离散数学期末开卷参考资料

邓钰川

2022 年 12 月 21 日

目录

1 逻辑与证明 Logic and Proof

1.1 命题逻辑 Propositon Logic

Tautology 永真式 Contradiction 永假式 Contingency 偶然式 $\neg p$ Negation 否定联结词

$p \wedge q$ Conjunction 合取联结词 $p \vee q$Disjunction 析取联结词 $p \oplus q$Exclusive or 异或联结词

$p \rightarrow q$Implication 蕴含联结词 $p \leftrightarrow q$Biconditional 等价联结词

NOR:$P \downarrow Q$,NAND:$P \uparrow Q$,N-implication:$p \xrightarrow{e} q$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$p \oplus q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	T	T	F	T
F	T	T	T	T	F
T	F	F	F	T	F
T	T	T	T	F	T

$p \rightarrow q$ 不同表示:

p implies q p is sufficient for q q is necessary for p q follows from p q unless $\neg p$ p only if q

The converse(逆) of $p \rightarrow q$ is $q \rightarrow p$.The contrapositive（逆否）of $p \rightarrow q$ is $\neg q \rightarrow \neg p$.The inverse (反)of $p \rightarrow q$ is $\neg p \rightarrow \neg q$.

Quantifiers: Existential Quantifier:∃, Universal Quantifier:∀, Uniqueness Quantifier:∃!

表达式	英文名	中文名
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Associative laws	结合律
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributive laws	分配律
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	De Morgan's laws	摩根律
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Absorption laws	吸收律
$p \wedge \neg p \equiv F$ $p \vee \neg p \equiv T$	Negation laws	否定律
$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$	Useful law	蕴含等值式
$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$		逆否律
$(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$		输出律
$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) \equiv \neg p$		归谬律

1.2 量词的摩根律

$\neg \forall x\ P(x) \equiv \exists x\ \neg P(x)$ $\neg \exists x\ P(x) \equiv \forall x\ \neg P(x)$ $\neg \forall x \exists y\ P(x,y) \equiv \exists x \forall y\ \neg P(x,y)$

1.3 量词辖域的收缩与扩张

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \quad \exists x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$$

$$(\exists x)(\exists y)[P(x) \rightarrow Q(y)] \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\exists y)Q(y) \quad (\exists x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$$

1.4 命题逻辑的推理规则 Rules of Inference for Propositional Logic

中文名	英文名	相关永真式
肯定前件式 (假言推理)	Modus Ponens	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
否定后件式 (取拒式)	Modus Tollens	$(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$
假言三段论	Hypothetical Syllogism	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
选言三段论 (析取三段论)	Disjunctive Syllogism	$(\neg p \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$
附加律	Addition	$p \rightarrow (p \vee q)$
化简律	Simplification	$(p \wedge q) \rightarrow q$
合取律	Conjunction	$((p) \wedge (q)) \rightarrow (p \wedge q)$
归结原理 (消解律)	Resolution	$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r)$

1.5 量化命题的推理规则 Rules of Inference for Quantified Statements

中文名	英文名	内容
全称实例	Universal Instantiation (UI)	$\forall x P(x) \rightarrow P(c)$
全称引入	Universal Generalization (UG)	$P(c)$for an arbitrary$c \rightarrow \forall x P(x)$
存在实例	Existential Instantiation (EI)	$\exists x P(x) \rightarrow P(c)$for some element$c$
存在引入	Existential Generalization (EG)	$P(c)$for some element$c \rightarrow \exists x P(x)$

2 基本结构 Basic Structure

2.1 集合 Set

2.1.1 子集 Subset

$\emptyset \subseteq S$ 空集是任何集合的子集

$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

2.1.2 基数 Cardinality

对于有限集就是指集合中元素个数 denoted by $|S|$.

2.1.3 幂集 Power Set

Given a set S, the power set of S is the set of all subsets of the set S, denoted by $\mathcal{P}(S)$. S 的子集组成的集合.

$|S| = n \rightarrow |\mathcal{P}(s)| = 2^n$. 含有 n 个元素的集合有 2^n 个子集.

2.1.4 笛卡尔积 Cartesian Product

1. 两个集合的笛卡尔积

Let A and B be sets. The Cartesian product of A and B, denoted by $A \times B$, is the set of all ordered pairs (a,b), where $a \in A$ and $b \in B$. Hence $A \times B = \{(a,b)|a \in A \wedge b \in B\}$.

2. n 个集合的笛卡尔积

The Cartesian product of the sets $A_1, A_2, \ldots, A_n$, denoted by $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, is the set of ordered n-tuples $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ where $a_i \in A_i$ for $i = 1, 2, \ldots, n. A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)|\ a_i \in A_i\ for\ i = 1, 2, \ldots, n\}$

3. 性质 $A \times B \neq B \times A \quad |A \times B| = |A| \times |B|$

2.1.5 集合的运算 Set Operations

Union(并):Denoted by $A \cup B$, is the set $\{x|x \in A \vee x \in B\}$. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$

Intersection(交): The intersection of the sets A and B, denoted by $A \cap B$, is the set $\{x|x \in A \wedge x \in B\}$ $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ Two sets A and B are called **disjoint** if $A \cap B = \emptyset$.

Complement(补): If A is a set, then the complement of the set A (with respect to U), denoted by $\bar{A}$ is the set $U - A$,$\bar{A} = \{x \in U|x \notin A\}$.

Difference(差): $A - B = \{x|x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap \bar{B}$

2.2 求和

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a(r^{n+1}-1)}{r-1}, r \neq 0, 1 \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, |x| < 1 \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, |x| < 1 \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3 归纳与递归 Induction and Recursion

3.1 数学归纳法 Mathematical Induction

数学归纳法有很多种不同的形式, 都可以在考试中使用:

(1) 第一归纳法: 设命题 $P(n)$ 在 $n = k$ 时成立, 且任意 $m \geq k$, 若命题 $P(n)$ 在 $n = m$ 时成立可以推出在 $n = m+1$ 时成立, 则 $P(n)$ 对于所有的 $n \geq k$ 成立

(2) 第二归纳法: 设命题 $P(n)$ 在 $n = k$ 时成立, 且任意 $m \geq k$, 若命题 $P(n)$ 在 $k \leq n \leq m$ 时成立可以推出在 $n = m + 1$ 时成立, 则 $P(n)$ 对于所有的 $n \geq k$ 成立

