

Vorkurs Mathematik

Gleichungen

Kreuzweises Multiplizieren

- Gleichungsform: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens steht **ein** Bruch)
- **Ziel:**
 - gesuchte Größe soll: 1. Im Zähler stehen
 - 2. auf dieser Gleichungsseite alleine sein
- „Spielregeln“:
 - Alle Größen dürfen **schräg / diagonal** über das Gleichheitszeichen auf die andere Seite „verschoben“ werden.
 - Summen oder Differenzen müssen vor dem „Verschieben“ eingeklammert werden.

Beispiel:

(Stellen Sie folgende Formeln nach den jeweils gesuchten Größen um¹)

$$A_t = \frac{K_0 B_t}{B_g};$$

$$B_g = \frac{K_0 B_t}{A_t}$$

$$A_t = \frac{K_0 - S}{n};$$

$$S = K_0 - n A_t$$

$$t = \frac{2s(a_2 - a_1)}{a_1 a_2};$$

$$a_1 = \frac{2s a_2}{a_2 t + 2s}$$

$$U_{ges} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3};$$

$$C_2 = \frac{Q_2}{U_{ges} - U_1 - U_3}; \quad \left(U = \frac{Q}{C} \right)$$

$$A = K_0 \frac{q^n i}{q^n - 1};$$

$$K_0 = \frac{A(q^n - 1)}{q^n i};$$

$$q = \sqrt[n]{\frac{A}{A - K_0 i}}; \quad n = \log_q \left(\frac{A}{A - K_0 i} \right)$$

¹ Ohne dabei Doppelbrüche zu verwenden.

Lineare Gleichungen

1. Auf beiden Gleichungsseiten **zusammenfassen**
2. **Sortieren**: Alle „ x “ durch Äquivalenzumformung / Anwenden der Gegenrechnung auf eine Seite (am besten auf die Seite, auf der der Koeffizient vor dem x positiv ist) bringen; alle anderen Summanden (ohne x) auf die andere Seite.
3. Durch den Koeffizienten (Faktor) vor dem x **dividieren** (oder kreuzweise multiplizieren).

Beispiel: $7 - 3(4x - 5) + 3x - 14 = 8 - (x + 1) + 4x + 16$

$$x = -\frac{5}{4}$$

Quadratische Gleichungen

- **Reinquadratische Gleichungen**: x kommt nur² als x^2 vor:

$$x^2 = 9 \quad | \sqrt{}$$

$$\pm x = 3$$

$$x_{1/2} = \pm 3$$

- **Gemischt quadratische Gleichungen**: x kommt sowohl als x als auch als x^2 vor.

- **Lösungsformeln**:

Name der Lösungsformel	Lösungsformel	benötigte Gleichungsform
pq-Formel	$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	$x^2 + px + q = 0$
abc- / Mitternachtsformel	$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$ax^2 + bx + c = 0$

- **Quadratische Ergänzung**:

Umformen einer gemischt quadratischen Gleichung von der Normalform $ax^2 + bx + c$ in die Form $a(x - x_s)^2 + y_s$.

Dabei gilt: $x_s = -\frac{b}{2a}$ & $y_s = ax_s^2 + bx_s + c$

Dann löst man die Gleichung $a(x - x_s)^2 + y_s = 0$

Beispiel: $3x^2 - 4x = 4$; $x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{2}{3}$

² Falls „einfache“ x vorkommen, „heben“ sie sich gegenseitig auf.

- **Satz vom Nullprodukt:**

Die Gleichung beinhaltet keine „nackten“ Zahlen³:

1. Ausklammern
2. Satz vom Nullprodukt anwenden: jeden Faktor gleich Null setzen und lösen

Beispiel:

$$12 + 8x^2 + 3x = 12; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = -\frac{3}{8}$$

➤ **Biquadratische Gleichungen** ($ax^4 + bx^2 + c = 0$)

1. Überführen in eine quadratische Gleichung mittels **Substitution**

(z. B. $u = x^2$; $u = x^3$; $u = e^x$; $u = \sin(x)$; usw.)

