résumé des options	7
2.3.2	Résumé du clavier	7
2.3.2.1	Cloison centrale	8
2.3.2.2	Thermostats	8
2.3.2.3	Taille du trou	8
2.3.2.4	Diamètre des particules	8
2.3.2.5	Contrôle de la simulation	8
2.3.2.6	Information	9
<b>3</b>	<b>Modèles physiques</b>	<b>10</b>
3.1	La chaîne de pendule	10
3.1.1	Le pendule pesant	10
3.1.2	Les pendules couplés	10
3.1.3	La chaîne de pendule	10
3.1.4	L'équation de la chaîne de pendule	11
3.1.5	Expressions des forces et des énergies associées	11
3.1.6	Résumé des forces et des énergies	12
3.2	L'équation de Sine-Gordon	12
3.2.1	L'équation de Sine-Gordon	12
3.2.2	Les solitons, solutions de l'équation de Sine-Gordon	13

3.2.3	Phénomènes physiques associés aux solitons . . . . .	13
3.3	Les équations de Turing-Murray . . . . .	13
3.3.1	Phénomènes physiques décrit par des équations non linéaires . . . . .	13
3.4	La corde vibrante . . . . .	13
3.4.1	La corde vibrante . . . . .	13
3.4.2	La transformée de fourrier . . . . .	13
3.5	Les chocs de particules . . . . .	13
3.5.1	Les chocs de particules . . . . .	13
3.5.2	Chocs de deux particules . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Mathématique et numérique</b>	<b>15</b>
4.1	Discrétisation des équations différentielles . . . . .	15
4.1.1	Discrétisation des dérivées . . . . .	15
4.1.1.1	Dérivé symétrisée . . . . .	15
4.1.2	Discrétisation de la relation fondamentale de la dynamique . . . . .	15
4.1.3	Variables réduites . . . . .	16
4.1.4	Résumé des forces et des énergies . . . . .	17
4.2	Discrétisation des chocs de particules . . . . .	17
4.2.1	Modèle numérique . . . . .	17
4.3	Perspective et repère SiCP . . . . .	17
4.3.1	Coordonnées polaires . . . . .	17
4.3.2	Mathématique . . . . .	18
4.3.3	Classes . . . . .	18
4.3.4	Projection . . . . .	18
4.4	Transformée de fourrier rapide . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Développement</b>	<b>19</b>
5.1	Langage et librairies . . . . .	19
5.1.1	C . . . . .	19
5.1.2	SDL 1.2 . . . . .	19
5.1.3	SDL 2 . . . . .	19
5.2	Modèle Vue Controleur . . . . .	19
5.2.1	Les répertoires des simulateurs . . . . .	19
5.2.2	Le modèle . . . . .	19
5.2.3	La vue . . . . .	19
5.2.4	Le controleur . . . . .	19
5.3	Diagrammes . . . . .	20
5.3.1	Inclusion des fichiers dans SiCP2 . . . . .	20
5.3.2	diagramme de classes de SiCP2 . . . . .	20
5.4	Evolution . . . . .	21
5.4.1	La branche ted . . . . .	21
5.4.2	Sensibilité aux conditions initiales . . . . .	21
5.5	Valeurs implicites . . . . .	21
5.5.1	Réglage de dt, durée et pause . . . . .	21
5.5.2	Limite infinie . . . . .	21
5.5.3	dt et dissipation maximale . . . . .	21
5.5.4	Limitation des valeurs des variables . . . . .	22
5.5.4.1	Paramètres physiques . . . . .	22
5.5.4.2	Paramètres dynamiques . . . . .	22
<b>A</b>	<b>Première version des simulateurs</b>	<b>23</b>
A.1	Historique . . . . .	23

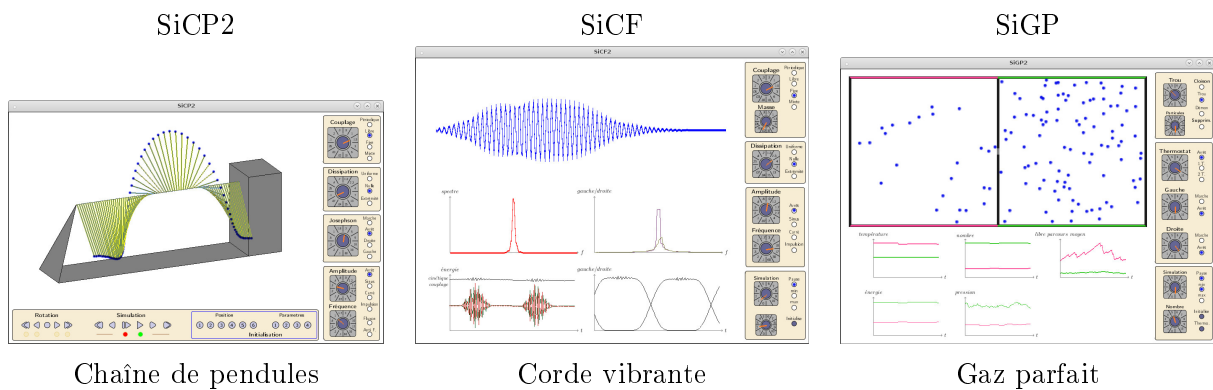
<b>B</b>	<b>Commandes du clavier</b>	<b>24</b>
B.1	Résumé du clavier SiCF et SiCP	24
B.2	Détails des contrôles	25
B.2.1	Équation simulée	25
B.2.2	Paramètres des pendules	25
B.2.3	Forme de la dissipation	25
B.2.4	Conditions aux limites	26
B.2.5	Moteur premier pendule	26
B.2.6	Moteur Josephson	26
B.2.7	Contrôle de la simulation	26
B.2.8	Information	26
B.2.9	Sauvegarde et ré-initialisation dans SiCF	26
B.2.9.1	Fonction élémentaire	27
B.2.9.2	Quanton	27
B.2.9.3	Fichiers de ré-initialisation	27
	<b>Bibliographie</b>	<b>28</b>

# Chapitre 1

## Présentation

### 1.1 Présentation des simulateurs

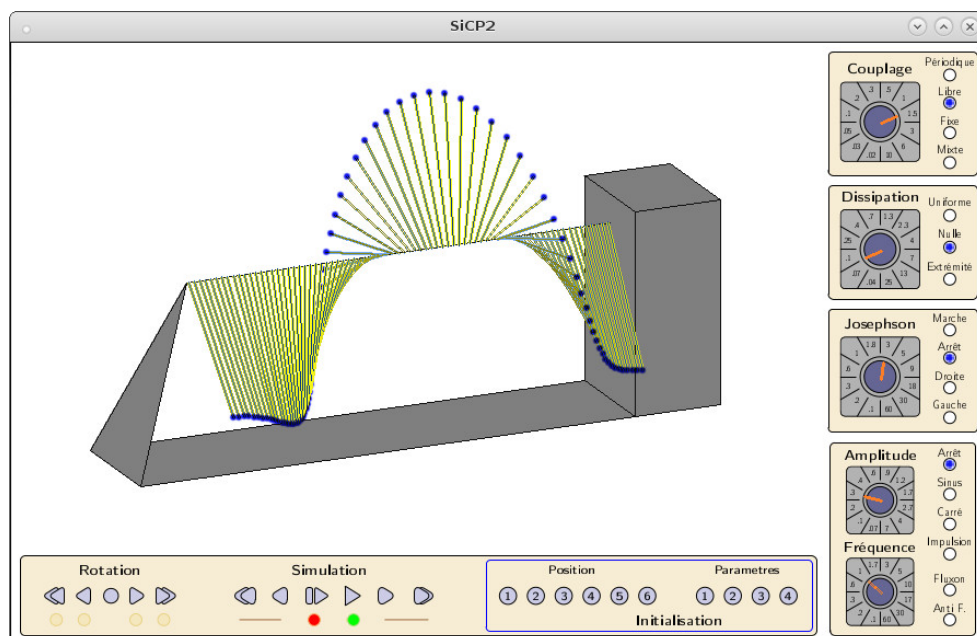
SiCP, SiCF et SiGP sont des programmes permettant l'observation de différents modèles physiques.



Ces programmes offrent une représentation graphique dynamique ainsi qu'une interaction dynamique avec les paramètres physiques.