(3) 跳跃归纳法: 设命题 $P(n)$ 在 $n = k, k+1, \cdots, k+t-1$ 时成立, 且任意 $m \geq k$, 若命题 $P(n)$ 在 $n = m$ 时成立可以推出在 $n = m + t$ 时成立, 则 $P(n)$ 对于所有的 $n \geq k$ 成立, 这种归纳法常用于对奇偶需要分别讨论的情况

(4) 倒推归纳法: 设命题 $P(n)$ 在 $n = k$ 时成立, 且任意 $k_0 < m \leq k$, 若命题 $P(n)$ 在 $n = m$ 时成立可以推出在 $n = m - 1$ 时成立, 则 $P(n)$ 对于所有的 $k_0 \leq n \leq k$ 成立

(5) 螺旋归纳法: 设命题 $P(n)$ 在 $n = k$ 时成立, 且任意 $m \geq k$, 若命题 $P(n)$ 在 $n = m$ 时成立可以推出 $Q(n)$ 成立, 且 $Q(n)$ 在 $n = m$ 时可以推出 $P(n+1)$ 成立, 则 $P(n), Q(n)$ 对于所有的 $n \geq k$ 成立

3.2 递推 Recurrence

3.2.1 一阶线性递归 First-order Linear Recurrence

1. $T(n) = AT(n-1) + B$
$T(n) = A^n T(0) + B\dfrac{A^n - 1}{A - 1}$
2. $T(n) = AT(n-1) + B^n$
$T(n) = A^n T(0) + \dfrac{A^n B - B^{n+1}}{A - B}$
3. $T(n) = AT(n-1) + Bn + C$
Solve $\begin{cases} T(n) - T(n-1) = A^{n-1}[T(1) - T(0)] + B\dfrac{A^{n-1} - 1}{A - 1} \\ T(n-1) = \dfrac{T(n) - Bn - C}{A} \\ T(1) = AT(0) + B + C \end{cases}$

3.2.2 主定理 Master Theorem

$$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + cn^d$$

where a is a positive integer, $b \geq 1$, c, d are real numbers with c positive and d nonnegative, and $T(1)$ is nonnegative.

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^d) & a < b^d \\ \Theta(n^d \log n) & a = b^d \\ \Theta(n^{\log_b a}) & a > b^d \end{cases}$$

3.2.3 常系数 k 阶线性齐次递推关系

定义 3.1: 常系数 k 阶线性齐次递推关系

A linear homogeneous relation of degree k with constant coefficients is a recurrence relation of the form $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$, where $c_1, c_2, \ldots, c_k$ are real numbers, and $c_k \neq 0$.

令 $a_n = r^n$ 代入递推式得 $r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_k = 0$. (characteristic equation)

3.2.4 解二阶线性齐次递推

$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$

定理 3.1

If the CE $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ has 2 roots $r_1 \neq r_2$, then the sequence $\{a_n\}$ is a solution of the recurrence relation if and only if $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ for $n \geq 0$ and constants α_1, α_2.

定理 3.2

If the CE $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ has only 1 root r_0, then $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$ for all $n \geq 0$ and constants α_1, α_2.

3.2.5 解 k 阶线性齐次递推

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} c_i a_{n-i}$$

定理 3.3

If the CE $r^k - \sum_{i=1}^{k} c_i r^{k-i}$ has k distinct roots r_i , then the solutions to the recurrence are of the form $a_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i r_i^n$ for all $n \geq 0$, where the α_i's are constants.

3.2.6 解常系数线性非齐次递推

A linear nonhomogeneous relation with constant coefficients may contain some terms $F(n)$ that depend only on n. $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$. The recurrence relation $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ is called the associated homogeneous recurrence relation. (相伴的齐次递推关系)

If $a_n = p(n)$ is any particular solution to the linear nonhomogeneous relation with constant coefficients $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$, then all its solutions are of the form $a_n = p(n) + h(n)$, where $a_n = h(n)$ is any solution to the associated homogeneous recurrence relation $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$.

4 计数 Counting

4.1 计数原则 Basic Counting Rules

1. 乘法原理若一个过程可以被分解为 k 个任务，完成第 i 个任务有 n_i 种方式，那么完成该过程有 $n = \prod_{i=1}^{k} n_i$ 种方式.

2. 加法原理若完成一个过程有 k 类方式，第 i 类方式有 n_i 种方法，那么完成该过程有 $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ 种方法.

3. 无重排列：从 n 个不同的元素中取出 k 个, 并按次序排列, 总方案数为 $P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$,$k = n$ 称为全排列 (Permutation)

4. 无重组合：从 n 个不同的元素中取出 k 个, 不考虑排列次序, 总方案数为 $C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

5. 可重组合：从 n 种水果选 r 个拼果盘：$C(n+r-1,r)$

6. 可重排列：n 个字母组成的 r 位串：n^r

7. 不全相异元素的全排列：如果 n 个元素中，分别有 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 个元素相同，且 $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$，则这 n 个元素的全排列称为不全相异元素的全排列，其不同的排列个数为 $\begin{pmatrix} & & n & \\ n_1 & n_2 & \cdots & n_k \end{pmatrix} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$

8. 多组组合：把 n 个相异元素分为 $k(k \leq n)$ 个按照一定顺序排列的组，其中第 i 组中有 n_i 个元素 ($i = 1, 2, \cdots, k, n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$), 则不同分法数量为 $\begin{pmatrix} & & n & \\ n_1 & n_2 & \cdots & n_k \end{pmatrix} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$

9. 圆排列：将 n 个不同元素不分首尾排成一圈，称为 n 个相依元素的圆排列，其排列总数为 $(n-1)!$

10. 项链数：将 n 粒不同珠子用线串成一副项链，则得到的不同项链数当 $n = 1, 2$ 时为 1,$n \geq 3$ 为 $\frac{1}{2}(n-1)!$

4.2 鸽巢原理 (抽屉原理) Pigeonhole Principle

若有 $m_1+m_2+\cdots+m_n-n+1$ 只鸽子飞回了 n 个鸽巢, 则或者第 1 个鸽巢中至少有 m_1 只这两个定理的证明用反证法即可, 在具体问题上, 需要指出"鸽子"和"巢"分别是什么, 然后运用此定理给出结果, 需要注意的是鸽巢原理往往只能给出存在性的结果, 无法给出任何构造性的结论, 所以题目本身往往就有一定的暗示性。

定理 4.1: 鸽巢原理 (抽屉原理) Pigeonhole Principle

1. 鸽巢原理

If there are $k+1$ objects and k bins, then there is at least one bin with two or more objects. $k+1$ 个球放入 k 个盒子，至少一个盒子里有 2 个或以上的球.

