

## Тема 1. Способы построения диагностического пространства

Рассмотрим общую структуру системы диагностирования (рис. 1). На объект диагностирования (ОД) действуют внешние воздействия, приводящие к возникновению дефектов. Диагностические признаки (ДП), сформированные на основе модели ОД, подаются на блок, реализующий алгоритм принятия решения (АПР), который должен выдать сигнал о наличии или отсутствии дефекта.



Рис. 1. Общая структура системы диагностирования.

Рассмотрим способы построения диагностического пространства.

Анализ существующих методов диагностирования позволяет выделить три основных подхода к формированию пространства ДП [3]:

- 1) применение теории инвариантов;
- 2) применение теории моделей;
- 3) использование избыточности.

Эти подходы не являются изолированными, а выступают в тесном взаимодействии, при этом следует отметить приоритетный характер первого принципа, как обобщающего другие и позволяющего с единых позиций представлять методологию диагностирования динамических систем.

Первый подход сводится к выявлению некоторых характеристик объекта, остающихся неизменными при нормальном функционировании ОД и изменяющихся при появлении дефектов. Эти характеристики (инварианты) используются в качестве прямых или косвенных диагностических признаков.

Второй подход опирается на использование моделей проверяемого объекта. С наибольшей очевидностью он проявляется в таких хорошо известных методах, как контроль на основе дублирования и резервирования, представляющих собой частные случаи контроля с помощью моделей, подключаемых параллельно объекту.

Третий подход связан с использованием различных видов избыточности:

- структурной и функциональной (наличие избыточного числа устройств и функций);
- естественной (наличие аналитических зависимостей между входом и выходом системы);
- искусственной (введение избыточных переменных);
- информационной (наличие априорной информации либо коррелированность измеряемых сигналов и др.).

## 1. Использование избыточности

### 1.1. Использование структурной избыточности

Рассмотрим ОД, включающий  $k$  датчиков, дублирующих друг друга, то есть измеряющих один и тот же параметр объекта. Выходные сигналы датчиков:

$$y_i(n) = h(n) + (u_i(n)b_i + m_i), u_i(n) \in N(0,1), i = 1..k,$$

где  $h$  – полезный сигнал,

$u_i$  – шумы датчиков,

*Разность одноименных параметров*

Формирование диагностических признаков в случае  $k = 2$  заключается в вычислении разности между показаниями датчиков в каждый момент времени:

$$z(n) = y_1(n) - y_2(n).$$

Типы дефектов:

1) изменение математического ожидания первого датчика  $m_1' = m_1 + \Delta m_1$ ;

2) изменение дисперсии первого датчика  $b_1' = b_1 + \Delta b_1$

3) изменение математического ожидания второго датчика  $m_2' = m_2 + \Delta m_2$ ;

4) изменение дисперсии второго датчика  $b_2' = b_2 + \Delta b_2$

Появление дефекта приводит к изменению свойств сигнала  $z$ , который в режиме нормального функционирования имеет нулевое математическое ожидание (при  $m_1 = m_2$ ).

Структура системы формирования ДП при использовании структурной избыточности показана на рис. 2.

