四川大學

本 科 生 课 程 论 文

题　　目 ______________________

课 程 名 ______________________

任课老师 ______________________

学　　院 ______________________

年级专业 ______________________

学生姓名 ______________________

学　　号 ______________________

成　　绩 ______________________

生成函数概述及其在组合数学中的应用

2021141460159 邓钰川

摘要: 生成函数是组合数学中的一个重要理论工具，生成函数以形式幂级数为主要载体，通过对形式幂级数的运算解决计数问题，在解决组合计数问题中既灵活又具有一定的广泛性。本文首先引进形式幂级数及生成函数的概念，然后通过介绍不同种类的生成函数和其主要性质、应用进行论证，并选取特殊计数序列运用生成函数进行求解，致力于体现生成函数这一工具对我们处理组合数学问题的优越性。

关键词: 形式幂级数、普通生成函数、指数生成函数、Dirichlet 生成函数、递推关系、特殊计数序列

1 引言

生成函数产生于 19 世纪初，法国数学家 Pierre-Simon Laplace 率先提出了这一简单又有用的数学方法，它的提出巧妙地将离散数学与连续数学结合起来，为离散数学中特别是当中组合数学的许多问题提供了分析学方法，成为研究组合数学必不可少的工具之一。生成函数作为一种分析求解方法，它的运用非常广泛，其处理问题主要思路是把离散的序列和相应的幂级数联系起来，通过对幂级数之间的运算，来得到相应的离散序列之间的一些性质及其相互关系等。由于生成函数一般以形式幂级数的形式表达，所以有必要先来给出形式幂级数及其生成函数相关的定义以及性质:

定义 1.1 (**形式幂级数** (formal power series)) 对实数域 R 上的数列 $\{a_0, a_1, a_2, ...\}$,x 是 R 上的未定元，表达式 $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...$ 称为 R 上的形式幂级数。x 只是一个抽象符号，一般不需要对 x 赋值，因此不需要考虑收敛性。R 上的形式幂级数全体记作 $R[[x]]$。

在分析学中，幂级数在收敛半径内部必定内闭一致收敛，故而极限、积分、求导与求和可交换。在此，类似地，我们定义生成函数的形式导数. 根据幂级数的性质，只要两个幂级数的收敛半径非零，就可以在某区间内进行加、减、乘、除、求积分、求导等各种运算，而不需要去考虑级数的敛散性。因此，在后面的讨论中，只要在某非零点收敛，我们就不再关心它的收敛域。

定义 1.2 (**形式幂级数的导数** (formal derivative)) 在整环 $R[[x]]$ 上可以定义形式导数,对任意 $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$，定义 $DA(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}$，称 $DA(x)$ 为 $A(x)$ 的形式导数，也记作 $A'(x)$。n 次形式导数可递归地定义为 $D^0A(x) \equiv A(x)$，$D^nA(x) \equiv D\left[D^{n-1}A(x)\right]$ $(n \geq 1)$。形式导数像普通导数一样满足线性性质、Leibniz 法则、链式求导法则。

定理 1.3 在 $R[[x]]$ 中, 求导算子 D 满足性质:

1. $D(\alpha \cdot A(x) + \beta B(x)) = \alpha D(A(x)) + \beta D(B(x))$
2. $D(A(x) \cdot B(x)) = A(x) \cdot D(B(x)) + B(x) \cdot D(A(x))$
3. $D\left(A^n(x)\right) = nA^{n-1}(x) \cdot D(A(x))$

证明 1 1. 由定义可直接验证。

2. 设 $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \in R[[x]], B(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \in R[[x]]$
   则有 $D(A(x)\cdot B(x))=D\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k b_0+a_{k-1} b_1+\cdots+a_0 b_k\right) x^k\right)=D\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j-k} a_i b_j\right) x^k\right)$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot\left(\sum_{i+t=k} a_i b_j\right) x^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i+j=k}(i+j) a_i b_j x^{i+j-1} \\
&=\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=j=k}\left(i a_i x^{i-1}\right) b_j x^j+\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i+j=k}\left(a_i x^i\right)\left(j b_j x^{j-1}\right) \\
&=\left(\sum_{k=1}^{\infty} i a_i x^{i-1}\right) \cdot\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right)+\left(\sum_{t=0}^{\infty} a_i x^i\right) \cdot\left(\sum_{j=1}^{\infty} j b_j x^{j-1}\right) \\
&=A(x) \cdot D(B(x))+B(x) \cdot D(A(x))
\end{aligned}
$$

3. 对 n 用数字归纳法可证

定义 1.4 (**形式幂级数整环（**formal power series ring**）**) 全体形式幂级数的集合为 $R[[x]]$，对任意两个形式幂级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$，以自然的多项式方式定义加法、乘法 $f(x)g(x)=\sum_{n=0}^{n}(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})x^n$，则 $R[[x]]$ 构成一个整环，即无零因子的交换幺环。加法零元是数列 $\{0,0,0,...\}$ 的形式幂级数 0，乘法单位元是数列 $\{1,0,0,...\}$ 的形式幂级数 1

定义 1.5 (**形式幂级数的乘法逆元**) 对整环 $R[[x]]$ 中的任意一个元素 $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 有乘法逆元当且仅当 $a_0 \neq 0$。若 $\widetilde{A}(x)=\sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{a}_k x^k$ 是 $A(x)$ 的乘法逆元，则有 $\widetilde{a}_0=a_0^{-1}$；

$$
\widetilde{a}_k=(-1)^k a_0^{-(k+1)}\begin{vmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{k-1} & a_k \\
a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{k-2} & a_{k-1} \\
0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{k-3} & a_{k-2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & a_1 & a_2 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 & a_1
\end{vmatrix} \quad (k \geq 1)
$$

定义 1.6 (**形式幂级数的复合**) 定义 $R[[x]]$ 中元素 f 的乘方为

$$
f^1=f, f^k=f^{k-1} \times f
$$

在此基础上，定义 $R[[x]]$ 中元素 f, g 的复合为

$$
(f \circ g)(x)=f(g(x))=f_0+\sum_{k=1}^{+\infty} f_k g^k(x)
$$

我们规定 $f \circ g$ 存在当且仅当 f 为有限项或 $g_0=0$，这样就不涉及 R 上的极限了。$\circ$ 满足结合律（$(f \circ g) \circ h$ 和 $f \circ(g \circ h)$ 均存在时），不满足交换律。R 为幺环时 $\circ$ 存在单位元 $1 \times x$。

