Modelli di Programmazione Lineare

Corso di Ricerca Operativa
A.A. 2016-2017

Argomenti

- **Introduzione alla PL**
- Modelli di pianificazione della produzione
- Modelli di miscelazione
- Modelli di flusso su rete
- Modelli multiperiodo

Introduzione alla PL

- I modelli di PL sono tra i più conosciuti e utilizzati nelle applicazioni di natura gestionale.
- Un modello di PL si ottiene assumendo che funzione obiettivo e vincoli nel modello generale siano lineari; in tal caso, il modello di PL può essere scritto come:

$$
\begin{aligned}
&\min z(x) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \\
&s.v \\
&\qquad a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \geq b_1 \\
&\qquad \ldots \\
&\qquad a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n \geq b_m
\end{aligned}
$$

Introduzione alla PL

- Inoltre, un modello di PL include tipicamente in forma esplicita anche i vincoli di non negatività delle variabili di decisione:

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

- In forma compatta:

$$\min z(x) = c^{\mathrm{T}} x$$

s.v.

$$Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

Introduzione alla PL

dove:

- $c \in R^n$ (vettore dei coefficienti della funzione obiettivo o vettore dei coefficienti di «costo», essendo la funzione obiettivo da minimizzare);
- $b \in R^m$ (vettore dei termini noti dei vincoli, vettore delle «risorse»);
- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

(matrice (*m* x *n*) dei coefficienti delle variabili di decisione nei vincoli, matrice dei «coefficienti tecnologici»).

Introduzione alla PL

L'ipotesi di linearità nei modelli di PL potrebbe non essere ragionevole in molte applicazioni pratiche:

- caso degli sconti di quantità (economie di scala) per acquisti di grossi quantitativi di merce;
- modelli di imposizione fiscale nei quali a imponibili via via crescenti corrispondono differenti percentuali di prelievo.

Tuttavia, anche in questi casi, i modelli di PL rappresentano comunque una buona base di partenza per successive elaborazioni.

Introduzione alla PL

I modelli di PL impongono che le variabili di decisione possano assumere valori reali.

Esempio

Un piano di produzione per un'azienda di elettrodomestici non può prevedere la realizzazione di 326,87 frigoriferi.

Questa potrebbe invece essere la soluzione ottima sotto l'ipotesi di variabili reali. In pratica, nel caso di «grandi» numeri, quest'ipotesi non causa particolari problemi in quanto la soluzione ottenuta arrotondando i valori frazionari all'intero inferiore o superiore resta comunque significativa.

L'azienda dunque potrà produrre 327 frigoriferi (o 326) senza allontanarsi di molto dalla soluzione ottima.

Introduzione alla PL

Infine, nei modelli di PL (ma vale anche per altri modelli di ottimizzazione) si assume che i parametri presenti siano noti con certezza.

Esistono diverse situazioni in cui tale ipotesi non è verificata, soprattutto quando la pianificazione si riferisce a periodi di tempo futuri.

Argomenti

- Introduzione alla PL
- **Modelli di pianificazione della produzione**
- Modelli di miscelazione
- Modelli di flusso su rete
- Modelli multiperiodo

Modelli di pianificazione della produzione

- I modelli di pianificazione della produzione consentono di formulare problemi per l’allocazione ottimale di «risorse» (materie prime, macchinari, manodopera), disponibili in quantità limitata e utilizzate per realizzare un numero finito di «prodotti».
- Per ciascun prodotto è noto il processo produttivo, riassumibile nel consumo di un quantitativo noto di risorse.
- La vendita di ciascuna unità di prodotto genera un profitto noto e la funzione obiettivo consiste nel massimizzare il profitto derivante dalla vendita di tutti i prodotti realizzati.

Modelli di pianificazione della produzione

Si supponga di disporre di un numero m di risorse disponibili per la produzione di n prodotti.
Si indichi con:

- a_{ij} , $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$, la quantità di risorsa i necessaria per produrre una unità di prodotto j;
- b_i, $i = 1,\ldots,m$, la disponibilità massima della risorsa i;
- p_j, $j = 1,\ldots,n$, il profitto lordo unitario ricavabile dalla vendita del prodotto j;
- x_j, $j = 1,\ldots,n$, variabili di decisione ciascuna delle quali indicante il livello di produzione del prodotto j.

Modelli di pianificazione della produzione

Il modello di PL è il seguente:

$$\max z(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

$s.v$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

Modelli di pianificazione della produzione

- Varianti del problema possono essere ottenute considerando come obiettivo la minimizzazione dei costi complessivi di produzione, oppure includendo vincoli di budget, di mercato (che impongono livelli massimi di produzione per uno o più prodotti) o di sfruttamento degli impianti (in base ai quali si fissano eventualmente livelli minimi di produzione).

- In alcuni casi, la realizzazione di un prodotto richiede la scelta di risorse disponibili tra più alternative (ad esempio, un'operazione meccanica di tornitura può essere eseguita su uno qualsiasi dei torni disponibili nell'officina). In questo caso le variabili di decisione devono esprimere sia il livello produttivo per ogni prodotto sia la specifica risorsa impegnata. È quindi necessario ricorrere a una formulazione a due indici per le variabili di decisione, cioè, x_{ij} , $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$, ciascuna delle quali rappresentante la quantità di prodotto j realizzata utilizzando la risorsa i.

Esercizio (Meko)

La Meko è una multinazionale specializzata nella produzione di biocarburanti.
Presso lo stabilimento di Oaxaca (Messico) si realizzano due prodotti, il biometanolo e il biodimetiletere.
Il processo produttivo richiede la lavorazione **nei** tre stabilimenti di preparazione, purificazione ed estrazione.
I tempi necessari per la lavorazione di una tonnellata dei due biocarburanti sono riportati nella Tabella successiva (2.1), unitamente alla capacità produttiva giornaliera dei tre stabilimenti.

Esercizio (Meko)

	Ore di lavorazione a tonnellata		
Stabilimento	Biometanolo	Biodimetiletere	Capacità giornaliera [h]
Preparazione	0,72	0,85	18
Purificazione	1,68	1,42	18
Estrazione	1,92	2,12	16

Tabella 2.1 Dati relativi al problema di produzione della Meko.

realizzando un profitto (in €) pari a 540 e 590, rispettivamente.

Esercizio (Meko)

Per formulare il problema di produzione, si utilizzano le variabili di decisione x_j, $j = 1, 2$, rappresentanti il livello di produzione giornaliera dei due biocarburanti (1 = biometanolo, 2 = biodimetiletere).

Entrambi i prodotti devono essere lavorati in ciascuno dei tre stabilimenti. In particolare, per lo stabilimento di preparazione, le ore giornaliere utilizzate per la lavorazione dei due biocarburanti sono pari a $0{,}72x_1 + 0{,}85x_2$.

Essendo disponibili al più 18 ore di lavorazione giornaliera, segue il vincolo:

$$0{,}72x_1 + 0{,}85x_2 \leq 18$$

Esercizio (Meko)

Analogamente, per gli altri due stabilimenti si avranno i seguenti vincoli:

$$1{,}68x_1 \; + 1{,}42x_2 \leq 18$$

$$1{,}92x_1 \; + 2{,}12x_2 \leq 16$$

La funzione obiettivo z(x), da massimizzare, corrisponde al profitto giornaliero complessivo:

$$\max z(x) = 540x_1 \; + 590x_2$$

Vincoli di non negatività:

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

La soluzione ottima, determinata attraverso il risolutore di Excel, prevede $x_1^* = \frac{25}{3}$ e $x_2^* = 0$ con valore ottimo pari a $z^* \; = \; 4500.$

Esercizio (Itaca)

Itaca è un'industria toscana specializzata nella produzione di materiali per l'edilizia sostenibile. Nello stabilimento di Arezzo si realizzano tre tipi di malte di argilla, A, B e C, utilizzando allo scopo tre reparti, ognuno in grado di realizzare un qualsiasi tipo di malta. I tempi settimanali di lavorazione disponibili presso ogni reparto per ogni tipo di malta realizzata sono riportati nella Tabella 2.2, insieme alla capacità produttiva dei reparti e al costo orario variabile di utilizzo dei reparti.

	Ore di lavorazione al quintale				
Reparto	Malta A	Malta B	Malta C	Capacità settimanale [h]	Costo [€/h]
1	0,18	0,21	0,24	90	3,52
2	0,20	0,18	0,21	85	4,18
3	0,12	0,22	0,23	80	3,98

Tabella 2.2 Dati relativi al problema di produzione di Itaca.

Esercizio (Itaca)

Studi di mercato hanno mostrato che una pianificazione ottimale dovrebbe prevedere un livello di produzione della malta di tipo A compresa tra il 50% e il 70% della produzione totale.

Il prezzo di vendita (in €) al quintale per i tre tipi di malta realizzati è pari rispettivamente a 18, 21, 24. L'obiettivo per l'azienda è la pianificazione della produzione settimanale, massimizzando il profitto complessivo derivante dalla vendita dei tre prodotti.

Esercizio (Itaca)

Per formulare il problema di pianificazione della produzione, si osserva che ogni reparto è una risorsa alternativa che può essere utilizzata per produrre un qualsiasi tipo di malta.

Pertanto, le variabili di decisione sono scelte come x_{ij}, $i = 1,2,3$, $j = A, B, C$, ciascuna delle quali corrispondente alla quantità di malta (espressa in quintali) di tipo j prodotta settimanalmente presso il reparto i.

Per quanto riguarda i vincoli, si osserva che il numero complessivo di ore settimanali di utilizzo presso il reparto 1 è pari a $0{,}18x_{1A} + 0{,}21x_{1B} + 0{,}24x_{1C}$.

