四川大学期末考试试题(闭卷)　A

(2019-2020 学年第二学期)

课程号: **201110040**　课序号: **02**　课程名称: **数论与代数基础**　任课教师: **张起帆**　　成绩:

适用专业年级: **数学拔尖班 2019级**　学生人数: **16**　印题份数: **20**　学号:　　　　　　姓名:

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定(修订)》, 郑重承诺:

1. 已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点;
2. 不带手机进入考场;
3. 考试期间遵守以上两项规定, 若有违规行为, 同意按照有关条款接受处理.

考生签名:

注意: 试题满分100分, 解答写在答题纸上.

1. (15分) 设有奇素数p，简单回答下列问题：

(1) （5分）在p以内有几个正整数a满足a是模p的原根？

(2) （5分）在p^2以内有几个正整数a满足a是模p的原根，但对任意$l>1$，a不是模p^l的原根？

(3) （5分）对$p=7$，找出上一问中最小的一个a.

2. （10分）证明在一个由正整数构成的无穷等差数列中，若有一项是立方数，则有无穷项都是。

3. （10分）设n,k都是大于1的正整数，证明

$$(n-1)^2|n^k-1 \Longleftrightarrow n-1|k$$

4. （10分）证明：若$1<n|2^n+1$，则$3|n$.

5. （10分）利用环$\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$的唯一分解性找出p能表为a^2+2b^2的同余条件。

6. （10分）

(1) （5分）证明对$n>1$一定有2^n-1不整除3^n-1.

(2) （5分）设$n>1$，对a加上什么条件，你能证明a^n-1不整除$(a+1)^n-1$?

7. （15分）对有限加法abel群G和素数p，记$G[p]=\{\alpha\in G|p\alpha=0\}$，$G_p=\{\alpha\in G|存在r满足p^r\alpha=0\}$（乘法abel群，这两个记号任然表相应的含义）。

(1) 证明G是循环群当且仅当对每个p，$|G[p]|\leq p$

(2) 由初等数论知若整数n有两个以上的奇素因子，则模n的原根不存在，即群$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$不是循环群，请问对该群是哪个素数$p$ 不满足上述条件？

(3) 对群$G=(\mathbb{Z}/65\mathbb{Z})^\times$，指出$G[2]$的结构。

8. (20分) 回顾从实数域$\mathbb{R}$得到复数域$\mathbb{C}$的过程：定义一个符号i，从而引进一个集合$\mathbb{C}=\{a+bi|a,b\in\mathbb{R}\}$，规定$i^2=-1$并定义运算$(a+bi)+(c+di)=\cdots$，$(a+bi)(c+di)=\cdots$，这样就得到了比$\mathbb{R}$更大的域$\mathbb{C}$，它可以构成域$\mathbb{R}$上的二维线性空间。对任意素数$p$，$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$也是域（以后简单记为$\mathbb{F}_p$），以下问题的目标是用类似方法对域$\mathbb{F}_p$进行扩充。

(1) （5分）由定义证明对任意素数p，环$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$是域，而对合数n，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$则不是域（可以直接用任何数论结论）。

(2) （5分）有位王同学想用以下方法得到比域$\mathbb{F}_p$更大的域：

定义一个符号i，从而引进一个集合$K=\{a+bi|a,b\in\mathbb{F}_p\}$，规定$i^2=-1$并定义运算$(a+bi)+(c+di)=\cdots$，$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i$. 但王同学发现只能对某些好$p$才能成功；而对那些坏$p$，造出的$K$并不是域。请指出哪些$p$是好的，哪些是坏的并解释失败的原因。

(3) （5分）王同学继续研究，发现对那些坏p（奇的），只要适当选取$t\in\mathbb{F}_p$，通过规定$i^2=t\in\mathbb{F}_p$，可以造出一个大域K_t，它也构成$\mathbb{F}_p$的2维空间。请问应该怎么选t，t的不同的选择影响K_t的同构类吗？

(4) （5分）你还能推广这个想法，造出一个域，让它成为$\mathbb{F}_p$的3维或更高维的线性空间吗？

(注：假定你在课堂上学到的知识已经是最新的，对王同学的研究你可以任意评论，我们要求你的话从数学上很自然，拒绝一切高深的概念和术语。)