证明：反证，假设所有盒子都至多 1 个球，那么一共不超过 k 个球，与已知条件矛盾.

2. 广义鸽巢原理 Generalized Pigeonhole Principle

If N objects are placed into k bins, then there is at least one bin containing at least $\lceil N/k\rceil$ objects.

3. 拉姆齐理论

每个由 n^2+1 个不同实数构成的序列都包含一个长为 n+1 的严格递增或严格递减子序列。

4.3 容斥原理 Inclusion-Exclusion Principle

容斥原理有几种不同的形式:

(1) 两个集合的容斥原理：设 A,B 为有限集合, 则 $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$, 这个公式可以用集合论的手段证明

(2) n 个集合的容斥原理：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为有限集合, 则 $|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}|A_i\cap A_j|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{k>j}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$, 这个公式可以由两个集合的容斥原理和归纳法来证明, 也可以用二项式定理来证明

(3) 补集形式的容斥原理: 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为有限集合, 则 $|A_1^c\cup A_2^c\cup\cdots\cup A_n^c|=|E|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}|A_i\cap A_j|-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{k>j}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$

容斥原理在使用时, 需要先声明涉及的集合是什么, 然后直接套用公式即可, 但要求计算另一种的情况。

4.4 二项式定理 The Binomial Theorem

For any integer $n\geq 0$,

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i$$

推广 $\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}, k_1+k_2+\cdots+k_m=n$. m 项式展开 $C(n+m,k)=C(n,0)C(m,k)+C(n,1)C(m,k-1)+\cdots+C(n,k)C(m,0), k\leq\min\{n,m\}$

二项式定理还可以扩展为多项式定理, 即分礼物问题: 假设第 i 个小朋友要恰好得到 n_i 件礼物, 且 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$, 则总方案数为 $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$, 另有推论 $\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k}\overline{n!1n_2!\cdots n_k!}=k^n$ 。与分礼物问题需要区分开的是分钱问题, 在分礼物问题中礼物是互不相同的, 而分钱问题中硬币是全部相同的, 我们有如下结论:

(1) 将 n 枚完全相同的硬币分发给 m 个不同的小朋友，使得每个小朋友至少得到 1 枚硬币，总方案数为 $C(n-1,m-1)$

(2) 将 n 枚完全相同的硬币分发给 m 个不同的小朋友，不要求每个小朋友都必须得到枚硬币，总方案数为 $C(n+m-1,m-1)$

4.4.1 二项式系数恒等式

结论 4.1: 二项式系数恒等式

1. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$
2. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$
3. $\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}=3^n$
4. $\sum_{k=0}^{n}a^k\binom{n}{k}=(a+1)^n$
5. 杨辉三角 Pascal's Triangle $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$
6. 范德蒙德恒等式 $\binom{m+n}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{k-i}\binom{n}{i}, k\le m\ or\ k\le n$ 证明：设 $|S_1|=m,|S_2|=n$，两集合无重复元素. 从 $S_1\cup S_2$ 中取 k 个元素，即 $\binom{m+n}{k}$，可以看做先从 S_1 里取 i 个，再从 S_2 里取 $k-i$ 个，其中 $0\le i\le k$. 然后使用乘法原理.
7. $\binom{2n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$ 证明：范德蒙德恒等式
8. $\binom{n+1}{k+1}=\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}$

   证明：设 $\binom{n+1}{k+1}$ 表示长度为 $n+1$ 的比特串中，含 $k+1$ 个 1 的比特串的个数. 考虑最后一个 1 出现的位置，最后一个 1 只可能出现在第 $k+1,k+2,\ldots,n+1$ 位，对于每种情况，要把剩下 k 个 1 安排在最后一个 1 之前，即 $\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}$.
9. $C(m+n,m)=C(m,0)C(n,0)+C(m,1)C(n,1)+\cdots+C(m,m)C(n,m), m\le n$
10. $C(n+k+1,k)=C(n+k,k)+C(n+k-1,k-1)+C(n+k-2,k-2)+\cdots+C(n+1,1)+C(n,0)$
11. $C(n,k)C(k,r)=C(n,r)C(n-r,k-r)$

定义 4.1: 广义二项式定理

设 u 是实数且 k 是非负整数。那么广义二项式系数 $\binom{u}{k}$ 定义为

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} \frac{u(u-1)\dots(u-k+1)}{k!} & k > 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

$\binom{-n}{r} = (-1)^r C(n+r-1, r)$

4.5 生成函数

Let $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$. Then

$f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$

$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}) x^k$

4.6 常用生成函数

$G(x)$	a_k	$G(x)$	a_k
$(1+x^r)^n$	$C(n, k/r)$	$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$	1 if $k \leq n$
$\frac{1}{1-x}$	1	$\frac{1}{1-ax}$	a^k
$\frac{1}{1-x^r}$	1	$\frac{1}{(1-x)^2}$	$k+1$
$\frac{1}{(1-x)^n}$	$C(n+k-1, k) = C(n+k-1, n-1)$	$\frac{1}{(1+x)^n}$	$(-1)^k C(n+k-1, k)$
e^x	$\frac{1}{k!}$	$\ln(1+x)$	$\frac{(-1)^{k+1}}{k}$

5 关系 Relation

5.1 二元关系 Binary Relation

5.1.1 Properties of Relations

1. Relation on a set

The number of binary relations on a set A, where $|A| = n$ is 2^{n^2}.

2. 自反关系 Reflexive Relation

A relation R on a set A is called reflexive if $(a, a) \in R$ for every element $a \in A$.

矩阵表示：对角线全 1

The number of reflexive relations on a set A with $|A| = n$ is $2^{n(n-1)}$. 对角线确定，剩下 $n^2 - n$ 个位置，每个位置是 0 或 1，乘法法则 $2^{n(n-1)}$

3. Irreflexive Relation

A relation R on a set A is called irreflexive if $(a, a) \notin R$ for **every** element $a \in A$.

矩阵表示：对角线全 0

4. 对称关系 Symmetric Relation

A relation R on a set A is called symmetric if $(b, a) \in R$ whenever $(a, b) \in R$ for all $a, b \in A$.

(a, b) 和 (b, a) 要么都有，要么都没有. 矩阵表示：对称矩阵

5. 反对称关系 Antisymmetric Relation

A relation R on a set A is called antisymmetric if $(a, b) \in R$ and $(b, a) \in R$ implies $a = b$ for all $a, b \in A$.