Esercizio (Itaca)

Essendo la capacità produttiva del reparto 1 pari a 90 ore settimanali, si ricava il seguente vincolo:

$$0{,}18x_{1A} + 0{,}21x_{1B} + 0{,}24x_{1c} \leq 90$$

Procedendo in modo del tutto analogo per il secondo e il terzo reparto, si ottiene:

$$0{,}20x_{2A} + 0{,}18x_{2B} + 0{,}21x_{2c} \leq 85$$
$$0{,}12x_{3A} + 0{,}22x_{3B} + 0{,}23x_{3c} \leq 80$$

Vincoli di non negatività:

$$x_{1A}, x_{1B}, x_{1C}, x_{2A}, x_{2B}, x_{2C}, x_{3A}, x_{3B}, x_{3C} \geq 0$$

Esercizio (Itaca)

Occorre inoltre imporre due vincoli sul livello minimo e massimo di produzione settimanale della malta A:

$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \geq 0{,}5(x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{3A} + x_{3B} + x_{3C})$

$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \leq 0{,}7(x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{3A} + x_{3B} + x_{3C})$

La funzione obiettivo da massimizzare esprime il profitto (ricavi meno costi) settimanale derivante dalla vendita dei tre tipi di malta.

Esercizio (Itaca)

Il ricavo complessivo si ottiene come:

$$18(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) + 21(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}) + 24(x_{1C} + x_{2C} + x_{3C})$$

mentre i costi variabili di produzione sono determinati come:

$$3{,}52(x_{1A} + x_{1B} + x_{1C}) + 4{,}18(x_{2A} + x_{2B} + x_{2C}) + 3{,}98(x_{3A} + x_{3B} + x_{3C})$$

Ne consegue quindi la seguente funzione obiettivo:

$$\max z(x) = 14{,}48x_{1A} + 13{,}82x_{2A} + 14{,}02x_{3A} + 17{,}48x_{1B} + 16{,}82x_{2B} + 17{,}02x_{3B} + 20{,}48x_{1C} + 19{,}82x_{2C} + 20{,}02x_{3C}$$

Esercizio (Itaca)

La soluzione ottima, determinata utilizzando il risolutore di Excel, è pari a:

$x_{1A}^* = 64,63;$ $x_{1B}^* = 0\ ;$ $x_{1C}^* = 326,53\ ;$
$x_{2A}^* = 0\ ;$ $x_{2B}^* = 0\ ;$ $x_{2C}^* = 404,76\ ;$
$x_{3A}^* = 666,67\ ;$ $x_{3B}^* = 0\ ;$ $x_{3C}^* = 0$

con valore ottimo pari a:

$$z^* = 24992,18\ €$$

Argomenti

- Introduzione alla PL
- Modelli di pianificazione della produzione
- **Modelli di miscelazione**
- Modelli di flusso su rete
- Modelli multiperiodo

Modelli di miscelazione

- Nei problemi di miscelazione si dispone di un insieme di materie prime («ingredienti»), ciascuna caratterizzata da un contenuto noto di determinati «componenti».
- L'obiettivo è miscelare gli ingredienti, secondo opportune proporzioni, per ottenere un prodotto finito («miscela»), che soddisfi determinati requisiti di qualità, esprimibili in termini di contenuto complessivo dei componenti nella miscela.
- Il più classico problema di miscelazione è il problema della dieta. Tuttavia, dal punto di vista economico, si trovano numerose applicazioni industriali del problema di miscelazione nelle industrie alimentari, siderurgiche, chimiche. I problemi di miscelazione sono tra gli esempi più diffusi di impiego della PL nella gestione della produzione.

Modelli di miscelazione

- Variabili di decisione corrispondono al contenuto di ciascun ingrediente nella miscela.

- Vincoli sono tipicamente associati alle caratteristiche di qualità della miscela (che dipende dai componenti presenti negli ingredienti utilizzati) e alle disponibilità limitate degli ingredienti.

- Funzione obiettivo è rappresentata dal costo degli ingredienti impiegati.

Modelli di miscelazione

Si supponga di avere a disposizione n ingredienti, ognuno dei quali contenente una certa quantità di ciascuno degli m componenti.

Si indichi, in particolare, con

- a_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, la quantità di componente i presente nell'ingrediente j;
- b_i , $i = 1, \dots, m$, la quantità minima di componente i presente nella miscela.

Il costo unitario dell'ingrediente j è indicato con c_j , $j = 1, \dots, n$.

Le variabili di decisione sono x_j , $j = 1, \dots, n$, ognuna delle quali corrispondente alla quantità di ingrediente j presente nella miscela da realizzare.

Modelli di miscelazione

Il modello di PL è il seguente:

$$\min z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.v$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

Modelli di miscelazione

Ulteriori vincoli potrebbero essere necessari.

Ad esempio, nel caso in cui sia richiesto che un dato componente i sia presente nella miscela in un quantitativo non superiore a un valore prefissato d_i, occorre imporre che:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq d_i$$

In altri casi, potrebbero essere imposte limitazioni u_j sul massimo quantitativo di ingrediente j da utilizzare per realizzare la miscela:

$$x_j \leq u_j$$

Modelli di miscelazione

Nel caso in cui sia necessario produrre un quantitativo prefissato q di miscela, occorre aggiungere il seguente vincolo:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = q$$

Nel caso in cui il numero di miscele da realizzare siano $p > 1$, il modello generale di miscelazione si modifica in accordo alla scelta delle variabili di decisione, che, in questo caso, sono del tipo x_{jk}, $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, p$, ciascuna delle quali rappresentante la quantità di ingrediente j necessaria per realizzare la

Modelli di miscelazione

Potrebbe, infine, essere richiesto che un certo ingrediente appartenga alla miscela solo se un altro ingrediente ne faccia parte (o non ne faccia parte). L'introduzione di questi vincoli nel modello di miscelazione richiede l'uso di variabili binarie.

Esercizio (Ansalmec)

L'acciaio è uno dei prodotti più facilmente riciclabili (e riciclati) al mondo. In effetti, è sufficiente fondere qualsiasi rottame di ferro per incenerire tutti gli eventuali residui plastici o di vernice contenuti nel rottame, restando così con solo metallo liquido.
Il problema nasce in quanto è difficile separare i diversi metalli presenti nel rottame, per cui, insieme al ferro, si ritrovano nel metallo liquido anche rame, nichel, cromo e altri metalli.

In diverse produzioni alcuni metalli sono desiderati e altri no.

Esercizio (Ansalmec)

Ad esempio, nella produzione dell'acciaio 18/10 (utilizzato nella produzione di pentole), si vuole avere il 18% di cromo ed il 10% di nichel nel prodotto finito, per cui l'eventuale presenza di questi metalli nei rottami di ferro è altamente desiderabile, in quanto cromo e nichel sono molto più costosi sia dei rottami che dello stesso acciaio 18/10.

Al contrario, il rame è un'impurità che rovina le caratteristiche estetiche dell'acciaio 18/10.

Esercizio (Ansalmec)

Ansalmec ha di recente analizzato le caratteristiche di sei lotti di rottami di ferro, riportate in Tabella 2.3. Nella stessa tabella sono riportati anche il peso complessivo di ciascun lotto e il costo unitario di acquisto.

	Ingrediente					
Componente	Rottame 1 [%]	Rottame 2 [%]	Rottame 3 [%]	Rottame 4 [%]	Rottame 5 [%]	Rottame 6 [%]
Ferro	93	76	74	65	72	68
Nichel	5	13	11	16	6	23
Cromo	0	11	12	14	20	8
Impurità	2	0	3	5	2	1
Peso [q]	30	90	50	70	60	50
Costo [€]	50	100	80	85	92	115

Tabella 2.3 Dati relativi al problema di miscelazione della Ansalmec.

Esercizio (Ansalmec)

L'obiettivo per l'azienda è produrre, al costo minimo, almeno 100 quintali di acciaio $\mathbf{18/10}$ con una presenza del 18% di cromo, 10% di nichel, almeno il 65% di ferro e al più un 1% di impurità.

Esercizio (Ansalmec)

Il problema di miscelazione si può formulare nel modo seguente.

- Si indichi con x_j , $j = 1, \dots, 6$, la variabile di decisione corrispondente alla quantità (in quintali) di rottame di tipo j da utilizzare per la produzione dell'acciaio.
- I vincoli sono imposti dalla qualità dell'acciaio. In particolare, poiché si desidera produrre 100 quintali di acciaio con almeno il 65% di ferro, si dovranno avere, per la miscela di prodotto, almeno 65 quintali di ferro.
- Un quintale di rottame di tipo j , $j = 1, \dots, 6$, contiene, rispettivamente, 0,93, 0,76, 0,74, 0,65, 0,72, 0,68 quintali di ferro.

Esercizio (Ansalmec)

Pertanto, il contenuto di ferro in una miscela con x_j quintali di rottame di tipo j, j = 1,…,6, è pari a

$0{,}93x_1 + 0{,}76x_2 + 0{,}74x_3 + 0{,}65x_4 + 0{,}72x_5 + 0{,}68x_6$

quintali, da cui il vincolo:

$$0{,}93x_1 + 0{,}76x_2 + 0{,}74x_3 + 0{,}65x_4 + 0{,}72x_5 + 0{,}68x_6 \geq 65.$$

Analogamente per il contenuto di cromo, nichel ed impurità:

$$0{,}05x_1 + 0{,}13x_2 + 0{,}11x_3 + 0{,}16x_4 + 0{,}06x_5 + 0{,}23x_6 = 18$$
$$0{,}11x_2 + 0{,}12x_3 + 0{,}14x_4 + 0{,}20x_5 + 0{,}08x_6 = 10$$
$$0{,}02x_1 + 0{,}03x_3 + 0{,}05x_4 + 0{,}02x_5 + 0{,}01x_6 \leq 1$$

Esercizio (Ansalmec)

- Poiché sono necessari 100 quintali di acciaio, occorre imporre:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 100$$

Vincoli sulla disponibilità limitata di ciascun tipo di rottame:

$$x_1 \leq 30; x_2 \leq 90; x_3 \leq 50; x_4 \leq 70; x_5 \leq 60; x_6 \leq 50$$

Vincoli di non negatività sulle variabili di decisione:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Esercizio (Ansalmec)

La funzione obiettivo $z(x)$, da minimizzare, è rappresentata dal costo di acquisto (in €) dei rottami:

$$\min z(x) = 50x_1 + 100x_2 + 80x_3 + 85x_4 + 92x_5 + 115x_6$$

La soluzione ottima del problema, determinata utilizzando il risolutore di Excel, è data da:

$x_1^* = 0$; $x_2^* = 40{,}18$; $x_3^* = 0$; $x_4^* = 9{,}59$; $x_5^* = 1{,}83$;
$x_6^* = 48{,}40$;

con valore ottimo pari a $z^* = 10567{,}58$

Esercizio (Baraldi)

Baraldi è un'industria chimica veneta che produce due tipi di concimi, A e B, che si differenziano per il diverso contenuto di azoto e ferro.
Il concime di tipo A deve contenere almeno il 25% di azoto e almeno il 10% di ferro, mentre il concime di tipo B deve contenere esattamente il 20% di azoto e almeno il 16% di ferro.
I concimi si ottengono facendo reagire dei composti contenenti azoto e ferro.

