VERTICI, BASI, BFS

25) dato il seguente poliedro:

$$7x_1 - 5x_2 + x_3 \leq 2 \qquad \text{t.c} \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$-2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 1$$

verifichiamo se il punto $x' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é un vertice

1) Verifico se il poliedro é nella seguente forma $Ax \leq b$

$$7x_1 - 5x_2 + x_3 \leq 2 \quad \checkmark$$
$$-2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad 2x - 3x_2 - x_3 \leq -1 \quad \checkmark$$

2) Ricerca delle disuguaglianze attive (é attiva se la disuguaglianza é soddisfatta come uguaglianza)

$$Ax = b \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sostituisco il punto x' al posto di x

$$\begin{pmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{ATTIVA} \\ \text{ATTIVA} \end{matrix}$$

3) il punto x' é un vertice del poliedro se il numero di disuguaglianze attive é uguale al numero di colonne nella matrice

per trovare altre disuguaglianze inseriamo nella matrice $-I$
e nella soluzione il vettore nullo

$$\vdash \begin{pmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{ATTIVA} \\ \text{ATTIVA} \\ \text{NON ATTIVA} \\ \text{NON ATTIVA} \\ \text{ATTIVA} \end{matrix}$$

quindi abbiamo 3 disuguaglianze attive

4) le disuguaglianze devono essere linearmente indipendenti
quindi calcoliamo il det se esso $\neq 0$ allora sono l.i

$$H = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 & -5 \\ 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{matrix} \quad \det(H) = +21 + 0 + 0 - 0 - 0 - 10 = 11 \neq 0$$

allora $x' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un vertice

DUALITÀ DA PRIMALE A DUALE

	Primale	Duale	
	Min	Max	
Vincoli	≥, ≤, =	≥, ≤, =	Variabili
Variabili	≥, ≤, =	≤, ≥, =	Vincoli

	Primale	Duale	
	Max	Min	
Vincoli	≥, ≤, =	≤, ≥, =	Variabili
Variabili	≥, ≤, =	≥, ≤, =	Vincoli

es 2)

Primale

$$
\begin{array}{|c|l|}
\hline
\min\limits_{x,y} & c^T x - d^T y \\
\hline
 & Ax \leq a \\
 & By \leq b \\
 & Cx + Dy = d \\
\cline{2-2}
 & x \geq 0 \qquad y = 0 \\
\hline
\end{array}
$$

→ vincoli

→ variabili

duale

$$
\begin{array}{|c|l|}
\hline
\max\limits_{u} & a^T u_1 + b^T u_2 + c^T u_3 \\
\hline
 & A^T u_1 + C^T u_3 \leq c \\
 & B^T u_2 + D^T u_3 = -d \\
\cline{2-2}
 & u_1 \leq 0 \,;\, u_2 \leq 0 \quad u_3 = 0 \\
\hline
\end{array}
$$

→ le disuguaglianze sono opposte alle variabili del primale

→ termini noti funzione obiettivo

↓ stesse disuguaglianze dei vincoli del primale

es 2)

$$
\begin{array}{|c|l|}
\hline
\max\limits_{x,y} & c^T x - d^T y \\
\hline
 & Ax \leq a \\
 & By \leq b \\
 & Cx + Dy = d \\
\cline{2-2}
 & x \geq 0 \qquad y = 0 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|c|l|}
\hline
\min\limits_{u} & a u_1 + b u_2 + c u_3 \\
\hline
 & A u_1 + C u_3 \geq c \\
 & B u_2 + D u_3 = -d \\
\cline{2-2}
 & u_1 \geq 0 ; u_2 \geq 0 ; u_3 = 0 \\
\hline
\end{array}
$$

es)

$$
\begin{cases}
\max \quad 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8 \\
2x_1 - x_3 \leq 7 \\
3x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 5 \\
x_2 + x_3 \leq 6 \\
x_2 \geq 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\min \quad 8u_1 + 7u_2 + 5u_3 + 6u_4 \\
u_1 + 2u_2 + 3u_3 = 4 \\
2u_1 + 4u_3 + u_4 \geq 3 \\
3u_1 - u_2 - u_3 + u_4 = 2 \\
\\
u_1 = 0 \,,\, u_2 \geq 0 \,,\, u_3 = 0 \,,\, u_4 = 0
\end{cases}
$$

FORMA STANDARD

a) $\min \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$

s.t. $\quad a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n = b_i \qquad (i = 1, \dots, n)$

$x_i \in \mathbb{R}$

1) la funzione obbiettivo é di minimo e senza costanti additive o moltiplicative (moltiplico per -1 le funzione funzioni di massimizzazione : le costanti additive e moltiplicative positive possono essere trascurate , le costanti moltiplicative negative possono essere eliminate cambiando il verso di ottimizzazione

2) tutte le variabili sono positive o nulle (si effettua sostituzione di variabili variabili libere o negative

3) tutti i vincoli sono delle equazioni (per $\leq$ si aggiunge una variabile positiva di slack , per $\geq$ si sottrae una variabile positiva di surplus
i termini b_i sono positivi (si moltiplica per -1 se sono negativi)

esercizi 1)

max $\quad 5(-3x_1 + 5x_2 - 7x_3) + 34$ → funzione obbiettivo

s.t. $\quad -2x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 2x_1 \leq 5$

$-3x_1 + x_3 + 12 \geq 13$

$x_1 + x_2 \leq -2$ } VINCOLI

$x_1 \leq 0$

$x_2 \geq 0$ } VARIABILI

↓ osservo le variabili

$-x_1 = \hat{x}_1 \Rightarrow x_1 = -\hat{x}_1$

$x_3 = x_3^+ - x_3^-$ ⇒ effettuo la sost di variabili libere o negative

1)

non considero le costanti 34 e 5 ↑   perche prima era di max ↑

$$\min \left(-3x_1 + 5x_2 - 7x_3\right)(-1) \rightarrow \min\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 \Rightarrow \min\ -3\hat{x}_1 - 5x_2 + 7(x_3^+ - x_3^-)$$

3)

variabile di slack

- $-2x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 2x_1 \leq 5 \Rightarrow -4x_1 + 7x_2 + 6x_3 \leq 5 \Rightarrow -4x_1 + 7x_2 + 6x_3 + s_1 = 5$

$$2\hat{x}_1 + 7x_2 + 6x_3^+ - 6x_3^- + s_1 = 5$$

variabile di surplus

- $-3x_1 + x_3 + 12 \geq 13 \Rightarrow -3x_1 + x_3 \geq 1 \Rightarrow 3\hat{x}_1 + x_3^+ - x_3^- - s_2 = 1$

- $x_1 + x_2 \leq -2 \Rightarrow -x_1 - x_2 \geq 2 \Rightarrow \hat{x}_1 - x_2 - s_3 = 2$

$$\min\ -3\hat{x}_1 - 5x_2 + 7x_3^+ - 7x_3^-$$ → funzione obbiettivo

s.t.

