Ma’ruza: Tarmoq tushunchasi. Tarmoqdagi oqimlar.

Reja:

1. **Tarmoq tushunchasi.**
2. **Tarmoqdagi oqimlar.**

1. Tarmoq tushunchasi.

Graflar nazariyasida hozirgacha ba’zi iboralar bo‘yicha umumiy kelishuv qaror topmaganligini qayd qilgan edik. Bu fikr graflar nazariyasining **tarmoq** va tarmoqqa oid tushunchalari bilan ish ko‘rganda yaqqol namoyan bo‘ladi. Ba’zan, “tarmoq” iborasi o‘rniga “to‘r” iborasini ham qo‘llaydilar. Masalan, S.V. Yablonskiyning 1986 yilda bosilib chiqqan Введение в дискретную математику (Diskret matematikaga kirish) nomli o‘quv qo‘llanmasida ([1]da) graf tushunchasi umumlashtirilib, tarmoqning quyidagi ta’rifi berilgan va “tarmoq” tushunchasi xususida fikrlar ham bayon qilingan.

“Berilgan $M=\{a_1,a_2,...\}$ to‘plam va har bir E_i elementi M dan olingan $R=\{E_0;E_1,E_2,...\}$ majmuani (naborni) **tarmoq** deb ataymiz va $M(E_0;E_1,E_2,...)$ bilan belgilaymiz, bu yerda $E_i=(a_{v_1(i)},a_{v_2(i)},...)$. M to‘plamning ob’yektlari tarmoqning **uchlari** deb, E_0 majmuadagi ob’yektlar esa – **tarmoqning qutblari** deb ataladi”.

Yuqorida eslatilgan kitobda ta’kidlanishicha: “Adabiyotda tarmoq tushunchasiga yaqin tushunchalar ham uchraydi, masalan, “**blok-sxema**” tushunchasi, “**gipergraf**” tushunchasi. Blok-sxema tushunchasi tarmoq tushunchasidan oldin paydo bo‘lgan, gipergraf tushunchasi esa – keyinroq”.

Gipergraf tushunchasi – bu graf tushunchasining shunday umumlashmasiki, bunda qirralar na faqat ikki elementli bo‘lishlari, ular uchlar to‘plamining istalgan qism to‘plamlari bo‘lishlari ham mumkin.

Graf tushunchasining turli umumlashmalarini ma’qullagan hamda bunday umumlashmalar turli masalarni hal etishda zarur qurol sifatida ishlatilishini ta’kidlagan holda [10] kitobdagi tarmoq tushunchasining bir-biriga ekvivalent bo‘lgan quyidagi ikki ta’rifini keltiramiz:

1) har bir a yoyiga $\psi(a)$ manfiymas haqiqiy son mos qo‘yilgan N orgraf **tarmoq** deb ataladi;

2) **tarmoq** deb shunday (D,ψ) juftlikka aytiladiki, bunda $D=(V,U)$ – orgraf, ψ esa D orgrafning yoylari to‘plamini manfiymas haqiqiy sonlar to‘plamiga akslantiruvchi funksiya.

2. Tarmoqdagi oqimlar

Graflar (orgraflar) bilan bog‘liq ko‘plab tushunchalarni osonlik bilan tarmoqlar uchun ko‘chirish mumkin.

$T=(G,b)$ tarmoq berilgan bo‘lsin, bu yerda $G=(V,U)$ – bog‘lamli graf (yoki orgraf, yo bo‘lmasa, aralash graf), b esa G grafning yoylarini manfiymas b_{ij} ($v_i,v_j\in V$) haqiqiy sonlar to‘plamiga akslantiruvchi funksiya. G grafda sirtmoq va karrali qirra va/yoki yoylar bo‘lmasin deb faraz qilamiz. Ikkita v_i va v_j uchlarni tutashtiruvchi oriyentirlanmagan yoyni (qirrani) ikkita oriyentirlangan yoylarga almashtirish mumkin deb hisoblaymiz. Shuning uchun bundan buyon G grafni orgraf deb hisoblash mumkin.

Ta'kidlaymizki, "tarmoq" tushunchasi har bir yoyga bir necha sonlarni mos qo'yish imkoniyatini beradi, grafda (orgrafda) esa yoy faqatgina mos uchlarning tutashtirilgan yoki tutashtirilmaganligini aniqlaydi, xolos. Har bir (v_i, v_j) yoyga manfiymas b_{ij} sonni mos qo'yib, bu sonni **yoyning o'tkazish qobiliyati** deb ataymiz. Tarmoqning har bir $v \in V$ uchi uchun quyidagi tushunchalarni kiritamiz: v **uchning chiqish yarim darajasi** $\vec{\rho}(v)$ – bu v uchdan chiquvchi barcha yoylar o'tkazish qobiliyatlari yig'indisi, v **uchning kirish yarim darajasi** $\bar{\rho}(v)$ – bu v uchga kiruvchi barcha yoylar o'tkazish qobiliyatlari yig'indisi.

"Ko'rishishlar" haqidagi lemma bu yerda quyidagicha ifodalanadi: *tarmoqning barcha uchlari chiqish yarim darajalari yig'indisi ularning kirish yarim darajalari yig'indisiga tengdir.*

Grafning uchlari orasida kirish yarim darajalari nolga teng bo'lganlari guruhini ajratamiz. Bu guruhga tegishli uchlarning har biri **manba** deb ataladi. Shunga o'xshash, orgrafning chiqish yarim darajalari nolga teng bo'lgan uchlari guruhini ham ajratish mumkin. Bu guguhga tegishli har bir uch **o'pqon** deb ataladi.

