Laurea Triennale in Scienze e Tecnologie per i Media, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2023-2024`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Simulazione 2
L'Esercizio 6 è solo per coloro che sostengono l'esame da 8 crediti.

Esercizio 1. Un'urna ha 4 palline con in numeri $0,1,2,3$. Si estraggono a caso 2 palline in blocco.
`D1)` Calcolare la probabilità di estrarre un numero pari e un numero dispari in un qualsiasi ordine.
`D2)` Trovare la densità della variabile aleatoria X che indica il prodotto dei due numeri estratti.
`D3)` Si ripeta più volte il procedimento indicato fino a quando viene estratto per la prima volta l'insieme di numeri $\{1,2\}$. Calcolare la probabilità che il procedimento venga ripetuto un numero pari di volte (due volte, quattro volte, sei volte, ecc.).

Esercizio 2. Si lancia un dado equo. Se esce il numero 1 si lanciano due monete eque, se esce un numero diverso da 1 si lanciano due monete le cui probabilità che esca testa lanciandole è uguale a $1/3$.
`D4)` Calcolare la probabilità che sia uscito il numero 1 nel lancio del dado sapendo di aver ottenuto due teste nei due lanci di moneta.

Esercizio 3. Siano $q,r \in (0,1)$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(k,k) = \frac{1}{2}q^k(1-q) \quad \text{per } k \geq 0 \text{ intero;}$$

$$p_{X_1,X_2}(h,3h) = \frac{1}{2}(1-r)^{h-1}r \quad \text{per } h \geq 1 \text{ intero.}$$

`D5)` Calcolare $P(X_1 = X_2)$ e verificare che non dipende da q e r.
`D6)` Verificare che $P(X_1 = 3|X_2 = 3) = \frac{q^3(1-q)}{q^3(1-q)+r}$.

Esercizio 4. Sia $a > e$ arbitrariamente fissato. Inoltre sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{2x}{a^2-e^2}1_{(e,a)}(x)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = \log X$.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[e^{-2Y}] = \frac{2(\log a - 1)}{a^2-e^2}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.
Sia X una variabile aleatoria Normale con media 2 e varianza 9.
`D9)` Calcolare $P(1 < X < 5)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ con argomenti positivi.
Siano $X_1,\dots,X_{400}$ variabili aleatorie i.i.d. con media 6 e varianza 4.
`D10)` Calcolare $P(X_1 + \cdots + X_{400} < 2390)$ con l'approssimazione Normale esprimendo il risultato con la funzione Φ con argomenti positivi.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una catena di Markov omogenea su $E = \{1,2,3,4\}$ e con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 99/100 & 1/100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

`D11)` Verificare che, per $i \in \{3,4\}$, si ha $\lim_{n\to\infty} p_{i3}^{(n)} = 0$ e $\lim_{n\to\infty} p_{i4}^{(n)} = 1$.
`D12)` Calcolare le probabilità che la catena passi per lo stato 3 partendo da 1.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.

`D1)` La probabilità richiesta è $\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}}=\frac{2\cdot 2}{6}=\frac{2}{3}$.

`D2)` Ciascuno dei 6 sottoinsiemi $\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$ ha probabilità $1/6$ di essere estratto. Quindi

$$\begin{cases} p_X(0)=P(\{\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\}\})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\\ p_X(2)=P(\{1,2\})=\frac{1}{6},\\ p_X(3)=P(\{1,3\})=\frac{1}{6},\\ p_X(6)=P(\{2,3\})=\frac{1}{6}. \end{cases}$$

`D3)` La probabilità richiesta fa riferimento ad una distribuzione geometrica traslata di parametro $p=P(\{1,2\})=1/6$. Si ha

$$\sum_{h\geq 1}(1-p)^{2h-1}p=\frac{p}{1-p}\frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2}=\frac{p(1-p)}{1-(1-2p+p^2)}=\frac{1-p}{2-p}=\frac{1-1/6}{2-1/6}=\frac{5/6}{11/6}=\frac{5}{11}.$$

Esercizio 2.

`D4)` Con notazioni ovvie viene chiesto di calcolare una probabilità condizionata $P(U|T)$. Per la formula di Bayes (e la formula delle probabilità totali per $P(T)$) si ha

$$P(U|T)=\frac{P(T|U)P(U)}{P(T)}=\frac{(1/2)(1/2)(1/6)}{(1/2)(1/2)(1/6)+(1/3)(1/3)(5/6)}=\frac{1/24}{1/24+5/54}=\ldots=\frac{9}{29}.$$

Esercizio 3.

`D5)` Si ha

$$P(X_1=X_2)=\sum_{k\geq 0}p_{X_1,X_2}(k,k)=\frac{1-q}{2}\sum_{k\geq 0}q^k=\frac{1-q}{2}\frac{q^0}{1-q}=\frac{1}{2}.$$

`D6)` Si ha

$$\begin{aligned} P(X_1=3|X_2=3)&=\frac{P(\{X_1=3\}\cap\{X_2=3\})}{P(X_2=3)}\\ &=\frac{p_{X_1,X_2}(3,3)}{p_{X_1,X_2}(3,3)+p_{X_1,X_2}(1,3)}=\frac{\frac{1}{2}q^3(1-q)}{\frac{1}{2}q^3(1-q)+\frac{1}{2}(1-r)^{1-1}r}=\frac{q^3(1-q)}{q^3(1-q)+r}. \end{aligned}$$

Esercizio 4.

