Soluzioni Foglio 4

$$f(x) = \frac{e^x - 3}{e^x + 3}$$

- DOMINIO: $e^x + 3 \neq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ $\boxed{D = \mathbb{R}}$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 3}{e^x + 3} \Rightarrow$ F.I. $\frac{\infty}{\infty}$

|| Hopital

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{y = 1 \text{ è un asintoto orizzontale destro}}$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 3}{e^x + 3} = \frac{-3}{3} = -1$ $\Rightarrow$ $\boxed{y = -1 \text{ è un asintoto orizzontale sinistro}}$

- $f'(x) = \frac{e^x(e^x+3) - (e^x-3)e^x}{(e^x+3)^2} = \frac{\cancel{e^{2x}} + 3e^x \cancel{- e^{2x}} + 3e^x}{(e^x+3)^2} = \frac{6e^x}{(e^x+3)^2}$

$f'(x) = 0 \iff 6e^x = 0$ (numeratore)

ma questo non accade mai. Inoltre $f'(x) > 0$ perchè quoziente di due quantità strettamente positive.

Quindi $f(x)$ è crescente nel suo dominio e non ammette punti stazionari.

- $f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{6e^x}{(e^x+3)^2}\right) = \frac{6e^x(e^x+3)^2 - 6e^x(2(e^x+3)\cdot e^x)}{(e^x+3)^4} =$

$= \frac{6e^x(e^{2x} + 6e^x + 9) - 6e^x(2e^{2x} + 6e^x)}{(e^x+3)^4} =$

$= \frac{6e^{3x} + \cancel{36e^{2x}} + 54e^x - 12e^{3x} - \cancel{36e^{2x}}}{(e^x+3)^4} = \frac{-6e^{3x} + 54e^x}{(e^x+3)^4} =$

$= \frac{6e^x(-e^{2x} + 9)}{(e^x+3)^4}$

$f''(x) = 0 \iff e^{2x} = 9 \iff 2x = \ln(9)$ $x = \frac{\ln(9)}{2}$

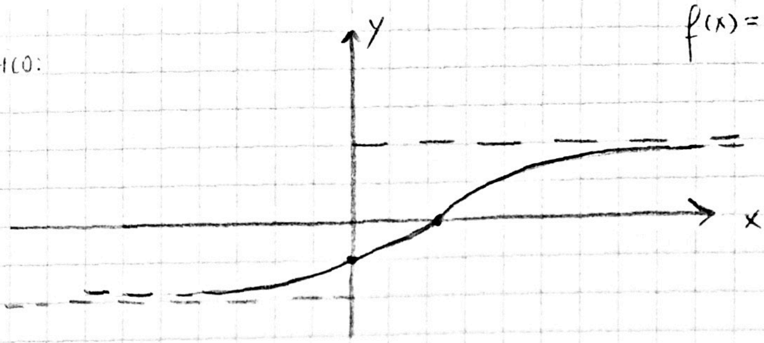
Essendo il segno della derivata seconda univocamente determinato da $(-e^{2x}+9)$, possiamo concludere che:

$f''(x) < 0$ per $x > \frac{\ln(9)}{2}$ $\to$ f ~~CONVESSA~~ CONCAVA in $\left(\frac{\ln 9}{2}, +\infty\right)$

$f''(x) = 0$ per $x = \frac{\ln(9)}{2}$ $\to$ FLESSO

$f''(x) > 0$ per $x < \frac{\ln(9)}{2}$ $\to$ f CONVESSA in $\left(-\infty, \frac{\ln 9}{2}\right)$

- grafico:



$f(x) = \frac{e^x-3}{e^x+3}$

$\frac{\ln(9)}{2} \sim 1,1$

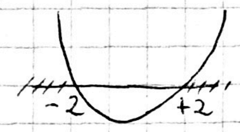
$f\left(\frac{\ln(9)}{2}\right) = 0$

$f(0) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

- DOMINIO: $\begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x^2-4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2-4>0$, risolviamo

eq. associata: $x^2-4=0 \quad x^2=4 \quad x=\pm 2$



$\Rightarrow$ Sol: $x<-2 \vee x>2$

$\boxed{D=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \Rightarrow$ F.I. $\frac{\infty}{\infty}$ $= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2(1-4/x^2)}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}\,1}{-\cancel{x}\sqrt{1-4/x^2}} = -1$

