四川大学期末考试试题（闭卷）

（2019——2020 学年　第 1 学期）　　A 卷

课程号：201080030 课序号：　　　课程名称：线性代数(理工)　任课教师：　　　　成绩：

适用专业年级：　　　　　学生人数：　　印题份数：　　　　学号：　　　　　　姓名：

考 生 承 诺
我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺： 1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点； 2、不带手机进入考场； 3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。 **考生签名：**

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\1&0&2\end{bmatrix},\alpha=\begin{pmatrix}k\\1\\1\end{pmatrix}$，若 $A\alpha$ 与 α 线性相关，则 $k=$________.

2. 若 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{bmatrix}1&2&4&6\\0&2&2&4\\0&0&2&2\\0&0&0&2\end{bmatrix}$，则 A^2-A 的秩为 ________.

3. 设 $\alpha_1=(1,2,-1,0)^T,\alpha_2=(1,1,0,2)^T,\alpha_3=(2,1,1,k)^T$，由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可生成 R^4 的子空间 H. 若 H 的维数为 2，则 $k=$________.

4. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，方程组 $Ax=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ 的通解为 $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$，其中 c 为任意实数，则

$\alpha_1+2\alpha_2=$________.

5. 设 A 为 3 阶方阵，$|A+E|=|A-E|=0$，A 的迹 $tr(A)=2$，则 $\left|A^2+A^*-E\right|=$________.

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Py$ 下的标准形为 $y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$，其中 $P=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$. 若 $Q=\left(-\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2\right)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 ________________.

二、（14 分）已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 的一个基，$\beta_1=2\alpha_1+2k\alpha_3,\beta_2=2\alpha_2,\beta_3=\alpha_1+(k-1)\alpha_3$.

（1）证明 β_1,β_2,β_3 为 R^3 的一个基。求出基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵。

（2）k 为何值时，存在非零向量 ξ，其在两组基下的坐标相同，并求出所有的 ξ.

三、（14 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & a & 1\\ -1 & 1 & a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & a\\ -a-1 & b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，方程组 $AX=B$ 有唯一解？当 a,b 为何值时，方程组有无穷多解，此时求其全部解。

四、（10 分）某种佐料由四种原料 A、B、C、D 混合而成。假设四种原料混合在一起时不发生化学变化，且四种原料的比例按重量计算。这种佐料现有四种不同口味的配方，其中四种原料的比例如下表所示：

	配方 1	配方 2	配方 3	配方 4
A	2	1	4	2
B	3	2	7	1
C	1	1	3	1
D	1	2	5	3

比如，若第一种配方的佐料每袋净重 7g，则其中 A、B、C、D 四种原料分别含 2g、3g、1g、1g. 现在由于工艺原因，希望减少配方的数量，并通过保留的配方组合出不再单独生产的配方。试确定最少需保留哪几种配方，并将其余配方通过保留的配方组合出来。

五、（12 分）设 A 为 3 阶实对称矩阵，A 的秩为 2，且 $A\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

（1）求 A 的所有特征值与特征向量；　　（2）求矩阵 A.

六、（12 分）令 $A=2\alpha\alpha^T+3\beta\beta^T$，其中 $\alpha=(1,1,1)^T$，$\beta=(1,0,-1)^T$. 令 $X=(x_1,x_2,x_3)^T$，利用正交变换化二次型 $f(X)=X^TAX$ 为标准形，并写出所用的正交变换。

七、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

1. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，并存在 $n\times m$ 矩阵 B 和 C，使得 $BA=E_n,\ AC=E_m$，其中 E_n 和 E_m 分别为 n 阶单位矩阵和 m 阶单位矩阵。证明：$m=n, B=C$.

2. 设 A 是 n 阶对称正定矩阵，B 是秩为 r 的 $n\times r$ 矩阵。证明：B^TAB 是对称正定矩阵。

八、（6 分）A 为 3 阶矩阵，$1,-1$ 是 A 的特征值，其特征向量分别为 α_1,α_2，且 $A\alpha_3=\alpha_1+\alpha_3$.

（1）证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；　　（2）令 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，求 $P^{-1}AP$.