La physique animée : Vibrations transversales d'une corde, équation de d'Alembert

Auteur(s) :

Olivier Granier

Lycée Jacques Decour, Paris

Delphine Chareyron

ENS Lyon

Nicolas Taberlet

ENS Lyon

15 - 06 - 2015

Vibrations transversales d'une corde – Équation de d'Alembert

On considère une corde inextensible de longueur L, comme celle d'une guitare, d'un piano ou d'un clavecin.

On note μ sa masse linéique.

Elle est tendue horizontalement selon une force constante F.

La corde étant horizontale à l'équilibre, on supposera dans la suite que la pesanteur n'intervient pas.

On se propose d'étudier les petits mouvements au voisinage de cet équilibre en utilisant le modèle suivant :

On considère un point de la corde dont les coordonnées sont (x,0) à l'équilibre.

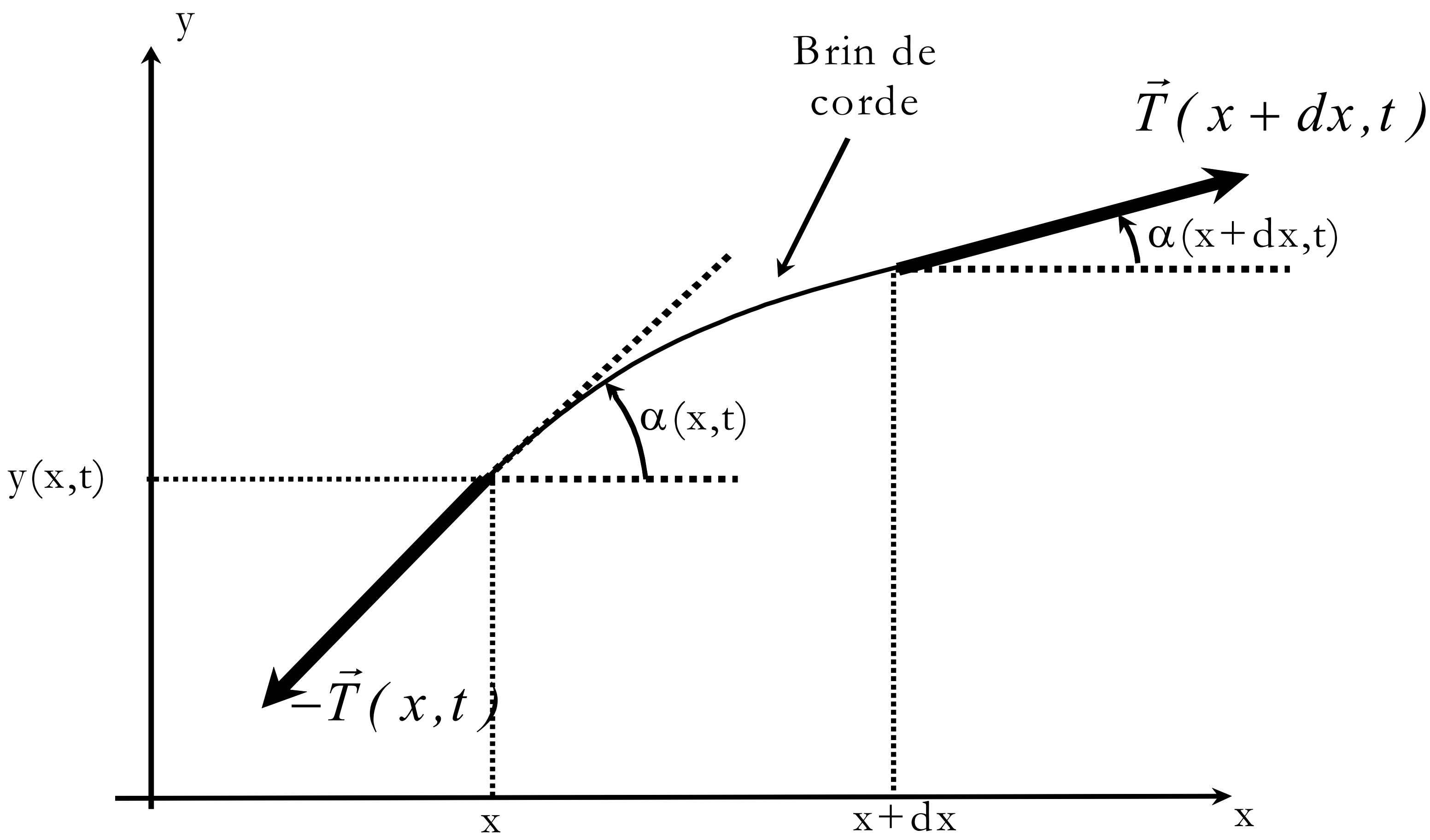
Il se trouve au point de coordonnées (x,y(x,t)) hors équilibre : on néglige ainsi son déplacement le long de l'axe (Ox) en considérant le déplacement purement transversal.

