四川大学期末考试试题（闭卷）

（2017——2018 学年第 1 学期） A 卷

课程号：201080030 课序号： 课程名称：线性代数（理工） 任课教师： 成绩：
适用专业年级：2017 级理工科本科生 学生人数： 印题份数： 学号： 姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；
2、不带手机进入考场；
3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

注：考试时间 120 分钟。 请将答案写在答题纸规定的方框内，否则记 0 分.

一、填空题(每小题 3 分，共 18 分)

1.按列分块的三阶方阵 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}\alpha_1+\alpha_2 & \alpha_2+\alpha_3 & \alpha_3+\alpha_1\end{bmatrix}$，且 $|A|=2017$，则 $|B|=$__________.

2. 设 6 阶方阵 A 满足 $A^2+12E=7A$ 并且 $A-3E$ 的秩为 1，则 $A-4E$ 的秩为___________.

3. 三阶方阵 A 有两个特征值为 2, 3，并且 $|A|=30$，则行列式 $|A^2-4A+5E|=$__________.

4. 若 $\begin{bmatrix}2 & -1 & 4\\ 0 & a & 7\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{bmatrix}$，则 $a+b=$__________.

5. 已知二次型 $f(x_1,x_2)=(x_1,x_2)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & t\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ 正定，则 t 应满足条件__________.

6. R^2 的基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ 到另一组基 $\beta_1=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为___________.

试卷编号：

二、解答题（共 66 分）

1.（10 分）已知四阶方阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&4&1\\1&1&1&5\end{bmatrix}$，求 A 的行列式.

2.（10 分）已知矩阵 X 满足方程 $A^2X=A+3E-AX+6X$，其中 $A=\begin{bmatrix}3&1&1\\1&4&3\\2&-1&-3\end{bmatrix}$，$E$ 为三阶单位矩阵，求矩阵 X.

3.（10 分）设 $\alpha_1=(1,\ -2,\ 3,\ -4)^T$，$\alpha_2=(2,\ -4,\ 6,\ -8)^T$，$\alpha_3=(2,\ -5,\ 7,\ 11)^T$，$\alpha_4=(3,\ -8,\ 11,\ 26)^T$，$\alpha_5=(-1,\ 4,\ 6,\ 3)^T$，求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表出.

4. （12 分）已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=4\\5x_1+6x_2+7x_3=8\\9x_1+10x_2+ax_3=b\end{cases}$，请回答下列问题：

（1）当参数 a，b 满足什么条件时，方程组无解?何时有唯一解？

（2）当参数 a，b 满足什么条件时，方程组有无穷多解？请求出此条件下方程组的解集.

5.（12 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$，

（1）写出二次型的矩阵 A；

（2）计算 A 的特征值与特征向量；

（3）用正交变换将该二次型化为标准形，写出所做的正交变换.

6.（12 分）在生态系统的研究中经常需要对其中某个物种的种群演化情况作出一个预估. 假设某昆虫按其年龄分为幼虫和成虫两个阶段. 通过样本统计数据的分析，平均每年来说：幼虫存活率为 80%, 存活的幼虫中有 25%变为成虫；成虫存活率为 50%，存活的成虫每只生下 2 只幼虫，死亡的成虫不能生下幼虫. 用 x_n, y_n 分别表示 n 年后幼虫、成虫的数量（单位：万只），用 α_n 表示向量 $(x_n,y_n)^T$. 某年的年初发现此昆虫幼虫、成虫的数量分别为 30 万，30 万只，即 $\alpha_0=(30,30)^T$. 计算下列问题：

（1）写出 α_{n+1} 与 α_n 的关系，并求出 1 年后此物种幼年、成年的数量；

（2）求很多年之后此昆虫的幼虫与成虫的数量之比，即求出极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$.

三、证明题 （共 16 分）

1.（8 分）已知 $\alpha \in R^n$ 为单位向量，即 $|\alpha|=1$，n 阶方阵 $H=E-2\alpha\alpha^T$ 称为 Householder 矩阵，在很多领域具有重要应用.

（1）证明 H 为正交矩阵；

（2）若有两个 R^n 中向量 X,Y 满足 $X \neq Y$ 且 $|X|=|Y|\neq 0$，令 $\alpha=\dfrac{X-Y}{|X-Y|}$，$H=E-2\alpha\alpha^T$，证明 $HX=Y$.

2. （8 分）已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 中每一个向量的长度都等于 2，而其中任意两不同向量的内积都为 1，证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性无关.