Soluzioni foglio 8

1) $f(x,y) = 4y^4 - 16x^2y + x$ $\qquad f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f_x(x,y) = -32xy + 1$

$f_y(x,y) = 16y^3 - 16x^2$

punti critici: $\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} -32xy+1=0 \\ 16y^3-16x^2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 32xy = 1 \\ '' \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{32y} \quad (y \neq 0) \\ \cancel{16}y^3 - \frac{1}{(32)^2y^2} \cdot \cancel{16} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} '' \\ y^3 - \frac{1}{(32)^2y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} '' \\ \frac{(32)^2y^5 - 1}{(32)^2y^2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} '' \\ (32)^2y^5 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} '' \\ y^5 = \frac{1}{(32)^2} \end{cases} \quad \begin{cases} '' \\ y^5 = \frac{1}{(2^5)^2} = \frac{1}{2^{10}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4/32 \\ y = 1/4 \end{cases} \qquad \Rightarrow (4/32, 1/4) \text{ è un punto critico}$$

- $f_{xx}(x,y) = -32y$ $\quad$ • $f_{xy}(x,y) = -32x$ $\quad$ • $f_{yx}(x,y) = -32x$ $\quad$ $f_{yy}(x,y) = 48y^2$

$$M_f(x,y) = \begin{pmatrix} -32y & -32x \\ -32x & 48y^2 \end{pmatrix} \qquad \text{quindi } M_f(4/32, 1/4) = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det M_f(4/32, 1/4) = -24 - 16 = -40 < 0$$

$\Rightarrow (4/32, 1/4)$ è un punto di sella

Essendo $f(x,y)$ illimitata in $\mathbb{R}^2$, per esempio $\lim_{(x,y)\to(+\infty,a)} f(x,y) = -\infty \quad \forall a \geq 0$, essa non ammette massimi e minimi.

2) $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - \frac{9}{5}xy$ ($m = 9$ - Settembre)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

punti critici: $\nabla f(x,y) = (0,0)$

$f_x(x,y) = x^2 - \frac{9}{5}y \qquad f_y(x,y) = y^2 - \frac{9}{5}x$

$$\begin{cases} x^2 - 9/5\, y = 0 \\ y^2 - 9/5\, x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{5}{9}x^2 \\ \frac{25}{81}x^4 - \frac{9}{5}x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} '' \\ x\left(25/81\, x^3 - 9/5\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ \frac{25}{81}x^3 - 9/5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} '' \\ 25/81\, x^3 = 9/5 \end{cases} \quad \begin{cases} '' \\ x^3 = 9^3/5^3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{5}{9} \cdot \frac{9^2}{5^2} = \frac{9}{5} \\ x = 9/5 \end{cases}$$

punti critici
$P = (0,0) \quad Q = (9/5, 9/5)$

$f_{xx}(x,y) = 2x \qquad f_{xy}(x,y) = -9/5 = f_{yx}(x,y) \qquad f_{yy}(x,y) = 2y$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -9/5 \\ -9/5 & 2y \end{pmatrix}$$

- $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -9/5 \\ -9/5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det = -9^2/5^2 < 0$
  $\Rightarrow (0,0)$ è un punto di sella

- $H_f(9/5, 9/5) = \begin{pmatrix} 18/5 & -9/5 \\ -9/5 & 18/5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det = \frac{18^2}{5^2} - \frac{9^2}{5^2} > 0 \Rightarrow (9/5, 9/5)$ è un punto di <u>minimo relativo</u> perchè il determinante è > 0 e il primo elemento di $H_f(\cdot,\cdot)$ è ~~negativo~~ positivo $\left(+\frac{18}{5}\right)$

$\Rightarrow f(x,y)$ non ammette punti di massimo e minimo assoluti perchè è illimitata sia superiormente che inferiormente ma ammette un punto di minimo relativo in $P = (9/5, 9/5)$

3) $f(x,y) = e^{x^2-y^2-x+2y}$ in $R=[0,1]\times[0,1]$ $\quad f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$

• in $\mathring{R} = R \setminus \partial R$:

$f_x = (2x-1)e^{x^2-y^2-x+2y}$

$f_y = (-2y+2)e^{x^2-y^2-x+2y}$

$\Rightarrow$ (x,y) è un punto critico $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}(2x-1)e^{x^2-y^2-x+2y}=0\\(-2y+2)e^{x^2-y^2-x+2y}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x-1=0\\-2y+2=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=1/2\\y=1\end{cases}$ $\Rightarrow$ punto critico: $\left(\frac{1}{2},1\right)$

