Universität Augsburg
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Schnee-im-bisher-heißesten-Oktober-Semester 2018/19

Prof. Dr. Wolfgang Schneider
Dr. Renate Motzer

Übungsblatt 3 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 7. *Zu den Eigenschaften von Äquivalenzklassen*

Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M. Man beweise für Äquivalenzklassen $[x]$ und $[x']$ in M:

a) $[x]$ und $[x']$ sind disjunkt (d.h. $[x] \cap [x'] = \emptyset$) oder gleich (d.h. $[x] = [x']$).

b) $[x]$ und $[x']$ sind genau dann gleich, wenn $x \sim x'$ gilt.

Hilfe zu a): Zu zeigen ist: Im Falle von $[x] \cap [x'] \neq \emptyset$ gilt $[x] = [x']$

<u>Ergänzende Bemerkung:</u>
Als Folge von a) und b) kommt jedes $x \in M$ in genau einer Äquivalenzklasse vor. M ist somit die Vereinigungsmenge aller existierenden verschiedenen Äquivalenzklassen und wird dadurch in paarweise disjunkte Teilmengen zerlegt. Dies ist wertvoll, wie beispielsweise folgende Überlegung zeigt:
Bestünden alle existierenden Äquivalenzklassen aus gleich vielen verschiedenen Elementen - sagen wir n - und gäbe es k verschiedene Äquivalenklassen, dann bestünde M aus $n \cdot k$ verschiedenen Elementen.

Aufgabe 8. *Wichtiges Beispiel für eine Gruppe*

M sei eine nichtleere Menge. Die Menge $\gamma(M)$ aller bijektiven Abbildungen von M in sich selbst werde kurz mit G bezeichnet, d.h. $G := \{f : M \to M | f \text{ ist bijektiv}\}$.

a) Man gebe G für $M = \{x_1, x_2\}$ und $M = \{x_1, x_2, x_3\}$ explizit an. Wie viele verschiedene Elemente hat G, wenn M aus n verschiedenen Elementen besteht?

b) Auf G werde als Verknüpfung $\circ$ die Hintereinanderausführung der bijektiven Abbildungen definiert. Man erstelle die Verknüpfungstafeln von G für
$M = \{x_1, x_2\}$ und $M = \{x_1, x_2, x_3\}$.

c) Man verifiziere anhand der Verknüpfungstafeln, dass G für diese Beispiele von M mit dieser Verknüpfung $\circ$ eine Gruppe ist.

d) Man beweise: Für jede nichtleere Menge M ist G mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung eine Gruppe.