#### 1.1.1 SiCP2, chaîne de pendules couplés

SiCP est un simulateur de chaîne de pendule. Un moteur sinusoïdale, carré, ou impulsionnel permet de créer une excitation de l'extrémité de la chaîne. Les conditions aux limites peuvent être périodiques, libres ou fixes. La dissipation peut être uniforme ou simuler une extrémité absorbante.

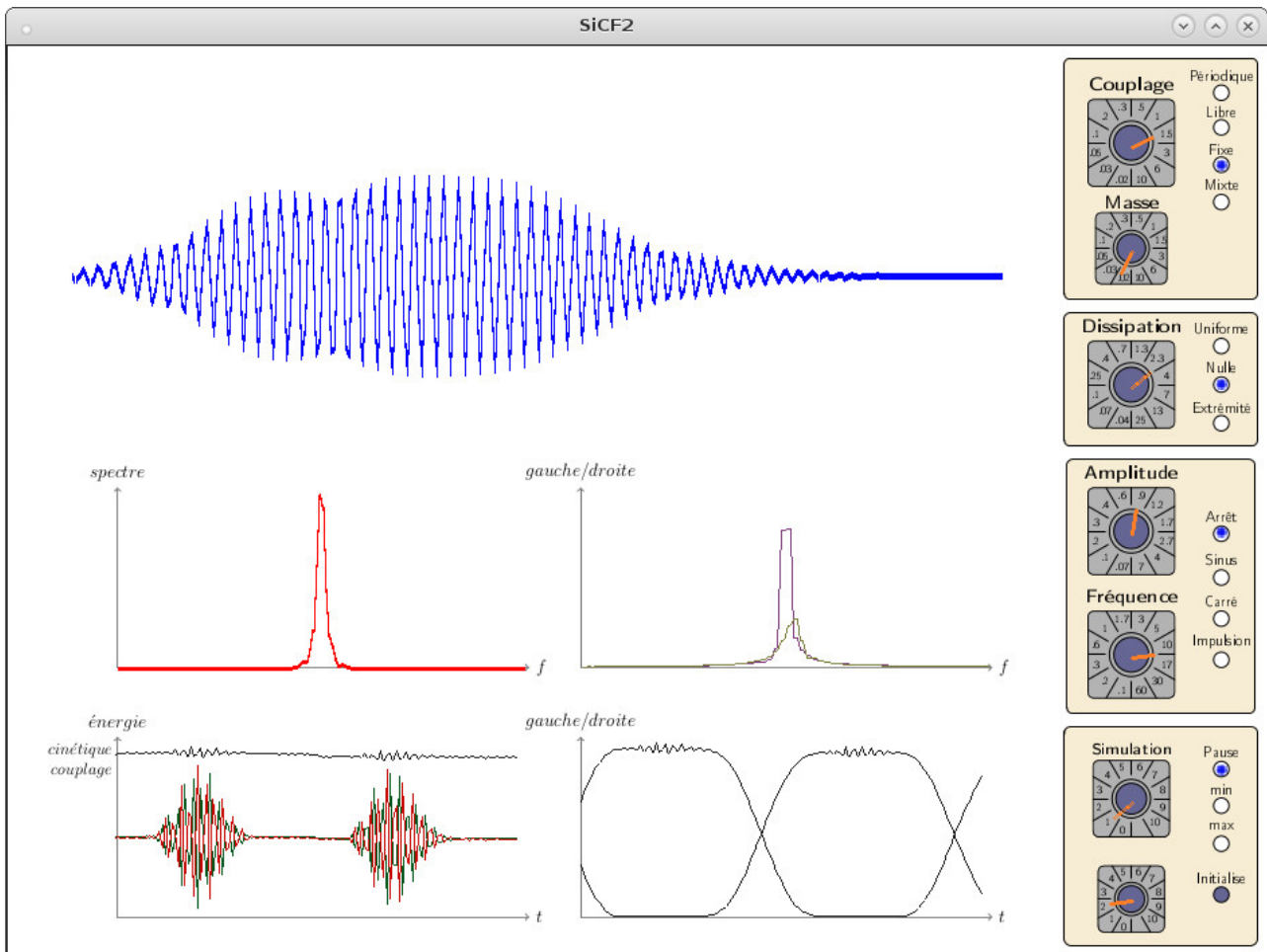


Le programme simule l'équation de sine-gordon. Le contrôle du courant josephson permet d'observer la dynamique des solitons.

### 1.1.2 SiCF, corde vibrante et transformée de fourier

SiCF est un simulateur de corde vibrante permettant la visualisation du spectre en fréquence spatiale de la corde. Un moteur sinusoïdale, carré, ou impulsionnel permet de créer une excitation de l'extrémité de la corde. Les conditions aux limites peuvent être périodiques, libres ou fixes. La dissipation peut être uniforme ou simuler une extrémité absorbante.

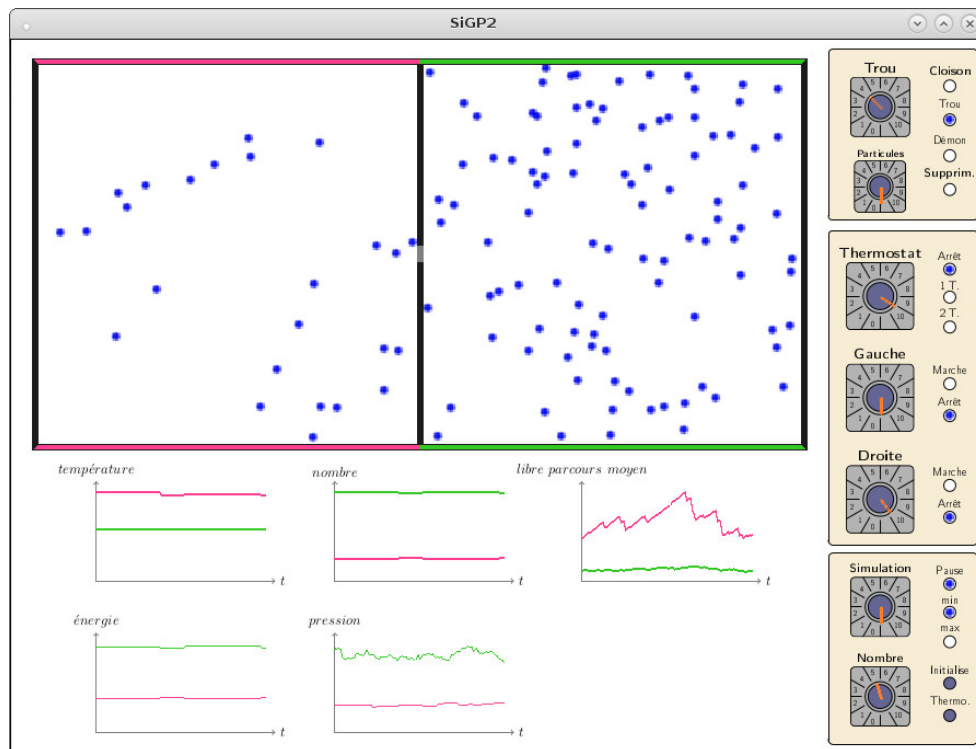
Une dissymétrie de la corde permet d'observer les phénomènes de réflexion et de transmission.



Le programme simule l'équation de la corde vibrante et calcule la transformée de fourier des moitiés droite et gauche de la corde.

### 1.1.3 SiGP, thermodynamique statistique

Le simulateur de gaz parfait SiGP permet de visualiser une interprétation statistique de la détente de Joule, du démon de Maxwell ainsi que du contact avec un ou deux thermostats.



Le programme simule des collisions élastiques de particules entre elles et avec les parois ainsi que l'interaction avec un thermostat. La paroi centrale permet d'observer une détente de joule ou l'action d'un démon de Maxwell.



## 1.2 Présentation du projet Boltzmann

Le projet Boltzmann consiste en une suite de logiciels de simulation physique.

Ce projet promeut

- les logiciels libres

- les sciences physiques

- le langage C et la langue française

Il a pour objectif

- le développement de SiCP, SiCF et SiGP

- de rendre hommage à Ludwig Boltzmann

## 1.3 Installation des simulateurs

Cette section traite de l'installation des simulateurs SiGP, SiCF et SiCP sur un système d'exploitation de type debian. Le téléchargement se fait avec un navigateur internet, la compilation et l'exécution se font dans un terminal. L'installation des outils de compilation nécessite les privilèges du super-utilisateur.

