四川大学期末考试试题（闭卷）

（2020——2021 学年第 2 学期）　A 卷

课程号：201080030　课序号：　课程名称：线性代数（理工）　任课教师：　成绩：

适用专业年级：　学生人数：　印题份数：　学号：　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设 A 是四阶矩阵，且$|A| = \dfrac{1}{4}$，则$|(2A^*)^{-1}|$ = ________.

2. 设 A 是 4×3 阶矩阵，A 的秩 $r(A) = 2$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，则 AB 的秩 $r(AB)$ = __________.

3. 设 A 为 3 阶矩阵，A 的第一行元素为 1, 2, 3，$|A|$的第二行元素的余子式分别为 $a + 2$, $a + 1$, $a - 2$，则 a = ________.

4. 设 $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$Q = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 12 \\ 1 & 4 & 9 \\ 3 & 6 & 15 \end{bmatrix}$，$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则 $P^{2021}QR$ = ____________.

5. 设 A 为 3 阶实对称矩阵，$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ a+4 \\ -3 \end{bmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{bmatrix} a+1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，且 $A\alpha_1 = \alpha_1, A\alpha_2 = 2\alpha_2$，则 a = ___.

6. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 的秩为________.

二、(10 分) A 是三阶矩阵，α是三维列向量. 矩阵 $P = [\alpha, A\alpha, A^2\alpha]$可逆，并且 $A^3\alpha = 5A\alpha - 4A^2\alpha$.

(1) 求 B，使得 $A = PBP^{-1}$.

(2) 求$|A + E|$.

试卷编号：

三、(13 分) 线性方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 \\ x_1 + (a+3)x_2 + (a^2+3)x_3 = 3a+10 \end{cases}$，其中 a 为常数.

(1) 写出该方程组的增广矩阵;

(2) a 为何值时方程组有解？有解时求出所有的解.

四、(13 分) 设 V 是由 $\alpha_1 = [2,3,1,1]^T, \alpha_2 = [1,2,-1,1]^T$ 所张成的子空间，$\beta_1 = [4,7,-1,3]^T, \beta_2 = [3,4,3,1]^T$.

(1) 求子空间 V 的维数 $\dim(V)$;

(2) 判断是否有 $\beta_1 \in V, \beta_2 \in V$，并说明理由;

(3) β_1, β_2 是否是子空间 V 的基？请说明理由. 如果是, 求基 β_1, β_2 到基 α_1, α_2 的过渡矩阵.

五、(13 分) 三阶实对称矩阵 A 的三个特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$，且对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量为 $\alpha_1 = [1,1,-1]^T$，$\alpha_2 = [-2,-3,3]^T$.

(1) 求 A 的对应于特征值 $\lambda_3 = 2$ 的特征向量.

(2) 求正交矩阵 Q 及对角形矩阵Λ, 使 $Q^{-1}AQ = \Lambda$.

六、(13 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 矩阵 X 满足 $XA + 2B = AB + 2X$.

(1) 求 $(A-2E)^{-1}$.　(2)求 X^{2021}.

七、(10 分) 已知 $n \geq 2, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是常数，实二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1 + a_1x_2)^2 + (x_2 + a_2x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} + a_{n-1}x_n)^2 + (x_n + a_nx_1)^2$$

(1) 证明二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是正定或半正定的;

(2) 当且仅当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足什么条件时 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 正定?

八、(10 分) 证明题

(1) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的基础解系，证明：$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$，$\alpha_1 + 9\alpha_2 + 16\alpha_3$，$\alpha_1 - 3\alpha_2 - 4\alpha_3$ 也是 $AX = 0$ 的基础解系.

(2) 设 A 是 n 阶非零实矩阵$(n > 2)$, $A^{\mathrm{T}} = A^*$, 证明：A 是正交矩阵.