

Propagation d'ondes le long d'une chaîne de pendules couplés

I- Etude d'une chaîne de pendules couplés

1- Les phénomènes dissipatifs sont essentiellement le frottement avec l'air. Ces phénomènes vont entraîner une décroissance exponentielle du phénomène d'oscillation. Ils seront négligeables si le temps caractéristique de la décroissance est négligeable devant la période des oscillations.

2- On travaille avec les système { le pendule 1 } dans un référentiel galiléen.

Ce pendule est soumis :

à son poids de moment par rapport à O_1x : $M_{O_1x}(\vec{P}_1) = -mgl\sin(\theta_1) \sim -mgl\theta_1$

au couple de rappel du fil de droite : $\Gamma_{1d} = -C(\theta_1 - \theta_2)$

au couple de rappel du fil de gauche : $\Gamma_{1g} = -C\theta_1$

Le moment d'inertie de la masse ponctuelle m par rapport à O_1x est $J = ml^2$

On applique le TMC au pendule 1 ce qui donne : $J\ddot{\theta}_1 = ml^2\ddot{\theta}_1 = -mgl\theta_1 - C(\theta_1 - \theta_2) - C\theta_1$ soit en faisant apparaître les pulsations caractéristiques introduites par l'énoncé :

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_g^2\theta_1 + \omega_c^2(2\theta_1 - \theta_2) = 0$$

On fait le même raisonnement avec le système { le pendule 2 } et on obtient :

$$\ddot{\theta}_2 + \omega_g^2\theta_2 + \omega_c^2(2\theta_2 - \theta_1) = 0$$

ω_g représente la pulsation du pendule s'il n'était soumis qu'à son poids et ω_c représente la pulsation du pendule s'il n'était soumis qu'au fil de rappel .

3- a- On introduit les variables $\theta^+ = \theta_1 + \theta_2$ et $\theta^- = \theta_1 - \theta_2$

On en déduit le nouveau système d'équation en sommant et en retranchant les deux équations différentielles obtenues au 2 :

$$\ddot{\theta}^+ + (\omega_c^2 + \omega_g^2)\theta^+ = 0$$

$$\ddot{\theta}^- + (\omega_g^2 + 3\omega_c^2)\theta^- = 0$$

3-b- L'intérêt de ce changement de variable est de permettre une résolution des équations différentielles en transformant un système d'équations couplées en un système d'équations indépendantes.

4-a- Dans le cas où $\theta^-(t) = 0$, on a $\theta_1(t) = \theta_2(t) \forall t$. **Les deux pendules vibrent en phase.**
 Dans le cas où $\theta^+(t) = 0$, on a $\theta_1(t) = -\theta_2(t) \forall t$. **Les deux pendules vibrent en opposition de phase.**

4-b-c- Dans ce cas où les deux pendules vibrent en phase, comme $\theta^-(t) = 0$ on en déduit $\theta_1(t) = \theta_2(t) = \frac{\theta^+(t)}{2}$. Les deux pendules vérifient alors la même équation différentielle :

$$\ddot{\theta}^+ + (\omega_c^2 + \omega_g^2)\theta^+ = 0 \text{ Ils vibrent à la pulsation : } \omega_{1,1}^2 = \omega_c^2 + \omega_g^2$$

Dans ce cas où les deux pendules vibrent en opposition de phase, comme $\theta^+(t) = 0$ on en déduit $\theta_1(t) = -\theta_2(t) = \frac{\theta^-(t)}{2}$. Les deux pendules vérifient alors la même équation différentielle : $\ddot{\theta}^- + (3\omega_c^2 + \omega_g^2)\theta^- = 0$ Ils vibrent à la pulsation : $\boxed{\omega_{1,-1}^2 = 3\omega_c^2 + \omega_g^2}$

4-d- Si on travaille avec le mode en phase, on a $\theta_1 = \theta_2$.

Pour le pendule 1, il subit à gauche un couple de torsion $-C\theta_1$ et rien à droite puisque $\theta_1 = \theta_2$.

Le théorème du moment cinétique donne : $ml^2\ddot{\theta}_1 = -mgl\theta_1 - C\theta_1$ ce qui donne :

$$\ddot{\theta}_1 + (\omega_c^2 + \omega_g^2)\theta_1 = 0 ; \text{ on retrouve bien comme mode : } \boxed{\omega_{1,1}^2 = \omega_c^2 + \omega_g^2}$$

Si on travaille avec le mode opposition de phase, on a $\theta_1 = -\theta_2$.

Pour le pendule 1, il subit à gauche un couple de torsion $-C\theta_1$ et à droite $-C(\theta_1 - \theta_2) = -2C\theta_1$ puisque $\theta_1 = -\theta_2$.