**Installation des outils de compilation** Avec les droits du super-utilisateur

```
apt-get install gcc make libsdl-dev
```

Pour les versions 2 des simulateurs, installer la librairie SDL2 :

```
apt-get install libsdl2-dev
```

**Téléchargement des sources**

Télécharger les fichiers .zip sur github

```
https://github.com/runigo/SiCP/archive/master.zip
```

```
https://github.com/runigo/SiCF/archive/master.zip
```

```
https://github.com/runigo/SiGP/archive/master.zip
```

Décompresser les fichiers .zip

```
unzip SiCP-master.zip
```

```
unzip SiCF-master.zip
```

```
unzip SiGP-master.zip
```

**Compilation**

La commande **make** dans le répertoire des sources produit un fichier exécutable :

- SiCP pour SiCP

- SiCF pour SiCF

- SiGP pour SiGP

**Exécution**

En ligne de commande, avec d'éventuelles options

```
./SiCP [OPTION]
```

```
./SiCF [OPTION]
```

```
./SiGP [OPTION]
```

La fenêtre graphique donne une représentation de la simulation,

Le terminal affiche les informations.

## Chapitre 2

# Utilisation des simulateurs

Ce chapitre traite des interactions entre le programme et l'utilisateur.

### 2.1 SiCF et SiCP

Lorsque le programme est démarré en ligne de commande, il est possible de passer un certain nombre d'options. Ces options sont communiquées au programme à l'aide du nom de l'option suivie d'un nombre. Par exemple pour démarrer SiCF avec un fond sombre et une discrétisation du temps égale à 0,00033 seconde :

```
./SiCF fond 17 dt 0.00033
```

Pour démarrer SiCP avec un fond sombre, un nombre de pendules égale à 50 et trois solitons :

```
./SiCP fond 17 soliton 3 nombre 50
```

Pour démarrer SiCP en exploitant plusieurs options :

```
./SiCP fond 45 support 0 pause 7 duree 998 dt 0.0027 nombre 777 soliton 18
```

#### 2.1.1 Résumé des options

option	valeur	clavier	commande
fond	(fond>0 & fond<255)		Couleur du fond ***
soliton	(soliton > -99 & soliton < 99)	y,h	déphasage entre les extrémités *
dt	(dt > 0.0 & dt < DT_MAX)		discrétisation du temps
frequence	()	p, m	fréquence du générateur
dissipation	()	e, d	dissipation
equation	(equation > 0 & equation < 5)	F1, F2, F3, F4	choix de l'équation
pause	(pause > 5    pause < 555)		temps de pause en ms
duree	()	F9, F10, F11, F12	rythme de la simulation
mode	()	Entrée	Mode -1 : Wait, 1 : Poll
nombre	(nombre > 0 & nombre < 1099)		Nombre de pendules **
aide	()		Affiche l'aide
help	()		Affiche l'aide

*\* Initialise le déphasage entre le dernier pendule et le premier pendule dans le cas des conditions aux limites périodique.*

*\*\* Spécifique à SiCP, nombre < 399 dans SiCP2.*

*\*\*\* Désactivé dans les versions 2.*

## 2.2 SiCP2

SiCP2 possède une interface graphique permettant de modifier les paramètres à l'aide de la souris. Lorsque le programme est démarré en ligne de commande, il est toujours possible de passer un certain nombre d'options. La syntaxe est identique à SiCP :

```
./SiCP2 support 0 dt 0.0027 nombre 177 soliton 7
```

L'utilisation du clavier est identique à SiCP.

### 2.2.1 Panneau de droite

Ce panneau possède cinq boutons rotatifs et 17 boutons "radio". La rotation s'effectue en plaçant le pointeur de la souris au centre d'un de ces boutons et en actionnant la molette. La sélection d'un bouton radio s'effectue en cliquant sur celui-ci.

### 2.2.2 Panneau du bas

### 2.2.3 Panneau central

### 2.2.4 Clavier

### 2.2.5 Graphisme SiCP

Cliquer et déplacer le pointeur de la souris permet de déplacer le point de vue de l'observateur. La touche F8 permet de supprimer/ajouter le support dans SiCP.

### 2.2.6 Sauvegarde et ré-initialisation dans SiCF

Cette fonctionnalité nécessite la présence du répertoire `donnee/enregistrement` dans le répertoire de l'exécutable. La touche majuscule permet d'accéder aux fonctions d'enregistrement et de ré-initialisation des positions des pendules.

Lorsque la touche majuscule est enfoncée, les touches A, Z, E, R, T, Y, U, I, O et P, ainsi que les touches J, K, L et M ré-initialisent la position de la corde dans différentes configurations préréglées.

Les touches W, X, C, V, B et N enregistrent la position de la corde dans l'état actuel, les touches Q, S, D, F, G et H réinitialisent la position de la corde dans ces états enregistrés.

#### 2.2.6.1 Fonction élémentaire

Touche	fonction
A	nulle
Z	impulsion
E	triangle
R	triangle
T	carré
Y	carré

### 2.2.6.2 Quanton

Touche	fonction
U, J	impulsion
I, K	impulsion
O, L	quanton
P, M	quanton

### 2.2.6.3 Fichiers de ré-initialisation

Les fichiers de ré-initialisation se trouvent dans le répertoire `donnee/enregistrement`. Ils peuvent être édités. Le nom de ces fichiers doit être respecté afin de pouvoir être ouvert par le programme (ces noms sont utilisés par `donnees/fichier.c`).

## 2.3 SiGP

Lorsque le programme est démarré en ligne de commande, il est possible de passer un certain nombre d'option. Elles sont communiquées au programme à l'aide du nom de l'option suivie d'un nombre. Par exemple pour démarrer SiGP avec deux thermostats et sans cloison :

```
./SiGP thermostat 2 cloison 0
```

### 2.3.1 Options et commande du clavier

#### 2.3.1.1 Résumé des options

option	valeur	clavier	commande
pause	$5 < d < 555$		pause entre les affichages en ms
duree	$1 < d < 99$	flèches	vitesse de la simulation
cloison	$-3 < d < 3$	w-n	cloison si $< > 0$
thermostat	$-2 < d < 2$	o , l	système isolé si $= 0$
vitesse	$0.03 < f < 33.3$		Vitesse initiale
temperature	$0.0000003 < f < 90\ 000$	p, m	Température thermostat
gauche	$0.0000003 < f < 90\ 000$	u, j	Thermostat gauche
droite	$0.0000003 < f < 90\ 000$	i, k	Thermostat droite

### 2.3.2 Résumé du clavier

Le clavier permet de modifier les paramètres physiques. La fenêtre graphique doit être active, le terminal affiche les informations.

A	Z	E	R	T	Y	U	I	O	P
Trou	Tmax	Diametre					1 T°	isolé	Tempér.
Q	S	D	F	G	H	J	K	L	M
moinsT	Tinf	moinsD					2 T°	carré	moinsT
W	X	C	V	B	N				
Enceinte	Cloison	Trou		Démon de Maxwell					

### 2.3.2.1 Cloison centrale

option	clavier	commande
0	w	Pas de cloison
1	x	Cloison fermée
2	c	Cloison percée
-1	b	Cloison percée et démon de maxwell
-2	n	Cloison et démon de maxwell

### 2.3.2.2 Thermostats

option	clavier	Commande
0	o	Système isolé
1	i	Température gauche-droite identiques
	p	Augmente T
	m	Diminue T
2	k	Température gauche-droite différentes
	u	Augmente T à droite
	j	Diminue T à droite
	y	Augmente T à gauche
	h	Diminue T à gauche

### 2.3.2.3 Taille du trou

option	clavier	Commande
	a, q	augmente, diminue
	z, s	Taille max, min

### 2.3.2.4 Diamètre des particules

option	clavier	Commande
	e, d	augmente, diminue

La variation de la surface efficace des chocs entre particules met en évidence la variation de libre parcours moyen.