Faraz qilaylik, G orgraf faqat bitta v_s manbaga va faqat bitta v_t o'pqonga ega bo'lsin. Bir necha manba va/yoki o'pqonga ega bo'lgan tarmoqning orgrafiga yangi elementlar qo'shib olish yo'li bilan yuqoridagi xususiy holga osonlik bilan keltiriladi[1].

G orgrafning har bir (v_i, v_j) yoyiga manfiymas x_{ij} sonlar mos qo'yilgan bo'lib, biror $p \geq 0$ uchun quyidagi shartlar bajarilsin:

1) $$\sum_{(v_i,v_k)\in U} x_{ik} - \sum_{(v_k,v_j)\in U} x_{kj} = \begin{cases} -p, \text{ agar } k = s \text{ bo'lsa,} \\ 0, \text{ agar } k \neq s \text{ va } k \neq t \text{ bo'lsa,} \\ p, \text{ agar } k = t \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

2) G orgrafda mavjud barcha (v_i, v_j) yoylar uchun $0 \leq x_{ij} \leq b_{ij}$.

Bu shartlar bajarilganda $X = \{x_{ij} \mid (v_i, v_j) \in U\}$ to'plamga T tarmoqdagi v_s manbadan v_t o'pqonga yo'nalgan **oqim** deb, p miqdorga esa, bu X **oqimning miqdori** deb ataladi. 1) va 2) shartlarni qanoatlantiruvchi har bir x_{ij} songa (v_i, v_j) **yoy bo'ylab oqim** yoki **yoy oqimi** deyiladi.

Yuqoridagi 1) shartga ko'ra manba va o'pqondan farqli istalgan uchga "kiruvchi" oqim shu uchdan "chiquvchi" oqimga tengdir, 2) shartga ko'ra esa, istalgan yoy bo'ylab oqim miqdori shu yoyning o'tkashish qobiliyatidan oshmaydi. 1) shartdan ko'rinib turibdiki, manbaga insident yoylar bo'yicha oqimlar yig'indisi o'pqonga insident yoylar bo'yicha oqimlar yig'indisiga tengdir: $\sum_{(v_s,v_j)\in U} x_{sj} = \sum_{(v_i,v_t)\in U} x_{it} = p$.

1- misol. 1- shaklda manbasi v_0 va o'pqoni v_5 bo'lgan $T = (G, b)$ tarmoq tasvirlangan bo'lib, uning yoylari yoniga mos o'tkazish qobiliyatlari yozilgan, bunda $G = (V, U)$,

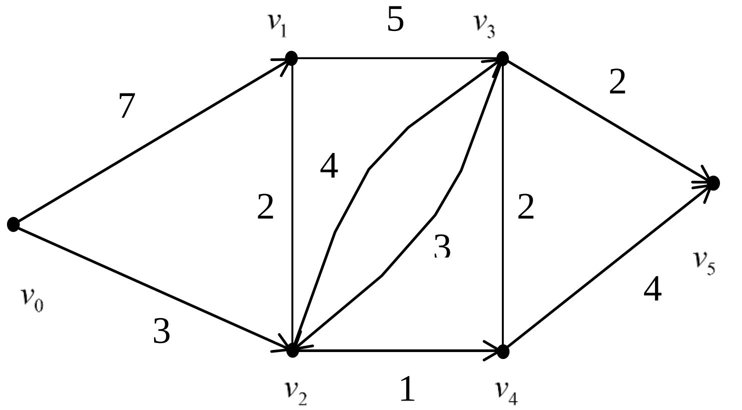
[1] Masalan, agar manbalar bittadan ko'p bo'lsa, u holda yangi (qalbaki) manba tarmoqqa kiritiladi va grafning qalbaki manbaga mos yangi uchi uning haqiqiy manbalariga mos uchlari bilan yoylar vositasida tutashtiriladi. O'pqonlar ko'p bo'lganda ham shunga o'xshash ish amalga oshiriladi.

$$V=\{v_0,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\},$$

$$U=\{\overrightarrow{(v_0,v_1)},\overrightarrow{(v_0,v_2)},(v_1,v_2),(v_1,v_3),\overrightarrow{(v_2,v_3)},$$

$$\overleftarrow{(v_2,v_3)},\overrightarrow{(v_2,v_4)},(v_3,v_4),\overrightarrow{(v_3,v_5)},\overrightarrow{(v_4,v_5)}\}$$

Bu tarmoq uchun $b_{01}=7$, $b_{02}=3$, $b_{12}=2$, $b_{13}=5$, $b_{21}=2$, $b_{23}=4$, $b_{24}=1$, $b_{31}=5$, $b_{32}=3$,



1- shakl

$b_{34}=2$, $b_{35}=2$, $b_{43}=2$, $b_{45}=4$ ekanligi shakldan ko‘rinib turibdi.

