

1

COMPITO RO

Dati i seguenti vincoli di un problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} y_1 \quad & x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ y_2 \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 8 \\ y_3 \quad & x_1 - 5x_3 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

rispondere alla seguenti domande senza utilizzare algoritmi per la risoluzione diretta del problema o il metodo grafico:

a) Quali di questi vettori $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x^{(3)} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 9/2 \\ 0 \end{bmatrix}$, sono soluzioni di base ammissibili?

b) Costruire (dando opportune spiegazioni sul metodo) un'opportuna funzione obiettivo per cui

b1) il punto $x^{(1)}$ è il suo punto di minimo; \rightarrow senza probl. min.

b2) il punto $x^{(2)}$ è il suo punto di minimo;

b3) i punti $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ sono entrambi punto di minimo;

b4) i punti $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$ sono tutti punto di minimo.

c) Data la funzione obiettivo $\min x_1 + x_2 + x_3$, dire (motivando la risposta) se possa esistere una soluzione del problema duale di valore pari a 1.

d) Data la funzione obiettivo del punto c), eseguire due iterazioni dell'algoritmo Primale-Duale partendo da una

soluzione duale $y^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

COMPITO ①

$$x_2 + 3x_3 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$$

$$x_1 - 5x_3 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$e) x^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, x^2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}, x^3 = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 9/2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ sono SBA?}$$

• Verifico ammissibilità

• Verifico possa essere in base

(avere comp. in base (>0) e comp. non in base ($=0$)).

• Verifico ammissibilità:

1)

$$3 \leq 5 \quad \underline{\text{OK}}$$

$$8 \leq 8 \quad \underline{\text{OK}}$$

$$3 \leq 4 \quad \underline{\text{OK}}$$

$$3, 5, 0 \geq 0 \quad \underline{\text{OK}}$$

✓

AMMISSIBILE

2)

$$4 \leq 5 \quad \underline{\text{OK}}$$

$$8 \leq 8 \quad \underline{\text{OK}}$$

$$4 \leq 4 \quad \underline{\text{OK}}$$

$$4, 4, 0 \geq 0 \quad \underline{\text{OK}}$$

✓

AMMISSIBILE

3)

$$7/2 \leq 5 \quad \underline{\text{OK}}$$

$$8 \leq 8 \quad \underline{\text{OK}} \quad \checkmark$$

$$7/2 \leq 4 \quad \underline{\text{OK}}$$

$$7/2, 9/2, 0 \geq 0 \quad \underline{\text{OK}}$$

✓

AMMISSIBILE

* Verifico possa essere in base:

vincoli 3 \rightarrow devo avere 3 var. in base

STANDARDIZZO il problema:

$$x_2 + 3x_3 + x_4 = 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 8$$

$$x_1 - 5x_3 + x_6 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 > 0$$

Sono del tipo $\begin{bmatrix} >0 \\ >0 \\ >0 \end{bmatrix}$, ma

nel nostro caso $x_3 = 0$

in x^1, x^2, x^3

\Rightarrow Nessuna vettore è SBA.

b) Costruire una f.o. per cui :

b1) x^1 sia pt.o di minimo

b2) x^2 sia " " "

b3) x^1 e x^2 siano entrambi pt.i di minimo

b4) x^1 , x^2 e x^3 siano tutti e 3 pt.i di minimo.

COMPITO (1)

- b) • avere la forma di un PL $\Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$
• Almeno 3 cor.
• Sono probl. di minimo
poiché chiede tutti pt. di min. \Rightarrow min $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$

b1) x^1 è pt. di minimo $x^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

\downarrow

- Ammiss. ✓
- ottimo \rightarrow due

due:

$$\max 5y_1 + 8y_2 + 4y_3$$

$$y_1 + y_2 + y_3 \leq \alpha$$

$$y_1 + y_2 + 0 \leq \beta$$

$$3y_1 + y_2 - 5y_3 \leq \gamma$$

$$y_1, y_2, y_3 \leq 0$$

$$Sd_1 = \alpha - y_2 - y_3$$

$$Sd_2 = \beta - y_1 - y_2$$

$$y_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_3 = 0 \\ \alpha - y_2 = 0 \\ \beta - y_1 = 0 \end{cases} \begin{cases} y_3 = 0 \\ y_2 = \alpha \\ y_1 = \beta - \alpha \end{cases} \begin{pmatrix} \beta - \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha \leq \alpha \checkmark$$

$$\beta - \alpha + 0 \leq \beta \checkmark$$

$$3\beta - 3\alpha + \alpha \leq \gamma$$

$$\alpha = -1$$

$$\beta = -1$$

$$\gamma \geq -1 \rightarrow \gamma = -1$$

basta una qualsiasi terne de faceva
risultare ammissibile la sol. del duale
e quindi l'ottimalità di x^1 .

$$\boxed{\text{min} -x_1 - x_2 - x_3}$$

①

$$\min x_1 + x_2 + x_3$$

$$x_2 + 3x_3 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$$

$$x_1 - 5x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$y^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\min x_1 + x_2 + x_3$$

$$y_1) \quad x_2 + 3x_3 + x_4 = 5$$

$$y_2) \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 8 \quad \Rightarrow$$

$$y_3) \quad x_1 - 5x_3 + x_6 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$$\max 5y_1 + 8y_2 + 4y_3$$

$$y_2 + y_3 \leq 1$$

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

$$3y_1 + y_2 - 5y_3 \leq 1$$

$$y_1 \leq 0$$

$$y_2 \leq 0$$

$$y_3 \leq 0$$

* Dualisbarkeit y^0 :

$$y^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ist Dual. } \left(y^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ist Dual.} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} sd_1 = 1 \\ sd_2 = 1 \\ sd_3 = 1 \\ sd_4 = 0 \\ sd_5 = 0 \\ sd_6 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ >0 \\ >0 \\ >0 \end{bmatrix}$$

* PR:

$$\min 0$$

$$x_4 = 5$$

$$x_5 = 8$$

$$x_6 = 4$$

\Rightarrow

$$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ist sol. attine.

Confermo con il ~~dato~~ ^{dato}:
Principale

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	1	2	1	0	0	0
$x_4: 5$	0	1	3	1	0	0
$x_5: 8$	1	1	1	0	1	0
$x_6: 4$	1	0	-5	0	0	1

\Rightarrow Tableau ottimo $\Rightarrow x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$

COMPITO RO

1. Dato il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \min & 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ & 3x_1 + 2x_2 = 12 \\ & 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 2 \\ & 2x_1 + \frac{1}{4}x_2 - 2x_3 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Rispondere alla seguenti domande senza risolvere tramite l'utilizzo di algoritmi.

✓ a) Quali di questi vettori $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono soluzioni di base ammissibili? Perché?

✓ b) Verificate se la/le soluzioni di base del punto a) sono anche ottime. *→ secondo me c'è qualcosa che non torna*

✓ c) Può esistere una soluzione ammissibile del duale di valore pari a 8? Perché? *Si.*
→ usare dualità debole

2. Dato il problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \min & \beta x_1 - \gamma x_2 - x_3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 - \alpha \\ & 4x_1 - x_2 - 6x_3 \geq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max & (12 - \alpha)\beta_1 - \gamma_1\gamma_2 \\ & 2\gamma_1 + \alpha\gamma_2 \leq \beta \\ & 2\gamma_1 - \gamma_2 \leq -\gamma \\ & -6\gamma_2 \leq -1 \\ & \gamma_1 \leq 0, \gamma_2 \geq 0 \end{aligned}$$

dove α, β, γ sono reali.

✓ 1. Quali valori di α, β, γ rendono il vettore $x^{(4)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ è soluzione ottima del problema.

✓ 2. Quali valori di α, β, γ rendono il problema in forma canonica per il metodo del simplesso primale?

✓ 3. Quali valori di α, β, γ rendono il problema in forma canonica duale?

