Algoritmo del Simplesso per la Programmazione Lineare

Corso di Ricerca Operativa
A.A. 2016-2017

Argomenti

- **Aspetti preliminari**
- Schema generale dell'algoritmo del Simplesso
- Matrice di pivot
- Algoritmo del Simplesso in due fasi
- Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

Aspetti preliminari

- Introduzione

L'algoritmo del simplesso è stato concepito nel 1947 dal matematico e statistico George B. Dantzig, noto per essere il padre della Programmazione Lineare.

Il simplesso è un poliedro e prevede un algoritmo di tipo iterativo che si basa sull'idea di risolvere un problema di PL attraverso una enumerazione implicita delle SBA, limitando ad ogni iterazione lo spazio della ricerca alle sole SBA potenzialmente migliori della SBA corrente.

Aspetti preliminari

I primi passi dell'algoritmo

Per poter illustrare i passi dell'algoritmo del simplesso, si supponga di avere un problema (P) di PL in forma canonica rispetto a un insieme di indici di base ammissibile $\bar{B}$. Per semplicità, ma senza perdita di generalità, sia $\bar{B}$={1,…,m}.

Di conseguenza, (P) può scriversi come:

$$\min z(x) - \bar{d} = \bar{c}_{m+1}x_{m+1} + \cdots + \bar{c}_n x_n \qquad (8.1)$$

$$s.v.$$

$$x_1 + \bar{a}_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1 \geq 0$$

$$\ldots$$

$$x_m + \bar{a}_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + \bar{a}_{mn}x_n = \bar{b}_m \geq 0$$

$$x_1, \ldots, x_n \geq 0,$$

a cui corrisponde la SBA $\bar{x} = [\bar{b} \;\; 0_{n-m}]^T$, avente valore $\bar{z} = \bar{d}$.

Aspetti preliminari

- Considerazioni in base ai Teoremi 6.2 e 6.3

Si possono verificare i seguenti tre casi:

a) $\bar{c}_{m+1} + \cdots + \bar{c}_n$ sono coefficienti di costo non negativi. Dal Teorema 6.2, segue che la SBA $\bar{x}$ è soluzione ottima per (P);

b) esiste un indice $k, k = m + 1, \dots, n$, tale che $\bar{c}_k \geq 0$ e $\bar{A}_k \leq 0$. Dal Teorema 6.3, discende che (P) è illimitato inferiormente;

c) esiste un indice $k \in \{m + 1, \dots, n\}$ tale che $\bar{c}_k < 0$ e un indice $\ell \in \{1, \dots, m\}$ tale che $\bar{a}_{\ell_k} \geq 0$.

Aspetti preliminari

In questo caso si può definire una nuova soluzione ammissibile $\hat{x}$, ponendo $\hat{x}_{m+1} = \cdots = \hat{x}_{k-1} = \cdots = \hat{x}_n = 0$ (cioè tutte le variabili non di base eccetto $\hat{x}_k$uguali a zero).

Dalla (8.1) si ha

$$\hat{z} = \bar{d} + \bar{c}_k\ \hat{x}_k.$$

Poiché $\bar{c}_k$ < 0, il valore di z($\hat{x}$) potrebbe essere decrementato qualora $\hat{x}_k$assuma valore maggiore di zero.

Dai vincoli di (P) si ricava che

$$\hat{x}_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{ik}x_k > 0,\ i = 1, \dots, m,$$

con almeno un indice $i, i = 1, \dots, m$, tale che $\bar{a}_{ik}$> 0, da cui,

$$x_k < \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}},\ \forall i = 1, \dots, m\colon \bar{a}_{ik} > 0.$$

Aspetti preliminari

Pertanto il massimo valore che $\hat{x}_k$ può assumere è:

$$\hat{x}_k = \min_{i=1,\dots,m}\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} : \bar{a}_{ik} > 0\right\} = \frac{\bar{b}_h}{\bar{a}_{hk}}$$

dove h è l'indice di riga in corrispondenza del quale si ottiene il minimo, ovvero:

$$h = \underset{i=1,\dots,m}{\operatorname{argmin}}\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} : \bar{a}_{ik} > 0\right\}$$

Con tale valore di $\hat{x}_k$ e ricordando di aver posto $\hat{x}_{m+1} = \dots = \hat{x}_{k-1} = \dots = \hat{x}_n = 0$, si ottiene

$$\hat{x}_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{ik}\frac{\bar{b}_h}{\bar{a}_{hk}} > 0,\ i = 1, \dots, m,$$

e, in particolare,

$$\hat{x}_h = \bar{b}_h - \bar{a}_{hk}\frac{\bar{b}_h}{\bar{a}_{hk}} = 0.$$

Aspetti preliminari

- Essendo $\bar{a}_{hk} > 0$, il valore $\hat{z}$ in corrispondenza di $\hat{x}$ è

$$\hat{z} = \bar{d} + \bar{c}_k \frac{\bar{b}_h}{\bar{a}_{hk}} \leq \bar{z}.$$

Ciò significa che la nuova soluzione ammissibile $\hat{x}$ ha valore non inferiore rispetto al valore della SBA $\bar{x}$.

Un altro importante risultato è che $\hat{B} = \{1, \ldots, h-1, k, h+1, \ldots, m\}$ (in altri termini, $\hat{B}$ si ottiene da $\bar{B}$ rimpiazzando l'indice h con k) è un insieme di indici che definisce una base di A.

Aspetti preliminari

- Per dimostrare che le colonne $A_j, j \in \hat{B}$, della matrice $A\,(m \times n)$ sono linearmente indipendenti, ovvero che il determinate di $A_{\hat{B}}$ è diverso da zero, è sufficiente dimostrare che il determinante della matrice quadrata m-dimensionale $(A_{\bar{B}}^{-1}A_{\hat{B}})$ è diverso da zero.

  Infatti, il determinante di un prodotto di due matrici è pari al prodotto dei determinanti delle due matrici e, quindi, se $\det(A_{\bar{B}}^{-1}A_{\hat{B}}) \neq 0$ anche $\det(A_{\hat{B}}) \neq 0$, essendo $\det(A_{\bar{B}}^{-1}) \neq 0$ giacché $A_{\bar{B}}$ è per ipotesi una matrice di base.

  Si esamina pertanto la matrice $A_{\bar{B}}^{-1}A_{\hat{B}}$ colonna per colonna.

Aspetti preliminari

La generica colonna $j, j = 1, \ldots, m, j \neq k$, si ottiene come $A_{\bar{B}}^{-1}A_j$ e, quindi, non è altro che la j-esima colonna della matrice identità I_m.

La colonna k si ottiene calcolando $A_{\bar{B}}^{-1}A_k = \bar{A}_k$.

Di conseguenza, la matrice $A_{\bar{B}}^{-1}A_{\hat{B}}$ è uguale alla matrice identità, a meno della h-esima colonna che è pari a $\bar{A}_k$:

$$A_{\bar{B}}^{-1}A_{\hat{B}} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{a}_{1k} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \bar{a}_{hk} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \bar{a}_{mk} & 1 \end{bmatrix} \qquad (8.3)$$

Aspetti preliminari

Sviluppando il calcolo del determinante con $\bar{A}_k$ come colonna pivot, è facile dimostrare che $\det(A_{\bar{B}}{}^{-1} A_{\hat{B}}) = \bar{a}_{hk} > 0$.

Ne consegue che $\hat{B}$ è un insieme di indici di base a cui corrisponde la SBA $\hat{x}$ tale che $z(\hat{x}) \leq z(\bar{x})$.

La variabile x_h in corrispondenza dell'insieme di indici di base $\hat{B}$ assumerà valore zero e, di conseguenza, si dirà variabile «**uscente**» dalla base, mentre la variabile x_k si dirà variabile «**entrante**» nella base, al posto di x_h.

Le SBA $\hat{x}$ e $\bar{x}$ sono «**adiacenti**» tra loro, giacché i corrispondenti insiemi di indici di base $\hat{B}$ e $\bar{B}$ differiscono tra loro di un solo elemento.

Aspetti preliminari

- Esempio

Si consideri il seguente problema di PL, in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base ammissibile B = {1, 2, 3}:

$$\min z(x) = 2x_4 - 3x_5 + 4x_6 + 24$$

$$s.v.$$

$$x_1 + 2x_4 + x_5 + x_6 = 10$$

$$x_2 + 3x_4 - 2x_5 - x_6 = 8$$

$$x_3 - x_4 + x_5 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

La corrispondente SBA è

$\bar{x} = [10\ \ 8\ \ 6\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$, avente valore $\bar{z} = 24$.

Si osservi che:

1. $\bar{c}_5 = -3 < 0$;
2. $\bar{a}_{15} = \bar{a}_{35} = 1 > 0$.

Aspetti preliminari

- Esempio

Ponendo $\hat{x}_4 = \hat{x}_6 = 0$ e $\hat{x}_5 = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i5}} : \bar{a}_{i5} > 0 \right\} = \{10,6\}$, si avrà:

$$\hat{x}_1 = 10 - 6 = 4;$$
$$\hat{x}_2 = 8 + 12 = 20;$$
$$\hat{x}_3 = 6 - 6 = 0.$$

$\hat{B} = \{1, 2, 5\}$ è un insieme di indici di base ammissibile, e la corrispondente SBA $\hat{x} = [4\ \ 20\ \ 0\ \ 0\ \ 6\ \ 0]^T$ è tale che $\hat{z} = 6 < 24 = \bar{z}$.

