Universität Augsburg
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Wolfgang Schneider
Dr. Renate Motzer

Übungsblatt 4 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 9. *Die Dieder-Gruppe D_4*

Man stelle sich im $\mathbb{R}^2$ das Quadrat mit den Eckpunkten $(-1,-1),(1,-1),(1,1),(-1,1)$ und dem Mittelpunkt $M(0,0)$ sowie die Abbildungen $R_0, R_1, R_2, R_3, S_1, S_2, S_3, S_4$ von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ vor.
$R_i, i = 0, 1, 2, 3$, seien die Drehungen um M um den Winkel $i \cdot 90°$.
S_1 sei die Spiegelung an der Geraden durch M und $(0,-1)$.
S_2 sei die Spiegelung an der Geraden durch M und $(1,-1)$.
S_3 sei die Spiegelung an der Geraden durch M und $(1,0)$.
S_4 sei die Spiegelung an der Geraden durch M und $(1,1)$.
Bei allen acht Abbildungen wird das oben beschriebene Quadrat auf sich selbst abgebildet.
Die Menge $D_4 = \{R_0, R_1, R_2, R_3, S_1, S_2, S_3, S_4\}$ ist mit der Hintereinanderausführung $\circ$ von Abbildungen als Verknüpfung eine Gruppe, bezeichnet als **Diedergruppe** D_4 (bzw. Symmetriegruppe) des Quadrats.

a) Man erstelle die Verknüpfungstafel der D_4 und verifiziere die Gruppenaxiome.

b) Man finde möglichst viele Untergruppen von D_4.

Aufgabe 10. *Jede Untergruppe U einer Gruppe G führt zu einer Äquivalenzrelation*

Es sei G eine Gruppe mit der Verknüpfung $\circ$, $U \subset G$ sei eine Untergruppe von G. Auf G werde die Relation $y \sim x$ wie folgt definiert: $y \sim x :\Leftrightarrow y \circ x^{-1} \in U$.

a) Man zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Es sei $x \in G$. Man zeige, dass für die Äquivalenzklasse $[x]$ gilt:
$[x] = \{y \in G \mid y = u \circ x \text{ für ein } u \in U\}$

c) Wir führen für die Menge $\{y \in G \mid y = u \circ x \text{ für ein } u \in U\}$ aus b) die plausible Kurzschreibweise $U \circ x$ ein (Nach b) gilt dann $[x] = U \circ x$).
Man zeige, dass die Abbildung $f : U \to U \circ x, u \mapsto u \circ x$ bijektiv ist.
Hinweis: Zur Injektivität von f zeige man für $u_1, u_2 \in U$: $f(u_1) = f(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2$

<u>Ergänzende Bemerkung</u>:
Ist U eine **endliche** Untergruppe von G, so haben wegen b) und c) alle Äquivalenzklassen die gleiche Anzahl n von verschiedenen Elementen; n ist nämlich die Anzahl $|U|$ der verschiedenen Elemente von U. Nach der ergänzenden Bemerkung zur **Aufgabe 7** ist G die disjunkte Vereinigung aller existierenden verschiedenen Äquivalenzklassen; ist G **endlich** - sagen wir $|G| = m$ - ist also auch die Anzahl der existierenden verschiedenen Äquivalenzklassen endlich - sagen wir diese Anzahl ist k - und folglich ist $m = k \cdot n$. $|U|$ **teile also** $|G|$ **(sogenannter „Satz von LAGRANGE")!**

Aufgabe 11. *Die Äquivalenzrelation von Aufgabe 10 im Falle $G = (\mathbb{Z}, +)$*

Sei $G = \mathbb{Z}$ mit der Verknüpfung $+$ und für $i \in \{2, 3, 4, 5, 6, ...\}$ sei $U_i := \{i \cdot z | z \in \mathbb{Z}\}$.
U_i heißt „die von i erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Z}$", denn jedes Element von U_i ist 0 oder von der Form $i + ... + i$ oder von der Form $(-i) + ... + (-i)$.

a) Bestätige zunächst kurz, dass U_i wirklich eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ ist.

b) Gemäß **Aufgabe 10** ist $x \sim y :\Leftrightarrow x + (-y) \in U_i$ Äquivalenzrelation auf $G = \mathbb{Z}$. Wie sehen die Äquivalenzklassen in diesem Fall explizit aus und wieviele verschiedene Äquivalenzklassen gibt es?
Hinweis: Man kann $x - y := x + (-y)$ definieren und dann auch sagen, dass „y von x subtrahiert wird".

Aufgabe 12. *Die Gruppen der Ordnung 4*

Durch Erstellen der Verknüpfungstafel bestimme man alle Gruppen mit 4 Elementen.
Hilfe: Man denke an die „von einem Gruppenelement a erzeugte Untergruppe $\{a^z | z \in \mathbb{Z}\}$"(vgl. **Aufgabe 11** und den **Satz von Lagrange** (siehe **Aufgabe 10**).