算法分析

刘权辉

2024 春

简要回顾

1. 算法的概念
2. 程序与算法的区别
3. 计算复杂性
4. 渐进复杂性
5. 算法描述语言

第二章：递归与分治

学习要点

- 理解递归的概念。
- 掌握设计有效算法的分治策略。
- 通过下面的范例学习分治策略设计技巧：
  - 二分搜索技术；
  - 大整数乘法；
  - Strassen矩阵乘法；
  - 棋盘覆盖；
  - 合并排序和快速排序；
  - 线性时间选择；
  - 最接近点对问题；
  - 循环赛日程表。

算法总体思想

- 递归与分治的目标：当求解的问题规模n较大时，算法时间复杂性高，甚至难以有效解决。
- 分治法的思想：将一个难以解决的大问题分割成一些规模较小的相同类子问题，以便各个击破，分而治之。

算法总体思想

- 若原问题可分割成k个子问题，$1 < k \le n$，且这些子问题均可解，并可利用这些子问题的解求出原问题的解，那么即可采用分治法求解。

- 如果子问题的规模仍然不够小，则再划分为k个子问题，如此递归的进行下去，直到问题规模足够小，很容易求出其解为止。

- 分治法产生的子问题通常是原问题的较小模式，可以采用递归技术解决。

- 将求出的小规模的问题的解合并为一个更大规模的问题的解，自底向上逐步求出原来问题的解。

2.1递归的概念

递归的概念

- 递归算法：直接或间接地调用自身的算法。
- 递归函数：用函数自身给出定义的函数。
- 由分治法产生的子问题往往是原问题的较小模式，这就为使用递归技术提供了方便。在这种情况下，反复应用分治手段，可以使子问题与原问题类型一致而其规模却不断缩小，最终使子问题缩小到很容易直接求出其解。

✓ 分治与递归像一对孪生兄弟，经常同时应用在算法设计之中，并由此产生许多高效算法。

例1 阶乘函数

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n(n-1)! & n > 0 \end{cases}$$

边界条件

递归方程

- 边界条件与递归方程是递归函数的二个要素，递归函数只有具备了这两个要素，才能在有限次计算后得出结果。

- **例2 Fibonacci数列：** 无穷数列1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，……，称为Fibonacci数列。它可以递归地定义为：

$$F(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 1 & n=1\\ F(n-1)+F(n-2) & n>1\end{cases}$$

边界条件

递归方程

- **第n个Fibonacci数可递归地计算如下：**

```
int fibonacci(int n){
    if (n <= 1) return 1;
    return fibonacci(n-1)+fibonacci(n-2);  }
```

递归的概念

- 当一个函数及它的一个变量是由函数自身定义时，称这个函数是**双递归函数**。

- **例3 Ackerman函数 A(n，m)**定义如下（了解）：

$$
\begin{cases}
A(1,0) = 2 & \\
A(0,m) = 1 & m \geq 0 \\
A(n,0) = n+2 & n \geq 2 \\
A(n,m) = A(A(n-1,m),m-1) & n,m \geq 1
\end{cases}
$$

- 前2例中的函数都可以找到相应的非递归方式定义：

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$$

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

✓ 本例中的Ackerman函数却无法找到非递归的定义。

口例3 Ackerman函数

$$\begin{cases} A(1,0)=2 & \\ A(0,m)=1 & m\ge 0 \\ A(n,0)=n+2 & n\ge 2 \\ A(n,m)=A(A(n-1,m),m-1) & n,m\ge 1 \end{cases}$$

➢A(n,m)的自变量m的每一个值都定义了一个单变量函数：

- m=0时，A(n,0)=n+2
- m=1时，A(n,1)=A(A(n-1,1),0)=A(n-1,1)+2，以及A(1,1)=2，故A(n,1)=2*n
- m=2时，A(n,2)=A(A(n-1,2),1)=2A(n-1,2)，和A(1,2)=A(A(0,2),1)=A(1,1)=2，故A(n,2)= 2^n 。
- m=3时，类似的可以推出 $\underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}}_{n}$
- m=4时，A(n,4)的增长速度非常快，以至于没有适当的数学式子来表示这一函数。

例4 排列问题

具体例子：{1,2,3} 的全排列

- 1 在第一个位置 + {2,3}的全排列 {1,2,3}; {1,3,2}
- 2 在第一个位置 + {1,3}的全排列 {2,1,3}, {2,3,1}
- 3 在第一个位置 + {1,2}的全排列 {3,1,2}, {3,2,1}

□例4 排列问题（一般化）

设计一个递归算法生成n个元素$\{r_1,r_2,\ldots,r_n\}$的全排列。

- 设集合$R=\{r_1,r_2,\ldots,r_n\}$是要进行排列的n个元素,$R_i=R-\{r_i\}$;
- 集合X中元素的全排列记为perm(X);
- (r_i)perm(X)表示在全排列perm(X)的每一个排列前加上前缀(r_i)得到的排列;
- R的全排列可归纳定义如下：

• 当n=1时，perm(R)=(r)，其中r是集合R中唯一的元素；
• 当n>1时，perm(R)由(r_1)perm(R_1)，(r_2)perm(R_2)，…，(r_n)perm(R_n)构成。

❑例4 排列问题(参考代码)

```
void Perm(int []a,int k, int m) //产生k:m间元素的排列
{
        if(k==m)        //只剩一个元素
        {
                for(i=0;i<=m;i++)
                {
                        cout<<a[i];
                }
                cout<<“\t”<<endl;
        }
        else    //还有多个元素待排列，递归产生排列
        {
                for(int i=k;i<=m;i++)
                { //将每个i作为排练第一个元素
                        Swap(a[k],a[i]);
                        Perm(a,k+1,m);
                        Swap(a[k],a[i]);        //数组复原
                }
        }
}
```

a	b	c	d	e

例5 整数划分问题

- 将正整数n表示成一系列正整数之和：$n=n_1+n_2+\ldots+n_k$，其中$n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k \geq 1$，$k \geq 1$。
- 正整数n的这种表示称为正整数n的划分。求正整数n的不同划分个数p(n)。
- 例如求正整数6的划分：

