

# Motifs des pelages d'animaux

---

<b>Résumé</b>	Dans cet exemple, nous modélisons les motifs des pelages d'animaux grâce au modèle proposé par Alan Turing. Un système d'équations non linéaires sera résolu à l'aide d'un schéma d'Euler explicite pour générer des motifs.
<b>Domaines du génie</b>	Tous
<b>Notions mathématiques</b>	Méthode d'Euler
<b>Cours pertinents</b>	Calcul scientifique pour ingénieurs
<b>Auteur(es)</b>	C. Bejjani, N. Khattabi, R. Labib

---

## Sommaire

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Modélisation</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Résolution</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>4</b>
	<b>Références</b>	<b>4</b>

# 1 Introduction

L'extrême diversité des motifs des pelages d'animaux est issue d'un phénomène unique. Des zébrures des zèbres aux taches des léopards, en passant par celle des motifs des élytres des coccinelles, tout serait en fait le résultat d'un principe de *réaction-diffusion*. Les morphogènes, responsables de la pigmentation, se propagent sur la peau en concentration variable, dessinant ainsi les parures du royaume animal.

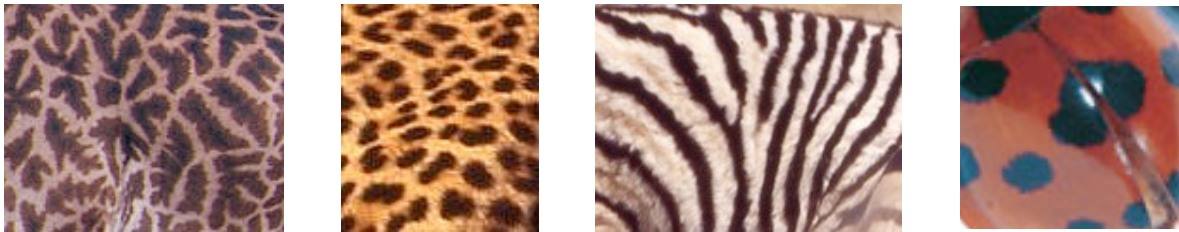


Figure 1: Motifs de girafe, de léopard, de zèbre et de coccinelle.

# 2 Modélisation

Le mathématicien Alan Turing s'est intéressé à la morphogenèse et a proposé un modèle basé sur les équations de réaction-diffusion (connu sous le nom de *Système de Turing*[3]) pour générer des motifs réalistes de pelages.

Quelques hypothèses sont nécessaires afin d'aborder la modélisation :

- la peau peut être représentée par un rectangle dans le plan cartésien ;
- le point  $(x, y)$  représente une cellule du derme ;
- $t$  représente l'âge de l'animal ;
- $A(x, y, t)$  représente le niveau de concentration de l'acteur (qui colore la peau) dans la cellule  $(x, y)$  au temps  $t$  ;
- $B(x, y, t)$  représente le niveau de concentration du diffuseur (qui permet la diffusion de l'acteur) dans la cellule  $(x, y)$  au temps  $t$  ;
- les niveaux de concentration de l'acteur et du diffuseur dans chaque cellule sont influencés par ceux des cellules avoisinantes.

Le Système de Turing est un système d'équations différentielles non linéaire donné par :

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = \gamma f(A, B) + \alpha \nabla^2 A \\ \frac{\partial B}{\partial t} = \gamma g(A, B) + \beta \nabla^2 B \end{cases} \quad (1)$$

où :

- $\alpha$  et  $\beta$  sont les taux de diffusion des morphogènes ;
- $\gamma$  est une constante ;

- $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
- $f$  et  $g$  sont des fonctions.

Plusieurs fonctions ont été proposées pour définir  $f$  et  $g$  en concordance avec des phénomènes relatifs aux liens entre activateurs et diffuseurs.

### 3 Résolution

Une fois  $f$  et  $g$  définies, on pourra résoudre le système (1) à l'aide de la méthode d'Euler.