$$\left.\begin{aligned} -4\hat{x}_1 + 7x_2 + 6x_3 + s_1 &= 5 \\ 3\hat{x}_1 + x_3^+ - x_3^- - s_2 &= 1 \\ \hat{x}_1 - x_2 - s_3 &= 2 \end{aligned}\right\} \text{vincoli}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{x}_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3^+ &\geq 0 \\ x_3^- &\geq 0 \\ s_1 &\geq 0 \\ s_2 &\geq 0 \\ s_3 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \text{variabili}$$

esercizio)

$$x_4 = x_4^+ - x_4^-$$

$$\min \quad -13x_1 - 20x_2 + 5x_3 + x_4$$

s.t. $-4x_1 + x_2 \geq 1$

$$5x_2 + 3x_3 = 4$$

$$3x_1 + 12x_3 - x_4 \geq -2$$

$$x_2 + x_3 + 50x_4 \leq 3$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

$$\min \quad -13x_1 - 20x_2 + 5x_3 + x_4^+ - x_4^-$$

- $-4x_1 + x_2 - s_3 = 1$
- $3x_1 + 12x_3 - x_4 \geq -2 \Rightarrow -3x_1 + 12x_3 + x_4^+ - x_4^- \leq 2 \Rightarrow$

$$-3x_1 + 12x_3 + x_4^+ - x_4^- + s_1 = 2$$

- $x_2 + x_3 + 50x_4 \leq 3 \Rightarrow x_2 + x_3 + 50x_4^+ - 50x_4^- + s_2 = 3$

$$\min \quad -13x_1 - 20x_2 + 5x_3 + x_4^+ - x_4^-$$

$$-4x_1 + x_2 - s_3 = 1$$
$$5x_2 + 3x_3 = 4$$

$$-3x_1 + 12x_3 + x_4^+ - x_4^- + s_1 = 2$$

$$x_2 + x_3 + 50x_4^+ - 50x_4^- + s_2 = 3$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

$$x_4^+ \geq 0 \quad x_4^- \geq 0 \quad s_1 \geq 0 \quad s_2 \geq 0 \quad s_3 \geq 0$$

Algoritmo del simplesso

Esempio 1 *Una ditta di profumi realizza due nuove fragranze a partire da 3 essenze:* rosa, mughetto e viola. *Per realizzare un decalitro di fragranza 1 sono richiesti 1,5 litri di rosa, 1 litro di mughetto e 0,3 litri di viola. Per realizzare un decalitro di fragranza 2 sono richiesti 1 litro di rosa, 1 litro di mughetto e 0,5 litri di viola. La disponibilità in magazzino per le tre essenze è di 27, 21 e 9 litri per rosa, mughetto e viola rispettivamente. Sapendo che l'azienda realizza un profitto di 130 e 100 euro per ogni decalitro venduto di fragranza 1 e 2 rispettivamente, determinare le quantità ottimali delle due fragranze da produrre.*

due nuove fragranze x_1 e x_2

$$\max \ 130x_1 + 100x_2$$
$$1{,}5x_1 + 1x_2 \le 27$$
$$1x_1 + 1x_2 \le 21$$
$$0{,}3x_1 + 0{,}5x_2 \le 9$$
$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$$

$\Rightarrow$ va portato in forma standard

$$\min \ z = -130x_1 - 100x_2$$

$$1{,}5x_1 + x_2 + s_1 = 27$$
$$x_1 + x_2 + s_2 = 21$$
$$0{,}3x_1 + 0{,}5x_2 + s_3 = 9$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, s_1 \ge 0, s_2 \ge 0, s_3 \ge 0$$

$$z = -130x_1 - 100x_2 \Rightarrow -z - 130x_1 - 100x_2$$

	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
$-z$	0	-130	-100	0	0	0
s_1	27	1,5	1	1	0	0
s_2	21	1	1	0	1	0
s_3	9	0,3	0,5	0	0	1

evidenziamo l'elemento pivot

	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
$-z$	0	-130	-100	0	0	0
s_1	27	$\boxed{1,5}$	1	1	0	0
s_2	21	1	1	0	1	0
s_3	9	0,3	0,5	0	0	1

$$\min_{i : a_{ij} > 0} \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \right\}$$

$27/1,5 = 18$
$21/1 = 21$
$9/0,3 = 30$

→ il minimo e quindi il nostro pivot è 1,5

voglio utilizzare Gauss per rendere 0 le altre colonne

divido la riga del pivot per il pivot ←

$$\begin{pmatrix} 0 & -130 & -100 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 1 & \frac{1}{1,5} & \frac{1}{1,5} & 0 & 0 \\ 21 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0,3 & 0,5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_4 \to R_4 - 0,3R_2 \\ R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_1 \to R_1 + 130R_2}} \begin{pmatrix} 2340 & 0 & -13,66 & 86,66 & 0 & 0 \\ 18 & 1 & \frac{1}{1,5} & \frac{1}{1,5} & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0,33 & -\frac{1}{1,5} & 1 & 0 \\ 3,6 & 0 & 0,3 & -0,2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
$-z$	2340	0	-13,66	86,66	0	0
x_1	18	1	1/1,5	1/1,5	0	0
s_2	3	0	$\boxed{0,33}$	-1/1,5	1	0
s_3	3,6	0	0,3	-0,2	0	1

$18 / 1/1,5 = 27$
$3/0,33 = 9$
$3,6/0,3 = 12$

$$\begin{pmatrix} 2340 & 0 & -13,66 & 86,66 & 0 & 0 \\ 18 & 1 & 0,66 & 0,66 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0,33 & -0,66 & 1 & 0 \\ 3,6 & 0 & 0,3 & -0,2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2460 & 0 & 0 & 60 & 40 & 0 \\ 12 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0,9 & 0 & 0 & -0,4 & -0,9 & 1 \end{pmatrix}$$

	b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
$-z$	2460	0	0	60	40	0
x_1	12	1	0	2	-2	0
x_2	9	0	1	-2	3	0
s_3	0,9	0	0	-0,4	-0,9	1

$z = 2460$

2)

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 - x_2 - 3x_3 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_2 = 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + s_3 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

	b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
$-z$	0	-3	-1	-3	0	0	0
s_1	2	2	1	1	1	0	0
s_2	5	1	2	3	0	1	0
s_3	6	2	2	1	0	0	1

	b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
$-z$	3	0	1/2	-3/2	1/2	0	0
x_1	1	1	1/2	1/2	1/2	0	0
s_2	4	0	3/2	5/2	-1/5	1	0
s_3	4	0	1	0	-1	0	1

	b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
$-z$	27/5	0	7/5	0	6/5	3/5	0
x_1	-1/5	-1	-1/5	0	-3/5	1/5	0
x_3	8/5	0	3/5	1	-1/5	2/5	0
s_3	4	0	1	0	-1	0	1

$-\frac{1}{10} - \frac{1}{2} \qquad -\frac{6}{10}$

$$x = \left(-1{,}5\ ,\ 0\ ,\ 8/5\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 4\right) \qquad z = -27/5$$

es 2)

$$\begin{aligned} \min \quad & 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 \\ \text{st} \quad & 4x_1 + 3x_2 + 2x_4 \leq 2 \\ & x_1 - 3x_2 - x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_4 \geq 0 \quad x_3 \leq 0 \end{aligned}$$

$$-x_3 = \hat{x}_3$$

$$\begin{aligned} \min \quad & 7x_1 + 2x_2 - 5\hat{x}_3 - x_4 \\ \text{st} \quad & 4x_1 + 3x_2 + 2x_4 + s_1 = 2 \\ & x_1 - 3x_2 + \hat{x}_3 + s_2 = 1 \\ & x_1, x_2, \hat{x}_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

	b	x_1	x_2	$\hat{x}_3$	x_4	s_1	s_2
$-z$	0	7	2	-5	-1	0	0
s_1	2	4	3	0	2	1	0
s_2	1	1	-3	1	0	0	1

$\Rightarrow$

	b	x_1	x_2	$\hat{x}_3$	x_4	s_1	s_2
$-z$	5	12	-13	0	-1	0	5
s_1	2	4	3	0	2	1	0
$\hat{x}_3$	1	1	-3	1	0	0	1

$\Rightarrow$

	b	x_1	x_2	$\hat{x}_3$	x_4	s_1	s_2
z	41/3	38/3	0	0	23/3	13/3	5
x_2	2/3	4/3	1	0	2/3	1/3	0
$\hat{x}_3$	3	5	0	1	2	1	1

$$\left(0\ ,\ 2/3\ ,\ 3\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\right) \qquad z = -\frac{41}{3}$$

simplesso a due fasi

$z = 3x_1 + x_2 + x_3$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$

$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 4$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$\Rightarrow$

$z = 3x_1 + x_2 + x_3$

$x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 3$

$2x_1 + x_2 + x_3 - s_2 = 4$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$