On choisit comme système mécanique l'élément de corde situé entre les abscisses x et x+dx, de masse μdx.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à cet élément de corde, on a alors :

$$\mu \, dx \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \vec{u}_y = -\vec{T}(x,t) + \vec{T}(x+dx,t)$$

Où – T (x) et T(x+dx) désignent les forces de tension du fil respectivement en x et en x+dx à l'instant t.


y
Brin de
corde
$\vec{T}(x+dx,t)$
$\alpha(x+dx,t)$
$\alpha(x,t)$
y(x,t)
$-\vec{T}(x,t)$
x
x+dx
x

Cette relation vectorielle, projetée sur l'horizontale, permet de montrer simplement que, pour de faibles mouvements, la norme de la tension est constante, égale à la force F avec laquelle est tendue la corde à l'équilibre.

En projection selon l'axe (Oy), on relie la dérivée seconde par rapport au temps aux angles :

$$\mu\, dx \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -F \sin\alpha(x,t) + F \sin\alpha(x+dx,t)$$

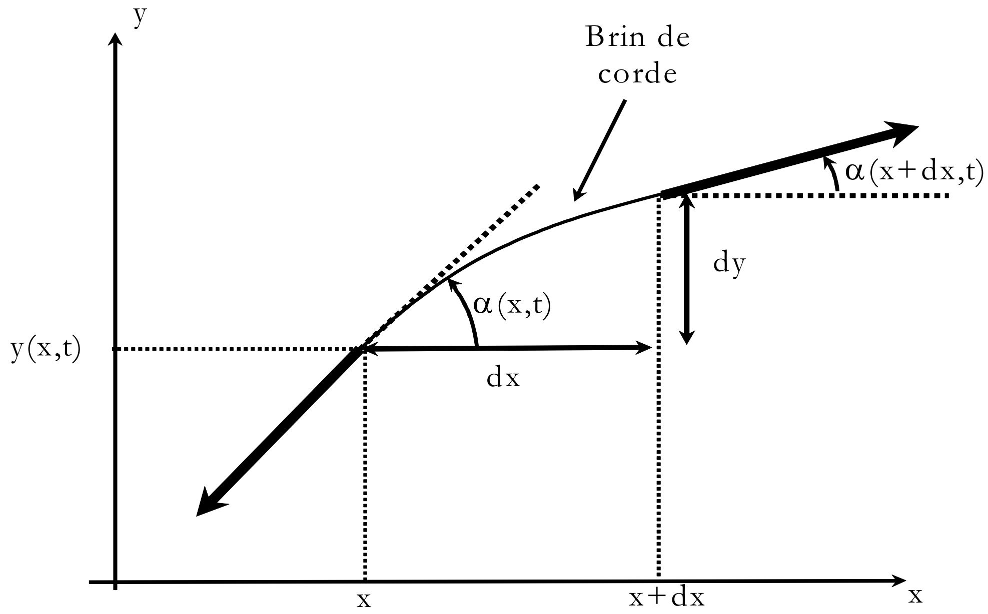
$\alpha(x)$ et $\alpha(x+dx)$ que font, à l'instant t, les deux tensions avec l'horizontale en x et x+dx.

Ces angles restant faibles, on peut assimiler les sinus aux valeurs des angles en radians.

$$\mu\, dx \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -F\alpha(x,t) + F\alpha(x+dx,t)$$

Soit :

$$\mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = F \frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial x}$$



En assimilant l'arc de corde situé entre x et x+dx à sa tangente :

$$\tan\alpha(x,t) \approx \alpha(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

On réécrit la relation précédente reliant les dérivées spatiales et temporelles :

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = F/\mu \, \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

Et peut s’écrire sous la forme classique d’une équation de d’Alembert :

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

Où :

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

apparaît comme la vitesse de propagation de la déformation transversale de la corde le long de l’axe (Ox).

Que la corde soit pincée, frottée ou tapée, on constate que la vitesse de propagation reste la même. Elle augmente avec la « raideur » du milieu (donnée par la tension F de la corde) et diminue avec l’inertie (représentée ici par la masse volumique μ)

On peut retenir, plus généralement, que les ondes mécaniques se propagent d’autant plus mal que le milieu est plus mou et plus inerte.