2. Lösen der substituierten quadratischen Gleichung

3. **Rücksubstitution** (Auflösen der Substitutionsgleichung nach x)

Beispiel:

$$-3x^2 = 4 - x^4$$

Beispiele:

a)	$x^2 = 81; \quad x_{1/2} = \pm 9$	b)	$x^2 + 36 = 100$
c)	$3x^2 = 125; \quad x_{1/2} = \sqrt{\frac{125}{3}} = \pm \frac{5}{3}\sqrt{15}$	d)	$4x^2 - 44 = 100; \quad x_{1/2} = \pm 6$
e)	$\frac{9}{5}x^2 - 3 = 2; \quad x_{1/2} = \pm \frac{5}{3}$	f)	$x^2 + 250 = 25; \quad x_{1/2} = \{ \quad \} \text{ für } x \in \mathbb{R}$
	$x^4 - 13x^2 + 36 = 0;$ $x_{1/2} = \pm 2; \quad x_{3/4} = \pm 3$		$3x^6 + 21x^3 = 24;$ $x_1 = -2; \quad x_2 = 1;$
	$3x^3 - 8 - 5x^2 = -8;$ $x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{5}{3};$		$x(x^2 - 8)(x - 3) = 0;$ $x_1 = 0; \quad x_{2/3} = \pm\sqrt{8}; \quad x_4 = 3$
	$(2x + 1)(2x - 1) - x(x - 2) = (x - 5)^2 + 6$	$x_1 = 8; \quad x_2 = -2$	
	$11 + (3x + 1)^2 + x(5 - 4x) = (6x + 2)\left(\frac{x}{2} - 1\right)$	$x_1 = -1; \quad x_2 = -7$	

³ Falls doch „nackte“ Zahlen vorkommen, heben sie sich gegenseitig auf

Potenzgleichungen

a)	$2x^3 - 50 = 200; \quad x = 5$	b)	$2,5x^3 = \frac{4}{25}; \quad x = \frac{2}{5}$
c)	$-2x^3 - 50 = 200; \quad x = -5$	d)	$2,5x^3 = -\frac{4}{25}; \quad x = -\frac{2}{5}$
e)	$8x^{101} + 12 = 4; \quad x = -1$	f)	$8x^6 = 8 - 63x^3; \quad x_1 = -2; \quad x_2 = \frac{1}{2}$

Bruchgleichungen

- Multiplizieren der Gleichung mit dem **Hauptnenner**

Beispiele:

a) $\frac{3(x-2)}{x+2} - \frac{1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x^2+2x}; \quad x_1 = 3; \quad x_2 = -\frac{1}{2}$

b) $\frac{x-3}{x+3} + \frac{3x}{x^2-9} = -1; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{3}{2}$

c) $\frac{x+4}{6x} - \frac{1}{2} = \frac{6-x}{3x^2+12x}; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = -2$

d) $\frac{x+7}{2x-4} = \frac{3x-6}{8} - \frac{1}{2}x; \quad x = -4$

e) $\frac{x+3}{x} + \frac{3}{x-3} = \frac{9}{x^2-3x}; \quad x = -6$

f) $\frac{15}{x^2+3x} - \frac{2x+1}{x+3} = \frac{x+3}{x}; \quad x = \frac{2}{3}$

g) $\frac{(2x-11)(-x-1)}{2x^2-2} - \frac{2x+1}{x-1} = \frac{-x}{2x-2}; \quad x = \frac{9}{5}$

Gleichungen 3. & höheren Grades

- evtl. Substitution (z. B. bei $ax^6 + bx^3 + c = 0$)
- Ausklammern
- **Linearfaktorzerlegung** durch **Polynomdivision**
- Linearfaktorzerlegung durch **Horner-Schema**
- } & Anwenden des **Satzes vom Nullprodukt**
- Die Potenzen des Polynoms müssen in absteigender Reihenfolge sortiert sein.
 - „Fehlende“ Potenzen müssen mit einer 0 im Horner-Schema berücksichtigt werden.

Beispiel:

$$3x^3 + 12x^2 - 33x = 90; \quad (x_1 = -2); \quad x_2 = -5; \quad x_3 = 3;$$

Exponentialgleichungen

1. Gleichung so umformen, dass zumindest auf einer Seite nur noch ein Summand übrig ist (und zwar der mit dem variablen Exponenten)
2. Logarithmieren

Beispiel:

$$3^x + 9 \cdot 3^{-x} = 10; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 2$$

$$2 \cdot 3^x + 9^x = 27^x; \quad x_1 = \log_3(2); \quad x_2 = \text{keine Lösung}$$

Logarithmengleichungen

1. Gleichung so umformen, dass zumindest auf einer Seite nur noch ein Summand übrig ist (und zwar der mit dem Logarithmus)
2. Märchen vom verschwundenen Logarithmus.