### 2.3.2.5 Contrôle de la simulation

F9 et F12 modifient rapidement la vitesse de la simulation, F10 et F11 la modifient modérément. La touche Entrée change le mode avec ou sans attente, en mode avec attente, l'appuie sur une touche permet l'évolution du système.

**Mode** : Entrée : Change le mode de la simulation : évolution automatique ou pas à pas.

**Accélérer** : F11 et F12 : Accélère la simulation.

**Ralentir** : F9 et F10 : Ralentit la simulation.

#### **2.3.2.6 Information**

**Énergie** : F5 : Information énergétique de la chaîne.

**Système** : F6 : Affiche les paramètres physiques du système.

# Chapitre 3

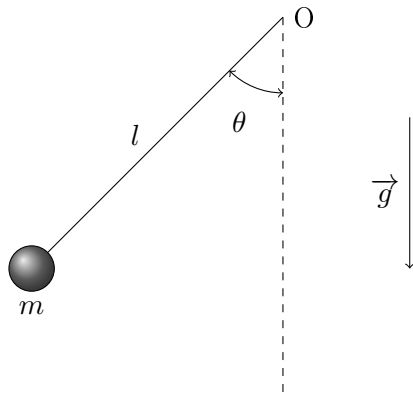
## Modèles physiques

Ce chapitre traite des modèles physiques liés aux phénomènes abordés par les simulateurs.

### 3.1 La chaîne de pendule

Sujet polytechnique [7] [9]

#### 3.1.1 Le pendule pesant



Un pendule pesant est constitué par une masse  $m$  suspendue à un fil rigide de longueur  $l$  relié à un point  $O$ . Une liaison en ce point permet au pendule de tourner autour d'un axe fixe. L'angle entre le fil et la verticale est noté  $\theta$ . La masse est soumise à son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ , à la réaction du fil  $\vec{R}$  et à une force de frottement visqueux  $\vec{f} = -\frac{\beta}{l}\vec{v}$ . La relation fondamentale de la dynamique donne :

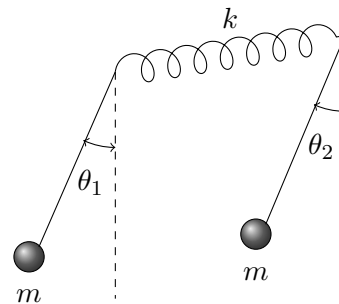
$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta - \beta \frac{d\theta}{dt}$$

#### 3.1.2 Les pendules couplés

Deux pendules pesants sont reliés par un fil de torsion suivant leur axe fixe commun. La relation fondamentale de la dynamique donne alors :

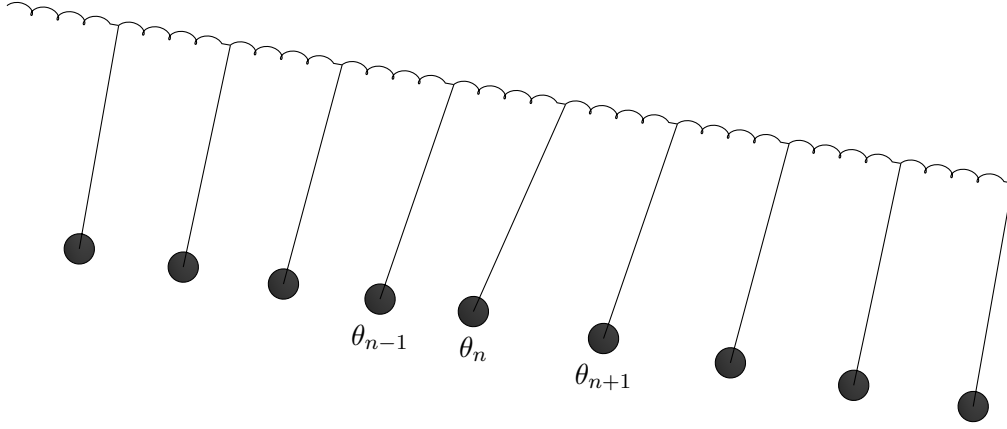
$$\begin{cases} ml \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -mg \sin \theta_1 - \beta \frac{d\theta_1}{dt} - kl(\theta_1 - \theta_2) \\ ml \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -mg \sin \theta_2 - \beta \frac{d\theta_2}{dt} - kl(\theta_2 - \theta_1) \end{cases}$$

dans le cas où les pendules sont identiques.



#### 3.1.3 La chaîne de pendule

Une chaîne de pendule est constituée d'une série de pendules pesants. Chaque pendule étant couplé avec ses deux plus proches voisins à l'aide d'un fil de torsion.



### 3.1.4 L'équation de la chaîne de pendule

La chaîne de pendule est constituée d'une série de pendules pesants. Chaque pendule étant couplé avec ses deux plus proches voisins à l'aide d'un fil de torsion,<sup>[2]</sup>

$$\frac{d^2\theta_n}{dt^2} - c^2 \frac{\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n}{a^2} + \omega_0^2 \sin \theta_n = 0$$

$$\begin{array}{llll} \frac{k}{m} & \frac{\text{vitesse}^2}{\text{longueur}^2} & \text{T}^{-2} & \frac{k}{m} = \frac{c^2}{a^2} \\ \frac{g}{l} & \text{pulsation}^2 & \text{T}^{-2} & \frac{g}{l} = \omega_0^2 \end{array}$$

La relation fondamentale de la dynamique, donne, en prenant en compte les frottements visqueux :

$$ml \frac{d^2\theta_n}{dt^2} = -mg \sin \theta_n - kl\Delta\theta_n(t) - \beta \frac{d\theta_n}{dt}$$

soit

$$\frac{d^2\theta_n}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta_n - \frac{k}{m} \Delta\theta_n(t) - \frac{\beta}{ml} \frac{d\theta_n}{dt}$$

avec

<i>abréviation</i>	<i>grandeur</i>	<i>dimension</i>
$\theta_n$	angle	radian
m	masse	M
g	pesanteur	LT <sup>-2</sup>
k	raideur	MT <sup>-2</sup>
l	longueur	L
$\beta$	frottement	ML <sup>2</sup> T <sup>-1</sup>

### 3.1.5 Expressions des forces et des énergies associées

La force de rappel, s'exerçant sur la masse m, dû au fil de torsion (  $C = kl^2$  ) entre les pendules est :

$$f_{torsion} = -kl\Delta\theta_n = -kl (2\theta_n - \theta_{n-1} - \theta_{n+1})$$

L'énergie potentielle entre les pendules n et n-1 est :

$$E_{couplage} = \frac{1}{2} kl^2(\theta_n - \theta_{n-1})^2$$



La force de rappel dû à la gravitation est :

$$f_{gravitation} = -mg \sin \theta_n$$

L'énergie potentielle de pesanteur de la masse m est :

$$E_{pp} = mgl(1 - \cos \theta_n)$$

La linéarisation de cette dernière force donne lieu à une force de rappel harmonique :

$$f_{ressort} = -mg\theta_n$$

L'énergie potentielle correspondante est alors :

$$E_{pp} = \frac{1}{2} mgl\theta_n^2$$

Enfin, l'énergie cinétique découle du travail de

$$ml \frac{d^2\theta_n}{dt^2}$$

Et vaut

$$E_c = \frac{1}{2} ml \left( \frac{d\theta_n}{dt} \right)^2$$

La force de frottement visqueux est :

$$f_{frottement} = -\beta \frac{\theta_n(t) - \theta_n(t - dt)}{dt}$$

La présence de cette force implique une dissipation de l'énergie. En l'absence de cette force, on doit observer une conservation de l'énergie totale.

À ces forces il faut ajouter le courant josephson, correspondant à une constante additive dans la relation fondamentale de la dynamique ainsi que la force s'exerçant sur le premier pendule lors de l'excitation de la chaîne.

### 3.1.6 Résumé des forces et des énergies

	force	énergie
torsion	- k l $\Delta\theta_n$	$\frac{1}{2} k l^2 (\theta_n - \theta_{n-1})^2$
gravitation	- m g $\sin \theta_n$	m g l (1 - $\cos \theta_n$ )
harmonique	- m g $\theta_n$	$\frac{1}{2} m g l \theta_n^2$
inertie	m l $\frac{d^2\theta_n}{dt^2}$	$\frac{1}{2} m l^2 \left( \frac{d\theta_n}{dt} \right)^2$
courant	josephson	

## 3.2 L'équation de Sine-Gordon

Cette section traite de l'équation de sine-gordon et de ses solutions

### 3.2.1 L'équation de Sine-Gordon

C'est une équation différentielle du second ordre, non linéaire, à deux variables [3].

