数理统计笔记

作者：Crab

组织：南开大学省身班

时间：2023 年 2 月 10 日

说明：本笔记根据王兆军、邹长亮老师的《数理统计教程》整理而成

ElegantLaTeX Program

I don't have any secret. I'm just passionate about what I do. ——Samuelson

目录

第 1 章 基本概念

1.1 引言

1.1.1 几个例子

内容提要

- ❑ 抽样调查
- ❑ 估计
- ❑ 假设检验
- ❑ 试验设计
- ❑ 质量控制
- ❑ 时间序列
- ❑ 回归

例 1.1.1 (抽样调查 (sampling survey))

例 1.1.2 (估计 (estimation))

例 1.1.3 (假设检验 (hypothesis testing))

例 1.1.4 (试验设计 (design of experiment))

例 1.1.5 (质量控制 (quality control))

例 1.1.6 (时间序列 (time series))

例 1.1.7 (回归 (regression))

1.1.2 什么是数理统计

1. 数理统计学的研究内容必须是受到随机影响的数据
   随机性来源于：一、试验误差（不是系统误差）；二、随机抽样
2. 如何“有效”地收集数据
   一、建立一个模型描述所得数据；二、数据中要尽可能多地包含与研究问题有关的信息
3. 如何“有效”地利用数据
   从数据中提取所研究问题的相关信息，再对所研究的问题作出一个结论，这种“结论”在统计上称为**推断** (inference)。

1.2 几个基本概念

1.2.1 样本和样本分布

- **样本** (sample)：通过观测或试验而得到的数据，又称**样品**或**子样**
- **样本容量** (sample size) 或**样本大小**：样本的个数
- **样本空间** (sample space)：样本可能取值的全体
- **样本分布** (sample distribution)：从概率论的角度看，样本就是随机变量，样本的概率分布就称为样本分布

1.2.2 总体与总体分布

- **总体** (population)：研究问题所涉及的全体对象的集合，又称**母体**
- **个体或单元**：总体中的每个元素
- **抽样**：从总体中按一定规则抽出一些个体，所抽得的个体称为**样本**
- **总体分布**：样本容量为 1 时的样本分布

当总体分布为 F，而 $X_1, \cdots, X_n$ 为独立同分布的样本时，称 $X_1, \cdots, X_n$ 是从总体 F 中抽出的**简单随机样本**或**独立同分布样本** (independent identically distribution，简记为 IID)，记为

$$X_1, \cdots, X_n \overset{\text{IID}}{\sim} F(x) \tag{1.2.1}$$

若分布 F 有概率密度函数 $f(x)$，则也常记为

$$X_1, \cdots, X_n \overset{\text{IID}}{\sim} f(x) \tag{1.2.2}$$

有时，也用一个抽象的记号 X 来表示所考察的指标，把 X 看成一个随机变量，其分布就是总体分布 F，样本 $X_1, \cdots, X_n$ 是 X 的观测值，且以

$$X_1, \cdots, X_n \overset{\text{IID}}{\sim} X \tag{1.2.3}$$

表示来自总体 X 的 IID 样本。

1.2.3 样本分布族、参数和参数空间

- **参数** (parameter)：出现在样本分布中的未知常数
- **参数空间**：参数所在的大概范围
- 讨厌参数：某些实际问题中，有些参数不是我们感兴趣的

1.2.4 统计量

- **统计量**：能由样本计算出来的量

例 1.2.1 (样本均值与样本方差)

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为样本，则

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \tag{1.2.4}$$

分别称为样本均值 (sample mean) 和样本方差 (sample variance)。

性质

- 对 $\forall c$，$\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-c)^2$
- 若总体 $E(X)=\mu,Var(X)=\sigma^2<\infty$，则 $E(\overline{X})=\mu,Var(\overline{X})=\dfrac{1}{n}\sigma^2$
- 若总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{1}{n}\sigma^2\right)$
- 若总体分布未知或非正态分布，$E(X)=\mu,Var(X)=\sigma^2<\infty$，则当 n 较大时，$\overline{X}$ 的渐近分布为 $N\left(\mu,\dfrac{1}{n}\sigma^2\right)$，记为 $\overline{X}\overset{\bullet}{\sim}N\left(\mu,\dfrac{1}{n}\sigma^2\right)$

上式定义的样本方差中，其分母为 $n-1$，称为 S_n^2 的**自由度** (degree of freedom)，其解释如下：

- 有 n 个样本 $X_1,\cdots,X_n$，它们都可以自由变化，故其自由度为 n，但由于其中一个已用于估计总体均值，故还有 $n-1$ 个可自由变化。
- 从 S_n^2 的定义可以看出，它是由 n 个数 $X_1-\overline{X},\cdots,X_n-\overline{X}$ 的平方求和得到的，而这 n 个数有一个约束 $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})=0$，故其自由度只有 $n-1$。
- 如果把 $\overline{X}$ 代入 $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则可知它是一个如下形式的二次型：$\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}X_iX_j(a_{ij}=a_{ji})$，且不难验证矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})$ 的秩为 $n-1$。

例 1.2.2 (样本相关系数)

设 $\begin{pmatrix}X_1\\Y_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}X_n\\Y_n\end{pmatrix}$ 为一个二维样本，则

$$r(X,Y)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}} \tag{1.2.5}$$

称为 X,Y 间的样本相关系数 (sample correlation coefficient)。

例 1.2.3 (次序统计量)

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为样本，把 $X_1,\cdots,X_n$ 由小到大排列成 $X_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)}$，则称 $(X_{(1)},\cdots,X_{(n)})$ 为次序统计量 (order statistic)，$X_{(i)}$ 称为第 i 个次序统计量。

注 理解第 i 个次序统计量的随机性：对于给定的一组样本值 $x_1,\cdots,x_n$，$X_{(i)}$ 取值 $x_{(i)}$。

通过次序统计量，可以导出一些常用的统计量：

- **样本 p 分位数** (quantile)：对于给定的 $p \in (0,1)$，称

$$m_{n,p} = X_{([np])} + (n+1)\left(p - \frac{[np]}{n+1}\right)(X_{[np]+1} - X_{[np]}) \tag{1.2.6}$$

为此样本的 p 分位数，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。其渐近分布为

$$m_p \overset{\bullet}{\sim} N\left(x_p, \frac{p(1-p)}{n[p(x_p)]^2}\right), \quad n \longrightarrow \infty \tag{1.2.7}$$

特别地，**样本中位数** (median) 定义为

$$X_{med} = \begin{cases} X_{((n+1)/2)}, & n \text{ 为奇数} \\ \dfrac{X_{(n/2)} + X_{(n/2+1)}}{2}, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \tag{1.2.8}$$

满足

$$m_{0.5} \overset{\bullet}{\sim} N\left(x_{0.5}, \frac{1}{4n[p(x_{0.5})]^2}\right), \quad n \longrightarrow \infty \tag{1.2.9}$$

注 关于样本 p 分位数的定义还有许多种。随着样本容量的加大，它们间的差别并不大 $(k = np + o(\sqrt{n}))$。

- **极值**：称 $X_{(1)}$ 和 $X_{(n)}$ 为极小值和极大值统计量。
- **极差**：$R = X_{(n)} - X_{(1)}$。

例 1.2.4 (样本变异系数)

设 $X_1, \cdots, X_n$ 为样本，则称 $S_n/\overline{X}$ 为样本变异系数 (coefficient of variation)。

例 1.2.5 (样本 k 阶矩 (moment))

称 $a_k = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^k$ 和 $b_k = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k$ 为样本 k 阶原点矩和样本 k 阶中心矩。

例 1.2.6 (样本偏度与样本峰度)

设 $X_1, \cdots, X_n$ 为样本，则

$$\hat{\beta}_S = \frac{b_3}{b_2^{3/2}} = \frac{\sqrt{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^3}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \quad \hat{\beta}_k = \frac{b_4}{b_2^2} - 3 = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^4}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right]^2} - 3 \tag{1.2.10}$$

分别称为样本偏度 (skewness) 和样本峰度 (kurtosis)。

1.2.5 经验分布函数

定义 1.2.1 (经验分布函数)

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为取自总体分布函数为 $F(x)$ 的样本，$X_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)}$ 为其次序统计量，则称

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I_{\{X_i<x\}}=\begin{cases}0, & x\leqslant X_{(1)}\\ \dfrac{k}{n}, & X_{(k)}<x\leqslant X_{(k+1)}, k=1,\cdots,n-1,\\ 1, & x>X_{(n)}\end{cases}\tag{1.2.11}$$

为样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的**经验分布函数** (empirical distributed function)。

可以证明 $F_n(x)$ 是一个非降的左连续函数，且当样本是 IID 时，具有如下性质：

性质

- $F_n(x)\xrightarrow{P}F(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$
- $E[F_n(x)-F(x)]^2\longrightarrow 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$
- $P\{\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)\}=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$
- $\dfrac{\sqrt{n}(F_n(x)-F(x))}{\sqrt{F(x)(1-F(x))}}\xrightarrow{d}N(0,1),\ \forall x\in\mathbb{R}$

由以上性质知，对任意给定的实数 x，当 n 充分大时，$F_n(x)$ 与 $F(x)$ 的值在概率意义下是非常接近的，见如下定理。

定理 1.2.1 (Glivenko-Cantelli)

对于任意给定的正整数 n，设 $X_1,\cdots,X_n$ 为取自总体分布 $F(x)$ 的 IID 样本，$F_n(x)$ 为其经验分布函数，记

$$D_n=\sup_x|F_n(x)-F(x)|,$$

则有

$$P\{\lim_{n\to\infty}D_n=0\}=1.$$

1.2.6 抽样分布

由于统计量是作为随机变量的样本的函数，故其也有概率分布。称统计量的概率分布为该统计量的**抽样分布** (sampling distribution)。

例 1.2.7

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的 IID 样本，则由概率论知识得

$$\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right),$$

更一般地，有

$$T = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i \sim N\left(\mu \sum_{i=1}^{n} c_i, \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} c_i^2\right).$$

例 1.2.8 (次序统计量)

设 $X_1, \cdots, X_n \overset{\text{IID}}{\sim} F(x)$，求次序统计量 $X_{(k)}$ 的抽样分布。

解

$$\begin{aligned} F_k(x) &= P\{X_{(k)} < x\} = P\{X_1, \cdots, X_n \text{中至少有 } k \text{ 个小于 } x\} \\ &= \sum_{m=k}^{n} P\{X_1, \cdots, X_n \text{中恰有 } m \text{ 个小于 } x\} \\ &= \sum_{m=k}^{n} \binom{n}{m} [F(x)]^m [1 - F(x)]^{n-m} \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

由习题一第 30 题，有

$$F_k(x) = k \binom{n}{k} \int_0^{F(x)} t^{k-1} (1-t)^{n-k} \, dt \tag{1.2.13}$$

如果总体分布 $F(x)$ 有概率密度函数 $f(x)$，则 $X_{(k)}$ 也有概率密度函数，且为

$$f_k(x) = k \binom{n}{k} [F(x)]^{k-1} [1 - F(x)]^{n-k} f(x) \tag{1.2.14}$$

□

笔记 更常用的方法是利用微元法求次序统计量的概率密度函数。

特别地，当 $k = 1$ 和 $k = n$ 时，有极小值与极大值次序统计量的**累积分布函数** (cumulative distribution function，简记为 CDF) 与**概率密度函数** (probability density function，简记为 PDF) 如下：

$$\begin{aligned} F_1(x) &= 1 - [1 - F(x)]^n, \quad f_1(x) = n[1 - F(x)]^{n-1} f(x), \\ F_n(x) &= [F(x)]^n, \quad f_n(x) = n[F(x)]^{n-1} f(x). \end{aligned}$$

次序统计量 $X_{(i)}, X_{(j)} (i < j)$ 的联合密度函数为

$$f_{ij}(x, y) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} [F(x)]^{i-1} [F(y) - F(x)]^{j-i-1} [1 - F(y)]^{n-j} f(x) f(y), x \leqslant y \tag{1.2.15}$$

利用推广组合数的记号可记为

$$f_{ij}(x, y) = \binom{n}{i-1 \; j-i-1 \; n-j} [F(x)]^{i-1} [F(y) - F(x)]^{j-i-1} [1 - F(y)]^{n-j} f(x) f(y), x \leqslant y \tag{1.2.16}$$

1.3 统计中常用的抽样分布

1.3.1 χ^2 分布

定义 1.3.1 (χ^2 分布)

设 $X_1, \cdots, X_n \overset{\text{IID}}{\sim} N(0,1)$，则称随机变量

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \tag{1.3.1}$$

所服从的分布为自由度为 n 的 **χ^2 分布**，也称 ξ 为自由度为 n 的 χ^2 随机变量，记为 $\xi \sim \chi^2(n)$。

定理 1.3.1 (χ^2 分布的概率密度函数)

χ^2 分布的 PDF $f(x)$ 为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.3.2}$$

即 $\chi^2(n) = \mathit{\Gamma}\left(\dfrac{n}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$。

例 1.3.1

对于一般的情形，设 $X_1, \cdots, X_n \overset{\text{IID}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$，其中 μ 为已知常数，则统计量

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \sim \mathit{\Gamma}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2\sigma^2}\right). \tag{1.3.3}$$

定理 1.3.2 (χ^2 分布的数字特征)

设 $\xi \sim \chi^2(n)$，则

1. ξ 的特征函数为 $\psi(t) = (1-2it)^{-\frac{n}{2}}$
2. $E\xi = n$, $Var\,\xi = 2n$

两个独立的 χ^2 分布之和仍是 χ^2 分布，且其自由度为两者之和。

定理 1.3.3

设 $\xi \sim \chi^2(m)$, $\eta \sim \chi^2(n)$，且 ξ, η 相互独立，则 $\xi + \eta \sim \chi^2(m+n)$。

一般地，设 $\xi_i \sim \chi^2(n_i), i = 1, \cdots, m$ 相互独立，则 $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \xi_i \sim \chi^2\left(\sum_{i=1}^{m} n_i\right)$

χ^2 分布有用的一个重要原因是有如下定理成立。

定理 1.3.4 (★★★)

设 $X_1,\cdots,X_n \overset{\text{IID}}{\sim} N(\mu,\sigma^2)$，$\overline{X}$ 和 S_n^2 分别是样本均值和样本方差，则

1. $\overline{X}$ 与 S_n^2 独立
2. $\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$
3. $\dfrac{n-1}{\sigma^2}S_n^2 \sim \chi^2(n-1)$

注 若一组随机样本的均值与方差独立，则总体分布必为正态分布。

定理 1.3.5 (Cochran)

设 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，且 $X_i \sim N(\mu_i,\sigma^2)$，令 $\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_n)^T$。设 $\mathbf{A}_1,\cdots,\mathbf{A}_m$ 是 m 个 n 阶非负定矩阵，且 $\mathbf{A}_1+\cdots+\mathbf{A}_m=\mathbf{I}_n$，$\sum\limits_{i=1}^m rank(\mathbf{A}_i)=n$，记 $\xi_i=\mathbf{X}^T\mathbf{A}_i\mathbf{X}$，$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\cdots,\mu_n)^T$，则

1. $\xi_1,\cdots,\xi_m$ 相互独立
2. 如果 $\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{A}_1\boldsymbol{\mu}=\mathbf{0}$，则 $\dfrac{\xi_1}{\sigma^2}\sim\chi^2(rank(\mathbf{A}_1))$

1.3.2 t 分布

定义 1.3.2 (t 分布)

设 $\xi\sim N(0,1)$，$\eta\sim\chi^2(n)$，且 ξ,η 相互独立，则称随机变量

$$T=\frac{\xi}{\sqrt{\eta/n}} \tag{1.3.4}$$

所服从的分布为 t **分布**，n 为其自由度，记为 $T\sim t(n)$。

定理 1.3.6 (t 分布的概率密度函数)

$t(n)$ 分布的 PDF 为

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}. \tag{1.3.5}$$

性质

- $t(n)$ 的 PDF 关于 y 轴对称，且 $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)=0$；
- 随着 n 的增大，其峰度越来越高，尾部越来越小；
- 由于对固定的 x，有
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}=e^{-\frac{x^2}{2}},$$
故当 n 很大时，t 分布的 PDF 接近于标准正态分布的 PDF；
- 当 $n=1$ 时，它是 Cauchy 分布，故此时期望不存在。

定理 1.3.7 (t 分布的数字特征)

设 $\xi \sim t(n), n>1$，则 $\forall r<n$，$E\xi^r$ 存在，且有

$$E\xi^2=\begin{cases} n^{\frac{r}{2}}\dfrac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & r\text{是偶数} \\ 0, & r\text{是奇数} \end{cases} \tag{1.3.6}$$

特别地，若 $n>2$，有

$$E\xi=0,\quad Var\,\xi=\frac{n}{n-2}.$$

例 1.3.2 (t 检验)

设 $X_1,\cdots,X_n \overset{\text{IID}}{\sim} N(\mu,\sigma^2)$，样本均值和样本方差分别为 $\overline{X}$ 和 S_n^2，则

$$T=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S_n}\sim t(n-1) \tag{1.3.7}$$

例 1.3.3

设 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\eta/\sigma^2\sim\chi^2(n)$，且 ξ,η 相互独立，则

$$T=\frac{\xi-\mu}{\sqrt{\eta/n}}\sim t(n). \tag{1.3.8}$$

1.3.3 F 分布

定义 1.3.3 (F 分布)

设 $\xi\sim\chi^2(m)$，$\eta\sim\chi^2(n)$，且 ξ,η 相互独立，则称随机变量

$$F=\frac{\xi/m}{\eta/n} \tag{1.3.9}$$

所服从的分布为 F **分布**，其自由度为 (m,n)，记为 $F\sim F(m,n)$。

定理 1.3.8 (F 分布的概率密度函数)

$F(m,n)$ 分布的 PDF $f(x;m,n)$ 为

$$f(x;m,n)=\begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\dfrac{m}{n}\right)\left(\dfrac{mx}{n}\right)^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\dfrac{mx}{n}\right)^{-\frac{m+n}{2}}, & x>0 \\ o, & x\leqslant 0 \end{cases} \tag{1.3.10}$$

由该定理的推导过程，可以得到一下推论。

推论 1.3.9

设 $\xi\sim\chi^2(m),\eta\sim\chi^2(n)$，且 ξ,η 相互独立，则 $Y=\xi+\eta$ 与 $Z=\xi/\eta$ 相互独立。

性质

- $F(1,n)=[t(n)]^2$

- 设随机变量 $X \sim F(m,n)$，则 $\frac{1}{X} \sim F(n,m)$
- 给定 $\alpha \in (0,1)$，$F(m,n)$ 的 α 分位数和 $F(n,m)$ 的 $1-\alpha$ 分位数满足 $F_\alpha(m,n) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}$

定理 1.3.10 (F 分布的数字特征)

设 $\xi \sim F(m,n)$，则对 $r>0$ 有

$$E\xi^r = \left(\frac{n}{m}\right)^r \frac{\Gamma\left(r+\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-r\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad 2r<n. \tag{1.3.11}$$

特别地，有

$$E\xi = \frac{n}{n-2}, \quad n>2$$

$$Var\,\xi = \frac{n^2(2m+2n-4)}{m(n-2)^2(n-4)}, \quad n>4$$

由 Cochran 定理 1.3.5 和 F 分布的定义，有如下定理成立。该定理在方差分析 (analysis of variance，简记为 ANOVA) 中非常有用。

定理 1.3.11

设 $X_1,\cdots,X_n \overset{\text{IID}}{\sim} N(0,\sigma^2)$，$Q_1,\cdots,Q_k$ 是秩为 n_i 的关于 $X_1,\cdots,X_n$ 的非负定二次型，且 $\sum_{i=1}^k Q_i = \sum_{i=1}^n X_i^2$，$n_1+\cdots+n_k=n$，则

$$F_{ij} = \frac{Q_i/n_i}{Q_j/n_j} \sim F(n_i,n_j).$$

结合前面正态总体的有关性质，有如下几个非常有用的定理。

定理 1.3.12

设 $X_1,\cdots,X_n \overset{\text{IID}}{\sim} N(\mu,\sigma^2)$，$\overline{X}, S_n^2$ 分别是样本均值和样本方差，则

$$T = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S_n} \sim t(n-1). \tag{1.3.12}$$

定理 1.3.13

设 $X_1,\cdots,X_m \overset{\text{IID}}{\sim} N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y_1,\cdots,Y_n \overset{\text{IID}}{\sim} N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且两组样本独立，样本方差分别记为 S_1^2 和 S_2^2，则

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1,n-1). \tag{1.3.13}$$

特别地，如果 $\sigma_1=\sigma_2$，则 $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(m-1,n-1)$。

定理 1.3.14

设 $X_1, \cdots, X_m \overset{\text{IID}}{\sim} N(\mu_1, \sigma^2)$，$Y_1, \cdots, Y_n \overset{\text{IID}}{\sim} N(\mu_2, \sigma^2)$，且两组样本独立，样本方差分别记为 S_1^2 和 S_2^2，则

$$T = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}} \sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}} \sim t(m+n-2). \tag{1.3.14}$$

1.3.4 常用的分布族

1.3.4.1 Γ 分布族

定义 1.3.4 (Γ 分布)

PDF 为

$$f(x; \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x},\ x > 0 \tag{1.3.15}$$

的分布称为 Γ **分布**，记为 $\Gamma(\alpha, \lambda)$，其中 $\alpha > 0$ 称为形状参数 (shape parameter)，$\lambda > 0$ 称为尺度参数 (scale parameter)。

关于 Γ 分布，容易得到

1. 特征函数为 $\psi(t) = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-\alpha}$
2. k 阶矩为 $E\xi^k = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\lambda^k}$
3. 期望为 $E\xi = \frac{\alpha}{\lambda}$
4. 方差为 $Var\,\xi = \frac{\alpha}{\lambda^2}$

在相同的尺度参数下，Γ 分布关于 α 具有可加性：

定理 1.3.15

设 $\xi \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$, $\eta \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$，且 ξ, η 相互独立，则

$$\xi + \eta \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$$

关于 Γ 分布的尺度参数，有如下的数乘性质：

定理 1.3.16

设 $\xi \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$，则对于任意 $k > 0$，均有

$$\eta = \xi / k \sim \Gamma(\alpha, k\lambda)$$

1.3.4.2 β 分布族

定义 1.3.5 (β 分布)

定义在 $[0,1]$ 上的具有如下 PDF

$$f(x;a,b)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1},\ 0\leqslant x\leqslant 1 \tag{1.3.16}$$

的分布称为 **β 分布**，记为 $\beta(a,b)$，其中 $a>0,\ b>0$ 为两个参数。

关于 β 分布，容易得到

1. 期望为 $E\xi=\dfrac{a}{a+b}$
2. 方差为 $Var\,\xi=\dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

1.3.4.3 指数型分布族

定义 1.3.6 (指数型分布族)

设 $\mathcal{F}=\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$ 是某参数分布族，如果 $f(x,\theta)$ 可以表示成

$$f(x,\theta)=c(\theta)\exp\left\{\sum_{i=1}^{k}c_i(\theta)T_i(x)\right\}h(x) \tag{1.3.17}$$

则称此分布族为**指数型分布族**，其中 k 为正整数，$c(\theta)>0,\ h(x)>0$。

为了方便，常把指数型概率密度函数写成如下的典则形式 (canonical form)：

$$f(x,\eta)=\exp\left\{\sum_{i=1}^{k}\eta_iT_i(x)-a(\eta)\right\}h(x),\ \eta\in\varXi=\{\eta(\theta):\theta\in\Theta\} \tag{1.3.18}$$

其中 η 称为自然参数，$\varXi$ 称为自然参数空间。

如果自然参数空间 $\varXi$ 包含一个开集，则称此指数型分布族为满秩的。

- 常见的正态分布族、二项分布族、Γ 分布族、β 分布族、Poisson 分布族、负二项分布族都是指数型分布族；
- 均匀分布族 $\{U(0,\theta):\theta>0\}$ 不是指数型分布族，因为它的支撑集与参数有关。

注 一个 PDF $f(x,\theta)$ 的**支撑集** (support set) 定义为 $S=\{x:f(x,\theta)>0\}$。

1.4 充分统计量

定义 1.4.1 (充分统计量)

