24/04/2024 | LEZ 15 |

STUDIO DELLA CLASSE COMPLEMENTO

DEF CLASSI COMPLEMENTO

- $COP = \{L : L^c \in P\} = P$
- $COSPACE = \{L : L^c \in PSPACE\} = PSPACE$
- $CONP = \{L : L^c \in NP\} = NP$?

A DIFF. DI P, PSPACE, ETC., NON VIENE DATA UNA MISURA DELLA DECIDI DEI LING.

$CONP \overset{?}{=} NP$

SI POTREBBE FARE COME IN P=COP ?

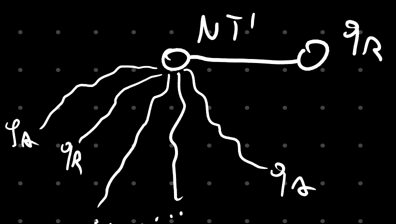
SAPPIAMO CHE, SE:

- $L \in NP \Rightarrow \exists NT, K : \forall x \in L \; [NT(x) = q_A \land nTime(NT, x) \in O(|x|^k)$
  $\forall x \notin L \; [NT(x) \neq q_A]$.

- ORA CONSIDERO UNA 2° MACCHINA, NT', TALE CHE:

$NT' = NT \cup \{\langle q_0, 0, 0, q_R, F\rangle, \langle q_0, 1, 1, q_R, F\rangle, \langle q_0, \square, \square, q_R, F\rangle\}$

CIOÈ, USANDO COME ESEMPIO UN ALBERO DI NT'



$\Rightarrow$ RAMO IN + RISPETTO A NT, DOVE VA SUBITO IN q_R.

NT' ACC. L ? SI
- $\rightarrow$ SE $x \in L \rightarrow NT'(x)$ ACC (= QUINT. DI NT)
- $\rightarrow$ SE $x \notin L \rightarrow NT'(x)$ NON ACC. (// // //).

- QUINDI, SE PRENDIAMO, $\overline{NT}'$, t.c.

$\overline{NT}' = NT'$ CON q_A e q_R INVERTITI :

$\overline{NT}'$ ACC. L^c ? :

- $\forall x \in L^c \Rightarrow NT(x) = q_A$ PER LE QUINTUPLE ADD.
- $\forall x \notin L^c \Rightarrow NT(x) = q_A$ // // // //

QUINDI $\overline{NT}'$ NON ACCETTA L^c

ALLORA $NP \neq CONP$? ANCHE QUI NON LO SAPPIAMO!

È LA 2° CONGETTURA SULLO STUDIO DELLA COMPLESSITÀ!

CONGETTURE PRINCIPALI

① $P \neq NP$

② $NP \neq CONP$

quete due congetture non sono completamente indipendenti

SONO LEGATI DA UN TEOREMA:

TEOREMA:

$$\boxed{\text{IF } NP \neq CONP \Rightarrow P \neq NP}$$

$A \rightarrow B$

$\neg A \vee B$

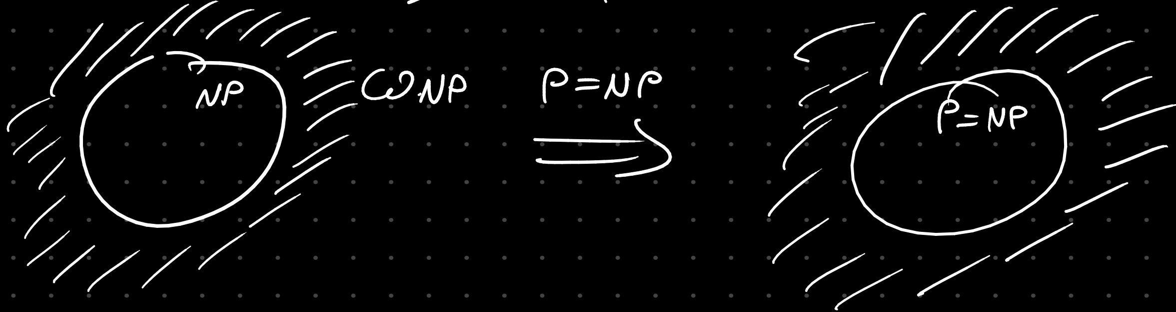
$B \vee \neg A$

$\neg B \rightarrow \neg A$

COME SI DIMOSTRA? DIMOSTRO L'IMPLICAZIONE INVERSA

DIM

- SE $P = NP \Rightarrow COP = CONP$



- MA NOI SAPPIAMO ANCHE CHE $P = COP$

QUINDI

$NP = P = COP = CONP$

ANCHE QUI, È VERA IN TEORIA, IN PRATICA:

