2017 − 2018学年线性代数（理工）A卷试题参考答案（期末）

一，填空题. (每小题3分) 3×6=18

(1). 4034， (2). 5, (3). 20, (4). 4, (5). $t>\frac{1}{4}$, (6). $\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

二，解答题.

1. 解：$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}) \times$ 4 4

$2 \times 3 \times 4 = 74.$ 2

2. 解：移项得：$(A^2+A-6E)X = A+3E$, 即$(A+3E)(A-2E)X = A+3E$. 2

而 $|A+3E| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 15 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$. 2 从而 $A+3E$ 可逆. 则$(A-2E)X = E$, 从而 $X = (A-2E)^{-1}$. 2

由$[A-2E \mid E] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$. 2

从而得到 $X = (A-2E)^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -1 \\ -11 & 7 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$. 2

3. 解：$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5] =$ 2 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -5 & -8 & 4 \\ 3 & 6 & 7 & 11 & 6 \\ -4 & -8 & 11 & 26 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 19 & 38 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 4

有三行不全为0, 非0首元所在的列为1，3，5. 可知 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5$ 为极大无关组. 2

明显可能看出$\alpha_2 = 2\alpha_1$;

并且若 $\alpha_4 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_3 + k_3\alpha_5$, 可解出 $k_1=-1, k_2=2, k_3=0$, 于是 $\alpha_4 = -\alpha_1 + 2\alpha_3$. 2

4. 解：$\widetilde{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&a&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&-4&-8&-12\\0&-8&a-27&b-36\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&-4&-8&-12\\0&0&a-11&b-12\end{bmatrix}$. 4

(1)当 $a=11,b\neq 12$ 时, 此时无解; 1

当 $a\neq 11$ 时, 有唯一解. 1

(2)当 $a=11,b=12$ 时, 原方程有无穷多解，此时原方程组等价于

$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=4,\\ -4x_2-8x_3=-12.\end{cases}$ 可得一个特解为 $X_0=[-2,3,0]^T$. 2

原方程的导出组等价于

$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0,\\ -4x_2-8x_3=0.\end{cases}$ 求得基础解系为 $X_1=[1,-2,1]^T$. 2

从而可得原方程的通解为 X_0+kX_1,k 取任意数. 2

5 解：(1)此二次型的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{bmatrix}$. 2

(2)A 的特征多项式为：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda-3&-2\\0&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda+5)=(\lambda-1)^2(\lambda-5)$,

可得 A 的特征值为$\lambda_1=1$(二重), $\lambda_2=5$. 2

对于$\lambda_1=1$, $1\cdot E-A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-2&-2\\0&-2&-2\end{bmatrix}$, 可得属于$\lambda_1=1$ 的两个线性无关的特征向量 2

为$X_1=[1,0,0]^T,X_2=[0,-1,1]^T$; 而属于$\lambda_1=1$ 的所有特征向量为$k_1X_1+k_2X_2,(k_1,k_2$不全为0);

对于 $\lambda_2=5$, $5E-A=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{bmatrix}$, 可得属于$\lambda_2=5$ 的一个特征向量为$X_3=[0,1,1]^T$,而属

于$\lambda_2=5$ 的所有特征向量为$k_3X_3(k_3\neq 0)$. 2

(3)特征向量X_1,X_2,X_3 已经两两正交，只须进行单位化：

$\gamma_1=\frac{X_1}{|X_1|}=[1,0,0]^T$, $\gamma_2=\frac{X_2}{|X_2|}=\frac{1}{\sqrt{2}}[0,-1,1]^T$, $\gamma_3=\frac{X_3}{|X_3|}=\frac{1}{\sqrt{2}}[0,1,1]^T$.

令 $Q=[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$. 则$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{bmatrix}$. 2

于是经过正交替换$X=QY$, 二次型 f 化为 $y_1^2+y_2^2+5y_3^2$. 2

6 解：(1) 由题意有：$\begin{cases} x_{n+1} = 80\% \times (1-25\%) \times x_n + 50\% \times 2 \times y_n \\ y_{n+1} = 80\% \times 25\% \times x_n + 50\% \times y_n \end{cases}$ 2 , 即$\begin{cases} x_{n+1} = 0.6x_n + y_n \\ y_{n+1} = 0.2x_n + 0.5y_n \end{cases}$

写成矩阵形式即有：$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 1 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$.