Aspetti preliminari

È ora possibile ripetere per la SBA $\hat{x}$ la valutazione effettuata per $\bar{x}$ in precedenza.

Allo scopo, è necessario che il problema (P) di PL sia posto in forma canonica rispetto a $\hat{B}$.

Dal momento che $\hat{B}$ differisce da $\bar{B}$ solo per un indice, occorre eseguire una semplice operazione di «**ripristino**» della forma canonica, attraverso un'operazione di pivot sull'elemento $\bar{m}_{hk} = \bar{a}_{hk}$ della seguente matrice $\bar{M}$ di dimensioni $[(m+1) \times (n+1)]$ che definisce (P):

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} \bar{d} & \bar{c}^T \\ \bar{b} & \bar{A} \end{bmatrix}$$

Per convenzione, la prima colonna di $\bar{M}$ si identifica come colonna 0, così come la prima riga è detta riga 0.

Aspetti preliminari

- Esempio

Si consideri il problema di PL, di cui al riquadro precedente, in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base ammissibile $\bar{B} = \{1, 2, 3\}$.

Tale problema è definito dalla seguente matrice $\overline{M}$ (4×7):

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} -24 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 4 \\ 10 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aspetti preliminari

- Esempio

Eseguendo un'operazione di pivot sull'elemento $\bar{m}_{35} = \bar{a}_{35}$= 1, si ottiene:

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 20 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a cui corrisponde la formulazione equivalente di (P):

$$\min z(x) = 3x_3 - x_4 + 4x_6 + 6$$

$$s.v.$$

$$x_1 - x_3 + 3x_4 + x_6 = 4$$

$$x_2 + 2x_3 + x_4 - x_6 = 20$$

$$x_3 - x_4 + x_5 \quad = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Aspetti preliminari

- Esempio

in forma canonica rispetto a $\hat{B} = \{1, 2, 5\}$.

Avendo a disposizione il problema in forma canonica rispetto a Bˆ , si può osservare che la corrispondente SBA $\hat{x}= [4 \ \ 20 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 6 \ \ 0]^T$, avente valore $\hat{z} = 6$, non è ottima, ma può essere migliorata, facendo entrare in base la variabile x4 al posto di x_1.

Argomenti

- Aspetti preliminari
- **Schema generale dell'algoritmo del Simplesso**
- Matrice di pivot
- Inizializzazione dell'algoritmo del Simplesso
- Convergenza dell'algoritmo del Simplesso
- Algoritmo del Simplesso rivisto

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

- I passi fondamentali dell'algoritmo del Simplesso

Sulla base di quanto illustrato in precedenza, è ora possibile delineare i passi fondamentali che caratterizzano l'algoritmo del simplesso, di cui appresso se ne riporta, nella figura di seguito, lo pseudocodice.

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

```
procedure ALGO_SIMPLESSO(Input: (P): problema di PL in forma canonica
rispetto ad un insieme di indici di base ammissibile B^(0) = { B_1^(0), ..., B_m^(0) }; Output: x*:
soluzione; illimitato, ottimo: binary)
    N^(0) := {1, ..., n}\B^(0); A^(0) := A; b^(0) := b; c^(0) := c; d^(0) := d;
    Sia x^(0) la SBA corrispondente a B^(0): x_{B^(0)}^(0) := b^(0), x_{N^(0)}^(0) = 0;
    t := 0; illimitato := false; ottimo := false;
    while ottimo = false and illimitato = false do
        if c_j^(t) ≥ 0 per ogni j ∈ N^(t) then ottimo := true; x* = x^(t);
        else
            Scegli un indice k in corrispondenza del quale c_k^(t) < 0;
              (* x_k è la variabile entrante in base *)
            if a_ik^(t) ≤ 0, i = 1, ..., m then illimitato := true;
            else
                h := arg min_{i=1,...,m} { b_i^(t) / a_ik^(t) : a_ik^(t) > 0 };
                  (* la variabile di indice B_h^(t) esce dalla base *)
                Esegui pivot su elemento a_hk^(t): calcola A^(t+1), b^(t+1), c^(t+1), d^(t+1);
                B_h^(t+1) := k e B_j^(t+1) := B_j^(t), j = 1,...,m, j ≠ h;
                N^(t+1) := {1, ..., n}\B^(t+1);
                x_{B^(t+1)}^(t+1) := b^(t+1), x_{N^(t+1)}^(t+1) := 0;
                t := t + 1;
            end_else
        end_else
    end_while
end_procedure
```

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

Scelta della variabili entrante

La scelta della variabile x_k entrante in base può essere condotta determinando l'indice k come:

$$k = \underset{j \in N^{(t)}}{\operatorname{argmin}} \left\{ c_j^{(t)} : c_j^{(t)} < 0 \right\}$$

ovvero, individuando la direzione lungo la quale, localmente, il valore della funzione obiettivo decresce più rapidamente (detta «**direzione di Dantzig**»).

In letteratura si possono trovare regole diverse per la scelta della variabile entrante.

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

Scelta della variabili entrante

Ad esempio, la scelta

$$k = \underset{j \in N^{(t)}}{\operatorname{argmin}} \{ j : c_j^{(t)} < 0 \}$$

(detta «**direzione di Bland**»)

consente di garantire interessanti proprietà di convergenza dell'algoritmo del simplesso.

In generale, qualunque sia la scelta dell'indice k, giova osservare che l'effettivo decremento della funzione obiettivo dipende non solo dal coefficiente di costo ridotto in corrispondenza della variabile che entra in base, ma anche dal valore che assumerà tale variabile.

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

Iterazione degenere

Infatti, si osserva che il valore da assegnare alla variabile x_k entrante in base alla t-esima iterazione, determinato secondo la (8.2), può anche essere uguale a zero, il che accade se (e solo se) ${b_h}^{(t)} = 0$ ovvero, se la SBA $x^{(t)}$ è degenere.

In questo caso si ha $x^{(t+1)} = x^{(t)}$, ovvero la nuova SBA coincide con quella precedente anche se il nuovo insieme di indici di base ammissibile $B^{(t+1)}$ è diverso da quello di partenza $B^{(t)}$.

Quando ciò si verifica, l'iterazione dell'algoritmo del simplesso si dice «**iterazione degenere**».

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

- Esempio

Si consideri il seguente problema di PL, in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base ammissibile $B^{(t)}$= {1, 2, 3}:

$$\min z(x) = 4x_4 + 2x_5 - 5x_6 + 13$$
$$s.v.$$
$$x_1 - 3x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 0$$
$$x_2 + 3x_4 - 2x_5 - x_6 = 12$$
$$x_3 - x_4 + x_5 + 11x_6 = 15$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

La SBA $x^{(t)}$corrispondente a $B^{(t)}$ è degenere.

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

Esempio

Il coefficiente di costo ridotto $c_6^{(t)}$ è negativo e i coefficienti $a_{16}^{(t)}$ e $a_{36}^{(t)}$ sono positivi.

Si decide di far entrare in base la variabile x_6, il cui valore risulta

$$x_6^{(t+1)} = \min\{0,\ 15/11\} = 0.$$

Pertanto la nuova SBA è $x^{(t+1)} = [0 \quad 12 \quad 15 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$, coincidente con $x^{(t)}$, ma corrispondente all'insieme di indici di base ammissibile $B^{(t+1)} = \{6, 2, 3\}$.

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

Osservazione

Giova comunque osservare che, in corrispondenza di una SBA degenere alla t-esima iterazione, può succedere che il valore da assegnare alla variabile entrante in base x_k sia diverso da zero.

Tale situazione si verifica quando, in corrispondenza di ogni componente nulla del vettore $b^{(t)}$, si ha una componente non positiva della colonna ${A_k}^{(t)}$.

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

Esempio

Si consideri il seguente problema di PL, in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base ammissibile $B^{(t)}$= {1, 2, 3}:

$$\min z(x) = -4x_4 + 5x_5 + 8x_6 + 33$$
$$s.v.$$
$$x_1 - 6x_4 + 4x_5 + 6x_6 = 0$$
$$x_2 + 2x_4 + 7x_5 + 3x_6 = 22$$
$$x_3 - x_4 + 8x_5 + 14x_6 = 18$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

La SBA $x^{(t)}$corrispondente a $B^{(t)}$ è degenere.

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

Esempio

Il coefficiente di costo ridotto $c_4^{(t)}$ è negativo ed è negativo anche il coefficiente $a_{14}^{(t)}$.

Di conseguenza, la variabile di base x_4 assumerà valore pari a

$$x_4^{(t+1)} = 22/2 = 11,$$

e la nuova SBA risulterà $x^{(t+1)} = [66 \quad 0 \quad 29 \quad 11 \quad 0]^T$ corrispondente all'insieme di indici di base ammissibile $B^{(t+1)} = \{1, 4, 3\}$, con valore $z^{(t+1)} = 22 < 33 = z^{(t)}$.

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

- Nell'eseguire l'algoritmo del simplesso può accadere che il minimo nella (8.2) venga raggiunto, alla t-esima iterazione, in corrispondenza di più di un indice.