定义 1.7 (**形式幂级数的复合逆（**compound inversion**）**) 对于满足 $f_0=0$ 且 $f_1 \neq 0$ 的形式幂级数 f，其复合逆为满足 $g(f(x))=f(g(x))=x$ 的形式幂级数 g。由拉格朗日反演可得对于任意整数 n, k 有

$$
n[x^n] f^k=k[x^{n-k}]\left(\frac{x}{g}\right)^n
$$

式中记号 $[x^k] f(x)$ 表示 $f(x)$ 在 x^k 处的系数。

定义 1.8 (**生成函数（**generating function**）**) 生成函数，又称母函数，是一种形式幂级数，其每一项的系数可以提供关于这个序列的信息。生成函数有许多不同的种类，但大多可以表示为单一的形式：

$$
F(x)=\sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{a}_i k_i(x)
$$

其中 $k_n(x)$ 被称为核函数。不同的核函数会导出不同的生成函数，拥有不同的性质。

2 普通生成函数

定义 2.1 (**普通生成函数（**ordinary generating function，OGF**）**) $A(x)$ 也称为序列 $\{a_0, a_1, a_2, ...\}$ 的生成函数，记作 $G\{a_n\}$ 后简称为生成函数

我们再次强调生成函数的收敛仅仅是形式收敛，是不考虑收敛域的。我们所需要的仅仅是级数收敛到的具有封闭形式的和函数，用以导出原函数的简单的达形式。换句话说，若序列 $\{a_n\}$ 有通项公式，那么它的普通生成函数的系数就是通项公式。生成函数的乘积形式往往被利用得更多，更值得我们牢记:

定义 2.2 (**普通生成函数的乘积形式**) 对于两个生成函数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 那么其乘积形式为 $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{n} (\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) x^n$（考虑 x^n，其必定由 $a_k x^k$ 的项与 $b_{n-k} x^{n-k}$ 的项乘积得到，将这样的乘积全部相加即得到系数）

生成函数具有丰富性质, 这里不妨设有两个数列的生成函数为 $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 和 $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ 用以讨论其性质:

性质 2.3 (**向前平移序列**) 若 $b_k = \begin{cases} 0, & k < l \\ a_{k-l}, & k \geq l \end{cases}$，则有 $B(x) = x^l \cdot A(x)$;

性质 2.4 (**向后平移序列**) 若 $b_k = a_{k+l}$，则有 $B(x) = \frac{1}{x^l}\left[A(x) - \sum_{k=0}^{l-1} a_k x^k\right]$；

性质 2.5 (**部分和序列**) 若 $b_k = \sum_{i=0}^{k} a_i$，则有 $B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$;

性质 2.6 (**无穷和序列**) 若 $b_k = \sum_{i=k}^{\infty} a_i$ 收敛，且 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ 收敛, 则有 $B(x) = \frac{A(1) - xA(x)}{1-x}$;

证明 2 因 $A(1) = \sum_{t=1}^{\infty} a_i$ 收敛, 所以 $b_k = \sum_{t=k}^{\infty} a_i$ 存在且 $b_0 = \sum_{1=0}^{\infty} a_i = A(1)$

$$b_{k-1} - b_k = \sum_{i=k-1}^{\infty} a_t - \sum_{i=k}^{\infty} a_i = a_{k-1} + \sum_{i=k}^{\infty} a_i - \sum_{i=k}^{\infty} a_i = a_{k-1}$$

又

$$xB(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} b_{k-1} x^k$$

$$xA(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k$$

故

$$\begin{aligned} B(x) - xB(x) + xA(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} b_{k-1} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k1} x^k \\ &= b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_{k-1} + b_k - b_{k-1}\right) x^k \\ &= b_0 + \prod_{k=1}^{\infty} \left(a_{k-1} - a_{k-1}\right) x^k = b_0 = A(1) \end{aligned}$$

从而 $B(x) = \frac{A(1) - xA(x)}{1-x}$

性质 2.7 (**形式导数序列**) 若 $b_k = k a_k$，则有 $B(x) = xA'(x)$；

性质 2.8 (**积分序列**) 若 $b_k = \frac{a_k}{k+1}$，则有 $B(x) = \frac{1}{x} \int_0^x A(t) dt$;

性质 2.9 (**线性组合序列**) 若 $c_k = \alpha a_k + \beta b_k$，则有 $C(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \alpha A(x) + \beta B(x)$;

性质 2.10 (**乘积序列**) 若 $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$，则有 $C(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = A(x) \cdot B(x)$

2.1 普通生成函数数的应用

2.1.1 生成函数求解组合问题

定义 2.11 (**组合数生成函数**) 设从 n 元集合 $S=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ 中取 k 个元素的组合数为 b_k，若限定元素 a_i 出现的次数集合为 $M_i\,(1\le i\le n)$，则该组合数序列的生成函数为 $\sum_{k=1}^{\infty}b_kx^k=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}x^m\right)$，它的幂级数展开式中 x^k 的系数就是所求的组合数 b_k。

这里给出一个运用生成函数得到组合数公式的证明:

证明 3 设 n 和 k 是整数且满足 $0\le k\le n$. 令 $f(n,k)$ 为这个问题的答案. 我们想象这 n 个对象中 k 个可能子集的集合就在我们面前, 将其分成两堆. 并把所有包含对象 n 的子集放在第一个堆中，然后将所有不包含对象 n 的子集放到第二个堆中. 第一堆里显然有 $f(n-1,k-1)$ 个子集. 第二堆里有 $f(n-1,k)$ 个子集. 这两堆共有 $f(n,k)$ 个子集. 所以未知的 $f(n,k)$ 满足递推

$$f(n,k)=f(n-1,k)+f(n-1,k-1)\quad(f(n,0)=1)$$

要找到这些数的表达式，我们使用生成函数. 对任意 $n=0,1,2,\ldots$, 定义生成函数

$$B_n(x)=\sum_{k\ge 0}f(n,k)x^k.$$

现在等式两边乘上 x^k 并对 $k\ge 1$ 求和. 结果为对任意 $n\ge 1$, $B_n(x)=(B_n(x)-1)+xB_n(x)$, 且 $B_0(x)=1$. 因此

