2020-2021 学年第 2 学期线性代数（理工）期末考试参考答案

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. $\underline{\ 4\ }$；　　2. $\underline{\ 2\ }$；　　3. $\underline{\ 3}$；　　4. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$；　　5. $\underline{\ -1\ }$；　　6. $\underline{\ 1\ }$

二、 (10 分) 解：(1) $A = PBP^{-1}$ 即 $AP = PB$, 也就是 $A\,[\alpha, A\alpha, A^2\alpha] = [\alpha, A\alpha, A^2\alpha]\,B$. 而

$$A\,[\alpha, A\alpha, A^2\alpha] = [A\alpha, A^2\alpha, A^3\alpha] = [A\alpha, A^2\alpha, 5A\alpha - 4A^2\alpha]$$

$$= [\alpha, A\alpha, A^2\alpha]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

所以 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

(2) 解法一：$A + E = P(B + E)P^{-1}$. 故：

$$|A + E| = |P(B + E)P^{-1}| = |P|\,|B + E|\,|P^{-1}| = |B + E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -8$$

解法二：$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -5 \\ 0 & -1 & \lambda+4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda+5)$,

故 B 的所有特征值为 0, 1, – 5.

又 A 与 B 相似, 故 A 的所有特征值也是 0, 1, – 5.

于是 $A + E$ 的所有特征值为 1, 2, – 4.

所以$|A + E| = 1\times2\times(-4) = -8$

三、(13 分)解：(1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & a+3 & a^2+3 & 3a+10 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & a+3 & a^2+3 & 3a+10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & (a-2)(a+1) & a+1 \end{bmatrix}$

所以: 当 $a \neq 2$ 时, 方程组有解; 其中:

当 $a \neq 2$ 且 $a \neq -1$ 时,

$$\begin{bmatrix}1&1&3&5\\0&1&1&2\\0&0&(a-2)(a+1)&a+1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&3-\dfrac{2}{a-2}\\0&1&0&2-\dfrac{1}{a-2}\\0&0&1&\dfrac{1}{a-2}\end{bmatrix}$$

方程组有唯一解$\left(3-\dfrac{2}{a-2},2-\dfrac{1}{a-2},\dfrac{1}{a-2}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\dfrac{3a-8}{a-2},\dfrac{2a-5}{a-2},\dfrac{1}{a-2}\right)^{\mathrm{T}}$

当 $a=-1$ 时,

$$\begin{bmatrix}1&1&3&5\\0&1&1&2\\0&0&(a-2)(a+1)&a+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&3&5\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&3\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

方程组的通解为$\begin{bmatrix}3\\2\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}$, k 为任意常数.

四、(13 分)解：(1) α_1, α_2 对应分量不成比例，故线性无关.

所以子空间 V 的维数 $\dim(V)=2$.

(2) $[\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2]=\begin{bmatrix}2&1&4&3\\3&2&7&4\\1&-1&-1&3\\1&1&3&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,

故 $\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2$, $\beta_2=2\alpha_1-\alpha_2$.

所以 $\beta_1\in V$, $\beta_2\in V$.

(3) 由 β_1, β_2 对应分量不成比例，故线性无关. 又 $\dim(V)=2$, 知 β_1, β_2 是子空间 V 的基.

由(2)得 $[\beta_1, \beta_2]=[\alpha_1, \alpha_2]\begin{bmatrix}1&2\\2&-1\end{bmatrix}$

于是基 β_1, β_2 到基 α_1, α_2 的过渡矩阵为$\begin{bmatrix}1&2\\2&-1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{5}&\dfrac{2}{5}\\\dfrac{2}{5}&-\dfrac{1}{5}\end{bmatrix}$

五、(13 分)解：(1) 设 A 的对应于特征值 $\lambda_3=2$ 的特征向量为 $\alpha_3=[x_1, x_2, x_3]^{\mathrm{T}}$,

则由 $\alpha_1\cdot\alpha_3=0$, $\alpha_2\cdot\alpha_3=0$ 得

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0\\-2x_1-3x_2+3x_3=0\end{cases}$$

解得 $\alpha_3=k[0, 1, 1]^{\mathrm{T}}$, $k\neq 0$.

(2) 将 α_1, α_2 正交化得 $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{\alpha_2 \cdot \beta_1}{\beta_1 \cdot \beta_1}\beta_1 = [-2, -3, 3]^{\mathrm{T}} + \dfrac{8}{3}[1, 1, -1]^{\mathrm{T}} = \dfrac{1}{3}[2, -1, 1]^{\mathrm{T}}$.

将 β_1, β_2 单位化得：$\eta_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$，$\eta_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$. 将 α_3 单位化得：$\eta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

取正交矩阵 $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$，对角形矩阵 $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，有 $Q^{-1}AQ = \Lambda$.

