离散数学

第一章 数理逻辑

定义1-1.1 能够确切判断其断言是真或假的陈述句称为**命题,**该命题可以取一个“值”，称为**真值。**真值只有“真”和“假”两种，分别用“T”(或“1”)和“F”(或“0”)表示。

定义1-1.2 用一个具体的命题代入命题标识符P的过程,称为对P的**解释或赋值(指派)**。

命题的分类

- **原子命题(简单命题)：**凡是不能用联结词分解出更简单的子命题的命题。
- **复合命题：**可以分解为更为简单命题的命题。而且这些简单命题之间是通过如“或者”、“并且”、“不”、“如果...则...”、“当且仅当”等这样的关联词和标点符号复合而构成一个复合命题。

逻辑联结词

- 否定联结词～
- 合取联结词∧
- 析取联结词∨
- 排斥或▽
- 条件联结词→
- 双条件联结词↔

约定

为了不使句子产生混淆，作如下约定，命题联结词之优先级如下：

1. 否定→合取→析取→条件→双条件
2. 同级的联结词，按其出现的先后次序(从左到右)
3. 若运算要求与优先次序不一致时，可使用括号；同级符号相邻时，也可使用括号。括号中的运算为最优先级。

定义1-2.1(命题公式)

1. 命题变元（原子命题变元）本身是一个公式；
2. 如P，Q是公式，则(～P)、(P∧Q)、(P∨Q)、(P→Q)、(P↔Q)也是公式；
3. 命题公式仅由有限步使用规则1-2后产生的结果。该公式常用符号G、H、…等表示。

注：为简单期间，以后称合适公式为**公式。**

为书写和输入计算机及计算方便起见，约定：

1. 最外层括号可以省略
2. 按联结词的优先级的括号可以省略

定义1-2.2 如公式A是公式B的一部分，则称A是B的**子公式**。

定义1-2.3 设P_1、P_2、$\cdots$、P_n是出现在公式G中的所有命题变元，指定P_1、P_2、$\cdots$、P_n的一组真值（如1，0，1，⋯，0，1），则这组真值称为G的一个解释,常记为Ｉ。一般来说，若有ｎ个命题变元，则应有2^n个不同的解释。

定义1-2.4 如果公式G在解释Ｉ下是真的，则称Ｉ**满足**G；如果G在解释Ｉ下是假的，则称Ｉ**弄假**G。将公式G在其所有可能解释下的真值情况列成的表，称为G的**真值表**。

定义1-2.5

1. 如果在它的所有解释之下都为“真”，公式称为**永真公式(重言式)**。
2. 如果在它的所有解释之下都为“假”，公式称为**永假公式(矛盾式，不可满足公式)**。
3. 如果它不是永假的（即存在解释使公式取值1），公式称为**可满足的**

定义1-3.1 设G、H是公式，如果在任意解释Ｉ下，G与H的真值相同，则称公式G、H是等价的，记作$G \Leftrightarrow H$。

定理1-3.2 公式G、H等价的**充分必要条件**是公式$G \leftrightarrow H$是永真公式。此定理是从另一角度来看待等价性

等价式的性质

1. 自反性：$A \Leftrightarrow A$
2. 对称性：若$A \Leftrightarrow B$，则$B \Leftrightarrow A$
3. 可传递性：若$A \Leftrightarrow B, B \Leftrightarrow C$，则$A \Leftrightarrow C$

基本等价式

1. E_1:$(\mathrm{G} \leftrightarrow \mathrm{H}) \Leftrightarrow (\mathrm{G} \rightarrow \mathrm{H}) \wedge (\mathrm{H} \rightarrow \mathrm{G})$（等价）
2. E_2: $(G \rightarrow \mathrm{H}) \Leftrightarrow (\sim \mathrm{GvH})$（蕴含）
3. E_3: $\mathrm{G} \vee \mathrm{G} \Leftrightarrow \mathrm{G}$（幂等律）
   $\mathrm{E}_4 : \mathrm{G} \wedge \mathrm{G} \Leftrightarrow \mathrm{G}$
4. E_5: $\mathrm{G} \vee \mathrm{H} \Leftrightarrow \mathrm{H} \vee \mathrm{G}$（交换律）
   $\mathrm{E}_6 : \mathrm{G} \wedge \mathrm{H} \Leftrightarrow \mathrm{H} \wedge \mathrm{G}$
5. E_7:$\mathrm{G} \vee (\mathrm{H} \vee \mathrm{S}) \Leftrightarrow (\mathrm{G} \vee \mathrm{H}) \vee \mathrm{S}$（结合律）
   E_8:$\mathrm{G} \wedge (\mathrm{H} \wedge \mathrm{S}) \Leftrightarrow (\mathrm{G} \wedge \mathrm{H}) \wedge \mathrm{S}$
6. $\mathrm{E}_9 : \mathrm{G} \vee (\mathrm{G} \wedge \mathrm{H}) \Leftrightarrow \mathrm{G}$（吸收率）
   $\mathrm{E}_{10} : \mathrm{G} \wedge (\mathrm{G} \vee \mathrm{H}) \Leftrightarrow \mathrm{G}$
7. $\mathrm{E}_{11} : \mathrm{G} \vee (\mathrm{H} \wedge \mathrm{S}) \Leftrightarrow (\mathrm{G} \vee \mathrm{H}) \wedge (\mathrm{G} \vee \mathrm{S})$（分配律）
   $\mathrm{E}_{12} : \mathrm{G} \wedge (\mathrm{H} \vee \mathrm{S}) \Leftrightarrow (\mathrm{G} \wedge \mathrm{H}) \vee (\mathrm{G} \wedge \mathrm{S})$

8. E_{13}: $\mathrm{G} \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{G}$ （同一律）
   E_{14}: $\mathrm{G} \wedge \mathrm{T} \Leftrightarrow \mathrm{G}$
9. E_{15}: $\mathrm{G} \vee \mathrm{T} \Leftrightarrow \mathrm{T}$ （零律）
   E_{16}: $\mathrm{G} \wedge \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}$
10. E_{17}:$\mathrm{G} \vee \sim\mathrm{G} \Leftrightarrow \mathrm{T}$ （矛盾律）
11. E_{18}:$\mathrm{G} \wedge \sim \mathrm{G} \Leftrightarrow \mathrm{F}$
12. E_{19}: $\sim(\sim \mathrm{G}) \Leftrightarrow \mathrm{G}$ （双重否定率）
13. E_{20} : $(\mathrm{G} \wedge \mathrm{H}) \rightarrow \mathrm{S} \Leftrightarrow \mathrm{G} \rightarrow (\mathrm{H} \rightarrow \mathrm{S})$ （输出率）
14. E_{21} : $(\mathrm{G} \vee \mathrm{H}) \Leftrightarrow (\sim \mathrm{G} \wedge \mathrm{H}) \vee (\mathrm{G} \wedge \sim \mathrm{H})$ （排中律）
15. E_{22} : $\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q} \Leftrightarrow \sim \mathrm{Q} \rightarrow \sim \mathrm{P}$ （逆反律）
16. E_{23} : $\sim(\mathrm{G} \vee \mathrm{H}) \Leftrightarrow \sim\mathrm{G} \wedge \sim\mathrm{H}$ （De Morgan定律）
    E_{24} : $\sim(\mathrm{G} \wedge \mathrm{H}) \Leftrightarrow \sim\mathrm{G} \vee \sim \mathrm{H}$