  Ciò significa che l'entrata in base della variabile x_k comporta l'annullamento di tutte le variabili di base per le quali vale la (8.2) e, quindi, la determinazione di una SBA degenere per l'iterazione successiva.

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

Esempio

Si consideri il seguente problema di PL, in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base ammissibile B(t) = {1, 2, 3}:

$$
\begin{gathered}
\min z(x) = -3x_4 - 4x_5 + 7x_6 \; + 14 s.v. \\
x_1 + 2x_4 + 2x_5 - 3x_6 = 16 \\
x_2 - 3x_4 + x_5 + 5x_6 = 8 \\
x_3 + 7x_4 + 3x_5 + 4x_6 = 34 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \; \geq 0
\end{gathered}
$$

La SBA corrispondente a $B^{(t)}$ è $x^{(t)}$ = [16 8 34 0 0 0]^T, avente valore $z^{(t)}$ = 14.

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

Esempio

I coefficienti di costo ridotto $c_4^{(t)}$ e $c_5^{(t)}$ sono negativi.

Si sceglie x_5 come variabile di base entrante, il cui valore risulta

$$x_5^{(t+1)} = \min\{16/2, 8, 34/3\} = 8.$$

Essendo tale minimo in corrispondenza di due valori, si può scegliere come variabile uscente x_1 o x_2.

La nuova SBA (degenere) è comunque $x^{(t+1)} = [0 \ \ 0 \ \ 10 \ \ 0 \ \ 8 \ \ 0]^T$, se come variabile uscente si è scelta x_1; il nuovo insieme di indici di base ammissibile è $B^{(t+1)} = \{5, 2, 3\}$; se, invece, si è scelta x_2, si ha $B^{(t+1)} = \{1, 5, 3\}$.

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

Esempio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = -3x_1 - 4x_2$$
$$s.v.$$
$$-3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 11$$
$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 16$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Tale problema è in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base ammissibile $B^{(0)}$ ={3, 4, 5}, con SBA corrispondente pari a $x^{(0)}$ = $[0\ 0\ 12\ 11\ 16]^T$, avente valore z($x^{(0)}$) = 0.

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

Esempio

L'esecuzione dell'algoritmo del simplesso comporta la scelta di $a_{12}^{(0)}$ come elemento di pivot, dal momento che $\min\{ c_1^{(0)} , c_2^{(0)} \} = \min \{-3, -4\} = -4 = c_2^{(0)}$ e $h = \operatorname*{argmin}_{i=1,2,3} \left\{ \frac{b_i^{(0)}}{a_{i2}^{(0)}} : a_{i2}^{(0)} > 0 \right\} = h = \operatorname*{argmin}_{i=1,2,3} \left\{ \frac{12}{4}, 11, 16/2 \right\} = 1.$

Eseguita l'operazione di pivot in corrispondenza di $a_{12}^{(0)}$, si ottiene il seguente problema equivalente:

$$\min z(x) = -6x_1 + x_3 \text{-} 12$$

$$\begin{aligned} s.v. \quad & \text{-}3/4x_1 + x_2 + 1/4x_3 = 12 \\ & 7/4x_1 - 1/4x_3 + x_4 = 11 \\ & \frac{5}{2}x_1 - 1/2x_2 + x_5 = 16 \end{aligned}$$

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

- Esempio

Il problema è in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base ammissibile $B^{(1)}$ = {2, 4, 5}.

La SBA corrispondente è $x^{(1)}$ = [0 3 0 8 10]^{T}, avente valore z($x^{(1)}$) = –12.

Poiché ${c_1}^{(1)}$= –6 < 0, e ${a_{21}}^{(1)}$= 7/4 > 0, ${a_{31}}^{(1)}$= 5/2 > 0, tale soluzione non è ancora ottima.

Occorre pertanto eseguire una nuova operazione di pivot sull'elemento ${a_{31}}^{(1)}$= 5/2 (perché ${b_3}^{(1)}/{a_{31}}^{(1)} < {b_2}^{(1)}/{a_{21}}^{(1)}$).

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

Esempio

Si ottiene il seguente problema equivalente:

$$
\begin{aligned}
\min z(x) &= -1/5x_3 + 12x_5 - 36 \\
s.v. \quad & x_2 + 1/10x_3 + 3/10x_5 = 6 \\
& \frac{1}{10}x_3 + x_4 - 7/10x_5 = 1 \\
& -1/5x_3 + 2/5x_5 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Il problema è in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base ammissibile $B^{(2)}$= {2, 4, 1}.

La SBA corrispondente è $x^{(2)}$= [4 6 0 1 0]^T, con valore z($x^{(2)}$) = –36.

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

- Esempio

Poiché $c_3^{(2)} = -1/5 < 0$, $a_{13}^{(2)} = 1/10 > 0$, $a_{23}^{(2)} = 1/10 > 0$, si esegue l'operazione di pivot sull'elemento $a_{23}^{(2)} = 1/10$ (perché $b_2^{(1)}/a_{23}^{(1)} < b_1^{(1)}/a_{13}^{(1)}$).

Si ottiene il seguente problema equivalente:

$$
\begin{gathered}
\min z(x) = 2x_4 + x_5 - 38 \\
s.v. \quad x_2 - x_4 + x_5 = 5 \\
x_3 + 10x_4 - 7x_5 = 10 \\
x_1 + 2x_4 - x_5 = 6 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{gathered}
$$

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

Esempio

Il problema è in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base ammissibile $B^{(3)}$= {2, 3, 1}.

La SBA corrispondente è $x^{(3)}$= [6 5 10 0 0]^T, avente valore z($x^{(3)}$) = –38. Dal momento che tutti i coefficienti di costo in forma ridotta sono non negativi, la SBA $x^* = x^{(3)}$ è ottima di valore (ottimo) $z^* = z(x^{(3)})$ = –38.

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

Esempio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = -8x_1 - 6x_2$$
$$s.v. \quad x_1 + x_3 = 5$$
$$x_2 + x_4 = 7$$
$$4x_1 + 3x_2 + x_5 = 29$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Esso è in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base ammissibile $B^{(0)}$ ={3, 4, 5}, con la corrispondente SBA $x^{(0)}$ = [0 0 5 7 29]^T avente valore z($x^{(0)}$)=0.

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

- Esempio

Alla prima iterazione dell'algoritmo del simplesso si sceglie $a_{11}^{(0)}$ come elemento di pivot, dal momento che $\min\{c_1^{(0)},\ c_2^{(0)}\}$ = min {–8, –6} = –8 $= c_1^{(0)}$ e $\underset{i=1,3}{\operatorname{argmin}}\left\{\frac{b_i^{(0)}}{a_{i1}^{(0)}} : a_{i1}^{(0)} > 0\right\} = \underset{i=1,3}{\operatorname{argmin}}\{5, 29/4\} = 1$.

Eseguita l'operazione di pivot, si ottiene il seguente problema equivalente:

$$
\begin{gathered}
\min z(x) = -6x_2 + 8x_3 - 40 \\
s.v. \quad x_1 + x_3 = 5 \\
x_2 + x_4 = 7 \\
3x_2 - 4x_3 + x_5 = 29 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{gathered}
$$

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

- Esempio

Il problema è in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base ammissibile $B^{(1)}$= {1, 4, 5}.

La SBA corrispondente è $x^{(1)}$ = [5 0 0 7 9]^T, avente valore z($x^{(1)}$)= –40.

Tale soluzione non è ancora ottima in quanto ${c_2}^{(1)} < 0$. Occorre pertanto eseguire una nuova operazione di pivot sull'elemento ${a_{32}}^{(1)}$=3.

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

- Esempio

Si ottiene il seguente problema equivalente:

$$\min z(x) = 0x_3 + 2x_5 - 58$$
$$s.v. \quad x_1 + x_3 = 5$$
$$4/3x_3 + x_4 - 1/3x_5 = 4$$
$$x_2 - 4/3x_3 + 1/5x_5 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Il problema è in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base ammissibile $B^{(2)}$= {1, 4, 2}.

Poiché ${c_3}^{(2)}$= 0 e ${c_5}^{(2)}$= 2, la soluzione $x^{(2)}$= [5 3 0 4 0]^T, avente valore z($x^{(2)}$) = –58, è una soluzione ottima del problema.

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

Esempio

Il costo ridotto $c_3^{(2)} = 0$ indica che il problema ammette un numero infinito di soluzione ottime.

Infatti, facendo entrare in base x_3 si avrebbe il seguente problema equivalente:

$$
\begin{gathered}
\min z(x) = 0x_3 + 2x_5 - 58 \\
s.v. \qquad -3/4x_4 + 1/4x_5 = 2 \\
x_3 + 3/4x_4 - 1/4x_5 = 3 \\
x_2 + x_4 = 7 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{gathered}
$$

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

- Esempio

Il problema è ancora in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base ammissibile $B^{(3)}= \{1, 3, 2\}$.

Poiché $c_4^{(2)}= 0$ e $c_5^{(2)}= 2$, la SBA $x^{(3)}= [2\ 7\ 3\ 0\ 0]^T$, a cui corrisponde il valore $z(x^{(3)})= -58$ coincidente con $z(x^{(3)})$, è anch'essa soluzione ottima del problema.

