《数论讲义》第一章习题

1. 证明 $6 \mid n(n+1)(2n+1)$，其中 n 是任何整数.

思路：证 $n(n+1)(2n+1)$ 同时被2、3整除.

（法一）

证明: $n, n+1$ 为一奇一偶，则 $n \mid n(n+1)(2n+1)$.

当 $n = 3k$ 时，$3 \mid n(n+1)(2n+1)$.

当 $n = 3k+1$ 时，$2n+1 = 2(3k+1)+1 = 6k+3 = 3(2k+1)$，所以 $3 \mid n(n+1)(2n+1)$

.当 $n = 3k+2$ 时，$n+1 = 3k+2+1 = 3(k+1)$，所以 $3 \mid n(n+1)(2n+1)$.

又因为 $(2,3) = 1$

所以$6 \mid n(n+1)(2n+1)$ 证完

（法二）

证明:

$$n(n+1)(n+2) = n(n+1)[2(n+2)-3].$$

$n, n+1$ 一奇一偶，可被 2 整除，

$n, n+1, n+2$ 中必有一个数被 3 整除，

所以 $n, n+1, [2(n+2)-3]$ 必有一个数被 3 整除

又由 $(2,3) = 1$,

所以 $6 \mid n(n+1)(2n+1)$. 证完

2. 证明:任意 n 个连续整数中$(n \geqslant 1)$, 有一个且只有一个数被 n 除尽.

证明: 设 n 个相邻的整数是 $m, m+1, \cdots, m+n-1$.

令 $m = nq + r_0 (0 \leqslant r_0 \leqslant n-1)$

则 $m + j = nq + (r_0 + j) = nq_j + r_j (0 \leqslant r_j < n, j = 0, 1, \cdots, n-1)$

① 若 $r_0 = 0$, 则 $n \mid m$.

且对 $1 \leqslant j \leqslant n-1$, 有 $n \nmid (m+j)$.

② 若 $r_0 \neq 0$, 则当 $j + r_0 < n$ 时, $r_j = j + r_0$.

当 $j + r_0 \geqslant n$ 时, $r_j = j + r_0 - n$.

此时, 取 $j_0 = n - r_0$, 则 $r_{j_0} = 0$.

有 $n \mid (m + j_0)$.

除此之外,$0 < r_j < n$, 均有 $n \nmid (m+j) (1 \leqslant j < n, j \neq j_0)$.

结论得证. 证完

3. 证明:若 $m-p \mid (mn+qp)$, 则 $m-p \mid (mq+np)$

证明: 因为 $(mn+qp)-(mq+np)=m(n-q)+p(q-n)=(m-p)(n-q)$,

所以 $mq+np=(mn+qp)-(m-p)(n-q)$.

又因为 $(m-p) \mid (mn+qp)$,

$(m-p) \mid (m-p)(n-q)$,

所以 $(m-p) \mid (mn+qp)-(m-p)(n-q)$

即 $(m-p) \mid (mq+np)$. 证完

4. 证明:若 $p \mid (10a-b)$ 和 $p \mid 10c-d$, 则 $p \mid (ad-bc)$.

证明: 因为 $p \mid (10a-b), p \mid (10c-d)$,

所以 $10a-b=mp, 10c-d=np$,

所以 $10a=mp+b$,

$d=10c-np$,

两边相乘, $10ad=(mp+b)(10c-np)$,

所以 $10ad=10mpc-mnp^2+10bc-bnp$

$10ad-10bc=p(10mc-mnp-bn)$

所以 $p \mid 10(ad-bc)$

又因为 p 是素数, $(p,10)=1$

所以 $p \mid (ad-bc)$. 证完

（法二）**证明**: 因为

$$\begin{aligned}&(10a-b)c-(10c-d)a\\&=10ac-bc-10ac+ad\\&=10ad-bc.\end{aligned}$$

且 $p \mid (10a-b), p \mid (10c-d)$

所以$p \mid (10ad-bc)$. 证完

5. 证明:若 $(a,b)=1$, 则 $(a+b,a-b)=1$ 或 2.

证明: 设 $(a+b,a-b)=d$

则 $d \mid a+b, d \mid a-b$

所以 $d \mid (a+b)+(a-b)$

$\qquad d \mid (a+b)-(a-b)$

所以 $d \mid 2a, d \mid 2b$

所以 $d \mid (2a, 2b)$

又因为 $(a,b)=1$

所以 $(2a,2b)=2$

所以 $d \mid 2$

所以 $d=1$ 或 2. 证完

6. 证明:若 $(a,b)=1$, 则 $(a+b, a^2-ab+b^2)=1$ 或 3..

证明: 因为 $a^2-ab+b^2=(a+b)^2-3ab$,

由 $(a,b)=1$, 有 $(a+b, ab)=1$

所以 $(a+b, 3ab)=1$ 或 3.

所以 $(a+b, (a+b)^2-3ab)=1$ 或 3

所以 $(a+b, a^2-ab+b^2)=1$ 或 3. 证完

7. 证明:若方程 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0(n>0, a_i$是整数$, i=1,\cdots,n)$ 有有理数解, 则此解必为整数.