定理1-3.1 设A是公式X的一个子公式，并且 $A \Leftrightarrow B$，用公式B替换X中的子公式A 得到新公式 Y，则必有 $X \Leftrightarrow Y$。

对偶式 在给定的仅使用联结词～、∨、∧的命题公式A中，若把∧和∨，F和T互换而得的公式A*，则称A*为A的**对偶（公）式**。如公式（P∨Q）∧R的对偶式为（P∧Q）∨R～P∨（Q∧R）的对偶式为～P∧（Q∨R）

定理1-3.3 设$P_1, P_2, \cdots P_n$是公式A和A*中的所有命题变元，则
$\sim\mathcal{A}(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots \mathrm{P}_n) \Longleftrightarrow \mathcal{A}^*(\sim \mathrm{P}_1, \sim \mathrm{P}_2, \ldots, \sim \mathrm{P}_n)$
$\mathcal{A}(\sim \mathrm{P}_1, \sim \mathrm{P}_2, \ldots, \sim \mathrm{P}_n) \Leftrightarrow \sim\mathcal{A}^*(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots \mathrm{P}_n)$

定理1-3.4 对偶原理：设A和B是两个命题公式，若$A \Leftrightarrow B$，则$A^* \Leftrightarrow B^*$

定义 1-4.1 设P和Q是命题公式，分别称P↑Q和P↓Q为“与非”和“或非”命题公式。

定义 1-4.2 设S 是由某些联结词构成的集合，如果每个逻辑联结词的功能都能够由S中的联结词实现，则称S是联结词的一个功能完备集；进一步，如果去掉S中的任何一个联结词后，至少有一个联结词的功能不能由S中剩余的联结词实现时，则称S是逻辑联结词的一个最小功能完备集。

定义1.16

1. 原子公式及其否定称为句节（分别称为正句节或负句节）。
2. 有限个句节组成的析取式称为子句；
3. 有限个句节组成的合取式称为短语。
4. 有限个短语组成的析取式称为析取范式；
5. 有限个子句组成的合取式称为合取范式。

定理1.6 （范式存在定理）任何命题公式都存在与之等价的合取范式与析取范式。

定义1.17(1) 在n个变元的基本积（短语）中，若每一个变元与其否定并不同时存在，且二者之一必出现且仅出现一次，则称这种基本积为极小项。由有限个极小项组成的析取式称为主析取范式。

定义1.17(2) 在n个变元的基本和（子句）中，若每一个变元与其否定并不同时存在，且二者之一必出现且仅出现一次，则这种基本和称为极大项。由有限个极大项组成的合取式称为主合取范式。

极小项与极大项的性质

1. 没有两个不同的极小项是等价的，且每个极小项只有一组真值指派，使该极小项的真值为真；
2. 没有两个不同的极大项是等价的，且每个极大项只有一组真值指派，使该极大项的真值为假；
3. $m_i = \sim M_i; M_i = \sim m_i \quad i = 0, 1, 2, \cdots 2^n - 1$
4. $\mathrm{M_i} \vee \mathrm{M_j} = \mathrm{T}; \quad \mathrm{m_i} \wedge \mathrm{m_j} = \mathrm{F}; \mathrm{i} \neq \mathrm{j}\ \mathrm{:i,j} \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^\mathrm{n} - 1\}$
5. $\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = T; \bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i = F$
6. 极大项取值0“当且仅当”：如果极大项中出现的是原子本身，则原子赋值为0；如果出现的是原子的否定，则原子赋值为1。极小项取值1 “当且仅当”：如果极小项中出现的是原子本身，则原子赋值为1；如果出现的是原子的否定，则原子赋值为0。
7. 当一个极大项在一种解释下取值0时，其余极大项在同一解释下取值1。
8. 当一个极小项在一种解释下取值1时，其余极小项在同一解释下取值0。

定理1.7 在命题公式的真值表中，使公式取值0时的解释所对应的全部极大项的合取式，是该公式的主合取范式。

定理1.8 在命题公式的真值表中，使公式取值1时的解释所对应的全部极小项的析取式，是该公式的主析取范式。

定理1.9 凡不是永真式的命题公式都存在与之等价的主合取范式。

定理1.10 凡不是矛盾式的命题公式都存在与之等价的主析取范式。

定义1.18 设A和B是两个合适公式，如果在任何解释下，A取值1时B也取值1，则称公式A蕴涵公式B，并记$A \Rightarrow B$。

定理1.11 $A \Rightarrow B$当且仅当 A→B为永真式。

蕴含关系的性质

① 自反性 $A \Rightarrow A$

② 反对称性，如果$A \Rightarrow B$，且$B \Rightarrow A$，则必有：$A \Leftrightarrow B$

③ $A \Rightarrow B$ 且A为永真式，则B必为永真式

④ 传递性，如果$A \Rightarrow B$，$B \Rightarrow C$，则$A \Rightarrow C$

⑤ 如$A \Rightarrow B$，$A \Rightarrow C$，则$A \Rightarrow B \wedge C$

⑥ 如$A \Rightarrow C$，$B \Rightarrow C$，则$A \vee B \Rightarrow C$

⑦ $A \wedge B \Rightarrow C \ \ iff \ \ A \Rightarrow B \rightarrow C$ 该性质是推理演绎中CP规则的基础

> ⑧ $A \Rightarrow B, iff\ \ A \wedge \sim B$是矛盾式该性质是反证法的基础

定理1.12 $A \Rightarrow B\ \ iff\ \ \sim B \Rightarrow \sim A$

> **基本蕴含（关系）式（蕴含定律）**
>
> ■ I_1：P⇒P∨Q， Q⇒P∨Q
>
> ~P⇒P→Q， Q⇒P→Q
>
> 扩充法则(析取引入律)
>
> ■ I_2：P∧Q ⇒P， P∧Q⇒Q
>
> ~ （P→Q） ⇒P， ~ （P→Q） ⇒~Q
>
> 化简法则(合取消去律)
>
> ■ I_3：P∧ （P→Q） ⇒ Q
>
> 假言推论（分离规则）
>
> ■ I_4：**~Q∧ （P→Q） ⇒ ~P**
>
> **否定式假言推论（拒取式）**
>
> ■ I_5： ~P∧ （P∨Q） ⇒ Q
>
> 析取三段论（选言三段论）
>
> ■ I_6： （P→Q） ∧ （Q→R） ⇒ P→R
>
> 假言（前提条件）三段论
>
> ■ I_7： （P∨Q） ∧ （P→R） ∧ （Q→R） ⇒ R 二难推论
>
> ■ I_8： （P→Q） ∧ （R→S） ⇒ （P∧R） → （Q∧S）
>
> ■ I_9： （P↔Q） ∧ （Q↔R） ⇒ P↔R
>
> ■ I_{10}： （P∨Q） ∧ （~P∨R） ⇒Q∨R 归结原理

