20/03/2024 | LEZ 6

M.d.T: CALCOLABITÀ ∧ POTENZA

GLOSS: - m.d.t = MACCH. DI TURING
- m.d.c = MODELLO DI CALCOLO.

2 QUESTIONI ☉ X NEX LEZION:

- m.d.t. riesce a risolvere tutti i problemi?
- esiste un'altro m.d.c piu potente della macchina di turing? Se M.d.t. non è capace di riolvere tutti i problemi ? → RISPOSTA IN NEXT LEZIONE.

LINGUAGGI E DECIDIBILITÀ → m.d.t. RICONOSCITORI

DATO → $T = \langle \Sigma, Q, P, q_0, Q_F \rangle$ → CONSIDERO IL LINGUAGGIO $A_T \subseteq \Sigma^*$

$A_T = \{x \in \Sigma^* : o_T(x) = q_A\}$ = LINGUAGGIO "RICONOSCIUTO" DA T.

un paio di def per parlare dei teoremi

DEF

- L È DECISO DA T SE $\forall x \in \Sigma^*$ $o_T(x) = \begin{cases} q_A & \text{IF } x \in L \\ q_R & \text{IF } x \notin L \end{cases}$
- L È ACCETTATO DA T SE
  - $\forall x \in L \longrightarrow o_T(x) = q_A$
  - $\forall x \notin L \longrightarrow o_T(x) \neq q_A$

SEMBRANO =, MA HANNO UNA BIG DIFFERENCE:

- SE L' DECID. e $x \notin L \rightarrow o_T(x) = q_R$ → SAPPIAMO DI SICURO IL RISULTATO.
- // L. ACC. // // → NON SAPPIAMO X CERTO SE: $x \notin L \lor o_T(x)$ NON TERMINA.

QUINDI

- L È DECIDIBILE IF ∃ T CHE DECIDE L → $L = L(T)$
- L È ACCETTABILE IF ∃ T CHE ACCETTA L

DEF

$L \subseteq \Sigma^* \rightarrow L^c = \Sigma^* - L$ L^c = LING. COMPLEMENTARE.

disp 3, 3.1

TEOREMA L È DECIDIBILE

$\Updownarrow$

L È ACCETTABILE $\wedge$ L^c È ACCETTABILE

DIM

quindi so per certo se x appartiene a L oppure a Lc. (simmetria)

1° PARTE: SE

L DECIDIBILE $\rightarrow$ L. ACC. $\wedge$ L^c ACC.

ALLORA:

- $\exists\, T : \forall x \in \Sigma^* \quad o_T(x) = \begin{cases} q_A & x \in L \\ q_R & x \notin L \end{cases}$

- x L È ACC. x DEFINIZIONE
- x L^c COSTRUISCO T' t.c. SIMULA COMP. DI T e $\forall x \in \Sigma^*$:

  FASE 1) ESEGUO $T(x)$

  FASE 2) SE $o_T(x) = q_A \rightarrow o_{T'}(x) = q_R$

  $o_T(x) = q_R \rightarrow o_{T'}(x) = q_A$

+ FORM., $\forall$ QUINTUPLA DI T = QUINT. DI T' + 2 N. QUINT.

$\langle q_A, u, u, q'_R, ferma\rangle \qquad \langle q_R, u, u, q'_A, ferma\rangle \qquad \forall u \in \Sigma \cup \{\square\}.$

2° PARTE: SE E SOLO SE

SE L. ACC. $\wedge$ L^c ACC.

$\exists\, T : \forall x \in \Sigma^* \; [o_T(x) = q_A \iff x \in L]$

$\exists\, T' : \forall x \in \Sigma^* \; [o_{T'}(x) = q_A \iff x \notin L]$

- NUOVO T CHE DECIDE L, DOVE LAVORA COSÌ:

  - T DEVE SIMULARE SIA
    - ISTRUZIONI DI L
    - ISTRUZIONI DI L^c

- T LAVORA SU 2 NASTRI N_1, N_2, SU TUTTI E 2 SCRITTO x SOPRA., DOVE $T(x)$ FUNZIONA COSÌ:

(1) ESEGUO SING. ISTR. DI T_1 SU N_1, SE ARRIVATO q_A, STOP, ELSE GO TO (2)

(2) ESEGUO. // // DI T_2 SU N_2, SE IF ARRIVATO A $q_A(T_2)$, STOP, ELSE GO TO (1)

- $\forall x \in \Sigma^*$, 2 SOLE VIE:
  - $x \in L \rightarrow$ COMPUTAZIONE ARRIVERÀ SICURAMENTE A q_A
  - $x \notin L \rightarrow$ = COSA MA CON T_2 (T_c)

■

TRASDUTTORE E CALCOLABILITÀ

SIANO:

- Σ_1, Σ_2
- $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ → FUNZIONE PARZIALE → $\not\exists$ DEF $\forall x \in \Sigma^*$

DEF BASE DI f D'ORA IN POI.

↳ ES. $F(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \not\exists$ DEF $\cup x = 0$.

DEF

- f È CALCOLABILE SE $\exists\ T_f : \forall x \in \Sigma^*, O_{T_f}(x) = f(x)$

↳ M.D.T. TRASDUTTORE

$f(x)$ DEFINITA.

N.B. COME IN L ACC., NON CI DÀ UNA RISPOSTA PRECISA SE $x \notin D$ DI F.

RELAZIONE TRA DECID.-ACC./CALCOLABILITÀ

prima di studiare la relazione tra decibilità/acc. e calcolabilità, per ogni linguaggio associamo una aprticolare funzione utile per i teoremi dopo.

