Algoritmi e Strutture Dati

Capitolo 3
Strutture dati elementari

Gestione di collezioni di oggetti

Tipo di dato:

- Specifica una collezione di oggetti e delle operazioni di interesse su tale collezione (es. inserisci, cancella, cerca)

Struttura dati:

- Organizzazione dei dati che permette di memorizzare la collezione e supportare le operazioni di un tipo di dato usando meno risorse di calcolo possibile

Il tipo di dato Dizionario

tipo `Dizionario`:
dati:
  un insieme S di coppie $(elem, chiave)$.

operazioni:
  $\texttt{insert}(elem\ e, chiave\ k)$
    aggiunge a S una nuova coppia (e, k).

  $\texttt{delete}(chiave\ k)$
    cancella da S la coppia con chiave k.

  $\texttt{search}(chiave\ k) \rightarrow elem$
    se la chiave k è presente in S restituisce l'elemento e ad essa associato, e `null` altrimenti.

Il tipo di dato Pila

tipo `Pila`:
dati:
una sequenza S di n elementi.

operazioni:
`isEmpty()` $\rightarrow$ *result*
restituisce `true` se S è vuota, e `false` altrimenti.

`push`$(elem\ e)$
aggiunge e come ultimo elemento di S.

`pop`$() \rightarrow elem$
toglie da S l'ultimo elemento e lo restituisce.

`top`$() \rightarrow elem$
restituisce l'ultimo elemento di S (senza toglierlo da S).

Il tipo di dato Coda

tipo `Coda`:
dati:
una sequenza S di n elementi.

operazioni:
`isEmpty()` $\rightarrow$ $result$
restituisce `true` se S è vuota, e `false` altrimenti.

`enqueue(`$elem\ e$`)`
aggiunge e come ultimo elemento di S.

`dequeue()` $\rightarrow$ $elem$
toglie da S il primo elemento e lo restituisce.

`first()` $\rightarrow$ $elem$
restituisce il primo elemento di S (senza toglierlo da S).

Tecniche di rappresentazione dei dati

Rappresentazioni indicizzate:

- I dati sono contenuti (principalmente) in array

Rappresentazioni collegate:

- I dati sono contenuti in record collegati fra loro mediante puntatori

Proprietà

Rappresentazioni indicizzate:

– Array: collezione di celle numerate che contengono elementi di un tipo prestabilito

Proprietà (forte): gli indici delle celle di un array sono numeri consecutivi

Proprietà (debole): non è possibile aggiungere nuove celle ad un array

Proprietà

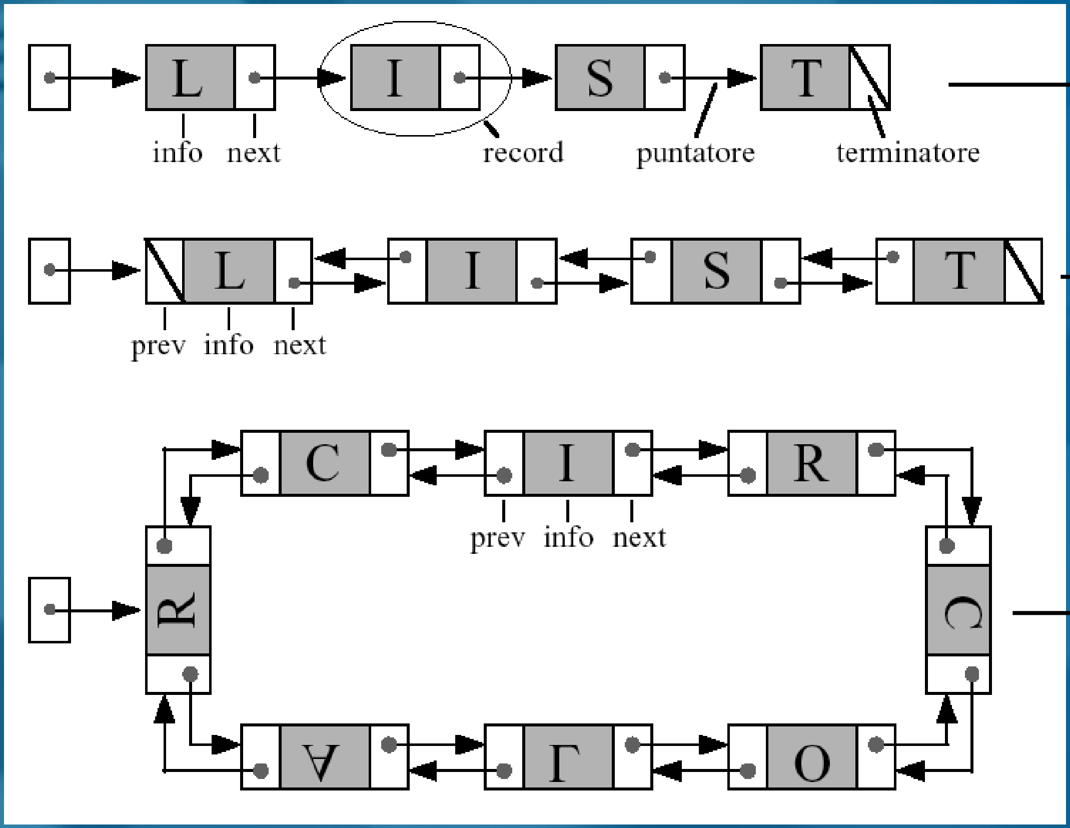
Rappresentazioni collegate:

- i costituenti di base sono i *record*
- i record sono numerati tipicamente con il loro *indirizzo di memoria*
- record creati e distrutti individualmente e dinamicamente
- il collegamento tra un record A e un record B è realizzato tramite un *puntatore*

Proprietà (forte): è possibile aggiunge o togliere record a una struttura collegata

Proprietà (debole): gli indirizzi dei record di una struttura collegata non sono necessariamente consecutivi

Esempi di strutture collegate



Lista semplice

Lista doppiamente collegata

Lista circolare doppiamente collegata

Pro e contro

Rappresentazioni indicizzate:

- **Pro**: accesso diretto ai dati mediante indici
- **Contro**: dimensione fissa (riallocazione array richiede tempo lineare)

Rappresentazioni collegate:

- **Pro**: dimensione variabile (aggiunta e rimozione record in tempo costante)
- **Contro**: accesso sequenziale ai dati

Metodo più semplice: array non ordinato (sovradimensionato)

Insert → costa $O(1)$ – inserisco dopo ultimo elemento

Search → costa $O(n)$ – devo scorrere l'array

Delete → costa $O(n)$ – delete = search + cancellazione

Array ordinato:

Search → $O(\log(n))$ – ricerca binaria

Insert → $O(n)$

Ho bisogno di:

$O(\log(n))$ confronti → per trovare la giusta posizione in cui inserire l'elemento

$O(n)$ trasferimenti → per mantenere l'array ordinato

(Ricorda che $O(n) + O(\log(n)) = O(n)$)

Delete → $O(n)$ (come per Insert)

…e con le liste?

Lista non Ordinata

Search – O(n)
Insert – O(1)
Delete - O(n)

Lista Ordinata

Search – O(n) non posso usare la ricerca binaria
Insert – O(n) devo mantenere ordinata la lista
Delete – O(n)

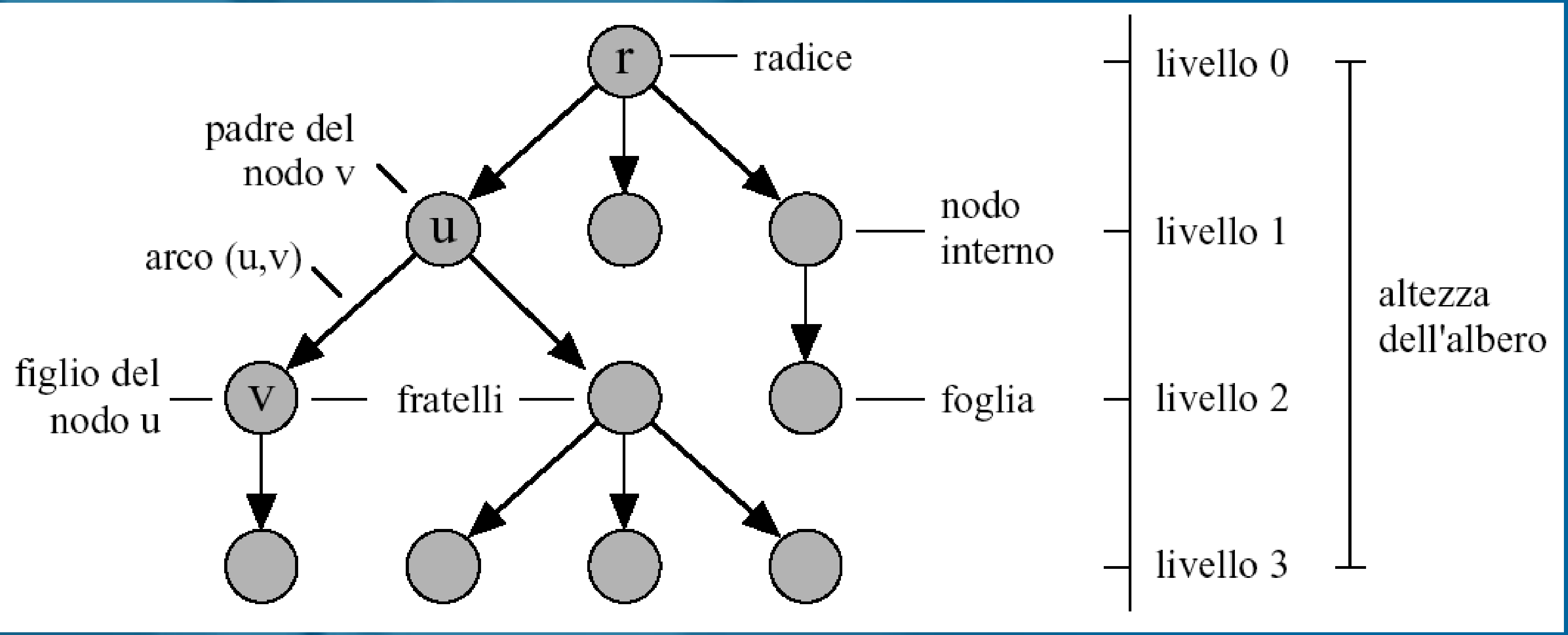
Esercizi

1. Progettare una struttura dati indicizzata che implementi il tipo di dato *Pila* e il tipo di dato *Coda*. Le operazioni devo avere complessità temporale costante.

2. Progettare una struttura dati collegata che implementi il tipo di dato *Pila* e il tipo di dato *Coda*. Le operazioni devo avere complessità temporale costante.

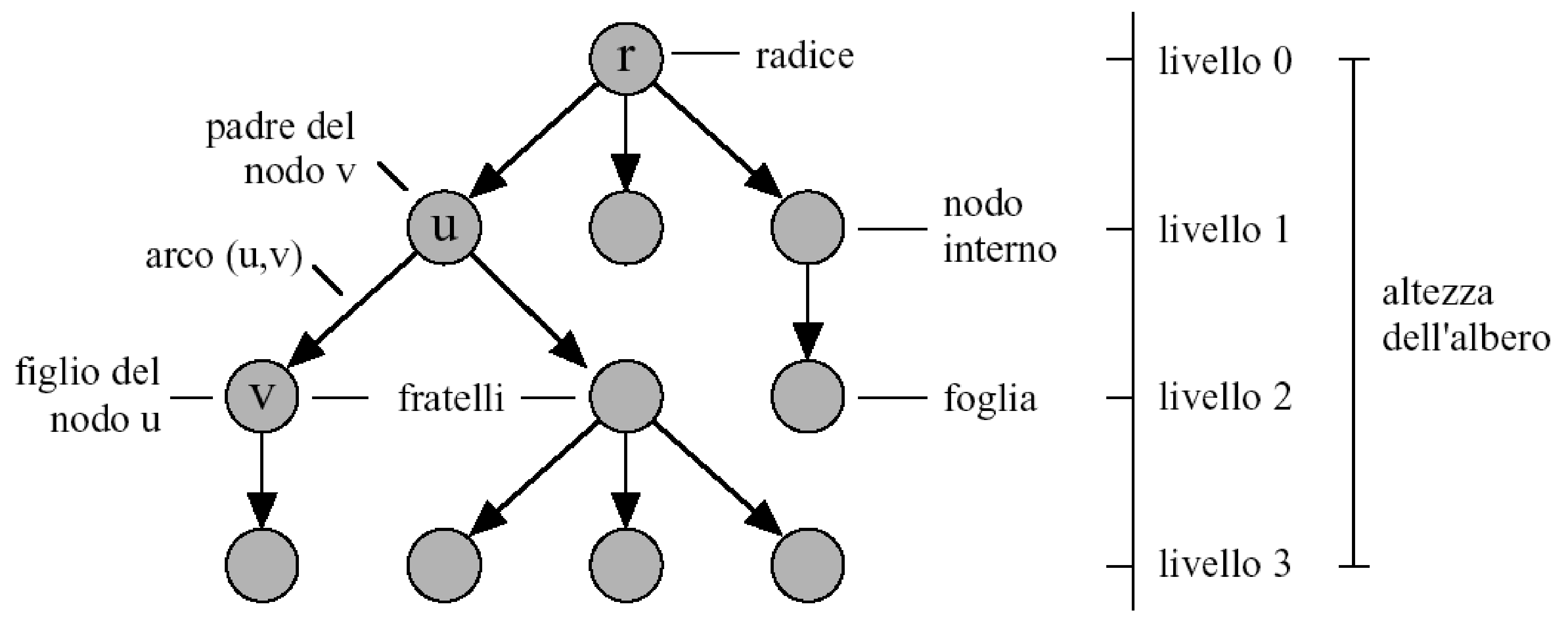
Alberi

Organizzazione gerarchica dei dati



Dati contenuti nei nodi, relazioni gerarchiche definite dagli archi che li collegano

Alberi: altre definizioni



grado di un nodo: numero dei suoi figli

albero d-ario, albero d-ario completo

u antenato di v se u è raggiungibile da v risalendo di padre in padre

v discendente di u se u è un antenato di v

Rappresentazioni indicizzate di alberi

Idea: ogni cella dell'array contiene

– le informazioni di un nodo
– eventualmente altri indici per raggiungere altri nodi