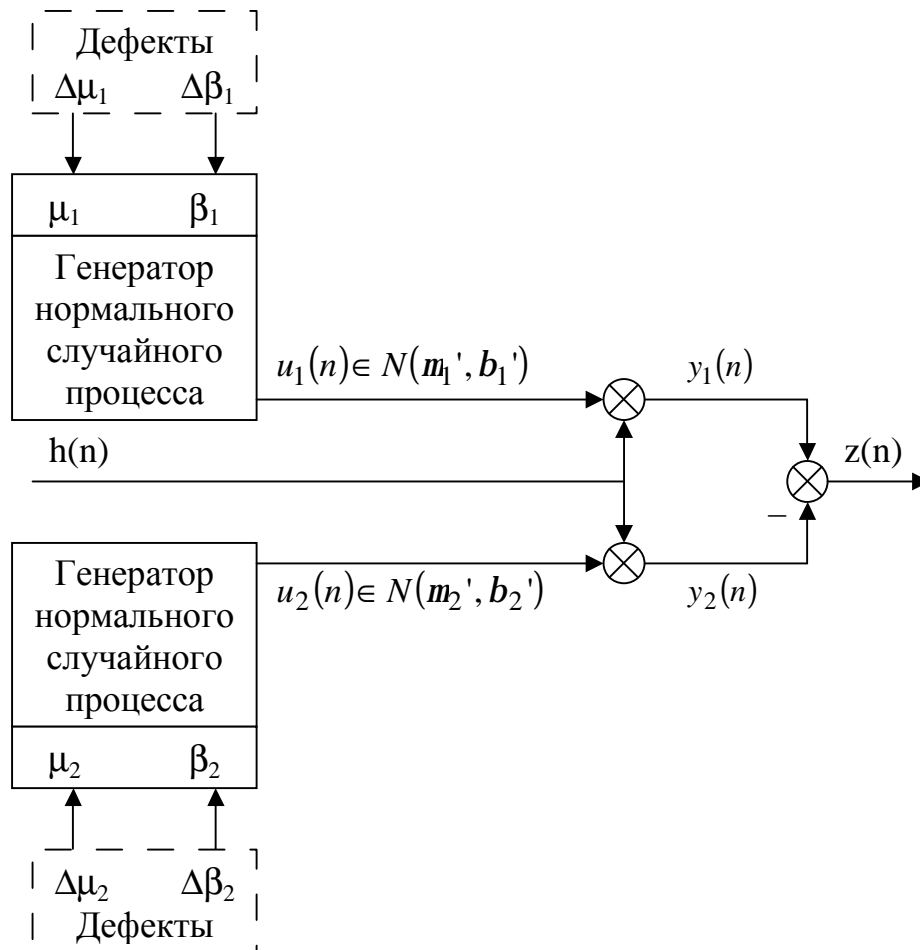


Рис. 2. Формирование ДП при использовании структурной избыточности.

#### Использование обобщенной статистики

Возможно формирование инварианта с использованием обобщенных статистик:  
Среднее арифметическое

$$z_i(n) = y_i(n) - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_j(n)$$

Порядковое среднее

$$z_i(n) = y_i(n) - \text{med}\{y_1(n), y_2(n), \mathbf{K}, y_k(n)\}$$

Средневзвешенное

$$z_i(n) = y_i(n) - \sum_{j=1}^k g_j y_j(n),$$

$$\sum_{j=1}^k g_j = 1,$$

$$0 < g_j < 1, j = 1..k.$$

Пример: если датчики имеют разброс по точности ( $b_j$ ), то

$$g_j = \frac{\frac{1}{b_j}}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{b_i}}, \quad j = 1..k.$$

### **1.2. Использование функциональной избыточности**

В этом случае выходные сигналы ОД формируются с помощью измерений, основанных на разных физических принципах.

$$z_i(n) = F_1(y_i(n)) - F_2(y_i(n))$$

Функциональные преобразования  $F_1$ ,  $F_2$  применяются для получения оценок, аналогичных друг другу.

### **1.3. Использование естественной избыточности**

Этот способ предполагает наличие некоторых математических соотношений, которые связывают выходные сигналы и остаются постоянными в процессе нормального функционирования объекта:

$$F(Y) = C,$$

$$Y = \{y_1, \mathbf{K}, y_k\}.$$

ДП формируется как

$$z = F(Y) - C.$$

При возникновении дефекта эти соотношения перестают выполняться:

$$F(Y) \neq C,$$

$$z = F(Y) - C \neq 0.$$

### **1.4. Использование искусственной избыточности**

Данный способ предполагает формирование дополнительных контрольных соотношений, строго выполняемых при отсутствии дефектов.

*Метод избыточных переменных*

Объект диагностирования:

