Soluzioni foglio 1

1) $\sqrt{x+7} \leq x$

$\boxed{\text{C.E.} \quad x+7 \geq 0 \quad x \geq -7}$

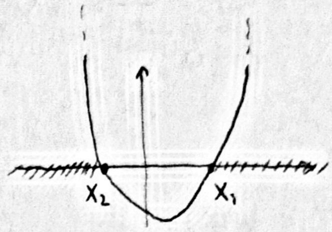
• se $x \geq 0$:

$$\left(\sqrt{x+7}\right)^2 \leq x^2$$

$$x+7 \leq x^2$$

$$x^2 - x - 7 \geq 0 \xrightarrow{\text{eq.}} x^2 - x - 7 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+28}}{2} \quad x_1 = \frac{1+\sqrt{29}}{2} \sim 3{,}19 \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{29}}{2} \sim -2{,}19$$



$$\begin{cases} x \leq \frac{1-\sqrt{29}}{2} \vee x \geq \frac{1+\sqrt{29}}{2} \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{1+\sqrt{29}}{2}$$

• se $-7 \leq x < 0 \Rightarrow \sqrt{x+7} \leq x$ non è mai verificata (perché $\sqrt{x+7}$ è una quantità positiva!)

Soluzione: $\boxed{x \geq \frac{1+\sqrt{29}}{2}}$

2) $|3x-7| \leq 2-x$

$$\begin{cases} 3x-7 \leq 2-x \quad \text{se } 3x-7 \geq 0 \iff x \geq \frac{7}{3} & ① \\ -3x+7 \leq 2-x \quad \text{se } 3x-7 < 0 \iff x < \frac{7}{3} & ② \end{cases}$$

① • $x \geq \frac{7}{3}$

$$3x-7 \leq 2-x$$
$$3x+x \leq 2+7$$
$$4x \leq 9$$
$$x \leq \frac{9}{4}$$

dato che $\frac{9}{4} < \frac{7}{3}$

$$\left\{x : x \geq \frac{7}{3} \text{ e } x \leq \frac{9}{4}\right\} = \phi$$

Impossibile

② • $x < \frac{7}{3}$

$$-3x+7 \leq 2-x$$
$$-3x+x \leq 2-7$$
$$-2x \leq -5$$
$$x \geq \frac{5}{2}$$

dato che $\frac{7}{3} < \frac{5}{2}$

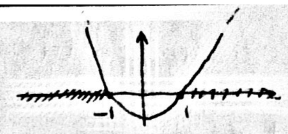
$$\left\{x : x < \frac{7}{3} \text{ e } x \geq \frac{5}{2}\right\} = \phi$$

Impossibile

$\boxed{\text{Non ci sono } x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |3x-7| \leq 2-x}$

3) $\sqrt{x^2-1} \leq 1$ C.E. $x^2-1 \geq 0 \rightarrow$ eq: $x^2-1=0$

$x_{1,2} = \pm 1$



$\boxed{x \leq -1 \vee x \geq 1}$

$(\sqrt{x^2-1})^2 \leq 1^2$

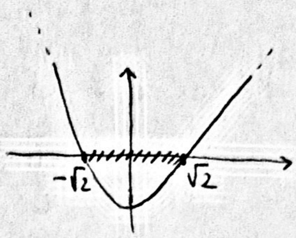
$x^2-1 \leq 1$

$x^2 \leq 1+1$

$x^2 \leq 2 \xrightarrow{eq} x^2-2=0$

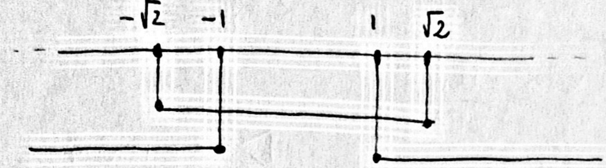
$x^2-2 \leq 0$

$x^2 = 2$ $\left\langle \begin{array}{l} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = -\sqrt{2} \end{array} \right.$



$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$
Che bisogna mettere a sistema con le condizioni di esistenza

$\begin{cases} -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ x \leq -1 \vee x \geq 1 \end{cases}$



Soluzione:

$\Rightarrow$ $\boxed{-\sqrt{2} \leq x \leq -1 \vee 1 \leq x \leq \sqrt{2}}$

4) $|x+2| \leq |2x-3|+1$

$\begin{cases} x+2 \leq |2x-3|+1 & \text{se } x+2 \geq 0 \iff x \geq -2 & (1) \\ -x-2 \leq |2x-3|+1 & \text{se } x+2 < 0 \iff x < -2 & (2) \end{cases}$