六、(13 分)解：(1) $[A - 2E, E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

于是$(A - 2E)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(2) 由 $XA + 2B = AB + 2X$ 得 $X(A - 2E) = (A - 2E)B, X = (A - 2E)B(A - 2E)^{-1}$.

于是

$$X^{2021} = (A - 2E)B^{2021}(A - 2E)^{-1}$$
$$= (A - 2E)B(A - 2E)^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

七、(10 分) (1) 证明：对任意不全为零的实数 $x_1, x_2, ..., x_n$,

$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1 + a_1x_2)^2 + (x_2 + a_2x_3)^2 + ... + (x_{n-1} + a_{n-1}x_n)^2 + (x_n + a_nx_1)^2 \geq 0$

故$(x_1, x_2, ..., x_n)$是正定或半正定的.

(2) $f(x_1, x_2, ..., x_n)$正定，即对任意不全为零的实数 $x_1, x_2, ..., x_n$, $f(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$.

这当且仅当 $x_1 + a_1x_2$, $x_2 + a_2x_3, ..., x_{n-1} + a_{n-1}x_n, x_n + a_nx_1$ 不全为零.

也即方程组 $x_1 + a_1x_2 = 0$, $x_2 + a_2x_3 = 0, ..., x_{n-1} + a_{n-1}x_n = 0, x_n + a_nx_1 = 0$ 没有非零解.

也即 $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

按第 1 列展开得 $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1} a_1 a_2 \dots a_n$.

于是得 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$正定的充分必要条件为 $a_1a_2\dots a_n \neq (-1)^n$. (或写成$(-1)^n a_1a_2\dots a_n \neq 1$)

注：通过要求 $y_1 = x_1 + a_1x_2, y_2 = x_2 + a_2x_3, ..., y_{n-1} = x_{n-1} + a_{n-1}x_n, y_n = x_n + a_nx_1$ 是可逆线性替换，也可找到条件 $a_1a_2\dots a_n \neq (-1)^n$. 但这种方法不易说明必要性.

八、(10 分) 证明题

(1) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2, \alpha_3$ 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的基础解系，证明：$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\alpha_1 + 9\alpha_2 + 16\alpha_3$, $\alpha_1 - 3\alpha_2 - 4\alpha_3$ 也是 $AX = 0$ 的基础解系.

证明：由 $\alpha_1,\alpha_2, \alpha_3$ 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的基础解系，知 $\alpha_1,\alpha_2, \alpha_3$ 是 $AX = 0$ 的线性无关的解，而且 $AX = 0$ 的任意三个线性无关的解均是 $AX = 0$ 的基础解系.

由 $\alpha_1,\alpha_2, \alpha_3$ 是 $AX = 0$ 的解, $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_1 + 9\alpha_2 + 16\alpha_3$, $\beta_3 =\alpha_1 - 3\alpha_2 - 4\alpha_3$ 均是 $\alpha_1,\alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合，故也是 $AX = 0$ 的解. 于是以下只需要证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

证法 1：$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -3 \\ 1 & 16 & -4 \end{bmatrix}$，而 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -3 \\ 1 & 16 & -4 \end{vmatrix} = 20 \neq 0$，故

$\text{Rank}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \text{Rank}(\alpha_1,\alpha_2, \alpha_3) = 3$，于是 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

证法 2：设 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$，即

$$k_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + k_2(\alpha_1 + 9\alpha_2 + 16\alpha_3) + k_3(\alpha_1 - 3\alpha_2 - 4\alpha_3) = 0$$

$$(k_1 + k_2 + k_3)\alpha_1 + (k_1 + 9k_2 - 3k_3)\alpha_2 + (k_1 + 16k_2 - 4k_3)\alpha_2 = 0$$

由 $\alpha_1,\alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，得

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + 9k_2 - 3k_3 = 0 \\ k_1 + 16k_2 - 4k_3 = 0 \end{cases}$$

而 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -3 \\ 1 & 16 & -4 \end{vmatrix} = 20 \neq 0$，故以上方程组只有零解，于是 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

(2) 设 A 是 n 阶非零实矩阵($n > 2$), $A^T = A^*$，证明：A 是正交矩阵.

证明：$AA^T = AA^* = |A|E$. 由正交矩阵的定义，只需证$|A| = 1$.

由 $A \neq 0$，知 A 有非零元. 不妨设 $a_{ij} \neq 0$. 则 AA^T 的第 i 行 i 列的元素为$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2 > 0$.

注意到 $AA^T = |A|E$，比较左右两边第 i 行 i 列的元素，得$|A| = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2 > 0$.

对 $AA^T = |A|E$ 两边取行列式得 $|A|^2 = |A|^n$，即$|A|^{n-2} = 1$. 又$|A| > 0$, $n > 2$，得$|A| = 1$. 于是 $AA^T = |A|E = E$，即 A 是正交矩阵.