PROGRAMMAZIONE LINEARE (CONTINUA)

Un problema di programmazione lineare si può scrivere nella forma
$\min/\max f(x) = c^T x$
$s.v.$
$x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$
Dove:
- $f(x)$ è la funzione obbiettivo, che esplicita l criterio di valutazione di una soluzione;
- c^T sono le variabili esogene (dette parametri o dati), ossia variabili incontrollabili;
- x sono le variabili endogene (dette variabili di decisione), ossia variabili controllabili;
- X sono i vincoli del problema (o regione ammissibile), ossia i legami esistenti tra le variabili di decisione e le limitazioni.

Una soluzione che rispetti tutti i vincoli si dice "soluzione ammissibile", e l'insieme delle soluzioni ammissibili è detta "regione ammissibile". Una soluzione si dice "ottima" se è una soluzione ammissibile e, sia x^* la soluzione ottima:
- $\forall x \in X, c^T x^* \geq c^T x$ (problema di massimo);
- $\forall x \in X, c^T x^* \leq c^T x$ (problema di minimo).

Si dice il problema è ammissibile se esiste una soluzione ammissibile. Se esiste una soluzione ottima, si dice che il problema ammette ottimo. Il problema si dice inammissibile se la regione ammissibile è vuota ($X = \emptyset$). Il problema si dice illimitato se:
- $\forall a > 0, \exists x \in X, c^T x^* > a$ (problema di massimo);
- $\forall a > 0, \exists x \in X, c^T x^* < a$ (problema di minimo).

FORMA STANDARD

Un problema di programmazione lineare si dice in forma standard se ha forma
$\min/\max f(x) = c^T x$
$s.v.$
$Ax = b$
$x \geq 0$
Dove:
- A è la matrice dei coefficienti delle incognite dei vincoli;
- b è il vettore dei termini noti dei vincoli.

Ogni problema di programmazione lineare è equivalente ad un problema in forma standard (due problemi di programmazione lineare si dicono equivalenti se è possibile costruire soluzioni ammissibili per entrambi i problemi con lo stesso valore della funzione obbiettivo). In particolare:

- Sia x_i una variabile negativa (ossia $x_i \leq 0$), è possibile sostituirla con $\bar{x}_i = -x_i$ (avendo così $\bar{x}_i \geq 0$), avendo così una variabile non negativa;
- Sia x_i una variabile libera (ossia $x_i \in \mathbb{R}$), è possibile sostituirla con $\bar{x}_i = x_i^+ - x_i^-$ (avendo così $x_i^+ \geq 0, x_i^- \geq 0$), avendo così due variabili non negative;
- Sia $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b$ uno dei vincoli del problema, è possibile sostituirlo con $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + s_i = b$, dove s_i è una variabile di slack ($s_i \geq 0$);
- Sia $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b$ uno dei vincoli del problema, è possibile sostituirlo con $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - s_i = b$, dove s_i è una variabile di surplus ($s_i \geq 0$);

FORMA CANONICA

Sia un problema di programmazione lineare
$\min/\max f(x) = c^T x$
$s.v.$

$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Con $A \in M_{n,m}, rg(A) = m$ e $m \leq n$, sia $B := \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ un insieme di indici di base a cui corrispondono le colonne $A_{b_1}, A_{b_2}, \dots, A_{b_m}$ della matrice di A linearmente indipendenti. Definisco $A_B := \left[A_{b_1}\ A_{b_2}\ \dots\ A_{b_m}\right], A_B \in M_{m.m}$ la sottomatrice quadrata non singolare, e definisco $A_N \in M_{m,(n-m)}$ la sottomatrice formata dalle colonne di A fuori dalla base. Allora la matrice A è scrivibile come $A := [A_B\ A_N]$. Definisco in modo analogo $x := \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$, con $x_B \in \mathbb{R}^m$ variabili in base e $x_N \in \mathbb{R}^n$ variabili non in base. Allora $Ax = b$ è riscrivibile come $[A_B\ A_N]\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \rightarrow A_B x_B + A_N x_N = b$, da cui $x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N$. Quindi un generico x è esprimibile come $x := \begin{bmatrix} A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N \\ x_n \end{bmatrix} \geq 0$. Un problema scritto in questa forma è detto in forma canonica. Sia $\bar{x}$ una soluzione del problema tale che $\bar{x}_N = 0$, e quindi $\bar{x}_B = A_B^{-1}b$, essa si dice soluzione di base; $\bar{x}_B = A_B^{-1}b \geq 0$, ossia $\bar{x} \geq 0$, essa prende il nome di soluzione di base ammissibile (SBA). Una SBA si dice degenere se il vettore $A_B^{-1}b$ ha una o più componenti nulle. Il numero di SBA è finito ed è al più pari alle possibili scelte di m colonne differenti sulle n disponibili della matrice A, ossia

