BASI, VERTICI, BFS

ESE DI VERTICE

DATO IL SEGUENTE POLIEDRO $P: \{x \in R^n : Ax \leq b\}$

- $7x_1 - 5x_2 + x_3 \leq 2$
- $-2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 1$
- VERIFICARE CHE IL PUNTO $x_1 = [1\ 1\ 0]$ È UN VERTICE

STEP

① VERIFICARE FORMA $P \rightsquigarrow = Ax \leq b$

- $7x_1 - 5x_2 + x_3 \leq 2$ OK

$-2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 1$ NO $\rightarrow$ $2x_1 - 3x_2 - X_3 \leq 1$

② SCRIVERLO COME $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{MATRICE} \\ \text{COEFF.}}}{A} x = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{VECTOR}}}{b}$

- QUINDI

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

③ N.B. = UNA DISUG. $\underbrace{p^T x \leq k}_{}$ (SINGOLA DISUG. CHE DEF. P) IS ATTIVA IN $x' \in P$ IF $\rightsquigarrow$ $p^T x' = k$, QUINDI

$7 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2$ ATTIVA

$2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = -1$ ATTIVA

4) VERIFICARE CHE X SIA VERTICE, COME?

X' VERTICE IN P IF IN X' CI SONO $\underline{n}$

a) $\underline{\text{DISUG. ATTIVE}}$ $\underbrace{\text{LIN. INDIPENDENTI.}}$ b)

a) MA IN ES. CI SONO 2 DISUG., NE SERVONO 3 ⇝ n = GRADO SOLUZIONE

SI AGG. AD A LA MATRICE Id NEGATIVA

$$-I_n = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$ QUINDI,

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

⇝ ATT

⇝ ATT

⇝ NON ATT ⇝ $-1 = 0$ NO

⇝ NON ATTIVA

⇝ ATTIVA,

n DIS. ATT. $= 3$ ⇝ OK

b) BISOGNA VERIFICARE SIANO $\underline{\text{LIN. INDIP.}}$, COME?

- RICAVO MATRICE DA DISUGUAGLIANZE ATT., DOVE DISUGUAGLIANZA = COLONNA

⇝ SE LI SCRIVIAMO COME RIGHE È UGUALE

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- CALCOLO IL DETERMINANTE E VERIFICARE SIA $\neq 0$

$$\det(A) = \underbrace{\underset{a_{13}}{0} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det(A_{13})}_{=0} + \underbrace{0 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \det(A_{23})}_{=0}$$

$$-1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}\right) = -21+10 = -11 \neq 0$$

ALLORA, x' È UN VERTICE, È UNA SBA, POICHÉ

A = BASE ⇝ x TROVA SU VINCO

e TRA RIGHE (O COLONNE È UGUALE) SONO LIN. INDIP.

PRIMALE - DUALE

COME COSTRUIRE UN PROB. DUALE DA UNO PRIMALE ⇝ PL

	Primale	Duale	
	Min	Max	⇝ DA MIN A MAX
Vincoli	≥, ≤, =	≥, ≤, =	Variabili
Variabili	≥, ≤, =	≤, ≥, =	Vincoli

VICEVERSA →

	Primale	Duale	
	Max	Min	
Vincoli	≥, ≤, =	≤, ≥, =	Variabili
Variabili	≥, ≤, =	≥, ≤, =	Vincoli

ESEMPIO

$$\boxed{\min_x} \quad 12x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq 10 \\ x_1 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &\leq 7 \end{aligned}$$

VINCOLI

$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 = 0$] VARIABILI

⇝ DA ← A →, DA ↑ A ↓

$$\boxed{\max_u} \quad 10u_1 + u_2 + 7u_3$$

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &\leq 12 \\ 2u_1 + u_3 &\geq 2 \\ -u_1 + u_2 + u_3 &= 1 \end{aligned}$$

CORR. A # RIGA

VAR. $u_1 \geq 0,\ u_2 = 0,\ u_3 \leq 0$

	Primale	Duale	
	Min	Max	
Vincoli	≥, ≤, =	≥, ≤, =	Variabili
Variabili	≥, ≤, =	≤, ≥, =	Vincoli

