07/03/2024

PROBLEMA GESTIONE DI INSIEMI DISGIUNTI (UNION-FIND).

STRUTTURA DATI X RISOLVERE IL PROBLEMA MST ? → ALGO KRUSKAL

TIPO DI DATO

- SERIE (A, B, C) DISGIUNTI TRA LORO

  ES: $S = 1, 2, 3$

  $A = \{1\}$ / $B = \{2, 3\}$

OP

- MAKESET(x) → DA ELE. x CREA SET CON NOME x
- UNION(A, B) → NEW SET CON EL = $A \cup B$, NOME SET = A.
- FIND(x) → RETURN NOME SET CHE CONTIENE x.

OBB:

IMPLEMENTARE UNA S.D. EFFICIENTE X UN NUM. ARBITRARIO DI OPERAZIONI (BETTER COSTO AMMORTIZZATO).

vedremo due tipi di approccio, tutti e due con un idea generale in comune...

IDEA: INSIEMI DISGIUNTI = FOREST DI ALBERI RADICATI

⇓

ALBERI = INSIEMI → RADICE = NAME SET.

1° APPROCCIO: ALBERO QUICKFIND

STRUTTURA

- → FOREST DI ALBERI $h=1$,
- → $\forall$ ALBERO
  - → RADICE = NOME SET
  - → FOGLIE = ELEM. (INCLUSO ROOT)

IMPLEMENTAZIONE

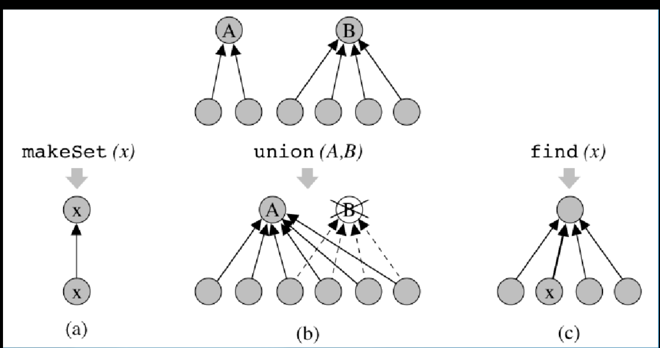
classe QuickFind **implementa** UnionFind:
dati: $S(n) = O(n)$
una collezione di insiemi disgiunti di elementi *elem*; ogni insieme ha un nome *name*.
operazioni:
makeSet(*elem e*) $T(n) = O(1)$
crea un nuovo albero, composto da due nodi: una radice ed un unico figlio (foglia). Memorizza e sia nella foglia dell'albero che come nome nella radice.

union(*name a*, *name b*) $T(n) = O(n)$
considera l'albero A corrispondente all'insieme di nome a, e l'albero B corrispondente all'insieme di nome b. Sostituisce tutti i puntatori dalle foglie di B alla radice di B con puntatori alla radice di A. Cancella la vecchia radice di B.

find(*elem e*) $\rightarrow$ *name* $T(n) = O(1)$
accede alla foglia x corrispondente all'elemento e. Da tale nodo segue il puntatore al padre, che è la radice dell'albero, e restituisce il nome memorizzato in tale radice.

→ COSTO + PARTICOLARE MA SEE + AVANTI

un esempio delle operazioni



QUANTO COSTA OGNUNO?

COSTO SINGOLA OPERAZIONE:

- MAKESET$(x) = O(1)$ → CREI 1 e
- FIND$(e) = O(1)$ → CAMBIO POINTER
- UNION$(A,B) = O(n)$ con n = ELEM. DI B

$\Downarrow$

$O(n)$.

se li eseguiamo un tot arbitrario di volte?

- FIND e MAKESET RIMANGONO O(1)
- UNION PARTICOLARI SONO LUNGHI:

ESEMPIO

union (n-1, n)
union (n-2, n-1)
union (n-3, n-2)
⋮
union (2, 3)
union (1, 2)

→ 1 CAMBIO PUNTATORE
→ 2 " "
⋮
→ n " "

TOT: $\Theta(n^2)$

SI PUÒ MIGLIORARE!

QUICK FIND: EURISTICA UNION BY SIZE

- IDEA:

NELLA UNION (A,B), CONTROL CHE SIZE(A) < SIZE(B).
SE SI, UNION(B,A) MA A HA FINE nome RADICE DI B = A.

cosi le union sono le piu piccole possibili.

- REALIZZAZIONE
  - FIND, MAKESET UGUALI A PRIMA. → COSTO SINGOLO E TOT OPERAZIONI = O(1)
  - UNION:

union(*name a*, *name b*) $T_{am} = O(\log n)$
considera l'albero A corrispondente all'insieme di nome a, e l'albero B corrispondente all'insieme di nome b. Se size(A) $\geq$ size(B), muovi tutti i puntatori dalle foglie di B alla radice di A, e cancella la vecchia radice di B. Altrimenti (size(B) > size(A)) memorizza nella radice di B il nome A, muovi tutti i puntatori dalle foglie di A alla radice di B, e cancella la vecchia radice di A. In entrambi i casi assegna al nuovo insieme la somma delle cardinalità dei due insiemi originali (size(A) + size(B)).