Esercizio (Baraldi)

L'industria dispone di 30000 kg di composto 1, acquistato al prezzo di 3 €/kg, e di 25000 kg di composto 2, acquistato al prezzo di 4 €/kg.
Il composto 1 contiene il 40% di ferro e il 50% di azoto, il composto 2 contiene il 6% di ferro e il 70% di azoto.

Deve essere prodotto un lotto di 40000 kg di concime di tipo A e 50000 kg di concime di tipo B al costo minimo di produzione.

Esercizio (Baraldi)

Gli ingredienti a disposizione per produrre entrambi i concimi (miscele) sono due, composti azotati e composti ferrosi.

Le variabili di decisione sono quindi x_{jk}, $j = 1,2$, $k = A, B$, ciascuna delle quali rappresentante la quantità di composto j necessaria per produrre il concime di tipo k.

Per quanto riguarda i vincoli, si osserva innanzitutto che, dovendo produrre 40000 kg di concime di tipo A, è necessario che complessivamente nella miscela ci siano almeno 10000 kg di azoto e almeno 4000 kg di ferro.

Esercizio (Baraldi)

La quantità di azoto per la produzione del concime di tipo A si ottiene dai due composti e risulta pertanto pari a $0{,}5x_{1A} + 0{,}7x_{2A}$.

Similmente, la quantità di ferro per il concime di tipo A si ottiene dai due composti come $0{,}4x_{1A} + 0{,}06x_{2A}$.

I vincoli per caratterizzare la qualità del concime di tipo A risultano pertanto:

$$0{,}5x_{1A} + 0{,}7x_{2A} \geq 10000;$$
$$0{,}4x_{1A} + 0{,}06x_{2A} \geq 4000.$$

Esercizio (Baraldi)

Analogamente, per produrre 50000 kg di concime di tipo B, è necessario introdurre nella miscela esattamente 10000 kg di azoto e almeno 8000 kg di ferro.

I corrispondenti vincoli sono i seguenti:

$$0{,}5x_{1B} + 0{,}7x_{2B} = 10000;$$
$$0{,}4x_{1B} + 0{,}06x_{2B} \geq 8000.$$

È necessario aggiungere i vincoli sulla disponibilità limitata dei due composti:

$$x_{1A} + x_{1B} \leq 80000;$$
$$x_{2A} + x_{2B} \leq 60000.$$

Esercizio (Baraldi)

Vincoli di non negatività sulle variabili di decisione:

$$x_{1A}, x_{1B}, x_{2A}, x_{2B} \geq 0$$

La funzione obiettivo $z(x)$, che si vuole minimizzare, è data dal costo di acquisto dei due composti:

$$\min z(x) = 3(x_{1A} + x_{1B}) + 4(x_{2A} + x_{2B})$$

La soluzione ottima del problema, determinata utilizzando il risolutore di Excel, è data da:

$$x_{1A}^* = 8800; \ x_{1B}^* = 20000 \ ; \ x_{2A}^* = 8000 \ ; \ x_{2B}^* = 0 \ ;$$

con valore ottimo pari a: $z^* = 118400$

Argomenti

- Introduzione alla PL
- Modelli di pianificazione della produzione
- Modelli di miscelazione
- **Modelli di flusso su rete**
- Modelli multiperiodo

Modelli di flusso su rete

I modelli di flusso su rete rappresentano una delle aree di studio della Ricerca Operativa di maggiore interesse pratico.

Diverse applicazioni possono essere ricondotte a modelli di ottimizzazione di flusso su rete come, ad esempio, i problemi di trasporto, di comunicazione, di gestione di reti idriche ed elettriche, di pianificazione della produzione e numerosi altri problemi a cui non necessariamente si associa fisicamente una rete.

Modelli di flusso su rete

- Problema di flusso a costo minimo
- Problema del cammino orientato di costo minimo
- Problema del massimo flusso
- Problema di trasporto
- Problema dell’assegnamento

Modelli di flusso su rete

- **Problema di flusso a costo minimo**
- Problema del cammino orientato di costo minimo
- Problema del massimo flusso
- Problema di trasporto
- Problema dell'assegnamento

Problema di flusso a costo minimo

Il «problema di flusso a costo minimo» è il modello più generale di flusso su rete.

Esso può essere modellizzato nel seguente modo. Dato un grafo orientato («digrafo») $D = (N, A)$, dove:

- N è l'insieme dei nodi;
- A è l'insieme degli archi.

Si indichi con $b_i, i \in N$, la fornitura/domanda del nodo i:

- $b_i < 0$, di domanda;
- $b_i > 0$, di fornitura;
- $b_i = 0$, il nodo è di transito.

Problema di flusso a costo minimo

Si indichi con c_{ij}, l_{ij}, u_{ij}, rispettivamente, il costo, e le capacità minima e massima dell'arco (i,j), per ogni $(i,j) \in A$.

Indicato con $n = |N|$ il numero dei nodi del digrafo e con $m = |A|$ il numero dei suoi archi, la struttura relazionale $R = (N, A, b, c, l, u)$, con $b \in R^n$, $c, l, u \in R^m$, si definisce «rete».

A ogni arco $(i,j) \in A$ si associa una variabile di decisione x_{ij} , che rappresenta il «flusso» sull'arco (i,j).

Problema di flusso a costo minimo

Di seguito il modello:

$$\min z(x) = \sum_{(i,j)\in A}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.v.$$

$$\sum_{j\in N:(i,j)\in A}^{n} x_{ij} - \sum_{j\in N:(j,i)\in A}^{n} x_{ji} = b_i, i \in N$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}, (i,j) \in A$$

Problema di flusso a costo minimo

I primi vincoli sono detti di «conservazione del flusso»: essi stabiliscono che, per ogni nodo $i \in N$ della rete, la differenza tra la quantità di flusso totale uscente dal nodo i (attraverso gli archi uscenti) e la quantità di flusso totale entrante in i (attraverso gli archi entranti) deve essere uguale alla fornitura/domanda b_i del nodo.

Si osservi che, sommando i primi membri di tutte le equazioni dei primi vincoli si ottiene 0, per cui condizione necessaria affinché il problema di flusso a costo minimo ammetta una soluzione ammissibile è che le forniture/domande dei nodi $i \in N$ siano tali che:

$$\sum b_i = 0$$

Problema di flusso a costo minimo

Le seconde relazioni esprimono i cosiddetti vincoli di «capacità» sugli archi della rete, cioè, che il flusso x_{ij} non può violare la capacità minima e massima di ogni arco $(i, j) \in A$.

La quantità $c_{ij}, (i, j) \in A$, nella funzione obiettivo rappresenta il costo per unità di flusso sull'arco (i, j) della rete.

Per il modello di flusso a costo minimo considerato, si assume che il costo del flusso su ogni arco sia indipendente dal flusso su tutti gli altri archi.

La funzione di costo è pertanto di tipo separabile.

Problema di flusso a costo minimo

Si osservi, infine, che se i valori di fornitura/domanda dei nodi e di capacità minima e massima degli archi della rete sono quantità intere e se il problema di flusso a costo minimo ammette soluzione ottima, allora ne esiste una a componenti intere.

Tale proprietà è tipica di tutti i problemi di flusso su rete.

Esercizio

Boscheim è un'azienda manifatturiera tedesca specializzata in prodotti elettronici di consumo. Il suo modello di lettore CD KLR-12 è stato specificatamente progettato per il mercato britannico. KLR-12 è assemblato in un impianto vicino a Rotterdam, quindi stoccato in due magazzini localizzati a Bristol e Middlesbrough e infine trasportato ai punti vendita. Il mercato britannico è suddiviso in quattro punti vendita, i cui centri di gravità sono posizionati a Londra, Birmingham, Leeds ed Edimburgo.

La domanda annuale ammonta rispettivamente a 90000, 80000, 50000 e 70000 prodotti.

Esercizio

I costi di trasporto per prodotto dall'impianto d'assemblaggio di Rotterdam ai magazzini di Bristol e Middlesbrough sono rispettivamente 24,5 € e 26,0 €, mentre i costi di trasporto per prodotto dai magazzini ai punti vendita sono riportati in Tabella 2.4.

	Punto vendita			
Magazzino	Londra	Birmingham	Leeds	Edimburgo
Bristol	9,6	7,0	15,2	28,5
Middlesbrough	19,5	13,3	5,0	11,3

Tabella 2.4 Costi di trasporto (in €) per prodotto dai magazzini ai punti vendita nel problema della Boscheim.

Esercizio

Entrambi i magazzini hanno una capacità stimata di 15000 prodotti e sono riforniti dieci volte l'anno. Di conseguenza, la loro capacità annuale è pari a 150000 prodotti.

Il problema dell'approvvigionamento annuo ottimale dei due magazzini e dei distretti di vendita può essere risolto determinando la soluzione ottima del problema di flusso a costo minimo sulla rete rappresentata nella Figura successiva (2.1).