On s'intéresse maintenant aux oscillations libre et à une famille de solutions de l'équation de d'Alembert sous forme d'ondes stationnaires.

On suppose que la corde est fixée à ses deux extrémités en $x = 0$ et en $x = L$, où L est la longueur de la corde.

C'est le cas de la guitare, par exemple, où les cordes reposent d'un côté sur le chevalet et de l'autre sur le sillet.

Le guitariste met en vibration les cordes d'une guitare : il génère ainsi de nombreuses ondes progressives.

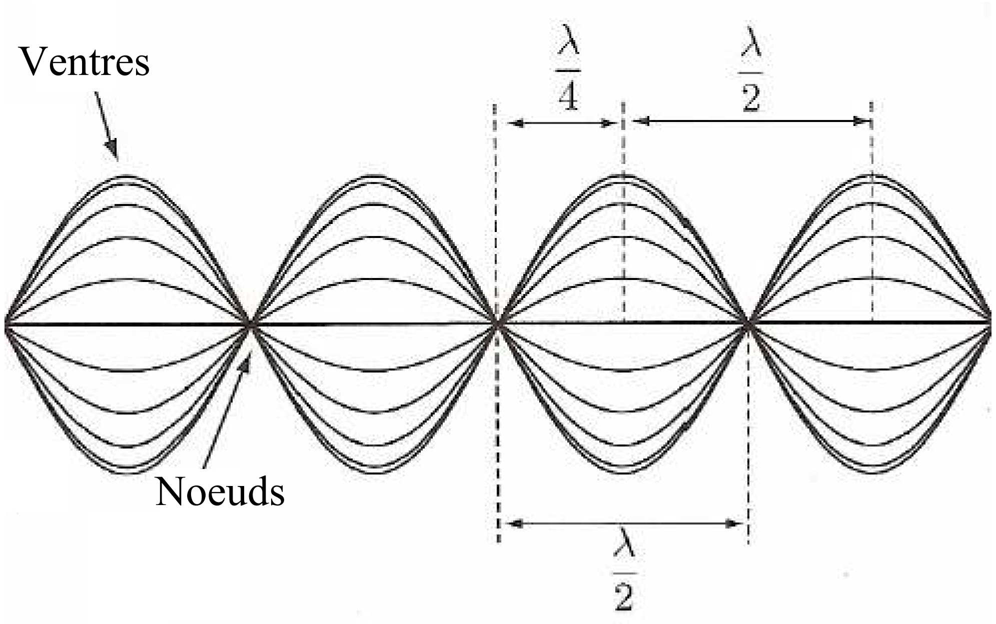
Seules certaines d'entre elles seront constructives après réflexions multiples.

On obtient finalement un système d'ondes stationnaires et on a des conditions aux limites de résonance de la corde.

L'amplitude de l'onde reste constamment nulle en certains points appelés nœuds de vibration et distants d'une demi-longueur d'onde de vibration λ.

Elle est maximale en un ventre de vibration.

Deux ventres de vibration sont également distants de $\lambda / 2$.



ANIMATION ?

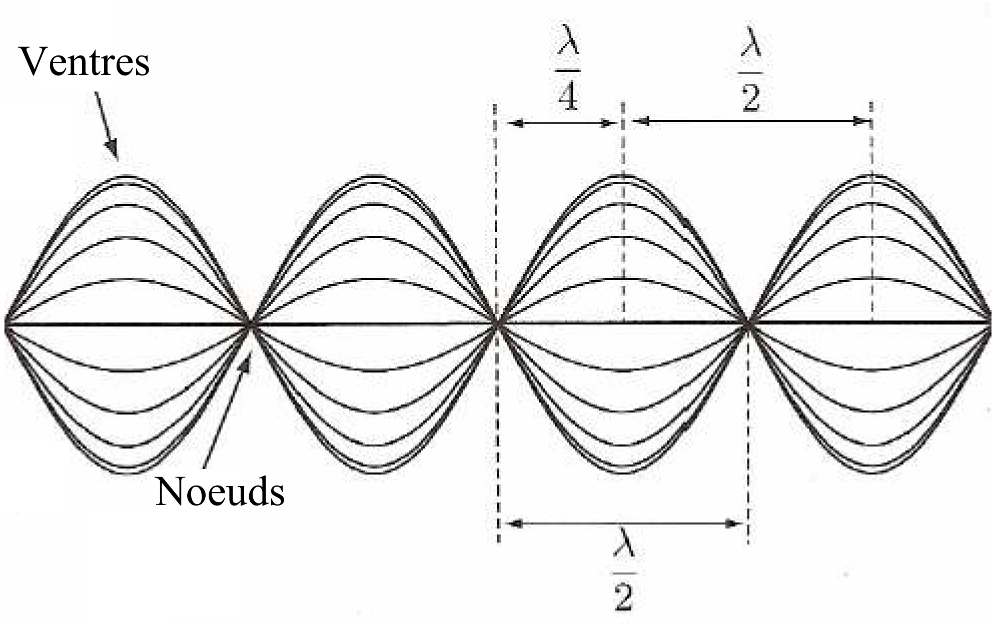
L'onde obtenue se propage sur place : les nœuds et les ventres ne se déplacent pas le long de la corde.

