1.1.1 Aussagenlogik

Eine Aussage ($12 = 3 * 4; 10 = 3 * 5; Es\ regnet. Nicht\ aber: 5 - 2; Hallo!$) kann wahr oder falsch sein. Aussagen können verschieden miteinander durch **Junktoren** verknüpft werden:

- **Negation** (Die Negation zu einer Aussage A ist „Nicht-A": (Notation: $\neg A$ oder $\bar{A}$).
- **Konjunktion** (Die Aussagenverknüpfung "$A\ und\ B$" ($A \wedge B$) ist dann wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind.)
- **Disjunktion** (Die Aussagenverknüpfung "$A\ oder\ B$" ($A \vee B$) ist wahr, wenn mindestens eine Teilaussage wahr ist)
- **Implikation** (Die Aussagenverknüpfung "$Wenn\ A, dann\ B$"[1] ($A \Rightarrow B$) ist falsch, wenn die erste Teilaussage wahr ist, aber die zweite falsch. (Bsp.: Wenn es regnet, habe ich meine Regenjacke an)
- **Äquivalenz** (Die Aussagenverknüpfung "$Genau\ dann, wenn$ ($A \Leftrightarrow B$) ist wahr, wenn beide Teilaussagen wahr oder beide falsch sind.

Negation

A	$\neg A$
w	f
f	w

Konjunktion

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Disjunktion

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Äquivalenz

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Implikation

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

In aussagenlogischen Beweisen gilt (ähnlich wie die Punkt-vor-Strich-Regel) folgende Konvention:

$$\neg\ vor\ \wedge\ vor\ \vee\ vor\ \Rightarrow\ vor\ \Leftrightarrow$$

Eine Negationsverknüpfung bindet also zwei Aussagen stärker aneinander als ∧ , die wiederum stärker bindet als ∨ usw.

[1] Es handelt sich hier nicht um ein kausales „Wenn …, dann“

Beispiel: *Beweisen Sie folgende Aussage:* $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
w	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	w
f	w	f	w	f	f	w
f	f	w	w	w	w	w

1.1.2 Prädikatenlogik

Neben den Junktoren der Aussagenlogik gibt es in der Prädikatenlogik **Quantoren** als logische Verknüpfungen:

- **Allquantor**: $\forall x.$ Für alle x gilt …
  $\neg\forall x.$ Nicht für alle x gilt …
- **Existenzquantor:** $\exists x.$ Es gibt (mindestens) ein x, für das … gilt.
  $\neg\exists x.$ Es gibt kein x, für das gilt …

Dementsprechend bedeutet:

$\forall x.\ A(x)$ Für alle x gilt die Aussage $A(x)$

$\exists x.\ A(x)$ Es gibt (mindestens) ein x, für das die Aussage $A(x)$ gilt.

$\neg\forall x.\ A(x)$ Nicht für alle x gilt die Aussage $A(x)$

$\neg\exists x.\ A(x)$ Es gibt kein x, für das die Aussage $A(x)$ gilt.

Beispiel:

$A(x) \Leftrightarrow x^2 < 2^x$

$\forall x{:}\,\mathbb{N}_0.\ \mathrm{x}^2 < 2^{\mathrm{x}}$ Für alle x aus $\mathbb{N}_0$ gilt: $\mathrm{x}^2 < 2^{\mathrm{x}}$ (falsch)

$\exists x{:}\,\mathbb{N}_0.\ \mathrm{x}^2 < 2^{\mathrm{x}}$ Es existiert (mindestens) ein x aus $\mathbb{N}_0$, für das gilt: $\mathrm{x}^2 < 2^{\mathrm{x}}$ (wahr)

$\forall x{:}\,\mathbb{N}_0.\ x > 4 \Rightarrow\ \mathrm{x}^2 < 2^{\mathrm{x}}$ Für alle x aus $den\ natürlichen\ Zahlen\ größer\ als\ 4$ gilt: $\mathrm{x}^2 < 2^{\mathrm{x}}$

Zieht man das Negationszeichen vor die Aussage, so muss der Quantor gewechselt werden.

$\neg\forall x.\ A(x) \Leftrightarrow \exists x.\neg A(x)$ „Nicht für alle x gilt $A(x)$“ ist das gleiche wie „Es existiert mindestens ein x für das $A(x)$ nicht gilt.“

$\neg\exists x.\ A(x) \Leftrightarrow \forall x.\neg A(x)$ „Es existiert kein x, für das $A(x)$ gilt.“ ist das Gleiche wie „Für alle x gilt $A(x)$ nicht.