证明: 设 $\alpha=\frac{a}{b}$ 为方程 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 的有理数解

$\quad (a,b)=1$, 且 $b\neq 0$

所以 $\left(\frac{a}{b}\right)^n+a_1\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}+\cdots+a_n=0$

同乘 b^n, 有 $a^n+a_1a^{n-1}b+\cdots+a_nb^n=0$

所以 $a^n=b(-a_1a^{n-1}-\cdots a_nb^{n-1})$

所以 $b \mid a^n$, 假定 $b\neq \pm 1$

则 b 有素因子 p, 由 $p \mid b, b \mid a^n$, 得 $p \mid a^n$

所以 $p \mid a$

但 $(a,b)=1$. 矛盾, 所以 $b=\pm 1$

所以 $\alpha=\pm a$, 即 α 为整数. 证完

8. 证明:

证明: 设 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=n, \quad n$ 是整数

$\therefore \dfrac{ad+bc}{bd}=n,\ \therefore ad+bc=nbd$

$$\therefore \begin{cases} ad=b(nd-c) \\ bc=d(nb-a) \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} b \mid ad \\ d \mid bc \end{cases}$$

又 $\because (a,b)=1,(c,d)=1$

$\therefore b \mid d$ 且 $d \mid b$

$\therefore |b|=|d|.$ 证完

9. 证明:.

证明: 当 $n=1$ 时，$a^2=1,b=1$

当 $n>1$ 时，设 n 的素因数分解式为

$n=p_1^{l_1}p_2^{l_2}\cdots p_s^{l_s}$，其中 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 是不同的素数

设 l_i 被 2 除的商是 q_i，余数是 r_i，

即 $l_i=2q_i+r_i, i=1,2,\cdots,s, \quad r_i=0$ 或 $r_i=1$

$\because n=(p_1^{q_1}p_2^{q_2}\cdots p_s^{q_s})^2p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_s^{r_s}$

令 $a=p_1^{q_1}p_2^{q_2}\cdots p_s^{q_s}, b=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_s^{r_s}$

则 $n=a^2b$，其中 b 无平方因子.

唯一性

设 $n=c^2d$，其中 d 无平方因子，

考察 p_i 的幂指数，用 $p_i(n)$ 表示 n 的素因数分解式中 p_i 的幂指数.

则有 $l_i=p_i(c^2d)=p_i(c^2)+p_i(d)=2p_i(c)+p_i(d)$

$\because d$ 无平方因子

$\therefore p_i(d)=0$ 或 $p_i(d)=1$

$p_i(c),p_i(d)$ 分别为 2 除 l_i 的商和余数

$\therefore p_i(c)=q_i, \quad p_i(d)=r_i$

$\therefore c^2=a^2, \quad \therefore d=b$

$\therefore$ 分解式惟一的.

证完

10. 证明:.

证明: 令 $n=p_1^{l_1}\cdots p_s^{l_s}$

用 2 除 l_i , 有 $l_i=2q_i+r_i, \quad r_i=0$ 或 $1, i=1,2,\cdots,s.$

$\therefore n=(p_1^{q_1}\cdots p_s^{q_s})^2 p_1^{r_1}\cdots p_s^{r_s}$

b^2是 n 的最大平方因子

$\therefore b^2=(p_1^{q_1}\cdots p_s^{q_s})^2$

又 $a^2\mid n$

$\therefore a=p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}$，其中 $\alpha_i\leqslant q_i$，且至少有一个 $\alpha_i\neq q_i$，否则与 b^2 是 n 的最大平方因子矛盾

$\therefore p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}\cdot p_1^{q_1-\alpha_1}\cdots p_s^{q_s-\alpha_s}=p_1^{q_1}\cdots p_s^{q_s}=b$

$\therefore a\mid b.$ 证完

11.

证明: 设 $(x,y)=d$，则 $d\mid x, d\mid y$

$\because m=ax+by, n=cx+dy$

$$\therefore d\mid m, d\mid n \quad \therefore d\mid (m,n) \tag{1}$$

另一方面

$$\begin{cases} dm=adx+bdy \\ bn=bcx+bdy \end{cases};\begin{cases} cm=acx+bcy \\ an=acx+ady \end{cases}$$

分别相减，有 $dm-bn=\pm x;\quad -cm+an=\pm y$

设 $(m,n)=d'$, 则 $d'\mid m, d'\mid n$

$\therefore d'\mid (dm-bn),\quad d'\mid(-cm+an)$

$\therefore d'\mid x,\quad d'\mid y$

$$\therefore d'\mid (x,y) \tag{2}$$

由（1）、（2），得 $d=d'$, 即 $(m,n)=(x,y)$. 证完

12.

