Teoria della programmazione lineare

Corso di Ricerca Operativa
A.A. 2016-2017

Argomenti

- **Concetti preliminari**
- Condizioni geometriche di ottimalità e illimitatezza
- Condizioni algebriche di ottimalità

Concetti preliminari

- Un problema di PL si può scrivere come:

$$\min_{x \in P} z(x) = c^T x$$

dove $P \subseteq R^n$ è un poliedro, esprimibile algebricamente come un insieme di soluzioni di un sistema di equazioni e disequazioni lineari.

P corrisponde alla regione ammissibile del problema di PL.

Se esiste un punto $x^* \in P$ tale che, per ogni $x \in P$, si ha $c^T x^* \leq c^T x$, allora si dice che il problema «ammette soluzione ottima» $x^* \in P$, il cui valore ottimo è $z(x^*) = z^* = c^T x^*$.

Esercizio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = x_1 + 2x_2$$

$$s.v.$$

$$7x_1 + 9x_2 \leq 35$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

il cui poliedro, limitato, P è rappresentato nella Figura successiva (6.1).

Esercizio

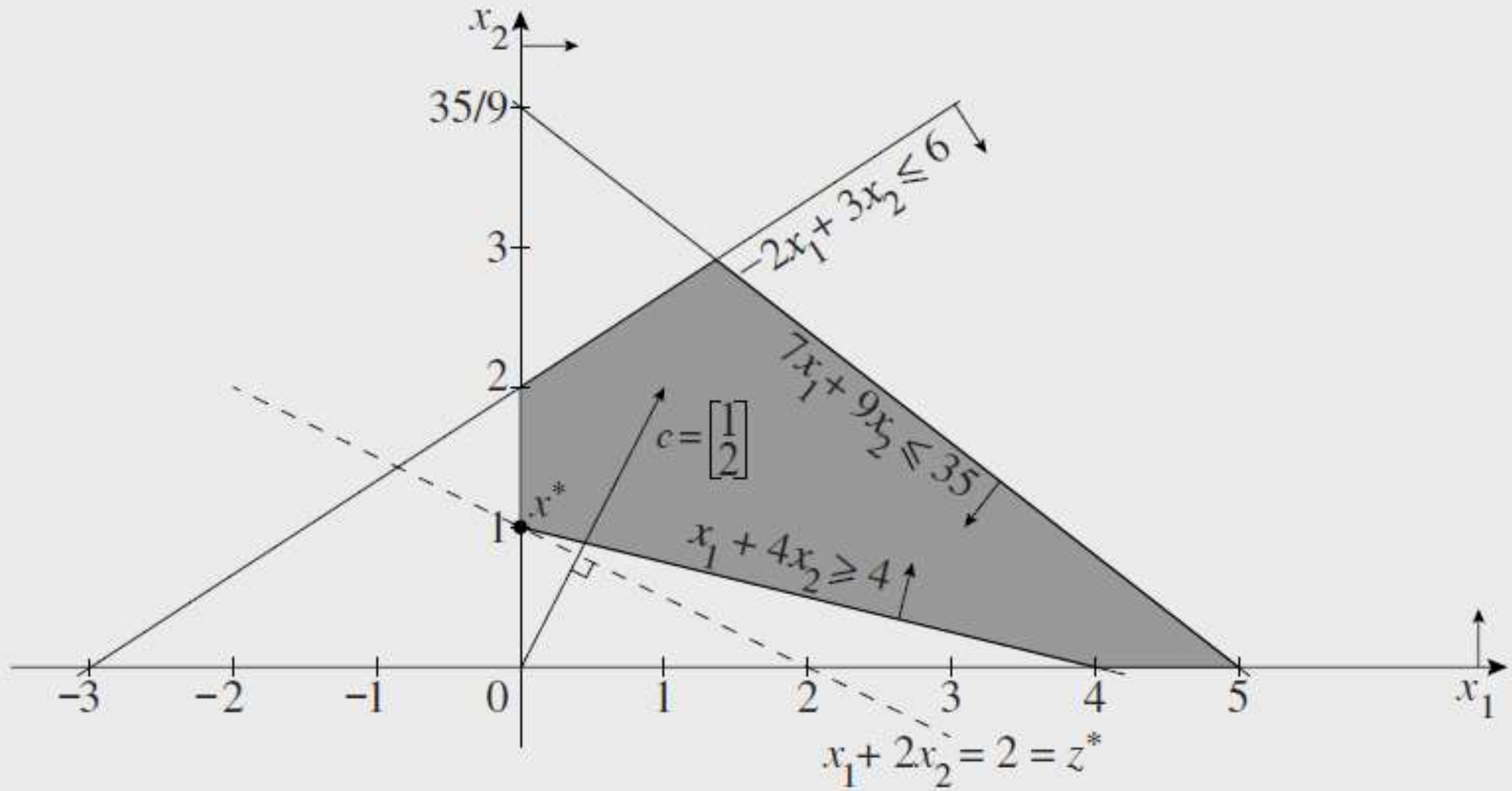

Figura 6.1. Caso di problema che ammette soluzione ottima.

Esercizio

La soluzione ottima del problema corrisponde al punto $x^* = [0\ 1]^T$, con valore $z^* = 2$.

Si osserva, infatti, che non esiste alcun'altra soluzione appartenente a P di valore inferiore.

La funzione obiettivo $z(x) = x_1 + 2x_2$ rappresenta, in R^2, il fascio di rette parallele che sono ortogonali al gradiente $c = [1\ 2]^T$ e risolvere il problema significa trovare la retta appartenente al fascio che abbia il più piccolo valore di $z(x)$ e che contenga almeno un punto di P.

Concetti preliminari

se $P = \emptyset$, allora il problema si dice «inammissibile».

Un problema inammissibile non ammette soluzione ottima e, per convenzione, si scrive che $z^* = +\infty$.

Esercizio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = {}^{3}/_{2}\, x_1 + x_2$$

$$s.v.$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 17x_2 &\leq 51 \\ -3x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\ 6x_1 - 10x_2 &\geq 15 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Il poliedro P a esso associato è vuoto (vedi Figura successiva, 6.2).

Il problema è dunque inammissibile.