6； （共11种情况）

5+1；

4+2，4+1+1；

3+3，3+2+1，3+1+1+1；

2+2+2，2+2+1+1，2+1+1+1+1；

1+1+1+1+1+1。

例5 整数划分问题

- 前面的例子中，问题本身都具有比较明显的递归关系，因而容易用递归函数直接求解。
- 在本例中，如果设p(n)为正整数n的划分数，则难以找到递归关系，因此考虑增加一个自变量：将最大加数n_1不大于m的划分个数记作q(n,m), 可以建立q(n,m)的递归关系如下:

(1) q(n,1)=1,n≥1;

当最大加数n_1不大于1时，任何正整数n只有一种划分形式，即

$$n = \overbrace{1+1+\cdots+1}^{n}$$

(2) q(n,m)=q(n,n),m≥n;

最大加数n_1实际上不能大于n, 因此，q(1,m)=1。

递归的概念

(3) q(n,n)=1+q(n,n-1);

正整数n的划分由$n_1=n$的划分和$n_1 \le n-1$的划分组成。

(4) q(n,m)=q(n,m-1)+q(n-m,m),n>m>1;

正整数n的最大加数n_1不大于m的划分由$n_1 \le m-1$和$n_1=m$的划分的划分组成（后者意外着划分中，至少有一个m）。

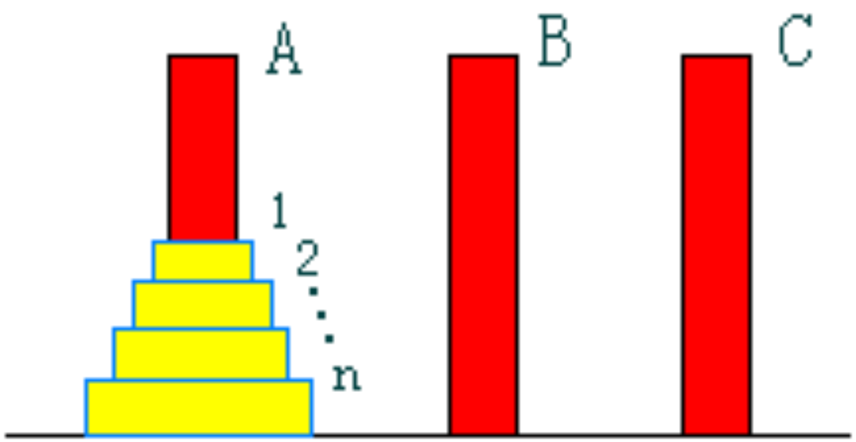
$$q(n,m)=\begin{cases} 1 & n=1, m=1 \\ q(n,n) & n<m \\ 1+q(n,n-1) & n=m \\ q(n,m-1)+q(n-m,m) & n>m>1 \end{cases}$$

正整数n的划分数p(n)=q(n,n)。

例6 Hanoi塔问题

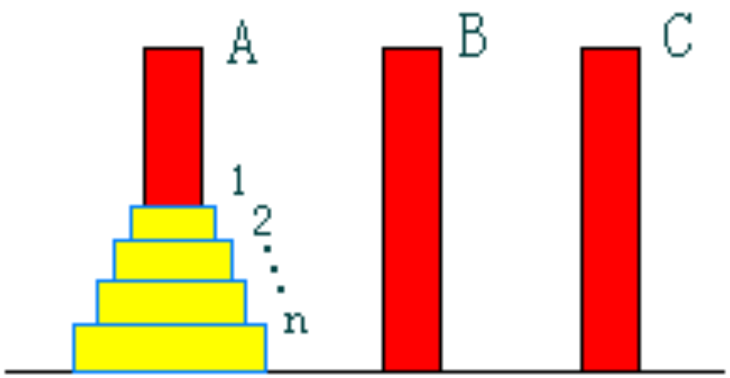
设A,B,C是3个塔座。开始时，在塔座A上有一叠共n个圆盘，这些圆盘自下而上，由大到小地叠在一起。各圆盘从小到大编号为1,2,…,n,现要求将塔座A上的这一叠圆盘移到塔座B上，并仍按同样顺序叠置。在移动圆盘时应遵守以下移动规则：

- 规则1：每次只能移动1个圆盘；
- 规则2：任何时刻都不允许将较大的圆盘压在较小的圆盘之上
- 规则3：在满足移动规则1和2的前提下，可将圆盘移至A,B,C中任一塔座上。



例6 Hanoi塔问题

```
//将a上的n个圆盘移动到b上
void hanoi(int n, int a, int b, int c)
  {
     if (n > 0)
     {
        hanoi(n-1, a, c, b);
        move(a,b);
        hanoi(n-1, c, b, a);
     }
  }
```



递归小结

- 优点：结构清晰，可读性强，而且容易用数学归纳法来证明算法的正确性，因此它为设计算法、调试程序带来很大方便。

- 缺点：递归算法的运行效率较低，无论是耗费的计算时间还是占用的存储空间都比非递归算法要多。

递归小结

- 解决方法：在递归算法中消除递归调用，使其转化为非递归算法。
  - 采用一个用户定义的栈来模拟系统的递归调用工作栈。该方法通用性强，但本质上还是递归，只不过人工做了本来由编译器做的事情，优化效果不明显。
  - 用递推来实现递归函数。

2.2分治的概念

分治的适用条件

- **分治法所能解决的问题一般具有以下几个特征**：
  - 该问题的规模缩小到一定的程度就可以容易地解决；
  - 该问题可以分解为若干个规模较小的相同问题，即该问题具有**最优子结构性质；**
  - 利用该问题分解出的子问题的解可以合并为该问题的解；
  - 该问题所分解出的各个子问题是相互独立的，即子问题之间不包含公共的子问题。

这条特征涉及到分治法的效率，如果各子问题是不独立的，则分治法要做许多不必要的工作，重复地解公共的子问题，此时虽然也可用分治法，但一般用**动态规划**较好。

分治法的基本步骤

```
divide-and-conquer(P)
{
    if ( | P | <= n0) adhoc(P);   //解决小规模的问题
    divide P into smaller subinstances P1,P2,...,Pk；//分解问题
    for (i=1,i<=k,i++)
        yi=divide-and-conquer(Pi);  //递归的解各子问题
    return merge(y1,...,yk);  //将各子问题的解合并为原问题的解
}
```