$$B_n(x)=(1+x)B_{n-1}(x)\quad(n\ge 1;B_0(x)=1)$$

因此 $B_n(x)=(1+x)^n$, 对所有 $n\ge 0.f(n,k)$ 由多项式 $(1+x)^n$ 中 x^k 项的系数给出. 令 $x=0$ 并除以 $k!$ 得到 $f(n,k)$ 为

$$\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

处理多重组合问题，普通生成函数往往有奇效。其解决问题的步骤为：直接写出普通生成函数表达式，将组合数化为某一项的幂次对应的系数

例 1 a_n 为在集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 上完成 A 任务的方法数，$a_0=0$ b_n 为先将 $\{1,2,\ldots,n\}$ 划分为若干个连续、非空子集后分别在文些非空子集上完成 A 任务的方法数，$b_0=1$ 。求 a_n,b_n 的普通生成函数 $f(x),g(x)$ 之间的关系。(连续子集指的是子集中若存在 $i-1,i+1$ 那么 i 也必定在子集中)

要证明这个问题，我们不妨先来证明两个结论

结论 2.12 若 $f(x)$ 为 a_n 的普通生成函数，那么 $\frac{f(x)}{1-x}$ 是 $b_n=a_0+a_1+\ldots+a_n$ 的普通生成函数。$f^k(x)$ 为 $c_n=\sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n}a_{n_1}\ldots a_{n_k}$ 的普通生成函数。

证明 4 注意到 $\frac{f(x)}{1-x}=f(x)\sum_{n=0}^{\infty}x^n=f(x)+xf(x)+x^2f(x)+\ldots$

$$\begin{aligned}&=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n+\ldots\\&=a_0x^0+(a_0+a_1)\,x^1+(a_0+a_1+a_2)\,x^2+\ldots\end{aligned}$$

故为数列 $b_n=a_0+a_1+\ldots+a_n$ 的普通生成函数
对于 $f^k(x)$ ，利用生成函数的乘积形式，立马可以得到其为数列 $c_n=\sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n}a_{n_1}\ldots a_{n_k}$ 的普通生成函数

有了以上结论，我们可以得到例 1 的解答:

解 1 假设将原集合分为了 i 个连续非空子集，则设这些子集分别为:

$$\{1,2,\ldots,n_1\},\{n_1+1,\ldots,n_2\},\ldots,\{n_{i-1}\ldots,n\}$$

分别有 $n_1, n_2-n_1, \ldots, n-n_{i-1}$ 个元素故

$$b_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{n_1<n_2<\ldots<n_{i-1}<n} a_{n_1}a_{n_2-n_1}\ldots a_{n-n_{i-1}}$$

不妨设 $c_n^i = \sum_{n_1<n_2<\ldots<n_{i-1}<n} a_{n_1}a_{n_2-n_1}\ldots a_{n-n_{i-1}}, b_n = \sum_{i=0}^{\infty} c_n^i$ 为了更加清晰地看到 c_n^i 的本质，我们进行如下换元:

$$m_1 = n_1, m_2 = n_2-n_1, \ldots, m_i = n-n_{i-1}$$

则 $c_n^i = \sum_{m_1+\ldots+m_i=n} a_{m_1}a_{m_2}\ldots a_{m_i}$ （由于 $a_0=0$ 使得我们可以对所有非负整数解求和）
故由结论 2.12，其普通生成函数为 $f^i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^i x^n$ 故 $g(x) = f^0(x)+f(x)+f^2(x)+\ldots = \frac{1}{1-f(x)}$

例 2 (排列逆序数的生成函数) 集合 $\{1,2,...,n\}$ 的排列 $\pi = i_1 i_2 ... i_n$ 中的逆序是指满足 $k<l$ 且 $i_k>i_l$ 的数对 (i_k, i_l)，排列 π 中的逆序的数目记作 $inv(\pi)$

证明 5 易知 $0 \le inv(\pi) \le n(n-1)/2$。设 $h(n,t)$ 表示 $\{1,2,...,n\}$ 的排列中有 t 个逆序的排列的数目，于是 $0 \le t \le n(n-1)/2$ 时有 $h(n,t) \ge 1$，$t > n(n-1)/2$ 时有 $h(n,t)=0$。它的生成函数 $g(x) = \sum_{t=0}^{n(n-1)/2} h(n,t)x^t$ 为 $g(x) = 1(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)...(1+x+x^2+...+x^{n-1}) = \frac{\prod_{j=1}^{n}(1-x^j)}{(1-x)^n}$

2.1.2 生成函数求解递推关系

递推关系是数学计算中用得特别多的一个工具，很多数学问题特别是组合数学问题都可以转化成递推关系问题，但是递推关系问题的处理并没有想象的容易，但是，如果能利用生成函数来求解递推关系问题，可能会收到意想不到的效果，可见生成函数法是处理递推关系问题的一种重要且行之有效的方法。
给定 $f(n)$ 的递推关系，用生成函数求解求解 $f(n)$ 的的基本步骤是：令 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$，将关于 $A(x)$ 的递推关系式转化成关于 $A(x)$ 的方程式，解出 $A(x)$，将 $A(x)$ 展开成 x 的幂级数，x^n 的系数即是 $f(n)$。特别地, 如果 $A(x)$ 是一个有理函数 (两个多项式的商), 那么可以化部分分式, 然后分别处理每个结果项.

