Soluzioni foglio 7

1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{|x+y|}$ Ω = dominio di $f(x) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ t.c. } y \neq -x\}$

$y=mx$ $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x+mx|} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{|1+m|} = 0$ $(m\neq -1)$

$L=0$ candidato limite

- $\left|\frac{\rho^2\cos^2\theta}{|\rho\cos\theta+\rho\sin\theta|}\right| = \frac{\rho^{\cancel{2}}|\cos\theta|}{\cancel{\rho}\,|\cos\theta+\sin\theta|} = \rho\left|\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right|$

per $\theta = \frac{\pi}{4}$ il denominatore è 0

$\Rightarrow$ per $\theta \to \frac{\pi}{4}$, $\left|\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right| \to +\infty$

$\Rightarrow$ proviamo a dimostrare che il limite non esiste:

Consideriamo $y=-x+x^3$, allora $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{|x-x-x^3|} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{|-x^3|} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{|-x|} = +\infty$

$\Rightarrow$ non solo il limite non esiste, ma la funzione non è neppure limitata in un intorno di $(0,0)$

2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{4x^2+y^4}$ $\Rightarrow$ consideriamo le rette $y=mx$

$\Omega = \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot m^2x^2}{4x^2+m^4x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3\ m^2}{x^2(4+m^4x^2)} = \lim_{x\to 0} x\,\frac{m^2}{4+m^4x^2} = 0$

$L=0$ candidato limite

- $\left|\frac{xy^2}{4x^2+y^4}\right| = |x|\left|\frac{y^2}{4x^2+y^4}\right| \leq ?$

- $\left|\frac{\rho\cos\theta\rho^2\sin^2\theta}{4\rho^2\cos^2\theta+\rho^4\sin^4\theta}\right| = \frac{\rho^{\cancel{3}}}{\cancel{\rho^2}}\left|\frac{\cos\theta\sin^2\theta}{4\cos\theta+\rho^2\sin^4\theta}\right| = \rho\left|\frac{\cos\theta\sin^2\theta}{4\cos\theta+\rho^2\sin^4\theta}\right|$

non riusciamo a separare ρ dalla parte che dipende da θ

$\Rightarrow$ forse $L=0$ non è il limite, ovvero forse il limite non esiste

$\longrightarrow$

$y=\sqrt{x}$ $\Rightarrow$ lungo questo percorso, il limite in due variabili diventa:

(2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{4x^2+x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}\left(\frac{1}{4+1}\right) = \frac{1}{5} \neq 0$$

$\Rightarrow$ il limite non esiste

3) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^3+y^9}$$ $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ t.c. } y^9 \neq -x^3\}$

- $y=mx$ $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\,mx}{x^3+m^9x^9} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 m}{x^3(1+m^9x^6)} = \lim_{x\to 0}\frac{m}{x(1+m^9x^6)} = \pm\infty$$

Infatti, se $m>0$, $$\lim_{x\to 0}\frac{m}{x(1+m^9x^6)} = \begin{cases} +\infty & \text{per } x\to 0^+ \\ -\infty & \text{per } x\to 0^- \end{cases}$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0}\frac{m}{x(1+m^9x^6)}$$

$\Rightarrow$ dato che il limite non esiste sulle rette $y=mx$ con $m>0$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^3+y^9}$$

(<u>Ricorda</u>: se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ esiste, con Ω dominio di $f(x,y)$ e (x_0,y_0) p.to di accumulazione per Ω, allora $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x)$ deve esistere anche su <u>ogni</u> restrizione $\Omega'\subset\Omega$ che abbia (x_0,y_0) punto di accumulazione)

Nel nostro caso $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ t.c. } y^9 \neq -x^3\}$ e in $\Omega'\subset\Omega$, con $\Omega' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ t.c. } y=mx,\ m>0\}$, il limite non esiste $\Rightarrow$ il limite non può esistere nemmeno in Ω

4) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{y^2+\frac{1}{2}|x|}$$ $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ t.c. } (x,y)\neq(0,0)\} = \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

- $y=mx$ $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{m^2x^2+\frac{1}{2}|x|}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{m^2x^2+1/2\,x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{m^2x+1/2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{m^2x^2-\frac{1}{2}x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{m^2x-\frac{1}{2}} = 0$$

<u>OK</u>

$L=0$ è il candidato limite

proviamo a dimostrarlo:

