有限生成Abel群(一)

张起帆

四川大学数学学院

email: qifanzhang@scu.edu.cn

2020 年 3 月 30 日

内容提要

有限生成abel群的结构定理

定理

对任何有限生成*abel*群M，存在唯一的非负整数r, m, 和m个大于*1*的整数$d_1|d_2|\cdots|d_m$，使得

$$M \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_m\mathbb{Z}.$$

有限生成abel群的结构定理

注记 若$r=0$，则前面部分$\mathbb{Z}^r$消失，若$m=0$，则后面部分消失. 因为这里关心的是分类，所以有外直和，意味着一个有限生成abel群对应一组数据$(r, m, d_1, ..., d_m)$.

用内直和的语言，就是存在M中若干(可以是0)个无限阶元$\alpha_1, ..., \alpha_r$，和若干(可以是0)个阶数有整除关系的有限阶元$\beta_1, ..., \beta_m$，满足

$$M = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \cdots \mathbb{Z}\alpha_r \oplus \mathbb{Z}\beta_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\beta_m.$$

有限生成abel群的结构定理

注记 若$r=0$, 则前面部分$\mathbb{Z}^r$消失, 若$m=0$, 则后面部分消失. 因为这里关心的是分类, 所以有外直和, 意味着一个有限生成abel群对应一组数据$(r, m, d_1, ..., d_m)$.

用内直和的语言, 就是存在M中若干(可以是0)个无限阶元$\alpha_1, ..., \alpha_r$, 和若干(可以是0)个阶数有整除关系的有限阶元$\beta_1, ..., \beta_m$, 满足

$$M=\mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \cdots \mathbb{Z}\alpha_r \oplus \mathbb{Z}\beta_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\beta_m.$$

有限生成abel群的结构定理

定理赏析 如何找出尽可能多(最好是全部)的有限生成abel群?

首先想到由一个元生成的，那就是无限循环群$\mathbb{Z}$和有限循环群$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. 然后想到把有限个循环群做直和. 定理告诉我们这样已经给出了全部，并且有限群部分还有某种标准表示法使得唯一性成立.

例：$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ (用孙子定理)

$\mathbb{Z}/45\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/75\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/9 \times 25\mathbb{Z}$ (反复用孙子定理)

有限生成abel群的结构定理

定理赏析 如何找出尽可能多(最好是全部)的有限生成abel群?

首先想到由一个元生成的，那就是无限循环群$\mathbb{Z}$和有限循环群$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. 然后想到把有限个循环群做直和. 定理告诉我们这样已经给出了全部，并且有限群部分还有某种标准表示法使得唯一性成立.

例：$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ (用孙子定理)

$\mathbb{Z}/45\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/75\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/9 \times 25\mathbb{Z}$ (反复用孙子定理)

有限生成abel群的结构定理

与循环群类似有：n个元生成的abel群同构于$\mathbb{Z}^n$的商，研究有限生成abel群的分类就是分类$\mathbb{Z}^n$的商．先描述$\mathbb{Z}^n$．

- 有限生成的自由abel群 同构于某个$\mathbb{Z}^n$的群称为有限生成的自由abel 群，n称为群的秩．
- 基 若abel群G中有元素$e_1, ..., e_n$满足

  1) $G = \mathbb{Z}e_1 + \cdots + \mathbb{Z}e_n$

  2) $a_1e_1 + \cdots + a_ne_n = 0 \Longleftrightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0$，

  则称$e_1, ..., e_n$为G的一组基．

有限生成abel群的结构定理

基可等价地描述为$G = \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_n$且每个$e_i$是无限阶．显然一个群有这样一组基等价于这个群同构于$\mathbb{Z}^n$.

注意：一旦有基，就会有大量的基，给一组基就是给一种同构于$\mathbb{Z}^n$的方式.

有限生成abel群的结构定理

现在我们有定理证明的方案如下.

1. 证明有限生成abel群同构于有限生成自由abel群的商.

这一步的证明只需同态基本定理, 完全平行于研究循环群的方法. 第一步把问题化为分类有限生成自由abel群的商.

有限生成abel群的结构定理

2. 研究有限生成自由abel群的子群的结构，有下列结论：

秩为n的自由abel群的子群一定是秩$\leq n$的自由abel群.

