3. 解：(1) 二次型的矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{bmatrix}$

(2) $|\lambda E-A|=(\lambda-8)(\lambda+1)^2$，得 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=8$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时，解 $(-E-A)x=0$ 得基础解系 $\alpha_1=(1,0,-1)^T$，$\alpha_2=(0,2,-1)^T$

当 $\lambda_3=8$ 时，解 $(8E-A)x=0$ 得基础解系 $\alpha_3=(2,1,2)^T$.

将 α_1,α_2 正交化：$\beta_1=\alpha_1=(1,0,-1)^T$，$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(-\frac{1}{2},2,-\frac{1}{2})^T$

将 β_1,β_2 单位化得 $\eta_1=(\frac{\sqrt2}{2},0,-\frac{\sqrt2}{2})^T$，$\eta_2=(-\frac{1}{3\sqrt2},\frac{4}{3\sqrt2},-\frac{1}{3\sqrt2})^T$.

将 α_3 单位化得 $\eta_3=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})^T$.

令 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\sqrt2/2&-\sqrt2/6&2/3\\0&2\sqrt2/3&1/3\\-\sqrt2/2&-\sqrt2/6&2/3\end{pmatrix}$. 令 $x=Qy$，得 $f(x_1,x_2,x_3)=-y_1^2-y_2^2+8y_3^2$.

四. 证明题(每题8分，共16分)

1. 证明：采用反证法. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta+\gamma$ 线性相关，则存在不全为0的数 k_1,k_2,k_3,k_4，

使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4(\beta+\gamma)=0$. 若 $k_4=0$，则 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$.

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关知 $k_1=k_2=k_3=0$. 与 k_1,k_2,k_3,k_4 不全为0矛盾. 从而 $k_4\neq0$.

则 $\gamma=-\frac{k_1}{k_4}\alpha_1-\frac{k_2}{k_4}\alpha_2-\frac{k_3}{k_4}\alpha_3-\beta$. 而 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

所以 γ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，与已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma$ 线性无关矛盾. 得证.

2. 证明：A是实对称阵，存在正交阵Q，使得 $Q^TAQ=diag(\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_n)$

作正交变换 $x=Qy$，其中 $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)^T$. 必有

$\|x\|^2=\|Qy\|^2=(Qy)^T(Qy)=y^TQ^TQy=y^Ty=\|y\|^2$. 即正交变换保持长度不变

当 $\|x\|^2=1$ 时，则 $\|y\|^2=1$.

$f(x)=x^TAx=(Qy)^TA(Qy)=y^TQ^TAQy=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\dots+\lambda_ny_n^2$

由于 $\lambda_1\le\lambda_2\le\dots\le\lambda_n$，从而有

$\lambda_1=\lambda_1(y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2)\le\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\dots+\lambda_ny_n^2$

$\le\lambda_ny_1^2+\lambda_ny_2^2+\dots+\lambda_ny_n^2=\lambda_n$.

即 $\lambda_1\le x^TAx\le\lambda_n$.