Esercizio

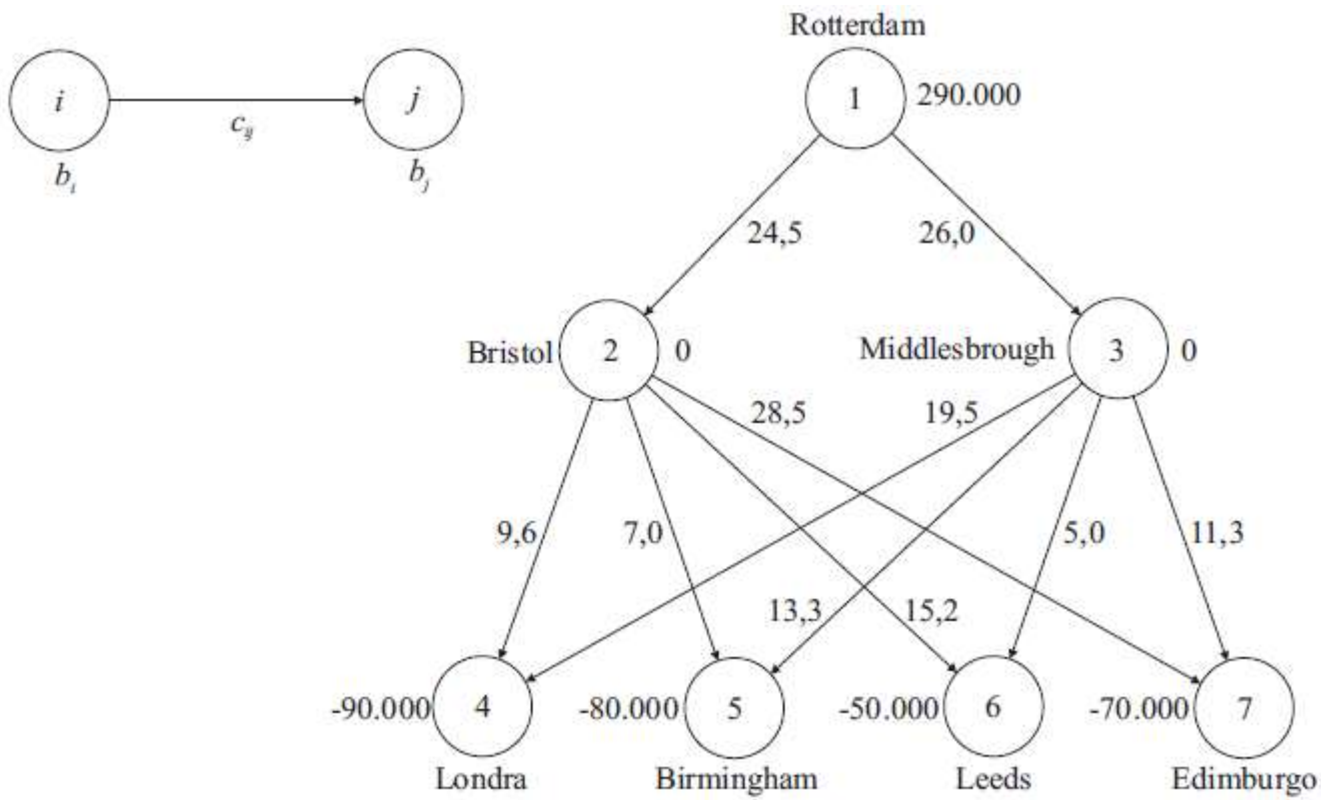

Figura 2.1 Rappresentazione su rete del problema della Boscheim.

Esercizio

$$\min 24{,}5x_{12} + 26{,}0x_{13} + 9{,}6x_{24} + 7{,}0x_{25} + 15{,}2x_{26} + 28{,}5x_{27} + 19{,}5x_{34} + 13{,}3x_{35} + 5{,}0x_{36} + 11{,}3x_{37}$$

$s.v.$

$$x_{12} + x_{13} = 290000$$
$$x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} - x_{12} = 0$$
$$x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} - x_{13} = 0$$
$$-x_{24} - x_{34} = -90000$$
$$-x_{25} - x_{35} = -80000$$
$$-x_{26} - x_{36} = -50000$$
$$-x_{27} - x_{37} = -70000$$
$$x_{12} \leq 150000$$
$$x_{13} \leq 150000$$

Modelli di flusso su rete

- Problema di flusso a costo minimo
- **Problema del cammino orientato di costo minimo**
- Problema del massimo flusso
- Problema di trasporto
- Problema dell'assegnamento

Problema del cammino orientato di costo minimo

Il «problema del cammino orientato di costo minimo» è uno dei problemi di ottimizzazione più noti che viene affrontato e risolto con maggiore frequenza. Dato un digrafo $D = (N, A)$, si supponga che a ogni arco $(i, j) \in A$ sia associato un costo c_{ij}.

La sequenza di nodi $i_0, \dots, i_r$, $r \geq 1$, è un «cammino orientato» dal nodo i_0 al nodo i_r, a condizione che:

1) $(ik, ik_{+1}) \in A, \;\; k = 0, \dots, r-1;$
2) $i_h \neq ik, h \neq k.$

Problema del cammino orientato di costo minimo

In altri termini, occorre garantire che 1) alla sequenza di nodi corrisponda una sequenza concatenata di archi e 2) che non esistano nodi ripetuti.
Nel caso in cui la condizione 2) non sia soddisfatta, occorre parlare più propriamente di «percorso orientato».
Il costo del cammino orientato è la somma dei costi associati agli archi che lo compongono.

Problema del cammino orientato di costo minimo

Il problema che si vuole affrontare riguarda la determinazione del cammino orientato di costo minimo da un nodo origine s assegnato a un dato nodo destinazione t.

Tale problema può essere formulato come problema di flusso su rete, come caso particolare di un problema di flusso a costo minimo su una rete $R = (N, A, b, c, l, u)$, con $l_{ij} = 0$ e $u_{ij} \geq 1$, $(i,j) \in A$, e ponendo $b_s = 1, b_t = -1$ e $b_i = 0, i \in N, i \neq s, t$.

Di conseguenza, il modello di flusso su rete è il seguente:

Problema del cammino orientato di costo minimo

$$\min z(x) = \sum_{(i,j)\in A}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$s.v.$

$$\sum_{j\in N:(s,j)\in A} x_{sj} - \sum_{j\in N:(j,s)\in A} x_{js} = 1$$

$$\sum_{j\in N:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j\in N:(j,i)\in A} x_{ji} = 0, i \in N, i \neq s, t$$

$$\sum_{j\in N:(t,j)\in A} x_{tj} - \sum_{j\in N:(j,t)\in A} x_{jt} = -1$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i,j) \in A$$

Problema del cammino orientato di costo minimo

Si può dimostrare che se il problema ammette soluzione ottima, ne esiste una con valori delle variabili di decisione pari a 0, oppure 1.

Pertanto, la sequenza di archi $\{(i,j) \in A : x_{ij}^* = 1\}$, cioè, gli archi lungo i quali si invia una unità di flusso, individuerà il cammino orientato di costo minimo da s a t.

Del problema del cammino orientato di costo minimo esistono alcune varianti di interesse pratico. Ad esempio, il problema potrebbe consistere nella determinazione dei cammini orientati di costo minimo da un nodo origine s a più destinazioni (eventualmente tutti i nodi rimanenti della rete).

Problema del cammino orientato di costo minimo

In questo caso il problema può essere formulato ponendo $b_s = n-1$, dove n indica il numero di nodi della rete $(n = |N|), b_i = -1, i \in N;\ i \neq s$. La ragione di tale formulazione è legata al fatto che il problema del cammino orientato di costo minimo dal nodo s agli altri $n-1$ nodi della rete può essere visto come composto da $n-1$ problemi di cammino orientato di costo minimo da uno stesso nodo origine s a un nodo destinazione $j \in N;\ j \neq s$.

In tal caso, le variabili di decisione possono assumere valore intero maggiore di zero e ognuna di esse indica quante volte il corrispondente arco fa parte di cammini orientati di costo minimo dal nodo origine a uno dei nodi destinazione.

Esercizio

La Endpower deve rifornire un proprio impianto di distribuzione di carburante che si trova localizzato nel nodo 8 della rete rappresentata in Figura 2.2, a partire dal deposito aziendale che si trova in corrispondenza del nodo 1.

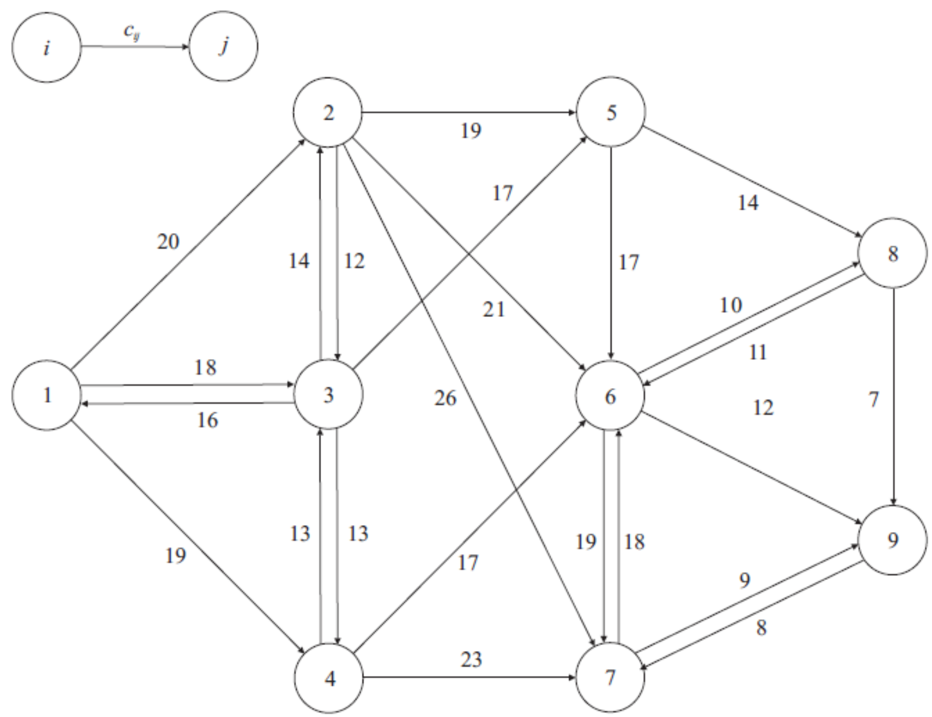

Figura 2.2 Rappresentazione su rete del problema della Endpower.