定义 2.13 (线性递推关系) 设 k 是正整数，若数列 $f(0), f(1), ..., f(n), ...f(0), f(1), ..., f(n), ...$ 的相邻 $k+1$ 项间满足关系 $f(n) = c1(n)f(n-1)+c2(n)f(n-2)+...+ck(n)f(n-k)+g(n)f(n) = c_1(n)f(n-1)+c_2(n)f(n-2)+...+c_k(n)f(n-k)+g(n)$ 对 $n \ge k$ 成立，其中 $c_k(n) \ne 0$，则称该关系为 $\{f(n)\}$ 的 k 阶线性递推关系。如果 $c_1(n), c_2(n), ..., c_k(n)$ 都是常数，则称之为 k 阶常系数线性递推关系。如果 $g(n)=0$，则称之为齐次的。

定义 2.14 (常系数线性齐次递推关系) $f(n) = c_1f(n-1)+c_2f(n-2)+...+c_kf(n-k)(n \ge k, c_k \ne 0)$，方程 $x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - ... - c_k = 0$ 称为该递推关系的特征方程，它的 k 个复数根 $q_1, q_2, ..., q_k$（可能有重根）称为该递推关系的特征根

结论 2.15 (常系数线性齐次递推关系的解) 若 $q_1, q_2, ..., q_k$ 是 k 阶常系数线性齐次递推关系 $f(n) = c_1f(n-1)+c_2f(n-2)+...+c_kf(n-k)(n \ge k, c_k \ne 0)$ 的 k 个互不相等的特征根，则该递推关系的通解为 $f(n) = b_1q_1^n + b_2q_2^n + ... + b_kq_k^n$，其中 $b_1, b_2, ..., b_k$ 为任意常数。

结论 2.16 (特征根有重根的情形) $q_1, q_2, ..., q_t$ 是该递推关系全部不同的特征根,其重数分别为 $e_1, e_2, ..., e_t(e_1+e_2+...+e_t=k)$，那么递推关系的通解为 $f(n) = f_1(n)+f_2(n)+...+f_t(n)$，其中 $f_i(n) = (b_1+b_2n+...+b_{e_i}n^{e_i-1}) \cdot q_i^n$ $(1 \le i \le t)$

定义 2.17 (常系数线性齐次递推关系的生成函数) k 阶常系数线性齐次递推关系 $f(n) = c_1f(n-1)+c_2f(n-2)+...+c_kf(n-k)(n \ge k, c_k \ne 0)$ 的生成函数的形式为 $g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $Q(x)$ 是常数项不等于 0 的 k 次多项式,$P(x)$ 是次数小于 k 多项式。反之，给定一个这样的多项式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$，则存在一个 k 阶常系数线性齐次递推关系以它为生成函数

结论 2.18 (常系数线性非齐次递推关系的解) $f(n) = c_1f(n-1)+c_2f(n-2)+...+c_kf(n-k)+g(n)$，它的通解形式是 $f'(n)+f''(n)$，其中 $f^{'}(n)$ 是它的一个非齐次特解，$f''(n)$ 是相应齐次递推关系的 $f(n) = c_1f(n-1)+c_2f(n-2)+...+c_kf(n-k)$ 的通解。

结论 2.19 (**几种常见 $g(n)$ 形式的特解**) 其中特征多项式为 $P(x)=x^k-c_1x^{k-1}-c_2x^{k-2}-...-c_k$
$g(n)=\beta^n$, $P(\beta)\neq 0$ $f'(n)=a\beta^n$;
$g(n)=\beta^n$ β 是 $P(x)=0$ 的 m 重根：$f'(n)=an^m\beta^n$;
$g(n)=n^s$, $P(1)\neq 0$ $f'(n)=b_sn^s+b_{s-1}n^{s-1}+..+b_1n+b_0$;
$g(n)=n^s$，1 是 $P(x)=0$ 的 m 重根：$f'(n)=n^m\left(b_sn^s+b_{s-1}n^{s-1}+..+b_1n+b_0\right)$;
$g(n)=n^s\beta^n$,$P(\beta)\neq 0$：$f'(n)=\left(b_sn^s+b_{s-1}n^{s-1}+..+b_1n+b_0\right)\beta^n$;
$g(n)=n^s\beta^n$，β $P(x)=0$ 的 m 重根：$f'(n)=n^m\left(b_sn^s+b_{s-1}n^{s-1}+..+b_1n+b_0\right)\beta^n$

例 3 卡特兰数 (Catalan number)，是组合数学中一个常出现于各种计数问题中的数列 C_n

定义 2.20 卡特兰数有多种定义方式。

1. 递归定义：$C_0=C_1=1$,$C_n=\sum_{k=0}^{n-1}C_kC_{n-1-k}(n\geq 2)$
2. 递推公式: $C_n=\frac{4n-2}{n+1}C_{n-1}$
3. 通项公式: $C_n=\frac{1}{n+1}C_{2n}^n$

下面我们来通过生成函数的方法来由递归定义得到通项公式

证明 6 设 C_n 的生成函数为 $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n+\ldots$
那么

$$\begin{aligned}G^2(x)&=(C_0)^2+(C_0C_1+C_1C_0)\,x+\left(C_0C_2+(C_1)^2+C_2C_0\right)x^2+\ldots+(C_0C_n+C_1C_{n-1}+\ldots+C_nC_0)\,x^n+\ldots\\&=1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_{n+1}x^n+\ldots\end{aligned}$$

所以 $xG^2(x)-G(x)+1=0$ 解此二元一次方程并由 $G(0)=1$ 且 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x}\sqrt{1-4x}\right)=1$ 所以 $G(x)=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x}\sqrt{1-4x}$ 利用 $(1+x)^a=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n$ 对 $G(x)$ 进行泰勒展开可得

$$\begin{aligned}G(x)&=\frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-3)!!}{2^nn!}(-4x)^n\\&=\frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^nn!}\frac{(2n-2)!}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-2)}(-4x)^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}x^{n-1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}C_{2n}^nx^n\end{aligned}$$

所以 $C_n=\frac{1}{n+1}C_{2n}^n$

例 4 (**斐波那契数列的生成函数**) $f_0=0,f_1=1,f_n=f_{n-1}+f_{n-2}\quad(n\geq 2)$，求 f_n 的通项公式。

证明 7 根据生成函数很容易进行如下推导

$$\begin{aligned}G(x)&=f_0+f_1x+f_2x^2+\ldots+f_nx^n+\ldots\\&=x+(f_0+f_1)\,x^2+\ldots+(f_{n-2}+f_{n-1})\,x^n+\ldots\\&=x+x^2\,(f_0+f_1x+\ldots+f_nx^n+\ldots)+x\,(f_0+f_1x+\ldots+f_nx^n+\ldots)\\&=x+\left(x^2+x\right)G(x)\end{aligned}$$

那么得到

$$G(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$$

将分母进行拆分，有如下推导

$$
\begin{aligned}
G(x) &= \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)x \\
&= \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)x \\
&= \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x} - \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x}\right)x \\
&= \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x} + \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x}\right)x
\end{aligned}
$$