矩阵表示：除了对角线之外不能有对称的 1，如 MR_{div}

6. 传递关系 Transitive Relation

A relation R on a set A is called transitive if $(a, b) \in R$ and $(b, c) \in R$ implies $(a, c) \in R$ for all $a, b, c \in A$.

5.2 n 元关系 n-ary Relation

An n-ary relation R on sets $A_1, \dots, A_n$, written as $R : A_1, \dots, A_n$, is a subset $R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$.

The sets A_i's are called the domains of R.

The degree of R is n

R is functional in domain A_i if it contains at most one n-tuple $(\dots, a_i, \dots)$ for any value a_i within domain A_i.

5.3 关系的闭包 Closures of Relations

5.3.1 闭包的概念

S is the minimal set containing R satisfying the property P. Example: $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$ on $A = \{1, 2, 3\}$. What is the symmetric closure S of R?

$S = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 2)\}$ （加入尽可能少的 tuple 使其成为一个对称关系）

5.3.2 连通性与传递闭包

定理 5.1

Let R be relation on a set A. There is a path of length n from a to b if and only if $(a, b) \in R^n$.

证明. $n = 1$ 时，根据关系的有向图表示法，从 a 到 b 存在一条长为 1 的路径，当且仅当 $(a, b) \in R$. 设 $n = k$ 时定理为真。那么 $n = k + 1$ 时，a, b 间存在长为 $k + 1$ 的路径，当且仅当存在一个点 x 使得 a, x 间存在长为 1 的路径并且 x, b 间存在长为 k 的路径。根据 base case 和 i.h., 可知 $(a, x) \in R, (x, b) \in R^k$, 等价于 $(a, b) \in R^{k+1}$. 由归纳法，定理成立。 □

> 注释 5.1： 现在知道 $n = 1$ 和 $n = k$ 时成立，而且这个定理是充要。a, b 之间有长 $k+1$ 的路径 $\leftrightarrow$ 必须有那么一个点 x 使得 a, x 路径长为 1 并且 b, x 路径长为 k $\leftrightarrow$ 由两条已知，存在一个点 x 使得 $(a, x) \in R, (x, b) \in R^k$ $\leftrightarrow$ $(a, b) \in R^{k+1}$ (根据关系的合成，这就是 $(a, b) \in R_{k+1}$ 的充要条件) 可以看到全程都是双向箭头充要条件

定义 5.1: connectivity relation

Let R be a relation on a set A. The connectivity relation R^* consists of all pairs (a,b) s.t. there is a path (of any length) between a and b in R.

$$R^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k = \bigcup_{k=1}^{n} R^k$$

解释：R^* 就是所有在 R 里连通的点对组成的集合 * Let A be a set with n elements, and R a relation on A. If there is a path from a to b with $a \neq b$, then there exists a path of length $\leq n-1$. If $a = b$, path length $\leq n$.

$R^* = \bigcup_{k=1}^{n} R^k$ 由上述引理

定理 5.2

The transitive closure of a relation R equals the connectivity relation R^*. 传递闭包的矩阵 $M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]} \vee \cdots \vee M_R^{[n]}$

5.3.3 warshall 算法

1、先找到该矩阵的对角线，并从对角线的左上方开始为第一个元素

2、以对角线上第一个元素为中心，按列展开，寻找中心所在的列中所有不为 0 的元素

3、将“该中心所在的行”加到“该中心所在的列”中所有不为 0 的元素所在的行上

4、加完之后，以对角线上第二个元素为中心，按列展开，寻找该列中所有不为 0 的元素

5、重复“操作 3 ”

6、一直到将对角线上所有元素都展开后结束

5.4 等价关系 Equivalence Relation

5.4.1 等价关系的定义

定义 5.2: equivalence relation

A relation R on a set A is called an equivalence relation if it is reflexive, symmetric, and transitive.

如何把一个关系搞成等价关系：1. 自反闭包 2. 对称闭包 3. 传递闭包，三步完成之后就出来个等价关系

5.4.2 覆盖与划分

定义 5.3: 覆盖 Cover

设 S 是非空集合，$\pi = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$, $A_i \neq \emptyset$ 且满足 $\forall A_i \in \pi, A_i \subseteq S$ 和 $S = \bigcup_{i=1}^{k} A_k$，则称 π 是 S 的一个覆盖。

定义 5.4: 划分 Partition

若 $\pi = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ 为 S 的一个覆盖且 $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$，则称 π 是 S 的一个划分，A_i 为 S 的划分块。

定义 5.5: 商集 quotient set

设 R 是 S 上的等价关系, R 的所有等价类组成的集合 $\{[x]_R \mid x \in S\}$ 叫做 S 关于 R 的商集. 记作 S/R.

5.5 偏序 Partial Ordering

5.5.1 偏序的概念

定义 5.6: 偏序 Partial Ordering

A relation R on a set S is called a partial ordering, or partial order, if it is reflexive, antisymmetric, and transitive.

定义 5.7: 全序 Total Ordering

If $(S, \preccurlyeq)$ is a poset and every two elements of S are comparable, S is called a totally ordered or linearly ordered set, and $\preccurlyeq$ is called a total order or a linear order(线序).

定义 5.8: 字典序 Lexicographic Ordering

Given two posets $(A_1, \preccurlyeq_1)$ and $(A_2, \preccurlyeq_2)$, the lexicographic ordering on $A_1 \times A_2$ is defined by specifying that (a_1, a_2) is less than (b_1, b_2), i.e., $(a_1, a_2) \prec (b_1, b_2)$, either if $a_1 \prec_1 b_1$ or if $a_1 = b_1$ then $a_2 \prec_2 b_2$.