$\boxed{y=-1 \text{ è un asintoto orizzontale sinistro}}$

moltiplico per "−" perché il denominatore deve essere una quantità positiva (il denominatore di $f(x)$ è una radice, quindi positiva) però noi stiamo calcolando il limite per $x\to-\infty$, quindi x è negativa $\Rightarrow$ la moltiplico per "−" per renderla positiva

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \Rightarrow$ F.I. $\frac{\infty}{\infty}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2(1-4/x^2)}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\,1}{\cancel{x}\sqrt{1-4/x^2}} = 1$

$\boxed{y=1 \text{ è un asintoto orizzontale destro}}$

- $\lim\limits_{x\to-2^-} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = -\infty$ $\quad \boxed{x=-2 \text{ è un asintoto verticale}}$

- $\lim\limits_{x\to2^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = +\infty$ $\quad \boxed{x=2 \text{ è un asintoto verticale}}$

- $f'(x) = \frac{1(\sqrt{x^2-4}) - x\left(\frac{1}{2}(x^2-4)^{-1/2}\cdot 2x\right)}{x^2-4} = \frac{\sqrt{x^2-4} - x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right)}{x^2-4} =$

$= \left(\sqrt{x^2-4} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}\right)\frac{1}{x^2-4} = \left(\frac{\cancel{x^2}-4-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-4}}\right)\frac{1}{x^2-4} = -\frac{4}{(x^2-4)^{3/2}}$

$\rightarrow$

Quindi $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$, inoltre essendo il numeratore di $f'(x) \ni -4$ e il denominatore sempre positivo $\Rightarrow f'(x) < 0 \quad \forall x \in D$

Quindi $f(x)$ è decrescente nel suo dominio e non ammette punti stazionari

- $$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{-4}{(x^2-4)^{3/2}}\right) = -4\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(x^2-4)^{3/2}}\right) = -4\frac{d}{dx}\left((x^2-4)^{-3/2}\right) =$$

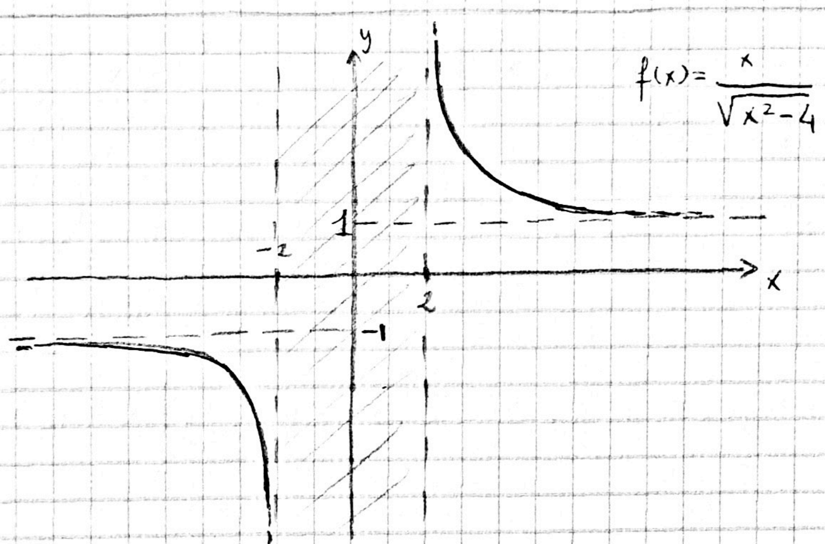
$$= -4\left(-\frac{3}{2}(x^2-4)^{-5/2}\cdot 2x\right) = -4\left(\frac{-3x}{(x^2-4)^{5/2}}\right) = \frac{12x}{(x^2-4)^{5/2}}$$

allora $f''(x) = 0 \iff 12x = 0 \iff x = 0 \notin D \Rightarrow$ NON è un punto di Flesso

Essendo il denominatore positivo $\forall x \in D$, si ha:

- $f''(x) > 0$ per $x > 2 \Rightarrow (2, +\infty)$ è un intervallo di Convessità
- $f''(x) < 0$ per $x < -2 \Rightarrow (-\infty, -2)$ " " " Concavità