对于某分布族 $\mathcal{F}=\{F_\theta(x):\theta\in\Theta\}$，对 $\forall F\in\mathcal{F}$，设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 F 的样本，$T=T(X_1,\cdots,X_n)$ 是一统计量。如果在给定 $T=t$ 下，样本 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的条件概率分布与总体分布 F 或参数 θ 无关，则称统计量 T 是此分布族 $\mathcal{F}$ 的**充分统计量** (sufficient statistic)，也称统计量 T 是参数 θ 的**充分统计量**。

注

- 对于连续型随机变量，其概率分布为概率密度函数 PDF；对于离散型随机变量，其概率分布为累计分布函数 CDF;
- 充分统计量可以是向量，但不一定与参数的维数相同；
- 如果统计量 T 是参数 θ 的充分统计量，$S(t)$ 是单值可逆的，则 $S(T)$ 也是 θ 的充分统计量。

例 1.4.1

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 Bernoulli 分布 $b(1,p)$ 的 n 个 IID 样本。考虑统计量 $T_1=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 和 $T_2=X_1+X_2$，则 T_1 是参数 p 的充分统计量，T_2 不是 p 的充分统计量。

例 1.4.2

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 Poisson 分布 $P(1\lambda)$ 的 IID 样本,，则 $T=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 是参数 λ 的充分统计量。

定理 1.4.1 (因子分解定理★★★)

对于参数分布族 $\mathcal{F}=\{F_\theta(x):\theta\in\Theta\}$，设 $X_1,\cdots,X_n$ 为其一组 IID 样本，T 是一统计量，则 T 是 θ 的充分统计量的充要条件是：其样本分布 $f_\theta(x_1,\cdots,x_n)$ 可分解为

$$f_\theta(x_1,\cdots,x_n)=g_\theta(T(x_1,\cdots,x_n))\cdot h(x_1,\cdots,x_n), \tag{1.4.1}$$

其中 $h(x_1,\cdots,x_n)$ 不依赖于参数 θ。

例 1.4.3

求均匀分布 $U(0,\theta)$ 的充分统计量。

解 联合 PDF 为

$$f_\theta(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & 0<\min\{x_i\}\leqslant\max\{x_i\}<\theta,\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

由于各 $x_i>0$，上式可以改写为

$$f_\theta(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\theta^n}\mathbf{I}_{\{X_{(n)}<\theta\}}.$$

则由因子分解定理 1.4.1 可知，$T=X_{(n)}$ 是 θ 的充分统计量。 □

例 1.4.4

考虑均匀分布族 $U\left(\theta-\dfrac{1}{2},\theta+\dfrac{1}{2}\right)$ 的充分统计量。

解 联合 PDF 为
$$f_\theta(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\theta^n}\mathbf{I}_{\{\theta-\frac{1}{2}<X_{(1)}\leqslant X_{(n)}<\theta\}}.$$
则由因子分解定理 1.4.1 可知，$T=(X_{(1)},X_{(n)})$ 是 θ 的充分统计量。 □

例 1.4.5

考虑正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的充分统计量。

解 联合 PDF 为
$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2\right\} \\ &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{n\mu}{\sigma^2}\bar{x} - \frac{n\mu^2}{2\sigma^2}\right\} \end{aligned}$$
则由因子分解定理 1.4.1 知，$T=\left(\overline{X},\sum\limits_{i=1}^n X_i^2\right)$ 是 (μ,σ^2) 的充分统计量。

统计量 $\left(\overline{X},\sum\limits_{i=1}^n X_i^2\right)$ 与 $(\overline{X},S_n^2)$ 是一一对应的，故 $(\overline{X},S_n^2)$ 也是 (μ,σ^2) 的充分统计量。□

笔记 不能简单地认为 $\overline{X}$ 是 μ 的充分统计量，X_i^2 是 σ^2 的充分统计量。

事实上，有如下结论：

- 当 σ^2 已知时，$\overline{X}$ 是 μ 的充分统计量；
- 反过来，即使 μ 已知，$\sum\limits_{i=1}^n X_i^2$ 也不能单独作为 σ^2 的充分统计量。

定理 1.4.2 (次序统计量的充分性)

对于分布族 $\mathcal{F}$，设 $F\in\mathcal{F}$，$X_1,\cdots,X_n$ 为来自 F 的样本，只要 $X_1,\cdots,X_n$ 是独立同分布的，则不论 $\mathcal{F}$ 如何，其次序统计量 $X_{(1)},\cdots,X_{(n)}$ 都是充分的。

定义 1.4.2 (极小充分统计量)

设 S 是分布族 $\mathcal{F}$ 的充分统计量，如果对 $\mathcal{F}$ 的任充分统计量 T，均存在函数 $f(\cdot)$，使得 $S=f(T)$，则称 S 是此分布族 $\mathcal{F}$ 的**极小充分统计量**。

1.5 数据初步分析

1.5.1 直方图

1.5.2 茎叶图

1.5.3 五数概括

1.5.4 盒子图（箱形图）

第 2 章 点估计

2.1 引言

2.2 矩估计

定义 2.2.1 (矩估计)

对于样本 $X_1,\cdots,X_n$ 及任意正整数 k，称

$$a_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k,\quad m_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k \tag{2.2.1}$$

为样本 k 阶**原点矩**和样本 k 阶**中心矩**，其中 $\overline{X}=a_1$ 为样本均值。

注 样本 k 阶中心矩 m_k 可由样本 k 阶及以下的原点矩线性表出，同样，样本 k 阶原点矩 a_k 也可由样本 k 阶及以下的中心矩线性表出。

为与样本矩作比较，称总体 X 的 k 阶原点矩和中心矩分别为

$$\mu_k=EX^k,\quad \nu_k=E(X-\mu_1)^k. \tag{2.2.2}$$

显然，样本矩是统计量，不依赖与总体中的参数；而总体矩则与分布中的未知参数有关。有大数定律和中心极限定理知，样本矩是总体矩的一个很好的估计，这就是矩估计的基本思想，具体过程如下：

设 $\{F(x,\theta):\theta\in\Theta\}$ 是总体 X 的分布族，$\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_m)$ 是待估计的未知参数，且假设总体的 k 阶矩 μ_k 存在且有限。令

$$\mu_k(\theta)=a_k,\ k=1,\cdots,m, \tag{2.2.3}$$

则得到了一个含有 m 个未知参数的方程组，由此方程组可以求得 θ_i，记为 $\hat{\theta}_i, i=1,\cdots,m$，称之为 θ_i 的**矩估计** (moment estimation)。

注

- 在方程组 (2.2.3) 中，也可以用样本 k 阶中心矩作为总体 k 阶中心矩的估计，建立相应的方程组，这样求得的参数估计也称为矩估计。两种方法得到的估计可能不同。
- 方程组 (2.2.3) 的解是否存在且唯一，取决于具体的问题。
- 用矩估计法求参数估计时，尽可能用低阶矩。

例 2.2.1

考虑总体均值与总体方差的矩估计。

解 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是一组简单随机样本，且总体二阶矩存在记 $\mu=E(X_1)$，$\sigma^2=Var\,(X_1)$，由

矩估计法知，其估计方程为

$$
\begin{cases}
\hat{\mu} = a_1 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \\
\hat{\mu}_2 = \hat{\mu}^2 + \hat{\sigma}^2 = a_2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2
\end{cases}
$$

由此求得总体均值与方差的矩估计为

$$
\begin{cases}
\hat{\mu} = \overline{X} \\
\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \dfrac{n-1}{n}S_n^2
\end{cases}
$$

□

由此得出，对任意的总体分布，总体均值的矩估计是样本均值，总体方差的矩估计是样本方差的 $\dfrac{n-1}{n}$ 倍。当 n 较大时，这两个值非常接近。

为方便，记

$$
S_n^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2. \tag{2.2.4}
$$

例 2.2.2

考虑 Poisson 分布 $P(\lambda)$ 的总体均值的矩估计。

解 对于 Poisson 分布 $P(\lambda)$，由于 λ 既是总体均值，又是总体方差，故有

$$
\hat{\lambda} = a_1 = \overline{X}
$$
$$
\hat{\lambda} = m_2 = S_n^{*2}
$$

□

由此可以看出，矩估计不是唯一的。

例 2.2.3

考虑均匀分布 $U(\alpha, \beta)$ 中 α, β 的矩估计。

解 总体均值与方差分别为

$$
\mu = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x}{\beta - \alpha}\, dx = \frac{\alpha + \beta}{2}
$$
$$
\nu_2 = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\beta - \alpha}\left(x - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 dx = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}
$$

由矩估计法得

$$
\begin{cases}
\hat{\mu} = \overline{X} \\
\hat{\nu}_2 = m_2
\end{cases}
$$

求得矩估计为

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = \overline{X} - \sqrt{3{S_n^*}^2} \\ \hat{\beta} = \overline{X} + \sqrt{s{S_n^*}^2} \end{cases}$$

□

2.3 极大似然估计与 EM 算法

2.3.1 极大似然估计

定义 2.3.1 (似然函数)

对于分布族 $\{f(x,\theta),\theta\in\Theta\}$，如以 $f(\boldsymbol{x},\theta)$ 记其 n 个样本的联合概率分布，则对于给定的样本观测值 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$，我们称 $f(\boldsymbol{x},\theta)$ 为参数 θ 的**似然函数** (likelihood function)，简称为似然函数，并记之为

$$L(\Theta,\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x},\theta), \quad \forall\theta\in\Theta \tag{2.3.1}$$

称 $\ln L(\theta,\boldsymbol{x})$ 为**对数似然函数**，记为 $l(\theta,\boldsymbol{x})$ 或 $l(\theta)$。

由上述定义，似然函数与样本联合概率分布相同，但二者含义不同：样本联合概率分布是固定参数值 θ 下关于样本 $\boldsymbol{x}$ 的函数，取值空间为样本空间 $\mathcal{X}$；而似然函数是固定样本观测值 $\boldsymbol{x}$ 下关于参数 θ 的函数，取值空间为参数空间 Θ。

我们将利用样本观测值来确定参数看起来最像的值，这就是统计上常说的**似然原理**。

定义 2.3.2 (极大似然估计)

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自某概率分布 $f(x,\theta)\in\mathcal{F}=\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\subset\mathbf{R}\}$ 的一组样本，如果统计量 $\hat{\theta}(\boldsymbol{X})$ 满足

$$L(\hat{\theta}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}) = \sup_{\theta\in\Theta} L(\theta,\boldsymbol{x}), \tag{2.3.2}$$

或等价地满足

$$l(\hat{\theta}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}) = \sup_{\theta\in\Theta} l(\theta,\boldsymbol{x}), \tag{2.3.3}$$

则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的**极大似然估计** (maximum likelihood estimate，简记为 MLE)。

求某参数的 MLE，就是求一个极值问题。如果 $L(\theta(\boldsymbol{x})$ 关于 θ 可微，则 θ 的 MLE 可以通过求解方程组

$$\frac{\partial L(\theta(\boldsymbol{x})}{\partial\theta_j} = 0, \quad j=1,\cdots,k \tag{2.3.4}$$

或等价地求解

$$\frac{\partial l(\theta(\boldsymbol{x})}{\partial\theta_j} = 0, \quad j=1,\cdots,k \tag{2.3.5}$$

在统计上，称上述方程组 (2.3.4) 或 (2.3.5) 为**似然方程**。

例 2.3.1

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的 IID 样本，求 μ 和 σ^2 的 MLE。

解 似然函数为

$$L(\mu,\sigma^2;\boldsymbol{x})=\frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2\right\}$$

对数似然函数为

$$l(\mu,\sigma^2;\boldsymbol{x})=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2$$

两边分别对 μ 和 σ^2 求导，得到对数似然方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial l}{\partial\mu}=\dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)=0\\ \dfrac{\partial l}{\partial(\sigma^2)}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\displaystyle\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}\mu=\bar{x}\\ \sigma^2=s_n^{*2}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2\end{cases}$$

易验证上述解是其似然函数的最大值点，故所求的 MLE 为

$$\begin{cases}\hat{\mu}=\overline{X}\\ \hat{\sigma}^2=S_n^{*2}\end{cases}$$

□

比较例 2.2.1 和例 2.3.1 可知，对于正态总体而言，其均值与方差的矩估计和 MLE 是一样的。

例 2.3.2

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自均匀分布 $U(0,\theta)$ 的 IID 样本，求参数 θ 的 MLE。

解 似然函数为

$$L(\theta,\boldsymbol{x})=\prod_{i=1}^n f(x_i,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & 0<\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_i<\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

显然，当 $\theta=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_i$ 时，$L(\theta,\boldsymbol{x})$ 达到最大。于是，$\hat{\theta}=X_{(n)}$ 是 θ 的 MLE。 □

注 不能用微分法求其 MLE，因为此时似然函数的支撑集依赖于未知参数 θ。

对于均匀分布总体 $U(0,\theta)$，参数 θ 的矩估计和 MLE 是不一样的。记

$$\hat{\theta}_M=2\overline{X},\quad \hat{\theta}_L=X_{(n)}$$

容易求得它们的一、二阶矩为

$$E\hat{\theta}_M=\theta,\qquad Var\,\hat{\theta}_M=\frac{\theta^2}{3n}$$

$$E\hat{\theta}_L=\frac{n}{n+1}\theta,\quad Var\,\hat{\theta}_L=\frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$$

从二者的期望来看，$\hat{\theta}_L$ 不是以 θ 为中心，而 $\hat{\theta}_M$ 是；从方差来看，$Var\,\hat{\theta}_L<Var\,\hat{\theta}_M$，故 $\hat{\theta}_L$ 比 $\hat{\theta}_M$ 更集中在其均值附近。

例 2.3.3

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自 Poisson 分布 $P(\lambda)$ 的 IID 样本，参数 λ 的 MLE 为 $\hat{\lambda}=\overline{X}$。

例 2.3.4

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自均匀分布 $U(\theta,\theta+1)$ 的 IID 样本，求参数 θ 的 MLE。

解 似然函数为

$$L(\theta,\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, & \theta\leqslant x_{(1)}\leqslant x_{(n)}\leqslant\theta+1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

只要 θ 满足 $x_{(n)}-1\leqslant\theta\leqslant x_{(1)}$，其似然函数均达到最大值 1，故 θ 的 MLE 不唯一，区间 $[X_{(n)}-1,X_{(1)}]$ 中任何一个值都是 θ 的 MLE。 □

注

- 若 T 是充分统计量，由因子分解定理 1.4.1 知，$f(\boldsymbol{x},\theta)=g(\theta,T(\boldsymbol{x}))h(\boldsymbol{x})$，于是 $l(\boldsymbol{x},\theta)=\ln g(\theta,T(\boldsymbol{x}))+\ln h(\boldsymbol{x})$。为使 $l(\boldsymbol{x},\theta)$ 达到最大，只需使 $g(\theta,T(\boldsymbol{x}))$ 达到最大，所以 MLE 必为充分统计量 T 的函数。
- 如果 $g(\theta)$ 是 1–1 映射，且 $\hat{\theta}$ 是 θ 的 MLE，则可以证明 $g(\hat{\theta})$ 也是 $g(\theta)$ 的 MLE，该性质称为**不变原则**。
- 对于指数分布族，似然方程 (2.3.5) 如有解，必唯一。对于单参数指数分布族 $f(x,\theta)=h(x)e^{\theta T(x)+a(\theta)}$，其似然方程为

$$\frac{\partial l(\theta,\boldsymbol{x})}{\partial\theta}=\sum_{i=1}^{n}T(x_i)+na'(\theta)=0 \tag{2.3.6}$$

  由于 $ET(X)=-a'(\theta)$，$Var\,T(X)=-a''(\theta)>0$，故如果上式有解，必唯一；如果上式无解，则其 MLE 在 Θ 的边界处达到。

2.3.2 EM 算法

内容提要

- EM 算法
- GEM 算法
- Monte Carlo EM 算法

2.4 无偏估计与一致最小方差无偏估计

2.4.1 无偏估计

定义 2.4.1 (无偏估计)

如果 $T(\boldsymbol{X})$ 是未知参数 θ 的函数 $g(\theta)$ 的一个估计量，且满足

$$E_\theta T(\boldsymbol{X}) = g(\theta), \quad \forall\theta \in \Theta \tag{2.4.1}$$

则称 T 是 $g(\theta)$ 的**无偏估计** (unbiased estimate，简记为 UE)，也称 $g(\theta)$ 是**可估的** (estimable)，其中 E_θ 表示期望是在分布 f_θ 下进行的。

对于正态总体，不难验证，样本均值 $\overline{X}$ 和样本方差 S_n^2 分别是总体均值和总体方差的无偏估计（对于非正态总体，结论也对），而总体方差的矩估计及 MLE——S_n^{*2} 则不是无偏的，但随着样本容量 n 的增大，它越来越接近无偏。

定义 2.4.2 (渐近无偏估计)

如果 $T(\boldsymbol{X})$ 是 $g(\theta)$ 的一个有偏估计量，且满足

$$\lim_{n\to\infty} E_\theta T(X_1, \cdots, X_n) = g(\theta), \quad \forall\theta \in \Theta \tag{2.4.2}$$

则称 T 是 $g(\theta)$ 的**渐近无偏估计**。

- 如果 $T(\boldsymbol{X})$ 是 $g(\theta)$ 的有偏估计，则称 $E_\theta T(\boldsymbol{X}) - g(\theta)$ 为其**偏差** (bias)。
- 无偏估计是从多次重复的角度而引出的一个概念，一次估计中 $T(\boldsymbol{x})$ 的值不一定恰好等于参数真值 $g(\theta)$。
- 一个参数的无偏估计可能不唯一，也可能不存在，也可能不合理。

例 2.4.1 (刀切法 (jackknife))

设 $T(\boldsymbol{X})$ 是基于样本 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)^T$ 的关于参数 $g(\theta)$ 的估计量，且满足 $E_\theta T(\boldsymbol{X}) = g(\theta) + O\left(\frac{1}{n}\right)$。如果以 $\boldsymbol{X}_{(-i)}$ 表示从样本中删去 X_i 后的向量，则 $T(\boldsymbol{X})$ 的刀切统计量定义为

$$T_J(\boldsymbol{X}) = nT(\boldsymbol{X}) - \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(\boldsymbol{X}_{(-i)}). \tag{2.4.3}$$

可以证明，刀切统计量有如下性质：

$$E_\theta T_J(\boldsymbol{X}) = g(\theta) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

例 2.4.2

对于 Poisson 分布 $P(\lambda), \lambda > 0$ 是未知参数。现设有一个来自此分布的样本 X，令 $T(X) = (-1)^X$。则由

$$ET(X) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-2\lambda}$$

故 $T(X)$ 是 $e^{-2\lambda}$ 的一个 UE。但是，当 X 为奇数时，这一估计并不合理。

例 2.4.3

对于 Poisson 分布 $P(\lambda)$，设 $X \sim P(\lambda)$，求基于 X 的参数 $\dfrac{1}{\lambda}$ 的 UE。

解 此时 $\dfrac{1}{\lambda}$ 是不可估的。事实上，若存在一个统计量 $T(X)$ 是它的 UE，则有

$$ET(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} T(k) e^{-\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

即

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} T(k) = \frac{e^\lambda}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

由多项式相等知，上述等式永远不会成立，故参数 $\dfrac{1}{\lambda}$ 不可估。 □

充分统计量具有不变性，但是，无偏估计不具有不变性，见下面的例子。

例 2.4.4

对于正态总体，样本标准差 S_n 不是 σ 的 UE。

解 由定理 1.3.4 知，此时 $\dfrac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，故

$$E\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n-1}{2}-1}\, dx = \frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

故

$$ES_n = \sigma \sqrt{\frac{2}{n-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

所以，S_n 不是 σ 的 UE。 □

2.4.2 一致最小均方误差准则

定义 2.4.3 (一致最小均方误差估计)

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自分布族 $\mathcal{F}=\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$ 中某一分布的样本，$g(\theta)$ 是一参数函数，以 $\mathcal{E}(g)$ 表示用来估计 $g(\theta)$ 的某些估计量的集合，如果存在一个 $T^*\in\mathcal{E}(g)$，使得对任一 $T\in\mathcal{E}(g)$ 均有

$$E_\theta[T^*-g(\theta)]^2\leqslant E_\theta[T-g(\theta)]^2,\quad \forall\theta\in\Theta \tag{2.4.4}$$

则称 T^* 为 $g(\theta)$ 的在 $\mathcal{E}(g)$ 中的**一致最小均方误差估计**，也称统计量 T^* 在均方意义下优于 T。

估计量 T 的**均方误差** (mean square error，简记为 MSE) 定义为 $\mathrm{MSE}(T)=E_\theta[T-g(\theta)]^2$。特别地，当 T 是 $g(\theta)$ 的 UE 时，其 MSE 就是它的方差。

例 2.4.5

考虑正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中关于 σ^2 的形如 cS_n^2 的一致最小均方误差估计。

解 前面讲过样本方差 S_n^2 是 σ^2 的一个 UE，且 $Var\,S_n^2=\dfrac{2\sigma^2}{n-1}=\mathrm{MSE}(S_n^2)$。下面在形如 cS_n^2 的估计类中找一个 MSE 最小的估计量。

$$\mathrm{MSE}(cS_n^2)=E(cS_n^2-\sigma^2)^2=E[c(S_n^2-\sigma^2)-\sigma^2(1-c)]^2=\sigma^4\left[\frac{2c^2}{n-1}+(1-c)^2\right]$$

当 $c=\dfrac{n-1}{n+1}$ 时达到最小值 $\dfrac{2}{n+1}$，故取

$$\hat\sigma^2=\frac{n-1}{n+1}S_n^2=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2$$

为 σ^2 的形如 cS_n^2 的一致最小均方误差估计。 □

该例子中，$\hat\sigma^2$ 不是 σ^2 的 UE，即无偏准则和均方误差准则是从两个不同角度考察一个估计量的好坏。但当二者发生矛盾时，更应重视均方误差准则。

注 这里说的一致并不是指在估计类 $\mathcal{E}(g)$ 中一致，而是值关于 $\theta\in\Theta$ 一致，因此，有时一致最小均方误差估计并不存在。此时，为了找到一个一致最小均方误差估计，通常都是通过缩小估计类来求得。

2.4.3 一致最小方差无偏估计

定义 2.4.4 (一致最小方差无偏估计)

对于参数分布族 $\mathcal{F}=\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$，$g(\theta)$ 是一可估函数，又设 T^* 是 $g(\theta)$ 的一个 UE。如果对于 $g(\theta)$ 的任一 UET，均有

$$Var_\theta(T^*)\leqslant Var_\theta(T),\quad\forall\theta\in\Theta \tag{2.4.5}$$

则称 T^* 是 $g(\theta)$ 的**一致最小方差无偏估计** (uniformly minimunvariance) (uniformly minimun variance unbiased estimate，简记为 UMVUE)。

注 UMVUE 是一个在无偏估计类中方差最小的估计，是一个很好的估计，但对于某些分布族或参数，其 UMVUE 不一定存在。

为了方便求 UMVUE，给出如下定理。

定理 2.4.1

设 $T(\boldsymbol{X})$ 是参数分布族 $\mathcal{F}=\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$，$g(\theta)$ 的一个充分统计量，$S(\boldsymbol{X})$ 是参数 $g(\theta)$ 的一个 UE，则

$$h(T)=E[S(\boldsymbol{X})\mid T(\boldsymbol{X})] \tag{2.4.6}$$

是 $g(\theta)$ 的一个 UE，且

$$Var_\theta(h(T))\leqslant Var_\theta(S(\boldsymbol{X})),\quad \forall\theta\in\Theta \tag{2.4.7}$$

其中等号成立当且仅当 $P\{S(\boldsymbol{X})=h(T)\}=1$。

证明 由 T 是充分统计量，在给定 T 下，样本 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 的条件分布与参数 θ 无关。因此，上述 $h(T)$ 是一统计量。由于

$$E_\theta(h(T))=E_\theta[E(S(\boldsymbol{X})\mid T(\boldsymbol{X}))]=E_\theta(S(\boldsymbol{X}))=g(\theta),\quad \forall\theta\in\Theta$$

故 $h(T)$ 也是 $g(\theta)$ 的一个 UE。又因为

$$\begin{aligned}Var_\theta(S(\boldsymbol{X}))&=E_\theta[S(\boldsymbol{X})-g(\theta)]^2\\&=E_\theta[S(\boldsymbol{X})-h(T)+h(T)-g(\theta)]^2\\&=E_\theta[S(\boldsymbol{X})-h(T)]^2+Var_\theta(h(T))+2E_\theta[(S(\boldsymbol{X})-h(T))(h(T)-g(\theta))]\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}&E_\theta[(S(\boldsymbol{X})-h(T))(h(T)-g(\theta))]\\=&E_\theta\{E_\theta[(S(\boldsymbol{X})-h(T))(h(T)-g(\theta))\mid T]\}\\=&\end{aligned}$$