Le chevalet et le sillet, distants de L, sont situés à des nœuds de vibration.

Par conséquent, en notant n un entier naturel quelconque :

$$L = n\frac{\lambda_n}{2}$$

Où λ_n est la longueur d'onde associée au mode propre stationnaire de la corde, ainsi quantifié par l'entier n.

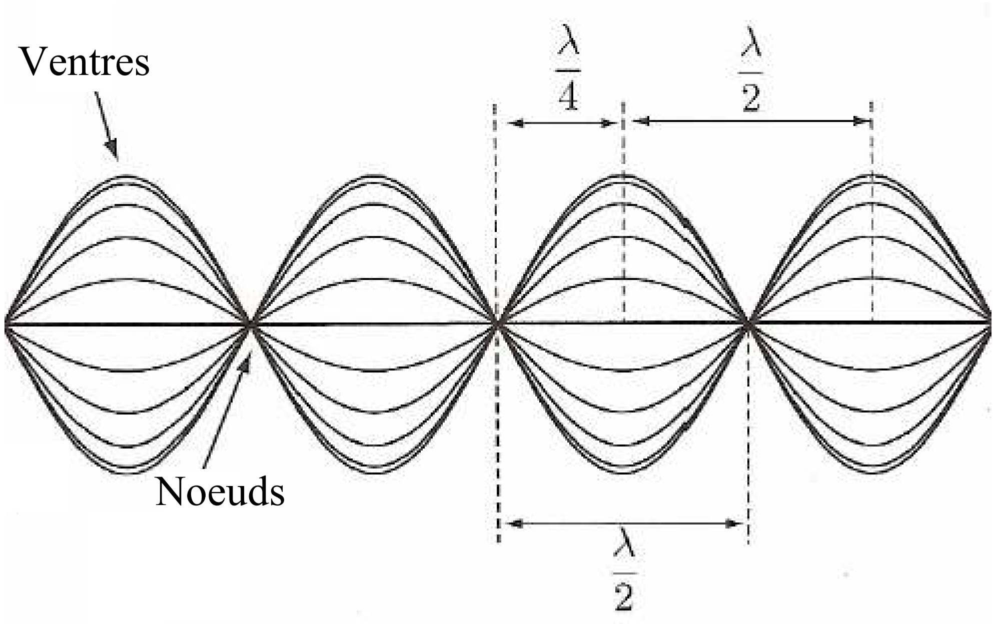


La fréquence et la pulsation associées au mode n sont :

$$\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = n\frac{c}{2L} \qquad et \qquad \omega_n = 2\pi\nu_n = n\frac{\pi c}{L}$$

Le vecteur d'onde (encore appelée pulsation spatiale) vaut :

$$k_n = \frac{\omega_n}{c} = n\frac{\pi}{L}$$



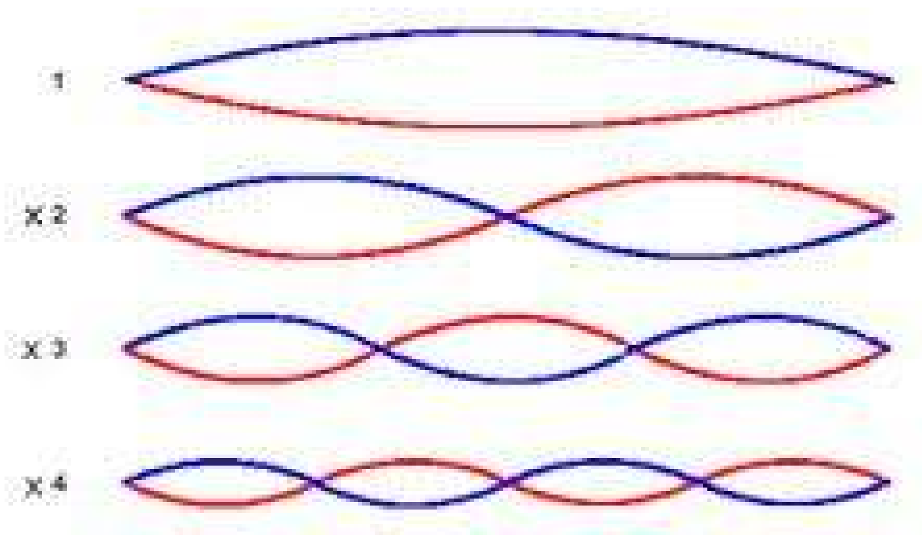
ANIMATION ?