✓ 4. Definire un'istanza del problema sulla base dei valori del punto precedente e risolvere con il metodo del Simplexso duale.

b) Verificare se i vettori SBA sono anche ottimi:

$$\hookrightarrow \text{T. dualite: } \begin{cases} \langle S_P, Y \rangle = 0 \quad \checkmark \\ \langle S_D, X \rangle = 0 \end{cases}$$

* DUALE DELLO STANDARDIZZATO:

$$\max \quad 12y_1 + 2y_2 + 4y_3$$

$$3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 2$$

$$2y_1 + 2y_2 + \frac{1}{4}y_3 \leq -3$$

$$-3y_2 - 2y_3 \leq 1$$

$$-y_2 \leq 0$$

$$y_3 \leq 4$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{R}$$

Ora devo verificare solo $\langle S_D, X \rangle = 0$:

$$X^1 = \begin{bmatrix} >0 \\ 0 \\ >0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ >0 \\ 0 \\ >0 \end{bmatrix}$$

X^1 :

$$\begin{cases} 2 - 3y_1 - 4y_2 - 2y_3 = 0 \\ 1 + 3y_2 + 2y_3 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{2}{3} \\ y_2 = 0 \\ y_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ammissibile?

$$2 + 0 - 1 \leq 2 \quad \checkmark$$

$$\frac{4}{3} + 0 - \frac{1}{2} \leq -3$$

$$\frac{32-1}{24} \leq -3 \quad \times$$

\Rightarrow NON \hat{e} OTTIMA

X^2 :

$$\begin{cases} 3 + 2y_1 + 2y_2 + \frac{1}{4}y_3 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = -2 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 4 \end{cases}$$

Ammissibile?

$$-6 + 0 + 8 \leq 2 \quad \checkmark$$

$$-4 + 0 + 1 \leq -3 \quad \checkmark$$

$$6 - 8 \leq 1 \quad \checkmark$$

$$y_2 = 0 \quad \checkmark$$

$$y_3 = 4 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow X^2 \hat{e}$ OTTIMA

COMPITO (2)

1) min $2x_1 - 3x_2 + x_3$

1) $3x_1 + 2x_2 = 12$

2) $4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 2$

3) $2x_1 + \frac{1}{4}x_2 - 2x_3 \leq 4$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

2) $x^1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $x^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ $x^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 9/2 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono SBA?

- Verifico Ammissibilità:

①
 $12 = 12$
 $6 \geq 2$
 $4 \leq 4$
 $1, 0, 2 \geq 0$
OK

②
 $12 = 12$
 $3/2 \not\geq 4$
 $12 \geq 12$
 $0, 6, 0 \geq 0$
OK

③
 $12 = 12$
 $13 \geq 2$
 $2 + 9/8 \leq 4$
 $1, 9/2, 0 \geq 0$
OK

$\Rightarrow x^1, x^2, x^3$ sono AMMISSIBILI

- Verifico sia in Base:

* Standardizzo:

min $2x_1 - 3x_2 + x_3$

$3x_1 + 2x_2 = 12$

$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 2$

$2x_1 + \frac{1}{4}x_2 - 2x_3 + x_5 = 4$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Vincoli = 3

\Rightarrow devono esserci
3 var. in base,
ovvero:

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Trovo x_4 e x_5 :

$\boxed{x^1}$
 $12 = 12$
 $16 - 6 \cdot x_4 = 2$
 $8 - 4 + x_5 = 4$
 $x_4 = 8$
 $x_5 = 0$
SBA

$\boxed{x^2}$
 $12 = 12$
 $12 - x_4 = 2$
 $3/2 - x_5 = 4$
 $x_4 = 10$
 $x_5 = 5/2$
SBA

$\boxed{x^3}$
 $4 + 9 - x_4 = 2$
 $2 + 9/8 + x_5 = 4$
 $x_4 = 11$
 $x_5 = 25/8$
NOT SBA

COMPITO ②

c) Uso il T. della Dualità debole, ovvero date 2 soluzioni:

$$\begin{aligned} \forall \bar{x}: \bar{x} \in S & \quad \text{vale:} \quad c^T \bar{x} \geq \underbrace{b^T \bar{y}}_8 \\ \forall \bar{y}: \bar{y} \in T & \end{aligned}$$

\Rightarrow nel mio caso dovrò verificare che

$$c^T \bar{x} \geq 8$$

$$x' = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow c^T \bar{x} = 9 > 8 \quad \times$$

\Rightarrow Non esiste sol. del duale t.c. il valore è 8.

COMPITO ②

2)

$$\begin{aligned} \min \quad & \beta x_1 - \gamma x_2 - x_3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 - \alpha \\ & 4x_1 - x_2 - 6x_3 \geq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$x^4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

* Ammissibile?

$$\begin{aligned} 6 &\leq 12 - \alpha \\ 8 - 6 &\geq 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha \leq 6}$$



STANDARD

$$\begin{aligned} \min \quad & \beta x_1 - \gamma x_2 - x_3 \\ & \text{g.) } 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 12 - \alpha \\ & \text{g.) } 4x_1 - x_2 - 6x_3 - x_5 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

DUAL

$$\begin{aligned} \max \quad & (12 - \alpha) y_1 + 2y_2 \\ & 3y_1 + 4y_2 \leq \beta \\ & 2y_1 - y_2 \leq -\gamma \\ & -6y_2 \leq -1 \\ & y_1, y_2 \leq 0 \\ & -y_2 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\langle Sd, x \rangle = 0$$

affinché $x^4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sia sol. ottima
deve essere del tipo $\begin{bmatrix} >0 \\ 0 \\ >0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

$$Sd_1 = \beta - 3y_1 - 4y_2 = 0 \Rightarrow \beta - 3y_1 - 4y_2 = 0 \rightarrow \beta - 3y_1 - \frac{2}{3} = 0$$

$$Sd_3 = -1 + 6y_2 = 0 \Rightarrow -1 + 6y_2 = 0 \quad y_2 = \frac{1}{6}$$

$$\begin{cases} -3y_1 = \frac{2}{3} - \beta \\ y_1 = 3\beta - 2 \\ y_2 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$9\beta - 6 + \frac{2}{3} \leq \beta$$

$$6\beta - 4 - \frac{1}{6} \leq -\gamma$$

$$-1 \leq -1 \quad \checkmark$$

$$3\beta - 2 \leq 0 \rightarrow \beta \leq \frac{2}{3}$$

$$-\frac{1}{6} \leq 0 \quad \checkmark$$

$$-4 + \frac{23}{6}$$

$$\begin{aligned} 8\beta - \frac{18+2}{3} &\leq 0 \rightarrow \boxed{\beta \leq \frac{2}{3}} \\ \boxed{\gamma \leq -6\beta + \frac{23}{6}} & \quad \boxed{\alpha \leq 6} \end{aligned}$$

una combinazione di α, β, γ
che rende x^4 ottimo è:
 $\alpha = 6, \beta = \frac{2}{3}, \gamma = -\frac{1}{6}$

2) Quali α, β, γ rendono il problema in forma canonica per il semplice pivote?

Non ~~posso~~ $\exists \alpha, \beta, \gamma$ poiché ci sono sempre un vincolo con il segno sbagliato (≥ 0).

3) Nelle forme canonica duale:

$$\begin{array}{ll} c^T \geq 0 & \text{se min} \\ x_i \geq 0 & \end{array} \quad \begin{array}{ll} c^T \leq 0 & \text{se max} \\ x_i \geq 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \beta \geq 0, -\gamma \geq 0 \rightarrow \gamma \leq 0$$

\Rightarrow impossibile trasf. in forma canonica
poiché $\nexists C_{x_3} < 0$.

4) dato che non è possibile trovare buoni
al punto 3, non è possibile identificare un'istanza
risolvibile del problema.

4

COMPITO RO

ESERCIZIO 1. Dato il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \max & -4x_1 + 3x_2 - x_3 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 10 \\ & x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 8 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

1.1 Rispondere alla seguenti domande senza risolvere direttamente

- a) Quali di questi vettori $x_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 13 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_4 = \begin{bmatrix} 14 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ sono soluzioni di base ammissibili?
- b) Può esistere una soluzione di base ammissibile con x_2 e x_3 in base?
- c) Può esistere una soluzione ottima del problema con x_1 in base?

1.2 Applicare l'algoritmo del Simpleso Duale per risolvere il problema.

1.3 Applicare l'algoritmo Primal-Duale partendo dalla soluzione duale $y^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$-\frac{4}{1}$$

$$-\frac{1}{2} \leq 3$$

$$-\frac{8}{1}$$

$$8 + \frac{1}{2}$$

COMPITO (4)

1) max $-4x_1 + 3x_2 - x_3$
 $x_1 + 3x_2 \geq 10$
 $x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 8$
 $x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0$

2) $x^1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $x^2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $x^3 = \begin{bmatrix} 13 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $x^4 = \begin{bmatrix} 14 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ sono SBA?

Verifico Ammissibilità:

x^1
 $\begin{cases} 10 \geq 10 \checkmark \\ 10 \geq 8 \checkmark \\ 10, 0, 0 \geq 0 \checkmark \end{cases}$
OK

x^2
 $\begin{cases} 12 \geq 10 \checkmark \\ 18 \geq 8 \checkmark \\ 12, 2 \geq 0 \checkmark \\ 0 \leq 0 \checkmark \end{cases}$
OK

x^3
 $\begin{cases} 10 \geq 10 \checkmark \\ 13 \geq 8 \checkmark \\ 13, 0 \geq 0 \checkmark \\ -1 \leq 0 \checkmark \end{cases}$
OK

x^4
 $\begin{cases} 14 \geq 10 \checkmark \\ 23 \geq 8 \checkmark \\ 14, 2 \geq 0 \checkmark \\ -1 \leq 0 \checkmark \end{cases}$
OK

\Rightarrow le sol. sono tutte ammissibili.