	Primale	Duale	
	Max	Min	
Vincoli	≥, ≤, =	≤, ≥, =	Variabili
Variabili	≥, ≤, =	≥, ≤, =	Vincoli

ALTRO ES.

$$\min_{x,y} \; c^T x - d^T y$$

$$Ax \le a$$

$$By \le b$$

$$Cx + Dy = d$$

$$x \ge 0, \; y = 0$$

$$\max_{u} \; a u_1 + b u_2 + d u_3$$

$$A u_1 + C u_3 \le c$$

$$B u_2 + D u_3 = d$$

$$u_1 \le 0, \; u_2 \le 0, \; u_3 = 0$$

ESERCIZIO SIA IL SEG. PROBL. DI PLI.

$$\max \; 4x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 8$$

$$2x_1 - x_3 \le 7$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 \le 5$$

$$x_2 + x_3 \le 6$$

$x_2 \ge 0$ ⇝ VAR. LIBERE, QUANDO COSÌ LE VAR. LIBERE SONO COME $=0$

DUALE

$$\min_{y} \; 8y_1 + 7y_2 + 5y_3 + 6y_4$$

$$y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 4$$

$$2y_1 + 4y_3 + y_4 \ge 3$$

$$3y_1 - y_2 - y_3 + y_4 = 2$$

$$y_1 \ge 0, \; y_2 \ge 0, \; y_3 \ge 0, \; y_4 \ge 0$$

PROBL. PLI FORMA STANDARD. ⇝

DA PLI ≠ STAND
A PLI STANDARD.

Un qualsiasi problema di PL può essere messo nella seguente forma, detta *forma standard*:

$$
\begin{array}{lll}
\min & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \\
\text{s.t.} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \;\; = b_i & (i = 1 \ldots m) \\
 & x_i \in \mathbb{R}_+ & (i = 1 \ldots n)
\end{array}
$$

dove

- la funzione obiettivo è di minimo e senza costanti additive o moltiplicative (si moltiplicano per -1 le funzioni di massimizzazione; le costanti additive possono essere trascurate; le costanti moltiplicative positive possono essere trascurate, le costanti moltiplicative negative possono essere eliminate cambiando il verso di ottimizzazione);
- tutte le variabili sono positive o nulle (si effettuano sostituzioni di variabili per le variabili libere o negative);
- tutti i vincoli sono delle equazioni (si aggiunge una variabile positiva di slack per i vincoli di $\leq$ e si sottrae una variabile positiva di surplus per i vincoli di $\geq$);
- i termini noti b_i sono tutti positivi o nulli (si moltiplicano per -1 i vincoli con termine noto negativo).

Ciò permette, senza perdere in generalità, di risolvere un qualsiasi problema di PL tramite sistemi di equazioni lineari.

① FUNZIONE OBB. DI MINIMO, DOVE COST ADD. E MOLT. VENGONO TRASCURATI O ELIMINATI

② ALL. VARIABILI SONO ≥ 0 ⇝ X VAR LIBERE O NEGATIVE
↳ SOSTITUZ.

③ ALL VINCOLI SONO EQUAZIONI

④ TERMINI NOTI b SONO ≥ 0

ESEMPIO

Esercizio 1 *Mettere in forma standard il seguente problema di PL:*

$$
\begin{array}{ll}
\max & 5(-3x_1 + 5x_2 - 7x_3) + 34 \\
s.t. & -2x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 2x_1 \leq 5 \\
 & -3x_1 + x_3 + 12 \geq 13 \\
 & x_1 + x_2 \leq -2 \\
 & x_1 \leq 0 \\
 & x_2 \geq 0
\end{array}
$$

COSA FARE?

- SCE VAR. DA SOSTITUIRE

$x_1 \leq 0$ ⇝ OGNI $-x_1 = \hat{x}_1$ e $x_1 = -\hat{x}_1$

x_3 È LIBERO $\rightsquigarrow$ $x_3 = x_3^+ - x_3^-$

- CAMBIARE F.OBB.