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

### 3.2.2 Les solitons, solutions de l'équation de Sine-Gordon

Une solution de l'équation de Sine-Gordon, appelée soliton, est

$$\theta(x, t) = 4 \arctan \exp(\omega t - kx)$$

Elle correspond à une variation de  $2\pi$  de la valeur de  $\theta$  sur une distance de l'ordre de  $k^{-1}$ . Le soliton se déplace à la vitesse  $v$ .

### 3.2.3 Phénomènes physiques associés aux solitons

La **jonction Josephson**. Constitué par une jonction isolante entre deux supraconducteur.

## 3.3 Les équations de Turing-Murray

Cette section traite du système d'équations de Turing-Murray

Les **motifs du pelage des animaux** [11] [5]

C'est un système de deux équations différentielle du second ordre, non linéaire, à trois variables [11] .

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \gamma f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + D_1 \nabla^2 \mathbf{u} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \gamma g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + D_2 \nabla^2 \mathbf{v} \end{cases}$$

### 3.3.1 Phénomènes physiques décrit par des équations non linéaires

Les **frontières**. New-York possède un quartier chinois et un quartier italien. Le grignotage de Little Italy par Chinatown montre le déplacement de la brutale variation des densités de population chinoise et italienne.

## 3.4 La corde vibrante

Cette section traite de l'équation des cordes vibrantes, de ses solutions et de la transformée de Fourier.

### 3.4.1 La corde vibrante

C'est une équation différentielle du second ordre, linéaire, à deux variables [4].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

### 3.4.2 La transformée de Fourier

La transformée de Fourier correspond à la décomposition d'une fonction sur une base de fonctions harmoniques. [10]

$$\hat{u}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) e^{-2i\pi kx} dx$$

## 3.5 Les chocs de particules

### 3.5.1 Les chocs de particules

On applique les lois de conservations de l'énergie et de l'impulsion :

$$\sum m_i v_i'^2 = \sum m_i v_i^2 \quad \text{et} \quad \sum m_i \vec{v}'_i = \sum m_i \vec{v}_i$$

ou en utilisant la convention de sommation sur les indices répétés :

$$m_i \mathbf{v}'_i{}^2 = m_i \mathbf{v}_i^2 \quad \text{et} \quad m_i \mathbf{v}'_i = m_i \mathbf{v}_i$$

### 3.5.2 Chocs de deux particules

La conservation de l'énergie donne :

$$m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$$

La conservation de l'impulsion donne :

$$m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

Dans le référentiel du centre de masse :

$$(m_1 + m_2) \vec{v} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

## Chapitre 4

# Mathématique et numérique

Ce chapitre traite des modèles mathématiques et numériques liés aux simulateurs.

### 4.1 Discrétisation des équations différentielles

La discrétisation de l'équation du mouvement se fait à l'aide de l'algorithme de Verlet. Cet algorithme consiste à symétriser la dérivée par rapport au temps puis d'obtenir une expression de  $x(t + dt)$  en fonction de  $x(t)$  et  $x(t - dt)$ . Cette expression permet de simuler de proche en proche le comportement du système physique. La solution discrète se rapproche de la solution analytique si la valeur de  $dt$  est convenablement choisie. En dehors d'un certain encadrement de  $dt$ , la solution discrète s'éloigne de la solution analytique.

#### 4.1.1 Discrétisation des dérivées

##### 4.1.1.1 Dérivée symétrisée

Par définition, la dérivée symétrique est :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x(t + dt) - x(t - dt)}{2 dt}$$

On en déduit l'expression suivante de la dérivée seconde :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{x(t + 2 dt) - x(t) - x(t) + x(t - 2 dt)}{4 dt^2}$$

Le changement de variable  $dt' = 2 dt$  simplifie cette expression :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{x(t + dt) - 2x(t) + x(t - dt)}{dt^2}$$

Une expression disymétrique de la vitesse peut être utilisée pour l'évaluation des forces de viscosité ainsi que pour le calcul de l'énergie cinétique avant le calcul de la nouvelle valeur de  $x(t + dt)$ .

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x(t + dt) - x(t)}{dt}$$

Après l'incrémentation,  $\frac{dx}{dt} = \frac{x(t) - x(t - dt)}{dt}$

#### 4.1.2 Discrétisation de la relation fondamentale de la dynamique

L'équation de la chaîne de pendules couplés (3.1.4) donne ici :

$$\frac{x(t + dt) - 2x(t) + x(t - dt)}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin x(t) - \frac{k}{m} \Delta x(t) - \frac{\beta}{ml} \frac{x(t) - x(t - dt)}{dt}$$

soit

$$x(t + dt) - 2x(t) + x(t - dt) = -\frac{g dt^2}{l} \sin x(t) - \frac{k dt^2}{m} \Delta x(t) - \frac{\beta dt}{ml} (x(t) - x(t - dt))$$

ou

$$x(t + dt) = 2x(t) - x(t - dt) - dt^2 \frac{g}{l} \sin x(t) - dt^2 \frac{k}{m} \Delta x(t) - dt \frac{\beta}{ml} (x(t) - x(t - dt))$$

avec

$$\Delta x(t) = (2x[i] - x[i - 1] - x[i + 1])$$

La force de rappel dû au fil de torsion entre les pendules est :

$$f_{torsion} = -kl\Delta x(t) = -kl(2x[i] - x[i - 1] - x[i + 1])$$

L'énergie potentielle entre les pendules n et n-1 est :

$$E_{couplage} = \frac{1}{2} kl^2 (x[i] - x[i - 1])^2$$

La force de rappel dû à la gravitation est :

$$f_{gravitation} = -mg \sin x(t)$$

L'énergie potentielle de pesanteur de la masse m est :

$$E_{pp} = mgl(1 - \cos x(t))$$

La linéarisation de cette dernière force aboutit à une force de rappel harmonique :

$$f_{ressort} = -mgx(t)$$

L'énergie potentielle correspondante est alors :

$$E_{pp} = \frac{1}{2} mglx(t)^2$$

Enfin, l'énergie cinétique découle du travail de

$$ml \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

Et vaut

$$E_c = \frac{1}{2} ml \left( \frac{dx(t)}{dt} \right)^2 = \frac{ml}{2 dt^2} (x(t) - (x(t - dt)))^2$$

#### 4.1.3 Variables réduites

Les variables réduites sont sans dimensions. Elles prennent en compte la discrétisation du temps. Le signe prend en compte le caractère « de rappel » des forces.

$$\text{alpha} = -\frac{\beta}{ml} dt$$

$$\text{gamma} = -\frac{g}{l} dt^2$$

$$\text{kapa} = -\frac{k}{m} dt^2$$

On a alors

$$\text{force}[i] = \text{gamma}.\sin x + \text{kapa}.\Delta x + \text{alpha}.(x(t) - x(t - dt))$$

et

$$x(t + dt) = 2x(t) - x(t - dt) + \text{force}[i]$$

#### 4.1.4 Résumé des forces et des énergies

	force	énergie	Variables réduites
torsion	$-k l \Delta x_n$	$\frac{1}{2} k l^2 (x_n - x_{n-1})^2$	$-k l \Delta x_n \quad \frac{1}{2} k l^2 (x_n - x_{n-1})^2$
gravitation	$-m g \sin x_n$	$m g l (1 - \cos x_n)$	$-m g \sin x_n \quad m g l (1 - \cos x_n)$
harmonique	$-m g x_n$	$\frac{1}{2} m g l x_n^2$	$-m g x_n \quad \frac{1}{2} m g l x_n^2$
inertie	$m l \frac{d^2 x_n}{dt^2}$	$\frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2$	$m l \frac{d^2 x_n}{dt^2} \quad \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2$
courant	josephson		josephson

## 4.2 Discrétisation des chocs de particules

La discrétisation des chocs de particules implémenté dans SiGP, est réalisé à partir d'un modèle simplifié. Les chocs à plus de deux particules sont négligés. Deux particules ne peuvent pas subir deux collisions successives entre elles. Cette dernière simplification conduit à introduire un phénomène d'intrication.