Le théorème du moment cinétique donne : $ml^2\ddot{\theta}_1 = -mgl\theta_1 - 3C\theta_1$ ce qui donne :

$$\ddot{\theta}_1 + (3\omega_c^2 + \omega_g^2)\theta_1 = 0 ; \text{ on retrouve bien comme mode : } \boxed{\omega_{1,-1}^2 = 3\omega_c^2 + \omega_g^2}$$

5- La constante de raideur est en $N.m$. Elle est donc proportionnelle à G qui est en $N.m^{-2}$. Plus la section du fil est grande, plus la raideur du fil est grande donc C varie en $R^{2\alpha}$ avec $\alpha > 0$

Plus la longueur du fil est grande, plus la constante de raideur est petite donc C varie en $\frac{1}{a^\beta}$ avec $\beta > 0$

On a donc $1 = -2 + 2\alpha - \beta$ soit $2\alpha - \beta = 3$

Si on suppose que C est inversement proportionnel à la longueur du fil on en déduit : $\beta = 1$ et $\alpha = 2$

$$\text{D'où } \boxed{C = k \cdot \frac{GR^2}{a}}$$

6- On prend comme système le n ème pendule dans un réf galiléen.

Ce pendule est soumis :

à son poids de moment par rapport à O_{nx} : $M_{O_{nx}}(\vec{P}_n) = -mgl\sin(\theta_n) \sim -mgl\theta_n$

au couple de rappel du fil de droite : $\Gamma_{nd} = -C(\theta_n - \theta_{n+1})$

au couple de rappel du fil de gauche : $\Gamma_{ng} = -C(\theta_n - \theta_{n-1})$ ce qui donne en appliquant le théorème du moment cinétique :

$$ml^2\ddot{\theta}_n = -mgl\theta_n - C(2\theta_n - \theta_{n+1} - \theta_{n-1}) \text{ soit :}$$

$$\boxed{\ddot{\theta}_n + \omega_g^2\theta_n + \omega_c^2(2\theta_n - \theta_{n+1} - \theta_{n-1}) = 0}$$

7- On a $\theta_{n+1}(t) = \theta(na + a, t) = \theta(na, t) + a \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{na} + \frac{a^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right)_{na}$ et

$$\theta_{n-1}(t) = \theta(na - a, t) = \theta(na, t) - a \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{na} + \frac{a^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right)_{na}$$

$$\text{Donc } \theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n = -a^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right)_{na}$$

$$\text{On obtient donc : } \boxed{\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - a^2 \omega_c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_g^2 \theta = 0}$$

Soit $c_o = a\omega_c$ et $\omega_o = \omega_g$

Dans le cas où $\omega_o = 0$ on trouve une équation de d'Alembert et c_o est la vitesse de propagation de l'onde

Dans le cas où $c_o = 0$ on trouve l'équation d'un pendule oscillant.

8- Le passage à la limite du milieu continu est valide si dans le développement limité le terme d'ordre trois est négligeable devant le terme d'ordre deux soit : $\frac{a^2}{2} \left| \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right)_{na} \right| \gg \frac{a^3}{6} \left| \left(\frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} \right)_{na} \right|$

soit $\left| \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right)_{na} \right| \gg a \left| \left(\frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} \right)_{na} \right|$

9- On a trouvé $c_o = a\omega_c = a \sqrt{\frac{C}{ml^2}} = \sqrt{\frac{Ca^2}{ml^2}}$ ce qui donne $c_o = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}$

10- On a vu précédemment que $C = k \cdot \frac{GR^2}{a}$ donc κ ne dépend pas de a . Si on maintient μ constant, c_o reste constant.

11- $c_o = 3 \text{ m.s}^{-1}$.

12- Avec l'onde proposée on a $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -k^2 \theta_o \exp[j(\omega t - kx)]$ et $\frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} = -jk^3 \theta_o \exp[j(\omega t - kx)]$. La condition de validité de la question 8 s'exprime par : $ak \ll 1$

13-a- On a l'équation différentielle : $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_o^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_o^2 \theta = 0$

On remplace $\theta(x, t)$ par la solution proposée : $\theta(x, t) = \theta_o \exp[j(\omega t - kx)]$ ce qui donne : $-\omega^2 \theta_o \exp[j(\omega t - kx)] + k^2 c_o^2 \theta_o \exp[j(\omega t - kx)] + \omega_o^2 \theta_o \exp[j(\omega t - kx)] = 0$

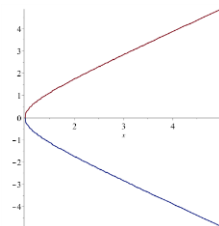
D'où la relation de dispersion : $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{c_o^2}$

En utilisant les notations de l'énoncé on en déduit : $K^2 = \Omega^2 - 1$

13-b- Deux cas sont à envisager :

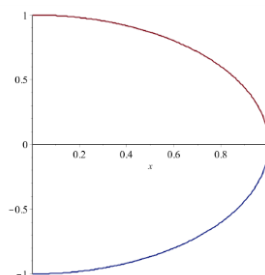
$\Omega > 1$: $K = \pm \sqrt{\Omega^2 - 1}$ ce qui donne :

$Re(K) = \pm \sqrt{\Omega^2 - 1}$ et $Im(K) = 0$.



$\Omega < 1$: $K = \pm j\sqrt{1 - \Omega^2}$ ce qui donne :

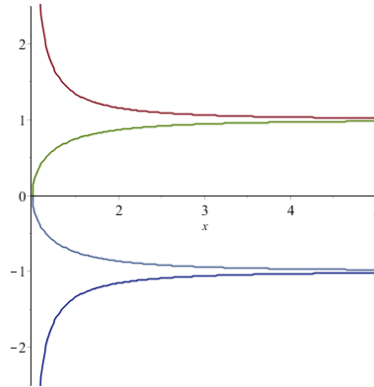
$Im(K) = \pm \sqrt{1 - \Omega^2}$ et $Re(K) = 0$.



