Soluzioni foglio 3

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(e^{3x}-1)^2}{\ln^5(1+\sqrt{x})} \to$ F.I. $\dfrac{0}{0}$

limiti notevoli: • $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{3x} = 1 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{3x}-1)^2}{(3x)^2} = 1^2 = 1}$

• $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(1+\sqrt{x})} = 1$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{x})^5}{(\ln(1+\sqrt{x}))^5} = 1^5 = 1}$

Utilizzando i risultati nei riquadri, otteniamo:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(e^{3x}-1)^2}{\ln^5(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(e^{3x}-1)^2}{(3x)^2} \cdot \frac{(3x)^2}{\ln^5(1+\sqrt{x})} \cdot \frac{(\sqrt{x})^5}{(\sqrt{x})^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{(e^{3x}-1)^2}{(3x)^2}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\frac{(\sqrt{x})^5}{\ln^5(1+\sqrt{x})}}_{\downarrow\, 1} \cdot \frac{(3x)^2}{(\sqrt{x})^5} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(3x)^2}{(\sqrt{x})^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{9x^2}{x^{5/2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{9}{x^{1/2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{9}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Risultato: $+\infty$

2) $$\lim_{n\to+\infty} (\sqrt[n]{5} + \sqrt[n]{4})^n = \lim_{n\to+\infty} (\underbrace{5^{1/n}}_{\downarrow\, 1} + \underbrace{4^{1/n}}_{\downarrow\, 1})^n = \lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$$

Risultato: $+\infty$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{(e^{6x}-1)\ln(1-\sin x)}{\cos 3x - 1} \rightarrow$ F.I. $\frac{0}{0}$

limiti notevoli :

- $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^{6x}-1}{6x} = 1}$
- $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+(-\sin x))}{-\sin x} = 1}$ [perché $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$]
- $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 3x}{(3x)^2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\cos 3x - 1}{(3x)^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{(3x)^2}{\cos 3x - 1} = -2}$

Utilizziamo i risultati nei riquadri:

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{e^{6x}-1}{6x}}_{\downarrow\, 1} \cdot 6x \cdot \underbrace{\frac{\ln(1-\sin x)}{-\sin x}}_{\downarrow\, 1} \cdot -\sin x \cdot \underbrace{\frac{(3x)^2}{\cos 3x - 1}}_{\downarrow\, -2} \cdot \frac{1}{(3x)^2} =$$

$$-2 \lim_{x \to 0} \frac{6x(-\sin x)}{9x^2} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{6}{9} \frac{\sin x}{x} = \frac{12}{9} \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow\, 1} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

Risultato : $\frac{4}{3}$

4) $\lim_{x \to 0} \frac{(x^2+x)}{\ln(1+\frac{x}{2})} \Rightarrow$ F.I. $\frac{0}{0}$

limiti notevoli :

- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} = 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{2}}{\ln(1+\frac{x}{2})} = 1}$

Quindi:

$$= \lim_{x \to 0} (x^2+x) \cdot \underbrace{\frac{\frac{x}{2}}{\ln(1+\frac{x}{2})}}_{\downarrow\, 1} \cdot \frac{1}{x/2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2+x}{x/2} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{x^2+x}{x} = 2 \lim_{x \to 0} x+1 = 2$$

Risultato: 2

5) $\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{\cos\frac{1}{n}}-1\right) \Rightarrow$ F.I. $\infty\cdot 0$

Applichiamo la SOSTITUZIONE : $x=\frac{1}{n}$, dunque $x\to 0$ per $n\to+\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\sqrt{\cos x}-1\right) \Rightarrow \text{F.I. } \frac{0}{0}$$

PRODOTTO NOTEVOLE
SOMMA PER DIFFERENZA

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{\cos x}+1}{\sqrt{\cos x}+1} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1} =$$

$$\boxed{\text{limite notevole: } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\underbrace{\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1}}_{\to 1/2} = 0$$

Risultato: 0

6) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\frac{9x^4}{5}\right)}{\sin^2\left(\frac{5x^2}{2}\right)} \Rightarrow$ F.I. $\frac{0}{0}$

limiti notevoli • $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ per sostituzione

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{9x^4}{5}\right)}{\left(\frac{9x^4}{5}\right)}=1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{5x^2}{2}\right)}{\left(\frac{5x^2}{2}\right)}=1}$$