由于 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \quad (-1 < x < 1)$，进一步推导出

$$
\begin{aligned}
G(x) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x} + \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x}\right)x \\
&= \Bigg[-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2x^2+\ldots+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n+\ldots\right) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2x^2+\ldots+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n+\ldots\right)x \\
&= -\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2x^2+\ldots+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n+\ldots\right) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2x^2+\ldots+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n+\ldots\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]x + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]x^2 \\
&+ \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]x^n+\ldots
\end{aligned}
$$

最终得到通项公式为

$$
f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]
$$

例 5 (**默慈金数**) 在一个圆上的 n 个点间，画出彼此不相交弦的全部方法的总数就是默慈金数前几项结果分别为 $M_0 = 1, M_1 = 1, M_2 = 2, M_3 = 4, M_4 = 9$ 。其递推公式如下 $M_{n+2} = M_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} M_i M_{n-i}$

下面我们通过生成函数来得到其封闭形式

证明 8 设生成函数为 $G(x)=M_0+M_1x+M_2x^2+\ldots+M_nx^n+\ldots$ 那么有如下推导过程

$$
\begin{aligned}
G^2(x)&=M_0^2+\left(M_0M_1+M_1M_0\right)x+\ldots+\sum_{i=0}^{n}M_iM_{n-i}x^n+\ldots\\
&=M_0^2+\left(M_3-M_2\right)x+\left(M_4-M_3\right)x^2+\ldots+\left(M_{n+2}-M_{n+1}\right)x^n+\ldots\\
&=1+\frac{1}{x^2}\left(M_0+M_1x+\ldots+M_nx^n+\ldots\right)-\frac{1}{x}\left(M_0+M_1x+\ldots+M_nx^n+\ldots\right.\\
&-\frac{1}{x^2}\left(M_0+M_1x+M_2x^2\right)+\frac{1}{x}\left(M_0+M_1x\right)\\
&=\frac{1}{x^2}[G(x)-xG(x)-1]
\end{aligned}
$$

解之得 $G(x)=\frac{1}{2x^2}\left[1-x-\left(1-2x-3x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$ 利用牛顿二项式得到

$$
\begin{aligned}
G(x)&=\frac{1}{2x^2}\left[1-x-\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^{2n-1}}\cdot C_{2n-2}^{n-1}\left(-2x-3x^2\right)^n\right)\right]\\
&=\frac{1}{2x^2}\left[-x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^{2n-1}}\cdot C_{2n-2}^{n-1}\left(2x+3x^2\right)^n\right]\\
&=\frac{1}{2x^2}\left[-x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^{2n-1}}\cdot C_{2n-2}^{n-1}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(2x)^{n-k}\left(3x^2\right)^k\right]
\end{aligned}
$$

3 指数生成函数

一般来说，普通型的生成函数比较适合处理组合数相关问题，指数型的生成函数比较适用于解决排列数相关问题，所以，我们在选用生成函数解决问题时，要根据所要处理的问题的特点和性质，有方向性地选择某种类型的生成函数，以使问题更好地得到解决。

定义 3.1 (**指数生成函数**（exponential generating function，EGF）) 数列 $\{a_0,a_1,a_2,...\}$ 的指数型生成函数定义为形式幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{x^k}{k!}$

指数生成函数有着丰富的性质，这里不妨设有两个数列的指数型生成函数 $f_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}$，$g_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{x^n}{n!}$

性质 3.2 (**形式导数序列**) $xf_e'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n\frac{x^n}{n!}$，因此若 $b_n=na_n$ ，则 $g_e(x)=xf_e'(x)$;

性质 3.3 (**乘积序列**) $f_e(x)g_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{x^k}{k!}b_{n-k}\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_kb_{n-k}\right)\frac{x^n}{n!}$
因此 $f_e(x)g_e(x)$ 为数列 $c_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_kb_{n-k}$ 的指数型生成函数。这是指数型生成函数的乘积形式

例 6 (Bell **数**) 求集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的所有不同划分的个数 B_n (是不计顺序的)

解 2 我们考虑划分中包含了元素 n 的那个子集 A 设 A 有 k 个元素。那么除去 n 有 $k-1$ 个元素。那 $k-1$ 个元素必定是从 $\{1,2,\ldots,n-1\}$ 中选取的。所以：要生成 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的所有划分，我们可以从 $\{1,2,\ldots,n-1\}$ 中选取 $k-1$ 个元素，有 C_{n-1}^{k-1} 种方法；再将 A 外的元素进行任意不同的划分，有 B_{n-k} 种方法。最后，k 的取值可以为 $1,2,\ldots,n$ ，我们关于 k 求和就找到了递推关系。故我们得到：$B_n=\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}B_{n-k},B_0=1,B_1=1$
我们发现：这个递推关系的形式是求和号之中为一个组合数乘以一个数列中项的形式。因此，我们决定使用指数生成函数：$f_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$ 但是，注意到递推公式仍旧与指数生成函数的乘积形式略有出入，故我们要进行一些改动。令 $i=n-k$ ，得到：$B_n=\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-1}^{n-i-1}B_i$ 故我们得到：$B_{n+1}=\sum_{i=0}^{n}C_n^{n-i}B_i$

左侧数列生成函数就是形式导数右侧数列生成函数为乘积形式，为 $f_e(x)$ 与数列 $a_n=1$ 的指数生成函数之积（显然为 e^x ）由等号两侧数列的指数生成函数相等，得到：

$$
f_e'(x)=e^xf_e(x)
$$

结合初值条件解微分方程，得到：$f_e(x)=e^{e^x-1}$ 求出了生成函数后，我们如法炮制，将其展开，重新写为级数形式即可！进行迭代的幂级数展开:

$$f_e(x)=\frac{e^{e^{x^x}}}{e}=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{kx}}{k!}=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kx)^n}{n!}=\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}\right)\frac{x^n}{n!}$$

故

$$B_n=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}$$

3.1 指数生成函数的应用

定义 3.4 (**排列数生成函数**) n 元集合的 $k-$ 排列数目 $P(n,k)$,指数型生成函数为 $\sum_{k=0}^{\infty}P(n,k)\frac{x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{x^k}{k!}=(1+x)^n$

在求解多重集的排列问题时，我们可以类似于求解多重集的组合问题可以直接写出其普通生成函数一般地，直接地写出其指数生成函数。并且对应的 $\frac{x^r}{r!}$ 的系数即为 S 的 r-排列数.

