Introduzione alla Ricerca Operativa

Corso di Ricerca Operativa
A.A. 2016-2017

Argomenti

- **Cos'è la Ricerca Operativa**
- Problemi di ottimizzazione
- Primi approcci ai modelli di ottimizzazione

Ricerca Operativa

⊙Definizione

Studio dei processi decisionali nei sistemi organizzati, nonché dei modelli e dei metodi per prevedere il comportamento di tali sistemi, in particolare quelli relativi alla crescita della loro complessità, per valutare le conseguenze di determinate decisioni e per individuare le decisioni che ottimizzano le loro prestazioni.

⊙Problemi oggetto di studio

- sistemi di produzione
- sistemi di trasporto
- sistemi di distribuzione e supporto logistico di beni e servizi
- pianificazione, organizzazione e gestione di attività, progetti e sistemi.

Argomenti

- Cos'è la Ricerca Operativa
- **Problemi di ottimizzazione**
- Primi approcci ai modelli di ottimizzazione

Problema di ottimizzazione

Può essere definito intuitivamente come il problema di trovare la migliore soluzione possibile di un dato problema che può essere risolto in più modi.

- il termine «possibile» richiede di poter distinguere una soluzione che possa essere utilizzata nella pratica, detta «soluzione ammissibile», da una che non può esserla.
- il termine «migliore» richiede di poter confrontare due soluzioni ammissibili, distinguendo la migliore dalla peggiore, o stabilendo che le due soluzioni sono equivalenti.

Problemi di ottimizzazione

Metodo a 5 fasi:

1. Raccolta dati
2. Identificazione del problema
3. Formulazione del problema
4. Soluzione del problema
5. Validazione della soluzione

1.Raccolta dati

In questa fase vengono raccolte tutte le informazioni ritenute utili alla migliore soluzione del problema

Problemi di ottimizzazione

1. Identificazione del problema

In questa fase viene descritto il problema in linguaggio naturale, identificando l'oggetto della decisione e gli aspetti rilevanti da tenere in considerazione.

1. Formulazione del problema

In questa fase il problema, identificato nella fase precedente, viene descritto in termini matematici costruendo un «modello di ottimizzazione» individuando i seguenti tre elementi fondamentali

- **Variabili**
- **Vincoli**
- **Funzione obiettivo**

Problemi di ottimizzazione

1. Soluzione del problema

In questa fase viene determinata una soluzione ottima del problema, oppure, si stabilisce che il problema è «inammissibile» o «illimitato».

1. Validazione della soluzione

Un errore nella formulazione potrebbe portare a una soluzione ammissibile per il modello di ottimizzazione ma non per il problema reale che si vuole risolvere: si rende quindi necessaria una quinta fase di «validazione» della soluzione ottenuta.

Problemi di ottimizzazione

- Variabili: In un modello di ottimizzazione, esistono due tipi di grandezze rilevanti: «esogene» ed «endogene». Le prime sono quantità incontrollabili, e prendono il nome di «parametri» o «dati» del problema (raccolti nella prima fase), mentre le seconde sono controllabili da parte del decisore e prendono il nome di «variabili di decisione» o semplicemente variabili. L'assegnazione di un valore a ciascuna variabile di decisione definisce una soluzione del problema.

Problemi di ottimizzazione

- Vincoli: Si tratta dei legami esistenti tra le variabili di decisione e le limitazioni derivanti da considerazioni di varia natura (fisica, economica ecc.). Una soluzione che rispetti tutti i vincoli si dice «soluzione ammissibile»; l'insieme delle soluzioni ammissibili definisce, invece, la «regione ammissibile» del modello.
- Funzione Obiettivo: Esplicita il criterio di valutazione di una soluzione.

Problemi di ottimizzazione

- Un modello di ottimizzazione a singolo obiettivo può essere formulato come segue.

  Si supponga che il numero delle variabili di decisione sia n; si indichi con x il vettore delle n variabili di decisione, con X la regione ammissibile e con $z(x)$ la funzione obiettivo.