$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0$

	b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2
z	3	1	1	1	1	0
	4	2	1	1	0	-1
	6	2	3	1	0	0

$\rightarrow$ c'è una base canonica ?!

se si simplesso

se no simplesso 2 fasi

servono due vettori che vadano a formare la base canonica.

min $z = 3x_1 + x_2 + x_3$

st $x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 3$

$2x_1 + x_2 + x_3 - s_2 + \overline{x}_4 = 4$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 + \overline{x}_5 = 6$

$x_1 \dots x_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5, s_1, s_2 \geq 0$

1 scrivo la funzione obbiettivo

se Min $\rightarrow \sum$ + variabili artificiali

se Max $\rightarrow \sum$ - variabili artif

$$\min \quad z = 3x_1 + x_2 + x_3$$
$$\text{st.} \quad x_1 + x_2 + x_3 \le 3$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \ge 4$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

$\Rightarrow$

$$\min \quad z = 3x_1 + x_2 + x_3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 3$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 - s_2 = 4$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \ge 0$$

	b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2
z	0	3	1	1	0	0
	3	1	1	1	1	0
	4	2	1	1	0	-1
	6	2	3	1	0	0

se c'è la matrice identità usi simplesso
se non c'è simplesso a due fasi

variabili artificiali

n° vincoli - variabili $\overline{z}$ $\quad 3 - 1 = 2$

$$\min \quad z = 3x_1 + x_2 + x_3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 3$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 - s_2 + \overline{x}_4 = 4$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + \overline{x}_5 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, \overline{x}_4, \overline{x}_5 \ge 0$$

min $\rightarrow$ Σ + variabili artificiali

max $\rightarrow$ Σ - variabili artificiali

b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	$\overline{x}_4$	$\overline{x}_5$
0	0	0	0	0	0	1	1
3	1	1	1	1	0	0	0
4	2	1	1	0	-1	1	0
6	2	3	1	0	0	0	1

-4 -2 -1 -1 0 1 0 1

$\downarrow$

$\rightarrow$ -10 -4 -4 -2 0 1 0 0

	b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$
	-10	-4	-4	-2	0	1	0	0
x_1	3	1	1	1	1	0	0	0
x_2	4	2	1	1	0	-1	1	0
x_4	6	2	3	1	0	0	0	1

	b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$
	-2	0	-2	0	0	-1	2	0
	-1	0	-1/2	-1/2	-1	-1/2	1/2	0
r_2	2	1	1/2	1/2	0	-1/2	1/2	0
	2	0	2	0	0	1	-1	1

	b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$
z	0	0	0	0	0	0	1	0
s_1	-1/2	0	0	-1/2	-1	-1/4	1/4	1/4
x_1	3/2	-1	0	-1/2	0	3/4	-3/4	1/2
x_2	1	0	1	0	0	1/2	-1/2	1/2

posso continuare

perché è 0

Fase 2)

	b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2
z	0	3	1	1	0	0
s_1	-1/2	0	0	-1/2	-1	-1/4
x_1	3/2	-1	0	-1/2	0	3/4
x_2	1	0	1	0	0	1/2

$\to$ vettore perfetto in forma canonica è 0

simplesso

$$\min \quad 2x_1 - x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 7$$
$$2x_1 - x_2 \geq -6$$
$$-3x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

dato $[0, 6]$

$0 + 2(6) \geq 7 \quad$ V
$2(0) - 6 \geq -6 \quad$ V
$-3(0) - 2(6) \geq 8 \quad$ V

	Primale	Duale	
	Min	Max	
Vincoli	≥, ≤, =	≥, ≤, =	Variabili
Variabili	≥, ≤, =	≤, ≥, =	Vincoli

	Primale	Duale	
	Max	Min	
Vincoli	≥, ≤, =	≤, ≥, =	Variabili
Variabili	≥, ≤, =	≥, ≤, =	Vincoli

$$\max \quad 7y_1 - 6y_2 + 8y_3$$

$$y_1 + 2y_2 - 3y_3 \leq 2$$
$$2y_1 - y_2 + 2y_3 \leq -1$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

condizioni di complementarità

se è ≠ 0 condizione

$$y_1 \cdot (x_1 + 2x_2 - 7) = y_1 \cdot (0 + 12 - 7) = y_1 (5) = 0$$

$$y_2 (2x_1 - x_2 + 6) = y_2 \cdot (0 - 6 + 6) = y_2 (0) = 0$$

non è possibile dedurre alcuna condizione

$$y_3 (-3x_1 + 2x_2 - 8) = y_3 (0 + 12 - 8) = y_3 (4) = 0$$

$x_1 (y_1 + 2y_2 - 3y_3 - 2)$ => inutile perché nel vettore è 0

$$x_2 (2y_1 - y_2 + 2y_3) = 6 (2y_1 - y_2 + 2y_3 + 1) = 0$$

$$2y_1 - y_2 + 2y_3 = -1$$

CIAO

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_3 = 0 \\ y_1 - y_2 + 2y_3 = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

le soluzioni sono in scarti complementari tra loro
verifico ammissibilità duale

$$(0) + 2(1) - 3(0) \leq 2$$
$$2(0) - (1) + 2(0) \leq -1$$

8)

$$\max \quad x_2 + x_3$$

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 1$$
$$-2x_1 + x_2 \leq 2$$
$$2x_2 \geq -3$$
$$2x_1 + x_3 = 2$$
$$x_2 \geq 0 \quad x_3 \leq 0$$

$$\min \quad y_1 + 2y_2 - 3y_3 + 2y_4$$

$$-y_1 - 2y_2 + 2y_4 = 0$$
$$-y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1$$
$$2y_1 + y_4 \leq 1$$
$$y_1, y_2 \geq 0 \quad y_3 \leq 0 \quad y_4 = 0$$

verifico ammissibilità primale

$[1 \ 4, 0]$

$-1 - 4 + 0 \leq 1$ V

$-2 + 4 \leq 2$ V

$8 \geq -3$ V

$2 = 2$ V

condizioni di complementarietà

$y_1(-x_1 - x_2 + 2x_3 - 1) = 0 \quad y_1(-1 - 4 - 1) = 0 \quad y_1(-6) = 0$

$y_2(-2x_1 + x_2 - 2) = 0 \Rightarrow y_2(-2 + 4 - 2) = y_2(0) = 0 \Rightarrow$ no

$y_3(2x_2 + 3) = 0 \Rightarrow y_3(8 + 3) = y_3(11) = 0$

$y_4(2x_1 + x_3 - 2) = 0 \Rightarrow y_3(2 - 2) = y_4(0) = 0 \Rightarrow$ no

$x_1(-y_1 - 2y_2 + 2y_4) = 0 \Rightarrow y_1 - 2y_2 + 2y_4 = 0$

$x_2(-y_1 + y_2 + 2y_3 - 1) = 0 \Rightarrow -y_1 + y_2 + 2y_3 = 1$

$x_3(2y_1 + y_4) = 0 \qquad 0(2y_1 + y_4) \Rightarrow$ no

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_3 = 0 \\ y_1 - 2y_2 + 2y_4 = 0 \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 = 1 \end{cases}$$

$y_4 - 1$

$y_2 = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$- \; 0 - 2(1) + 2(1) = 0 \quad \checkmark$

$-(0) + (1) + 2(0) \geq 1 \quad \checkmark$

$2(0) + () \leq 1 \quad \checkmark$

$$\max \quad 3x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\min \quad -3x_1 - x_2 - 3x_3$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_2 = 5$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + s_3 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