$$\mathbf{A} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

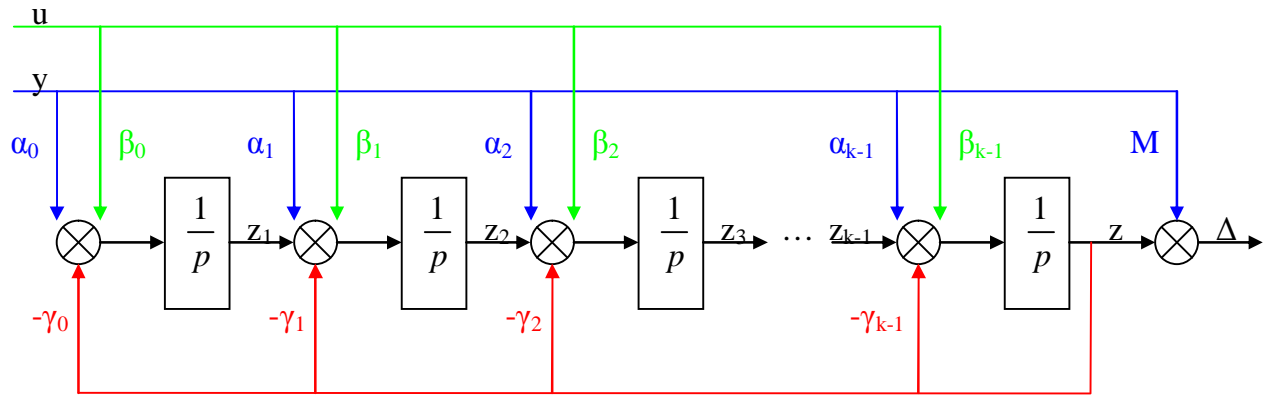
Устройство диагностирования (УД) вырабатывает сигнал  $z$ , который при любом входном сигнале  $u$  в любой момент времени удовлетворяет условию:

$$\Delta = My + z = 0,$$

где  $M = \{m_1, m_2, \mathbf{K}, m_s\}$  – вектор постоянных коэффициентов.

Если в результате функционирования ОД произошло искажение его выходных сигналов по причине возникновения дефекта, это должно привести к нарушению контрольного уравнения  $My + z = 0$  и появлению сигнала рассогласования  $\Delta(t) \neq 0$ .

Структура устройства диагностирования имеет следующий вид:



Чёрным обозначены сигналы ( $u, y, z, z_1 \dots z_{k-1}, \Delta$ ),  
цветом – множители ( $\alpha_0 \dots \alpha_{k-1}, \beta_0 \dots \beta_{k-1}, \gamma_0 \dots \gamma_{k-1}, M$ ).

$$\begin{cases} z = z_k \\ z_i = \frac{1}{p} (a_{i-1}y + b_{i-1}u - g_{i-1}z + z_{i-1}), i = 1..k \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

*Теорема о порядке устройства диагностирования*

Минимальный порядок  $k$  устройства диагностирования заданного вида при любом входном сигнале  $u$  и любом векторе  $M$  равен индексу наблюдаемости проверяемой системы.

$$\text{Индекс наблюдаемости } v_0 = \min \left\{ v : \text{rank} \begin{bmatrix} C^T & \mathbf{L} & (A^T)^v C^T \end{bmatrix} = n \right\},$$

где  $n$  – размерность вектора  $x$ .

Можно показать, что индекс наблюдаемости  $v_0$  системы произвольного порядка удовлетворяет неравенству:

$$\frac{n}{s} \leq v_0 \leq n - s + 1,$$

где  $s$  – размерность вектора  $y$ .

*Методика синтеза устройства диагностирования*

- 1) Найти минимальный порядок  $k$  устройства диагностирования;
- 2) Для заданного  $M$  решить систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} j_0 & \mathbf{L} & j_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \mathbf{M} \\ CA^k \end{bmatrix} = 0 \\ b_{j-1} = - \left[ \sum_{i=j}^k j_i CA^{i-j} \right] B, \quad j = 1..k \end{array} \right. ,$$

где  $j_i = \begin{cases} a_i + g_i M, & i = 0..k-1 \\ M, & i = k \end{cases}.$

3) С помощью полученных значений  $a$ ,  $b$  и  $g$  построить выходной сигнал  $z = z_k$ ,

$$\text{где } z_i = \frac{1}{p} (a_{i-1} y + b_{i-1} u - g_{i-1} z + z_{i-1}), \quad i = 1..k,$$

$$z_0 = 0$$

Скалярные коэффициенты  $g$  для упрощения структуры УД примем равными 0.