- $$\left|\frac{\rho^2\cos^2\theta}{\rho^2\sin^2\theta+\frac{1}{2}|\rho\cos\theta|}\right| = \frac{\rho^2\cos^2\theta}{|\rho^2\sin^2\theta+\frac{1}{2}\rho|\cos\theta||} = \frac{\rho^{\cancel{2}}\cos^2\theta}{\cancel{\rho}|\rho\sin^2\theta+\frac{1}{2}|\cos\theta||} \underset{\uparrow}{\leq} \rho\frac{\cos^2\theta}{|\frac{1}{2}|\cos\theta||} =$$

dato che $\sin^2\theta \geq 0$

$$|\rho\sin^2\theta+\tfrac{1}{2}|\cos\theta|| \geq |\tfrac{1}{2}|\cos\theta||$$

$$= \rho\frac{\cos^{\cancel{2}}\theta}{\frac{1}{2}|\cancel{\cos\theta}|} = \rho\, 2|\cos\theta| \underset{\uparrow}{\leq} 2\rho \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0 \quad \checkmark$$

dato che $|\cos\theta| \leq 1$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{y^2+\frac{1}{2}|x|} = 0$$

5) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

- $y = mx$ $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2m^2x^2}{(x^2+m^2x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4m^2}{x^4+m^4x^4+2m^2x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{m^2}{1+m^4+2m^2} = \frac{m^2}{1+m^4+2m^2}$$

$\Rightarrow$ Dato che questo limite dipende da m (coefficiente angolare della retta che percorro per avvicinarmi a $(0,0)$)

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$ non esiste

6) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{xy\log|y|} \qquad \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y): y=0\}$$

- $y = mx$ $$\lim_{x\to 0} e^{xmx\log|mx|} = \lim_{x\to 0} e^{mx^2\log|mx|}$$

Studiamo: $$\lim_{x\to 0} mx^2\log|mx| = m\lim_{x\to 0}\frac{\log|mx|}{1/x^2} \overset{\text{H}}{=} m\lim_{x\to 0}\frac{\frac{m}{|mx|}}{\frac{-2}{x^3}} =$$

(H: De l'Hopital)

$$= m^2 \lim_{x\to 0}\frac{1}{|mx|}\cdot\left(-\frac{x^3}{2}\right) = -\frac{m^2}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{|mx|} = 0$$

quindi $$\lim_{x\to 0} e^{mx^2\log|mx|} = e^0 = 1$$

$L = 1$ candidato limite

dimostriamolo:

Vogliamo che: $\left| e^{\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta\,\log|\rho\sin\theta|} - 1 \right| \leq g(\rho)$ con $g(\rho) \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$ e $g(\rho) \geq 0$

$$\left| e^{\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta\,\log|\rho\sin\theta|} - 1 \right| = \left| e^{\rho^2\cos\theta\sin\theta\,\log|\rho\sin\theta|} - 1 \right| \overset{\star}{\leq}$$

OSS: $\cos\theta\sin\theta \leq 1$ quindi $e^{\rho^2\cos\theta\sin\theta\,\log|\rho\sin\theta|} \leq e^{\rho^2\log|\rho\sin\theta|} = e^{\rho^2\log(\rho|\sin\theta|)}$

$$\overset{\star}{\leq} \left| e^{\rho^2\log(\rho|\sin\theta|)} - 1 \right| \overset{(\log(ab)=\log a+\log b)}{=} \left| e^{\rho^2(\log\rho + \log|\sin\theta|)} - 1 \right| = \left| e^{\rho^2\log\rho} \cdot e^{\rho^2\log|\sin\theta|} - 1 \right| \overset{\star}{\leq}$$

OSS: $|\sin\theta| \leq 1 \Rightarrow \log(|\sin\theta|) \leq 0 \Rightarrow e^{\rho^2\log|\sin\theta|} \leq e^0 = 1$

$$\overset{\star}{\leq} \left| e^{\rho^2\log\rho} - 1 \right|$$ ← questa è la $g(\rho)$ che stiamo cercando, infatti:

$$\lim_{\rho\to 0} g(\rho) = \lim_{\rho\to 0} \left| e^{\rho^2\log\rho} - 1 \right| = 0$$

basta calcolare $\lim_{\rho\to 0} \rho^2\log\rho = \lim_{\rho\to 0} \frac{\log\rho}{1/\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\frac{1}{\rho}}{-2/\rho^3} =$

$$= \lim_{\rho\to 0} -\frac{1}{2}\frac{\rho^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{\rho}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\rho\to 0} \left| e^{\rho^2\log\rho} - 1 \right| = |e^0 - 1| = |1-1| = 0 \quad ✓$$

7) Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} \qquad \text{con } f(x) = \int_0^x \sin(s^2-s)\,ds$$