定义1.19 设$G_1, G_2, ..., G_n, H$是公式,如果$G_1, G_2, ..., G_n \Rightarrow H$称H是前提$G_1, G_2, ..., G_n$的逻辑结果（有效结论），也可以说由$G_1, G_2, ..., G_n$推出结论H。

定义1.20 设G是由一组命题公式组成的集合，如果存在命题公式的有限序列：H_1，H_2，……，H_n（$=H$）其中，H_i或者是G中的某个公式，或者是前面的某些H_j（j<i）的有效结论，则称公式H是G的逻辑结果（有效结论），或者称由G演绎出结论H来。

定理 公式H是公式集合G $=G_1, G_2, ..., G_n$的逻辑结果当且仅当$G_1 \wedge G_2 \wedge ... \wedge G_n \rightarrow H$为永真公式。

> ### 推理规则
> ① P规则（称为前提引用规则）：在推导的过程中，可随时引入前提集合中的任意一个前提；
>
> ② T规则（逻辑结果引用规则）：在推导的过程中，利用基本等价式和蕴涵式，由证明过程中某些中间公式变换出新的公式，若依据的是等价式，规则标明为TE，若依据的是蕴涵式，规则标明为TI。
>
> ③ CP规则（附加前提规则）：如果要推导的结果是形如B→C的公式，则把B作为附加前提，与给定前提一起推导出C。

消解规则（归结式定义） 设$C_1 = L \vee C_1', C_2 = \sim L \vee C_2'$是两个子句，有互补对L和～L，则新子句R $(C_1, C_2) = C_1' \vee C_2'$称作$C_1$和$C_2$的消解式（归结式)。

第二章 一阶谓词逻辑

定义2.1 设D是由客体构成的称为个体域的非空集合，以D中元素为值的变元称为客体变元。由形如谓词标识符（客体变元1，客体变元2，⋯，客体变元n） 构成的、其值为“真”或“假”的表达式，称为n元谓词。即n元谓词是描述n个个体间的关系。

0元谓词就是命题；命题是谓词的特殊情况，谓词是命题的扩充。

定义2.2 $(\forall x)$称为全称量词。$(\exists x)$为存在量词,其中的x称为作用变量。一般将量词加在谓词之前，记为$(\forall x)$F(x),$(\exists x)$F(x)。

- 对于全称量词，刻划其对应个体域的特性谓词作为蕴涵的前件加入。
- 对于存在量词，刻划其对应个体域的特性谓词作为合取式之合取项加入。

如有多个量词，则读的顺序按从左到右的顺序

四类符号

- 常量符号：一般用a,b,c,…,a_1,b_1,c_1,…来表示，它可以是D中的某个元素;
- 变量符号：一般用x,y,z,…, x_1,y_1,z_1,…来表示.它可以取值于D中的任意元素;
- 函数符号：一般用f,g,h,…, f_1,g_1,h_1,…来表示。n元函数符号$f(x_1,x_2,…x_n)$可以是$D^n→D$的任意一个函数;
- 谓词符号：一般用P,Q,R,…, P_1,Q_1,R_1,…来表示。n元谓词符号$P(x_1,x_2,…x_n)$可以是$D^n→\{0,1\}$的任意一个谓词。
- **注：不含变元的函数是常量;**

  不含客体变元的谓词是命题。

- $(\forall x)P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$表示公式$(\forall x)P(x)$值为1“当且仅当” 对论域D中每个元素a，P(a)的值为1。
- $(\exists x)P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$表示公式$(\exists x)P(x)$值为0“当且仅当” 对论域D中每个元素a，P(a)的值为0。

量词否定(量词转换) E_{25}:$\sim(\forall x)\ P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\ [\sim P(x)]$

E_{26}:$\sim(\exists x)\ P(x) \Leftrightarrow (\forall x)\ [\sim P(x)]$

■ 定理2.3：（量词辖域的扩充与收缩）

设Q是不含指导变元的谓词公式

E_{27}: $(\forall x)\ [P(x)\vee Q] \Leftrightarrow (\forall x)\ P(x)\vee Q$

E_{28}: $(\forall x)\ [P(x)\wedge Q] \Leftrightarrow (\forall x)\ P(x)\wedge Q$

E_{29}: $(\exists x)\ [P(x)\vee Q] \Leftrightarrow (\exists x)\ P(x)\vee Q$

E_{30}: $(\exists x)\ [P(x)\wedge Q] \Leftrightarrow (\exists x)\ P(x)\wedge Q$

E_{31}: $(\forall x)\ P(x)\to Q \Leftrightarrow (\exists x)\ [P(x)\to Q]$

E_{32}: $(\exists x)\ P(x)\to Q \Leftrightarrow (\forall x)\ [P(x)\to Q]$

E_{33}: $Q\to (\forall x)\ P(x) \Leftrightarrow (\forall x)\ [Q\to P(x)]$

E_{34}: $Q\to (\exists x)\ P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\ [Q\to P(x)]$

■ 定理2.4：

E_{35}: $(\forall x)\ (P(x)\wedge Q(x))\Leftrightarrow (\forall x)\ P(x)\wedge (\forall x)\ Q(x)$

E_{36}: $(\forall x)\ (\forall y)\ (P(x)\vee Q(y))\Leftrightarrow (\forall x)\ P(x)\vee (\forall x)\ Q(x)$

E_{37}: $(\exists x)\ (\exists y)\ (P(x)\wedge Q(y))\Leftrightarrow (\exists x)\ P(x)\wedge (\exists x)\ Q(x)$

E_{38}: $(\exists x)\ (P(x)\vee Q(x))\Leftrightarrow (\exists x)\ P(x)\vee (\exists x)\ Q(x)$

E_{39}: $(\exists x)\ (P(x)\to Q(x))\Leftrightarrow (\forall x)\ P(x)\to (\exists x)\ Q(x)$

■ 定理2.5：（双量词公式的等价性）

E_{40}: $(\forall x)\ (\forall y)\ A(x,\ y)\Leftrightarrow (\forall y)\ (\forall x)\ A(x,\ y)$

E_{41}: $(\exists x)\ (\exists y)\ A(x,\ y)\Leftrightarrow (\exists y)\ (\exists x)\ A(x,\ y)$

斯柯林(Skolem)范式--不含存在量词的前束合取范式

■ 例 2.5 求 $\exists x\forall y\forall z\exists u\forall v\exists w P(x,y,z,u,v,w)$ 的 Skolem范式。

解：

$\exists x\forall y\forall z\exists u\forall v\exists w P(x,y,z,u,v,w)$

$\forall y\forall z\exists u\forall v\exists w P(a,y,z,u,v,w)$（消去$\exists x$)

$\forall y\forall z\forall v\exists w P(a,y,z,f(y,z),v,w)$ （消去$\exists u$）

$\forall y\forall z\forall v P(a,y,z,f(y,z),v,g(y,z,v))$ （消去$\exists w$）

定理2.7 设谓词公式A的Skolem范式为S,则A为矛盾式当且仅当S为矛盾式。注意：只有当A是矛盾式时，S才与它同为矛盾式。一般情况下，A与S并不一定等价。

■ 二.谓词演算中的蕴涵式(蕴涵定律)

