28/03/2024

PROGRAMMAZ. DINAMICA: PARTE 3

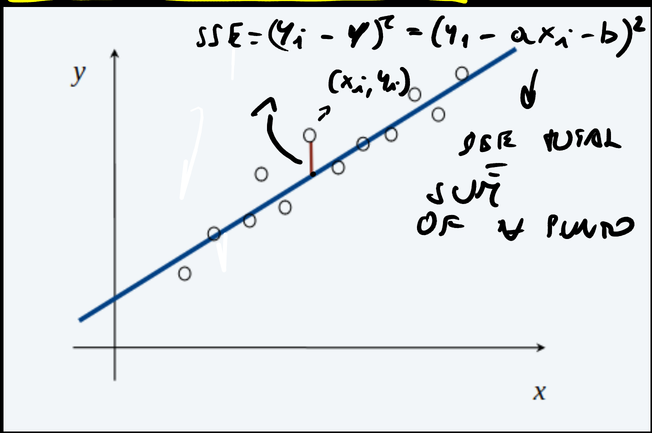
ARGO. OGGI: ALTRI 2 PROBL. DI P.D.

→ • STATISTICA PR.
• PR U COMPLEX FORMULATION

1° PROBL.: SEGMENTED LEAST SQUARE

"PROB. BASE"

LEAST SQUARES



- INPUT: n PUNTI GRAFICO (con coordinate $(x_i; y_i)$).
- OUTPUT: • RETTA $y = mx + b$
  • SSE (SUM OF SQUARE ERROR) ↳ DA MINIMIZZARE

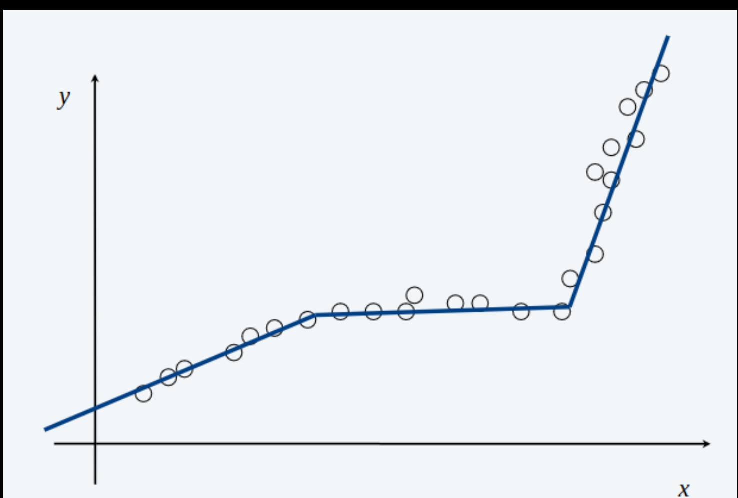
Solution. Calculus ⇒ min error is achieved when

(*)

$$a = \frac{n\sum_i x_i y_i - (\sum_i x_i)(\sum_i y_i)}{n\sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2}, \quad b = \frac{\sum_i y_i - a\sum_i x_i}{n}$$

PROBL. OF LEZIONE

SEGMENTED LEAST SQUARE



INPUT → = A L. SQUARE MA "NON LINEARE"

OUTPUT → SERIE DI LINEE CHE MINIMIZZA F(x). MA CHE È?

F(x) GOAL

$F(x) = E + cL$

- $E = \sum$ OF SSE DI $\forall$ LINEA → MISURA DI PRECISIONE ?
- L = NUM. LINEE → MISURA DI PARSIMONIA

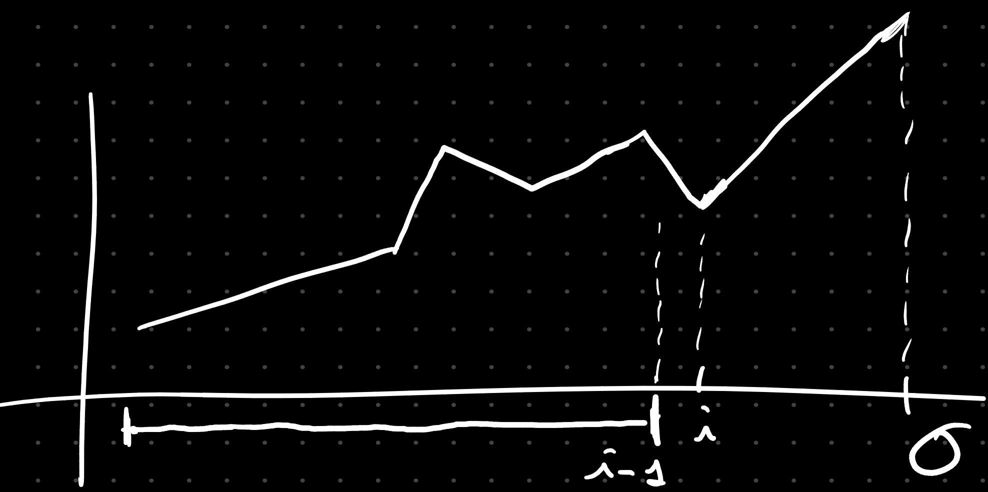
PROJECT ALGO

OPT = OPT(i) + OPT(i-1)

(SSE OF SEGM. i's ; SOL. SOTTO PROBL. DA 1 a i-1.)

DEF SOTTOPROBLEMI

SIA ESSO UNA OPT, e SIA i - σ "UNA RETTA".



COME × ALTRI PROBLEMI:

$OPT = SSU(i, \sigma) + OPT(i-1)$

- $SSU(i, \sigma)$ → SOL. TRA $i - \sigma$
- $OPT(i-1)$ → SOL. PUNTI PRIMA → DIM. EXCHANGE ARG. (W.L.L.).