*Пояснения к формулам*

$$\underset{n \times 1}{\mathbf{x}} = \underset{n \times n}{A} \underset{n \times 1}{x} + \underset{n \times r}{B} \underset{r \times 1}{u}$$

$$\underset{s \times 1}{y} = \underset{s \times n}{C} \underset{n \times 1}{x}$$

$$\underset{1 \times 1}{\Delta} = \underset{1 \times s}{M} \underset{s \times 1}{y} + \underset{1 \times 1}{z} = 0,$$

$$\underset{1 \times s}{j_i} = \underset{1 \times s}{a_i} + \underset{1 \times 1}{g_i} \underset{1 \times s}{M}$$

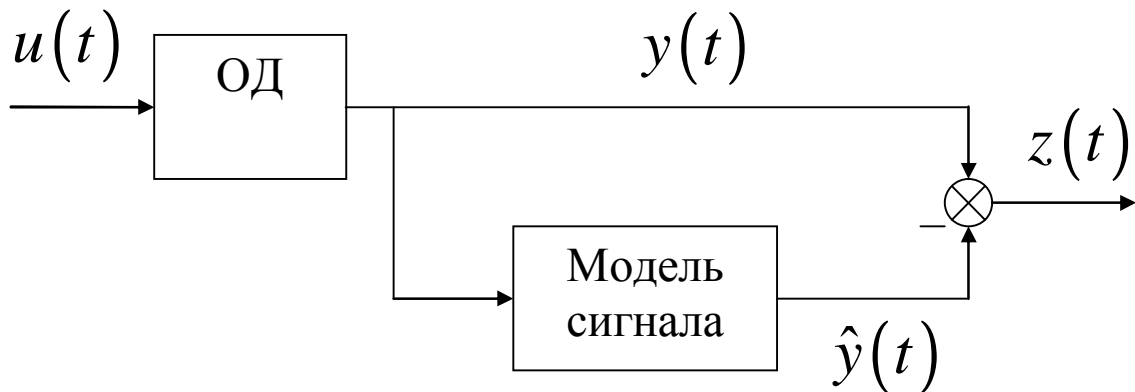
$$\begin{bmatrix} j_0 & \mathbf{L} & j_k \\ 1 \times s & 1 \times (k+1)s & 1 \times s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \mathbf{M} \\ CA^k \\ s \times n \quad n \times n \\ (k+1)s \times n \end{bmatrix} = 0$$

$$\underset{1 \times r}{b_{j-1}} = - \left[ \sum_{i=j}^k \underset{1 \times s}{j_i} \underset{s \times n}{C} \underset{n \times n}{A^{i-j}} \right] \underset{n \times r}{B}$$

$$\underset{1 \times 1}{z_i} = \frac{1}{p} \left( \underset{1 \times s}{a_{i-1}} \underset{s \times 1}{y} + \underset{1 \times r}{b_{i-1}} \underset{r \times 1}{u} - \underset{1 \times 1}{g_{i-1}} \underset{1 \times 1}{z} + \underset{1 \times 1}{z_{i-1}} \right)$$

## 2. Использование математических моделей

### 2.1. Использование математических моделей выходного сигнала



1) Усреднение:

$$z = y - M[y]$$

2) Экспоненциальное сглаживание:

$$\hat{y}(n) = (1 - a)\hat{y}(n-1) + ay(n),$$

$0 < a < 1$  – коэффициент сглаживания,

$$z(n) = y(n) - \hat{y}(n)$$

3) Модель авторегрессии (АР)

$$\hat{y}(n) = m + \sum_{i=1}^p a_i (\hat{y}(n-i) - m) + b y(n),$$

где  $a_1, \mathbf{K}, a_p$  – коэффициенты авторегрессии,

$p$  – порядок авторегрессии,

$m$  – математическое ожидание,

$b$  – остаточная дисперсия,

$$y(n) \in N(0,1).$$

4) Модель скользящего среднего (СС)

