练习选讲一

张起帆

四川大学数学学院

email: qifanzhang@scu.edu.cn

2019年10月30日

内容提要

练习1

证明对正整数a, b, n满足

$$a^n | b^n \implies a | b \tag{1}$$

证

设$a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$，$b = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$

结论$a|b$翻译为：$\alpha_i \leq \beta_i$（对每个i），

条件翻译为：$n\alpha_i \leq n\beta_i$

要证明的翻译为：

$$n\alpha_i \leq n\beta_i \Longrightarrow \alpha_i \leq \beta_i \tag{2}$$

证

设$a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$，$b = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$

结论$a|b$翻译为：$\alpha_i \leq \beta_i$（对每个i），

条件翻译为：$n\alpha_i \leq n\beta_i$

要证明的翻译为：

$$n\alpha_i \leq n\beta_i \Longrightarrow \alpha_i \leq \beta_i \qquad (2)$$

证

设$a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$，$b = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$

结论$a|b$翻译为：$\alpha_i \leq \beta_i$（对每个i），

条件翻译为：$n\alpha_i \leq n\beta_i$

要证明的翻译为：

$$n\alpha_i \leq n\beta_i \Longrightarrow \alpha_i \leq \beta_i \tag{2}$$

证

设$a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$，$b = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$
结论$a|b$翻译为：$\alpha_i \leq \beta_i$（对每个i），
条件翻译为：$n\alpha_i \leq n\beta_i$
要证明的翻译为：

$$n\alpha_i \leq n\beta_i \Longrightarrow \alpha_i \leq \beta_i \qquad (2)$$

练习2

若$(a,b)=1$，$ab=*^n$，则$a=*^n, b=*^n$.

证

设$a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$，$b = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$

条件$(a,b)=1$翻译为：α_i与β_i之一=0（对每个i）

条件$ab = *^n$翻译为：$n|\alpha_i + \beta_i$（对每个i）

结论翻译为：$n|\alpha_i$且$n|\beta_i$（对每个i），

要证明的翻译为：

$$\alpha\beta = 0, n|\alpha+\beta \Longrightarrow n|\alpha, n|\beta \tag{3}$$

证

设$a=p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$，$b=p_1^{\beta_1}\cdots p_r^{\beta_r}$

条件$(a,b)=1$翻译为：α_i与β_i之一=**0**（对每个i）

条件$ab=*^n$翻译为：$n|\alpha_i+\beta_i$（对每个i）

结论翻译为：$n|\alpha_i$且$n|\beta_i$（对每个i），

要证明的翻译为：

$$\alpha\beta=0, n|\alpha+\beta \Longrightarrow n|\alpha, n|\beta \tag{3}$$

证

设$a=p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$，$b=p_1^{\beta_1}\cdots p_r^{\beta_r}$

条件$(a,b)=1$翻译为：α_i与β_i之一=0（对每个i）

条件$ab=*^n$翻译为：$n|\alpha_i+\beta_i$（对每个i）

结论翻译为：$n|\alpha_i$且$n|\beta_i$（对每个i），

要证明的翻译为：

$$\alpha\beta=0, n|\alpha+\beta\Longrightarrow n|\alpha, n|\beta \tag{3}$$

证

设$a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$，$b = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$

条件$(a,b) = 1$翻译为：α_i与β_i之一=0（对每个i）

条件$ab = *^n$翻译为：$n|\alpha_i + \beta_i$（对每个i）

结论翻译为：$n|\alpha_i$且$n|\beta_i$（对每个i），

要证明的翻译为：

$$\alpha\beta = 0, n|\alpha + \beta \Longrightarrow n|\alpha, n|\beta \tag{3}$$

证

设$a=p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$，$b=p_1^{\beta_1}\cdots p_r^{\beta_r}$

条件$(a,b)=1$翻译为：α_i与β_i之一=0（对每个i）

条件$ab=*^n$翻译为：$n|\alpha_i+\beta_i$（对每个i）

结论翻译为：$n|\alpha_i$且$n|\beta_i$（对每个i），

要证明的翻译为：

$$\alpha\beta=0, n|\alpha+\beta \Longrightarrow n|\alpha, n|\beta \tag{3}$$

练习3

对正整数a,b,c，有

$$\frac{(a,b)(b,c)(c,a)}{(a,b,c)^2}=\frac{[a,b][b,c][c,a]}{[a,b,c]^2}$$

分析：设

$$a=p_1^{\alpha_1}\cdots,b=p_1^{\beta_1}\cdots,c=p_1^{\gamma_1}\cdots$$

需证的结论变为对任意非负整数α,β,γ有

$$\min(\alpha,\beta)+\min(\beta,\gamma)+\min(\alpha,\gamma)-2\min(\alpha,\beta,\gamma)=$$
$$\max(\alpha,\beta)+\max(\beta,\gamma)+\max(\alpha,\gamma)-2\max(\alpha,\beta,\gamma)$$