$x_3 \leq 0$ $\quad \hat{x}_3 = -x_3$

$\hat{x}_3 \geq 0$

	b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
$-z$	0	-3	-1	-3	0	0	0
s_1	2	2	1	1	1	0	0
s_2	5	1	2	3	0	1	0
s_3	6	2	2	1	0	0	1

	b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
z	3	0	1/2	-3/2	3/2	0	0
x_1	1	1	1/2	1/2	1/2	0	0
s_2	4	0	3/2	5/2	-1/2	1	0
s_3	4	0	1	0	-1	0	1

	b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
$-z$	18/5	0	14/15	0	5/2	2/5	0
x_1	2/5	2	2/5	0	6/5	-2/5	0
x_3	8/5	0	3/5	1	-1/5	2/5	0
s_3	4	0	1	0	-1	0	1

2 2 1 1 2 0 0

$$(2/5, 0, 8/5, 0, 0, 4)$$

$-z = 18/5$

$z = -18/5$

$$\min \quad 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4$$
$$\text{s.t.} \quad 4x_1 + 3x_2 + 2x_4 \leq 2$$
$$x_1 - 3x_2 - x_3 \leq 1$$
$$x_1 , x_2 , x_4 \geq 0$$
$$x_3 \leq 0$$

$$x_3 = -\hat{x}_3$$

$$\min \quad 7x_1 + 2x_2 - 5\hat{x}_3 - x_4$$
$$4x_1 + 3x_2 + 2x_4 + s_1 = 2$$
$$x_1 - 3x_2 + \hat{x}_3 + s_2 = 1$$
$$x_1 , x_2 , \hat{x}_3 , x_4 \geq 0$$

	b	x_1	x_2	$\hat{x}_3$	x_4	s_1	s_2
z	0	7	2	-5	-1	0	0
s_1	2	4	3	0	2	1	0
s_2	1	1	-3	1	0	0	1

$\rightarrow$

	b	x_1	x_2	$\hat{x}_3$	x_4	s_1	s_2
z	5	12	-13	0	-1	0	5
s_1	2	4	3	0	2	1	0
$\hat{x}_3$	1	1	-3	1	0	0	1

$\rightarrow$

	b	x_1	x_2	$\hat{x}_3$	x_4	s_1	s_2
z	41/3	58/3	0	26/3	10/3	13/3	5
x_2	2/3	4/3	1	0	2/3	1/3	0
$\hat{x}_3$	3	5	0	1	2	1	1

$$(0, 2/3, 3, 0, 0, 0) \qquad z = \frac{41}{3}$$

e)

$$\max \quad x_1 - x_2$$

$$x_2 \leq 1$$
$$2x_1 + x_2 \leq 5$$
$$-x_1 - 3x_2 = 10$$
$$x_1 + x_2 \geq -2$$
$$x_1 \geq 0$$

$-4 \leq 1$ ✓

$4 - 4 \leq 5$ ✓

$-2 + 12 = 10$ ✓

$2 - 4 \geq -2$ ✓

$$[2, -4]$$

	Primale	Duale	
	Min	Max	
Vincoli	≥, ≤, =	≥, ≤, =	Variabili
Variabili	≥, ≤, =	≤, ≥, =	Vincoli

	Primale	Duale	
	Max	Min	
Vincoli	≥, ≤, =	≤, ≥, =	Variabili
Variabili	≥, ≤, =	≥, ≤, =	Vincoli

$$\max \quad x_1 - x_2$$

$$x_2 \leq 1$$
$$2x_1 + x_2 \leq 5$$
$$-x_1 - 3x_2 = 10$$
$$x_1 + x_2 \geq -2$$
$$x_1 \geq 0$$

$$\min \quad y_1 + 5y_2 + 10y_3 - 2y_4$$

$$2y_2 - y_3 + y_4 \geq 1$$
$$y_1 + y_2 - 3y_3 + y_4 = -1$$
$$y_1, y_2 \geq 0 \quad y_4 \leq 0$$

APPLICAZIONE DELLE CONDIZIONI di complementarità prim-dual

$$y_1(x_2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1(-5) = 0$$
$$y_2(2x_1 + x_2 - 5) = 0 \qquad y_2(-5) = 0$$
$$y_3(-x_1 - 3x_2 - 10) = 0 \qquad y_3(0) = 0 \quad \text{NO}$$
$$y_4(x_1 + x_2 + 2) = 0 \qquad y_4(0) = 0 \quad \text{NO}$$

$$x_1(2y_2 - y_3 + y_4 - 1) = 0 \qquad 2y_2 - y_3 + y_4 = 1$$
$$x_2(y_1 + y_2 - 3y_3 + y_4 + 1) = 0 \qquad y_1 + y_2 - 3y_3 + y_4 = -1$$

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ 2y_2 - y_3 + y_4 = 1 \\ y_1 + y_2 - 3y_3 + y_4 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ -y_3 + y_4 = 1 \\ -3y_3 + y_4 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = y_4 - 1 \\ y_4 = 3y_3 - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = y_4 - 1 \\ y_4 = 3(y_4 - 1) - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 1 \\ y_4 = 2 \end{cases}$$

$$y_4 = 3y_4 - 3 - 1$$

$$\frac{\cancel{-2}\, y_4}{\cancel{-2}} = \frac{\cancel{-4}^{\,2}}{\cancel{-2}}$$

soddisfa i vincoli duali? si

$2(0) - (1) + (2) \geq 1$ V

$(0) + (0) - 3(1) + (2) = -1$ V

soddisfa i domini

$y_4 \leq 0$ non è ammissibile dualmente

$$\max \quad 3x_1 + 2x_2 - 5x_3$$
$$4x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 4$$
$$-2x_1 + x_2 - x_3 \geq -1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\min \quad -3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$
$$4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + s_1 = 4$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 + s_2 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0$$

	b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2
z	0	-3	-2	5	0	0
s_1	4	4	-2	2	1	0
s_2	1	2	-1	1	0	1

$\longrightarrow$

	b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2
z	3/2	0	-7/2	13/2	0	3/2
s_1	2	0	0	0	1	-2
x_1	1/2	1	-1/2	1/2	0	1/2

Osserviamo che nella prima riga del tableau è presente un costo ridotto negativo non possiamo procedere e quindi concludiamo che il problema è illimitato.

es 4)

$$\min \quad z = 3x_1 + x_2 + x_3$$
$$\text{st.} \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 4$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$\Rightarrow$

$$\min \quad 3x_1 + x_2 + x_3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 3$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 - s_2 = 4$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0$$

	b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2
z	0	3	1	1	0	0
	3	1	1	1	1	0
	4	2	1	1	0	-1
	6	2	3	1	0	0

C

	b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$
z	0	0	0	0	0	0	1	1
s_1	3	1	1	1	1	0	0	0
$\bar{x}_4$	4	2	1	1	0	-1	1	0
$\bar{x}_5$	6	2	3	1	0	0	0	1

$R_0 - R_3 = -6\ \ -2\ \ -3\ \ -1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0$

$R_0 - R_2 = -10\ \ -4\ \ -4\ \ -2\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0$

	b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$
z	-10	-4	-4	-2	0	1	0	0
s_1	3	1	1	1	1	0	0	0
$\bar{x}_4$	4	2	1	1	0	-1	1	0
$\bar{x}_5$	6	2	3	1	0	0	0	1

$\longrightarrow$

	b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$
z	-2	0	-2	0	0	-1	2	0
s_1	1	0	-1/2	1/2	1	1/2	-1/2	0
x_1	2	1	1/2	1/2	0	-1/2	1/2	0
$\bar{x}_5$	2	0	2	0	0	1	-1	1

$\longrightarrow$

	b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$
z	0	0	0	0	0	0	1	1
s_1	3/2	0	0	1/2	1	3/4	-3/4	1/4
x_1	3/2	1	0	1/2	0	-3/4	3/4	-1/4
x_2	1	0	1	0	0	1/2	-1/2	1/2

2 fase

	b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2
z	0	3	1	1	0	0
s_1	3/2	0	0	1/2	1	3/4
x_1	3/2	1	0	1/2	0	-3/4
x_2	1	0	1	0	0	1/2