□

先引入两个无偏估计类：

$$U=\{T:E_\theta T=g(\theta),\ E_\theta T^2<\infty,\ \forall\theta\in\Theta\} \tag{2.4.8}$$

$$U_0=\{T:E_\theta T=0,\ E_\theta T^2<\infty,\ \forall\theta\in\Theta\} \tag{2.4.9}$$

分别表示 $g(\theta)$ 和 0 的具有二阶矩的无偏估计类。

定理 2.4.2

对于参数分布族 $\mathcal{F}=\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$，设 $g(\theta)$ 可估，则估计量 $T_0\in U$ 是 $g(\theta)$ 的一个 UMVUE 的充要条件是

$$E_\theta(\nu T_0)=0,\ \forall\theta\in\Theta,\ \forall\nu\in U_0 \tag{2.4.10}$$

证明

□

推论 2.4.3

如果 T_1 和 T_2 分别是 $g_1(\theta)$ 和 $g_2(\theta)$ 的 UMVUE，则对于任给的常数 a, b，$aT_1 + bT_2$ 是 $ag_1(\theta) + bg_2(\theta)$ 的 UMVUE。

关于 UMVUE 存在时的唯一性，有如下定理。

定理 2.4.4

如果 $g(\theta)$ 的无偏估计类 U 非空，则其 UMVUE 最多只有一个，即 UMVUE 在以概率 1 相等的意义下是唯一的。

证明 □

例 2.4.6 (UMVUE 不存在的例子)

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自一离散型分布的 IID 样本，其分布在 $\theta-1, \theta, \theta+1$ 上的概率均为 $\dfrac{1}{3}$，θ 取整数，则所有 θ 的非常数函数都没有 UMVUE。连续型分布也适用，如均匀分布 $U\left(\theta - \dfrac{1}{2}, \theta + \dfrac{1}{2}\right)$。

证明 证明见 Lehmann & Casella (1998)。 □

例 2.4.7

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的 IID 样本，求 μ, σ^2 的 UMVUE。

解 联合 PDF 为

$$f(\boldsymbol{x}; \mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]$$

任给 $\nu \in U_0$，有

$$\int \cdots \int v(\boldsymbol{x}) \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right] d\boldsymbol{x} = 0, \quad \forall \mu, \sigma^2 \tag{$*$}$$

关于 μ 求导，结合 $(*)$ 式得

$$\int \cdots \int v(\boldsymbol{x}) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right] d\boldsymbol{x} = 0, \quad \forall \mu, \sigma^2 \tag{a}$$

结合 $\overline{X}$ 是 μ 的 UE，由定理 2.4.2 知 $T(\boldsymbol{X}) = \overline{X}$ 是 μ 的 UMVUE。

在 (a) 式两边再关于 μ 求导，得

$$\int \cdots \int v(\boldsymbol{x}) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right] d\boldsymbol{x} = 0, \quad \forall \mu, \sigma^2 \tag{b}$$

在 (*) 两边关于 σ^2 求导，得

$$\int\cdots\int v(\boldsymbol{x})\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]d\boldsymbol{x}=0,\quad \forall\mu,\sigma^2 \tag{c}$$

综合 (a)(b)(c) 式，得

$$\int\cdots\int v(\boldsymbol{x})\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]d\boldsymbol{x}=0,\quad \forall\mu,\sigma^2$$

结合 S_n^2 是 σ^2 的 UE，由定理 2.4.2 知 S_n^2 是 σ^2 的 UMVUE。 □

例 2.4.8

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自指数分布族 $E(\lambda)$ 的 IID 样本，求总体均值 $\frac{1}{\lambda}$ 的 UMVUE。

解 由因子分解定理 1.4.1 易得 $T=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是其充分统计量。由定理 2.4.1 知，对于某分布族，当其充分统计量存在时，只需要在基于充分统计量的无偏估计类中求 UMVUE 即可。

由于 $T=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim\varGamma(n,\lambda)$，$T$ 的 PDF 为

$$f_T(x,\lambda)=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x},\quad x>0$$

且易证 $\overline{X}=\frac{T}{n}$ 是 $\frac{1}{\lambda}$ 的一个 UE。

对 $\forall\nu(T)\in U_0$，有

$$E\nu(T)=\int_0^\infty \nu(x)\frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}=0,\quad \forall\lambda>0$$

即

$$\int_0^\infty \nu(x)x^{n-1}e^{-\lambda x}=0$$

两边关于 λ 求导，得

$$\int_0^\infty x\nu(x)x^{n-1}e^{-\lambda x}=0$$

由定理 2.4.2 知，$\overline{X}$ 是 $\frac{1}{\lambda}$ 的 UMVUE。 □

例 2.4.9

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自 $U(0,\theta)$ 的 IID 样本，求 θ 的 UMVUE。

解 易知 $T=X_{(n)}$ 是 θ 的充分统计量，$X_{(n)}$ 的 PDF 为

$$f_T(t,\theta)=\frac{nt^{n-1}}{\theta^n},\quad 0<t<\theta$$

容易验证 $\frac{n+1}{n}T$ 是 θ 的一个 UE，下证它是 θ 的 UMVUE。

任给 $v(T)\in U_0$，有

$$\int_0^\theta \nu(t)\frac{nt^{n-1}}{\theta^n}dt=0,\quad \forall\theta>0$$

两边关于 θ 求导，得

$$\nu(\theta)=0, \quad \forall \theta>0$$

由定理 2.4.2 知，$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ 是 θ 的一个 UMVUE。 □

注 由上面的例子可知，$U(0,\theta)$ 的总体均值 $\frac{\theta}{2}$ 的 UMVUE 为 $\frac{n+1}{2n}X_{(n)}$。由此可见，样本均值不一定是总体均值的 UMVUE。

2.5 完备统计量

2.5.1 完备性的定义

定义 2.5.1 (完备统计量)

对于参数分布族 $\mathcal{F}=\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$，设 $T(\boldsymbol{X})$ 为一统计量，如果对任何满足条件

$$E_\theta g(T(\boldsymbol{X}))=0, \quad \forall\theta\in\Theta \tag{2.5.1}$$

的统计量 $g(T)$，都有

$$P_\theta\{g(T)=0\}=1, \quad \forall\theta\in\Theta \tag{2.5.2}$$

则称统计量 $T(\boldsymbol{X})$ 是**完备统计量** (complete statistic)。

定义 2.5.2 (完备分布族)

对于参数分布族 $\mathcal{F}=\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$，如果对任何满足条件

$$E_\theta\psi(X)=0, \quad \forall\theta\in\Theta \tag{2.5.3}$$

的函数 $\psi(x)$，都有

$$P_\theta\{\psi(X)=0\}=1, \quad \forall\theta\in\Theta \tag{2.5.4}$$

则称此分布族 $\mathcal{F}$ 是**完备分布族**。

由上述两个定义知，完备统计量即此统计量的抽样分布族是完备的。

关于完备统计量，有如下结论：

- 如果 T 是完备的，$S=\psi(T)$，且 ψ 可测，则 S 也是完备的。
- 充分完备统计量是极小充分统计量，但反之不成立。

例 2.5.1

考虑二项分布族 $\{B(n,p):0<p<1\}$ 的完备性。

解 设函数 $\psi(x)$ 满足

$$E_p\psi(X)=\sum_{x=0}^{n}\psi(x)\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=0, \quad \forall 0<p<1$$

令 $\theta = \dfrac{p}{1-p}$，则 $\theta > 0$，且

$$\sum_{x=0}^{n} \psi(x) \binom{n}{x} \theta^x = 0, \quad \forall \theta > 0$$

由于上式左边是关于 θ 的一个 n 次多项式，故 $\psi(x) = 0$，$x = 0, 1, \cdots, n$，故二项分布族是完备的。 □

例 2.5.2

证明：正态分布族 $N(0, \sigma^2)$ 是不完备的。

解 注意到正态分布的 PDF 是偶函数，故对任意一个奇函数，如 $\psi(x) = x$，均有

$$E_\sigma \psi(X) = 0, \quad \forall \sigma^2 > 0$$

但 $P_\sigma\{X = 0\} = 0$，这说明此正态分布族是不完备的。 □

注 分布族不完备不影响充分统计量的完备性。上面的例子中，正态分布族 $N(0, \sigma^2)$ 不完备，但是充分统计量 $T = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 是完备的。

由于 $\dfrac{T}{\sigma^2} \sim \chi^2(n) = \Gamma\left(\dfrac{n}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$，即 $T \sim \Gamma\left(\dfrac{n}{2}, \dfrac{1}{2\sigma^2}\right)$，如果 $\psi(t)$ 满足 $E_\sigma \psi(T) = 0, \ \forall \sigma^2 > 0$，即

$$\int_0^\infty \psi(t) t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2\sigma^2}} \, dt = 0, \quad \forall \sigma^2 > 0$$

上式左边是函数 $\psi(t) t^{\frac{n}{2}-1}$ 的 Laplace 变换，由 Laplace 变化的唯一性知

$$P_\sigma\{\psi(T) T^{\frac{n}{2}-1} = 0\} = 1$$

故由定义可知，正态分布族 $N(0, \sigma^2)$ 的充分统计量 $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 是完备的。

例 2.5.3

对于均匀分布族 $U(0, \theta)$，说明其充分统计量 $T = X_{(n)}$ 的完备性。

解 按定义求导验证即可。 □

2.5.2 完备统计量的应用

定理 2.5.1

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自参数分布族 $\{f(x, \theta) : \theta \in \Theta\}$ 的 IID 样本，T 是 θ 的充分完备统计量。如果 θ 可估，且 $S(\boldsymbol{X})$ 是 θ 的一个 UE，则 $S_0(T) = E[S(\boldsymbol{X}) \mid T]$ 是 θ 的唯一的 UMVUE。

证明 设 S_1, S_2 是 θ 的任意两个 UE，由定理 2.4.1 可知，$E(S_1 \mid T), E(S_2 \mid T)$ 均是 θ 的 UE，即

$$E_\theta[E(S_1 \mid T)] = E_\theta[E(S_2 \mid T)] = \theta, \ \forall \theta \in \Theta$$

且

$$Var_\theta(E(S_1 \mid T)) \leqslant Var_\theta(S_1),\ \forall\theta\in\Theta$$
$$Var_\theta(E(S_2 \mid T)) \leqslant Var_\theta(S_2),\ \forall\theta\in\Theta$$

由 $E(S_1 \mid T) - E(s_2 \mid T)$ 是 0 的无偏估计，T 是完备统计量，由定义知

$$P_\theta\{E(S_1 \mid T) = E(S_2 \mid T)\} = 1,\ \forall\theta\in\Theta$$

即在概率 1 的意义下，$E(S_1 \mid T)$ 与 $E(S_2 \mid T)$ 相等，再由 S_1, S_2 的任意性知，$S_0 = E(S \mid T)$ 是唯一的 UMVUE。□

例 2.5.4

考虑 Bernoulli 总体 $b(1,p)$ 中参数 p 的 UMVUE。

解 $T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$ 是充分统计量，由例 2.5.1 知二项分布族是完备的，故 T 是充分完备统计量。又由于 $\overline{X} = \dfrac{T}{n}$ 是 p 的 UE，且是 T 的函数，故由定理 2.5.1 知 $\overline{X}$ 是 p 的 UMVUE。□

2.5.3 指数型分布族的充分完备性

2.5.4 次序统计量的完备性

2.6 信息不等式及有效估计

2.6.1 正则分布族与 Fisher 信息量

定义 2.6.1 (正则分布族)

如果单参数分布族 $\mathcal{F} = \{f(x,\theta) : \theta\in\Theta\}$ 满足如下五个条件：

1. 参数空间 Θ 是直线上的开区间
2. $\forall\theta\in\Theta$，导数 $\dfrac{\partial f(x,\theta)}{\partial\theta}$ 存在
3. 支撑集与 θ 无关
4. 其 PDF$f(x,\theta)$ 的积分与微分运算可以互换，即
$$\frac{d}{d\theta}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\theta)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\theta} f(x,\theta)\,dx$$
5.
$$I(\theta) = E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X,\theta)\right)^2 \tag{2.6.1}$$
存在，且 $I(\theta) > 0$

则称此分布族为 **C-R 正则分布族**，上述五个条件也称为**正则条件**，$I(\theta)$ 称为该分布族的 **Fisher 信息量** (information)。

注 上述定义中是以连续型分布为例进行定义的，对于离散型分布，只需要把积分换成求和、把 PDF 换成 CDF 即可。

可以验证，常用的单参数指数型分布族是正则的，而均匀分布族 $\{U(0,\theta):\theta>0\}$ 不是正则的。

考虑 IID 样本的联合 PDF，可以证明

$$I(\theta)=E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\boldsymbol{X},\theta)\right)^2=nI(\theta) \tag{2.6.2}$$

注意 Fisher 信息量依赖于所选择的参数。事实上，设 $\theta=h(\xi)$，其中 h 可微，则 X 所包含的关于 ξ 的信息量为

$$I^*(\xi)=I(h(\xi))[h'(\xi)]^2 \tag{2.6.3}$$

为了理解 Fisher 信息量的意义，先考虑一个估计量的方差的下界。

设 S 是 $g(\theta)$ 的一个估计，$\psi(X,\theta)$ 是任一具有有限二阶矩的函数，则有**协方差不等式**：

$$Var(S)\geqslant\frac{[Cov(S,\psi)]^2}{Var(\psi)} \tag{2.6.4}$$

如果 $Cov(S,\psi)$ 只与 $E_\theta S=g(\theta)$ 有关，则 (2.6.4) 式提供了无偏估计 S 的方差的一个下界。于是，有如下结论。

定理 2.6.1 (Blyth 定理)

$Cov(S,\psi)$ 只通过 $g(\theta)=E_\theta S$ 依赖于 S 的充要条件是：对 $\forall\theta$，有

$$Cov(U,\psi)=0,\ \forall U\in U_0 \tag{2.6.5}$$

其中 U_0 为 0 的无偏估计类。

证明 简单验证即可。 □

下面看一个满足定理 2.6.1 的例子，实际上是 C-R 下界。

设总体 X 的 PDF 为 $f(x,\theta)$，且对一切 x，有 $f(x,\theta)>0$。又设 $\theta,\theta+\delta$ 为两个参数值，满足 $f(x,\theta)\neq f(x,\theta+\delta)$，则函数

$$\psi(x,\theta)=\frac{f(x,\theta+\delta)-f(x,\theta)}{f(x,\theta)} \tag{2.6.6}$$

由于 $E_\theta(\psi)=0$，而对 $\forall U\in U_0$，有

$$Cov(U,\psi)=E_\theta(U\psi)=E_\theta\left[U\left(\frac{f(x,\theta+\delta)}{f(x,\theta)}-1\right)\right]=E_{\theta+\delta}U-E_\theta U=0$$

由定理 2.6.1 知，$Cov(S,\psi)$ 只通过 $g(\theta)=E_\theta S$ 依赖于 S，从而

$$Cov(S,\psi)=E_\theta[(S-g(\theta))\psi]=E_\theta(S\psi)=E_{\theta+\delta}S-E_\theta S=g(\theta+\delta)-g(\theta)$$

由 (2.6.4) 式的协方差不等式得

$$Var(S)\geqslant\frac{[g(\theta+\delta)-g(\theta)]^2}{E_\theta[\psi^2(x,\theta)]}=\frac{[g(\theta+\delta)-g(\theta)]^2}{E_\theta\left[\frac{f(x,\theta+\delta)}{f(x,\theta)}-1\right]^2} \tag{2.6.7}$$

上式对一切满足 $f(x,\theta+\delta)\neq f(x,\theta)$ 的 δ 都成立，于是上式右端可以用关于 δ 的极大值代替。

分子分母同除以 δ^2，再令 $\delta \to 0$，得

$$Var(S) \geqslant \frac{[g'(\theta)]^2}{E_\theta\left[\dfrac{f'(x,\theta)}{f(x,\theta)}\right]^2} = \frac{[g'(\theta)]^2}{I(\theta)} \tag{2.6.8}$$

2.6.2 信息不等式

本节讨论正则分布族参数的无偏估计的方差的下界，即著名的**信息不等式** (information inequality)，也称为 Carmer-Rao 不等式，简记为 C-R 不等式。

定理 2.6.2 (信息不等式)

设分布族 $\mathcal{F} = \{f(x,\theta) : \theta \in \Theta\}$ 是正则的，可估函数 $g(\theta)$ 在 Θ 上可微。又设 $X_1, \cdots, X_n$ 是 n 个来自此分布族的 IID 样本，$T(\boldsymbol{X})$ 是 $g(\theta)$ 的一个 UE，且满足积分与微分号可以互换的条件，即

$$\frac{d}{d\theta}\int T(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x},\theta)\,d\boldsymbol{x} = \int T(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial\theta}f(\boldsymbol{x},\theta)\,d\boldsymbol{x} \tag{2.6.9}$$

则有信息不等式成立，即

$$Var_\theta(T(\boldsymbol{X})) \geqslant \frac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)}, \quad \forall\theta \in \Theta \tag{2.6.10}$$

其中 $I(\theta)$ 为 $\mathcal{F}$ 的 Fisher 信息量。
如果上式等号成立，则存在 $c(\theta) \neq 0$，使得

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\boldsymbol{X},\theta) = c(\theta)(T(\boldsymbol{X}) - g(\theta)) \tag{2.6.11}$$

以概率 1 成立。

证明 利用 Cauchy 不等式放缩。 □

注

- 上述定理的证明过程中，始终假设样本是独立同分布的。如果样本不是独立的，只需要把信息不等式 (2.6.10) 中的 $nI(\theta)$ 改为 $E_\theta\left(\dfrac{\partial \ln f(\boldsymbol{X},\theta)}{\partial\theta}\right)^2$ 即可。
- 信息不等式与 Fisher 信息量有着密切的联系。从直观上看，一个带有较小方差的估计表明这个估计值有更大机会出现在 $g(\theta)$ 附近，$nI(\theta)$ 越大，参数 θ 可以越精确地估计，其中 n 是样本容量，而 $I(\theta)$ 反映的是总体分布本身提供的信息量。
- 从定理证明可以看出，对于正则分布族，有如下结论：

$$E_\theta\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\boldsymbol{X},\theta)\right] = 0$$

$$I(\theta) = \mathrm{Var}_\theta\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\boldsymbol{X},\theta)\right] = -E_\theta\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(\boldsymbol{X},\theta)\right] \tag{2.6.12}$$

对于多参数情形的信息不等式如下：

定理 2.6.3 (多参数情形信息不等式)

设分布族 $\mathcal{F}=\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\subset\mathbb{R}^k\}$，$X_1,\cdots,X_n$ 为来自此分布族的 IID 样本，$T(\boldsymbol{X})=(T_1(\boldsymbol{X}),\cdots,T_r(\boldsymbol{X}))^T$ 是 $\boldsymbol{g}(\theta)=(g_1(\theta),\cdots,g_r(\theta))^T$ 的一个 UE，且满足如下条件：

1. $$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\int f(\boldsymbol{x},\theta)\,d\boldsymbol{x}=\int\frac{\partial}{\partial\theta_i}f(\boldsymbol{x},\theta)\,d\boldsymbol{x},\ \forall\theta\in\Theta,\ i=1,\cdots,k$$
2. $$\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\int f(\boldsymbol{x},\theta)\,d\boldsymbol{x}=\int\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}f(\boldsymbol{x},\theta)\,d\boldsymbol{x},\ \forall\theta\in\Theta,\ i,j=1,\cdots,k$$
3. $\dfrac{\partial g_i(\theta)}{\partial\theta_j}$ 存在，且
$$\frac{\partial g_i(\theta)}{\partial\theta_j}=\frac{\partial}{\partial\theta_j}\int T_i(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x},\theta)\,d\boldsymbol{x}=\int T_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial f(\boldsymbol{x},\theta)}{\partial\theta_j}\,d\boldsymbol{x},\ \forall\theta\in\Theta,\ i,j=1,\cdots,k$$

记

$$I(\theta)=-E_\theta\left[\frac{\partial^2\ln f(X,\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right]_{k\times k}$$
$$\varSigma_\theta(T)=(Cov(T_i,T_j))_{r\times r}$$
$$\varDelta=\left(\frac{\partial g_i(\theta)}{\partial\theta_j}\right)_{r\times k}$$

则有

$$\varSigma_\theta\geqslant\frac{1}{n}\varDelta I^{-1}(\theta)\varDelta^T,\ \forall\theta\in\Theta \tag{2.6.13}$$

为了方便，我们常记信息不等式右端的值为相应参数 UE 的方差的 Cramer-Rao 下界，简记为 **C-R 下界**。

例 2.6.1

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自 Bernoulli 分布族 $b(1,p)$ 的 IID 样本，$p\in(0,1)$，求 p 的 UE 的方差的 C-R 下界。

解 容易验证此分布族是正则的，其 Fisher 信息量为

$$I(p)=E_p\left[\frac{\partial\ln f(X,p)}{\partial p}\right]^2=\sum_{k=0}^{1}\left[\frac{\partial\ln f(X,p)}{\partial p}\right]^2f(k,p)=\frac{1}{p(1-p)}$$

由信息不等式知，p 的 UE 的方差的 C-R 下界为 $\dfrac{1}{nI(p)}=\dfrac{p(1-p)}{n}$。

另外，由于 $\sum_{i=1}^{n}X_i\sim B(n,p)$，故 $Var(\overline{X})=\dfrac{p(1-p)}{n}$ 达到了 C-R 下界，故可知 $\overline{X}$ 是 p 的 UMVUE。 □

例 2.6.2

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自 Poisson 分布族 $P(\lambda)$ 的 IID 样本，考虑 λ 的 UMVUE。

例 2.6.3

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自指数分布族 $E(\lambda)$ 的 IID 样本，考虑 $\frac{1}{\lambda}$ 的 UMVUE。

例 2.6.4

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自正态分布族 $N(\mu,\sigma^2)$ 的 IID 样本，考虑 μ 和 σ^2 的 UE 的方差的下界。

解 容易验证此正态分布族是正则的，Fisher 信息矩阵为

$$\boldsymbol{I}(\mu,\sigma^2)=-E_{\mu,\sigma^2}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sigma^2} & -\frac{X-\mu}{\sigma^4}\\ -\frac{X-\mu}{\sigma^4} & \frac{1}{2\sigma^4}-\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2\sigma^4}\end{pmatrix}$$

由于

$$I(\mu)=\frac{1}{\sigma^2},\quad I(\sigma^2)=\frac{1}{2\sigma^4}$$

则 μ 和 σ^2 的 UE 的方差的 C-R 下界分别为 $\frac{\sigma^2}{n}$ 和 $\frac{2\sigma^4}{n}$。

因为 $Var(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$ 达到了 C-R 下界，故 $\overline{X}$ 是 μ 的 UMVUE。

另外，样本方差 S_n^2 是 σ^2 的 UMVUE，但 $Var(S_n^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}>\frac{2\sigma^4}{n}$，并没有达到 C-R 下界。 □

下面通过一个例子看一看 C-R 下界与最小方差究竟有多大的区别。

例 2.6.5

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的 IID 样本，其中 $\sigma>0$ 为未知参数，求 σ^2 及 σ 的 UMVUE。

2.6.3 有效估计

定义 2.6.2 (有效估计及效率)

设 $T(\boldsymbol{X})$ 是 $g(\theta)$ 的一个 UE，则比值

$$e_n=\frac{[g'(\theta)]^2/nI(\theta)}{Var_\theta T(\boldsymbol{X})} \tag{2.6.14}$$

为 $T(\boldsymbol{X})$ 的**效率**。如果 $e_n=1$，则称 $T(\boldsymbol{X})$ 为 $g(\theta)$ 的**有效估计**；如果 $\lim\limits_{n\to\infty}e_n=1$，则称 $T(\boldsymbol{X})$ 为 $g(\theta)$ 的**渐近有效估计**。

