Laurea Triennale in Scienze e Tecnologie per i Media, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2023-2024. *Titolare del corso:* Claudio Macci
Simulazione 1
L'Esercizio 6 è solo per coloro che sostengono l'esame da 8 crediti.

Esercizio 1. Si lanciano due dadi: il primo è un dado equo, il secondo è un dado con i numeri $1, 2, 3, 4, 5, 5$. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di volte che esce il numero 5, e sia Y la variable aleatoria che conta il numero di volte che esce un numero minore o uguale a 3.
D1) Trovare la densità discreta di X.
D2) Trovare la densità discreta di Y.
D3) Sia E l'evento *esce il 5 nel lancio del dado equo*. Calcolare $P(E|X = 1)$.

Esercizio 2. Abbiamo due urne. Entrambe hanno 2 palline bianche e 3 nere. Si estrae a caso una pallina dalla prima urna e la si mette nella seconda. Poi si estraggono a caso due palline in blocco dalla seconda urna.
D4) Calcolare la probabilità di estrarre due palline dello stesso colore dalla seconda urna.

Esercizio 3. Sia $k \geq 1$ un numero intero arbitrariamente fissato. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:
$$p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{4}\right)^{1-k} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1+x_2} \quad \text{per } x_1, x_2 \geq k \text{ interi.}$$
D5) Calcolare $P(X_2 = 2X_1)$.
D6) Calcolare $P(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = k + 1\}|X_1 + X_2 = 2k + 1)$, verificando che il risultato non dipende da k.

Esercizio 4. Siano $a, b > 0$ con $a < b$ arbitrariamente fissati. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su (a^4, b^4).
D7) Trovare la densità continua della variabile aleatoria $Y = \sqrt{X}$.
D8) Sia m la mediana di Y, cioè il valore m per cui $F_Y(m) = \frac{1}{2}$; verificare che $m = \sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
D9) Sia X una variabile aleatoria Normale con media 1 e varianza 4. Trovare il valore di z_1 per cui si ha $P(1 \leq X \leq z_1) = \Phi(3/2) - 1/2$.
D10) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media 1 e varianza 16. Dire per quale valore di z_2 si ha
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - 1 > \frac{z_2}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi(1/8).$$

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una catena di Markov omogenea su $E = \{1, 2, 3, 4\}$ e con matrice di transizione
$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
D11) Calcolare $\lim_{n\to\infty} p_{34}^{(n)}$ dopo aver motivato l'esistenza del limite.
D12) Calcolare il tempo medio di primo arrivo nello stato 3 partendo dallo stato 1.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` Abbiamo due prove indipendenti con probabilità di successo $1/6$ e $2/6$ rispettivamente. Quindi

$$\begin{cases} p_X(0) = (1-1/6)(1-2/6) = 20/36 = 5/9, \\ p_X(1) = 1/6(1-2/6) + (1-1/6)2/6 = (4+10)/36 = 14/36 = 7/18, \\ p_X(2) = 1/6 \cdot 2/6 = 2/36 = 1/18. \end{cases}$$

`D2)` Abbiamo due prove indipendenti, entrambe con probabilità di successo $3/6 = 1/2$. Quindi si ha una distribuzione Binomiale con parametri $n = 2$ e $p = 1/2$, cioè $p_Y(k) = \binom{2}{k}(\frac{1}{2})^2$ per $k \in \{0,1,2\}$, da cui segue

$$\begin{cases} p_Y(0) = 1/4, \\ p_Y(1) = 2/4 = 1/2, \\ p_Y(2) = 1/4. \end{cases}$$

`D3)` Tenendo conto del valore di $p_X(1)$ calcolato prima, la probabilità condizionata richiesta è

$$P(E|X=1) = \frac{P(E \cap \{X=1\})}{P(X=1)} = \frac{1/6(1-2/6)}{7/18} = \frac{2}{7}.$$