I_{11}: $(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)\Rightarrow(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$

I_{12}: $(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$

I_{13}: $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))\Rightarrow(\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x)$

I_{14}: $(\exists x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x)\Rightarrow(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$

I_{15}: $(\forall x)(P(x)\leftrightarrow Q(x))\Rightarrow(\forall x)P(x)\leftrightarrow(\forall x)Q(x)$

■ 三.两个量词的蕴涵式

I_{16} :$\forall x\forall y P(x,y)\Rightarrow\exists y\forall x P(x,y)$

I_{17} :$\forall y\forall x P(x,y)\Rightarrow\exists x\forall y P(x,y)$

I_{18} :$\exists y\forall x P(x,y)\Rightarrow\forall x\exists y P(x,y)$

I_{19} :$\exists x\forall y P(x,y)\Rightarrow\forall y\exists x P(x,y)$

I_{20} :$\forall x\exists y P(x,y)\Rightarrow\exists y\exists x P(x,y)$

I_{21} :$\forall y\exists x P(x,y)\Rightarrow\exists x\exists y P(x,y)$

I_{22} :$\forall x\forall y P(x,y)\Rightarrow\exists x\exists y P(x,y)$

I_{23} :$\forall y\forall x P(x,y)\Rightarrow\exists y\exists x P(x,y)$

US、UG、ES、EG

第三章 集合代数

集合A中元素的数目称为集合A的**基数**，记为|A|。

自反性、传递性、反对称性（$A = B$当且仅当$A \subseteq B$并且$B \subseteq A$）

对称差集 $A \oplus B = A \bigcup B - A \bigcap B$

幂等律、交换律、结合律、零一律、分配律、吸收律、否定律、DeMorgan律、矛盾律

定义3.11 由集合A的所有子集组成的集合称为A的幂集，记为$\rho(A)$或2^A。

定理3.2： 设A和B是两个集合，

1）如$B \subseteq A$， 则$2^B \subseteq 2^A$

2）若集合A有n个元素，则集合A共有2^n个子集，

即：$|\rho(A)| = 2^n$。

笛卡尔积(直积) 设给定n≥1个集合$A_1, A_2, ..., A_n$,称
$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = < a_1, a_2, ..., a_n > \mid a_i \in A_i, 1 \leq i \leq n$为$A_1, A_2, ..., A_n$的笛卡尔积。
$|(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n)| = |A_1| \times |A_2| \times ... \times |A_n|$

集合的笛卡尔积不服从交换律,还可证明不服从结合律,但×对U, ∩可左右分配。

- **定理3.3:设A,B,C是任意三个集合,则**

①$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

②$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

③$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$

④$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$

■ **定理3.4** :A,B,C为任意集合,C ≠ Φ,则

①A ⊆ B iff A×C ⊆B×C

②A ⊆ B iff C×A ⊆C×B

■ **定理3.5**:设A,B,C为非空集合,则

A×B⊆C×D ⇔ A⊆C∧B⊆D

第四章 二元关系

定义4.1 设A和B都是已知集合，R是A到B的一个确定的二元关系，那么R就是A×B的一个合于 R={(x,y)∈A×B}的子集合。

关系的表示法 集合表示法、关系图法（有向图表示法）、关系矩阵表示法

自反性与反自反性 R在A上是自反的⇔ $(\forall x)((x \in A) \rightarrow ((x,x) \in R)) = 1$
R在A上是反自反的⇔ $(\forall x)((x \in A) \rightarrow ((x,x) \in R)) = 0$

对称性与反对称性 R在A上是对称的
$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in A) \wedge (y \in A) \wedge ((x,y) \in R) \rightarrow ((y,x) \in R)) = 1$
R在A上是反对称的
$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)[(x \in A) \wedge (y \in A) \wedge (((x,y) \in R) \wedge ((y,x) \in R)) \rightarrow (x = y)] = 1$

传递性
R在A上是传递的
$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)[(x \in A) \wedge (y \in A) \wedge (z \in A) \wedge (((x,y) \in R) \wedge ((y,z) \in R) \rightarrow ((x,z) \in R))] = 1$

同余关系是对称的、自反的、传递的，但不是反自反的和反对称的

关系的复合运算 $RoS = \{(x,z) | (x \in A) \wedge (z \in C) \wedge (\exists y)((y \in B) \wedge (xRy) \wedge (ySz))\}$

$M_{RoS} = M_R * M_S$这里的“*”运算类似矩阵乘法运算，但须将元素间的乘法改成逻辑与，将加法改成逻辑或，即$m_{ij} = (r_{i1} \wedge s_{1j}) \vee (r_{i2} \wedge s_{2j}) \vee \ldots \vee (r_{in} \wedge s_{nj})$

复合运算不具有可换性，即： RoS ≠SoR。但是，复合运算具有可结合性。

设R是集合A上的二元关系，则可定义R的n次幂R^n（n≥0），该R^n也是A上的二元关系，定义如下：

1. $R^0 = I_A = \{(a,a)|a\in A\}$；（恒等关系）
2. $R^1 = R$；
3. $R^{n+1} = R^n \circ R = R \circ R^n$。

容易证明，$R^m \circ R^n = R^{m+n}, (R^m)^n = R^{mn}$

定义4.6 设R是一个从集合A到集合B的二元关系，则从B到A的关系R-1={(b,a)|(a,b)∈R}称为R的逆关系,运算“-1”称为逆运算。

定理4.1 $(RoS)oT = Ro(SoT)$ $(RoS)^{-1} = S^{-1}oR^{-1}$

1) $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$
2) $R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$
3) $(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$
4) $(S \cap T) \circ R \subseteq (S \circ R) \cap (T \circ R)$

① $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

② $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

③ $(\overline{R})^{-1} = \overline{R^{-1}}$

④ $(R-S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$

⑤ $(R^{-1})^{-1} = R$

二元关系的闭包 添加的有序对要尽可能的少，满足这些要求的R'就称为R的**闭包**。

定义4.7 设R是定义在A上的二元关系，如果另有A上的关系R′满足：

1)R′是自反的(或对称的、或可传递的)，

2)$R \subseteq R'$，

3)对A上任何其它满足1）和2）的关系R″，则：

$R' \subseteq R''$。（表明R′的最小性）

则称R′为R的自反闭包(或对称闭包、或传递闭包)，分别记为r(R)(s(R)或t(R))。

$$r(R) = R \cup I_A, s(R) = R \cup R^{-1}, t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

$$R^+ = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$$

$$R^* = I_A \cup R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$$

$$t(R) = R^+$$

$$R^* = I_A \cup t(R)$$

Warshall算法 计算过程可以简述为：按列号顺序对R的关系矩阵M_R的每一列中元素从上至下依次扫描。如果当前扫描的是第i列，那么当遇到1时，将1所对应的行加上第i行。