* STANDARDIZZO:

max $-4x_1 + 3\bar{x}_2 - x_3$
 $x_1 + 3\bar{x}_2 - x_4 = 10$
 $x_1 + \bar{x}_2 + 4x_3 - x_5 = 8$
 $x_1, \bar{x}_2 = -x_2 \geq 0, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

variabili = 2
 \Rightarrow devo esercizi 2
ver in Base.

trovo x_4 e x_5 :

x^1
 $x_4 = 0$
 $x_5 = 2$

$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

SBA

x^2
 $x_4 = 2$
 $x_5 = 12$

$\begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix}$

NON
SBA

x^3
 $x_4 = 3$
 $x_5 = 4$

$\begin{bmatrix} 13 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

NON
SBA

x^4
 $x_4 = 7$
 $x_5 = 13$

$\begin{bmatrix} 14 \\ -1 \\ 2 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}$

NON
SBA

Solo x^1 è
SBA.

b)

3 SBA con x_2 e x_3 in base?

Una SBA con x_2 e x_3 in base sono del tipo

$$\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -3\bar{x}_2 = 10 \rightarrow x_2 = \frac{10}{3}$$

$$\bar{x}_2 + 4\bar{x}_3 = 8 \rightarrow \frac{10}{3} + 4x_3 = 8$$

$$x_2 = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow x' = \begin{bmatrix} 0 \\ 10/3 \\ 7/6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \frac{7}{6}$$

c) Una SBA con x_1 in base sono del tipo?

~~$$\begin{bmatrix} >0 \\ >0 \\ >0 \\ >0 \\ >0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} >0 \\ >0 \\ >0 \\ >0 \\ >0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} >0 \\ >0 \\ >0 \\ >0 \\ >0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} >0 \\ >0 \\ >0 \\ >0 \\ >0 \end{bmatrix}$$~~

dunque:

$$\begin{cases} x_1 - 3\bar{x}_2 = 10 \\ x_1 + \bar{x}_2 = 8 \end{cases}$$

Si esiste

$$\begin{cases} 8 - \bar{x}_2 - 3\bar{x}_2 = 10 \\ x_1 = 8 - \bar{x}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = -\frac{1}{2} \rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \\ x_1 = \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 15/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

è SBA

COMPITO ④

B) Riscrivere standardizzato (con minimo):

$$\min 4x_1 + 3\bar{x}_2 + x_3$$

$$-x_1 + 3\bar{x}_2 + x_4 = 10$$

$$-x_1 + \bar{x}_2 - 4x_3 + x_5 = 8$$

$$x_1, \bar{x}_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

(no/f. -1 a dx e sx)

	x_1	\bar{x}_2	x_3	x_4	x_5
	4	3	1	0	0
$x_4 = -10$	<u>-1</u>	3	0	1	0
$x_5 = -8$	-1	-1	-4	0	1

$$I + 4II$$

$$2II \cdot (-1)$$

$$III + II$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-40	0	15	1	4	0
$x_1 = 10$	1	-3	0	-1	0
$x_5 = 2$	0	-4	-4	-1	1

fine. (kor. in base)
non + neg.)

$$X^* = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

COMPITO (4)

3) Applico Primal-Dual partendo da $y^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$:

*Primal:

$$\min +4x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 10$$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 8$$

$$x_1 \geq 0, \bar{x}_2 = -x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

*Standard:

$$\min +4x_1 + 3\bar{x}_2 + x_3$$

$$y_1) x_1 - 3\bar{x}_2 - x_4 = 10$$

$$y_2) x_1 + \bar{x}_2 + 4x_3 - x_5 = 8$$

$$x_1, \bar{x}_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

*Dual:

$$\max 10y_1 + 8y_2$$

$$y_1 + y_2 \leq +4$$

$$-3y_1 + y_2 \leq +3$$

$$4y_2 \leq +1$$

$$-y_1 \leq 0$$

$$-y_2 \leq 0$$

$$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

*Verifico Ammissibilità y^0 :

$$0 + 0 \leq -4 \checkmark$$

$$0 + 0 \leq -3 \checkmark$$

$$0 \leq -1 \checkmark$$

$$0 \leq 0 \checkmark$$

$$0 \leq 0 \checkmark$$

$$0, 0 \in \mathbb{R}$$

\Rightarrow sol. ~~non~~
Ammissibile

* Applico cond. di Complementarità:

$$\begin{cases} \langle S_p, r \rangle = 0 \\ \langle S_d, x \rangle = 0 \end{cases} \rightarrow \text{già verificata parte dual standardizzata}$$

$$\begin{cases} Sd_1 = +4 - y_1 - y_2 \\ Sd_2 = +3 + 3y_1 - y_2 \\ Sd_3 = +1 - 4y_2 \\ Sd_4 = y_1 \\ Sd_5 = y_2 \end{cases} \quad y^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} Sd_1 = 4 \\ Sd_2 = 3 \\ Sd_3 = 1 \\ Sd_4 = 0 \\ Sd_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &> 0 \\ x_5 &> 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ >0 \\ >0 \end{bmatrix}$$

* PRIMALE RISTRETTO:

$$\min a_1 + a_2$$

$$\pi_1) \text{ ~~10~~ } -x_4 + a_1 = 10 \quad a_1 = 10$$

$$\pi_2) -x_5 + a_2 = 8 \quad a_2 = 8$$

$$x_4, x_5, a_1, a_2 \geq 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & x_4 & x_5 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 10 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

risolviamo le forme ideali: I-II

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_1 & a_2 & x_4 & x_5 \\ \hline -10 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 10 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \quad \text{II-III} \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} & a_1 & a_2 & x_4 & x_5 \\ \hline -18 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \quad \text{stop}$$

dato che f.o. $\neq 0 \Rightarrow$ la sol. trovata non è ottimale
 \Rightarrow devo migliorarla: $y^L = y^0 + \theta \pi^*$

\Rightarrow * DUALE RISTRETTO:

$$\max 10\pi_1 + 8\pi_2$$

$$-\pi_1 \leq 0$$

$$-\pi_2 \leq 0$$

$$\pi_1 \leq 1$$

$$\pi_2 \leq 1$$

$$\pi_1, \pi_2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \pi^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow y^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \end{pmatrix}$$

\hookrightarrow sost. nei vincoli del duale

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta + \theta \leq 4 \\ -3\theta + \theta \leq 3 \\ 4\theta \leq 1 \\ \theta \geq 0 \\ \theta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow y^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{y^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}}$$

\Rightarrow * Applico cond. Complementarity:

$$\begin{cases} Sd_1 = 4 - 1/4 - 1/4 \\ Sd_2 = 3 + 3/4 - 1/4 \\ Sd_3 = 1 - 4 \cdot 1/4 \\ Sd_4 = 1/4 \\ Sd_5 = 1/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Sd_1 = 7/2 \\ Sd_2 = 7/2 \\ Sd_3 = 0 \\ Sd_4 = 1/4 \\ Sd_5 = 1/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 > 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ >0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

COMPITO 4

* Primal Ristretto:

min z_1

$$\pi_1) z_1 = 10$$

$$\pi_2) x_3 = 2$$

$$x_3, z_1 \geq 0$$

$$\begin{array}{c|cc} & z_1 & x_3 \\ \hline & 1 & 0 \\ \hline \pi_1 & 10 & 1 \\ \pi_2 & 2 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} I - II \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{c|cc} & z_1 & x_3 \\ \hline & 0 & 0 \\ \hline \pi_1 & 10 & 1 \\ \pi_2 & 2 & 0 \end{array}$$

STOP

la f.o. $\neq 0 \rightarrow$ non c'è sol. ottimale

$$\text{cerco } y^2 = y^1 + \theta \pi^*$$

* Dual Ristretto:

$$\max z = 10\pi_1 + 2\pi_2$$

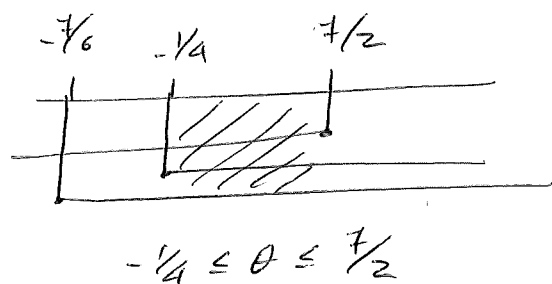
$$\pi_1 \leq 1$$

$$\pi_2 \leq 0$$

$$\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \pi^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y^2 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \theta = \begin{pmatrix} 1/4 + \theta \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1/4 + \theta + 1/4 \leq 4 \\ -3/4 - 3\theta + 1/4 \leq 3 \\ 4/4 \leq 1 \quad \checkmark \\ -1/4 - \theta \leq 0 \\ -1/4 \leq 0 \quad \checkmark \end{array} \right\} \begin{array}{l} \theta \leq 7/2 \\ \theta \geq -7/6 \\ \theta \geq -1/4 \end{array}$$



Prendo θ max: $\theta = 7/2$

$$\Rightarrow y^2 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} + 7/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 + 7/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

Si è avuti...

COMPITO RO

Dato il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \min & 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & 4x_1 - x_2 - 3x_3 \geq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti domande senza risolvere tramite l'utilizzo di algoritmi.