LE TOGLIAMO

$$\max \; 5(-3x_1 + 5x_2 - 7x_3) + 34$$

$$\Downarrow$$

$$\max \; -3x_1 + 5x_2 - 7x_3$$

MOLTIPLICO PER -1
MAX $\rightarrow$ MIN

$$\Downarrow$$

$$\min \; 3x_1 - 5x_2 + 7x_3$$

- SOST. F.OBB. U NEW VAR.

$$\min \; -3\hat{x}_1 - 5x_2 + 7x_3^+ - 7x_3^-$$

- X VINCOLI

① CAMBIO VERSO (SE NECESSARIO)
② $\leq, \geq$ TO $\rightsquigarrow$ $=$ (SE NECESSARIO)
③ SOST. VAR.

$$-2x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 2x_1 \leq 5$$

$$\downarrow$$

$$-4x_1 + 7x_2 + 6x_3 \leq 5$$

$$\downarrow$$

$$-4x_1 + 7x_2 + 6x_3 + s_1 = 5$$

$$\downarrow$$

$$4\hat{x}_1 + 7x_2 + 6x_3^+ - 6x_3^- + s_1 = 5$$

- $-3x_1 + x_3 + 12 \geq 13 \rightarrow -3x_1 + x_3 \geq 1$

$$-3x_1 + x_3 - s_2 = 1$$

$$3\hat{x}_1 + x_3^+ - x_3^- - s_2 = 1$$

- $x_1 + x_2 \leq -2 \rightsquigarrow -x_1 - x_2 \geq 2$

$$-x_1 - x_2 - s_3 = 2$$

$$\hat{x}_1 - x_2 - s_3 = 2$$

PROBL. STANDARD

$$\min \quad -3\hat{x}_1 - 5x_2 + 7x_3^+ - 7x_3^-$$

$$\text{s.v.} \quad 4\hat{x}_1 + 7x_2 + 6x_3^+ - 6x_3^- + s_1 = 5$$

$$3\hat{x}_1 + x_3^+ - x_3^- - s_2 = 1$$

$$\hat{x}_1 - x_2 - s_3 = 2$$

$$\hat{x}_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3^+ \geq 0, \quad x_3^- \geq 0,$$

$$s_1, s_2, s_3 \geq 0.$$

2° ESE

scrivere in forma standard il seguente problema di programmazione lineare

$$\min \quad -13x_1 - 20x_2 + 5x_3 + x_4$$

$$
\begin{aligned}
-4x_1 + x_2 &\geq 1 \\
5x_2 + 3x_3 &= 4 \\
3x_1 + 12x_3 - x_4 &\geq -2 \\
x_2 + x_3 + 50x_4 &\leq 3
\end{aligned}
$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3.$$

$$x_4 = x_4^+ + x_4^-$$

$$\min \quad -13x_1 - 20x_2 + 5x_3 + x_4^+ - x_4^-$$

- $-4x_1 + x_2 \geq 1 \rightsquigarrow -4x_1 + x_2 - s_1 = 1$

$$-4x_1 + x_2 - s_1 = 1$$

- $5x_2 + 3x_3 = 4$ UGUALE

- $3x_1 + 12x_3 - x_4 \geq -2 \rightsquigarrow -3x_1 - 12x_3 + x_4 \leq 2$

$$-3x_1 - 12x_3 + x_4^+ - x_4^- + s_2 = 2$$

- $x_2 + x_3 + 50x_4 \leq 3$

$$\Downarrow$$

$$x_2 + x_3 + 50x_4^+ - 50x_4^- + s_3 = 3$$

PROBL. IN F. STANDARD.

$$\min \quad -13x_1 - 20x_2 + 5x_3 + x_4^+ - x_4^-$$

$$\text{s.v.} \quad -4x_1 + x_2 - s_1 = 1$$
$$5x_2 + 3x_3 = 4$$
$$-3x_1 - 12x_3 + x_4^+ - x_4^- + s_2 = 2$$
$$x_2 + x_3 + 50x_4^+ - 50x_4^- + s_3 = 3$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, \quad x_4^+ \geq 0, \; x_4^- \geq 0, \quad s_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3.$$

METODO DEL SIMPLESSO

INPUT ⇝ ① PLI IN FORMA STANDARD ⇝ $z = c^T x$ s.t. $Ax =$

② UNA SBA.