从有效估计的定义中限制条件很多，如分布族应为正则的、待估参数的形式等。下面的例子就不满足条件。

例 2.6.6

考虑均匀分布族 $U(0,\theta)$ 中参数 θ 的估计问题，其中 $\theta>0$。

2.6.4 Bhattacharya 下界 *

2.7 相合估计

2.7.1 相合估计

定义 2.7.1

设统计量 T_n 是总体参数 $g(\theta)$ 的估计量。

- 如果当 $n \to \infty$ 时，T_n 依概率收敛于 $g(\theta)$，即 $\forall \theta \in \Theta$ 及 $\varepsilon > 0$，有
$$\lim_{n\to\infty} P\{|T_n - g(\theta)| \geqslant \varepsilon\} = 0 \tag{2.7.1}$$
则称 T_n 是 $g(\theta)$ 的 **（弱）相合估计** (consistent estimate)。
- 如果当 $n \to \infty$ 时，T_n 以概率 1 收敛于 $g(\theta)$，即 $\forall \theta \in \Theta$，有
$$P\{\lim_{n\to\infty} T_n = g(\theta)\} = 1 \tag{2.7.2}$$
则称 T_n 是 $g(\theta)$ 的**强相合估计**。
- 如果当 $n \to \infty$ 时，T_n 依 r 阶矩收敛于 $g(\theta)$，即 $\forall \theta \in \Theta$，有
$$\lim_{n\to\infty} E_\theta |T_n - g(\theta)|^r = 0 \tag{2.7.3}$$
则称 T_n 是 $g(\theta)$ 的 **r 阶矩相合估计**。当 $n = 2$ 时，称为**均方相合估计**。

由概率论知识，强相合 $\Rightarrow$ 弱相合，r 阶矩相合 $\Rightarrow$ 弱相合，反之不成立，且强相合与 r 阶矩相合之间没有包含关系。

例 2.7.1

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自 $b(1, p)$ 的 IID 样本，由大数定律知，
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} p, \quad \forall 0 < p < 1$$
故 $\overline{X}$ 是 p 的相合估计。

事实上，只要样本 $X_1, \cdots, X_n$ 是 IID 的，且其期望 $EX_1 = \mu$ 存在，则由 Khinchin 大数定律知，样本均值 $\overline{X}$ 就是总体均值 μ 的相合估计，与其具体分布无关。

由概率论知识，有以下结论。

定理 2.7.1

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自分布族 $\{f(x, \theta) : \theta \in \Theta\}$ 的 IID 样本，且 $E|X_1|^p < \infty$（p 为正整数），则样本的 $k(1 \leqslant k \leqslant p)$ 阶原点矩是总体 k 阶原点矩的相合估计，即
$$a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{P} \mu_k = EX^k$$

定理 2.7.2

如果 T_n 是 $g(\theta)$ 的相合估计，c_n, d_n 是两个常数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 1$，则 $d_nT_n + c_n$ 也是 $g(\theta)$ 的相合估计。

定理 2.7.3

如果 T_n 是 $g(\theta)$ 的渐近无偏估计，且满足

$$\lim_{n\to\infty} Var_\theta T_n = 0,\ \forall\theta\in\Theta$$

则 T_n 既是 $g(\theta)$ 的相合估计，也是均方相合估计。

定理 2.7.4

如果 T_n 是 θ 的相合估计，$g(x)$ 在点 $x=\theta$ 处连续，则 $g(T_n)$ 也是 $g(\theta)$ 的相合估计。

由上述定理知，样本方差是总体方差的相合估计，多数矩估计也是相应参数的相合估计。

2.7.2 样本分位数的相合性

定义 2.7.2 (总体 p 分位数)

设总体 X 的分布函数为 $F(x)$，对于给定的 $p\in(0,1)$，称满足

$$\xi_p = \inf\{x : F(x) \geqslant p\} \tag{2.7.4}$$

的 ξ_p 为该**总体的 p 分位数**。特别地，称 $\xi_{0.5}$ 为**该总体的中位数**。

定理 2.7.5 (样本分位数的 Bahadur 表示)

以 $F_n(x)$ 表示经验分布函数，ξ_p 表示总体的 p 分位数，$f(x)$ 表示总体的 PDF。如果 $f(\xi_p) > 0$ 且 $f(x)$ 在 ξ_p 点连续，则当 $n\to\infty$ 时，有

$$\sqrt{n}\left(m_{n,p} - \xi_p + \frac{F_n(\xi_p)-p}{f(\xi_p)}\right) \xrightarrow{P} 0 \tag{2.7.5}$$

2.7.3 极大似然估计的相合性

本小节讨论 MLE 的相合性，假设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自 $f(x,\theta)$ 的 IID 样本。为简单起见，只考虑单参数情形，设参数空间 Θ 是一个开区间，对数似然函数 $l(\theta,x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f(x_i,\theta)$

定理 2.7.6

如 $\ln f(x,\theta)$ 在 Θ 上可微，并设 $f(x,\theta)$ 是**可识别的**，即 $\forall\theta\neq\theta'$，$\{x : f(x,\theta)\neq f(x,\theta')\}$ 不是零测集，则似然方程在 $n\to\infty$ 是以概率 1 有解，且此解关于 θ 是相合的。

上一定理给出了似然方程有解且其解是相合的条件。也存在不相合的极大似然估计的情况，见下例。

例 2.7.2

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自 Bernoulli 分布族

$$P\{X=1\} = 1 - P\{X=0\} = \begin{cases} \theta, & \theta\text{为有理数} \\ 1-\theta, & \theta\text{为无理数} \end{cases}$$

的 IID 样本，其中 $0 < \theta < 1$。讨论 θ 的 MLE 的相合性。

2.7.4 相合渐近正态估计

定义 2.7.3 (相合渐近正态估计)

设 T_n 是参数 $g(\theta)$ 的相合估计量，如果存在于样本容量 n 有关的定义于参数空间 Θ 上的函数 $\mu_n(\theta), \sigma_n(\theta)$，且 $\sigma_n(\theta) > 0$，使得当 $n \to \infty$ 时，有

$$\frac{T_n - \mu_n(\theta)}{\sigma_n(\theta)} \xrightarrow{d} N(0,1) \tag{2.7.6}$$

则称 T_n 为 $g(\theta)$ 的 **CAN 估计**，也称 T_n **渐近正态**，记为 $T_n \sim AN(\mu_n, \sigma_n^2)$。

由概率论知识，统计量 T_n 渐近的均值和方差不是唯一的。对此，有如下结论：

- 如果 $T_n \sim AN(\mu_n, \sigma_n^2)$，则 $T_n \sim AN(\mu_n', {\sigma_n'}^2)$ 的充要条件是
$$\frac{\sigma_n'}{\sigma_n} \to 1, \quad \frac{\mu_n' - \mu_n}{\sigma_n} \to 0$$
- 如果 $T_n \sim AN(\mu_n, \sigma_n^2)$，则 $a_n T_n + b_n \sim AN(\mu_n, \sigma_n^2)$ 的充要条件是
$$a_n \to 1, \quad \frac{\mu_n(a_n - 1) + b_n}{\sigma_n} \to 0$$

可以证明，样本均值、样本方差、样本标准差都是渐近正态的。

2.7.4.1 样本分位数的相合渐近正态性

定理 2.7.7

设 ξ_p 表示总体的 p 分位数，$f(x)$ 表示总体的 PDF。如果 $f(\xi_p) > 0$ 且 $f(x)$ 在 ξ_p 点连续，则当 $n \to \infty$ 时，有

$$\sqrt{n}(m_{n,p} - \xi_p) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{p(1-p)}{f^2(\xi_p)}\right) \tag{2.7.7}$$

2.7.4.2 矩估计的相合渐近正态性

定理 2.7.8

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自某分布族 $\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$ 的 IID 样本，且待估参数 $g(\theta)$ 可以表示为总体 k 阶原点矩 μ_k 的函数，即

$$g(\theta)=G(\mu_1,\cdots,\mu_k)$$

如果用样本 k 阶原点矩估计总体 k 阶原点矩，记得到的关于 $g(\theta)$ 的估计为

$$\hat{g}(\boldsymbol{X})=G(a_1,\cdots,a_k)$$

再设总体的 $2k$ 阶原点矩存在，且函数 G 关于各变量均一阶连续可微，令

$$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{k\times k}=(\mu_{i+j}-\mu_i\mu_j)_{k\times k},\ d_i=\frac{\partial G}{\partial\mu_i},\ i=1,\cdots,k$$

且 $\boldsymbol{d}=(d_1,\cdots,d_k)^T$, $\sigma^2=\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{d}$。

在上述假设下，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\sqrt{n}(\hat{g}(\boldsymbol{X})-G(\mu_1,\cdots,\mu_k))\xrightarrow{d}N(0,\sigma^2)\tag{2.7.8}$$

2.7.4.3 极大似然估计的相合渐近正态性

仅给出总体参数为一维的情形。

定理 2.7.9

设参数空间 Θ 是开区间，总体 PDF $f(x,\theta)$ 满足：

1. 在参数真值 θ_0 的邻域内，$\dfrac{\partial^i\ln f}{\partial\theta^i}$, $i=1,2,3$ 存在；
2. 在参数真值 θ_0 的邻域内，$\left|\dfrac{\partial^3\ln f}{\partial\theta^3}\right|\leqslant H(x)$，且 $EH(x)<\infty$；
3. 在参数真值 θ_0 处，

$$E_{\theta_0}\left[\frac{f'(X,\theta_0)}{f(X,\theta_0)}\right]=0,\quad E_{\theta_0}\left[\frac{f''(X,\theta_0)}{f(X,\theta_0)}\right]=0,\quad I(\theta_0)=E_{\theta_0}\left[\frac{f'(X,\theta_0)}{f(X,\theta_0)}\right]^2>0$$

记 $\hat{\theta}_n$ 为 $n\to\infty$ 时似然方程的相合解，则

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta_0)\xrightarrow{d}N(0,I^{-1}(\theta_0))\tag{2.7.9}$$

证明 将 $\dfrac{\partial l}{\partial\theta}$ 在 θ_0 处 Taylor 展开，得

$$0=\left.\frac{\partial l}{\partial\theta}\right|_{\hat{\theta}_n}=\left.\frac{\partial l}{\partial\theta}\right|_{\theta_0}+(\hat{\theta}_n-\theta_0)\left[\left.\frac{\partial^2 l}{\partial\theta^2}\right|_{\theta_0}+O_p(\hat{\theta}_n-\theta_0)\right]$$

整理得

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta_0)=\frac{-\sqrt{n}\,\frac{1}{n}\,\frac{\partial l}{\partial\theta}\Big|_{\theta_0}}{\frac{1}{n}\left[\frac{\partial^2 l}{\partial\theta^2}\Big|_{\theta_0}+O_p(\hat{\theta}_n-\theta_0)\right]}$$

注意到

$$\frac{\partial l}{\partial\theta}\Big|_{\theta_0}=\sum_{i=1}^{n}\frac{f'(x_i,\theta_0)}{f(x_i,\theta_0)},\qquad \frac{\partial^2 l}{\partial\theta^2}\Big|_{\theta_0}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{f''(x_i,\theta_0)}{f(x_i,\theta_0)}-\left(\frac{f'(x_i,\theta_0)}{f(x_i,\theta_0)}\right)^2\right]$$

由中心极限定理，有

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial l}{\partial\theta}\Big|_{\theta_0}\xrightarrow{d}N(0,I(\theta_0))$$

由大数定律知

$$\frac{1}{n}\frac{\partial^2 l}{\partial\theta^2}\Big|_{\theta_0}\xrightarrow{P}-I(\theta_0)$$

由 Slutsky 定理，有 (2.7.9) 式成立。 □

笔记 上面证明过程中的 **Slutsky** 定理，指的是：

定理 2.7.10 (Slutsky 定理)

设 $X_n\xrightarrow{d}X$ 且 $Y_n\xrightarrow{P}c$，其中 c 为常数，则有

1. $X_n+Y_n\xrightarrow{d}X+c$
2. $X_nY_n\xrightarrow{d}cX$
3. 若 $c\neq 0$，则 $\dfrac{X_n}{Y_n}\xrightarrow{d}\dfrac{X}{c}$

注 均匀分布族 $U(0,\theta)$ 不满足定理 2.7.9 的条件，其 MLE 为 $X_{(n)}$，而次序统计量的极限分布不是正态的，而是一种极值分布。

注 记号 $O_p(1)$ 和 $o_p(1)$ 的含义：

- 对于随机变量列 $\{X_n\}$，记其分布函数列为 $\{F_n\}$，如果它满足：对 $\forall\varepsilon>0$，存在 M_ε 和 N_ε，使得

$$F_n(M_\varepsilon)-F_n(-M_\varepsilon)>1-\varepsilon,\ \forall n>N_\varepsilon$$

  则称之为依概率有界，记作 $X_n=O_p(1)$
- 若 $\dfrac{U_n}{V_n}=O_p(1)$，则记作 $U_n=O_p(V_n)$
- 若 $\dfrac{U_n}{V_n}\xrightarrow{P}0$，则记作 $U_n=o_p(V_n)$

从 (2.7.9) 式可以看出，在某些条件下，MLE 的极限方差达到了 C-R 下界，故它是渐近有效的，所以 MLE 也称为有效似然估计。

虽然 MLE 具有很多优良的性质，但它也存在几点不足：

- MLE 可能不是“最好”的，如不是 UMVUE 或均方误差最小的；

- MLE 可能不唯一；
- MLE 依赖于总体的分布函数，如果不知道样本的分布，则无法求得感兴趣参数的 MLE。

2.8 Bayes 估计

Bayes 统计的基本观点可以用下面三个假设来归纳：

假设 1 设随机变量 X 有一个 PDF$f(x,\theta)$，其中 θ 是一个参数。从 Bayes 的观点来看，它是在给定 θ 后的一个条件 PDF，因此把 $f(x,\theta)$ 记为 $f(x|\theta)$，而 $f(x|\theta)$ 中关于 θ 的信息即为**总体信息**。

假设 2 当给定 θ 后，从总体 $f(x|\theta)$ 中随机地抽取一组样本 $X_1,\cdots,X_n$，该样本中含有大量关于 θ 的信息，这就是**样本信息**。于是，样本分布 $f(\boldsymbol{x}|\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i|\theta)$ 即综合了总体与样本信息。

假设 3 我们对参数 θ 已经获得了一些有用的信息，称为 θ 的**先验信息** (prior)。由于 θ 不是永远固定在一个值上，故从 Bayes 的观点看，未知参数 θ 也是一个随机变量。关于 θ 的分布可以从先验信息中归纳出来，故其分布称为**先验分布**，用 $\pi(\theta)$ 表示其 PDF。

综合前面几点，样本 $X_1,\cdots,X_n$ 及参数 θ 的联合 PDF 为

$$f(\boldsymbol{x},\theta)=f(\boldsymbol{x}|\theta)\pi(\theta) \tag{2.8.1}$$

当有了样本后，可以得到 θ 的条件分布如下：

$$\pi(\theta|\boldsymbol{x})=\frac{f(\boldsymbol{x},\theta)}{f(\boldsymbol{x})}=\frac{f(\boldsymbol{x}|\theta)\pi(\theta)}{\displaystyle\int f(\boldsymbol{x}|\theta)\pi(\theta)\,d\theta} \tag{2.8.2}$$

称之为 θ 的**后验分布** (posterior)，而 $f(\boldsymbol{x})=\displaystyle\int f(\boldsymbol{x}|\theta)\pi(\theta)\,d\theta$ 是 $X_1,\cdots,X_n$ 的**边际分布**或样本的**无条件分布**。

从上式中可以看出，参数 θ 的后验分布归纳了 θ 的先验信息、总体中关于 θ 的信息和样本提供的信息，于是，θ 的估计就应从其后验分布入手。

常用的估计方法为：

1. 取后验分布 $\pi(\theta|\boldsymbol{x})$ 的最大值，即众数作为 θ 的估计，称之为众数型的 Bayes 估计；
2. 取后验分布 $\pi(\theta|\boldsymbol{x})$ 的中位数作为 θ 的估计，称之为中位数型的 Bayes 估计；
3. 取后验分布 $\pi(\theta|\boldsymbol{x})$ 的期望作为 θ 的估计，称之为期望型的 Bayes 估计。

上述三种常用的估计中，第三种期望型的 Bayes 估计最常用，以后将采用后验期望作为 θ 的 Bayes 估计：

$$\hat{\theta}_B=E(\theta|\boldsymbol{X})=\int\theta\pi(\theta|\boldsymbol{x})\,d\theta \tag{2.8.3}$$

例 2.8.1

设某产品的次品率为 θ，估计 θ。

一般来说，先验分布可以按如下步骤确定：

1. 选一个适应面较广的分布族作为先验分布族，以便在数据处理上方便一些；
2. 根据先验信息在选取的分布族中选取一个分布作为先验分布，使其与先验信息符合较好；
3. 如果很难从前面两步选取先验分布，则可用无信息先验，即 $\pi(\theta)=1$，或用均匀分布作为先验分布。

在本例中，选取 β 分布族作为先验分布族，主要原因是：可以证明，如果取参数 θ 的先验分布为 β 分布，则其后验分布仍为 β 分布（称这样的先验为**共轭先验**）。

取定 β 分布族作为先验分布族后，对于先验分布中参数的估计方法常如下进行：

- 假设能从先验信息中较为准确地算出 θ 的先验均值 $\bar{\theta}$ 和先验方差 S_θ^2，则可以利用矩估计法估计 α,β；
- 假设能从先验信息中找到 θ 的两个下侧分位数，如 $\theta_{0.1},\theta_{0.5}$，则可以通过解方程组求的 α,β 的值；
- 如果先验信息很丰富的话，可以用这些先验信息去拟合它的一个分布出来，之后用这个分布作为它的先验分布。

2.9 最小二乘估计

2.9.1 最小二乘估计

线性模型（Gauss-Markov 模型）：

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}=\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{\varepsilon} \\ E\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{0},\ Var\,\boldsymbol{\varepsilon}=\sigma^2\boldsymbol{I}_n \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{y}$ 为 n 维观测向量，$\boldsymbol{X}$ 为 $n\times p$ 阶设计矩阵，$\boldsymbol{\beta}$ 为 p 维未知参数，σ^2 未知。

定义 2.9.1 (最小二乘估计)

对于上面的 Guass-Markov 模型，如果

$$(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})=\min_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}) \tag{2.9.1}$$

则称 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的最小二乘估计 (least squares estimate，简记为 LSE)。

求上面的问题相当于求解下面的**正规方程** (normal equation)：

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X\beta}=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{y} \tag{2.9.2}$$

如果设计矩阵 $\boldsymbol{X}$ 列满秩的，则上述正规方程的解唯一，为

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}=(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{y} \tag{2.9.3}$$

这就是 $\boldsymbol{\beta}$ 的 LSE。

从 (2.9.3) 式可以看出，LSE 是观测向量 $\boldsymbol{y}$ 的线性函数，这一点在后面的证明中非常有用。

定理 2.9.1

对于前面的 Gauss-Markov 模型，如果设计矩阵 $\boldsymbol{X}$ 是列满秩的，且以 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 记由 (2.9.3) 式给出的 $\boldsymbol{\beta}$ 的 LSE，则

1. $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 的 UE（如果 $\boldsymbol{X}$ 不是列满秩的，此结论仍正确）；
2. $Var\hat{\boldsymbol{\beta}} = \sigma^2(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}$。

2.9.2 最优线性无偏估计

2.9.3 加权最小二乘估计

2.9.4 线性模型的诊断

第 3 章 区间估计

3.1 基本概念

定义 3.1.1 (区间估计)

设 $X_1, \cdots, X_n$ 为来自参数分布族 $\mathcal{F} = \{f(x, \theta) : \theta \in \Theta\}$ 的样本，θ 为一维未知参数。如果 $\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})$ 为两个统计量，且 $\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}) \leqslant \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})$，则称随机区间 $[\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})]$ 为 θ 的一个**区间估计** (interval estimate)。

定义 3.1.2 (置信系数)

设随机区间 $[\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})]$ 为 θ 的一个区间估计，则

- 称随机区间 $[\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})]$ 包含真值 θ 的概率

$$P_\theta\{\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}) \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})\} \tag{3.1.1}$$

  为该区间估计的**置信水平** (confidence level) 或**置信度**。

- 称置信水平关于 θ 的下确界

$$\inf_{\theta \in \Theta} P_\theta\{\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}) \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})\} \tag{3.1.2}$$

  为该区间估计的置信系数。

定义 3.1.3 (置信区间)

设 $[\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})]$ 是参数 θ 的一个区间估计，如果对给定的 $\alpha \in (0, 1)$，有

$$P_\theta\{\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}) \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})\} \geqslant 1 - \alpha, \ \forall \theta \in \Theta \tag{3.1.3}$$

则称 $[\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})]$ 为 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的**置信区间** (confident interval)，分别称 $\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})$ 为置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间的（双侧）**置信下限**与（双侧）**置信上限**。

注 以后所说的区间估计均是指上面定义的置信区间。

注 上面定义的置信区间指的是置信水平不小于 $1 - \alpha$，但实际中均是求满足

$$P_\theta\{\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}) \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})\} \geqslant 1 - \alpha, \ \forall \theta \in \Theta \tag{3.1.4}$$

的置信区间，称为**同等置信区间**。

在实际问题中，对于望大指标或望小指标，人们关心的是在一定置信水平下的置信下（上）限。于是有如下定义：

定义 3.1.4 (单侧置信限)

设 $\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})$ 是两个统计量，如果对于给定的 $\alpha \in (0,1)$，有

$$P_\theta\{\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}) \leqslant \theta\} \geqslant 1-\alpha, \ \forall \theta \in \Theta \tag{3.1.5}$$

$$P_\theta\{\hat{\theta}_U(\boldsymbol{X}) \geqslant \theta\} \geqslant 1-\alpha, \ \forall \theta \in \Theta \tag{3.1.6}$$

则分别称 $\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的**单侧置信下限与单侧置信上限**。

单侧置信限与双侧置信限的关系如下：

定理 3.1.1

设 $\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})$ 分别是参数 θ 的置信水平为 $1-\alpha_1$ 和 $1-\alpha_2$ 的单侧（同等）置信下限与上限，且对样本 $X_1, \cdots, X_n$，均有 $\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}) \leqslant \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})$，则 $[\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})]$ 是 θ 的置信水平为 $1-(\alpha_1+\alpha_2)$ 的（同等）置信区间。

将置信区间推广到多参数的情形，有如下置信域的概念：

定义 3.1.5 (置信域)

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自参数分布族 $\mathcal{F} = \{f(x,\theta) : \theta \in \Theta\}$ 的样本，$\theta = (\alpha_1, \cdots, \theta_n)^T$。如果统计量 $S(\boldsymbol{X})$ 满足

1. 对任一样本观测值 $\boldsymbol{x}$，$S(\boldsymbol{x})$ 是 Θ 的一个子集
2. 对给定的 $\alpha \in (0,1)$，$P_\theta\{\theta \in S(\boldsymbol{X})\} \geqslant 1-\alpha, \ \forall \theta \in \Theta$

则称 $S(\boldsymbol{X})$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的**置信域** (confident region)，而概率 $P_\theta\{\theta \in S(\boldsymbol{X})\}$ 在 Θ 上的下确界就称为置信系数。

3.2 枢轴量法

约定 以后始终以 $\varPhi(x), \phi(x)$ 分布表示标准正态分布 $N(0,1)$ 的 CDF 和 PDF，用满足 $\varPhi(u_\alpha) = 1-\alpha$ 的 u_α 表示标准正态分布的**上侧 α 分位数**，以 $\chi^2_\alpha(n), t_\alpha(n), F_\alpha(m,n)$ 分别表示 $\chi^2(n), t(n), F(m,n)$ 分布的上侧 α 分位数。

3.2.1 小样本情况

枢轴量法的基本想法：在求取某参数的置信区间时，一般是先给一个好的点估计，然后再通过这个点估计的分布求感兴趣参数的置信区间。

枢轴量法求置信区间的步骤如下：

1. 找一个与待估参数 $g(\theta)$ 无关的统计量 T，一般是它的一个很好的点估计（如 $\overline{X}$）;
2. 设法找出 T 和 $g(\theta)$ 的某函数 $S(T, g(\theta))$，使得 $S(T, g(\theta))$ 的分布 $F(x)$ 与 θ 无关，S 就称为**枢轴量**;