Tarmoqning har bir uchi uchun chiqish yarim darajalari va kirish yarim darajalarini aniqlaymiz: $\vec{\rho}(v_0)=10$, $\vec{\rho}(v_1)=7$, $\vec{\rho}(v_2)=7$, $\vec{\rho}(v_3)=12$, $\vec{\rho}(v_4)=6$, $\vec{\rho}(v_5)=0$, $\overleftarrow{\rho}(v_0)=0$, $\overleftarrow{\rho}(v_1)=14$, $\overleftarrow{\rho}(v_2)=8$, $\overleftarrow{\rho}(v_3)=11$, $\overleftarrow{\rho}(v_4)=3$, $\overleftarrow{\rho}(v_5)=6$.

Berilgan T tarmoq orqali v_0 manbadan v_5 o‘pqonga 4 kattalikka ega bo‘lgan X^1 oqimni quyidagi sonlar to‘plami bilan ifodalash mumkin: $x_{01}=2$, $x_{02}=2$, $x_{12}=0$, $x_{13}=2$, $x_{21}=0$, $x_{23}=1$, $x_{24}=1$, $x_{31}=0$, $x_{32}=0$, $x_{34}=2$, $x_{35}=1$, $x_{43}=0$, $x_{45}=3$. Qaralayotgan X^1 oqimning miqdori $p_1=x_{01}+x_{02}=x_{35}+x_{45}=4$. ■

Tarmoq bo‘ylab o‘tkazish mumkin bo‘lgan oqimlar orasida miqdori eng katta (maksimal) oqimni topish amaliyot nuq-tai nazaridan katta ahamiyatga egadir. Bunday oqimlar **maksimal oqimlar** deb ataladi. 1- misolda keltirilgan oqim maksimal oqim emas, chunki berilgan tarmoq uchun miqdori 5 bo‘lgan oqim bor (ushbu paragrafning oxiriga qarang).

Albatta, umumiy holda, tarmoqda bir necha turli maksimal oqimlar bo‘lishi mumkin.

Maksimal oqimni o‘rganishda quyidagi tushunchalarni kiritish maqsadga muvofiqdir. **To‘yingan yoy** – bu yoy bo‘ylab oqim miqdori uning o‘tkazish qobiliyatiga teng, **to‘yinmagan yoy** – bu yoy bo‘ylab oqim miqdori uning o‘tkazish qobiliyatidan kichik.

2- misol. 1- misolda qaralgan tarmoq uchun aniqlangan X^1 oqimda $x_{01}=2<b_{01}=7$ va $x_{24}=1=b_{24}$ bo‘lgani uchun (v_0,v_1) to‘yinmagan, (v_2,v_4) esa to‘yingan yoylardir. ■

Tarmoqdagi oqimlarni o‘rganishda **zanjir** tushunchasi muhim rol o‘ynaydi. Bu yerda zanjir deganda tarmoqdagi yo‘nalishi e’tiborga olinmasdan bir-biriga ulangan yoylar ketma-ketligini tushunamiz. Biror zanjirga tegishli yoyning yo‘nalishi zanjirdagi uchlar ketma-ketligini o‘tish yo‘nalishiga mos tushsa, bu yoyni **to‘g‘ri yoy** deb, aks holda esa, uni **teskari yoy** deb ataymiz.

Tarmoqdagi oqimlarni tadqiq qilganda **kesim** tushunchasi ham muhim hisoblanadi. T tarmoqning G orgrafi uchlari to‘plami Vni o‘zaro kesishmaydigan hamda har biri bo‘sh bo‘lmagan ikkita R va $\overline{R}$ qism to‘plamlarga ajratamiz, ya’ni $V = R \cup \overline{R}$, $R \cap \overline{R} = \varnothing$, $R \neq \varnothing$ va $\overline{R} \neq \varnothing$.

Boshlang‘ich uchi R to‘plamga, oxirgi uchi esa $\overline{R}$ to‘plamga tegishli bo‘lgan barcha yoylar to‘plamini **kesim** deb ataymiz. Kesimni $(R, \overline{R})$ bilan belgilaymiz.

Agar $(R, \overline{R})$ kesim bo‘lib, v_s manba R to‘plamga, v_t o‘pqon esa $\overline{R}$ to‘plamga tegishli bo‘lsa, u holda $(R, \overline{R})$ga v_s **manbani** v_t **o‘pqondan ajratuvchi** (yoki **ayiruvchi**) **kesim** deb ataladi.

Har bir kesimga qiymati kesimni tashkil etuvchi barcha yoylar o‘tkazish qobiliyatlari yig‘indisiga teng bo‘lgan va **kesimning o‘tkazish qobiliyati** (yoki **miqdori**) deb ataluvchi $b(R, \overline{R})$ son mos qo‘yilishi mumkin:

$$b(R, \overline{R}) = \sum_{v_i \in R, v_j \in \overline{R}} b_{ij} \, .$$

Barcha mumkin bo‘lgan kesimlar ichida o‘tkazish qobiliyati eng kichik bo‘lganini **minimal kesim** deb ataymiz.

Tarmoqda bir necha turli maksimal oqimlar bo‘lishi mumkin ekanligini yuqorida ta’kidlagan edik. Xuddi shunga o‘xshash, tarmoqda bir necha turli minimal kesimlar bo‘lishi ham mumkin.