5.5.2 哈塞图 Hasse Diagram

1. 先把没有出现在值域（<a,b>, 其中 a 为前域，b 为值域）的元素放在第一排。如有多个，一起放在第一排。
2. 再把在第一排元素所在的关系全部扔了。出现在值域的元素（扔掉的关系且不会出现在未扔掉关系里）和只出现在前域的元素（未扔掉的关系）放在第二排。
3. 以此类推，直到元素全部有了自己的位置。
4. 在两层数之间，只有上层盖住下层时才能相连。

5.5.3 拓扑排序 Topological Sorting

每次从入度为 0 的点开始，加入拓扑序并且删除它所有的出边。

6 图 Graph

6.1 图的基本概念 Basic Concepts of Graph

(1) 基本概念：顶点 (Node)、边 (Edge)、度数 (Degree)、自环 (loop)：对 E 中的边 $e = (u, v)$，若 $u = v$，则 e 被称作一个自环、重边 (multiple edge)：若 E 中存在两个完全相同的元素（边）e_1, e_2，则它们被称作（一组）重边。

(2) 特殊的图：多重图 (Multigraph)：有多重边、简单图 (Simple Graph)、伪图 (pseudograph): 有多重边或环、无边图 (Edgeless Graph)、完全图 (Complete Graph)、正则图 (Regular Graph)、星 (Star)、补图 (Complement)、子图 (Subgraph)

(3) 路径与类似概念：路 (Walk)、回路 (Closed Walk)、迹 (Trail)、通路 (Path)、圈 (Cycle)

(4) 连通性：连通图 (Connected Graph)、连通分支 (Connected Component)

定理 6.1: 握手定理

对于任何无向图 $G=(V,E)$，有 $\sum_{v\in V} d(v) = 2\,|E|$。

推论 6.1

在任意图中，度数为奇数的点必然有偶数个。

若 $d(v)=0$，则称 v 为孤立点 (isolated vertex)。

若 $d(v)=1$，则称 v 为叶节点 (leaf vertex)/悬挂点 (pendant vertex)。

若 $2 \mid d(v)$，则称 v 为偶点 (even vertex)。

若 $2 \nmid d(v)$，则称 v 为奇点 (odd vertex)。图中奇点的个数是偶数。

若 $d(v)=|V|-1$，则称 v 为支配点 (universal vertex)。

对一张图，所有节点的度数的最小值称为 G 的最小度 (minimum degree)，记作 $\delta(G)$；最大值称为最大度 (maximum degree)，记作 $\Delta(G)$。即：$\delta(G)=\min_{v\in G} d(v)$，$\Delta(G)=\max_{v\in G} d(v)$。

在有向图 $G=(V,E)$ 中，以一个顶点 v 为起点的边的条数称为该顶点的出度 (out-degree)，记作 $d^{+}(v)$。以一个顶点 v 为终点的边的条数称为该节点的入度 (in-degree)，记作 $d^{-}(v)$。显然 $d^{+}(v)+d^{-}(v)=d(v)$。

定义 6.1: 相邻 (adjacent)

在无向图 $G=(V,E)$ 中，若点 v 是边 e 的一个端点，则称 v 和 e 是关联的 (incident) 或相邻的 (adjacent)。对于两顶点 u 和 v，若存在边 (u,v)，则称 u 和 v 是相邻的 (adjacent)。

一个顶点 $v\in V$ 的邻域 (neighborhood) 是所有与之相邻的顶点所构成的集合，记作 $N(v)$。

一个点集 S 的邻域是所有与 S 中至少一个点相邻的点所构成的集合，记作 $N(S)$，即：

$$N(S)=\bigcup_{v\in S} N(v)$$

定义 6.2: 路径

途径 (walk)：途径是连接一连串顶点的边的序列，可以为有限或无限长度。形式化地说，一条有限途径 w 是一个边的序列 $e_1, e_2, \ldots, e_k$，使得存在一个顶点序列 $v_0, v_1, \ldots, v_k$ 满足 $e_i = (v_{i-1}, v_i)$，其中 $i \in [1, k]$。这样的途径可以简写为 $v_0 \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k$。通常来说，边的数量 k 被称作这条途径的长度（如果边是带权的，长度通常指途径上的边权之和，题目中也可能另有定义）。

迹 (trail)：对于一条途径 w，若 $e_1, e_2, \ldots, e_k$ 两两互不相同，则称 w 是一条迹。

路径 (path)（又称 ** 简单路径 (simple path)**）：对于一条迹 w，若其连接的点的序列中点两两不同，则称 w 是一条路径。

回路 (circuit)：对于一条迹 w，若 $v_0 = v_k$，则称 w 是一条回路。

环/圈 (cycle)（又称简单回路/简单环 (simple circuit)）：对于一条回路 w，若 $v_0 = v_k$ 是点序列中唯一重复出现的点对，则称 w 是一个环。

定义 6.3: 补图

对于无向简单图 $G = (V, E)$，它的补图 (complement graph) 指的是这样的一张图：记作 $\bar{G}$，满足 $V\left(\bar{G}\right) = V(G)$，且对任意节点对 (u, v)，$(u, v) \in E\left(\bar{G}\right)$ 当且仅当 $(u, v) \notin E(G)$。

定义 6.4: 反图

对于有向图 $G = (V, E)$，它的反图 (transpose graph) 指的是点集不变，每条边反向得到的图，即：若 G 的反图为 $G' = (V, E')$，则 $E' = \{(v, u) | (u, v) \in E\}$。

6.1.1 一些特殊的简单图

1. 完全图 Complete Graph

若无向简单图 G 满足任意不同两点间均有边，则称 G 为完全图 (complete graph)，n 阶完全图记作 K_n。若有向图 G 满足任意不同两点间都有两条方向不同的边，则称 G 为有向完全图 (complete digraph)。K_n 的边的数目为 $C(n, 2) = \dfrac{1}{2}n(n-1)$

2. 圈图 Cycle

若无向简单图 $G = (V, E)$ 的所有边恰好构成一个圈，则称 G 为 ** 环图/圈图 (cycle graph)**，$n(n \geq 3)$ 阶圈图记作 C_n。易知，一张图为圈图的充分必要条件是，它是 2- 正则连通图。

3. 轮图 Wheel

若无向简单图 $G = (V, E)$ 满足，存在一个点 v 为支配点，其它点之间构成一个圈，则称 G 为轮图 (wheel graph)，$n + 1(n \geq 3)$ 阶轮图记作 W_n。

4. n 立方体图

An n-dimensional hypercube, or n-cube, Q_n is a graph with 2^n vertices representing all bit strings of length n, where there is an edge between two vertices that differ in exactly one bit position.