$$\hat{y}(n) = m + \sum_{i=1}^q b_i y(n-i) + b y(n)$$

где  $b_1, \mathbf{K}, b_q$  – коэффициенты скользящего среднего,

$q$  – порядок скользящего среднего,

$m$  – математическое ожидание,

$b$  – остаточная дисперсия,

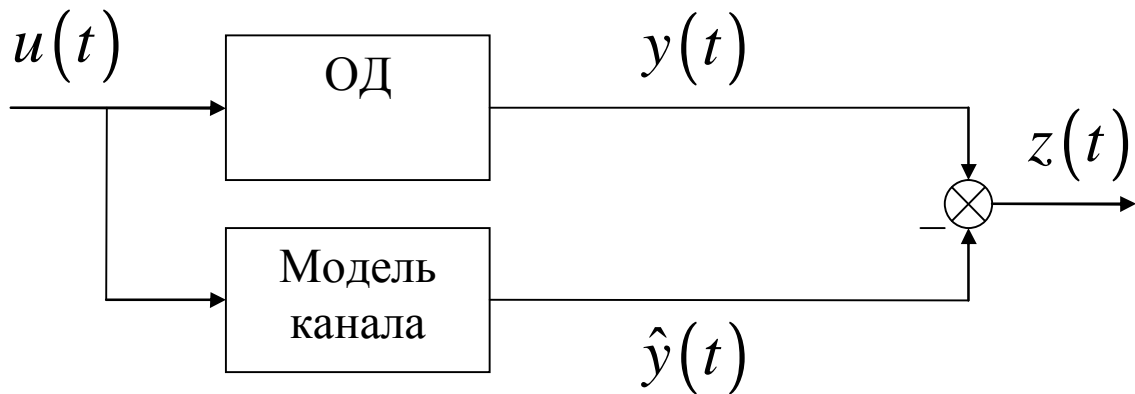
$$y(n) \in N(0,1).$$

5) Модель авторегрессии – скользящего среднего (АРСС)

$$\hat{y}(n) = m + \sum_1^p a_i (\hat{y}(n-i) - m) + \sum_1^q b_i y(n-i) + b y(n)$$

6) Интегрированная модель авторегрессии – скользящего среднего (ИАРСС)

## 2.2. Использование математических моделей канала



- 1) Линеаризация
- 2) Дискретизация
- 3) Редукция
- 4) Использование отдельных режимов

### Редукция моделей

Варианты редукции моделей:

- 1) Отбрасывание составляющих, слабо влияющих на динамику объекта
- 2) Сокращение близких нулей и полюсов (модальный подход)
- 3) Отбрасывание переменных состояния, которые слабо изменяют поведение системы в целом
- 4) идентификация

### Использование стационарного режима

Если изменение входных сигналов, приводящее к появлению переходных процессов в объекте, происходит редко, и большую часть времени объект работает при постоянных входных сигналах, то можно ограничиться проверкой правильности функционирования только в установившемся режиме.

Объект диагностирования:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$



Модель:

$$\mathbf{\hat{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

$$\hat{y} = C\mathbf{x}$$

Стационарный режим:  $\mathbf{\hat{x}} = 0$

$$\hat{y} = -CA^{-1}B\mathbf{u}$$

$$z = y - \hat{y}$$

### 2.3. Использование фильтра Калмана

Рассмотрим линейную динамическую систему с дискретным временем, описывающую ОД. Такая система в режиме нормального функционирования (при отсутствии дефектов) описывается линейными разностными уравнениями состояния и наблюдений. Уравнение состояния характеризует динамику системы, уравнение наблюдений определяет механизм образования данных, доступных измерению.

Уравнение состояния:

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n) + F\mathbf{u}_1(n), \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{x}(n)$  – вектор состояния системы в момент времени  $n$ ,

$A$  – переходная матрица системы,

$F$  – переходная матрица возмущения системы,

$\mathbf{u}_1(n) \in N(\mathbf{m}_1, \mathbf{b}_1)$  – шум возмущения – нормальный случайный процесс с математическим ожиданием  $\mathbf{m}_1$  и дисперсией  $\mathbf{b}_1$ .

Уравнение наблюдений:

$$y(n) = C\mathbf{x}(n) + \mathbf{u}_2(n), \quad (2.2)$$

где  $y(n)$  – вектор наблюдений системы в момент времени  $n$ ,

$C$  – матрица наблюдений системы,

$\mathbf{u}_2(n) \in N(\mathbf{m}_2, \mathbf{b}_2)$  – шум измерения – нормальный случайный процесс с математическим ожиданием  $\mathbf{m}_2$  и дисперсией  $\mathbf{b}_2$ .

Оптимальный алгоритм оценивания вектора состояния линейной системы, заданной уравнениями (2.1) и (2.2), описывается системой рекуррентных уравнений следующего вида.

