Soluzioni - foglio 6

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x} \to$ F.I. $\frac{0}{0}$

USO: $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \cancel{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x} = \lim_{x \to 0} -\frac{x^2}{6} + o(x^3) = 0$$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x + x^2} \to$ F.I. $\frac{0}{0}$

USO $\left[\begin{array}{l} e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1}) \end{array}\right]$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} - \cancel{1} - \cancel{x} + o(x^2)}{\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^3) + x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{\frac{3}{2}x^2 + o(x^3)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2 + o(x^2)}{2}}{\frac{3x^2 + o(x^3)}{2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3x^2 + o(x^3)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{3x^2 + o(x^3)} + \frac{o(x^2)}{3x^2 + o(x^3)} =$$

divido tutto per x^2

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{3 + o(x)} + \frac{o(1)}{3 + o(x)} = \frac{1}{3}$$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \cos x + 1}{2x + x^2 + 1 - \frac{e^x - 1}{x}}$

USO lo sviluppo di $\sin x$, $\cos x$ e e^x (vedi es precedenti)

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \cancel{+1}}{2x + x^2 + 1 - \frac{\cancel{1} + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \cancel{-1}}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)}{2x + x^2 + 1 - \left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)}{2x + x^2 \cancel{+1} \cancel{-1} - \frac{x}{2} + o(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)}{\frac{3}{2}x + o(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \frac{x}{2} + o(x^2)}{\frac{3}{2} + o(1)} =$$

divido tutto per x

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

4) $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$

- convergenza normale:

dato che $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \geq 0 \quad \forall n \geq 2$; $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \sin(0) = 0$; $\left\{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\geq 2}$ è una successione decrescente, cioè $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \geq \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \quad \forall n \geq 2$, allora queste tre condizioni verificano le ipotesi del teorema di Leibniz

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ è una serie convergente

- convergenza assoluta

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left|(-1)^n \sin \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \left|\sin \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \sin \frac{1}{n}$$

per l'osservazione fatta precedentemente: $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \geq 0 \quad \forall n \geq 2$

TEOREMA DEL CONFRONTO ASINTOTICO:

Siano $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ due serie a termini positivi con $b_n \neq 0 \quad \forall n \geq n_0$,

supponiamo allora che esista il limite : $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = L$

- se $L \in (0,+\infty)$ allora $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere
- se $L = 0$ e la serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ converge
- se $L = +\infty$ e la serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ diverge

Applichiamo questo criterio per confrontare:

$\sum_{n=2}^{+\infty} \sin \frac{1}{n}$ con $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin 1/n}{1/n} = 1 \in (0,+\infty)$. $\Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \sin \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ hanno lo stesso carattere

e sappiamo che la seconda diverge (serie armonica)

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \sin \frac{1}{n} = +\infty$

Quindi $\sum_{n=2}^{+\infty} \left|(-1)^n \sin \frac{1}{n}\right|$ è divergente.

5) $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n(\ln(n))^2}$

- convergenza normale:

• $\frac{1}{n(\ln(n))^2} \geq 0 \quad \forall n \geq 2$ (perché $n(\ln(n))^2 \geq 0 \; \forall n \geq 2$)

• $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2} = 0$

• $\left\{ \frac{1}{n(\ln(n))^2} \right\}_{n \geq 2}$ è una successione decrescente, infatti sia n che $(\ln(n))^2$ sono cresenti per $n \geq 2$, quindi anche il loro prodotto : $n(\ln(n))^2$ lo è $\Rightarrow$ il reciproco $\frac{1}{n(\ln(n))^2}$ è decrescente.

$\Rightarrow$ Possiamo applicare Leibniz e concludere che la serie converge

- convergenza assoluta:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n(\ln(n))^2} \right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \left| \frac{1}{n(\ln(n))^2} \right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$$

CRITERIO DELL'INTEGRALE

- data una funzione $f: [n_0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $n_0 \in \mathbb{N}$
- data una successione $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ i cui termini sono definiti dalla legge: $a_n = f(n) \quad \forall n \geq n_0$

Se f è positiva, decresce ed è infinitesima per $x \to +\infty$, allora:

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \text{ converge} \iff \int_{n_0}^{+\infty} f(x)dx \text{ converge}$$