### 4.2.1 Modèle numérique

Deux particules s'entrechoquent à condition qu'elles se trouvent à une distance inférieure à une certaine valeur. Il n'y a pas d'autre paramètre d'impact.

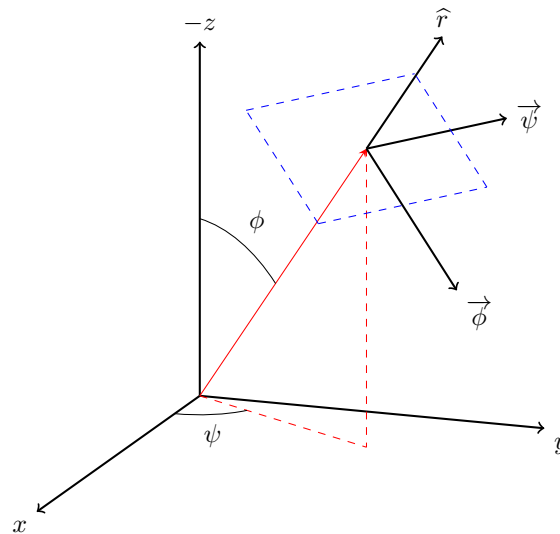
Au cours du choc, l'énergie cinétique est conservée ainsi que la quantité de mouvement, l'angle de déviation est aléatoire. La fonction aléatoire utilisée dans SiGP utilise l'algorithme de C. Bays et S.D.Durham [8]

Après un choc, les deux particules deviennent transparentes l'une pour l'autre jusqu'à ce que l'une d'entre elle entre en collision avec une troisième particule.

## 4.3 Perspective et repère SiCP

Cette section traite de la définition des coordonnées intervenant dans la projection en perspective de SiCP

### 4.3.1 Coordonnées polaires



$$\begin{aligned}\vec{r} &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cdot \sin \phi \\ \sin \psi \cdot \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}, \\ \vec{\psi} &= \text{largeur} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{\phi} &= \text{hauteur} \cdot \begin{pmatrix} -\cos \psi \cdot \cos \phi \\ -\sin \psi \cdot \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

### 4.3.2 Mathématique

**System** :  $\theta_i$ .

**Chaine** :  $r_i$ .

**Support** :  $R_i$ .

**Point de vue** :  $M, i_M, j_M, k_M$ .

### 4.3.3 Classes

**System** : nouveau[N].

**Chaine** : chaine[N], support[12], largeur, hauteur.

**Point de vue** : perspective, distance, psi, phi.

### 4.3.4 Projection

$$\text{System-Chaine} : r_i = \begin{pmatrix} \text{largeur}/2N(i - N/2) \\ \text{hauteur} \cdot \sin \theta_i \\ \text{hauteur} \cdot \cos \theta_i \end{pmatrix}.$$

$$\text{Point de vue} : \vec{r} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cdot \sin \phi \\ \sin \psi \cdot \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}, \vec{\psi} = \text{largeur} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\phi} = \text{hauteur} \cdot \begin{pmatrix} -\cos \psi \cdot \cos \phi \\ -\sin \psi \cdot \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}.$$

$$\text{Chaine-Rendu} : g_i = \begin{pmatrix} (r_i - M) \cdot k_M + \text{hauteur}/2 \\ (r_i - M) \cdot j_M + \text{largeur}/2 \end{pmatrix}.$$

## 4.4 Transformée de fourier rapide

Cette section traite de la numérisation de la transformée de fourier grâce aux algorithmes DFT et FFT. [1]

# Chapitre 5

## Développement

Ce chapitre traite de la structure et du développement des programmes de simulation.

### 5.1 Langage et librairies

#### 5.1.1 C

Les programmes SiCP, SiCF et SiGP sont écrits en C [6] [12] et utilisent la librairie SDL.

#### 5.1.2 SDL 1.2

L'utilisation de la librairie SDL permet la réalisation d'une interface graphique et dynamique avec l'utilisateur.

#### 5.1.3 SDL 2

Les programmes SiCP, SiCF et SiGP ont évolué vers les programmes SiCP2, SiCF2 et SiGP2 utilisant la version 2 de la librairie SDL.

### 5.2 Modèle Vue Contrôleur

#### 5.2.1 Les répertoires des simulateurs

- `donnees` : Inclusion des librairies, constantes et valeurs initiales du système et du graphisme
- `fonctions` : Outils mathématiques. Fonctions et projection du système
- `modele` : Système simulé.
- `graphisme` : Représentation graphique et affichage
- `controle` : Liaison entre le système et l'interface graphique
- `objet` : Nécessaire à la compilation

#### 5.2.2 Le modèle

Le système est un ensemble de pendules couplés

#### 5.2.3 La vue

Construit une représentation graphique du système et affiche celle-ci.

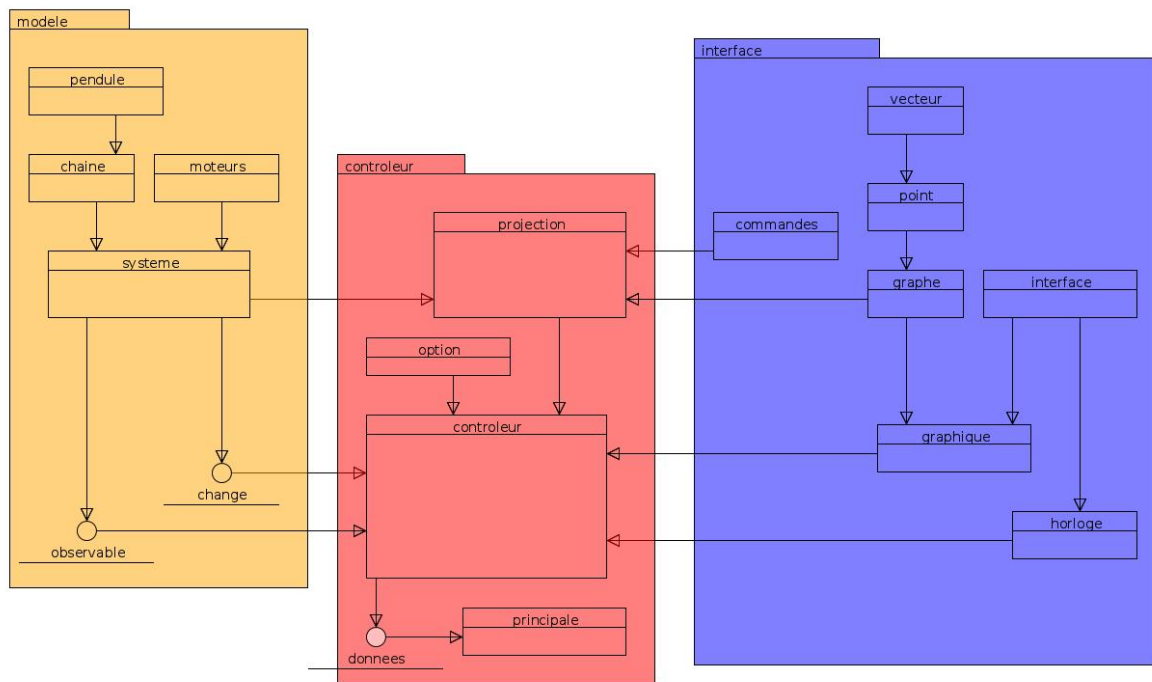
#### 5.2.4 Le contrôleur

Exécute alternativement la vue et le modèle. Exécute les actions du clavier.