14- La vitesse de phase adimensionnalisée est définie par $V_\phi = \frac{\Omega}{K}$ soit $V_\phi = \pm \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 - 1}}$.

La vitesse de groupe est définie par $V_g = \frac{d\Omega}{dK}$. On a $K = \pm\sqrt{\Omega^2 - 1}$ ce qui donne :

$$2KdK = 2\Omega d\Omega \text{ soit } V_G = \frac{K}{\Omega} \text{ ce qui donne : } V_G = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}}.$$



La vitesse de groupe ne peut jamais dépasser la valeur c_o alors que la vitesse de phase peut dépasser cette valeur.

Aux fortes pulsations, le milieu devient non dispersif et on obtient : $v_\phi = v_G = c_o$

15- Deux cas peuvent se produire :

Si $\Omega > 1$: **une onde harmonique s'établit** dans la chaîne de pendules et on obtient : $\underline{\theta}(x, t) = \theta_o \exp[j(\omega t - kx)]$

Si $\Omega < 1$: k est un imaginaire. On note $k = -j\beta$. Dans ce cas on obtient $\underline{\theta}(x, t) = \theta_o \exp(-\beta x) \exp[j\omega t]$. IL s'agit **d'une onde évanescente** et la perturbation ne va pas se propager.

16- Si on considère un élément (C, a) du câble de torsion, cet élément n'a pas de masse. On peut lui appliquer le théorème du moment cinétique. Il est soumis au couple de torsion et au moment extérieur.

On a : $0 = -C\dot{\underline{\theta}} + \underline{M}$ soit $C\dot{\underline{\theta}} = \underline{M}$

L'angle $\underline{\theta}$ est sous la forme $\underline{\theta} = \theta_o \exp(j\omega t)$ ce qui donne :

$\dot{\underline{\theta}} = j\omega \theta_o \exp(j\omega t) = j\omega \underline{\theta} = \frac{j\omega}{C} \underline{M}$ d'où l'impédance mécanique de cet élément :

$$\frac{\underline{M}}{\dot{\underline{\theta}}} = Z_{\text{câble}}(\omega) = \frac{C}{j\omega}.$$

17- On applique le théorème du moment cinétique à la masse m . Elle subit le moment du poids et le moment extérieur.

$ml^2 \ddot{\underline{\theta}} = \underline{M} - mgl \underline{\theta}$; on a vu que $\dot{\underline{\theta}} = j\omega \underline{\theta}$ et $\ddot{\underline{\theta}} = j\omega \dot{\underline{\theta}}$ ce qui donne pour le théorème du moment cinétique :

$ml^2 j\omega \dot{\underline{\theta}} = \underline{M} - mgl \underline{\theta}$, soit $(ml^2 j\omega + \frac{mgl}{j\omega}) \dot{\underline{\theta}} = \underline{M}$ d'où

$$\frac{\underline{M}}{\dot{\underline{\theta}}} = Z_{\text{pendule}}(\omega) = \frac{mgl + ml^2(j\omega)^2}{j\omega} = \frac{mgl}{j\omega} + ml^2 j\omega$$

18- On remarque que $Z_{c\grave{a}ble}$ est équivalent à un condensateur et que $Z_{pendule}$ est équivalent à un condensateur et à une bobine en série.

C'est donc le schéma de la figure (a) qui est le plus satisfaisant avec :

$$L_1 = ml^2 ; C_1 = \frac{1}{mgl} ; C_2 = \frac{1}{C}.$$

19- La câble coaxial proposé ne laisse passer que les signaux sinusoïdaux et pas les signaux continus alors que les câbles coaxiaux utilisés en TP laissent passer les signaux sinusoïdaux et les signaux continus. **L'analogie n'est donc pas matérialisable par un câble coaxial.**

20- On prend comme système le câble entre n et $n + 1$. Ce morceau de câble n'a pas de masse. On lui applique le théorème du moment cinétique :

$$0 = M - C(\theta_n - \theta_{n+1}), \text{ ce qui donne } M = -C(\theta_{n+1} - \theta_n) \sim -C(\theta(x) - (\theta(x) - a \frac{\partial \theta}{\partial x}))$$

$$\text{On obtient : } M = -Ca \frac{\partial \theta}{\partial x} \text{ soit en notation complexe : } \underline{M} = jkCa \underline{\theta} = \frac{kCa}{\omega} \underline{\dot{\theta}}$$

$$\text{On en déduit l'expression de l'impédance mécanique de la chaîne : } \underline{Z}_{méca} = \frac{kCa}{\omega}$$