Ravshanki, agar tarmoq boshlang‘ich uchi v_s manbada va oxirgi uchi v_t o‘pqonda bo‘lgan zanjirdangina iborat bo‘lsa, bu tarmoq bo‘ylab o‘tkazish mumkin bo‘lgan maksimal oqim qiymati shu zanjirni tashkil etuvchi yoylarning o‘tkazish qobiliyatlarining minimal qiymati bilan chegaralangan bo‘ladi. Shu tufayli, bu yerda, minimal o‘tkazish qobiliyatiga ega bo‘lgan yoy **tarmoqning** (**zanjirning**) “**tor joyi**” deb atalishi joyizdir.

Tarmoqdagi v_s manbani v_t o‘pqondan ajratuvchi $(R, \overline{R})$ kesim iborasi istalgan tarmoqda “tor joy” iborasining o‘xshashi sifatida qaralishi mumkin.

Faraz qilaylik, $X = \{x_{ij} \mid (v_i, v_j) \in U\}$ $-$ T tarmoqdagi qandaydir oqim bo‘lsin. Bu tarmoqdagi v_s uchdan v_t uchga yo‘nalgan biror μ **yo‘l bo‘ylab oqim** shu yo‘l yoylaridagi oqimlarning eng kichik qiymati sifatida aniqlanadi:

$$p(\mu, X) = \min_{(v_i, v_j) \in \mu} x_{ij} \, .$$

Tabiiyki, tarmoqdagi X oqimning miqdori $p(X)$ uchun

$$p(X) = \sum_{\mu \in M} p(\mu, X)$$

tenglik o‘rinlidir, bu yerda M $-$ G orgrafdagi v_s uchdan v_t uchga yo‘nalgan barcha yo‘llar to‘plamidan iborat.

Kesimning ta’rifidan ko‘rinib turibdiki, v_s uchdan v_t uchga olib boruvchi ixtiyoriy μ yo‘l shu v_s va v_t uchlarni ajratuvchi har qanday $(R, \overline{R})$ kesimning hech bo‘lmaganda bitta yoyini o‘zida saqlaydi. Shuning uchun, agar ixtiyoriy $(R, \overline{R})$ kesimning barcha yoylarini tarmoqdan olib tashlasak, u holda G orgrafda v_s uchdan v_t uchga boradigan birorta ham yo‘l (va, demak, oqim ham) mavjud bo‘lmaydi.

Demak, yuqorida aytilganlarni hisobga olib tarmoqdagi oqim miqdori $p(X)$ bilan ixtiyoriy $(R,\overline{R})$ kesimning o‘tkazish qobiliyati $b(R,\overline{R})$ uzviy bog‘langan degan xulosaga kelish mumkin. Bu bog‘lanish quyidagi teoremada o‘zining aniq ifodasini topgan.

1- teorema. $T=(G,b)$ tarmoqdagi ixtiyoriy X oqim miqdori $p(X)$ shu tarmoqdagi v_s manba va v_t o‘pqonni ajratuvchi har qanday $(R,\overline{R})$ kesimning o‘tkazish qobiliyatidan oshmaydi, ya’ni $p(X)\le b(R,\overline{R})$.

Isboti. $T=(G,b)$ tarmoqdagi X oqim ta’rifidan bevosita quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$p(X)=\sum_{(v_s,v_j)\in U} x_{sj}\,,\ 0=\sum_{(v_i,v_k)\in U} x_{ik}-\sum_{(v_k,v_j)\in U} x_{kj}\,,\ v_k\in R.$$

Bu tengliklarning mos tomonlaridagi ifodalarni qo‘shib va o‘xshash hadlarini ixchamlab,

$$p(X)=\sum_{(v_i,v_j)\in(R,\overline{R})} x_{ij}-\sum_{v_j\in\overline{R},v_i\in R} x_{ji}$$

tenglikni olamiz. 2) shartni va $\sum_{v_j\in\overline{R},v_i\in R} x_{ji}\ge 0$ ekanligini hisobga olsak, oxirgi tenglikdan $p(X)\le\sum_{(v_i,v_j)\in(R,\overline{R})} b_{ij}=b(R,\overline{R})$ munosabat kelib chiqadi. ■

1955 yilda L. R. Ford[2] va D. R. Falkerson[3] tomonidan **maksimal oqim va minimal kesim haqidagi teorema** deb ataluvchi quyidagi teorema isbotlangan.

2- teorema (Ford-Falkerson). Istalgan tarmoqda manbadan o‘pqonga maksimal oqimning miqdori manbani o‘pqondan ajratuvchi minimal kesimning o‘tkazish qobiliyatiga teng.

Isboti. $T=(G,b)$ tarmoq, $G=(V,U)$ orgraf, $v_s\in V$ manba, $v_t\in V$ o‘pqon va berilgan tarmoqdagi maksimal oqimning miqdori bo‘lsin. Agar tarmoqda shunday $X^*=\{x_{ij}^*\,|\,(v_i,v_j)\in U\}$ oqim topilsaki, uning $p^*=p(X^*)$ miqdori biror $(R^*,\overline{R^*})$ kesimning o‘tkazish qobiliyatiga teng bo‘lsa, 1- teoremadan shu X^* maksimal oqim, $(R^*,\overline{R^*})$ esa minimal kesim bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, teorema isbotiga ega bo‘lish uchun $p^*=b(R^*,\overline{R^*})$ tenglik o‘rinli bo‘ladigan $(R^*,\overline{R^*})$ kesimni qurish mumkinligini ko‘rsatish yetarli.