Vettore dei padri

Per un albero con n nodi uso un array P di dimensione (almeno) n

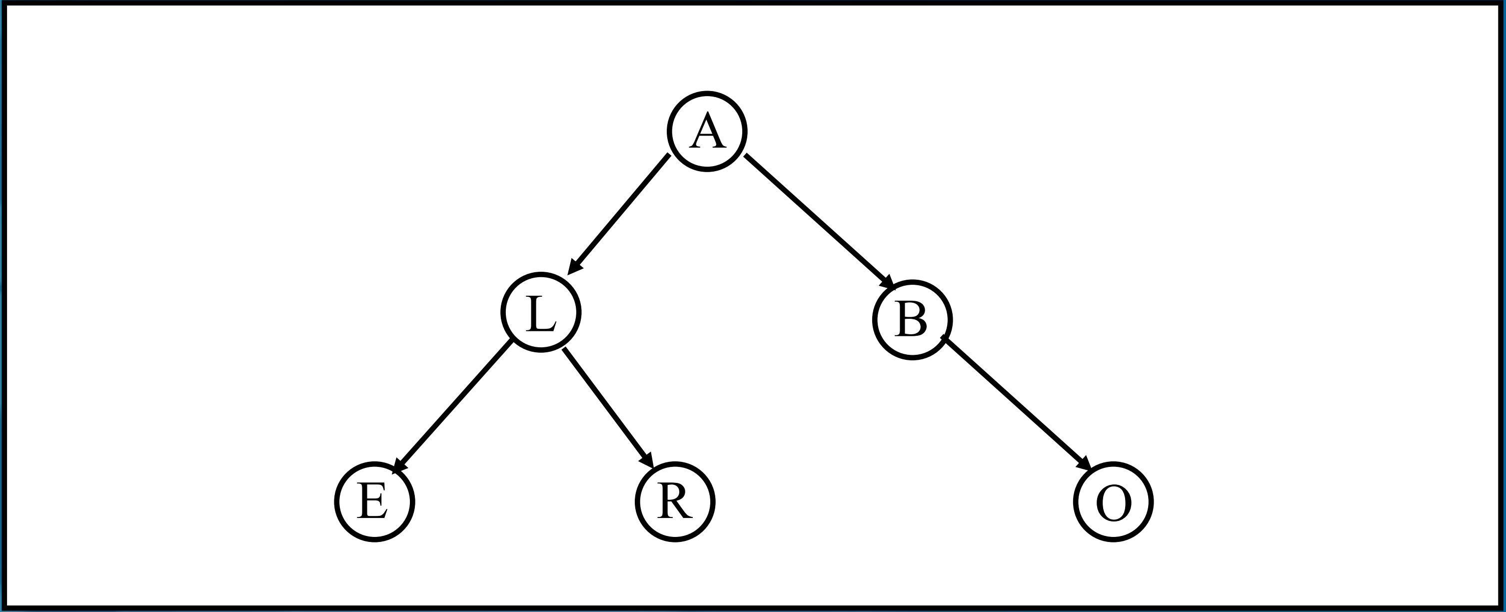
Una generica cella i contiene una coppia (info,parent), dove:

info: contenuto informativo del nodo i

parent: indice (nell'array) del nodo padre di i

Vettore posizionale (per alberi d-ari (quasi) completi)

Vettore dei padri: un esempio



P

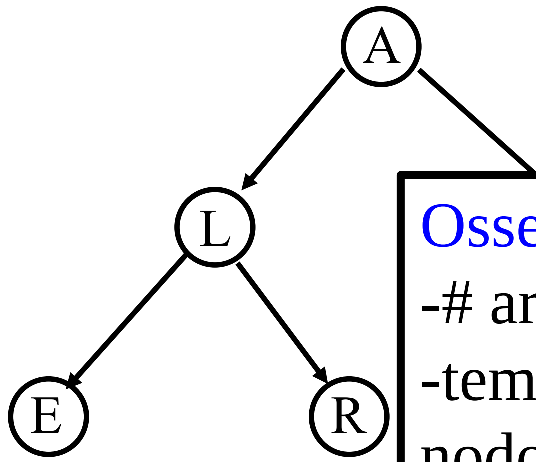
(L,3)	(B,3)	(A,null)	(O,2)	(E,1)	(R,1)
1	2	3	4	5	6

(P[*i*].*info*, P[*i*].*parent*)

P[*i*].*info*: contenuto informativo nodo

P[*i*].*parent*: indice del nodo padre

Vettore dei padri: un esempio



Osservazioni:

-# arbitrario di figli

-tempo per individuare il padre di un nodo: O(1)

-tempo per individuare uno o più figli di un nodo: O(n)

P

1	2	3	4	5	6
(L,3)	(B,3)	(A,null)	(O,2)	(E,1)	(R,1)

(P[*i*].*info*, P[*i*].*parent*)

P[*i*].*info*: contenuto informativo nodo

P[*i*].*parent*: indice del nodo padre

Vettore posizionale (per alberi d-ari (quasi) completi)

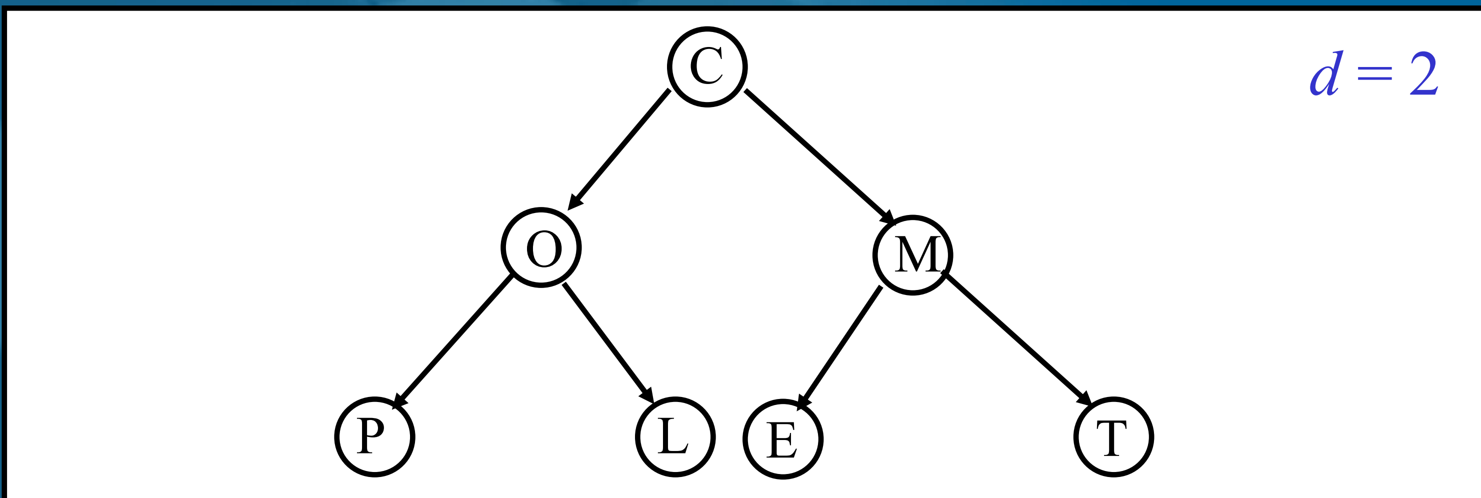
– nodi arrangiati nell'array "per livelli"

– indici a partire da 0:

- j-esimo figlio ($j \in \{1,\ldots,d\}$) di i è in posizione $d\, i + j$
- il padre di i è in posizione $\lfloor (i-1)/d \rfloor$

– indici a partire da 1:

- j-esimo figlio ($j \in \{1,\ldots,d\}$) di i è in posizione $d\,(i-1)+j+1$
- il padre di i è in posizione $\lfloor (i-2)/d \rfloor + 1$

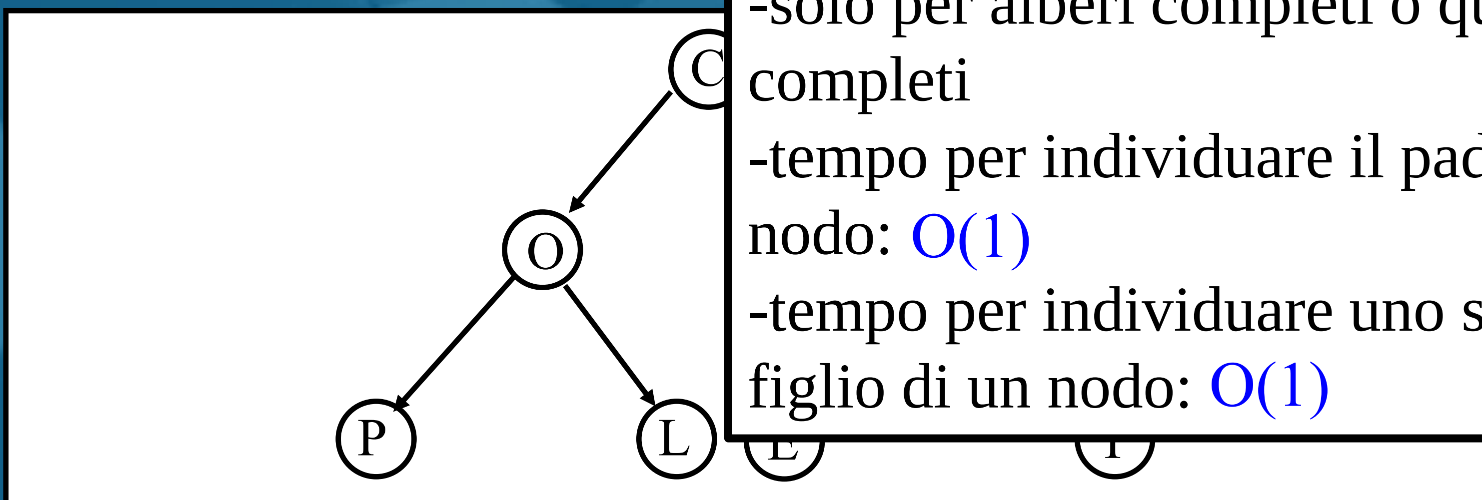


A

C	O	M	P	L	E	T
1	2	3	4	5	6	7
0	1	2	3	4	5	6

Vettore posizionale (per alberi *d*-ari (quasi) completi)

- nodi arrangiati nell'array "per livelli"
- indici a partire da 0:
  - j-esimo figlio ($j \in \{1,\ldots,d\}$) di i è in posizione $d\,i + j$
  - il padre di i è in posizione $\lfloor (i\text{-}1)/d \rfloor$
- indici a partire da 1:
  - j-esimo figlio ($j \in \{1,\ldots,d$
  - il padre di i è in posizione $\lfloor (i\text{-}2$



Osservazioni:

-# di figli esattamente *d*

-solo per alberi completi o quasi completi

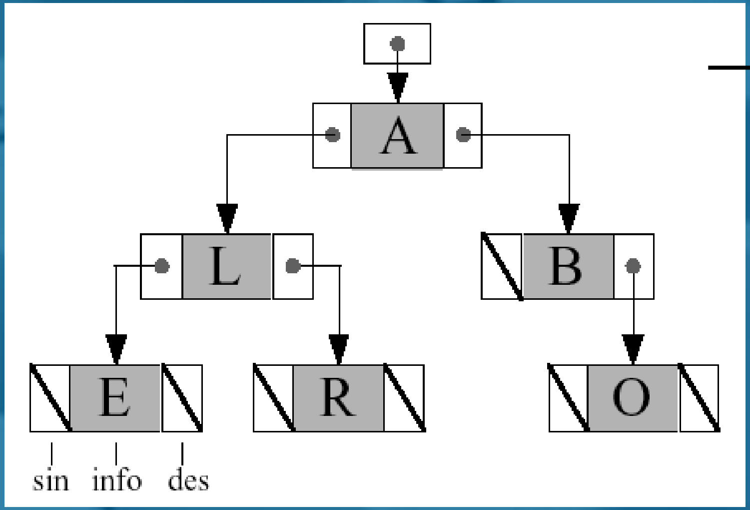
-tempo per individuare il padre di un nodo: O(1)

-tempo per individuare uno specifico figlio di un nodo: O(1)

A

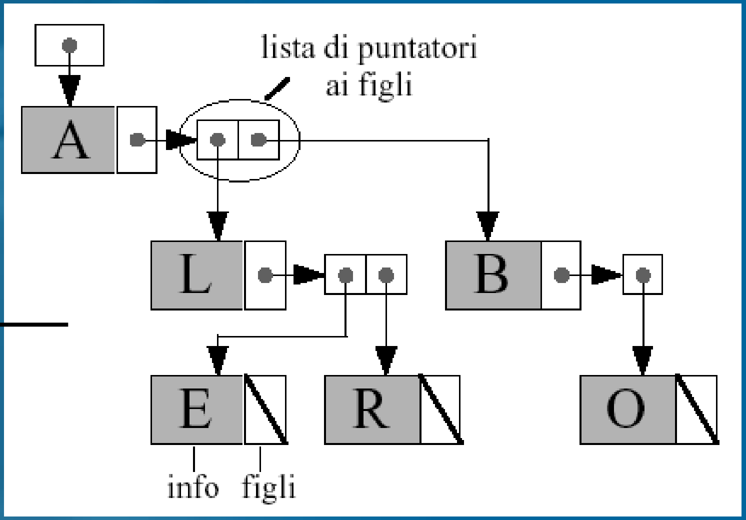
C	O	M	P	L	E	T
1	2	3	4	5	6	7
0	1	2	3	4	5	6

Rappresentazioni collegate di alberi

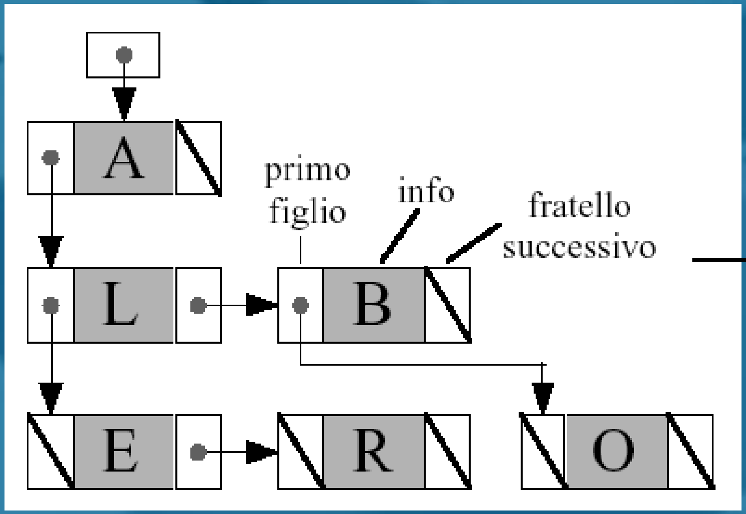


Rappresentazione con puntatori ai figli (nodi con numero limitato di figli)

Rappresentazione con liste di puntatori ai figli (nodi con numero arbitrario di figli)



Rappresentazioni collegate di alberi



Rappresentazione di tipo primo figlio-fratello successivo (nodi con numero arbitrario di figli)

Tutte le rappresentazioni viste possono essere arricchite per avere in ogni nodo anche un puntatore al padre

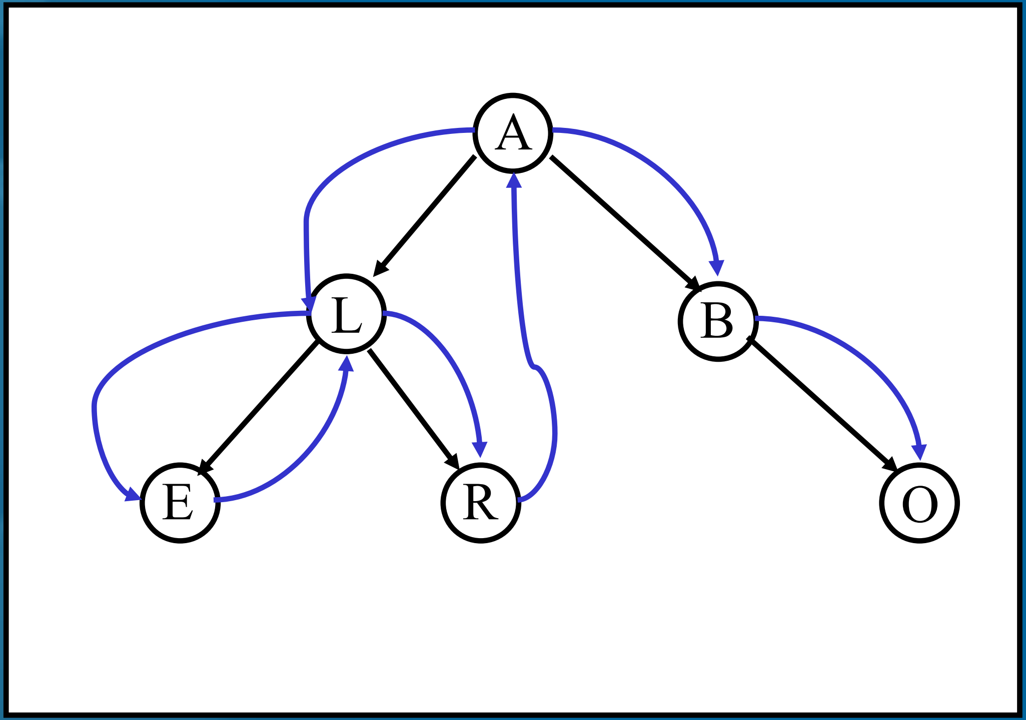
Visite di alberi

Algoritmi che consentono l'accesso sistematico ai nodi e agli archi di un albero

Gli algoritmi di visita si distinguono in base al particolare ordine di accesso ai nodi