$R_0 \to R_0 - 3R_2$

$R_0 \to R_0 - R_3$

	b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2
z	-11/2	0	0	-1/2	0	7/4
s_1	3/2	0	0	1/2	1	3/4
x_1	3/2	1	0	1/2	0	-3/4
x_2	1	0	1	0	0	1/2

	b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2
z	-4	0	0	0	2	10/4
x_3	3	0	0	1	2	3/2
x_1	0	-1	0	0	1	3/2
x_2	1	0	1	0	0	1/2

$x_2 + 3x_3 \leq 5$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$

$x_1 - 5x_3 \leq 4$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 7/2 \\ 9/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono in base

a.a

$5 + 0 \leq 5$ V

$3 + 5 + 0 \leq 8$ V

$3 - 0 \leq 4$ V

$x_2 + 3x_3 + s_1 = 5$ $\quad s_1 = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 + s_2 = 8$ $\quad s_2 = 0$

$x_1 - 5x_3 + s_3 = 4$ $\quad s_3 = 1$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{è SBA}$$

a.b

$4 \leq 5$ V $\quad s_1 = 1$

$8 \leq 8$ V $\quad s_2 = 0$

$4 \leq 4$ V $\quad s_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{è SBA}$$

a.c

$9/2 \leq 5$ $\quad s_1 = \frac{1}{2}$

$8 \leq 8$ $\quad s_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} 7/2 \\ 9/2 \end{bmatrix}$$

$7/2 \leq 4$ $\qquad s_3 = \frac{1}{2}$ $\qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ NO SBA

costruisci una opportuna funzione obiettivo

b.1) il punto x' è il suo punto di minimo

$$\min \ \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 \quad \Rightarrow \text{ipotizzo}$$

$$x_2 + 3x_3 \leq 5$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$$
$$x_1 - 5x_3 \leq 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$x' = (\cdot \ 5, 0)$$

$$\max \ 5y_1 + 8y_2 + 4y_3$$

$$y_2 + y_3 \leq \alpha$$
$$y_2 \leq \beta$$
$$3y_1 + y_2 - 5y_3 \leq \gamma$$
$$x_1, x_2, \ldots$$

	Primale	Duale	
	Min	Max	
Vincoli	≥, ≤, =	≥, ≤, =	Variabili
Variabili	≥, ≤, =	≤, ≥, =	Vincoli

	Primale	Duale	
	Max	Min	
Vincoli	≥, ≤, =	≤, ≥, =	Variabili
Variabili	≥, ≤, =	≥, ≤, =	Vincoli

	Primale	Duale	
	Min	Max	
Vincoli	≥, ≤, =	≥, ≤, =	Variabili
Variabili	≥, ≤, =	≤, ≥, =	Vincoli

	Primale	Duale	
	Max	Min	
Vincoli	≥, ≤, =	≤, ≥, =	Variabili
Variabili	≥, ≤, =	≥, ≤, =	Vincoli

$$\begin{cases} y_2 + y_3 + s_1 = \alpha \\ y_2 + s_2 = \beta \\ 3y_1 + y_2 - 5y_3 + s_3 = \gamma \end{cases} \qquad \begin{aligned} s_1 &= \alpha - y_2 - y_3 \\ s_2 &= \beta - y_2 \\ s_3 &= \gamma - 3y_1 - y_2 + 5y_3 \end{aligned}$$

$$\min \quad 2x_1 - x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 7 \\ 2x_1 - x_2 &\geq -6 \\ -3x_1 + 2x_2 &\geq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$0 + 2(6) \geq 7$ V

$2(0) - 6 \geq -6$ V

$-3(0) + 2(6) \geq 8$ V

$[0, 6]$ è ottimo??

$$\max \quad 7y_1 - 6y_2 + 8y_3$$

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 - 3y_3 &\leq 2 \\ 2y_1 - y_2 + 2y_3 &\leq -1 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

APPLICAZIONE DELLE CONDIZIONI DI COMPLEMENTARIETÀ PRIMALE-DUALE

$y_1(x_1 + 2x_2 - 7) = 0 \Rightarrow y_1(0 + 12 - 7) = 0 \Rightarrow y_1(5) = 0$

$y_2(2x_1 - x_2 + 6) = 0 \Rightarrow y_2(2(0) - 6 + 6) = 0 \Rightarrow y_2(0) = 0$ NO

$y_3(-3x_1 + 2x_2 - 8) = 0 \Rightarrow y_3(-3(0) + 12 - 8) = 0 \Rightarrow y_3(4) = 0$

$$x_1 (y_1 + 2y_2 - 3y_3 - 2) = 0 \Rightarrow 0 (y_1 + 2y_2 - 3y_3 - 2) = 0 \quad \text{NO}$$

$$x_2 (2y_1 - y_2 + 2y_3 + 1) = 0 \Rightarrow 2y_1 - y_2 + 2y_3 = -1$$

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_3 = 0 \\ 2y_1 - y_2 + 2y_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_3 = 0 \\ 2y_1 - y_2 + 2y_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_3 = 0 \\ y_2 = +1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- soddisfo i vincoli ??

$$0 + 2(1) - 3(0) \leq +2 \quad V$$

$$2(0) + (1) + 2(0) \leq 1 \quad V$$

- soddisfo le variabili ?

si

- è in scarti complementari per costruzione

$x_2 + 3x_3 \leq 5$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$

$x_1 - 5x_3 \leq 4$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

a) $x' = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ $x'' = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ $x''' = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 9/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

a.a) $5 + 0 \leq 5$ v $\quad x_2 + 3x_3 + s_1 = 5 \quad s_1 = 0$

$3 + 5 + 0 \leq 8$ v $\quad x_1 + x_2 + x_3 + s_2 = 8 \quad s_2 = 0$

$3 - 0 \leq 4$ v $\quad x_1 - 5x_3 + s_3 = 4 \quad s_3 = 1$

$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é un SBA

b.a) $4 + 0 \leq 5$ v $\quad x_2 + 3x_3 + s_1 = 5 \quad s_1 = 1$

$4 + 4 + 0 \leq 8$ v $\quad x_1 + x_2 + x_3 + s_2 = 8 \quad s_2 = 0$

$4 + 0 \leq 4$ v $\quad x_1 - 5x_3 + s_3 = 4 \quad s_3 = 0$

$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é un SBA c.a)

$\frac{9}{2} + 0 \leq 5 \quad \checkmark$

$\frac{7}{2} + \frac{9}{2} + 0 \leq 8 \quad \checkmark$

$\frac{7}{2} + 0 \leq 4$

$x_2 + 3x_3 + s_1 = 5$

$x_1 + x_2 + x_3 + s_2 = 8$

$x_1 - 5x_3 + s_3 = 4$

$s_1 = \frac{1}{2}$

$s_2 = 0$

$s_3 = \frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$ non è un SBA

b)

$\min \ \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$

$x_2 + 3x_3 \leq 5$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$

$x_1 - 5x_3 \leq 4$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$\max \ 5y_1 + 8y_2 + 4y_3$

$y_2 + y_3 \leq \alpha$

$y_1 + y_2 \leq \beta$

$3y_1 + y_2 - 5y_3 \leq \gamma$

$y_1\ y_2\ y_3 \leq 0$

	Primale	Duale	
	Min	Max	
Vincoli	≥, ≤, =	≥, ≤, =	Variabili
Variabili	≥, ≤, =	≤, ≥, =	Vincoli

	Primale	Duale	
	Max	Min	
Vincoli	≥, ≤, =	≤, ≥, =	Variabili
Variabili	≥, ≤, =	≥, ≤, =	Vincoli

$$\begin{cases} \alpha - y_2 - y_3 = s_1 \\ \beta - y_1 - y_2 = s_2 \\ \gamma - 3y_1 - y_2 + 5y_3 = s_3 \end{cases}$$

es 2)

$$\min \quad 2x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 &= 12 \\
4x_1 + 2x_2 - 3x_3 &\geq 2 \\
2x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 - 2x_3 &\leq 4
\end{aligned}
$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$x' = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$3\cdot(4) + 2(0) = 12$ ✓ $s_1 = 0$