- Quali di questi vettori $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ sono soluzioni di base ammissibili? Perché?
- La/le soluzioni di base ammissibili del punto a) rimangono ancora tali se il problema di programmazione lineare da minimo cambia in massimo senza modificare funzione obiettivo e vincoli? Perché?
- Verificate se la/le soluzioni di base del punto a) sono anche ottime.
- Può esistere una soluzione ammissibile del duale di valore pari a $16/2$? Perché?
- Supponete che il problema di programmazione lineare sia della seguente forma

$$\begin{aligned} \min & \gamma x_1 - 3x_2 + x_3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 - \delta \\ & 4x_1 - x_2 - 3x_3 \geq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

dove γ, δ sono reali.

Calcolate per quali valori di γ e δ il vettore $x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ è soluzione ottima del problema.

COMPITO 6

$$\min 2x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$4x_1 - x_2 - 3x_3 \geq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0$$

$$\min 2x_1 + 3\bar{x}_2 + x_3$$

$$y_1) 3x_1 - 2\bar{x}_2 + x_4 = 12$$

$$y_2) 4x_1 + \bar{x}_2 - 3x_3 - x_5 = 2$$

$$x_1, \bar{x}_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$a) x^1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{sono SBA?}$$

Verifico ammissibilità:

$$x^1$$

$$12 \leq 12 \checkmark$$

$$16 \geq 2 \checkmark$$

$$4, 0, 0, 0 \geq 0 \checkmark$$

$$x^2$$

$$6 \leq 12 \checkmark$$

$$8 - 0 \geq 2 \checkmark$$

$$2, 0, 2 \geq 0 \checkmark$$

entrambe ammissibili

Trovo x_4 e x_5 :

$$x^1$$

$$x_4 = 0$$

$$x_5 = 14$$

$$x^2$$

$$x_4 = 6$$

$$x_5 = 0$$

x^1 è SBA.

~~Ma x^2 non è SBA~~ Non è SBA
perché hanno ~~entrambe~~ 3 comp.
in base di problema standard.

$$b) \max 2x_1 - 3x_2 + x_3 \longrightarrow \min -2x_1 + 3\bar{x}_2 - x_3$$

$$3x_1 - 2\bar{x}_2 + x_4 = 12$$

$$4x_1 + \bar{x}_2 - 3x_3 - x_5 = 2$$

$$x_1, \bar{x}_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Sì, perché la funz. obiettivo
SBA. La Regione ammissibile
dei vincoli.

non influenza le
soluzioni del esclusivamente

$$c) \max 12y_1 + 2y_2$$

$$3y_1 + 4y_2 \leq 2$$

$$-2y_1 + y_2 \leq 3$$

$$-3y_2 \leq 1$$

$$y_1 \leq 0$$

$$-y_2 \leq 0$$

$$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} s_{d_1} = 0 &\rightarrow \begin{cases} 2 - 3y_1 - 4y_2 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases} \\ s_{d_2} = 0 &\rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_1 = 3/2 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

Verifico ammissibilità:

$$2 \leq 2 \checkmark$$

$$-3 \leq 3 \checkmark$$

$$0 \leq 1 \checkmark$$

$$3/2 \leq 0 \quad X$$

$$0 \leq 0 \checkmark$$

$\rightarrow x^*$ è SPS ma non è ottima.

$$d) \quad c^T x \geq b^T y \quad (\text{Per Duality Debole})$$

$$c^T x \geq \frac{16}{2} = 8$$

$$x^* \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow c^T x = 8 \geq 8 \quad \text{yes!}$$

Si

COMPITO 6

e) $\min \quad 8x_1 - 3x_2 + x_3$
 $3x_1 + 2x_2 \leq 12 - \delta$
 $4x_1 - x_2 - 3x_3 \geq 2$
 $x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0$

↓ standardizzo

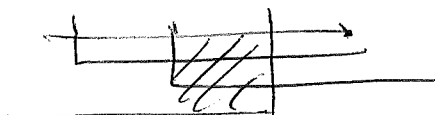
$\min \quad 8x_1 + 3\bar{x}_2 + x_3$
 1.) $3x_1 - 2\bar{x}_2 + x_4 = 12 - \delta$
 2.) $4x_1 + \bar{x}_2 - 3x_3 - x_5 = 2$
 $x_1, \bar{x}_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

↓

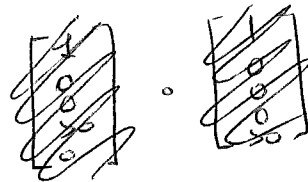
$\max \quad (12 - \delta) y_1 + 2y_2$
 $3y_1 + 4y_2 \leq \delta$
 $-2y_1 + y_2 \leq 3$
 $-3y_2 \leq 1$
 $y_1 \leq 0$
 $-y_2 \leq 0$

J) $\begin{cases} \delta y_1 = \delta - 3y_1 - 4y_2 = 0 \\ \delta y_4 = -y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = \frac{\delta}{4} \end{cases}$

$-\frac{4}{3} \quad 0 \quad 3$



$x^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ deve essere SBA
 ottima



* Ammissibilità:

~~$3 \leq 12 - \delta$~~

~~$4x_1 + \bar{x}_2 - 3x_3 - x_5 = 2$~~

$3 \leq 12 - \delta$

~~$- \delta \leq 8$~~

$\boxed{\delta \leq 9}$

Affidare x^1 sia ottima deve
 essere del tipo:

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\delta \leq 3 \checkmark$

$\delta \leq 3 \rightarrow \delta \leq 3$

$-\frac{\delta}{4} \leq 1 \rightarrow \delta \geq -\frac{4}{3}$

$-\frac{\delta}{4} \leq 0 \rightarrow \delta \geq 0$

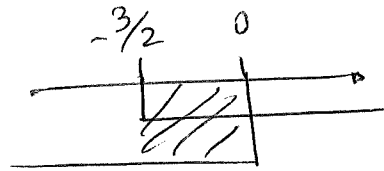
$\boxed{0 \leq \delta \leq 3}$

$$\text{II)} \quad \begin{cases} sd_1 = x - 3y_1 - 4y_2 = 0 \\ sd_2 = y_2 = 0 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{aligned} y_1 &= \frac{x}{3} \\ y_2 &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$-\frac{2}{3}x \leq 3 \rightarrow x \geq -\frac{3}{2}$$

$$\frac{x}{3} \leq 0$$

$$x \leq 0$$



$$\boxed{-\frac{3}{2} \leq x \leq 0}$$

\Rightarrow

$$\boxed{-\frac{3}{2} \leq x \leq 3}$$

$$\text{e } \boxed{x \leq 9}$$

RICERCA OPERATIVA - II PARTE

ESERCIZIO 1. Dato il seguente problema di programmazione lineare rispondere alla seguenti domande senza risolvere direttamente motivando le risposte:

$$\begin{aligned} \min & 2x_1 + x_2 - x_3 \\ & x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 8 \\ & 2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 6 \\ & x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- $\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ può essere una soluzione di base ammissibile?
- Può esistere un vertice della regione ammissibile del problema con x_1 e x_2 strettamente positivi?
- Può esistere una soluzione di base ottima del problema con x_1 e x_3 in base?
- Potreste applicare l'algoritmo del Simplexso Duale per risolvere il problema? Se no, quali condizioni lo renderebbero applicabile?

ESERCIZIO 2. Risolvere il seguente problema di programmazione lineare con l'algoritmo Primale-Duale partendo dal punto iniziale duale $y^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \min & x_1 - x_2 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

COMPITO ④

1) min $2x_1 + x_2 - x_3$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 8$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 6$$

$$x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

a) $x' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ è SBA?

• Ammissibile?

$$\begin{aligned} 3 &\leq 8 \checkmark \\ 1 &\geq 6 \checkmark \\ 2 &\in \mathbb{R}, 1, 1 \geq 0 \checkmark \end{aligned}$$

Yes.

NO A
PRIMA
(grazie a base)

* Standardi $z \geq 0$

$$x_1 = x_1^+ - x_1^-$$

$$\text{min } 2x_1^+ - 2x_1^- + x_2 - x_3$$

$$x_1^+ - x_1^- + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1^+ - 2x_1^- - x_2 + 4x_3 - x_5 = 6$$

$$x_1^+, x_1^-, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

tra x_4 e x_5 : $x_4 = 5$

$$x_5 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

non è SBA

vincoli = 2 =
var. che devono
essere in base

$\Rightarrow x' \text{ NON è SBA}$

b) \exists vertice (SBA) con x_1 e $x_2 > 0$ (ovvero in base)?

sono del tipo $x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ >0 \\ >0 \end{bmatrix}$

\Rightarrow Per il T. degli scarti complementari $s_{d2} = 0$
 $s_{d3} = 0$

* Standard:

$$x_1 = x_1^+ - x_1^-$$

$$\text{min } 2x_1^+ - 2x_1^- + x_2 - x_3$$

$$y_1) x_1^+ - x_1^- + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 8$$

$$y_2) 2x_1^+ - 2x_1^- - x_2 + 4x_3 - x_5 = 6$$

$$x_1^+, x_3, x_5, x_4 \geq 0, x_1^- \leq 0$$

$$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ >0 \\ >0 \\ >0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

* Dual:

$$\text{max } 8y_1 + 6y_2$$

$$y_1 + 2y_2 \leq 2$$

$$-y_1 - 2y_2 \leq 2$$

$$3y_1 - y_2 \leq 1$$

$$-2y_1 + 4y_2 \leq -1$$

$$y_1 \leq 0$$

$$y_2 \leq 0$$

$$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

* sono + infiniti!