Quindi anche il suo reciproco tende a 1

utilizziamo i risultati nei riquadri:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{9x^4}{5}\right)}{\sin^2\left(\frac{5x^2}{2}\right)} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{9x^4}{5}\right)}{\left(\frac{9x^4}{5}\right)}}_{\to 1}\cdot\frac{9x^4}{5}\cdot\frac{\left(\frac{5x^2}{2}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{5x^2}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\left(\frac{5x^2}{2}\right)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{5x^2}{2}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{5x^2}{2}\right)}\cdot\frac{\frac{9x^4}{5}}{\frac{25x^4}{4}} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\frac{5x^2}{2}}{\sin\left(\frac{5x^2}{2}\right)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\frac{5x^2}{2}}{\sin\left(\frac{5x^2}{2}\right)}}_{\to 1}\cdot\frac{\frac{9x^4}{5}}{\frac{25x^4}{4}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{9\cancel{x^4}}{5}\cdot\frac{4}{25\cancel{x^4}} = \frac{36}{125}$$

Risultato: $\frac{36}{125}$

7) $\lim_{x \to 0^+} \frac{3^{\cos\frac{1}{x}} - 4}{x \ln x} \Rightarrow$ F.I. ??

<u>OSS</u>: $\nexists \lim_{x \to 0^+} \cos\frac{1}{x}$ perchè il coseno è una funzione periodica e assume tutti i valori compresi tra -1 e 1 al crescere del suo argomento $\frac{1}{x}$.

Però possiamo fare la maggiorazione:

$$-1 \le \cos\frac{1}{x}$$

(il coseno è sempre compreso tra -1 e 1), quindi:

$$\underbrace{\lim_{x \to 0^+} \frac{3^{-1} - 4}{x \ln x}} \le \lim_{x \to 0^+} \frac{3^{\cos\frac{1}{x}} - 4}{x \ln x}$$

$\hookrightarrow$ Calcoliamo questo limite: $\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{3} - 4}{x \ln x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{11}{3}}{x \ln x} = -\frac{11}{3} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x \ln x} =$

<u>OSS</u>: $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0^- \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x \ln x} = -\infty}$

$$= -\frac{11}{3}(-\infty) = +\infty$$

Quindi abbiamo: $+\infty \le \lim_{x \to 0^+} \frac{3^{\cos\frac{1}{x}} - 4}{x \ln x}$

Per CONFRONTO concludiamo che allora $\lim_{x \to 0^+} \frac{3^{\cos\frac{1}{x}} - 4}{x \ln x} = +\infty$

Risultato: $+\infty$

8) $\lim_{x \to 0} \frac{(e^{5x^2} - 1) \ln^2(1+3x)}{1 - \cos(x^2)} \Rightarrow$ F.I. $\frac{0}{0}$

limiti notevoli:

- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^{5x^2} - 1}{5x^2} = 1}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{3x} = 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\ln^2(1+3x)}{(3x)^2} = 1^2 = 1}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{x^4}{1 - \cos(x^2)} = 2}$

utilizziamo i risultati nei riquadri per calcolare:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{5x^2}-1)\ln^2(1+3x)}{1-\cos(x^2)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{e^{5x^2}-1}{5x^2}}_{\downarrow\ 1} \cdot 5x^2 \cdot \underbrace{\frac{\ln^2(1+3x)}{9x^2}}_{\downarrow\ 1} \cdot 9x^2 \cdot \underbrace{\frac{x^4}{1-\cos(x^2)}}_{\downarrow\ 2} \cdot \frac{1}{x^4} =$$

$$= 2 \lim_{x\to 0} \frac{45x^4}{x^4} = 2\cdot 45 = 90$$

Risultato: 90

9) $$\lim_{x\to 0} \frac{(4^x-1)\log_2(\cos x)}{\sqrt[9]{1+9x^3}-1} \Rightarrow \text{F.I. } \frac{0}{0}$$

limiti notevoli:

- $$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{4^x-1}{x} = \ln(4)}$$
- In generale vale: $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^K-1}{x} = K \quad \forall K>0$, prendendo $K=\frac{1}{9}$

otteniamo: $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/9}-1}{x} = \frac{1}{9}$ ovvero $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[9]{1+x}-1}{x} = \frac{1}{9}$

ora sostituendo x con $9x^3$, si ha: $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[9]{1+9x^3}-1}{9x^3} = \frac{1}{9}$

Facendo il reciproco: $$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{9x^3}{\sqrt[9]{1+9x^3}-1} = 9}$$

- Sappiamo che $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, quindi $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$

con un piccolo abuso di notazione, possiamo scrivere: $\lim_{x\to 0} \cos x = 1-\frac{x^2}{2}$
(porto a destra dell'uguale il "-1" e "x^2")
Questo significa che vicino a 0, $\cos x$ è circa uguale a $1-\frac{x^2}{2}$
quindi $\lim_{x\to 0} \log_2(\cos x) = \lim_{x\to 0} \log_2\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$ ✓