  Si avrà,

$$\begin{aligned} &\min \; z(x) \\ &\text{s. v.} \\ &\qquad x \in X \end{aligned}$$

  N.B. si può parlare indifferentemente di modello di «massimo» o di «minimo», dal momento che una soluzione x^* che renda minima la funzione $z(x)$, massimizza al tempo stesso la funzione $-z(x)$.

Problemi di ottimizzazione

La soluzione «ottima» del problema è una soluzione ammissibile $x^* \in X$ tale $\mathrm{z}(x^*) \leq \mathrm{z}(x)$, per ogni $x \in X$, mentre $\mathrm{z}(x^*)$ è detto «ottimo» o valore ottimo. In generale, non è detto che esista sempre la soluzione ottima del problema, e, qualora esista, potrebbe non essere unica. In particolare, se l'insieme X è vuoto, si dirà che il problema è «inammissibile».

Se invece accade che, per ogni $k > 0$, esiste una soluzione $x \in X$ tale che $\mathrm{z}(x) < -k$, allora il problema è (inferiormente) «illimitato».

Esercizio (Pharmax)

Il Consiglio di Amministrazione della società farmaceutica Pharmax di Pomezia ha assegnato un budget di tre milioni di euro alla divisione ricerca e sviluppo, da destinare alla realizzazione di nuovi farmaci per l'anno in corso, raccomandando al dott. Bianchi, responsabile della divisione, di investire nei progetti meno rischiosi.
Per il problema della Pharmax, il dott. Bianchi ha individuato due progetti di sviluppo, A e B, da finanziare con priorità. I responsabili dei due progetti valutano pari al 30% e al 20%, rispettivamente per A e B, la percentuale di insuccesso finale di una eventuale sperimentazione.

Esercizio (Pharmax)

Lo sviluppo dei progetti richiederà comunque più anni e il dott. Bianchi deve semplicemente decidere l'entità del finanziamento da assegnare a ciascun progetto per l'anno in corso, conservando eventualmente una parte del budget per altre iniziative.

Per il problema della Pharmax, il dott. Bianchi identifica il seguente problema di ottimizzazione: «stabilire il finanziamento da assegnare al progetto A e al progetto B in modo tale che il finanziamento complessivo rientri nel budget e che il rischio d'investimento sia minimo».

Esercizio (Pharmax)

Il dott. Bianchi può definire due variabili di decisione x_A e x_B, pari rispettivamente al finanziamento da destinare all'esecuzione dei due progetti A e B. Il vettore x delle variabili di decisione è quindi indicato come:

$$x = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

Non si può accettare come soluzione un valore negativo di x_A o x_B. Inoltre, il finanziamento complessivamente assegnato ai due progetti non può eccedere il budget disponibile, ovvero, $x_A + x_B \leq 3$ (ipotizzando che x_A e x_B siano espresse in milioni di euro).

Esercizio (Pharmax)

L'insieme X è quindi:

$$X = \{x \in R^2 : x_A + x_B \leq 3;\ x_A, x_B \geq 0\}$$

La funzione obiettivo richiede di definire formalmente il rischio di un finanziamento e di considerare come investimento migliore quello con il minimo rischio. Si può definire il rischio di un progetto come il prodotto tra capitale investito e percentuale di insuccesso e il rischio di un finanziamento come la somma dei rischi di progetto, ottenendo la funzione obiettivo:

$$z(x) = 30\, x_A + 20\, x_B.$$

Esercizio (Pharmax)

- La formulazione del problema è quindi la seguente:

$$\min z(x) = 30\, x_A + 20\, x_B$$

$$\text{s.v.}$$

$$x_A + x_B \leq 3$$
$$x_A, x_B \geq 0$$

Esercizio (Pharmax)

Per il problema della Pharmax, la soluzione ottima x è, evidentemente, la soluzione $x_A = 0$; $x_B = 0$, che corrisponde a una percentuale di insuccesso $z(x) = 0$. Infatti, qualsiasi soluzione ammissibile $x \in X$ deve avere una percentuale di insuccesso $z(x) \geq 0$, per cui, si è riusciti a trovare una soluzione ammissibile x^*, avente costo pari proprio al limite inferiore di $z(x)$ e che, di conseguenza, è ottima.