注意：

- 人们从大量实践中发现，在用分治法设计算法时，最好使子问题的规模大致相同。即将一个问题分成大小相等的k个子问题的处理方法是行之有效的。这种使子问题规模大致相等的做法是出自一种**平衡(balancing)子问题**的思想，它几乎总是比子问题规模不等的做法要好。

分治法的复杂性分析

- 分治法将规模为n的问题分成k个规模为n/m的子问题去解;
- 设分解阀值n0=1，且解解规模为1的问题耗费1个单位时间;
- 再设将原问题分解为k个子问题以及用merge将k个子问题的解合并为原问题的解需用f(n)个单位时间;
- 用T(n)表示该分治法解规模为|P|=n的问题所需的计算时间，则有：

$$T(n)=\begin{cases} O(1) & n=1 \\ kT(n/m)+f(n) & n>1 \end{cases}$$

通过迭代法求得方程的解：$T(n)=n^{\log_m k}+\sum_{j=0}^{\log_m n-1} k^j f(n/m^j)$

注意：递归方程及其解只给出n等于m的方幂时T(n)的值，但是如果认为T(n)足够平滑，那么由n等于m的方幂时T(n)的值可以估计T(n)的增长速度。通常假定T(n)是单调上升的，从而当$m^i \le n < m^{i+1}$时，$T(m^i) \le T(n) < T(m^{i+1})$。

简要回顾

1. 递归算法与递归函数、举例
2. 递归算法优点、缺点
3. 分治法适用条件
4. 分治法基本步骤、时间复杂度

例1 二分搜索问题：

给定已按升序排好序的n个元素a[0:n-1]，现要在这n个元素中找出一特定元素x。

分析

- ✓ 该问题的规模缩小到一定的程度就可以容易地解决；
- ✓ 该问题可以分解为若干个规模较小的相同问题;
- ✓ 分解出的子问题的解可以合并为原问题的解；
- ✓ 分解出的各个子问题是相互独立的。

分析：

- 很显然此问题分解出的子问题相互独立，即在**a[i]**的前面或后面查找**x**是独立的子问题，因此满足分治法的第四个适用条件。

□ **例1 二分搜索问题**：给定已按升序排好序的**n**个元素**a[0:n-1]**，现要在这**n**个元素中找出一特定元素**x**。

- 据此容易设计出**二分搜索算法**：

```
template<class Type>
int BinarySearch(Type a[], const Type& x, int l, int r){
    while (r >= l){
        int m = (l+r)/2;
        if (x == a[m])  return m;
        if (x < a[m])  r = m-1;
        else  l = m+1;
    }
    return  -1; }
```

算法复杂度分析：

- 每执行一次算法的while循环，待搜索数组的大小减少一半。因此，在最坏情况下，while循环被执行了O(logn) 次。
- 循环体内运算需要O(1) 时间，因此整个算法在最坏情况下的计算时间复杂性为O(logn) 。

例2 大整数乘法：请设计一个有效的算法，可以进行两个n位大整数的乘法运算

- 小学的方法：$O(n^2)$ ✘效率太低
- 分治法（X和Y是n位二进制整数）：

复杂度分析

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & n = 1 \\ 4T(n/2) + O(n) & n > 1 \end{cases}$$

$T(n)=O(n^2)$ ✘**没有改进**

$$X = a\ 2^{n/2} + b \qquad Y = c\ 2^{n/2} + d$$

$$XY = ac\ 2^n + (ad+bc)\ 2^{n/2} + bd$$

例2 大整数乘法

复杂度分析

$$T(n)=\begin{cases} O(1) & n=1 \\ 3T(n/2)+O(n) & n>1 \end{cases}$$

$T(n)=O(n^{\log 3})=O(n^{1.59})$ ✓**较大的改进**

为了降低时间复杂度，必须减少乘法的次数。

1. $XY = ac\,2^n + ((a-b)(d-c)+ac+bd)$

细节问题：

➢ 两个XY的复杂度都是$O(n^{\log 3})$，但考虑到a+c,b+d可能得到m+1位的结果，使问题的规模变大，故不选择第2种方案。

□例2 大整数乘法

- ➢小学的方法：$O(n^2)$ ✗效率太低
- ➢分治法: $O(n^{1.59})$ ✓较大的改进
- ➢更快的方法??

分析：

- ➢如果将大整数分成更多段，用更复杂的方式把它们组合起来，将有可能得到更优的算法。
- ➢最终的，这个思想导致了**快速傅利叶变换**(Fast Fourier Transform)的产生。该方法也可以看作是一个复杂的分治算法。

□例3 矩阵乘法：请设计一个有效的算法，可以进行两个矩阵的乘法

- A和B的乘积矩阵C中的元素C[i,j]定义为:

$$C[i][j]=\sum_{k=1}^{n}A[i][k]B[k][j]$$

分析：
- 若依定义来计算A和B的乘积矩阵C，则每计算C的一个元素C[i,j]，需做n次乘法和n-1次加法。
- 算出矩阵C的个元素所需的计算时间为O(n^3)。

- 传统方法：O(n^3)

例3 矩阵乘法

- **分治法:** 使用与上例类似的技术，将矩阵A，B和C中每一矩阵都分块成4个大小相等的子矩阵。由此可将方程C=AB重写为：

复杂度分析

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & n = 2 \\ 8T(n/2) + O(n^2) & n > 2 \end{cases}$$

T(n)=O(n³)

$$C_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}$$

$$C_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}$$

Strassen矩阵乘法

口例3 矩阵乘法

➢ 分治 … 次数。

复杂度分析

$$T(n)=\begin{cases} O(1) & n=2 \\ 7T(n/2)+O(n^2) & n>2 \end{cases}$$

T(n)=O($n^{\log 7}$) =O($n^{2.81}$)✓较大的改进

$$M_1 = A_{11}(B_{12} - B_{22})$$
$$M_2 = (A_{11} + A_{12})B_{22}$$
$$M_3 = (A_{21} + A_{22})B_{11}$$
$$M_4 = A_{22}(B_{21} - B_{11})$$
$$M_5 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22})$$
$$M_6 = (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22})$$
$$M_7 = (A_{11} - A_{21})(B_{11} + B_{12})$$