证明: 若 $a^n\mid b^n$, 则 $b^n=qa^n, q\in\mathbb{Z}$

设 $(a,b)=d$，则 $a=a_1d, b=b_1d, a_1, a_2\in\mathbb{Z}$

$\therefore (b_1d)^n=(a_1d)^nq$

$b_1^n=a_1^nq\ \ (a_1,b_1)=1$

$\therefore q=\left(\dfrac{b_1}{a_1}\right)^n$

若 $|a_1|>1$，则由 $(a_1^n,b_1^n)=(a_1,b_1)^n=1$

有 $q=\dfrac{b_1^n}{a_1^n}\notin\mathbb{Z}$，矛盾

$\therefore |a_1|=1$，则 $a=\pm d$，$\therefore a\mid b$

证完

（法二）

证明: 设 $a\nmid b$，但 $a^n\mid b^n$

则 $\exists\, p^r\mid a, p^r\mid b$，否则 $a\mid b$

$\therefore a=p^r c, c\in\mathbb{Z}$

$\therefore a^n=(p^r c)^n=p^{rn}c^n$

$p^{rn}\mid a^n, a^n\mid b^n$, $\therefore p^{rn}\mid b^n$

$b^n=mp^{rn}, m\in\mathbb{Z}$

所以每个 b 都包含 r 个 p 因子，矛盾

$a\mid b$ 证完

13.

证明: 设 $a=\prod\limits_{i=1}^{s}p_i^{\alpha_i}, b=\prod\limits_{i=1}^{s}p_i^{\beta_i}$，

$\therefore (a,b)=\prod\limits_{i=1}^{s}p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)}=1,\quad \therefore \min(\alpha_i,\beta_i)=0$

又 $\because ab=c^n, ab=p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)}=c^n=(p_i^{\gamma_i})^n$

$\therefore n\mid(\alpha_i+\beta_i)$

$\therefore n\mid\alpha_i,\beta_i=0$ 或 $n\mid\beta_i,\alpha_i=0$

设 $x=\prod\limits_{i=1}^{s}p_i^{\frac{\alpha_i}{n}}, y=\prod\limits_{i=1}^{s}p_i^{\frac{\beta_i}{n}}$

则 $x^n=a, y^n=b$

且 $ab=x^ny^n=(xy)^n=c^n$

$\therefore c=xy$ 证完

14.

证明: $\because 4(2x+3y)+(9x+5y)=17(x+y)$ 且 $17\mid 17(x+y)$

$\therefore 17\mid 4(2x+3y)\Longleftrightarrow 17\mid(9x+5y)$

$\therefore 17\mid(2x+3y)\Longleftrightarrow 17\mid(9x+5y)$ 证完

（法二）

证明: 设 $u=2x=3y, v=9x+5y$

则 $3v-5u=17x$
若 $17\mid u$，则 $17\mid 3v$
又因为 $(17,3)=1$
所以 $17\mid v$，即 $17\mid(9x+5y)$
若 $17\mid v$，则 $17\mid 5u$
又由 $(17,5)=1$，得 $17\mid u$，即 $17\mid(2x+3y)$. 证完

15.
证明: 先证 $5\nmid m$
因为 $5\mid f(m)$
所以 $5\mid am^3+bm^2+cm+d$
若 $5\mid m$，则 $5\mid d$，矛盾
所以可令 $m=5k+r,r=1,2,3,4$
因为 $1\times 1\equiv 1(\bmod 5),2\times 3\equiv 1(\bmod 5),4\times 4\equiv 1(\bmod 5)$
所以当 $m=5k+1,5k+2,5k+3,5k+4$ 时，n 分别取 $5t+1,5t+3,5t+2,5t+4$
则有 $mn\equiv 1(\bmod 5)$，因此 $5\mid mn-1$
设 $A=am^3+bm^2+cm+d$
  $B=dn^3+cn^2+bn+a$
则有

$$\begin{aligned}An^3-B=&am^3n^3+bm^2n^3+cmn^3-(cn^2+bn+a)\\=&am^3n^3+m^2n^2bn+mncn^2-cn^2-bn-a\\=&a[(mn)^3-1]+bn[(mn)^2-1]+cn^2[mn-1]\\=&(mn-1)[a(m^2n^2+mn+1)+bn(mn+1)+cn^2]\end{aligned}$$

所以 $5\mid An^3-B$
又因为 $5\mid A$
所以 $5\mid B=dn^3+cn^2+bn+a$. 证完

16.
证明: 设 $d=(a,b)$，则 $a=dr,b=ds,(r,s)=1$

用 b 除 $a, 2a, 3a, \cdots, ba$，得
$\frac{dr}{ds}, \frac{2dr}{ds}, \frac{3dr}{ds}, \cdots, \frac{sdr}{ds}, \frac{(s+1)dr}{ds}, \cdots, \frac{2sdr}{ds}, \cdots, \frac{dsdr}{ds}$
即

$$\frac{r}{s}, \frac{2r}{s}, \cdots, \frac{sr}{s}, \frac{(s+1)r}{s}, \cdots, \frac{2sr}{s}, \cdots, \frac{dsr}{d} \tag{1}$$

由 $(r, s) = 1$，知，数列（1）中只有 $\frac{sr}{s}, \frac{2sr}{s}, \cdots, \frac{dsr}{s}$ 是整数
即数列 $a, 2a, \cdots, ba$ 中能被 b 整除的项的个数为 (a, b).

证完

17.

证明: 由 $ac, bc + ad, bd$ 都能被 u 整除，且设 u 有因子 p^r （p 为素数）
则

$$ac = p^r A \tag{1}$$

$$bc + ad = p^r B \tag{2}$$

$$bd = p^r C \tag{3}$$

其中 $A, B, C \in \mathbb{Z}$
$(1) \times (3)$，得 $(bc)(ad) = p^{2r} AC$
所以 bc 和 ad 分解式中必有一个 p 的指数不小于 r
不妨设 $bc = p^t D (t \geqslant r, D \in \mathbb{Z})$
所以 $p^r \mid bc$
由（2），有 $p^r \mid ad$
又由 p^r 的任意性
有 $u \mid bc, u \mid ad$.