Applichiamo questo criterio:

$f(x) =: \frac{1}{x(\ln(x))^2}$ che è positiva, decrescente e infinitesima ($\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$) in $[2, +\infty)$

$a_n = f(n) = \frac{1}{n(\ln(n))^2} \quad \forall n \geq 2 \quad \Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2} < +\infty$

$$\iff \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx < +\infty$$

Calcoliamo: $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$ SOSTITUZIONE: $t = \ln(x)$

$$dt = \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Bigg|_{\ln(2)}^{+\infty} = -0 + \frac{1}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} < +\infty$$

$\Rightarrow$ anche $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2} < +\infty$ quindi la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n(\ln(n))^2}$ è assolutamente convergente

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \tan\frac{1}{n}$

- convergenza normale:
  - $\tan\frac{1}{n} \geq 0 \quad \forall n \geq 1$
  - $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \tan\left(\frac{1}{n}\right) = \tan 0 = 0$
  - $\left\{\tan\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ è una successione decrescente

$\Rightarrow$ Per il criterio di Leibniz la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \tan\frac{1}{n}$ è convergente.

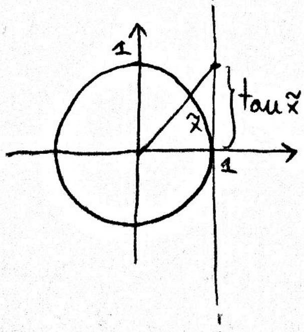
- convergenza assoluta:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \tan\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \tan\frac{1}{n}$$

OSSERVAZIONE: per $\begin{pmatrix} x \geq 0 \\ x \leq \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$ vale sempre la disuguaglianza: $x \leq \tan x$

spiegazione grafica:

CERCHIO
GONIOMETRICO



$\tilde{x}$ = arco di circonferenza

$\tan\tilde{x}$ = segmento staccato sulla retta verticale di eq $x = 1$

$\Rightarrow \tilde{x} \leq \tan\tilde{x}$

quindi: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \tan\frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \tan\left(\frac{1}{n}\right) \geq +\infty \Rightarrow$ divergente

$\parallel$

$+\infty$

(serie armonica)

$\Rightarrow$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \tan\frac{1}{n}$ NON converge assolutamente

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{n}$

$\underline{OSS}$: $\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 1 & \text{se } n \equiv 0 \pmod 4 \\ 1 & \text{se } n \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$

quindi $\left\{\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{n}\right\}_{n\geq 1} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \dots\right\}$

$= \left\{(-1)^n \dfrac{1}{2n}\right\}_{n\geq 1}$ $\rightarrow$ ho riscritto il termine generico della serie

$\Big\downarrow \,\Vert$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n}$

- $\dfrac{1}{2n} \geq 0 \quad \forall n \geq 1$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$
- $\left\{\dfrac{1}{2n}\right\}_{n\geq 1}$ è decrescente

$\Rightarrow$ per il criterio di Leibniz la serie converge

- convergenza assoluta: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{2n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} = +\infty$ (serie armonica)

$\Rightarrow$ La serie non converge assolutamente.

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2+4n+8}{n^3+2n^2+7n}$

- convergenza normale:
  - $\dfrac{n^2+4n+8}{n^3+2n^2+7n} \geq 0 \quad \forall n \geq 1$ (perchè quoziente di quantità positive)
  - $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+4n+8}{n^3+2n^2+7n} = 0$
  - Esiste certamente un certo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. da n_0 in poi ($\forall n \geq n_0$) la successione $\left\{\dfrac{n^2+4n+8}{n^3+2n^2+7n}\right\}_{n\geq n_0}$ è decrescente, questo perchè la successione è infinitesima e positiva. (chi vuole può trovare questo n_0)

$\Rightarrow$ Siamo nelle ipotesi di Leibniz, dunque la serie è convergente.

