17/06/2024

LEZ 13

F TIME ∧ SPACE-CONSTRUCTBLE: ALTRE APPLICAZIONI

→ PROPIETÀ UTILE X GAP THEOR. MA ANCHE X ALTRI.

RIPRENDIAMO LA TEORIA DI LEZ 11:

SIA L e NT:

SE L ACC. DA NT IN nTIME $\leq f(n)$ ⟹ L È DECIDIBILE ↱ TUT, CALCO

QUINDI, COME DETTO PRIMA: COSTRUISCO NT':

* |x| = LUNGHEZZA DI X, NON MODULO DI X !

NT', INPUT X, CON COMPUTAZIONE:

1. WRITE ON N_2 (|x|)*
2. SIMULO $T_f(|x|)$ E WRITE RISULTATO SU N_3 IN UNARIO. ↗ NOSTRO "OROLOGIO"
3. WHILE LEGGE 1 SU N_3, EXE SINGLE ISTRUZIONE DI NT(x) SU N_1] → MODELLO NT DEL "GENIO"
   - SE TERMINO IN q_A → ACC.
   - ALTRIMENTI → MOVE TESTINA α DI 1 PASSO.
4. SE READ □ SU N_3 → q_R

tutto molto bello, ma c'è un problema....

TEORICAMENTE, L = DECIDIBILE, MA IN QUANTO? LA (2) NON SAPPIAMO IL VALORE!

A MENO CHE F È TIME-CONSTRUCTBLE.

TEOREMA + T.CONSTRUCT.

SE F È TIME-CONSTRUCTBLE e $L \in$ NTIME$[f(n)]$

→ $\exists$ NT' CHE DECIDE L e $\forall x \in \{0,1\}^*$ [nTIME(NT', x) $\in O(f(n))$]

XCHÈ QUESTO?

NEL PASSO (2), SE F È T-CONSTRUCTBLE, F(x) VERRÀ SCRITTO IN TEMPO $O(f(|x|))$

T-CONSTRUCT e CLASSI

SAPPIAMO CHE,

$DTIME(f(n)] \subseteq NTIME[f(n)]$

MA, NELLE LEZ. PRIMA, SAPPIAMO CHE $\forall$ NT PUÒ ESSERE SIMULATA DA T

POSSIAMO QUINDI DIRE CHE

ANCHE NTIME[f(n)] è INCLUSO IN DTIME[f(n)]? CIRCA

TEOR. 6.17

$\forall f$ TIME-CONSTRUCT:

$$\boxed{NTIME[f(n)] \subseteq DTIME[2^{O(f(n))}]}$$

DIM

RICORDA

- $\forall L \in NTIME[f(n)]$, ALLORA
  - $\exists$ NT CHE ACC. L e $\forall x \in L\ [ntime(NT, x) \in O(f(|x|))]$
    E, X DEF DI $O(f(n))$,
  - $\exists h' : \forall x [ntime(NT, x) \leq h' f(|x|)] \longrightarrow n_0$ POSSIAMO DEF. COME COSTANTE
    $\hookrightarrow h' = \underset{\text{COST}}{h} \cdot 2^{n_0} \rightarrow |\{x : |x| < n_0\}|$
    $\hookrightarrow$ NUM. COSTANTE
  - SAPENDO CHE F = T-CONSTR.
    $\Downarrow$
    ANCHE $h \cdot F$ T-CONTRSUC. $\longrightarrow$ RISULTATO DI F LO SCRIVO SU 2° NASTRO h VOLTE. $\rightarrow$ TIME $= h \cdot F$.