证完

18.

证明: 当 a, b 有一个为 0 时，显然成立，现假设 $a, b \neq 0$
因为 $(am, bm) = (|a|m, |b|m)$
$\quad (a, b)m = (|a|, |b|)m$
所以不妨假定 $a, b > 0$
由带余除法，有

$$
\begin{aligned}
&a = q_1 b + r_1,\ \ 0 < r_1 < b \\
&b = q_2 r_1 + r_2,\ \ 0 < r_2 < r_1 \\
&\vdots \\
&r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n,\ \ 0 < r_n < r_{n-1} \\
&r_{n-1} = q_{n+1} r_n + r_{n+1},\ \ r_{n+1} = 0
\end{aligned}
$$

两边同乘 m, 有

$$
\begin{aligned}
&am = q_1(bm) + r_1 m,\ \ 0 < r_1 m < bm \\
&bm = q_2(r_1 m)_1 + r_2 m,\ \ 0 < r_2 m < r_1 m \\
&\vdots \\
&r_{n-2}m = q_n(r_{n-1}m) + r_n m,\ \ 0 < r_n < r_{n-1} \\
&r_{n-1}m = q_{n+1}(r_n m) + r_{n+1},\ \ r_{n+1} = 0
\end{aligned}
$$

所以 $(am, bm) = r_n m = (a,b)m$ 证完

19.

证明: 令 $a = (a_1, \cdots, a_n),\ b = ((a_1, \cdots, a_s), (a_{s+1}, \cdots, a_n))$

$c = (a_1, \cdots, a_s,\ d = (a_{s+1}, \cdots, a_n))$

则 $b = (c,d)$

因为 $a \mid a_i,\ i = 1, \cdots, n$

所以 $a \mid c, a \mid d$, 所以 $a \mid b$ （1）

又因为 $b = (c,d)$

所以 $b \mid c, b \mid d$

又因为 $c = (a_1, \cdots, a_s), d = (a_{s+1}, \cdots, a_n)$

所以 $c \mid a_i i = 1, \cdots, s,\ d \mid a_i, i = s+1, \cdots, n$

所以 $b \mid a_i, i = 1, \cdots n$

所以 $b \mid a$ （2）

由（1），（2）得 $a = b$. 证完

20.

证明: 令 $a=[b_1,\cdots,b_n]$, $b=[[b_1,\cdots,b_s],[b_{s+1},\cdots,b_n]]$

$c=[b_1,\cdots,b_s], d=[b_{s+1},\cdots,b_n]$, 则 $b=[c,d]$

$\because a=[b_1,\cdots,b_n]$

$\therefore b_i \mid a,\ i=1,\cdots,n$

$\therefore c\mid a,\ d\mid a,\quad b\mid a$ （1）

下证 $a\mid b$

$\because b=[c,d]$

$\therefore c\mid b, d\mid b$

又 $\because c=[b_1,\cdots,b_s], d=[b_{s+1},\cdots,b_n]$

$\therefore b_i\mid c, i=1,\cdots,s$

$\therefore b_i\mid d, i=s+1,\cdots,n$

$\therefore b_i\mid b, i=1,\cdots,n$

$\therefore a\mid b$ （2）

由（1）、（2）得 $a=b$

证完

21.

证明: 由最大公约数的性质，可得

$(aa',ab',ba',bb')=((aa',ab'),(ba',bb'))$

$\because (aa',ab')=a(a',b')=ad'$

$(ba',bb')=b(a',b')=bd'$

$\therefore (aa',ab',ba',bb')=(ad',bd')=(a,b)d'=dd'$ 证完

22.

证明: $\because d\mid 2n^2$

$\therefore 2n^2=kd, k\in\mathbb{Z}^+$

若 n^2+d 是完全平方数，则 $\exists\, x\in\mathbb{Z}$

使得 $n^2+d=x^2$

$\therefore x^2=n^2+d=n^2+\dfrac{2n^2}{k}$

$\therefore k^2x^2=n^2(k^2+2k)$

k^2x^2 是平方数，n^2 是平方数，则 (k^2+2k) 为平方数.

(这是因为：若 $a,b,c\in\mathbb{Z}^+$ 满足 $a^2=b^2c$

则 c 一定为平方数

可设 p 为任意素数，则

$p(a^2)=p(b^2c)=p(b^2)+p(c)$

$\therefore 2p(a)=2p(b)+p(c)$

$p(a)=p(b)+\frac{1}{2}p(c)$

$\therefore p(c)$ 一定为偶数

又由 p 的任意性，知 c 为平方数.)

但 $k^2<k^2+2k<(k+1)^2$

$\therefore k^2+2k$ 不是平方数，矛盾

n^2+d 不是平方数.

证完

23.