Esercizio

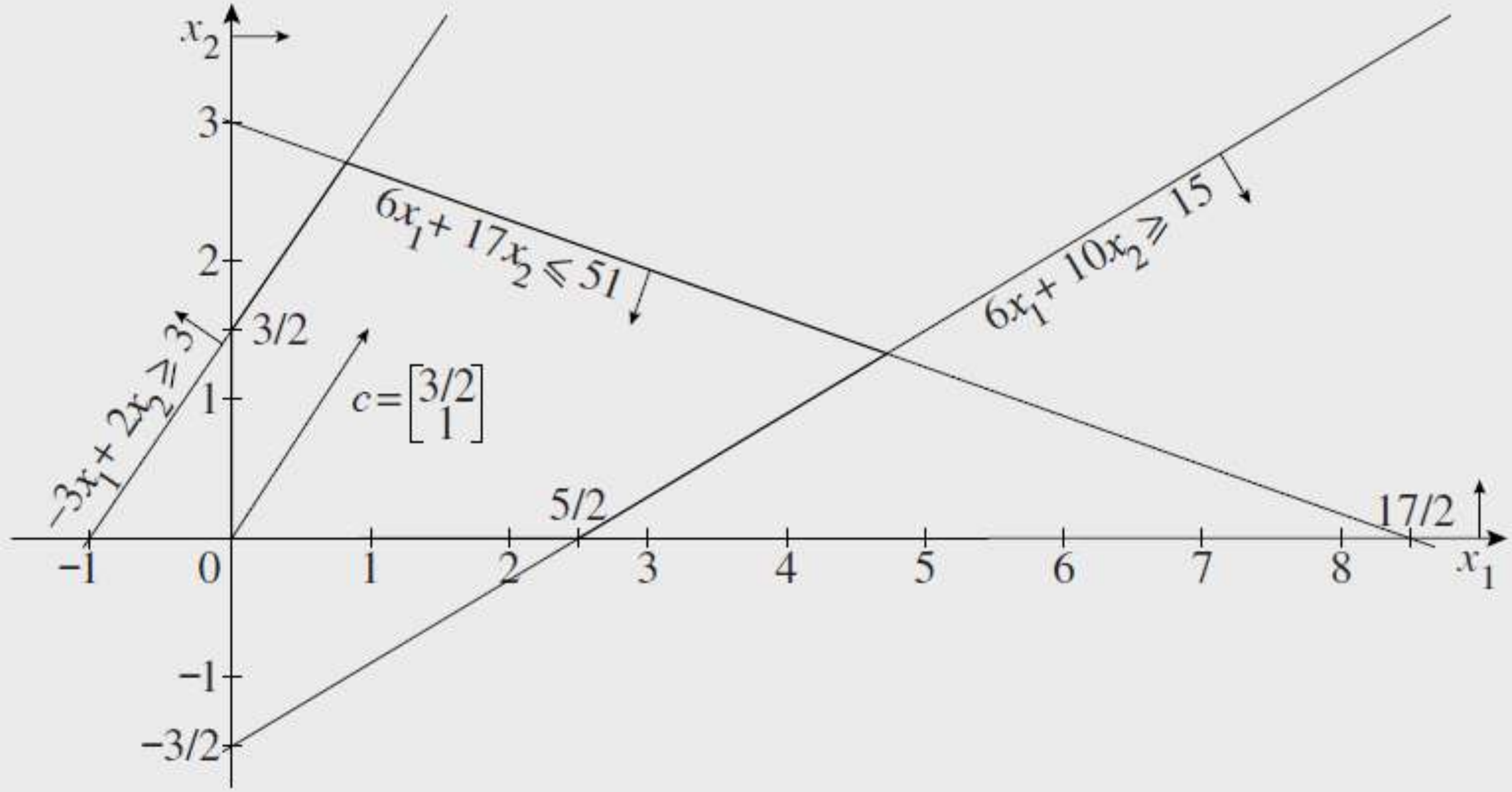

Figura 6.2. Caso di problema inammissibile.

Concetti preliminari

Se, per ogni punto $x \in P$, esiste un punto $\hat{x} \in P$ tale che $c^T\hat{x} < c^T x$, allora il problema si dice «illimitato inferiormente».

Anche i problemi illimitati inferiormente non ammettono soluzione ottima, e si scrive che $z^* = -\infty$.

Esercizio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = x_1 - 2x_2$$
$$s.v.$$
$$-6x_1 + 2x_2 \leq 9$$
$$x_1 - 4x_2 \leq 4$$
$$4x_1 + 46x_2 \geq 23$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Il poliedro P a esso associato è illimitato (vedi Figura successiva, 6.3). In questo caso, il problema è illimitato inferiormente giacché, per qualsiasi soluzione ammissibile, è sempre possibile trovarne un'altra di valore inferiore.

