DHBW Karlsruhe

# Vorkurs Mathematik

**Dozent: Heinrich Kroll**

## Binomische Formeln:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

## Potenzen:

$$a^n = \overbrace{a \bullet a \bullet \ldots \bullet a}^{n\text{-mal}}; \qquad 0^n = 0; \quad a^0 = 1;$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \quad a^{m \bullet n} = (a^m)^n; \qquad a^m \bullet a^n = a^{m+n}; \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \qquad (a \bullet b)^n = a^n \bullet b^n; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$$

## Wurzeln:

$$\sqrt{a}\ (a \geq 0); \quad \sqrt[3]{a}\ \ (a \in \mathbb{R}) \qquad \sqrt{a} = \sqrt[2]{a^1}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[m \bullet p]{a^{m \bullet p}}; \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; \qquad \sqrt[n]{a \bullet b} = \sqrt[n]{a} \bullet \sqrt[n]{b};$$

## Logarithmen:

$$log_b(x) \quad (x > 0)$$

$$log_b(b) = 1; \quad log_b(1) = 0; \qquad \ln(1) = 0; \quad \ln(e^x) = x = e^{\ln(x)}$$

$$\ln(x) = log_e(x); \quad \lg(x) = \log(x) = \log_{10}(x); \quad ld(x) = lb(x) = \log_2(x);$$

$$log_n(a) + log_n(b) = log_n(a * b); \quad log_n(a) - log_n(b) = log_n\left(\frac{a}{b}\right); \qquad log_a(b^n) = n * log_a(b)$$

$$log_n(a) = \frac{log_b(a)}{log_b(n)}$$

**– * – = +   *vs.*   – – = –**

Berechnen bzw. vereinfachen Sie.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $5+3 = 8$ | b) | $5x+3x = 8x$ |
| c) | $3+5 = 8$ | d) | $3xy+5yx = 8xy\ (= 8yx)$ |
| e) | $5-3 = 2$ | f) | $5x^2-3x = 5x^2-3x\ (= x(5x-3))$ |
| g) | $-3+5 = 2$ | h) | $-3x+5x = 2x$ |
| i) | $-5-3 = -8$ | j) | $-5x-3x = -8x$ |
| k) | $-3-5 = -8$ | l) | $-3x-5x = -8x$ |
| m) | $5*3 = 15$ | n) | $5*3x = 15x$ |
| o) | $-5*3 = -15$ | p) | $-5x*3x = -15x^2$ |
| q) | $5*(-3) = -15$ | r) | $5a*(-3b) = -15ab$ |
| s) | $-5*(-3) = +15$ | t) | $-5a*(-3ab) = +15a^2b$ |

***Faktorisieren* $\Leftrightarrow$ *Ausmultiplizieren***

Faktorisieren sie folgenden Term und Sie und kontrollieren Sie anschließend ihr Ergebnis, indem sie es wieder ausmultiplizieren.

$12ab-3a+18abc = 3a(4b-1+6bc) = 12ab-3a+18abc$

**Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich**

Berechnen Sie folgende Terme:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $6+4*3 = 18$ | b) | Verdreifachen sie die Summe von 6 und 1: $3(6+1) = 21$ |
| c) | $6-5(4x-1) = 11-20x$ | d) | $5-3(x-4)^2 = -3x^2+24x-43$ |
| e) | $5-3(4x-1)^2 = -48x^2+24x+2$ | f) | $5-3(4x-1)^2-8 = -48x^2+24x-6$ |
| | $2^{4^3} \neq 2^{12}$ | | |

**Binomische Formeln**

Formen Sie mithilfe der binomischen Formeln um, falls möglich.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $(3x-5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$ | b) | $\left(\frac{3}{8}x+4\right)^2 = \frac{9}{64}x^2 + 3x + 16$ |
| c) | $\frac{4(a^2-2ac+c^2)}{-32c+32a} = \frac{1}{8}(a-c) = \frac{a-c}{8}$ | d) | $\frac{8ax-6bx}{6bx^2-8ax^2} = -\frac{1}{x}$ |
| e) | $49x^2+2xy+\frac{y^2}{49} = \left(7x+\frac{1}{7}y\right)^2$ | f) | $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x-3\right)^2 = \frac{1}{3}x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 9$ |
| g) | $4b+\frac{1}{9}+36b^2 = \left(6b+\frac{1}{3}\right)^2$ | h) | $\frac{1}{36}v^2-\frac{25}{36} = \left(\frac{1}{6}v+\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}v-\frac{5}{6}\right)$ |
| i) | $\frac{2x^2-18y^2}{18y^2+2x^2+12xy} = \frac{x-3y}{x+3y}$ | j) | $\frac{cx+1-x-c}{(c-1)^2} = \frac{x-1}{c-1}$ |
| k) | $\frac{81c^2-1}{9c-1} = 9c+1$ | l) | $x^4-1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ |
| m) | $a^4-18a^2+81 = \left((a-3)(a+3)\right)^2$ | n) | $b^8-2b^4+1 = \left((b-1)(b+1)(b^2+1)\right)^2$ |
| o) | $79^2 = 6241$ | p) | $19 * 21 = 399$ |
| q) | $999^2-1 = 998.000$ | | |