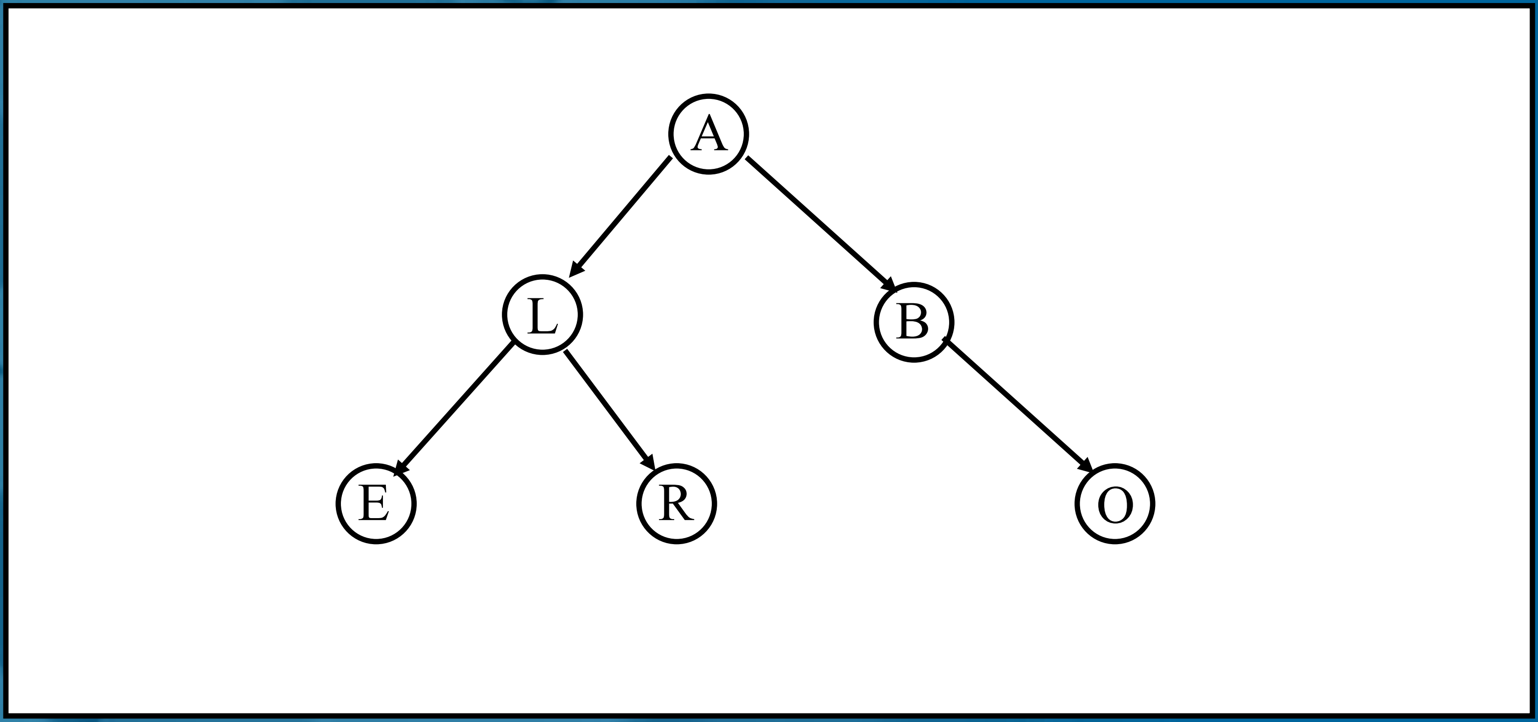
Algoritmo di visita in profondità

L'algoritmo di visita in profondità (DFS) parte da r e procede visitando nodi di figlio in figlio fino a raggiungere una foglia. Retrocede poi al primo antenato che ha ancora figli non visitati (se esiste) e ripete il procedimento a partire da uno di quei figli.

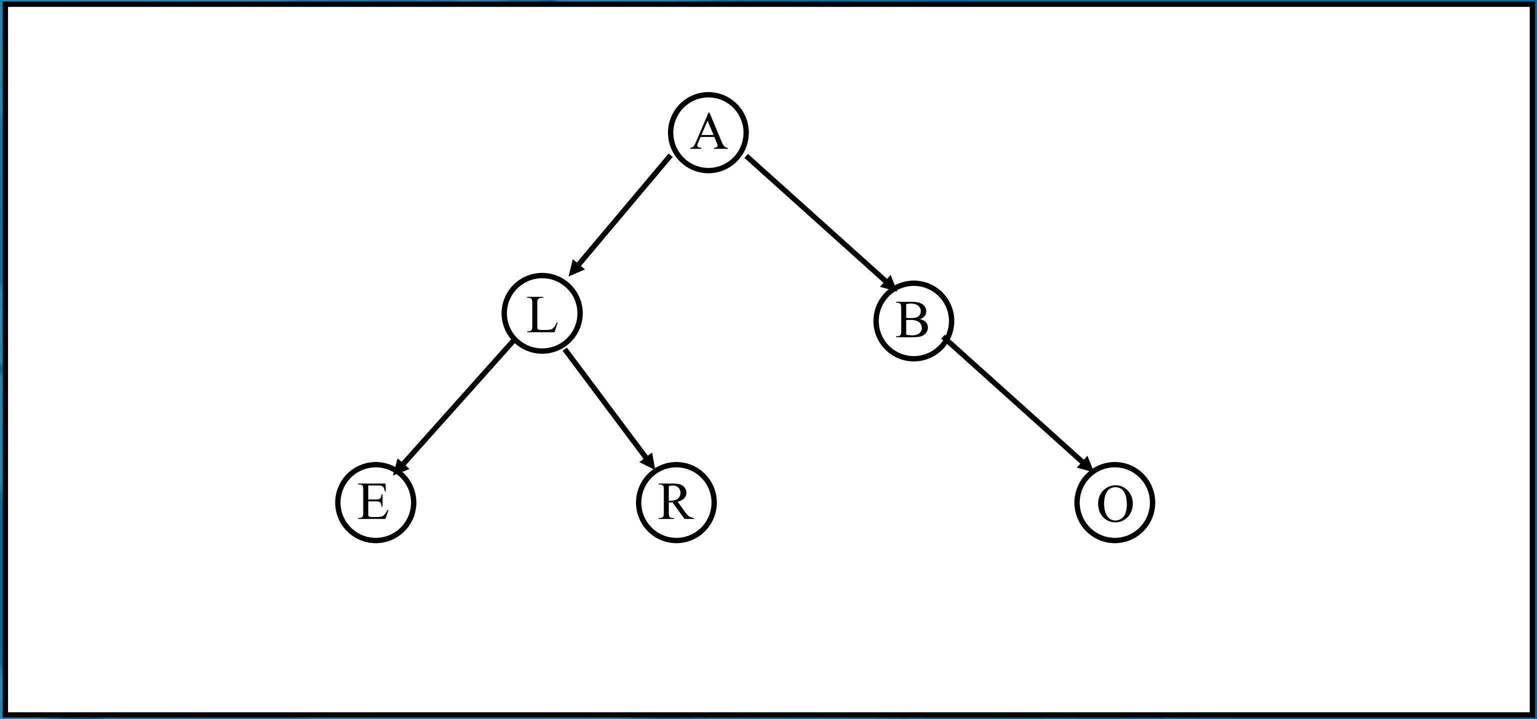


Algoritmo di visita in profondità
(per alberi binari)

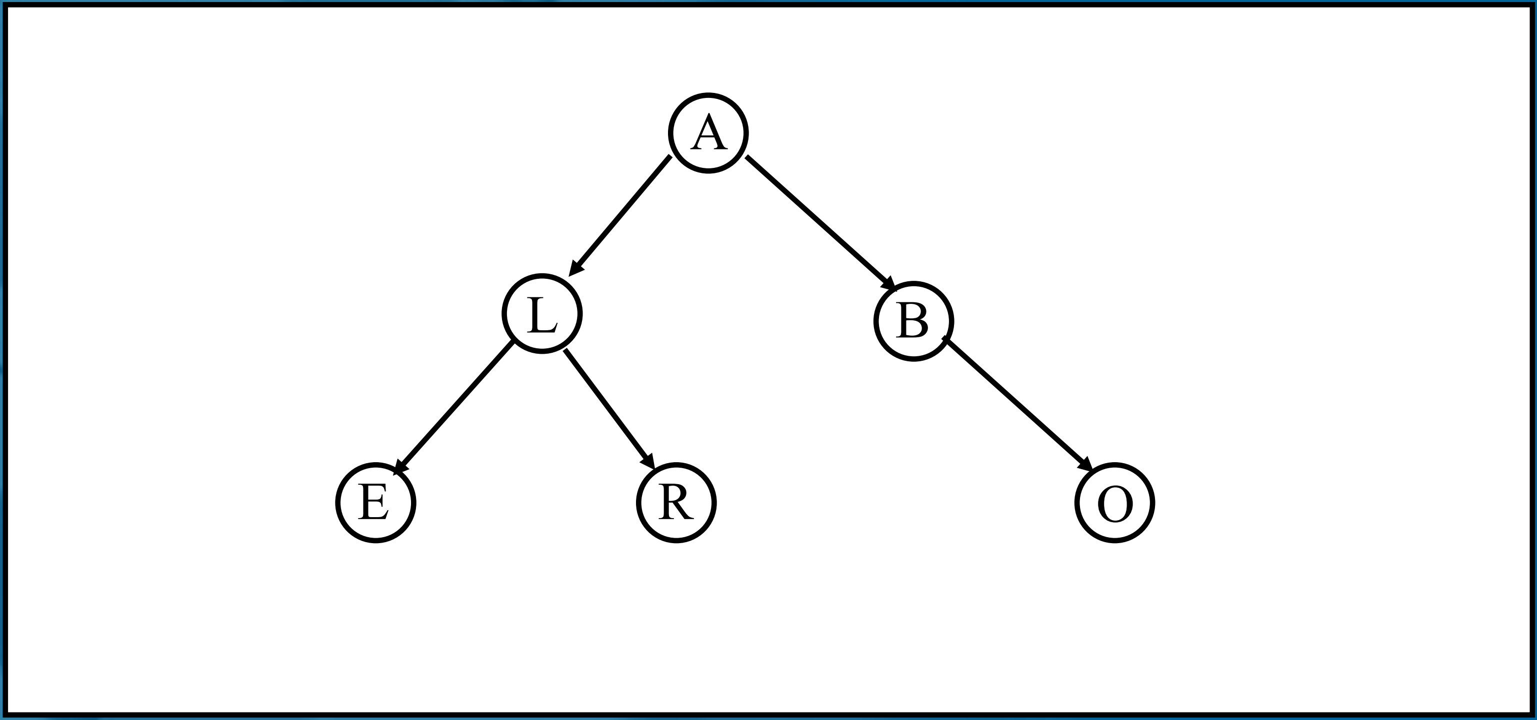
```
algoritmo visitaDFS(nodo r)
    Pila S
    S.push(r)
    while (not S.isEmpty()) do
        u ← S.pop()
        if (u ≠ null) then
            visita il nodo u
            S.push(figlio destro di u)
            S.push(figlio sinistro di u)
```



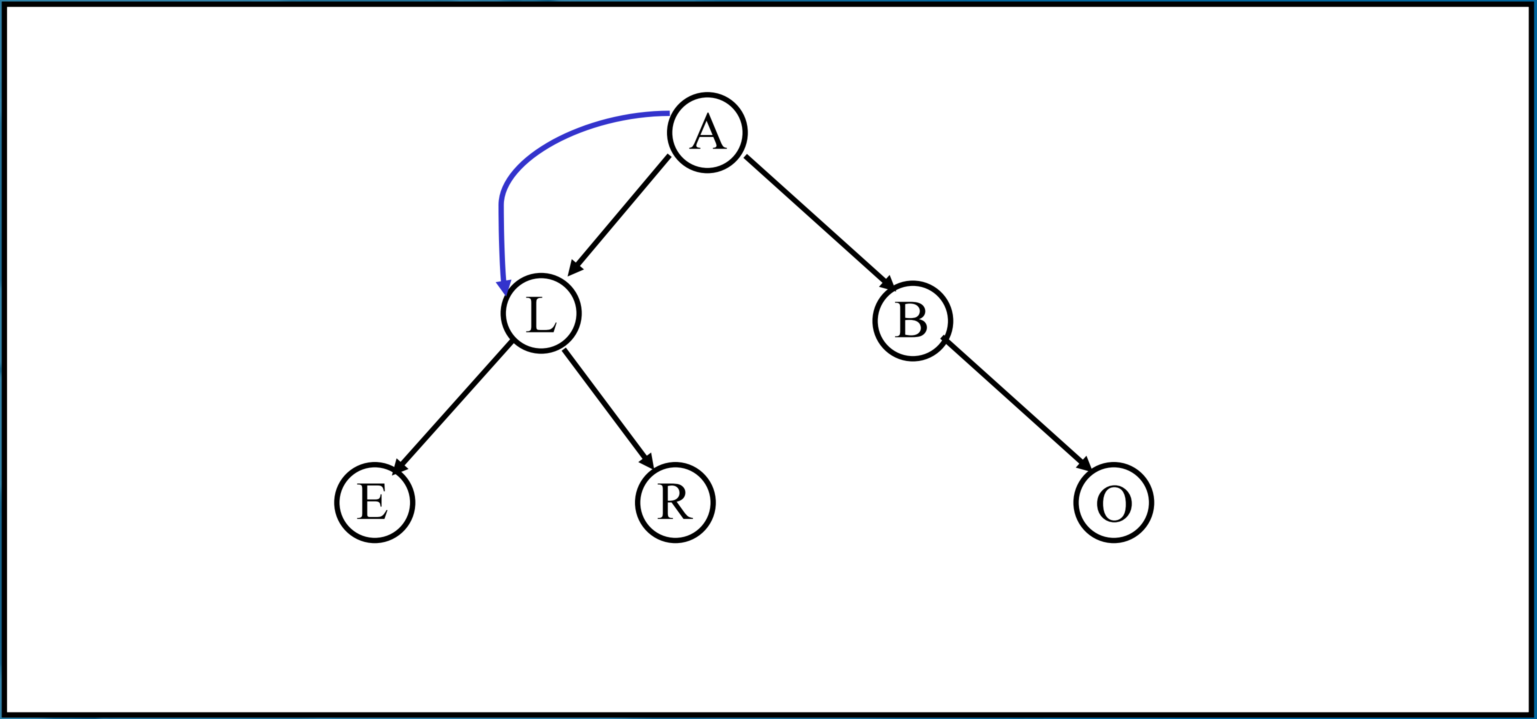
Ordine di visita:



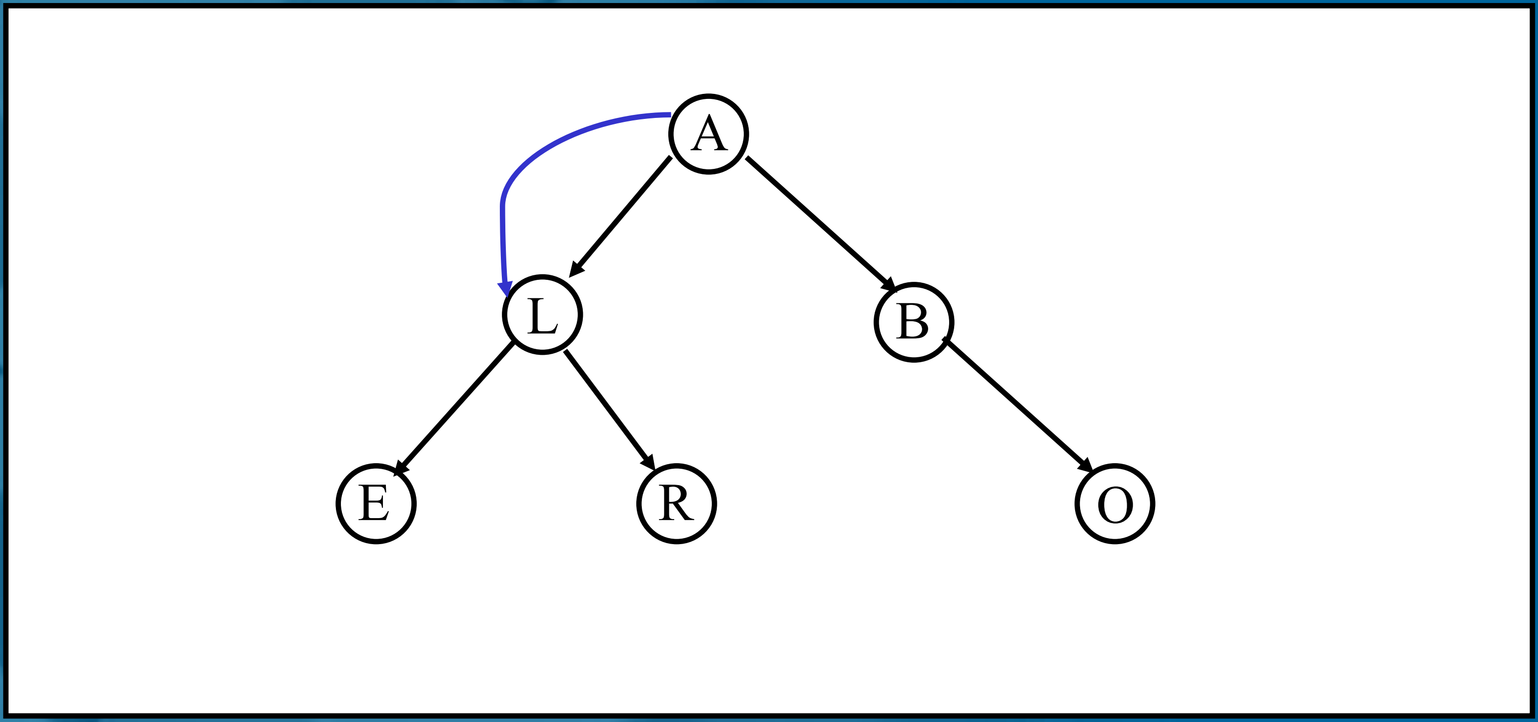
Ordine di visita: A



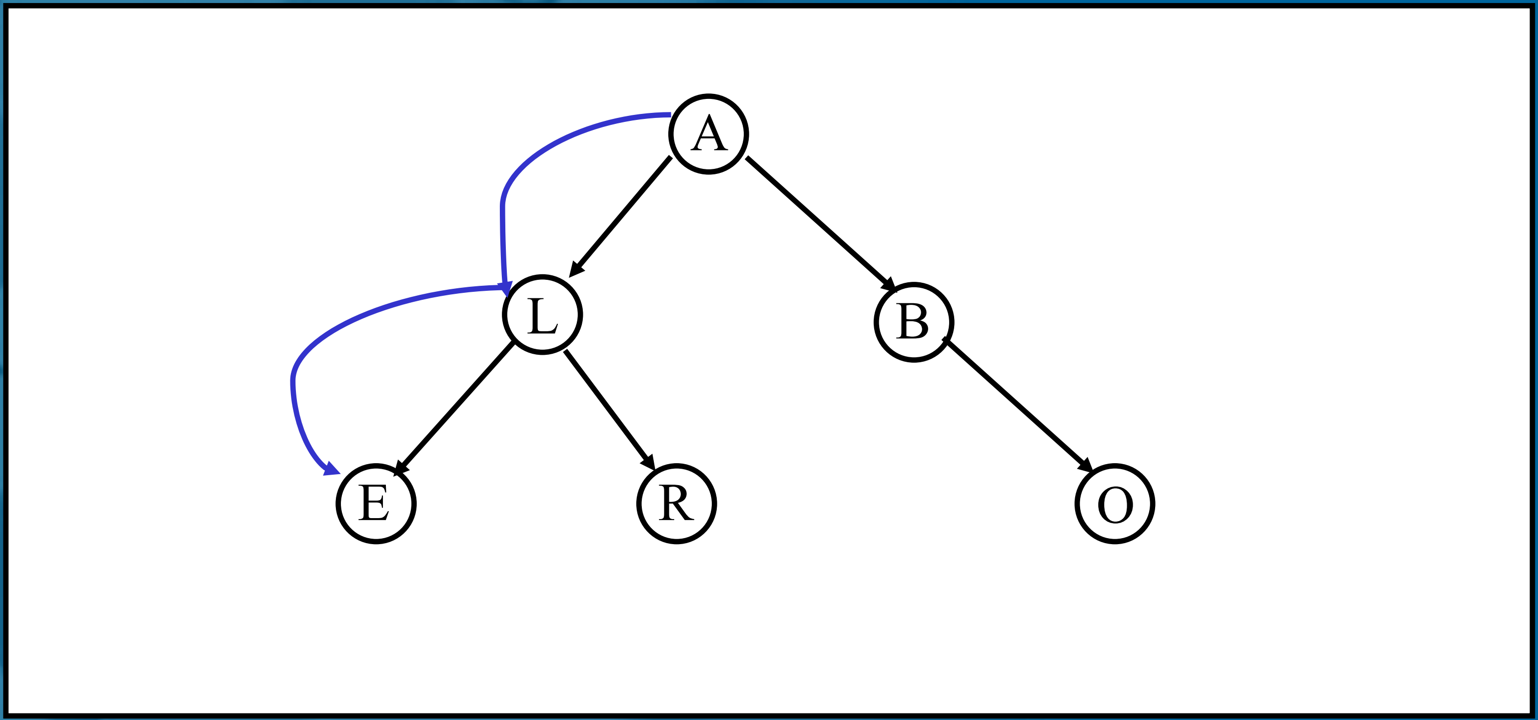
Ordine di visita: A



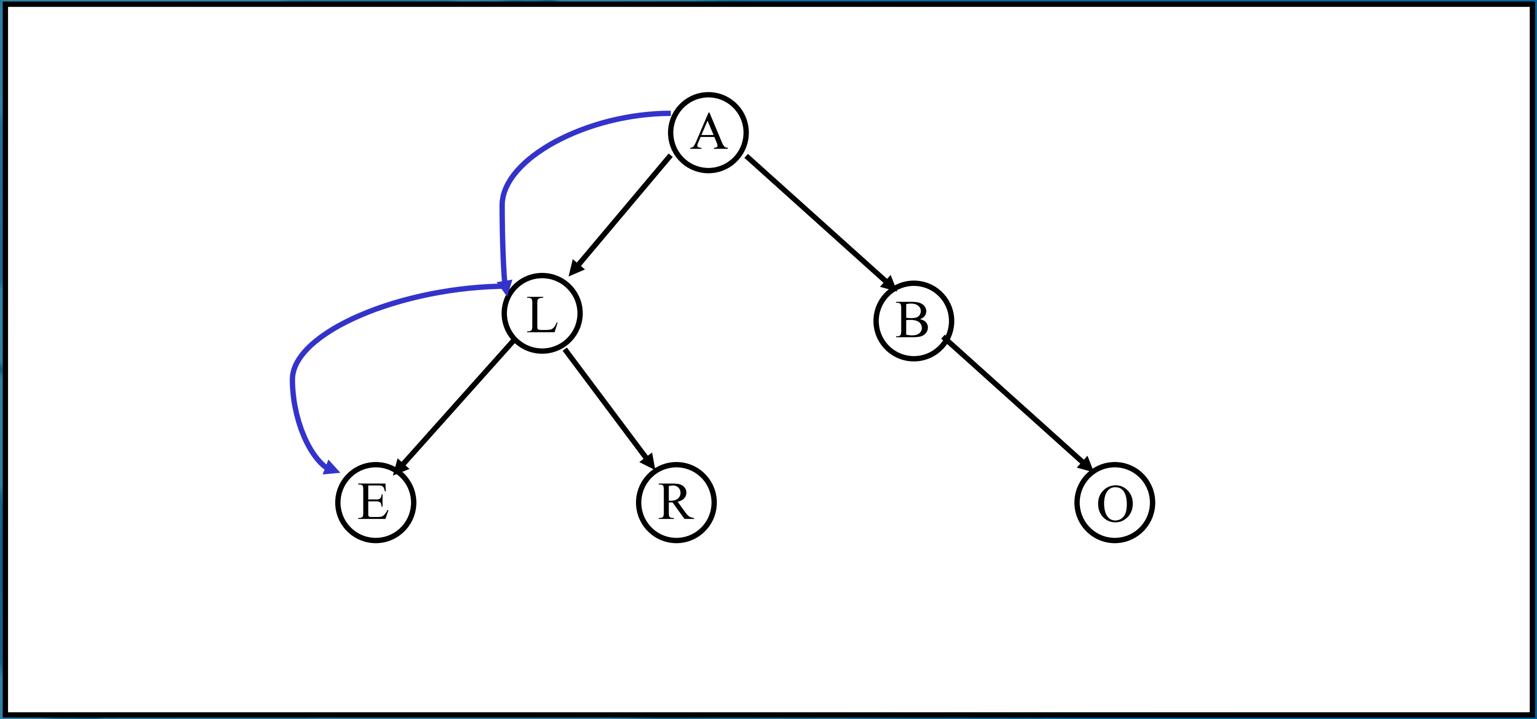
Ordine di visita: A L



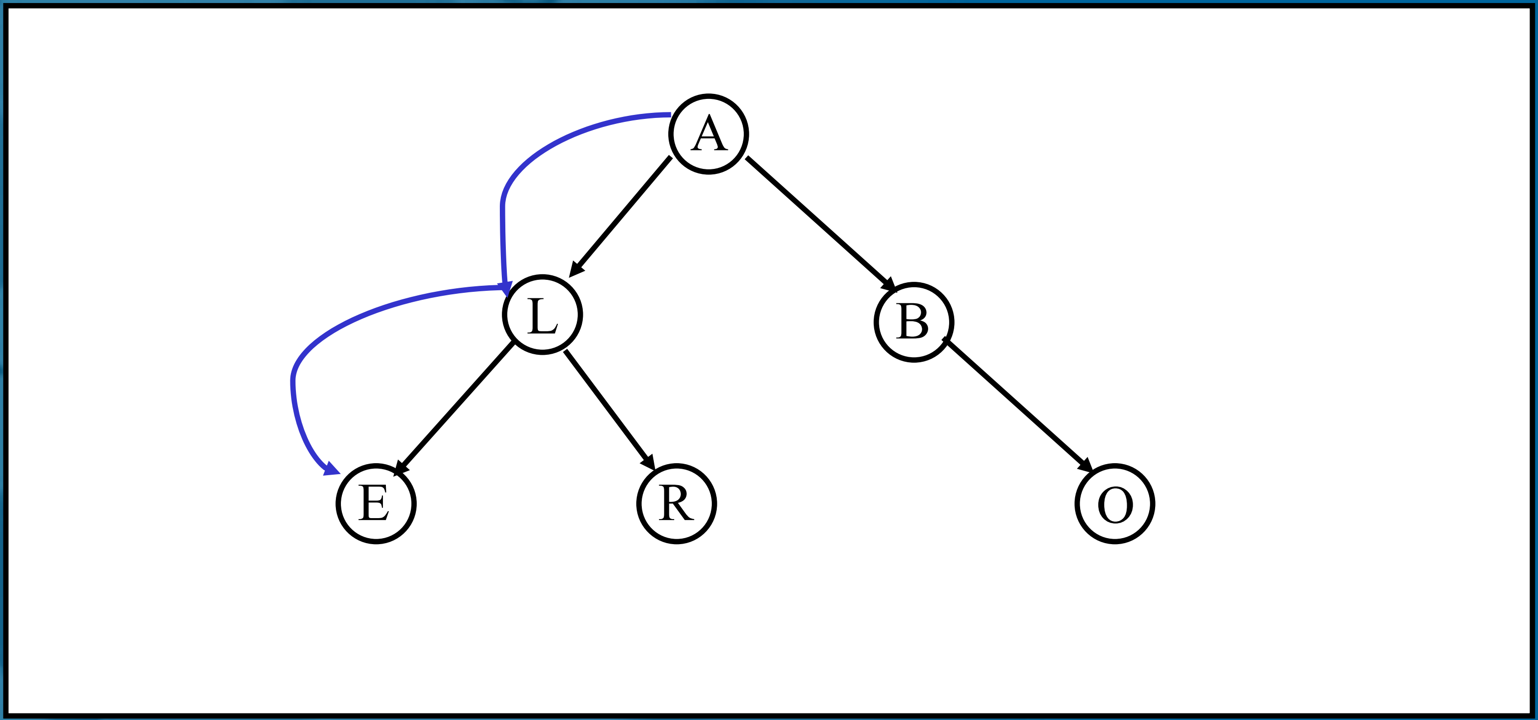
Ordine di visita: A L



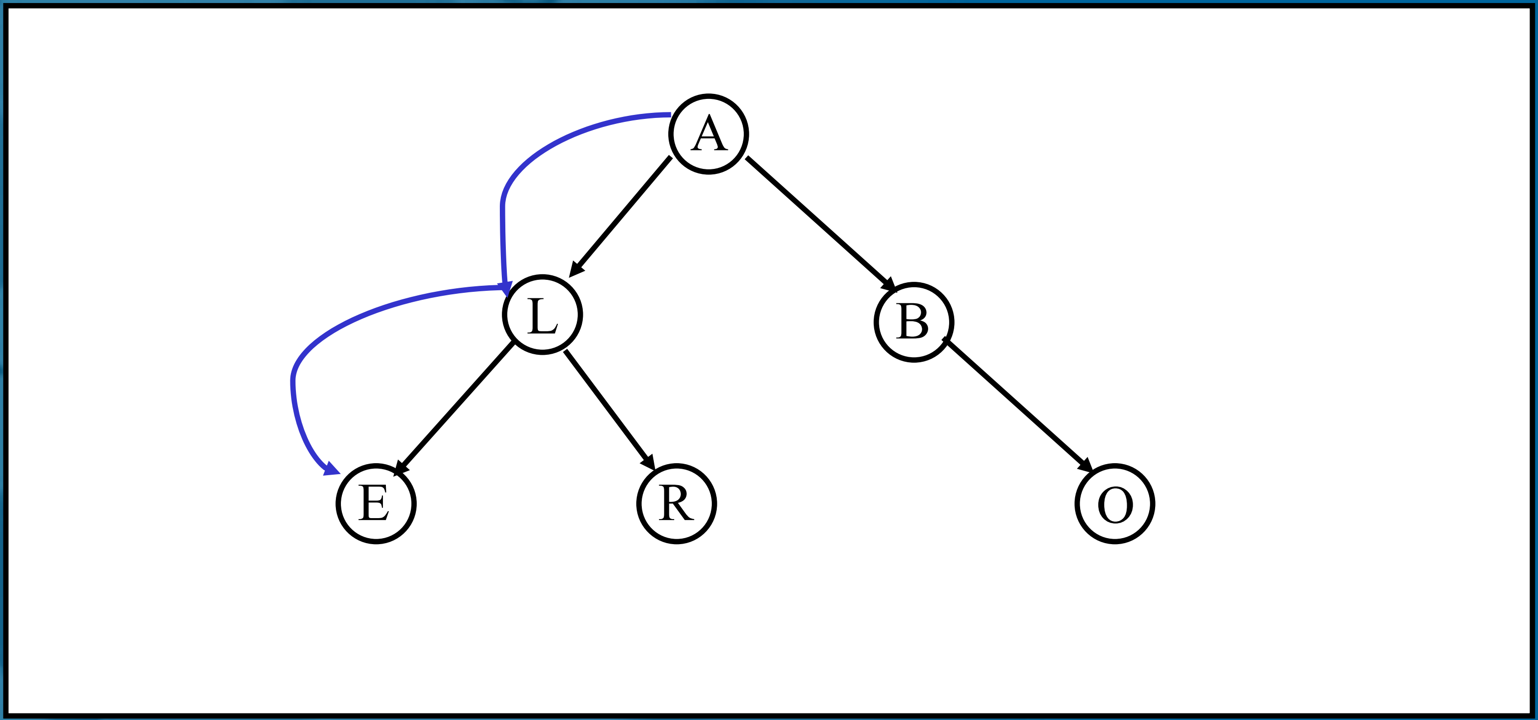
Ordine di visita: A L E



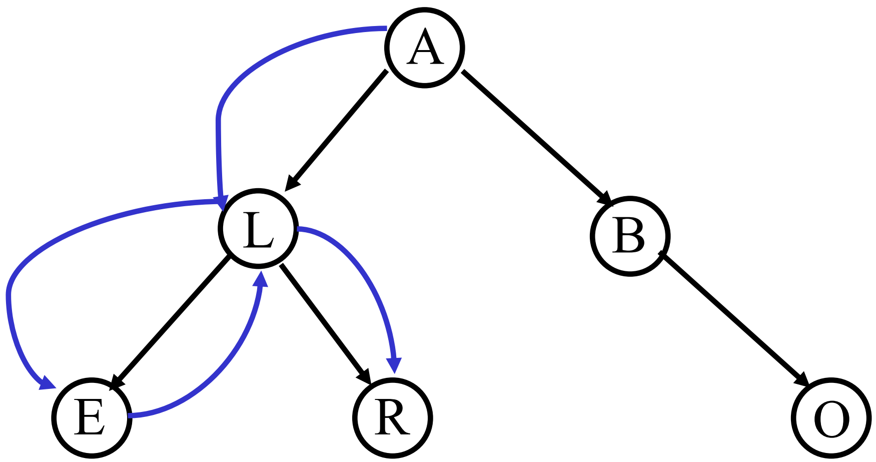
Ordine di visita: A L E



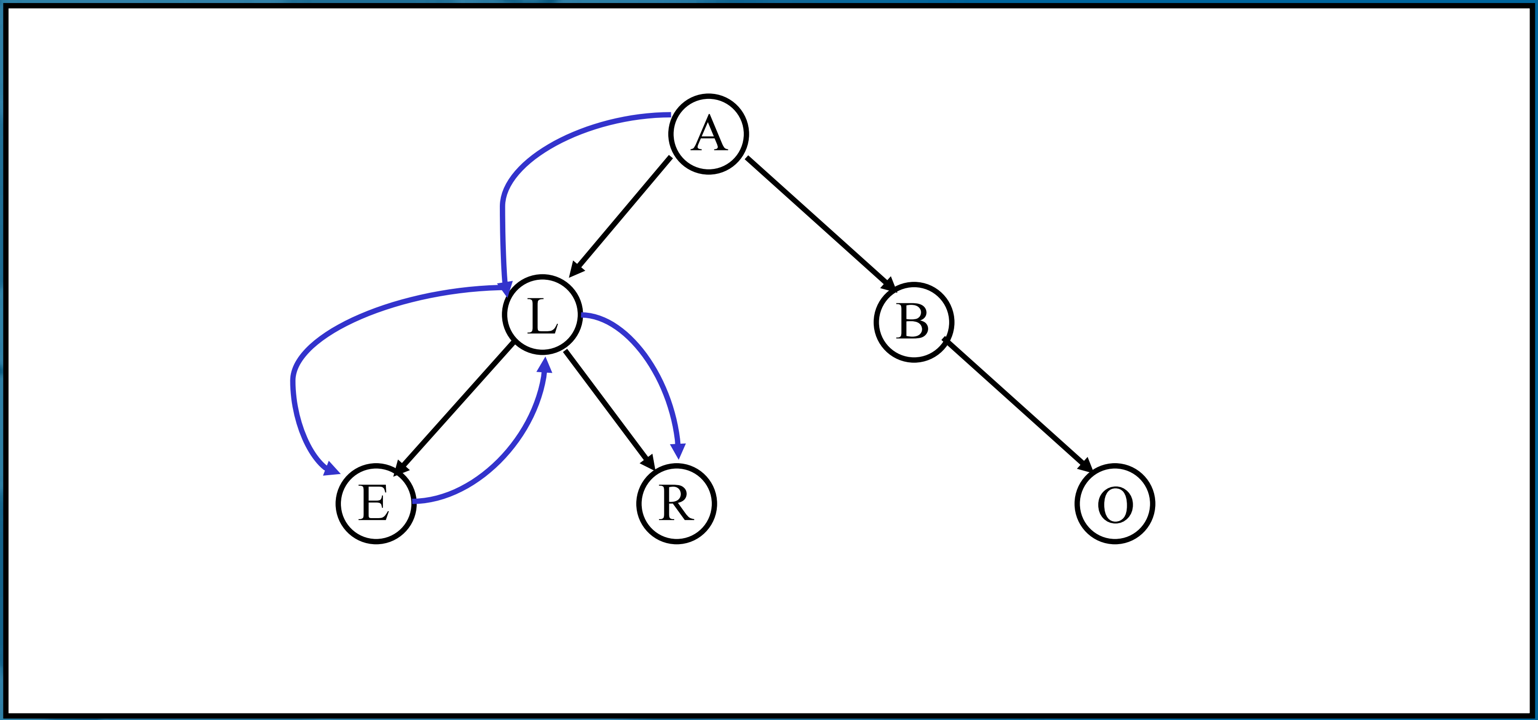
Ordine di visita: A L E



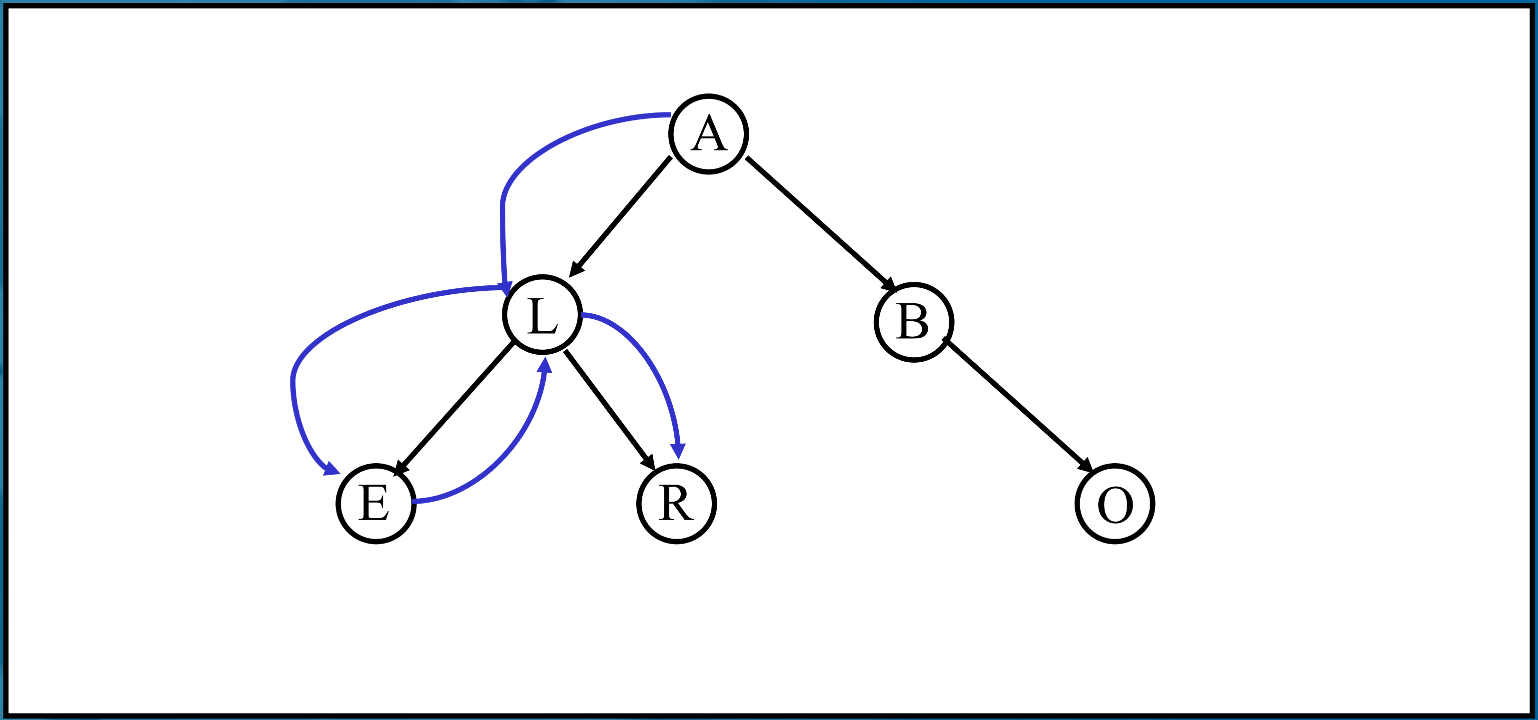
Ordine di visita: A L E



Ordine di visita: A L E R

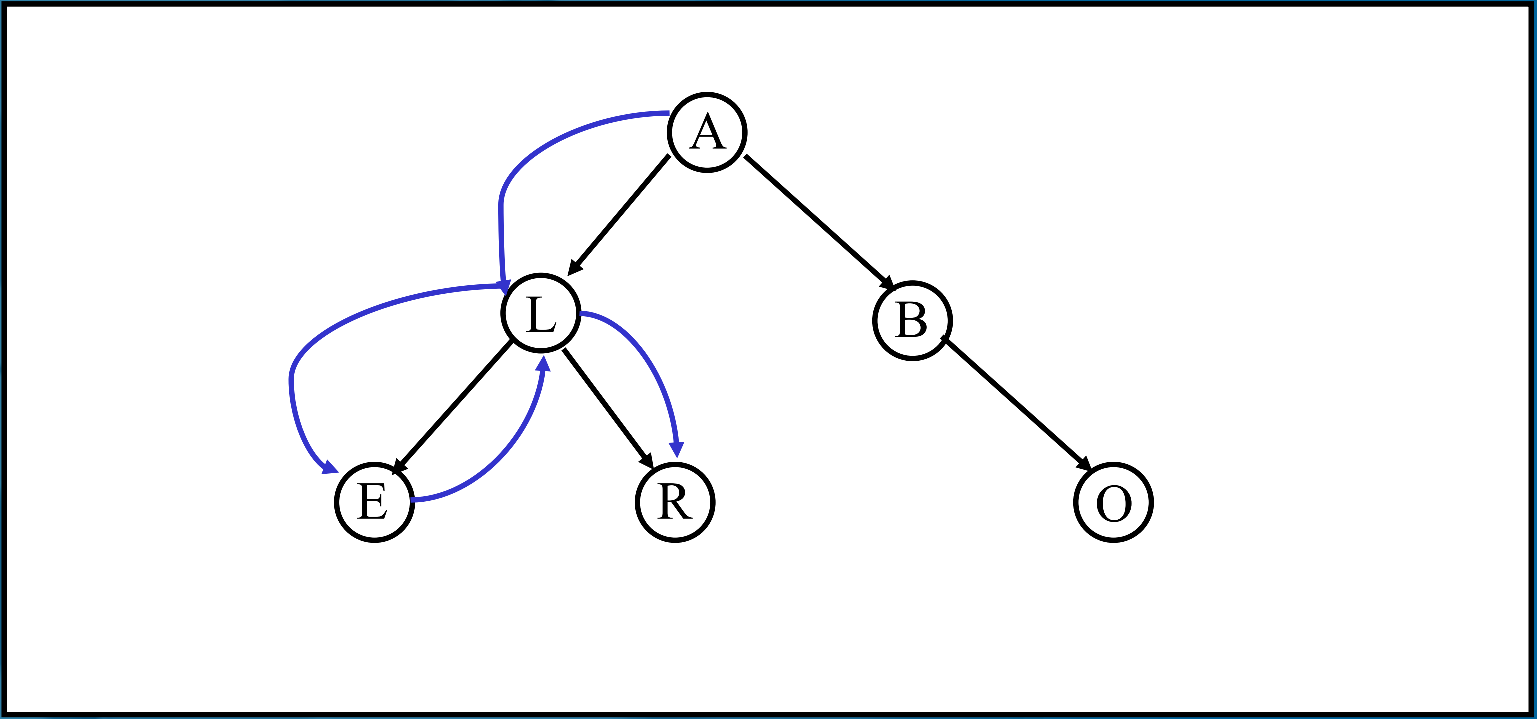


Ordine di visita: A L E R

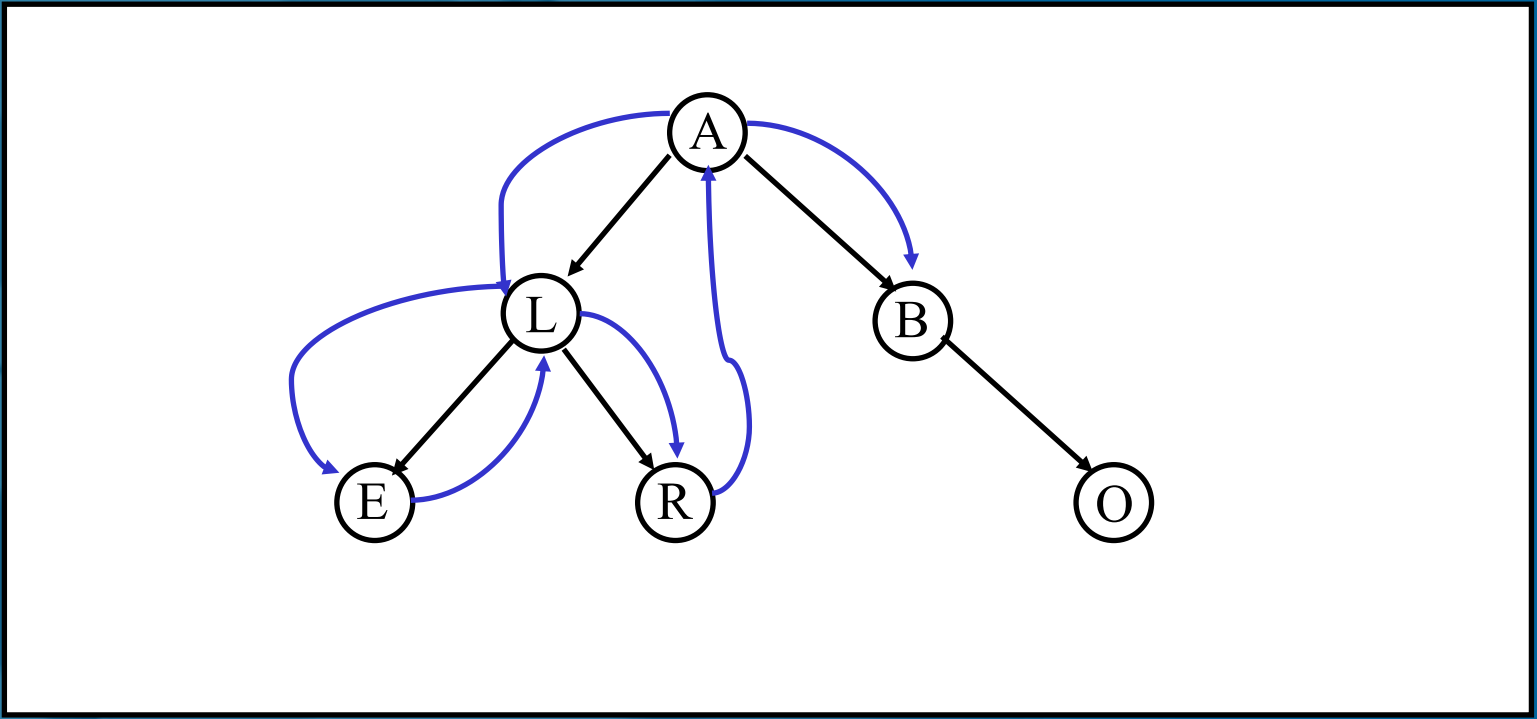