DEF SIA Σ, $L \subseteq \Sigma^*$

FUNZIONE CARATTERISTICA → FUNZIONE TOTALE

$\chi_L : \Sigma^* \to \{0,1\}$ DOVE $\boxed{\chi_L(x) = \begin{cases} 0 & \text{SE } x \notin L \\ 1 & \text{SE } x \in L \end{cases}}$

DA QUESTO, IL SEGUENTE TEOREMA.

TEOREMA 3.2

> UN LINGUAGGIO L È DECIDIBILE SE E SOLO SE χ_L È CALCOLABILE

DIM SIA L DECIDIBILE.

- ALLORA $\exists\, T$ CON q_A e q_R, t.c. PER $\forall x \in \Sigma^*$:

$$O_T(x) = \begin{cases} q_A & \text{IF } x \in L \\ q_R & \text{IF } x \notin L \end{cases}$$

- DA QUI NOI POSSIAMO COSTRUIRE UNA MACCHINA T' (TRASDUTTORE), CON 1 NASTRO AGGIUNTIVO A T, t.c.:

  - $\forall\, T(x)$: ① SIMULA IL COMPORTAMENTO DI T (SUL 1° NASTRO, ESEGUE $T(x)$)

    ② · SE $O_T(x) = q_A \to$ 2° NASTRO SCRIVE 1
    · " " $= q_R \to$ " " " 0

QUINDI χ_L CALCOLABILE

LA DIM DEL CONTRARIO È UGUALE ALLA PRIMA

- χ_L CALCOLABILE $\rightarrow$ F. TOTALE
- $\exists\ T_F$ CHE $\forall x \in \Sigma^* \ \exists\ \chi_L(x)$
- COSTRUISCO T' RICONOSCITORE
- 2 NASTRI $\rightarrow$ 1° $\rightarrow$ INPUT

  2° $\rightarrow T(x) \rightarrow$
  - 1 $\rightarrow$ ALLORA VA IN q_A
  - 0 $\rightarrow$ " " q_R

- χ_L TOTALE $\rightarrow \forall x \in \Sigma^* \ \exists\ \chi_L(x) \rightarrow$ o $0\ (q_R)$ o $1(q_A)$

L È DECIDIBILE

■

ma c'è una relazione sul contrario? cioè tra funzione calcolabile e linguaggio decidibile? yup

AD OGNI FUNZIONE $F: \Sigma^* \rightarrow \Sigma_1^*$ ASSOCIAMO UN LINGUAGGIO:

DEF

$$L_F : \{ \langle x, y \rangle : x \in \Sigma^* \land y \in \Sigma_1^* : F(x) = y \}$$

servirà per il nuovo teorema, che 'limita' la funzione in modo da garantire al decidibiltà di Lf o no.

TEOREMA 3.3

SE LA FUNZIONE F è TOTALE e CALCOLAB.

ALLORA L_F è DECIDIBILE

DIM) SAPPIAMO CHE f È CALCOLABILE, QUINDI:

- $\exists\ T_F$ CHE $\forall x$ DEFINITO DA $F \to O_{T_F}(x) = f(x)$.
- COSTRUISCO UNA MACCHINA T RICONOS., CON 2 NASTRI, CON INPUT $\langle x, y \rangle$, $x \in \Sigma^*$ e $y \in \Sigma_1^*$, t.c.:

① 1° NASTRO $\to \langle x, y \rangle$

② 2° NASTRO $\to$ SIMULO $T_F(x)$ e SCRIVO RESULT z.

③ CONTROLLA SE $y = z$:
- IF YES $\longrightarrow q_A$
- IF NO $\longrightarrow q_R$.

XCHE DECIDIBILE?
- F TOT, QUINDI ② TERMINA $\forall$ INPUT
- DA L_1 SE $z = f(x)$, ACC, SE NO q_R.

$\blacksquare$

il rapporto inverso sappiamo solo dire della calcolabilità della funzione

TEOREMA 3.4

SIA f,

$$\boxed{\text{SE } L_f \subseteq \Sigma^* \times \Sigma_1^* \text{ DECIDIBILE, ALLORA } f \text{ CALCOLABILE}}$$

DIM

POICHÈ L_F DECIDI.

- $\exists$ MACCHINA T t.c. $\forall x \in \Sigma^*$ e $y \in \Sigma_1^*$:

$$O_T(x, y) = \begin{cases} q_A & \text{IF } y = f(x) \\ q_R & \text{ELSE} \end{cases}$$

- CREO UNA MACCHINA T_F, CON 4 NASTRI, X COME INPUT, CHE LAVORA COSì:

(1) WRITE $i=0$ ON N_1

(2) $\forall\, y \in \Sigma_1^*$ CON $|y| = i$, y WRITE ON N_2

(3) SIMULO $T(x, y)$ ON N_3

(4) · IF $O_T(x,y) = q_A \rightarrow$ WRITE y ON N_4 E TERMINA

· ELSE $\rightarrow$ RIPRENDO SUBITO (2), SE INVECE y ERA LAST y CON $|y| = i$, $i{+}{+}$ E POI (2).

XCHÈ CALCOLABILE?
(E NON TOTALE)

$\boxed{\text{$L_F$ DECID., QUINDI SE $x \in$ DOMINIO DI F, IL PASSO (2) FINISH SEMPRE, SIA IN q_A CHE q_R. CON x NON DEFINITO, PERÒ, T_F NON TERMINA.}}$