$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Un dettaglio importante da definire su un problema in forma canonica è che è possibile scrivere $c \coloneqq \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix}$ rispetto a $x \coloneqq \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$, e quindi $f(x) = [c_B \; c_N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = c_B^T x_B + c_N^T x_n$

ALGORITMO DEL SIMPLESSO (PROBLEMA DI MINIMO)

Sia un problema di programmazione lineare in forma canonica
$\min f(x) = c_B^T x_B + c_N^T x_N$
$s.v.$

$A_B x_B + A_N x_N = b$
$x \geq 0$

E la SBA $\bar{x} = \overline{x_B} = A_B^{-1} b$ rispetto alla base $B \coloneqq \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, allora si possono verificare i seguenti tre casi:

- $\forall k \in [1, n] | k \notin B, c_k \geq 0$, e quindi la SBA $\bar{x}$ è soluzione ottima per il problema;
- $\exists k \in [1, n] | k \notin B, c_k < 0 \wedge A_k \leq 0$, allora il problema è illimitato inferiormente;
- $\exists k \in [1, n] | k \notin B, c_k < 0 \wedge \exists h \in [1, m]: a_{hk} \geq 0$.

Nel terzo caso si ha quindi che esiste un'altra SBA $\bar{x}^*$ rispetto alla base $B \coloneqq \{b_1, b_2, \ldots, b_{h-1}, b_k, b_{h+1}, \ldots, b_m\}$, ossia sostituendo l'indice b_h con l'indice b_k, dove $h = \underset{\mathrm{i} \in [1,\mathrm{m}]}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} : a_{ik} > 0 \right\}$. La varabile x_{b_h} si dice variabile uscente, mentre la variabile x_{b_k} si dice variabile entrante, inoltre le SBA $\bar{x}$ e $\bar{x}^*$ si dicono adiacenti tra loro, giacché i corrispondenti B e B^* differiscono tra loro tra loro di un solo elemento. Trovata la nuova SBA $\bar{x}^*$, è necessario verificare se si verifica uno dei tre casi con la nuova SBA, e ripetere il procedimento nel caso in cui si riverifichi il terzo caso.

ALGORITMO DEL SIMPLESSO (PROBLEMA DI MASSIMO)

Sia un problema di programmazione lineare in forma canonica
$\min f(x) = c_B^T x_B + c_N^T x_N$
$s.v.$

$A_B x_B + A_N x_N = b$
$x \geq 0$

E la SBA $\bar{x} = \bar{x}_B = A_B^{-1} b$ rispetto alla base $B \coloneqq \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, allora si possono verificare i seguenti tre casi:

- $\forall k \in [1, n] | k \notin B, c_k \leq 0$, e quindi la SBA $\bar{x}$ è soluzione ottima per il problema;
- $\exists k \in [1, n] | k \notin B, c_k > 0 \wedge A_k \leq 0$, allora il problema è illimitato inferiormente;
- $\exists k \in [1, n] | k \notin B, c_k > 0 \wedge \exists h \in [1, m]: a_{hk} \geq 0$.

Nel terzo caso si ha quindi che esiste un'altra SBA $\bar{x}^*$ rispetto alla base $B \coloneqq \{b_1, b_2, \dots, b_{h-1}, b_k, b_{h+1}, \dots, b_m\}$, ossia sostituendo l'indice b_h con l'indice b_k, dove $h = \underset{\mathrm{i} \in [1,\mathrm{m}]}{\operatorname{argmin}} \left\{\frac{b_i}{a_{ik}} : a_{ik} > 0\right\}$. La varabile x_{b_h} si dice variabile uscente, mentre la variabile x_{b_k} si dice variabile entrante, inoltre le SBA $\bar{x}$ e $\bar{x}^*$ si dicono adiacenti tra loro, giacché i corrispondenti B e B^* differiscono tra loro tra loro di un solo elemento. Trovata la nuova SBA $\bar{x}^*$, è necessario verificare se si verifica uno dei tre casi con la nuova SBA, e ripetere il procedimento nel caso in cui si riverifichi il terzo caso.