COSTO:
- CASO PEGGIORE → O(n)
- CASO AMMORTIZZATO → O(log n)

N.B. COSTO AMMORTIZZATO : COSTO DI UNA . OP. SINGOLA IN UN NUMERO ARBITRARIO DI OPERAZIONI

ANALISI COSTO AMMORTIZZATO

- NEL CASO PEGGIORE, $\Theta(n)$ = CASO union(A,B)
  $A = B = n/2$

- NELL'ALTRO, CONSIDERIAMO, DOPO m UNION, UN SINGOLO NODO:

  ① OSS. CHE IL NODO CHANGE PADRE $\leq O(\lg n)$

  $\Downarrow$

  POICHÉ IL NODO SI TROVERÀ IN UN NUOVO INSIEME GRANDE $\geq 2 \cdot$ INSIEME VECCHIO DI NODO.

  DOVE
  - 1 INSIEME OG
  - 2 2° SET
  - $i \to 2^i$ SSET $\to$ DOPO n SCAMBI

  $\downarrow$

  $O(\lg n)$

QUINDI $\times\ n$ VOLTE:

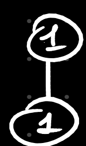
$O(n \lg n)$ $\Rightarrow$ COSTO TOT OP

$O(m + n \cdot \lg n)$

2° APPROCCIO: UNION BY QUICK UNION

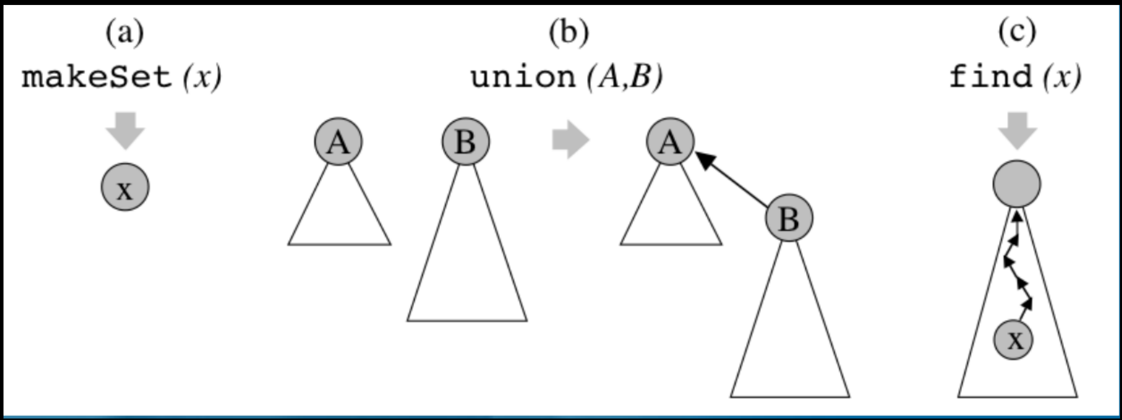
= APPROCCIO CON QUICKFIND, MA CON:

- ELEMENTO = ALTRI ELEMENTI ESCLUSA RADICE $\to \neq$



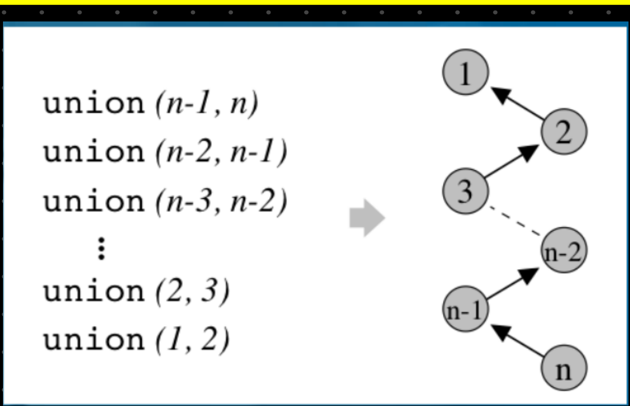
COMANDI:

- MAKESET(X) → = A PAG. PRIMA
- UNION(A,B) → B PUNTA AD A.
- FIND (X) → "SALGO" FINO A RADICE.



COSTO SINGOLA OPERAZIONE: $O(1)$ | $O(1)$ CAMBIO POINTER | $O(h)$ → h = ALTEZZA ALBERO

ANCHE QUI, UN CASO PARTICOLARE DI UNION È INEFFICIENTE



⇒ COSTO

$O(n)$ SINGOLO

m FIND:

$$m \cdot O(n) = O(n \cdot m)$$

anche qui, l'euristica union by size aiuta a migliorare il costo

UNION BY SIZE: UNION(A,B), CONFRONTO SIZE(A) e SIZE(B)
↳ NUM. NODI

· SE $SIZE(A) < SIZE(B) \rightarrow UNION(B, A) \rightarrow$ DOPO CAMBIO NOME IN A

IL COSTO?