`D7)` Si ha $P(1\leq Y\leq \log a)=1$ e quindi

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0 & \text{se } y\leq 1,\\ (*) & \text{se } 1<y<\log a,\\ 1 & \text{se } y\geq \log a. \end{cases}$$

Per $y\in(1,\log a)$ si ha

$$(*)=P(\log X\leq y)=P(X\leq e^y)=\int_e^{e^y}\frac{2x}{a^2-e^2}dx=\left[\frac{x^2}{a^2-e^2}\right]_{x=e}^{x=e^y}=\frac{e^{2y}-e^2}{a^2-e^2}.$$

`D8)` A partire dalla risposta precedente si ha che $f_Y(y)=\frac{2e^{2y}}{a^2-e^2}1_{(1,\log a)}(y)$. Quindi

$$\mathbb{E}[e^{-2Y}]=\int_1^{\log a}e^{-2y}\frac{2e^{2y}}{a^2-e^2}dy=\frac{2}{a^2-e^2}\int_1^{\log a}dy=\frac{2}{a^2-e^2}[y]_{y=1}^{y=\log a}=\frac{2(\log a-1)}{a^2-e^2}.$$

Osservazione. In realtà non serve fare riferimento alla risposta precedente osservando che $e^{-2Y}=e^{-2\log X}=X^{-2}$. Infatti si ha

$$\mathbb{E}[e^{-2Y}]=\mathbb{E}[X^{-2}]=\int_e^a x^{-2}\frac{2x}{a^2-e^2}dx=\frac{2}{a^2-e^2}\int_e^a x^{-1}dx=\frac{2}{a^2-e^2}[\log x]_{x=e}^{x=a}=\frac{2(\log a-1)}{a^2-e^2}.$$

Esercizio 5.
`D9)` La standardizzata di X è $X^* = \frac{X-2}{\sqrt{9}} = \frac{X-2}{3}$; quindi si ha

$$\begin{aligned} P(1 < X < 5) &= P\left(\frac{1-2}{3} < \frac{X-2}{3} < \frac{5-2}{3}\right) \\ &= P\left(-\frac{1}{3} < X^* < 1\right) = \Phi(1) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = \Phi(1) - \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \Phi(1) + \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - 1. \end{aligned}$$

`D10)` Si ha

$$P(X_1 + \cdots + X_{400} < 2390) = P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{400} - 6 \cdot 400}{\sqrt{4}\sqrt{400}} < \frac{2390 - 6 \cdot 400}{\sqrt{4}\sqrt{400}}\right) \approx \Phi\left(-\frac{10}{40}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{4}\right).$$

Esercizio 6.
`D11)` Essendo lo stato 4 assorbente, i limiti da verificare per $i = 4$ sono immediati. Infatti si ha $p_{44}^{(n)} = 1$ e $p_{43}^{(n)} = 0$ per ogni n, da cui si ottengono banalmente i limiti

$$\lim_{n\to\infty} p_{44}^{(n)} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} p_{43}^{(n)} = 0.$$

Per $i = 3$ osserviamo che, se la catena parte da 3, dopo n passi resta in 3 se e solo se è rimasta nello stato 3 in tutti i passi, cioè $p_{33}^{(n)} = (99/100)^n$; quindi

$$\lim_{n\to\infty} p_{33}^{(n)} = 0.$$

Infine, essendo $\{3, 4\}$ una classe chiusa (ovviamente non irriducibile; lo stato 3 è transiente e lo stato 4 è ricorrente), si ha $p_{34}^{(n)} = 1 - p_{33}^{(n)}$, cioè $p_{34}^{(n)} = 1 - (99/100)^n$; quindi

$$\lim_{n\to\infty} p_{34}^{(n)} = 1.$$

`D12)` Sia $C = \{3\}$; allora l'insieme degli stati che non appartengono a C e che comunicano con C è $D_C = \{1, 2\}$. In corrispondenza le probabilità di passaggio per 3 partendo da 1 e da 2 sono λ_1 e λ_2 rispettivamente, e sono le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} \lambda_1 = p_{13} + p_{11}\lambda_1 + p_{12}\lambda_2 \\ \lambda_2 = p_{23} + p_{21}\lambda_1 + p_{22}\lambda_2, \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{4} + \frac{\lambda_1}{4} + \frac{\lambda_2}{4} \\ \lambda_2 = \frac{1}{6} + \frac{\lambda_1}{3} + \frac{\lambda_2}{3}. \end{cases}$$

La probabilità richiesta è λ_1. Dalla prima equazione si ottiene (con qualche calcolo) $\lambda_2 = 3\lambda_1 - 1$. Allora, sostituendo questa nella seconda equazione, si ha

$$3\lambda_1 - 1 = \frac{1}{6} + \frac{\lambda_1}{3} + \frac{3\lambda_1 - 1}{3},$$

da cui segue $(3 - \frac{1}{3} - 1)\lambda_1 = 1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}\lambda_1 = \frac{5}{6}$, $\lambda_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
Osservazione. Si osservi che, sostituendo il valore ottenuto in $\lambda_2 = 3\lambda_1 - 1$ (che segue dalla prima equazione del sistema), si ha (valore non richiesto nella domanda dell'esercizio) $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Quindi si ha $\lambda_1 = \lambda_2$ e questa uguaglianza non sorprende; infatti, partendo da 1 o da 2, prima o poi si arriva in $\{3, 4\}$ (precisamente ci sarà un assorbimento nello stato 4, passando o non passando per lo stato 3), e l'uguaglianza $\lambda_1 = \lambda_2$ sembra essere una conseguenza delle uguaglianze $p_{13} = p_{14}$ e $p_{23} = p_{24}$.