求解 Burgers 方程的差分格式比较

姓名　　　　　学号　　　　　班级

一、实验目的

1、 了解求解 Bugers 方程的多种差分格式。
2、 进行数值实验，比较各种差分格式的实际计算效果。
3、 熟悉 matlab 编程。

二、实验问题

给定 Burgers 方程:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

式中

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 1/2, \\ 0, & -1/2 < x < 1/2, \\ 1, & x \le -1/2. \end{cases}$$

用多种差分格式求解至 $t = 0.3s$，并比较数值结果。

三、实验原理

数值差分格式可以改写为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda\left(g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n\right)$$

其中

$$g_{j+\frac{1}{2}}^n = g\left(u_{j-l+1}^n, u_{j-l+2}^n, \cdots, u_{j+l}^n\right)$$

称为数值通量。为了满足差分格式与守恒律相容，必须满足

$$f(\omega) = g(\omega, \omega, \cdots, \omega), \forall \omega \in R.$$

此时称数值格式为守恒型差分格式。下面介绍几种求解 Burgers Equation 的差分格式。

1. Upwind 格式

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\lambda\left[\left(u_j^n\right)^2-\left(u_{j-1}^n\right)^2\right]/2$$

此时令 $g_{j+\frac{1}{2}}^n=g\left(u_j^n,u_{j+1}^n\right)=f\left(u_j^n\right)$，我们可以得到 Upwind Scheme 是一种守恒型差分格式。

2. Engquist-Osher 格式

在守恒律中，令

$$\kappa(u)=\begin{cases}1, & if \quad f'(u)>0\\ 0, & if \quad f'(u)<0.\end{cases}$$

并定义

$$f_+(u)=\int_0^u \kappa(s)f'(s)ds$$
$$f_-(u)=\int_0^u \left(1-\kappa(s)\right)f'(s)ds$$

那么，Engquist-Osher 格式定义为

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\lambda\left[\Delta_+ f_-(u_j^n)+\Delta_- f_+(u_j^n)\right]$$

式中 $\Delta_+ f_j=f_{j+1}-f_j,\Delta_- f_j=f_j-f_{j-1}$。

3. Lax-Wendroff 格式

$$\begin{aligned}u_j^{n+1}&=u_j^n-\frac{1}{2}\lambda\left[f\left(u_{j+1}^n\right)-f\left(u_{j-1}^n\right)\right]\\&+\frac{1}{2}\lambda^2\left[a_{j+\frac{1}{2}}^n\left(f\left(u_{j+1}^n\right)-f\left(u_j^n\right)\right)-a_{j-\frac{1}{2}}^n\left(f\left(u_j^n\right)-f\left(u_{j-1}^n\right)\right)\right]\end{aligned}$$

4. Lax-Friedrichs 格式

$$u_j^{n+1}=\frac{u_{j-1}^n+u_{j+1}^n}{2}-\frac{1}{2}\lambda\left[f\left(u_{j+1}^n\right)-f\left(u_{j-1}^n\right)\right]$$

5. Godunov 格式

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\lambda\left(f_{j+\frac{1}{2}}^n-f_{j-\frac{1}{2}}^n\right)$$

其中 $f_{j-\frac{1}{2}}^n=f\left(u_{j+0.5}^n\right)$，$u_{j+0.5}^n=R(0;u_j^n,u_{j+1}^n)$，后者通过求解局部 Riemann 问题得到。

6. Roe 方法

将 Godunov 中的求解局部 Riemann 问题得到的 $R(0;u_j^n,u_{j+1}^n)$ 换成通过线性化的

Riemann 问题的解

$$r\left(\frac{x}{t};u_l,u_r\right)=\begin{cases}u_l, & \frac{x}{t}<s\\ u_r, & \frac{x}{t}>s\end{cases}$$