Sost. gli 0 e vedo se $\exists x_2$ e x_3 ?

$$\begin{cases} 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ -x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} -18 + 12x_3 - 2x_3 = 8 \\ x_2 = -6 + 4x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} 10x_3 = 26 \\ x_2 = -6 + 4x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -6 + \frac{52}{5} \\ x_3 = \frac{13}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{22}{5} \\ x_3 = \frac{13}{5} \end{cases} \Rightarrow x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 22/5 \\ 13/5 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$\Rightarrow \exists$ SBA con x_2 e x_3 in base.

c) \exists SBA OTTIMA con x_1 e x_3 in base?

- Verifico se \exists SBA con x_1 e x_3 in base:

sono del tipo:

$$\begin{bmatrix} >0 \\ 0 \\ >0 \end{bmatrix}$$

che nello standardizzato diventerà:

$$\begin{matrix} x_1^+ \\ x_1^- \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} \begin{bmatrix} >0 \\ 0 \\ 0 \\ >0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(Prendo x_1^+ perché per dominio è l'unico che può essere ≥ 0)

$$\begin{cases} x_1^+ - 2x_3 = 8 \\ 2x_1^+ + 4x_3 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^+ = 8 + 2x_3 \\ 16 + 4x_3 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^+ = 3 \\ x_3 = -\frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -5/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

NON È AMMISSIBILE PER IL DOMINIO ($x_3 \geq 0$).

COMPITO ④

d) ~~Per essere~~ Per essere nella forma canonica del duale il problema dovrebbe avere $x_i \geq 0$ e $C_i \geq 0 \forall i$.

Nel nostro caso, $C_3 \leq 0$ e $x_1 \in \mathbb{R}$

\Rightarrow Non si può applicare l'alg. del Simplex Duale.

COMPITO (7)

2) Risolvere con alg. Primal-Dual partendo da $y^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\min x_1 - x_2$$

$$2x_1 - x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$$

STANDARD

$$\min x_1 + \bar{x}_2$$

$$y_1) 2x_1 + \bar{x}_2 + x_3 = 6$$

$$y_2) x_1 - \bar{x}_2 - x_4 = 1$$

$$x_1, \bar{x}_2 \geq 0$$

* dual:

$$\max 6y_1 + y_2$$

$$2y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1 - y_2 \leq 1$$

$$y_1 \leq 0$$

$$-y_2 \leq 0$$

$$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

* Verifico ammissibilità $y^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$0 \leq 1 \checkmark$$

$$0 \leq 1 \checkmark$$

$$0 \leq 0 \checkmark$$

$$0 \leq \checkmark$$

$$0, 0 \in \mathbb{R} \checkmark$$

y^0 ammissibile.

* Applico cond. Complementari:

$$\langle s_p, t \rangle = 0 \rightarrow \text{verificato}$$

$$\langle s_d, x \rangle = 0$$

$$\begin{cases} s_d1 = 1 - 2y_1 - y_2 \\ s_d2 = 1 - y_1 + y_2 \\ s_d3 = -y_1 \\ s_d4 = +y_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_d1 = 1 \\ s_d2 = 1 \\ s_d3 = 0 \\ s_d4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 > 0 \\ x_4 > 0 \end{bmatrix}$$

* Primal Restretto:

$$\min a_1$$

$$a_1, x_3 = 6$$

$$a_2, x_4 = 1$$

$$x_3, x_4, a_1 \geq 0$$

	a_1	x_3	x_4
$a_1: 6$	1	0	0
$a_2: 1$	0	1	0
$x_3: 1$	1	0	-1

I - III

	a_1	x_3	x_4
-1	0	0	1
$a_4: 6$	0	1	0
$x_3: 1$	1	0	-1

STOP

$f.o \neq 0 \rightarrow$ sol non esiste

$$\text{cerco } y^{(2)} = y^{(1)} + \theta f^*$$

* DUALIE RISTRETTO:

$$\max 6\pi_1 + 1\pi_2$$

$$\pi_2 \leq 1$$

$$\pi_1 \leq 0$$

$$\pi_1 = 0$$

$$-\pi_2 \leq 0$$

$$\pi_2 = 1$$

$$\pi^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R}$$

$$y^2 = y^1 + \theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \theta \leq 1 \\ -\theta \leq 1 \\ 0 \leq 0 \\ \theta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = 1 \Rightarrow y^2 = y^1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

* Verifico Ammissibilità:

$$1 \leq 1 \quad \checkmark$$

$$-1 \leq 1 \quad \checkmark$$

$$0 \leq 0 \quad \checkmark$$

$$-1 \leq 0 \quad \checkmark$$

y^2 è Ammissibile

$$\begin{cases} Sd_1 = 1 - 0 - 1 \\ Sd_2 = 1 - 0 + 1 \\ Sd_3 = 0 - 0 \\ Sd_4 = 0 + 1 \end{cases} \begin{cases} Sd_1 = 0 \\ Sd_2 = 2 \\ Sd_3 = 0 \\ Sd_4 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x_1 > 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 > 0 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \begin{bmatrix} > 0 \\ 0 \\ > 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

* Primal Ristretto:

$$\min 0$$

$$2x_1 + x_3 = 6$$

$$x_1 = 1$$

	0	2	0
x_1	6	2	1
x_3	1	1	0

fine

$\Rightarrow y^2$ è sol. ottimale.

$$\Rightarrow x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

APPELLO DI RICERCA OPERATIVA DEL 8 FEBBRAIO 2016 (II PARTE)

Problema 1

Risolvere il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & 18x_1 + 15x_2 + 11x_3 \\ & 6x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 10 \\ & 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \geq 22 \\ & 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 \leq 46 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Beh!

con l'algoritmo del simplesso duale. Determinare, a ogni iterazione, la corrispondente soluzione duale complementare. Successivamente scriverne il duale e risolvere quest'ultimo con il metodo del simplesso. Verificare che la sequenza di soluzioni di base corrisponda alla sequenza di soluzioni duali complementari ricavate precedentemente.

Problema 2

Risolvere il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + x_2 + 8x_3 + 10x_4 \\ & 3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 2 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

con il metodo primale-duale partendo dalla soluzione duale $y = (0, 3)$.

Problema 3

Dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ & x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -4 \\ & x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

verificare se i punti $x^{(1)} = [0 \ 4 \ 2 \ 0 \ 0]^T$, $x^{(2)} = [2 \ 0 \ 0 \ 6 \ 0]^T$ sono soluzioni di base ammissibili (non degeneri) per il problema. In caso affermativo verificarne anche l'ottimalità. Per le soluzioni di basi ammissibili per cui eventualmente non fosse stata trovata l'ottimalità, verificare le condizioni di illimitatezza per il problema.

8/02/2016

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad & \max \quad 3x_1 + x_2 + 8x_3 + 10x_4 \\
 & 3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 2 \\
 & 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 \leq 5 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$



standardizzato e trasf. in min:

$$\min \quad -3x_1 - x_2 - 8x_3 - 10x_4$$

$$y_1) \quad 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 2$$

$$y_2) \quad 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 + x_6 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

* duale:

$$\max \quad 2y_1 + 5y_2$$

$$3y_1 + 4y_2 \leq -3$$

$$y_1 + 3y_2 \leq -1$$

$$4y_1 + 3y_2 \leq -8$$

$$6y_2 \leq -10$$

$$y_1 \leq 0$$

$$y_2 \leq 0$$

$$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

* ammissibilità y^* :

$$12 \leq -3 \quad \times$$

\Rightarrow Non c'è sol. ammissibile.