Pertanto, tutte le soluzioni ottime si trovano come combinazione convessa delle due SBA ottime trovate, ovvero:

$x^* = \lambda[5\ \ 3\ \ 0\ \ 4\ \ 0]^T + (1-\lambda)[2\ \ 7\ \ 3\ \ 0\ \ 0]^T = [2-3\lambda\quad 7-4\lambda\quad 3-3\lambda\quad 4\lambda\quad 0]^T$, $\lambda \in [0, 1]$.

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

- Esempio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = -x_1 - x_2$$

$$s.v. \quad -x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_2 + x_4 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Tale problema è in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base ammissibile $B^{(0)}$= {3, 4}, con SBA corrispondente pari a $x^{(0)}$= [0 0 1 5]^T, con valore z($x^{(0)}$)= 0.

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

- Esempio

L'esecuzione dell'algoritmo del simplesso comporta la scelta dell'elemento $a_{12}^{(0)}$ a come elemento di pivot, dal momento che $\min\{c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\} = \min\{-1, -1\} = -1 = c_2^{(0)}$ e $\underset{i=1,2}{\operatorname{argmin}}\left\{\frac{b_i^{(0)}}{a_{i2}^{(0)}} : a_{i2}^{(0)} > 0\right\} = \underset{i=1,2}{\operatorname{argmin}}\{1/1, 5/1\} = 1$.

Eseguita l'operazione di pivot in corrispondenza di $a_{12}^{(0)}$, si ottiene il seguente problema equivalente:

$$\begin{aligned} \min z(x) &= -2x_1 - x_3 - 1 \\ s.v. \quad -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

- Esempio

Il problema è in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base ammissibile $B^{(1)}= \{2, 4\}$.

La SBA corrispondente $x^{(1)}= [0\ \ 1\ \ 0\ \ 4]^T$, con $z(x^{(1)})= z(x^{(1)})= -1$, non è ottima.

Occorre pertanto eseguire una nuova operazione di pivot sull'elemento ${a_{21}}^{(1)}=1$.

Schema generale dell'algoritmo del Simplesso

- Esempio

Si ottiene il seguente problema equivalente:

$$\min z(x) = -x_3 + 2x_4 - 9$$
$$s.v. \quad x_2 + x_4 = 5$$
$$x_1 - x_3 + x_4 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Il problema è in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base $B^{(2)}= \{2,1\}$.

Poiché $c_3^{(2)} = -1 < 0$ e $A_3^{(2)} \leq 0$, il problema risulta illimitato inferiormente.

Argomenti

- Aspetti preliminari
- Schema generale dell’algoritmo del Simplesso
- **Matrice di pivot**
- Inizializzazione dell’algoritmo del Simplesso
- Convergenza dell’algoritmo del Simplesso
- Algoritmo del Simplesso rivisto

Matrice di pivot

- Introduzione

Dato un problema (P) di PL in forma canonica rispetto ad un insieme di indici di base ammissibile $\bar{B} = \{1, \ldots, h, \ldots, m\}$ e definita la matrice $\bar{M}$ di dimensioni $[(m+1) \times (n+1)]$ che caratterizza tale problema, si è visto come si possa ripristinare la forma canonica rispetto ad un nuovo insieme di indici di base ammissibile $\hat{B} = \{1, \ldots, h-1, k, h+1, \ldots, m\}$, ottenuto da $\bar{B}$ scambiando la h-esima colonna di base con la k-esima colonna non di base, eseguendo una operazione di pivot in posizione (h, k).

Matrice di pivot

Introduzione

È possibile considerare un metodo alternativo per eseguire l'operazione di pivot in posizione (h, k).

In particolare, la matrice $\widehat{M}$ di dimensioni $[(m+1) \times (n+1)]$ che caratterizza il problema (P) in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base ammissibile $\widehat{B}$, può essere ottenuta premoltiplicando la matrice $\bar{M}$ per una matrice quadrata di ordine $m + 1$, non singolare, detta «**matrice di pivot**».

Matrice di pivot

- La matrice di pivot

La matrice di pivot è ottenuta dalla matrice identità, sostituendo la colonna h-esima con una colonna determinata a partire dagli elementi della matrice $\overline{M}$:

$$Q = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \cdots & -\overline{c}_k / \overline{a}_{hk} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -\overline{a}_{1k} / \overline{a}_{hk} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 / \overline{a}_{hk} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\overline{a}_{mk} / \overline{a}_{hk} & \cdots & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ h \\ \\ \\ \end{array} \tag{8.4}$$

Matrice di pivot

- Esempio

Si consideri il seguente problema (P) di PL:

$$\min z(x) = 2x_4 - 3x_5 + 4x_6 + 24$$

$$s.v.$$

$$x_1 + 2x_4 - x_5 + x_6 = 10$$

$$x_2 + 3x_4 + 2x_5 - x_6 = 8$$

$$x_3 - x_4 - x_5 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x5, x_6 \geq 0$$

La matrice $\bar{M}$ (4×7) corrispondente a tale problema, che è in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base ammissibile $\bar{B}$ = {1, 2, 3}, assume la seguente forma.

Matrice di pivot

- Esempio

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} -24 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 4 \\ 10 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 8 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si vuole determinare la matrice $\hat{M}$, che rappresenta il problema in forma canonica rispetto al nuovo insieme di indici di base ammissibile $\hat{B} = \{1,\ 5,\ 3\}$, utilizzando la relazione (8.5).

Matrice di pivot

- Esempio

Per il problema (P), la matrice di pivot Q è una matrice quadrata di ordine 4 che assume la seguente forma:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Premoltiplicando la matrice $\bar{M}$ per Q si ottiene la matrice $\hat{M}$.

Matrice di pivot

- Esempio

$$\hat{M} = Q\bar{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -24 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 4 \\ 10 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 8 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -12 & 0 & 3/2 & 0 & 13/2 & 0 & 5/2 \\ 14 & 1 & 1/2 & 0 & 7/2 & 0 & 1/2 \\ 4 & 0 & 1/2 & 0 & 3/2 & 1 & -1/2 \\ 10 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Matrice di pivot

- Esempio

Il problema (P), in forma canonica rispetto a Bˆ , è il seguente:

$$\min z(x) = \frac{3}{2}x_2 + \frac{13}{2}x_4 + 5/2x_6 + 12$$

$$s.v.$$

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 7/2x_4 + 1/2x_6 \ = 14$$

$$1/2x_2 + 3/2x_4 + x_5 - 1/2x_6 \ = 4$$

$$\frac{1}{2}x_2 + x_3 + 1/2x_4 - 1/2x_6 \ = 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x5, x_6 \ \geq \ 0$$

La corrispondente SBA $\hat{x}$ = $[14,\ 0,\ 10,\ 0,\ 4,\ 0]^T$, avente valore z($\hat{x}$)= 12, è ottima.

Matrice di pivot

- Esempio

Si consideri il seguente problema (P) di PL:

$$\min z(x) = -4x_1 - 6x_2$$
$$s.v.$$
$$6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24$$
$$2x_1 + 8x_2 + x_4 = 28$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

È facile verificare che tale problema è in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base ammissibile $B^{(0)} = \{3, 4\}$.

Argomenti

- Aspetti preliminari
- Schema generale dell'algoritmo del Simplesso
- Matrice di pivot
- **Algoritmo del Simplesso in due fasi**
- Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

Algoritmo del Simplesso in due fasi

Fasi dell'algoritmo del Simplesso

Sulla base della formulazione scelta per il problema artificiale ($P^{(a)}$), l'algoritmo del simplesso per risolvere un problema (P) di PL in forma standard si può pensare suddiviso in due fasi.

La «**prima fase**» consiste nella soluzione del problema artificiale associato a (P), mentre l'eventuale esecuzione della «**seconda fase**» corrisponde a risolvere il problema (P) posto in forma canonica, utilizzando come SBA iniziale la soluzione ottima del problema artificiale, ottenuta dalla prima fase.

Algoritmo del Simplesso in due fasi

- Esempio

Il problema artificiale ($P^{(a)}$) corrispondente a (P) risulta:

$$\min p(x,\Phi) = \Phi_1 + \Phi_2$$
$$s.v.$$
$$2x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 4x_4 + \Phi_1 = 6$$
$$5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 + \Phi_2 = 12$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, \Phi_1, \Phi_2 \geq 0$$

che, in forma canonica risulta:

$$\min p(x,\Phi) = -7x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 12x_4 + 18$$
$$s.v.$$
$$2x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 4x_4 + \Phi_1 = 6$$
$$5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 + \Phi_2 = 12$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, \Phi_1, \Phi_2 \geq 0$$

Algoritmo del Simplesso in due fasi

- Esempio

La corrispondente SBA $[x^{(0)} \;\; \Phi^{(0)}]^T$ = $[0\ 0\ 0\ 0\ 6\ 12]^T$, con valore $p(x^{(0)} \;\; \Phi^{(0)})$ =18, non è ottima.