其中 $s=a(u_l,u_r)$。

三、 实验结果

1、由第一种初始条件得到的数值结果

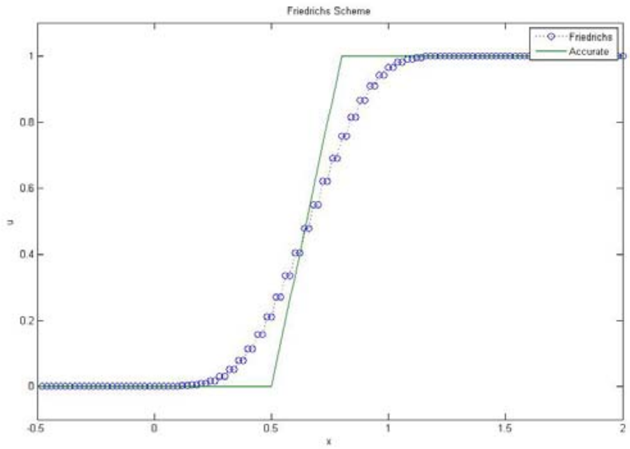

图 1：Lax-Friedrichs 格式

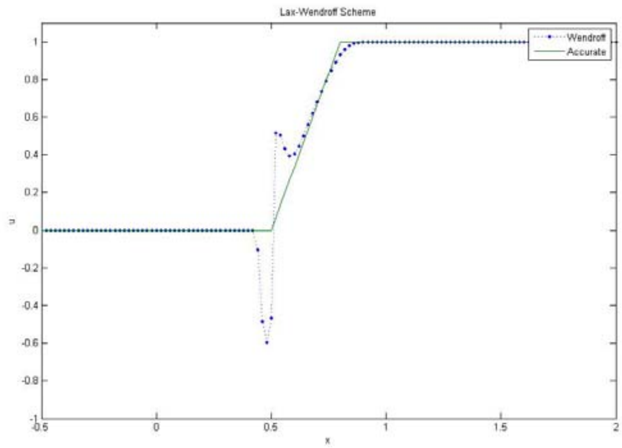

图 2：Lax-Wendroff 格式

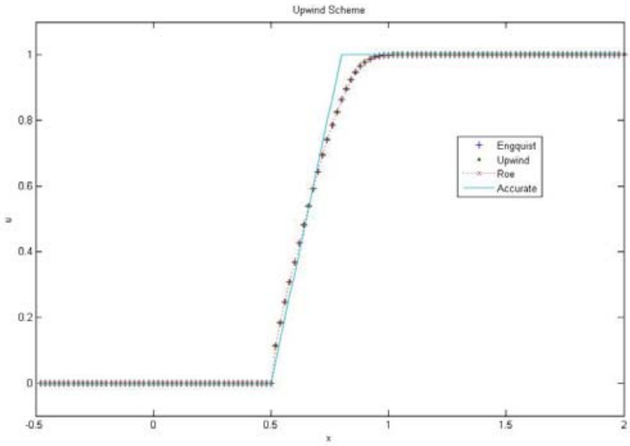

图 3：Upwind 格式、Engquis-Osher 格式、Roe 格式

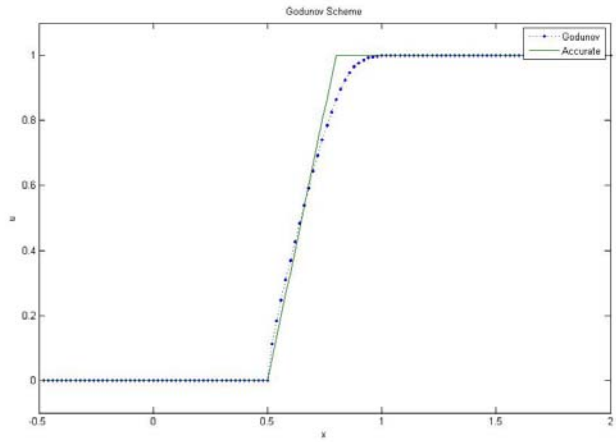

图 4：Godunov 格式

2、由第二种初值条件得到的数值结果

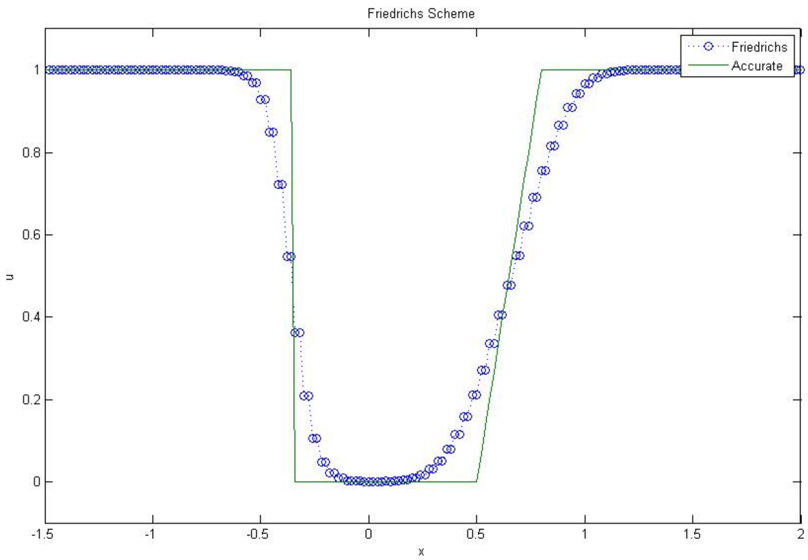

图 5： Lax-Friedrichs 格式

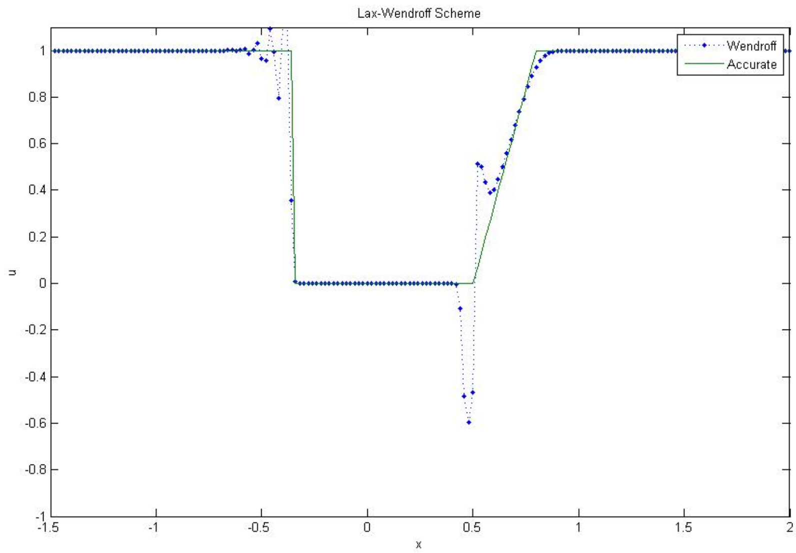

图 6：Lax-Wendroff 格式

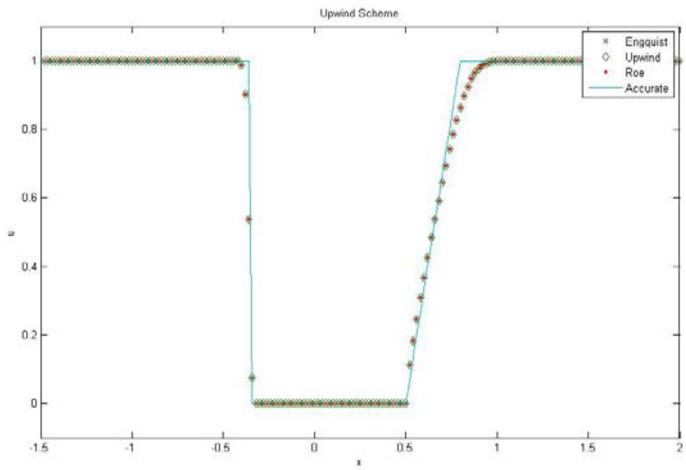

图 7：Engquist-Osher 格式，Upwind 格式和 Roe 格式

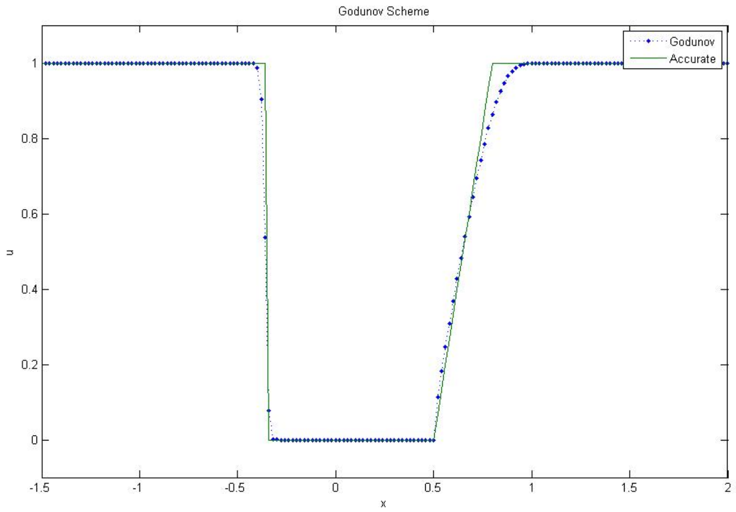

图 8：Godunov 格式

四、实验结果分析