**Brüche**

Berechnen bzw. vereinfachen Sie folgende Terme.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{3}{4}$ | b) | $\frac{n-1}{n+1}-\frac{n+1}{n-1}=-\frac{4n}{n^2-1}$ |
| c) | $\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+1=\frac{7}{4}$ | d) | $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}+\frac{2ab}{a^2-b^2}=\frac{a+b}{a-b}$ |
| e) | $\frac{6}{7}*\frac{7}{3}=2$ | f) | $\frac{1300}{170}*\frac{51}{260}=\frac{3}{2}$ |
| g) | $\frac{5}{12}*4=\frac{5}{3}$ | h) | $\frac{18}{7}:\frac{6}{21}=9$ |
| i) | $\frac{39}{12}:3=\frac{13}{12}$ | j) | $\frac{\frac{36}{2}}{\frac{12}{4}}=6$ |
| k) | $\frac{1}{\frac{1}{y}*x}:\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y}*x^2*\frac{1}{x^3}}=1$ | l) | $\frac{\frac{x}{y}+1}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}=\frac{x}{x-y}$ |
| m) | $\frac{\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}}{1+\frac{b}{a-b}}=-\frac{2b}{a(a+b)}$ | n) | $\frac{1}{x+\sqrt{y}}=\frac{x-\sqrt{y}}{x^2-y}$ |

**Potenzen**

Formulieren Sie folgende Zahlen als Zehnerpotenz.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a) | $1 = 10^0$ | b) | $10 = 10^1$ | c) | $100 = 10^2$ | d) | $1000 = 10^3$ |
| e) | $-10 = -10^1$ | f) | $0{,}1 = 10^{-1}$ | g) | $0{,}01 = 10^{-2}$ | h) | $0{,}001 = 10^{-3}$ |

Wissenschaftliche & technische Schreibweise

Um eine sehr große oder sehr kleine Zahl in **wissenschaftlicher Schreibweise** darzustellen, verschiebt man das Komma so, dass eine Dezimalzahl mit einer Stelle vor dem Komma entsteht. Diese wird dann mit 10 multipliziert. In den Exponenten der 10 schreibt man die Anzahl der Stellen, um die das Komma verschoben wurde.

Bei der **technischen Schreibweise** muss der Exponent der 10 ein ganzzahliges Vielfaches von 3 sein. Daher kann die Dezimalzahl, die mit der 10 multipliziert wird, eine ein- bis dreistellige Zahl (von 1 – 999) sein.

Bei beiden Schreibweisen gilt: Wurde das Komma nach links verschoben ist der Exponent positiv, wurde das Komma nach rechts verschoben ist der Exponent negativ.

Vervollständigen Sie die Tabelle.

| | Zahl | Wissenschaftl. Schreibweise | Technische Schreibweise |
|---|---|---|---|
| a) | 381.000 | $3{,}81 * 10^5$ | $381 * 10^3$ |
| b) | 12.380.000 | $1{,}238 * 10^7$ | $12{,}38 * 10^6$ |
| c) | 1.380.000 | $1{,}38 * 10^6$ | $1{,}38 * 10^6$ |
| d) | 0,00032 | $3{,}2 * 10^{-4}$ | $320 * 10^{-6}$ |
| e) | 0,0000801 | $8{,}01 * 10^{-5}$ | $80{,}1 * 10^{-6}$ |
| f) | 0,0000031 | $3{,}1 * 10^{-6}$ | $3{,}1 * 10^{-6}$ |
| g) | 12.000.000 | $1{,}2 * 10^7$ | $12 * 10^6$ |
| h) | 8.300.000 | $8{,}3 * 10^6$ | $8{,}3 * 10^6$ |
| i) | 123.400.000 | $1{,}234 * 10^8$ | $123{,}4 * 10^6$ |
| j) | 0,000015 | $1{,}5 * 10^{-5}$ | $15 * 10^{-6}$ |
| k) | 0,01683 | $1{,}683 * 10^{-2}$ | $16{,}83 * 10^{-3}$ |