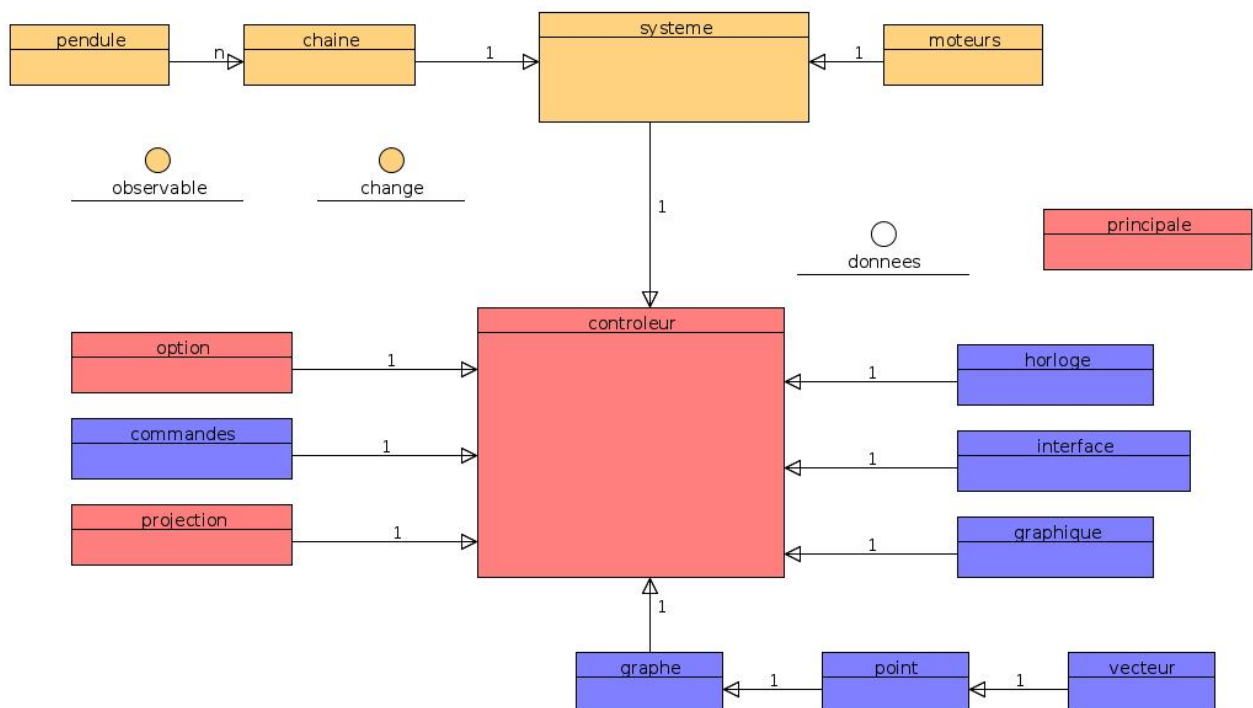


## 5.3 Diagrammes

### 5.3.1 Inclusion des fichiers dans SiCP2



### 5.3.2 diagramme de classes de SiCP2



## 5.4 Evolution

### 5.4.1 La branche ted

Acronyme de "toujours en développement" la version ted des simulateurs teste les dernieres évolutions.

### 5.4.2 Sensibilité aux conditions initiales

Le controleur actuel des simulateurs possède un unique système. Un second système devrait lui être attribué afin d'observer simultanément l'évolution de deux systèmes et d'observer ainsi la sensibilité aux conditions initiales.

## 5.5 Valeurs implicites

### 5.5.1 Réglage de dt, durée et pause

Une incrémentation du système correspond à une avancée dans le temps de **dt**. La longueur des pendules est fixé à 25 cm afin de battre la seconde : Période égale à une seconde

$$\begin{aligned}T &= 2\pi\sqrt{l/g} = 1 \\g/l &= 4\pi^2 = 39,478 \\l &= 0,25 \text{ cm}\end{aligned}$$

Empiriquement, un affichage graphique par 30 ms, est obtenue avec une pause de l'ordre de 25ms. Si à chaque affichage correspond à une centaine d'incrémentations de dt,

$$\begin{aligned}dt \times duree &= delay \\dt \times 100 &= 0,03 \\dt &= 0,0003\end{aligned}$$

La valeur de **duree** peut être changée dynamiquement avec les touches **F11** et **F12** afin de faire varier la vitesse de la simulation. La valeur de dt peut être réglée avec l'option **dt** au démarrage du programme, celle de delay par l'option **pause**. Dans SiCP, les valeurs implicites de **dt** et **duree** sont égale à 0,0003 et 91, celle de pause est égale à 25. Ces valeurs peuvent être affinée suivant le microprocesseur afin d'avoir un pendule qui bat la seconde.

### 5.5.2 Limite infinie

La touche **v** supprime les frottements sauf pour les derniers pour lesquels les frottements s'accroissent. Ceci permet d'obtenir une extrémité "absorbante".

pendule de « précédent » à « nombre  $\times 5 / 6$  » : dissipation de 10 à 1,  
pendule précédents : dissipation = 0,0

### 5.5.3 dt et dissipation maximale

La touche **v** supprime les frottements sauf pour les derniers pour lesquels les frottements s'accroissent. Ceci permet d'obtenir une extrémité "absorbante".

$$\begin{aligned}dt \times DISSIPATION\_MAX &= constante \\0.0003 \times 333 &= 0,0999 \\dissipation maximale &= 0,0999/dt\end{aligned}$$

## 5.5.4 Limitation des valeurs des variables

### 5.5.4.1 Paramètres physiques

Au delà de certaines valeurs de certains paramètres dynamiques, la simulation s'éloigne du comportement physique.

Pour des raisons de discrétisation

En raisons de possibles erreurs d'algorithme

En raisons de possibles erreurs d'écriture

Aussi, le fichier `donnees/constantes.c` contient des valeurs maximale et minimale de certains paramètres. Ces bornes permettent de consolider le comportement des programmes.

En particulier, dans le calcul de la représentation du graphe de SiCP, les coordonnées polaires du point de vue sont bornées,  $\phi$  ne peut pas être égale à zéro, sa valeur minimale est égale à `EPSILON` afin d'éviter un plantage due à l'algorithme simplifiée de la représentation graphique.

### 5.5.4.2 Paramètres dynamiques

Vitesse des mobiles

Distance entre les mobiles

Énergie

Actuellement, l'angle des pendules de SiCP est borné grâce à une fonction de jauge ramenant la position du premier pendule entre  $-\pi$  et  $\pi$ . Un test sur la valeur de l'énergie et la limitation de celle-ci permettrait sans doute de consolider davantage le programme. En effet, parmi les bug connus, une valeur trop grande des variables apparait en premier lieu dans la valeur de l'énergie totale.

Ainsi, afin de limiter la vitesse des mobiles, la position des mobiles pourrait être divisées par deux dans les équations linéaires lorsque l'énergie totale est supérieur à `ENERGIE_SECURITE`.

## Annexe A

# Première version des simulateurs

### A.1 Historique

La première version des simulateurs utilisait la librairie SDL 1.2. Cette librairie a évolué vers la version SDL2. Les programmes décrits dans cette documentation ont donc évolué vers une version 2 utilisant la nouvelle librairie. Les versions 1.x des simulateurs sont donc vouées à ne plus être maintenues. Aujourd'hui, les versions 2 des simulateurs disposent d'une interface graphique plus conviviale avec une interaction avec la souris. La commande des simulateurs à l'aide du clavier reste fonctionnelle et est décrite dans l'annexe suivante.

## Annexe B

# Commandes du clavier

### B.1 Résumé du clavier SiCF et SiCP

Le clavier permet de modifier les paramètres physiques. La fenêtre graphique doit être active, le terminal affiche les informations.

A	Z	E	R	T	Y	U	I	O	P
Couplage	Masse	Dissip.	supprimD	Gravit.	Phi	Ampl.	impuls.	sinus	Fréquence
Q	S	D	F	G	H	J	K	L	M
moinsC	moinsM	plusD	formeD	moinsG	moins $\Phi$	moinsA		carré	moinsF
W	X	C	V	B	N				
périodique	libres	fixe	ExtAbsD	libFix	fixLib				

Paramètres physiques

A	Z	E	R	T
Couplage	Masse	Dissip.	supprimD	Gravit.
Q	S	D	F	G
moinsC	moinsM	plusD	formeD	moinsG
			V	
			ExtAbsD	

Conditions aux limites

					Y	
					Phi	
					H	
					moins $\Phi$	
	W	X	C	V	B	N
périodique		libres	fixe		libFix	fixLib

Moteur premier pendule

	U	I	O	P
	Ampl.	impuls.	sinus	Fréquence
	J	K	L	M
	moinsA		carré	moinsF

Les touches de fonctions donnent un certain nombre de contrôles et d'information :

Contrôles				Information				Contrôles			
F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12
Équation simulé (SiCF)				Énergie, graphe				Vitesse de la simulation			

Le choix de l'équation simulée est spécifique à SiCF. F5 dresse un bilan énergétique. F6 affiche les paramètres physiques du système

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Pendules	Harmoniques	Corde	asymétrique	Énergie	Système

F8 permet de modifier le graphisme de SiCP. F9 et F12 modifient rapidement le rythme de la simulation, F10 et F11 la modifie modérément. La touche **Entrée** change le mode avec ou sans attente, en mode avec attente, l'appuie sur une touche permet l'évolution du système.