OSS: $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ perché l'intervallo di integrazione $[0,x]$ si restringe sempre di più e la funzione integranda $g(s)=\sin(s^2-s)$ è limitata in un intorno di 0 (dato che $|g(s)| \leq 1$)

⇒ Posso applicare de l'Hopital →

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}$$

ma $f'(x) \underset{\uparrow}{=} g(x)-g(0) = \sin(x^2-x)-\sin(0) = \sin(x^2-x)$

teorema fondamentale del calcolo integrale

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2-x)}{2x}$$

Taylor: per $t\to 0$ abbiamo $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)$

pongo $t = x^2-x$ ($t\to 0$ per $x\to 0$)

$$\sin(x^2-x) = x^2-x-\frac{1}{6}(x^2-x)^3 + o(x^4)$$

Ricorda: $(a+b)^3 =$
$= a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$

$$= x^2-x-\frac{1}{6}(x^6-x^3-3x^5-3x^7)+o(x^4)$$

$$= x^2-x+\frac{1}{6}x^3+o(x^4)$$

quindi si ha $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} x-1+\frac{x^2}{6}+o(x^3) = -\frac{1}{2}$

Risultato: $-\frac{1}{2}$

8) $\begin{cases} y' = e^{x-\frac{3}{4}y} \\ y(0)=0 \end{cases} = \begin{cases} y' = e^x\cdot e^{-\frac{3}{4}y} \\ y(0)=0 \end{cases}$ → Eq. diff. a variabili separabili

• Dato che $e^{-\frac{3}{4}y(0)} = e^{-\frac{3}{4}\cdot 0} = 1 \neq 0$ escludiamo la soluzione costante $y\equiv 0$ (cioè $y\equiv 0$ non è soluzione)

• Essendo $e^{-3/4\, 0} \neq 0$, possiamo dividere:

$$\frac{y'}{e^{-3/4y}} = e^x \quad \text{ovvero} \quad \frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{e^{-3/4y}} = e^x \iff e^{3/4y}dy = e^x dx$$

Integriamo a sx e dx: $\int_0^y e^{3/4y}dy = \int_0^x e^x dx \iff \left(\frac{4}{3}e^{3/4y}\right)\Big|_0^y = \left(e^x\right)\Big|_0^x$

$$\frac{4}{3}e^{3/4y}-\frac{4}{3} = e^x - 1 \iff \frac{4}{3}e^{3/4y} = e^x+\frac{1}{3} \iff e^{3/4y} = \frac{3}{4}e^x+\frac{1}{4}$$

$$\iff \ln\left(e^{3/4y}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}e^x+\frac{1}{4}\right) \iff \frac{3}{4}y = \ln\left(\frac{3}{4}e^x+1/4\right) \iff \boxed{y = \frac{4}{3}\ln\left(\frac{3}{4}e^x+1/4\right)}$$

SOLUZIONE

Verifica: $y(0) = \frac{4}{3}\ln\left(\frac{3}{4}e^0+\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{3}\ln\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{3}\ln(1) = 0$ ✓

$$y' = \frac{4}{3}\,\frac{3/4\,e^x}{\frac{3}{4}e^x+1/4} = e^x\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}e^x+1/4} = e^x\cdot e^{-3/4y}$$ ✓

9) $y'-y=-2e^{-x}$ $\rightarrow$ Eq. differenziale lineare del 1° ordine
$y'+a(x)y=f(x)$ con $\begin{cases} a(x)=-1 \\ f(x)=-2e^{-x} \end{cases}$ ⑥

Metodo del fattore integrante:

$A(x) =: \int a(x)\,dx = \int -1\,dx = -x$

Moltiplico a sx e dx per $e^{A(x)}$: $\underbrace{e^{-x}y'(x)-e^{-x}y(x)}_{\frac{d}{dx}\left(e^{-x}y(x)\right)} = -2e^{-2x}$ $\rightarrow$ per vederlo basta derivare $e^{-x}y(x)$

quindi $\frac{d}{dx}\left(e^{-x}y(x)\right) = -2e^{-2x}$

Integro a sx e dx: $\int \frac{d}{dx}\left(e^{-x}y(x)\right)dx = \int -2e^{-2x}\,dx$

l'integrale della derivata di una funzione è la funzione stessa

$\Rightarrow e^{-x}y(x) = e^{-2x} + c$

$\boxed{y(x) = e^{-x} + c\cdot e^{x}}$

Imponiamo la condizione $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$ per trovare c

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+c\cdot e^{x}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } c=0 \\ +\infty & \text{se } c>0 \\ -\infty & \text{se } c<0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ prendiamo $c=0$

$\boxed{y(x)=e^{-x}}$

SOLUZIONE