Bunday kesimni qurish maqsadida tarkibida albatta v_s uch bor bo‘lgan, lekin v_t uchni saqlamaydigan R^* to‘plamni aniqlash zarur. Bu R^* to‘plam v_s uchdan chiquvchi zanjir bilan tutashtirish mumkin bo‘lgan uchlar to‘plamidan iborat bo‘ladi. V to‘plamning qolgan uchlari $\overline{R^*}$ to‘plamni tashkil etadi.

$X^*=\{x_{ij}^*\,|\,(v_i,v_j)\in U\}$ maksimal oqim bo‘lsin deb faraz qilamiz. Shu oqimga mos R^* to‘plamning elementlarini ketma-ket ravishda quyidagi qoida bo‘yicha aniqlaymiz:

---

[2] Bu yerda bir xil Lester Randolph Ford ism-sharifga ega AQSh matematiklari ota-bola L. R. Fordlarning kichigi (1927 yilda tug‘ilgan) nazarda tutilgan.

[3] D. R. Falkerson (Delbert Ray Fulkerson, 1924-1976) – matematik.

– $v_s \in R^*$;

– agar $v_i \in R^*$ va $x_{ij}^* < b_{ij}$ bo‘lsa, u holda $v_j \in R^*$;

– agar $v_i \in R^*$ va $x_{ji}^* > 0$ bo‘lsa, u holda $v_j \in R^*$.

Agar R^* to‘plamni aniqlash jarayonida v_t uchni R^* to‘plamga kiritish imkoniyati topilmasa, ya’ni $v_t \notin R^*$ bo‘lsa, u holda izlanayotgan $(R^*, \overline{R^*})$ kesimni qurish mumkin bo‘ladi.

Teskarisini faraz qilamiz, ya’ni $v_t \in R^*$ bo‘lsin. U holda, R^* to‘plamning aniqlanish qoidasiga asoslanib, shunday $\mu = (v_s, v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_m}, v_t)$ zanjirni qurish mumkinki, uning barcha to‘g‘ri yoylari oqimga to‘yinmagan, teskari yoylarida esa oqim musbat bo‘ladi. μ zanjirning barcha to‘g‘ri yoylari to‘plamini $U_+(\mu)$, teskari yoylari to‘plamini esa $U_-(\mu)$ deb belgilaymiz.

Quyidagi miqdorlarni qaraymiz: $\vec{\varepsilon} = \min\limits_{(v_i,v_j)\in U_+(\mu)} (b_{ij} - x_{ij}^*)$, $\bar{\varepsilon} = \min\limits_{(v_i,v_j)\in U_-(\mu)} x_{ij}^*$. Tushunarliki, $\varepsilon = \min(\vec{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}) > 0$ bo‘ladi. Agar μ yo‘lning barcha to‘g‘ri yoylarida oqim ε miqdorga oshirilib, uning barcha teskari yoylarida esa ε miqdorga kamaytirilsa, u holda tarmoqdagi oqim miqdori ε ga ortadi. Bu esa x^* oqimning maksimal oqim ekanligiga ziddir. Olingan qarama-qarshilik $v_t \notin R^*$ ekanligini ko‘rsatadi.

Endi yuqorida bayon qilingan qoidani ketma-ket qo‘llab hosil qurilgan R^* to‘plam uchun $\overline{R^*} = V \setminus R^*$ deb olsak, G orgrafning R^* to‘plamga tegishli uchlarning biridan chiqib $\overline{R^*}$ to‘plamga tegishli uchlarning biriga kiruvchi barcha yoylari to‘plami $(R^*, \overline{R^*})$ kesimni tashkil etadi.

R^* to‘plamning aniqlanishiga asosan barcha $(v_i, v_j) \in (R^*, \overline{R^*})$ yoylar oqimga to‘yingan ($x_{ij}^* = b_{ij}$), $\overline{R^*}$ to‘plamga tegishli uchlardan chiqib R^* to‘plamga tegishli uchlarga kiruvchi barcha $(v_j, v_i) \in U$ yoylarda esa oqim nolga teng ($x_{ji}^* = 0$) bo‘ladi. Shuning uvhun, 1- teoremaning isbotida hosil qilingan $p(X) = \sum\limits_{(v_i,v_j)\in(R,\overline{R}),} x_{ij} - \sum\limits_{v_j\in\overline{R}, v_i\in R} x_{ji}$ formulaga ko‘ra,

$$p^* = p^*(X) = \sum_{(v_i,v_j)\in(R^*,\overline{R^*})} x_{ij}^* = \sum_{(v_i,v_j)\in(R^*,\overline{R^*})} b_{ij} = b(R^*, \overline{R^*})$$

munosabatni olamiz. Demak, qurilgan $(R^*, \overline{R^*})$ kesim uchun $p^* = b(R^*, \overline{R^*})$ tenglik bajariladi. Bu yerdan, yuqoridagi eslatilgan mulohazalarga ko‘ra, teorema isbotiga ega bo‘lamiz. ■

8.3. Ford algoritmi. $T = (G, b)$ tarmoqni qaraymiz, bu yerda $G = (V, U)$ – orgraf, b esa G orgrafning yoylarini manfiymas b_{ij} ($v_i, v_j \in V$) haqiqiy sonlar to‘plamiga akslantiruvchi funksiya.