  ALLORA,

  - $\exists \underset{\text{COST}}{c}, \exists T_F : \forall n \in \mathbb{N}\ [T_F(n) = h \cdot F(n) \wedge \underbrace{dTIME(T_F(n), n) \leq c \cdot h\, F(n)}]$

    $\Downarrow$

    $dTIME(T_F(n), n) \in O(h \cdot F(n))$

- COSTRUISCO MACCHINA T CHE SIMULA NT(X), + FORMALMENTE

SIA

$-T: x \in \{0,1\}^*$

COSTO $= |x|$

COSTO $= hf(|x|)$

① SCRIVE SU N_2 $|x|$

OROLOGIO

② SIMULA $T_F(|x|)$ e SCRIVE $hf(|x|)$ SU N_3

③ $\forall$ COMP. DETERMINISTICA $\alpha(x)$ IN $NT(x)$. → T(x) fa una serie di comp. deterministiche di NT(x)

WHILE READ 1 SU N_3 EXE UNA ISTRUZIONE DI NT LUNGO $\alpha(x)$;

- SE $O_\alpha(x) = q_A \Rightarrow q_A$
- ELSE, MOV TESTINA DI N_3
- ELIF SU N_3 LETTO □, MOV TESTINA SU N_3 SU PRIMO 1, E BEGIN NEW $\alpha(x)$, SE $\exists$.

④ RIGETTO, CASO IN CUI ESCO IN ③.

ESSENDO $ntime(L, x) \le hf(x)$

$O(hF(x)) \cdot k^{hF(x)} \to$ GRADO DI NON-DETERMINISMO $= O(2^{F(n)})$

IN ALPIÙ $hf(|x|)$ PASSI SSI $\forall x \in L$ VIENE ACC., IF $q_R \Rightarrow x \notin L$.

- SIA k = GRADO NT

COSTO TOT DI T (RIFERITO A ③) $= O(F(|x|)\, k^{hF(|x|)}) \le O(2^{F(|x|)})$

ORA, LE CLASSI, QUELLE BELLE:

$\boxed{\text{CLASSI DI COMPL. PRINCIPALI}}$

- $P = \bigcup_{k \in N} DTIME[n^k] \Rightarrow$ U SET PROBLEMI RISOLTI IN TEMPO POLINOMIALE → "ACCETTABILE".
  → n = LARGHEZZA INPUT / k = COSTANTE

- $EXPTIME = \bigcup_{k \in N} DTIME[2^{n^k}]$ → TEMPO EXPO. e ESPONENTE = POLINO.
  → CONTROPARTE NEXPTIME

- $PSPACE = \bigcup_{k \in N} DSPACE[n^k]$ → NSPACE NON DET.

queste sono quelle principali, poi abbiamo quelle complementari (coP, coEXPTIME, ect.)

- $NP = \bigcup_{k \in N} NTIME[n^k]$

CLASSE x FUNZIONI

- $FP = \bigcup_{k \in N} \{F: \Sigma_1^* \to \Sigma_2^* : \exists T_F$ CHE CALCOLA F e $dTIME(T_F, x) \in O(n^k)\}$

RELAZIONE TRA CLASSI PRINCIPALI. → COLL. A RELAZIONI PRECEDENTI

① $P \subseteq PSPACE$

② $PSPACE \subseteq EXPTIME$

③ $P \subseteq NP$

④ $P = coP$

⑤ $NP \subseteq EXPTIME$

⑥ $PSPACE \subseteq NPSPACE$

COSA HANNO IN COMUNE

SONO TUTTE

RELAZIONI DEBOLI? $\subseteq$

SOLO 2 SONO DIVENTATE RELAZIONI FORTI:

- $P \subset EXPTIME$ → X TEOR. GERARCHIA TEMPORALE
  - POICHÉ $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{k \to \infty} \frac{n^k \log n^k}{2^{n^k}}$

    ALLORA
  - $DTIME[n^k] \subset DTIME[2^{n^k}]$.

  QUINDI
  - $P \subset EXPTIME$ → DIMOSTRAZIONE (FIGA MA LUNGA) IN DISPENSA

una delle due dimostrate ma chè non è una relazione forte importante (tra P e EXPTIME ci sono un botto di altri problemi, tra cui NP).

e

- $PSPACE = NPSPACE$ DIM. IN DISPENSA

QUELLO + IMPO. CHE STUDIEREMO È $P \subseteq NP$ → ARGO NEXT LEZ.