3. 适当地选取两个常数 c,d，使得对给定的 $\alpha\in(0,1)$，有

$$P_\theta\{c\leqslant S(T,g(\theta))\leqslant d\}=1-\alpha \tag{3.2.1}$$

即 $F(d)-F(c)=1-\alpha$（一般取 $d=F_{\frac{\alpha}{2}}$，$c=F_{1-\frac{\alpha}{2}}$）；

4. 把上面的不等式等价地改写成 $\hat\theta_L(\boldsymbol{X})\leqslant g(\theta)\leqslant\hat\theta_U(\boldsymbol{X})$ 的形式，其中 $\hat\theta_L(\boldsymbol{X}),\hat\theta_U(\boldsymbol{X})$ 只与 c,d 有关，而与 θ 无关，则 $[\hat\theta_L(\boldsymbol{X}),\hat\theta_U(\boldsymbol{X})]$ 就是 $g(\theta)$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间。

上述枢轴量法中，最关键的就是第二步寻找枢轴量。

例 3.2.1

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的 IID 样本，其中 σ^2 已知，μ 未知。求 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间。

例 3.2.2

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自均匀分布总体 $U(0,\theta)$ 的 IID 样本，求 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间。

例 3.2.3

设某产品的寿命 X 服从指数分布 $E(\lambda)$，求其平均寿命 $\dfrac{1}{\lambda}$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信限。

解 由于寿命是望大指标，故仅需求其置信下限。 □

3.2.2 大样本情况

枢轴量法对于离散型随机变量并不容易操作，其原因在于对给定的 α，一般不存在确切的分位点，只能从极限分布的角度，近似地求取离散型总体参数的置信区间。

例 3.2.4

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自 Bernoulli 总体 $b(1,p)$ 的 IID 样本，试求 p 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间。

解 由于 $\sum\limits_{i=1}^n X_i$ 是充分统计量，故枢轴量应与它有关。因为 $\sum\limits_{i=1}^n X_i\sim B(n,p)$，由中心极限定理知，当 $n\to\infty$ 时，

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^n X_i-np}{\sqrt{npq}}\xrightarrow{d}N(0,1)$$

其中 $q=1-p$，即当 n 充分大时，有

$$P\left\{\frac{T_n-np}{\sqrt{npq}}<x\right\}\approx\varPhi(x)$$

故当 n 充分大时，有

$$P\left\{-u_{\frac{\alpha}{2}}\leqslant\frac{T_n-np}{\sqrt{npq}}\leqslant u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}\approx 1-\alpha$$

等价于

$$P\{n(\overline{X}-p)^2 \leqslant p(1-p)u_{\frac{\alpha}{2}}^2\} \approx 1-\alpha$$

解得

$$\hat{p}_{L,U} = \frac{n}{n+u_{\frac{\alpha}{2}}^2}\left[\overline{X}+\frac{u_{\frac{\alpha}{2}}^2}{2n} \mp u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}+\frac{u_{\frac{\alpha}{2}}^2}{4n^2}}\right]$$

于是 $[\hat{p}_L, \hat{p}_U]$ 是 p 的置信水平近似为 α 的置信区间。 □

最后，把关于单个正态总体参数的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间总结如下表：

表 3.1: 单样本正态总体参数的置信区间

参数 σ^2 情况	μ 的置信区间
σ^2 已知	$\left[\overline{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
σ^2 未知	$\left[\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right]$
参数 μ^2 情况	σ^2 的置信区间
μ 已知	$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)}\right]$
μ 未知	$\left[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}\right]$

3.3 两个正态总体的置信区间

设 $X_1, \cdots, X_n$ 和 $Y_1, \cdots, Y_n$ 分别为来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，且全样本是独立的，其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ 为参数。

3.3.1 Behrens-Fisher 问题

3.3.2 方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间

把两样本正态总体参数的置信区间总结如下表：

表 3.2: 两样本正态总体参数的置信区间

待估参数	讨厌参数	置信区间
$\mu_1-\mu_2$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知	$\left[\overline{Y}-\overline{X}\mp t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)\sqrt{\frac{m+n}{mn(m+n-2)}(S_{1m}^2+S_{2n}^2)}\right]$
	$\sigma_2^2/\sigma_1^2=\theta$ 已知	$\left[\overline{Y}-\overline{X}\mp t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)\sqrt{\frac{m\theta+n}{mn(m+n-2)}\left(S_{1m}^2+\frac{S_{2n}^2}{\theta}\right)}\right]$
	$m=n$ 时	$\left[\overline{Z}\mp t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(Z_i-\overline{Z})^2}{n(n-1)}}\right]$
	m,n 充分大	$[\overline{Y}-\overline{X}\mp u_{\frac{\alpha}{2}}S_{mn}^*]$
	一般情况	$[\overline{Y}-\overline{X}\mp t_{\frac{\alpha}{2}}(r)S_{mn}^*]$
σ_1^2/σ_2^2	μ_1,μ_2 未知	$\left[\frac{S_{1m}^2/S_{2n}^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)},\frac{S_{1m}^2/S_{2n}^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)}\right]$

3.4 信念推断方法

第 4 章 假设检验——显著性检验

4.1 Fisher 的显著性检验思想和基本概念

4.1.1 Fisher 显著性检验思想

例 4.1.1 (女士品茶试验)

4.1.2 基本概念

内容提要

- 零假设与备择假设
- 简单假设与复合假设
- 双侧假设与单侧假设
- 拒绝域与接受域
- 第一、二类错误
- 势函数
- 显著性水平
- 显著性检验

设有样本 X，取值于样本空间 $\mathcal{X}$，且知道样本来自某一个参数分布族 $\{F(x,\theta):\theta\in\Theta\}$，其中 Θ 为参数空间。设 $\Theta_0\subset\Theta$，且 $\Theta_0\neq\Theta$，则命题 $H_0:\theta\in\Theta_0$ 称为一个**假设**或**零假设** (null hypothesis)。记 $\Theta_1=\Theta-\Theta_0$，则命题 $H_1:\theta\in\Theta_1$ 称为 H_0 的**备择假设** (alternative hypothesis) 或**对立假设**。

于是，我们感兴趣的问题就是

$$H_0:\theta\in\Theta_0\longleftrightarrow H_1:\theta\in\Theta_1 \tag{4.1.1}$$

我们称此假设的检验问题为**假设检验问题**。

对于假设 (4.1.1)，如果 Θ_0 只有一个点，则称之为**简单假设** (simple)，否则就称为**复杂假设**或**复合假设** (composite)。同样，对于备择假设也有简单与复杂之分。当 H_0 为简单假设时，其形式可写成 $H_0:\theta=\theta_0$，此时的备择假设有两种可能：

$$H_1':\theta\neq\theta_0,\quad H_1'':\theta<\theta_0\ (\textbf{或}\theta>\theta_0)$$

称 $H_0\longleftrightarrow H_1'$ 为**双侧假设**，$H_0\longleftrightarrow H_1''$ 为**单侧假设**。

对于假设的检验，就等价于将样本空间 $\mathcal{X}$ 划分成两个互不相交的部分 W 和 $\overline{W}$，当样本属于 $\overline{W}$ 时，接受 H_0；否则拒绝 H_0。于是，称 W 为该检验的**拒绝域**，而 $\overline{W}$ 为**接受域**。

由于样本是随机的，故当应用某种检验方法进行决策时，可能作出正确的决策，也可能犯下面两种错误：

1. 当 $\theta\in\Theta_0$ 时，样本却落入了拒绝域 W，于是采取了拒绝 H_0 的错误决策，称这样的错误为**第一类错误** (type I error)；

2. 当 $\theta \notin \Theta_0$ 时，样本却落入了接受域 $\overline{W}$，于是采取了接受 H_0 的错误决策，称这样的错误为**第二类错误** (type II error)。

注 *为方便记忆，分别称第一、二类错误为拒真与纳伪。*

定义犯第一、二类错误的概率如下：

1. 犯第一类错误的概率：$\alpha = P_\theta\{\boldsymbol{X} \in W\}$, $\theta \in \Theta_0$，也记为 $P\{\boldsymbol{X} \in W \mid H_0\}$；
2. 犯第二类错误的概率：$\beta = P_\theta\{\boldsymbol{X} \in \overline{W}\}$, $\theta \in \Theta_1$，也记为 $P\{\boldsymbol{X} \in \overline{W} \mid H_1\}$。

需要指出的是，对于上述两类错误，不存在一个检验，使得其犯两类错误的概率都尽可能地小。为说明其原因，先引入如下概念。

定义 4.1.1 (势函数)

对于假设 (4.1.1) 的一个检验方法 ψ，其拒绝域记为 W，则称

$$\beta_\psi(\theta) = P_\theta\{\boldsymbol{X} \in W\}, \ \forall \theta \in \Theta \tag{4.1.2}$$

为此检验的**势函数** (power function) 或**功效函数**。

从上述定义可以看出，当 $\theta \in \Theta_0$ 时，此检验犯第一类错误的概率为 $\beta_\psi(\theta)$；当 $\theta \notin \Theta_0$ 时，此检验犯第二类错误的概率为 $1 - \beta_\psi(\theta)$。

例 4.1.2

如果买到标重 500g 的袋糖，其实际质量为 400g，如何判断厂家是否欺骗顾客？

从上例中可以看出：

- 对于固定的样本容量，找不到一个检验方法，使得犯第一、二类错误的概率均达到最小；
- 犯第二类错误的概率不易求出，因为它依赖于备择假设中的参数。

既然不可能同时控制一个检验犯第一、二类错误的概率，那么通常的做法是仅限制第一类错误的概率。

定义 4.1.2 (显著性水平)

对于检验 ψ 和事先给定的 $\alpha \in (0,1)$，如果它满足

$$P_\theta\{\boldsymbol{X} \in W\} \leqslant \alpha, \ \forall \theta \in \Theta_0 \tag{4.1.3}$$

则称 α 是检验 ψ 的**显著性水平或水平**，称 ψ 是显著性水平为 α 的检验。

另外，当只控制一个检验犯第一类错误的概率时，就称这样的检验为**显著性检验**。

一般地，求某假设的显著性检验的步骤如下：

1. 根据实际问题，建立统计假设 $H_0 \longleftrightarrow H_1$；
2. 选取一个合适的统计量 $T(\boldsymbol{X})$，使得当 H_0 成立时，T 的分布已知，且与参数 θ 无关（称此分布为统计量 T 的零分布）；
3. 根据 H_0 和 H_1 的特点，确定拒绝域 W 的区间形式；
4. 对于给定的显著性水平 α，确定拒绝域 W；
5. 由样本观测值 $\boldsymbol{x}$，计算统计量 $T(\boldsymbol{X})$ 的值 $T(\boldsymbol{x})$，根据 $T(\boldsymbol{x})$ 是否属于 W，作出最终判断。

4.2 单样本正态总体参数的显著性检验

在本节中，始终假设 $X_1, \cdots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的 IID 样本，且我们感兴趣的是关于 μ 及 σ^2 的检验问题。

4.2.1 单样本正态总体均值的检验

表4.1 单样本正态总体均值的显著性检验

方差	假设	检验统计量	拒绝域	名字
	$H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$		$\{\|U\| > u_{\alpha/2}\}$	双边u检验
	$H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu < \mu_0$		$\{U < -u_\alpha\}$	单边u检验
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$	$U = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma_0}$	$\{U > u_\alpha\}$	单边u检验
	$H_0: \mu \leq \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$		$\{U > u_\alpha\}$	单边u检验
	$H_0: \mu \geq \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu < \mu_0$		$\{U < -u_\alpha\}$	单边u检验
	$H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$		$\{\|T\| > t_{\alpha/2}(n-1)\}$	双边t检验
	$H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu < \mu_0$		$\{T < -t_\alpha(n-1)\}$	单边t检验
σ^2未知	$H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$	$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S_n}$	$\{T > t_\alpha(n-1)\}$	单边t检验
	$H_0: \mu \leq \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$		$\{T > t_\alpha(n-1)\}$	单边t检验
	$H_0: \mu \geq \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu < \mu_0$		$\{T < -t_\alpha(n-1)\}$	单边t检验

4.2.2 单样本正态总体方差的检验

表4.2 单样本正态总体方差的显著性检验

均值	假设	检验统计量	拒绝域
	$\sigma^2 = \sigma_0^2 \longleftrightarrow \sigma^2 \neq \sigma_0^2$		$\{\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}(n)\} \cup \{\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}(n)\}$
	$\sigma^2 = \sigma_0^2 \longleftrightarrow \sigma^2 < \sigma_0^2$		$\{\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(n)\}$
$\mu = \mu_0$	$\sigma^2 = \sigma_0^2 \longleftrightarrow \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}$	$\{\chi^2 > \chi^2_\alpha(n)\}$
	$\sigma^2 \leq \sigma_0^2 \longleftrightarrow \sigma^2 > \sigma_0^2$		$\{\chi^2 > \chi^2_\alpha(n)\}$
	$\sigma^2 \geq \sigma_0^2 \longleftrightarrow \sigma^2 < \sigma_0^2$		$\{\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(n)\}$
	$\sigma^2 = \sigma_0^2 \longleftrightarrow \sigma^2 \neq \sigma_0^2$		$\{\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\} \cup \{\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\}$
	$\sigma^2 = \sigma_0^2 \longleftrightarrow \sigma^2 < \sigma_0^2$		$\{\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\}$
μ未知	$\sigma^2 = \sigma_0^2 \longleftrightarrow \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2}{\sigma_0^2}$	$\{\chi^2 > \chi^2_\alpha(n-1)\}$
	$\sigma^2 \leq \sigma_0^2 \longleftrightarrow \sigma^2 > \sigma_0^2$		$\{\chi^2 > \chi^2_\alpha(n-1)\}$
	$\sigma^2 \geq \sigma_0^2 \longleftrightarrow \sigma^2 < \sigma_0^2$		$\{\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\}$

笔记 区间估计和显著性检验本质上是一回事。

4.3 两样本正态总体参数的显著性检验

4.3.1 两样本正态总体均值的显著性检验

表4.3 两样本正态总体均值的显著性检验

方差	假设	检验统计量	拒绝域
σ_1^2,σ_2^2已知	$H_0:\mu_1=\mu_2\longleftrightarrow H_1:\mu_1\neq\mu_2$	$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}$	$\{\lvert U\rvert\geq u_{\alpha/2}\}$
σ_1^2,σ_2^2已知	$H_0:\mu_1\leq\mu_2\longleftrightarrow H_1:\mu_1>\mu_2$	$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}$	$\{U\geq u_\alpha\}$
σ_1^2,σ_2^2已知	$H_0:\mu_1\geq\mu_2\longleftrightarrow H_1:\mu_1<\mu_2$	$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}$	$\{U\leq -u_\alpha\}$
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知	$H_0:\mu_1=\mu_2\longleftrightarrow H_1:\mu_1\neq\mu_2$	$T=\sqrt{\frac{mn}{m+n}}\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_{mn}^*}$	$\{\lvert T\rvert\geq t_{\alpha/2}(m+n-2)\}$
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知	$H_0:\mu_1\leq\mu_2\longleftrightarrow H_1:\mu_1>\mu_2$	$T=\sqrt{\frac{mn}{m+n}}\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_{mn}^*}$	$\{T\geq t_\alpha(m+n-2)\}$
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知	$H_0:\mu_1\geq\mu_2\longleftrightarrow H_1:\mu_1<\mu_2$	$T=\sqrt{\frac{mn}{m+n}}\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_{mn}^*}$	$\{T\leq -t_\alpha(m+n-2)\}$
$\sigma_1^2\ \sigma_2^2$未知 m,n充分大时	$H_0:\mu_1=\mu_2\longleftrightarrow H_1:\mu_1\neq\mu_2$	$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{S_{1m}^2/m+S_{2n}^2/n}}$	$\{\lvert U\rvert\geq u_{\alpha/2}\}$
$\sigma_1^2\ \sigma_2^2$未知 m,n充分大时	$H_0:\mu_1\leq\mu_2\longleftrightarrow H_1:\mu_1>\mu_2$	$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{S_{1m}^2/m+S_{2n}^2/n}}$	$\{U\geq u_\alpha\}$
$\sigma_1^2\ \sigma_2^2$未知 m,n充分大时	$H_0:\mu_1\geq\mu_2\longleftrightarrow H_1:\mu_1<\mu_2$	$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{S_{1m}^2/m+S_{2n}^2/n}}$	$\{U\leq -u_\alpha\}$
$\sigma_1^2\ \sigma_2^2$未知 m,n不都充分大	$H_0:\mu_1=\mu_2\longleftrightarrow H_1:\mu_1\neq\mu_2$	$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{S_{1m}^2/m+S_{2n}^2/n}}$	$\{\lvert T\rvert\geq t_{\alpha/2}(r)\}$
$\sigma_1^2\ \sigma_2^2$未知 m,n不都充分大	$H_0:\mu_1\leq\mu_2\longleftrightarrow H_1:\mu_1>\mu_2$	$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{S_{1m}^2/m+S_{2n}^2/n}}$	$\{T\geq t_\alpha(r)\}$
$\sigma_1^2\ \sigma_2^2$未知 m,n不都充分大	$H_0:\mu_1\geq\mu_2\longleftrightarrow H_1:\mu_1<\mu_2$	$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{S_{1m}^2/m+S_{2n}^2/n}}$	$\{T\leq -t_\alpha(r)\}$

4.3.2 两样本正态总体方差的显著性检验

表4.4 两样本正态总体方差的显著性检验

讨厌参数	假设	检验统计量	拒绝域
μ_1,μ_2已知	$\sigma_1^2=\sigma_2^2\longleftrightarrow\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F=\frac{\sum_{i=1}^m(X_i-\mu_1)^2/m}{\sum_{i=1}^n(Y_i-\mu_2)^2/n}$	$\{F\leq F_{1-\alpha/2}(m,n)\}\cup\{F\geq F_{\alpha/2}(m,n)\}$
μ_1,μ_2已知	$\sigma_1^2\leq\sigma_2^2\longleftrightarrow\sigma_1^2>\sigma_2^2$	$F=\frac{\sum_{i=1}^m(X_i-\mu_1)^2/m}{\sum_{i=1}^n(Y_i-\mu_2)^2/n}$	$\{F\geq F_\alpha(m,n)\}$
μ_1,μ_2已知	$\sigma_1^2\geq\sigma_2^2\longleftrightarrow\sigma_1^2<\sigma_2^2$	$F=\frac{\sum_{i=1}^m(X_i-\mu_1)^2/m}{\sum_{i=1}^n(Y_i-\mu_2)^2/n}$	$\{F\leq F_{1-\alpha}(m,n)\}$
μ_1,μ_2未知	$\sigma_1^2=\sigma_2^2\longleftrightarrow\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F=\frac{\sum_{i=1}^m(X_i-\bar{X})^2/(m-1)}{\sum_{i=1}^n(Y_i-\bar{Y})^2/(n-1)}$	$\{F\leq F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)\}\cup\{F\geq F_{\alpha/2}(m-1,n-1)\}$
μ_1,μ_2未知	$\sigma_1^2\leq\sigma_2^2\longleftrightarrow\sigma_1^2>\sigma_2^2$	$F=\frac{\sum_{i=1}^m(X_i-\bar{X})^2/(m-1)}{\sum_{i=1}^n(Y_i-\bar{Y})^2/(n-1)}$	$\{F\geq F_\alpha(m-1,n-1)\}$
μ_1,μ_2未知	$\sigma_1^2\geq\sigma_2^2\longleftrightarrow\sigma_1^2<\sigma_2^2$	$F=\frac{\sum_{i=1}^m(X_i-\bar{X})^2/(m-1)}{\sum_{i=1}^n(Y_i-\bar{Y})^2/(n-1)}$	$\{F\leq F_{1-\alpha}(m-1,n-1)\}$

例 4.3.1

甲、乙两厂生产同一产品，其质量指标服从正态分布，且标准规格为 $\mu = 120$。现从甲、乙两厂中分别随机地抽取 5 件产品，测得其指标值为

甲：119、120、119.2、119.7、119.6

乙：110.5、106.3、122.2、113.8、117.2

根据这些数据，判断这两厂的产品是否符合标准规格 ($\alpha = 0.05$)?

解 从显著性检验的角度来看，得出的结论是甲厂产品与规格不符，而没有发现乙厂不符合规格的有力证据。

这个例子说明，统计学上的显著性差异，不一定有现实意义。 □

4.4 单参数指数型分布族的显著性检验

考虑单参数指数型分布族中参数的显著性检验问题，其 PDF 为

$$f(x,\theta) = c(\theta)\exp\{Q(\theta)T(x)\}h(x) \tag{4.4.1}$$

其中，$c(\theta) > 0, h(x) > 0$。

4.4.1 单参数指数型分布族的性质

定理 4.4.1

对于来自由 (4.4.1) 式表示的单参数指数型分布族的 IID 样本 $X_1, \cdots, X_n$，如果 $Q(\theta)$ 是 θ 的严格增函数，且 $\psi(T(\boldsymbol{X}))$ 是统计量 $T(\boldsymbol{X})$ 的非降函数，则 $E_\theta[\psi(T)]$ 也是 θ 的非降函数。

证明 对 $\forall \theta_1 < \theta_2$，记

$$A = \{\boldsymbol{x} : f(\boldsymbol{x},\theta_1) < f(\boldsymbol{x},\theta_2)\} = \left\{\boldsymbol{x} : \frac{f(\boldsymbol{x},\theta_2)}{f(\boldsymbol{x},\theta_1)} > 1\right\}$$

$$B = \{\boldsymbol{x} : f(\boldsymbol{x},\theta_1) > f(\boldsymbol{x},\theta_2)\} = \left\{\boldsymbol{x} : \frac{f(\boldsymbol{x},\theta_2)}{f(\boldsymbol{x},\theta_1)} < 1\right\}$$

由于 $\dfrac{f(\boldsymbol{x},\theta_2)}{f(\boldsymbol{x},\theta_1)}$ 是 T 的严格增函数，故对 $\forall \boldsymbol{x}_1 \in A, \forall \boldsymbol{x}_2 \in B$，均有 $T(\boldsymbol{x}_1) > T(\boldsymbol{x}_2)$。又由于 $\psi(T)$ 是 T 的非降函数，故

$$a = \inf_{\boldsymbol{x}\in A} \psi(T(\boldsymbol{x})) \geqslant \sup_{\boldsymbol{x}\in B} \psi(T(\boldsymbol{x})) = b$$

注意

$$\int_A [f(\boldsymbol{x},\theta_2) - f(\boldsymbol{x},\theta_1)]\, d\boldsymbol{x} + \int_B [f(\boldsymbol{x},\theta_2) - f(\boldsymbol{x},\theta_1)]\, d\boldsymbol{x} = 0$$

于是，有

$$
\begin{aligned}
& E_{\theta_2}\psi(T) - E_{\theta_1}\psi(T) \\
=& \int \psi(T(\boldsymbol{x}))[f(\boldsymbol{x},\theta_2) - f(\boldsymbol{x},\theta_1)]\,d\boldsymbol{x} \\
=& \int_A \psi(T(\boldsymbol{x}))[f(\boldsymbol{x},\theta_2) - f(\boldsymbol{x},\theta_1)]\,d\boldsymbol{x} + \int_B \psi(T(\boldsymbol{x}))[f(\boldsymbol{x},\theta_2) - f(\boldsymbol{x},\theta_1)]\,d\boldsymbol{x} \\
\geqslant & a\int_A [f(\boldsymbol{x},\theta_2) - f(\boldsymbol{x},\theta_1)]\,d\boldsymbol{x} + b\int_B [f(\boldsymbol{x},\theta_2) - f(\boldsymbol{x},\theta_1)]\,d\boldsymbol{x} \\
=& (a-b)\int_A [f(\boldsymbol{x},\theta_2) - f(\boldsymbol{x},\theta_1)]\,d\boldsymbol{x} \\
\geqslant & 0
\end{aligned}
$$

即 $E_{\theta_2}\psi(T) \geqslant E_{\theta_1}\psi(T)$，从而知 $E_\theta\psi(T)$ 非降。 □

推论 4.4.2

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自单参数指数型分布族 (4.4.1) 的 IID 样本，其中 $Q(\theta)$ 是 θ 的严格增函数，则对任意给定的常数 c，$P_\theta\{T(\boldsymbol{X}) \geqslant c\}$ 和 $P_\theta\{T(\boldsymbol{X}) \leqslant c\}$ 分别是 θ 的非降和非增函数。

4.4.2 单参数指数型分布族的假设检验

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自单参数指数型分布族 (4.4.1) 的 IID 样本，其中 $Q(\theta)$ 是 θ 的严格增函数。对于假设问题

$$H_0:\theta \geqslant \theta_0 \longleftrightarrow H_1:\theta < \theta_0 \tag{4.4.2}$$