定义 3.5 (**多重排列数的生成函数**) 多重集合 $M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,...,\infty\cdot a_n\}$ 的 $k-$ 排列中，若限定元素 a_i 出现的次数集合为 $M_i\,(1\leq i\leq n)$,则 $k-$ 排列数序列 $\{b_k\}$ 的指数型生成函数为 $\sum_{k=1}^{\infty}b_k\frac{x^k}{k!}=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}\frac{x^m}{m!}\right)$，它的幂级数展开式中 $\frac{x^k}{k!}$ 的系数就是所求的可重排列数 b_k。特别地，当每个元素可以出现任意次时，即通常的 $k-$ 排列，则 $\sum_{k=1}^{\infty}b_k\frac{x^k}{k!}=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\right)=e^{nx}=\sum_{k=0}^{\infty}n^k\frac{x^k}{k!}$，从而 $b_k=n^k$。

定义 3.6 (**有限多重集合的情形**) $M=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,...,n_t\cdot a_t\}$,$k-$ $\{b_k\}$ 的指数型生成函数为 $\sum_{k=1}^{\infty}b_k\frac{x^k}{k!}=\prod_{i=1}^{t}\left(\sum_{m=0}^{n_i}\frac{x^m}{m!}\right)$，展开式中 $\frac{x^k}{k!}$ $\sum_{i_1+...+i_t=k}\frac{k!}{i_1!i_2!...i_t!}$，此处对于 $i_1+...+i_t=k,0\leq i_1\leq n_1,...,0\leq i_t\leq n_t$ 的所有解求和，它就是 M 的 $k-$ 排列数。特别地，全排列数（即 $k=t$）为 $\binom{n}{n_1...n_t}=\frac{(n_1+n_2+...+n_t)!}{n_1!n_2!...n_t!}$，其中 $n=n_1+n_2+...+n_t$。

证明 9 考虑多重集 $M=\{n_1\cdot c_1,\ldots,n_k\cdot c_k\}$ a_r 为其 r-排列数。$f_e(x)$ 为指数生成函数，则我们下面论证:

$$f_e(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n_1}}{n_1!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n_2}}{n_2!}\right)\ldots\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^nk}{n_k!}\right)$$

考虑这个展开式中的 r 次项，必定具有

$$\frac{x^i1}{i_1!}\frac{x^i}{i_2!}\cdots\frac{x^ik}{i_k!}$$

的形式，且要满足 $i_1+\ldots+i_k=r,0\leq i_1\leq n_1,\ldots,0\leq i_k\leq n_k$ 则不妨将其写作

$$\frac{r!}{i_1!i_2!\ldots i_k!}\frac{x^r}{r!}$$

故 $\frac{x^r}{r!}$ 的系数为 $\sum\frac{r!}{i_1!i_2!\ldots i_k!}$，此处对于 $i_1+\ldots+i_k=r,0\leq i_1\leq n_1,\ldots,0\leq i_k\leq n_k$ 的所有解求和。而注意到 $\frac{r!}{i_1!i_2!\ldots i_k!}$ 本身为多项式系数，表示了 $\{i_1\cdot c_1,\ldots,i_k\cdot c_k\}$ 的 r-排列数。故将 M 的所有 r 元子集的排列数相加求和即得到的是 M 的 r-排列数。故 $f_e(x)$ 中 $\frac{x^r}{r!}$ 的系数即为 S 的 r-排列数。

定义 3.7 (**二项式反演** (Binomial Inversion)) 当两个数列满足关系 $f_n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}g_i$ 时，我们称这是一个二项式变换 (Binomial Transform)，其二项式反演为 $g_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f_i$

证明 10 考虑构造生成函数 $h(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^i}{-i!}=1-e^x$
则右侧生成函数为 $\sum_{i=0}^{\infty}h^i(x)$。根据 $\sum_{i=0}^{\infty}x^i=\frac{1}{1-x}$，带入 $x=h(x)$ 有

$$\sum_{i=0}^{\infty}h^i(x)=\frac{1}{1-h(x)}=\frac{1}{e^x}=e^{-x}$$

故 $[x^n]\,e^{-x}=\frac{(-1)^n}{n!}$
$f(j)$ 对 $g(i)$ 的贡献系数即为 $\frac{(-1)^{j-i}j^{j-i}}{(j-i)!}=(-1)^{j-i}\begin{pmatrix} j\\ i\end{pmatrix}$。

例 7 考虑如下数列 $f_0=0,f_1=1,f_n=-2nf_{n-1}+\sum_{k=0}^{n}C_n^k f_{n-k}f_k \quad (n\geq 2)$ 求 f_n。

解 3 先对公式进行适当变形，如下

$$\frac{f_n}{n!}=-2\cdot\frac{f_{n-1}}{(n-1)!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{f_{n-k}}{(n-k)!}\cdot\frac{f_k}{k!}$$

若表示为生成函数，得到如下公式 $G(x)=f_0+f_1x+f_2\frac{x^2}{2!}+f_3\frac{x^3}{3!}+\ldots+f_n\frac{x^n}{n!}+\ldots$ 那么先将带阶乘的部分看成一个整体，即

$$F_n=\frac{f_n}{n!}\quad\Rightarrow\quad G(x)=F_0+F_1x+F_2x^2+\ldots+F_nx^n+\ldots$$

那么继续推导

$$\begin{aligned}G^2(x)&=F_0^2+(F_0F_1+F_1F_0)\,x+\left(F_0F_2+F_1^2+F_2F_0\right)x^2+\ldots+\sum_{k=0}^{n}F_{n-k}F_kx^n+\ldots\\&=F_0^2+(F_0F_1+F_1F_0)\,x+(2F_1+F_2)\,x^2+\ldots+(2F_{n-1}+F_n)\,F_kx^n+\ldots\\&=2\left(F_1x^2+F_2x^3+\ldots+F_{n-1}x^n+\ldots\right)+\left(F_2x^2+F_3x^3+\ldots+F_nx^n+\ldots\right)\\&=2x\left(F_0+F_1x+F_2x^2+\ldots+F_nx^n+\ldots\right)+\left(F_0+F_1x+F_2x^2+\ldots+F_nx^n+\ldots\right)-F_1x\\&=(2x+1)G(x)-x\end{aligned}$$

