

四川大学期末考试试题（闭卷）
（2021——2022 学年第 2 学期） A 卷

课程号：201080030 课序号： 课程名称：线性代数（理工） 任课教师： 成绩：
适用专业年级：2021 学生人数： 印题份数： 学号： 姓名：

考生承诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

- 1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；
- 2、不带手机进入考场；
- 3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

一、填空题：（每题 3 分，共 18 分）

- 1、设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量，

记矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ ，矩阵 $B = [\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3]$ ，

如果 $|A| = 1$ ，那么 $|B| =$ _____

- 2、设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，则 $A^{2022} - 2A^{2021} =$ _____

- 3、设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ ，当参数 $\lambda =$ _____ 时，矩阵 A 的秩最小。

- 4、三阶矩阵 A 的特征值为 1, 1, 2，则行列式 $\left| \left(\frac{1}{3} A^2 \right)^{-1} + \frac{1}{2} A^* - E \right| =$ _____

- 5、二维平面上的向量 $\beta = (5, 6)^T$ 在基 $\alpha_1 = (1, 2)^T, \alpha_2 = (3, 4)^T$ 下的坐标为 _____

- 6、设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - ax_2)^2 + (x_2 - bx_3)^2 + (x_3 - cx_1)^2$ ，当且仅当 a, b, c 满足 _____ 条件时，该二次型 f 正定。

二、解答题：（共 68 分）

- 1、（12 分）设向量 $\alpha = (1, 2)^T, \beta = \left(1, \frac{1}{2}\right)^T, \gamma = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 16 & 8 \end{bmatrix}$ ，令 $A = \alpha\beta^T, B = \beta^T\alpha$ ，其中 β^T 表示列

向量 β 的转置, 求解方程 $2B^2 A^2 X = A^4 X + B^3 X + \gamma$

2、(14 分) 考虑如下非齐次方程组 $I: \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$ 与非齐次方程组

$$II: \begin{cases} x_1 + ax_2 - x_3 - x_4 = -5 \\ bx_2 - x_3 - 2x_4 = -11 \\ x_3 - 2x_4 = -c + 1 \end{cases}$$

(1) 求解方程组 I , 用导出组基础解系表示通解;

(2) 方程组 I 与方程组 II 同解, 求参数 a, b, c 的值.

3、(12 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 8 & -4 \end{bmatrix}$,

(1) 请给出矩阵 A 的列向量组的一个极大无关组;

(2) 矩阵 A 的零空间 $\text{nul}(A)$ 的维数是多少? 请给出零空间 $\text{nul}(A)$ 的一组最小生成集;

4、(15 分) 某城市及郊区乡镇共有 50 万人从事农、工、商工作, 假设总人数在若干年内保持稳定不变, 经调查表明, 在这 50 万的就业人员中, 目前大约有 25 万人从事农业, 约 15 万人从事工业, 约 10 万人从事商业; 在务农的人员中, 每年大约有 20% 改为务工, 10% 改为经商; 在务工的人员中, 每年大约有 20% 改为务农, 10% 改为经商; 在经商的人员中, 每年大约有 10% 改为务农, 10% 改为务工;

(1) 请写出 1 年后从事农、工、商工作的人数分别是多少?

(2) 请预测 n 年之后从事各行业人员总数及发展趋势.

5、(15 分) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3 = X^T AX (a, b > 0)$, 且已知二次型矩阵 A 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12.

(1) 求参数 a, b 的值;

(2) 利用正交变换 $X = QY$ 将其化成标准形, 写出所用正交变换的矩阵 Q .

三、证明题 (14 分):

1、设 A 是 3 阶方阵, 3 维列向量组 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha$ 线性无关, 且 $A^3\alpha = 3A\alpha - 2A^2\alpha$, 证明: 矩阵

$$B = (\alpha, A^2\alpha, A^4\alpha) \text{ 可逆.}$$

2、设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = A$, 且 $r(A) = r (0 < r < n)$, 证明:

$$A \sim \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}, \text{ 其中 } E_r \text{ 为 } r \text{ 阶单位阵, 符号 } \sim \text{ 代表相似.}$$