In generale vale che: $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(e)$ prendendo $a=2$

otteniamo $\lim_{x\to 0} \frac{\log_2(1+x)}{x} = \log_2(e)$ →

ora sostituiamo x con $\frac{-x^2}{2}$: $\lim_{x\to 0} \frac{\log_2(1-x^2/2)}{-x^2/2} = \log_2(e)$

Quindi, per quanto detto prima:

$\lim_{x\to 0} \frac{\log_2(\cos x)}{-x^2/2} = \log_2(e)$ ovvero $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\log_2(\cos x)}{x^2/2} = -\log_2(e)}$

Utilizziamo i risultati nei riquadri:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(4^x-1)\log_2(\cos x)}{\sqrt[9]{1+9x^3}-1} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{4^x-1}{x}}_{\downarrow\, \ln(4)} \cdot x \cdot \underbrace{\frac{9x^3}{\sqrt[9]{1+9x^3}-1}}_{\downarrow\, 9} \cdot \frac{1}{9x^3} \cdot \underbrace{\frac{\log_2(\cos x)}{x^2/2}}_{\downarrow\, -\log_2(e)} \, x^2/2 =$$

$$= \ln(4)\cdot 9 \cdot (-\log_2(e)) \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{1}{9x^3} \cdot \frac{x^2}{2} =$$

$$= \ln(4)\cdot \cancel{9} \cdot (-\log_2(e)) \cdot \frac{1}{\cancel{9}} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\ln(4)\log_2(e)}{2}$$

$\left[\begin{array}{l} \text{FORMULA CAMBIAMENTO DI BASE} \\ \text{DEI LOGARITMI}: \ln(4) = \dfrac{\log_2(4)}{\log_2(e)} \end{array}\right]$

$$= -\frac{\log_2(4)\cancel{\log_2(e)}}{\cancel{\log_2(e)}\ 2} = -\frac{2}{2} = -1$$

Risultato: -1

10) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\pi - 2\arctan\frac{1}{x^3}}{\tan 2x - \sin 2x} \Rightarrow$ F.I. $\frac{0}{0}$

limite notevole: • $\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$ sostituendo x con $2x$

otteniamo: • $\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{8x^3} = \frac{1}{2}$ quindi, facendo il reciproco:

• $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{8x^3}{\tan 2x - \sin 2x} = 2}$

Quindi:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\pi - 2\arctan 1/x^3}{\tan 2x - \sin 2x} = \lim_{x\to 0^+} \pi - 2\arctan 1/x^3 \cdot \overbrace{\frac{8x^3}{\tan 2x - \sin 2x}}^{\nearrow 2} \cdot \frac{1}{8x^3} =$$

$$2 \lim_{x \to 0^+} \frac{\pi - 2\arctan 1/x^3}{8x^3} \to F.I.\ \frac{0}{0} \to \text{Applichiamo De l'Hopital}$$

$$N)\ \frac{d}{dx}\left(\pi - 2\arctan 1/x^3\right) = -2\left(\frac{-3}{x^4}\right)\left(\frac{1}{(1+1/x^6)}\right) = \frac{6}{x^4\left(1+\frac{1}{x^6}\right)} =$$

$$= \frac{6}{x^4 + \frac{1}{x^2}} = \frac{6}{\frac{x^6+1}{x^2}} = \frac{6x^2}{x^6+1}$$

$$D)\ \frac{d}{dx}(8x^3) = 24x^2$$

Quindi abbiamo: $2 \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{6x^2}{x^6+1}}{24x^2} = 2 \lim_{x \to 0^+} \frac{6\cancel{x^2}}{x^6+1} \cdot \frac{1}{24\cancel{x^2}} = 2 \cdot \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{2}$ Risultato: $\frac{1}{2}$

11) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1-\cos x}} \Rightarrow F.I.\ \frac{0}{0}$

limiti notevoli:

- $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} = 2 \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{x^2}{1-\cos x}} = \sqrt{2}}$

Quindi:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1-\cos x}} \cdot \frac{1+\sqrt{\cos x}}{1+\sqrt{\cos x}} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\sqrt{1-\cos x}} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{\cos x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0}(1-\cos x) \cdot \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{1-\cos x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{\cos x}} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{1-\cos x}{x}}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{x^2}{1-\cos x}}}_{\downarrow\, \sqrt{2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}}_{\downarrow\, 1/2} = 0$$

Risultato: 0

12) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{(\sin x)^{\sin x} - 1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)}} \longrightarrow$ F.I. $\dfrac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\ln(\sin x)^{\sin x}} - 1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin x \ln(\sin x)} - 1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)}}$$

