四川大学期末考试试题（闭卷）

（2015——2016 学年第 1 学期） A 卷

课程号：201080030 课序号： 课程名称：线性代数（理工） 任课教师： 成绩：

适用专业年级：2015 级理工科本科生 学生人数： 印题份数： 学号： 姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

注：考试时间 120 分钟。请将答案写在答题纸规定的方框内，否则记 0 分。

一、填空题（每题 3 分，共 18 分）

1. 行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & a & 0 \\ 0 & -2 & 3-a & a \\ 0 & 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix} =$ ____________.

2. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$，则秩 $r(A^2-2A)=$ ____________.

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，若 $\sum_{i=1}^{3} c_i\alpha_i$ 也是 $Ax=b$ 的解，则 $\sum_{i=1}^{3} c_i =$ _____.

4. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{bmatrix}$，若 $\alpha=(1,-2,3)^T$ 是其特征向量，则 $a+b=$ _______.

5. 任意 3 维实列向量都可由向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(1,-2,3)^T,\alpha_3=(t,1,2)^T$ 线性表示，则 t 应满足条件 __________.

6. 若矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{bmatrix}$ 正定，则 λ 满足的条件为 _______.

试卷编号：

二、计算题（每题 10 分，共 30 分）

1. 若行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&3&4&6\\3&4&1&2\\2&2&2&2\end{vmatrix}$，求 $A_{11}+2A_{21}+A_{31}+2A_{41}$，其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

2. 已知矩阵 X 满足方程 $X\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\-1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&0\\3&0&5\end{pmatrix}$，求矩阵 X.

3. 设向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4)$，$\alpha_2=(0,3,1,2)$，$\alpha_3=(3,0,7,14)$，$\alpha_4=(1,-1,2,0)$，$\alpha_5=(2,1,5,6)$，求向量组的秩、极大线性无关组，并将其余向量由极大无关组线性表出.

三、解答题（每题 12 分，共 36 分）

1. 当 λ 满足什么条件，方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+2\lambda x_3=2\\x_1+\lambda x_2+(\lambda+1)x_3=2\lambda\\(2\lambda-1)x_1+x_2+(3\lambda-1)x_3=\lambda+1\end{cases}$ 有唯一解、无穷多解、无解？有解时求出全部解.

2. 设 A 是三阶实对称矩阵，有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$，$\alpha_1=(1,-1,1)^T$ 是 A 的属于 $\lambda_1=1$ 的特征向量，矩阵 $B=A^5-4A^3+E$：

（1）证明：α_1 也是矩阵 B 的特征向量；

（2）求矩阵 B 的全部特征值和特征向量；

（3）求矩阵 B.

3. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1{}^2+3x_3{}^2+4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$，

（1）写出二次型的矩阵；

（2）用正交变换化二次型为标准形，并写出所作的正交变换.

四、证明题（每题 8 分，共 16 分）

1. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关.

2. 已知 A 是 n 阶实对称矩阵，$\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是 n 维列向量，证明：当向量 x 的长度 $\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2}=1$ 时，$\lambda_1\le x^TAx\le\lambda_n$.