METODO DEL SIMPLESSO IN DUE FASI (O CON VARIABILI ARTIFICIALI)

Sia un problema di programmazione lineare

$\min/\max f(x) = c^T x$

$s.v.$

$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Tale che non esiste un insieme di indici di base ammissibile iniziale, e tale che $b \geq 0$, definiamo un nuovo problema artificiale

$\min \rho(x, \phi) = e^T \phi$

$s.v.$

$$Ax + \phi = b$$
$$x \geq 0, \phi \geq 0$$

Dove $e \in \mathbb{R}^m, e^T \coloneqq [1\ 1 \dots 1]$. È immediato verificare che il problema artificiale ammette sempre soluzione ottima. Infatti, non può essere inammissibile in quanto esiste almeno la soluzione ammissibile $\begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$ e non può essere illimitato inferiormente in quanto la funzione obiettivo non può assumere negativo. Inoltre, condizione necessaria e sufficiente affinché un problema di programmazione lineare in forma standard sia ammissibile è che sia nullo il valore ottimo della funzione obiettivo del problema artificiale associato al problema.

TEORIA DELLA DUALITÀ

Si consideri un problema di programmazione lineare in forma standard e si supponga di voler "stimare" il valore ottimo senza risolvere esplicitamente il problema. Una stima per eccesso di f^* (estremo superiore) si può determinare considerando il valore di funzione obiettivo $\bar{f}$ in corrispondenza di una qualsiasi soluzione ammissibile $\bar{x}$ del problema. Risulta infatti evidente che, per qualsiasi soluzione ammissibile $\bar{x}$, si ha che $f^* \geq \bar{f}$. Determinare una stima per difetto di f^* (estremo inferiore) è, invece, decisamente più complicato, giacché occorrerebbe dimostrare che non esistono soluzioni ammissibili del problema di costo inferiore rispetto al valore stimato. A tale scopo è di notevole aiuto l'utilizzo del problema duale. In particolare, dato un problema di programmazione lineare in forma standard, detto primale

$$\min/\max f(x) = c^T x$$

$$s.v.$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Ogni soluzione ammissibile di $\bar{x}$ del problema primale è tale che $c^T \bar{x} \geq b^T \bar{y}$, dove $\bar{y}$ è una qualsiasi soluzione ammissibile del seguente problema di programmazione lineare, detto duale

$$\max/\min g(y) = b^T y$$

$$s.v.$$

$$A^T y \leq c$$

$$y \in \mathbb{R}$$

Entrambi i problemi definiscono la cosiddetta coppia primale-duale. L'insieme delle proprietà di simmetria nella coppia primale-duale viene espresso attraverso le seguenti regole generali:

- Ad un vincolo di disuguaglianza nel primale corrisponde una variabile vincolata in segno nel duale;
- Ad un vincolo di uguaglianza nel primale corrisponde una variabile libera in segno nel duale;
- Ad una variabile vincolata in segno nel primale corrisponde un vincolo di disuguaglianza nel duale;
- Ad una variabile libera in segno nel primale corrisponde un vincolo di uguaglianza nel duale;
- Se la funzione obiettivo del primale è in forma di minimo, la funzione obiettivo del duale è in forma di massimo e viceversa.