⟹

$$C_{11} = M_5 + M_4 - M_2 + M_6$$
$$C_{12} = M_1 + M_2$$
$$C_{21} = M_3 + M_4$$
$$C_{22} = M_5 + M_1 - M_3 - M_7$$

□例3 矩阵乘法

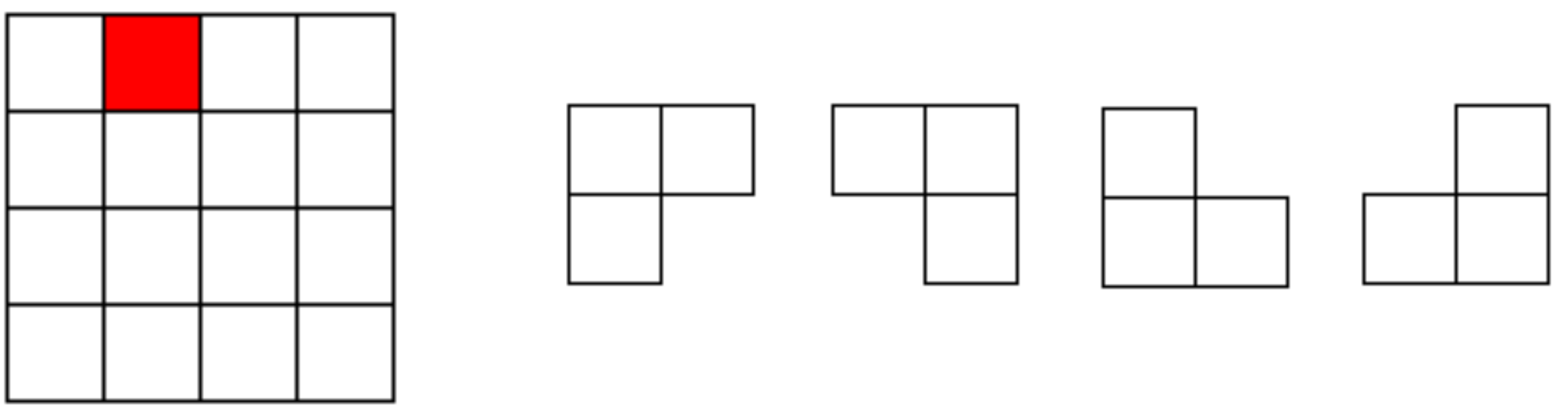
- 传统方法：$O(n^3)$
- 分治法: $O(n^{2.81})$
- 更快的方法??

分析：

- Hopcroft和Kerr已经证明(1971)，计算2个 2 × 2 矩阵的乘积，7次乘法是必要的。因此，要想进一步改进矩阵乘法的时间复杂性，就不能再基于计算2×2矩阵的7次乘法这样的方法了。或许应当研究 3 × 3 或 5 × 5 矩阵的更好算法。
- 在Strassen之后又有许多算法改进了矩阵乘法的计算时间复杂性。目前最好的计算时间上界是 $O(n^{2.376})$
- 是否能找到$O(n^2)$的算法？

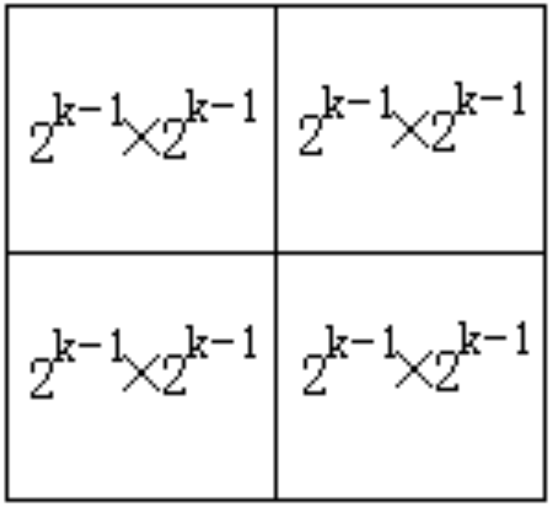
□例4 棋盘覆盖

在一个$2^k \times 2^k$ 个方格组成的棋盘中，恰有一个方格与其它方格不同，称该方格为一特殊方格，且称该棋盘为一特殊棋盘。在棋盘覆盖问题中，要用图示的4种不同形态的L型骨牌覆盖给定的特殊棋盘上除特殊方格以外的所有方格，且任何2个L型骨牌不得重叠覆盖。

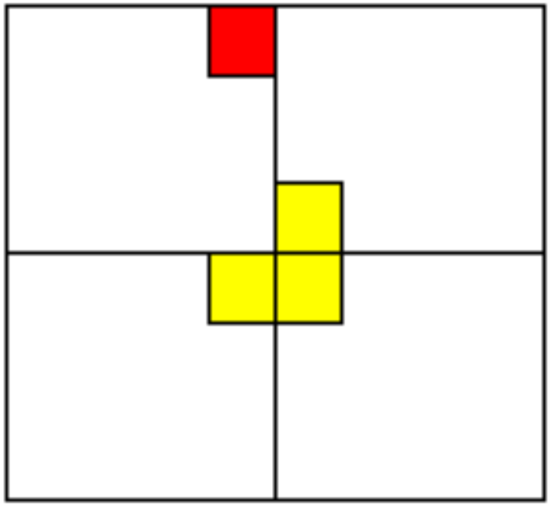


例4 棋盘覆盖分治法：

- 当k>0时，将$2^k \times 2^k$棋盘分割为4个$2^{k-1} \times 2^{k-1}$ 子棋盘如图(a)。
- 特殊方格必位于4个较小子棋盘之一中，其余3个子棋盘中无特殊方格。可将这3个无特殊方格的子棋盘转化为特殊棋盘，用一个L型骨牌覆盖这3个较小棋盘的会合处，如 图(b)，则将原问题转化为4个较小规模的棋盘覆盖问题。
- 递归地使用这种分割，直至棋盘简化为棋盘1×1。



(a)



(b)