边数: $n2^{n-1}$

5. 星图/菊花图

若无向简单图 $G = (V, E)$ 满足，存在一个点 v 为支配点，其余点之间没有边相连，则称 G 为星图/菊花图 (star graph)，$n + 1(n \geq 1)$ 阶星图记作 S_n。

6.2 二分图 Bipartite Graph

定义 6.5: 匹配 (matching)

对于图 $G = (V, E)$，若 $E' \in E$ 且 E' 中任意两条不同的边都没有公共的端点，且 E' 中任意一条边都不是自环，则 E' 是图 G 的一个 * 匹配 (matching)，也可以叫作边独立集 (independent edge set)。如果一个点是匹配中某条边的一个端点，则称这个点是被匹配的 (matched)/饱和的 (saturated)，否则称这个点是不被匹配的 (unmatched)。

边数最多的匹配被称作一张图的最大匹配 (maximum-cardinality matching)。图 G 的最大匹配的大小记作 $\nu(G)$。

如果边带权，那么权重之和最大的匹配被称作一张图的最大权匹配 (maximum-weight matching)。

如果一个匹配在加入任何一条边后都不再是一个匹配，那么这个匹配是一个极大匹配 (maximal matching)。最大的极大匹配就是最大匹配，任何最大匹配都是极大匹配。极大匹配一定是边支配集，但边支配集不一定是匹配。最小极大匹配和最小边支配集大小相等，但最小边支配集不一定是匹配。求最小极大匹配是 NP 困难的。

如果在一个匹配中所有点都是被匹配的，那么这个匹配是一个完美匹配 (perfect matching)。如果在一个匹配中只有一个点不被匹配，那么这个匹配是一个准完美匹配 (near-perfect matching)。

定理 6.2: 托特定理

n 阶无向图 G 有完美匹配当且仅当对于任意的 $V' \subset V(G)$，$p_{奇}(G - V') \leq |V'|$，其中 $p_{奇}$ 表示奇数阶连通分支数。

任何无桥 3 - 正则图都有完美匹配。

定义 6.6: 二分图 Bipartite Graph

二分图有两个等价定义：

(1) 顶点集可以被划分为两个不交的集合的并，使得每个集合内部都没有边，这个定义通常用于直观理解和描述二分图及其相关性质

(2) 不含顶点个数为奇数的圈，这个定义通常用于证明题中关于二分图的匹配有两个重要定理：

(1) König 定理：对于 d > 0，任意 d-正则二分图一定有完美匹配

(2) Marriage 定理：假设二分图 G 划分出的两个点集为 A 和 B，则 G 存在完美匹配当且仅当 $|A| = |B|, \forall S \subseteq A$，有 $|S| \leq |N(S)|$

6.3 连通性 Connectivity

6.3.1 通路 Path

定义 6.7: 通路 Path

Let n be a nonnegative integer and G an undirected graph. A path of length n from u to v in G is a sequence of n edges $e_1, e_2, \ldots, e_n$ of G for which there exists a sequence $x_0 = u, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = v$ of vertices such that e_i has the endpoints x_{i-1} and x_i for $i = 1, \ldots, n$. The path is a circuit (回路) if it begins and ends at the same vertex, i.e., if $u = v$ and has length greater than zero. A path or circuit is simple if it does not contain repeating vertices.

注意:

除了通路之外还有顶点和边交替的序列，叫做路径 (walk) 以及闭合路径 (closed walk)。不经过重复边的路径叫路线 (trail)。书上关于简单通路的定义是不经过重复边，可以半路拐出去走个圈再拐回来，这实际上是路线。书上的解释是，当你使用路线这个术语时，简单通路就表示不经过重复点的路线。

6.3.2 点联通度和边连通度

1. 割点与割边

Sometimes the removal from a graph of a vertex and all incident edges disconnect the graph. Such vertices are called **cut vertices** (割点). Similarly we may define cut edges (割边 or 桥).

2. 边割集与边连通度 A set of edges E' is called an edge cut(边割集) of G if the subgraph $G - E'$ is disconnected. The edge connectivity $\lambda(G)$ is the **minimum number of edges in an edge cut of G.

边连通度：最小边割集的边数

n 个顶点的图的边连通度满足 $0 \leq \lambda(G) \leq n-1$

n 个顶点的完全图 $\lambda(K_n) = n-1$ 充要条件 3. 点割集与点连通度点集 V' 是 V 的子集，若 $G - V'$ 是不连通的，则称 V' 是点割集或分割集。非完全图的点连通度 $\kappa(G)$ 是最小点割集的顶点数。

不可分割图：不含割点的图，例如 $K_n, n \geq 3$。对于完全图 K_n，$\kappa(K_n) = n-1$。

若 $\kappa(G) \geq k$，称图 G 是 k 连通的。

4. 点连通度与边连通度的关系

$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \min\limits_{v \in V} \deg(v)$

不连通图 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$

完全图 $\kappa(K_n) = \lambda(K_n) = n-1$

6.3.3 计算顶点之间的通路数

Let G be a graph with adjacency matrix A with respect to the ordering $v_1, v_2, \ldots, v_n$ of vertices. The number of different paths of length r from v_i to v_j , where $r > 0$ is positive, equals the (i, j)-th entry of A^r.

6.3.4 最短通路问题 Shortest Path Problems

1. 定义

Let G^α be an weighted graph, with a weight function $\alpha : E \to R$ on its edges. If $P = e_1 e_2 \ldots e_k$ is a path, then its weight is $\alpha(P) = \sum_{i=1}^{k} \alpha(e_i)$. The minimum weighted distance between two vertices is $d(u, v) = \min\{\alpha(P) \mid P : u \to v\}$.

2. 迪杰斯特拉算法 Dijkstra's Algorithm

1. 通过 Dijkstra 计算图 G 中的最短路径时，需要指定一个起点 D(即从顶点 D 开始计算)。

2. 此外，引进两个数组 S 和 U。S 的作用是记录已求出最短路径的顶点 (以及相应的最短路径长度)，而 U 则是记录还未求出最短路径的顶点 (以及该顶点到起点 D 的距离)。

3. 初始时，数组 S 中只有起点 D；数组 U 中是除起点 D 之外的顶点，并且数组 U 中记录各顶点到起点 D 的距离。如果顶点与起点 D 不相邻，距离为无穷大。