LEMMA: ALBERO QUICKUNION CON n. NODI n E ALTEZZA h
VALE CHE $n \geq 2^h$

QUINDI

COSTO AMMORTIZZATO

COSTO FIND $\rightarrow O(\log n) \Rightarrow$ DATO CHE

n = n. NODI

h = ALT. ALBERO

$\Downarrow$

$h \leq \log(n)$

QUINDI, COME x QUICK FIND .....

SE ESEGUO n MAKESET,
n UNION $\Rightarrow O(n + m \log n)$
m FIND

X CAPIRE XCHÈ LEMMA IS VALIDO

DIM

Lemma 9.2 *Un albero QuickUnion bilanciato in altezza con radice x ha almeno $2^{\text{rank}(x)}$ nodi.* N.B → RANK(A) = ALTEZZA ALBERO A.

Dimostrazione. Procediamo per induzione sul numero di operazioni effettuate. All'inizio, non ci sono alberi e quindi la base dell'induzione è banalmente verificata. Assumiamo che il lemma sia verificato prima di un'operazione, e dimostriamo che sarà valido anche dopo. Dato che le `find` non modificano alberi o rank, consideriamo solamente le operazioni `makeSet` e `union`.

Consideriamo prima un'operazione `makeSet`(x). Tale operazione non modifica alberi e rank preesistenti, ed introduce un albero di altezza 0, contenente solo il nodo x, con $\text{rank}(x) = 0$. Tale albero ha $2^{\text{rank}(x)} = 2^0 = 1$ nodo e pertanto verifica il lemma.

Consideriamo ora un'operazione `union`(A, B). Indichiamo con $\text{rank}(A)$ e $\text{rank}(B)$ il rank delle radici dei due alberi A e B prima della `union`(A, B), e con $\text{rank}(A \cup B)$ il rank della radice dell'albero risultante. Similmente, indichiamo con $|A|$ e $|B|$ il numero di nodi nei due alberi A e B prima della `union`(A, B), e con $|A \cup B|$ il numero di nodi nell'albero risultante. Osserviamo che avremo sempre $|A \cup B| = |A| + |B|$. Distinguiamo ora tre casi.

1. Se $\text{rank}(B) < \text{rank}(A)$, l'operazione `union` rende la radice dell'albero B figlia della radice dell'albero A. La radice dell'albero risultante avrà pertanto $\text{rank}(A \cup B) = \text{rank}(A)$, e l'albero risultante avrà $|A \cup B| = |A| +$ $|B|$ nodi. Utilizzando l'ipotesi induttiva sugli insiemi A e B, il numero di nodi nell'albero risultante è pertanto

$$|A \cup B| = |A| + |B| \geq 2^{\text{rank}(A)} + 2^{\text{rank}(B)} > \overbrace{2^{\text{rank}(A)} = 2^{\text{rank}(A \cup B)}}^{\text{UGUALI}}$$

Se $\text{rank}(A) < \text{rank}(B)$, l'operazione `union` rende la radice dell'albero A figlia della radice dell'albero B, e memorizza A come nome nella radice del nuovo albero. La radice dell'albero risultante avrà pertanto $\text{rank}(A \cup B) = \text{rank}(B)$, e l'albero risultante avrà $|A \cup B| = |A| + |B|$ nodi. Utilizzando l'ipotesi induttiva sugli insiemi A e B, il numero di nodi nell'albero risultante è pertanto

$$|A \cup B| = |A| + |B| \geq 2^{\text{rank}(A)} + 2^{\text{rank}(B)} > 2^{\text{rank}(B)} = 2^{\text{rank}(A \cup B)}$$

Se $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$, l'operazione `union` rende la radice dell'albero B figlia della radice dell'albero A, ed aggiorna il rank di A a $\text{rank}(A) + 1$.

La radice dell'albero risultante avrà pertanto $\text{rank}(A \cup B) = \text{rank}(A) + 1$, e l'albero risultante avrà $|A \cup B| = |A| + |B|$ nodi. Utilizzando l'ipotesi induttiva sugli insiemi A e B, il numero di nodi nell'albero risultante è pertanto

$$\begin{aligned}|A \cup B| = |A| + |B| &\geq 2^{\text{rank}(A)} + 2^{\text{rank}(B)} \geq \\ &\geq 2 \cdot 2^{\text{rank}(A)} = 2^{\text{rank}(A)+1} = 2^{\text{rank}(A \cup B)}\end{aligned}$$

In ognuno dei tre casi, il lemma sarà quindi verificato anche dopo l'operazione $\texttt{union}(A, B)$. □

Il seguente corollario è una conseguenza immediata del Lemma 9.2.