2015秋线代(222)期末参考答案

一、填空题(每空3分，共18分)

① 24　② 3　③ 1　④ 4　⑤ $t\neq 3$　⑥ $\lambda>5$

二、计算题(每题10分，共30分)

1. 解：$A_{11}+2A_{21}+A_{31}+2A_{41}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&6\\1&4&1&2\\2&2&2&2\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1&2&2\\1&-1&-1\\1&2&3\end{vmatrix}=-12$

2. 解：令 $A=\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\-1&0&3\end{bmatrix}$，$A^{-1}=\begin{bmatrix}3&0&2\\-2&1&-2\\1&0&1\end{bmatrix}$，则 $X=\begin{pmatrix}-1&2&0\\3&0&5\end{pmatrix}\begin{bmatrix}3&0&2\\-2&1&-2\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&2&6\\14&0&11\end{bmatrix}$

3. 解：令 $A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T,\alpha_5^T)=\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

故向量组秩为3，极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$，$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4$.

三、解答题(每题12分，共36分)

1. 解：系数行列式 $|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&2\lambda\\1&\lambda&\lambda+1\\2\lambda-1&1&3\lambda-1\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-1)^2$

① 当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq1$ 时，$|A|\neq0$，方程组有唯一解 $\begin{cases}x_1=-(2\lambda+1)/\lambda\\x_2=3\\x_3=-(\lambda+1)/\lambda\end{cases}$

② 当 $\lambda=0$ 时，原方程组增广矩阵 $\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&0&2\\1&0&1&0\\-1&1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&0&2\\0&0&0&-1\end{array}\right)$ 无解.

③ 当 $\lambda=1$ 时，原方程组增广矩阵 $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&2\\1&1&2&2\\1&1&2&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$ 有无穷多解.

其全部解为 $(0,0,1)^T+k_1(2,0,-1)^T+k_2(0,2,-1)^T$.

2. 解：(1) 证明：$B\alpha_1=(A^5-4A^3+E)\alpha_1=(\lambda_1^5-4\lambda_1^3+1)\alpha_1=-2\alpha_1$，即 α_1 是 B 的属于 -2 的特征向量

(2) $B=f(A)=A^5-4A^3+E$，若 λ 为 A 的特征值，则 B 有特征值 $f(\lambda)$. 从而

$f(\lambda_1)=-2$，$f(\lambda_2)=1$，$f(\lambda_3)=1$. 即 B 的全部特征值为 $-2,1,1$.

又 B 为实对称阵，设属于1的特征向量为 $(a,b,c)^T$，由正交性知 $a-b+c=0$.

解得 $\beta_2=(1,0,-1)^T$，$\beta_3=(0,1,1)^T$. 则

B 的属于特征值 -2 的全部特征向量为 $k_1\alpha_1$，$(k_1\neq0)$，属于特征值1的全部特征向量为 $k_2\beta_2+k_3\beta_3$，k_2,k_3 不全为0.

(3) 令 $P=(\alpha_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，则有 $P^{-1}BP=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}=\Lambda$.

则 $B=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/3&-1/3&1/3\\2/3&1/3&-1/3\\1/3&2/3&1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$.