- Grafico



OSS: $\cdot f(x) < 0$ per $x < -2$
$f(x) > 0$ per $x > 2$

$\cdot f$ è una funzione dispari $\Rightarrow$ è simmetrica rispetto all'origine

- $$f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$$

- DOMINIO $\quad x^2 - 1 \neq 0 \quad x^2 \neq 1 \quad x \neq \pm 1$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2-1} = 0^+$ $\quad\Rightarrow y = 0$ asintoto orizzontale destro e sinistro
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^2-1} = 0^-$

$\Rightarrow$ $\boxed{y = 0 \text{ asintoto orizzontale bilatero}}$

- $\lim_{x \to -1^-} \frac{2x}{x^2-1} = -\infty$
- $\lim_{x \to -1^+} \frac{2x}{x^2-1} = +\infty$

$\boxed{x = -1 \text{ è un asintoto verticale}}$

- $\lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{x^2-1} = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{2x}{x^2-1} = +\infty$

$\boxed{x = 1 \text{ è un asintoto verticale}}$

$$f'(x) = \frac{2(x^2-1)-2x(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2-2-4x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$$

$f'(x)=0 \iff -2(x^2+1)=0 \iff x^2+1=0 \rightarrow$ MAI

$\Rightarrow f'(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$ inoltre, essendo il denominatore sempre positivo, il segno di $f'(x)$ è dato dal suo numeratore e $-2(x^2+1)<0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f'(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$

Quindi $f(x)$ è decrescente nel suo dominio e non ammette punti stazionari.

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}\right) = -2\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{\underset{\substack{\parallel \\ x^4+1-2x^2}}{(x^2-1)^2}}\right) = -2\left(\frac{2x(x^4+1-2x^2)-(x^2+1)(4x^3-4x)}{(x^2-1)^4}\right)$$

$$= -2\left(\frac{2x^5+2x-4x^3-4x^5+\cancel{4x^3}-\cancel{4x^3}+4x}{(x^2-1)^4}\right) = -2\left(\frac{-2x^5-4x^3+6x}{(x^2-1)^4}\right) =$$

$$= \frac{4x^5+8x^3-12x}{(x^2-1)^4}$$

$\rightarrow$ Per studiare il segno di $f''(x)$, basta studiare il segno del suo numeratore (perché il denominatore è sempre positivo)

$f''(x) \geq 0 \iff 4x^5+8x^3-12x \geq 0 \iff \underbrace{x}_{A}\underbrace{(4x^4+8x^2-12)}_{B} \geq 0$

- A) $x \geq 0$
- B) $4x^4+8x^2-12 \geq 0 \xrightarrow{eq.} 4x^4+8x^2-12=0$ pongo $z=x^2$

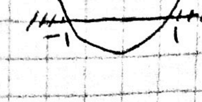
e ottengo $4z^2+8z-12=0$ $\quad \Delta = 64-4(-48)=256$

$$z_{1,2} = \frac{-8\pm\sqrt{256}}{8} = \frac{-8\pm 16}{8} = -1\pm 2 \quad \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = -3 \end{cases}$$

quindi $4z^2+8z-12 = (z-1)(z+3)$

ovvero: $4x^4+8x^2-12 = \underbrace{(x^2-1)}_{B_1}\underbrace{(x^2+3)}_{B_2}$

$B_1)$ $x^2-1 \geq 0 \xrightarrow{eq} x^2-1=0 \iff x^2=1 \iff x=\pm 1$



$x<-1 \vee x>1$

$B_2)$ $x^2+3 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Metto insieme A), B_1) e B_2) e ottengo:

		-1		0		
A	−		−		+	+
B_1	+		−		−	+
B_2	+		+		+	+
	−		+		−	+

Quindi $f''(x)=0 \iff x=0$ oppure $x=\pm 1$ $\rightarrow$ questi non appartengono a D