■ 定理4.7 设R1， R2是集合A上的关系，且 $R1\subseteq R2$，则：

1)$r(R1)\subseteq r(R2)$

2)$s(R1)\subseteq s(R2)$

3)$t(R1)\subseteq t(R2)$

■ 定理4.8 设R是集合A上的关系，则：

1)若R是自反的，则s(R),t(R)也是自反的

2)若R是对称的，则r(R),t(R)也是对称的

3)若R是传递的，则r(R)也是传递的

第五章 特殊关系

定义5.1 设R是定义在非空集合A上的一个二元关系，当R同时具有自反、对称和传递性质时，称R是A上的一个等价关系。

定义5.3 设A是一个非空集合，$A_1,A_2,A_3\ldots A_m$都是A的非空子集， $S=\{A_1,A_2,A_3,\ldots,A_m\}$ 。如果：

1）对一切的$i\neq j(i,j=1,2,3,\ldots,m)$，都有 $A_i\cap A_j=\Phi$。

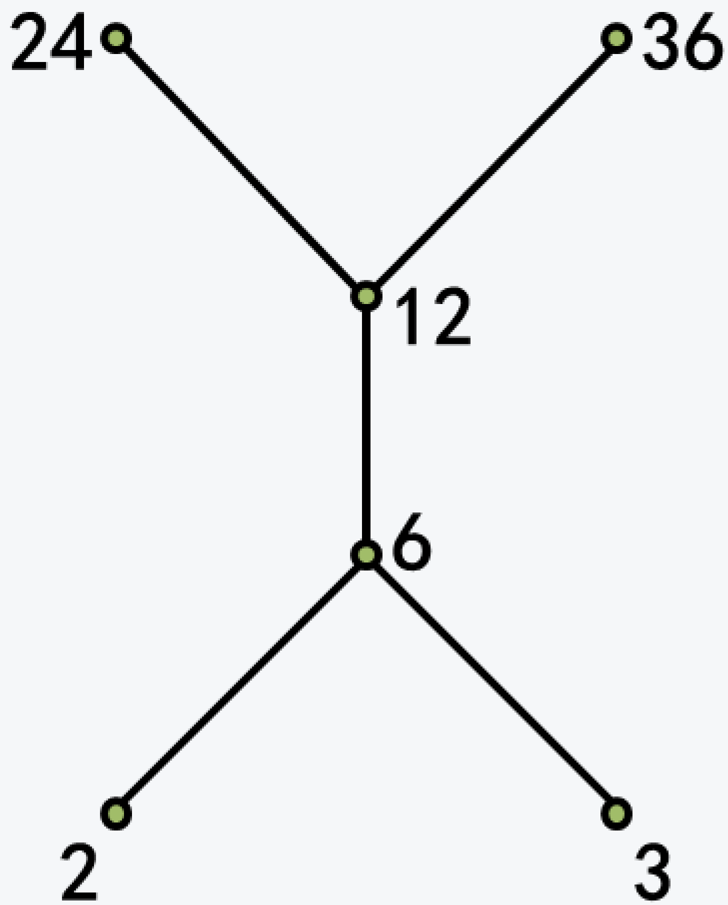
2） 则称集合S为集合A的一个分划，而$A_1,A_2,A_3,\ldots A_m$叫做这个划分的块。

定理5.2 设非空集合A的每个等价关系都能决定A的一个分划，而A的每个分划都能导出A上的一个等价关系。

定义5.4 设R是集合A上的自反的、反对称的、传递的关系，则称R是A上的偏序关系(记为“$\preceq$”,读作“小于等于”)。序偶<A，R>称为偏序集。

偏序集的哈斯图

1. 用小圆圈或点表示A中的元素，省掉关系图中所有的环。(因自反性)
2. 对任意x,y∈A，若x⪯y，则将x画在y的下方，可去掉关系图中所有边的箭头。(因反对称性)
3. 去掉有向边，即当（i，j）和（j，k）都是有向边时，去掉有向边（i，k)。(因传递性)



定义5.5

设<A, ⪯ >是一个偏序集，对任意x,y∈A，如果x⪯y或y⪯x之一成立，则称x与y是可比较的。否则， x与y是不可比较的。

定义5.6 如果偏序集<A,⪯>中任何两个元素都是可比较的，则称<A,⪯>是全序集，称 为A上的一个全序关系。

定义5.7 设<A,⪯>是一个偏序集， 。如果<B,⪯>是一个全序子集，则称B为A中的一条链。链中元素数目减1称为该链的长度。

偏序集中的特殊元素

■ 定义5.8

设<A,≤>是偏序集，a是A的一个元素。

1)若对任意b∈A,都有b≤a,则称a为A中的**最大元。**

2)若对任意b∈A,都有a≤b,则称a为A中的**最小元。**

3)若对任意b∈A,或者b≤ a，或者b与a不可比较,则称a为A中的**极大元。**

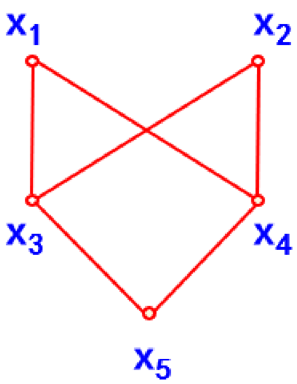
4)若对任意b∈A,或者a≤ b，或者b与a不可比较,则称a为

A中的极小元。

显然，有限偏序集总存在极大元和极小元。

> **定义5.9** 设$B \subseteq A$，$a \in A$
>
> ①若对任意b∈B,都有b≤a,则称a为B的上界。
>
> ②若对任意b∈B,都有a≤b,则称a为B的下界。
>
> ③若元素c∈A是B的任何一个上界,若均有a≤c,则称a为B的 最小上界。
>
> ④若元素c∈A是B的任何一个下界,若均有c≤a,则称a为B的 最大下界。

■例5.27 设A＝{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5}, A上定义偏序集<A,≤>的哈斯图如下，求B＝{x_3,x_4,x_5}的最大(小)元、极大(小)元、上(下)界、最小上界、最大下界。



解：

最大元：无；　最小元：x_5；

极大元：x_3,x_4；极小元：x_5；

上　界：x_1,x_2；下　界：x_5；

最小上界：无；最大下界：x_5。

定义5.10 设<A, $\le$>是一偏序集，若A的任何一个非空子集都有最小元，则“$\le$”称为良序关系，简称良序，此时<A, $\le$>称为良序集。由上述定义，良序集的任何一个非空子集都有最小元，所以，对任意a,b∈A，集合{a,b}有最小元，所以有a≤b或b≤a，因此，“$\le$”一定是全序关系。即“$\le$”是良序关系⇒ “$\le$”是全序关系⇒“$\le$”是偏序关系

有限全序集就是良序集

定义5.11 设$\le$、$\le'$是集合A上的两个偏序关系。如果对$\forall a, b \in A$,当a≤b时必导致a$\le'$b,则称关系$\le$、$\le'$是可比较的。

定义5.12 设$\le$和$\le'$是集合A上的两个偏序关系,如果$\le$和$\le'$是可比较的，且$\le'$是全序关系,则称关系$\le'$是关系$\le$的一个拓扑排序。