Ordine di visita: A L E R

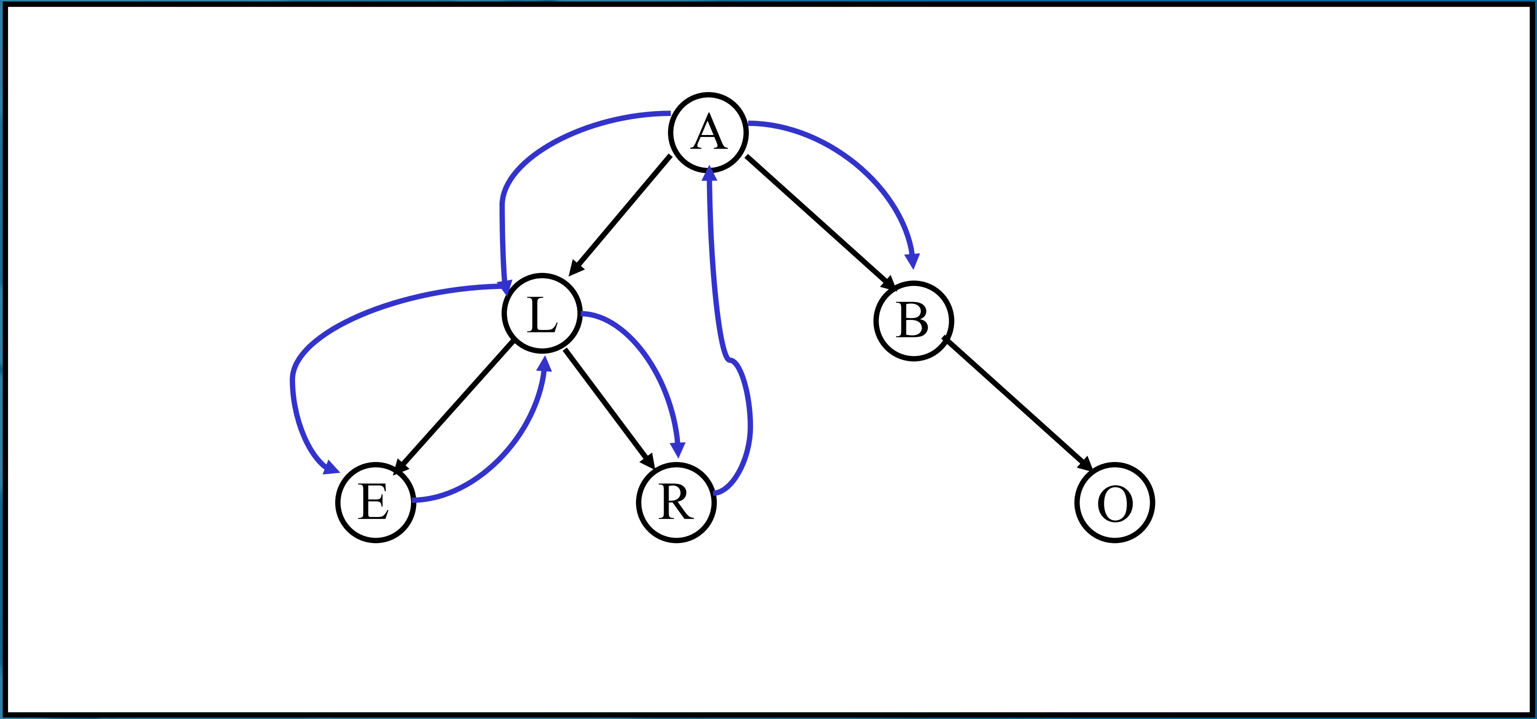
null
B



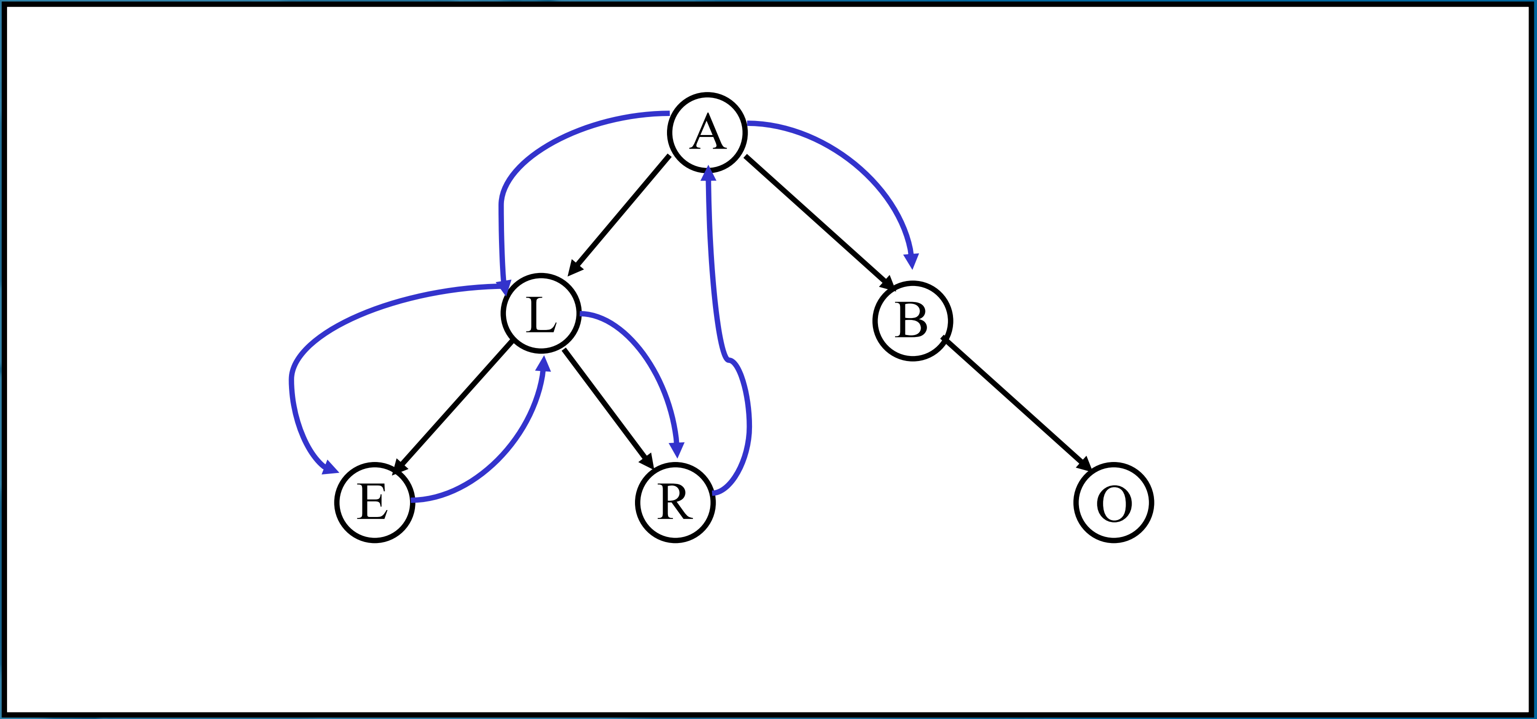
Ordine di visita: A L E R



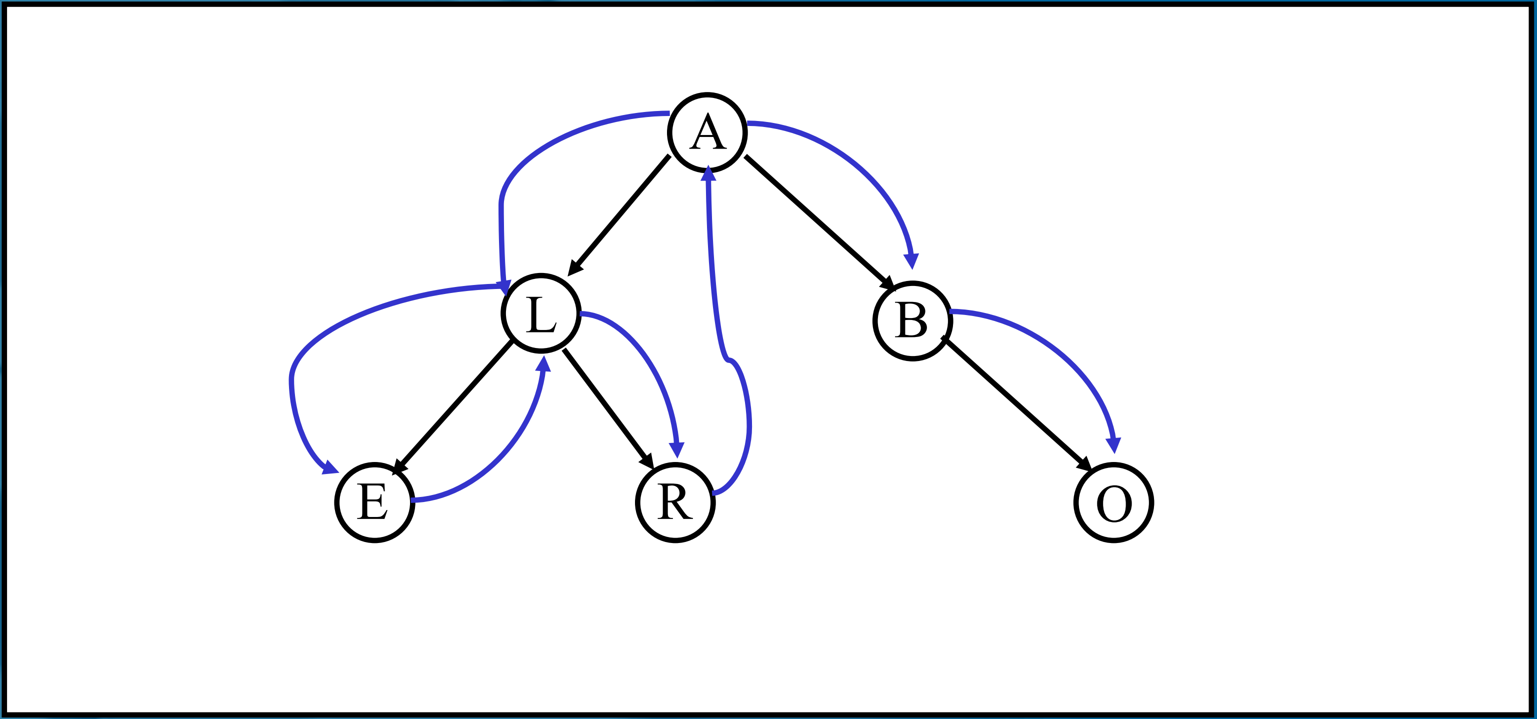
Ordine di visita: A L E R B



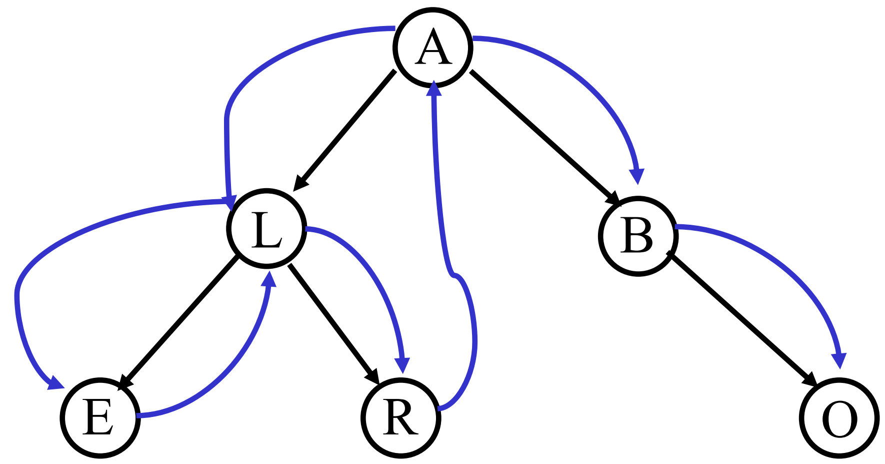
Ordine di visita: A L E R B



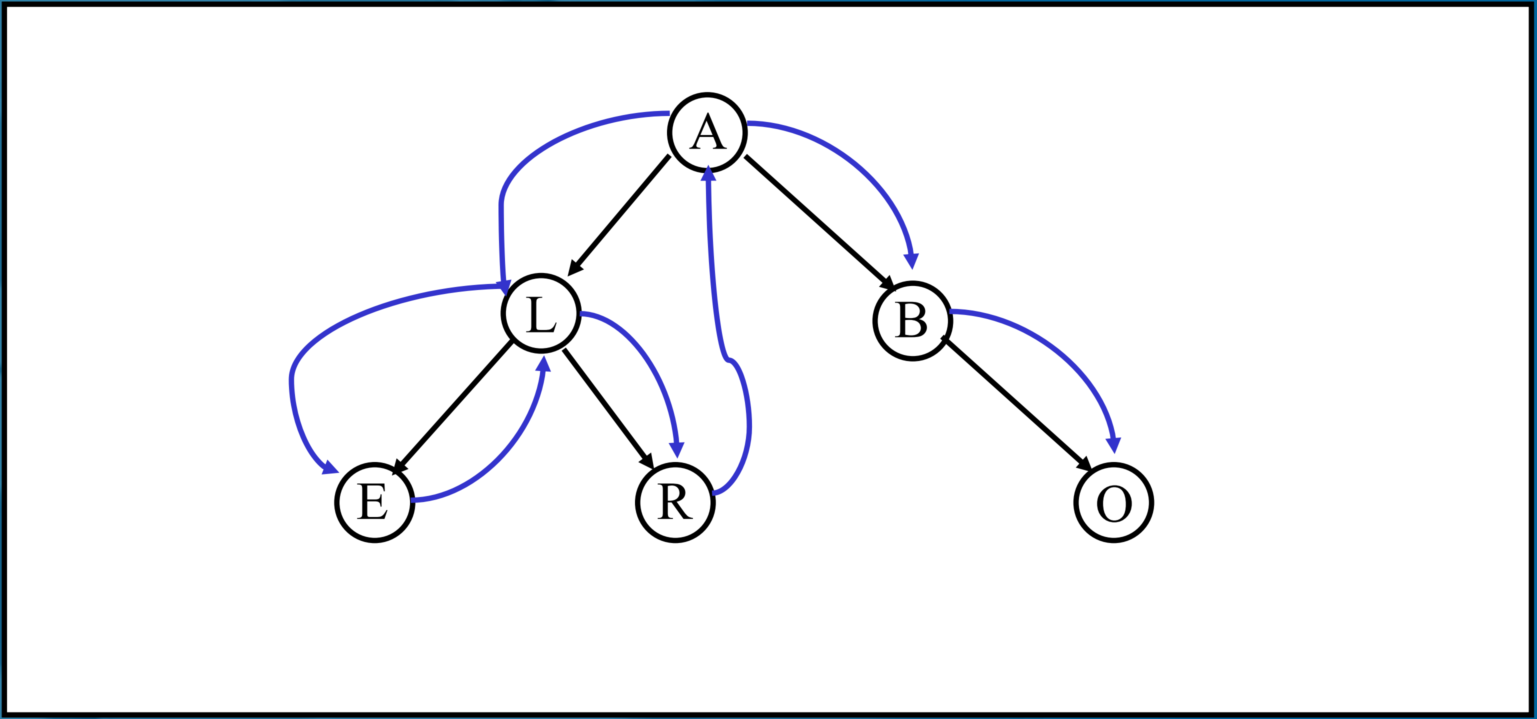
Ordine di visita: A L E R B



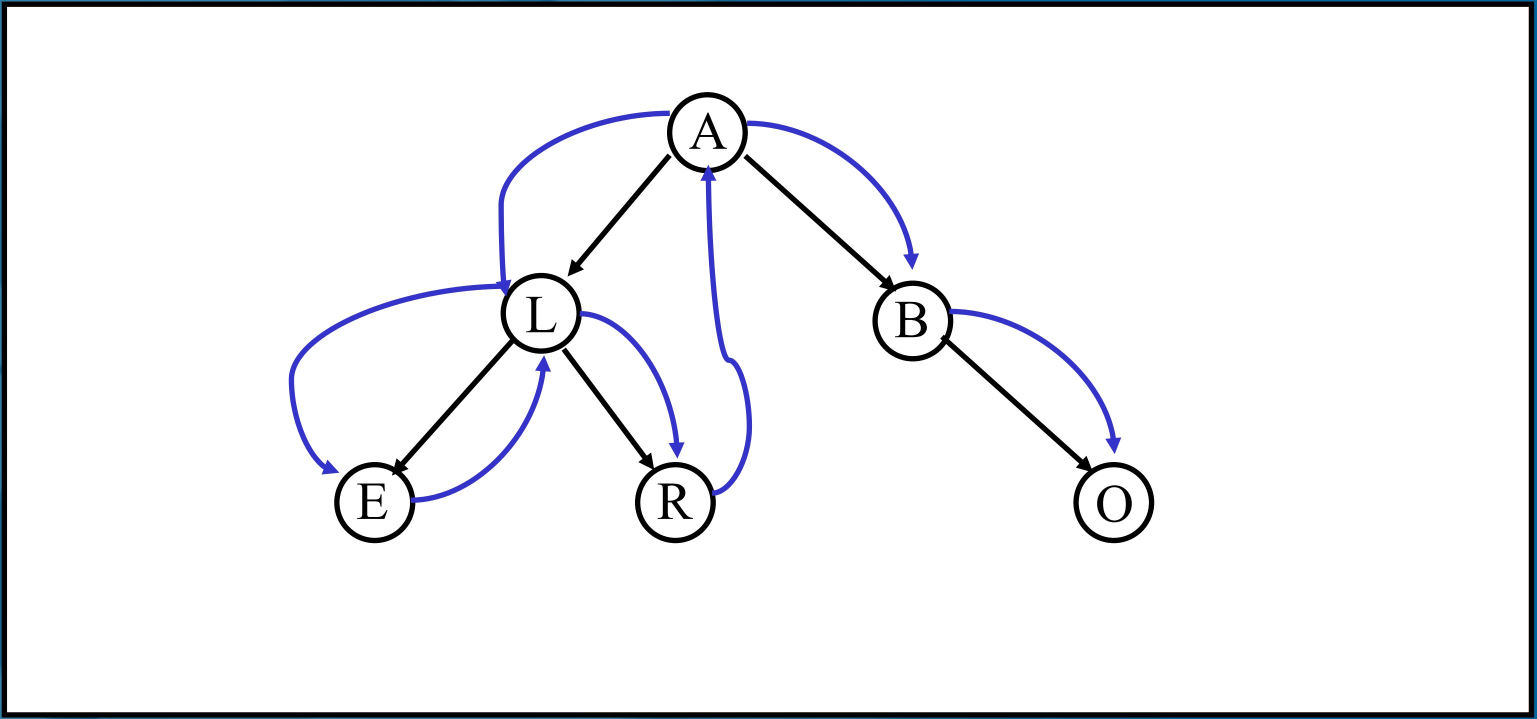
Ordine di visita: A L E R B O



Ordine di visita: A L E R B O



Ordine di visita: A L E R B O



Ordine di visita: A L E R B O

Complessità temporale

algoritmo `visitaDFS`$(nodo\ r)$
    `Pila S`
    `S.push`(r)
    while (**not** `S.isEmpty()`) **do**