(1) $x+2 \leq |2x-3|+1$ $\boxed{x \geq -2}$

$\begin{cases} x+2 \leq 2x-3+1 & \text{se } 2x-3 \geq 0 \iff x \geq \frac{3}{2} & (1.a) \\ x+2 \leq -2x+3+1 & \text{se } 2x-3 < 0 \iff x < \frac{3}{2} & (1.b) \end{cases}$

(1.a) $x+2 \leq 2x-3+1$

$x+2 \leq 2x-2$

$x-2x \leq -2-2$

$-x \leq -4$

$\boxed{x \geq 4}$

OK perché soddisfa sia $\cdot\ x \geq -2$ che $\cdot\ x \geq \frac{3}{2}$

(1.b) $x+2 \leq -2x+3+1$

$x+2 \leq -2x+4$

$x+2x \leq 4-2$

$3x \leq 2$

$x \leq \frac{2}{3} \longrightarrow$ Va messa a sistema con $x \geq -2$ e $x < \frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ $\boxed{-2 \leq x \leq \frac{2}{3}}$

② $-x-2 \leq |2x-3|+1$ $\boxed{x<-2}$

$$\begin{cases} -x-2 \leq 2x-3+1 & \text{se } 2x-3 \geq 0 \iff x \geq \frac{3}{2} \\ -x-2 \leq -2x+3+1 & \text{se } 2x-3<0 \iff x<\frac{3}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ questo caso non ha soluzioni perché $x<-2$

- $-x-2 \leq -2x+3+1$

$-x+2x \leq 2+3+1$

$x \leq 6 \longrightarrow$ va messa a sistema con $x<-2$ e $x<\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \boxed{x<-2}$

Soluzione: $x \geq 4 \vee -2 \leq x \leq \frac{2}{3} \vee x<-2 \Rightarrow \boxed{x \leq \frac{2}{3} \vee x \geq 4}$

5) $\sqrt{1-|x|} < |x|-2$

C.E.
$1-|x| \geq 0$
$|x| \leq 1$
$-1 \leq x \leq 1$

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} < x-2 & \text{se } x \geq 0 \quad ① \\ \sqrt{1+x} < -x-2 & \text{se } x<0 \quad ② \end{cases}$$

① $\sqrt{1-x} < x-2$

dato che $x \leq 1$ per le condizioni d'esistenza, la quantità $x-2$ è negativa, mentre $\sqrt{1-x}$ è positiva sempre

$\Rightarrow$ non ci sono soluzioni

② $\sqrt{1+x} < -x-2$

$\hookrightarrow$ quantità sempre negativa per $-1 \leq x<0$

$\Rightarrow$ non ci sono soluzioni

$\boxed{\nexists x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \sqrt{1-|x|} < |x|-2}$

6) $\left|\dfrac{2x-5}{x+1}\right| > 1$

C.E. $x+1 \neq 0$
$x \neq -1$

$$\begin{cases} \dfrac{2x-5}{x+1} > 1 & \text{se } \dfrac{2x-5}{x+1} \geq 0 \\ \dfrac{5-2x}{x+1} > 1 & \text{se } \dfrac{2x-5}{x+1} < 0 \end{cases}$$

Studio: $\dfrac{2x-5}{x+1} \geq 0$

N) $2x-5 \geq 0$
$x \geq \dfrac{5}{2}$

D) $x+1 > 0$
$x > -1$

	-1		$5/2$	
N)	$-$	$-$		$+$
D)	$-$	$+$		$+$
	$\oplus$	$-$		$\oplus$

$x < -1 \vee x \geq \dfrac{5}{2}$

Quindi abbiamo

$$\begin{cases} \dfrac{2x-5}{x+1} > 1 & \text{se } x < -1 \vee x \geq \dfrac{5}{2} \quad (1) \\ \dfrac{5-2x}{x+1} > 1 & \text{se } -1 < x < \dfrac{5}{2} \quad (2) \end{cases}$$

(1) $\dfrac{2x-5}{x+1} > 1$ $\quad \boxed{x < -1 \vee x \geq \dfrac{5}{2}}$ ★

$\dfrac{2x-5}{x+1} - 1 > 0 \iff \dfrac{2x-5-x-1}{x+1} > 0 \iff \dfrac{x-6}{x+1} > 0$