Poiché il dott. Bianchi aveva giudicato prioritario il finanziamento dei progetti A e B rispetto ad altri, è verosimile che la soluzione ottima $x_A^* = 0$ e $x_B^* = 0$ sia considerata inaccettabile.

Esercizio (Pharmax)

Da questo esito negativo, il dott. Bianchi trae la conclusione che è necessario un supplemento di raccolta dati. L'indagine porta a definire una quota minima e massima per ciascun progetto, rispettivamente di 0,5 e 1,5 milioni di euro per l'anno in corso; inoltre, stabilisce di destinare 1,8 milioni di euro ai progetti A e B e 1,2 milioni di euro per altri progetti. Il modello risulta così modificato nel seguente modo:

$$\min z(x) = 30\, x_A + 20\, x_B$$

s.v.

$$x_A + x_B = 1{,}8$$

$$0{,}5 \le x_A \le 1{,}5$$

$$0{,}5 \le x_B \le 1{,}5$$

Esercizio (Pharmax)

La successiva fase di soluzione porta al calcolo di una nuova soluzione ottima, $x_A^* = 0{,}5$ e $x_B^* = 1{,}3$ e a una nuova fase di validazione che, stavolta, si conclude con esito.

Argomenti

- Cos'è la Ricerca Operativa
- Problemi di ottimizzazione
- **Primi approcci ai modelli di ottimizzazione**

Primi approcci ai modelli di ottimizzazione

Il modello di ottimizzazione a singolo obiettivo può essere riscritto come:

$$\min\ z(x) \tag{1.3}$$

$$\text{s.v.}$$

$$g_i(x) \geq b_i,\ \ i = 1, \dots, m \tag{1.4}$$

per il quale si assume che la regione ammissibile X sia descritta tramite un insieme finito di m vincoli funzionali del tipo $g_i(x) \geq b_i,\ i = 1, \dots, m,$

con $g_i\colon R^n \to R, i = 1, \dots, m$

Primi approcci ai modelli di ottimizzazione

La formulazione (1.4) corrisponde a vincoli di disuguaglianza nella forma di «maggiore o uguale», a cui è comunque possibile ricondurre tutti gli altri casi. Infatti, nel caso di un vincolo i, $i = 1, \dots, m$, di disuguaglianza nella forma di «minore o uguale», ovvero $g_i(x) \leq b_i$, esso può riscriversi in modo equivalente come $-g_i(x) \geq -b_i$.

Inoltre, un eventuale vincolo di uguaglianza $g_i(x) = b_i$ può essere sostituito dalla coppia di vincoli

$$g_i(x) \leq b_i \ , -g_i(x) \geq -b_i$$

Primi approcci ai modelli di ottimizzazione

Se $x \in R^n$ il problema di ottimizzazione (1.3)–(1.4) è di tipo «continuo»; a questa categoria, appartiene, ad esempio, il problema di seguito illustrato (problema dell'atleta).

Se $x \in Z^n$ il problema di ottimizzazione (1.3)–(1.4) è di tipo «discreto» e viene detto di «programmazione intera» (PI); in particolare, se $x \in B^n$, il problema di PI (1.3)–(1.4) è di tipo «binario».

Primi approcci ai modelli di ottimizzazione

- Un'ulteriore classificazione dei problemi di ottimizzazione tiene conto della struttura della funzione obiettivo e dei vincoli.

In particolare, se la funzione obiettivo $z(x)$ e i vincoli $g_i(x), i = 1, \ldots, m,$ sono rappresentati mediante espressioni lineari (e $x \in R^n$), il problema (1.3)–(1.4) si dirà di ottimizzazione «lineare» (o, equivalentemente, di «programmazione lineare», PL).