Ne trovo un'altra:

$$y^* = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow T. Borch
Couppl.

$$\begin{cases}
 sd_1 = -3 + 3 + 8 = 8 \\
 sd_2 = -1 + 1 + 6 = 6 \\
 sd_3 = -8 + 4 + 6 = 2 \\
 sd_4 = 2 \\
 sd_5 = 1 \\
 sd_6 = 2
 \end{cases}$$

\Rightarrow

$$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ESAME 22/02/19

COMPITO DI RICERCA OPERATIVA

ESERCIZIO 1

DATO IL SEGUENTE PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

$$\max 3x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$5x_1 + x_2 - x_3 \leq 10$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \leq 0 \quad x_3 \text{ lib}$$

VERIFICARE, SENZA RISOLVERE IL PROBLEMA CON ALGORITMI PRIMALI O DUALI, SE

A) LE VARIABILI x_1 E x_3 POSSONO STARE IN BASE CONTEMPORANEAMENTE ALL'OTTIMOB) LE VARIABILI x_1 E x_2 POSSONO NON ESSERE IN BASE CONTEMPORANEAMENTE ALL'OTTIMOESERCIZIO 2RISOLVERE IL PROBLEMA DELL'ESERCIZIO 1 APPLICANDO L'ALGORITMO PRIMALE-DUALE (2 ITERAZIONI) ASSUMENDO LA $x_3 \geq 0$. SCEGLIERE LA SOLUZIONE DUALE INIZIANDO IN MODO ARBITRARIO.ESERCIZIO 3DATO IL SEGUENTE TABLEAU, QUALI VALORI DEI PARAMETRI $d, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ PERMETTONO DI AFFERMARE

	d	β	γ	δ	ϵ	θ
3	-1	1	2	1	0	0
5	-2	4	1	0	1	0
6	0	1	2	0	0	1

Rivedere

- A) CHE IL TABLEAU SIA OTTIMO. $\max 600$ $\beta=0$
- B) CHE IL PROBLEMA DI PL ASSOCIATO SIA ILLIMITATO. $\max 800$ $\beta=0$ $\gamma=0$
- C) CHE IL PROBLEMA DI PL ASSOCIATO SIA VUOTO. $\max 600$
- D) CHE IL PROBLEMA DI PL ASSOCIATO AMMETTA OTTIMI MULTIPLI FINITI.
- E) CHE IL PROBLEMA DI PL ASSOCIATO AMMETTA OTTIMI MULTIPLI ALL'INFINITO E ALL'INFINITO.

22/02/19

COMPITO (12)

$$\textcircled{1} \quad \min \quad 3x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$5x_1 + x_2 - x_3 \leq 10$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \leq 0, \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

$$\longrightarrow \quad \bar{x}_2 = -x_2$$

$$\bar{x}_3 = x_3^+ - x_3^-$$

$$x_3^+ \geq 0$$

$$x_3^- \leq 0$$

* Standard:

$$\min \quad 3x_1 + 2\bar{x}_2 + x_3^+ - x_3^-$$

$$y_1 \quad 5x_1 - x_2 - x_3^+ + x_3^- + x_4 = 10$$

$$y_2 \quad -x_1 - x_2 + 2x_3^+ - 2x_3^- - x_5 = 2$$

$$x_1, \bar{x}_2, x_3^+, x_4, x_5 \geq 0 \quad x_3^- \geq 0$$

a) Una SBA affine con x_1 e x_3 sono del tipo

$$\begin{matrix} x_1 \\ \bar{x}_2 \\ x_3^+ \\ x_3^- \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} \begin{bmatrix} > 0 \\ 0 \\ > 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 - x_3^+ = 10 \\ -x_1 + 2x_3^+ = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 10x_3^+ - 10 - x_3^+ = 10 \\ x_1 = 2x_3^+ - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3^+ = \frac{20}{9} \\ x_1 = \frac{40}{9} - 2 = \frac{22}{9} \end{cases}$$

* Duale:

$$\max \quad 10y_1 + 2y_2$$

$$x_1) \quad 5y_1 - y_2 \leq 3$$

$$x_2) \quad -y_1 - y_2 \leq 2$$

$$x_3^+) \quad -y_1 + 2y_2 \leq 1$$

$$x_3^-) \quad y_1 - 2y_2 \leq -1$$

$$x_4) \quad y_1 \leq 0$$

$$x_5) \quad -y_2 \leq 0$$

$$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} Sd_1 = 3 + y_2 - 5y_1 = 0 \\ Sd_3^+ = 1 + y_1 - 2y_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = 10y_1 + 5 - 3 \\ y_1 = 2y_2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y_2 = 2 \rightarrow y_2 = -\frac{2}{9} \\ y_1 = -\frac{4}{9} - 1 = -\frac{13}{9} \end{cases}$$

$y_2 \geq 0 \quad X \rightarrow$ ~~7~~ sba affine con x_1 e x_3 in base 1.

b) se x_1 e x_2 sono fuori dalla base entrante all'ottimo, x^* sono del tipo:

$$I: \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \circ \quad II: \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \circ \quad III: \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

devo verificare se \exists almeno una SBA ottimale \forall tipo.

$$IV: \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \circ \quad V: \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \circ \quad VI: \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$II) \quad \begin{cases} -x_3^+ + x_4 = 8 \\ 2x_3^+ = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 7 \\ x_3^+ = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} sd_3^+ = 1 + y_1 - 2y_2 = 0 \\ sd_4 = y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = 1/2 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ è SBA OTTIMA.}$$

②

min $3x_1 + 2\bar{x}_2 + x_3$
f.) $5x_1 - \bar{x}_2 - x_3 + x_4 = 10$
g.) $-x_1 - \bar{x}_2 + 2x_3 - x_5 = 2$
 $x_1, \bar{x}_2, x_3 \geq 0$

*Duale:

max $10y_1 + 2y_2$
 $5y_1 - y_2 \leq 3$
 $-y_1 - y_2 \leq +2$
 $-y_1 + 2y_2 \leq 1$
 $y_1 \leq 0$
 $-y_2 \leq 0 \rightarrow y_2 \geq 0$

*trovo y^0
 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = y^0$

$+0 \leq 3 \checkmark$
 $+0 \leq 2 \checkmark$
 $0 \leq 1 \checkmark$
 $0 \leq 0 \checkmark$
 $0 \geq 0 \checkmark$
OK

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

*Cond. Comp.

$\begin{cases} sd_1 = 3 - 5y_1 + y_2 = 3 \\ sd_2 = 2 + y_1 + y_2 = 2 \\ sd_3 = 1 \\ sd_4 = 0 \\ sd_5 = 0 \end{cases} \rightarrow x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ >0 \\ >0 \end{bmatrix}$

*PR:

min a_1

	a_1	x_4	x_5
$\pi_1) x_4 = 10$	10	1	0
$\pi_2) a_1 - x_5 = 2$	2	0	-1

\rightarrow

	a_1	x_4	x_5
$x_4 = 10$	0	1	0
$x_5 = -2$	-1	0	1

\Rightarrow la f.o. $\neq 0 \rightarrow$ Sol. y^0 non è ottimo,
ne cerco uno migliore del tipo: $y^{(1)} = y^{(0)} + \theta \pi^*$

*DR:

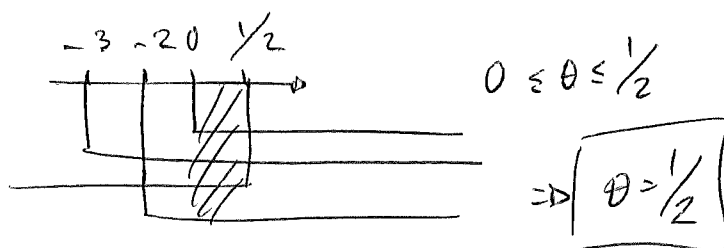
$$\max 10\pi_1 + 2\pi_2$$

$$\begin{aligned} \pi_1 &\leq 0 \\ \pi_2 &\leq 1 \\ -\pi_2 &\leq 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 0 \\ \pi_2 \geq 0 \\ \pi_2 \leq 1 \end{cases} \rightarrow \pi_2 = 1 \Rightarrow \pi^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y^{(1)} = y^0 + \theta \pi^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix}$$

Solh. nel duale:

$$\begin{aligned} -\theta &\leq 3 & \theta &\geq -3 \\ -\theta &\leq 2 & \theta &\geq -2 \\ 2\theta &\leq 1 & \theta &\leq 1/2 \\ \theta &\geq 0 & \theta &\geq 0 \end{aligned} \rightarrow$$



$$\Rightarrow y^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} sd_1 = 7/2 \\ sd_2 = 3/2 \\ sd_3 = 2 \\ sd_4 = 0 \\ sd_5 = 1/2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ >0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*PR:

$$\min 0$$

$$x_4 = 10$$

$$\Rightarrow x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

③

a)

	α	β	γ	δ	ϵ	ζ
3	-1	1	2	1	0	0
5	-2	4	1	0	1	0
8	0	1	2	0	0	1

$$\gamma = 0$$

$$\delta \geq 0$$

$$\alpha, \beta, \gamma \geq 0$$

b)

$$\gamma = 0$$

$$\alpha \leq 0$$

$$\delta \geq 0$$

~~$\beta \geq 0$~~

~~$\gamma \geq 0$~~

$$\beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

illikito

c)

$$\delta \leq 0, \alpha, \beta, \gamma > 0, \epsilon = 0$$

d)

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ & 3x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 2 \\ & 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \leq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Domande

- 1) E' possibile che (x_1, x_2) sono in base all'ottimo?
- 2) E' possibile che (x_1, x_2) sono entrambe fuori base all'ottimo?
- 3) Si puo applicare il simplex duale?

$$\begin{aligned} \text{2) max} \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 \\ & -3x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 2 \\ & 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \leq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Domande

- a) $K^T = [1 \ 0 \ 1]$ e' un vertice della regione ammissibile?
- b) Applicare il primale - duale al problema precedente pensando della sol duale $y^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4) min $2x_1 + x_2 + x_3$
 $3x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 2$
 $2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 4$
 $x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0$

a) \exists è possibile che x_1 e x_2 siano in base all'ottimo?

