9/05/2024 | LEZ 30

INTRODUZIONE ALLA NP-COMPLETEZZA

STUDIO DI PROBLEMI 'HARD' → ∄ FORSE ALGO. x RISOLVERE IN TEMPO POLINOMIALE

LEZ OGGI

- INTRO CLASSIFICAZIONE PROBLEMI
- RIDUZIONE POLINOMIALE

CLASSI DI PROBLEMI

∃ DEI TEOREMI CHE DIMOSTRANO LA 'DIFFICOLTÀ' DI UN PROBLEMA

COME POSSIAMO DIMOSTRARLO?

INTANTO DISTINGUIAMO DAI PROBLEMI RISOLVIBILI IN MODO 'FAST'.

CIOÈ I PROBL. ∪ ALGO POLINOMIALE.

WHY?

1. DEF. ROBUSTA TEORICA → RIDUZ. POLIN. CHE MANTIENE POLI.
2. ALGO. POL. TENDONO MOLTO AD AVERE COSTANTI PICCOLE → ES. $3n^2$

ASSUNTO QUESTO.

QUALI SONO I PROBLEMI 'FACILI' e 'DIFFICILI'?

NEXT. PAG. TABELLA

POL ↓ FORSE NOT POL. ↓

yes	probably no
shortest path	longest path
min cut	max cut
2-satisfiability	3-satisfiability
planar 4-colorability	planar 3-colorability
bipartite vertex cover	vertex cover
matching	3d-matching
primality testing	factoring
linear programming	integer linear programming

- TEORIA VUOLE CATEGORIZZARE I PROBLEMI 'HARD' e 'EZ'
- ALCUNI NON ANCORA DIM.

CI SONO ALCUNI ESEMPI DIMOSTRATI CHE HANNO COMPL. EXP.

1. HALTING PROBLEM
2. PROBLEMA DAMA

$\boxed{\text{RIDUZIONE POLINOMIALE}}$ → TOOL X CATEGORIZZARE PROBL.

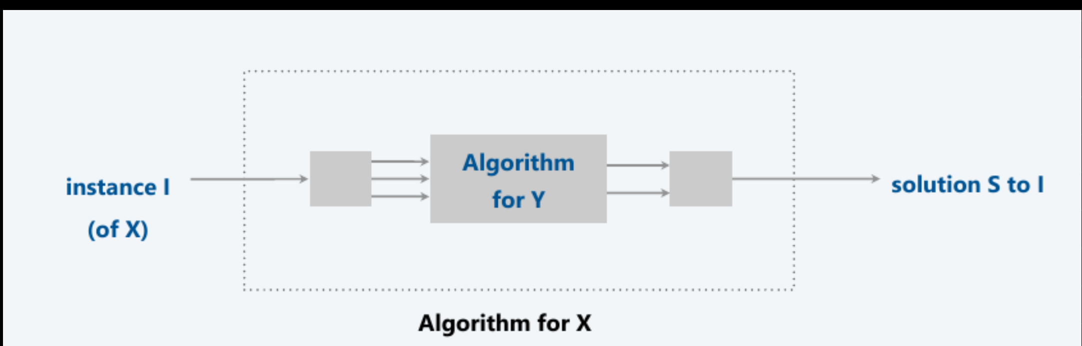
DEF

UN PROBLEMA X È RIDUCIBILE AD Y, SE UN ISTANZA DI X TRASFORMATA POL. IN ISTANZA X CHE PUÒ ESSERE RISOLTA DA Y (POL.)

NUOVA ISTANZA X Y SEMPRE POLINOMIALE

NOTAZIONE

$X \le_p Y$ = LINGUAGGI IN F.D.



TEOR. SU REDUCTION

POSIT. ~ SE $X \leq_P Y$ e Y RESOLVE IN POL. TIME, ANCHE X POL.

NEGAT. ~ SE $X \leq_P Y$ e X CAN'T RESOLVE POL. TIME, ALLORA
Y CANT BE SOLVE IN POL.