Si esegue l'operazione di pivot sull'elemento $a_{24}{}^{(0)}$= 8 e si ottiene il seguente problema equivalente a $(P^{(a)})$:

$$\min p(x, \Phi) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{17}{2}x_2 + 6x_3 + 3/2\Phi_2$$

$$s.v.$$

$$-1/2x_1 - \frac{17}{2}x_2 - 6x_3 + \Phi_1 - 1/2\Phi_2 = 0$$

$$5/8x_1 + 3/8x_2 + 3/4x_3 + x_4 + 1/8\Phi_2 = \frac{3}{2}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \Phi_1, \Phi_2 \geq 0$$

Algoritmo del Simplesso in due fasi

- Esempio

La SBA $[x^{(1)} \quad \Phi^{(1)}]^T = [0\ 0\ 0\ 3/2\ 0\ 0]^T$ è degenere, con valore $p(x^{(1)} \quad \Phi^{(1)}) = 0$.

Essa è ottima, ma la variabile artificiale Φ_1 è ancora in base con valore nullo.

Si esegue un'operazione di pivot sull'elemento $a_{11}{}^{(1)}$= -1/2, allo scopo di far uscire dalla base la variabile artificiale Φ_1 e far entrare, al suo posto, la variabile x_1 (si osservi che si poteva scegliere come variabile di base entrante anche x_2 o x_3).

Algoritmo del Simplesso in due fasi

- Esempio

Si ottiene il seguente problema equivalente a (P(a)):

$$\min p(x, \Phi) = \Phi_1 + \Phi_2$$
$$s.v.$$
$$x_1 + 17x_2 + 12x_3 - 2\Phi_1 + \Phi_2 = 0$$
$$-\frac{41}{4}x_2 - 27/4x_3 + x_4 + \frac{5}{4\Phi_1} - 1/2\Phi_2 = \frac{3}{2}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, \Phi_1, \Phi_2 \geq 0$$

Al termine della prima fase dell'algoritmo del simplesso è stata così generata una SBA iniziale (degenere) per il problema originario, $x^{(0)}$= [0 0 0 3/2]^T, rispetto all'insieme di indici di base ammissibile $B^{(0)}$= {1, 4}.

Algoritmo del Simplesso in due fasi

Esempio

Per la seconda fase dell'algoritmo del simplesso, si costruisce la forma canonica del problema originario (P) rispetto all'insieme di indici di base $B^{(0)}$, sostituendo la funzione obiettivo del problema artificiale con la funzione obiettivo del problema originario e eliminando le variabili artificiali, ottenendo il seguente problema:

$$\min z(x) = 6x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 6x_4$$

$$s.v.$$

$$x_1 + 17x_2 + 12x_3 = 0$$

$$-\frac{41}{4}x_2 - 27/4x_3 + x_4 = \frac{3}{2}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Algoritmo del Simplesso in due fasi

- Esempio

Il problema non è ancora in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base $B^{(0)}$, limitatamente alla funzione obiettivo.

Si completano pertanto le operazioni di pivot sugli elementi di posto (1,1) e (2,4), ottenendo così il seguente problema equivalente a (P):

$$\min z(x) = -\frac{77}{2}x_2 - \frac{79}{2}x_3 + 9$$

$$s.v.$$

$$x_1 + 17x_2 + 12x_3 = 0$$

$$-\frac{41}{4}x_2 - 27/4x_3 + x_4 = \frac{3}{2}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Algoritmo del Simplesso in due fasi

- Esempio

La SBA $x^{(0)}$ non è ottima. Portando in base x_3 al posto di x_1 si ottiene il seguente problema equivalente a (P):

$$\min z(x) = \frac{79}{24}x_1 + \frac{419}{24}x_2 + 9$$
$$s.v.$$
$$1/12x_1 + 17/12x_2 + x_3 = 0$$
$$\frac{9}{16}x_1 - 11/16x_2 + x_4 = \frac{3}{2}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

in forma canonica rispetto a B*= {3, 4}.

La corrispondente SBA x^*, avente valore $z^* = 9$, coincide con $x^{(0)}$, ma solo generando B* si è in grado di affermare che essa è ottima.

Algoritmo del Simplesso in due fasi

- Come osservato in precedenza, la formulazione del problema artificiale ($P^{(a)}$) richiede l'introduzione di m variabili artificiali, una per ogni vincolo del problema (P) in forma standard.

  Ciò significa che il completamento della prima fase del metodo del simplesso a due fasi comporta l'esecuzione di almeno m operazioni di pivot (se (P) è ammissibile).

Algoritmo del Simplesso in due fasi

È evidente che la riduzione dell'onere computazionale della prima fase è legata alla possibilità di costruire un problema artificiale in forma canonica con un ridotto numero di variabili artificiali, completando la base con eventuali variabili del problema (P).

A tale scopo è utile ricordare che, nella maggior parte delle applicazioni pratiche, il problema di PL da risolvere non è in forma standard, per cui si possono sfruttare eventualmente le variabili ausiliare introdotte per portare il problema in forma standard.

Algoritmo del Simplesso in due fasi

- Più formalmente, si consideri il problema di PL così definito:

$$\min z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.v.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, 1 \leq i \leq m_1 \; (i \in I_1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, m_1 + 1 \leq i \leq m_2 \; (i \in I_2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, m_2 + 1 \leq i \leq m \; (i \in I_3)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n.$$

con $b_i \geq 0, i = 1, \dots, m.$

Algoritmo del Simplesso in due fasi

Riducendo il problema in forma standard si ottiene:

$$\min z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.v.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+1} = b_i, i \in I_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+1} = b_i, i \in I_2$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i \in I_3$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

$$x_{n+i} \geq 0, i \in I_1 \cup I_2.$$

Algoritmo del Simplesso in due fasi

Si noti innanzitutto che in ogni vincolo $i \in I_1$ è già presente una variabile ausiliaria x_{n+i} con coefficiente unitario, quindi per tali vincoli non occorre introdurre variabili artificiali.

Si considerino i vincoli $i \in I_2$.

Indicando con $h \in I_2$ l'indice in corrispondenza del quale si ha

$$h = \arg\_max_i\{b_i : i \in I_2\}$$

Algoritmo del Simplesso in due fasi

Si noti che è possibile rimpiazzare ogni vincolo $i \in I_2$, $i \neq h$, con un vincolo equivalente, dato dalla differenza tra l'h-esimo vincolo e l'i-esimo vincolo; si ottiene così:

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{hj}-a_{ij})\,x_j - x_{n+h} + x_{n+i} = b_h - b_i, i \in I_2, i \neq h$$

In tal modo la variabile ausiliaria x_{n+i} sarà presente nell'i-esimo vincolo equivalente con coefficiente unitario, mentre la scelta dell'indice h assicura che $b_h - b_i \geq 0$.

Pertanto, per ottenere un problema artificiale in forma canonica è sufficiente aggiungere una variabile artificiale Φ_0 nel vincolo $h \in I_2$, oltre che una variabile artificiale Φ_i in ogni vincolo $i \in I_3$.

Algoritmo del Simplesso in due fasi

- Esempio

Sia dato il seguente problema (P) di PL:

$$\min z(x) = 4x_1 + 5x_2$$
$$s.v.$$
$$x_1 \geq 6$$
$$x_2 \geq 4$$
$$x_1 + 3x_2 = 21$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Il corrispondente problema in forma standard è:

$$\min z(x) = 4x_1 + 5x_2$$
$$s.v.$$
$$x_1 - x_3 = 6$$
$$x_2 - x_4 = 4$$
$$x_1 + 3x_2 = 21$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Algoritmo del Simplesso in due fasi

- Esempio

Rimpiazzando il secondo vincolo con quello ottenuto dalla differenza tra il primo e il secondo vincolo si ottiene il problema equivalente:

$$\min z(x) = 4x_1 + 5x_2$$

$$s.v.$$

$$x_1 - x_3 = 6$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

$$x_1 + 3x_2 = 21$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Algoritmo del Simplesso in due fasi

- Esempio

Per costruire il problema artificiale, si può aggiungere una variabile artificiale Φ_0 nel primo vincolo e una seconda variabile artificiale Φ_1 nel terzo vincolo (si noti che non occorre introdurre alcuna variabile artificiale nel secondo vincolo), ottenendo il problema artificiale:

$$\min p(x, \Phi) = \Phi_1 + \Phi_2$$
$$s.v.$$
$$x_1 - x_3 + \Phi_0 = 6$$
$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2$$
$$x_1 + 3x_2 + \Phi_1 = 21$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, \Phi_0 , \Phi_1 \geq 0$$

Algoritmo del Simplesso in due fasi

- Esempio

che ridotto in forma canonica è:

$$\min p(x,\Phi) = -2x_1 - 3x_2 + 27$$
$$s.v.$$
$$x_1 - x_3 + \Phi_0 = 6$$
$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2$$
$$x_1 + 3x_2 + \Phi_1 = 21$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, \Phi_0, \Phi_1 \geq 0$$

La corrispondente SBA è $[x^{(0)}\ \Phi^{(0)}]^T = [0\ 0\ 0\ 2\ 6\ 21]^T$, con valore $p(x^{(0)}\ \Phi^{(0)}) = 27$, non è ottima.

Algoritmo del Simplesso in due fasi

- Esempio

Si esegue pertanto l'operazione di pivot sull'elemento $a_{32}{}^{(0)} = 3$ e si ottiene il seguente problema equivalente:

$$\min p(x, \Phi) = -x_1 + x_3 + \Phi_1 + 6$$
$$s.v.$$
$$x_1 - x_3 + \Phi_0 = 6$$
$$4/3x_1 - x_3 + x_4 + 1/3\Phi_1 = 9$$
$$1/3x_1 + x_2 + 1/3\Phi_1 = 7$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, \Phi_0\,, \Phi_1 \geq 0$$

La variabile artificiale Φ_1 è uscita dalla base ed è stata sostituita da x_2.