        $u \leftarrow$ `S.pop()`
        if $(u \neq$ `null`$)$ **then**
            visita il nodo u
            `S.push`(figlio destro di u)
            `S.push`(figlio sinistro di u)

Ogni nodo inserito e estratto dalla Pila una sola volta

Tempo speso per ogni nodo: O(1)
(se so individuare i figli di un nodo in tempo costante)

nodi null inseriti/estratti: O(n)

$$T(n) = O(n)$$

Algoritmo di visita in profondità

Versione ricorsiva (per alberi binari):

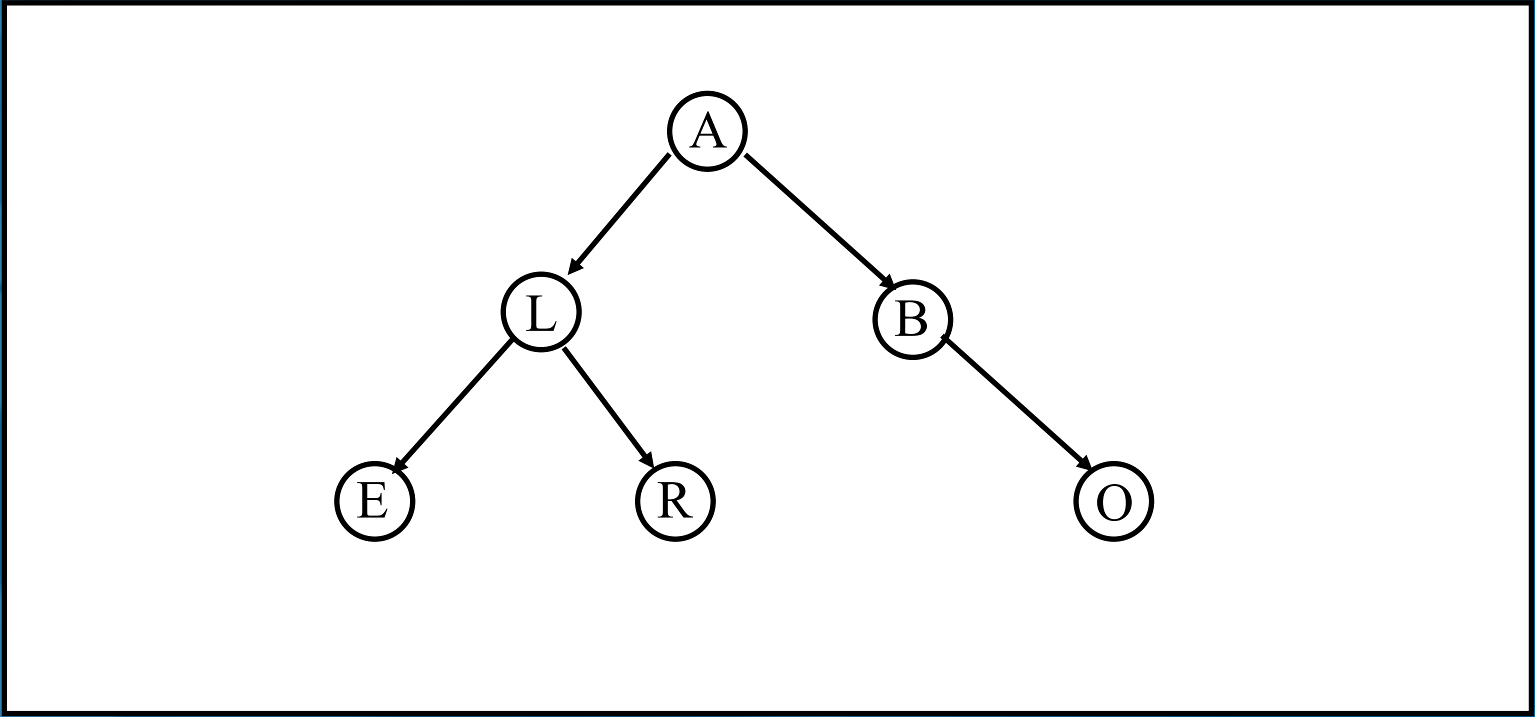
algoritmo `visitaDFSRicorsiva`$(nodo\ r)$
1. **if** $(r \neq$ `null`$)$ **then**
2. *visita il nodo* r
3. `visitaDFSRicorsiva`(figlio sinistro di r)
4. `visitaDFSRicorsiva`(figlio destro di r)