Esercizio

Il problema consiste nel determinare il cammino orientato di costo minimo dal nodo 1 al nodo 8 sulla rete in Figura 2.2. I costi indicati sugli archi sono rappresentativi di distanze chilometriche, assumendo che il costo di percorrenza sia proporzionale alla distanza complessivamente coperta per andare dal nodo 1 al nodo 8.

Funzione obiettivo:

$$\begin{aligned}\min z(x) = {} & 20x_{12} + 18x_{13} + 19x_{14} + 12x_{23} + 19x_{25} + 21x_{26} \\ & + 26x_{27} + 16x_{31} + 14x_{32} + 13x_{34} + 17x_{35} + 13x_{43} + 17x_{46} \\ & + 23x_{47} + 17x_{56} + 14x_{58} + 19x_{67} + 10x_{68} + 12x_{69} + 18x_{76} \\ & + 9x_{79} + 11x_{86} + 7x_{89} + 8x_{97}\end{aligned}$$

Esercizio

Vincoli:

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} - x_{31} = 1$$
$$x_{23} + x_{25} + x_{26} + x_{27} - x_{12} - x_{32} = 0$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} - x_{13} - x_{23} - x_{43} = 0$$
$$x_{43} + x_{46} + x_{47} - x_{14} - x_{34} = 0$$
$$x_{56} + x_{58} - x_{25} - x_{35} = 0$$
$$x_{67} + x_{68} + x_{69} - x_{26} - x_{46} - x_{56} - x_{76} - x_{86} = 0$$
$$x_{76} + x_{79} - x_{27} - x_{47} - x_{67} - x_{97} = 0$$
$$x_{86} + x_{89} - x_{58} - x_{68} = -1$$
$$x_{97} - x_{69} - x_{79} - x_{89} = 0$$
$$x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{25}, x_{26}, x_{27}, x_{31}, x_{32}, x_{34}, x_{35}, x_{43} \geq 0$$
$$x_{46}, x_{47}, x_{56}, x_{58}, x_{67}, x_{68}, x_{69}, x_{76}, x_{79}, x_{86}, x_{89}, x_{97} \geq 0$$

Esercizio

Con riferimento al problema della Endpower, si consideri il caso in cui altri due impianti di distribuzione di carburante debbano essere riforniti. Tali impianti si ipotizza siano localizzati nei nodi 7 e 9. Di conseguenza, il problema della ricerca dei cammini orientati di costo minimo può essere così formulato:

$$\begin{aligned}\min z(x) = {} & 20x_{12} + 18x_{13} + 19x_{14} + 12x_{23} + 19x_{25} + 21x_{26} \\ & + 26x_{27} + 16x_{31} + 14x_{32} + 13x_{34} + 17x_{35} + 13x_{43} \\ & + 17x_{46} + 23x_{47} + 17x_{56} + 14x_{58} + 19x_{67} + 10x_{68} \\ & + 12x_{69} + 18x_{76} + 9x_{79} + 11x_{86} + 7x_{89} + 8x_{97}\end{aligned}$$

Esercizio

$s.v.$

$$
\begin{aligned}
&x_{12} + x_{13} + x_{14} - x_{31} = 3\\
&x_{23} + x_{25} + x_{26} + x_{27} - x_{12} - x_{32} = 0\\
&x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} - x_{13} - x_{23} - x_{43} = 0\\
&x_{43} + x_{46} + x_{47} - x_{14} - x_{34} = 0\\
&x_{56} + x_{58} - x_{25} - x_{35} = 0\\
&x_{67} + x_{68} + x_{69} - x_{26} - x_{46} - x_{56} - x_{76} - x_{86} = 0\\
&x_{76} + x_{79} - x_{27} - x_{47} - x_{67} - x_{97} = -1\\
&x_{86} + x_{89} - x_{58} - x_{68} = -1\\
&x_{97} - x_{69} - x_{79} - x_{89} = -1\\
&x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{25}, x_{26}, x_{27}, x_{31}, x_{32}, x_{34}, x_{35}, x_{43} \geq 0\\
&x_{46}, x_{47}, x_{56}, x_{58}, x_{67}, x_{68}, x_{69}, x_{76}, x_{79}, x_{86}, x_{89}, x_{97} \geq 0
\end{aligned}
$$

Esercizio

La soluzione ottima, determinata utilizzando il risolutore di Excel (si riportano, per semplicità, soltanto i valori diversi da zero), è

$$x_{14}^* = 3; x_{46}^* = 2 \; ; x_{68}^* = 1 \; ; x_{69}^* = 1 \; ;$$

con valore ottimo pari a $z^* = 136.$

Ciò significa che l'arco $(1{,}4)$ fa parte di tutti e tre i cammini orientati di costo minimo cercati, l'arco $(4{,}6)$ di due cammini minimi e così via.

Di conseguenza, il cammino orientato di costo minimo dal nodo 1 al nodo 7 è composto dalla sequenza di nodi 1,4,7, mentre il cammino orientato di costo minimo dal nodo 1 al nodo 9 è dato da

Modelli di flusso su rete

- Problema di flusso a costo minimo
- Problema del cammino orientato di costo minimo
- **Problema del massimo flusso**
- Problema di trasporto
- Problema dell'assegnamento

Problema del massimo flusso

Il «problema del massimo flusso» è un altro problema di flusso su rete di notevole interesse pratico.

Sia data una rete $R = (N, A, b, c, l, u)$, per la quale si assume $che\, c_{ij} = l_{ij} = 0, (i, j) \in A$, e nella quale si individuano due nodi particolari, s e t, detti rispettivamente «sorgente» e «pozzo»; inoltre, si assume $b_i = 0, i \in N \setminus \{s, t\}$.

Problema del massimo flusso

L'obiettivo che ci si pone è quello di inviare la massima quantità di flusso possibile dal nodo sorgente s al nodo pozzo t, rispettando i vincoli di conservazione del flusso in tutti i nodi (di transito) diversi da s e t e i vincoli di capacità sugli archi della rete.

Si indica con v la componente del vettore di fornitura/domanda relativa al nodo s (che, in questo caso, non è un parametro del problema, ma una variabile dipendente dalle variabili di flusso $x_{ij}, (i,j) \in A$, rappresentante il flusso netto uscente da s).

Problema del massimo flusso

$$\max z(x) = v$$

$$s.v.$$

$$\sum_{j \in N:(s,j) \in A} x_{sj} - \sum_{j \in N:(j,s) \in A} x_{js} = v$$

$$\sum_{j \in N:(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j \in N:(j,i) \in A} x_{ji} = 0, i \in N, i \neq s, t$$

$$\sum_{j \in N:(t,j) \in A} x_{tj} - \sum_{j \in N:(j,t) \in A} x_{jt} = -v$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, (i,j) \in A$$

Esercizio

Iralur Oil è una compagnia petrolifera irachena che deve trasferire la massima quantità di greggio estratto ogni ora attraverso una rete di condotte (vedi Figura 2.3), dal nodo sorgente s al nodo pozzo t.

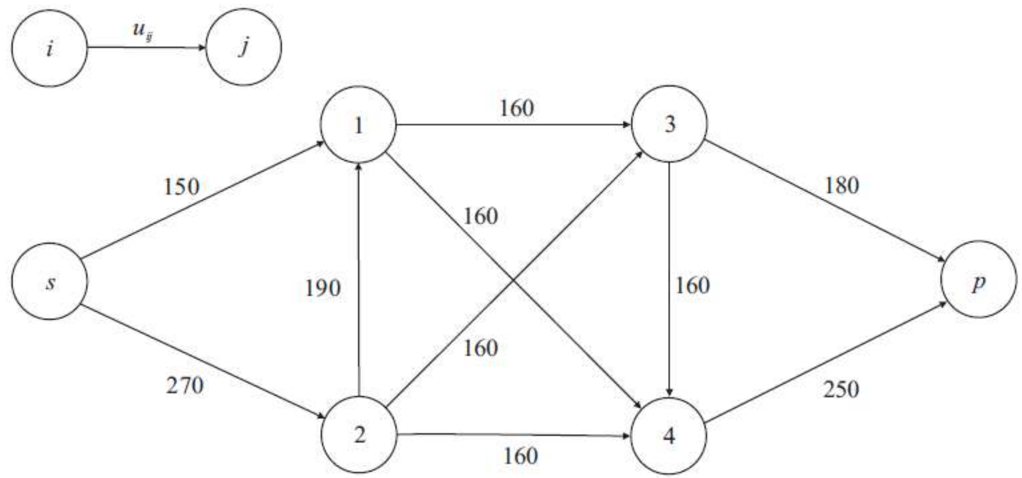

Figura 2.3 Rappresentazione su rete del problema della Iralur Oil.

Su ogni arco della rete è indicata la portata del collegamento, espressa in quintali di greggio all'ora.

Esercizio

Il problema del massimo flusso può dunque essere formulato come segue:

$$\max z(x) = v$$

$$s.v.$$

$$x_{s1} + xs_2 = v$$

$$x_{13} + x_{14} - x_{s1} - x_{21} = 0$$

$$x_{21} + x_{23} + x_{24} - x_{s2} = 0$$

$$x_{34} + x_{3p} - x_{13} - x_{23} = 0$$

$$x_{4p} - x_{14} - x_{24} - x_{34} = 0$$

$$x_{3t} - x_{4t} = -v$$

(continua)

Esercizio

- $$\begin{aligned}0 &\le x_{s1} \le 150\\ 0 &\le x_{s2} \le 270\\ 0 &\le x_{13} \le 160\\ 0 &\le x_{14} \le 160\\ 0 &\le x_{21} \le 190\\ 0 &\le x_{23} \le 160\\ 0 &\le x_{24} \le 160\\ 0 &\le x_{34} \le 160\\ 0 &\le x_{3t} \le 180\\ 0 &\le x_{4t} \le 250\end{aligned}$$

La soluzione ottima, determinata utilizzando il risolutore di Excel, è la seguente:

$x_{s1}^* = 150$; $x_{s2}^* = 270$; $x_{13}^* = 160$; $x_{14}^* = 160$; $x_{21}^* = 170$; $x_{23}^* = 20$; $x_{24}^* = 80$; $x_{34}^* = 0$; $x_{3t}^* = 180$; $x_{4t}^* = 240$

con massimo flusso $v^* = 420$.