应注意的是真子群的秩可以为n，自己举例．这一步的证明需用到下列引理：

引理

(钟无倦)设G是abel群，若有$H < G$，使得H和G/H分别是秩为m和n的自由abel群，则G是秩为$m+n$的自由abel群.

有限生成abel群的结构定理

2. 研究有限生成自由abel群的子群的结构，有下列结论：

秩为n的自由abel群的子群一定是秩$\leq n$的自由abel群.

应注意的是真子群的秩可以为n，自己举例．这一步的证明需用到下列引理：

引理

(钟无倦)设G是abel群，若有$H < G$，使得H和G/H分别是秩为m和n的自由abel群，则G是秩为$m+n$的自由abel群.

有限生成abel群的结构定理

3. 设G是秩为n的自由abel群，对什么特殊的子群H，G/H的结构简单、清晰？

有如下命题：

命题

(王玖玮)若abel群G有一组基$e_1, \ldots, e_n$，子群H有一组基$d_1e_1, \ldots, d_me_m$，$m \le n$，则

$$G/H \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{n-m}.$$

有限生成abel群的结构定理

3. 设G是秩为n的自由abel群，对什么特殊的子群H，G/H的结构简单、清晰？

有如下命题：

命题

(王玖玮)若abel群G有一组基$e_1, \ldots, e_n$，子群H有一组基$d_1e_1, \ldots, d_me_m$，$m \leq n$，则

$$G/H \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{n-m}.$$

有限生成abel群的结构定理

4. 证明3中的特殊情形并不特殊，原因是基是很多的，对任意H，可选择你需要的(G和H的)基.

命题

(郭汝驰) 若$e_1,...,e_n$是*abel*群G的基，则对任意矩阵$A \in GL(n,\mathbb{Z})$，$(e_1',...,e_n') = (e_1,...,e_n)A$也是基，并且这给出了全部基.

命题

(钟友林) 设G是秩为n的自由*abel*群，H是秩为m的子群，则存在G的一组基$e_1,...,e_n$和子群H的一组基$d_1e_1,...,d_me_m$，且$d_1|\cdots|d_m$.

“存在性部分”证明

1、归结为自由abel群的商.

设M是由n个元$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$生成的abel群，定义$\mathbb{Z}^n$到$M$的同态

$$\phi : (a_1, \ldots, a_n) \longmapsto a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n$$

它当然是满同态，由同态基本定理知道

$$M \cong \mathbb{Z}^n/\textbf{Ker}\phi$$

于是分类M变成了分类$\mathbb{Z}^n$的各种商群.

“存在性部分”证明

2、对$\mathbb{Z}^n$的特殊子群做商．具体说证明如下结论．

对以$e_1, ..., e_n$为基的自由abel群G和以$\varepsilon_1 = d_1e_1, ..., d_me_m$，$m \leq n$为基的子群$H$，必有

$$G/H \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{n-m}.$$

证明只需做G到$\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{n-m}$的映射

$$d_1e_1 + \cdots + d_ne_n \longmapsto (\overline{d_1}, ..., \overline{d_m}, d_{m+1}, ..., d_n).$$

经检查，它是满同态且以H作为核.

“存在性部分”证明

2、对$\mathbb{Z}^n$的特殊子群做商. 具体说证明如下结论.

对以$e_1, \dots, e_n$为基的自由abel群G和以$\varepsilon_1 = d_1 e_1, \dots, d_m e_m$，$m \leq n$为基的子群$H$，必有

$$G/H \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{n-m}.$$

证明只需做G到$\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{n-m}$的映射

$$d_1 e_1 + \cdots + d_n e_n \longmapsto (\overline{d_1}, \dots, \overline{d_m}, d_{m+1}, \dots, d_n).$$

经检查，它是满同态且以H作为核.

“存在性部分”证明

3、证明一般情形可以约化到上述情形，并且可以进一步要求$d_1, ...d_n$有整除关系.

(1) 证明(秩有限的)自由abel群的子群也自由，且秩不超过原来的群的秩. (做约定，0元构成的群也称自由，秩为0). 这里需要一个引理

引理

若abel群G有子群H使得，H和G/H是自由的，秩分别为m和n，则G是秩为$m+n$的自由abel群.