Visita in preordine: radice, sottoalbero sin, sottoalbero destro

Visita simmetrica: sottoalbero sin, radice, sottoalbero destro (scambia riga 2 con 3)

Visita in postordine: sottoalbero sin, sottoalbero destro, radice (sposta riga 2 dopo 4)

…esempi…



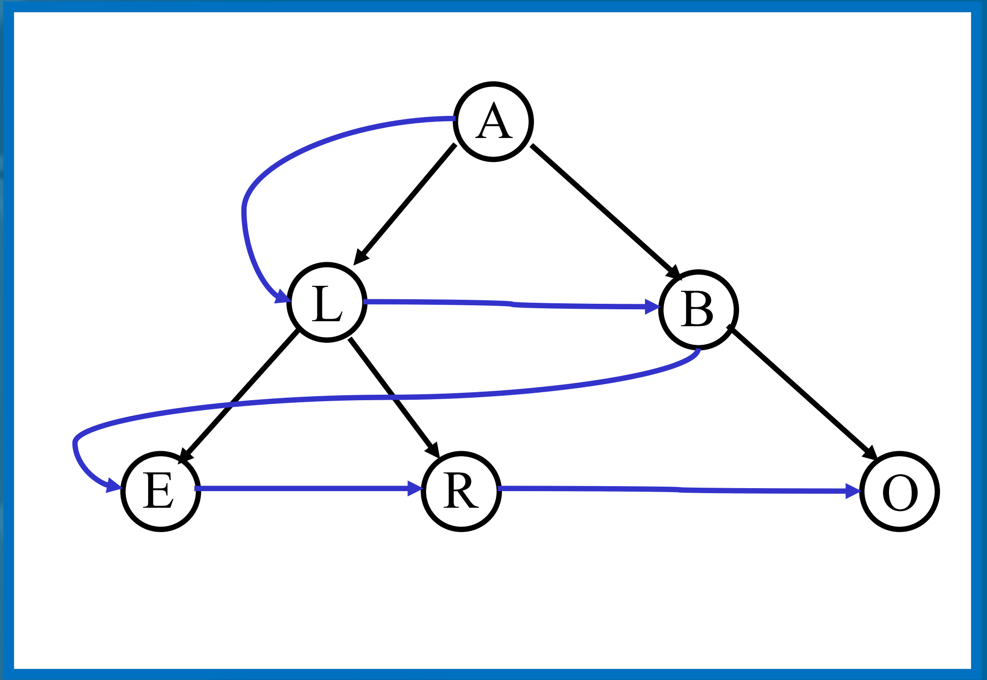
Preordine: A L E R B O

Simmetrica: E L R A B O

Postordine: E R L O B A

Algoritmo di visita in ampiezza

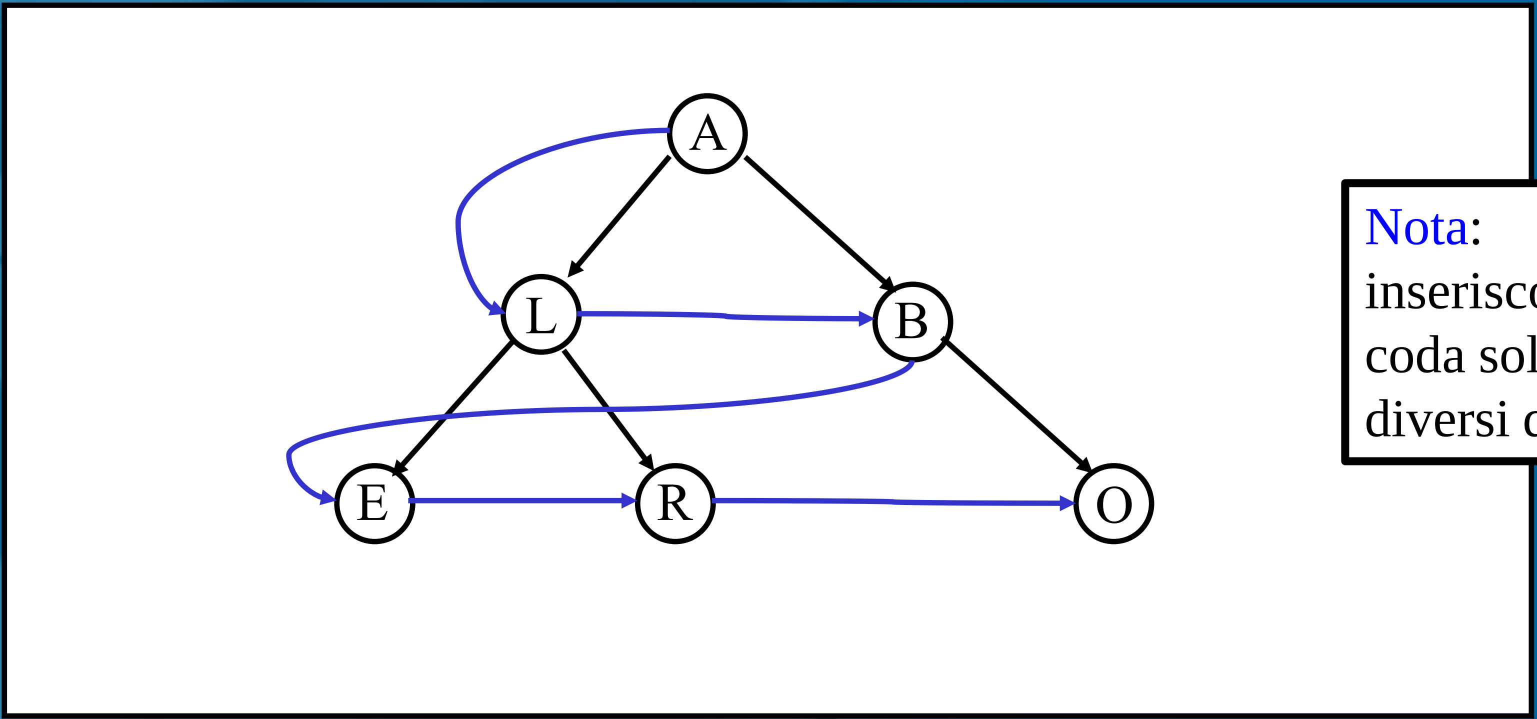
L’algoritmo di visita in ampiezza (BFS) parte da r e procede visitando nodi per livelli successivi. Un nodo sul livello i può essere visitato solo se tutti i nodi sul livello i-1 sono stati visitati.