证明: 设 n 的标准分解式为 $n=\prod_{i=1}^{s}p_i^{\alpha_i}$，其中 p_i 是不同的素数，$\alpha_i\in\mathbb{Z}^+,i=1,2,\cdots,s$

$\because [u,v]=n$

u,v 的标准分解式中只能包含素数 $p_1,p_2,\cdots,p_s$

现讨论 p_i 在 u,v 的标分解式中的指数

$\because p_i(n)=\alpha_i$，$[u,v]=n$

$\therefore p_i(u)\leqslant\alpha_i$，$p_i(v)\leqslant\alpha_i$

①$p_i(u)=p_i(v)=\alpha_i$

②$p_i(u)=\alpha_i$，$p_i(v)<\alpha_i$，则 $p_i(v)$ 可取 $0,1,2,\cdots,\alpha_i-1$，共有 α_i 种可能

③$p_i(v)=\alpha_i$, $p_i(u)<\alpha_i$，同理，有 α_i 种可能

p_i 的指数分配共有 $\alpha_i+\alpha_i+1=2\alpha_i+1$ 种可能

对 $i=1,2,\cdots,s$ 在 u,v 的标准分解式中

$p_1,p_2,\cdots,p_s$ 的指数分配有 $(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)\cdots(2\alpha_s+1)$ 种可能

$\therefore$ 满足 $[u,v]=n$ 的数对 $\{u,v\}$ 个数为 $\prod_{i=1}^{s}(2\alpha_i+1)$

另一方面，$n^2=\prod_{i=1}^{s}p_i^{2\alpha_i}$

$\therefore n^2$ 的因数的个数为 $\prod_{i=1}^{s}(2\alpha_i+1)$

即数对 $\{u,v\}$ 适合 $[u,v]=n$ 的对数为 n^2 的因数的个数. 证完

24.

证明: 设 $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ 可约，且设 $(21n+4,14n+3)=d, d>1$

$\because 21n+4=(14n+3)+(7n+1)$

$\therefore d \mid (7n+1)$

又 $\because 14n+3=2(7n+1)+1$

$\therefore d \mid 1$，与 $d>1$ 矛盾

$\therefore$ 对任意自然数 n 都不可约. 证完

25.

证明: 设 (a,b) 为方程 $x^m=y^n$ 的整数解

则 $a^m=b^n$

$\therefore b=(a^m)^{\frac{1}{n}}=(a^{\frac{1}{n}})m$

由 b 是整数且 $(m,n)=1$

$\therefore a^{\frac{1}{n}}$ 也是整数，记 $a^{\frac{1}{n}}=t$，则 $a=t^n$

代入 $a^m=b^n$，得 $(t^n)^m=b^n$

$\therefore (t^m)^n=b^n \quad \therefore b=t^m$

即 $a=t^n, b=t^m$

$\therefore$ 方程 $x^m=y^n$ 的全部整数解可由 $x=t^n, y=t^m$ 给出. 证完

26. **证明**: 由奇+奇=偶，偶+偶=偶，知

当两点对应的横纵坐标的奇偶性一样时，中点为整点

5 个坐标只有 4 种可能

（奇，奇），（奇，偶），（偶，奇），（偶，偶）

由抽屉原理可知，至少有两个坐标奇偶相同

所以必有两点的连线的中点也是整点. 证完

28. **证明**: 设 $v_n=\{1+n,1+2n,\cdots,1+kn,\cdots\}$，其中 $n>2, k=1,2,\cdots$

$\because n>2$

$\therefore n-1\notin v_n, 2n-1\notin v_n$ 且 $n-1$ 与 $2n-1$ 均不可能分解成几个 v_n 中的数的乘积

$\because (n-1)(2n-1)=1+(2n-3)n\in v_n$

$(n-1)^2=1+(n-2)n\in v_n$

$(2n-1)^2 = 1+4(n-1)n \in v_n$
$\therefore (n-1)(2n-1), (n-1)^2, (2n-1)^2$ 都是 v_n 中的不可约数
设 $r=(n-1)^2(2n-1)^2$，则
由 $r=(n-1)^2(2n-1)^2 = 1+(n(2n-3)^2+2(2n-3))n$，得
$r \in v_n$
显然，r 有以下两种方式表示为 v_n 中不可约数的乘积
$r=(n-1)^2(2n-1)^2$
$r=((n-1)(2n-1))((n-1)(2n-1))$
$\therefore$ 存在 $r\in v_n$ 它可用至少两种方式表示为 v_n 中若干不可约数的乘积. 证完

29. **证明**: 设 $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$
$b=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_n^{\beta_n}$
$c=p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}\cdots p_n^{\gamma_n}$，其中 p_i 是素数，$\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ 是非负整数 $i=1,2,\cdots,n$
$\because [a,b]=\prod\limits_{i=1}^{n} p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}$
$(a,b)=\prod\limits_{i=1}^{n} p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)}$
$\therefore$ 只需证 $2\max(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)-\max(\alpha_i,\beta_i)-\max(\beta_i,\gamma_i)-\max(\gamma_i,\alpha_i)$
$=2\min(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)-\min(\alpha_i,\beta_i)-\min(\beta_i,\gamma_i)-\min(\gamma_i,\alpha_i)$
不失一般性，令 $\alpha_i\leqslant\beta_i\leqslant\gamma_i, i=1,2,\cdots,n$
则 $2\max(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)-\max(\alpha_i,\beta_i)-\max(\beta_i,\gamma_i)-\max(\gamma_i,\alpha_i)$
$=2\gamma_i-\beta_i-\gamma_i-\gamma_i=-\beta_i$
$2\min(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)-\min(\alpha_i,\beta_i)-\min(\beta_i,\gamma_i)-\min(\gamma_i,\alpha_i)$
$=2\alpha_i-\alpha_i-\beta_i-\alpha_i=-\beta_i$
$\therefore$ 原式成立. 证完

