一、填空和多项选择题（每题 3 分，共 21 分）

1. 答案：-8.

2. 答案：2.

3. 答案：$k>5$.

4. 答案：$y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

5. 答案：-12.

6. 答案：7.

7. 答案：BD.

二、计算题（共 60 分）

1.（10 分）求向量组 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\5\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}4\\4\\6\\10\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}4\\3\\4\\6\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}1\\2\\4\\8\end{bmatrix}$ 张成的子空间的维数，以及该向量组的一个极大无关组，并用该极大无关组线性表示其余向量.

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{bmatrix}1&4&4&1\\2&4&3&2\\3&6&4&4\\5&10&6&8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&4&4&1\\2&4&3&2\\0&0&-1/2&1\\0&0&-3/2&3\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1&4&4&1\\0&-4&-5&0\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&-4&-5&0\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&2&0&5\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ ……（6 分）

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为一个极大无关组，该向量组张成的子空间的维数为 3. ……（2 分）

且有 $\alpha_4=-\alpha_1+\frac{5}{2}\alpha_2-2\alpha_3$. ………………（2 分）

2.（10 分） 矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&0\\5&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 满足方程 $A^2+B=AB+A^*$, 求矩阵 B.

解：$|A|=1$, 故 $A^2+B=AB+A^*\Rightarrow A^3+AB=A^2B+|A|E=A^2B+E$.

$\Rightarrow A^3-E=(A^2-A)B$. 易知 $|A-E|$ 可逆，

故 $AB=A^2+A+E\Rightarrow B=A+E+A^{-1}$. …………（4 分）

$A^{-1}=|A|^{-1}A^*=A^*=\begin{pmatrix}-3&2&0\\5&-3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. …………（3 分）

故 $B=\begin{pmatrix}3&2&0\\5&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+E+\begin{pmatrix}-3&2&0\\5&-3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&0\\10&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. …………（3 分）

3.（8 分）已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ 和 $\beta_1=\begin{pmatrix}5\\1\\7\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}7\\2\\9\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{R}^3$ 的同一个子空间的两组基. 求出基 α_1,α_2 到基 β_1,β_2 的过渡矩阵，进一步求 $\beta_1+\beta_2$ 在基 α_1,α_2 下的坐标.

解：β_1,β_2 可由 α_1,α_2 线性表示，

$$(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=\begin{bmatrix}1&1&5&7\\-1&2&1&2\\3&-1&7&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&5&7\\0&3&6&9\\0&-4&-8&-12\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

…………（3 分）

故 $(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}$，所求过渡矩阵为 $\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}$. …………（3 分）

由此易知 $\beta_1+\beta_2$ 在基 α_1,α_2 下的坐标为 $\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=(7,5)^T$. …………（2 分）

4. （12 分）当 a,b 取何值时，方程组 $\begin{cases}x_1-x_2-6x_3-x_4=b\\x_1+x_2-2x_3+3x_4=0\\2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1\\3x_1+2x_2+ax_3+7x_4=-1\end{cases}$ 有解？有解时求出通解.

解：$\begin{bmatrix}1&-1&-6&-1&b\\1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&a&7&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&3&0\\0&-1&-2&-2&-1\\0&-1&a+6&-2&-1\\0&-2&-4&-4&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-4&1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&a+8&0&0\\0&0&0&0&b+2\end{bmatrix}$

…………（4 分）

当 $b\neq-2$ 时，方程组无解. …………（2 分）

当 $b=-2$ 时，方程组有解. 分两种情况进行讨论：

(1) 若 $a=-8$，则通解为 $\xi=\xi_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2$，其中 k_1,k_2 为可任意取值的常数，$\xi_0=(-1,1,0,0)^T,\eta_1=(4,-2,1,0)^T,\eta_2=(-1,-2,0,1)^T$. …………（3 分）

(2) 若 $a\neq-8$，则通解为 $\xi=\xi_0+k\eta$，其中 k 为可任意取值的常数，$\xi_0=(-1,1,0,0)^T,\eta=(-1,-2,0,1)^T$. …………（3 分）

5. （12 分）用正交变换将下述二次型化为标准形.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2^2-4x_2x_3+x_3^2.$$

解：二次型 f 对应矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&4&-2\\4&-2&1\end{pmatrix}$. $|\lambda E-A|=(\lambda-5)^2(\lambda+4)$,

故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=5,\lambda_3=-4$. …………（3 分）

对特征值 $\lambda_1=\lambda_2=5$，解齐次线性方程组 $(\lambda_1E-A)X=0$,

可得基础解系 $\alpha_1=(1,2,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$. 正交化得 $\beta_1=\alpha_1=(1,2,0)^T$,

$\beta_2=\frac{1}{5}(4,-2,5)^T$. 单位化可得 $\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt5}(1,2,0)^T,\gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{3\sqrt5}(4,-2,5)^T$.