G orgraf faqat bitta manbaga va faqat bitta o‘pqonga ega bo‘lsin deb faraz qilamiz. Maksimal oqim va minimal kesim haqidagi Ford-Falkerson teoremasining yuqorida keltirilgan isboti tarmoqdagi maksimal oqimni topish algoritmini tuzish nuqtai nazardan konstruktivdir.

T tarmoqning uchlariga, ya’ni V to‘plam elementlariga $0, 1, 2, ..., m$ raqamlarni mos qo‘yib, tarmoqning manbasi 0 uch, o‘pqoni esa m uch bo‘lsin deb hisoblaymiz. Bu tarmoqda Ford tomonidan taklif etilgan maksimal oqimni topish algoritmi bilan tanishamiz. **Ford**

algoritmining jadvallar bilan ish ko‘riladigan jarayoni dastlabki, umumiy (takrorlanuvchi) va yakuniy qadamlardan iborat bo‘lib, u quyida keltirilgan.

Dastlabki qadam. O‘lchamlari $(m+1)\times(m+1)$ bo‘lgan jadvalni quyidagicha tuzamiz. Agar (i,j) yoyning o‘tkazish qobiliyati b_{ij} noldan katta va unga simmetrik (j,i) yoyining o‘tkazish qobiliyati b_{ji} nolga teng bo‘lsa, u holda jadvalning (i,j) katagiga b_{ij} sonni, uning asosiy diagonaliga nisbatan simmetrik (j,i) katagiga esa, nolni yozamiz. Agar $b_{ij}=b_{ji}=0$ bo‘lsa, u holda jadvalning (i,j) va (j,i) kataklari bo‘sh qoldiriladi.

Umumiy qadam. 1. Tarmoqning manbasidan o‘pqoniga o‘tkazish qobiliyati noldan katta bo‘lgan yo‘l izlaymiz. Buning uchun jadvalning tarmoqdagi 0 uchga mos keluvchi ustuniga “*” belgisini qo‘yamiz. Jadvalning 0 uchga mos satridan $b_{0j}>0$ $(j=\overline{1,m})$ elementlarni topib, bu elementlar joylashgan ustunlarni 0 raqami bilan belgilaymiz.

Natijada tarmoqning musbat o‘tkazish qobiliyatiga ega bo‘lgan barcha $(0,j)$ yoylari aniqlanadi. Bu yoylar manbadan o‘pqonga boruvchi yo‘lning dastlabki yoylaridir.

Belgiga ega ustunlar raqamlari bilan bir xil raqamli satrlarning har birini ketma-ket tekshirib chiqamiz. Tekshirish jarayonida har bir sunday satrda, masalan, jadvalning i uchga mos satrida belgiga ega bo‘lmagan ustunlarda $b_{ij}>0$ elementlarni izlaymiz va shunday element(lar) topilsa bu element(lar) joylashgan ustun(lar)ni tekshirilayotgan satr raqami (ya’ni i) bilan belgilaymiz.

Shu tarzda davom ettirilsa, natijada manbadan o‘pqonga boruvchi musbat o‘tkazish qobiliyatli izlangan yo‘lning navbatdagi yoylari bo‘lib xizmat qilishi mumkin bo‘lgan yoylar topilgan bo‘ladi. Jadvaldagi belgiga ega ustunlar raqamlariga mos raqamli tarmoqning uchlariga to‘gri keluvchi satrlarni tekshirish jarayonini quyidagi mumkin bo‘lgan hollardan biri amalga oshguncha davom ettiramiz:

a) jadvalning o‘pqonga mos ustuni belgilandi;

b) jadvalning yangi ustunlarini (shu jumladan, o‘pqonga mos ustunini ham) belgilash imkoniyati yo‘q.

Agar a) hol ro‘y bersa, u holda tarmoqda manbadan o‘pqonga boruvchi musbat o‘tkazish qobiliyatiga ega bo‘lgan biror μ yo‘l bor. Bu yo‘l quyidagicha aniqlanadi.

Jadvalning o‘pqonga mos m ustunining belgisi k bo‘lsin deb faraz qilaylik. Demak, μ yo‘lda m uchdan oldingi uch k uchdir. Jadvalning k uchga mos satri va m uchga mos ustuni kesishgan (k,m) katagidagi b_{km} elementiga “–” belgisi (b_{km}^{-}), shu katakka asosiy diagonalga nisbatan simmetrik hisoblangan (m,k) katakdagi b_{km} elementga esa “+” belgisi (b_{mk}^{+}) qo‘yamiz.

Endi jadvalning k uchga mos ustuni belgisi r raqami bo‘lsin deb faraz qilamiz. Jadvaldagi b_{mk}^{+} elementdan jadvalning k uchga mos ustuni bo‘ylab harakatlanib, uning r uchga mos satriga o‘tamiz va b_{rk} elementga “–” belgisi, asosiy diagonalga nisbatan simmetrik b_{kr} elementga esa “+” belgisi qo‘yamiz. “+” va “–” belgilari qo‘yish jarayonini manbaga mos 0 satrga kelib undagi mos elementga “–” belgisi, simmetrik elementga esa “+” belgisi qo‘yguncha davom ettiramiz.

Umumiy qadamning 2- bandiga o‘tamiz.