$\Rightarrow$ $x=0$ è l'unico punto di flesso

$(-\infty,-1)\cup(0,1)$ sono intervalli di concavità

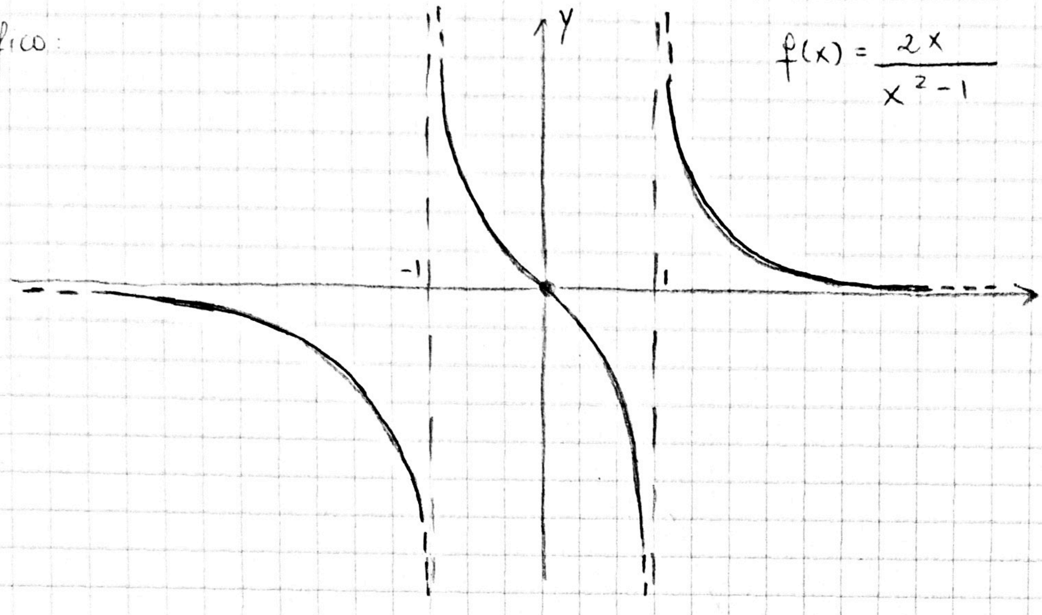
$(-1,0)\cup(1,+\infty)$ " " " convessità

⊙ Grafico:

$$f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$$

<u>OSS</u>: $f(x)$ è DISPARI

$f(0)=0$



$$f(x)=(x+1)\ln(x+1)-2$$

⊙ DOMINIO: $x+1>0 \iff x>-1 \Rightarrow \boxed{D=(-1,+\infty)}$

⊙ $\lim_{x\to -1^+}\left((x+1)\ln(x+1)-2\right) \Rightarrow$ F.I. $0\cdot\infty$

$$=\lim_{x\to-1^+}\left((x+1)\ln(x+1)\right)-2 = \lim_{t\to0^+}(t\ln t)-2 = 0-2=-2$$

Sostituisco $t=x+1$ quindi $t\to0^+$ per $x\to-1^+$

⊙ $\lim_{x\to+\infty}(x+1)\ln(x+1)-2=+\infty$ $\Rightarrow$ non ci sono asintoti verticali o orizzontali

Proviamo a vedere se $f(x)$ ammette un asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)\ln(x+1)-2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)\ln(x)}{x}-\frac{2}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{\cancel{x}(1+1/x)}{\cancel{x}}}_{\downarrow\,1}\underbrace{\ln(x)}_{\downarrow\,+\infty}-\underbrace{\frac{2}{x}}_{\downarrow\,0}=+\infty$$

$\Rightarrow$ dato che questo limite NON è finito, non ci sono asintoti obliqui

⊙ $f'(x)=\frac{d}{dx}\left((x+1)\ln(x+1)\right)=1\cdot\ln(x+1)+(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}=\ln(x+1)+1$

$f'(x)=0 \iff \ln(x+1)=-1 \iff x+1=e^{-1} \iff x=\frac{1}{e}-1$

$x=\frac{1}{e}-1$ è un punto stazionario.