Esempio:

PRIMALE

$\max f(x) = 6x_1 + 8x_2 + 4x_3$

$s.v.$

$y_1)\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10$

$y_2)\ 3x_1 + 5x_2 = 15$

$y_3)\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 20$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \in \mathbb{R}$

DUALE

$\min g(y) = 10y_1 + 15y_2 + 20y_3$

$s.v.$

$x_1)\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 6$

$x_2)\ y_1 + 5y_2 + 2y_3 \geq 8$

$x_3)\ 2y_1 + 4y_3 = 4$

$y_1 \geq 0, y_2 \in \mathbb{R}, y_3 \leq 0$

Data la coppia primale-duale di un problema di programmazione lineare, è vera esattamente una delle seguenti affermazioni:

- I problemi primale e duale ammettono soluzioni ottime finite, rispettivamente x^* e y^*, tali che $c^T x^* = b^T y^*$;
- Il problema primale è illimitato inferiormente e il problema duale è inammissibile;
- Il problema primale è illimitato superiormente e il problema duale è inammissibile;
- I problemi primale e duale sono entrambi inammissibili.

TEOREMA DELL'ORTOGONALITÀ

Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile del problema primale

$\min/\max f(x) = c^T x$

$s.v.$

$Ax = b$

$x \geq 0$

E sia $\bar{y}$ una soluzione ammissibile del problema duale associato

$\max/\min g(y) = b^T y$

$s.v.$

$A^T y \leq c$

$y \in \mathbb{R}$

Allora $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime per i rispettivi problemi se e solo se soddisfano le seguenti condizioni di ortogonalità:

$$\begin{cases} (c - A^T\bar{y})\bar{x} = 0 \\ \bar{y}(A\bar{x} - b) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{x} * s_D = 0 \\ \bar{y} * s_P = 0 \end{cases}$$

ALGORITMO PRIMALE-DUALE

Sia dato un problema di programmazione lineare
$\min/\max f(x) = c^T x$
$s.v.$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$
E si voglia cercare una sua possibile soluzione ottima $\bar{x}$, l'algoritmo primale-duale permette di ricercarla e verificare se essa sia effettivamente soluzione ottima. Questo algoritmo si sviluppa in 3 passi:

1. Si applica il teorema dell'ortogonalità, con l'utilizzo della soluzione ottima $\bar{x}$ per il problema duale: si cercano tutti i vincoli i quali sono saturati tramite le variabili s_D (tali vincoli con questa caratteristica permettono di porre la corrispettiva $\bar{x}_i \geq 0$);
2. Sia $\bar{x}_R$ la possibile soluzione ottima costruita tramite i vincoli dell'ortogonalità $\left(\bar{x}_{R_i} = \begin{cases} \geq 0 \; se \; c - A^T\bar{y} = 0 \\ = 0 \; se \; c - A^T\bar{y} \neq 0 \end{cases}\right)$, è possibile considerare il problema primale ristretto relativo
   $\min/\max f(x) = c^T x_R$
   $s.v.$
   $$Ax_R = b$$
   $$x_R \geq 0$$
   Tramite il quale è possibile calcolare il valore effettivo della soluzione ottima $\bar{x}_R = \bar{x}$. È possibile dire che questa $\bar{x}$ è soluzione ottima se e solo se $f(\bar{x}) = 0$;
3. Nel caso in cui $f(\bar{x}) \neq 0$, è possibile calcolare una nuova $\bar{y} = \bar{y} + \pi * \theta$ (la quale deve essere ammissibile per il problema duale), dove π è la soluzione ottima del problema duale del primale ristretto associato, mentre $\theta = \min_{j:\pi^T A_j > 0} \left\{\frac{c_j - \bar{y}^T A_j}{\pi^T A_j}\right\}$ (il rapporto minino tra il prodotto della matrice A^T per π e le variabili di slack del duale associate, con condizione che il prodotto della matrice A^T per π sia maggiore o uguale a 0).

Inoltre, questo algoritmo è applicabile per la verifica di una soluzione ottima per un problema di programmazione lineare. In questo caso, l'algoritmo prevede solo 2 passi:

1. Si applica il teorema dell'ortogonalità, con l'utilizzo della soluzione ottima $\bar{x}$ per il problema primale: si cercano i valori di $\bar{y}_i$ che devono essere uguali a 0 per saturare i vincoli, i valori di $\bar{y}_i \geq 0$ e i vincoli che generano condizioni di complementarità;
2. Si calcola la soluzione $\bar{y}$ tramite l'utilizzo dei valori $\bar{y}_i = 0$ e dei vincoli che generano condizioni di complementarità, e si verifica se essa sia accettabile, ossia se rispetta i vincoli di dominio e i vincoli duali.