EQUIV. ~ IF $X \leq_P Y \wedge Y \leq_P X \rightarrow X \equiv_P Y$.

RIDUZ. POLINOMIALE : PRATICA

1 PROB: INDIPENDENT SET

DATO $G=(V,E)$ e $k \in \mathbb{N}$, $\exists$ SUBSET DI k V+ NODI U
$\emptyset$ ARCHI IN COMUNE

2 PROB: VERTEX COVER

SIA $G=(V,E)$ e $k \in \mathbb{N}$, $\exists$ SUBSET $\leq k$ NODI CHE
COPRONO ALL ARCHI.

DIM: I.SET $\equiv_P$ V.COVER

$\underbrace{S = \text{I.SET OF } k \iff V-S \text{ IS V.COVER OF}}_{n-k}$

DIM $\Rightarrow$

- S = I.SET DI $|S| = k$

- $V-S \Rightarrow |V-S| = n-k$
- SIA $(u,v) \in E$
- S INDIP $\xrightarrow{\text{QUINDI}}$ SIA : $u \notin S \vee v \notin S \vee$ ENTRAMBI

QUINDI SIA : $u \in S-V \vee v \in S-V \vee$ //

- $V-S$ COPRE (u,v).

DIM $\Leftarrow$

- $V-S$ = V. COVER DI $|V-S| = n-k$
- $|S| = k$
- SIA $(u,v) \in E$
- $V-S$ = V.COVER $\xrightarrow{\text{SO}}$ • SIA : $u \in V-S$ o $v \in V-S$ o BOTH

• SIA: $u \notin S$ o $v \notin S$ o BOTH

QUINDI

- S = I. SET

ALTRE RIDUZIONI

1 PROB: SET COVER

- SIA U = SET ELE. , S = SET OF SUBSET DI U, $k \in \mathbb{N}$.
- $\exists\ A = \{a : a \in S\}$ t.c. $|A| \le k \wedge \bigcup_{a \in A} a = U$.

TEOR: V.C. $\leq_P$ SET.COVER

DIM

- SIA $G=(V,E)$ e k → ISTANZA DI V.C.,

  CREARE ISTANZA $(U,\mathcal{2},k)$ DI S.C. t.c.:

  $\exists$ S.C. $= k \iff G$ HA V.C. $= k$.

- COSTRUZIONE $(U,\mathcal{2},k)$

  ~ $U = E$

  ~ SUBSET × OGNI NODO v → $S_v = \{ e \in E : e$ INCIDENTE TO $v \}$

RIDUZIONE

$G=(V,E)$ CONTIENE V.C. DI SIZE K

$\Updownarrow$

$(U,\mathcal{2},k)$ CONTIENE S.C. SIZE k

DIM $\Rightarrow$

- SIA $X \subseteq V$ UN V.C. DI SIZE k

  ↓ ALLORA

- $Y = \{ S_v : v \in X \}$ È S.C. DI SIZE k

BANALE

DIM $\Leftarrow$

- $Y \subseteq S$ = S.C. DI SIZE K

$\downarrow$ ALLORA

- $X = \{v : S_v \in Y\}$ = V.C. SIZE K

istanze 'si' e 'no' tutti e due risolvibili con questa trasformazione (il perchè è banale)

PROBL. SODDISFACIBILITÀ (SAT)

UN PAIO DI DEFINIZIONI:

- LETTERALE ⇝ VARIABILE BOOL. ⇝ x_i o $\overline{x_i}$
- CLAUSOLA ⇝ DISGIUNZIONE DI LETTERALI ⇝ $C_j = x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$
- FORMA CONGIUNTIVA NORMALE (CNF) ⇝ PROPOS. Φ $\Phi = C_1 \wedge C_2 \wedge C_3$

DEF PROBL.

- SAT → SIA Φ, $\exists$ ASS. DI VERITÀ X RENDERE Φ T.?
- 3-SAT → SAT MA CON $\forall C$ CONTIENE 3 LETTERALI.