Modelli di flusso su rete

- Problema di flusso a costo minimo
- Problema del cammino orientato di costo minimo
- Problema del massimo flusso
- **Problema di trasporto**
- Problema dell'assegnamento

Problema di trasporto

Il «problema di trasporto» è un classico problema di flusso su rete particolarmente utilizzato nell'ambito della logistica distributiva.

Siano date n_1 origini (ad esempio, stabilimenti di produzione) presso le quali è disponibile un certo prodotto in quantità pari a a_i, $i = 1, \dots, n_1$, e n_2 destinazioni (ad esempio, punti vendita), ciascuna delle quali caratterizzata da un valore di domanda $b_j, j = 1, \dots, n_2$, di prodotto (vedi figura successiva, 2.4)

Problema di trasporto

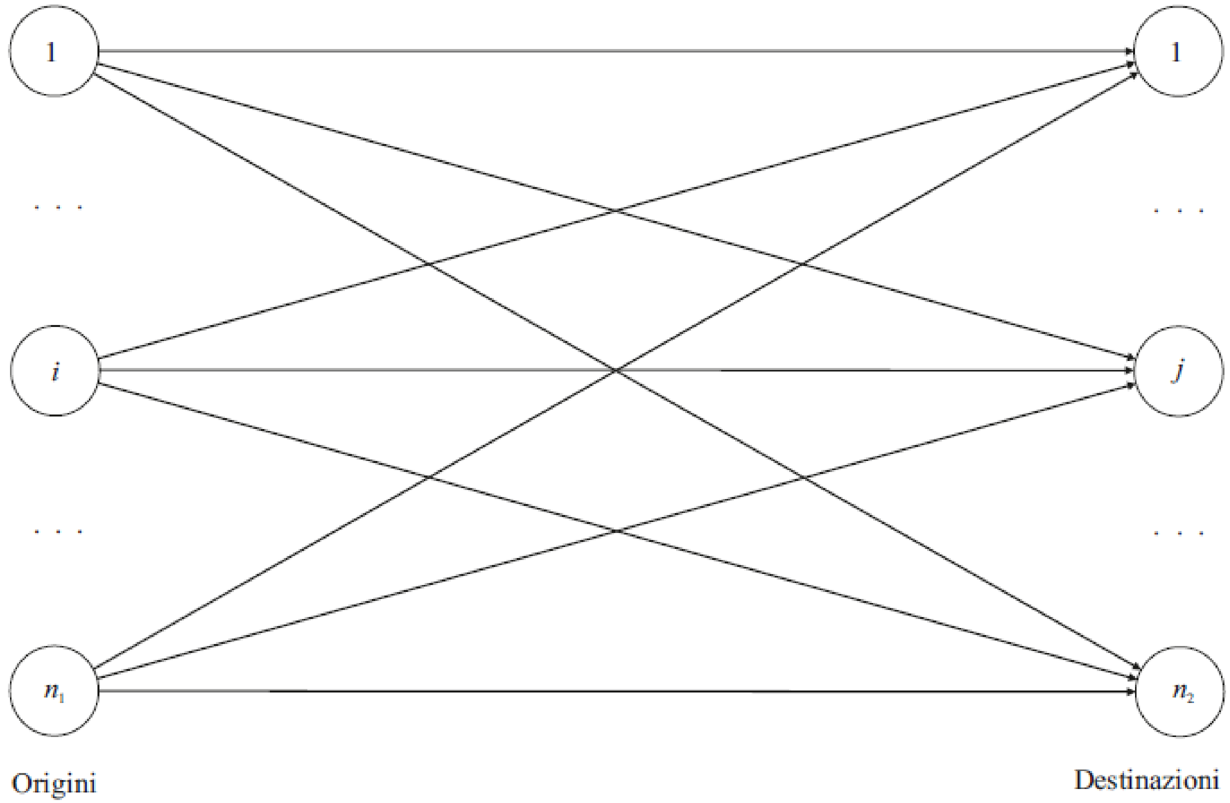

Figura 2.4 Rappresentazione su rete di un problema di trasporto.

sia, inoltre, $c_{ij}, i = 1, \dots, n_1, j = 1, \dots, n_2$, il costo unitario di trasporto del prodotto dall'origine i alla destinazione j.

Problema di trasporto

Il problema di trasporto consiste nel determinare il quantitativo di prodotto da inviare da ciascuna origine verso ciascuna destinazione in modo tale da minimizzare il costo complessivo di trasporto, rispettando i vincoli sulla quantità di prodotto disponibile presso ciascuna origine e garantendo il soddisfacimento delle domande da parte di ogni destinazione.

Le variabili di decisione si possono indicare con $x_{ij}, i = 1, \dots, n_1$, $j = 1, \dots, n_2$, ciascuna delle quali rappresentante la quantità di prodotto che occorre inviare dall'origine i alla destinazione j.

Supponendo che sia possibile rifornire ogni destinazione da ogni origine, il problema di trasporto si può formulare nel modo seguente:

Problema di trasporto

$$\min z(x) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} c_{ij} x_{ij}$$

$s.v$

$$\sum_{j=1}^{n_2} x_{ij} \leq a_i, i = 1, \dots, n_1$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} x_{ij} \leq b_j, j = 1, \dots, n_2$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, n_1, j = 1, \dots, n_2$$

Problema di trasporto

Affinché tale problema ammetta soluzione, è necessario imporre che la quantità di prodotto complessivamente disponibile presso le varie origini sia sufficiente a soddisfare la domanda complessiva delle destinazioni

$$\sum_{i=1}^{n_1} a_i \geq \sum_{j=1}^{n_2} b_j$$

Per ottenere tale risultato basta sommare tra loro i primi due vincoli del problema prima formulato.

Esercizio

Ges Group è un rivenditore umbro specializzato nella distribuzione di carni avicole. L'azienda è titolare di due magazzini refrigerati per lo stoccaggio di tale prodotto a Gubbio e Spoleto e di quattro punti vendita all'ingrosso localizzati, oltre che presso i magazzini stessi, a Perugia e Terni.

Le distanze chilometriche tra i magazzini refrigerati e i punti vendita sono riportate in nella Tabella successiva (2.5).

La quantità media giornaliera di prodotto disponibile presso i magazzini di Gubbio e Spoleto risulta pari, rispettivamente, a 1350 kg e 1700 kg.

Esercizio

	Punto vendita			
Magazzino	Gubbio	Spoleto	Perugia	Terni
Gubbio	0	88	41	120
Spoleto	88	0	63	30

Tabella 2.5 Distanze chilometriche tra i magazzini refrigerati e i punti vendita all'ingrosso nel problema della Ges Group.

punti vendita all'ingrosso di Gubbio, Spoleto, Perugia e Terni risulta pari a 450, 820, 500, 600, rispettivamente. L'eventuale eccedenza di prodotto presso i due magazzini viene utilizzata per soddisfare la domanda di altri mercati.

Esercizio

Si assume che il trasporto sia realizzato tramite collegamenti diretti e con furgoni refrigerati di proprietà, a un costo chilometrico pari a 0,06 € per ogni kg di prodotto trasportato.

Il problema di trasporto può essere formulato utilizzando le variabili di decisione $x_{ij}, i = 1,2, j = 1, \ldots, 4$, ciascuna delle quali rappresentante la quantità media di prodotto trasportata giornalmente dal magazzino refrigerato i al punto vendita all'ingrosso j.

Il modello corrispondente è il seguente:

Esercizio

- $$\min z(x) = 5{,}28x_{12} + 2{,}46x_{13} + 7{,}20x_{14} + 5{,}28x_{21} + 3{,}78x_{23} + 1{,}80x_{24}$$

$s.v.$

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 1350$
$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 1700$
$x_{11} + x_{21} = 450$
$x_{12} + x_{22} = 820$
$x_{13} + x_{23} = 500$
$x_{14} + x_{24} = 600$
$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24} \geq 0$

Esercizio

La soluzione ottima del problema, determinata utilizzando il risolutore di Excel, è

$$x_{11}^* = 450; x_{12}^* = 0; x_{13}^* = 500; x_{14}^* = 0; x_{21}^* = 0;$$
$$x_{22}^* = 820\ ; x_{23}^* = 20\ ;\ x_{24}^* = 600;$$

a cui corrisponde un valore ottimo pari a $z^* = 2310$.

Si osservi che esiste una capacità residua per i due magazzini refrigerati pari a 400 kg e 280 kg, rispettivamente, dal momento che la domanda complessiva media giornaliera è pari a 2370 kg, mentre la disponibilità di prodotto è di 3050 kg.

Problema di trasporto

Spesso il problema del trasporto è formulato con soli vincoli di uguaglianza, assumendo quindi che la disponibilità complessiva delle sorgenti sia esattamente pari alla domanda complessiva delle destinazioni.

Si noti che è sempre possibile ricondursi a questo caso, aggiungendo eventualmente nel modello la destinazione fittizia $n_2 + 1$, con domanda esattamente pari alla differenza tra la disponibilità complessiva delle sorgenti e la domanda complessiva delle destinazioni reali, e assumendo nullo il costo unitario di trasporto del prodotto dall'origine i alla destinazione fittizia $n_2 + 1$.

Problema di trasporto

Una variante del problema di trasporto è il cosiddetto problema di trasporto «a due stadi», per il quale si assume che la distribuzione del prodotto dai punti origine alle destinazioni finali possa avvenire anche utilizzando p punti intermedi di transito. Tali punti possono anche interscambiare quantitativi di prodotto tra di loro.

Supponendo che continui a valere la relazione

$$\sum_{i=1}^{n_1} a_i \geq \sum_{j=1}^{n_2} b_j$$

il problema di trasporto a due stadi può essere ricondotto a una formulazione a stadio singolo, assumendo che i punti di trasbordo siano contemporaneamente punti origine e punti di

Problema di trasporto

Pertanto, il numero delle origini diventa $n_1 + p$, mentre il numero delle destinazioni sarà $n_2 + p$.