令 $A = \begin{bmatrix} 0.6 & 1 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$, 则有 $\alpha_{n+1} = A\alpha_n$. 2

于是 $\alpha_1 = A\alpha_0 = \begin{bmatrix} 0.6 & 1 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 21 \end{bmatrix}$.

(2)先计算 A 的特征值与特征向量：

$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 0.6 & -1 \\ -0.2 & \lambda - 0.5 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.1\lambda + 0.1 = (\lambda - 1)(\lambda - 0.1)$.

得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.1$. (2分) 2

对于 $\lambda_1 = 1$, $E - A = \begin{bmatrix} 0.4 & -1 \\ -0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$, 得属于 $\lambda_1 = 1$ 的一个特征向量为 $X_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$. 2

对于 $\lambda_2 = 0.1$, $0.1E - A = \begin{bmatrix} -0.5 & -1 \\ -0.2 & -0.4 \end{bmatrix}$, 得属于 $\lambda_2 = 0.1$ 的一个特征向量为 $X_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

则有$A^n X_1 = X_1, A^n X_2 = 0.1^n X_2$, 2

令 $\alpha_0 = k_1 X_1 + k_2 X_2$, 即$\begin{cases} 5k_1 - 2k_2 = 30 \\ 2k_1 + k_2 = 30 \end{cases}$ 解得 $k_1 = k_2 = 10$,

则 $\alpha_n = A^n \alpha_0 = A^n(10X_1 + 10X_2) = 10X_1 + 10 \times 0.1^n X_2 = \begin{bmatrix} 50 - 20 \times 0.1^n \\ 20 + 10 \times 0.1^n \end{bmatrix}$,

则可得 $x_n = 50 - 20 \times 0.1^n, y_n = 20 + 10 \times 0.1^n$,

最后求得 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{5}{2}$. 2

三，证明题。

2 证明：设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 + k_5\alpha_5 = \mathbf{0}$,

两边分别依次与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 作内积, 由于每个向量的长度为2，不同两个向量的内积为1，可得：

$$\begin{cases} 4k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = \mathbf{0}, \\ k_1 + 4k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = \mathbf{0}, \\ k_1 + k_2 + 4k_3 + k_4 + k_5 = \mathbf{0}, \\ k_1 + k_2 + k_3 + 4k_4 + k_5 = \mathbf{0}, \\ k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + 4k_5 = \mathbf{0}. \end{cases} \quad .\ (4分)$$

2

将5个式子相加得：$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 0$, 依次减去以上每个式子可得$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 0$. 从而有 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 线性无关.

2

1. 证明：(1)由于 $|\alpha|=1$, 有 $\alpha^T\alpha=(\alpha,\alpha)=|\alpha|^2=1$, 则 2

$HH^T=(E-2\alpha\alpha^T)(E-2\alpha\alpha^T)=E-4\alpha\alpha^T+4\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=E-4\alpha\alpha^T+4\alpha\alpha^T=E$, 2

这说明 H 为正交矩阵.

(2)由 $|X|=|Y|$, 得$|X-Y|^2=(X-Y,X-Y)=|X|^2+|Y|^2-2(X,Y)=2|X|^2-2(X,Y)=2(X,X)-2(X,Y)=2(X,X-Y)$. 2

两边同除以 $|X-Y|$, 得 $|X-Y|=2\frac{(X,X-Y)}{|X-Y|}=2(X,\frac{X-Y}{|X-Y|})=2(X,\alpha)=2(\alpha,X)$. 1

从而有$HX=(E-2\alpha\alpha^T)X=X-2\alpha\alpha^TX=X-2(\alpha,X)\alpha=X-|X-Y|\alpha=X-(X-Y)=Y$. 1