$f'(x) < 0$ per $x < \frac{1}{e} - 1$ $\Rightarrow (-1, \frac{1}{e} - 1)$ è un intervallo di decrescenza

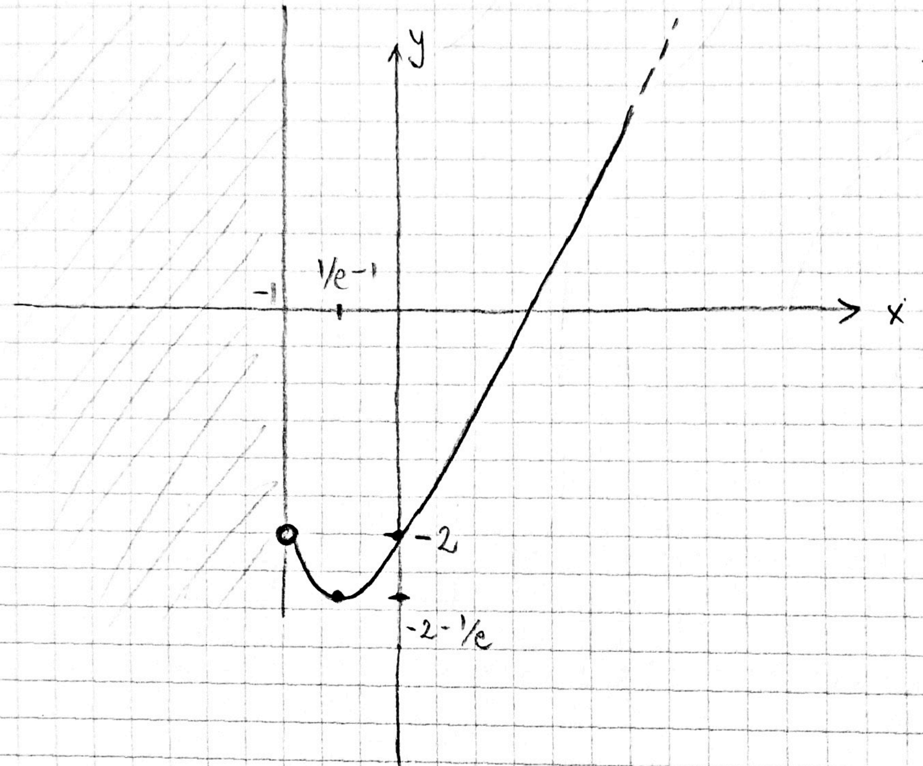
$f'(x) = 0$ per $x = \frac{1}{e} - 1$ $\Rightarrow x = \frac{1}{e} - 1$ è un punto di minimo

$f'(x) > 0$ per $x > \frac{1}{e} - 1$ $\Rightarrow (\frac{1}{e} - 1, +\infty)$ è un intervallo di crescenza

- $f''(x) = \frac{d}{dx}(\ln(x+1)) = \frac{1}{x+1}$ $\quad f''(x) > 0 \ \forall x \in (-1, +\infty)$

$\Rightarrow f$ è convessa nel suo dominio e non ha punti di flesso

⊙ Grafico



OSS: $f(\frac{1}{e} - 1) =$

$= \frac{1}{e} \cdot \ln(\frac{1}{e}) - 2$

$= -\frac{1}{e} - 2$

$f(0) = -2$

$$f(x) = x + \frac{5}{2}\sqrt{x^2 - \frac{2}{5}}$$

⊙ DOMINIO: $x^2 - \frac{2}{5} \geq 0$ $\longrightarrow$ eq: $x^2 - \frac{2}{5} = 0$ $\quad x^2 = \frac{2}{5}$ $\quad x = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$

$-\sqrt{\frac{2}{5}}$ $\quad \sqrt{\frac{2}{5}}$

$x \leq -\sqrt{\frac{2}{5}} \ \vee \ x \geq \sqrt{\frac{2}{5}}$

$$\boxed{D = \left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{5}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{2}{5}}, +\infty\right)}$$

⊙ $\lim_{x \to -\infty} x + \frac{5}{2}\sqrt{x^2 - \frac{2}{5}}$ $\rightarrow$ F.I. $-\infty + \infty$ $\rightarrow$ uso il prodotto notevole $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(x + \frac{5}{2}\sqrt{x^2 - \frac{2}{5}}\right)\left(x - \frac{5}{2}\sqrt{x^2 - \frac{2}{5}}\right)}{\left(x - \frac{5}{2}\sqrt{x^2 - \frac{2}{5}}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - \frac{25}{4}\left(x^2 - \frac{2}{5}\right)}{\left(x - \frac{5}{2}\sqrt{x^2 - \frac{2}{5}}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - \frac{25}{4}x^2 + 5/2}{\left(x - 5/2\sqrt{x^2 - 2/5}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\frac{21}{4}x^2 + 5/2}{\quad} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(-\frac{21}{4} + \frac{5}{2x^2}\right)}{\left(x + \frac{5}{2}\, x\sqrt{1-\frac{2}{5x^2}}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\overbrace{\cancel{x^2}\left(-\frac{21}{4} + \frac{5}{2x^2}\right)}^{\text{Quantità negativa}}}{\underbrace{\cancel{x}\left(1 + \frac{5}{2}\sqrt{1-\frac{2}{5x^2}}\right)}_{\text{Quantità positiva}}} = +\infty$$

