Universität Augsburg
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Wolfgang Schneider
Dr. Renate Motzer

Übungsblatt 5 zur Linearen Algebra I

Hinweis: $\mathbb{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{Q}$ die der rationalen, $\mathbb{R}$ die der reellen.

Aufgabe 13. *Zu Körpern mit 3 und 4 Elementen*

a) Für $K = \{0, 1, x\}$ sind folgende Verknüpfungstafeln vorgegeben:

Addition:

	0	**1**	**x**
0	0	1	x
1	1	x	0
x	x	0	1

Multiplikation:

	0	**1**	**x**
0	0	0	0
1	0	1	x
x	0	x	1

Man zeige, dass K mit der angegebenen Addition und Multiplikation einen Körper bildet.

b) Gibt es einen Körper mit 4 Elementen? Man gebe die Verknüpfungstafeln für Addition und Multiplikation an, sofern es diesen Körper gibt.

Aufgabe 14. *Unterkörper von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$*

a) Man bestimme alle Teilmengen von $\mathbb{Q}$, die bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation rationaler Zahlen einen Körper bilden.
Hilfe: 0 und 1 sind offensichtlich in jeder solchen Teilmenge enthalten. Aus der 1 lassen sich weitere Zahlen erzeugen, die in einem Körper enthalten sein müssen.

b) Es sei $K := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$; K werde mit der üblichen Addition und Multiplikation reeller Zahlen versehen. Man zeige, dass K ein Körper ist.

Ergänzende Bemerkung:
Offensichtlich gilt für K von b) $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{R}$. Neben K gibt es weitere Körper zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$, z.B. $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Aufgabe 15. *Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$?*

Welche der folgenden Teilmengen U von $\mathbb{R}^n$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^n$? Man gebe jeweils eine Begründung an.

a) $U = \{x = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \mid \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n\}$

b) $U = \{x = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \mid \alpha_1^2 = \alpha_2^2\}$

c) $U = \{x = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \mid \alpha_1 = 1\}$

d) $U = \{x = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \mid \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 0\}$

Aufgabe 16. *Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?*

Es werde der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (statt $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist auch die Bezeichnung $\mathbb{R}^{\infty}$ gebräuchlich) betrachtet:

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{x = (\alpha_1, \alpha_2, ...) \mid \alpha_i \in \mathbb{R} \ \ \forall i \in \mathbb{N}\}$$

Man gebe mit Begründung an, ob die Teilmenge $U := \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist, wobei

$$\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{x = (\alpha_1, \alpha_2, ...) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \alpha_i \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } i \in \mathbb{N}\}$$