Standard:

min $2x_1 - \bar{x}_2 + x_3$

y₁) $3x_1 - 5\bar{x}_2 + x_3 - x_4 = 2$

y₂) $2x_1 - 4\bar{x}_2 - 2x_3 + x_5 = 4$

$x_1, \bar{x}_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Una SBA con x_1 e x_2 in base sarebbe del tipo:

$\begin{bmatrix} \geq 0 \\ \geq 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ trovo ~~non~~ x_1 e x_2 :

$$\begin{cases} 3x_1 - 5\bar{x}_2 = 2 \\ 2x_1 - 4\bar{x}_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 + 6\bar{x}_2 - 5\bar{x}_2 = 2 \\ x_1 = 2 + 2\bar{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_2 = -4 \\ x_1 = -6 \end{cases}$$

\Rightarrow ~~Non~~ SBA con x_1 e x_2 in base.
(e dunque SBA ottima).

b) \exists SBA con x_1 e x_2 fuori base?

\Rightarrow sono del tipo: $\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{I}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ x_4 \\ 0 \\ x_5 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{II}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_6 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{III}}$

I) $\begin{cases} x_3 - x_4 = 2 \\ -2x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = -2 + x_3 \\ x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -2 \\ x_4 = -4 \end{cases}$

NON
Ammissibile
per Dominio

$$\text{II) } \begin{cases} x_3 = 2 \\ -2x_3 + x_5 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{SBA}$$

~~II~~ *Dato:

$$\max 2y_1 + 4y_2$$

$$3y_1 + 2y_2 \leq 2$$

$$-5y_1 - 4y_2 \leq -1$$

$$y_1 - 2y_2 \leq 1$$

$$-y_1 \leq 0$$

$$+y_2 \leq 0$$

$$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} sd_1 = 2 - 3y_1 - 2y_2 \\ sd_2 = -1 + 5y_1 + 4y_2 \\ sd_3 = 1 - y_1 + 2y_2 \\ sd_4 = y_1 \\ sd_5 = -y_2 \end{cases}$$

Per il T. degli scarti complementari:

$$\langle sd, x \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} sd_3 = 0 \\ sd_5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 - y_1 + 2y_2 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

*Verifico ammissibilità:

$$3 \leq 2 \quad \times$$

$$-3 \leq -1 \quad \checkmark$$

$$1 \leq 1 \quad \checkmark$$

$$-1 \leq 0 \quad \checkmark$$

$$0 \leq 0 \quad \checkmark$$

Non è ammissibile
 \Rightarrow Non è ottima.

$$\text{III) } \begin{cases} -x_4 = 2 \\ x_5 = 4 \end{cases} \begin{cases} x_4 = -2 \\ x_5 = 4 \end{cases} \text{ Non ammissibile.}$$

\Rightarrow ~~sol.~~ sol. in base ottima con x_1 e x_2 ~~fuori~~ fuori dalla base.

c) $C^T \geq 0$ ma $c^T \geq 0$ ✓

$x_1 \geq 0$ ✓ ma $x_2 \leq 0 \rightarrow$ ✗ NOT

\Rightarrow Non si può applicare Simplex Duale.

2) $\max 2x_1 + x_2 - x_3$
 $-3x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 2$
 $2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 4$
 $x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0$

a) $x^T = [1, 0, 1]$ è vertice? (Vertice = SBA)

*Ammissibile?

$-3 + 0 - 1 \geq 2$ ✗ \rightarrow NON AMMISSIBILE
 $2 + 0 - 2 \leq 4$ ✓

\Rightarrow (NO)

b) $y^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

*Standardizzo:

$\min -2x_1 + \bar{x}_2 + x_3$

$y_1) -3x_1 + 5\bar{x}_2 - x_3 - x_4 = 2$

$y_2) 2x_1 - 4\bar{x}_2 - 2x_3 + x_5 = 4$

$x_1 \geq 0, \bar{x}_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

*Duale:

$\max +2y_1 + 4y_2$

$-3y_1 + 2y_2 \leq -2$

$-5y_1 - 4y_2 \leq -1$

$-y_1 - 2y_2 \leq 1$

$-y_1 \leq 0$

$+y_2 \leq 0$

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

*Verifico se y^0 è ammissibile:

$-3 \leq -2$

$-5 \leq -1$

$-1 \leq 1$

$-1 \leq 0$

$0 \leq 0$

Ammissibile

* Verifico cond. Complementariedad:

$$\langle Sd, x \rangle = 0$$

$$\begin{cases} Sd_1 = -2 + 3y_1 - 2y_2 \\ Sd_2 = 1 + 5y_1 + 4y_2 \\ Sd_3 = 1 + 1y_1 + 2y_2 \\ Sd_4 = 0 + 1y_1 + 0y_2 \\ Sd_5 = 0 + 0 + 1 \end{cases} \Big|_{y^0} = \begin{cases} Sd_1 = -1 \\ Sd_2 = 6 \\ Sd_3 = 2 \\ Sd_4 = 1 \\ Sd_5 = 0 \end{cases} \rightarrow x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \geq 0 \end{bmatrix}$$

* PR:

~~PR~~

~~PR~~

$$\begin{array}{l} \min a_1 \\ \pi_1) a_1 = 2 \\ \pi_2) x_5 = 4, a_1 = 4, a_1 = 2 \\ \pi_3) a_1, x_5 \geq 0, x_5 = 4 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} & a_1 & x_5 \\ \hline & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} & a_1 & x_5 \\ \hline -2 & 0 & 0 \\ \hline a_1 = 2 & 1 & 0 \\ x_5 = 4 & 0 & 1 \end{array}$$

$\neq 0, \neq 0$ non è ottimale

$$y^1 = y^0 + \theta \pi^*$$

* DR:

$$w_0 x + 2\pi_1 + 4\pi_2$$

$$\pi_1 \geq 1$$

$$\pi_2 \geq 0$$

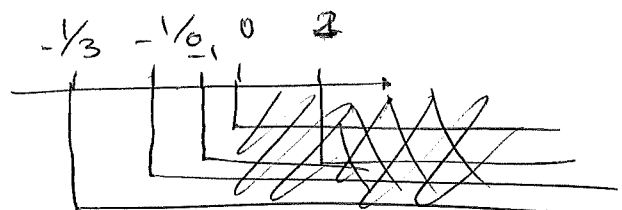
$$\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 1 \\ \pi_2 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \pi^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y^1 = y^0 + \theta \pi^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y^1 = \begin{pmatrix} 1+\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3-3\theta \leq -2 \\ -5-5\theta \leq 1 \\ -1-\theta \leq 1 \\ -1-\theta \leq 0 \\ 0 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta \geq -1/3 \\ \theta \geq -6/5 \\ \theta \geq 2 \\ \theta \geq -1 \end{cases}$$



$$\boxed{\theta \geq 2}$$

RANGE APERTO

\Rightarrow il duale è illimitato

\Rightarrow il Primal è vuoto

09/19

RICERCA OPERATIVA

14

ESERCIZIO 1

DATO IL SEGUENTE PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

$$\min 2x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 4$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$$

SENZA RISOLVERE IL PROBLEMA E UTILIZZARE METODI GRAFICI, RISPONDERE, MOTIVANDO, PERCHÉ:

- a) IL VETTORE $x = (1, 1, 1)$ NON PUÒ ESSERE UN VERTICE DELLA REGIONE AMMISSIBILE
- b) LA PRIMA E LA SECONDA COMPONENTE, OUSERO x_1 E x_2 , NON POSSONO ESSERE IN BASE ALL'OTTIMO CONTEMPORANEAMENTE

ESERCIZIO 2SENZA RISOLVERE DIRETTAMENTE IL PROBLEMA E UTILIZZARE METODI GRAFICI, DIRE PERCHÉ IL SEGUENTE PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE MATEMATICA ~~NON~~ È ILLIMITATO:

$$\min x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \leq 0$$

ESERCIZIO 3

QUANTE SOLUZIONI DI BASE AMMETTE IL SEGUENTE PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

$$\min 2x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$

$$x_1 - 2x_2 - 4x_3 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

RISPONDERE SENZA RISOLVERE IL PROBLEMA E MOTIVARE LA RISPOSTA.