Esercizio

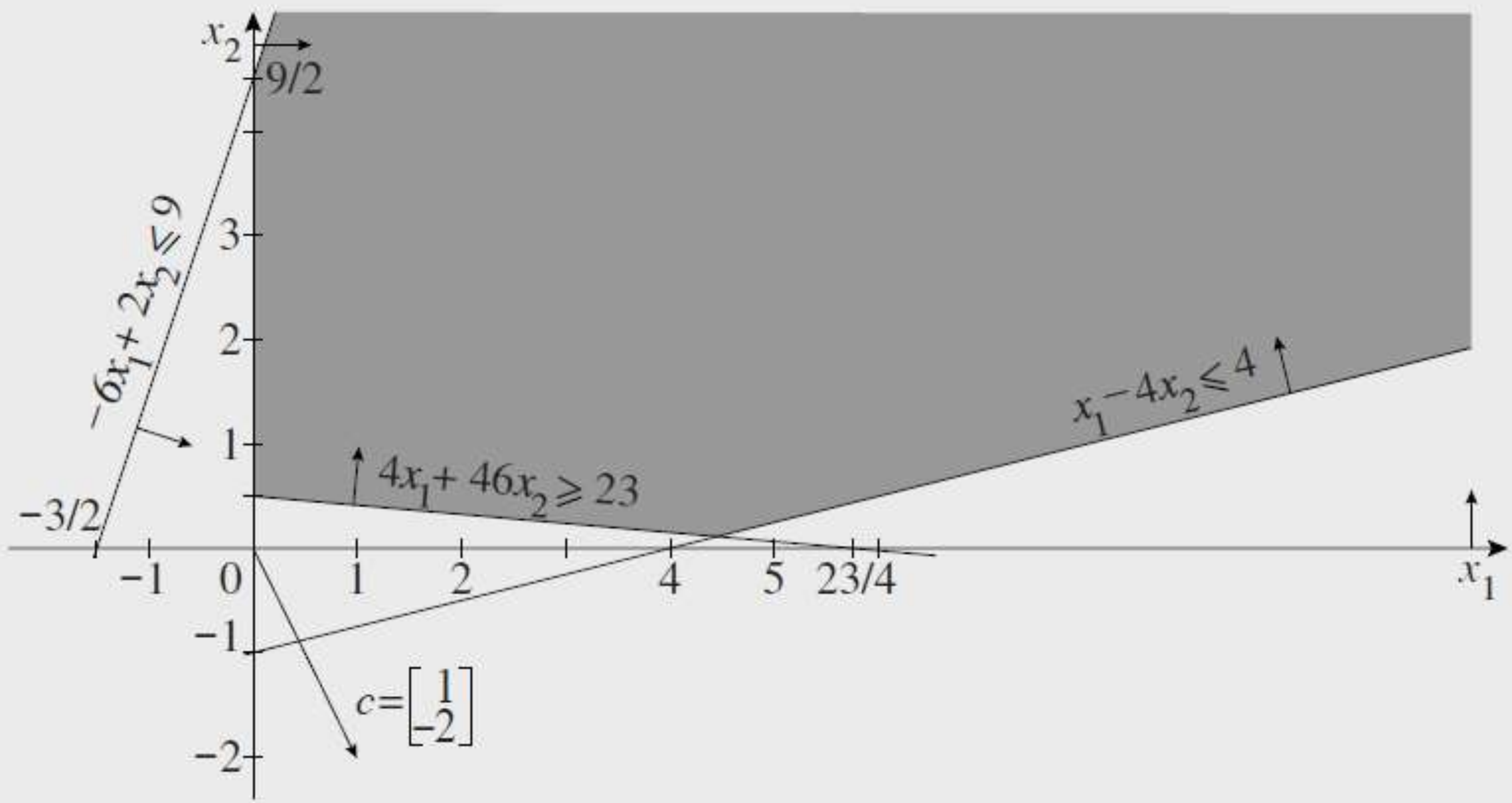

Figura 6.3. Caso di problema illimitato inferiormente.

Esercizio

Vale la pena osservare che se la funzione obiettivo fosse stata, ad esempio,

$$\min z(x) = 2x_1 + 3x_2$$

il problema avrebbe avuto soluzione ottima, in corrispondenza del punto $x^* = [0 \ \ ^1/_2]^T$, con valore $z^* = {}^3/_2$.

Ciò significa che, affinché un problema di PL sia illimitato inferiormente, è condizione necessaria che il poliedro P corrispondente sia illimitato, ma non sufficiente.

Concetti preliminari

Un problema di PL è in «forma standard» se:

1. la funzione obiettivo è di minimo;
2. il poliedro P è in forma standard.

Si possono utilizzare diverse notazioni per rappresentare un problema di PL in forma standard, tutte equivalenti e intercambiabili.

Concetti preliminari

- Forma estesa:

$$\min z(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$

$$s.v.$$

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, \ldots, x_n \geq 0$$

Concetti preliminari

- Forma estesa, notazione indiciale:

$$\min z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.v.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \,, i = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} \geq 0, j = 1, \dots, n$$

Concetti preliminari

Forma compatta:

$$\min z(x) = c^T x$$

$$s.v.$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Rappresentazione corsiva:

$$min\{c^T x : \mathrm{A}x = b, x \geq 0\}$$

Concetti preliminari

Rappresentazione intermedia per righe:

$$\min z(x) = c^T x$$

$$s.v.$$

$$a_1^T x = b_1$$

$$\ldots$$

$$a_m^T x = b_m$$

$$x \geq 0$$

Concetti preliminari

- Rappresentazione intermedia per colonne:

$$\min z(x) = c^T x$$

$$s.v.$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j = b$$

$$x \geq 0$$

Argomenti

- Concetti preliminari
- **Condizioni geometriche di ottimalità e illimitatezza**
- Condizioni algebriche di ottimalità

Condizioni geometriche di ottimalità e illimitatezza

Lemma 6.1 Dato un problema di PL $\min\{c^T x : x \in P\}$, con P poliedro non vuoto, se esiste una direzione d di P tale che $c^T d < 0$, il problema è illimitato inferiormente.

Dimostrazione. Per un qualsiasi punto $x \in P$, se d è una direzione di P, allora anche il punto $\hat{x} = x + \alpha d$ appartiene a P, per ogni valore dello scalare $\alpha \geq 0$.

D'altra parte, $c^T \hat{x} = c^T x + \alpha c^T d < c^T x$, per ogni $x \in P$.

Di conseguenza, il problema è illimitato inferiormente.

Esercizio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = x_1 - 2x_2$$

$$s.v.$$

$$-6x_1 + 2x_2 + x_3 = 9$$
$$x_1 - 4x_2 + x_4 = 4$$
$$4x_1 + 46x_2 - x_5 = 23$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

corrispondente al problema di PL visto in precedenza portato in forma standard.

Esercizio

Una direzione del poliedro in forma standard P si ottiene risolvendo il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} -6x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 46x_2 - x_5 = 0 \end{cases}$$

per valori non negativi delle incognite e normalizzando la soluzione trovata. Ad esempio, il vettore di componenti $[1\ 1\ 4\ 3\ 50]^T$ è soluzione ammissibile del sistema omogeneo, con norma euclidea pari a $19\sqrt{7}$.

Esercizio

Di conseguenza, una direzione di P è il versore $d = \left[\frac{\sqrt{7}}{133}\,\frac{\sqrt{7}}{133}\,\frac{4\sqrt{7}}{133}\,\frac{3\sqrt{7}}{133}\,\frac{50\sqrt{7}}{133}\right]^T$.