OUTPUT ⇝ $\begin{cases} \text{SBA OTTIMO} & \text{IF } \exists \text{ SOL. OTTIMA} \\ -\infty & \text{ELSE} \end{cases}$

ESE 1

$$x_2 + 3x_3 \le 5$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 8$$
$$x_1 - 5x_3 \le 4$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$$

a) $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 9/2 \\ 0 \end{bmatrix}$ QUALI SONO SBA ?

VER. AMMISSIBILITA'

PER $x^{(1)}$: $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ ✓

$5 + 0 \le 5 \rightarrow 5 \le 5$ ✓ AMMISSIBILE

$3 + 5 + 0 \le 8 \rightarrow 8 \le 8$ ✓

$3 \le 4$ ✓

$x^{(2)}$: $4 \le 5$ ✓

$8 \le 8$ ✓

$4 \le 4$ ✓

TUTTE AMMISSIBILI

$x^{(3)}$: $9/2 \le 5$ ✓

$8 \le 8$ ✓

$7/2 \le 4$ ✓

VERIFICA SBA

PROBL. FORMA STANDARD

$$x_2 + 3x_3 + s_1 = 5$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + s_2 = 8 \qquad x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \ge 0$$
$$x_1 - 5x_3 + s_3 = 4$$

$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$

$5 + 0 + s_1 = 5 \rightarrow s_1 = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 + s_2 = 8 \rightarrow s_2 = 0$

$x_1 - 5x_3 + s_2 = 4 \rightsquigarrow s_3 = 1$

$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ # VINCOLI $=$ # VAR. > 0 $\rightsquigarrow$ È SBA

$$\min \; 2x_1 - 3x_2 + x_3$$
$$3x_1 + 2x_2 = 12$$
$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 2$$
$$2x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 - 2x_3 \leq 4$$
$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0$$

· x DIMOST. CHE $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ USO T. DUALITÀ

$$\begin{cases} \langle S_P, Y \rangle = 0 \\ \langle S_d, X \rangle = 0 \end{cases}$$

P. DUALE

$$\max \; 12y_1 + 2y_2 + 4y_3$$
$$3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 2$$
$$2y_1 + 2y_2 + \tfrac{1}{4}y_3 \leq -3$$
$$-3y_2 - 2y_3 < 1$$
$$y_1 = 0, \; y_2 \geq 0, \; y_3 \leq 0$$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}$

T. COMPLEMENTARIETÀ:

$$y_1(3x_1+2x_2-12)=0 \to y_1(0) \to 0=0 \ \underline{\text{no}}$$

$$y_2(4x_1+2x_2-3x_3-2)=0 \to y_2(8) \to y_2=0$$

$$y_3(2x_1+\tfrac{1}{4}x_2-2x_3-4)=0 \rightsquigarrow y_3(0) \to 0=0 \ \underline{\text{no}}$$

$$x_1(2-3y_1-4y_2-2y_3)=0$$

$$x_2(-3-2y_1-2y_2-\tfrac{1}{4}y_3)=0 \rightsquigarrow x_2=0 \to 0=0$$

$$x_3(+1+3y_2+2y_3)=0$$

$$\begin{cases} y_2=0 \\ 3y_1+4y_2+2y_3=2 \\ 3y_2+2y_3=-1 \end{cases} \to \begin{cases} y_2=0 \\ y_3=-1/2 \\ y_1=1 \end{cases} \qquad y: \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

VERIFICA AMM.

$$\min \ 2x_1+2x_2+4x_3 \qquad \min \ \bar{x}_4+\bar{x}_5$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=3 \\ 2x_1+x_2+3x_3=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+2x_3+\bar{x}_4=3 \\ 2x_1+x_2+3x_3+\bar{x}_5=5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$	z	
0	0	0	1	1	0	
1	1	2	1	0	3	A_1
2	1	3	0	1	5	A_2