① NON SAPPIAMO SE $P = NP \vee P \neq NP$

$\Downarrow$ DI CONSEGUENZA

② " " " $NP = CONP \vee NP \neq CONP$

VEDIAMO, ANCHE TRA NP e CONP, LA POSSIBILE $\exists$

DI <u>LINGUAGGI SEPARATORI</u>

DI BASE, SAPPIAMO CHE:

- NP CHIUSA RISPETTO A $\leq$

DA QUI, POSSIAMO DIM. CHE:

- <u>CONP È CHIUSA RISPETTO A $\leq$</u>

DIM

POICHÉ NP è CHIUSA RISPETTO A $\leq$;

$-\forall L_1 \in NP, \forall L : L \leq_H L_1 [L \in NP]$:

CIOÈ $\exists\ f \in NP : \forall x \in \{0,1\}^* [x \in L \Leftrightarrow f(x) \in L_1] =$

$= [x \notin L \Leftrightarrow f(x) \notin L_1] =$

$= [x \in L^c \Leftrightarrow f(x) \in L_1^c]$

ALLORA

$-\forall L_1^c \in CONP, \forall L^c : L^c \leq L_1^c [L_1^c \in CONP]$ $\blacksquare$

X LA COMPLETEZZA:

L È CONP-COMPLETO SE:

1. $L \in CONP$
2. $\forall L' \in CONP [L' \leq L]$

X AFFERMARE CHE L SIA CONP-COMPLETO, USIAMO

(1) 2 TEOREMI

$L \in NPC$ = L È NP-COMPLETO

<u>TEOREMA</u>

$$\boxed{L \in NPC \Leftrightarrow L^c \in CONPC.}$$

DIM

1° PARTE $(\Rightarrow)$

SIA $L \in NPC$:

TUT. CALC.

- $L \in NP$
- $\forall L_1 \in NP\ [L_1 \leq L] \Rightarrow \exists f \in FP\ V: \forall x \in \{0,1\}^* [x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \notin L]$

APPLICANDO LO STESSO CONCETTO DI CONP CHIUSO

- $\forall L_1^c \in CONP\ [L_1^c \leq L^c]$

$\hookrightarrow L^c \in CONPC$

2° PARTE ($\Leftarrow$)

SIA $L^c \in CONPC$

QUINDI:

- $L^c \in CONPC$
- $\forall L_0^c \in CONPC\ [L_0^c \leq L^c]$

LA STESSA COSA DI PRIMA, MA CON I LINGUAGGI "INVERTITI" (L^c(SOPRA) $= L$, VICEVERSA)

$\blacksquare$

② TEOREMA

SIA $L \in NPC$:

$L \in CONP \Rightarrow NP = CONP$

DIM

- $L \in NP$
- $\forall L' \in NP\ [L' \leq L]$

$\Big]\ L \in NPC$

MA $L \in CONP$ e $\Rightarrow \forall L' : L' \leq L\ [L' \in NP]$

QUINDI $NP \subseteq CONP$

INCLUSIONE INVERSA

SE $L \in coNP \Rightarrow L^c \in NP$

POICHÉ $L \in NPC \Rightarrow L^c \in coNPC$.

$\Rightarrow \forall L_1^c \in coNP [L_1^c \leq L^c]$

MA $L^c \in NP$ e NP CHIUSA

$\Rightarrow \forall L_1^c \in coNP [L_1^c \in NP]$.

QUINDI $\underbrace{coNP \subseteq NP}$.