Disequazione Irrazionale

- $\boxed{\sqrt{x+12} \geq x}$

Condizioni di esistenza (C.E.) : $x+12 \geq 0$

$\boxed{x \geq -12}$

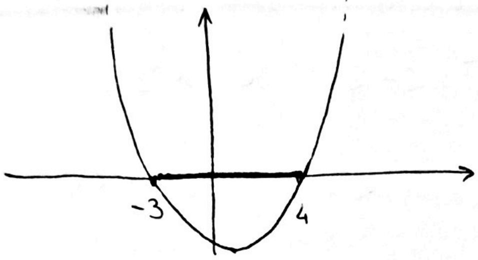
- Se $x \geq 0$ posso elevare entrambi i membri al quadrato : $(\sqrt{x+12})^2 \geq x^2$

disequazione 2° grado

$x+12 \geq x^2 \iff x^2-x-12 \leq 0$

eq. associata: $x^2-x-12=0$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$



$x^2-x-12 \leq 0$ per $-3 \leq x \leq 4$

però ci troviamo nel caso $x \geq 0$

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 4 \\ x \geq 0 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{0 \leq x \leq 4}$$

(Essendo $x \geq 0$ le C.E. sono ovviamente verificate)

- Se $x < 0$

$\underbrace{\sqrt{x+12}}_{\text{quantità positiva}} \geq \underbrace{x}_{\text{quantità negativa}}$ è verificata per ogni x che soddisfi le condizioni di esistenza : $x \geq -12$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \geq -12 \end{cases} \qquad \boxed{-12 \leq x < 0}$$

Soluzione : Uniamo le soluzioni trovate nei due casi :

$-12 \leq x < 0 \quad \vee \quad 0 \leq x \leq 4$

quindi $\boxed{-12 \leq x \leq 4}$

• Disequazione irrazionale con modulo

Teoria: In generale, dato $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

- Supponiamo di voler risolvere: $|x| \leq c$: con $c \geq 0$ altrimenti non avremmo soluzioni perché $|x|$ e' una quantita' SEMPRE POSITIVA

$$|x| \leq c \rightarrow \begin{cases} x \leq c & \text{se } x \geq 0 \iff x \in [0,c] \\ -x \leq c & \text{se } x < 0 \iff x \in [-c,0) \end{cases}$$

$\uparrow$
$x \geq -c$

Uniamo le soluzioni: $x \in [-c,0) \cup [0,c]$

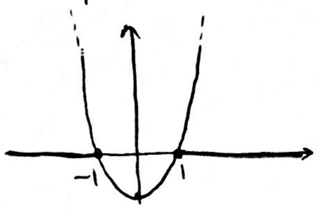
ovvero $x \in [-c,c]$

• $\boxed{|x| - \sqrt{x^2-1} < -2}$ $\rightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x^2-1} < -2 & \text{se } x \geq 0 \quad (1) \\ -x - \sqrt{x^2-1} < -2 & \text{se } x < 0 \quad (2) \end{cases}$

Prima di proseguire studiamo le condizioni di esistenza:

• $x^2 - 1 \geq 0$ $\rightarrow$ eq. associata: $x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = 1$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

$\uparrow$
disequazione 2° grado



$x^2 - 1 \geq 0$ per $\boxed{x \leq -1 \vee x \geq 1}$

Condizioni di esistenza.

(1) (se $x \geq 0$)

$x - \sqrt{x^2-1} < -2$

$-\sqrt{x^2-1} < -2 - x$

$\sqrt{x^2-1} > 2 + x$ ← quantita' positiva perché $x \geq 0$

elevo al quadrato:

$x^2 - 1 > (2+x)^2$

$\cancel{x^2} - 1 > 4 + \cancel{x^2} + 4x$

$-5 > 4x$

$x < -\frac{5}{4}$

$\uparrow$

<u>NON</u> e' compatibile con la condizione $x \geq 0$

→ <u>non ci sono soluzioni</u>

(2) (se $x < 0$)

$-x - \sqrt{x^2-1} < -2$

$-\sqrt{x^2-1} < -2 + x$

$\sqrt{x^2-1} > 2 - x$ ← quantita' positiva perché $x < 0$

elevo al quadrato:

$\cancel{x^2} - 1 > 4 + \cancel{x^2} - 4x$

$-5 > -4x$

$-\frac{5}{4} > -x$

$x > \frac{5}{4}$

$\uparrow$

<u>NON</u> e' compatibile con la condizione $x < 0$

→ <u>non ci sono soluzioni</u>

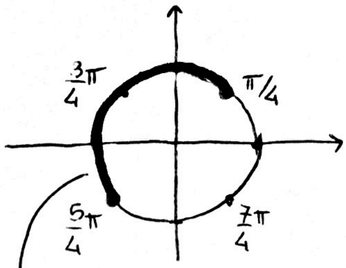
$\boxed{\text{IMPOSSIBILE}}$

Esempi di disequazioni trascendenti

- $\boxed{2^{\sqrt{\sin x - \cos x}} \leq 1}$

C.E. $\sin x - \cos x \geq 0$

$\sin x \geq \cos x$



per tutti questi angoli qui il seno è più grande del coseno

$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right]$

seno e coseno funzioni periodiche di periodo 2π

$\Leftrightarrow \boxed{x \in \left[\frac{\pi}{4}+2K\pi, \frac{5}{4}\pi+2K\pi\right] \quad K\in\mathbb{Z}}$ C.E.