4. 然后，从数组 U 中找出路径最短的顶点 K，并将其加入到数组 S 中；同时，从数组 U 中移除顶点 K。接着，更新数组 U 中的各顶点到起点 D 的距离。

5. 重复第 4 步操作，直到遍历完所有顶点。

6.4 欧拉通路与哈密顿通路

6.4.1 欧拉通路与欧拉回路

定义 6.8: 欧拉通路与欧拉回路

欧拉回路：设图 G 中没有孤立顶点，如果存在一条回路经过 G 的每条边一次且仅一次，则称该回路为 G 的欧拉回路

欧拉通路：设图 G 中没有孤立顶点，如果存在一条路经过 G 的每条边一次且仅一次，则称该路为 G 的欧拉通路

欧拉图：具有欧拉回路的图

半欧拉图：具有欧拉通路但不具有欧拉回路的图

结论 6.1: (

) 图 G 存在欧拉路当且仅当 G 连通且只有 0（Euler 回路）个或 2 个奇数度数的顶点

(2) 图 G 存在欧拉回路当且仅当 G 连通且所有顶点的度数为偶数

(3) 若 G 是欧拉图，则它为若干个环的并，且每条边被包含在奇数个环内。

1. 无向图是欧拉图当且仅当：
   - 非零度顶点是连通的
   - 顶点的度数都是偶数
2. 无向图是半欧拉图当且仅当：
   - 非零度顶点是连通的
   - 恰有 0 或 2 个奇度顶点
3. 有向图是欧拉图当且仅当：
   - 非零度顶点是强连通的
   - 每个顶点的入度和出度相等
4. 有向图是半欧拉图当且仅当：
   - 非零度顶点是弱连通的
   - 至多一个顶点的出度与入度之差为 1
   - 至多一个顶点的入度与出度之差为 1
   - 其他顶点的入度和出度相等

结论 6.2: 多笔画问题

如果一个无向图中有 2∗k 个奇数出度的顶点，则至少需要 kk 笔画才能把其走完

证明：每次只能把两个奇数出度的顶点走完，因此对 2∗k 个奇数出度的顶点至少需要 k 笔画

Fluery 算法 (生成欧拉回路)

任取 G 中的一个顶点 v_0 ，令 $p_0 : v_0$。

记当前求出的路径 $p_k : v_0, v_1, ..., v_k$ 。若 v_k 只有一条未删除的出边 (v_k, u) ，则令 $v_{k+1} = u$ 。否则找到一条未删除的边 (v_k, u) ，使得在删去 (v_k, u) 后，u 仍然能到达 v_k ，令 $v_{k+1} = u$ 。删去边 (v_k, v_{k+1}) ，将 v_{k+1} 加入当前路径得到 p_{k+1} 。

重复直到不能进行为止，此时的路径 pm 即为一条欧拉回路。

6.4.2 哈密顿通路与哈密顿回路

定义 6.9: 哈密顿通路与哈密顿回路

通过图中所有顶点一次且仅一次的通路称为哈密顿通路。

通过图中所有顶点一次且仅一次的回路称为哈密顿回路。

具有哈密顿回路的图称为哈密顿图。

具有哈密顿通路而不具有哈密顿回路的图称为半哈密顿图。

结论 6.3

设 $G =< V, E >$ 是哈密顿图，则对于 V 的任意非空真子集 V_1，均有 $p(G - V_1) \leq |V_1|$。其中 $p(x)$ 为 x 的连通分支数。

推论：设 $G =< V, E >$ 是半哈密顿图，则对于 V 的任意非空真子集 V_1，均有 $p(G - V_1) \leq |V_1| + 1$。其中 $p(x)$ 为 x 的连通分支数。

完全图 $K_{2k+1}(k \geq 1)$ 中含 k 条边不重的哈密顿回路，且这 k 条边不重的哈密顿回路含 K_{2k+1} 中的所有边。

完全图 $K_{2k}(k \geq 2)$ 中含 $k - 1$ 条边不重的哈密顿回路，从 K_{2k} 中删除这 $k - 1$ 条边不重的哈密顿回路后所得图含 k 条互不相邻的边。

充分条件：

设 G 是 $n(n \geq 2)$ 的无向简单图，若对于 G 中任意不相邻的顶点 v_i, v_j，均有 $d(v_i) + d(v_j) \geq n - 1$，则 G 中存在哈密顿通路。

推论 1：设 G 是 $n(n \geq 3)$ 的无向简单图，若对于 G 中任意不相邻的顶点 v_i, v_j，均有 $d(v_i) + d(v_j) \geq n$，则 G 中存在哈密顿回路，从而 G 为哈密顿图。

推论 2：设 G 是 $n(n \geq 3)$ 的无向简单图，若对于 G 中任意顶点 v_i，均有 $d(v_i) \geq \frac{n}{2}$，则 G 中存在哈密顿回路，从而 G 为哈密顿图。

设 D 为 $n(n \geq 2)$ 阶竞赛图，则 D 具有哈密顿通路。

若 D 含 $n(n \geq 2)$ 阶竞赛图作为子图，则 D 具有哈密顿通路。

强连通的竞赛图为哈密顿图。

若 D 含 $n(n \geq 2)$ 阶强连通的竞赛图作为子图，则 D 具有哈密顿回路。

6.4.3 中国邮递员问题

一个邮递员从邮局出发，在其分管的投递区域内走遍所有的街道把邮件送到每个收件人手中，最后又回到邮局，要走怎样的线路使全程最短。

显然，当这个图是欧拉图时，任何一条欧拉回路都符合要求；当这个图不是欧拉图时，所求回路必然要重复通过某些边。对此，管梅谷曾证明，若图的边数为 m，则所求回路的长度最小是 m，最多不超过 2m，并且每条边在其中最多出现两次。中国邮递员问题，一般为在带权连通图中找一条包括全部边的且权最小的回路。

这个问题有着有效的解决办法，其中最直观的方法之一是: 把图中的某些边复制成两条边，然后在所求图中找一条欧拉回路。算法：

（1）若 G 不含奇数度结点，则任一欧拉回路就是问题的解决。

（2）若 G 含有 2K(K>0) 个奇数度结点，则先求出其中任何两点间的最短路径，然后再在这些路径之中找出 K 条路径 P1，P2，···，PK，使得满足以下条件：

1. 任何 Pi 和 Pj（i≠j）没有相同的起点和终点。

2. 在所满足 1 的 K 条最短路径的集合中，P1，P2，···PK 的长度总和最短。

（3）根据（2）中求出的 K 条最短道路 P1，P2，···，PK，在原图 G 中复制所有出现的在这条道路上的边，设所得之图为 G^*。

（4）构造 G^* 的欧拉回路，即得中国邮递员问题的解。

6.5 平面图 Planar Graph

6.5.1 平面图的概念

如果图 G 能画在平面 S 上，即除顶点处外无边相交，则称 G 可平面嵌入 S，G 为可平面图或平面图。画出的没有边相交的图称为 G 的平面表示或平面嵌入。

$K_{3,3}$ 和 K_5 不是平面图。

设 G 是平面图，由 G 的边将 G 所在的平面划分成若干个区域，每个区域称为 G 的一个面，其中面积无限的面称为无限面或外部面，面积有限的称为有限面或内部面。包围每个面的所有边组成的回路称为该面的边界，边界的长度称为该面的次数。