Si avrà un problema di ottimizzazione (o programmazione) «non lineare» (PNL) se, viceversa, la funzione obiettivo $z(x)$ e/o i vincoli (eventualmente

Esercizio (atleta)

Un atleta, in prossimità di una gara, deve perdere peso senza perdere massa muscolare durante gli allenamenti. Il proprio regime alimentare giornaliero prevede l'assunzione di carne, legumi e pasta, conditi con olio. Di seguito è riportato il contenuto in grassi, carboidrati e proteine di ciascuno di questi alimenti, il loro contenuto calorico e la minima richiesta nutrizionale di ciascun macronutriente.

Macronutriente	Alimento: Carne [g/h]	Legumi [g/h]	Pasta [g/h]	Olio [g/h]	Richiesta giornaliera [g]
Grassi	2,6	1,5	1,5	100,0	30
Carboidrati	0,0	60,7	74,7	0,0	90
Proteine	20,2	22,3	13,0	0,0	60
Calorie [Kcal/h]	110	337	371	884	–

Tabella 1.1 Dati relativi al problema della dieta dell'atleta.

Esercizio (atleta)

Occorre stabilire il regime dietetico giornaliero che garantisce all'atleta un apporto nutrizionale non inferiore a quello richiesto, con il minimo apporto calorico.

Le variabili di decisione del problema della dieta dell'atleta sono indicate con $x_j, j = 1, \dots, 4$, e corrispondono alla quantità giornaliera (espressa in etti) di alimento j (1 = carne, 2 = legumi, 3 = pasta, 4 = olio) che deve entrare nella dieta.

I vincoli sono le restrizioni imposte dalle richieste nutrizionali

Esercizio (atleta)

La quantità di grassi complessivamente assunta dall'atleta è funzione delle variabili di decisione. In particolare, se 100g di carne contengono 2,6g di grassi, si può determinare l'apporto di grassi (in g) proveniente da x_1 etti di carne pari a $2{,}6x_1$.

Ripetendo il ragionamento per gli altri alimenti, si ricava che l'apporto totale di grassi (in g) nella dieta sarà

$$2{,}6x_1 + 1{,}5x_2 + 1{,}5x_3 + 100x_4$$

L'atleta deve ingerire almeno 30 g di grassi al giorno, ne deriva il seguente vincolo:

$$2{,}6x_1 + 1{,}5x_2 + 1{,}5x_3 + 100x_4 \geq 30$$

Esercizio (atleta)

Ragionando in maniera analoga per gli altri nutrienti (carboidrati e proteine), si ottiene

$$60{,}7x_2 + 74{,}7x_3 \geq 90$$

$$20{,}2x_1 + 22{,}3x_2 + 13x_3 \geq 60$$

Oltre a questi vincoli, occorre imporre che le quantità giornaliere assunte di alimenti non siano negative, ovvero,

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

L'obiettivo è quello di determinare la dieta con il minimo apporto calorico: la funzione obiettivo potrà essere espressa matematicamente come segue

$$z(x) = 110x_1 + 337x_2 + 371x_3 + 884x_4$$

Esercizio (atleta)

- La soluzione ottima ottenuta utilizzando il risolutore della Microsoft Excel 2010© è :

$$x_1^* = 1{,}3335;\ x_2^* = 1{,}4827\ ;\ x_3^* = 0\ ;\ x_4^* = 0{,}2431$$

con valore ottimo pari a

$$z^* = z(x^*) = 861{,}2416 \text{ Kcal}$$

Esercizio (conducenti)

Una compagnia di trasporto deve programmare la schedulazione del personale conducente gli autobus che coprono una data zona urbana. La richiesta degli autobus (e quindi di conducenti) per il giorno successivo varia per fasce orarie, secondo quanto riportato in Tabella 1.2.

Fascia oraria	Numero di autisti
00:00–03:00	22
03:00–06:00	18
06:00–09:00	78
09:00–12:00	65
12:00–15:00	80
15:00–18:00	75
18:00–21:00	58
21:00–24:00	48

Tabella 1.2 Numero minimo di conducenti di autobus necessari il giorno successivo per la copertura delle otte fasce orarie.