- convergenza assoluta:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \frac{n^2+4n+8}{n^3+2n^2+7n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+4n+8}{n^3+2n^2+7n}$$

$\longrightarrow$

→ applichiamo il teorema del confronto asintotico:

$a_n = \frac{n^2+4n+8}{n^3+2n^2+7n}$ $\qquad b_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^2+4n+8}{n^3+2n^2+7n}}{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+4n+8}{n^3+2n^2+7n}\cdot n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+4n^2+8n}{n^3+2n^2+7n} = 1$$

dato che $1 \in (0,+\infty)$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere, ma

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+4n+8}{n^3+2n^2+7n} = +\infty \Rightarrow$ la serie NON converge assolutamente

9) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}$ (Esercizio difficile)

- convergenza normale:

CRITERIO DI DIRICHLET

- Sia $\{a_n\}_n$ una successione infinitesima e non crescente, ossia:
  - $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
  - $a_{n+1} \le a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$
- Sia $\{b_n\}_n$ una successione t.c. risulti limitata la successione delle somme parziali, ovvero $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ definisce una successione $\{S_n\}_n$ limitata

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ è convergente

Applichiamo il criterio: $a_n = \frac{1}{n}$ infinitesima e non crescente ✓

$b_n = \sin(n)$ $\qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(k) \Rightarrow$ vogliamo far vedere che $\exists M$ t.c. $|S_n| \le M \ \forall n$ (S_n limitata)

<u>OSS</u>: $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$ (*)

Inoltre S_n è limitata $\Leftrightarrow 2\sin(1)\cdot S_n$ è limitata

(moltiplicare per una costante non nulla non altera la limitatezza)

$$2\sin(1) S_n = 2\sin(1)\sum_{k=1}^{n}\sin(k) = \sum_{k=1}^{n} 2\sin(1)\sin(k) \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{n}\left(\cos(1-k) - \cos(1+k)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\cos(k-1) - \cos(1+k)\right) = (\cos 0 - \cancel{\cos 2}) + (\cos 1 - \cos 3) + (\cancel{\cos 2} - \cos 4) + \dots + (\cos(n-2) - \cos n) + (\cos(n-1) - \cos(n+1)) =$$

(il coseno è pari $\Rightarrow \cos(x) = \cos(-x)$)

$$\underset{\uparrow}{=} 1+\cos(1)-\cos(n)-\cos(n+1)$$

Si cancellano tutti i termini eccetto questi

quindi: $2\sin(1)\, S_n = 1+\cos(1)-\cos(n)-\cos(n+1)$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1-\cos(1)-\cos(n)-\cos(n+1)}{2\sin(1)}$$

$$|S_n| = \left|\frac{1-\cos(1)-\cos(n)-\cos(n+1)}{2\sin(1)}\right| \le \frac{|1|+|\cos(1)|+|\cos(n)|+|\cos(n+1)|}{2\sin(1)} \le \frac{4}{2\sin(1)}$$

$\Rightarrow |S_n| \le \frac{2}{\sin(1)}$ $\Rightarrow$ questa la M che stavamo cercando!

$\Rightarrow$ Per il criterio di Dirichlet, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}$ è convergente.

- convergenza assoluta:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\sin(n)}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|\sin(n)|}{n} \to \text{diverge}$$ (dimostrazione molto complicata)

<u>Idea</u>

$\longrightarrow$ <u>OSS</u>: $0 \le x^2 \le |x| \quad \forall x \in [-1,1]$

quindi $0 \le \sin^2 x \le |\sin x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$0 \le \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 n}{n} \le \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|\sin n|}{n}$$

ma $\sin^2 n = \frac{1}{2}(1-\cos 2n)$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-\cos 2n}{2n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n}}_{\text{diverge}} - \underbrace{\frac{\cos 2n}{2n}}_{\text{converge (da dimostrare)}}$$

10) $\displaystyle\int_{1/2}^{+\infty}\frac{1}{(2x-1)^2}\,dx$

Calcolo la primitiva: $\displaystyle\int\frac{1}{(2x-1)^2}dx \left(= \int\frac{1}{4x^2-4x+1}dx \rightsquigarrow \text{FRATTI semplici (strada lunga)}\right)$

SOSTITUZIONE: $\left[\begin{array}{l} t = 2x-1 \\ x = \frac{t+1}{2} \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{array}\right]$

$$\| \qquad \int\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{2}\frac{1}{t} + c$$

$$\Rightarrow \int\frac{1}{(2x-1)^2}dx = -\frac{1}{2(2x-1)} + c$$

$$\Rightarrow \int_{1/2}^{+\infty}\frac{1}{(2x-1)^2}dx = \left(-\frac{1}{2(2x-1)}\right)\Bigg|_{1/2}^{+\infty} = \frac{1}{2(2x-1)}\Bigg|_{+\infty}^{1/2} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2(2x-1)}\right) - \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2(2x-1)}\right) = +\infty$$