On peut alors commenter l'influence de chaque paramètre :

• Si la corde est légère (masse volumique plutôt faible), alors la vitesse est grande et la fréquence élevée.

• Si la corde est bien tendue (la force F plutôt grande), la vitesse sera plus élevée et la fréquence également : le son sera aigu.

• Si la corde est longue (L plutôt grande), la fréquence sera faible et le son émis grave. En particulier, si la longueur doublée, la fréquence est divisée par deux : la noté jouée se situe à l'octave inférieure.



L'amplitude y_n de vibration pour le mode n peut s'écrire sous la forme d'une onde stationnaire harmonique, appelée mode propre :

$$y_n(x,t) = y_{0,n}\, sin\left(k_n x - \psi_n\right) cos\left(\omega_n t - \varphi_n\right)$$

Et peut s'écrire, en remplaçant les termes de pulsation et de vecteur d'onde :

$$y_n(x,t) = y_{0,n}\, sin\left(n\frac{\pi}{L}x - \psi_n\right) cos\left(n\frac{\pi c}{L}t - \varphi_n\right)$$

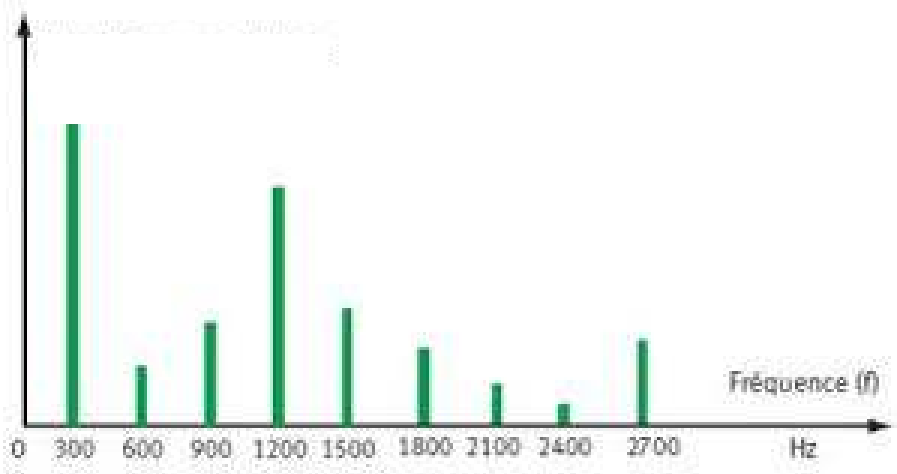
L'équation de d'Alembert étant linéaire, la vibration globale de la corde y(x,t) pourra s'écrire comme la somme des contributions des différents modes :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0,n}\, sin\left(n\frac{\pi}{L}x - \psi_n\right) cos\left(n\frac{\pi c}{L}t - \varphi_n\right)$$

• Le fondamental correspond au mode n = 1. Il a pour fréquence $f_1 = \pi c / L$.

• Les harmoniques correspondent à tous les autres modes, de fréquences $2f_1$, $3f_1$, …, $nf_{1, \dots}$.

• On obtient le spectre acoustique du son en traçant l'amplitude du fondamental et de chaque harmonique en fonction de la fréquence.



• Le nombre d'harmoniques dans un son complexe, ainsi que leurs amplitudes, dépendent de la nature de l'instrument de musique et lui confèrent sa propre caractéristique sonore que l'on appelle le timbre de l'instrument.

• En résumé, l'amplitude de l'onde donne une intensité sonore forte ou faible, sa fréquence correspond à la hauteur du son : aigu ou grave, et le contenu spectral correspond à son timbre : chaud, sourd, strident, dur…

• Par exemple, une guitare et un piano jouant la même note avec la même amplitude sonore produiront des sons dont le timbre est tout à fait différent.