平面图中所有面的次数之和等于边数 m 的 2 倍。

若在简单平面图 G 的任意不相邻顶点间添加边，所得图为非平面图，称 G 为极大平面图。

若 G 为 $n(n \geq 3)$ 阶简单的连通平面图，G 为极大平面图当且仅当 G 的每个面的次数均为 3。平面图可以有以下两种定义方式：

6.5.2 欧拉公式 Euler's Formula

对于任意的连通的平面图 G，有：

$n - m + r = 2$

其中，n, m, r，分别为 G 的阶数，边数和面数。

推论：对于有 $p(p \geq 2)$ 个连通分支的平面图 G，有

$n - m + r = p + 1$

可推出其他性质：

设 G 是连通的平面图，且 G 的各面的次数至少为 $l(l \geq 3)$，则有：

$m \leq \dfrac{l}{l-2}(n-2)$

推论：对于有 $p(p \geq 2)$ 个连通分支的平面图 G，有

$m \leq \dfrac{l}{l-2}(n-p-1)$

推论：设 G 是 $n \geq 3$ 阶 m 条边的简单平面图，则 $m \leq 3n - 6$

若两个图 G_1 与 G_2 同构，或通过反复插入或消去 2 度顶点后是同构的，则称二者是同胚的。

定理 6.3: 库拉图斯基定理 kuratowski

图 G 是平面图当且仅当 G 不含与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚的子图。
图 G 是平面图当且仅当 G 中没有可以收缩到 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图。

6.5.3 对偶图

设 G 是平面图的某一个平面嵌入，构造图 G^*:

1. 在 G 的每个面 R_i 中放置 G^* 的一个顶点 v_i^*

2. 设 e 为 G 的一条边，若 e 在 G 的面 R_i 和 R_j 的公共边界上，做 G^* 的边 e^* 与 e 相交，且 e^* 关联 G^* 的顶点 v_i^*, v_j^*，即 $e^* = (v_i^*, v_j^*)$，e^* 不与其他任何边相交。若 e 为 G 中桥且在 R_i 的边界上，则 e^* 是以 R_i 中顶点 v_i^* 为端点的环，即 $e^* = (v_i^*, v_j^*)$

称 G^* 为 G 的对偶图。

结论 6.4

1. G^* 为平面图，且是平面嵌入。
2. G 中自环在 G^* 中对应桥，G 中桥在 G^* 中对应自环。
3. G^* 是连通的。
4. 若 G 的面 R_i, R_j 的边界上至少有两条公共边，则关联 v_i^*, v_j^* 的边有平行边，G^* 多半是多重图。
5. 同构的图的对偶图不一定是同构的。
6. G^* 与 G 同构当且仅当 G 是连通图。

6.5.4 柏拉图多面体 Platonic Solids

如果一个凸多面体的小面是全等的规则多边形，则称为规则多面体。这样的规则凸多面体只有五种，即正四面体 (tetrahedron, 小面为三角形)、正六面体（cube，立方体，小面为正方形)、正八面体（octahedron，小面为三角形)、正十二面体（dodecahedron，小面为五边形）和正二十面体（icosahedron，小面为三角形）

古人虽然感觉到只有五种柏拉图多面体，但却没有证明。关于这个问题，基于欧拉多面体公式，可以得出一个非常简单的证明。注意观察正多面体的边，每一个边都是由两个顶点规定了的，且每一个边又都是由两个面所规定了的—两个顶点连一个边，两个面交于一个边。这样，假设正多面体的小面是 p-边形（p>2)，每个顶点连接着 q 条边（q>2)，则有 pF=2E=qV。由欧拉公式 V-E+F=2，可联立求解得

$V = \dfrac{4p}{4-(p-2)(q-2)}, E = \dfrac{2pq}{4-(p-2)(q-2)}, F = \dfrac{4q}{4-(p-2)(q-2)}$

可以得出如下解:

$p = 3, q = 3$，对应正四面体；$p = 3, q = 4$，对应正八面体；

$p = 3, q = 5$，对应正二十面体；$p = 4, q = 3$，对应正六面体；

$p = 5, q = 3$，对应正十二面体。QED.

6.6 图着色 Graph Coloring

6.6.1 着色与着色数

1. 着色

A coloring of a simple graph is the assignment of a color to each vertex of the graph so that no two adjacent vertices are assigned the same color.

2. 着色数 chromatic number

The chromatic number of a graph is the least number of colors needed for a coloring of this graph, denoted by $\chi(G)$.

一些特殊图的着色数

$$\chi(K_n) = n, \chi(K_{m,n}) = 2, \chi(C_n) = \begin{cases} 2 & n \ is \ even, n \geq 4 \\ 3 & n \ is \ odd, n \geq 3 \end{cases}$$

6.6.2 图 G 着色的算法

(Welch-Powel) 输入一个图 G

1. 根据度递减的次序排列 G 的顶点
2. 给第一个顶点染第一种颜色 C1，然后，依次序给与前面已染 C1 的点不相邻的点染 C1
3. 用第二种颜色对未染色的子序列重列重复 2
4. 用第三种颜色，第四种颜色...，重复 3，直到所有的点都已染色
5. 退出

结论 6.5

对图 G，下面结论等价：

1. G 为 2-可着色的
2. G 为二部图
3. G 的每个圈有偶长度

6.6.3 色多项式

$P(G,k)$ 表示 G 的不同 k 着色方式的总数。

$P(K_n,k) = k(k-1)\cdots(k-n+1)$

$P(N_n,k) = k^n$

在无向无环图 G 中，

1. $e = (v_i, v_j) \notin E(G)$，则 $P(G,k) = P(G \cup e, k) + P(G \setminus e, k)$
2. $e = (v_i, v_j) \in E(G)$，则 $P(G,k) = P(G - e, k) - P(G \setminus e, k)$

定理 6.4

设 V_1 是 G 的点割集，且 $G[V_1]$ 是 G 的 $|V_1|$ 阶完全子图，$G - V_1$ 有 $p(p \geq 2)$ 个连通分支，则：

$$P(G,k) = \frac{\Pi_{i=1}^{p}(P(H_i,k))}{P(G[V_1],k)^{p-1}}$$

其中 $H_i = G[V_1 \cup V(G_i)]$