棋盘覆盖

```
void chessBoard(int tr, int tc, int dr, int dc, int size)
  {
    if (size == 1) return;
    int t = tile++; // L型骨牌号
    s = size/2;  // 分割棋盘
    // 覆盖左上角子棋盘
    if (dr < tr + s && dc < tc + s){
          // 特殊方格在此棋盘中
    else {
     // 覆盖右上角子棋盘
    if (dr < tr + s && dc >= tc + s)
          // 特殊方格在此棋盘中
          chessBoard(tr, tc+s, dr, dc, s);}
    else {  // 此棋盘中无特殊方格
          // 用 t 号L型骨牌覆盖左下角
          board[tr + s - 1][tc + s] = t;
          // 覆盖其余方格
          chessBoard(tr, tc+s, tr+s-1, tc+s, s);}
          // 覆盖左下角子棋盘
    if (dr >= tr + s && dc < tc + s){
          // 特殊方格在此棋盘中
          chessBoard(tr+s, tc, dr, dc, s);}
          s);}
          chessBoard(tr+s, tc+s, dr, dc, s);}
    else {  // 用 t 号L型骨牌覆盖左上角
          board[tr + s][tc + s] = t;
          // 覆盖其余方格
          chessBoard(tr+s, tc+s, tr+s, tc+s, s);}
  }
```

复杂度分析

$$T(k)=\begin{cases} O(1) & k=0 \\ 4T(k-1)+O(1) & k>0 \end{cases}$$

$T(k)=O(4^k)$ 渐进意义下的最优算法

例5 合并排序

基本思

➤ 将待 … 分别

对2 … 合并

成为

复杂度分析

$$T(n)=\begin{cases} O(1) & n\le 1 \\ 2T(n/2)+O(n) & n>1 \end{cases}$$

T(n)=O(nlogn) 渐进意义下的最优算法

```
void mergeSort(Type a[], int left, int right) {
    if (left<right) {              //至少有2个元素
        int i=(left+right)/2;      //取中点
        mergeSort(a, left, i);
        mergeSort(a, i+1, right);
        merge(a, b, left, i, right);  //合并到数组b
        copy(a, b, left, right);      //复制回数组a
} }
```

例5 合并排序

递归调用过程

第n步 [49] [38] [65] [97] [76] [13] [27]

第3步 [38 49] [65 97] [13 76] [27]

第2步 [38 49 65 97] [13 27 76]

初始序列 [13 27 38 49 65 76 97]

- **最坏时间复杂度：O(nlogn)**
- **平均时间复杂度：O(nlogn)**
- **辅助空间：O(n)**

初始序列 [49] [38] [65] [97] [76] [13] [27]

第一步 [38 49] [65 97] [13 76] [27]

第二步 [38 49 65 97] [13 27 76]

第三步 [13 27 38 49 65 76 97]

例6 快速排序

基本思想：

- 对于输入数组**a[p:r]**，按以下步骤进行排序：
  1. 分解：以**a[q]**为基准，将数组分为**a[p:q-1], a[q], a[q+1:r]**三段且满足**a[p:q-1]**中元素小于等于**a[q]**，**a[q+1:r]**中元素大于等于**a[q]**
  2. 递归求解：递归地调用快速排序算法分别对**a[p:q-1]**和**a[q+1:r]**排序
  3. 合并：对于完成排序的**a[p:q-1], a[q], a[q+1:r]**直接合并即可

快速排序

分析：在快速排序中，记录的比较和交换是从两端向中间进行的，关键字较大的记录一次就能交换到后面单元，关键字较小的记录一次就能交换到前面单元，记录每次移动的距离较大，因而总的比较和移动次数较少。

```
template<class Type>
void QuickSort (Type a[], int p, int r){
    if (p<r) {
      int q=Partition(a,p,r);
      QuickSort (a,p,q-1); //对左半段排序
      QuickSort (a,q+1,r); //对右半段排序
    } }
```

template<class Type>

i:找比6大的数；j找比6小的数

int Partition (Type a[], int p, int r){

int i

初始序列

Ty

wh

--;

++;

--;

++;

复杂度分析

最差情况：

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & n \le 1 \\ 2T(n/2) + O(n) & n > 1 \end{cases}$$

T(n)=$O(n^2)$

最好情况：

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & n \le 1 \\ 2T(n/2) + O(n) & n > 1 \end{cases}$$

T(n)=O(nlogn)

a[p]

a[j] = x;

return j; }

{5, 2, 5} 6 {7, 8} 完成

快速排序

改进：快速排序算法的性能取决于划分的对称性。通过修改算法**partition**，可以设计出采用随机选择策略的快速排序算法。在快速排序算法的每一步中，当数组还没有被划分时，可以在a[p:r]中随机选出一个元素作为划分基准，这样可以使划分基准的选择是随机的，从而可以期望划分是较对称的。

```
template<class Type>
```

- **最坏时间复杂度：$O(n^2)$**
- **平均时间复杂度：O(nlogn)**
- **辅助空间：O(n)或O(logn)**

```
    Swap(a[i], a[p]);
    return Partition (a, p, r);
}
```

例7 线性时间选择

给定线性序集中n个元素和一个整数k，1≤k≤n，要求找出这n个元素中第k小的元素

- **模仿快速排序的思想**：
  1. 以**a[q]**为基准，将数组分为**a[p:q-1], a[q], a[q+1:r]**三段且满足**a[p:q-1]**中元素小于等于**a[q]**，**a[q+1:r]**中元素大于等于**a[q]**
  2. 判断：
     1. if q-p>=k，则第k小元素在**a[p:q-1]**中；
     2. else q-p+1==k，则第k小元素为**a[q]**；
     3. else，第k小元素在**a[q+1:r]**中，且为a[q+1:r] **中的第**k’=k-(q-p+1)小元素，递归调用

例7 线性时间选择

给定线性序集中n个元素和一个整数k，1≤k≤n，要求找出这n个元素中第k小的元素

```
template<class Type>
Type RandomizedSelect(Type a[],int p,int r,int k){
    if (p==r)    return a[p];
    int i=RandomizedPartition(a,p,r),
    j=i-p+1;                    //左边元素个数
    if (k<=j) return RandomizedSelect(a,p,i,k);
    else return RandomizedSelect(a,i+1,r,k-j);
}
```

分析：在最坏情况下，算法**randomizedSelect**需要$O(n^2)$计算时间。但可以证明，算法**randomizedSelect**可以在O(n)平均时间内找出n个输入元素中的第k小元素。