练习3

对正整数a, b, c，有

$$\frac{(a,b)(b,c)(c,a)}{(a,b,c)^2} = \frac{[a,b][b,c][c,a]}{[a,b,c]^2}$$

分析：设

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdots, b = p_1^{\beta_1} \cdots, c = p_1^{\gamma_1} \cdots$$

需证的结论变为对任意非负整数α, β, γ有

$$\min(\alpha,\beta) + \min(\beta,\gamma) + \min(\alpha,\gamma) - 2\min(\alpha,\beta,\gamma) =$$
$$\max(\alpha,\beta) + \max(\beta,\gamma) + \max(\alpha,\gamma) - 2\max(\alpha,\beta,\gamma)$$

练习1

若$m-p|mn+qp$，则$m-p|mq+np$

证

条件改写为$mn + qp \equiv 0 \pmod{m - p}$

结论改写为：$mq + np \equiv 0 \pmod{m - p}$

天生有条件：$m \equiv p \pmod{m - p}$

证

条件改写为$mn + qp \equiv 0 \pmod{m-p}$

结论改写为：$mq + np \equiv 0 \pmod{m-p}$

天生有条件：$m \equiv p \pmod{m-p}$

证

条件改写为$mn + qp \equiv 0 \pmod{m-p}$

结论改写为：$mq + np \equiv 0 \pmod{m-p}$

天生有条件：$m \equiv p \pmod{m-p}$

证

条件改写为$mn + qp \equiv 0 \pmod{m - p}$

结论改写为：$mq + np \equiv 0 \pmod{m - p}$

天生有条件：$m \equiv p \pmod{m - p}$

练习2

若$p|10a-b$和$p|10c-d$，则$p|ad-bc$

证

条件改写为$10a \equiv b \pmod{p}$和
$10c \equiv d \pmod{p}$
结论改写为:: $ad \equiv bc \pmod{p}$

证

条件改写为$10a \equiv b \pmod p$和
$10c \equiv d \pmod p$
结论改写为:: $ad \equiv bc \pmod p$

练习3

证明:对整数x, y有

$$17|2x+3y \iff 17|9x+5y$$

证

改写为

$$3y \equiv -2x \pmod{17} \Longleftrightarrow 5y \equiv -9x \pmod{17}$$

练习4

设$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d, g(x)=dx^3+cx^2+bx+a$，5不整除$d$，证明：若有$5|f(m)$，则存在$n$，有$5|g(n)$

证

取n满足$mn \equiv 1 \pmod 5$，可以验证这样的n符合要求。要求是什么？

$$f(m) \equiv 0 \pmod 5 \Longrightarrow g(n) \equiv 0 \pmod 5$$

证

取n满足$mn \equiv 1 \pmod 5$，可以验证这样的n符合要求。要求是什么？

$$f(m) \equiv 0 \pmod 5 \Longrightarrow g(n) \equiv 0 \pmod 5$$

练习1

证明若$(a,b)=1$，则$(a+b,a-b)=1$或2

证

若$d|a+b, a-b$,

则$d|2a, 2b$

于是：$d|(2a, 2b) = 2$

证

若$d|a+b,a-b$,

则$d|2a,2b$

于是：$d|(2a,2b)=2$

练习2

证明若$(a,b)=1$，则$(a+b,a^2-ab+b^2)=1$或3

证

$$a^2 - ab + b^2 \equiv 3a^2 \pmod{a+b}$$

只需证$(a+b, 3a^2) = 1, 3$，

只需证$(a+b, a) = 1$

证

$$a^2 - ab + b^2 \equiv 3a^2 \pmod{a+b}$$

只需证$(a+b, 3a^2) = 1, 3$，

只需证$(a+b, a) = 1$

练习3

证明$(14n+3, 21n+4)=1$

证

$$3(14n+3)-2(21n+4)=1$$