“存在性部分”证明

3、证明一般情形可以约化到上述情形，并且可以进一步要求$d_1, ...d_n$有整除关系.

(1) 证明(秩有限的)自由abel群的子群也自由，且秩不超过原来的群的秩. (做约定，0元构成的群也称自由，秩为0). 这里需要一个引理

引理

若abel群G有子群H使得，H和G/H是自由的，秩分别为m和n，则G是秩为$m+n$的自由abel群.

“存在性部分”证明

引理的证明 设$e_1, ..., e_m$是H的基，$\overline{\varepsilon_1}, ..., \varepsilon_n$是$G/H$的基，我们来证明$e_1, ..., e_m, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$正好是$G$的基.

首先证明是生成元：对任意$x \in G$，由$\overline{\varepsilon_1}, ..., \varepsilon_n$是$G/H$的基知存在整数$b_1, ..., b_n$满足

$$\overline{x} = b_1\overline{\varepsilon_1} + \cdots + b_n\overline{\varepsilon_n} = \overline{b_1\varepsilon_1 + \cdots + b_n\varepsilon_n}$$

即$x = h + b_1\varepsilon_1 + \cdots + b_n\varepsilon_n, h \in H$，再利用$e_1, ..., e_m$是$H$的基可知

$$x = a_1e_1 + \cdots + a_me_m + b_1\varepsilon_1 + \cdots + b_n\varepsilon_n.$$

“存在性部分”证明

再证明$e_1, ..., e_m, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$线性无关. 设有整数$a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_n$满足

$$a_1e_1 + \cdots + a_me_m + b_1\varepsilon_1 + \cdots + b_n\varepsilon_n = 0$$

放入商群中有

$$b_1\overline{\varepsilon_1} + \cdots + b_n\overline{\varepsilon_n} = \overline{0}$$

由$\overline{\varepsilon_1}, ..., \overline{\varepsilon_n}$是$G/H$的基知$b_1 = \cdots = b_n = 0$, 于是

$$a_1e_1 + \cdots + a_me_m = 0,$$

再利用$e_1, ..., e_m$是H的基可知每个$a_i = 0$. 证毕.

“存在性部分”证明

这个引理结合1实际上告诉我们

一个abel群是有限生成自由的当且仅当存在一个子群使得子群和商群都是有限生成自由的，且它们的秩有和关系.

现在可以证明(1). 设M是秩为n的自由abel群，对M的秩做归纳，$n=1$时以前已经知道子群的结构，确实是秩不超过1的自由abel群. 现设$n>1$，且结论对秩$<n$的群已经成立.

“存在性部分”证明

这个引理结合1实际上告诉我们

一个abel群是有限生成自由的当且仅当存在一个子群使得子群和商群都是有限生成自由的，且它们的秩有和关系.

现在可以证明(1). 设M是秩为n的自由abel群，对M的秩做归纳，$n=1$时以前已经知道子群的结构，确实是秩不超过1的自由abel群. 现设$n>1$，且结论对秩$<n$的群已经成立.

“存在性部分”证明

先取M的一个特殊的子群H使得H和M/H都自由，且秩都严格>0和$<n$（只需将M的一组基分成两块即可）。现设G是M的任意子群，那么$G\cap H < H$，由归纳假设知

I. $G\cap H$是自由的。

此外，$G/G\cap H \cong G+H/H < M/H$，再用归纳假设知

II. $G/G\cap H$是自由的。

结合上述**I**，**II**和引理知G自由且秩不超过n。

“存在性部分”证明

(2)证明以下结论

若abel群M有一组基$e_1, ..., e_n$，则M有大量基，且全部基是：

$$(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = (e_1, ..., e_n)A, A\text{跑遍}GL(n, \mathbb{Z}).$$

首先由$e_1, ..., e_n$是基知任一组元$\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$必可唯一表为上式，不过只能保证$A \in M_n(\mathbb{Z})$．需要说明

$\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$是基，当且仅当$A$可逆．(*)

“存在性部分”证明

下面证明(∗)成立. 必要性: 由于$\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$是基, 有矩阵$B \in M_n(\mathbb{Z})$使得

$$(e_1, ..., e_n) = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)B.$$

故

$$(e_1, ..., e_n) = (e_1, ..., e_n)AB.$$

从而$AB = I_n$, 即$A \in GL(n, \mathbb{Z})$.