Уравнение оценки:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = A\tilde{\mathbf{x}}_n + F\mathbf{m}_1 + K_{n+1}(y_{n+1} - C(A\tilde{\mathbf{x}}_n + F\mathbf{m}_1)), \quad (2.3)$$

где  $\tilde{\mathbf{x}}_n$  – оценка вектора состояния в момент времени  $n$ ,

$K_{n+1}$  – матричный коэффициент усиления фильтра:

$$K_{n+1} = Q_{n+1}C^T(CQ_{n+1}C^T + \mathbf{b}_2)^{-1}, \quad (2.4)$$

$Q_{n+1}$  – корреляционная матрица ошибок экстраполяции:

$$Q_{n+1} = AP_nA^T + F\mathbf{b}_1F^T, \quad (2.5)$$

$P_{n+1}$  – корреляционная матрица ошибок фильтрации:

$$P_{n+1} = Q_{n+1} - K_{n+1}CQ_{n+1}. \quad (2.6)$$

Начальные условия:

$$P_0 = b_2 E, \tilde{x}_0 = 0,$$

где  $E$  – единичная матрица.

Оптимальный фильтр, алгоритм которого описывается уравнениями (2.3) – (2.6), называется фильтром Калмана (ФК).

Сравнивая выходы объекта и фильтра, можно построить сигналы следующего вида:

$$\tilde{z}_n = y_n - C(A\tilde{x}_n + Fm_1), \quad (2.7)$$

$$z_n = S_n^{-\frac{1}{2}} \tilde{z}_n$$

$$S_n = b_2 + CP_n C^T - b_2 K_n^T C^T - CK_n b_2. \quad (2.8)$$

Величина  $\tilde{z}_n$  называется  $n$ -ой невязкой измерений. Будем называть последовательность  $\{\tilde{z}_n\}$  последовательностью обновления [4, 5]. Последовательность  $\{z_n\}$  будем называть нормализованной обновляющей последовательностью, так как в режиме нормального функционирования (при отсутствии дефектов) она распределена по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией:  $z_n \in N(0,1)$ .

Формирование диагностических признаков в этом случае заключается в вычислении нормализованной обновляющей последовательности в каждый момент времени.

Типы дефектов:

- 1) изменение математического ожидания в канале возмущения  $m_1' = m_1 + \Delta m_1$ ;
- 2) изменение математического ожидания в канале измерения  $m_2' = m_2 + \Delta m_2$ ;
- 3) изменение дисперсии в канале возмущения  $b_1' = b_1 + \Delta b_1$ ;
- 4) изменение дисперсии в канале измерения  $b_2' = b_2 + \Delta b_2$ ;
- 5) изменение  $A, F, C$ .

Структура системы формирования ДП показана на рис. 3.

