23/04/2024 | LEZ 14 |

RELAZIONI DI RIDUZIONE TRA CLASSI

COME GIÀ DETTO A LEZIONE, $P \subseteq NP$ RAPP. UN GROSSO QUESITO.

RAPPRESENTA TUTTAVIA UNA SPECIFICA SITUAZIONE DI UNA SITUAZIONE COMPLICATA.

OSSIA COME POSSIAMO CAPIRE, PER ESEMPIO, UN LINGUAGGIO CHE $\in NP$, $\notin$ INVECE A P?

DETTO IN MODO FORMALE

DATE 2 CLASSI C_1, C_2, $C_1 \subseteq C_2$, IPOTIZZANDO CHE $C_1 \neq C_2$.

$\exists$ UN LINGUAGGIO SEPARATORE L, t.c. $L \in C_2 - C_1$?

COME POSSIAMO FARE?

POSSIAMO USARE DEGLI $\Rightarrow$
- RIDUZIONE
- DEF 6.3
- DEF 6.4

STRUMENTI

(1) π - RIDUZIONE

- CONSIDERO UN PREDICATO π $\to$ "FUNZIONE" CHE DA TRUE o FALSE
  - $\to$ ES: $\pi(f) = \forall n [f(n) \leq n]$
- CONSIDERO IL CONCETTO DI RIDUZIONE ($\preceq$, PDF "LEZ 10")

DEF

SIA L_1, L_2,

$L_1 \preceq_\pi L_2$ IF $\to \exists f$ TOT e CALC t.c. $\forall x \in \{0,1\}^* : \Rightarrow$

$\Rightarrow [x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2 \wedge \pi(f) = TRUE]$

DA QUESTO 2 DEF

6.4 SIA CLASSE C_1, π:

C_1 È CHIUSA RISPETTO A π SE:

$$\forall L_0 \in C_1, \forall L \leq_\pi L_0 \, [L \in L_1]$$ -> qualsiasi linguaggio ridu. a L0 app. a C1

6.3 SIAMO C, L, π:

$L \subseteq \Sigma^*$ È C-COMPLETO RISPETTO A π SE:

① $L \in C$

② $\forall L' \in C \, [L' \leq_\pi L]$

CHE USIAMO x UN TEOREMA:

TEOREMA 6.20

SIA C_1, C_2, $C_1 \subseteq C_2$, π-RIDUZIONE, SE:

- C_1 CHIUSA RISPETTO A π-RIDUZIONE
- $\forall L$ C_2-COMPLETO RISPETTO A //.

ALLORA

$$L \in C_1 \iff C_1 = C_2$$

DIM

SAPENDO CHE:

- C_1 CHIUSA RISPETTO A $\leq_\pi$

$$\Rightarrow \forall L_0 \in C_1 \, \forall L' : L' \leq_\pi L_0 \, [L' \in C_1]$$

- L È C_2-COMPLETO

1° PARTE $\Rightarrow$ (SE)

- SIA $L \in C_1$, PARTE SINISTRA
- POICHÉ L C_2-COMPLETO:

$$\forall L' \in C_2 [L' \leq_\pi L]$$

- POICHÈ C_2 CHIUSA RISPETTO A $\leq_\pi$

$$\forall L \in C_2, \forall L' \leq_\pi L [L' \in C_2]$$

QUINDI

$$\underbrace{\text{SE } L \in C_1 \Rightarrow \forall L' \in C_2 [L' \leq_\pi L] \Rightarrow \forall L' \in C_1 \Rightarrow C_1 = C_2}$$

2° PARTE (SE E SOLO SE): BANALE

SE $C_1 = C_2$:

$$L \in C_2 \rightarrow L \in C_2$$

■

prima di mostrare altri teoremi molto importanti per la congettura N != NP, vediamo un altro strumento utile.

DEF 6.5.

SIA L_1, L_2.

L_1 È POLINOMIALMENTE RIDUCIBILE A L_2 ($L_1 \leq_P L_2$) SE:

$$\begin{cases} \cdot \exists f \text{ TOT, CALC.}, f \in FP & \wedge \\ \cdot \forall x \in \Sigma_1^* [x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2] \end{cases}$$

$$\boxed{\text{DA QUESTA LEZ. IN POI } \quad L_1 \leq_P L_2 = L_1 \leq L_2}$$

COSA SERVE? SERVE PER APPLICARE IL TEOREMA 6.20. SU P e NP. QUINDI

SE P CHIUSO e L NP-COMPLETO

TEOREMA $L \in P \Leftrightarrow P = NP$ OPP. DIM. $\exists$ LINGUAGGI SEPARATORI TRA P e NP.

X ARRIVARE A QUELLA CONGETTURA.

(CHÈ È UNA CONGETTURA, OVVERO NON È CONFERMATO).

DOVREMMO DIMOSTRARE CHE:

P CHIUSO

TEOREMA 6.21

$\boxed{\text{LA CLASSE P È CHIUSA RISPETTO ALLA RIDUZIONE POLINOMIALE}}$

DIM

$\forall$ = • SIA $L \in P : \exists T, \exists k$ t.c. T DEC. L e $\forall x \in \{0,1\}^*$ $[dTIME(T,x) \in O(|x|^k)]$

RICORDA $\leq \, = \, \leq_p$

$\forall$ = • SIA $L' : L' \leq L$

$\Rightarrow \exists T_F, \exists c,$ t.c.:

$\forall x \in \{0,1\}^* [x \in L' \Leftrightarrow T_F(x) \in L \wedge dTIME(T_F, x) \in O(|x|^c)]$

ALLORA COSTR. T', CHE DECIDE L'

T': INPUT x, CON SEGUE. PROCEDIMENTI:

1. SIMULO $T_F(x)$ E WRITE y SU N_2
2. SIMULO $T_F(y)$ → • SE VA IN q_A → ACCETTO
   • SE VA IN q_R → RIGETTO.

T DECIDE L' POICHÈ:

- SE $x \in L \Rightarrow T_F(x)$ COMPUTA y CORR. → q_A
- SE $x \notin L \Rightarrow T_F(x)$ COMPUTA y SBAGLIATO → q_R

MA QUANTO TEMPO IMPIEGA?

(1) FACILE $\to \in O(|x|^k)$ x DEF. F

(2) x DEF $\Rightarrow O(|y|^c)$

$$TOT = O(|x|^k) + O(|y|^c) = O(|x|^k + |y|^c)$$

COME POSSIAMO TOGLIERE $|y|$?

- SAPENDO CHE

— $dTIME(T_{F}, x) \leq |x|^k$ e (x dSPACE $\leq$ dTIME)

$\Downarrow$

— $|f(x)| = |y| \leq |x|^k$ $\to$ la lunghezza deve essere lunga alpiù quel valore, altrimenti non riuscirebbe a finire tutto in dtime

QUINDI

$$O(|x|^k + |y|^c) = O(|x|^k + |x|^{kc}) = O(|x|^{kc}) =$$

COST

QUINDI $\boxed{L' \in P.}$ $\forall L' : L' \leq L$

con questo dimostrato, possiamo usarlo per la congettura di prima.
Ma come detto prima, non possiamo dire di PRECISO se esiste un linguaggio separatore o meno.
Molti sono più propensi in N!=Np, quindi per dimostrare che un problema (o linguaggio) non appartiene a P basterebbe dimostrare che L è Np-completo.

LA CONGETTURA, INFATTI, VIENE USATA IN QUESTA FORMA.

SE INVECE $P \neq NP$ e,

SE L NP-COMPLETO $\Rightarrow L \notin P$