Beispiele:

$$\text{a) } \lg(4) - 3 = -\lg(x); \quad x = 250$$

$$\text{b) } \lg(2x + 1) - \lg(x) - 3 = 0; \quad x = \frac{1}{998}$$

$$\text{c) } \log_7(x^2 - 2x + 1) = 2; \quad x_1 = 8; \quad x_2 = -6$$

$$\text{d) } \frac{1}{2} \lg^2(x) + \frac{3}{2} \lg(x) - 2 = 0; \quad x_1 = 10; \quad x_2 = \frac{1}{10.000}$$

$$\text{e) } \ln(\sqrt[3]{x}) + \log_2(x^4) = 2 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2); \quad x = e^{\frac{\ln(64)}{\ln(2)+6}}$$

$$\text{f) } \log_3^2(x) = (\log_3(x^5) - 12) \cdot \log_{\frac{x}{9}}(x); \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 27; \quad x_3 = 81$$

Wurzelgleichung

3. Gleichung so umformen, dass zumindest auf einer Seite nur noch ein Summand übrig ist (und zwar der mit der Wurzel)
4. Quadrieren (allerdings ist Quadrieren keine Äquivalenzumformung; deshalb müssen die ermittelten Lösungen durch Probieren nochmals kontrolliert werden)

Beispiel:

$$\sqrt{15 + 2x} - x = 0$$

Betragsgleichung

1. Ist der Term zwischen den Betragsstrichen positiv, behandelt man die Betragsstriche wie eine **Plusklammer**; ist der Term zwischen den Betragsstrichen negativ, behandelt man die Betragsstriche wie eine **Minusklammer**; befindet sich ein Term mit einer Variablen zwischen den Betragsstrichen muss man eine **Fallunterscheidung** durchführen.

Beispiel:

$$|2x - 3| = 1$$

Ungleichungen

2. Ungleichungen löst man fast genau so wie Gleichungen, allerdings muss man bei bestimmten Äquivalenzumformungen aufpassen:
 - **Multipliziert** (oder dividiert) man die Ungleichung mit einer **negativen Zahl**, so muss man das **Ungleichheitszeichen umdrehen**; multipliziert (dividiert) man mit einem Term, der eine Variable beinhaltet ist eine **Fallunterscheidung** nötig.
 - Weitere „problematische“ Äquivalenzumformungen“:

<https://www.massmatics.de/merkzettel/#15:Ungleichungen>

$$\begin{aligned} 0 &\leq 9 + 3x \\ -9 &\leq 3x \\ -3 &\leq x \end{aligned}$$

Rechenschritte anzeigen

Und hier steht dasselbe wie eben: x ist größer oder gleich -3 : $x \geq -3$.

Wichtig

Bei Gleichungen muss man bei bestimmten Umformungen aufpassen, sei es weil man eventuell auf zusätzliche aber falsche Lösungen kommt (etwa wenn man beide Seiten potenziert/quadratiert) oder weil man mehrere Lösungen bekommt (beim Wurzel Ziehen).

Diese Umformungen sind auch bei Ungleichungen mit Vorsicht zu genießen, wie die nächsten beiden Beispiele zeigen.

Grundsätzlich kannst du dir merken:

1. Potenzierst du beide Seiten mit einer geraden Zahl (quadrieren z.Bsp.) dann dreht sich das Ungleichheitszeichen in folgenden Fällen um:
 - Beide Seiten sind negativ
 - Eine Seite ist negativ und vom Betrag her größer als die andere Seite
2. Ziehst du die Wurzel, bekommst du eine positive und eine negative Lösung. Bei der negativen Lösung musst du das Ungleichheitszeichen umdrehen (siehe Bsp. 2)
3. Potenzierst du beide Seiten mit einer negativen Zahl, so dreht sich das Ungleichheitszeichen um solange beide Seiten positiv sind (siehe Beispiel 3)
4. Nimmst du den Logarithmus bleibt das Ungleichheitszeichen - es dreht sich jedoch um, wenn die Basis vom Logarithmus kleiner als 1 ist (siehe Beispiel 4 oder [diese Aufgabe](#))

Beispiel:

$$\frac{x-1}{2x-1} < 3$$

Lösen Sie folgende Betragsungleichung:

$$\left| \frac{4x-4}{2x-1} \right| < 3$$

Trigonometrische Gleichungen

1. Umformen bis die Gleichung folgender Form entspricht:

$$\sin(r * x) = h \quad \text{bzw.} \quad \cos(r * x) = h$$

2. Anwenden der entsprechenden Arcusfunktion:

$$r * x = \sin^{-1}(h) \quad \text{bzw.} \quad r * x = \cos^{-1}(h)$$

3. Berücksichtigen von $\sin(x) = \sin(\pi - x)$ bzw. $\cos(x) = \cos(-x)$

4. Hinzufügen der periodischen Lösungen: $\pm k * \text{Periode}; k \in \mathbb{N}; \text{Periode } p = \frac{2\pi}{b}$

Beispiel:

$$2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 3 = 5$$

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 3 = 5$$

Lösen Sie folgende Gleichung:

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) * (3e^x - 1 - 2e^{-x}) * (\ln(4) - \ln(x) + \ln(1)) * \left(-8\sin^2\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + 3\right) = 0$$