

## Übungsblatt 7 zur Linearen Algebra I

### Aufgabe 21. (2+2+1=5 Punkte)

Es sei  $\mathbb{R}[X]$  der Polynomring über dem Körper  $\mathbb{R}$  (mit einer Unbestimmten).  $\mathbb{R}[X]$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $\mathbb{R}_n[X] := \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(f) \leq n\}$  ist ein Untervektorraum davon. Man gebe eine Basis von

- a)  $\mathbb{R}[X]$
- b)  $\mathbb{R}_n[X]$

an und beweise die Basiseigenschaft.

Ergänzende Bemerkung:

Wenn auch jeder  $K$ -Vektorraum eine Basis besitzt, so kann sich die explizite Angabe einer Basis schwierig gestalten; ein typisches Beispiel dafür ist der  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}$ .

- c) In den **Aufgaben 16** und **20** wurde der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  thematisiert. Ist das in **Aufgabe 20** angegebene  $B = (e_1, e_2, \dots)$  eine Basis des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ? Man begründe die Antwort.

### Aufgabe 22. (2+2=4 Punkte)

- a) Man zeige:  $k_2 = \{0, 1\}$  ist ein Unterkörper des Körpers  $K = \{0, 1, a, b\}$  mit vier Elementen (siehe **Aufgabe 13 b**)) und  $K$  ist ein  $k_2$ -Vektorraum.
- b) Man gebe eine Basis des  $k_2$ -Vektorraums  $K$  an und beweise die Basiseigenschaft.

### Aufgabe 23. (4 Punkte)

Es ist  $K$  der Körper mit 4 Elementen aus **Aufgabe 13 b**). Dann ist  $K^2$  ein  $K$ -Vektorraum mit 16 Vektoren. Unter Verwendung der Verknüpfungstabellen von  $K$  gebe man alle eindimensionalen Untervektorräume von  $K^2$  explizit an.

Hinweis: Ein Untervektorraum  $U$  von  $K^2$  ist genau dann eindimensional, wenn  $U = K(\alpha_1, \alpha_2)$  für ein  $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0) \in K^2$ . Im eben genannten Satz kann man natürlich  $K(\alpha_1, \alpha_2)$  durch  $\text{span}((\alpha_1, \alpha_2))$  ersetzen, denn  $K(\alpha_1, \alpha_2) = \text{span}((\alpha_1, \alpha_2))$ .

Hilfe: Man überlege, wie die Antworten auf folgende Fragen aussehen: In wie vielen verschiedenen eindimensionalen Untervektorräumen von  $K^2$  kann ein Element  $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0) \in K^2$  liegen? Wie viele verschiedene Elemente hat ein eindimensionaler Untervektorraum von  $K^2$ ?