> ## 拓扑排序算法
>
> **1.**任选<A,$\le$>中一个极小元x;
>
> **2.**令A=A-{x};
>
> **3.**如A= Φ,算法停止;否则执行:
>
> ①任选极小元y∈A;
>
> ②定义序关系x$\le'$y;
>
> ③令A=A-{y},x:=y,转3

由拓扑排序定义的全序关系是什么？完全取决于极小元的选择方法。

定理5.3 任何有限偏序集都可以转变成全序集。

良序公理 设X是Z的一个非空子集合。如果存在a∈Z，使得对所有的b∈X，都有a⩽b，则X中必有一个最小整数。

A×B的任何一个子集，都是A到B的二元关系，因此，从A到B的不同的关系有$2^{|A|\times|B|}$个；但从A到B的不同的函数却仅有$|B|^{|A|}$个。

每一个函数的基数都为|A|个，但关系的基数却可以从零一直到|A|×|B|。

每一个函数中序偶的第一个元素一定是互不相同的。

第六章 函数

> ## 定义6.3 设f是从X到Y的函数，若f满足：
>
> 1）对任意x_1,x_2∈X，若x_1≠x_2，则 f(x_1)≠f(x_2)，则称f为从X到Y的单射或1- 1映射；
>
> 2）若$\forall y \in Y$，都存在x∈X,使得f(x)=y，则称f为从X到Y的满射或从X到Y上的映射；
>
> 3）若f既是从X到Y的满射，又是从X到Y的单射，则称f为从X到Y的双射或一一对应的映射。

> 4）若X＝Y，则称f为X上的函数；当X上的函数f是双射时，称f为X上的变换。
>
> 5）若X＝Y，且对任意x∈X,f(x)＝x,则称f为X上的单位（恒等）函数，记为I_X。
>
> 6）若存在b∈Y，且对任意x∈X,f(x)＝b,则称f为X上的常值函数。

> ## 函数复合的性质
>
> 1)函数复合是可结合的(∵关系的复合是可结合的)
>
> 2)函数复合一般是不可交换的

定义6.5 设A是有限集合，A={$a_1, a_2, ..., a_n$}。从A到A的双射函数称为A上的n阶**置换或排列**,记为π： A→A，n称为置换的阶。

A上的n阶置换的数目为n!。

把每个元素映射到自身的置换称为**单位(恒等)置换。**

循 环 当置换中出现一条循环链：i变成j、j变成k，…，p变成q，q变成i时，把这组变化表示成（ijk…pq）的循环形式，i变成i的情况则略而不写。这样即可把置换中所有的循环变化链都转换成循环形式，置换就表示成了“循环的积”。

> ## 定理6.1
>
> 设f和g分别是X到Y和从Y到Z的函数，则：
>
> 1）如f,g是满射，则gof也是从X到Z的满射；
>
> 2）如f,g是单射，则gof也是从X到Z的单射；
>
> 3）如f,g是双射，则gof也是从X到Z的双射。

定义6.6 设f:X→Y是一个函数，如果存在一个函数g:Y→X，使得$(\forall x)[(gof)(x)=x]\wedge(\forall y)[(fog)(y)=y]$,则称g是f的逆函数，记为$f^{-1}$。

定理6.2 函数f存在逆函数当且仅当f是双射。

定理6.3 若f:X→Y，g:Y→Z且f和g都是可逆的，则$(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$。

定义6.7 设X，Y是两个集合，若在X，Y之间存在1-1对应的关系（在集合X和Y之间建立双射），则称集合X与Y是**对等的**或**等势的**，记为：X ~ Y

集合X的基数一般记为card(X),如果A是有限集合,A的基数通常记为｜A｜（它是A中元素的个数）。

定理6.5 如果正整数m＜ n，则不存在从N_n到N_m的单射。

定义6.8 设X， Y是两个集合，若存在从X到Y的单射，则card(X) ≤card(Y)；如果不存在从X到Y的双射，则card(X) <card(Y)。

定义6.9 如果X是空集合,或者∃自然数m，使得X~N_m,则称X为有限集,否则称X为无限集。

定理6.6 自然数集N是无限集。

定理6.7 非空集合X是无限集当且仅当存在从N到X的单射。**将自然数集N的基数记为$\aleph_0$（读为“阿列夫0”)。**

定义6.10 凡是与自然数集合等势的集合，统称为可数集合或可列集合。

可数集的性质

1.每个无限集必含有子集合是可数集。

2.可数集的任意无限子集合为可数集。

3.可数个可数集的并集为可数集。

推论:

① N×N是可数集。

② 有理数集是可数集。

定义6.11 开区间(0,1)称为**不可数集合**，其基数设为ℵ(读作阿列夫)；凡是与区间(0,1)等势的集合都是不可数集合。

定理6.11 实数集合R是不可数集合。

Cantor定理 设M是任意集合,S是M的幂集,那么, card(M)<card(S)。$|A| \leq \aleph_0 \leq \aleph$

第十章 图的基本概念

无向简单图的定义

以结点集$V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$和边集$E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$构成的二元组G= (V, E)称为一个无向简单图，其中每条边 e_i与两个不同结点(设为 u 和 v)相联系，且没有两条边与同一对结点相联系。

①与结点u和 v相联系的边e_i记为无序对u_v或v_u。

②图G的结点数目n称为图的**阶**，称G为**n阶图**。边数常用ε表示.

③n个结点m条边的图常简记为(n, m)图

图中元素间的关系

①如果e=u_v是G的一条边，就说u和v是**邻接**的，边e和结点u及v相**关联**的。

②如果边e_1和e_2与同一个结点u关联，就说e_1和e_2是**邻接**的。

多重图 如果图G的至少一对不同结点间有多条边相关联，则称G是多重图。这些边称为这对结点间的**平行边**。

广义图 如果图G的至少一条边只与一个结点关联，则称G是广义图。这些边称为**环**。

有向图 如果图G的**边是有方向**的，则称G是有向图。如果边e是从结点u指向结点v，则把边记为e=(u, v)，并称e是u的**出边**，v的入边。

无向图的(结)点度 图G中结点v的度记为d(v), 其值等于与v关联的边数, 一个环按2计。

图论基本定理 对任何n个结点m条边的图G=(V, E)，则$\sum_{u\in V}=2m$。**推论**：奇数度结点的个数为偶数。

有向图的(结)点度

- **定义**：有向图G中结点v的出度记为$d^+(v)$, 其值等于v的出边数目；结点v的入度记为$d^-(v)$, 其值等于v的入边数目。
- 图G中最大的结点出度记为Δ^+，最大的结点入度记为Δ^-，最小的结点出度记为δ^+，最小结点入度记为δ^-。
- **定理**：对任何n个结点m条边的图G=(V, E)，$\sum_{u\in V}d^+(u)=\sum_{u\in V}d^-(u)=m$

