2022 年春季学期数论第二次小测

1. 给出整数能被 3 整除的判别法. (5 分)
2. 证明：若 $n \equiv 0 \pmod 2$，$a_1,\dots,a_n$ 和 $b_1,\dots,b_n$ 是模数 n 的任意两组完全剩余系，则 $a_1+b_1,\dots,a_n+b_n$ 不是模数 n 的完全剩余系. (10 分)
3. 证明：若 $m>2$，$a_1,\dots,a_{\varphi(m)}$ 为模数 m 的任一缩系，则 $\sum_{i=1}^{\varphi(m)} a_i \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ m)$. (10 分)
4. 求出最小的正整数，它的二分之一是一个整数的平方，它的三分之一是一个整数的三次方，它的五分之一是一个整数的五次方. (10 分)
5. 解同余式组：$x \equiv 1 \pmod 7, x \equiv 3 \pmod 5, x \equiv 5 \pmod 9$. (5 分)
6. 设 p 是素数，k 是整数且 $1 \le k \le p-1$. 证明同余式 $\dfrac{(kp)!}{k!\,p^k} \equiv (-1)^k \pmod p$.

   (10 分)
7. 设 $d(n)$ 是因子函数，证明对每个整数 n，有 $\sum_{k|n} d(k)\mu\left(\dfrac{n}{k}\right)=1$. (10 分)
8. 设 x 为一个实数，证明对正整数 n，有 $\sum_{k=0}^{n-1}\left[x+\dfrac{k}{n}\right]=[nx]$. (10 分)
9. 设 p_1 和 p_2 是任意两个不同的素数，证明对任意素数 p，同余方程 $(x^2-p_1)(x^2-p_2)(x^2-p_1p_2) \equiv 0 \pmod p$ 总有解. (10 分)
10. 证明对任意正整数 n，都有 $\varphi(n)=n\sum_{d|n}\dfrac{\mu(d)}{d}$. (10 分)
11. 证明 $\sum_{d|n}\mu(d)\varphi(d)=0$ 的充要条件是 $n \equiv 0 \pmod 2$. (10 分)