Systemtheorie der Sinnesorgane – Übung 3

1 Modell der inneren Haarsinneszelle

In dieser Aufgabe soll das Rezeptorpotential einer inneren Haarsinneszelle bei einer Auslenkung ihrer Stereozilien berechnet werden.

Das elektrische Schaltbild einer inneren Haarsinneszelle (IHC) kann wie folgt vereinfacht modelliert werden:

$$g_a(t) = \frac{G_{\max}}{\left[1+\exp\left(\frac{x_0 - x_{\mathrm{st}}(t)}{S_{x0}}\right)\right]\cdot\left[1+\exp\left(\frac{x_1 - x_{\mathrm{st}}(t)}{S_{x1}}\right)\right]}$$

$$i_{\mathrm{rez}}(t) = (EP - u_{\mathrm{IHC}}(t))\cdot g_a(t)$$

$$i_b(t) = (V_0 - u_{\mathrm{IHC}}(t))\cdot G_b$$

$$\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{IHC}}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{i_{\mathrm{rez}}(t) + i_b(t)}{C_m}$$

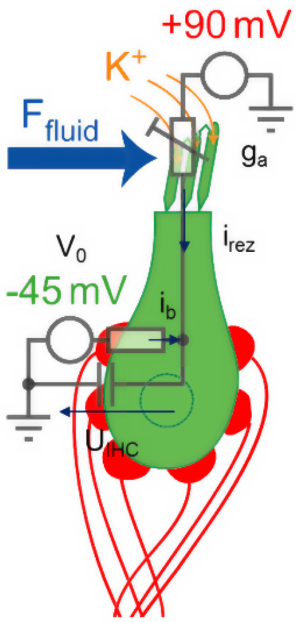

Abbildung 1 – Ersatzschaltbild einer IHC

Die Matlab-Vorlage definiert schon ein sinusförmiges Signal und generiert die Abbildungen. Dort finden Sie ebenfalls die Werte der Parameter.[1] *Hinweis:* Für diese Aufgabe müssen Sie die Differentialgleichung für die Spannung numerisch approximieren, beispielsweise mit dem expliziten Euler-Verfahren, welches in der Vorlesung vorgerechnet wurde.

Generieren Sie Abbildungen für eine Stimulationsfrequenz von 100 Hz und 10 kHz bei einer Auslenkungsamplitude der Stereozilien von 100 nm. Was fällt Ihnen auf?

2 Nichtlinearitäten der IHC

Analysieren Sie bei einem Sinuston das Eingangs- und Ausgangssignal bei einer Frequenz von 200 Hz mit einer DFT, wie in den vorigen Übungen. Plotten Sie das Amplitudenspektrum mit linearen Achsen. Hören Sie sich die Ausgangssignale $g_a(t)$ und $u_{\mathrm{IHC}}(t)$ über die Kopfhörer an. Wo sind Unterschiede zu linearen Systemen? *Hinweis:* Hier ist es für die Frequenz-Analyse sinnvoll, keine Nullen an das Signal anzuhängen.

3 Numerik

Testen Sie Ihre Lösung mit einem 200 Hz Sinuston bei einer verringerten Abtastrate von zum Beispiel 2500 Hz. Konvergiert Ihre Lösung? Bitte berechnen Sie analytisch

[1] Die Vorlage wurde modifiziert nach David C. Mountain, Boston University. Beachten Sie, dass im englischsprachigen Raum Potentiale mit V und nicht mit U bezeichnet werden. u_{IHC} ist daher V_m.

wie hoch Sie die Abtastfrequenz ansetzen müssen, damit die Lösung der Differenzialgleichung sicher konvergiert. *Hinweis:* Welche Werte kann g_a annehmen? Lassen Sie sich $g_a(x_{\mathrm{st}})$ plotten (nicht $g_a(t)$!) und nehmen Sie den Worst-Case an.

Viel Erfolg!

Zur numerischen Stabilität von Differentialgleichungen Hilfe zur Aufgabe 3

Gegeben sei folgende Differentialgleichung (in diesem Kontext auch Testgleichung von Dahlquist genannt), die numerisch gelöst werden soll:

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda x(t), \quad \lambda > 0$$

In erster Näherung kann die Differentialgleichung anhand des expliziten oder vorwärts Euler-Verfahrens diskretisiert werden:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = -\lambda x_n$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = (1 - \lambda \Delta t)\, x_n$$

Durch Iteration kann die numerische Lösung für alle n gegeben werden:

$$x_n = x_0 \cdot (1 - \lambda \Delta t)^n$$

Die analytische Lösung der DGL lautet $x(t) = x_0 \exp(-\lambda t)$, und daher erwarten wir $x_n \to 0$ für $n \to \infty$. Die numerische Lösung dieser Differenzialgleichung wird aber *nicht* konvergieren, wenn $|1 - \lambda \Delta t| \geq 1$ gilt, was die wählbaren Werte von Δt beschränkt.

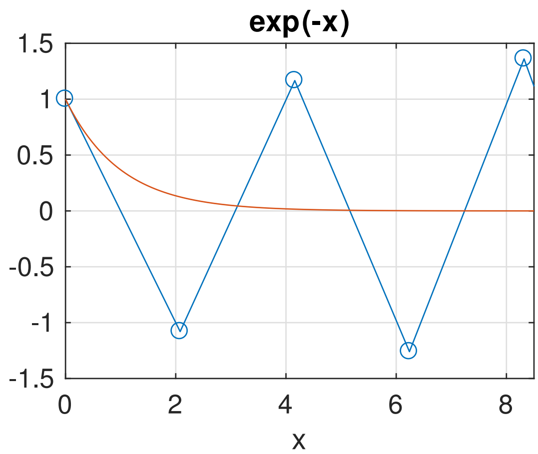

Abbildung 2 – *Rot*: bekannte Lösung der DGL für $\lambda = 1$. *Blau*: Die numerische Lösung divergiert bei zu großem Δt.