由定理 4.4.1 知，取 $\psi(x)=x$，则 $E_\theta T(\boldsymbol{X})$ 是 θ 的递增函数。于是，可以取 $T(\boldsymbol{X})$ 作为上述假设的一个检验统计量，且其拒绝域为 $\{T(\boldsymbol{X}) \leqslant c\}$，其临界值 c 由犯第一类错误的概率决定。

由推论 4.4.2 知，$P_\theta\{T(\boldsymbol{X}) \leqslant c\}$ 是 θ 的非增函数，故只需要求其临界值满足

$$P_{\theta_0}\{T(\boldsymbol{X}) \leqslant c\} \leqslant \alpha \tag{4.4.3}$$

同理，对另一单侧假设

$$H_0:\theta \leqslant \theta_0 \longleftrightarrow H_1:\theta > \theta_0 \tag{4.4.4}$$

其检验统计量仍为 $T(\boldsymbol{X})$，拒绝域为 $\{T(\boldsymbol{X}) \geqslant c\}$，其中 c 满足

$$P_{\theta_0}\{T(\boldsymbol{X}) \geqslant c\} \leqslant \alpha \tag{4.4.5}$$

4.4.3 Bernoulli 分布的假设检验

表4.5 Bernoulli总体参数的显著性检验

假设	检验统计量	拒绝域
$H_0: p = p_0 \longleftrightarrow H_1: p \neq p_0$		$\{T \leq c_1\} \cup \{T \geq c_2\}$
$H_0: p \leq p_0 \longleftrightarrow H_1: p > p_0$	$T = \sum_{i=1}^n X_i$	$\{T \geq c_3\}$
$H_0: p \geq p_0 \longleftrightarrow H_1: p < p_0$		$\{T \leq c_4\}$

$$c_1 = \max\left\{k : \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i} \leq \frac{\alpha}{2}\right\},$$

$$c_2 = \min\left\{k : \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i} \leq \frac{\alpha}{2}\right\},$$

$$c_3 = \min\left\{k : \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i} \leq \alpha\right\},$$

$$c_4 = \max\left\{k : \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i} \leq \alpha\right\}.$$

4.5 似然比检验

考虑下面非常一般的假设：

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta - \Theta_0 \tag{4.5.1}$$

定义 4.5.1 (似然比统计量)

设 $X_1, \cdots, X_n$ 为来自分布族 $\mathcal{F} = \{f(x,\theta) : \theta \in \Theta\}$ 的 IID 样本，对于感兴趣的假设 (4.5.1)，称统计量

$$\lambda(\boldsymbol{X}) = \frac{\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} f(\boldsymbol{X}, \theta)}{\sup\limits_{\theta \in \Theta} f(\boldsymbol{X}, \theta)} \tag{4.5.2}$$

为假设 (4.5.1) 的**似然比统计量** (likelihood ratio)，有时也称为**广义似然比**。

定义 4.5.2 (似然比检验)

采用 (4.5.2) 式定义的似然比统计量 $\lambda(\boldsymbol{X})$ 作为假设 (4.5.1) 的检验统计量，且取其拒绝域为 $\{\lambda(\boldsymbol{x}) \leqslant c\}$，其中临界值 c 满足

$$P_\theta\{\lambda(\boldsymbol{X}) \leqslant c\} \leqslant \alpha, \ \forall \theta \in \Theta \tag{4.5.3}$$

则称此检验为显著性水平为 α 的**似然比检验** (likelihood ratio test，简记为 LRT)。

注 如果似然比统计量 $\lambda(\boldsymbol{X})$ 的零分布未知，则很难确定似然比检验的临界值。但如果存在一

个统计量 $T(\boldsymbol{X})$ 关于 $\lambda(\boldsymbol{X})$ 是单调的，且 $T(\boldsymbol{X})$ 的零分布已知，则可以给出一个基于 $T(\boldsymbol{X})$ 的显著性检验。

求似然比检验的一般步骤为：

1. 建立统计假设 $H_0 \longleftrightarrow H_1$，确定参数空间 Θ_0, Θ；
2. 求似然函数（联合分布）；
3. 求 Θ_0, Θ 下的 MLE；
4. 求似然比统计量 $\lambda(\boldsymbol{X})$ 并化简；
5. 确定拒绝域 W。

例 4.5.1

设 $X_1, \cdots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的 IID 样本，μ, σ^2 均未知，求假设

$$H_0 : \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1 : \mu \neq \mu_0$$

的显著性水平为 α 的似然比检验。

解 样本分布为

$$f(\boldsymbol{x}, \theta) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\right]$$

参数空间为

$$\Theta_0 = \{(\mu_0, \sigma^2) : \sigma^2 > 0\}, \quad \Theta = \{(\mu, \sigma^2) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$$

利用微分法，求得

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} f(\boldsymbol{x}, \theta) = \left[\frac{2\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2\right]^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}$$

$$\sup_{\theta \in \Theta} f(\boldsymbol{x}, \theta) = \left[\frac{2\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}$$

于是，其似然比统计量为

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} f(\boldsymbol{x}, \theta)}{\sup\limits_{\theta \in \Theta} f(\boldsymbol{x}, \theta)} = \left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right]^{-\frac{n}{2}} = \left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x} + \bar{x} - \mu_0)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right]^{-\frac{n}{2}}$$

$$= \left[1 + n\frac{(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right]^{-\frac{n}{2}} = \left(1 + \frac{T^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

其中 $T = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{S_n}$。

此时的似然比统计量与传统的 t 统计量的拒绝域有如下关系：

$$\{\lambda(\boldsymbol{x}) \leqslant c\} \Longleftrightarrow \{|T(\boldsymbol{x})| \geqslant d\}$$

由此可见，此时的似然比检验与前面的双侧 t 检验完全等价。 □

例 4.5.2

设总体分布为

$$P\{X=i\}=p_i,\ i=1,\cdots,r$$

其中 $p_i>0,\sum_{i=1}^{r}pi=1$。设有 n 个来自此分布的 IID 样本 $X_1,\cdots,X_n$，求

$$H_0: p_i=p_{i0},\ i=1,\cdots,r$$

的似然比检验，其中 p_{i0} 已知，且 $\sum_{i=1}^{r}p_{i0}=1$。

定理 4.5.1 (Wilks 定理)

假设在 H_0 下，对 k 维参数向量 $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\cdots,\theta_k)^T$ 有 r 个约束，将 $k-r$ 个自由参数分量记为 $\boldsymbol{\vartheta}=(\vartheta_1,\cdots,\vartheta_{k-r})$，$\Theta_0$ 的确定方法可以等价地通过变换 $H_0:\boldsymbol{\theta}=g(\boldsymbol{\vartheta})$ 来表示，其中 $g:\mathbb{R}^{k-r}\to\mathbb{R}^k$ 连续可微，且 $\dfrac{\partial g(\boldsymbol{\vartheta})}{\partial\boldsymbol{\vartheta}}$ 满秩。

若定理 2.7.9 中的条件成立，则在 H_0 下，有

$$-2\ln\lambda(\boldsymbol{X})\xrightarrow{d}\chi_r^2 \tag{4.5.4}$$

4.6 p 值

定义 4.6.1 (p 值)

对于拒绝域形如

$$W=\{\boldsymbol{X}:T(\boldsymbol{X})>c\}\text{ 或 }W=\{\boldsymbol{X}:T(\boldsymbol{X})<c\} \tag{4.6.1}$$

的单侧检验，当给定样本观测值 $\boldsymbol{x}^0$ 后，称

$$p(\boldsymbol{x}^0)=\sup_{\theta\in\Theta_0}P_\theta\{T(\boldsymbol{X})\geqslant T(\boldsymbol{x}^0)\}\text{ 或 }p(\boldsymbol{x}^0)=\sup_{\theta\in\Theta_0}P_\theta\{T(\boldsymbol{X})\leqslant T(\boldsymbol{x}^0)\} \tag{4.6.2}$$

为此检验的 $\boldsymbol{p}$ **值**。

注 p 值与显著性检验之间的关系：

- 显著性检验指的是，在给定显著性水平 α 下，即检验犯第一类错误的概率 $\leqslant\alpha$，根据检验统计量的零分布求出拒绝域 W 的临界值 c，再根据样本观测值 $\boldsymbol{x}^0$ 判断样本是否落在拒绝域 W 中；
- 而 p 值指的是，在给定样本观测值 $\boldsymbol{x}^0$ 后，根据检验统计量的零分布，求出以 $\boldsymbol{x}^0$ 为临界值的检验犯第一类错误的概率 p 值，再通过比较 p 值与显著性水平 α 的大小，判断是否拒绝零假设；
- p 值就是可以拒绝零假设的显著性水平 α 的最小值。

p 值与显著性检验本质上是一样的。于是，有如下定理：

定理 4.6.1

对于给定的 $\alpha \in (0,1)$，如果存在常数 c 满足 $\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} P_\theta\{T(\boldsymbol{X}) > c\} = \alpha$，则样本值 $\boldsymbol{x}^0$ 落入拒绝域 $W = \{\boldsymbol{X} : T(\boldsymbol{X}) > c\}$ 的充要条件是其 p 值 $p(\boldsymbol{x}^0)$ 小于 α。

对于某些单侧检验，如果无法找到恰好满足

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta\{T(\boldsymbol{X}) > c\} = \alpha \text{ 或 } \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta\{T(\boldsymbol{X}) < c\} = \alpha \tag{4.6.3}$$

的临界值 c，而只能找到满足如下条件的 c，

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta\{T(\boldsymbol{X}) \geqslant c\} > \alpha > \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta\{T(\boldsymbol{X}) > c\} \tag{4.6.4}$$

或

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta\{T(\boldsymbol{X}) < c\} < \alpha < \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta\{T(\boldsymbol{X}) \leqslant c\} \tag{4.6.5}$$

则其 p 值仍然由 (4.6.2) 式定义，且定理 4.6.1 仍然成立。

关于拒绝域形如

$$W = \{\boldsymbol{X} : T(\boldsymbol{X}) < c_1\} \cup \{\boldsymbol{X} : T(\boldsymbol{X}) > c_2\} \tag{4.6.6}$$

的双侧假设，对于给定的样本值 $\boldsymbol{x}^0$，其 p 值可以定义为

$$p(\boldsymbol{x}^0) = 2\min\left\{\sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta\{T(\boldsymbol{X}) \leqslant T(\boldsymbol{x}^0)\},\ \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta\{T(\boldsymbol{X}) \geqslant T(\boldsymbol{x}^0)\}\right\} \tag{4.6.7}$$

第 5 章 假设检验——最大功效检验

5.1 引言

对于 Fisher 显著性检验而言，针对假设 $H_0 \longleftrightarrow H_1$，一个检验函数（或检验法则、检验），就是把样本空间 $\mathcal{X}$ 划分为两个互不相交的可测集：

$$\mathcal{X} = W \cup \overline{W}$$

当观测值 $\boldsymbol{x} \in W$ 时，拒绝零假设 H_0；当 $\boldsymbol{x} \in \overline{W}$ 时，就不能拒绝零假设 H_0。

对于拒绝域 $W \subset \mathcal{X}$，可以定义其示性函数

$$\phi(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{X} \in W \\ 0, & \boldsymbol{X} \in \overline{W} \end{cases}$$

反之，对于任意一个取值为 $\{0,1\}$ 的函数 $\phi(\boldsymbol{X})$，则 $W = \{\boldsymbol{X} : \phi(\boldsymbol{X}) = 1\}$ 也可以作为拒绝域。这样的函数 $\phi(\boldsymbol{X})$ 就称为检验函数或检验，其势函数为

$$\beta_\phi(\theta) = P_\theta\{\boldsymbol{X} \in W\} = E_\theta \phi(\boldsymbol{X})$$

对于本章的最大功效检验而言，需要重新给出检验的如下定义。

定义 5.1.1 (检验函数)

设 $\phi(\boldsymbol{X})$ 是定义在 $\mathcal{X}$ 上的可测函数，满足 $0 \leqslant \phi(\boldsymbol{x}) \leqslant 1$，则称 $\phi(\boldsymbol{X})$ 为**检验函数**，简称**检验**。如果 $\phi(\boldsymbol{x})$ 取值为 $\{0,1\}$，则称为**非随机化检验**，否则就称为**随机化检验**，其势函数为 $\beta_\phi(\theta) = E_\theta \phi(\boldsymbol{X})$

对于一个随机化检验 $\phi(\boldsymbol{x})$，当其取值为 1 时，拒绝零假设；当其取值为 0 时，接受零假设；当其取值为 $\delta \in (0,1)$ 时，取一个来自于 $b(1,\delta)$ 的随机数，如果此随机数为 1，则拒绝零假设，否则接受零假设。

另外，当检验统计量为连续型随机变量时，采用的是非随机化检验；当检验统计量为离散型随机变量时，就有可能采用随机化检验。

我们可以利用势函数来对检验分类。

定义 5.1.2

设 $\phi_1(\boldsymbol{X})$ 和 $\phi_2(\boldsymbol{X})$ 是某检验问题 $H_0 \longleftrightarrow H_1$ 的检验函数，如果它们的势函数相同，即

$$E_\theta \phi_1(\boldsymbol{X}) = E_\theta \phi_2(\boldsymbol{X}),\ \forall \theta \in \Theta \tag{5.1.1}$$

则称检验函数 $\phi_1(\boldsymbol{X})$ 和 $\phi_2(\boldsymbol{X})$ 等价。

定理 5.1.1

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自分布族 $\mathcal{F}=\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$ 的样本，$T(\boldsymbol{X})$ 是参数 θ 的充分统计量，则对任意一个检验函数 $\phi(\boldsymbol{X})$，存在另一个只依赖于 $T(\boldsymbol{X})$ 的检验函数与它等价。

证明 令 $\psi(t)=E[\phi(\boldsymbol{X})|T(\boldsymbol{X})=t]$，由于 $\phi(\boldsymbol{x})\in[0,1]$，由条件期望的性质知，$\psi(t)\in[0,1]$，故 ψ 是一个检验函数。

又由全期望公式，有

$$E_\theta\psi(T(\boldsymbol{X}))=E_\theta[E(\phi(\boldsymbol{X})|T(\boldsymbol{X}))]=E_\theta\phi(\boldsymbol{X}),\ \forall\theta\in\Theta$$

故 $\psi(T(\boldsymbol{X}))$ 与 $\phi(\boldsymbol{X})$ 是等价的。 □

由上述定理，当 θ 的充分统计量存在时，关于此参数的检验问题，只需要在由充分统计量构成的检验函数中找就行了，这就是假设检验中的“充分性原则”。

定义 5.1.3 (最大功效检验)

对于参数分布族 $\mathcal{F}=\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$，设我们感兴趣的假设为

$$H_0:\theta=\theta_0\longleftrightarrow H_1:\theta=\theta_1\ (\theta_1\neq\theta_0) \tag{5.1.2}$$

且有两个显著性水平为 θ 的检验函数 $\phi_1(\boldsymbol{X}),\phi_2(\boldsymbol{X})$，即满足

$$E_{\theta_0}\phi_i(\boldsymbol{X})\leqslant\alpha,\ i=1,2 \tag{5.1.3}$$

如果 $\beta_{\phi_1}(\theta_1)\geqslant\beta_{\phi_2}(\theta_2)$，则称检验 ϕ_1 比 ϕ_2 有效。

如果检验 ϕ_1 对于任意一个显著性水平为 α 的检验 ϕ_2，均有 $\beta_{\phi_1}(\theta_1)\geqslant\beta_{\phi_2}(\theta_2)$，则称检验 ϕ_1 是假设 (5.1.2) 的显著性水平 α 的**最大功效检验** (most powerful test，简记为 MPT)。

5.2 Neyman-Pearson 引理

为了书写方便，我们有时仅用 X 表示容量为 n 的样本，用 x 表示其样本值。

定理 5.2.1 (N-P 引理)

对于参数分布族 $\{f(x,\theta):\theta\in\Theta=\{\theta_0,\theta_1\}\}$，则关于检验问题 (5.1.2)，有如下结论：

1. 对给定的 $\alpha\in(0,1)$，存在一个检验函数 $\phi(x)$ 及常数 $k\geqslant0$，使得

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & f(x,\theta_1)>kf(x,\theta_0)\\ 0, & f(x,\theta_1)<kf(x,\theta_0)\end{cases} \tag{5.2.1}$$

且

$$E_{\theta_0}\phi(X)=\alpha \tag{5.2.2}$$

2. 由 (5.2.1) 和 (5.2.2) 式确定的检验函数 $\phi(x)$ 是检验问题 (5.1.2) 的显著性水平为 α 的 MPT。
3. 如果 $\phi'(x)$ 是此检验问题的显著性水平为 α 的 MPT，则一定存在常数 $k\geqslant0$，使得 $\phi'(x)$ 满足 (5.2.1) 式。如果 $\phi'(x)$ 满足 $E_{\theta_1}\phi'(X)<1$，则它也满足 (5.2.2) 式。

证明

1. 记 $\lambda(x)=\dfrac{f(x,\theta_1)}{f(x,\theta_0)}$，对 $\forall c\geqslant 0$，定义 $h(c)=P_{\theta_0}\{\lambda(X)\leqslant c\}$ 为随机变量 $\lambda(X)$ 的分布函数，故 $h(c)$ 非降、右连续，且 $h(\infty)=1$，$h(c)-h(c-0)=P_{\theta_0}\{\lambda(X)=c\}$。对 $h(k)$ 相对于 $1-\alpha$ 的大小进行讨论，由 (5.2.1) 式，结合 (5.2.2) 式，确定 $\phi(x)$ 在 $\lambda(x)=k$ 时的取值。

   由于 $h(0-0)=0$，故 $\exists k\in[0,+\infty)$，使得 $h(k-0)\leqslant 1-\alpha\leqslant h(k)$。若 $h(k)=1-\alpha$，则
$$\phi(x)=\begin{cases}1, & \lambda(x)>k\\ 0, & \lambda(x)\leqslant k\end{cases}\tag{*1}$$
   若 $h(k)>1-\alpha$，则
$$\phi(x)=\begin{cases}1, & \lambda(x)>k\\ \dfrac{h(k)-(1-\alpha)}{h(k)-h(k-0)}, & \lambda(x)=k\\ 0, & \lambda(x)<k\end{cases}\tag{*2}$$

2. 设 $\phi'(x)$ 是一个显著性水平为 α 的检验，由 (5.2.1) 式知
$$[\phi(x)-\phi'(x)][f(x,\theta_1)-kf(x,\theta_0)]\geqslant 0$$
   取积分得
$$E_{\theta_1}\phi(X)-E_{\theta_1}\phi'(X)\geqslant k(E_{\theta_0}\phi(X)-E_{\theta_0}\phi'(X))\geqslant 0$$

3. 设检验函数 $\phi(x)$ 满足 (5.2.1) 和 (5.2.2) 式，令
$$S^+=\{x:\phi(x)>\phi'(x)\}\cap\{x:\lambda(x)\neq k\}$$
$$S^-=\{x:\phi(x)<\phi'(x)\}\cap\{x:\lambda(x)\neq k\}$$
$$S=S^+\cup S^-=\{x:\phi(x)\neq\phi'(x)\}\cap\{x:\lambda(x)\neq k\}$$
   若 $S\neq\varnothing$，由于
$$\psi(x)=[\phi(x)-\phi'(x)][f(x,\theta_1)-kf(x,\theta_0)]>0,\ \forall x\in S$$
   取积分得
$$E_{\theta_1}\phi(X)-E_{\theta_1}\phi'(X)>k(E_{\theta_0}\phi(X)-E_{\theta_0}\phi'(X))\geqslant 0$$
   与 $\phi'(x)$ 是 MPT 矛盾。故 $S=\varnothing$，即当 $\lambda(x)\neq k$ 时，均有 $\phi'(x)=\phi(x)$。
   由 $E_{\theta_1}\phi'(X)<1$ 知 $k>0$。若 $E_{\theta_0}\phi(X)<\alpha$，则同样有
$$E_{\theta_1}\phi(X)-E_{\theta_1}\phi'(X)\geqslant k(E_{\theta_0}\phi(X)-E_{\theta_0}\phi'(X))$$
   与 $\phi'(x)$ 是 MPT 矛盾。故 $E_{\theta_0}\phi(X)=\alpha$。

□

注 最后三行与书上证明过程不同，注意条件 $E_{\theta_1}\phi'(X)<1$ 不能少。

关于 N-P 引理 5.2.1，有以下几点说明：

- MPT 是似然比统计量 $\lambda(X)=\dfrac{f(X,\theta_1)}{f(X,\theta_0)}$ 的函数，这种检验也称之为**似然比检验**；

- 如果似然比 $\lambda(X)$ 的分布是连续的，则假设 (5.1.2) 的 MPT 是非随机化的检验；如果 $\lambda(X)$ 的分布是离散的，则假设 (5.1.2) 的 MPT 有可能是随机化的检验；
- 对于非参数假设，N-P 引理仍然成立。

推论 5.2.2

设 $\phi(x)$ 为假设 (5.1.2) 的显著性水平为 α 的 MPT，则必有 $\beta_\phi(\theta_1) \geqslant \alpha$。
如果 $0<\alpha<1$，且 $f(x,\theta_1) \neq f(x,\theta_0)$，则 $\beta_\phi(\theta_1) > \alpha$。

例 5.2.1

设 $X_1,\cdots,X_n \overset{\text{IID}}{\sim} N(\mu,1)$，考虑假设

$$H_0: \mu=0 \longleftrightarrow H_1: \mu=\mu_1>0 \tag{5.2.3}$$

的显著性水平为 α 的 MPT。

解 联合 PDF 为

$$f(x,\mu)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}$$

似然比统计量为

$$\lambda(x)=\exp\left\{n\mu_1\bar{x}-\frac{n\mu_1^2}{2}\right\}$$

由 N-P 引理 5.2.1，结合 $E_{H_0}\phi(X)=\alpha$，求得显著性水平 α 的 MPT 为

$$\phi(X)=\begin{cases}1, & \overline{X}>\dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\\ 0, & \overline{X}<\dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\end{cases} \tag{5.2.4}$$

□

关于上面的例子，注意到以下几点：

- (5.2.4) 式的 MPT 只与 α 和 μ_1 的符号有关，而与 μ_1 的具体数值无关。
- 如果把备择假设改为 $H_1: \mu=\mu_1<0$，则其 MPT 的拒绝域为 $W=\{x: \bar{x}\leqslant -\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\}$，也只与 α 和 μ_1 的符号有关，与 μ_1 的具体数值无关。
- 若总体分布为 $N(\mu,\sigma_0^2)$，其中 σ_0^2 已知，可以通过变换化为上例中的情况。
- 如果考虑的假设为如下的简单假设对复杂假设：

$$H_0: \mu=0 \longleftrightarrow H_1: \mu>0 \tag{5.2.5}$$

  则由假设 (5.2.3) 得到的 (5.2.4) 式也是关于假设 (5.2.5) 的显著性水平 α 的 MPT，且关于 $\mu>0$ 是一致的。

例 5.2.2

设 $X_1,\cdots,X_n \overset{\text{IID}}{\sim} U(0,p)$，考虑假设

$$H_0: p=1 \longleftrightarrow H_1: p=p_1>1$$

的显著性水平 α 的 MPT。

解 似然比统计量为

$$\lambda(x)=\begin{cases}p_1^{-n}, & 0<x(n)<1\\ \infty, & 1\leqslant x(n)<p_1\end{cases}$$

于是，$\lambda(X)$ 的分布函数

$$h(c)=P_{H_0}\{\lambda(X)\leqslant c\}=\begin{cases}0, & c<p_1^{-n}\\ 1, & c\geqslant p_1^{-n}\end{cases}$$

由 N-P 引理 5.2.1，取 $k=p_1^{-n}$，随机化检验 MPT 为

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & 1\leqslant x_{(n)}<p_1\\ \alpha, & 0<x_{(n)}<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

由于 $X_{(n)}$ 是连续的，将随机化部分非随机化，得到非随机化 MPT 为

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & c\leqslant x_{(n)}<p_1\\ 0, & 0<x_{(n)}<c\end{cases}$$

其中常数 c 使得 $E_{H_0}\phi(X)=\alpha$，即满足 $\int_c^1 nt^{n-1}\,dt=\alpha$，求得 $c=\sqrt[n]{1-\alpha}$。 □