N) $x-6 > 0$
$x > 6$

D) $x+1 > 0$
$x > -1$

	-1		6	
N)	$-$	$-$		$+$
D)	$-$	$+$		$+$
	$\oplus$	$-$		$\oplus$

$\boxed{x < -1 \vee x > 6}$

Rispetta la condizione ★

OK

(2) $\dfrac{5-2x}{x+1} > 1$ $\quad \boxed{-1 < x < \dfrac{5}{2}}$ ✿

$\dfrac{5-2x}{x+1} - 1 > 0 \quad \dfrac{5-2x-x-1}{x+1} > 0 \quad \dfrac{4-3x}{x+1} > 0$

N) $4-3x > 0$
$-3x > -4$
$x < \dfrac{4}{3}$

D) $x+1 > 0$
$x > -1$

	-1		$4/3$	
N)	$+$	$+$		$-$
D)	$-$	$+$		$+$
	$-$	$\oplus$		$-$

$\boxed{-1 < x < \dfrac{4}{3}}$

Rispetta la condizione ✿

OK

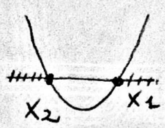
Soluzione: $\boxed{x < -1 \vee -1 < x < \dfrac{4}{3} \vee x > 6}$

7) $\log_{10}(x^2-7x+11)<0$

C.E. $x^2-7x+11>0$

$\xrightarrow{eq.}$ $x^2-7x+11=0$ $\quad \Delta=49-4(11)=5$

$x_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{5}}{2}$ $\quad x_1=\dfrac{7+\sqrt{5}}{2}$ $\quad x_2=\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$



$$\boxed{\text{C.E. } x<\frac{7-\sqrt{5}}{2} \lor x>\frac{7+\sqrt{5}}{2}}$$

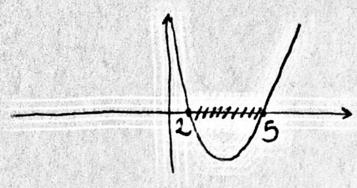
Un logaritmo è negativo $\Leftrightarrow$ il suo argomento è <1

Quindi dobbiamo risolvere:

$x^2-7x+11<1$

$x^2-7x+11-1<0$

$x^2-7x+10<0$ $\quad \Delta=49-40=9$ $\quad x_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{9}}{2}=\dfrac{7\pm3}{2}$ $\quad x_1=\dfrac{10}{2}=5$ $\quad x_2=\dfrac{4}{2}=2$

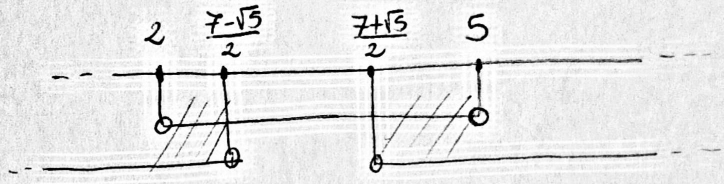


$$\boxed{2<x<5}$$

Va messa a sistema con le condizioni di esistenza

$$\begin{cases} 2<x<5 \\ x<\dfrac{7-\sqrt{5}}{2} \lor x>\dfrac{7+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$\dfrac{7-\sqrt{5}}{2} \simeq 2{,}38$ $\quad \dfrac{7+\sqrt{5}}{2} \simeq 4{,}61$



Soluzione: $\boxed{2<x<\dfrac{7-\sqrt{5}}{2} \lor \dfrac{7+\sqrt{5}}{2}<x<5}$

8) $x\ln x>0$ $\quad \boxed{\text{C.E. } x>0}$

Essendo $x>0$ per le C.E., il prodotto $x\cdot\ln x$ è maggiore di zero se e solo se anche $\ln x>0$

$\rightarrow$ Dobbiamo risolvere: $\ln x>0$

Ma un logaritmo è positivo se e solo se il suo argomento è maggiore di 1 $\Rightarrow$ $\boxed{x>1}$

Soluzione: $\boxed{x>1}$

9) $\bar{z} z^4 = \frac{3}{4} i$ Supponiamo $z \neq 0$ ($z=0$ non è soluzione) e poniamo: $z = \rho e^{i\theta}$, inoltre osserviamo che $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

Dunque:
$$\rho e^{-i\theta} (\rho e^{i\theta})^4 = \frac{3}{4} e^{i\pi/2}$$
$$\rho e^{-i\theta} \rho^4 e^{i4\theta} = \frac{3}{4} e^{i\pi/2}$$
$$\rho^5 e^{i3\theta} = \frac{3}{4} e^{i\pi/2} \Rightarrow \begin{cases} \rho^5 = \frac{3}{4} \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt[5]{\frac{3}{4}} \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \end{cases}$$