Agar b) hol bajarilsa, bu holda manbadan o‘pqonga boruvchi musbat o‘tkazish qobiliyatiga ega bo‘lgan boshqa yo‘l yo‘q. Shuning uchun umumiy qadamni bajarish jarayoni tugaydi.

Jadvalning belgilangan ustunlariga mos orgrafning uchlari minimal o‘tkazish qobiliyatiga ega bo‘lgan $(R,\overline{R})$ kesim uchun R to‘plamni tashkil etadi, orgrafning qolgan uchlari esa $\overline{R}$ to‘plamga tegishlidir. $i \in R$ uchdan chiquvchi va $j \in \overline{R}$ uchga kiruvchi barcha (i, j) yoylar to‘plami berilgan tarmoq uchun minimal kesimdir. Yakuniy qadamga o‘tamiz.

2. Topilgan μ yo‘l o‘tkazish qobiliyatining θ qiymatini topamiz. Tabiiyki, θ son μ yo‘lni tashkil etuvchi yoylar o‘tkazish qobiliyatlarining eng kichigiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\theta = \min_{(i,j)\in\mu} b_{ij}^{-} .$$

Umumiy qadamning 3- bandiga o‘tamiz.

3. Topilgan μ yo‘lga tegishli yoylarning va ularga simmetrik yoylarning qolgan o‘tkazish qobiliyatlarini aniqlaymiz. Buning uchun jadvalning “–” belgisi bo‘lgan b_{ij}^{-} elementlaridan θ sonni ayirib, “+” belgili b_{ij}^{+} elementlariga esa θ sonni qo‘shib, natijalarni jadvaldagi mos o‘rinlariga yozamiz. Jadvalning “–” yoki “+” belgisi bo‘lmagan elementlari ozgarmaydi. Jadvaldagi barcha belgilarni olib tashlaymiz. Natijada o‘tkazish qobiliyatlari o‘zgargan tarmoqqa mos va dastlabki jadvalga o‘xshash bo‘lgan yangi jadvalni hosil qilamiz. Umumiy qadamning 1- bandiga o‘tamiz.

Yakuniy qadam. Dastlabki jadvalning elementlaridan oxirgi qadamda hosil bo‘lgan jadvalning mos elementlarini ayi-ramiz. Natijada musbat elementlari (i, j) yoyning mos x_{ij} oqim miqdorlariga teng bo‘lgan, elementlari esa asosiy diagonaliga nisbatan simmetrik joylashgan oxirgi jadvalni hosil qilamiz. Tarmoqdagi maksimal oqim miqdori p oxirgi jadvalning manbaga mos satri yoki o‘pqonga mos ustuni elementlari yig‘indisiga, ya’ni

$$p = \sum_{j=1}^{m} x_{0j} = \sum_{i=0}^{m-1} x_{im} .$$

Bu maksimal oqim qiymatini umumiy qadamni bajarish jarayonlarida aniqlangan barcha θ sonlarni qo‘shib ham hosil qilish mumkin. ■

3- misol. 1- misolda qaralgan tarmoq uchun v_0 manbadan v_5 o‘pqonga maksimal oqimni topish uchun Ford algoritmini qo‘llaymiz. Ford algoritmining dastlabki qadami va umumiy qadamining 1- bandini bajarib 1- jadvalni hosil qilamiz.

Umumiy qadamning 2- bandini bajarsak, $\theta_1 = \min\{7, 5, 2\} = 2$ qiymatni topamiz. Endi umumiy qadam-ning 3- bandini bajarib 2- jadvalni va algoritmni qo‘llashda davom etib 3- va 4- jadvallarni navbatma-navbat tuzamiz:

– 2- jadval uchun $\theta_2 = \min\{3, 1, 4\} = 1$;

– 3- jadval uchun $\theta_3 = \min\{5, 3, 2, 3\} = 2$.

1- jadval

	(*)	(0)	(0)	(1)	(2)	(3)
	0	1	2	3	4	5
0		7^-	3			
1	0^+		2	5^-		
2	0	2		4	1	
3		5^+	3		2	2^-
4			0	2		4
5				0^+	0	

2- jadval

	(*)	(0)	(0)	(1)	(2)	(4)
	0	1	2	3	4	5
0		5	3^-			
1	2		2	3		
2	0^+	2		4	1^-	
3		7	3		2	0
4			0^+	2		4^-
5				2	0^+	

3- jadval

	(*)	(0)	(0)	(1)	(3)	(4)
	0	1	2	3	4	5
0		5^-	2			
1	2^+		2	3^-		
2	1	2		4	0	
3		7^+	3		2^-	0
4			1	2^+		3^-
5				2	1^+	

4- jadval

	(*)	(0)	(0)	(1)		
	0	1	2	3	4	5
0		3	2			
1	4		2	1		
2	1	2		4	0	
3		9	3		0	0
4			1	4		1
5				2	3	

5- jadval

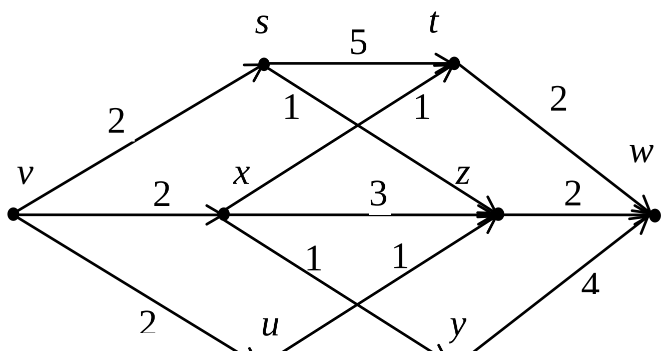
	0	1	2	3	4	5
0		4	1			
1	–4		0	4		
2	–1	0		0	1	
3		–4	0		2	2
4			–1	–2		3
5				–2	–3	

