Universität Augsburg
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Wolfgang Schneider
Dr. Renate Motzer

Übungsblatt 8 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 21. *?????*

Man mache im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ durch zweimalige Anwendung des Austauschlemmas aus der Standardbasis (e_1, e_2, e_3, e_4) eine Basis von $\mathbb{R}^4$, deren erster Basisvektor $v_1 = (2, -1, 3, -2)$ und deren zweiter Basisvektor $v_2 = (3, 2, -6, 1)$ ist.

Aufgabe 22. *?????*

Kann man im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ zwei der Vektoren $(1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)$ durch $(2, -3, -2, 3), (1, -1, 1, 3)$ ersetzen, so dass die sich dadurch ergebenden vier Vektoren linear unabhängig sind? Man begründe die Antwort.

Aufgabe 23. *?????*

Es sei im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ die Basis (a_1, a_2) mit $a_1 = (1, 0)$ und $a_2 = (1, 1)$ gegeben. Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wird durch lineare Fortsetzung von

$$Aa_1 = a_2 \text{ und } Aa_2 = a_1 \text{ (} Aa_1 \text{ bzw. } Aa_2 \text{ Kurzschreibweise für } A(a_1) \text{ bzw. } A(a_2))$$

definiert.

a) Man bestimme die Untervektorräume U_1, U_2 von $\mathbb{R}^2$, für die gilt:
$Ax = x$ für alle $x \in U_1$, $Ax = -x$ für alle $x \in U_2$.
Man skizziere diese in der Ebene $\mathbb{R}^2$.

b) Man gebe an, wie man für $x \in \mathbb{R}^2$ das Bild $Ax \in \mathbb{R}^2$ konstruiert. Man skizziere geeignete Parallelogramme.

c) Offensichtlich gilt $A^2 = id$. Ist A geometrisch eine Spiegelung? (A^2 steht kurz für $A \circ A$ und id ist die identische Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto x$)

Aufgabe 24. *?????*

Es sei im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ die Basis (a_1, a_2) wie in **Aufgabe 26** gegeben. Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wird durch lineare Fortsetzung von

$$Aa_1 = a_1 \text{ und } Aa_2 = 0$$

definiert.

a) Man bestimme $im(A)$ und $ker(A)$ und skizziere die Untervektorräume in $\mathbb{R}^2$.

b) Man gebe an, wie man für $x \in \mathbb{R}^2$ das Bild $Ax \in \mathbb{R}^2$ konstruiert. Man bestätige $A^2 = A$ und interpretiere die Aussage „A projiziert x auf $im(A)$ längs $ker(A)$“.