四川大学期末考试试题（闭卷）

（2016——2017 学年第 1 学期） A 卷

课程号：201080030　　课序号：　　课程名称：线性代数（理工）　任课教师：　　　成绩：
适用专业年级：2016 级理工科本科生　　学生人数：　印题份数：　　学号：　　　　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

注：考试时间 120 分钟。 请将答案写在答题纸规定的方框内，否则记 0 分。

一、填空题(每小题 3 分，共 18 分)

1．已知 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\\4&1&3&2\\1&4&3&2\end{bmatrix}$，$A_{ij}$ 为代数余子式，则 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}=$__________.

2．非零三阶方阵 A 满足 $A^2=O$，则其秩 $R(A)=$__________.

3．三阶方阵 A 的特征值为 1, 2，-3，则行列式 $|A^*+4E|=$__________.

4．设 A 为三阶正交矩阵，$\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$，则内积 $(A\alpha,\ A\alpha)=$__________ .

5．已知二次型 $f(x_1,x_2)=(x_1,x_2)\begin{bmatrix}1&6\\0&t\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ 正定，则 t 应满足条件__________.

6．已知 R^2 中一组基（I）为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，另一组基（II）为 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，则由（I）到（II）的过渡矩阵为__________.

二、解答题 （共 66 分）

1．（10 分）已知四阶方阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&0&6&0\\7&8&9&10\\11&0&12&0\end{bmatrix}$，求 A 的行列式。

2.（10 分）已知向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}5 & 6 & 7 & 8\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}9 & 10 & 11 & 12\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}13 & 14 & 15 & 20\end{pmatrix}$，求向量组的秩并找出其所有的极大无关组。

3.（10 分）已知矩阵X满足方程$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & -5\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$，求矩阵$X$。

4. （12 分）已知线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=6\\ 4x_1+5x_2+6x_3+ax_4=b\end{cases}$，请回答下列问题：

（1）方程组是否可能有唯一解，为什么？当参数 a，b 满足什么条件时，方程组无解？

（2）当参数 a，b 满足什么条件时，方程组有无穷多解？请求出此条件下方程组的解集。

5.（12 分）已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3$，

（1）写出二次型的矩阵；

（2）用可逆线性替换将该二次型化为规范形，写出所做的线性替换及变换后的规范形。

6.（12 分）2016 年初成都市的人口总数为 1600 万，其中市区人口 560 万，郊区人口 1040 万。经过调查发现，成都市每年有 3% 的市区人口搬到郊区，有 5% 的郊区人口搬到市区。现假设成都市的总人口保持不变且每年的迁移规律都一样，用$\alpha_0=\begin{pmatrix}560\\ 1040\end{pmatrix}$（单位：万人）表示 2016 年初的人口分布，$n$年以后的人口分布为二维列向量$\alpha_n$，请回答下列问题：

（1）α_1与α_0的关系为$\alpha_1=A\alpha_0$，求二阶方阵A并求出 2017 年初的人口分布α_1；

（2）猜测若干年后成都市人口分布的规律（即n足够大时α_n的极限情况）并证明你的结论。

三、证明题 （共 16 分）

1. （8 分）已知η_0为非齐次线性方程组$AX=\beta$的一个解，X_1,X_2为其导出组的基础解系，$\eta_1=\eta_0+X_1,\ \eta_2=\eta_0+X_2$，证明$\eta_0,\ \eta_1,\ \eta_2$为$AX=\beta$解集的极大无关组。

2. （8 分）已知n阶方阵A满足$A^2-2A-3E=O$，A不是数量矩阵，请判 断A是否可对角化并证明你的结论。