$4(4) + 2(0) - 3(2) \geq 2$ ✓ $s_2 = 8$

$2(4) + \frac{1}{4}(0) - 2(2) \leq 4$ ✓ $s_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$ si è SBA

$$x'' = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

	Primale	Duale	
	Min	Max	
Vincoli	≥, ≤, =	≥, ≤, =	Variabili
Variabili	≥, ≤, =	≤, ≥, =	Vincoli

	Primale	Duale	
	Max	Min	
Vincoli	≥, ≤, =	≤, ≥, =	Variabili
Variabili	≥, ≤, =	≥, ≤, =	Vincoli

$$\min \quad 2x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$3x_1 + 2x_2 = 12$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 2$$

$$2x_1 + \frac{1}{4}x_2 - 2x_3 \leq 4$$

$$x_1, \cancel{x_2}\ x_3 \geq 0$$

$$\max \quad 12y_1 + 2y_2 + 4y_3$$

$$3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 2$$

$$2y_1 + 2y_2 + \frac{1}{4}y_3 \leq 3$$

$$-3y_2 - 2y_3 \leq 1$$

$$y_1 \geq 0 \quad y_3 \leq 0$$

$$\min \quad -12y_1 - 2y_3 + 4\hat{y}_3$$

$$3y_1 + 4y_2 - 2\hat{y}_3 + s_1 = 2$$

$$2y_1 + 2y_2 - \frac{1}{4}\hat{y}_3 + s_1 = 3$$

$$-3y_2 + 2\hat{y}_3 + s_3 = 1$$

$$y_2 \geq 0 \quad \hat{y}_3 \geq 0$$

$$\downarrow$$

$$\hat{y}_3 = -y_3$$

	b	y_1	y_2	$\hat{y}_3$	s_1	s_2	s_3
z	0	-12	-2	4	0	0	0
s_1	2	3	4	-2	1	0	0
s_2	3	2	2	$-\frac{1}{4}$	0	1	0
s_3	1	0	-3	2	0	0	1

$\longrightarrow$

	b	y_1	y_2	$\hat{y}_3$	s_1	s_2	s_3
z	8	0	14	-4	4	0	0
y_1	2/3	1	4/3	-2/3	1/3	0	0
s_2	5/3	0	-2/3	+13/12	-2/3	+1	0
s_3	1	0	-3	2	0	0	1

$\longrightarrow$

	b	y_1	y_2	$\hat{y}_3$	s_1	s_2	s_3
z	10	0	8	0	4	0	2
y_1	1	1	1/3	0	1/3	0	1/3
s_2	9/8	0	23/24	0	-2/3	1	-13/24
$\hat{y}_3$	1/2	0	-3/2	1	0	0	1/2

per il teorema della dualità debole deve

$z \geq W$ quindi deve essere

$z \geq 10$

b)

min $2x_1 - 3x_2 + x_3$

$3x_1 + 2x_2 = 12$

$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2$

$2x_1 + 1/4x_2 - 2x_3 = 4$

$x_{1,2,3} \geq 0$

simplesso $z = -15$

COMPITO RO

ESERCIZIO 1. Dato il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max -4x_1 + 3x_2 - x_3$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 10$$
$$x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 8$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0$$

1.1 Rispondere alla seguenti domande senza risolvere direttamente

a) Quali di questi vettori $x_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 13 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_4 = \begin{bmatrix} 14 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ sono soluzioni di base ammissibili?

b) Può esistere una soluzione di base ammissibile con x_2 e x_3 in base?

c) Può esistere una soluzione ottima del problema con x_1 in base?

1.2 Applicare l'algoritmo del Simplesso Duale per risolvere il problema.

1.3 Applicare l'algoritmo Primale-Duale partendo dalla soluzione duale $y^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

a) già nel svolto

b) una soluzione con x_2 e x_3 in base è del tipo

$$\begin{bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 > 0 \\ x_3 > 0 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \\ s_3 = 0 \end{bmatrix}$$

ogo per trovare x_2 e x_2

$$\min \ +4x_1 - 3\hat{x}_2 + x_3$$

$$x_1 - 3\hat{x}_2 \geq 10$$

$$x_1 + \hat{x}_2 + 4x_3 \geq 8$$

$$x_1 \geq \quad \hat{x}_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$$

hanno valore zero nell' SBA

$$\begin{cases} x_1 - 3\hat{x}_2 - s_1 = 10 \\ x_1 + \hat{x}_2 + 4x_3 - s_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 = 10 \quad x^2 = \frac{10}{3} \\ \hat{x}^2 + 4x_3 = 8 \end{cases}$$

c) fai simplesso e trova z

poi con x_1 in base i vettori posso usare

$$\begin{bmatrix} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \\ x_3 \\ s_1 \\ s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 > 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 > 0 \\ s_1 = 0 \end{bmatrix} \quad \ldots \text{ con tutte le variabili}$$

$$\lambda_2 > 0$$

ESERCIZIO 1

DATO IL SEGUENTE PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

Il prof ha detto che è min

$$\max \; 3x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$5x_1 + x_2 - x_3 \leq 10$$
$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2$$
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \leq 0 \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

VERIFICARE, SENZA RISOLVERE IL PROBLEMA CON ALGORITMI PRIMALI O DUALI, SE

a) LE VARIABILI x_1 E x_3 POSSONO STARE IN BASE CONTEMPORANEAMENTE ALL'OTTIMO

b) LE VARIABILI x_1 E x_2 POSSONO NON ESSERE IN BASE CONTEMPORANEAMENTE ALL'OTTIMO

ESERCIZIO 2

RISOLVERE IL PROBLEMA DELL'ESERCIZIO 1 APPLICANDO L'ALGORITMO PRIMALE-DUALE (2 ITERAZIONI) ASSUMENDO LA $x_3 \geq 0$. SCEGLIERE LA SOLUZIONE DUALE INIZIALE IN MODO ARBITRARIO.

ESERCIZIO 3

DATO IL SEGUENTE TABLEAU, QUALI VALORI DEI PARAMETRI $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi$ PERMETTONO DI AFFERMARE

	α	β	γ	0	φ	0
3	-1	1	2	1	0	0
5	-1	4	1	0	1	0
δ	0	-1	2	0	0	1

Rivedere

a) [redacted] CHE IL TABLEAU SIA OTTIMO. max $\delta \leq 0$ $\beta \leq 0$

b) CHE IL PROBLEMA DI PL ASSOCIATO SIA ILLIMITATO $\alpha \leq 0$ β $\gamma \geq 0$ $\gamma \leq 0$ $\delta \leq 0$

c) CHE IL PROBLEMA DI PL ASSOCIATO SIA VUOTO

d) CHE IL PROBLEMA DI PL ASSOCIATO AMMETTA OTTIMI MULTIPLI FINITI.

e) CHE IL PROBLEMA DI PL ASSOCIATO AMMETTA OTTIMI MULTIPLI AL FINITO E ALL'INFINITO

ESERCIZIO 1

DATO IL SEGUENTE PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

→ Il prof ha detto che è min

$$\max \quad 3x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$5x_1 + x_2 - x_3 \leq 10$$
$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2$$
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \leq 0 \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