Considerando che $c = [1\ -2\ 0\ 0\ 0]^T$, segue che $c^T d = -\frac{\sqrt{7}}{133} < 0$, da cui si ricava che il problema è illimitato inferiormente.

Condizioni geometriche di ottimalità e illimitatezza

Lemma 6.2 Dato un problema di PL $\min\{c^T x : x \in P\}$, con P poliedro non vuoto, se esiste una soluzione ottima del problema, per ogni direzione d di P si ha $c^T d \geq 0$.

Dimostrazione. Se esiste una soluzione ottima, il problema non può essere illimitato inferiormente, e quindi dal Lemma 6.1 discende che non possono esistere direzioni di P tali che $c^T d < 0$, da cui segue la tesi.

Condizioni geometriche di ottimalità e illimitatezza

Teorema 6.1 Dato un problema di PL $\min\{c^T x : x \in P\}$, con P poliedro contenente almeno un vertice, se esiste una soluzione ottima del problema, esiste un vertice di P ottimo.

Dimostrazione. Siano $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ i vertici di P e siano $t^{(1)}, \dots, t^{(k)}$ le sue direzioni estreme. Si indichi con x^* il vertice di valore minimo, cioè, tale che $c^T x^* = \min\{c^T x^{(j)}: j = 1, \dots, k\}$.

Per dimostrare la tesi è sufficiente mostrare che, dato un qualsiasi punto $x \in P$, si ha che $c^T x \geq c^T x^*$.

Condizioni geometriche di ottimalità e illimitatezza

- Dal Lemma 6.2, si ha che $c^T x^{(i)} \geq 0,\ i = 1, \dots, h$. Per il Teorema 5.4, devono esistere dei moltiplicatori non negativi $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tali che:

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j$$

e dei moltiplicatori non negativi $\mu_1, \dots, \mu_h$, in corrispondenza dei quali ogni punto $x \epsilon P$ si può scrivere come:

Condizioni geometriche di ottimalità e illimitatezza

- $$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^{(j)} + \sum_{i=1}^{h} \mu_i t^{(i)}$$

  in corrispondenza del quale si ottiene il seguente valore di funzione obiettivo:

  $$c^T x = c^T \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^{(j)} + \sum_{i=1}^{h} \mu_i t^{(i)} \right) =$$

Condizioni geometriche di ottimalità e illimitatezza

- $$= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \underbrace{(c^T x^{(j)})}_{\ge c^T x^*} + \sum_{i=1}^{h} \mu_i \underbrace{(c^T t^{(i)})}_{\ge 0} \ge$$

$$\ge \sum_{j=1}^{k} \lambda_j c^T x^* = c^T x^*$$

In altri termini, il valore del vertice x^* è minore o uguale al valore di qualsiasi altro punto $x \in P$, ovvero x^* è soluzione ottima del problema.

Condizioni geometriche di ottimalità e illimitatezza

Ricordando il Teorema 5.5, dal Teorema 6.1 si deduce immediatamente che se un problema di PL è espresso in forma standard, l'esistenza di una soluzione ottima implica l'esistenza di un vertice ottimo.
Inoltre, il Teorema 3.6 fornisce uno strumento operativo per identificare i vertici di un poliedro.

Si può quindi concludere introducendo il seguente corollario (6.1).

Condizioni geometriche di ottimalità e illimitatezza

Corollario 6.1 Un problema di PL in forma standard ammette soluzione ottima se e solo se ha almeno una SBA ottima.

Dimostrazione. Se il problema ammette soluzione ottima, il poliedro P delle soluzioni ammissibili è non vuoto. Il Teorema 5.5 assicura che un poliedro non vuoto in forma standard contiene almeno un vertice. Di conseguenza, il Teorema 6.1 garantisce l'esistenza di una soluzione ottima coincidente con un vertice di P a cui corrisponde, per il Teorema 5.6, una SBA.

Argomenti

- Concetti preliminari
- Condizioni geometriche di ottimalità e illimitatezza
- **Condizioni algebriche di ottimalità**

Condizioni algebriche di ottimalità

Il Corollario 6.1 consente di limitare la ricerca delle soluzioni ottime di un problema di PL in forma standard

$$\min\{c^T x: Ax = b, \qquad x \geq 0\}$$

alle sole SBA. Occorre tuttavia essere in grado di riconoscere una SBA ottima.

Allo scopo, si assuma nota una base ammissibile A_B di A. Il problema di PL in forma standard si può scrivere, in modo equivalente, come:

$$\min\{c_B^T x_B + c_N^T x_N: A_B x_B + A_N x_N = b, x_B, x_N \geq 0\}$$

Condizioni algebriche di ottimalità

- Ovvero, ricavando x_B dai vincoli e sostituendo nella funzione obiettivo:

$$\min\{c_B^T(A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N) + c_N^T x_N\colon x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N,\ x_B, x_N \geq 0\}$$

Per semplificare la notazione, si definiscono le quantità:

- $\bar{b} = A_B^{-1}b$;
- $\bar{A}_N = A_B^{-1}A_N$;
- $\bar{c}^T = c^T - c_B^T A_B^{-1}A$;
- $\bar{z} = c_B^T A_B^{-1}b$.

Condizioni algebriche di ottimalità

La definizione di $\bar{A}_N$ si estende alla singola colonna $j, j \in N$, per cui $\bar{A}_j = A_B^{-1} A_j$; analogamente, la definizione di $\bar{c}$ si estende alla singola componente j, $j = 1, .., n$, per cui $c_j - c_B^T A_B^{-1} A_j$.

La quantità $\bar{c}_j$, $j = 1, \dots, n$, prende il nome di «costo ridotto» della variabile x_j rispetto alla base A_B.

Condizioni algebriche di ottimalità

- In particolare, il vettore $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$ è il vettore dei costi ridotti in corrispondenza delle variabili fuori base, mentre per le variabili in base si ha:

$$\bar{c}_B^T = c_B^T - c_B^T A_B^{-1} A_B = 0^T$$

ovvero i costi ridotti in corrispondenza delle variabili in base sono sempre nulli.

Condizioni algebriche di ottimalità

Con questa notazione si può riscrivere il problema di PL come:

$$\min z(x) = \bar{z} + \bar{c}_N^T x_N$$

$$s.v.$$

$$x_B = \bar{b} - \bar{A}_N x_N$$

$$x_B, x_N \geq 0$$

Tale problema di PL si dice in «forma canonica» rispetto alla base A_B.