Algoritmo del Simplesso in due fasi

- Esempio

La corrispondente SBA è $[x^{(1)}\ \Phi^{(1)}]T$ = [0 7 0 9 6 0]T, con $p(x^{(1)}\ \Phi^{(1)})$ = 6, non è ottima.

Si esegue un'ulteriore operazione di pivot sull'elemento $a_{11}{}^{(1)}$= 1.

Si ottiene il seguente problema equivalente:

$$\min p(x, \Phi) = \Phi_0 + \Phi_1$$

$$s.v.$$

$$x_1 - x_3 + \Phi_0 = 6$$

$$\frac{1}{3}x_3 + x_4 - 4/3\Phi_0 + 1/3\Phi_1 = 1$$

$$x_2 + 1/3x_3 + 1/3\Phi_0 + 1/3\Phi_1 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \Phi_0\ , \Phi_1 \geq 0$$

Algoritmo del Simplesso in due fasi

- Esempio

La corrispondente SBA $[x^{*}{}_{P}{}^{(a)}\ \Phi^{*}{}_{P}{}^{(a)}]^{T} = [6\ \ 5\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0]^{T}$ è ottima per il problema artificiale e inoltre, essendo $p(x^{*}{}_{P}{}^{(a)}\ \Phi^{*}{}_{P}{}^{(a)}) = 0$, è stata determinata una SBA iniziale per il problema originario (P), ovvero, $x^{(0)} = [6\ \ 5\ \ 0\ \ 1]^{T}$, rispetto all'insieme di indici di base $B^{(0)} = \{1, 4, 2]$.

Di conseguenza, è stata completata la prima fase dell'algoritmo del simplesso a due fasi.

Algoritmo del Simplesso in due fasi

- Esempio

Al fine di costruire la forma canonica rispetto all'insieme di indici di base $B^{(0)}$, si sostituisce la funzione obiettivo del problema artificiale con la funzione obiettivo del problema originario e si eliminano le variabili artificiali, si ottiene, quindi, il seguente problema:

$$\min z(x) = 4x_1 + 5x_2$$
$$s.v.$$
$$x_1 - x_3 = 6$$
$$1/3x_3 + x_4 = 1$$
$$x_2 + 1/3x_3 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Algoritmo del Simplesso in due fasi

- Esempio

Tale problema non è ancora in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base $B^{(0)}$, limitatamente all'equazione che definisce la funzione obiettivo.

Completando le operazioni di pivot sugli elementi (1,1) e (3,2), si ottiene il seguente problema equivalente a (P):

$$\min z(x) = \frac{7}{3}x_3 + 49$$
$$s.v.$$
$$x_1 - x_3 = 6$$
$$1/3x_3 + x_4 = 1$$
$$x_2 + 1/3x_3 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

dal quale si ricava che la SBA $x^{(0)}$, con z($x^{(0)}$)= 49, è anche soluzione ottima per il problema (P).

Metodo della funzione di penalità

- Il metodo della funzione di penalità

Una formulazione alternativa del problema artificiale si può ottenere utilizzando il «**metodo della funzione di penalità**» (meglio conosciuto in letteratura con il termine «**big M**»), ovvero, considerando il seguente problema (P(a) M):

$$\min p(x, \Phi) = c^T x + w^T \Phi (8.10)$$

$$s. v.$$

$$Ax + \Phi = b \; (8.11)$$

$$x, \Phi \geq 0, (8.12)$$

dove $w \in R^m$ è tale che

$w = [M \; ... \; M]^T$, con M scalare scelto arbitrariamente grande$(M >> 0)$.

Metodo della funzione di penalità

- Il metodo della funzione di penalità

La funzione obiettivo di $(P_M{}^{(a)})$ è costruita in modo da «**penalizzare**» una soluzione ammissibile $[\bar{x}\ \bar{\Phi}]^T$ di $(P_M{}^{(a)})$ nel caso in cui $\bar{\Phi} > 0$.

Infatti, il termine $w^T\Phi$ presente nella funzione obiettivo (8.10) è un termine di penalità, cioè, un costo elevato aggiuntivo se le variabili artificiali sono presenti con valore maggiore di zero.

Lo scalare M è scelto opportunamente grande in modo che il costo di una qualsiasi soluzione ammissibile $[\bar{x}\ \bar{\Phi}]^T$ di $(P_M{}^{(a)})$ con $\bar{\Phi} > 0$ sia maggiore del costo di una qualsiasi soluzione ammissibile con $\bar{\Phi} = 0$.

Metodo della funzione di penalità

- Il metodo della funzione di penalità

L'idea del metodo è che, se nella soluzione ottima $[x^*_{P_M}{}^{(a)}\ \Phi^*_{P_M}{}^{(a)}]^T$ di $(P_M{}^{(a)})$ si ha $\Phi^*_{P_M}{}^{(a)} = 0$, allora $x^*_{P_M}{}^{(a)}$ è soluzione ottima anche per il problema originario (P) in quanto per $\Phi = 0$ il problema artificiale $(P_M{}^{(a)})$ coincide con il problema (P).

Se, invece, $\Phi^*_{P_M}{}^{(a)} > 0$, allora vuol dire che non esiste una soluzione in corrispondenza delle quale le variabili artificiali assumano valore zero e per questo il problema originario (P) è inammissibile.

Metodo della funzione di penalità

Il metodo della funzione di penalità

Si osservi inoltre che ($P_M{}^{(a)}$) è sempre ammissibile (si dimostra, infatti, che la soluzione $[0, b]^T$ è ammissibile per $(P_M{}^{(a)})$).

Inoltre, se ($P_M{}^{(a)}$) è illimitato inferiormente per valori ammissibili di $[x \;\; \Phi]^T$,anche (P) risulta illimitato inferiormente per valori ammissibili di x.

Il vantaggio della formulazione del problema artificiale secondo il modello (8.10)–(8.12), rispetto al precedente (8.7)–(8.9), è che l'algoritmo del simplesso viene applicato una volta, senza quindi la necessità di avere due fasi per la soluzione di un problema di PL.

Metodo della funzione di penalità

- Il metodo della funzione di penalità

Il maggiore svantaggio è rappresentato dal fatto che non è immediato determinare, in generale, un valore di M con le proprietà desiderate. Inoltre, coefficienti molto elevati nella funzione obiettivo possono causare all'algoritmo del simplesso problemi di instabilità numerica.

Per quanto riguarda la possibilità di ridurre il numero di variabili artificiali da introdurre nel sistema di vincolo, valgono le stesse considerazioni introdotte per la prima formulazione del problema artificiale.

Metodo della funzione di penalità

- Esempio

Sia dato il seguente problema (P) di PL:

$$\min z(x) = -6x_1 - 8x_2$$
$$s.v.$$
$$6x_1 + 4x_2 \leq 12$$
$$4x_1 + 2x_2 \geq 12$$
$$4x_1 + 4x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Il corrispondente problema in forma standard è:

$$\min z(x) = -6x_1 - 8x_2$$
$$s.v.$$
$$6x_1 + 4x_2 + x_3 = 12$$
$$4x_1 + 2x_2 - x_4 = 12$$
$$4x_1 + 4x_2 + x_5 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Il problema non è in forma canonica.

Metodo della funzione di penalità

- Esempio

Si sceglie il metodo della funzione di penalità.

Pertanto, si formula il problema artificiale, aggiungendo una sola variabile artificiale Φ_1 nel secondo vincolo e definendo la funzione obiettivo $p(x, \Phi_1) = -6x_1 - 8x_2 + M\Phi_1$, con $M >> 0$.

Per quanto riguarda la scelta di M, un modo alternativo all'utilizzo di un valore numerico, è di utilizzarne il valore simbolico.

In tal modo, il j-esimo coefficiente di costo ridotto in cui

Metodo della funzione di penalità

- Esempio

Dal momento che $M >> 0$, il termine additivo v_j è sicuramente trascurabile rispetto al termine $u_j M$ (se $u_j \neq 0$), per cui il test di ottimalità, ovvero la scelta della variabile di base entrante, dipende da u_j.

Il termine v_j entra in gioco solo nei casi in cui $u_j = 0$, ovvero quando in più coefficienti di costo ridotto i termini moltiplicativi u_j risultano uguali.

Metodo della funzione di penalità

- Esempio

Si ottiene il seguente problema artificiale:

$$p(x,\Phi_1) = -6x_1 - 8x_2 + M\Phi_1$$
$$s.v.$$
$$6x_1 + 4x_2 + x_3 = 12$$
$$4x_1 + 2x_2 - x_4 + \Phi_1 = 12$$
$$4x_1 + 4x_2 + x_5 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \Phi_1 \geq 0$$

Tale problema non è in forma canonica, limitatamente all'equazione relativa alla funzione obiettivo.

Metodo della funzione di penalità

- Esempio

Occorre infatti completare le operazioni di pivot sull'elemento di posto (2, 6).