最终解得

$$G(x)=\frac{2x+1-\sqrt{4x^2+1}}{2}$$

根据牛顿二项式，继续推导

$$\begin{aligned}G(x)&=x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^{2n-1}}\cdot C_{2n-2}^{n-1}\left(4x^2\right)^n\right)\\&=x-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\times 4^n}{n\cdot 2^{2n-1}}\cdot C_{2n-2}^{n-1}x^{2n}\\&=x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot C_{2n-2}^{n-1}x^{2n}\\&=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n}\cdot C_{2n-2}^{n-1}x^{2n}\end{aligned}$$

可以看出有

$$F_0=0,F_1=1,F_{2n+1}=0,F_{2n}=\frac{(-1)^n}{n}\cdot C_{2n-2}^{n-1}$$

最终得到通项公式为

$$f_0=0,f_1=1,f_{2n+1}=0,f_{2n}=\frac{(-1)^n(2n)!}{n}\cdot C_{2n-2}^{n-1}$$

指数生成函数的乘积形式大大简化了我们的运算！每当我们遇到数列本身就含有求和号的情况，我们都需要多思考能否将其转化到乘积形式。

4 Dirichlet 生成函数

定义 4.1 (Dirichlet **生成函数**（Dirichlet series generating function，DGF））数列 $\{a_0,a_1,a_2,...\}$ 的 Dirichlet 生成函数为 $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$，为区别于其它生成函数，Dirichlet 生成函数的变量用 s 表示。对于 $a_n=1$，其 Dirichlet 生成函数 $f(s)=\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 是黎曼 Zeta 函数

定义 4.2 (**Dirichlet 生成函数的乘积形式**) 设 $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$，$g(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^s}$，考虑 $f(s)g(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^s}$，其中每一项都具有形式 $\frac{a_k}{k^s}\cdot\frac{b_{\frac{n}{k}}}{(\frac{n}{k})^s}$ 才能确保分母上具有 n^s 的形式。毫无疑问地，这蕴含了 $k\mid n$ 的前提条件。故我们得到 $f(s)g(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k|n}a_kb_{\frac{n}{k}}\right)\frac{1}{n^s}$，它是 $c_n=\sum_{k|n}a_kb_{\frac{n}{k}}$ 的 Dirichlet 生成函数。c_n 可以看作是复合了 a_n,b_n 的一个 Mobius 变换。故 Dirichlet 生成函数的乘积形式对应了两个数列的复合 Mobius 变换

定理 4.3 (**积性数论函数值列的 Dirichlet 生成函数**) f 为积性数论函数，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=\prod_p(\sum_{k=0}^{\infty}f(p^k)p^{-ks})$，其中下标 p 表示对于所有素数 p 求乘积。

证明 11 为了利用 f 的积性，基于算术基本定理，将 n 写作 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}$，其中 p_i 为互异素数，$\alpha_i>0$ 则利用积性，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(p_1^{\alpha_1})...f(p_r^{\alpha_r})}{n^s}$$

考虑 $\prod_p(\sum_{k=0}^{\infty}f(p^k)p^{-ks})$ 中 n^{-s} 系数，由于算术基本定理对于 n 分解的唯一性，我们知道只有

$$f(p_1^{\alpha_1})p^{-\alpha_1 s}...f(p_r^{\alpha_r})p^{-\alpha_r s}$$

这一项能够产生出 n^{-s} 这一项。故右侧的 n^{-s} 系数为 $f(p_1^{\alpha_1})...f(p_r^{\alpha_r})$，与左侧一致。

利用这个定理，我们可以迅速地得到 Euler 乘积与 Riemann-Zeta 函数之间的等价关系:

证明 12 考虑 $f(n)=1$ 显然为一个积性数论函数。将其代入上述定理，得到：$\zeta(s)=\prod_p(\sum_{k=0}^{\infty}p^{-ks})=\prod_p\frac{1}{1-p^{-s}}$

在数论部分中，我们曾经花费很长的篇幅从分析的角度证明这一点，然而借助 Dirichlet 生成函数，我们的证明显得非常简明直接。

最后，我们利用 Dirichlet 生成函数给出关于正整数集上的 Mobius 变换与 Mobius 反演的基本结论

定理 4.4 我们考虑 Mobius 函数 $\mu(n)$ 的 Dirichlet 生成函数：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=\prod_p\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mu(p^k)p^{-ks}\right)=\prod_p\left(\sum_{k=0}^{1}\mu(p^k)p^{-ks}\right)$$

（注意到当 $k\geq 2$ 时，$\mu(p^k)=0$）故得到：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=\prod_p(1-p^{-s})$

利用 Euler 乘积的上述结果，得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=\frac{1}{\zeta(s)}$$

即：Mobius 函数的 Dirichlet 生成函数是 Riemann-Zeta 函数的倒数

4.1 常见积性函数的 Dirichlet 生成函数

Dirichlet 生成函数最适合用于研究与积性函数的狄利克雷卷积相关的问题。下列出常见积性函数的 Dirichlet 生成函数。

定理 4.5 (**黎曼函数**) 序列 $[1,1,1,\ldots]$ 的 Dirichlet 生成函数是 $\sum_{i\geq 1}\frac{1}{i^x}=\zeta(x)$。$\zeta$ 是黎曼函数。由于其满足积性，因此我们可以得到 $[1,1,1,\ldots]$ 的 DGF 的另一种形式：

$$\zeta(x)=\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1+\frac{1}{p^x}+\frac{1}{p^{2x}}+\ldots\right)=\prod_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{1-p^{-x}}$$

定理 4.6 (**莫比乌斯函数**) 对于莫比乌斯函数 μ，它的 Dirichlet 生成函数定义为

$$\tilde{M}(x)=\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^x}\right)=\prod_{p\in\mathcal{P}}(1-p^{-x})$$

容易发现 $\zeta(x)\tilde{M}(x)=1$，也就是说 $\tilde{M}(x)=\frac{1}{\zeta(x)}$。

定理 4.7 (**欧拉函数**) 对于欧拉函数 φ，它的 Dirichlet 生成函数定义为

$$\tilde{\Phi}(x)=\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1+\frac{p-1}{p^x}+\frac{p(p-1)}{p^{2x}}+\frac{p^2(p-1)}{p^{3x}}+\ldots\right)=\prod_{p\in\mathcal{P}}\frac{1-p^{-x}}{1-p^{1-x}}$$