21- On reprend les expressions obtenues à la question 13 : $K = \pm \sqrt{\Omega^2 - 1}$ si $\Omega > 1$ et $K = \pm j\sqrt{1 - \Omega^2}$ si $\Omega < 1$ avec $K = \frac{c_o k}{\omega_o}$

$$\text{ce qui donne : } k = \frac{K\omega_o}{c_o} = \pm \frac{\sqrt{\Omega^2 - 1}\omega_o}{c_o} \text{ si } \Omega > 1$$

$$k = \frac{K\omega_o}{c_o} = \pm j \frac{\sqrt{1 - \Omega^2}\omega_o}{c_o} \text{ si } \Omega < 1$$

$$\text{d'où } Z_{méca} = \frac{kCa}{\omega} = \pm \frac{\sqrt{\Omega^2 - 1}\omega_o Ca}{c_o \omega} \text{ si } \Omega > 1$$

$$Z_{méca} = \frac{kCa}{\omega} = \pm j \frac{\sqrt{1 - \Omega^2}\omega_o Ca}{c_o \omega} \text{ si } \Omega < 1$$

$$\text{Mais } \Omega = \frac{\omega}{\omega_o} \text{ et } c_o = \sqrt{\frac{Ca^2}{ml^2}} \text{ donc } Ca = \frac{ml^2}{a} c_o^2 \text{ et } \mu = \frac{m}{a} \text{ soit } = \mu l^2 c_o^2.$$

On obtient pour l'impédance mécanique :

$$Z_{méca} = \pm \mu l^2 c_o \frac{\sqrt{\Omega^2 - 1}}{\Omega} \text{ si } \Omega > 1$$

$$Z_{méca} = \pm \mu l^2 c_o j \frac{\sqrt{1 - \Omega^2}}{\Omega} \text{ si } \Omega < 1$$

On pose $Z_{méca} = \pm \mu l^2 c_o \Gamma(\Omega)$ avec :

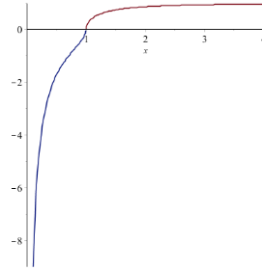
$$\Gamma(\Omega) = \frac{\sqrt{\Omega^2 - 1}}{\Omega} \text{ si } \Omega > 1$$

$$\Gamma(\Omega) = -j \frac{\sqrt{1 - \Omega^2}}{\Omega} \text{ si } \Omega < 1$$

Si on s'intéresse à la solution se propageant vers les $x > 0$, il faut que la partie imaginaire soit négative et la partie réelle positive

22- $\Gamma(\Omega)$ est sans dimension.

23- Le graphe est le suivant :



24- En hautes fréquences, l'impédance est quasiment constante. La chaîne est équivalente à un conducteur ohmique. Il n'y a plus le phénomène de dispersion et on a : $\boxed{Z_{méca} = V_G}$

25- Si on suppose la chaîne infinie, au fur et à mesure que l'onde se propage, les pendules acquièrent une énergie cinétique et une énergie potentielle. IL faut donc sans arrêt fournir de l'énergie.

26- Dans le cas où l'impédance mécanique est imaginaire si M est de la forme $M_o \cos(\omega t)$ on a $\theta(t) = \theta_o \sin(\omega t)$

La puissance mécanique est $P = M \cdot \dot{\theta} = M_o \theta_o \cos(\omega t) \sin(\omega t)$ ce qui donne en valeur moyenne : $\langle P \rangle = 0$. L'opérateur ne transmet aucune puissance en valeur moyenne car l'onde est évanescente et ne se propage pas.

II- Non- linéarité et propagation d'un soliton

27- On cherche des solutions sous la forme $\theta(x, t) = F(x - vt) = F(z)$

On a : $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{dF}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dF}{dz}$ et $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{d^2 F}{dz^2} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d^2 F}{dz^2}$; de même on a $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{dF}{dz} \frac{\partial z}{\partial t} = -v \frac{dF}{dz}$ et $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -v \frac{d^2 F}{dz^2} \frac{\partial z}{\partial t} = v^2 \frac{d^2 F}{dz^2}$.

En remplaçant dans l'équation différentielle on obtient :

$$v^2 \frac{d^2 F}{dz^2} - c_o^2 \frac{d^2 F}{dz^2} + \omega_o^2 \sin F = 0 \text{ soit : } (v^2 - c_o^2) \frac{d^2 F}{dz^2} + \omega_o^2 \sin F = 0$$

On multiplie cette expression par $\frac{dF}{dz}$ ce qui donne : $(v^2 - c_o^2) \frac{dF}{dz} \frac{d^2 F}{dz^2} + \omega_o^2 \frac{dF}{dz} \sin F = 0$ soit :

$$(v^2 - c_o^2) \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 - \omega_o^2 \frac{d}{dz} (\cos F) = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{1}{2} \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 + \frac{\omega_o^2}{c_o^2 - v^2} \cos F = B}. \quad \text{On obtient :}$$

$$\boxed{A = \frac{\omega_o^2}{c_o^2 - v^2}}.$$

28-a- L'équation obtenue ressemble à une équation de conservation de l'énergie pour un point matériel de masse m , soumis au potentiel $V(x)$: $\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) = E$