通过图 1 我们可以看到通过 Lax-Friedrichs 格式得到的数值解在间断区域呈现阶梯状函数，但是没有出现振荡。通过图表 2 可以知道，Lax-Wendroff 格式在间断点出现了较大的振荡，相比于其它数值格式，通过 Lax-Wendroff 计算得到的数值解与精确解之间的误差较大。此外，通过之前的分析可以得到，在初值条件（1）下关于 Burgers 方程的 Engquist-Osher 格式，Upwind 格式和 Roe 格式实际上是同一种数值格式，他们比较光滑的逼近真实解，且在间断点处也无振荡。相比于前面几种格式，通过 Godunov 格式计算得到的数值解与真实解比较接近，而且是光滑逼近。以上几种格式，除了 Lax-Wendroff 格式以外，在初值连续的地方逼近效果都比较好，但是在间断处出现了较大的误差。几种格式的逼近效果排序如下:

$$Godunov > Engquist > Upwind = Engquist = Reo > Lax - Friedrichs > Lax - Wendroff$$

在第二种初值条件中我们可以看到有两个间断点，通过分析可以知道在较小的间断点附近会出现激波，在较大的间断点附近出现稀疏波。稀疏波部分结果与第一种边界条件得到的结果相同，这里不再多做介绍。这里我们着重分析在 $t = 0.3, x = -0.35$ 附近出现的激波的情形。通过观察分析 Lax-Wendroff 格式在间断点附近仍然是振荡比较厉害，产生较大的误差，因此不能通过该格式来求解数值解。而通过 Lax-Friedrichs 格式得到的数值格式是以光滑曲线的方式逼近真实解，通过观察数值结果我们可以知道，在激波区域真实解是以突变形式存在，所以 Lax-Friedrichs 格式得到的数值解在激波区域仍然误差较大。