因此有 $\tilde{\Phi}(x)=\frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)}$。

证明 13 设 $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^s}$ 注意到 Euler 函数为积性函数，则:

$$\begin{aligned}f(s)&=\prod_p\left(\sum_{k=0}^{\infty}\varphi\left(p^k\right)p^{-ks}\right)=\prod_p\left(1+p^{-s}+p^{-2s}+\ldots+p^{-s}+p^{1-2s}+\ldots\right)\\&=\prod_p\left(\frac{1}{1-p^{1-s}}-\frac{p^{-s}}{1-p^{1-s}}\right)=\prod_p\frac{1-p^{-s}}{1-p^{1-s}}\end{aligned}$$

定理 4.8 (**幂函数**) 对于函数 $I_k(n)=n^k$，它的 Dirichlet 生成函数定义为

$$\tilde{I}_k(x)=\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1+\frac{p^k}{p^x}+\frac{p^{2k}}{p^{2x}}+\ldots\right)=\prod_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{1-p^{k-x}}=\zeta(x-k)$$

根据这些定义，容易推导出 $\varphi*1=I$，$*$ 表示狄利克雷卷积。因为 $\tilde{\Phi}(x)\zeta(x)=\zeta(x-1)$。

定理 4.9 (**约数幂函数**) 对于约数幂函数 $\sigma_k(n)=\sum_{d|n}d^k$，它的 Dirichlet 生成函数可以表示为狄利克雷卷积的形式：$\tilde{S}(x)=\zeta(x-k)\zeta(x)$。

定理 4.10 (**无平方因子数**) 对于 $u(n)=|\mu(n)|$（无平方因子数），它的 Dirichlet 生成函数为 $\tilde{U}(x)=\prod_{p\in\mathcal{P}}(1+p^{-x})=\frac{\zeta(x)}{\zeta(2x)}$。

4.2 Dirichet 生成函数的应用

例 8 若 a_n 表示 n 的可分解为 k 个有序非平凡（均非 1 ）正因子之积的方法数，则其 Dirichlet 生成函数是什么?

证明 14 $a_n=\sum_{n_1n_2\ldots n_k=n}h\left(n_1,n_2,\ldots,n_k\right)$,其中求和是对于所有的 n 的所有因子分解求和其中 $h\left(n_1,\ldots,n_k\right)$ 当且仅当所有 $n_i>1$ 时取值为 1 ，否则为 0 则由 Dirichlet 生成函数的乘积形式，我们知道：如果假设 $b_n=1(n\geq 2),b_1=0$ 那么其 Dirichlet 生成函数对应为 $\zeta(s)-1$ 而当 k 个 b_n 进行复合的 Mobius 变换时，对应的生成函数的乘积形式所对应的数列为 $\sum_{n_1n_2\ldots n_k=n}b_{n_1}b_{n_2}\ldots b_{n_k}$ 容易发现 $h\left(n_1,\ldots,n_k\right)=b_{n_1}b_{n_2}\ldots b_{n_k}$ 故 a_n 的生成函数 $f(s)=(\zeta(s)-1)^k$

例 9 完全积性数论函数 λ 满足在所有素数处取值为 $-1,\lambda(1)=1$ ，则证明: $\sum_{d|n}\lambda(d)$ 仅在 n 为完全平方数时取值为 1 ，其它数处取值为 0 。

证明 15 注意到 Dirichlet 生成函数为我们证明两个数列相等提供了一条新思路: 证明其 Dirichlet 生成函数对应相等。$\sum_{d|n}\lambda(d)$ 可以看作 $\lambda(n)$ 与一个全 1 数列的复合 Mobius 变换由乘积形式，$\sum_{d|n}\lambda(d)$ 的 Dirichlet 生成函数 $f_1(s)=\zeta(s)f(s)$ 其中 $f(s)$ 为 $\lambda(n)$ 的 Dirichlet 生成函数要想办法求出 $f(s)$ ，我们注意到可以使用 Dirichlet 生成函数关于积性函数的性质故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n^s}=\prod_p\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda\left(p^k\right)p^{-ks}\right)=\prod_p\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kp^{-ks}\right)=\prod_p\frac{1}{1+p^{-8}}$$

故由 Euler 乘积的性质，$f_1(s)=\prod_p\frac{1}{1-p^{-2s}}$ 接下来考虑右侧：$b(n)$ 取值为 1 当且仅当 n 为完全平方数，否则取 0 。设其 Dirichlet 生成函数为 $f_2(s)$ ，注意到 b_n 满足积性则

$$f_2(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(n)}{n^s}=\prod_p\left(\sum_{k=0}^{\infty}b\left(p^k\right)p^{-ks}\right)=\prod_p\left(p^0+p^{-2s}+p^{-4s}+\ldots\right)=\prod_p\frac{1}{1-p^{-2s}}=f_1(s)$$

故得证。

5 总结

通过利用生成函数求解组合数学问题，原本不好处理的问题会变得更加容易表达和处理。可以说，生成函数是解决组合问题的一个十分有效的工具，这里的关键点就是如何灵活地将组合问题转化为生成函数问题，有的时候可能生成函数并不好找，所以怎样去观察和发现其中可能有用的生成函数是关键的一步，因为这将为后面的处理过程带来许多简便。但同时生成函数也具有一定的局限性，最典型的局限性就是它在表达一些复杂结构的时候非常痛苦。其次有些从组合意义上考虑极为简单的结论用生成函数很难看出。

参考文献

[1] [罗]Tomescu.I 组合学引论，栾改书评. 北京: 高等教育出版社,1986-59 79

[2] 卢开澄，卢华明,《组合数学》（第 3 版）, 2006

[3] 柯召, 魏万迪. 组合论 (上册) [M]. 北京: 科学出版社，2010.

[4] 卢光辉，孙世新, 杨国武. 组合数学及其应用 [M]. 北京: 清华大学出版社,2014.

[5] George E.Andrews and Kimmo Eriksson.Ingeger partition [M].Cambridge:Cambridge University Press,2004.

[6] Herbert S Wilf. 发生函数论 [M]. 王天明，译. 背景：清华大学出版社,2003,200-201.

[7] V. I. Arnold. Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique. C. R. Acad. Paris, 261:3719–3722, 1965.