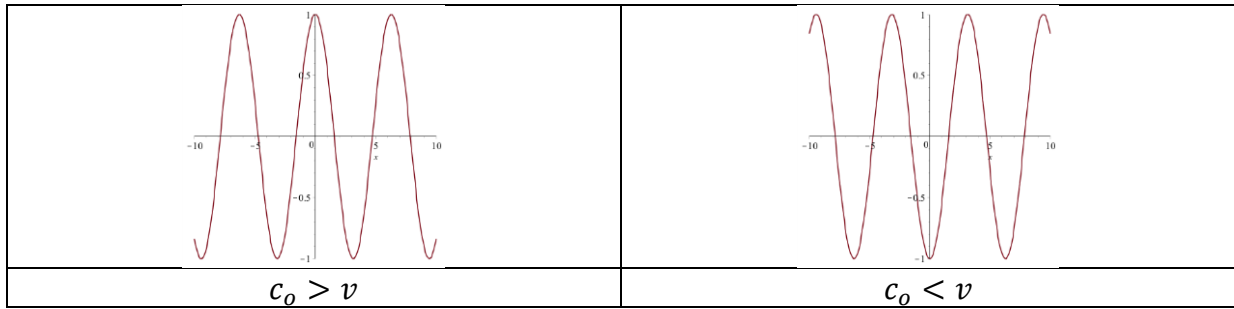
$$\text{soit } \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{V(x)}{m} = E'$$

Si le potentiel est du type $A m \cos(x)$, on se trouve dans une situation semblable à la question

27 avec une équation différentielle analogue : $\boxed{\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + A \cos(x) = E'}$.

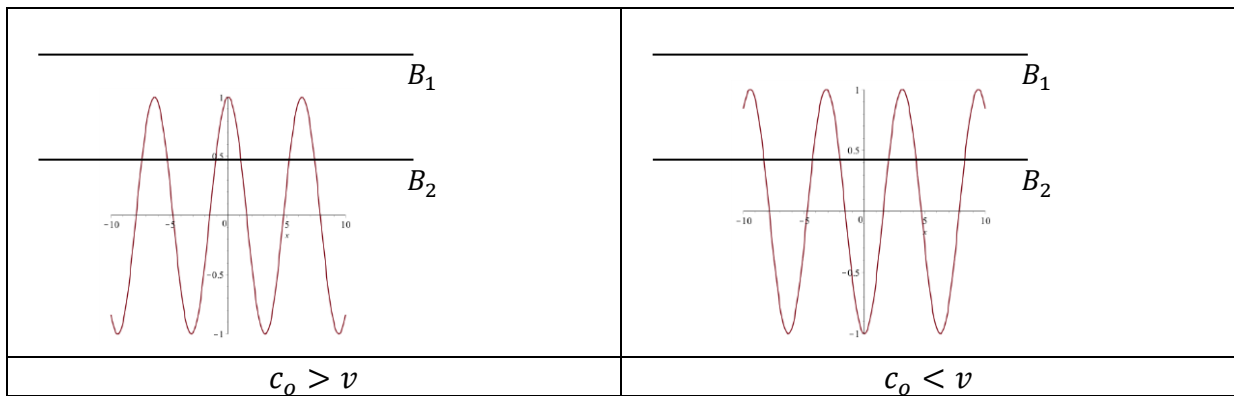
28- Par analogie avec le problème du point matériel de la question 28-a, **la constante B joue le rôle de l'énergie mécanique du système.**

29-a- Le potentiel est de la forme $A\cos F$ avec $A > 0$ si $c_o > v$ et $A < 0$ si $c_o < v$



29-b- On a $\frac{1}{2} \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 + A\cos F = B$ donc $B - A\cos F > 0$ soit $B > A\cos F$

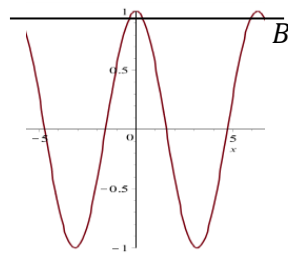
On aura les situations suivantes :



Dans les deux situations $B = B_1$, toutes les valeurs de F sont autorisées puisqu'on a toujours $B > A\cos F$. On est en présence **d'état non liés**.

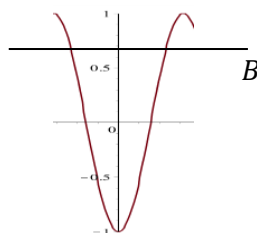
Dans la situation $B = B_2$ on est en présence **d'états liés**, toutes les valeurs de F n'étant pas autorisées.

30-a- On se place dans le cas où $v < c_o$ et $B \rightarrow A^-$



La particule est piégée entre $[0, 2\pi]$. Si on s'intéresse à F en fonction de z , on a $\frac{dF}{dz} \sim 0$ au voisinage de 0 et de 2π . **Comme la vitesse de la particule y est nulle, la particule restera plus longtemps au voisinage de 0 et de 2π**

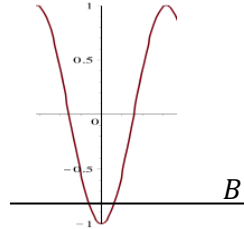
30-b- On se place dans le cas où $v > c_o$ et $A < B < -A$



La particule est piégée sur un intervalle $[-F_o, +F_o]$

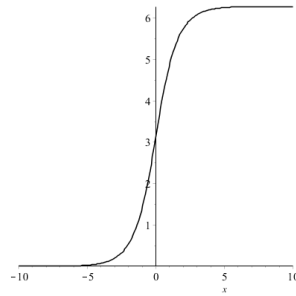
Pour la chaîne de pendules, on va avoir une propagation vers les $x > 0$ à la vitesse v régit par $\theta(x, t) = F(x - vt)$ avec F oscillant entre $-F_o$ et $+F_o$

30-c- On se place dans le cas où $v > c_o$ et $A < B < -A$ mais $B \rightarrow A^+$



Le système est forcé d'osciller au voisinage de 0 et on se retrouve **dans l'approximation des petits angles.**

31-a- La solution est dans le cas où $v < c_o$ et $B \rightarrow A^-$: $F_d(z) = 4\arctan\left[\exp\left(\frac{z}{\lambda}\right)\right]$. Cette fonction a l'allure suivante :



On a : $F_d(z=0) = \pi$; $\lim_{z \rightarrow -\infty} F_d(z) = 0$; $\lim_{z \rightarrow +\infty} F_d(z) = 2\pi$.

