Analisi Matematica 2020/2021- Esercizi 6

17 Dicembre 2020

Ricordiamo nella tabella che segue gli sviluppi di Taylor per $x \to 0$ delle principali funzioni elementari :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0$$

- Calcolare i seguenti limiti usando gli sviluppi in serie di Taylor.

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{sinx - x}{x}$$
2. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{1 - cosx + x^2}$$
3. $$\lim_{x\to 0}\frac{sinx - cosx + 1}{2x + x^2 + 1 - \frac{e^x - 1}{x}}$$

- Studiare convergenza semplice e assoluta delle seguenti serie:

4. $$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n sin\frac{1}{n}$$
5. $$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n(ln(n))^2}$$
6. $$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n tan\frac{1}{n}$$
7. $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{cos(\frac{\pi}{2}n)}{n}$$
8. $$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n^2 + 4n + 8}{n^3 + 2n^2 + 7n}$$

9.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sin(n)}{n}$$

- Calcolare i seguenti integrali impropri:

10.
$$\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{(2x-1)^2} dx$$

11.
$$\int_{4}^{+\infty} \frac{1}{x(lnx)^2} dx$$

12.
$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} sin(x)ln(cosx)dx$$

13.
$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} arctan\frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

- Siano dati l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} sin(\frac{1}{x})dx$ e la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n sin\frac{1}{n}$, dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
  - Entrambi non convergono
  - Entrambi non convergono assolutamente
  - L'integrale improprio non converge e la serie converge