È immediato ottenere la SBA associata alla base A_B, ponendo $\bar{x}_B = \bar{b}$(che, essendo per ipotesi A_B base ammissibile, risulterà non negativo) e $\bar{x}_N = 0$. Il valore di tale SBA è pari al termine costante $\bar{z}$ presente nella funzione obiettivo.

Esercizio

Sia dato il seguente problema di PL in forma standard:

$$\min z(x) = x_1 + 2x_2$$

$$s.v.$$

$$\begin{aligned} 7x_1 + 9x_2 + x_3 &= 35 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 &= 6 \\ x_1 + 4x_2 - x_5 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Indicando con $B = \{2,3,4\}$ l'insieme di indici di base, a cui corrisponde la base ammissibile A_B:

Esercizio

- $$A_B = [A_2, A_3, A_4] = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e $N = \{1,5\}$, si ricava

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & {}^{1}/_{4} \\ 1 & 0 & -{}^{9}/_{4} \\ 0 & 1 & -{}^{3}/_{4} \end{bmatrix}$$

da cui:

Esercizio

- $$b = A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & -9/4 \\ 0 & 1 & -3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 26 \\ 3 \end{bmatrix};$$

$$\bar{A}_N = A_B^{-1} A_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & -9/4 \\ 0 & 1 & -3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ 19/4 & 9/4 \\ -11/4 & 3/4 \end{bmatrix};$$

Esercizio

- $\bar{c}^T = c^T - c_B^T A_B^{-1} A = [1\ 2\ 0\ 0\ 0] - [2\ 0\ 0]$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & -9/4 \\ 0 & 1 & -3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Esercizio

$$\bar{z} = c_B^T A_B^{-1} b = [2 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & -9/4 \\ 0 & 0 & -3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = 2$$

Di conseguenza, il problema equivalente espresso in forma canonica rispetto alla base A_B risulta:

Esercizio

$$\min z(x) = {}^{1}/_{2}\, x_1 + {}^{1}/_{2}\, x_5 + 2$$

$$s.v.$$

$$
\begin{aligned}
&{}^{1}/_{4}\, x_1 + x_2 - {}^{1}/_{4}\, x_5 = 1 \\
&{}^{19}/_{4}\, x_1 + x_3 + {}^{9}/_{4}\, x_5 = 26 \\
&{}^{-11}/_{4}\, x_1 + x_4 + {}^{3}/_{4}\, x_5 = 3 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

a cui corrisponde la SBA $\bar{x} = [0\ 1\ 26\ 3\ 0]^T$, avente valore $\bar{z} = 2$.

Condizioni algebriche di ottimalità

- Dato un problema di PL in forma canonica rispetto alla base A_B, per verificare se la corrispondente SBA è eventualmente ottima, si può utilizzare il seguente teorema.

Teorema 6.2 (Criterio di ottimalità) Sia A_B una base ammissibile del problema di PL in forma canonica rispetto ad A_B

$$\min\{\bar{z} + \bar{c}_N^T x_N \colon\ x_B = \bar{b} - \bar{A}_N x_N,\ x_B, x_N \geq 0\}$$

Condizioni algebriche di ottimalità

- Se $c_N \geq 0$, allora la SBA $\bar{x}_B = \bar{b}, \bar{x}_N = 0$ è ottima. Inoltre, se la SBA $\bar{x}_B = \bar{b},\ \bar{x}_N = 0$ è ottima e non degenere, allora $c_N \geq 0$.

Dimostrazione Per dimostrare la condizione sufficiente di ottimalità, si osserva che il valore della SBA $\bar{x}_B = \bar{b},\ \bar{x}_N = 0$ è $\bar{z}$. Se $c_N \geq 0$, il valore di una qualsiasi altra soluzione ammissibile $\hat{x}$ sarebbe $c^T\hat{x} = \bar{z} + \bar{c}_N^T\hat{x}_N \geq \bar{z}$, in quanto $\hat{x}_N \geq 0$.

Condizioni algebriche di ottimalità

- La condizione necessaria si può dimostrare per assurdo.

Si supponga che la SBA $\bar{x}_B = \bar{b}$, $\bar{x}_N = 0$ sia ottima e non degenere e che esista un qualche costo ridotto $\bar{c}_j < 0, j \in N$.

Dal momento che la SBA è non degenere, tutte le componenti di $\bar{b}$ sono strettamente positive, quindi esisterebbe un $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo tale che $\bar{b} - \varepsilon \bar{A}_j > 0$.

Condizioni algebriche di ottimalità

- Di conseguenza, la soluzione $\hat{x}_B = \bar{b} - \varepsilon \bar{A}_j$, $\hat{x}_j = \varepsilon,\ \hat{x}_h = 0,\ h \in N \setminus \{j\}$, sarebbe ammissibile per il problema di PL e di valore $\bar{z} + \bar{c}_j \varepsilon < \bar{z}$, cioè, migliore dell'ottimo, il che rappresenterebbe una contraddizione dell'ipotesi.

Esercizio

Sia dato il problema di PL in forma canonica.

La corrispondente SBA $\bar{x} = [0\ 1\ 26\ 3\ 0]^T$ è ottima, dal momento che $c_N = [1/2\ \ 1/2]^T \geq 0$.

Infatti, una qualsiasi altra soluzione ammissibile diversa da $\bar{x}$, indicata con $\hat{x}$, dovrebbe avere $\hat{x}_1 > 0$, oppure $\hat{x}_5 > 0$ o entrambe non negative.

Di conseguenza, il valore di questa soluzione risulterebbe $\hat{z} = 2 + 1/2\,\hat{x}_1 + 1/2\,\hat{x}_5$, che sarebbe superiore rispetto a $\hat{z} = 2$.

Esercizio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = 3x_1 - 2x_2 + 7$$

$$s.v.$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 18 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_4 &= 13 \\ 12x_1 - 5x_2 + x_5 &= 14 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base $B = \{3,4,5\}$,

Esercizio

- Con corrispondente SBA (non degenere) pari a $\bar{x} = [0\ 0\ 18\ 13\ 14]^T$, avente valore pari a $\bar{z} = 7$.