- $K=0$ $\quad \theta = \frac{\pi}{6} \quad z_0 = \sqrt[5]{\frac{3}{4}} e^{i\pi/6}$
- $K=1$ $\quad \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi + 4\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \quad z_1 = \sqrt[5]{\frac{3}{4}} e^{i\frac{5}{6}\pi}$
- $K=2$ $\quad \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi + 8\pi}{6} = \frac{3}{2}\pi \quad z_2 = \sqrt[5]{\frac{3}{4}} e^{i\frac{3}{2}\pi}$

$k=3$ $\quad \theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi$

<u>Soluzioni</u>: $\left\{ \sqrt[5]{\frac{3}{4}} e^{i\pi/6}, \sqrt[5]{\frac{3}{4}} e^{i\frac{5}{6}\pi}, \sqrt[5]{\frac{3}{4}} e^{i\frac{3}{2}\pi} \right\}$

10) $z^2 + i|z|^2 = 0$ poniamo $z = x+iy$, $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ $\Rightarrow (x+iy)^2 + i(\sqrt{x^2+y^2})^2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 + 2ixy + i(x^2+y^2) = 0$$
$$x^2 - y^2 + 2ixy + ix^2 + iy^2 = 0$$
$$x^2 - y^2 + i(2xy + x^2 + y^2) = 0 \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy + x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ (x+y)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x = -y \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 - y^2 = 0 \\ x = -y \end{cases}$$

$y^2 - y^2 = 0$ → <u>ovvio</u>

$x = -y$ → L'unica cosa che possiamo dire sulle soluzioni dell'eq. è che devono essere della forma: $z = x - ix$

$\Rightarrow$ <u>Soluzione</u> $= \{ z \in \mathbb{C} : z = x - ix \} = \{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Re}(z) \}$

11) $2z^2 + i\,Im(z) + Re(z) + 3\,(Im(z))^2 = 6$ poniamo $z = x + iy$

$Re(z) = x \quad Im(z) = y$

$2(x+iy)^2 + iy + x + 3y^2 = 6$

$2(x^2 - y^2 + 2ixy) + iy + x + 3y^2 = 6$

$2x^2 - 2y^2 + 4ixy + iy + x + 3y^2 = 6$

$2x^2 - 2y^2 + x + 3y^2 - 6 + i(4xy + y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x^2 - 2y^2 + x + 3y^2 - 6 = 0 \\ 4xy + y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} '' \\ y(4x+1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 & ① \\ 4x+1 = 0 & ② \end{cases}$

① $\begin{cases} '' \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 + x - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \Delta = 1 + 48$

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{49}}{4} = \dfrac{-1 \pm 7}{4}$ $\quad x_1 = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \quad x_2 = \dfrac{-8}{4} = -2$

Soluzioni: $z_1 = \dfrac{3}{2} + i0 = \dfrac{3}{2} \qquad z_2 = -2 + i0 = -2$

② $\begin{cases} '' \\ 4x+1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} '' \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} 2\left(\frac{1}{16}\right) - 2y^2 - \frac{1}{4} + 3y^2 - 6 = 0 \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{8} - 2y^2 - \frac{1}{4} + 3y^2 - 6 = 0 \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$

$\begin{cases} y^2 - \frac{49}{8} = 0 \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = \frac{49}{8} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} y = \pm \frac{7}{2\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$

Soluzioni: $z_3 = -\dfrac{1}{4} + i\dfrac{7}{2\sqrt{2}}$

$z_4 = -\dfrac{1}{4} - i\dfrac{7}{2\sqrt{2}}$

Soluzioni: $\left\{ \dfrac{3}{2},\ -2,\ -\dfrac{1}{4} + i\dfrac{7}{2\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{4} - i\dfrac{7}{2\sqrt{2}} \right\}$

12) $(z-1)^5 = |z-1|$ facuo un cambio di variabile e pongo $w = z-1$

$w^5 = |w|$ Risolvo scrivendo $w = \rho e^{i\theta}$, per $w \neq 0$ mentre $w=0$ è una soluzione (perché $0^5=0$)

$(\rho e^{i\theta})^5 = \rho$

$\rho^5 e^{i5\theta} = \rho \rightarrow \rho^4 e^{i5\theta} = 1 \rightarrow \begin{cases} \rho^4 = 1 \\ 5\theta = 0 + 2k\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{2}{5}k\pi \end{cases}$