COMPITO 14

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \min \quad & 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

a) $x^T = (1, 1, 1)$ può essere SBA?
verifico vincoli e dominio:

$$2 \cdot 1 + 1 \geq 4 \quad \checkmark$$

$$2 \cdot 1 + 2 \leq 10 \quad \checkmark$$

$$1, 1, 1 \geq 0 \quad \checkmark$$

Sicché se è SA, non può essere SBA poiché
ha 3 comp. in base ma dovrebbero essere 2.

b) Verifico se \exists SBA ottima con x_1 e x_2 in base:

$$\begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 - x_2 = 10 \end{cases} \begin{cases} 2x_1 = 14 \\ x_2 = -10 + 2x_1 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 7/2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$\Rightarrow \nexists$ SBA con x_1 e x_2 in base

$\Rightarrow \nexists$ SBA " " " " " all'ottimo.

②

$$\min x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$y_1) \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$$

$$y_2) \quad x_1 - x_2 + x_3 \geq -1$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad x_3 \leq 0$$

$$\min x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$$

$$x_1 - x_2 - \bar{x}_3 - x_5 = -1$$

$$x_1, x_2, \bar{x}_3, x_4, x_5 \geq 0$$

*Duale:

$$\max 8y_1 + y_2$$

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1 - y_2 \leq -3$$

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1 \leq 0$$

$$-y_2 \leq 0$$

$$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

Cerco una sol. Ammissibile:

$$y^0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-3 \leq 1 \quad \checkmark$$

$$-3 \leq -3 \quad \checkmark$$

\Rightarrow

$$-3 \leq 1 \quad \checkmark$$

$$-3 \leq 0 \quad \checkmark$$

$$0 \leq 0 \quad \checkmark$$

\Rightarrow il problema Duale è LIMITATO e dunque anche il Primal è LIMITATO.

③

$$\text{min } 2x_1 - 3x_2 + x_3$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$

$$x_1 - 2x_2 - 4x_3 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

→

$$\text{min } 2x_1 - 3x_2 + x_3$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

$$x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_5 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Uso la formula:

$$\binom{n}{m} = \binom{\# \text{ var}}{\# \text{ vincoli}} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{3! 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{\cancel{3!} \cdot 2} = \textcircled{10}$$

31/01/2019

$$\min 2x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 8$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$e) \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ può essere una SBA?}$$

- Ammissibilità:

$$2 + 3 - 2 \leq 8 \quad \checkmark$$

$$4 - 1 + 4 \geq 6 \quad \checkmark \rightarrow \text{Sol. Ammissibile.}$$

$$2, 1, 1 \geq 0 \quad \checkmark$$

- Standardizzo:

$$\min 2x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_5 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

var. in base =

vincoli Primali

\parallel
 \checkmark

\bar{x} non è SBA.

b) Modificare il Problema affinché \bar{x} sia SBA.

$$x_4 = 8 - 2 - 3 + 2 = 5$$

$$x_5 = -6 + 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -6 + 4 - 1 + 4 = 1$$

\Rightarrow Aggiungo i vincoli:

$$x_1 - x_2 - x_3 \geq 0$$

$$3x_1 - x_2 - x_3 \geq 4$$

c) \exists SBA con x_1 e x_2 in base?

Cerco una sol del tipo $\begin{bmatrix} >0 \\ >0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 8 \\ 2x_1 - x_2 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 8 - 3x_2 \\ 16 - 6x_2 - x_2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{56 - 30}{7} \\ x_2 = \frac{10}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{26}{7} \\ x_2 = \frac{10}{7} \end{cases}$$

verifico dominio: $\frac{26}{7} \geq 0 \checkmark$ $\frac{10}{7} \geq 0 \checkmark$ $\Rightarrow \exists$ SBA con x_1 e x_2 in base.

d) \exists SBA ottima con x_1 e x_3 in base?

\Rightarrow Sono del tipo $\begin{bmatrix} >0 \\ 0 \\ >0 \\ 8 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_3 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 8 + 2x_3 \\ 16 + 4x_3 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 8 + 2x_3 = 3 \\ x_3 = -5/2 \end{cases}$$

$x_3 \leq 0 \rightarrow \nexists$ SBA con x_1 e x_3 in base

$\Rightarrow \exists$ SBA ottima con x_1 e x_3 in base.

e)

f) Applicare Simplexso Duale:

- verifico l sia nella forma canonica:

$$c^T \geq 0 \quad \checkmark$$

$$x \geq 0 \quad \checkmark$$

- Standardizzo:

$$\min 2x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$-x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -8$$

$$-2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_5 = -6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	2	1	2	0	0
$x_4 = +8$	+1	+3	-2	+1	0
$x_5 = -6$	-2	1	-4	0	1

$$\min \left\{ \left| \frac{c_i}{a_i} \right| \right\} = \left| \frac{2}{1} \right|, \left| \frac{1}{-3} \right|, \left| \frac{2}{2} \right|, \left| \frac{0}{1} \right|$$

$$\frac{2}{1}, \frac{1}{-3}, \frac{2}{2}, \frac{0}{1}$$

$$\frac{2}{1}$$

$$\frac{2}{1} \neq \frac{2}{1}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	1	$\frac{5}{4}$	0	0	$+\frac{1}{2}$

$$x_4 = 11 \quad 0 \quad \frac{5}{2} \quad 0 \quad 1 \quad -\frac{1}{2}$$

$$x_3 = \frac{3}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{4} \quad 1 \quad 0 \quad -\frac{1}{4}$$

STOP.

31/01/2020

g) Risolvere con Primal-Dual:

$$\min 2x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 8$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$y^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

* Standardizzo:

$$\min 2x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$y_1) x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 8$$

$$y_2) 2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_5 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

* Dual:

$$\max 8y_1 + 6y_2$$

$$y_1 + 2y_2 \leq 2$$

$$3y_1 - y_2 \leq 1$$

$$-2y_1 + 4y_2 \leq 2$$

$$y_1 \leq 0$$

$$-y_2 \leq 0$$

$$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

* Verifico $y^{(0)}$ sia ammissibile:

$$0 \leq 2 \quad \checkmark$$

$$0 \leq 1 \quad \checkmark$$

$$0 \leq 2 \quad \checkmark$$

$$0 \leq 0 \quad \checkmark$$

$$0 \leq 0 \quad \checkmark$$

\Rightarrow Ammissibile

* Applico cond. Complementari:

$$\langle S_p, y \rangle = 0$$

$$\langle S_d, x \rangle = 0$$

$$\begin{cases} Sd_1 = 2 - y_1 - 2y_2 \\ Sd_2 = 1 - 3y_1 + y_2 \\ Sd_3 = 2 + 2y_1 - 4y_2 \\ Sd_4 = -y_1 \\ Sd_5 = y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Sd_1 = 2 \\ Sd_2 = 1 \\ Sd_3 = 2 \\ Sd_4 = 0 \\ Sd_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ >0 \\ >0 \end{bmatrix} = x$$

* PRIMAL RISTRETTO:

$$\min a_1$$

$$\pi_1) x_4 = 8$$

$$\pi_2) -x_5 + a_1 = 6$$

$$x_4, x_5, a_1 \geq 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} & a_1 & x_4 & x_5 \\ \hline & 1 & 0 & 0 \\ \hline x_4 = 8 & 0 & 1 & 0 \\ \hline a_1 = 6 & 1 & 0 & -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} & a_1 & x_4 & x_5 \\ \hline -6 & 0 & 0 & 1 \\ \hline x_4 = 8 & 0 & 1 & 0 \\ \hline a_1 = 6 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

$\Rightarrow y^{(0)}$ non è ottima (f.o. $\neq 0$)

* Duehe Ristretto:

$$\max 8\pi_1 + 6\pi_2$$

$$x_4) \begin{cases} \pi_1 \leq 0 \\ -\pi_2 \leq 0 \end{cases} \quad \pi_1 = 0$$

$$\pi^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

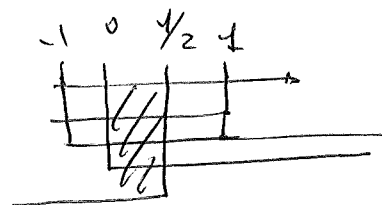
$$a_1) \begin{cases} \pi_2 \leq 1 \end{cases} \quad \pi_2 = 1$$

$$\pi_1, \pi_2 \geq 0$$

$$y^1 = y^0 + \theta \pi^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix}$$

* Trovo θ con l'ammissibilità:

$$\begin{cases} 2\theta \leq 2 \\ -\theta \leq 1 \\ 4\theta \leq 2 \\ 0 \leq \theta \\ -\theta \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \theta \leq 1 \\ \theta \geq -1 \\ \theta \leq 1/2 \\ \theta \geq 0 \end{cases}$$



$$0 \leq \theta \leq 1/2$$

$$y^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

* Applico Cond. Comp.:

$$\begin{cases} Sd_1 = 1 \\ Sd_2 = 3/2 \\ Sd_3 = 0 \\ Sd_4 = 0 \\ Sd_5 = 1/2 \end{cases} \rightarrow X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ >0 \\ >0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

* PR:

$$\min 0$$

$$-2x_3 + x_4 = 8$$

$$4x_3 = 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_4 = 11 \\ x_3 = 3/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3/2 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}$$