Esercizio (conducenti)

I conducenti hanno turni di durata pari a sei ore, a partire dai seguenti orari: 00:00, 03:00, 06:00, 09:00, 12:00, 15:00, 18:00 e 21:00. Ad esempio, un conducente del terzo turno inizia a lavorare alle ore 06:00 e conclude il turno alle 12:00.

Il problema consiste nell'allocare il personale in modo da soddisfare i requisiti minimi previsti per ogni fascia di servizio del giorno successivo, impiegando il minor numero possibile di autisti.

Esercizio (conducenti)

Le variabili di decisione sono indicate con $x_j, j = 1, \dots, 8$ ciascuna delle quali corrispondente al numero di conducenti allocati al turno j nel giorno successivo. I vincoli, oltre a quelli relativi alla non negatività e interezza delle variabili di decisione, sono legati al minimo numero di autisti che occorre garantire per ogni fascia oraria. La prima fascia oraria è coperta dai conducenti assegnati al primo e all'ottavo turno, cosicché il vincolo corrispondente risulta essere:

$$x_1 + x_8 \geq 22$$

Esercizio (conducenti)

In modo del tutto analogo, si possono formulare i vincoli per le restanti sette fasce orarie:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\geq 18 \\
x_2 + x_3 &\geq 78 \\
x_3 + x_4 &\geq 65 \\
x_4 + x_5 &\geq 80 \\
x_5 + x_6 &\geq 75 \\
x_6 + x_7 &\geq 58 \\
x_7 + x_8 &\geq 48
\end{aligned}
$$

Vincoli di interezza e non negatività:

Esercizio (conducenti)

Funzione obiettivo:

$$\min z(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

La soluzione ottima, ottenuta utilizzando il risolutore di Excel, risulta:

$$x_1^* = 22;\ x_2^* = 0\ ;\ x_3^* = 78\ ;\ x_4^* = 0$$
$$x_5^* = 80;\ x_6^* = 0\ ;\ x_7^* = 58\ ;\ x_8^* = 0$$

con valore ottimo pari a $z^* = z(x^*) = 238$

Esercizio (conducenti)

N.B.

In questo caso, esistono più soluzioni ottime del problema.

Ad esempio, la soluzione

$$\bar{x}_1 = 22; \bar{x}_2 = 28 ; \bar{x}_3 = 50 ; \bar{x}_4 = 15$$
$$\bar{x}_5 = 65; \bar{x}_6 = 10 ; \bar{x}_7 = 48 ; \bar{x}_8 = 0$$

Il valore ottimo è sempre pari a $\bar{z} = 238$

Esercizio (investimento)

Il settore marketing di un’azienda produttrice di liquori ha deciso di promuovere le vendite del proprio prodotto di punta. Allo scopo, sono state prese in esame otto proposte di campagne pubblicitarie su differenti canali di comunicazione (TV, radio, quotidiani, riviste specializzate). Per ciascuna campagna pubblicitaria proposta sono disponibili, nella Tabella successiva (1.3), i costi e l’incremento atteso delle vendite di prodotto. Si assume la disponibilità di un budget complessivo pari a 1.240.000 €. L’azienda ha inoltre stabilito che l’investimento deve essere effettuato su almeno quattro campagne promozionali differenti.

Esercizio (investimento)

Campagna pubblicitaria	Costo [k€]	Incremento atteso delle vendite [%]	Canale di comunicazione
1	250	3,5	Radio
2	340	5,0	Radio
3	570	5,8	TV
4	650	6,5	TV
5	700	7,2	TV
6	175	0,4	Giornali
7	190	1,6	Giornali
8	180	1,3	Rivista specializzata

Tabella 1.3 Dati relativi al problema di selezione delle campagne pubblicitarie.