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula delle probabilità totali si ha

$$\begin{aligned} P(E) = P(E|B_1)P(B_1) + P(E|B_1^c)P(B_1^c) &= \left(\frac{\binom{3}{2}\binom{3}{0}}{\binom{6}{2}} + \frac{\binom{3}{0}\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}}\right)\frac{2}{5} + \left(\frac{\binom{2}{2}\binom{4}{0}}{\binom{6}{2}} + \frac{\binom{2}{0}\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}}\right)\frac{3}{5} \\ &= \left(\frac{3}{15} + \frac{3}{15}\right)\frac{2}{5} + \left(\frac{1}{15} + \frac{6}{15}\right)\frac{3}{5} = \frac{6}{15}\frac{2}{5} + \frac{7}{15}\frac{3}{5} = \frac{12+21}{75} = \frac{33}{75} = \frac{11}{25}. \end{aligned}$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha

$$\begin{aligned} P(X_2 = 2X_1) = \sum_{h \geq k} p_{X_1,X_2}(h, 2h) &= \sum_{h \geq k} \left(\frac{1}{4}\right)^{1-k} \left(\frac{1}{2}\right)^{h+2h} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{1-k} \sum_{h \geq k} \left(\frac{1}{8}\right)^h = \left(\frac{1}{4}\right)^{1-k} \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^k}{1-1/8} = \frac{1}{4}\frac{8}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^k. \end{aligned}$$

`D6)` Osserviamo che

$$\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = k+1\} \subset \{X_1 + X_2 = 2k+1\}$$

e

$$\{X_1 + X_2 = 2k+1\} = (\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = k+1\}) \cup (\{X_1 = k+1\} \cap \{X_2 = k\}),$$

ed è una unione disgiunta. Quindi la probabilità condizionata richiesta è uguale a

$$\frac{p_{X_1,X_2}(k,k+1)}{p_{X_1,X_2}(k,k+1) + p_{X_1,X_2}(k+1,k)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{1-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{1-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{1-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{1-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}}{2\left(\frac{1}{4}\right)^{1-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}} = \frac{1}{2}$$

e non dipende da k.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(a^2 \leq Y \leq b^2) = 1$ e quindi

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq a^2, \\ (*) & \text{se } a^2 < y < b^2, \\ 1 & \text{se } y \geq b^2. \end{cases}$$

Per $y \in (a^2, b^2)$ si ha

$$(*) = P(\sqrt{X} \le y) = P(X \le y^2) = \int_{a^4}^{y^2} \frac{1}{b^4 - a^4} dx = \left[\frac{x}{b^4 - a^4} \right]_{x=a^4}^{x=y^2} = \frac{y^2 - a^4}{b^4 - a^4}.$$

Quindi la densità continua richiesta è

$$f_Y(y) = \frac{2y}{b^4 - a^4} 1_{(a^2, b^2)}(y).$$

`D8)` Tenendo conto dell'espressione di $F_Y(y)$ calcolata prima, si ha l'equazione

$$\frac{m^2 - a^4}{b^4 - a^4} = \frac{1}{2}$$

da cui segue $m^2 = a^4 + \frac{b^4 - a^4}{2} = \frac{2a^4 + b^4 - a^4}{2} = \frac{a^4 + b^4}{2}$, e quindi $m = \sqrt{\frac{a^4 + b^4}{2}}$.

Esercizio 5.
`D9)` Ricordando che $\Phi(0) = 1/2$, si ha

$$P(1 \le X \le z_1) = \Phi\left(\frac{z_1 - 1}{\sqrt{4}}\right) - \Phi\left(\frac{1 - 1}{\sqrt{4}}\right) = \Phi\left(\frac{z_1 - 1}{2}\right) - \frac{1}{2};$$

quindi

$$\Phi\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} = \Phi\left(\frac{z_1 - 1}{2}\right) - \frac{1}{2},$$

da cui segue (poiché Φ è invertibile) $z_1 - 1 = 3$, e cioè $z_1 = 4$.
`D10)` Dividendo membro a mebro per $\sqrt{16}/\sqrt{n}$ si ha

$$\left\{ \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - 1 > \frac{z_2}{\sqrt{n}} \right\} = \left\{ \frac{\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - 1}{\sqrt{16}/\sqrt{n}} > \frac{z_2}{\sqrt{16}} \right\}.$$