Vereinfachen Sie

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $x^2 * x^3 = x^5$ | b) | $\frac{n^7}{n^4} = n^3$ |
| c) | $a^{3x+1} = a^{3x} * a$ | d) | $x^3 * x^{-2} = x$ |
| e) | $a^{3x-1} = a^{3x} * \frac{1}{a} = \frac{a^{3x}}{a}$ | f) | $a^{-(3x-2)} = \frac{a^2}{a^{3x}}$ |
| g) | $x^{x-y} * x^{2y} = x^{x+y} = x^x x^y$ | h) | $a^{3+3x} * a^{2+y} = a^5 a^{3x} a^y$ |
| i) | $(-a)^4 + (-2c)^3 * 3b^3 + (-3a)^4$ <br> $= 82a^4 - 24c^3b^3$ | j) | $\left(\frac{12}{5}abc\right) * \left(\frac{15}{4}a^3bc^2\right) * \left(\frac{4}{6}a^2b^3c^{8-4}\right)$ <br> $= 6\,a^6b^5c^7$ |
| k) | $\frac{a^3 * b * (a * b)^{-4}}{a^2 * b^{-2} * a^{-3}} = \frac{1}{b}$ | l) | $\frac{a^{x-1} * b^{n+1} + a^x b^n + a^{x+1} b^{n-2}}{a^{x-1} b^{n-2}}$ <br> $= b^3 + ab^2 + a^2$ |
| m) | $\frac{(ax + ay)^{n+1} b^n}{(abx + aby)^{n-1}} = ba^2(x+y)^2$ | n) | $\left(\frac{a^{-4}b^{-5}}{x^{-1}y^3}\right)^2 * \left(\frac{a^{-2}x}{b^3y^2}\right)^{-3} = \frac{1}{a^2bx}$ |
| o) | $\frac{18x^{a+4}}{y^{5a+7}} : \frac{3x^{7-3a}}{2y^{8+5a}} = 12yx^{4a-3}$ | p) | $\frac{((2x^5 * y^{-4})^{-3})^{-2}}{(2x^4 * y^{-4})^2 * (4xy^2)^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^{20}$ |
| q) | $\frac{(2x^{3+m})^4}{(3y^m)^2} * \frac{9y^{4+m}}{20(x^m)^3} = \frac{4}{5}x^{12+m} * y^{4-m}$ | r) | $\frac{\frac{1}{35}(7xy^2)^5}{(49x^2y^5)^2} = \frac{1}{5}x$ |
| s) | $\frac{x^{2n} - 121}{x^{2n} - 22x^n + 121} = \frac{x^n + 11}{x^n - 11}$ | t) | $\frac{x^{2+n} + x^n - 2x^{n+1}}{(x-1)^2} = x^n$ |
| u) | $\frac{10^6}{5^4 * 5^2} : 2^4 = 4$ | | |

Zeigen Sie an einem Beispiel, dass Kürzen auf folgendem Potenzgesetz basiert:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Folgende Aussagen sind falsch. Begründen Sie warum und korrigieren Sie sie.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $(a-b)^2 = a^2 - b^2$ | b) | $a^2 + a^3 = a^5$ |
| c) | $a^3b^4 = (ab)^7$ | d) | $a^{m^n} = a^{m*n}$ |

Vereinfachen Sie und schreiben Sie das Ergebnis auch als Potenz

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ | b) | $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ |
| c) | $\frac{3}{\sqrt{x}} = 3x^{-\frac{1}{2}}$ | d) | $\frac{3}{4\sqrt{x}} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}$ |
| e) | $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ | f) | $\sqrt[3]{x^3} = x$ |
| g) | $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ | h) | $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{-\frac{2}{3}}$ |
| i) | $\sqrt{0{,}6049382716} = siehe\ j)$ | j) | $\sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{7}{9}$ |
| k) | $\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}}}{\sqrt[6]{3}} = 3^{\frac{1}{3}}$ | l) | $\sqrt[3]{\frac{54c^2}{2c * c}} = 3$ |
| m) | $\sqrt[3]{\frac{x}{30x - 3x}} = \frac{1}{3}$ | n) | $\sqrt[2n+1]{a^{4n^2-1}} = a^{2n-1}$ |
| o) | $\frac{3a}{\sqrt{3a}} = \sqrt{3a} = (3a)^{\frac{1}{2}}$ | p) | $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{2n-4} \left(\sqrt[n]{a}\right)^{3n+2} \left(\sqrt[n]{a}\right)^{2-4n} = a$ |
| q) | $\sqrt{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[2n]{a} = a^{\frac{1}{2n}}$ | r) | $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^6}} = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ |
| s) | $\sqrt{r\sqrt{r\sqrt{r}}} = \sqrt[8]{r^7} = r^{\frac{7}{8}}$ | | |

**Logarithmen**

Berechnen Sie / Vereinfachen Sie / Formen Sie um:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $log_2(8) = 3$ | b) | $log_2(16) = 4$ |
| c) | $log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$ | d) | $log_9(3) = \frac{1}{2}$ |
| e) | $log_{10}(0{,}01) = -2$ | f) | $log_3(\sqrt{81}) = 2$ |
| g) | $log_3\left(\frac{1}{\sqrt{81}}\right) = -2$ | h) | $log_{318}(1) = 0$ |
| i) | $e^{\ln x} = x$ | j) | $\ln(e^x) = x$ |
| k) | $\ln(a^2) = 2\ln(a)$ | l) | $\frac{1}{2}\ln(a^2) = \ln(a)$ |
| m) | $ln\left(\sqrt{e}^3\right) = \frac{3}{2}$ | n) | $\ln(\sqrt{e})^3 = \frac{1}{8}$ |
| o) | $ln\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}} = -\frac{1}{3}$ | p) | $ln\sqrt{e^{3(\ln e^2+\ln e^6)}} = 12$ |
| q) | $\lg(x) - \lg(3) = \lg\left(\frac{x}{3}\right)$ | r) | $\lg(2a) + \lg\left(\frac{1}{2a}\right) = 0$ |