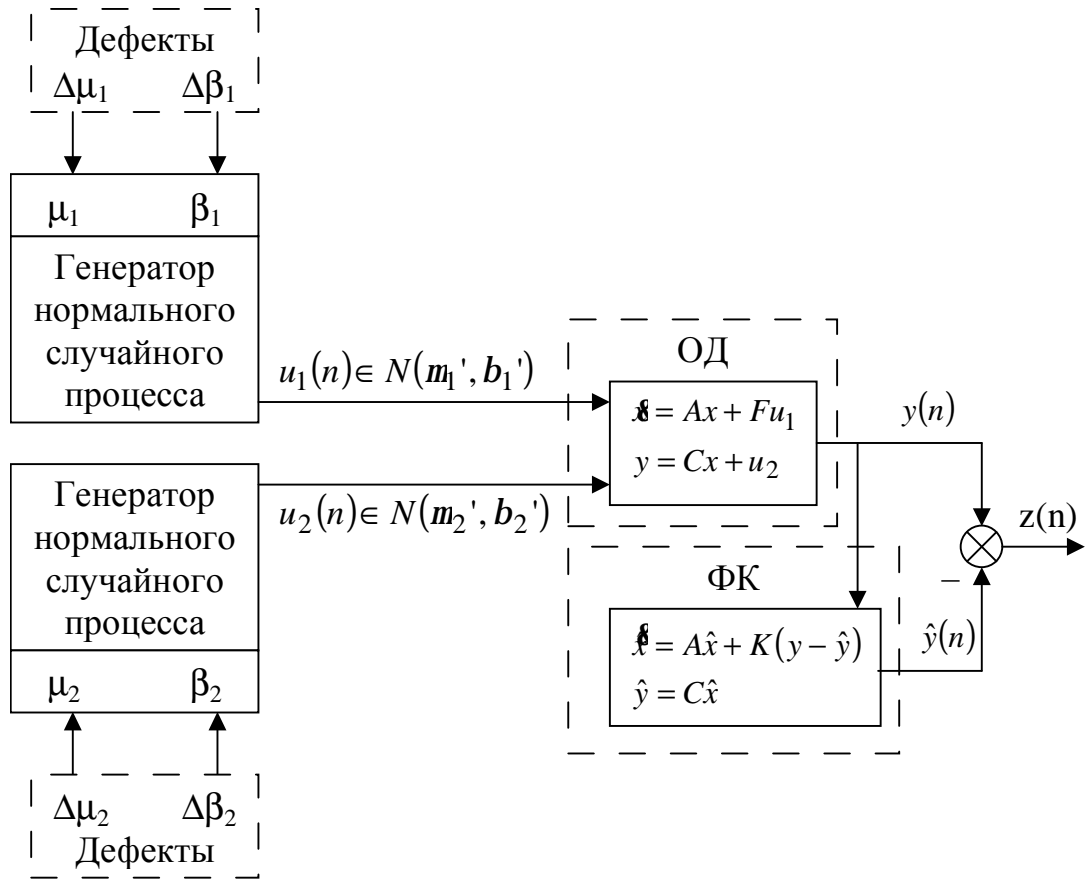


Рис. 3. Формирование ДП с использованием фильтра Калмана.

*Применение процессов АР для описания ДП*

Процесс авторегрессии порядка  $p$ ,  $AP(p)$  [2]:

$$x_n = m + \sum_{i=1}^p a_i (x_{n-i} - m) + b g_n,$$

где  $g_n \in N(0,1)$  – случайный процесс с нормальным распределением, нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией,

$a_1, \mathbf{K}, a_p$  – коэффициенты авторегрессии,

$p$  – порядок авторегрессии,

$m$  – математическое ожидание,

$b$  – остаточная дисперсия.

Преобразование процесса  $AP(p)$  к матричному виду:

$$a = [a_1 \quad \dots \quad a_p], \quad c = [c_1 \quad \dots \quad c_m], \quad A = \begin{bmatrix} & a \\ E_{p-1} & O_{p-1,1} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 \\ O_{p-1,1} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} c^T & O_{m,p-1} \end{bmatrix},$$

где  $a_1, \mathbf{K}, a_p$  – коэффициенты авторегрессии,

$p$  – порядок авторегрессии,

$c_1, \mathbf{K}, c_m$  – коэффициенты выхода,

$m$  – размерность выхода,

$E_n$  – единичная матрица размерности  $n$ ,

$O_{n,m}$  – нулевая матрица размерности  $n \times m$ .

#### *Использование обновляющих процессов для обнаружения дефектов*

Если в системе происходят дефекты, то статистические характеристики процесса  $Z_n$  изменяются, и эти изменения можно использовать для обнаружения дефектов. Методы обнаружения дефектов, использующие обновляющие процессы:

1) Проверка соответствия  $Z_n$  белому шуму:

при отсутствии дефектов  $z_n \in N(0,1)$ .

2) Вычисление изменения корреляционной матрицы  $S_n$ :

$$l_n = \sum_{j=n-M+1}^n z_j^T S_j^{-1} z_j$$

При отсутствии дефектов  $l_n \in C_q^2(M \cdot m)$  с доверительной вероятностью  $q$ .

3) Вычисление изменения среднего значения обновляющего процесса  $Z_n$ :

Использование последовательных алгоритмов обнаружения изменения свойств случайного процесса, в том числе специальных, построенных на основании специфики фильтра Калмана.

#### **2.4. Использование обнаруживающих фильтров**

Для ОД синтезируется наблюдатель, невязка которого чувствительна к дефекту, то есть при разных дефектах вектор невязки принимает разные значения.