VERIFICARE, SENZA RISOLVERE IL PROBLEMA CON ALGORITMI PRIMALI O DUALI, SE

a) LE VARIABILI x_1 E x_3 POSSONO STARE IN BASE CONTEMPORANEAMENTE ALL'OTTIMO

b) LE VARIABILI x_1 E x_2 POSSONO NON ESSERE IN BASE CONTEMPORANEAMENTE ALL'OTTIMA

$$\min \quad 3x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$5x_1 + x_2 - x_3 \leq 10$$
$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2$$
$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \leq 0$$

$$\min \quad 3x_1 + 2\hat{x}_2 + x_3^+ - x_3^-$$
$$5x_1 - \hat{x}_2 - x_3^+ + x_3^- + S_1 = 10$$
$$-x_1 - \hat{x}_2 + 2x_3^+ - 2x_3^- - S_2 = 2$$
$$x_1, \hat{x}_2 \geq 0$$

$$\max \quad 10y_1 + 2y_2$$
$$5y_1 - y_2 \leq 3$$
$$-y_1 - y_2 \leq 2$$
$$-y_1 + 2y_2 \leq 1$$
$$y_1 - 2y_2 \leq 1$$
$$y_1 \leq 0 \quad y_2 \geq 0$$

a) il vettore dovrà essere nella forma $\begin{bmatrix} x_1 > 0 \\ \hat{x}_2 = 0 \\ x_3^+ > 0 \\ x_3^- = 0 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \end{bmatrix}$

quindi

$$\begin{cases} 5x_1 - \hat{x}_2 - x_3^+ - x_3^- + s_1 = 10 \\ -x_1 - \hat{x}_2 + 2x_3^+ + 2x_3^- - s_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 - x_3^+ = 10 \\ -x_1 + 2x_3^+ = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(2x_3 - 2) - x_3 = 10 \\ x_1 = 2x_3 - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3^+ = \frac{20}{9} \\ x_1 = \frac{40}{9} - 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3^+ = \frac{20}{9} \\ x_1 = \frac{22}{9} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 22/9 \\ x_2 = 0 \\ 20/9 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \end{bmatrix}$$

min $z = 2x_1 + 5x_2$

$x_1 - 4x_2 \leq 8$ 0 1

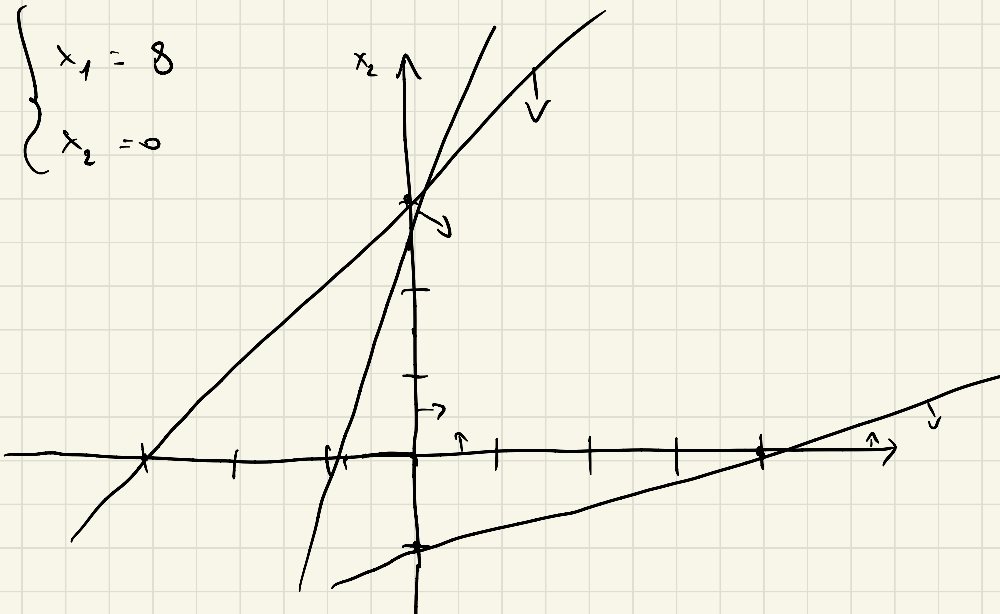
$-x_1 + x_2 \leq 6$

$-3x_1 + 2x_2 \leq 5$ (10 , 0

$x_1 - 4x_2 = 8$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -4x_2 = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$



COMPITO RO

Dati i seguenti vincoli di un problema di programmazione lineare:

$$
\begin{array}{ll}
y_1 & x_2 + 3x_3 \le 5 \\
y_2 & x_1 + x_2 + x_3 \le 8 \\
y_3 & x_1 - 5x_3 \le 4 \\
 & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0
\end{array}
$$

rispondere alla seguenti domande senza utilizzare algoritmi per la risoluzione diretta del problema o il metodo grafico:

a) Quali di questi vettori $x^{(1)} = \begin{bmatrix}3\\5\\0\end{bmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{bmatrix}4\\4\\0\end{bmatrix}$, $x^{(3)} = \begin{bmatrix}7/2\\9/2\\0\end{bmatrix}$, sono soluzioni di base ammissibili?

b) Costruire (dando opportune spiegazioni sul metodo) un'opportuna funzione obiettivo per cui

b1) il punto $x^{(1)}$ è il suo punto di minimo; $\longrightarrow$ Serve probl. min.

b2) il punto $x^{(2)}$ è il suo punto di minimo;

b3) i punti $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ sono entrambi punto di minimo;

b4) i punti $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$ sono tutti punto di minimo.

c) Data la funzione obiettivo min $x_1 + x_2 + x_3$, dire (motivando la risposta) se possa esistere una soluzione del problema duale di valore pari a 1.

d) Data la funzione obiettivo del punto c), eseguire due iterazioni dell'algoritmo Primale-Duale partendo da una soluzione duale $y^{(0)} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

c)

$$
\begin{array}{l}
\min \; x_1 + x_2 + x_3 \\
x_2 + 3x_3 \le 5 \\
x_1 + x_2 + x_3 \le 8 \\
x_1 - 5x_3 \le 4 \\
x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{l}
\min \; x_1 + x_2 + x_3 \\
x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 8 \\
x_1 - 5x_3 + x_6 = 4 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0
\end{array}
$$

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-z$	0	1	1	1	0	0	0
	5	0	1	3	1	0	0
	8	1	1	1	0	1	0
	4	1	0	-5	0	0	1

$z = 0$

$(0, 0, 0, 5, 8, 4)$

per la dualità debole $z \geq w$, se $w = 1$ per il problema duale allora $z \geq 1$, ma $z = 0$ e la disuguaglianza non è verificata

NON PUÒ ESISTERE UNA SOLUZIONE pari ad 1 per il problema duale

d)

Dati i seguenti vincoli di un problema di programmazione lineare:

$$\begin{array}{ll} y_1 & x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ y_2 & x_1 + x_2 + x_3 \leq 8 \\ y_3 & x_1 - 5x_3 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

rispondere alla seguenti domande senza utilizzare algoritmi per la risoluzione diretta del problema o il metodo grafico:

a) Quali di questi vettori $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x^{(3)} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 9/2 \\ 0 \end{bmatrix}$, sono soluzioni di base ammissibili?

b) Costruire (dando opportune spiegazioni sul metodo) un'opportuna funzione obiettivo per cui

b1) il punto $x^{(1)}$ è il suo punto di minimo; $\longrightarrow$ serve probl. min.

b2) il punto $x^{(2)}$ è il suo punto di minimo;

b3) i punti $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ sono entrambi punto di minimo;

b4) i punti $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$ sono tutti punto di minimo.

c) Data la funzione obiettivo min $x_1 + x_2 + x_3$, dire (motivando la risposta) se possa esistere una soluzione del problema duale di valore pari a 1.