30. **证明**: 设 $n=p^3$ 或 $n=pq, p,q$ 为素数，$p\neq q$
则 $\prod\limits_{d|p^3, d\neq p^3} d = p\cdot p^2 = p^3$
或 $\prod\limits_{d|pq, d\neq pq} d = pq$
反之，设 $n>1$ 是一个整数，满足
$\prod\limits_{d|n} d = n^2, \prod\limits_{d|n}\frac{n}{d}=n^2$
$\prod\limits_{d|n} n = n^4$ （1）
设 $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_l^{\alpha_l}$ 为 n 的标准分解式

故 $d(n)=(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_l+1)$ 为 n 的因子个数

由（1），得 $n^{d(n)}=n^4$ （2）

由（2），得 $(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_l+1)=4$

$\therefore l=1,\alpha_1=3$ 或 $l=2,\alpha_1=\alpha_2=1$

即 n 为一素数的立方或两不同素数之积. 证完

31. **证明**: 设 $n=p+1\cdots p_s, p_i$ 是素数 $(i=1,2,\cdots,s), p_1<\cdots<p_s$

$\therefore \sigma(n)=(p_1+1)\cdots(p_s+1)$

若 $\sigma(n)=2n$

则 $s=1$ 时，$p_1+1=2p_1$，得 $p_1=1$，矛盾

当 $p_1\geqslant 2$ 时，若 n 是奇数，则有 $4\mid\sigma(n)$，即 $4\mid 2n$，与 n 为奇数矛盾

故 n 是偶数

当 $s=2$ 时，$(p_1+1)(p_2+1)=2p_1p_2$

$\therefore n=6$

当 $s=3$ 时，$\sigma(n)=(2+1)(p_2+1)(p_3+1)=2\cdots 2p_2p_3$

即 $3(p_2+1)(p_3+1)=4p_2p_3$，无解

当 $s>3$ 时，由 $8\mid\sigma(n)$ 得 $4\mid n$，与 n 无平方因子矛盾

$\therefore n=6.$ 证完

32. **证明**: 设 $F_n=2^{2^n}+1,\ n\geqslant 0$

$$\begin{aligned}\because 2^{2^n}-1 =&(2^{2^{n-1}}-1)(2^{2^{n-1}}+1)\\ =&(2^{2^{n-2}}-1)(2^{2^{n-2}}+1)(2^{2^{n-1}}+1)\\ =&\cdots\\ =&(2^{2^1}-1)(2^{2^1}+1)\cdots(2^{2^{n-2}}+1)(2^{2^{n-1}}+1)\\ =&(2^{2^0}-1)(2^{2^0}+1)(2^{2^1}+1)\cdots(2^{2^{n-2}}+1)(2^{2^{n-1}}+1)\\ =&F_0F_1\cdots F_{n-1}\end{aligned}$$

$\because (F_i,F_j)=1(i\neq j)$，即 $F_0,F_1,\cdots,F_{n-1}$ 各至少有一个不同的素因子

$\therefore 2^{2^n}-1$ 至少有 n 个不同的素因数. 证完

33. **证明**: 令 $S=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\cdots+\frac{1}{x+n}$，

可设 $x+i=2^{\lambda_i}l_i, \lambda_i\geqslant 0, 2\nmid l_i, i=0,1,\cdots,n$

由于 $n\in\mathbb{Z}^+$

$\therefore x,x+1,x+n$ 中至少有一个偶数，即至少有一个 i，使 $\lambda_i>0$

设 λ 是 $\lambda_0,\cdots,\lambda_n$ 中最大的数

则不可能有 $k\neq j$，而 $\lambda_k=\lambda_j=\lambda$

否则，设 $0\leqslant k<j\leqslant n, \lambda_k=\lambda_j=\lambda$

$x+k=2^\lambda l_k, x+j=2^\lambda l_j$

$\because x+k<x+j$

$\therefore l_k<l_j$

$\therefore$ 存在偶数 h 使 $l_k<h<l_j$

故在 $x+k<x+j$ 之间有数 $2^\lambda h, 2\mid h$

即可设 $2^\lambda h=x+e=2^{\lambda e}le>x+k=2^\lambda lk$

此时 $\lambda_e>\lambda$，与 l 的最大性矛盾

$\therefore \exists| k, 0\leqslant k\leqslant n$ 使 $x+k=2^\lambda lk, 2\nmid l_k$

设 $l=l_0\cdots l_n$，在 S 两端乘以 $2^{\lambda-1}l$，得

$2^{\lambda-1}lS=\frac{N}{2}+M$ ①

其中 $\frac{N}{2}=2^{\lambda-1}l\frac{1}{x+k}=\frac{2^{\lambda-1}l}{2^\lambda l^k}$