例 5.2.3

设 $X_1,\cdots,X_n\overset{\text{IID}}{\sim}P(\lambda)$，考虑假设

$$H_0:\lambda=1\longleftrightarrow H_1:\lambda=\lambda_1>1$$

的显著性水平 α 的 MPT。

解 似然比统计量为

$$\lambda(x)=\lambda_1^{\sum\limits_{i=1}^n x_i}e^{-n(\lambda_1-1)}$$

关于 $T(x)=\sum\limits_{i=1}^n x_i$ 单调上升，由 N-P 引理 5.2.1 知，其显著性水平为 α 的 MPT 为

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & T(x)>k\\ \delta, & T(x)=k\\ 0, & T(x)<k\end{cases}$$

其中 k,δ 使得 $E_{H_0}\phi(X)=\alpha$。

当 H_0 成立时，$T(X) \sim P(n)$。若存在整数 k_0，使得 $\sum_{i=0}^{k_0} \frac{n^i e^{-n}}{i!} = 1-\alpha$，则

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & T(x) > k_0 \\ 0, & T(x) \leqslant k_0 \end{cases}$$

若存在整数 k_0，使得

$$c_1 = \sum_{i=0}^{k_0-1} \frac{n^i e^{-n}}{i!} < 1-\alpha < \sum_{i=0}^{k_0} \frac{n^i e^{-n}}{i!} = c_2$$

则取 $k = k_0, \delta = \dfrac{c_2 - (1-\alpha)}{c_2 - c_1}$ 即可。 □

例 5.2.4

设 $X_1, \cdots, X_n \overset{\text{IID}}{\sim} b(1,p)$，考虑假设

$$H_0 : p = p_0 \longleftrightarrow H_1 : p = p_1 > p_0$$

的显著性水平 α 的 MPT。

在以上几个例子中，得到的 MPT 均是充分统计量的函数，与假设检验的充分性原则相符。

5.3 一致最大功效检验

5.3.1 定义及重要结论

定义 5.3.1 (一致最大功效检验)

对于参数分布族 $\{f(x,\theta) : \theta \in \Theta\}$，设感兴趣的假设为

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1 \tag{5.3.1}$$

对于两个显著性水平为 α 的检验 ϕ_1, ϕ_2，即

$$E_\theta \phi_i \leqslant \alpha,\ \forall \theta \in \Theta_0,\ i = 1,2 \tag{5.3.2}$$

如果有

$$\beta_{\phi_1}(\theta) = E_\theta \phi_1 \geqslant E_\theta \phi_2 = \beta_{\phi_2}(\theta),\ \forall \theta \in \Theta_1 \tag{5.3.3}$$

则称检验 ϕ_1 **一致优于**检验 ϕ_2。

如果存在一个检验 ϕ_1，使得对任何显著性水平为 α 的检验 ϕ_2，均有 ϕ_1 一致优于 ϕ_2，则称检验 ϕ_1 是假设 (5.3.1) 的显著性水平 α 的**一致最大功效检验** (uniformly most powerful test，简记为 UMPT)。

由定义，容易得到以下结论。

定理 5.3.1

设如下三个检验问题

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1 \tag{5.3.4}$$

$$H_0 : \theta \in \Theta_{01} \longleftrightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1 \tag{5.3.5}$$

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta = \theta_1 \tag{5.3.6}$$

其中 $\Theta_{01} \subset \Theta_0$，$\theta_1 \in \Theta_1$，并设 $\phi(x)$ 是检验问题 (5.3.4) 的显著性水平 α 的检验，则

1. 如果 $\phi(x)$ 是检验问题 (5.3.5) 的显著性水平 α 的 UMPT，则 $\phi(x)$ 也是 (5.3.4) 的显著性水平 α 的 UMPT。
2. $\phi(x)$ 是 (5.3.4) 的显著性水平 α 的 UMPT 的充要条件是，对 $\forall \theta_1 \in \Theta_1$，$\phi(x)$ 是 (5.3.6) 的显著性水平 α 的 MPT。

定理 5.3.2

设 $\phi(x)$ 是 (5.3.4) 的显著性水平 α 的检验，如果对某个 $\theta_0 \in \Theta_0$ 及任意一个 $\theta_1 \in \Theta_1$，$\phi(x)$ 都是假设

$$H_0 : \theta = \theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta = \theta_1 \tag{5.3.7}$$

的显著性水平 α 的 MPT，则 $\phi(x)$ 也是 (5.3.4) 的显著性水平 α 的 UMPT。

注意到：

- 如果简单假设对简单假设的 MPT 不依赖于备择假设中的参数值，则可适当扩大备择假设成复杂假设；
- 如果简单假设对简单假设的 MPT 的势函数是单调的，则也可以适当扩大零假设成复杂假设。

当然，并不是所有复杂假设对复杂假设的 UMPT 都是存在的，它的存在性不仅依赖于总体分布，还依赖于假设的复杂情况。

5.3.2 单调似然比分布族

定义 5.3.2 (单调似然比分布族)

一个参数分布族 $\{f(x,\theta) : \theta \in \Theta\}$ 称为关于统计量 $T(X)$ 的单增（减）似然比分布族，如果它满足

1. Θ 是直线上的一个区间；
2. 对于 $\theta_1 \neq \theta_2$，有 $f(x,\theta_1) \neq f(x,\theta_2)$；
3. 似然比 $\lambda(x) = \dfrac{f(x,\theta_2)}{f(x,\theta_1)} (\theta_2 > \theta_1)$ 是统计量 $T(x)$ 的非降（增）函数。

单增或单减似然比分布族统称为**单调似然比分布族** (monotone likelihood ratio，简记为 MLR 分布族)。

对于单参数指数型分布族 $f(x,\theta) = c(\theta)e^{Q(\theta)T(x)}h(x)$，其中 $c(\theta) > 0$，如果 $Q(\theta)$ 关于 θ 严

格单增（减），则它必为关于其充分统计量的单增（减）似然比分布族。

因此，常用的二项分布族、负二项分布族、Poisson 分布族、单参数正态分布族、指数分布族等均是 MLR 分布族。另外，虽然均匀分布族 $U(0,\theta)$ 不是单参数指数型分布族，但如果定义 $0/0=\infty$，则它也是关于其充分统计量 $X_{(n)}$ 的 MLR 分布族。

类似定理 4.4.1，有如下定理。

定理 5.3.3

如果分布族 $\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\subset\mathbb{R}\}$ 是关于统计量 $T(x)$ 的非降 MLR 分布族，$\psi(t)$ 是非降（增）函数，则 $E_\theta\psi(T(X))$ 也是 θ 的一个非降（增）函数。

推论 5.3.4

如果分布族 $\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\subset\mathbb{R}\}$ 是关于统计量 $T(x)$ 的非降 MLR 分布族，则

1. $E_\theta T(X)$ 是 θ 的一个非降函数；
2. $P_\theta\{T(X)\leqslant t_0\}$ 是 θ 的一个非增函数。

注 由上述推论，在 MLR 分布族中，统计量 $T(X)$ 的分布关于 θ 是单减的，这一点对求一般情况下的区间估计非常有用。

例 5.3.1

考察超几何分布族的单调性。

解 CDF 为

$$p(x,m)=\frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

其中 $0<m<N$ 为正整数，未知。

由于

$$\frac{p(x,m+1)}{p(x,m)}=\frac{(m+1)(N-m-n+x)}{(N-m)(m+1-x)}$$

关于 x 单增，故超几何分布族是单增似然比分布族。 □

例 5.3.2

讨论二项分布的单调性。

解 CDF 为

$$P\{X=x\}=C_n^xp^x(1-p)^{n-x}=C_n^x(1-p)^n\exp\left\{x\ln\frac{p}{1-p}\right\}$$

它是指数型分布，且 $Q(p)=\ln\dfrac{p}{1-p}$ 关于 p 单增，故它是关于 $T(x)=x$ 的单增似然比分布族。 □

5.3.3 单侧假设的 UMPT

本小节考虑如下单侧假设

$$H_0 : \theta \leqslant \theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta > \theta_0 \tag{5.3.8}$$

$$H_0 : \theta \geqslant \theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta < \theta_0 \tag{5.3.9}$$

的 UMPT，并假设其分布族为 MLR 分布族。

定理 5.3.5

设单参数分布族 $\{f(x,\theta) : \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$ 是关于统计量 $T(x)$ 非降的 MLR 分布族，则对于单侧假设 (5.3.8)，

1. 存在显著性水平为 α 的 UMPT，其检验函数为
$$\phi(T(x)) = \begin{cases} 1, & T(x) > c \\ \delta, & T(x) = c \\ 0, & T(x) < c \end{cases} \tag{5.3.10}$$
其中常数 δ, c 由下式决定：
$$E_{\theta_0}\phi(T(X)) = \alpha \tag{5.3.11}$$
2. 势函数 $\beta(\theta) = E_\theta\phi(T(X))$ 是非降的，且在集合 $\{\theta : 0 < \beta(\theta) < 1\}$ 上严格单增。
3. 设 $\phi'(x)$ 是假设 (5.3.8) 的一个检验，且满足 $E_{\theta_0}\phi'(X) = \alpha < 1$，则
$$E_\theta\phi(T(X)) \leqslant E_\theta\phi'(X),\ \forall\theta < \theta_0$$

证明

1. 由定理 5.3.3 知，$\beta(\theta) = E_\theta\phi(T(X))$ 关于 θ 非降。故 $\phi(T(X))$ 是假设 (5.3.8) 的显著性水平 α 的检验。
对 $\forall\theta_1 > \theta_0$，先考虑简单假设对简单假设的检验问题
$$H_0' : \theta = \theta_0 \longleftrightarrow H_1' : \theta = \theta_1$$
由于此分布族是关于统计量 $T(X)$ 单增的 MLR 分布族，故由 N-P 引理 5.2.1 知，存在一个形如 (5.3.10) 的 MPT 满足 (5.3.11) 式，且此检验 $\phi(T(X))$ 与 θ_1 无关。
再由定理 5.3.2 知，$\phi(T(X))$ 是假设 (5.3.8) 的显著性水平为 α 的 UMPT。
2. 对 $\theta_1 < \theta_2$，考虑简单假设的检验问题
$$H_0'' : \theta = \theta_1 \longleftrightarrow H_1'' : \theta = \theta_2$$
由 N-P 引理知，$\phi(T(X))$ 是 $H_0'' \longleftrightarrow H_1''$ 的显著性水平为 $E_{\theta_1}\phi(T(X))$ 的 MPT，由推论 5.2.2 知，$\beta_\phi(\theta_2) \geqslant \beta_\phi(\theta_1)$，且在 $\{\theta : 0 < \beta_\phi(\theta) < 1\}$ 上是严格的。
3. 对 $\forall\theta_1 < \theta_0$，考虑简单假设的检验问题
$$H_0''' : \theta = \theta_1 \longleftrightarrow H_1''' : \theta = \theta_0$$
记 $\alpha' = E_{\theta_1}\phi(T(X))$，由 N-P 引理知，$\phi(T(X))$ 是 $H_0''' \longleftrightarrow H_1'''$ 的显著性水平为 α' 的

MPT。

反证：若 $E_{\theta_1}\phi'(X) < E_{\theta_1}\phi(T(X)) = \alpha'$，则 $\phi'(x)$ 是 $H_0''' \longleftrightarrow H_1'''$ 的显著性水平为 α' 的检验。由 $E_{\theta_0}\phi'(X) = \alpha = E_{\theta_0}\phi(T(X))$ 知，$\phi'(x)$ 达到了 MPT 的势，故 $\phi(x)$ 也是显著性水平为 α' 的 MPT。再由 N-P 引理，因为 $E_{\theta_0}\phi'(X) = \alpha < 1$，故 $E_{\theta_1}\phi'(X) = \alpha'$，这与假设矛盾。

□

关于以上定理，有以下几点说明：

- 定理中给出的 UMPT 的最优性：满足 (5.3.10) 和 (5.3.11) 式的检验 $\phi(T(X))$，不仅在犯第一类错误的概率为 α 的检验类中，其犯第二类错误的概率最小，而且在所有满足 (5.3.11) 式的检验类 $\{\psi(x) : E_{\theta_0}\psi(X) = \alpha\}$ 中，其犯第一类错误的概率也是最小的。
- 对于假设
$$H_0 : \theta = \theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta > \theta_0$$
定理结论仍然成立。
- 对于假设
$$H_0 : \theta \geqslant \theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta < \theta_0$$
将 (5.3.10) 式中不等号改变方向，结论 (3) 中的 $\theta < \theta_0$ 改成 $\theta > \theta_0$，定理结论仍然成立。

例 5.3.3

设某产品共 N 件，其中含 m 件不合格品。为了估计 m，从中不放回地抽取 n 件进行检验，设 n 件中有 X 件不合格品。求假设
$$H_0 : 0 \leqslant m \leqslant m_0 \longleftrightarrow H_1 : m_0 < m \leqslant N$$
的显著性水平为 α 的 UMPT。

解 超几何分布族是关于 $T(x) = x$ 的单增似然比分布族。由定理 5.3.5，求得其 UMPT 为
$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x > c \\ \dfrac{(\alpha - \alpha_1)C_N^n}{C_{m_0}^c C_{N-m_0}^{n-c}}, & x = c \\ 0, & x < c \end{cases}$$
其中常数 c 满足
$$P_{m_0}\{X \geqslant c\} > \alpha \geqslant P_{m_0}\{X > c\} = \alpha_1$$

□

例 5.3.4

设 $X_1, \cdots, X_n \overset{\text{IID}}{\sim} N(0, \sigma^2)$，求假设
$$H_0 : \sigma^2 \leqslant \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$
的显著性水平为 α 的 UMPT。

解 联合 PDF 为

$$f(x,\sigma^2)=(2\pi\sigma_2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}x_i^2/2\sigma^2\right\}$$

$Q(\sigma^2)=-\dfrac{1}{2\sigma^2}$ 为 σ^2 的单增函数，故它是关于 $T(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$ 的单增 MLR 分布族。由定理 5.3.5 知，UMPT 为

$$\phi(T(x))=\begin{cases}1, & T(x)\geqslant c\\ 0, & T(x)<c\end{cases}$$

其中 c 为常数。注意到在 H_0 下，$\dfrac{T(X)}{\sigma_0}\sim\chi^2(n)$，求得 $c=\sigma_0^2\chi_\alpha^2(n)$。 □

注 许多单样本正态总体的单侧显著性检验都是 UMPT。

例 5.3.5 ((n,c) 方案检验)

对于某批产品，以 p 记其次品率，从中随机抽取 n 件产品，检验如下假设

$$H_0:p\leqslant p_0\longleftrightarrow H_1:p>p_1$$

其中 $0<p_0<p_1<1$ 为两个给定的常数。

例 5.3.6

设 $X_1,\cdots,X_n\overset{\text{IID}}{\sim}P(\lambda)$，求假设

$$H_0:\lambda\leqslant\lambda_0\longleftrightarrow H_1:\lambda>\lambda_0$$

的显著性水平为 α 的 UMPT。

例 5.3.7

设 $X_1,\cdots,X_n\overset{\text{IID}}{\sim}N(\mu,\sigma_0^2)$，其中 σ_0^2 已知，求假设

$$H_0:\mu\leqslant 0\longleftrightarrow H_1:\mu>0$$

的显著性水平为 α 的 UMPT。

5.3.4 双侧假设的 UMPT

在上一章讨论显著性检验时，我们考虑的双侧假设是

$$H_0:\theta=\theta_0\longleftrightarrow H_1:\theta\neq\theta_0 \tag{5.3.12}$$

但是，对于这样的双侧假设，即使是正态总体，其 UMPT 也是不存在的。

例如，对于 $X_1,\cdots,X_n\overset{\text{IID}}{\sim}N(\mu,1)$，关于假设

$$H_0:\mu=0\longleftrightarrow H_1:\mu>0$$

的显著性水平为 α 的 UMPT 为

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & \overline{x}>u_\alpha/\sqrt{n}\\ 0, & \overline{x}<u_\alpha/\sqrt{n}\end{cases}$$

但当 $\mu<0$ 时，令 $\mu\to-\infty$，此检验的势函数 $\beta_\phi(\mu)\to 0$。

同样也可以证明，即使对于 MLR 分布族，形如 (5.3.12) 式的假设的 UMPT 也不存在。

下面考虑如下形式的双侧假设

$$H_0:\theta\leqslant\theta_1\text{ 或 }\theta\geqslant\theta_2\longleftrightarrow H_1:\theta_1<\theta<\theta_2 \tag{5.3.13}$$

为求假设 (5.3.13) 的 UMPT，将 N-P 引理推广如下：

定理 5.3.6

设 $f_0(x),f_1(x),\cdots,f_m(x)$ 是 $m+1$ 个概率分布函数，$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为 m 个给定的常数。如果存在检验函数 $\phi(x)$ 满足以下条件：

1. 存在 m 个常数 $k_1,\cdots,k_m\geqslant 0$，使得

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & f_0>\sum\limits_{i=1}^m k_if_i(x)\\ 0, & f_0<\sum\limits_{i=1}^m k_if_i(x)\end{cases} \tag{5.3.14}$$

2. $\displaystyle\int\phi(x)f_i(x)\,dx=\alpha_i,\ i=1,\cdots,m$

则对任一满足

$$\int\phi'(x)f_i(x)\,dx\leqslant\alpha_i,\ i=1,\cdots,m \tag{5.3.15}$$

的检验函数 $\phi'(x)$，都有

$$\int\phi(x)f_0(x)\,dx\geqslant\int\phi'(x)f_0(x)\,dx$$

证明 由

$$\int[\phi(x)-\phi'(x)]\left[f_0(x)-\sum_{i=1}^m k_if_i(x)\right]dx\geqslant 0$$

易证。 □

注 $f_0(x)$ 对应备择假设下的分布，$f_i(x)$ 对应零假设下不同边界参数值时的分布，此定理说明了满足条件的检验 $\phi(x)$ 是 UMPT，但没有说明其存在性及必要性。事实上，其存在性及必要性也是成立的。

注 如果允许定理中的 k_i 取负值，则只需将 (5.3.15) 式中的不等号改为等号即可。

下面的定理将给出单参数指数型分布族关于假设 (5.3.13) 的 UMPT。

定理 5.3.7

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自单参数指数型分布族

$$f(x,\theta)=c(\theta)e^{Q(\theta)T(x)}h(x)$$

的 IID 样本，其中 θ 为一维实参数，$c(\theta)>0$，$Q(\theta)$ 是 θ 的严格单增函数。则关于双侧假设 (5.3.13)，存在显著性水平为 α 的 UMPT 为

$$\phi(T(x))=\begin{cases}1, & c_1<T(x)<c_2\\ \delta_i, & T(x)=c_i,\ i=1,2\\ 0, & T(x)<c_1 \text{ 或 } T(x)>c_2\end{cases} \tag{5.3.16}$$

其中常数 c_i,δ_i, $i=1,2$ 满足

$$E_{\theta_1}\phi(T(X))=E_{\theta_2}\phi(T(X))=\alpha \tag{5.3.17}$$

例 5.3.8

设 $X_1,\cdots,X_n \overset{\text{IID}}{\sim} N(\mu,1)$，求假设

$$H_0:\mu\leqslant\mu_1 \text{ 或 } \mu\geqslant\mu_2 \longleftrightarrow H_1:\mu_1<\mu<\mu_2$$

的 UMPT。

解 联合 PDF 为

$$f(x,\mu)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp\{-\frac{n\mu^2}{2}\}\exp\left\{\mu\sum_{i=1}^n x_i\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right\}$$

是关于统计量 $T(x)=\overline{x}$ 的单增似然比分布族，$Q(\mu)=n\mu$，由定理 5.3.7 知，UMPT 为

$$\phi(T(x))=\begin{cases}1, & c_1\leqslant T(x)\leqslant c_2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

由于当 $\mu=\mu_i$ 时，$T(X)=\overline{X}\sim N\left(\mu_i,\dfrac{1}{n}\right)$，故 c_i $(i=1,2)$ 满足

$$\Phi(\sqrt{n}(c_2-\mu_1))-\Phi(\sqrt{n}(c_1-\mu_1))=\alpha$$
$$\Phi(\sqrt{n}(c_2-\mu_2))-\Phi(\sqrt{n}(c_1-\mu_2))=\alpha$$

□

对于另一个双侧假设

$$H_0:\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2 \longleftrightarrow H_1:\theta<\theta_1 \text{ 或 } \theta>\theta_2 \tag{5.3.18}$$

由定理 5.3.5 知，UMPT 的势函数是单调的，而备择假设的方向却是双向的，故我们找不到这类假设的 UMPT。

5.4 无偏检验和一致最大功效无偏检验

如果一个检验的势函数在 Θ 的子集 Θ' 上保持不变，则称之为关于集合 Θ' 的**相似检验** (similar test)。

本节主要考虑下面两个双侧假设的最大功效无偏检验

$$H_0:\theta=\theta_0\longleftrightarrow H_1:\theta\neq\theta_0 \tag{5.4.1}$$

$$H_0:\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2\longleftrightarrow H_1:\theta<\theta_1\text{ 或 }\theta>\theta_2 \tag{5.4.2}$$

5.4.1 定义

假设感兴趣的假设为

$$H_0:\theta\in\Theta_0\longleftrightarrow H_1:\theta\in\Theta_1 \tag{5.4.3}$$

定义 5.4.1 (无偏检验)

设 $\phi(x)$ 是假设 (5.4.3) 的一个检验，如果其势函数 $E_\theta\phi(X)$ 满足

$$E_\theta\phi(X)\leqslant\alpha,\ \forall\theta\in\Theta_0$$

$$E_\theta\phi(X)\geqslant\alpha,\ \forall\theta\in\Theta_1$$

则称之为显著性水平为 α 的**无偏检验** (unbiased test)。

定义 5.4.2 (边界相似检验)

设 $\phi(x)$ 是假设 (5.4.3) 的一个检验，如果其势函数 $E_\theta\phi(X)$ 满足

$$E_\theta\phi(X)=\alpha\ \forall\theta\in\{\Theta_0\text{与}\Theta_1\text{的公共边界}\}$$

则称之为**边界相似检验**。

定义 5.4.3 (一致最大功效无偏检验)

对于假设 (5.4.3)，如果存在一个显著性水平为 α 的无偏检验 $\phi(x)$，使得对于任何显著性水平为 α 的无偏检验 $\phi'(x)$，均有

$$E_\theta\phi(X)\geqslant E_\theta\phi'(X),\ \forall\theta\in\Theta_1$$

则称检验 $\phi(x)$ 是显著性水平为 α 的**一致最大功效无偏检验**，记为 UMPUT。

由上述定义，易知

- 如果无偏检验 $\phi(x)$ 的势函数是连续的，则它一定是边界相似检验；
- 显著性水平为 α 的 UMPT 一定是显著性水平为 α 的无偏检验；
- 如果上述检验问题的所有检验函数的势函数都是连续的，且一个显著性水平为 α 的检验 $\phi(x)$ 是最大功效的相似检验，则它必是显著性水平为 α 的 UMPUT；
- MLR 分布族的单侧假设的 UMPT 是一致最大功效的边界相似检验。

5.4.2 一致最大功效无偏检验

对于单参数指数型分布族的双侧假设的 UMPUT，有以下结论。

定理 5.4.1

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自单参数指数型分布族

$$f(x,\theta) = c(\theta)e^{Q(\theta)T(x)}h(x)$$

的 IID 样本，其中 θ 为一维实参数，$c(\theta) > 0$，$Q(\theta)$ 是 θ 的严格单增函数。则关于双侧假设 (5.4.2)

$$H_0 : \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2 \longleftrightarrow H_1 : \theta < \theta_1 \text{ 或 } \theta > \theta_2$$

存在显著性水平为 α 的 UMPUT，为

$$\phi(T(x)) = \begin{cases} 1, & T(x) < c_1 \text{ 或 } T(x) > c_2 \\ \delta_i, & T(x) = c_i,\ i = 1, 2 \\ 0, & c_1 < T(x) < c_2 \end{cases} \tag{5.4.4}$$

其中常数 $c_i, \delta_i,\ i = 1, 2$ 满足

$$E_{\theta_1}\phi(T(X)) = E_{\theta_2}\phi(T(X)) = \alpha \tag{5.4.5}$$

由上述定理知，关于双侧假设 (5.4.2) 的 UMPUT 与双侧假设 (5.3.13) 的 UMPT 形式非常相似，只是检验中的不等号变号而已。

定理 5.4.2

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自单参数指数型分布族

$$f(x,\theta) = c(\theta)e^{Q(\theta)T(x)}h(x)$$

的 IID 样本，其中 θ 为一维实参数，$c(\theta) > 0$，$Q(\theta)$ 是 θ 的严格单增函数。则关于双侧假设 (5.4.1)

$$H_0 : \theta = \theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta \neq \theta_0$$