$\Rightarrow$ l'integrale diverge

11) $$\int_4^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_{\ln(4)}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Big|_{\ln(4)}^{+\infty} = \frac{1}{t}\Big|_{+\infty}^{\ln(4)} = \frac{1}{\ln(4)} - 0 = \frac{1}{\ln(4)}$$

$$\left[\begin{array}{l} t = \ln(x) \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{array}\right]$$

12) $$\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \sin(x)\ln(\cos x)\,dx$$ SOSTITUZIONE: $\left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ -\sin x\,dx = dt \end{array}\right]$

$$= -\int_0^1 \ln(t)\,dt = \int_1^0 \ln(t)\,dt = (t\ln(t)-t)\Big|_1^0 = \lim_{t\to 0^+}(t\ln(t)-t) - (1\cdot 0 - 1) =$$

$$= \lim_{t\to 0^+}(t(\ln(t)-1)) + 1 = \lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(t)-1}{1/t} + 1 \underset{\uparrow}{=} \lim_{t\to 0^+}\frac{1/t}{-1/t^2} + 1 =$$

del l'Hopital

$$= \lim_{t\to 0^+} -\frac{1}{t}\cdot t^2 + 1 = 1$$

13) $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$ $\left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad dt = -\frac{1}{2x^{3/2}}dx = -\frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}dx = -2x\,dt = -\frac{2}{t^2}dt \end{array}\right]$

$$= \int_{+\infty}^1 -\frac{2}{t^2}\arctan t\,dt = 2\int_1^{+\infty}\frac{\arctan t}{t^2}dt$$

→ integrazione per parti

$$\left(\begin{array}{ll} f(t) = \arctan t & f'(t) = \frac{1}{1+t^2} \\ g(t) = -\frac{1}{t} & g'(t) = \frac{1}{t^2} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow 2\int\frac{\arctan t}{t^2}dt = 2\left(-\frac{\arctan(t)}{t} + \int\frac{1}{t(1+t^2)}dt\right) =$$

$$= 2\left(-\frac{\arctan t}{t} + \int\left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}\right)dt\right) = 2\left(-\frac{\mathrm{arctg}(t)}{t} + \ln(t) - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right)$$

$$\Rightarrow 2\int_1^{+\infty}\frac{\arctan t}{t^2}dt = 2\left(\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{\mathrm{arctg}(t)}{t} + \underbrace{\ln(t) - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)}_{\substack{= \ln(t) - \ln(\sqrt{t^2+1}) \\ = \ln\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)}}\right) + \mathrm{arctg}(1) + 0 + \frac{1}{2}\ln(2)\right)$$

$$= 2\left(0 + \cancel{0} + \mathrm{arctg}(1) + \frac{1}{2}\ln(2)\right)$$

$$= 2\left(\mathrm{arctg}(1) + \frac{1}{2}\ln(2)\right) = 2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2)\right) = \frac{\pi}{2} + \ln(2)$$

13) $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$ e $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

a) Entrambi non convergono: FALSO

(nell'esercizio 4 abbiamo visto che la serie è convergente)

b) Entrambi non convergono assolutamente: VERO

. Sappiamo che $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ non converge assolutamente

quindi $\sum_{n=2}^{+\infty} \left|(-1)^n \sin\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty$

per il criterio dell'integrale, $\sum_{n=2}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ converge $\iff \int_2^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$ converge

(possiamo applicarlo perché $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ è positiva, decrescente e infinitesima per $x \to +\infty$)

quindi $\int_2^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx = +\infty$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| dx = \int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{x}\, dx = \underbrace{\int_1^{2} \sin\frac{1}{x}\, dx}_{\text{quantità finita}} + \int_2^{+\infty} \sin\frac{1}{x}\, dx = +\infty$

$\rightarrow \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$ non converge assolutamente.

c) Essendo $\int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{x}\, dx = +\infty$, anche la c è vera.