Demak, qaralayotgan tarmoqda quyida aniqlanuvchi 5 kattalikka ega oqim maksimal oqimdir: $x_{01}=4$, $x_{02}=1$, $x_{12}=0$, $x_{13}=4$, $x_{21}=0$, $x_{23}=0$, $x_{24}=1$, $x_{31}=0$, $x_{32}=0$, $x_{34}=2$, $x_{35}=2$, $x_{43}=0$, $x_{45}=3$.

Minimal kesim sifatida tarkibidagi R va $\overline{R}$ qism to‘plamlari $R=\{0, 1, 2, 3\}$ va $\overline{R}=\{4, 5\}$ ko‘rinishda aniqlangan $(R,\overline{R})$ kesimni ko‘rsatish mumkin. Bu kesim $(2, 4)$, $(3, 4)$ va $(3, 5)$ yoylardan tashkil topishi ravshan. ■

Muammoli topshiriq va masalalar

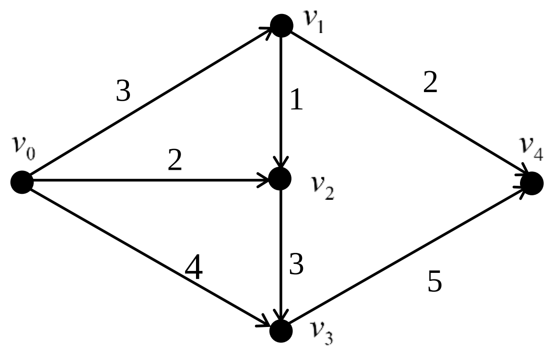
1. 2- shakldа tasvirlangan tarmoqda v uchni manba, w uchni esa o‘pqon deb hisoblab, undagi bir necha oqimni aniqlang.
2. Ford algoritmni qo‘llab 3- shakldа tasvirlangan tarmoq uchun v_0 dan v_4 ga maksimal oqimni anqlang.
3. Ford algoritmni qo‘llab 2- shakldа tasvirlangan tarmoq uchun v dan w ga maksimal oqimni anqlang.
4. $T=(G,b)$ tarmoqda $G=(V,U)$, $V=\{a_0,a_1,...,a_n\}$, U – yoylar korteji, b_{ij} – (a_i,a_j) yoyning o’tkazish qobiliyati, $X=\{x_{ij}:(a_i,a_j)\in U\}$ esa maksimal oqim bo‘lsin. U vaqtda hech



2- shakl

bo‘lmaganda bitta $(a_i,a_j)\in U$ yoy topilib, shu yoy uchun $x_{ij}=b_{ij}$ tenglik bajarilishini ko‘rsating.
5. $T=(G,b)$ tarmoqda $G=(V,U)$, $V=\{a_0,a_1,...,a_n\}$, a_0 – manba, a_n – o‘pqon, U – yoylar korteji, b_{ij} – (a_i,a_j) yoyning o’tkazish qobiliyati va $X=\{x_{ij}:(a_i,a_j)\in U\}$ biror oqim bo‘lsin. Agar a_0 va a_n ni bog‘lovchi zanjirning barcha (a_i,a_j) to‘g‘ri yoylarida $x_{ij}<b_{ij}$ va barcha teskari yoylarda esa $x_{ij}>0$ bo‘lsa, u holda bu zanjirga X oqimni **orttiruv-chi yo‘l** deymiz.

Berilgan X oqimning maksimal oqim bo‘lishi uchun uni orttiruvchi yo‘lning topilmasligi zarur va yetarli ekanligini ko‘rsating.



3- shakl

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Graf tushunchasi qanday umumlashtirilishi mumkin?
2. Tarmoqdagi oqim deganda nimani tushunasiz?
3. Yoyning o‘tkazish qobiliyati nima?
4. Graf uchlarining chiqish va kirish yarim darajalari deb nimaga aytiladi?
5. Tarmoqda manba va o‘pqon deganda nimani tushunasiz?
6. Yoy bo‘ylab oqim nima?
7. Tarmoqdagi oqim miqdori qanday aniqlanadi?
8. Tarmoqdagi maksimal oqim deganda nimani tushunasiz?
9. To‘yingan yoy bilan to‘yinmagan yoy bir-biridan nimasi bilan farq qiladi?
10. To‘g‘ri yoy bilan teskari yoy orasida qanday farq bor?
11. Tarmoqdagi manbani o‘pqondan ajratuvchi kesim qanday aniqlanadi?
12. Tarmoqdagi minimal kesim deganda nimani tushunasiz?
13. Ford-Falkerson teoremasiga ko‘ra istalgan tarmoqda manbadan o‘pqonga maksimal oqimning miqdori nimaga teng?
14. Tarmoqdagi maksimal oqimni topishga mo‘ljallangan Ford algoritmning jadvallar bilan ish ko‘radigan jarayoni qanday qadamlardan iborat?