Universität Augsburg
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Wolfgang Schneider
Dr. Renate Motzer

Übungsblatt 7 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 21. *Zum Thema "Basis eines Vektorraums" (2 + 2 + 1 = 5 Punkte)*

Es sei $\mathbb{R}[X]$ der Polynomring über dem Körper $\mathbb{R}$ (mit einer Unbestimmten). $\mathbb{R}[X]$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\mathbb{R}_n[X] := \{f \in \mathbb{R}[X] \mid deg(f) \leq n\}$ ist ein Untervektorraum davon. Man gebe eine Basis von

a) $\mathbb{R}[X]$

b) $\mathbb{R}_n[X]$

an und beweise die Basiseigenschaft.

Ergänzende Bemerkung:

Wenn auch jeder K-Vektorraum eine Basis besitzt, so kann sich die explizite Angabe einer Basis schwierig gestalten; ein typisches Beispiel dafür ist der $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.

c) In den **Aufgaben 16** und **20** wurde der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ thematisiert. Ist das in **Aufgabe 20** angegebene $B = (e_1, e_2, \dots)$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$? Man begründe die Antwort.

Aufgabe 22. *Zum Thema "Körpererweiterung" (2 + 2 = 4 Punkte)*

a) Man zeige: $k_2 = \{0, 1\}$ ist ein Unterkörper des Körpers $K = \{0, 1, a, b\}$ mit vier Elementen (siehe **Aufgabe 13 b)**) und K ist ein k_2-Vektorraum.

b) Man gebe eine Basis des k_2-Vektorraums K an und beweise die Basiseigenschaft.

Aufgabe 23. *Der Körper K mit vier Elementen und die Untervektorräume von K^2 (4 Punkte)*

Es ist K der Körper mit 4 Elementen aus **Aufgabe 13 b)**. Dann ist K^2 ein K-Vektorraum mit 16 Vektoren. Unter Verwendung der Verknüpfungstafeln von K gebe man alle eindimensionalen Untervektorräume von K^2 explizit an.

Hinweis: Ein Untervektorraum U von K^2 ist genau dann eindimensional, wenn $U = K(\alpha_1, \alpha_2)$ für ein $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0) \in K^2$. Im eben genannten Satz kann man natürlich $K(\alpha_1, \alpha_2)$ durch $span((\alpha_1, \alpha_2))$ ersetzen, denn $K(\alpha_1, \alpha_2) = span((\alpha_1, \alpha_2))$.

Hilfe: Man überlege, wie die Antworten auf folgende Fragen aussehen: In wie vielen verschiedenen eindimensionalen Untervektorräumen von K^2 kann ein Element $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0) \in K^2$ liegen? Wie viele verschiedene Elemente hat ein eindimensionaler Untervektorraum von K^2?