La formulazione del problema di trasporto a due stadi è la seguente:

Problema di trasporto

$$\min z(x) = \sum_{i=1}^{n_1+p} \sum_{j=1}^{n_2+p} c_{ij} x_{ij}$$

$s.v$

$$\sum_{j=1}^{n_2+p} x_{ij} \leq a_i, i = 1, \dots, n_1$$

$$\sum_{j=1}^{n_2+p} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n_2} b_j , i = n_1 + 1, \dots, n_1 + p$$

$$\sum_{i=1}^{n_1+p} x_{ij} = b_j, j = 1, \dots, n_2$$

$$\sum_{i=1}^{n_1+p} x_{ij} = \sum_{k=1}^{n_2} b_k , j = n_2 + 1, \dots, n_2 + p$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, n_1 + p, j = 1, \dots, n_2 + p$$

Problema di trasporto

In tale formulazione, i secondi e quarti vincoli assicurano che ogni punto intermedio di transito abbia flusso entrante coincidente con il flusso uscente e che ogni punto non ponga ulteriori limitazioni sul quantitativo di flusso entrante o uscente. Per questo motivo, il secondo membro dei vincoli è pari a

$$\sum_{j=1}^{n_2} b_j$$

cioè, un estremo superiore sul massimo flusso transitabile per ogni nodo intermedio.

Problema di trasporto

Nella funzione obiettivo, i costi unitari $c_{ij}, i = n_1 + 1, \dots, n_1 + p$, $j = n_2 + 1, \dots, n_2 + p$, si riferiscono al trasporto della merce tra i punti di transito e, quando alla coppia (i, j) corrispondono gli stessi nodi intermedi, è evidente che tale costo è nullo (e il corrispondente valore di flusso non implica il trasferimento del prodotto).

Esercizio

Seawork è uno spedizioniere marittimo internazionale operante presso il porto di Gioia Tauro (RC) e Taranto e specializzato in operazioni di import/export di caffè.
Lo scorso 25 giugno, l'azienda ha ricevuto da parte di tre torrefazioni italiane, aventi sede a Bari, Napoli e Palermo, le seguenti richieste di caffè (in sacchi da tre quintali ciascuno): 1600, 1900, 1450, rispettivamente. Il caffè proviene da magazzini doganali che si trovano localizzati presso i porti africani di Port Said e Tripoli, in quantità pari a 3000 sacchi ciascuno. Per le operazioni di trasporto, si possono utilizzare anche i porti di transito di Gioia Tauro e Taranto. I costi unitari di trasporto sono riportati nelle Tabella successiva (2.6).

Esercizio

Porto di origine	Porto di destinazione				
	Bari	Napoli	Palermo	Gioia Tauro	Taranto
Port Said	18,00	20,50	17,00	15,00	13,50
Tripoli	15,75	15,00	10,20	11,00	14,00
Gioia Tauro	9,40	5,20	4,75	0,00	7,00
Taranto	2,15	7,45	6,20	7,00	0,00

Tabella 2.6 Costi unitari di trasporto (in €) tra ogni coppia origine-destinazione per il problema della Seawork.

- Il problema di trasporto a due stadi si può formulare assumendo le seguenti variabili di decisione: x_{ij}, $i = 1, \dots, 4$, $j = 1, \dots, 5$, ciascuna delle quali rappresentate la quantità di caffè (in sacchi) che viene trasferita dal nodo origine i alla destinazione j.

Esercizio

Si osserva che all'indice i pari a 1 corrisponde il porto di origine di Port Said, a 2 il porto di origine di Tripoli, a 3 il porto di transito di Gioia Tauro, a 4 il porto di transito di Taranto. Similmente, all'indice $j = 1,2,3$, sono associati, rispettivamente, i porti di destinazione di Bari, Napoli e Palermo, mentre $j = 4,5$, identificano i porti di transito di Gioia Tauro e Taranto.

Funzione obiettivo:

$$\begin{aligned}\min z(x) = {} & 18,00x_{11} + 20,50x_{12} + 17,00x_{13} + 15,00x_{14} \\ & + 13,50x_{15} + 15,75x_{21} + 15x_{22} + 10,20x_{23} \\ & + 11,00x_{24} + 14,00x_{25} + 9,40x_{31} + 5,20x_{32} \\ & + 4,75x_{33} + 7,00x_{35} + 2,15x_{41} + 7,45x_{42} \\ & + 6,20x + 7,00x\end{aligned}$$

Esercizio

Vincoli:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 3000$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 3000$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 4950$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 4950$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1600$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1900$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1450$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 4950$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 4950$$
$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35},$$
$$x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44}, x_{45} \geq 0$$

Esercizio

La soluzione ottima del problema, determinata utilizzando il risolutore di Excel (si riportano, per semplicità, soltanto i corrispondenti valori maggiori di zero), è

$$x_{14}^{*} = 350;\ x_{15}^{*} = 1600;\ x_{22}^{*} = 1550;\ x_{23}^{*} = 1450;\ x_{32}^{*} = 350;$$
$$x_{34}^{*} = 4600\ ;\ x_{41}^{*} = 1600\ ;\ \ x_{45}^{*} = 3350;$$

a cui corrisponde un valore ottimo pari a $z^{*} = 70150$.

La soluzione è riportata anche nella Figura successiva (2.5).

Si osservi che il valore $x_{34}^{*} = 4600$ corrisponde al collegamento tra Gioia Tauro e se stesso, cosa che corrisponde a nessun trasferimento di merce. Lo stesso discorso vale per $x_{45}^{*} = 3350$, associato al

Esercizio

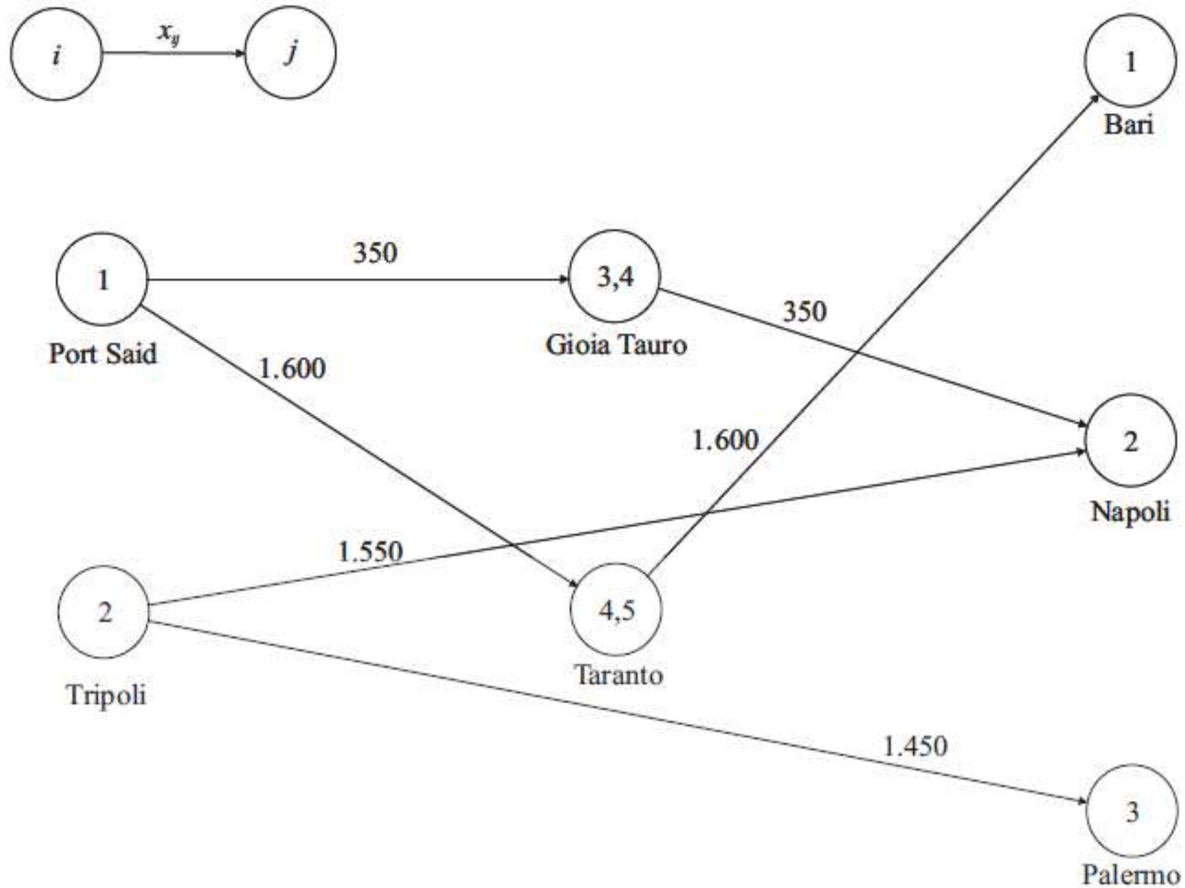

Figura 2.5 Rappresentazione su rete della soluzione del problema di trasporto a due stadi della Seawork. I nodi corrispondenti ai porti di transito sono indicati con doppio numero, il primo dei quali indicante il corrispondente nodo origine, il secondo il nodo destinazione.

Modelli di flusso su rete

- Problema di flusso a costo minimo
- Problema del cammino orientato di costo minimo
- Problema del massimo flusso
- Problema di trasporto
- **Problema dell'assegnamento**

Problema dell'assegnamento

Il «problema dell'assegnamento» è un problema molto diffuso nella Ricerca Operativa, poiché spesso molti problemi applicativi possono essere rappresentati come problemi di assegnamento con vincoli aggiuntivi.

In termini generali, il problema può essere descritto come segue.

Si supponga di avere n «oggetti» e altrettanti «posti» (gli oggetti potrebbero essere, ad esempio, lavoratori, mentre i posti potrebbero rappresentare mansioni da svolgere).

