

2022 年春季学期数论第一次小测

1. 找出 180, 270, 520 的所有因子. (5 分)
2. 用欧几里得算法找出如下几种情形 a 被 d 除的商和余数. (5 分)
 - (i) $a = 521, d = 12$.
 - (ii) $a = 271, d = 23$.
 - (iii) $a = 2006, d = 18$.
 - (iv) $a = 2008, d = 37$.
3. 设 a, x, y, z, w 均为整数, 证明若 $a \mid 2006x - y, a \mid 2006z - w$, 则 $a \mid xw - yz$. (5 分)
4. 计算 $(206, 208)$ 和 $[168, 252, 294]$. (5 分)
5. 证明对任意整数 $n, (5n+2, 7n+3)=1$. (5 分)
6. 求 $(14, 91)$, 并将 $(14, 91)$ 表为线性组合的形式. (5 分)
7. 对任意正整数 $n \geq 1$, 设 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, 证明 $n \geq 2$ 时, S_n 不是整数. (10 分)
8. 证明仅当 $a = 2, n = p$ (p 为素数) 时, $a^n - 1$ 是素数. (10 分)
9. 设 a, b, c 为正整数, 证明 $[a, b, c] = \frac{abc(a, b, c)}{(a, b)(b, c)(c, a)}$. (10 分)
10. 求组合数 $\binom{2n}{1}, \binom{2n}{3}, \dots, \binom{2n}{2n-1}$ 的最大公因子. (20 分)
11. 求一个奇数的平方被 8 除所得的余数. 请写出过程. (10 分)
12. 设 n 为正整数, 证明 $3 \mid n$ 当且仅当 3 整除 n 的各位数之和. (10 分)