CONCETTO FONDAMENTALE

FORSE $\nexists$ ALGO POL. X RISOLVERE 3-SAT.

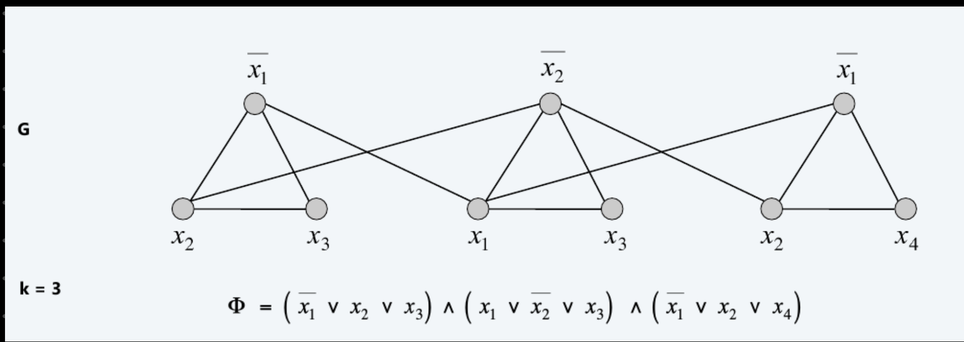
RIDUZIONE: 3-SAT $\leq_p$ I. SET

DIM: DA ISTANZA DI 3-SAT $(\Phi, |\Phi| = K)$ $\rightsquigarrow$ ISTANZA DI I.S. (G, K)

COSTRUZIONE:

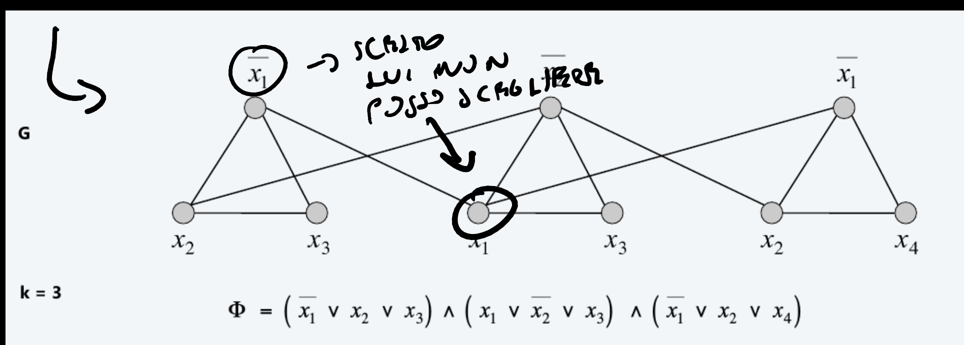
- OGNI CLAUSOLA → 3 NODI (x LETTERALE)
- GRAFO-CLAUSOLA → CONNESSI AS △
- EDGE x VAR — VAR. NEGATA

ESEMPIO



DIM ⇒

- SIA Φ U ASSEGNAMENTI DI VERITA'
- $\exists$ I.S. DI SIZE $|\Phi| = K$ →



DIM ⇐

• SIA S = I.S. DI SIZE k

• X STRUTTURA G → DEVE CONTENERE 1 NODO X Δ (C)

• SETTO QUEI NODI (CENTRALI) COME TRUE

• SODDISFACIBILE

N.B.

Basic reduction strategies.

- Simple equivalence: INDEPENDENT-SET $\equiv_P$ VERTEX-COVER.
- Special case to general case: VERTEX-COVER $\leq_P$ SET-COVER.
- Encoding with gadgets: 3-SAT $\leq_P$ INDEPENDENT-SET.

Transitivity. If $X \leq_P Y$ and $Y \leq_P Z$, then $X \leq_P Z$.

Pf idea. Compose the two algorithms.

Ex. 3-SAT $\leq_P$ INDEPENDENT-SET $\leq_P$ VERTEX-COVER $\leq_P$ SET-COVER.

DA QUI