Si indichi con $c_{ij}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n$, il costo associato all'assegnamento dell'oggetto i al posto j.

Problema dell'assegnamento

$$\min z(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$s.v$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$$

Problema dell'assegnamento

Si osservi che, data la particolare struttura dei primi due vincoli, esiste una soluzione ottima del problema a componenti intere, per cui è possibile rimpiazzare gli ultimi vincoli con le seguenti relazioni:

$$0 \le x_{ij} \le 1; \; i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, n,$$

cioè, ancora più semplicemente, con

$$x_{ij} \ge 0; \; i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, n,$$

giacché ogni variabile di decisione non negativa non potrà mai assumere valori maggiori di uno, a causa della presenza contemporanea dei primi due vincoli. Di conseguenza, il problema dell'assegnamento può essere visto come caso particolare di problema di trasporto e, quindi, come problema di flusso su rete.

Esercizio

Aviojet è una società campana che gestisce i collegamenti navali con alcune isole.
L'azienda ha il problema di assegnare cinque equipaggi ad altrettanti servizi di linea da effettuare. A ogni assegnamento equipaggio-servizio è associato un costo, legato a diversi parametri, in particolare, la destinazione di ogni linea di servizio e l'anzianità di servizio di ciascun membro dell'equipaggio.
Tali costi sono riportati nella Tabella successiva (2.7).

Esercizio

	Servizio di linea				
Equipaggio	1	2	3	4	5
1	840	720	700	870	750
2	770	880	710	720	820
3	850	700	750	860	670
4	860	660	810	670	770
5	760	650	710	780	750

Tabella 2.7 Costi di assegnamento (in €) di ogni equipaggio a ogni servizio di linea per il problema della Aviojet.

- Il problema può essere formulato e risolto come problema dell'assegnamento, scegliendo le variabili di decisione come $x_{ij}, i = 1, \dots, 5, j = 1, \dots, 5$, ognuna delle quali avente valore pari a 1, se l'equipaggio i viene assegnato al servizio di linea j, 0, altrimenti.

Esercizio

Funzione obiettivo:

$$\begin{aligned}\min z(x) = \; & 840x_{11} + 720x_{12} + 700x_{13} + 870x_{14} + 750x_{15} \\ & + 770x_{21} + 880x_{22} + 710x_{23} + 720x_{24} + 820x_{25} \\ & + 850x_{31} + 700x_{32} + 750x_{33} + 860x_{34} + 760x_{35} \\ & + 860x_{41} + 660x_{42} + 810x_{43} + 670x_{44} + 770x_{45} \\ & + 760x_{51} + 650x_{52} + 710x_{53} + 780x_{54} + 750x_{55}\end{aligned}$$

Vincoli:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &= 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} &= 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} &= 1 \end{aligned}$$

Esercizio

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 1$$
$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35},$$
$$x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44}, x_{45}, x_{51}, x_{52}, x_{53}, x_{54}, x_{55} \geq 0$$

La soluzione ottima del problema, determinata utilizzando il risolutore di Excel (si riporta soltanto il valore delle variabili di decisione che, all'ottimo, assumono valore unitario), è

$$x_{13}^* = 1; x_{21}^* = 1; x_{35}^* = 1; x_{44}^* = 1; x_{52}^* = 1;$$

a cui corrisponde un valore ottimo pari a $z^* = 3460$.

Ciò significa che il primo equipaggio conviene che venga assegnato alla terza linea di servizio, il secondo

Problema dell'assegnamento

Varianti del problema dell'assegnamento si possono ottenere considerando un numero di oggetti diverso dal numero di posti e, in questo caso, i vincoli devono essere opportunamente trasformati in vincoli di disuguaglianza (del tipo «≤»). In questo caso, taluni preferiscono parlare di «problema dell'abbinamento», piuttosto che dell'assegnamento (abbinamento significa che si ammette la possibilità che non ci sia assegnamento). Si noti comunque che è sempre possibile ricondursi al problema dell'assegnamento classico aggiungendo al modello oggetti e/o posti fittizi, in modo che il numero degli oggetti coincida con quello dei posti e associando costi nulli all'assegnamento di oggetti fittizi ai posti e all'assegnamento degli oggetti a posti fittizi.

Argomenti

- Introduzione alla PL
- Modelli di pianificazione della produzione
- Modelli di miscelazione
- Modelli di flusso su rete
- **Modelli multiperiodo**

Modelli multiperiodo

I modelli di PL multiperiodo consentono di assumere decisioni riguardanti un orizzonte temporale più lungo, che si assume discreto e suddiviso in T periodi di tempo. Tali modelli possono riguardare differenti contesti.

Per semplicità si farà riferimento soltanto al caso della pianificazione della produzione multiperiodo di un unico prodotto.

Per formulare il modello, si indichi con $t, t = 1, \dots, T$, il generico periodo dell'orizzonte temporale di pianificazione. Per ogni $t, t = 1, \dots, T$, si assumono note la quantità d_t richiesta di prodotto e il costo unitario c_t di produzione.

Modelli multiperiodo

In ogni periodo di tempo è possibile immagazzinare le quantità di prodotto non vendute e che faranno parte della disponibilità di prodotto per i periodi successivi.

Il costo unitario di stoccaggio si suppone noto e pari a $h_t, t = 1, \dots, T$.

Il problema consiste nel determinare le quantità di prodotto da realizzare in ciascun periodo dell'orizzonte di pianificazione, in modo da soddisfare le richieste della clientela in ogni periodo di tempo, minimizzando il costo complessivo dato dalla somma dei costi di produzione e di stoccaggio.

Modelli multiperiodo

Le variabili di decisione sono rappresentate da x_t, $t = 1, \dots, T$, ciascuna delle quali indicante la quantità di prodotto da realizzare al periodo di tempo t.

Inoltre, si indichi con I_t, $t = 1, \dots, T$, la quantità di prodotto stoccata al periodo di tempo t. Tali variabili sono dipendenti dalle variabili x_t, $t = 1, \dots, T$, dal momento che, per ogni periodo di tempo t, $t = 1, \dots, T$, valgono le seguenti relazioni (vincoli di «bilanciamento»):

$$I_{t-1} + x_t = d_t + I_t$$

per le quali si assume noto il valore I_0, cioè, il livello iniziale di scorta di prodotto.

Modelli multiperiodo

In taluni casi si assume che debba essere nullo il livello delle scorte di prodotto al termine della pianificazione, cioè, $I_T = 0$. Oltre ai vincoli di bilanciamento, sono presenti le condizioni di non negatività sulle variabili di decisione, mentre la funzione obiettivo consiste nella minimizzazione della somma dei costi di produzione e di stoccaggio, cioè, in termini formali,

$$z(x, I_t) = \sum_{t=1}^{T} (c_t x_t + h_t I_t)$$

Di seguito il modello complessivo:

Modelli multiperiodo

- $$\min z(x, I_t) = \sum_{t=1}^{T} (c_t x_t + h_t I_t)$$

$s.v.$

$$I_{t-1} + x_t = d_t + I_t, t = 1, \ldots, T$$

$$x_t, I_t \geq 0, t = 1, \ldots, T$$

Modelli multiperiodo

In tale modello possono essere inseriti anche vincoli sulla capacità produttiva o sul livello di scorte per ogni periodo di tempo, cioè,

$$x_t \leq u_t$$
$$I_t \leq S_t$$

per qualche $t = 1, \dots, T$, dove u_t e S_t sono, rispettivamente, la capacità produttiva e il massimo livello di scorte ammesso al periodo di tempo t.

Esercizio

Setelam, azienda livornese specializzata nella lavorazione dei lamierati, riceve una commessa per la produzione di lamierati di zinco di una data dimensione. La quantità richiesta deve essere fornita periodicamente, improrogabilmente alla fine di ogni mese. Le richieste su un orizzonte temporale di tre mesi sono riportate nella Tabella 2.8.

	Periodo		
	1	2	3
Domanda	270	290	250
Capacità	250	220	280
Costo unitario di produzione [€]	12	14	16
Costo unitario di stoccaggio [€]	1,2	1,1	0,9

Tabella 2.8 Dati relativi al problema di produzione multiperiodo della Setelam.

Esercizio

Per la lavorazione dei lamierati si utilizza un unico impianto di produzione a ciclo continuo di capacità limitata. La seconda riga della Tabella 2.8 riporta il numero massimo di pezzi di lamiera che possono essere prodotti mensilmente.

Le ultime due righe riportano, invece, i costi unitari di produzione e quelli di stoccaggio.

Nel magazzino sono presenti inizialmente 100 lamiere di zinco della dimensione desiderata.

Esercizio

Per definire per ogni mese dell'orizzonte di pianificazione il piano di produzione che consenta di minimizzare i costi totali, si scelgono le seguenti variabili di decisione: $x_t, t = 1{,}2{,}3$, pari al numero di lamiere di zinco prodotte durante il mese t e $I_t, t = 1{,}2{,}3$, corrispondente al livello delle scorte alla fine del mese t.

I vincoli di bilanciamento sono i seguenti:

$x_1 + 100 - I_1 = 270;$

$x_2 + I_1 - I_2 = 290;$

$x_3 + I_2 - I_3 = 250.$

Esercizio

Oltre ai vincoli di non negatività sulle variabili di decisione,

$$x_1, x_2, x_3, I_1, I_2, I_3 \geq 0,$$

occorre considerare le restrizioni sulla capacità produttiva

$$x_1 \leq 250;\ x_2 \leq 220;\ x_3 \leq 280.$$

La funzione obiettivo $z(x, I)$, da minimizzare, è data dalla somma dei costi di produzione e di stoccaggio

$$z(x, I) = 12x_1 + 14x_2 + 16x_3 + 1{,}2I_1 + 1{,}1I_2 + 0{,}9I_3.$$

Esercizio

- La soluzione ottima del problema, determinata utilizzando il risolutore di Excel risulta essere:

$$x_1^* = 250;\ x_2^* = 220;\ x_3^* = 240;\ I_1^* = 80\ ;I_2^* = 10\ ;\ \ I_3^* = 0;$$

a cui corrisponde un valore ottimo pari a $z^* = 10027$.