几类简单图

零图： $\Delta=0$的图。1阶的零图称为**平凡图**。

k度正则图：每个结点的度都是k的简单图。

零图可以看成0度正则图。

完全图：任何一对不同结点都互相邻接的简单图。

- n阶完全图记为K_n
- n阶完全图的边数ϵ=n(n-1)/2 。
- n阶完全图可以看成n-1度正则图。
- 有向的n阶完全图称为**竞赛图**。

二部图：如果图G=(V, E)的结点集V可以分划成两个子集合V1和V2，使每条边都与V1的一个结点和V2的一个结点关联，则称G为二部图。

- 一部结点数为m, 另一部结点数为n的**完全二部图**，$K_{m,n}$, 是指每部中每个结点都和另一部中全部结点邻接的二部图。因此完全二部图$K_{m,n}$有mn 条边。

图的子图和补图

子图：设G=(V1, E1)、H=(V2, E2)都是图，如果V2⊆ V1, E2⊆E1，则称H是G的**子图**。如果V2=V1，则称H是G的**生成子图**。

产生子图有两种途径：

- 从原图中删去一些结点或一些边得到，分别称为**删点子图**或**删边子图**；・删除结点时，要同时删除这些结点关联的边；
- 从原图中利用某些结点或某些边诱导出来，分别称为**点诱导子图**或**边诱导子图**。・利用结点诱导出子图时，只能取出只与这些结点关联的边；利用边诱导子图时，只能取出与这些边关联的结点。

补图：设G=(V, E)是n阶简单图，K_n是以v 为结点集的完全图，如果简单图H=(V, E1) 满足E1={ $e|e \in K_n \wedge e\}$，则称H为G的补图。G的补图记为$\overline{G}$。$\overline{G}$也可以看成是由 K_n删去G中的边得到的。

图的同构

定义：设$G=(V1,E1)$、$H=(V2,E2)$都是图，如果存在双射ϕ：$V1 \to V2$，使对任何$uv \in E1$当且仅当$\phi(u)\phi(v) \in E2$，则说G同构于H，并记为$G \cong H$。

- 同构的图必具有相同的结点数和边数。
- 同构图的对应结点之度相等。对应结点的邻接结点也对应。

无向图的道路

定义：图G中由结点和边交替构成的序列p=$v_0e_1v_1e_2v_2\ldots e_kv_k$ 称为由v_0到v_k的一条道路，其中每条e_i和v_{i-1}及v_i关联。

v_0称为道路 p的**起点**，v_k称为道路 p的**终点**。p中的边数k称为**道路的长度**。

只由一个结点构成的道路称为**零道路**。

道路的分类

- **迹**：任何满足道路定义的道路 。
- **简单道路**：边不重复出现的道路。
- **基本道路**：结点不重复出现的道路。
- **回路**：起点和终点相同的道路。边不重复出现的回路称为**简单回路**。结点不重复出现的回路称为**圈**。

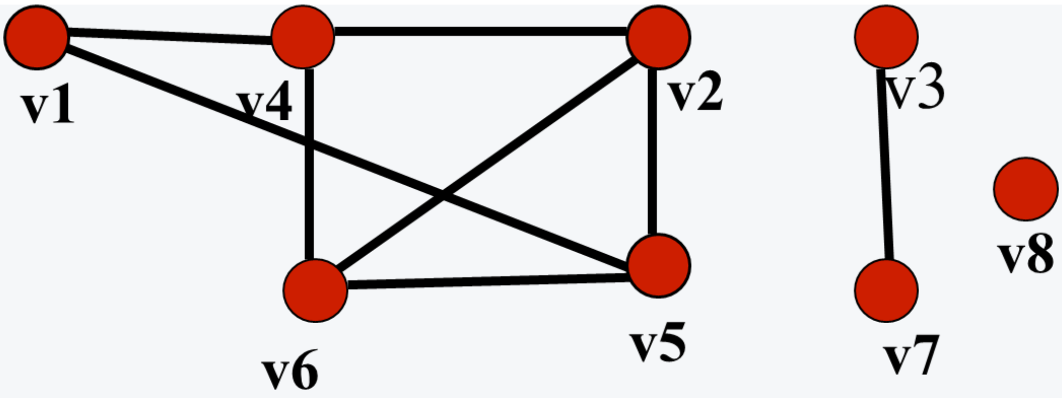
定理：设G是n阶图，如果存在从结点u到v的道路，则必存在长度不超过n-1的道路。

无向图的连通问题

定义: 如果存在从结点u到结点v的道路，则称u到v是**连通**的。如果图G中任何两个结点都是连通的，则称G是**连通图**。

图G中的极大连通子图称为图G的**支**，图G的**支数**记为w(G)。图G连通当且仅当w(G)=1。

例：下图中w(G)=3。



连通图G=(V, E)的**点割集**定义：设$S \subseteq V$，如果 w(G-S) >1，则称S是G的一个**点割集**。

- S是G的一个点割集，而S的任何真子集都不是点割集时，称S是G的一个**基本点割集**。
- 由单个结点（如u）构成的点割集简称为**割点**。

定理 结点u是图G的割点当且仅当存在两结点v和w，使v到w的任何道路都经过u。

连通图G=(V, E)的**边割集**定义：设$F \subseteq E$，如果w(G - F) >1，则称F是G的一个**边割集**。

- F是G的一个边割集，而F的任何真子集都不是边割集时，称 F是G的一个**基本边割集**。
- 由单条边（如uv）构成的边割集简称为**割边**。

定理 边e是图G的割边当且仅当 e 不在G的任何回路上。

图的连通度(限无环图G)

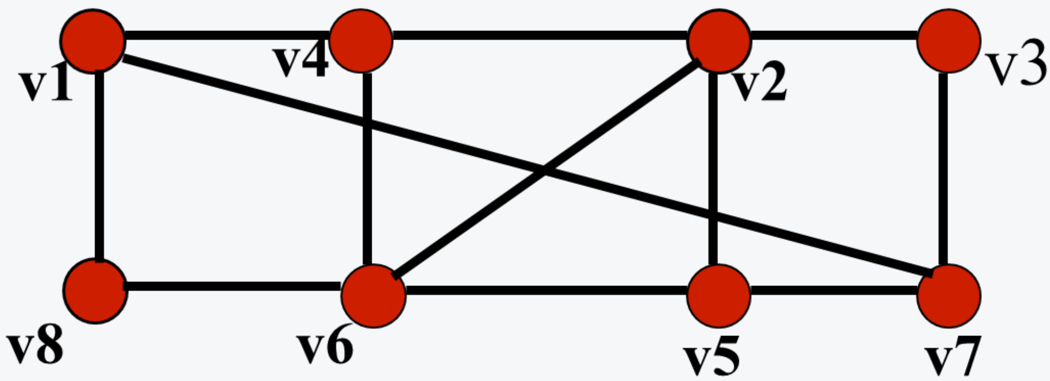
点连通度: 记为K(G), 定义为

$$K(G) = \begin{cases} \text{最小基本点割集基数}, & \text{当} G \neq K_n \\ n-1, & \text{当} G = K_n \end{cases}$$

边连通度: 记为λ(G), 定义为

$$\lambda(G)=\begin{cases}\text{最小基本边割集基数}, & \text{当}G\neq K_1\\ 0, & \text{当}G=K_1\end{cases}$$