d) Data la funzione obiettivo del punto c), eseguire due iterazioni dell'algoritmo Primale-Duale partendo da una soluzione duale $y^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

min $x_1 + x_2 + x_3$

$x_2 + 3x_3 + x_4 = 5$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 8$

$x_1 - 5x_3 + x_6 = 4$

$x_{1,2,3,4,5,6} \geq 0$

$\Rightarrow$

max $5y_1 + 8y_2 + 4y_3$

$y_2 + y_3 \leq 1$

$y_2 \leq 1$

$3y_1 - 5y_3 \leq 1$

$y_1 \leq 0$

$y_2 \leq 0$

$y_3 \leq 0$

y_1, y_2, y_3 liberi

condizioni di complementarietà

$$x_1(y_2+y_3-1)=0 \qquad x_1(0)=0$$
$$x_2(y_2-1)= \qquad x_2(-1)=0$$
$$x_3(3y_1-5y_3-1)=0 \qquad x_3(-6)=0$$
$$x_4(y_1)=0 \qquad x_4(0)=0$$
$$x_5(y_2)=0 \qquad x_5(0)=0$$
$$x_6(y_3)=0 \qquad x_6(-1)=0$$

$$y_1(x_2+3x_3+x_4-5)=0 \qquad 0(\,''\,)=0$$
$$y_2(x_1+x_2+x_3+x_5-8)=0 \qquad 0(\,''\,)=0$$
$$y_3(x_1-5x_3+x_6)=0 \qquad x_1-5x_3+x_6=0$$

PRIMALE RISTRETTO

$$\min \ \bar{x}_7+\bar{x}_8+\bar{x}_9$$

$$x_4+\bar{x}_7=5$$
$$x_1+x_5+\bar{x}_8=8$$
$$x_1+x_6+\bar{x}_9=4$$

TOLGO le variabili che so [illegible] [illegible]

b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	$\bar{x}_9$
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
5	0	0	0	1	0	0	1	0	0
8	1	0	0	0	1	0	0	1	0
4	1	0	0	0	0	1	0	0	1

ESERCIZIO 1

DATO IL SEGUENTE PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

Il prof ha detto che è min

$$\max \; 3x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$5x_1 + x_2 - x_3 \leq 10$$
$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2$$
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \leq 0 \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

VERIFICARE, SENZA RISOLVERE IL PROBLEMA CON ALGORITMI PRIMALI O DUALI, SE

a) LE VARIABILI x_1 E x_3 POSSONO STARE IN BASE CONTEMPORANEAMENTE ALL'OTTIMO

b) LE VARIABILI x_1 E x_2 POSSONO NON ESSERE IN BASE CONTEMPORANEAMENTE ALL'OTTIMO

$$\min \; 3x_1 + 2\hat{x}_2 + x_3^+ - x_3^-$$
$$5x_1 - \hat{x}_2 - x_3^+ + x_3^- + x_4 = 10$$
$$-x_1 - \hat{x}_2 + 2x_3^+ - 2x_3^- - x_5 = 2$$
$$x_1 \geq 0 \quad \hat{x}_2 \geq 0 \quad x_3^+ \geq 0 \quad x_3^- \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0$$

	b	x_1	$\hat{x}_2$	x_3	x_4	x_5
$-z$	0	3	2	1	0	0
	10	5	-1	-1	1	0
	2	-1	-1	2	0	-1

SBA

$$\begin{bmatrix} x_1 > 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3^+ > 0 \\ x_3^- = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x_1 - \hat{x}_2 - x_3^- - x_3^+ + x_4 = 10 \\ -x_1 - \hat{x}_2 + 2x_3^+ - 2x_3^- - x_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 - x_3^+ = 10 \\ -x_1 + 2x_3^+ = 2 \end{cases}$$

$$x_3 = 10x_3 - 10 - 10$$

$$\begin{cases} x_3^+ = 5x_1 - 10 \\ x_1 = 2x_3 - 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3^+ = \frac{20}{9} \\ x_1 = \frac{22}{9} \end{cases}$$

	Primale	Duale	
	Min	Max	
Vincoli	≥, ≤, =	≥, ≤, =	Variabili
Variabili	≥, ≤, =	≤, ≥, =	Vincoli

	Primale	Duale	
	Max	Min	
Vincoli	≥, ≤, =	≤, ≥, =	Variabili
Variabili	≥, ≤, =	≥, ≤, =	Vincoli

$$\max \quad 10y_1 + 2y_2$$

$$5y_1 - y_2 \leq 3$$
$$-y_1 - y_2 \leq 2$$
$$-y_1 + 2y_2 \leq 1$$
$$-y_1 - 2y_2 \leq -1$$

$$y_1 \leq 0$$

$$-y_2 \leq 0$$

$$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

$$
\begin{aligned}
x_1 & (5y_1 - y_2 - 3) = 0 \\
x_2 & (-y_1 - y_2 - 2) = 0 \\
x_3^+ & (-y_1 + 2y_2 - 1) = 0 \\
x_3^- & (-y_1 - 2y_2 + 1) = 0 \\
x_4 & (y_1) = 0 \\
x_5 & (-y_2) = 0
\end{aligned}
$$

$$y_1 (5x_1 - \hat{x}_2 - x_3^+ + x_3^- + x_4 - 10) = 0$$

$$y_2 (-x_1 - \hat{x}_2 + 2x_3^+ - 2x_3^- - x_5 - 2) = 0$$

$$\begin{cases} 5y_1 - y_2 = 3 \\ -y_1 + 2y_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2 = 5y_1 - 3 \\ y_1 = 2y_2 - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2 = 10y_2 - 5 - 3 \\ y_1 = \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = \frac{8}{9} \\ y_1 = \frac{7}{9} \end{cases}$$

$$5y_1 - y_2 \leq 3$$
$$-y_1 - y_2 \leq 2$$
$$-y_1 + 2y_2 \leq 1$$
$$-y_1 - 2y_2 \leq -1$$

$$y_1 \leq 0$$

$$y_2 \leq 0$$

NO . è ottimo

ESERCIZIO 1. Dato il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max -4x_1 + 3x_2 - x_3$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 10$$
$$x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 8$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0$$

1.1 Rispondere alla seguenti domande senza risolvere direttamente

a) Quali di questi vettori $x_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 13 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_4 = \begin{bmatrix} 14 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ sono soluzioni di base ammissibili?

b) Può esistere una soluzione di base ammissibile con x_2 e x_3 in base?

c) Può esistere una soluzione ottima del problema con x_1 in base?

1.2 Applicare l'algoritmo del Simplesso Duale per risolvere il problema.

1.3 Applicare l'algoritmo Primale-Duale partendo dalla soluzione duale $y^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$\max \quad 10y_1 + 8y_2$$

$$y_1 + y_2 \leq 4$$

$$\min \quad 4x_1 + 3\hat{x}_2 + x_3 \qquad -3y_1 + y_2 \leq 3$$

$$x_1 - 3\hat{x}_2 - s_1 = 10 \qquad 4y_2 \leq 1$$

$$x_1 + \hat{x}_2 + 4x_3 - s_2 = 8 \qquad y_1 \leq 0$$

$$x_1, \hat{x}_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0 \qquad -y_2 \leq 0$$

$$S_d \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

$\cancel{y_1}, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$

PRIMALE RISTRETTO

$\min \quad \partial_1 + \partial_2$

$-s_1 + \partial_1 = 10$

$-s_2 + \partial_2 = 8$

$s_1, s_2 \quad \partial_1 \quad \partial_2 \geq 0$

	b	s_1	s_2	∂_1	∂_2
$-z$	0	0	0	1	1
	10	-1	0	1	0
	8	0	-1	0	1

$y^{(1)} = y^0 + \pi^T \theta \quad \begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix}$

$\max \quad 10\pi_1 + 8\pi_2$

$-y_1 \leq 0$

$-y_2 \leq 0$

$y_1 \leq 1$

$y_2 \leq 1$

$\pi^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

max $\quad 10y_1 + 8y_2$

$y_1 + y_2 \leq 4 \qquad \theta + \theta \leq 4 \qquad \theta \leq 2$

$-3y_1 + y_2 \leq 3 \qquad -3\theta + \theta \leq 3 \qquad \theta \geq -\frac{3}{2}$

$4y_2 \leq 1 \qquad 4\theta \leq 1 \qquad \theta \leq \frac{1}{4}$

$-y_1 \leq 0 \qquad +\theta \geq 0$

$-y_2 \leq 0 \qquad \theta \geq 0 \qquad \theta \geq 0$

$\theta \geq 0$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{3}{2} \leq \theta \leq \frac{1}{4}$$

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$