$\underline{\text{OSS}}_1$: $1 = 2^0$, quindi:

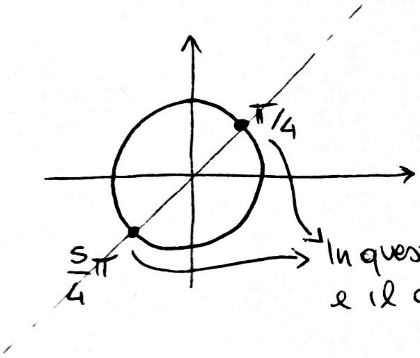
$2^{\sqrt{\sin x - \cos x}} \leq 2^0$ → Sono ~~esponenti~~ potenze con la stessa base, basta imporre la disuguaglianza agli esponenti

$\Updownarrow$

$\sqrt{\sin x - \cos x} \leq 0$

$\underline{\text{OSS}}_2$: una radice quadrata è sempre ≥ 0, quindi $\sqrt{\sin x - \cos x} \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{\sin x - \cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x - \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = \cos x \qquad \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}+2K\pi \ \vee \ x = \frac{5}{4}\pi + 2K\pi \qquad K\in\mathbb{Z}$



In questi due punti il seno e il coseno coincidono

Sinteticamente:

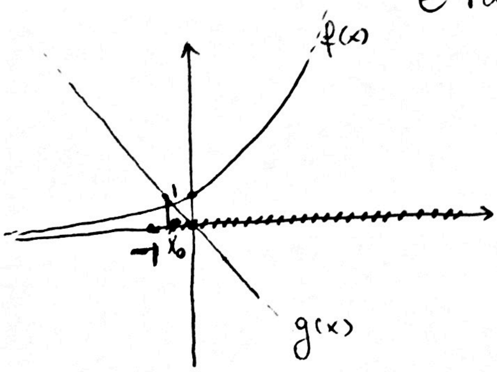
$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + \cancel{2}K\pi}$$

- In generale, <u>molto</u> raramente le eq. trascendenti sono risolubili con metodi elementari. Per esempio:

- $\boxed{e^x + x > 0} \Leftrightarrow e^x > -x$

$\boxed{\text{C.E. } \forall x\in\mathbb{R}}$

Consideriamo le due funzioni $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\begin{cases} f(x) = e^x \\ g(x) = -x \end{cases}$ e rappresentiamole nel piano cartesiano



Le soluzioni di $e^x > -x$ sono tutte quelle x in cui f(x) è più grande di g(x), ovvero tutte quelle x per le quali il grafico di f(x) sta sopra quello di g(x): ////////// $= (x_0, +\infty)$

dove x_0 è il punto di intersezione tra f(x) e g(x)

Si vede facilmente che $x_0 < 0$ e $x_0 > -1$, quindi possiamo dire che $x_0 \in (-1, 0)$

→

$\cdot\ f(-\frac{1}{2}) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \sim 0,6065$

$g(-\frac{1}{2}) = -(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \sim 0,5$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}$ soddisfa $e^x > -x$

quindi $-\frac{1}{2} \in (x_0, +\infty) \Rightarrow x_0 < -\frac{1}{2}$

allora possiamo essere più precisi e affermare $x_0 \in (-1, -\frac{1}{2})$

iterando questo procedimento possiamo trovare un intervallo di appartenenza di x_0 sempre più piccolo, quindi un'approssimazione di x_0 sempre più accurata.

Con certezza però possiamo soltanto affermare che le soluzioni sono:

$\boxed{x \in (x_0, +\infty)}$ con x_0 punto di intersezione tra e^x e $-x$

Equazioni con numeri complessi

Teoria: $z \in \mathbb{C}$ numero complesso, può essere scritto in due modi:

FORMA CARTESIANA : $z = x + iy$ con $x = Re(z)$, $y = Im(z)$ $\quad x, y \in \mathbb{R}$