充分性: 取行向量$X \in \mathbb{Z}^n$, 使得$(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = 0$, 即

$$(e_1, ..., e_n)AX = 0$$

而$e_1, ..., e_n$是基, 故$AX = 0$, 从而$X = 0$, 即$\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$是基. □

“存在性部分”证明

(3) 设M是秩为n的自由abel群，$N < M$是秩为m的子群，则存在M的一组基$e_1, ..., e_n$，和N的一组基$d_1e_1, ..., d_me_m$，且有$d_1 | \cdots | d_m$.

首先任取M和N的各一组基$e'_1, ..., e'_n$和$\varepsilon'_1, ..., \varepsilon'_m$，则有整数矩阵$A$满足

$$(\varepsilon'_1, ..., \varepsilon'_m) = (e'_1, ..., e'_n)A.$$

“存在性部分”证明

由(2)知只要取矩阵$P \in GL(n, \mathbb{Z}), Q \in GL(m, \mathbb{Z})$，我们可得到$M$和$N$的另外各一组基$e_1, \ldots, e_n$和$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$满足

$$(e_1, \ldots, e_n) = (e'_1, \ldots, e'_n)P$$

$$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) = (\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_m)Q.$$

综合各式有

$$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) = (e_1, \ldots, e_n)P^{-1}AQ.$$

“存在性部分”证明

我们需要的变成寻找适当可逆矩阵P、Q使得$P^{-1}AQ$成为对角形，且元素有整除关系. 这归结为如下引理：

引理

对任何$n \times m$整数矩阵A，存在可逆方阵P、Q使得PAQ成为成为对角形，且元素有整除关系.

“存在性部分”证明

引理的证明： 先定义三类初等行(列)变换：

1. 将矩阵的某一行(或列)乘以一个$\mathbb{Z}$的单位，即± 1
2. 将两行(或列)交换
3. 将某一行(或列)乘以一个元素加到另一行(或列)上

与一般线性代数一样，做一个初等行(列)变换等于左(右)乘相应的初等矩阵，因此只需证任意矩阵可经过有限步初等变换化成标准形.

在$\mathbb{Z}$中引进偏序：若$0 < |a| < |b|$，我们说$a < b$，再规定0是最大的；对矩阵A, B，也可按矩阵的元的最小者定义$A < B$.

“存在性部分”证明

现分几步完成证明.

第一步. 需证明以下结论

若非零矩阵A的某一最小元不整除其它某个元，则A等价于某一更小的矩阵.

首先，通过行列交换将A中最小的元移到第一行第一列，不妨设$A=(a_{ij})$，a_{11}是最小的.

第一种情形：若有某一$a_{i1}\not\equiv 0 \pmod{a_{11}}$，通过带余除法知可做初等行变换得到矩阵$(b_{ij})$，满足$b_{i1}<a_{i1}$.

“存在性部分”证明

第二种情形：若a_{11}整除第一行和第一列上所有的元，此时可设$a_{11} \nmid a_{ij}$，$i > 1, j > 1$．于是可将A变为$A' = (a'_{ij})$，其中$a'_{11} = a_{11}$，$a'_{i1} = a'_{1j} = 0$．由于做这些变换时，所有元都保持$\bmod a_{11}$不变，因此有$a'_{11} \nmid a'_{ij}$．将A'的第i行加到第一行上得到一个新的矩阵(c_{ij}),满足$c_{11} = a'_{11} = a_{11}$，但$c'_{11} \nmid c'_{ij}$，这就划归第一种情形.

“存在性部分”证明

第二步. 证明非零矩阵A等价于如下形状的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

这里$a_1 \in R, A_1$是$n-1$阶方阵，且a_1整除A_1的所有元.

因为不能有无限长的矩阵列

$$C_1 > C_2 > \cdots,$$

故由第一步的结论知A可化为$B=(b_{ij})$，它满足：B的最小元整除其它所有元，不妨设b_{11}就是最小元，它整除任何b_{ij}.

“存在性部分”证明

于是可做(第3类)初等行列变换将B变成第一行和第一列上所有的元都是0的矩阵，同样地在变换中所有的元素都保持$\mathrm{mod}\, a_{11}$不变，故变成了我们需要的形状.

通过前两步知对n做归纳可得结论.