对于 Upwind 格式、Godunov 格式，我们通过对比发现它们都很好的反映激波区域解的走势，在间断点也有细微的误差，相比 Lax-Friedrichs 格式得到的数值解都精度提高很多。除此之外，我们还可以观察到这时候通过 Godunov 格式得到的数值结果比通过 Upwind 格式得到的结果精度有所提高，但是改进不大。几种数值格式在求解激波情形的 Burgers Equation 的精确度为：

$$Godunov > Engquist > Upwind = Engquist = Reo > Lax - Friedrichs > Lax - Wendroff$$

这与稀疏波情形得到的结果相类似。

五、实验总结

通过分析以上实验结果我们可以看到在利用数值解求解 Burgers 方程的过程中,之前一些对线性波动方程近似效果很好的数值格式在这里失去了其仿真效果。比如说 Lax-Friedrichs 格式在激波区域的光滑逼近反而造成了数值解的误差较大，Lax-Wendroff 格式虽然精度很高，但是其在间断点出表现出振荡的特性也使得数值解与真实解之间的误差较大。通过构造局部 Riemann 问题得到的 Godunov 格式相对于之前一些常规的差分格式有很好的近似效果。

总的来说,这次数值实验很好的通过数值近似计算模拟了 Burgers 方程在稀疏波区域和激波区域的情形。特别是在稀疏波情形中，得到的数值解与物理解之间吻合很好，达到了预期的目的。