Universität Augsburg
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Wolfgang Schneider
Dr. Renate Motzer

Übungsblatt 6 zur Linearen Algebra I

Hinweis: $\mathbb{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{Q}$ die der rationalen, $\mathbb{R}$ die der reellen.

Aufgabe 17. *Zum $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$*

Im $\mathbb{R}^3$, der $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, sind folgende Mengen gegeben:
$S_1 = \{x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) | \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3\}$
$S_2 = \{x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mid \alpha_3 = 0\}$
$S_3 = \{x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mid \alpha_1 = \alpha_2 - \alpha_3\}$
$S_4 = \{x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mid \alpha_1 = 1\}$

a) Man skizziere die Mengen S_i innerhalb von $\mathbb{R}^3$, $i = 1, ..., 4$.

b) Man bestimme die Untervektorräume $U_i = span(S_i)$, $i = 1, ..., 4$.

c) Man gebe für alle Untervektorräume U_i, $i = 1, ..., 4$, Basen an.

d) Man bestimme die Untervektorräume $W_{ij} = U_i + U_j$, $i, j = 1, ..., 4$.
Welche der Summen $U_i + U_j$ sind direkt, d.h. $U_i + U_j = U_i \oplus U_j$?

Ergänzende Bemerkung:
Im $\mathbb{R}^3$ - jede Basis von $\mathbb{R}^3$ besteht aus drei Vektoren - sollte man immer folgende anschauliche Vorstellung haben: (x_1, x_2, x_3) ist genau dann eine Basis von $\mathbb{R}^3$, wenn x_1 nicht $(0, 0, 0)$ ist, x_2 nicht auf der Geraden durch $(0, 0, 0)$ und x_1 liegt und x_3 nicht in der Ebene durch $(0, 0, 0)$, x_1 und x_2 liegt.

Aufgabe 18. *Zum $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$*

Welche der folgenden Familien von Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ sind linear unabhängig, ein Erzeugendensystem oder eine Basis? Man begründe die Antworten.

a) $((1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$

b) $((1, 0, 0, 0), (2, 0, 0, 0))$

c) $((17, 39, 25, 10), (13, 12, 99, 4), (16, 1, 0, 0))$

d) $((1, \frac{1}{2}, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1), (\frac{1}{4}, 0, 0, \frac{1}{4}))$

Aufgabe 19. *Zum $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$*

a) Man bestätige, dass $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist.

b) Ist die Familie $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ linear abhängig oder linear unabhängig? Man begründe die Antwort.

Aufgabe 20. *Zum $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*

Es ist $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ – auch die Bezeichnung $\mathbb{R}^{\infty}$ ist gebräuchlich – der $\mathbb{R}$-Vektorraum wie in **Aufgabe 16**; $e_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sei wie folgt definiert: $e_k = (0, \dots, 1, 0, \dots)$ mit der 1 an der k-ten Stelle. Es sei $B := (e_1, e_2, \dots)$.

a) Man zeige, dass die Familie B im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ linear unabhängig ist.

b) Was ist $span(B)$? Man begründe die Antwort.