DETTO CIÒ, USANDO I SEGUENTI STRUMENTI .....

- $OPT(J)$ = MIN. COST FOR $P_1, \dots, P_J$
- e_{iJ} = SSU OF $P_i, \dots, P_J$

COME CALCOLO OPT(j)?

- P e_{ij} ⇝ "ULTIMO" SEGMENTO OF SOL. PER UN $i \le j$
- COSTO TOT = $e_{ij} + c + OPT(i-1)$

EQ. BELLMAN ⇝ EQ. x DEF. RELAZIONI TRA OPT

$$OPT(j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ \min_{1 \le i \le j} \{ e_{ij} + c + OPT(i-1) \} & j > 0 \end{cases}$$

CODE!

SEGMENTED-LEAST-SQUARES($n, p_1, \ldots, p_n, c$)

FOR j = 1 TO n
  FOR i = 1 TO j ⇝ CALCOLO TUTTI I POSSIBILI e_{ij} (*)
    Compute the SSE e_{ij} for the points $p_i, p_{i+1}, \ldots, p_j$.

$M[0] \leftarrow 0$.
FOR $j = 1$ TO n
  $M[j] \leftarrow \min_{1 \le i \le j} \{ e_{ij} + c + M[i-1] \}$. (previously computed value)

RETURN $M[n]$. ⇝ goal = OPT(n)

CALCOLO e_{ij} $\forall i,j$ c.c. $i \le j$ ⇝ OCCUPA $O(n^2)$

COSTO!!

TIME ⇝ $O(n^3)$

SPACE ⇝ $O(n^2)$

TIME,

WHY $O(n^3)$? ⇝ ☆ , x CALCOLO e_{ij} = $O(n)$ ☆

↓

IMPROVE!

- $\forall i$, MI RICAVO PRIMA LE 4 Σ CUMULATIVE:

$$\sum_{k=1}^{i} x_k \quad \sum_{k=1}^{i} y_k \quad \sum_{k=1}^{i} x_k^2 \quad \sum_{k=1}^{i} x_k y_k$$

] ∅ RICALCOLO TUTTO BUT ADD AD i

- CALCOLO e_{ij} = $O(1)$ ⇝ CON QUESTO TRICK HO GIÀ TUTTO PRONTO X CALCOLARE IL VALORE

2° PROBL: KNAPSACK PROBLEM

DESCRIZIONE

- ZAINO CON W = LIM. PESO
- OGGETTI CON → P = PESO, V = VALORE → V e 3 ∈ N

SOLUZIONE

- SUBSET OBJ. DOVE → Σ PESI ≤ W
  → Σ VALORI + ↑ POSSIBLE

IDEA ALGO

IDEA "FALSA"

- DEF. SOTTO PROBLEMI

  - OPT[i] = VAL. OTTIMO X FIRST i OGG.
  - GOAL = OPT[n]

- RELAZIONE TRA SUBPROBLEM

  SIA OPT(i):

  - OPT(i) $\not\Leftrightarrow$ CHOOSE i:
    ~ OPT(i-1) = OPT(i) SUBSTRUCTURE OPT (EXCHANGE ARG.)
  - // CHOOSE i:
    ~ BENE, MA POI? NON HO INFO SU COSA POSSO SCARTARE SUBITO E COSA NO.
    ~ E SE $\not\Leftrightarrow$ SAPPIAMO COSA SONO GLI ALTRI OGG., NON SAPPIAMO NEANCHE SE C'È SPAZIO X i

SOL. MIGLIORE

- OPT(i,w) = VAL. OTT. U PRIMI i OGG U LIMITE w.
- GOAL: OPT(n,W)

RELAZIONI SUBPROB:

- CASO OPT(i,w) $\not\Leftrightarrow$ CHOOSE i:
  ~ OPT(i-1,w) = OPT(i,w)

- CASO OPT(i, w) CHOOSE i:

$$\sim OPT(i,w) = OPT(i-1, w-w_i) + V_i$$

EQ. BELLMAN

$$OPT(i,w) = \begin{cases} 0 & i=0 \\ OPT(i-1,w) & w_i > w \\ \max\{OPT(i-1,w), OPT(i-1,w-w_i)+V_i\} & \text{ELSE} \end{cases}$$

CODE

```
KNAPSACK(n, W, w1, ..., wn, v1, ..., vn)

FOR w = 0 TO W                                   MATRIX M W -> 1° RIGA ALL 0
   M[0, w] ← 0.

FOR i = 1 TO n                                   previously computed values
   FOR w = 0 TO W
      IF (wi > w)  M[i, w] ← M[i−1, w].
      ELSE         M[i, w] ← max { M[i−1, w], vi + M[i−1, w−wi] }.

RETURN M[n, W].
```

] CREO MATRICE

QUESTO PERMETTE ANCHE DI "CREARE LA SOLUZIONE",

- INFATTI OPT(i, w) PRENDE i SE:

$$M[i,w] > M[i-1,w] \rightarrow \text{POS. } i-1 = M[i-1, w-w_i]$$

- IF NOT: SCORRO IN ALTO.

COSTO

- $O(1)$ x ACC. MATRIX
- $\Theta(nW)$ CREATION MATRIX
- $\Theta(nW)$ SPAZIO OCCUPATO

QUINDI

TIME = $\Theta(nW)$

SPACE = $\Theta(nW)$

N.B.

$O(nW)$ NON È POLINOMIALE, MA

PSEUDO-POLINOMIALE → POL. NEL VALORE DI INPUT E NON NELLA SUA SIZE.