Si ottiene il seguente problema equivalente:

$$p(x,\Phi_1) = (-4M-6)x_1 + (-2M-8)x_2 + Mx_4 + 12M$$
$$s.v.$$
$$6x_1 + 4x_2 + x_3 = 12$$
$$4x_1 + 2x_2 - x_4 + \Phi_1 = 12$$
$$4x_1 + 4x_2 + x_5 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \Phi_1 \geq 0$$

Esso è in forma canonica.

Metodo della funzione di penalità

- Esempio

La corrispondente SBA è $[x^{(0)}\ \Phi^{(0)}]^T$ = [0 0 12 0 4 12]^T, con $p(x^{(0)}\ \Phi^{(0)}) = 12M$, non è ottima.

Nello scegliere la variabile che deve entrare in base si esaminano i coefficienti di costo ridotti relativi alle variabili non di base.

Alla variabile x_1 è associato un coefficiente di costo ridotto minore di quello corrispondente a x_2.

Di conseguenza, si sceglie x_1 come variabile di base entrante, mentre la variabile di base uscente è x_5.

Metodo della funzione di penalità

- Esempio

Si ottiene il seguente problema equivalente:

$$p(x,\Phi_1) = (2M-2)x_2 + Mx_4 + \left(M + \frac{3}{2}\right)x_5 + 8M - 6$$

$$s.v.$$

$$-2x_2 + 3x_3 - 3/2x_5 = 6$$

$$-2x_2 - x_4 - x_5 + \Phi_1 = 8$$

$$x_1 + x_2 + 1/4x_5 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \Phi_1 \geq 0$$

La corrispondente SBA è $[x^*_{P_M}{}^{(a)}\ \Phi^*_{P_M}{}^{(a)}]^T = [1\ 0\ 6\ 0\ 0\ 8]^T$, con $p(x^*_{P_M}{}^{(a)}\ \Phi^*_{P_M}{}^{(a)}) = 8M - 6$ è ottima.

Dal momento che $p(x^*_{P_M}{}^{(a)}\ \Phi^*_{P_M}{}^{(a)}) > 0$, si può concludere che il problema originario (P) non ammette soluzioni ammissibili

Argomenti

- Aspetti preliminari
- Schema generale dell'algoritmo del Simplesso
- Matrice di pivot
- Algoritmo del Simplesso in due fasi
- **Convergenza dell'algoritmo del Simplesso**

Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

Introduzione

Si affronta ora il problema della convergenza dell'algoritmo del simplesso, problema che ha impegnato a lungo i ricercatori operativi a partire dalla metà del XX secolo.

Si osserva preliminarmente che se tutte le SBA generate dall'algoritmo del simplesso fossero non degeneri, l'algoritmo del simplesso terminerebbe certamente in un numero finito di passi.

Infatti, a ogni cambio di base corrisponde una nuova SBA di costo sempre inferiore alla SBA precedente.

Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

Introduzione

Pertanto, non si potrà mai visitare due volte la stessa base e l'algoritmo terminerà necessariamente dopo aver visitato al più tutte le basi, che sono in numero finito.

In presenza di SBA degeneri il problema diventa più complicato.

Infatti, è noto che, in questo caso, l'algoritmo del simplesso potrebbe cambiare base senza cambiare SBA.

Convergenza dell’algoritmo del Simplesso

◉Introduzione

Ci si chiede allora se dopo un certo numero di iterazioni su SBA degeneri non sia possibile ritornare su una base già visitata in precedenza.

Purtroppo, in assenza di particolari attenzioni, questo evento può verificarsi: in tal caso, l’algoritmo del simplesso entrerebbe in un «**ciclo**», ovvero, verrebbe generata una sequenza di basi (associate alla medesima SBA degenere) ripetuta indefinitamente.

Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

- Esempio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = -\frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + 9x_4$$
$$s.v.$$
$$1/9x_1 + \frac{1}{9}x_2 - \frac{2}{9}x_3 - x_4 + x_5 = 0$$
$$-1/9x_1 + 2/9x_2 - 1/9x_3 - x_4 + x_6 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Il problema è in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base $B^{(0)}$= {5,6}, a cui corrisponde la SBA (degenere) $x^{(0)}$ = [0 0 0 0 0 0]^T, avente valore $z^{(0)}$ = 0.

Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

- Esempio

Alla prima iterazione del metodo del simplesso, si può scegliere come variabile di base entrante x_2, mentre la variabile di base uscente potrebbe essere sia la x_5 che la x_6.

Si sceglie x_5, per cui il nuovo insieme di indici di base risulta essere $B^{(1)}$= {2, 6}. Rappresentando il problema in forma canonica rispetto a $B^{(1)}$ si ottiene:

$$\min z(x) = x_1 - 2x_2 - 3x_4 + 12x_5$$
$$s.v.$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 - 9x_4 + 9x_5 = 0$$
$$-\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 - 2x_5 + x_6 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

- Esempio

La corrispondente SBA $x^{(1)}$ coincide con $x^{(0)}$.

Alla seconda iterazione, si sceglie come variabile di base entrante la x_4, mentre la variabile di base uscente è la x_6.

Il problema in forma canonica rispetto a $B^{(2)}$= {2, 4} è il seguente:

$$\min z(x) = -x_2 + 6x_5 + 3x_6$$
$$s.v.$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 - 9x_4 + 9x_5 = 0$$
$$-\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 - 2x_5 + x_6 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

- Esempio

La corrispondente SBA $x^{(2)}$ resta coincidente con $x^{(0)}$.

Alla terza iterazione, si sceglie come variabile di base entrante la x_3, mentre la variabile di base uscente potrebbe essere sia la x_2 che la x_4.

Si sceglie x_2.

Il problema in forma canonica rispetto a $B^{(3)}$= {3, 4} è:

$$\min z(x) = -2x_1 + x_2 - 3x_5 + 12x_6$$

$$s.v.$$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 - 9x_5 + 9x_6 = 0$$

$$\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + x_4 + x_5 - 2x_6 = 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

- Esempio

La corrispondente SBA $x^{(3)}$ è ancora coincidente con $x^{(0)}$.

Alla quarta iterazione, si sceglie come variabile di base entrante la x_5, mentre a uscire dalla base è la variabile x_4.

Il nuovo insieme di indici di base è $B^{(4)}= \{3, 5\}$ a cui corrisponde il seguente problema in forma canonica:

$$\min z(x) = -x_1 + 3x_4 + 6x_6$$
$$s.v.$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 9x_4 - 9x_6 = 0$$
$$\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + x_4 + x_5 - 2x_6 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

- Esempio

La corrispondente SBA $x^{(4)}$ è sempre uguale a $x^{(0)}$.

Alla quinta iterazione, si porta in base la variabile x_1 al posto della x_3 (si osservi che poteva essere scelta come variabile di base uscente anche la x_5).

Il problema in forma canonica rispetto a $B^{(5)}= \{1, 5\}$ risulta essere:

$$\min z(x) = -2x_2 + x_3 + 12x_4 - 3x_6$$

$$s.v.$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 9x_4 - 9x_6 = 0$$

$$\frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

Esempio

La corrispondente SBA $x^{(5)}$ non viene modificata rispetto a quella iniziale.

Alla sesta iterazione, la variabile di base entrante è la x6, mentre quella uscente è la x_5.

Il nuovo insieme di indici di base è $B^{(6)} = \{1, 6\}$ e il corrispondente problema in forma canonica è:

$$\min z(x) = -x_2 + 6x_4 + 3x_5$$
$$s.v.$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 - 9x_4 + 9x_5 = 0$$
$$\frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

Esempio

La corrispondente SBA $x^{(6)}$ è ancora coincidente con quella iniziale.

Alla settima iterazione, la variabile di base entrante è la x_2, mentre si decide di far uscire dalla base la variabile x_1 (anche in questo caso, la scelta non è univoca, giacché poteva essere scelta come variabile di base uscente la x_6).

Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

Esempio

Il nuovo insieme di indici di base è $B^{(7)} = \{2, 6\}$ che corrisponde a $B^{(1)}$.

Pertanto, l'algoritmo del simplesso ha generato un ciclo, e la stessa sequenza di insiemi di indici di base ammissibili sarà determinata indefinitamente, se si mantiene lo stesso criterio di scelta della variabile di base entrante o uscente a ogni iterazione.

Convergenza dell’algoritmo del Simplesso

- Metodi per evitare i cicli

I metodi per evitare la generazione di cicli per l’algoritmo del simplesso si possono così classificare:

1) <u>metodi di tipo probabilistico</u>

Si assume che la scelta, a ogni iterazione, dell’elemento di pivot (nei casi in cui non è univocamente determinabile) corrisponda a una variabile aleatoria distribuita uniformemente. In tal modo non si esclude la generazione di un ciclo, ma la sua ripetizione per un numero finito di volte (giacché l’uscita del ciclo è comunque garantita dopo un numero finito di iterazioni);

Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

Metodi per evitare i cicli

2) <u>metodi di tipo deterministico</u>

A questa categoria appartiene, tra gli altri, la «**regola di Bland**», in base alla quale, a ogni iterazione t dell'algoritmo del simplesso, entra in base la variabile x_k di costo ridotto negativo con indice minimo, ovvero $k = \min\{ j: c_j^{(t)} < 0, j \in N^{(t)}\}$, ed esce di base la variabile x_g di indice minimo tra quelle per cui $g = B_h{}^t$ e

$$h = \arg \min_{i=1,\dots,m} \{\frac{b_i{}^t}{a_{ik}{}^t} : a_{ik}{}^t > 0\}$$

Convergenza dell’algoritmo del Simplesso

La dimostrazione della terminazione in un numero finito di passi dell’algoritmo del simplesso, nel caso in cui l’elemento di pivot ad ogni iterazione venga scelto utilizzando la regola di Bland, è lasciata al lettore come ulteriore approfondimento.

Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

- Esempio

Si consideri il problema di PL, formulato all'inizio del precedente riquadro, in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base $B^{(0)} = \{5, 6\}$.

Si applica la regola di Bland per la selezione dell'elemento di pivot a ogni iterazione dell'algoritmo del simplesso.

Alla prima iterazione, entra in base la variabile x_1 al posto della variabile x_5.

Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

- Esempio

L'insieme di indici di base diventa $B^{(1)} = \{1, 6\}$ e il problema in forma canonica rispetto a $B^{(1)}$ è:

$$\min z(x) = -x_2 + x_4 + 3x_5$$
$$s.v.$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 - 9x_4 + 9x_5 = 0$$
$$\frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

La SBA corrispondente è $x^{(1)} = [0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0]^T$, coincidente con $x^{(0)}$.

Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

- Esempio

Alla seconda iterazione, entra in base la variabile x_2, al posto della variabile x_1.

Il problema in forma canonica rispetto a $B^{(2)}$= {2, 6} è il seguente:

$$\min z(x) = x_1 - 2x_3 - 3x_4 + 12x_5$$
$$s.v.$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 - 9x_4 + 9x_5 = 0$$
$$-\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 - 2x_5 + x_6 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

La SBA corrispondente è $x^{(2)}$, anch'essa uguale a $x^{(0)}$.

Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

Esempio

Alla terza iterazione, entra in base la variabile x_3, al posto della variabile x_6.

Il problema in forma canonica rispetto a $B^{(3)}$= {2, 3} è il seguente:

$$\min z(x) = -x_1 + 3x_4 + 6x_6$$
$$s.v.$$
$$-x_1 + x_2 - 3x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 0$$
$$-x_1 + x_3 + 3x_4 - 6x_5 + 3x_6 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

il che ci consente di affermare che il problema è illimitato inferiormente.

Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

La 'rapidità' dell'algoritmo del Simplesso

Chiariti gli aspetti relativi alla terminazione finita dell'algoritmo del simplesso, resta da esaminare la complessità dell'algoritmo, ovvero la «**rapidità**» con cui esso converge a una delle due condizioni di arresto.

Questa questione è, tutt'oggi, ancora aperta. Teoricamente, se utilizzando l'algoritmo del simplesso con la regola Bland non si può mai passare due volte per la stessa base, l'algoritmo ha termine dopo aver visitato al più tutte le SBA ammissibili del sistema $Ax = b,\ A \in R^{m\times n}$, che, come osservato nella Sezione 5.3, possono essere pari al più a $\frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

Ciò implica che l'algoritmo del simplesso può richiedere al più un numero di iterazioni esponenziale in n.

Il problema tuttora aperto è l'esistenza o meno di una versione dell'algoritmo del simplesso in grado di terminare in un numero di iterazioni polinomiale in n.

Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

Finora non è nota una versione polinomiale dell'algoritmo del simplesso, mentre si conoscono esempi di problemi di PL che richiedono un numero esponenziale di iterazioni se risolti con le versioni note dell'algoritmo, anche se, mediamente, l'algoritmo del simplesso risulta molto efficiente, richiedendo approssimativamente un numero di iterazioni proporzionale al numero m di vincoli e alla radice quadrata del numero n di variabili.

L'opinione prevalente, tuttavia, è che non possano esistere versioni polinomiali dell'algoritmo, anche se non si conoscono ancora dimostrazioni formali a favore di tale conclusione.

Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

Il cubo di Klee-Minty

Si consideri il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = \sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} x_j \qquad (8.13)$$

$$s.v.$$

$$x_j + \sum_{h=1}^{j-1} 2^{j-h+1} x_h, j = 1, \ldots, n \qquad (8.14)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n. \qquad (8.15)$$

L'insieme dei vincoli (8.14)–(8.15) definisce il cosiddetto «**cubo di Klee- Minty**», rappresentato in **Figura 8.1** nel caso in cui $n = 3$.

Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

- Figura 8.1 – Rappresentazione del cubo di Klee - Minty

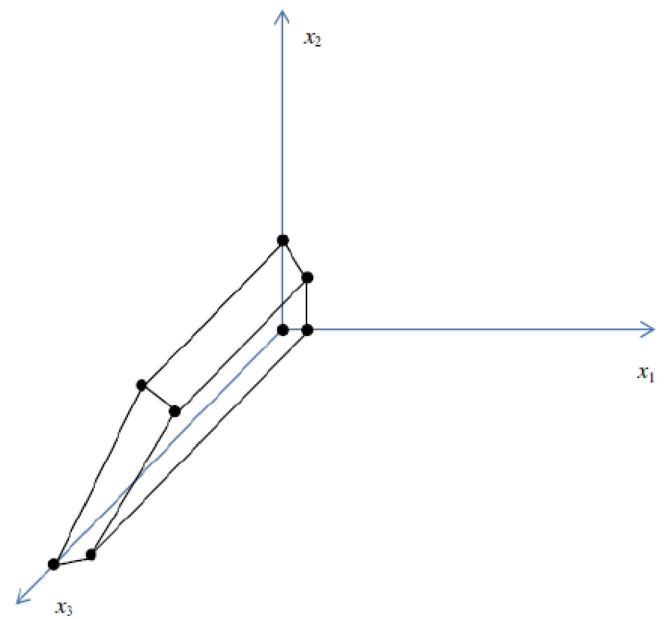

Figura 8.1 Rappresentazione in $\Re^3$ del cubo di Klee-Minty. I vertici di tale cubo hanno coordinate $[0\ \ 0\ \ 0]^T$, $[10\ \ 0\ \ 0]^T$, $[10\ \ 60\ \ 0]^T$, $[0\ \ 100\ \ 0]^T$, $[0\ \ 100\ \ 600]^T$, $[10\ \ 60\ \ 680]^T$, $[10\ \ 0\ \ 920]^T$ e $[0\ \ 0\ \ 1.000]^T$.

Se a ogni iterazione la variabile di base entrante viene scelta in corrispondenza del coefficiente di costo ridotto negativo più piccolo, si dimostra che l'algoritmo del simplesso converge alla soluzione ottima del problema (8.13)–(8.15) in $2^n - 1$ iterazioni

Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

- Esempio

Si consideri il problema di PL (8.13)–(8.15), nel caso in cui $n = 3$, che, posto in forma standard, risulta

$$\min z(x) = -4x_1 - 2x_2 - x_3$$
$$s.v.$$
$$x_1 + x_4 = 10$$
$$4x_1 + x_2 + x_5 = 100$$
$$8x_1 + 4x_2 + x_3 + x_6 = 1000$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Tale problema è anche in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base $B^{(0)} = \{4, 5, 6\}$.

Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

- Esempio

La SBA corrispondente è $x^{(0)}$= [0 0 0 10 100 1000]^T, con z($x^{(0)}$)= 0.

Per risolvere il problema si può utilizzare il metodo del simplesso.

Si esegue un'operazione di pivot sull'elemento ${a_{11}}^{(0)}$= 1.

Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

- Esempio

Si ottiene il seguente problema equivalente in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base $B^{(1)}$= {1, 5, 6}:

$$\min z(x) = -2x_2 - x_3 + 4x_4 - 40$$
$$s.v.$$
$$x_1 + x_4 = 10$$
$$x_2 - 4x_4 + x_5 = 60$$
$$4x_2 + x_3 - 8x_4 + x_6 = 620$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

La SBA corrispondente è $x^{(1)}$= [10 0 0 0 60 920]^T, con valore z($x^{(1)}$) = – 40.

Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

- Esempio

Alle successive iterazioni, il lettore può verificare che vengono generate le SBA corrispondenti ai seguenti insiemi di indici di base:

$B^{(2)}= \{1, 2, 6\}$; $B^{(3)}= \{4, 2, 6\}$; $B^{(4)}= \{4, 2, 3\}$;

$B^{(5)}= \{1, 2, 3\}$; $B^{(6)}= \{1, 5, 3\}$; $B^{(7)}= \{4, 5, 3\}$.

La sequenza di SBA generate corrisponde ai vertici elencati, nell'ordine, nella didascalia della Figura 8.1.

Convergenza dell'algoritmo del Simplesso

- Esempio

In corrispondenza di $B^{(7)}$, il problema equivalente in forma canonica risulta essere:

$$\min z(x) = 4x_1 + 2x_2 + x_6 - 1000$$
$$s.v.$$
$$x_1 + x_4 = 10$$
$$4x_1 + x_2 + x_5 = 100$$
$$8x_1 + 4x_2 + x_3 + x_6 = 1000$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

La relativa SBA è ottima e pari a x^*= [0 0 1000 10 100 0]^T, con z(x^*)= –1000.

Si osserva che, in questo caso, l'algoritmo del simplesso ha richiesto $(2^3 - 1) = 7$ iterazioni.