Applichiamo de L'Hopital

N) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{\sin x \ln(\sin x)} - 1\right) = \dfrac{d}{dx}(\sin x \ln(\sin x)) \cdot e^{\sin x \ln(\sin x)} =$

$$= \left(\cos x \ln(\sin x) + \frac{\cancel{\sin x} \cos x}{\cancel{\sin x}}\right) e^{\sin x \ln(\sin x)} = \cos x (1 + \ln(\sin x))\, e^{\sin x \ln(\sin x)}$$

D) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)\right)^{1/2} = \dfrac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)\right)^{-1/2} \dfrac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)\right) =$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)}} \left(-\frac{1}{\cos^2 x}(-\sin x)\cancel{\cos x}\right) = \frac{\sin x}{2\cos x \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)}}$$

Quindi

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x (1 + \ln(\sin x))\, e^{\sin x \ln(\sin x)}}{\dfrac{\sin x}{2\cos x \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)}}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \underset{\downarrow\, 1}{\cos x}\, (1 + \ln(\sin x))\, e^{\sin x \ln(\sin x)} \cdot \frac{\overset{2\,\uparrow}{2\cos x} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)}}{\sin x} =$$

$$= 2 \lim_{x\to 0^+} \underbrace{(1 + \ln(\sin x))}_{A}\, \underbrace{e^{\sin x \ln(\sin x)}}_{B}\, \underbrace{\frac{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)}}{\sin x}}_{C}$$

$\leftarrow$ dividiamo questo limite in 3 pezzi

A) $\lim_{x\to 0^+} 1 + \ln(\sin x) = -\infty$ ✓

B) Calcoliamo prima $\lim_{x\to 0^+} \sin x \ln(\sin x) \longrightarrow$ F.I. $0 \cdot (-\infty)$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\sin x}} \rightarrow \text{F.I. } \frac{\infty}{\infty}$$

$\rightarrow$ Applichiamo de L'Hopital

N) $\frac{d}{dx}\left(\ln(\sin x)\right) = \frac{\cos x}{\sin x}$ D) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

quindi : $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\sin x}} \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos x} = 0$

dunque: $\lim_{x\to 0^+} e^{\sin x \ln(\sin x)} = e^0 = 1$ ✓

c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)}}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\ln((\cos x)^{-1})}}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{-\ln(\cos x)}}{\sin x} \rightarrow$ F.I. $\frac{0}{0}$

RICHIAMO (ES 9): Abbiamo visto che $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log_2(\cos x)}{x^2/2} = -\log_2(e)$

Lo stesso risultato deve valere se al posto del logaritmo in base 2, abbiamo il logaritmo in base e, ovvero il logaritmo naturale:

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cos x)}{x^2/2} = -\ln(e) = -1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{-\ln(\cos x)}{x^2/2} = 1$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{-\ln(\cos x)}}{\sqrt{x^2/2}} = \sqrt{1} = 1}$

Quindi $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{-\ln(\cos x)}}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{\sqrt{-\ln(\cos x)}}{\sqrt{x^2/2}}}_{\downarrow\, 1} \cdot \frac{\sqrt{\frac{x^2}{2}}}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{2}\sin x} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\downarrow\, 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ✓

Possiamo quindi concludere che il nostro limite iniziale è dato da: $2 \cdot A \cdot B \cdot C = 2 \cdot (-\infty) \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\infty$

Risultato: $-\infty$

13) $\lim_{x \to e} \frac{x-e}{1-\ln x} \to$ F.I. $\frac{0}{0}$ Applichiamo de l'Hopital

N) $\frac{d}{dx}(x-e) = 1$ D) $\frac{d}{dx}(1-\ln x) = -\frac{1}{x}$

Quindi $= \lim_{x \to e} \frac{1}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \to e} -x = -e$ Risultato $= -e$

14) $\lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{1-\sin x} \to$ F.I. $\frac{0}{0}$ Applichiamo de l'Hopital

N) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ D) $\frac{d}{dx}(1-\sin x) = -\cos x$

Quindi $= \lim_{x \to \pi/2} \frac{-\sin x}{-\cos x} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow$ NON ESISTE

Infatti $\lim_{x \to \pi/2^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$

mentre $\lim_{x \to \pi/2^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$

} limite destro e limite sinistro sono diversi tra loro

Risultato: <u>non esiste</u>

15) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+e^{2x})}{e^{2x}} \Rightarrow$ F.I. $\frac{\infty}{\infty}$ → De l'Hopital

N) $\frac{d}{dx}(\ln(1+e^{2x})) = 2e^{2x}\left(\frac{1}{1+e^{2x}}\right)$ D) $\frac{d}{dx}(e^{2x}) = 2e^{2x}$

Quindi $= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{2e^{2x}}\left(\frac{1}{1+e^{2x}}\right)}{\cancel{2e^{2x}}} = 0$

Risultato : 0