Allora per il Teorema Limite Centrale e per la condizione imposta dal testo dell'esercizio si deve avere l'uguaglianza

$$1 - \Phi\left(\frac{z_2}{\sqrt{16}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{8}\right),$$

da cui segue (poiché Φ è invertibile) $z_2/\sqrt{16} = 1/8$, e cioè $z_2 = \sqrt{16}/8 = 4/8 = 1/2$.

Esercizio 6.
`D11)` Si verifica che la catena è irriducibile. Inoltre, poiché esiste un elemento diagonale positivo della matrice di transizione (si ha $p_{11} = p_{33} = 1/4$), la catena è regolare. Quindi per il Teorema di Markov si ha

$$\lim_{n \to \infty} p_{34}^{(n)} = \pi_4$$

(cioè l'esistenza del limite è garantita) dove $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ è l'unica distribuzione stazionaria della catena. Si ha il sistema

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{\pi_1}{4} + \frac{\pi_3}{4} + \pi_4 \\ \pi_2 = \frac{\pi_1}{4} + \frac{\pi_3}{4} \\ \pi_3 = \frac{\pi_1}{4} + \frac{\pi_3}{4} \\ \pi_4 = \frac{\pi_1}{4} + \pi_2 + \frac{\pi_3}{4}. \end{cases}$$

Dalla terza equazione si ha $\pi_1 = 3\pi_3$ (con alcuni calcoli); confrontando seconda e terza equazione si ha $\pi_2 = \pi_3$. Sostituendo queste due nella quarta equazione si ha

$$\pi_4 = \frac{3\pi_3}{4} + \pi_3 + \frac{\pi_3}{4} = \frac{8\pi_3}{4} = 2\pi_3.$$

Poi, tenendo conto della condizione $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$, si ottiene

$$3\pi_3 + \pi_3 + \pi_3 + 2\pi_3 = 1, \; 7\pi_3 = 1, \; \pi_3 = \frac{1}{7}.$$

Quindi, sostituendo il valore $\pi_3 = 1/7$ nelle altre equazioni, possiamo dire che l'unica distribuzione stazionaria è $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = (3/7, 1/7, 1/7, 2/7)$. In conclusione

$$\lim_{n\to\infty} p_{34}^{(n)} = \frac{2}{7}.$$

`D12)` Si deve considerare la catena in cui lo stato 3 è assorbente, e $T = \{1, 2, 4\}$. Allora, se indichiamo con μ_i il tempo medio di primo passaggio (assorbimento secondo la catena modificata) nello stato 3 partendo da $i \in T$, abbiamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \mu_1 = 1 + \frac{\mu_1}{4} + \frac{\mu_2}{4} + \frac{\mu_4}{4} \\ \mu_2 = 1 + \mu_4 \\ \mu_4 = 1 + \mu_1. \end{cases}$$

Il valor medio richiesto è μ_1 che si ricava sostituendo seconda e terza equazione nella prima equazione:

$$\mu_1 = 1 + \frac{\mu_1}{4} + \frac{1 + 1 + \mu_1}{4} + \frac{1 + \mu_1}{4},$$

da cui segue $\mu_1 - \frac{3}{4}\mu_1 = \frac{4+1+1+1}{4}$, $\frac{\mu_1}{4} = \frac{7}{4}$, e quindi $\mu_1 = 7$.

Osservazione. Si osservi che, sostituendo nella terza e nella seconda equazione, si ha (valori non richiesti nella domanda dell'esercizio) $\mu_4 = 1 + 7 = 8$ e $\mu_2 = 1 + 8 = 9$. Per certi versi, vedendo la matrice di transizione, non sorprende che si abbia $\mu_2 > \mu_4 > \mu_1$.