(perchè $\exp \neq 0$ sempre)

• $f_{xx}(x,y) = 2e^{x^2-y^2-x+2y} + (2x-1)(2x-1)e^{x^2-y^2-x+2y}$

$= (2+(2x-1)^2)e^{x^2-y^2-x+2y}$

• $f_{xy}(x,y) = (2x-1)(-2y+2)e^{x^2-y^2-x+2y} = f_{yx}(x,y)$

• $f_{yy}(x,y) = ((-2y+2)^2-2)e^{x^2-y^2-x+2y}$

$\Rightarrow$ Calcoliamole in $(1/2, 1)$:

$f_{xx}(1/2,1) = (2+(1-1)^2)e^{1/4-1-1/2+2} = 2e^{3/4}$

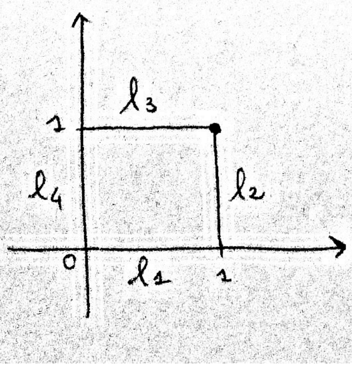
$f_{xy}(1/2,1) = f_{yx}(1/2,1) = (1-1)(-2+2)e^{3/4} = 0$

$f_{yy}(1/2,1) = ((-2+2)^2-2)e^{3/4} = -2e^{3/4}$

$\Rightarrow M_f\left(\frac{1}{2},1\right) = \begin{pmatrix}2e^{3/4} & 0\\ 0 & -2e^{3/4}\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \det = -4e^{3/2} < 0$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2},1\right)$ è un punto di sella

• in ∂R:



l_1: $y=0$ $\quad x\in[0,1]$

l_2: $x=1$ $\quad y\in[0,1]$

l_3: $y=1$ $\quad x\in[0,1]$

l_4: $x=0$ $\quad y\in[0,1]$

$\cdot f|_{l_1}$: $f(x) = e^{x^2-x} = e^{x(x-1)}$ $\quad x \in [0,1]$

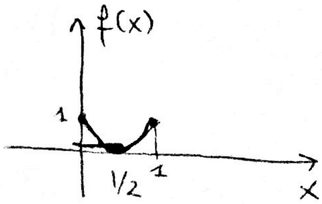
$(y=0)$ $\rightarrow$ troviamo il massimo/min per $x \in [0,1]$:

$$\frac{d}{dx} e^{x(x-1)} = (2x-1)e^{x^2-x} = 0 \iff x = \frac{1}{2}$$

$x = \frac{1}{2}$ è un punto di minimo per $f(x)$

$\Rightarrow (1/2, 0)$ è un punto in l_1 di minimo per $f(x,0)$

mentre per $x=0$ e $x=1$, $f(x)$ è massima:



$\Rightarrow$ Quindi in l_1 abbiamo:

$(1/2, 0) \rightarrow f(1/2, 0) = e^{-1/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$

$(0, 0) \rightarrow f(0, 0) = 1$

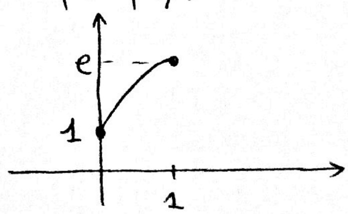
$(1, 0) \rightarrow f(1, 0) = 1$

$\cdot f|_{l_2}$: $f(y) = e^{-y^2+2y}$ $\quad y \in [0,1]$

$(x=1)$

$$\frac{d}{dy}\left(e^{-y^2+2y}\right) = (-2y+2)e^{-y^2+2y} = 0 \iff y = 1$$

$y=1$ è un punto di massimo per $f(y)$



$f(y)$ ha max per $y=1$ e min per $y=0$

$\Rightarrow$ in l_2: $(1,1) \rightarrow f(1,1) = e$

$(1,0) \rightarrow f(1,0) = 1$

$\cdot f|_{l_3}$: $f(x) = e^{x^2-x+1}$ $\quad x \in [0,1]$

$(y=1)$

$$\frac{d}{dx} e^{x^2-x+1} = (2x-1)e^{x^2-x+1} = 0 \iff x = \frac{1}{2}$$

$x = \frac{1}{2}$ è un punto di minimo per $f(x)$

$f(x)$ ha max per $x=0$ e $x=1$, min per $x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ in l_2: $(0,1) \rightarrow f(0,1) = e$