- $$\lim_{x \to -\sqrt{\frac{2}{5}}^-} x + \frac{5}{2}\underbrace{\sqrt{x^2 - \frac{2}{5}}}_{\downarrow\, 0} = -\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$f(x)$ non ha asintoti verticali o orizzontali

- $$\lim_{x \to \sqrt{\frac{2}{5}}^+} x + \frac{5}{2}\underbrace{\sqrt{x^2 - \frac{2}{5}}}_{\downarrow\, 0} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

- $$\lim_{x \to +\infty} x + \frac{5}{2}\sqrt{x^2 - \frac{2}{5}} = +\infty + \infty = +\infty$$

- Eventuale esistenza di asintoti obliqui:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \frac{5}{2}\sqrt{x^2 - \frac{2}{5}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{5}{2}\frac{\sqrt{x^2 - 2/5}}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{5}{2}\frac{\cancel{x}\sqrt{1-\frac{2}{5x^2}}}{\cancel{x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{5}{2}\sqrt{1 - \frac{2}{5x^2}} = 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$$ $\Rightarrow$ esiste un asintoto obliquo $y = mx + q$ per $x \to +\infty$ dove $m = \frac{7}{2}$

Formula per trovare q:

$$q = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to +\infty} x + \frac{5}{2}\sqrt{x^2 - \frac{2}{5}} - \frac{7}{2}x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}\sqrt{x^2 - \frac{2}{5}} \Rightarrow \text{F.I. } -\infty + \infty$$ (con lo stesso ragionamento usato per calcolare $\lim_{x \to -\infty} f(x)$)

$= 0$ quindi $q = 0$

$$\boxed{\Rightarrow y = \frac{7}{2}x \text{ è un asintoto obliquo per } x \to +\infty}$$

cerchiamo un asintoto obliquo per $x \to -\infty$:

moltiplico per "$-$" perchè $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x + \frac{5}{2}\sqrt{x^2 - \frac{2}{5}}}{x} = \lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{5}{2}\frac{\sqrt{x^2 - 2/5}}{x} = \lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{5}{2}\frac{(-\cancel{x})\sqrt{1 - 2/5x^2}}{\cancel{x}}$$

$$= 1 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$q = \lim_{x \to -\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to -\infty} x + \frac{5}{2}\sqrt{x^2 - \frac{2}{5}} + \frac{3}{2}x = \lim_{x \to -\infty} \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}\sqrt{x^2 - \frac{2}{5}} \text{ F.I. } -\infty + \infty$$

$= 0$ (sempre con lo stesso ragionamento)

$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{3}{2}x \quad \text{e' un asintoto obliquo per } x \to -\infty}$

$\odot \; f'(x) = 1 + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{2}{5}\right)^{-1/2} \cdot 2x\right) = 1 + \frac{5}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2 - 2/5}} = \frac{2\sqrt{x^2-2/5} + 5x}{2\sqrt{x^2-2/5}}$

$f'(x) = 0 \iff 2\sqrt{x^2-2/5} + 5x = 0 \iff 2\sqrt{x^2-2/5} = -5x \iff$

$4\left(x^2 - \frac{2}{5}\right) = 25x^2 \qquad 4x^2 - \frac{8}{5} = 25x^2 \qquad 21x^2 + \frac{8}{5} = 0$ MAI

$f'(x) \neq 0 \; \forall x \in D \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ non ha massimi e minimi in } D}$

Inoltre $f'(x) < 0$ per $x < -\sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow \boxed{\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{5}}\right) \text{ intervallo di decrescenza}}$

$f'(x) > 0$ per $x > \sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow \boxed{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}, +\infty\right) \text{ intervallo di crescenza}}$