  La SBA $\bar{x}$ non è ottima, giacché il secondo coefficiente di costo ridotto è negativo. Infatti, è possibile determinare una diversa soluzione ammissibile, $\hat{x}$, ponendo $\hat{x}_2 = \varepsilon$, mentre $\hat{x}_1 = 0$.

  Per effetto di questo cambiamento, le restanti variabili assumerebbero i seguenti valori:

Esercizio

- $$\hat{x}_3 = 18 - 4\varepsilon;$$
  $$\hat{x}_4 = 13 - 5\varepsilon;$$
  $$\hat{x}_5 = 14 + 5\varepsilon.$$

Per garantire l'ammissibilità della soluzione $\hat{x}$, occorre imporre che ciascuna delle sue componenti sia non negativa, il che significa che ε deve essere scelto nell'intervallo di valori $(0, 13/5]$.

Il valore di $\hat{x}$ sarà pertanto pari a $\hat{z} = 7 - 2\varepsilon < \bar{z}$, per ogni scelta di $\varepsilon \in (0, 13/5]$.

Condizioni algebriche di ottimalità

Si osservi che, per una SBA degenere, la condizione di ottimalità del Teorema 6.2 è solo sufficiente, ma non necessaria. È infatti possibile che una delle basi associate a una SBA degenere ottima non rispetti la condizione di ottimalità del Teorema 6.2. È tuttavia possibile dimostrare che se una SBA degenere è ottima, almeno una delle basi associate verifica la condizione di ottimalità. Ciò può essere giustificato con il seguente ragionamento.

Si consideri una SBA degenere ottima x^* del problema di PL in forma standard $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$.

Condizioni algebriche di ottimalità

Si supponga, senza perdita di generalità, che le prime $k < m$ componenti di x^* siano diverse da zero e le altre $n - k$ siano nulle. Dal punto di vista geometrico, si ricorda che ciò equivale a dire che il vertice ottimo x^* è individuato dall'intersezione di $m + n - k > n$ iperpiani, cioè, le m equazioni del sistema $Ax = b$ e le $n - k$ equazioni $x_j = 0, j = k + 1, \ldots, n$.

Tutte le basi associate a x^* si ottengono, quindi, aggiungendo alle prime k colonne di A altre $m - k$ colonne linearmente indipendenti, scelte tra le rimanenti $n - k$ colonne di A.

Condizioni algebriche di ottimalità

- Ciascuna di queste basi è associata a n degli $m + n - k$ iperpiani che si intersecano in x^*, ed esattamente quelli complementari agli $m - k$ iperpiani associati alle componenti $x_j = 0$ in base.
Si perturbi leggermente il vettore $b \in R^m$ dei termini noti del problema di PL (si scelga, cioè, un vettore $\varepsilon \in R^m$ sufficientemente piccolo tale che $A_B^{-1}(b + \varepsilon) > 0$ per almeno una delle basi associate alla SBA ottima degenere), in modo tale che gli $m + n - k$ iperpiani citati individuino un insieme di...

Condizioni algebriche di ottimalità

-

…punti, ciascuno ottenuto dall'intersezione di esattamente n di questi iperpiani e, quindi, associato a una base non degenere.

I punti per i quali $A_B^{-1}(b+\varepsilon) > 0$ saranno SBA (cioè vertici) del problema perturbato (tutti questi punti collassano in x^* nel problema non perturbato).

Condizioni algebriche di ottimalità

- Se la perturbazione è sufficientemente piccola, una di queste SBA deve essere ottima per il problema perturbato e quindi, per il Teorema 6.2, deve rispettare la condizione di ottimalità $\bar{c}_N \geq 0$.

  Poiché questa condizione non dipende da b e quindi non dipende dalla perturbazione ε apportata, allora la condizione $\bar{c}_N \geq 0$ è rispettata da questa base anche nel problema non perturbato.

Esercizio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$
\begin{aligned}
&\min z(x) = x_1 + x_2 \\
&\quad s.v. \\
&\qquad -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\
&\qquad x_1 + 3/2\, x_2 \leq 9 \\
&\qquad x_1 + 3x_2 \geq 6 \\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

a cui corrisponde il politopo P rappresentato nella Figura successiva (6.4).