□例7 线性时间选择

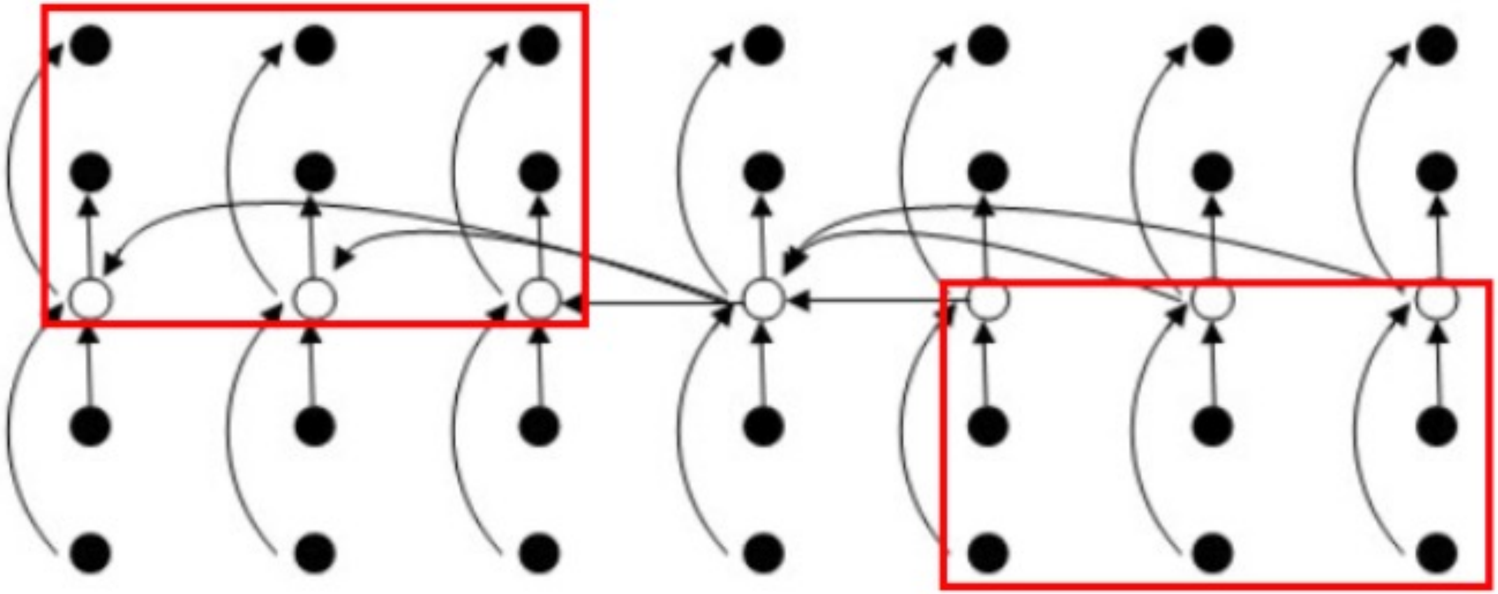
分析：

- 如果能在线性时间内找到一个划分基准，使得按这个基准所划分出的2个子数组的长度之和都至少为原数组长度的ε倍(0<ε<1是某个正常数)，那么就可以**在最坏情况下**用O(n)时间完成选择任务。
- 例如，若ε=9/10，算法递归调用所产生的子数组的长度至少缩短1/10。所以，在最坏情况下，算法所需的计算时间T(n)满足递归式 $T(n)\le T(9n/10)+O(n)$，由此可得 $T(n)=O(n)$。

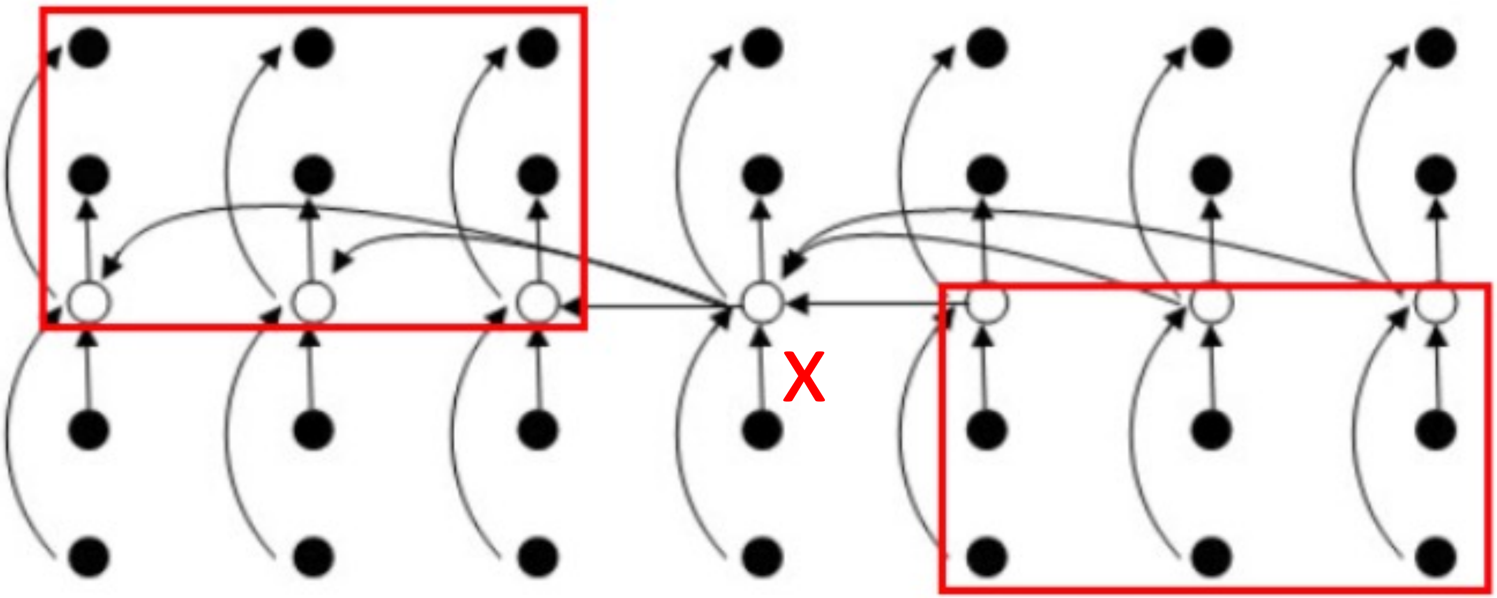
线性时间选择（了解）

线性时间基准选择:

- 将n个输入元素划分成⌈n/5⌉个组，每组5个元素，只可能有一个组不是5个元素。用任意一种排序算法，将每组中的元素排好序，并取出每组的中位数，共⌈n/5⌉个。
- 递归调用**select**来找出这⌈n/5⌉个元素的中位数。如果⌈n/5⌉是偶数，就找它的2个中位数中较大的一个。以这个元素作为划分基准。



线性时间选择（了解）



分析：设所有元素互不相同。在这种情况下，找出的基准x至少比$3\lfloor (n-5)/10 \rfloor$个元素大（$\lfloor (n-5)/10 \rfloor$表示中位数小于基准所在中位数的组数），因为在每一组中有2个元素小于本组的中位数，而n/5个中位数中又有$\lfloor (n-5)/10 \rfloor$个小于基准x。同理，基准x也至少比3(n-5)/10个元素小。而当n≥75时，$3\lfloor (n-5)/10 \rfloor \geq n/4$，所以按此基准划分所得的2个子数组的长度都至少缩短1/4。

线性时间选择（了解）

```
Type Select(Type a[], int p, int r, int k){
    if (r-p<75) {    return a[p+k-1];  } //排序算法对a[p:r]排序
    for ( int i = 0; i<=(r-p-4)/5; i++ ) {
   //将a[p+5*i]至a[p+5*i+4]的第3小元素与a[p+i]交换位置;
  //找中位数的中位数，r-p-4即上面所说的n-5
        Type x = Select(a, p, p+(r-p-4)/5, (r-p-4)/10);
        int i=Partition(a,p,r, x),
        j=i-p+1;
        if (k<=j)     return Select(a,p,i,k);
        else          return Select(a,i+1,r,k-j);
        }
}
```

线性时间选择（了解）

复杂度分析

$$T(n) \le \begin{cases} C_1 & n < 75 \\ C_2 n + T(n/5) + T(3n/4) & n \ge 75 \end{cases}$$

T(n)=**O(n)**

分析：
上述算法将每一组的大小定为5，并选取75作为是否作递归调用的分界点。这2点保证了T(n)的递归式中2个自变量之和n/5+3n/4=19n/20=εn，0<ε<1。这是使T(n)=O(n)的关键之处。当然，除了5和75之外，还有其他选择。

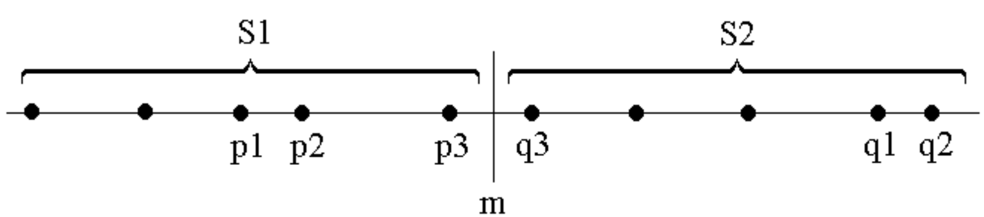
□ 例7 最接近点对问题

考虑**一维**：

- 此时，S中的n个点退化为x轴上的n个实数 x1,x2,…,xn。最接近点对即为这n个实数中相差最小的2个实数。

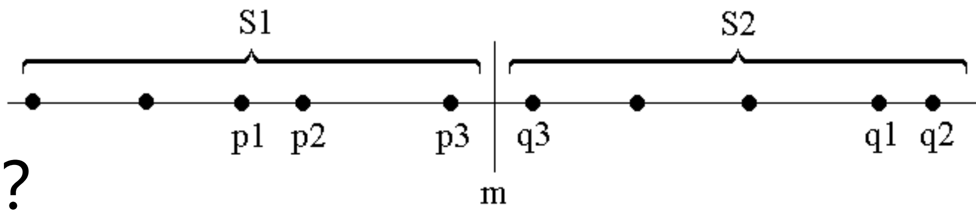
分析：

- 假设我们用x轴上某个点m将S划分为2个子集S1和S2 ，基于**平衡子问题**的思想，用S中各点坐标的中位数来作分割点。
- 递归地在S1和S2上找出其最接近点对{p1,p2}和{q1,q2}，并设d=min{|p1-p2|,|q1-q2|}，S中的最接近点对或者是{p1,p2}，或者是{q1,q2}，或者是某个{p3,q3}，其中p3∈S1且q3∈S2。
- 能否在线性时间内找到p3,q3？



最接近点对问题（了解）

例7 最接近点对问题



➢ 能否在线性时间内找到p3,q3？

分析：

如果S的最接近点对是{p3,q3}，即|p3-q3|<d，则p3和q3两者与m的距离不超过d，即**p3∈(m-d,m]，q3∈(m,m+d]**。由于在S1中，每个长度为d的半闭区间至多包含一个点（否则必有两点距离小于d），并且m是S1和S2的分割点，因此(m-d,m]中至多包含S中的一个点。由图可以看出，**如果(m-d,m]中有S中的点，则此点就是S1中最大点; 如果(m,m+d]中有S中的点，则此点就是S2中最小点。**