…………（5 分）

对特征值 $\lambda_3=-4$，解齐次线性方程组 $(\lambda_3 E-A)X=0$，可得基础解系

$\alpha_3=(-2,1,2)^T$，单位化可得 $\gamma_3=\frac{1}{3}(-2,1,2)^T$. …………（2 分）

令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

则正交变换 $Y=QX$ 可将二次型 f 化为标准形 $5y_1^2+5y_2^2-4y_3^2$. ……（2 分）

6. （8 分）给定两个互质的整数 a,b，其中 $b\geq 2$，欲求整数 x 使得 $ax-1$ 为 b 的整数倍. 对此问题，古希腊数学家欧几里得提出了辗转相除法. 我国北宋数学家秦九韶则提出了大衍求一术，从线性代数的角度来看，

即为如下方法：首先构造矩阵 $\begin{pmatrix}a & 1\\ b & 0\end{pmatrix}$. 接下来对 $\begin{pmatrix}a & 1\\ b & 0\end{pmatrix}$ 作第 3 类

初等行变换(即倍加变换，要求为整数倍)，将之化作形如 $\begin{pmatrix}1 & x\\ y & z\end{pmatrix}$ 的矩阵，

则 $ax-1$ 为 b 的整数倍(此处不需证明这个结论).

据此，求正整数 x, $1\leq x\leq 36$, 使得 $94x-1$ 为 37 的倍数.

解：$\begin{pmatrix}94 & 1\\ 37 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}20 & 1\\ 37 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}20 & 1\\ 17 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3 & 2\\ 17 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & -11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 13\\ 2 & -11\end{pmatrix}$.

…………（5 分）

故得 $x=13$. …………（3 分）

三、证明题（共 19 分）

1. （7 分）证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的充分必要条件是向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.

证明：$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. …………（4 分）

注意 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 可逆. 故 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$.

由此可知题设中所给的两个向量组相互等价，又因其向量个数相同，故二者是否线性无关是相互等价的. …………（3 分）

2. (6 分) 设方阵 A 使得 $A^3=2A$，证明 A^2-E 可逆，求 A^2-E 的逆矩阵.

证明：(1) A 的特征值只能为 $0,\sqrt{2},-\sqrt{2}$. 故 A^2-E 的特征值必为

$0^2-1=-1,\sqrt{2}^2-1=\left(-\sqrt{2}\right)^2-1=1$, 因而 0 不是 A^2-E 的特征值，

故 A^2-E 可逆. …………（3 分）

(2) $A^3=2A\Rightarrow A^4=2A^2$，令 $B=A^2$，则有 $B^2-2B=(B-E)^2-E=0$，

故 $(B-E)^2=E$，因而 $(B-E)^{-1}=B-E$，即有 $(A^2-E)^{-1}=A^2-E$.

…………（3 分）

(2)另证：$(A-E)(A^2+A-E)=A^3-2A+E$，故 $(A-E)^{-1}=A^2+A-E$.
$(A+E)(A^2-A-E)=A^3-2A-E=-E$，故 $(A+E)^{-1}=-(A^2-A-E)$.
因而 $(A^2-E)^{-1}=(A-E)^{-1}(A+E)^{-1} = -(A^2+A-E)(A^2-A-E)$
$=-(A^2-E)^2+A^2=A^2-E$. …………（3 分）

3. （6 分）设 A 为 n 阶方阵，$A^2=A$. 证明：α 为齐次线性方程组 $AX=0$ 的解，充分必要条件为，存在向量 β 使得 $\alpha=\beta-A\beta$.

证明：

（1）若 α 为齐次线性方程组 $AX=0$ 的解，令 $\beta=\alpha$，则 $\beta-A\beta=\alpha$. ⋯（3 分）

（2）若 $\alpha=\beta-A\beta$，则 $A\alpha=A(\beta-A\beta)=A\beta-A^2\beta=A\beta-A\beta=0$. ⋯⋯（3 分）