$|z|$ = modulo di $z = \sqrt{x^2+y^2}$

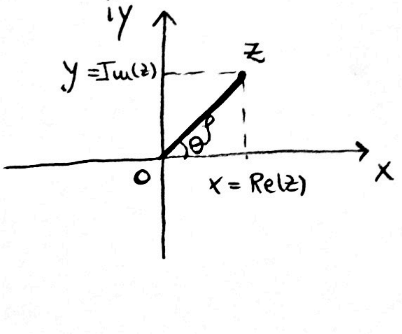
$\bar{z}$ = coniugato di $z = x - iy$

$\boxed{\text{Vale: } z \cdot \bar{z} = |z|^2}$

il CONIUGIO è UN OMOMORFISMO DI ANELLI, ovvero rispetta le operazioni di somma e prodotto in $\mathbb{C}$: siano $z, w \in \mathbb{C}$, allora

$\oplus : \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ $\qquad \odot\ \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

Si chiama forma "cartesiana" perché mette in evidenza le coordinate di z se rappresentato nel piano cartesiano:



Consideriamo ora, nel caso in cui $z \neq 0$, il segmento di estremi: l'origine O e z: questo segmento misura la distanza di z da O e, chiamata ρ la sua lunghezza, per Pitagora $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \rho = |z|$

- Se $z \neq 0$, la sua SCRITTURA IN FORMA POLARE è $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

SCRITTURA IN FORMA ESPONENZIALE: $z = \rho e^{i\theta}$ (dove $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$)
$(z \neq 0)$

ρ = modulo di z
θ = argomento di z

OSS.: $\cdot$ Se $z = \rho e^{i\theta} \Rightarrow \overline{z} = \rho e^{-i\theta}$

$\cdot$ Se $z = \rho e^{i\theta}$ e $w = r e^{i\alpha}$ $\Rightarrow$ $\cdot\ zw = \rho e^{i\theta} r e^{i\alpha} = \rho r e^{i(\theta+\alpha)}$

$\cdot\ z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

Trovare le soluzioni dell'equazione:

$\cdot\ \boxed{z^2 + 2\overline{z} - i\,\mathrm{Im}(z)}$

$z = x+iy$ $\quad z^2 = (x+iy)(x+iy) = x^2 - y^2 + 2ixy$

$\overline{z} = x - iy$ $\quad$ ricorda: $i \cdot i = -1$

$\mathrm{Im}(z) = y$

sostituisco:

$$x^2 - y^2 + 2ixy + 2x - 2iy = -iy$$

$$\underbrace{x^2 - y^2 + 2x}_{Re} + i\underbrace{(2xy - y)}_{Im} = 0 \iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ 2xy - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} '' \\ y(2x-1) = 0 \end{cases}$$

$y = 0$ ①

$2x - 1 = 0$ ② $\quad x = \frac{1}{2}$

① $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 2x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} '' \\ x(x+2) = 0 \end{cases}$

$x = 0$

$x - 2 = 0$ $\quad x = -2$

Soluzioni:

$z_1 = 0 + i0 = 0$

$z_2 = -2 + i0 = -2$

② $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} - y^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} '' \\ y^2 = \frac{5}{4} \end{cases}$

$y = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$y = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

Soluzioni

$z_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{5}}{2}$

$z_4 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\boxed{\text{Soluzioni: } \left\{0, -2, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}}$$

• $\boxed{z^4 = |z|}$

- se $z=0$ $\Rightarrow 0^4 = 0$ ✓ $\Rightarrow z=0$ è una soluzione
- se $z \neq 0$ posso scrivere z in forma esponenziale $z = \rho e^{i\theta}$

$|z| = \rho$

$z^4 = \rho^4 e^{i4\theta}$

quindi : $\rho^4 e^{i4\theta} = \rho$

$\rho^3 e^{i4\theta} = 1$ OSS : $1 = 1 \cdot e^{i0}$

$\rho^3 e^{i4\theta} = 1 \cdot e^{i0}$ → due numeri complessi in forma esponenziale sono uguali $\Leftrightarrow$ sono uguali i loro moduli e i loro argomenti (a meno di multipli interi di 2π) rispettivamente.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 4\theta = 0 + 2K\pi \quad K \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \dfrac{K\pi}{2} \quad K \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- se $K=0$ $\Rightarrow \theta = 0$ $\Rightarrow z = 1 \cdot e^{i0} = 1$
- se $K=1$ $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow z = 1 \cdot e^{i\pi/2} = i$
- se $K=2$ $\Rightarrow \theta = \pi$ $\Rightarrow z = 1 \cdot e^{i\pi} = -1$
- se $K=3$ $\Rightarrow \theta = \frac{3}{2}\pi$ $\Rightarrow z = 1 \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i$
- se $K=4$ $\Rightarrow \theta = 2\pi$ $\Rightarrow z = 1 \cdot e^{i2\pi} = 1$

Da quattro in poi ritroviamo le stesse soluzioni. $\Leftarrow$

Soluzioni : $\boxed{\left\{ z = 0 \;,\; z = e^{i\frac{K\pi}{2}} \quad K = 0,1,2,3 \right\} \text{ ovvero } \left\{ z = 0, 1, i, -1, -i \right\}}$