Il problema consiste nel selezionare le campagne promozionali che massimizzino l'incremento atteso delle vendite di prodotto, nel rispetto dei vincoli di budget e di diversificazione delle campagne pubblicitarie adottate.

Esercizio (investimento)

Le variabili di decisione devono esprimere una scelta relativa alla selezione o meno di una campagna pubblicitaria. Si indichi con $x_j, j = 1, \dots, 8$, una variabile di decisione di tipo binario, avente valore pari a 1 se la campagna pubblicitaria j viene scelta, 0 altrimenti.

Un primo vincolo è imposto dal budget disponibile. In particolare, il costo complessivo dell'investimento, in funzione delle variabili di decisione, è pari a

$$250x_1 + 340x_2 + 570x_3 + 650x_4 + 700x_5 + 175x_6 + 190x_7 + 180x_8$$

Dal momento che il budget a disposizione è pari a

Esercizio (investimento)

Essendo almeno quattro le campagne pubblicitarie che occorre selezionare, si avrà il seguente ulteriore vincolo:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 4$$

L'obiettivo consiste nella massimizzazione dell'incremento percentuale atteso delle vendite, esprimibile come:

$$\max z(x) = 3{,}5x_1 + 5x_2 + 5{,}8x_3 + 6{,}5x_4 + 7{,}2x_5 + 0{,}4x_6 + 1{,}6x_7 + 1{,}3x_8$$

Esercizio (investimento)

Vincoli binari:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \in \{0,1\}$$

La soluzione ottima, ottenuta utilizzando il risolutore di Excel, risulta essere:

$$x_1^* = 1;\ x_2^* = 0\ ;\ x_3^* = 1\ ;\ x_4^* = 0$$
$$x_5^* = 0;\ x_6^* = 0\ ;\ x_7^* = 1\ ;\ x_8^* = 1$$

con valore ottimo pari a $z^* = 12{,}20$

Esercizio (localizzazione)

Un'azienda deve localizzare un punto di approvvigionamento per servire cinque centri di distribuzione. Il numero medio annuo di viaggi a pieno carico (ovvero, in modalità «porta-a-porta») per servire i centri di distribuzione è indicato in Tabella 1.4. La stessa tabella riporta anche le coordinate cartesiane dei cinque centri.

Centro di distribuzione	Numero annuo di viaggi	Ascissa [km]	Ordinata [km]
1	250	20	45
2	180	0	85
3	160	120	0
4	240	98	142
5	190	158	98

Tabella 1.4 Dati relativi al problema di localizzazione del punto di approvvigionamento.

Esercizio (localizzazione)

Il problema è affrontato determinando nel piano cartesiano la posizione ottimale del punto di approvvigionamento, cosa che consente di individuare un'area di «interesse», per poi procedere a valutare, con criteri di tipo qualitativo, i siti potenziali che ricadono nell'area di interesse. Ogni centro di distribuzione non può essere distante più di 90 km in linea d'aria dal punto di approvvigionamento.

Il problema può essere formulato utilizzando le variabili di decisione x_1 e x_2, rappresentanti le coordinate cartesiane del punto di approvvigionamento.

Esercizio (localizzazione)

La distanza euclidea tra il primo centro di distribuzione e il punto di approvvigionamento si ottiene come $\sqrt{(x_1 - 20)^2 + (x_2 - 45)^2}$.

Dal momento che il centro di distribuzione non può distare più di 90 km dal punto di approvvigionamento, segue il vincolo

$$\sqrt{(x_1 - 20)^2 + (x_2 - 45)^2} \leq 90$$

Analogamente, si ricavano i vincoli per gli altri quattro centri di distribuzione:

$$\sqrt{(x_1)^2 + (x_2 - 85)^2} \leq 90$$

$$\sqrt{(x_1 - 120)^2 + (x_2)^2} \leq 90$$

Esercizio (localizzazione)