31-b- On a déjà vu que $\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} = \frac{dF_d(z)}{dz}$

Graphiquement, on observe que la fonction $F_d(z)$ est horizontale pour $z \rightarrow \pm\infty$. Donc

$$\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} = 0 \text{ pour } x \rightarrow \pm\infty$$

On peut aussi le vérifier plus analytiquement : $F_d(z) = 4\arctan\left[\exp\left(\frac{z}{\lambda}\right)\right]$ donc

$$\frac{dF_d(z)}{dz} = \frac{4\exp\left(\frac{z}{\lambda}\right)}{\lambda(1+\exp\left(\frac{2z}{\lambda}\right))} ; \text{ donc}$$

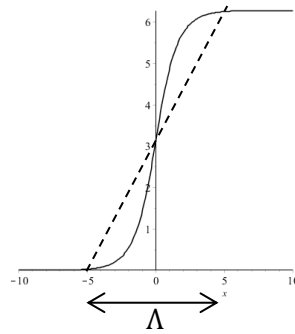
$$\text{quand } z \rightarrow -\infty, \frac{dF_d}{dz} = \frac{4\exp\left(\frac{z}{\lambda}\right)}{\lambda(1+\exp\left(\frac{2z}{\lambda}\right))} \rightarrow \frac{4\exp\left(\frac{z}{\lambda}\right)}{\lambda} \rightarrow 0$$

$$\text{quand } z \rightarrow +\infty, \frac{dF_d}{dz} = \frac{4\exp\left(\frac{z}{\lambda}\right)}{\lambda(1+\exp\left(\frac{2z}{\lambda}\right))} \rightarrow \frac{4\exp\left(\frac{z}{\lambda}\right)}{\lambda \exp\left(\frac{2z}{\lambda}\right)} \rightarrow \frac{4\exp\left(-\frac{z}{\lambda}\right)}{\lambda} \rightarrow 0$$

31-c- La tangente de la courbe en 0 vaut : $\left(\frac{dF_d}{dz}\right)_{z=0} = \frac{2}{\lambda}$. On peut donc modéliser la fonction

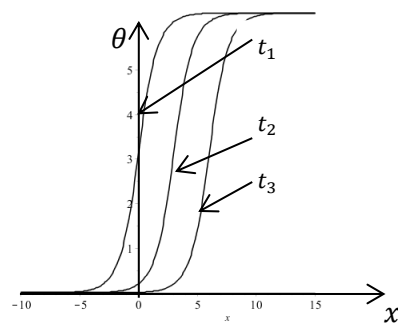
$F_d(z)$ par la droite : $y = \frac{2}{\lambda}z + b$ sur un domaine $[-z_o, +z_o]$ tel $2\pi = \frac{2}{\lambda}z_o + b$ et $0 = -\frac{2}{\lambda}z_o + b$ ce qui donne $b = \pi$ et $z_o = \frac{\lambda\pi}{2}$.

L'extension spatiale de cette zone est $\Lambda = \lambda\pi$



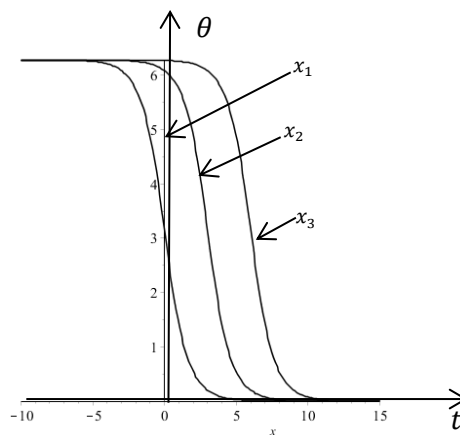
31-d- $\lambda_o = 0,3 \text{ m}$

32-a- On a vu que $\theta(x, t) = F_d(x - vt)$ ce qui donne les trois graphes suivants avec $t_1 < t_2 < t_3$

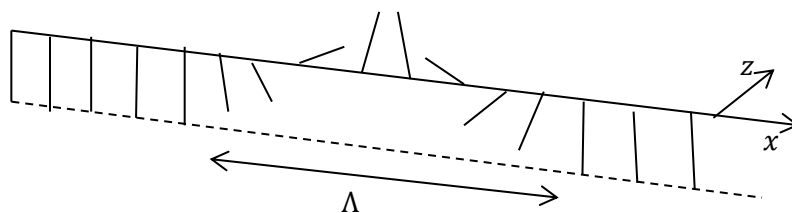


Le soliton avance vers les $x > 0$ sans déformation.

32-b- On trace $\theta(x, t) = F_d(x - vt)$ fonction du temps pour $x_1 < x_2 < x_3$



33-



34-a- Lorsque le soliton passe, en regardant vers les $x < 0$, le soliton tourne vers la droite d'où le terme de soliton dextre.