À titre d'exemple, les scientifiques Dann Corbit et Raphael Collantes-Bellido [2] ont proposé le schéma d'Euler suivant :

$$\begin{cases} A(x, y, t_{n+1}) = A(x, y, t_n) + h \phi(A(x, y, t_n), B(x, y, t_n), t_n) \\ B(x, y, t_{n+1}) = B(x, y, t_n) + h \psi(A(x, y, t_n), B(x, y, t_n), t_n) \end{cases} \quad (2)$$

où :

$$\begin{aligned} \phi(A(x, y, t), B(x, y, t), t) &= A(x, y, t) B(x, y, t) - A(x, y, t) - 12 + \alpha [A(x, y + 1, t) - 2 A(x, y, t) \\ &\quad + A(x, y - 1, t) + A(x + 1, y, t) - 2 A(x, y, t) + A(x - 1, y, t)] \\ \psi(A(x, y, t), B(x, y, t), t) &= 16 - A(x, y, t) B(x, y, t) + \beta [B(x, y + 1, t) - 2 B(x, y, t) + B(x, y - 1, t) \\ &\quad + A(x + 1, y, t) - 2 B(x, y, t) + B(x - 1, y, t)]. \end{aligned}$$

Plus spécifiquement, ces équations correspondent au système 1 avec  $\gamma f(A, B) = AB - A - 12$  et  $\gamma g(A, B) = 16 - AB$  où on a utilisé une différence centrée pour estimer les dérivées d'ordre 2, notamment  $\nabla^2 A$  et  $\nabla^2 B$ .

Les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  contrôlent la diffusion des morphogènes et caractérisent les motifs des différentes espèces animales, et  $h$  est le pas de temps intervenant dans la méthode d'Euler.

Les conditions initiales sur la concentration de l'activateur  $A$  et celle du diffuseur  $B$  sont générées aléatoirement afin de respecter l'irrégularité et la diversité de la nature.

Voici quelques motifs générés à l'aide du schéma d'Euler (2) avec un pas de temps  $h = 0,01$  et 2000 itérations (le résultat diffère à chaque exécution à cause de l'initialisation aléatoire) :



Figure 2:  $\beta = 32$  et  $\alpha = 2$ .

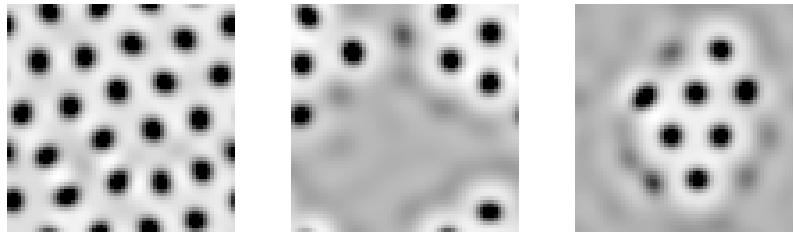


Figure 3:  $\beta = 16.4$  et  $\alpha = 4.05$ .

## 4 Conclusion

Malgré la simplicité du modèle utilisé pour la résolution du système de Turing, les motifs sont d'un réalisme convaincant. Nous n'avons traité, dans cet exemple, qu'une partie de la théorie sur la morphogenèse, cette dernière permettant de modéliser des modèles évolutifs très variés : mouvements de foule, évolution des feux de forêt, propagation d'épidémies, forme du nez et des iris, empreintes digitales, couleurs des bandes des anneaux de Saturne, etc. Ainsi, les champs d'application de la morphogenèse sont donc très vastes allant de la prévention de catastrophes à la reconnaissance biométrique, en passant par l'astronomie sans oublier l'analyse des motifs des animaux et des végétaux.

## Références

- [1] A.M. Turing, *The chemical basis of morphogenesis : Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Series B, Biological Sciences, Vol 237, No 641, pages 37-72, 1952.
- [2] D. Corbit and R. Collantes-Bellido, *Factorials and Textures*, Algorithm Alley, <http://www.ddj.com/184410024?pgno=2>, 2003. Page consultée le 20 mai 2009.
- [3] J.D. Murray, *Mathematical Biology : Part II : Spatial Models and Biomedical Applications*, Springer, 3ème édition, page 145, 2001.