Esercizio

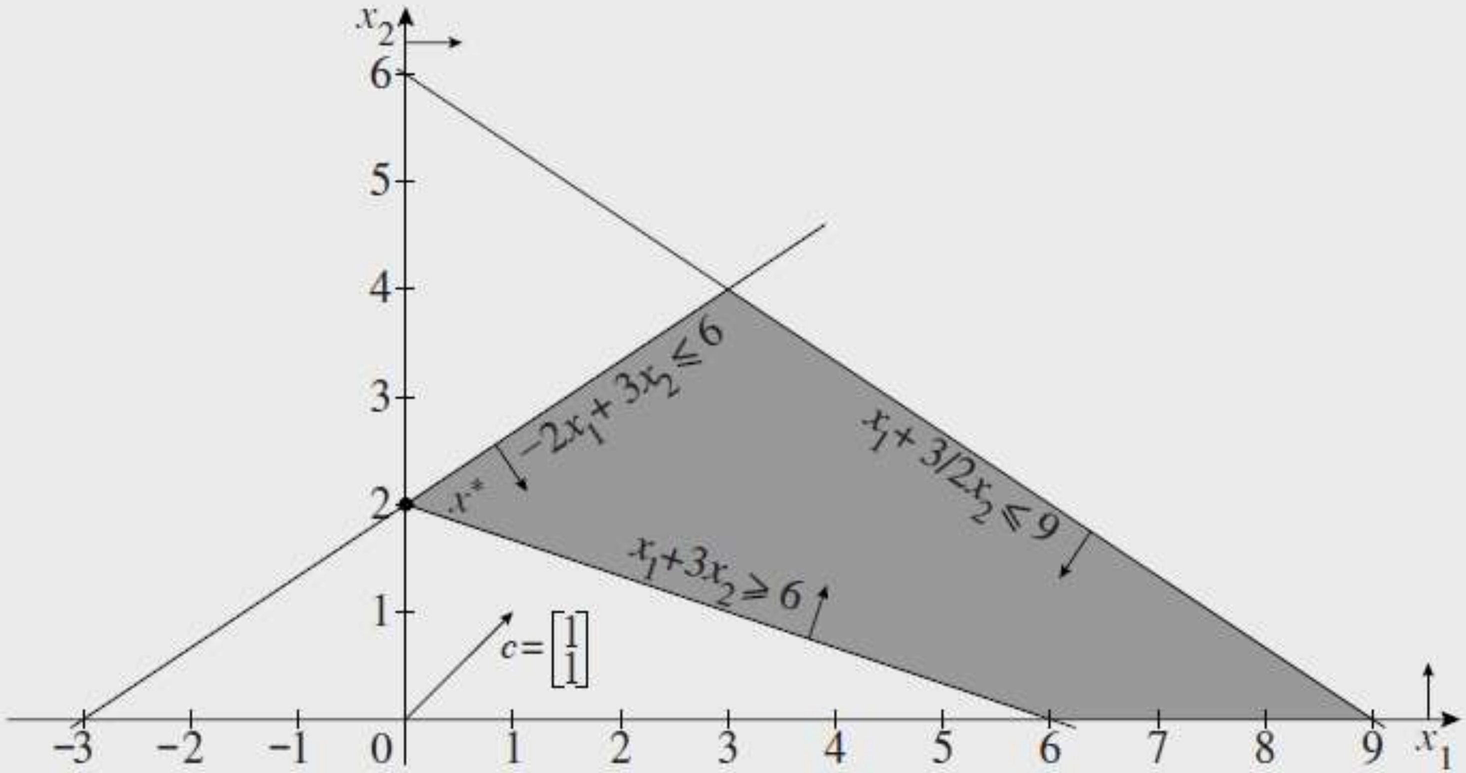

Figura 6.4. Caso di problema avente soluzione ottima degenere.

Esercizio

Si osservi che la soluzione ottima corrisponde al punto $x^* = [0\ 2]^T$, con valore $z^* = 2$.

A tale punto corrisponde all'intersezione di tre rette (in particolare, le rette di equazioni $x_1 = 0$, $-2x_1 + 3x_2 = 6$ e $x_1 + 3x_2 = 6$).

In forma standard, cioè, dopo aver inserito tre variabili di scarto in corrispondenza dei primi tre vincoli, il problema di PL diventa:

Esercizio

$$\min z(x) = x_1 + x_2$$

$$s.v.$$

$$-2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1 + 3/2\, x_2 + x_4 = 9$$
$$x_1 + 3x_2 - x_5 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

le cui dimensioni sono $m = 3$ e $n = 5$, mentre la corrispondente soluzione ottima risulta $x^* = [0\ 2\ 0\ 6\ 0]^T$, che è una SBA degenere..

Esercizio

Il vertice x^* è individuato dall'intersezione di sei iperpiani (corrispondenti alle prime tre equazioni di vincolo del problema e tre equazioni $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ e $x_5 = 0$ relativamente alle variabili).

Alla SBA ottimale x^* corrispondono tre insiemi di indici di base differenti, cioè, $B^{(1)} = \{2,3,4\}$, $B^{(2)} = \{2,4,5\}$ e $B^{(5)} = \{1,2\ 4\}$

Esercizio

- A ciascuno di questi insiemi corrisponde un modo di vedere nella Figura 6.4 il punto x^*, come intersezione delle rette di equazioni $x_1 = 0$ e $x_1 + 3x_2 = 6$, $x_1 = 0$ e $-2x_1 + 3x_2 = 6$, $-2x_1 + 3x_2 = 6$ e $x_1 + 3x_2 = 6$, rispettivamente. Per stabilire quale tra le corrispondenti basi soddisfi le condizioni di ottimalità, si può perturbare leggermente il termine noto relativo al vincolo originario $-2x_1 + 3x_2 \leq 6$ di una quantità $\varepsilon > 0$ e ottenere la situazione rappresentata nella Figura successiva (6.5).