存在显著性水平为 α 的 UMPUT，为

$$\phi(T(x)) = \begin{cases} 1, & T(x) < c_1 \text{ 或 } T(x) > c_2 \\ \delta_i, & T(x) = c_i,\ i = 1, 2 \\ 0, & c_1 < T(x) < c_2 \end{cases} \tag{5.4.6}$$

其中常数 $c_i, \delta_i,\ i = 1, 2$ 满足

$$E_{\theta_0}\phi(T(X)) = \alpha \tag{5.4.7}$$

$$E_{\theta_0}[T(X)\phi(T(X))] = \alpha E_{\theta_0}T(X) \tag{5.4.8}$$

由上述定理知，双侧假设 (5.4.1) 和 (5.4.2) 的 UMPUT 形式是一样的，只是常数的确定方

程不同。

由上述定理的证明过程知，对于定理中讨论的单参数指数型分布族：

- 关于双侧假设 (5.4.1)，定理中给出的 UMPUT，就是在所有满足条件 (5.4.7) 和 (5.4.8) 的检验类中的一致最大功效检验；
- 关于双侧假设 (5.4.2)，其 UMPUT 是一致最大功效的边界相似检验；
- 关于双侧假设 (5.3.13)，其 UMPT 是一致最大功效的边界相似检验。

当统计量 $T(X)$ 的分布对称时，为了简便计算，有以下几个注解：

注 对于双侧假设 (5.4.1)，如果当 $\theta=\theta_0$ 时，$T(X)$ 的分布关于某常数 c 对称，则其 UMPUT 的形式可以化简为

$$\phi(T(x))=\begin{cases}1, & T(x)<c-\delta \text{ 或 } T(x)>c+\delta\\ \delta_0, & T(x)=c\pm\delta\\ 0, & c-\delta<T(x)<c+\delta\end{cases}\tag{5.4.9}$$

其中常数 δ,δ_0 满足

$$P_{\theta_0}\{T(X)<c-\delta\}+\delta_0 P_{\theta_0}\{T(X)=c-\delta\}=\frac{\alpha}{2}\tag{5.4.10}$$

证明 易证 $E_{\theta_0}\phi(T)=\alpha$。由 $T(X)$ 的分布关于 c 对称，知 $E_{\theta_0}T=c$，$E_{\theta_0}[(T-c)\phi(T)]=0$，故

$$E_{\theta_0}T\phi(T)=E_{\theta_0}[(T-c)\phi(T)]+cE_{\theta_0}\phi(T)=c\alpha=\alpha E_{\theta_0}T$$

□

注 当统计量 $T(X)$ 的分布对称时，关于双侧假设 (5.4.2)，其 UMPUT 可以取为

$$\phi(T(x))=\begin{cases}1, & T(x)<\theta_1-\delta \text{ 或 } T(x)>\theta_2+\delta\\ \delta_0, & T(x)=\theta_1-\delta \text{ 或 } T(x)=\theta_2+\delta\\ 0, & \theta_1-\delta<T(x)<\theta_2+\delta\end{cases}\tag{5.4.11}$$

其中常数 δ,δ_0 满足

$$E_{\theta_1}\phi(T(X))=\alpha \text{ 或 } E_{\theta_2}\phi(T(X))=\alpha\tag{5.4.12}$$

注 当统计量 $T(X)$ 的分布对称时，关于双侧假设 (5.3.13)，其 UMPUT 可以取为

$$\phi(T(x))=\begin{cases}1, & \theta_1-\delta<T(x)<\theta_2+\delta\\ \delta_0, & T(x)=\theta_1-\delta \text{ 或 } T(x)=\theta_2+\delta\\ 0, & T(x)<\theta_1-\delta \text{ 或 } T(x)>\theta_2+\delta\end{cases}\tag{5.4.13}$$

其中常数 δ,δ_0 满足

$$E_{\theta_1}\phi(T(X))=\alpha \text{ 或 } E_{\theta_2}\phi(T(X))=\alpha\tag{5.4.14}$$

例 5.4.1

设 $X_1,\cdots,X_n \overset{\text{IID}}{\sim} N(\mu,1)$，考虑如下假设的最大功效检验：

1. $H_0:\mu=0 \longleftrightarrow H_1:\mu\neq 0$
2. $H_0:-1\leqslant\mu\leqslant 1 \longleftrightarrow H_1:\mu<-1$ 或 $\mu>1$
3. $H_0:\mu\leqslant -1$ 或 $\mu\geqslant 1 \longleftrightarrow H_1:-1<\mu<1$

例 5.4.2

设 $X_1,\cdots,X_n \overset{\text{IID}}{\sim} N(0,\sigma^2)$，考虑如下假设的最大功效检验：

1. $H_0:\sigma^2\leqslant\sigma_1^2$ 或 $\sigma^2\geqslant\sigma_2^2 \longleftrightarrow H_1:\sigma_1^2<\sigma^2<\sigma_2^2$
2. $H_0:\sigma_1^2<\sigma_2<\sigma_2^2 \longleftrightarrow H_1:\sigma^2\leqslant\sigma_1^2$ 或 $\sigma^2\geqslant\sigma_2^2$
3. $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$

5.5 多参数指数型分布族的最大功效检验

前面只讨论了分布中只有一个未知参数的情形，而在实际问题中，总体分布中的未知参数可能多于一个。另外，由于讨厌参数的存在，即使对于单侧假设，也很难找到 UMPT。本节将考虑当总体有讨厌参数时的 UMPUT，所考虑分布族只局限于如下形式的指数型分布族：

$$f(x;\theta,\boldsymbol{\psi})=h(x)\exp\left\{\theta T(x)+\sum_{i=1}^{k}\psi_i U_i(x)-b(\theta,\boldsymbol{\psi})\right\} \tag{5.5.1}$$

其中 θ 为一维未知参数，$\boldsymbol{\psi}=(\psi_1,\cdots,\psi_k)^T$ 为 k 维讨厌参数。

当有 n 个 IID 的样本 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 时，统计量 $(T,U)=(T(\boldsymbol{X}),U(\boldsymbol{X}))$ 的联合分布为

$$h(t,\boldsymbol{u})\exp\left\{\theta t+\sum_{i=1}^{k}\psi_i u_i-b(\theta,\boldsymbol{\psi})\right\} \tag{5.5.2}$$

当 U 已知时，统计量 T 的条件分布为

$$f(t|\boldsymbol{u};\theta)=h^*(t,\boldsymbol{u})\exp\{\theta t-b_{\boldsymbol{u}}(\theta)\} \tag{5.5.3}$$

且与讨厌参数 $\boldsymbol{\psi}$ 无关。因此，可以利用上式求得关于 θ 的假设的 UMPUT。

5.5.1 多参数指数型分布族的 UMPUT

假设样本 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自总体分布为 (5.5.1) 的 IID 样本，关于参数 θ 的单侧及双侧假设，其 UMPUT 有如下四个定理。

定理 5.5.1

对于指数型分布族 (5.5.1)，假设

$$H_0:\theta\leqslant\theta_0,\ \forall\boldsymbol{\psi} \longleftrightarrow H_1:\theta>\theta_0,\ \forall\boldsymbol{\psi} \tag{5.5.4}$$

的 UMPUT 为

$$\phi^*(T(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{u})=\begin{cases}1, & T(\boldsymbol{X})>c(\boldsymbol{u})\\ \delta(\boldsymbol{u}), & T(\boldsymbol{X})=c(\boldsymbol{u})\\ 0, & T(\boldsymbol{X})<c(\boldsymbol{u})\end{cases} \tag{5.5.5}$$

其中 $c(\boldsymbol{u}),\delta(\boldsymbol{u})$ 满足

$$E_{\theta_0}[\phi^*(T(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{U})|\boldsymbol{U}]=\alpha \tag{5.5.6}$$

定理 5.5.2

对于指数型分布族 (5.5.1)，假设

$$H_0:\theta\leqslant\theta_1 \text{ 或 } \theta\geqslant\theta_2,\ \forall\boldsymbol{\psi}\longleftrightarrow H_1:\theta_1<\theta<\theta_2,\ \forall\boldsymbol{\psi} \tag{5.5.7}$$

的 UMPUT 为

$$\phi^*(T(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{u})=\begin{cases}1, & c_1(\boldsymbol{u})<T(\boldsymbol{X})<c_2(\boldsymbol{u})\\ \delta_i(\boldsymbol{u}), & T(\boldsymbol{X})=c_i(\boldsymbol{u}),\ i=1,2\\ 0, & T(\boldsymbol{X})<c_1(\boldsymbol{u}) \text{ 或 } T(\boldsymbol{X})>c_2(\boldsymbol{u})\end{cases} \tag{5.5.8}$$

其中 $c(\boldsymbol{u}),\delta(\boldsymbol{u})$ 满足

$$E_{\theta_i}[\phi^*(T(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{U})|\boldsymbol{U}]=\alpha,\ i=1,2 \tag{5.5.9}$$

定理 5.5.3

对于指数型分布族 (5.5.1)，假设

$$H_0:\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2,\ \forall\boldsymbol{\psi}\longleftrightarrow H_1:\theta<\theta_1 \text{ 或 } \theta>\theta_2,\ \forall\boldsymbol{\psi} \tag{5.5.10}$$

的 UMPUT 为

$$\phi^*(T(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{u})=\begin{cases}1, & T(\boldsymbol{X})<c_1(\boldsymbol{u}) \text{ 或 } T(\boldsymbol{X})>c_2(\boldsymbol{u})\\ \delta_i(\boldsymbol{u}), & T(\boldsymbol{X})=c_i(\boldsymbol{u}),\ i=1,2\\ 0, & c_1(\boldsymbol{u})<T(\boldsymbol{X})<c_2(\boldsymbol{u})\end{cases} \tag{5.5.11}$$

其中 $c(\boldsymbol{u}),\delta(\boldsymbol{u})$ 满足

$$E_{\theta_i}[\phi^*(T(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{U})|\boldsymbol{U}]=\alpha,\ i=1,2 \tag{5.5.12}$$

定理 5.5.4

对于指数型分布族 (5.5.1)，假设

$$H_0:\theta=\theta_0,\ \forall\boldsymbol{\psi}\longleftrightarrow H_1:\theta\neq\theta_0,\ \forall\boldsymbol{\psi} \tag{5.5.13}$$

的 UMPUT 为

$$\phi^*(T(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{u})=\begin{cases}1, & T(\boldsymbol{X})<c_1(\boldsymbol{u}) \text{ 或 } T(\boldsymbol{X})>c_2(\boldsymbol{u})\\ \delta_i(\boldsymbol{u}), & T(\boldsymbol{X})=c_i(\boldsymbol{u}),\ i=1,2\\ 0, & c_1(\boldsymbol{u})<T(\boldsymbol{X})<c_2(\boldsymbol{u})\end{cases} \tag{5.5.14}$$

其中 $c(\boldsymbol{u}),\delta(\boldsymbol{u})$ 满足

$$E_{\theta_0}[\phi^*(T(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{U})|\boldsymbol{U}]=\alpha \tag{5.5.15}$$

$$E_{\theta_0}[T(\boldsymbol{X})\phi^*(T(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{U})|\boldsymbol{U}]=\alpha E_{\theta_0}[T(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{U}] \tag{5.5.16}$$

由以上定理注意到，关于多参数指数型分布族的参数的 UMPUT，与单参数的差别仅在于条件期望的计算上。

5.5.2 单样本正态总体参数的 UMPUT

本小节始终假设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的 IID 样本，其中 μ,σ^2 均未知。关于均值 μ 或方差 σ 的假设分别有如下四种：

(m-i)：$H_0:\mu\leqslant\mu_0\longleftrightarrow H_1:\mu>\mu_0$

(m-ii)：$H_0:\mu\leqslant\mu_1$ 或 $\mu\geqslant\mu_2\longleftrightarrow H_1:\mu_1<\mu<\mu_2$

(m-iii)：$H_0:\mu_1\leqslant\mu\leqslant\mu_2\longleftrightarrow H_1:\mu<\mu_1$ 或 $\mu>\mu_2$

(m-iv)：$H_0:\mu=\mu_0\longleftrightarrow H_1:\mu\neq\mu_0$

(s-i)：$H_0:\sigma\leqslant\sigma_0\longleftrightarrow H_1:\sigma>\sigma_0$

(s-ii)：$H_0:\sigma\leqslant\sigma_1$ 或 $\sigma\geqslant\sigma_2\longleftrightarrow H_1:\sigma_1<\sigma<\sigma_2$

(s-iii)：$H_0:\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2\longleftrightarrow H_1:\sigma<\sigma_1$ 或 $\sigma>\sigma_2$

(s-iv)：$H_0:\sigma=\sigma_0\longleftrightarrow H_1:\sigma\neq\sigma_0$

在上述八个假设中，仅关于均值 μ 的假设 (m-ii) 和 (m-iii) 没有 UMPUT，其余的均存在。

下面以部分假设为例，说明如何求其 UMPUT。

关于假设 (m-i)：

将样本分布写为

$$f(\boldsymbol{x};\mu,\sigma)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_0)^2+\frac{n(\mu-\mu_0)}{\sigma^2}\overline{x}-\frac{n(\mu^2-\mu_0^2)}{\sigma^2}\right\} \tag{5.5.17}$$

此时取

$$\theta=\frac{n(\mu-\mu_0)}{\sigma^2},\ \psi=-\frac{1}{2\sigma^2},\ T(\boldsymbol{x})=\overline{x},\ U(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_0)^2$$

则假设 (m-i) 等价于

$$H_0:\theta\leqslant 0\longleftrightarrow H_1:\theta>0$$

且此时定理 5.5.1 中的条件期望是可以计算的。

故假设 (m-i) 的显著性水平为 α 的 UMPUT 为

$$\phi(T(\boldsymbol{x}),u)=\begin{cases}1, & \overline{x}>c(u)\\ 0, & \overline{x}<c(u)\end{cases}$$

其中 $c(u)$ 满足

$$E_0[\phi(T,U)|U]=P_0\left\{\overline{X}>c(u)\,\middle|\,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2=u\right\}=\alpha$$

但由于 $\overline{X}$ 与 $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$ 不独立，故上述条件概率不能直接转化成无条件概率。

注意到 $U(\boldsymbol{X})=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+n(\overline{X}-\mu_0)^2$，而 $\overline{X}$ 与 $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 独立，故令

$$W(\boldsymbol{X})=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2/(n-1)}}=\frac{\sqrt{n(n-1)}(T(\boldsymbol{X})-\mu_0)}{\sqrt{U(\boldsymbol{X})-n(T(\boldsymbol{X})-\mu_0)^2}}$$

则 $W(\boldsymbol{X})$ 关于 $T(\boldsymbol{X})$ 严格单增，且当 $\mu=\mu_0$ 时，$W(\boldsymbol{X})\sim t(n-1)$。由于 $W(\boldsymbol{X})$ 此时的分布与讨厌参数 ψ 无关，而 $U=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$ 是 σ 的充分完备统计量，故由 Basu 定理知：当 $\mu=\mu_0$ 时，$U(\boldsymbol{X})$ 与 $W(\boldsymbol{X})$ 独立。从而有

$$E_0[\phi(T,U)|U]=P_0\{W(\boldsymbol{X})>c\}=\alpha$$

故 $c=t_\alpha(n-1)$。

于是假设 (m-i) 的显著性水平为 α 的 UMPUT 为

$$\phi(W(\boldsymbol{x}))=\begin{cases}1, & W(\boldsymbol{x})>t_\alpha(n-1)\\ 0, & W(\boldsymbol{x})<t_\alpha(n-1)\end{cases}$$

其中 $W(\boldsymbol{x})=\dfrac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu_0)}{s}$，这就是单样本正态总体的单侧 t 检验。

注 上面证明过程中的 **Basu 定理**，指的是：设 V,T 是两个来自总体 $P\in\mathcal{P}$ 的 X 的统计量，如果 V 是辅助的（即 V 的分布不依赖于总体 P），T 关于 $P\in\mathcal{P}$ 是有界完备且充分的，则关于任意 $P\in\mathcal{P}$，V 与 T 独立。

关于假设 (s-i)：

将样本分布写为

$$f(\boldsymbol{x};\mu,\sigma)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\frac{n\mu}{\sigma^2}\overline{x}-\frac{n\mu^2}{\sigma^2}\right\}\tag{5.5.18}$$

此时取

$$\theta=-\frac{1}{2\sigma^2},\ \psi=\frac{n\mu}{\sigma^2},\ T(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i^2,\ U(\boldsymbol{x})=\overline{x}$$

记 $\theta_0 = -\dfrac{1}{2\sigma_0^2}$，则假设 (s-i) 等价于

$$H_0: \theta \leqslant \theta_0 \longleftrightarrow H_1: \theta > \theta_0 \tag{5.5.19}$$

由定理 5.5.1 知，假设 (s-i) 的显著性水平为 α 的 UMPUT 为

$$\phi(T(\boldsymbol{x}), u) = \begin{cases} 1, & T(\boldsymbol{x}) > c(u) \\ 0, & T(\boldsymbol{x}) < c(u) \end{cases}$$

其中 $c(u)$ 满足 $E_{\theta_0}[\phi(T, U)|U = u] = \alpha$。

虽然 T 与 U 不独立，但是注意到

$$T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 + n\overline{X} = (n-1)S_n^2 + nU^2(\boldsymbol{X})$$

故 T 是 S^2 的严格增函数，而 S^2 与 U 独立，故

$$E_{\theta_0}[\phi(T, U)|U] = P_{\theta_0}\{T(\boldsymbol{X}) > c(u)|U = u\} = P_{\theta_0}\{(n-1)S_n^2 > c\} = \alpha$$

由于当 $\theta = \theta_0$ 时，$\dfrac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$，故 $c = \chi_\alpha^2(n-1)$。

于是假设 (s-i) 的显著性水平为 α 的 UMPUT 为

$$\phi(W(\boldsymbol{x})) = \begin{cases} 1, & W(\boldsymbol{x}) > \chi_\alpha^2(n-1) \\ 0, & W(\boldsymbol{x}) < \chi_\alpha^2(n-1) \end{cases}$$

其中 $W(\boldsymbol{x}) = \dfrac{(n-1)s}{\sigma_0^2}$，这就是显著性检验中的 χ^2 检验。

5.5.3 两样本正态总体参数的 UMPUT

用类似上一小节的方法，同样可以得到两样本正态总体参数的 UMPUT。

5.6 序贯概率比检验

说明：5.6 节及以后的内容在本课程中为介绍性质。

第 6 章 常用的分布检验方法

6.1 正态概率纸检验法

6.2 Pearsonχ^2 拟合优度检验

6.3 列联表的独立性检验

6.4 Kolmogorov 检验

6.5 正态性检验

6.5.1 W 检验

6.5.2 D 检验

第 7 章 统计模拟

7.1 随机数的产生

7.1.1 逆变换法

7.1.2 筛选抽样法

7.1.3 复合抽样法

7.1.4 随机向量的抽样法

7.2 随机模拟计算

7.2.1 样本均值法

7.2.2 重要抽样法

7.2.3 Rao-Blackwell 方法

7.2.4 分层抽样法

7.2.5 关联抽样法

第 8 章 Bootstrap 和经验似然

8.1 Bootstrap

8.2 经验似然简介

附录 A 常用分布表

分布名称	概率密度	期望	方差	特征函数
退化分布	$\begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$	c	0	e^{ict}
Bernoulli 分布	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$	p	pq	$q+pe^{it}$
二项分布 $B(n,p)$	$\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$, $k=0,1,\cdots,n$	np	npq	$(q+e^{it})^n$
几何分布 $G(p)$	$q^{k-1}p$, $k=1,2,\cdots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$
Pascal 分布 (负二项分布)	$\binom{k-1}{r-1}p^rq^{k-r}$, $k=r,r+1,\cdots$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$	$\left(\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}\right)^r$
超几何分布	$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$, $k=0,1,\cdots,n$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$	
Poisson 分布 $P(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,2,\cdots$	λ	λ	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
均匀分布 $U(a,b)$	$\frac{1}{b-a}$, $a<x<b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$
正态分布 $N(a,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty<x<+\infty$	a	σ^2	$e^{iat-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$

分布名称	概率密度	期望	方差	特征函数
指数分布	$\lambda e^{-\lambda x}$, $x>0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-1}$
Γ分布 $\Gamma(\lambda, r)$	$\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}$, $x>0$	$\frac{r}{\lambda}$	$\frac{r}{\lambda^2}$	$\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-r}$
χ^2分布 $\chi^2(n)$	$\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$, $x>0$	n	$2n$	$(1-2it)^{-\frac{n}{2}}$
Cauchy 分布 $C(\lambda,\mu)$	$\frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu)^2}$, $-\infty<x<+\infty$	不存在	不存在	$e^{i\mu t-\lambda\lvert t\rvert}$
Rayleigh 分布	$\frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $x>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma$	$\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$	
对数正态分布	$\frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $x>0$	$e^{a+\frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2a+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$	
Weibull 分布	$\alpha\lambda x^{\alpha-1} e^{\lambda x^{\alpha}}$, $x>0$	$\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1)\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}$	$\lambda^{-\frac{2}{\alpha}}[\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}+1\right)-\left(\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1)\right)^2]$	
Laplace 分布	$\frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{\lvert x-\mu\rvert}{\lambda}}$, $-\infty<x<+\infty$	μ	$2\lambda^2$	$\frac{e^{i\mu t}}{1+\lambda^2 t^2}$
t 分布 $t(n)$	$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$, $-\infty<x<+\infty$	0 $(n>1)$	$\frac{n}{n-2}$ $(n>2)$	
F 分布 $F(m,n)$	$\frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} x^{\frac{m}{2}-1}.$ $(n+mx)^{-\frac{m+n}{2}}$, $x>0$	$\frac{n}{n-2}$ $(n>2)$	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ $(n>4)$	
贝塔分布	$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$, $0<x<1$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	

附录 B 常见的充分统计量

6．常见的充分统计量

分布	分布列或密度函数	参数	充分统计量
二项分布 b(1,p)	$P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x},x=0,1,\cdots$	p	$T=x_1+\cdots+x_n$
泊松分布 $P(\lambda)$	$P(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda},x=0,1,2,\cdots$	λ	$T=x_1+\cdots+x_n$
几何分布 $Ge(\theta)$	$P(X=x)=(1-\theta)^{x-1}\theta,x=1,2,\cdots$	θ	$T=x_1+\cdots+x_n$
指数分布 Exp(λ)	p(x)= $\lambda e^{-\lambda x},x>0$	λ	$T=x_1+\cdots+x_n$
均匀分布 $U(0,\theta)$	$p(x)=\frac{1}{\theta},0<x<\theta$	θ	$T=\max(x_1,\cdots,x_n)$ 即 $T=x_{(n)}$
均匀分布 $U(\theta_1,\theta_2)$	$p(x)=\frac{1}{\theta_2-\theta_1},\theta_1<x<\theta_2$	θ_1,θ_2	$T_1=x_{(1)},T_2=x_{(n)}$
均匀分布 $U(\theta,2\theta)$	$p(x)=\frac{1}{\theta},\theta<x<2\theta$	θ	$T_1=x_{(1)},T_2=x_{(n)}$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ,σ^2	$\bar{x}$与$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$
幂分布	$p(x;\theta)=\theta x^{\theta-1},0<x<1$	θ	$T=\prod_{i=1}^{n}x_i$或$T=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$
双参数指数分布	$p(x;\theta,\mu)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}},x>\mu$	μ,θ	$T_1=x_{(1)},T_2=\sum_{i=1}^{n}x_i$
伽玛分布 Ga(α , λ)	$p(x;\alpha,\lambda)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}$,x>0	α,λ	$T_1=\sum_{i=1}^{n}x_i,T_2=\prod_{i=1}^{n}x_i$
对数正态分布 $LN(\mu,\sigma^2)$	$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ,σ^2	$T_1=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,T_2=\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2$
贝塔分布 Be(a,b)	$p(x)=\frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$,0<x<1	a,b	$T_1=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,T_2=\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i)$

索　　引

参考文献

[1] 王兆军 and 邹长亮. 数理统计教程. 高等教育出版社, 2014.

[2] 邵军. 数理统计. 高等教育出版社, 2018.