$(1,1) \rightarrow f(1,1) = e$

$(1/2, 1) \rightarrow f(1/2, 1) = e^{3/4}$

$\cdot f|_{l_4}$: $f(y) = e^{-y^2+2y}$ $\quad y \in [0,1]$

$(x=0)$ $\longrightarrow$ uguale a l_2 ✓

Ora confrontiamo i valori assunti da $f(x,y)$ nei punti trovati e otteniamo che:

- f assume valore max quando $f = e$, nei punti $(1,1), (0,1)$
- f assume valore min quando $f = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ in $(1/2, 0)$

Dato che in $\mathring{R}$ f non ha punti di max/min relativi, questi sono anche i punti di max/min. assoluti.

6) $f(x,y) = 7x^2 - 2x^3y + 13y^2 - 5$ $\quad$ in $P(1,1,13)$

π: $z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

quindi $f_x(x,y) = 14x - 6x^2y \longrightarrow f_x(1,1) = 14 - 6 = 8$

$f_y(x,y) = -2x^3 + 26y \longrightarrow f_y(1,1) = 24$

π: $z - 13 = 8(x-1) + 24(y-1)$

$z = 8x + 24y - 19$

7) $f(x,y) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 3y^3$ $\quad$ in $P(2,-2,24)$

$f_x(x,y) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ $\quad$ $f_y(x,y) = -9y^2$

$\downarrow$

$f_x(2,-2) = -\frac{\pi}{2}$ $\quad$ $f_y(\cancel{2},-2) = -36$

π: $z - 24 = -\frac{\pi}{2}(x-2) - 36(y+2)$

$z = -\frac{\pi}{2}x + \pi - 36y - 72 + 24$

$z = -\frac{\pi}{2}x - 36y + \pi - 48$

8) $11xy + z^2 - 7 = 0$ in $P = (3, 0, \sqrt{7})$

$f_x(x,y,z) = 11y \xrightarrow[\text{in }P]{} f_x = 0$ $\quad f_y(x,y,z) = 11x \xrightarrow[\text{in }P]{} f_y = 33$ $\quad f_z(x,y,z) = 2z \xrightarrow[\text{in }P]{} 2\sqrt{7}$

$\pi: \quad 0\cdot(x-3) + 33(y-0) + 2\sqrt{7}(z - \sqrt{7}) = 0$

$33y + 2\sqrt{7}z - 14 = 0$

(Ricorda: $\pi: f_x(P)(x-x_0) + f_y(P)(y-y_0) + f_z(P)(z-z_0) = 0$)

9) $4x^2 + 7y^2 - 10z^2 - 1 = 0$ in $P = (1, 1, 1)$

$f_x(x,y,z) = 8x \xrightarrow[\text{in }P]{} 8$ $\quad f_y(x,y,z) = 14y \xrightarrow[\text{in }P]{} 14$ $\quad f_z(x,y,z) = -20z \xrightarrow[\text{in }P]{} (-20)$

$\pi: \quad 8(x-1) + 14(y-1) - 20(z-1) = 0$

$8x + 14y - 20z - 2 = 0$

4) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ è differenziabile in $(0,0)$?

• CONTINUITÀ

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad y = mx \quad$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin\sqrt{(1+m^2)x^2}}{\sqrt{(1+m^2)x^2}} = 1$

limite notevole $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ con $t = \sqrt{(1+m^2)x^2}$

$L = 1$ è il candidato limite

$\left| \dfrac{\sin\sqrt{\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}}{\sqrt{\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}} - 1 \right| = \left| \dfrac{\sin\rho}{\rho} - 1 \right| \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$

$(\rho\cos\theta = x,\ \rho\sin\theta = y)$ $\quad$ (perché $\dfrac{\sin\rho}{\rho} \xrightarrow[\rho\to 0]{} 1$)

$\Rightarrow f(x,y)$ è continua nell'origine

Ora vogliamo verificare che:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{\sin\sqrt{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} - 1 - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \quad ☆$$

- Calcoliamo: $f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\sin|h|}{|h|} - 1}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin|h| - |h|}{h|h|} = 0$$

e per simmetria, anche $f_y(0,0) = 0$

Quindi, per la differenziabilità dobbiamo verificare se:

$$\star \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{\sin\sqrt{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} - 1}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$$\|$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sin\sqrt{h^2+k^2} - \sqrt{h^2+k^2}}{h^2+k^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t - t}{t^2} = 0$$

chiamo $t = \sqrt{h^2+k^2}$

dunque f è differenziabile in $(0,0)$.