F8	F9	F10	F11	F12	Entrée
Support (SiCP)	-Sim	-Sim	+Sim	+Sim	mode

## B.2 Détails des contrôles

### B.2.1 Équation simulée

Il s'agit d'une spécificité de SiCF. Lorsque le mode asymétrique est activé, les touches **z** et **s** ne change la masse de la corde que pour la moitié droite.

- 1 : **gravitation** forceRappel = sinus de la position du pendule
- 2 : **linearisation** forceRappel = proportionnelle à la position du pendule
- 3 : **corde vibrante** forceRappel = 0
- 4 : **corde vibrante asymétrique** permet de changer la masse sur une demi-corde.

### B.2.2 Paramètres des pendules

- Couplage** : a, q : Augmente, diminue le couplage entre les pendules.
- Masse** : z, s : Augmente, diminue la masse des pendules.
- Dissipation** : e, d : Augmente, diminue les frottements visqueux.
- Gravitation** : t, g : Augmente, diminue l'accélération de la gravitation.

### B.2.3 Forme de la dissipation

La touche **V** supprime les frottements sauf pour les derniers pour lesquels les frottements s'accroissent. Ceci permet d'obtenir une extrémité "absorbante", permettant la simulation d'une corde infinie.

- Supprimer** : e : Supprime les frottements visqueux.
- Former** : f : Active les frottements visqueux sur toute la chaîne.
- Absorber** : v : Active les frottements visqueux sur la fin de la chaîne, crée une extrémité absorbante.

### B.2.4 Conditions aux limites

**Périodique** : w : Le dernier pendule est couplé au premier.

**Libres** : x : Les deux extrémités sont libres.

**Fixes** : c : Les deux extrémités sont fixes.

**libre-fixe** : b : Le premier pendule est libre et le dernier pendule est fixe.

**fixe-libre** : n : Le premier pendule est fixe et le dernier pendule est libre.

### B.2.5 Moteur premier pendule

**Impulsion** : i : Crée une impulsion.

**Sinus** : o : Active, désactive le moteur sinusoïdale.

**Sinus** : l : Active le moteur carré.

**Amplitude** : u, j : Augmente, diminue l'amplitude du moteur.

**Fréquence** : p, m : Augmente, diminue la fréquence du moteur.

### B.2.6 Moteur Josephson

**Activation** : → : Crée, supprime un courant josephson.

**Amplitude** : ↑, ↓ : Augmente, diminue le courant.

**Sens** : ← : Inverse le sens du courant josephson.

### B.2.7 Contrôle de la simulation

F9 et F12 modifient rapidement la vitesse de la simulation, F10 et F11 la modifient modérément. La touche Entrée change le mode avec ou sans attente, en mode avec attente, l'appuie sur une touche permet l'évolution du système.

**Mode** : Entrée : Change le mode de la simulation : évolution automatique ou pas à pas.

**Accélérer** : 11 et F12 : Accélère la simulation.

**Ralentir** : F9 et F10 : Ralentit la simulation.

### B.2.8 Information

**Énergie** : F5 : Information énergétique de la chaîne.

**Système** : F6 : Affiche les paramètres physiques du système.

### B.2.9 Sauvegarde et ré-initialisation dans SiCF

Cette fonctionnalité nécessite la présence du répertoire donnee/enregistrement dans le répertoire de l'exécutable. La touche majuscule permet d'accéder aux fonctions d'enregistrement et de ré-initialisation des positions des pendules.

Lorsque la touche majuscule est enfoncé, les touches A, Z, E, R, T, Y, U, I, O et P, ainsi que les touches J, K, L et M ré-initialisent la position de la corde dans différentes configurations pré-réglées.

Les touches W, X, C, V, B et N enregistrent la position de la corde dans l'état actuel, les touches Q, S, D, F, G et H ré-initialisent la position de la corde dans ces états enregistrés.

### B.2.9.1 Fonction élémentaire

Touche	fonction
A	nulle
Z	impulsion
E	triangle
R	triangle
T	carré
Y	carré

### B.2.9.2 Quanton

Touche	fonction
U, J	impulsion
I, K	impulsion
O, L	quanton
P, M	quanton

### B.2.9.3 Fichiers de ré-initialisation

Les fichiers de ré-initialisation se trouvent dans le répertoire `donnee/enregistrement`. Ils peuvent être édités. Le nom de ces fichiers doit être respecté afin de pouvoir être ouvert par le programme (ces noms sont utilisés par `donnees/fichier.c`).



# Bibliographie

- [1] Pierre Audibert. Transformée de fourier discrète (dft) et transformée de fourier rapide (fft). <http://www.ai.univ-paris8.fr/~audibert/tra/FFT.pdf>, 20. [Last modified : jeudi 13 février 2014 21 :57 :26] ??.
- [2] Cyrille Barreateau. Équation de sine-gordon, solitons et dislocations. [http://iramis.cea.fr/spcsi/cbarreateau/methodes\\_mathematiques/documents/tut5\\_2005\\_2eme.pdf](http://iramis.cea.fr/spcsi/cbarreateau/methodes_mathematiques/documents/tut5_2005_2eme.pdf), 2006. [Last modified : jeudi 12 janvier 2006] 3.1.4.
- [3] R. Belmont. Équation et solitons de sine-gordon. <http://userpages.irap.omp.eu/~rbelmont/mypage/numerique/SineGordon.pdf>, 2014. [Last modified : mercredi 24 septembre 2014] 3.2.1.
- [4] Benjamin Boutin. Équation des ondes. <https://perso.univ-rennes1.fr/benjamin.boutin/Docs/WaveEquation2012.pdf>, 2012. [Last modified : jeudi 08 mars 2012 07 :33 :03] 3.4.1.
- [5] R. Labib C. Bejjani, N. Khattabi. Les motifs des pelages d'animaux. <http://www.genie-des-maths.polymtl.ca/exemples/ex-00072/ex5.pdf>, 2014. [] 3.3.
- [6] Claude Delannoy. *Le guide complet du langage C*. Eyrolles, 2014. [ISBN : 978-2-212-14012-5] ??.
- [7] Polytechnique ENS. Propagation d'ondes le long d'une chaîne de pendules couplés. [https://banques-ecoles.fr/cms/wp-content/uploads/2015/04/15\\_mp\\_sujet\\_phy.pdf](https://banques-ecoles.fr/cms/wp-content/uploads/2015/04/15_mp_sujet_phy.pdf), 2015. [Last modified : jeudi 22 janvier 2015] 3.1.
- [8] Nicolas Joseph. Les nombres aléatoires en c. <https://nicolasj.developpez.com/articles/libc/hasard/>, 2005. [Last modified : octobre 2005] 4.2.1.
- [9] Françoise Lachize. Propagation d'ondes le long d'une chaîne de pendules couplés. <http://flachize.e-monsite.com/medias/files/x-ens-mp-2015.-corrige.pdf>, 2016. [Last modified : samedi 2 janvier 2016] 3.1.
- [10] François Rodier. *Distributions et Transformation de Fourier*. Mc Graw-Hill, 1991. [ISBN : 2-7042-1004-7] 3.4.2.
- [11] L.G. Vidiani. Les motifs des pelages d'animaux. [http://culturemath.ens.fr/maths/pdf/analyse/vidiani\\_motifs\\_pelage\\_animaux.pdf](http://culturemath.ens.fr/maths/pdf/analyse/vidiani_motifs_pelage_animaux.pdf), 2014. [Online ; accessed 16-January-2014] 3.3.
- [12] Tony Zhang. *Le langage C*. campusPress, 2002. [ISBN : 2-7440-1518-0] ??.