因此，我们用线性时间就能找到区间(m-d,m]和(m,m+d]中所有点，即p3和q3。**从而我们用线性时间就可以将S1的解和S2的解合并成为S的解。**

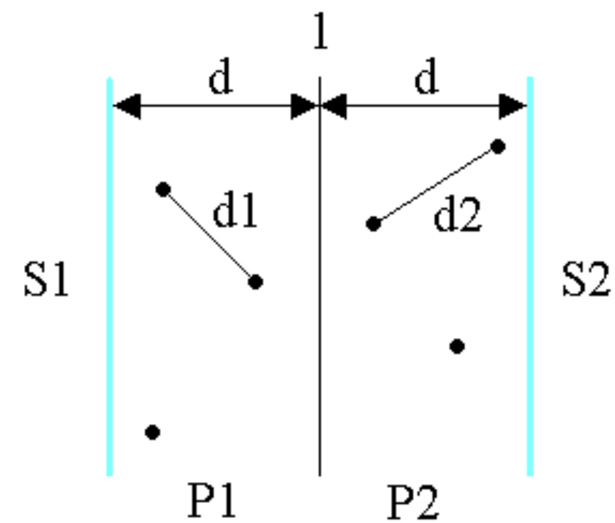
最接近点对问题（了解）

□ 例7 最接近点对问题

- 考虑二维的情形

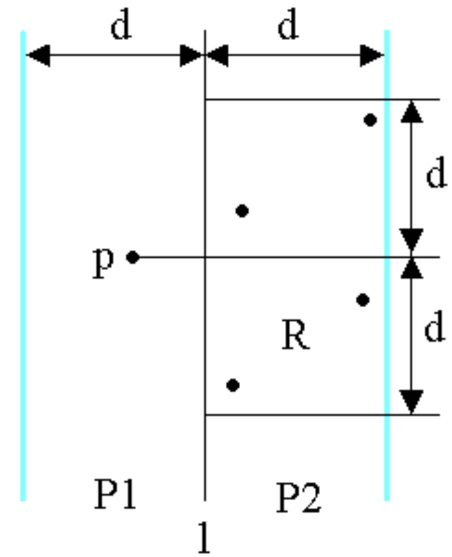
分析：

- 选取一垂直线**l:x=m**来作为分割直线。其中m为S中各点x坐标的中位数。由此将S分割为S1和S2。
- 递归地在S1和S2上找出其最小距离d1和d2，并设**d=min{d1,d2}**，S中的最接近点对或者是d，或者是某个{p,q}，其中p∈P1且q∈P2。
- 能否在线性时间内找到p,q？



例7 最接近点对问题

- 能否在线性时间内找到p3,q3？



分析：

- 考虑P1中任意一点p，它若与P2中的点q构成最接近点对的候选者，则必有distance(p，q) < d。**满足这个条件的P2中的点一定落在一个d×2d的矩形R中**
- 由d的意义可知，P2中任何2个S中的点的距离都不小于d。由此可以推出**矩形R中最多只有6个S中的点**。
- 因此，在分治法的合并步骤中**最多只需要检查6×n/2=3n个候选者**

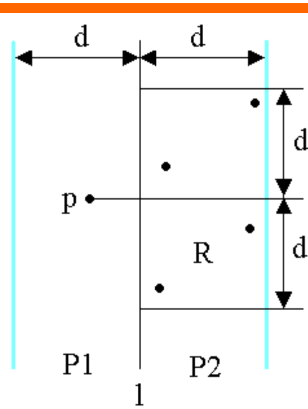
例7 最接近点对问题

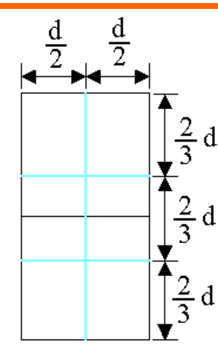
证明:

- 将矩形R的长为2d的边3等分，将它的长为d的边2等分，由此导出6个(d/2)×(2d/3)的矩形。若矩形R中有多于6个S中的点，则由鸽舍原理易知至少有一个(d/2)×(2d/3)的小矩形中有2个以上S中的点。设u，v是位于同一小矩形中的2个点，则

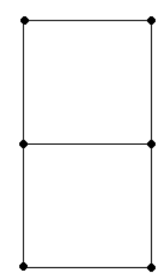
$$(x(u)-x(v))^2+(y(u)-y(v))^2 \le (d/2)^2+(2d/3)^2=\frac{25}{36}d^2$$

distance(u,v)<d。这与d的意义相矛盾。





(a)



(b)

例7 最接近点对问题

确定检查点：

- 为了确切地知道要检查哪6个点，可以将p和P2中所有S2的点投影到垂直线l上。由于能与p点一起构成最接近点对候选者的S2中点一定在矩形R中，所以它们在直线l上的投影点距p在l上投影点的距离小于d。由上面的分析可知，这种投影点最多只有6个。
- 因此，若将P1和P2中所有S中点按其y坐标排好序，则对P1中所有点，对排好序的点列作一次扫描，就可以找出所有最接近点对的候选者。对P1中每一点最多只要检查P2中排好序的相继6个点。

最接近点对问题（了解）

double cpair2(S){

n=|S|;

if (n < 2) **return** ?;

1、 m=S中各点x间坐标的中位数;

构造S1

//S1={p

S2={p∈

2、 d1=cp

d2=**cpair2**(S2);

3、 dm=**min**(d1,d2);

复杂度分析

$$T(n)=\begin{cases} O(1) & n<4 \\ 2T(n/2)+O(n) & n\geq 4 \end{cases}$$

T(n)=O(nlogn)

4、设P1是S1中距垂直分割线l的距离在dm之内的所有点组成的集合；P2是S2中距分割线l的距离在dm之内所有点组成的集合；

将P1和P2中点依其y坐标值排序；并设X和Y是相应的已排好序的

个点

所有

移动

dm

的区间内移动；

设dl是按这种扫描方式找到的点对间的最小距离；

6、d=**min**(dm,dl);

return d;

}

例8 循环赛日程表

设$n=2^k$个运动员，设计一个满足以下要求的比赛日程表：

(1)每个选手必须与其他n-1个选手各赛一次；

(2)每个选手一天只能赛一次；

(3)循环赛一共进行n-1天。

基本思想：

- 按分治策略，将所有的选手分为两半，n个选手的比赛日程表就可以通过为n/2个选手设计的比赛日程表来决定。递归地用对选手进行分割，直到只剩下2个选手时，比赛日程表的制定就变得很简单。这时只要让这2个选手进行比赛就可以了。

口例8 循环赛日程表 (n 行，n-1列)

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	4	3	6	5	8	7
3	4	1	2	7	8	5	6
4	3	2	1	8	7	6	5
5	6	7	8	1	2	3	4
6	5	8	7	2	1	4	3
7	8	5	6	3	4	1	2
8	7	6	5	4	3	2	1

Data Intelligence & Computing Art Laboratory

End