34-b- Pour un soliton senestre, les pendules doivent tourner vers la gauche. On a donc

$$F_s(z) = -F_d(z) = -4\arctan\left[\exp\left(\frac{z}{\lambda}\right)\right]$$

Quand z augmente, $F_s(z)$ varie de 0 à -2π ce qui correspond bien à une rotation vers la gauche.

35-a- Sur les schémas a) et b) on constate que l'angle $\theta(x, t)$ augmente avec le temps à x fixé. C'est donc l'opposé de la situation du 32-a. **Les solitons de la figure 4a sont senestres.**

35-b- Sur la figure 4-a, on constate que le soliton arrive en $x = 2$ au temps t_2 et en $x = 3$ au temps t_5 . On en déduit la vitesse de propagation du soliton : $v = \frac{x_3 - x_2}{t_5 - t_2} = \frac{1}{3\Delta t} = 3 \text{ m.s}^{-1}$

Sur la figure 4-b, avec la même démarche on constate que le soliton arrive en $x = 1$ au temps t_1 et en $x = 3$ au temps t_8 .

On en déduit la vitesse de propagation du soliton : $v = \frac{1}{7\Delta t} = 1 \text{ m.s}^{-1}$

35-c- On peut déterminer λ en mesurant l'extension spatiale du soliton soit Λ .

Pour la figure 4-a $\Lambda = \frac{1}{3} \text{ m}$ ce qui donne $\lambda = \frac{\Lambda}{\pi} = 0,1 \text{ m}$ et pour la figure 4-b $\Lambda = 1 \text{ m}$ ce qui donne $\lambda = \frac{\Lambda}{\pi} = 0,3 \text{ m}$

36-a- Cette excitation en $x = 0$ va créer deux solitons dans la chaîne, l'un se propageant vers les $x > 0$ et l'autre se propageant vers les $x < 0$.

36-b- On nous donne $\theta_o(t) = 4\arctan[\exp(\Omega_o t)]$ ce qui donne pour le soliton se propageant vers les $x > 0$: $\theta(x, t) = 4\arctan\left[\exp\left(\Omega_o\left(t - \frac{x}{v}\right)\right)\right]$. Cette solution correspond donc à un soliton senestre puisque l'angle augmente au cours du temps (par rapport à la question 33, l'exponentielle est en $-x$ et non en x).

Pour le soliton qui se propage vers les $x < 0$ correspond à la solution $\theta(x, t) = 4\arctan\left[\exp\left(\Omega_o\left(t + \frac{x}{v}\right)\right)\right]$ donc si on regarde comme à la question 33 le long de l'axe des x , quand x diminue le soliton tourne vers la gauche. Mais si on regarde vers l'onde, il tourne vers la droite donc cette solution est destre.

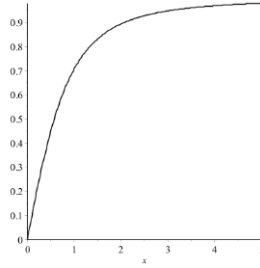
Récapitulatif : le soliton se propageant vers les $x > 0$ est senestre ; le soliton se propageant vers les $x < 0$ est destre.

37-a- Au temps $t = 0$ on a $\theta_o(x = 0, t) = 4\arctan[\exp(\Omega_o t)] = F_d(-vt)$; on en déduit que $\theta(x, t) = \theta\left(t - \frac{x}{v}\right) = 4\arctan\left[\exp\left(\Omega_o\left(t - \frac{x}{v}\right)\right)\right] = F_d(-z) = 4\arctan\left[\exp\left(-\frac{z}{\lambda}\right)\right]$ ce qui donne la relation : $\Omega_o\left(t - \frac{x}{v}\right) = -\frac{z}{\lambda} = -\frac{(x-vt)}{\lambda}$ d'où : $\Omega_o = \frac{v}{\lambda}$ soit $v = \lambda\Omega_o$

Or on nous donne $\lambda = \lambda_o \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_o^2}}$ et $\lambda_o = \frac{c_o}{\omega_o}$ d'où $v = \frac{c_o}{\omega_o} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_o^2}} \Omega_o$

d'où $\frac{v^2 \omega_o^2}{c_o^2 \Omega_o^2} = 1 - \frac{v^2}{c_o^2} \rightarrow \frac{v^2}{c_o^2} = \frac{1}{\frac{\omega_o^2}{\Omega_o^2} + 1}$ soit $\frac{v}{c_o} = \frac{\frac{\Omega_o}{\omega_o}}{\sqrt{1 + \frac{\Omega_o^2}{\omega_o^2}}}$

Ce qui donne la courbe suivante :



37-b- $v \sim 1 \text{ m.s}^{-1}$

38- La relation (10) fournie par l'énoncé représente l'énergie pour une chaîne infinie. On a vu que le soliton avait une extension spatiale de Λ . En dehors de cette zone, l'angle de torsion vaut 0 ou 2π . Dans ce cas les pendules sont au repos et l'énergie mécanique est nulle. L'énergie du soliton ne concerne donc pas toute la chaîne mais uniquement une extension spatiale de Λ . Le fait que le soliton ne se propage que dans un demi espace ne modifie pas le résultat de l'énergie puisque dans le demi espace où il ne se propage pas, l'énergie est la même avec ou sans soliton.