$\therefore N$ 是奇数，其余项均为整数，设它们的和为 M

由①知 S 不是整数

若 S 为整数，则由①

$2^\lambda lS-2M=N$

左端是偶数，右端是奇数，不可能. 证完

34. **证明**: 当 $n=1$ 时，$p_1=2<4$，成立

假设对 $n\leqslant k$ 都成立，即 $p_i<2^{2^i}, i=1,2,\cdots,k$

下证 $p_{k+1}<2^{2^{k+1}}$

令 $N=p_1\cdots p_k+1$，则

$N=p_1\cdots p_k+1\leqslant 2^{2+2^2+\cdots+2^k}=2^{2^{k+1}-2}<2^{2^{k+1}}$

设 p 是 N 的一个素因子

则 $p\neq p_i, i=1,\cdots,k$

$p_{k+1}\leqslant p\leqslant N<2^{2^{k+1}}$ 成立. 证完

35. **证明**: 设 $(2^m-1,2^n+1)=d$

$\therefore$ 可设 $2^m=dk+1,k>0$ ①

$2^n=de-1,e>0$ ②

①、②式分别自乘 n 次和 m 次，有

$$2^{nm}=(dk+1)^n=td+1,t>0$$

$$2^{nm}=(de-1)^m=ud-1,u>0$$

$\therefore (u-t)d=2$

$\therefore d\mid 2$

$\therefore d=1$ 或 2

又 $\because 2^m-1$ 和 2^n+1 都是奇数

$\therefore d=1$ 证完

36. **证明**: 存在 m 的因数与 a 互素，例如 1

用 c 表示 m 的因数中与 a 互素的所有书中的最大数

设 $(a+bc,m)=d$

先证 $d=1$，由 $(a,b)=1,(a,c)=1$，得

$$(a,bc)=1 \tag{1}$$

$$\therefore (d,a)=1,(d,bc)=1 \tag{2}$$

否则 $(d,a)>1$ 或 $(d,bc)>1$

$\therefore (d,a)$ 或 (d,bc) 有素因数

即存在素数 p，使 $p\mid(d,a)$ 或 $p\mid(d,bc)$

而 $d\mid a+bc$

当 $p\mid(d,a)$ 时，$p\mid d,p\mid a$

$\therefore p\mid a+bc,p\mid bc$，与（1）矛盾

当 $p\mid(d,bc)$ 时，同理，与（1）矛盾

$\therefore (d,bc)=1,\therefore (d,c)=1$

另一方面，由 $d\mid m,c\mid m$ 及 $(d,c)=1$，得

$dc \mid m$

又由（2）的 $(d,a)=1,(a,c)=1$ 得 $(a,cd)=1$

由于 c 是 m 的因数中与 a 互素的数中最大的数

$\therefore d=1$（否则 $cd>c$）

即 $(a+bc,m)=1$

对 $k=c+lm,l=0,1,\cdots$，有 $(a+bk,m)=(a+bc+blm,m)=(a+bc,m)=1$

$\therefore$ 有无穷多 k，使 $(a+bk,m)=1$ 证完

37. **证明**: 设 $(a+b,\dfrac{a^p+b^p}{a+b})=d$，则

$a+b=dt,\dfrac{a^p+b^p}{a+b}=ds$

$$\begin{aligned}\therefore d^2st=a^p+b^p=&a^p+(dt-a)^p\\=&d^pt^p-pad^{p-1}t^{p-1}+\cdots+pdta^{p-1}\end{aligned}$$

约去 dt，有

$ds=d^{p-1}t^{p-1}-pad^{p-2}t^{p-2}+\cdots+pa^{p-1}$

$\therefore d\mid pa^{p-1}$ ①

下证 $(d,a)=1$，设 $(d,a)=d_1$，若 $d_1>1$

则存在素数 q，使 $q\mid d_1,q\mid d,q\mid a$

而 $d\mid a+b,\therefore q\mid a+b$

$\therefore q\mid b$，与 $(a,b)=1$ 矛盾

$\because (d,a)=1,\quad \therefore (d,a^{p-1})=1$

由①，得 $d\mid p$

$\therefore d=1$ 或 $p.$ 证完

38. **证明**: 考察裴波那契数列 $\{u_n\}$

$u-1=1u_2=1,u_{n+2}=u_{n+1}+u_n,n=1,2,\cdots,$ （1）

先证 $u_{n+5}>10u_n$, $n\geqslant 2$ （2）

$n=2$ 时，$u_2=1,u_7=13$，（2）成立

设 $n\geqslant 3$ 时，$u_{n+5}=u_{n+4}+u_{n+3}=2u_{n+3}+u_{n+2}=2u_{n+2}+2u_{n+1}=5u_{n+1}+3u_n=8u_n+5u_{n-1}$

$\because u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \leqslant 2u_{n-1}$
$\therefore 2u_n \leqslant 4u_{n-1}$
$\therefore u_{n+5} = 8u_n + 5u_{n-1} > 8u_n + 4u_{n-1} \geqslant 8u_n + 2u_n = 10u_n$
由（2），得 $u_{n+5t} > 10^t u_n, n = 2, 3, \cdots, t = 1, 2, \cdots$ （3）
设 $a = n_0, b = n_1$，由辗转相除法得

$$\begin{aligned} &n_0 = q_1 n_1 + n_2, 0 < n_2 < n_1 \\ &n_1 = q_2 n_2 + n_3, 0 < n_3 < n_2 \\ &\cdots \\ &n_{k-2} = q_{k-1} n_{k-1} + n_k, 0 < n_k < n_{k-1} \\ &n_{k-1} = q_k n_k \end{aligned} \tag{4}$$