##### *Фильтр Бирда*

Объект диагностирования:

$$\mathbf{z} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

$$y = C\mathbf{x}$$

Модель объекта:

$$\hat{\mathbf{x}} = A\hat{\mathbf{x}} + K(y - C\hat{\mathbf{x}}) + B\mathbf{u}$$

$$\hat{y} = C\hat{\mathbf{x}}$$

При отсутствии дефектов:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$$

$$\hat{y} = y$$

Наличие погрешностей и дефектов в функционировании ОД приведет к появлению невязок:

$$\Delta = y - \hat{y} \neq 0$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \neq 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} - A\hat{\mathbf{x}} - K(y - C\hat{\mathbf{x}}) - B\mathbf{u} = \\ &= A(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) - KC(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = (A - KC)\mathbf{e} \end{aligned}$$

Пусть имеет место полная доступность вектора состояния для непосредственных измерений:

$$C = E$$

$$\Delta = e$$

$$\dot{\Delta} = (A - K)e = (A - K)\Delta$$

Для исключения перекрестного влияния составляющих невязки друг на друга выберем

$$K = aE + A$$

Тогда

$$\dot{\Delta} = (A - aE - A)\Delta = -a\Delta$$

или в скалярной записи

$$\dot{\Delta}_j = -a\Delta_j, \quad j = 1..n$$

Решение дифференциальных уравнений:

$$\Delta_j(t) = c_j e^{-at}, \quad j = 1..n$$

При отсутствии дефектов все невязки независимо стремятся к нулю, скорость стремления к нулю регулируется выбором коэффициента  $a$ .

Используя принятые допущения  $C = E$ ,  $K = aE + A$ , получим:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\hat{x} + K(y - \hat{x}) + Bu = \\ &= A\hat{x} + (aE + A)(y - \hat{x}) + Bu = \\ &= -a\hat{x} + (aE + A)y + Bu = \\ &= a(x - \hat{x}) + Ax + Bu \end{aligned}$$

$$\dot{\hat{x}} = -a\hat{x} + (aE + A)y + Bu \text{ – фильтр Бирда}$$

*Обнаружение и локализация дефектов с помощью фильтра Бирда*

В момент времени  $t_0$  введем дефект, проявление которого эквивалентно искажению одного из столбцов в матрице  $B$ :

$$\dot{x} = Ax + Bu + vb_i$$

$$\dot{\hat{x}} = Ax + Bu + a(x - \hat{x})$$

для  $i$  столбца,

$v$  – уровень ошибки.

$$\dot{\Delta} = vb_i - a\Delta$$

При  $t < t_0$   $\Delta_j = 0$ ,  $j = 1..n$

при  $t \geq t_0$   $\dot{\Delta}_j + a\Delta_j = vb_{ij}$ ,  $j = 1..n$

Решение дифференциальных уравнений:

$$\Delta_j(t) = \frac{v}{a} b_{ij} \left(1 - e^{-a(t-t_0)}\right), \quad j = 1..n$$

После окончания переходного процесса, вызванного появлением дефекта, через интервал времени  $\frac{3}{a}$ , можно записать:

$$\Delta = \frac{v}{a} b_i, t \geq t_0 + \frac{3}{a}$$

Таким образом, вектор невязок пропорционален  $i$  столбцу матрицы  $B$ . Для локализации таких дефектов достаточно определить, какому из столбцов матрицы  $B$  пропорционален вектор невязок.

#### *Ограничения применения фильтра Бирда*

Основные ограничения и упрощения, характерные для фильтра Бирда:

- датчики и исполнительные механизмы считаются безынерционными;
- дефекты предполагаются константными;
- обработка данных в устройстве диагностирования считается надежной;
- число датчиков равно числу компонент обобщенного вектора состояний;
- размерность устройства диагностирования равна размерности ОД.

## **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Бендерская Е.Н., Колесников Д.Н., Пахомова В.И. Функциональная диагностика систем управления: Учебное пособие / СПбГТУ. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2000. – 143 с.
2. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Выпуск 1. – М.: Мир, 1974. – 406 с.
3. Мироновский Л.А. Функциональное диагностирование динамических систем. – М. СПб.: Изд-во МГУ. Гриф, 1998. – 255 с.
4. Kailath T. An Innovations Approach to Least-Squares Estimation, Pt. I: Linear Filtering in Additive Noise // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1968. – vol. AC-13, №6. – p. 646-655.
5. Kailath T., Frost P. An Innovations Approach to Least-Squares Estimation, Pt. II: Linear Smoothing in Additive White Noise // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1968. – vol. AC-13, №6. – p. 655-660.