

Cognome:..... Nome:..... Matr.:.....

**Esercizio 1 [16 punti]**

A: *notazione asintotica*. Dire quali delle seguenti relazioni asintotiche sono vere:

$\checkmark n + n\sqrt{n} \log^2 n = o(n^{1.8}); \checkmark \log^3 n = o(\sqrt[4]{n}); \checkmark n = \Omega(\frac{n}{\log \log \log n}); \frac{n^{1.5}\sqrt{n+\log n}}{\sqrt{n^3+3}} = \Theta(\sqrt{n}); \text{F}$   
 $(\frac{7}{3})^n = \omega(2^n); \checkmark 2^n = \Theta(2^n \log \log n); \text{F } 2^n = \omega(2^n + n^2); \text{F } 2^{n+8} = \Theta(2^{n-8}); \checkmark$

B: *equazioni di ricorrenza*. Fornire la soluzione asintotica alle seguenti relazioni di ricorrenza:

$T(n) = 4T(\frac{n}{16}) + n^2;$  Soluzione:

$T(n) = T(\sqrt{n}) + 1;$  Soluzione:

C: *algoritmi e complessità*. Quale algoritmo useresti e quanto costa se devi:

- Dato un grafo diretto  $G$ , stabilire se tutti i nodi possono raggiungere un nodo specifico  $t$ :
- In un grafo non orientato, completo e pesato, calcolare l'albero dei cammini minimi con sorgente  $s$ :
- Ordinare un vettore di  $n$  interi compresi fra  $n$  e  $n^2$ :
- Fondere due alberi AVL, uno contenente  $n$  nodi e l'altro  $\log n$  nodi:

**Esercizio 2 [8 punti]**

Sia  $T$  un albero binario con  $n$  nodi. Si progetti un algoritmo che dato  $T$  e due interi  $h_1$  e  $h_2$ , con  $h_1 \leq h_2$ , restituisca il numero di nodi non foglia di  $T$  che hanno profondità  $h$  tale che  $h_1 \leq h \leq h_2$ .<sup>1</sup>

Si assuma che  $T$  è rappresentato tramite una struttura dati collegata, con record e puntatori, dove il record di ogni nodo contiene il puntatore al figlio sinistro e al figlio destro del nodo. L'algoritmo deve avere complessità  $O(n)$ . Si fornisca lo pseudocodice dettagliato.

**Esercizio 3 [8 punti]**

Sia  $A[1 : n]$  un vettore di  $n$  interi positivi. Diremo che un elemento  $A[i]$  è *felice al quadrato* se esiste un indice  $j$  tale che  $A[j] = A[i]^2$ .

Si progetti un algoritmo che dato  $A$  dica in tempo  $O(n \log n)$  se esiste almeno un elemento felice al quadrato. Si fornisca lo pseudocodice dettagliato.

---

<sup>1</sup>Si ricordi che la profondità di un nodo è la sua distanza (misurata in numero di archi) dalla radice.

⑥

$$① T(n) = 4T\left(\frac{n}{16}\right) + n^2$$

MASTER

$$\sqrt{n} \quad \sqrt{n} \quad n^2$$

$$n^2 = \Omega(n^{1/2+\epsilon}) \quad \epsilon > 0 \quad \epsilon = \frac{1}{2} \text{ or } \frac{1}{3}$$

$$4\left(\frac{n}{16}\right)^2 \leq n^2 \cdot c \quad c = \frac{1}{16}$$

CASE ③

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

②

$$T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$$

CHANGE VAR.

$$n = 2^x$$

$$T(2^x) = T(2^{x/2}) + 1$$

$$T(2^x) := R(x)$$

$$R(x) = R(x/2) + 1 \Rightarrow R(x) = O(\lg x)$$

$$T(2^x) = O(\lg x) \xrightarrow{x = \lg n} T(2^{\lg n}) = O(\lg \lg n) = T(n) = O(\lg \lg n)$$

① ALGO  $\rightarrow$  VISITA DFS DA SORGENTE MA CON  $E' = (v, E)$   
 $E' = \{e : \forall u, v \in V [(u, v) \in E' \Leftrightarrow (v, u) \in E]\}$

COSTO  $\rightarrow O(n + m)$  CON LISTE DI ADIACENZA

② ALGO  $\rightarrow$  ALGO DIJKSTRA CON SORGENTE 2

COSTO  $\rightarrow O(m + n \log n)$  HEAP FIBONACCI

③ ALGO  $\rightarrow$  RADIX SORT  $\rightarrow O((n + b) \cdot \frac{\log k}{\log n})$   $b = 2$

$$T(n) = O\left(n \cdot \frac{\log n}{\log n}\right) = O(2n) = O(n)$$

#### Esercizio 2 [8 punti]

Sia  $T$  un albero binario con  $n$  nodi. Si progetti un algoritmo che dato  $T$  e due interi  $h_1$  e  $h_2$ , con  $h_1 \leq h_2$ , restituisca il numero di nodi non foglia di  $T$  che hanno profondità  $h$  tale che  $h_1 \leq h \leq h_2$ .<sup>1</sup>

Si assuma che  $T$  è rappresentato tramite una struttura dati collegata, con record e puntatori, dove il record di ogni nodo contiene il puntatore al figlio sinistro e al figlio destro del nodo. L'algoritmo deve avere complessità  $O(n)$ . Si fornisca lo pseudocodice dettagliato.

#### Esercizio 3 [8 punti]

Sia  $A[1 : n]$  un vettore di  $n$  interi positivi. Diremo che un elemento  $A[i]$  è felice al quadrato se esiste un indice  $j$  tale che  $A[j] = A[i]^2$ .

Si progetti un algoritmo che dato  $A$  dica in tempo  $O(n \log n)$  se esiste almeno un elemento felice al quadrato. Si fornisca lo pseudocodice dettagliato.

④  $\log(n)$  INSERT  $\rightarrow$

2] BASTA 1 FUNZIONE

ALTRA  $\rightarrow$  DEL USO COME PARAMETRO

DEVE FUNZIONE

CALCOLA  $P(T, v, h_1, h_2, h)$

IF ( $v = \text{NULL}$   $\vee$  ( $\text{SIN}(v) = \text{NULL} \wedge \text{DES}(v) = \text{NULL}$ )  $\vee h > h_2$ ).

RETURN 0

ELIF ( $h \leq h_2$  AND  $h \geq h_1$ )

RETURN  $1 + \text{CALCOLA } P(T, \text{SIN}(v), h_1, h_2, h+1)$   
 $+ \text{CALCOLA } P(T, \text{DES}(v), h_1, h_2, h+1)$

ELSE

RETURN  $\text{CALCOLA } P(T, \text{SIN}(v), h_1, h_2, h+1)$

$+ \text{CALCOLA } P(T, \text{DES}(v), h_1, h_2, h+1)$ .

PER TROVARE I VALORI, CON INTERO RES, BASTA CHIAMARE

$RES = \text{CALCOLA}(T, r, h_1, h_2, 0)$  CON  $r = \text{RADICE ALB.}$

CORRETTA? SI

COMPRESSITA? OGNI NODO VISITATO 1 VOLTA:

COMPL. SUBORDINATA ISTRUZ.  $\rightarrow O(1)$

$$T(n) = O(n).$$

3