$\because q_k \geqslant 2, \therefore$ 由（4），有

$$\begin{aligned} &n_{k-1} = q_k n_k \geqslant 2n_k \geqslant 2 = u_3 \\ &n_{k-2} \geqslant n_{k-1} + n_k \geqslant u_3 + u_2 = u_4 \\ &\cdots \\ &n_1 \geqslant n_2 + n_3 \geqslant u_k + u_{k-1} = u_{k+1} \end{aligned}$$

$\therefore$ 若 $k > 5l$，即 $k \geqslant 5l + 1$，则 $n_1 \geqslant u_{k+1} \geqslant u_{5l+2}$
由（3），有 $u_1 \geqslant u_{5l+2} > 10^l u_2 = 10^l$ （5）
$\because n_1$ 位数是 l
$\therefore$（5）不成立
$\therefore k \leqslant 5l$ 证完

39. **证明**: 反证法 若 $a_1 \leqslant \left[\dfrac{2n}{3}\right] \leqslant \dfrac{2n}{3}$，则 $3a_1 \leqslant 2n$
$\because$ 在不大于 $2n$ 的 $n+1$ 个数 $2a_1, 3a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中
若 $2a_1, 3a_1$ 不与 $a_2, \cdots, a_n$ 中任一个相等，则至少有一个数整除另一个

由于 $2a_1 \nmid 3a_1, 3a_1 \nmid 2a_1$，故可设

$$\begin{aligned} 2a_1 \mid a_j, 2 \leqslant j \leqslant n \quad (1) \\ \text{或 } 3a_1 \mid a_j, 2 \leqslant j \leqslant n \quad (2) \\ \text{或 } a_j \mid 2a_1, 2 \leqslant j \leqslant n \quad (3) \\ \text{或 } a_j \mid 3a_1, 2 \leqslant j \leqslant n \quad (4) \\ \text{或 } a_i \mid a_j, 2 \leqslant i < j \leqslant n \quad (5) \end{aligned}$$

若 $2a_1$ 或 $3a_1$ 与某一 a_j 相等，则可归为（1），（2）情况
由（1），得 $[a_1, a_j] \leqslant [2a_1.a_j] = a_j \leqslant 2n$
由（2），得 $[a_1, a_j] \leqslant [3a_1.a_j] = a_j \leqslant 2n$
由（3），得 $[a_1, a_j] \leqslant [2a_1.a_j] = 2a_1 \leqslant 2n$
由（4），得 $[a_1, a_j] \leqslant [3a_1.a_j] = 3a_1 \leqslant 2n$
由（5），得 $[a_i, a_j] = a_j \leqslant 2n$
与 $[a_i, a_j] > 2n$ 矛盾，故 $a_1 > \left[\dfrac{2n}{3}\right]$ 证完

40. **证明**: 设最大公因数为 d

$$\begin{aligned} \because \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} + \cdots + \binom{2n}{2n} = 2^{2n} \\ \binom{2n}{0} - \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} - \cdots + \binom{2n}{2n} = 0 \\ \therefore \binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \cdots + \binom{2n}{2n-1} = 2^{2n-1} \end{aligned}$$

$\therefore d \mid 2^{2n-1}$
$\therefore$ 可设 $d = 2^{\lambda}, \lambda \geqslant 0$，又设 $2^k \mid n$，下证 $d = 2^{k+1}$
由于 $2^{k+1} \mid \binom{2n}{1}$
$\therefore$ 只需证 $2^{k+1} \mid \binom{2n}{j}, j = 3, 5, \cdots, 2n-1$ （1）
设 $n = 2^k l, 2 \nmid l$
由 $\binom{2n}{j} = \binom{2^{k+1}l}{j} = \dfrac{2^{k+1}l}{j}\binom{2^{k+1}l-1}{j-1}, j = 3, 5, \cdots, 2n-1$

即 $j\binom{2n}{j}=2^{k+1}l\binom{2^{k+1}l-1}{j-1}, j=3,5,\cdots,2n-1$

$\therefore 2^{k+1} \mid j\binom{2n}{j}$

又 $\because j$ 是奇数，即 $2 \nmid j$

$\therefore (2^{k+1},j)=1$

$\therefore 2^{k+1} \mid \binom{2n}{j}$

即 $d=2^{k+1}$ 证完

41. **证明**: 设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是 k 个不同的正整数

则 $a_2-a_1,a_3-a_1,\cdots,a_k-a_1$ 是 $k-1$ 个不同的正整数

由于 $k \geqslant \left[\dfrac{n+1}{2}\right] > \dfrac{n+1}{2}$

$\therefore 2k-1>n$

又 $\because 2k-1$ 个数 $a_1,\cdots,a_k,a_2-a_1,\cdots,a_k-a_1$ 都不超过 n

$\therefore \exists\, 1 \leqslant i<j \leqslant k$，使 $a_j-a_1=a_i$

即 $a_j=a_1+a_i$ 证完