Esercizio

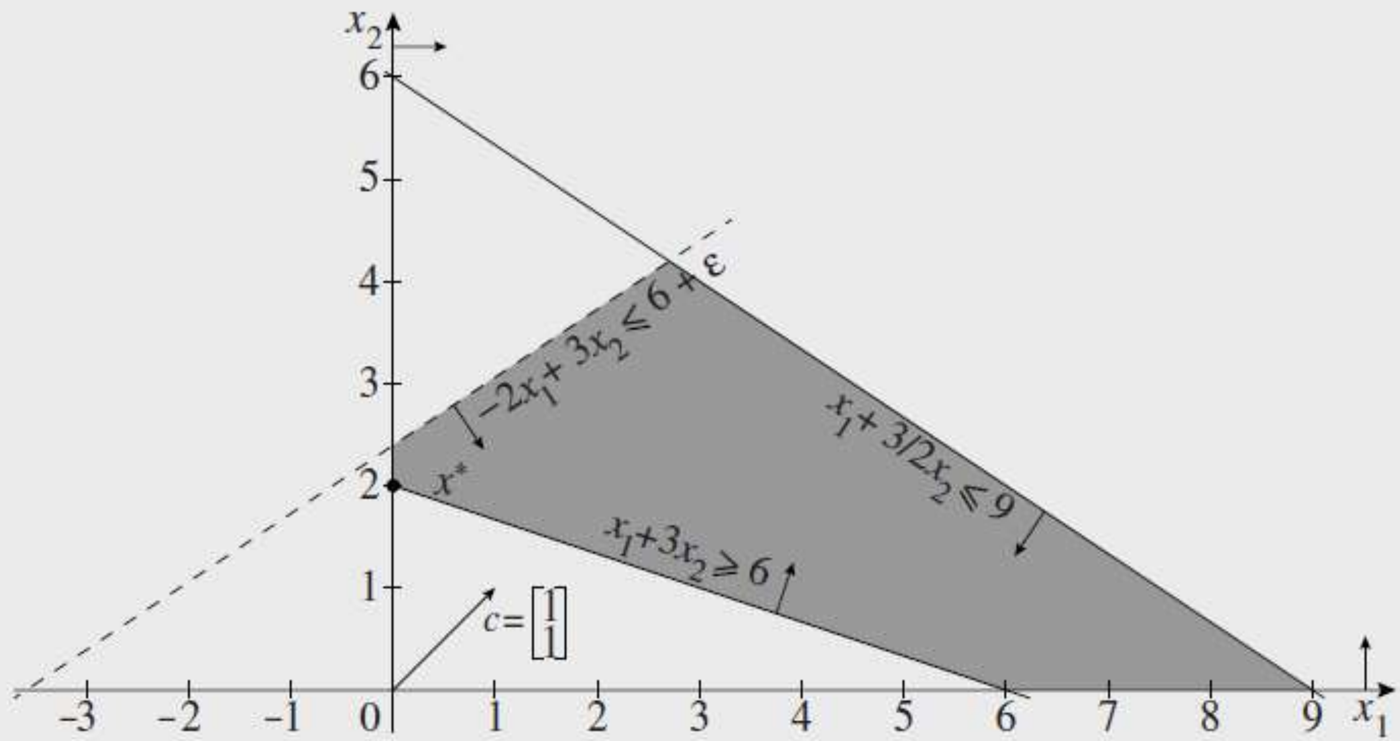

Figura 6.5. Perturbazione del problema di Figura 6.4 per ottenere una soluzione ottima non degenere.

Esercizio

Per il corrispondente problema in forma standard, l'iperpiano $-2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 + \varepsilon$ è parallelo al precedente (vedi retta tratteggiata in Figura 6.5), per cui il vertice originario x^* risulta «sdoppiato» in due vertici ammissibili, uno dei quali è ottimo per il problema perturbato e non degenere, in corrispondenza dell'insieme di indici di base $B = \{2,3,4\}$.

Infatti, se si costruisce il problema in forma canonica rispetto a tale insieme di indici di base si ottiene:

Esercizio

$$\min z(x) = 2/3\, x_1 + 1/3\, x_2$$

$$s.v.$$

$$\begin{aligned}
&1/3\, x_1 + x_2 - 1/3\, x_5 = 2\\
&-3x_1 + x_3 + x_5 = 0\\
&1/2\, x_1 + x_4 + 1/2\, x_5 = 6\\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

per il quale i coefficienti di costo ridotto sono non negativi e, pertanto, soddisfano il criterio di ottimalità indicato nel Teorema 6.2.

Condizioni algebriche di ottimalità

Per poter riconoscere un problema di PL illimitato inferiormente, si può ricorrere al seguente teorema.

Teorema 6.3 Sia AB una base ammissibile del problema di PL in forma canonica rispetto ad A_B:

$$\min\{\bar{z} + \bar{c}_N^T x_N\colon x_B = \bar{b} - \bar{A}_N x_N,\, x_B\,, x_N \geq 0\}$$

Se, per una variabile fuori base x_k, $k \in N$, si ha $\bar{A}_k \leq 0$ e $\bar{c}_k < 0$, allora il problema è illimitato inferiormente.

Condizioni algebriche di ottimalità

Dimostrazione È sufficiente osservare che il vettore d:

$$d_B = -\bar{A}_k \qquad (6.5)$$

$$d_k = 1 \qquad (6.6)$$

$$d_j = 0, \forall j \in N \setminus \{k\} \qquad (6.7)$$

è soluzione del sistema omogeneo $x_B = -\bar{A}_N x_N$, $x_B, x_N \geq 0$. Infatti, ponendo $x_k = d_k = 1$ e tutte le altri variabili fuori base a zero, si ha $-\bar{A}_N x_N = -\bar{A}_k$ e ponendo $x_B = d_B = -\bar{A}_k$ si soddisfano le equazioni $x_B = -\bar{A}_N x_N$ del sistema omogeneo.

Esercizio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = -3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 13/2$$

$$s.v.$$

$$-2x_1 + 14x_2 - 1/3\, x_3 + x_4 = 8$$
$$-2/3\, x_1 + 2x_2 - 7x_3 + x_5 = 12$$
$$-3/2\, x_1 - 7x_2 - 1/2\, x_3 + x_6 = 17$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base $B = \{4,5,6\}$.

Esercizio

- Il problema risulta illimitato inferiormente. Infatti, a partire dalla SBA corrispondente $\bar{x} = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 8\ \ 12\ \ 17]^T$, avente valore $\bar{z} = 13/2$, è possibile costruire una nuova soluzione $\hat{x} = \bar{x} + \alpha \frac{d}{\|d\|}$ dove d si ottiene attraverso le (6.5)–(6.7) come

$$d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2/3 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

Esercizio

In modo alternativo, per ottenere $\hat{x}$, si può porre $\hat{x}_1 = \beta > 0$ e ottenere le altre componenti di $\hat{x}$ da $\bar{x}$, in modo da soddisfare i vincoli del problema, ponendo

$$\hat{x}_2 = 0;$$

$$\hat{x}_3 = 0;$$

$$\hat{x}_4 = 8 + 2\beta;$$

$$\hat{x}_5 = 12 + 2/3\,\beta;$$

$$\hat{x}_6 = 17 + 3/2\,\beta.$$

La soluzione $\hat{x}$ così determinata risulta ammissibile per ogni $\beta > 0$ e ha valore pari a $\hat{z} = 13/2 - 3\beta$.

Condizioni algebriche di ottimalità

I risultati teorici fin qui conseguiti consentono di definire una possibile strategia per risolvere un problema di PL: si può costruire la forma canonica del problema rispetto a tutte le basi ammissibili e verificare l'eventuale soddisfacimento della condizione di ottimalità espressa dal Teorema 6.2 o quella di illimitatezza espressa dal Teorema 6.3. Se esiste almeno una base ammissibile, è evidente che, al termine della procedura, essendo il numero delle basi ammissibili finito, si giungerà a una delle due condizioni su indicate.

Condizioni algebriche di ottimalità

Tuttavia, tale procedura potrebbe rivelarsi piuttosto inefficiente, dal momento che il numero delle basi da esaminare potrebbe essere molto elevato (il numero di basi ammissibili è al più pari a $\frac{n!}{m!(n-m)!}$).

Esempio.

In un problema di PL in forma standard, con $m = 40$ e $n = 100$, il numero di SBA è al più pari a $\frac{100!}{40!\times 60!}$ ossia $13.746.234.145.802.800.000.000.000.000$.