- $K=0$ $\quad \theta = 0 \quad w_0 = 1 \cdot e^{i0} = 1$
- $K=1$ $\quad \theta = \frac{2}{5}\pi \quad w_1 = 1 \cdot e^{2/5\pi} = e^{2/5\pi}$
- $k=2$ $\quad \theta = \frac{4}{5}\pi \quad w_2 = e^{4/5\pi}$
- $k=3$ $\quad \theta = \frac{6}{5}\pi \quad w_3 = e^{6/5\pi}$
- $K=4$ $\quad \theta = \frac{8}{5}\pi \quad w_4 = e^{8/5\pi}$

Ricordiamoci che $w = z-1 \Rightarrow z = w+1$

quindi
$$\left.\begin{array}{l} w=0 \rightarrow z=1 \\ w=1 \rightarrow z=2 \\ w=e^{2/5\pi} \rightarrow z=e^{2/5\pi}+1 \\ w=e^{4/5\pi} \rightarrow z=e^{4/5\pi}+1 \\ w=e^{6/5\pi} \rightarrow z=e^{6/5\pi}+1 \\ w=e^{8/5\pi} \rightarrow z=e^{8/5\pi}+1 \end{array}\right\}$$
Queste sono le soluzioni cercate.

13) $\frac{z}{i} + \bar{z} = 3(z+i)$ OSS: $\frac{1}{i} = -i$ poniamo $z = x+iy$, $\bar{z} = x-iy$

$-i(x+iy) + x - iy = 3(x+iy+i)$

$-ix + y + x - iy = 3x + i3y + i3$

$y + x - 3x - ix - iy - i3y - i3 = 0$

$y + x - 3x + i(-x - y - 3y - 3) = 0$

$y - 2x + i(-x - 4y - 3) = 0$

$\begin{cases} y - 2x = 0 \\ -x - 4y - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x \\ -x - 8x - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} '' \\ -9x = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{2}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$

Soluzione: $\boxed{z = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i}$

14) $z^3 - 8i e^{i\frac{3}{2}\pi} = 0$

$z = 0$ NON è una soluzione, per $z \neq 0$ poniamo $z = \rho e^{i\theta}$, inoltre osserviamo che $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$(\rho e^{i\theta})^3 - 8 e^{i\pi/2} e^{i3/2\pi} = 0$

$\rho^3 e^{i3\theta} - 8 e^{i(\pi/2 + \frac{3}{2}\pi)} = 0$

$\rho^3 e^{i3\theta} - 8 e^{i2\pi} = 0$

$\rho^3 e^{i3\theta} = 8 e^{i2\pi} \iff \begin{cases} \rho^3 = 8 \\ 3\theta = 2\pi + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}k\pi \end{cases}$

- $k=0 \to \theta = \frac{2}{3}\pi \to z_0 = 2e^{i\frac{2}{3}\pi} = 2(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$
- $k=1 \to \theta = \frac{4}{3}\pi \to z_1 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$
- $k=2 \to \theta = 2\pi \to z_2 = 2e^{i2\pi} = 2$
- $k=3 \to \theta = \frac{2}{3}\pi + 2\pi$

$\boxed{\text{Soluzioni: } \{-1 \pm i\sqrt{3},\ 2\}}$

15) $z\bar{z} - 4 + i = 0$

~~z=0 NON è una soluzione, per z≠0 po~~

poniamo $z = x + iy$
$\bar{z} = x - iy$
$z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4 + i = 0$

$\iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ 1 = 0 \end{cases} \to$ impossibile

L'eq. non ammette soluzioni.

16) $z^2 + |z|^2 = \operatorname{Im}(z) + i\alpha$

poniamo $z = x + iy$
$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$(x+iy)^2 + x^2 + y^2 = y + i\alpha$

$x^2 \cancel{- y^2} + 2ixy + x^2 \cancel{+ y^2} = y + i\alpha$

$2x^2 - y + 2ixy - i\alpha = 0$

$2x^2 - y + i(2xy - \alpha) = 0$

$\begin{cases} 2x^2 - y = 0 \\ 2xy - \alpha = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x^2 \\ 2x(2x^2) = \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x^2 \\ 4x^3 = \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2\sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{16}} \\ x = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{4}} \end{cases}$

$\boxed{\text{Soluzione: } z_\alpha = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{4}} + i2\sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{16}}}$