La funzione obiettivo, da minimizzare, deve rappresentare il numero di chilometri coperti complessivamente nell'anno per servire tutti i centri di distribuzione dal punto di approvvigionamento. Essendo il numero di viaggi previsti per il primo centro di distribuzione pari a 250 e considerando che un viaggio è composto da una tratta di andata e ritorno, il contributo alla funzione obiettivo verrà dato da ogni centro di distribuzione. Quindi:

$$\min(x_1, x_2) = 500\sqrt{(x_1 - 20)^2 + (x_2 - 45)^2} +$$
$$360\sqrt{(x_1)^2 + (x_2 - 85)^2} + 320\sqrt{(x_1 - 120)^2 + (x_2)^2} +$$

Esercizio (localizzazione)

La soluzione ottima, ottenuta utilizzando il risolutore di Excel è: $x_1^* = 70{,}88;\ x_2^* = 75{,}41$

con valore ottimo pari a $z^* = 152.898{,}45$

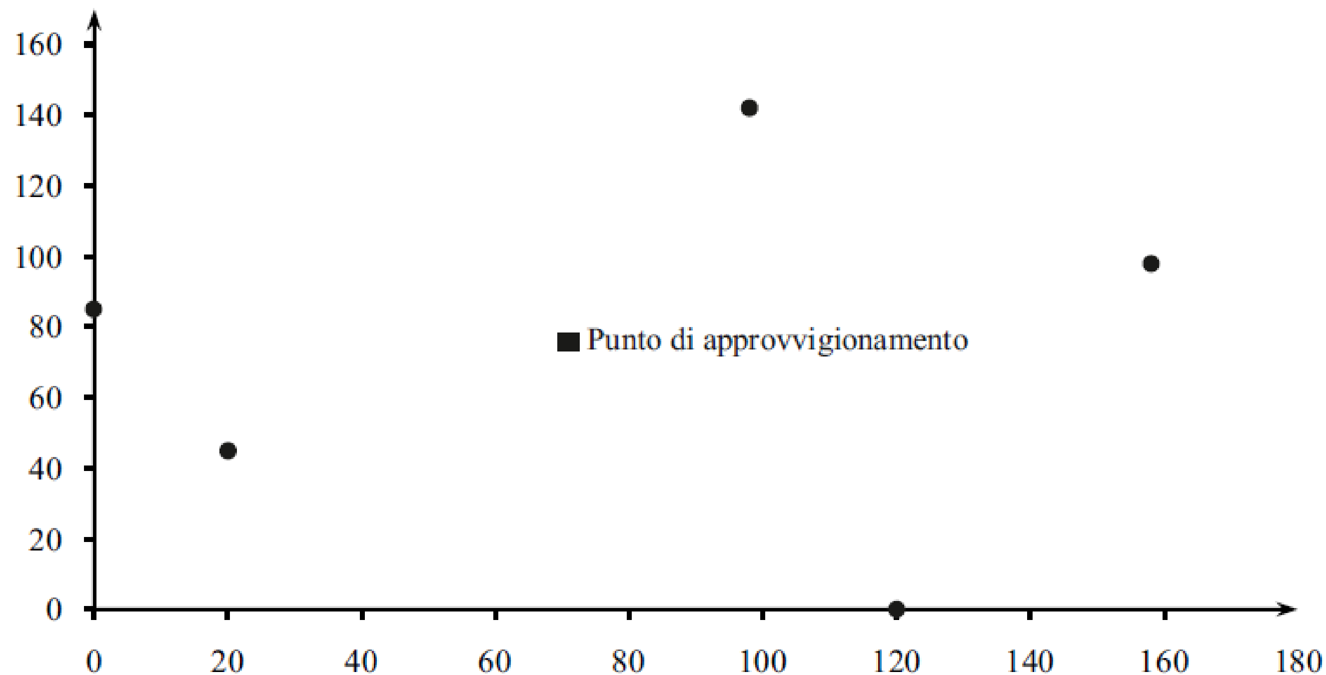

Figura 1.1 Posizione nel piano cartesiano dei centri di distribuzione e del punto di approvviggionamento. Le coordinate sono espresse in km.