Algoritmo di visita in ampiezza

Versione iterativa (per alberi binari):

algoritmo `visitaBFS`$(nodo\ r)$
  `Coda C`
  `C.enqueue`(r)
  while (**not** `C.isEmpty()`) **do**
    $u \leftarrow$ `C.dequeue()`
    if $(u \neq$ `null`$)$ **then**
      visita il nodo u
      `C.enqueue`(figlio sinistro di u)
      `C.enqueue`(figlio destro di u)



Nota:
inserisco nella coda solo nodi diversi da **null**

Ordine di visita: A L B E R O

Complessità temporale

```
algoritmo visitaBFS(nodo r)
   Coda C
   C.enqueue(r)
   while (not C.isEmpty()) do
      u ← C.dequeue()
      if (u ≠ null) then
         visita il nodo u
         C.enqueue(figlio sinistro di u)
         C.enqueue(figlio destro di u)
```

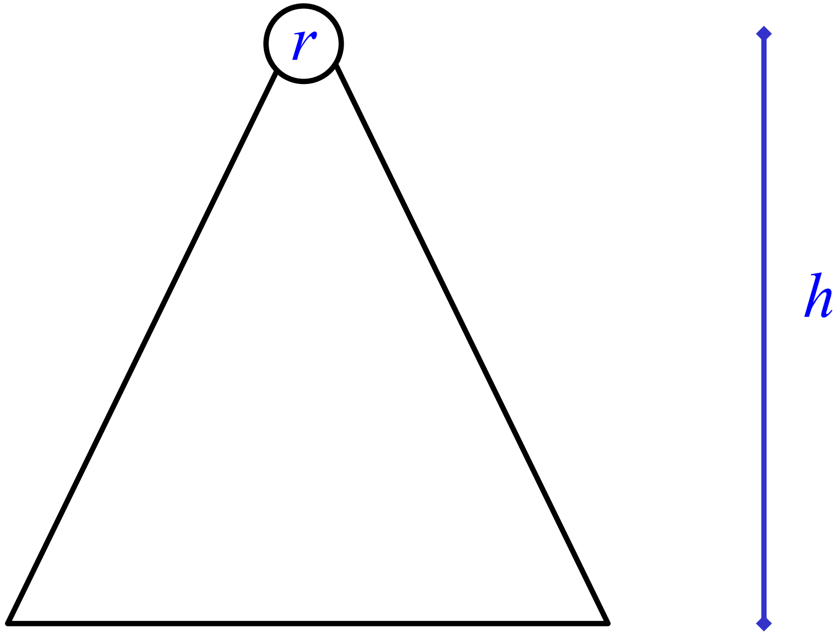
Ogni nodo inserito e estratto dalla Coda una sola volta

Tempo speso per ogni nodo: O(1)
(se so individuare i figli di un nodo in tempo costante)

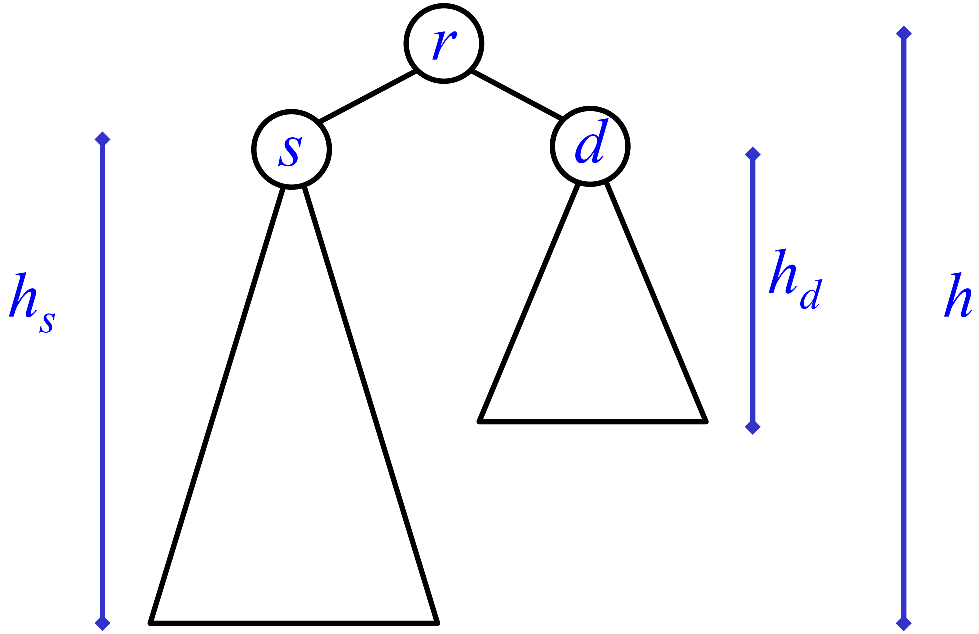
nodi null inseriti/estratti: $O(n)$

$$\boxed{T(n) = O(n)}$$

Utilizzo algoritmi di visita
un esempio: calcolo dell'altezza



Utilizzo algoritmi di visita
un esempio: calcolo dell'altezza



$$h = 1 + \max\{h_s, h_d\}$$

Utilizzo algoritmi di visita un esempio: calcolo dell'altezza

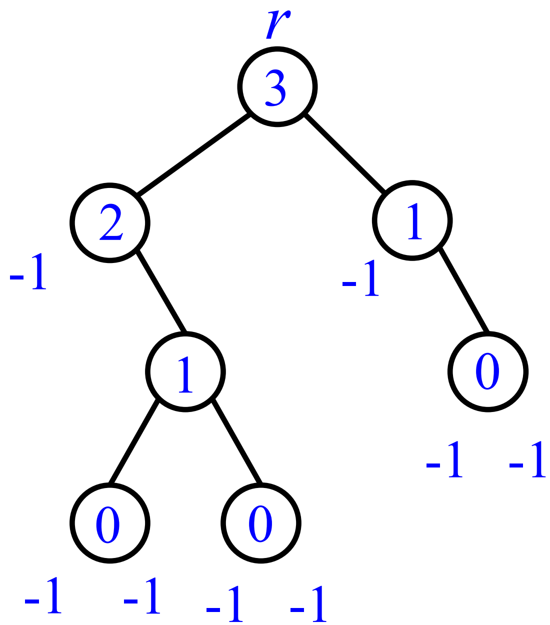
CalcolaAltezza (nodo r)

1. **if** (r = null) **then return** -1
2. *sin* = CalcolaAltezza(figlio sinistro di r)
3. *des* = CalcolaAltezza(figlio destro di r)
4. **return** 1+max{*sin*, *des*}

Calcola (e ritorna) l'altezza di un albero binario con radice r

Complessità temporale: O(n)

Utilizzo algoritmi di visita
un esempio: calcolo dell'altezza



$h = 3$

Problema 3.6

Si scrivano varianti dell'algoritmo per:

1. calcolare il numero di foglie di un albero;
2. calcolare il grado medio dei nodi dell'albero (numero medio di figli di un nodo *non foglia*);
3. verificare se esiste un nodo dell'albero che abbia un dato contenuto informativo.

Soluzione Problema 3.6.1

CalcolaNumFoglie (nodo *r*)

if (*r* = null) **then return** 0
if (*r* è una foglia) **then return** 1
sin = CalcolaNumFoglie(figlio sinistro di *r*)
des = CalcolaNumFoglie(figlio destro di *r*)
return (*sin* + *des*)

Calcola il numero di foglie di un albero con radice *r*

Complessità temporale: O(n)

Soluzione Problema 3.6.2

CalcolaGradoMedio (nodo *r*)

1. n = numero nodi dell'albero
2. *nfoglie*= CalcolaNumFoglie (nodo *r*)
3. **if** ($r \neq$ null) **return** (SommaGradi(r)/(n-*nfoglie*))

Calcola grado medio dei nodi di un albero con radice *r*

SommaGradi(nodo *r*)

1. **if** (r = null) **return** 0
2. **if** (r è una foglia) **return** 0
3. S = numero figli di r + SommaGradi(figlio sinistro di r) + SommaGradi(figlio destro di r)
4. **return** S

Complessità temporale: O(n)

Soluzione Problema 3.6.3

CercaElemento (nodo *r*, chiave *k*)

1. **if** (*r* = null) **then return** null
2. **if** (chiave(*r*) = *k*) **then return** *r*
3. *sin* = CercaElemento(figlio sinistro di *r*, *k*)
4. **if** (*sin* ≠ null) **then return** *sin*
5. **return** CercaElemento(figlio destro di *r*, *k*)

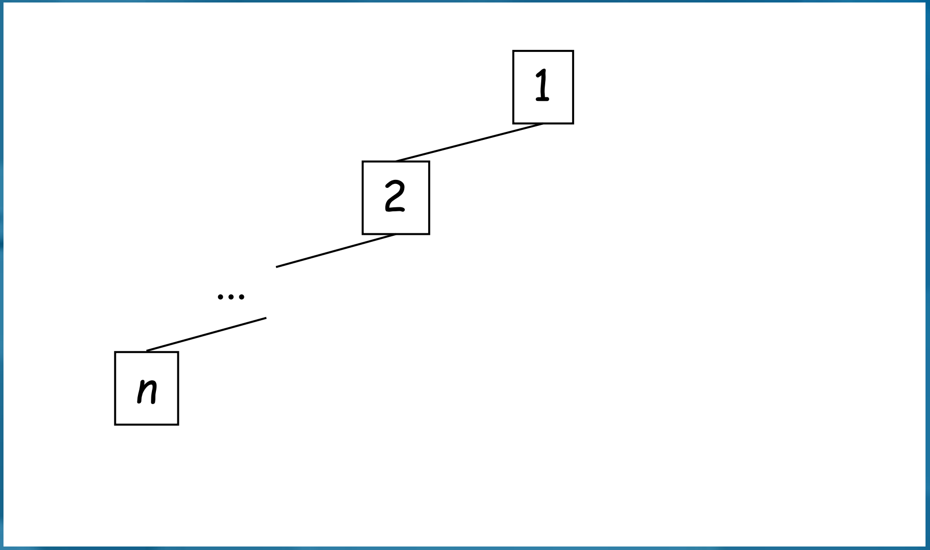
ritorna un nodo dell'albero di radice *r* che ha chiave *k*; se tale nodo non esiste ritorna null

Complessità temporale: O(*n*)

Problema 3.3

Si consideri la rappresentazione di alberi basata su vettore posizionale. In principio, è possibile rappresentare in questo modo anche alberi non completi, semplicemente marcando come inutilizzate le celle che non corrispondono a nodi dell'albero. Quanto spazio potrebbe essere necessario per memorizzare un albero non completo con n nodi? Si assuma d=2.

Soluzione Problema 3. 3



Si consideri un albero di n nodi che è una *catena*, ovvero un albero tale che ogni nodo ha al più un figlio

L'altezza di questo albero è n-1

L'albero binario completo di altezza n-1 ha 2^n-1 nodi

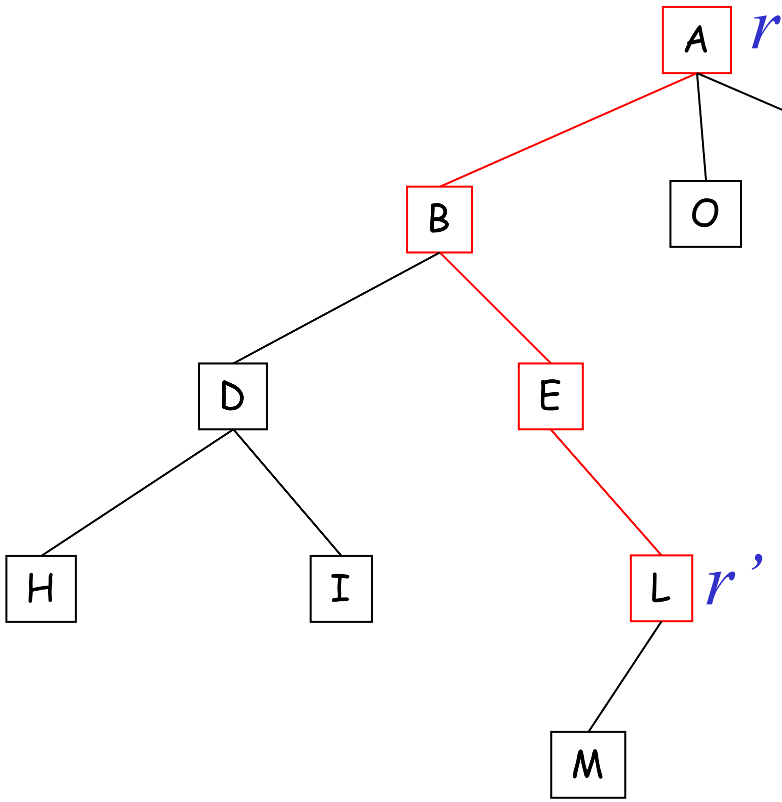
Quindi: dimensione vettore posizionale è 2^n-1

Quantità di memoria necessaria per memorizzare albero è esponenzialmente più grande del numero di nodi

Esercizio

Sia *T* un albero (con radice *r*) mantenuto attraverso un vettore dei padri. Progettare un algoritmo che, dato *T* e un nodo *r'* di *T*, restituisce il vettore dei padri che rappresenta *T* radicato in *r'*.

Suggerimento: quali sono i nodi che rispetto alla nuova radice cambiano padre?



i nodi che cambiano padre sono quelli lungo il cammino che unisce *r'* con *r*

…il padre di L diventa null…
…il padre di E diventa L…
…il padre di B diventa E…
…il padre di A diventa B…

Un possibile pseudocodice

```
RiRadica (T, j)
    x=j
    px=T[j].parent
    T[j].parent= null
    while (px ≠ null) do
        y=T[px].parent
        T[px].parent=x
        x=px
        px=y
    endwhile
```

Complessità temporale: O(h)

dove h è l'altezza di T rispetto alla radice r

Problema 3.7

Ricostruire l'albero binario T i cui ordini di visita dei nodi sono i seguenti:

Simmetrica: G D H B A E C J I K F

Preordine: A B D G H C E F I J K

Problema

Si dimostri che in generale non è possibile ricostruire T se gli ordini di visita dati sono preordine e postordine.