39- Sur la figure 5-c, le soliton se propage vers les $x > 0$ dans l'espace $x < 0$, puis se réfléchit en $x = 0$ et se propage vers les $x < 0$ dans le demi espace $x < 0$.

Sur la figure 5-d, le soliton se propage vers les $x > 0$ dans l'espace $x < 0$, puis se transmet en $x = 0$ et se propage vers les $x > 0$ dans le demi espace $x > 0$.

40-a- Dans la seconde partie de la chaîne, le soliton a une énergie : $E^+ = 8 \frac{\sqrt{\mu^+ g \kappa l}}{\sqrt{1 - \frac{v_+^2}{c_{o+}^2}}}$. L'énergie

minimale dont doit disposer le soliton est donc : $E_{min} = 8\sqrt{\mu^+ g \kappa l}$ valeur obtenue quand la vitesse de propagation v_+ est nulle.

40-b- On considère un soliton à la vitesse v_- dans le milieu $x < 0$. Ce soliton transporte une énergie $E^- = 8 \frac{\sqrt{\mu^- g \kappa l}}{\sqrt{1 - \frac{v_-^2}{c_{o-}^2}}}$. Il peut se propager dans le milieu $x > 0$ à la condition que cette énergie

soit supérieure à E_{min} soit : $8 \frac{\sqrt{\mu^- g \kappa l}}{\sqrt{1 - \frac{v_-^2}{c_{o-}^2}}} > 8\sqrt{\mu^+ g \kappa l}$ soit $\sqrt{\frac{\mu^-}{\mu^+}} > \sqrt{1 - \frac{v_-^2}{c_{o-}^2}} \rightarrow v_- > c_{o-} \sqrt{1 - \frac{\mu^-}{\mu^+}}$

On a donc une vitesse critique : $v_c = c_{o-} \sqrt{1 - \frac{\mu^-}{\mu^+}}$. Or on a vu que $c_o = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}$ ce qui donne

$$v_c = \frac{1}{l} \sqrt{\kappa \left(\frac{1}{\mu^-} - \frac{1}{\mu^+} \right)}.$$

41- On veut que le soliton soit intégralement transmis sans modification de sa vitesse.

Pour qu'il soit intégralement transmis il faut que $E^- = E^+$ ce qui donne : $8 \frac{\sqrt{\mu^- g \kappa^- l^-}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_{o-}^2}}} =$

$$8 \frac{\sqrt{\mu^+ g \kappa^+ l^+}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_{o+}^2}}} \text{ soit } \frac{\mu^- \kappa^- l^-}{\mu^+ \kappa^+ l^+} \left(1 - \frac{v^2}{c_{o+}^2}\right) = 1 - \frac{v^2}{c_{o-}^2} \rightarrow \frac{\mu^- \kappa^- l^-}{\mu^+ \kappa^+ l^+} - 1 = v^2 \left(\frac{\mu^- \kappa^- l^-}{\mu^+ \kappa^+ l^+ c_{o+}^2} - \frac{1}{c_{o-}^2} \right) \text{ Si cette}$$

relation doit être vraie quel que soit v il faut donc : $\frac{\mu^- \kappa^- l^-}{\mu^+ \kappa^+ l^+} = 1$ et $\frac{1}{c_{o+}^2} = \frac{1}{c_{o-}^2}$.

Comme $c_o = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}$ et $\frac{\mu^+}{\mu^-} = 8$ on obtient :

$$\frac{\kappa^- l^-}{\kappa^+ l^+} = 8$$

$$\frac{1}{l_+^2} \frac{\kappa^+}{\mu^+} = \frac{1}{l_-^2} \frac{\kappa^-}{\mu^-} \text{ soit } \frac{\kappa^+ l_-^2}{\kappa^- l_+^2} = 8$$

$$\text{Ce qui donne } \frac{l_+}{l_-} = \left(\frac{1}{64}\right)^{1/3} = 1/4 \text{ et } \frac{\kappa^+}{\kappa^-} = \left(\frac{1}{8}\right)^{1/3} = 1/2$$

42- Lorsque que les paramètres κ, μ et l varient continument le long de la chaîne, les grandeurs $c_o = \frac{1}{l(x)} \sqrt{\frac{\kappa(x)}{\mu(x)}}$ et $\omega_o^2 = \frac{g}{l(x)}$ deviennent fonction de x . Si ces grandeurs varient sur une échelle caractéristique grande devant a , on peut reprendre l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\kappa(x)}{l^2(x) \mu(x)} \sqrt{-\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{g}{l(x)}} \theta = 0$$

43- L'énergie ressemble à l'expression de l'énergie en relativité : $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

L'expression de la longueur d'onde ressemble au longueur d'onde de de Broglie relativiste :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

44- Ce type d'onde se rencontre en mécanique des fluides :

dans un fleuve c'est le phénomène du mascaret (le mascaret de la Seine est connu car responsable de la mort de Léopoldine Hugo)

dans la mer c'est un tsunami, provoqué par un tremblement de Terre.

45- Pour observer un soliton il faut des phénomènes non linéaires. Dans un câble coaxial de TP ou dans une fibre optique, les phénomènes sont linéaires donc on n'observe pas de soliton.

