

计算机图形学第四次作业实验报告

- ID：999
- 姓名：袁保杰
- 学号：PB21111714

实验描述

本次实验要求：

- 实现论文 [Floater1997](#) 中介绍的 Tutte 网格参数化方法
 - 将边界映射到平面凸多边形（单位圆、单位正方形）
 - 求解极小曲面对应的稀疏方程组，得到曲面参数化的结果
- 尝试多种（2~3种）权重设置
 - Uniform weights
 - Cotangent weights
 - Floater weights（共形映射/保角变换）（选做）
- 使用测试纹理和网格检验实验结果

我完成了必做部分，未完成选做部分。

算法描述

边界映射

本次作业要求将曲面的边界点映射到单位圆及单位正方形上，实现于 `node_boundary_mapping.cpp` 节点上，过程如下：

- 从半边结构表示的网格中，按顺序取出边界点
- 计算边界上每条边的长度，以及它们的总长度
- 将边界点按顺序映射到对应边界上，同时保证相邻点之间的距离与原边界上的边长成正比

对于边界点的寻找，可以找网格上第一个属于边界的点，从这一点开始寻找边界。寻找边界的过程为，对于当前所在的点，枚举其每一条出边，如果出边对应的另一个点也在边界上，就将该点加入找到的边界中，并切换到该点继续寻找边界，直至回到起始点。

对于计算边界上每条边的长度，可以在找边界的同时完成，利用 `OpenMesh::Vec3f` 的 `norm` 函数，能够较为便捷地计算空间两点之间的长度。

在将边界点映射到边界上时需要注意，对于单位正方形来说，不一定存在能映射到四角上的边界点，需要特殊处理。我的做法是，对于每个边界点，寻找映射后距离其最近的四个角上的点，然后直接将该点挪到正方形的四个角上。

极小曲面的求解

极小曲面的求解实现于 `node_min_surf.cpp` 节点上。

极小曲面是指「在曲面上每一点的平均曲率均为 0」的曲面。利用离散拉普拉斯算子，可以定义离散平均曲率流 δ_i ：

$$\delta_i = \mathbf{v}_i - \sum_{j \in N(i)} w_j \mathbf{v}_j$$

其中 $N(i)$ 为网格上顶点 i 的 1-邻域， w_j 为每个点 j 对应的权值，满足归一化条件：

$$\sum_{j \in N(i)} w_j = 1$$

在权值函数取值合适的情况下，离散平均曲率流可用于近似平均曲率。应用极小曲面条件：

- 边界条件：曲面的边界点
- 内部约束：对于曲面的任意内点 i ，由下式定义

$$\mathbf{v}_i - \sum_{j \in N(i)} (w_j \mathbf{v}_j) = \mathbf{0}$$

可以得到一个稀疏方程组，使用 Eigen 的稀疏方程组求解器可以求解，与上次作业类似。

权值函数的选取

在 [Floater1997](#) 中提到了三种选取权值函数的方式：

- 均匀权值（Uniform weights）：实现简单
- cotan 权值（Cotangent weights）：能够更好地近似连续情形
- [Floater weights](#)：论文提到的 shape-preserving 权值

对于 cotan 权值，需要在已知三角形三个点的前提下，计算某个角的 cot 值。假设要求解角 BAC（记为 α ）的余切值，有如下推导：

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{|\vec{AB}||\vec{AC}| \cos \alpha}{|\vec{AB}||\vec{AC}| \sin \alpha} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\vec{AB} \times \vec{AC}}$$

于是转换为向量运算。

实现上，我并未将不同的权值函数封装为类，而是使用 `enum + if` 判断来完成：

```
enum WeightType {
    uniform_weight,
    cotangent_weight,
    floater_weight
};

// 根据不同的权值类型，计算 weights 向量
std::vector<float> weights;
if (weight_type == uniform_weight)
{
    for (const auto& halfedge_handle : vi.outgoing_halfedges())
    {
        weights.push_back(1.f);
    }
}
else if (weight_type == cotangent_weight)
{
    // 通过向量运算，计算 cot 得到 weights 向量
    // ...
}
```

实验结果

见 `ybj_homework/results.mp4` 文件。