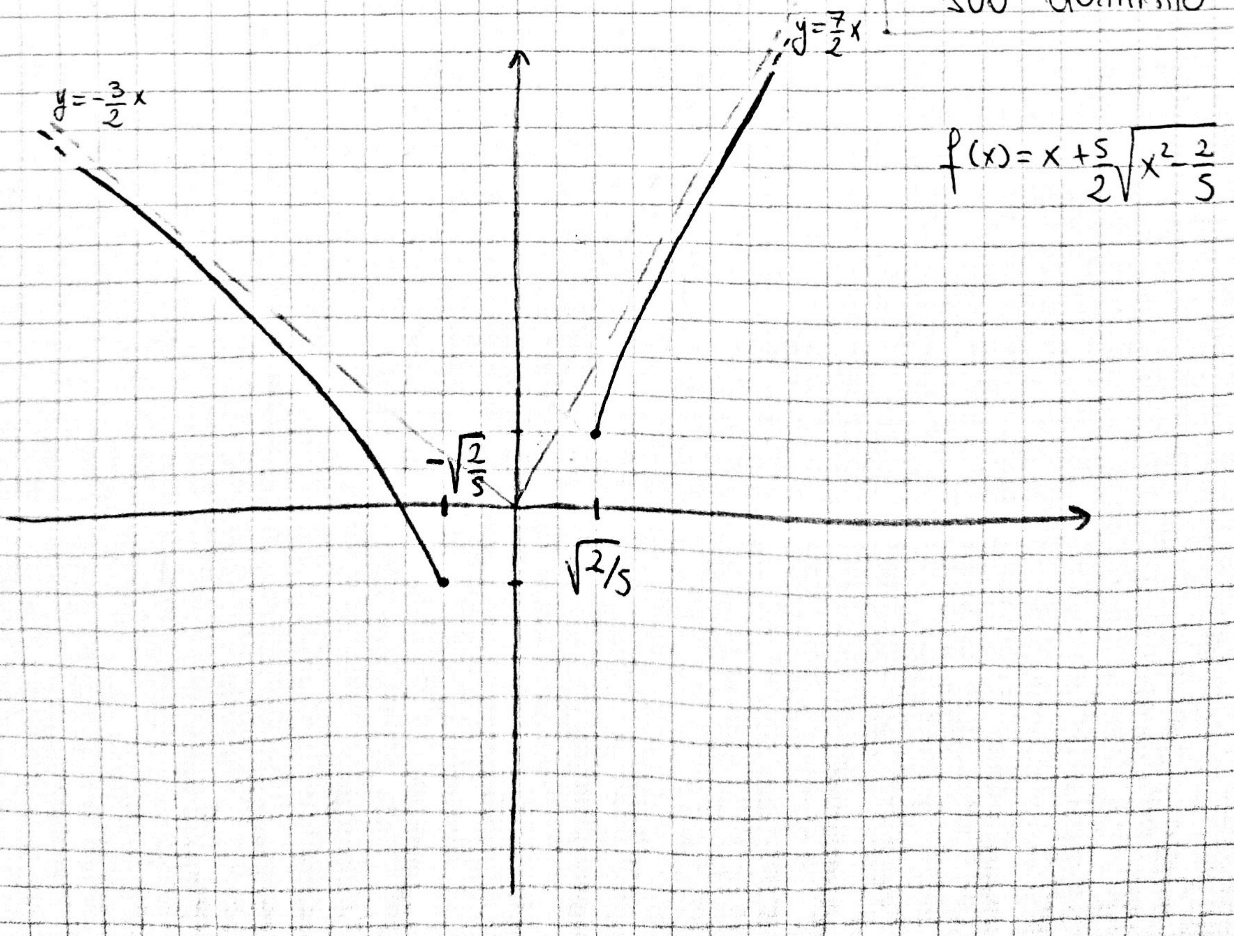
$\odot \; f''(x) = \frac{d}{dx}\left(1 + \frac{5}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2-2/5}}\right) = \frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{x^2-2/5} - x\left(\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{2}{5}\right)^{-1/2} \cdot 2x\right)}{x^2 - 2/5}\right) =$

$= \frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{x^2-2/5} - x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-2/5}}\right)}{x^2-2/5}\right) = \frac{5}{2}\left(\frac{\cancel{x^2} - 2/5 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-2/5}}\right) \cdot \frac{1}{x^2-2/5} =$

$= 5/2 \cdot \frac{(-2/5)}{(x^2-2/5)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2-2/5)^{3/2}}$

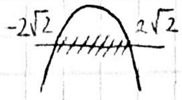
$\Rightarrow \boxed{f''(x) < 0 \; \forall x \in D \quad f(x) \text{ e' } \cancel{\text{decrescente}} \text{ concava nel suo dominio}}$

$\odot$ Grafico:



$$f(x) = \frac{\sqrt{8-x^2}}{x}$$

DOMINIO: $\begin{cases} 8 - x^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \rightarrow$ eq. $8 - x^2 = 0 \qquad x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$



$-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$

$$\boxed{D = [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}] - \{0\}}$$

$$\lim_{x \to -2\sqrt{2}^+} \frac{\sqrt{8-x^2}}{x} = 0^- \qquad \lim_{x \to 2\sqrt{2}^-} \frac{\sqrt{8-x^2}}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{8-x^2}}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{8-x^2}}{x} = +\infty$$

$\Rightarrow$ $\boxed{x = 0 \text{ è un asintoto verticale}}$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}(8-x^2)^{-1/2}(-2x)\right)x - \sqrt{8-x^2}}{x^2} = \left(\frac{-x^2}{\sqrt{8-x^2}} - \sqrt{8-x^2}\right)\frac{1}{x^2} =$$

$$= \left(\frac{-x^2 - (8-x^2)}{\sqrt{8-x^2}}\right)\frac{1}{x^2} = \left(\frac{\cancel{-x^2} - 8 \cancel{+x^2}}{\sqrt{8-x^2}}\right)\frac{1}{x^2} = \frac{-8}{x^2\sqrt{8-x^2}}$$

Dato che il denominatore di $f'(x)$ è sempre positivo, $f'(x) < 0 \ \forall x \in D$

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} f(x) \text{ è decrescente nel suo dominio} \\ \text{e non ha punti di massimo o minimo} \end{array}}$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{-8}{x^2\sqrt{8-x^2}}\right) = -8\frac{d}{dx}\left((x^2\sqrt{8-x^2})^{-1}\right) = (-8)(-1)\left(x^2\sqrt{8-x^2}\right)^{-2} \cdot \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \cdot \frac{d}{dx}(x^2\sqrt{8-x^2}) = \frac{8}{(x^2\sqrt{8-x^2})^2} \cdot \left(2x(\sqrt{8-x^2}) + x^2\left(\frac{1}{2}(8-x^2)^{-1/2}(-2x)\right)\right) =$$

$$= \frac{8}{(x^2\sqrt{8-x^2})^2} \cdot \left(2x\sqrt{8-x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{8-x^2}}\right) = \frac{8}{(x^2\sqrt{8-x^2})^2}\left(\frac{2x(8-x^2) - x^3}{\sqrt{8-x^2}}\right) =$$

$$= \frac{8(16x - 2x^3 - x^3)}{x^4(\sqrt{8-x^2})^3} = \frac{128x - 4x^3}{\underbrace{x^4(\sqrt{8-x^2})^3}_{\text{quantità sempre positiva}}}$$

Quindi $f''(x) > 0 \iff 128x - 4x^3 > 0$

eq. $128x - 4x^3 = 0 \iff x(128 - 4x^2) = 0$

- $x = 0 \notin D$ <u>NO</u>
- $4x^2 = 128 \quad x = \pm 4\sqrt{2} \notin D$ <u>NO</u>

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ non ha punti di flesso}}$

$\overset{A}{x}(\overset{B}{128-4x^2})>0$

A) • $x>0$

B) • $128-4x^2>0 \iff -4\sqrt{2}<x<4\sqrt{2}$

		$-4\sqrt{2}$		0		$4\sqrt{2}$	
A	−		−		+		+
B	−		+		+		−
	+		−		+		−

quindi $(-2\sqrt{2}, 0)$ è un intervallo di concavità e $(0, 2\sqrt{2})$ è un intervallo di convessità

• Grafico:

$f(x) = \frac{\sqrt{8-x^2}}{x}$