例如下图中, K(G) =2, λ(G) =2



连通度定理 $K(G)\le\lambda(G)\le\delta$

有向图的道路 如果图G中由结点和边交替构成的序列$p=v_0e_1v_1e_2v_2...e_kv_k$，满足其中每条 e_i 是 v_{i-1}的出边和 v_i 的入边，则称 p为由 v_0到 v_k 的一条**有向道路**。

有向道路的分类

- **有向迹**：任何满足定义的有向道路 。
- **有向简单道**路：边不重复的有向道路。
- **有向基本道路**：结点不重复的有向道路。
- **有向回路**：起点和终点相同的有向道路。边不重复的有向回路称为有**向简单回路**。结点不重复的有向回路称为**有向圈**。

有向图的连通问题

如果存在从结点u到结点v的有向道路，则称u可达v。

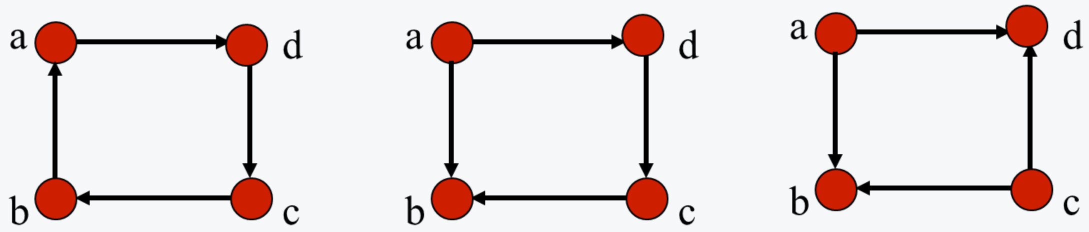
定理 如果在n阶有向图中结点u可达v，则必存在从结点u到结点v的长度不超过n-1的有向道路。

有向图G的连通有如下三个层次：

①**强连通图**：任何一对不同结点都相互可达。

②**单向连通图**：任何一对不同结点间，至少从一个结点可达另一个结点。

③**弱连通图**：不看边的方向时是连通的。



强连通　　单向连通　　弱连通

定理: 有向图G是强连通图当且仅当存在一条包含所有结点的有向回路。

定义：有向图G的极大强连通子图称为**强分图**。

定理：每个结点都只位于一个强分图中。

图的矩阵表示

邻接矩阵

$$a_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{如果 } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{如果 } (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

称A为G的邻接矩阵.

邻接矩阵的性质

- 矩阵行和等于结点出度，列和等于入度。
- 设$A^2 = (a_{ij}^{(2)})$，则$a_{ij}^{(2)} = \sum\limits_{1\leq k\leq n} (a_{ik}a_{kj})$，$a_{ij}^{(2)}$ 的值表达了从vi到vj的长度为2的有向道路数目。
- 设$A^m = (a_{ij}^{(m)})$，那么$a_{ij}^{(m)}$的值表达了从vi 到vj长度为m的有向道路数目。$a_{ii}^{(m)}$的值表达了通过vi的长度为m的有向回路数目。

可达矩阵

定义矩阵$P=(p_{ij})_{n\times n}$如下:

$$p_{ij}=\begin{cases}1 & v_i\text{非平凡可达 }v_j\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

称P为G的可达矩阵.

- 可达矩阵P可通过邻结矩阵A求得，方法之一是计算矩阵和:$B=A+A^2+\ldots+A^{n-1}+A^n$然后，令$p_{ij}=1$当且仅当$b_{ij}>0$。
- 可达矩阵也可以利用Warshall算法求得。
- 由可达矩阵构造图的强分图

令$Q = P\Diamond P^T = (q_{ij})_{n\times n}$，其中

$$q_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ p_{ij}\wedge p_{ji} & i\neq j\end{cases}$$

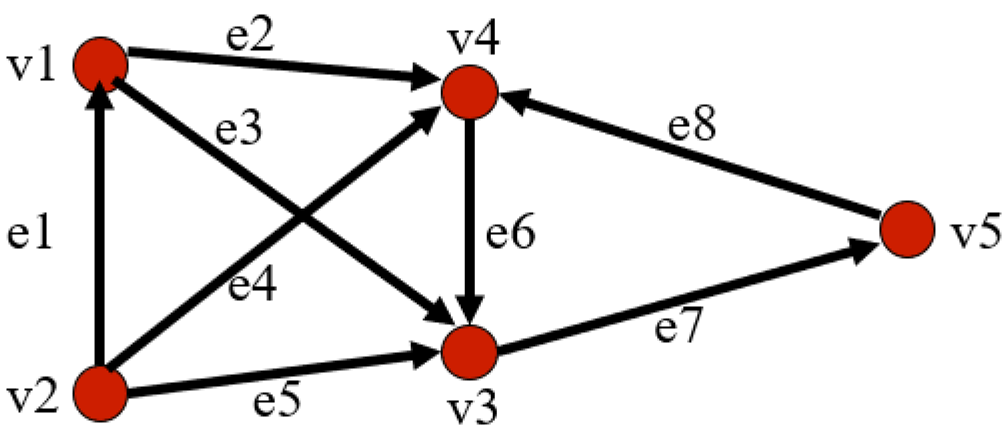
那么，在矩阵Q中第k行中元素1对应列的结点，构成图的一个强分图。

关联矩阵

定义矩阵$M=(m_{ij})_{n\times m}$如下:

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & \text{如果}e_j\text{是}v_i\text{的出边}\\ -1 & \text{如果}e_j\text{是}v_i\text{的入边}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

称M为G的关联矩阵.



$$
M = \begin{array}{c} \\ v1 \\ v2 \\ v3 \\ v4 \\ v5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} e1 & e2 & e3 & e4 & e5 & e6 & e7 & e8 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
-1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

第十一章 树及其应用

树的概念 连通无回路的图称为树，度为1的结点称为树的**叶**，度大于1的结点称为树的**枝点**。只含一个结点的树称为**平凡树**。

树的等价定义

设T是n个结点m条边的非平凡图，则以下6条等价：

① 连通无回路。

② 无回路，m=n-1。

③ 连通，m=n -1。

④ 无回路，任增加一条新边后只增加一个回路。

⑤ 连通，但任删一条边后不再连通。

⑥ 任何两结点间只有一条道路。

连通图的生成树

如果连通图G的生成子图T是树，则称T是G的**生成树**。

任何连通图都**至少有一个**生成树。

n阶连通图至少有n-1条边。

设T是连通图G的一个生成树，e是G的一条边。如果e在T中，则称之为**树边**，否则称之为**树补边**。

(n, m)连通图有n-1个树边, m-n+1个树补边。

定理 设T是连通图G的一个生成树，则G的任何边割集必至少含一条树边； G的任何回路必至少含一条树补边。

最小生成树

在带边权的连通图G中，找一个生成树，使得在G的全部生成树中其**边权之和**W(T)为**最小**。

求最小生成树的 **Kruskal 算法**要点：

输入：n阶连通权图G

输出：最小生成树T

步骤要点：

① 把G的边按权不减方式排成序列。

② 按从左到右顺序依次扫描序列，如果当前扫描边e与已选出的树边不构成回路，则将e加入树边中，否则扫描下一边。

③如果已经选出n-1条边，算法结束。

第十二章 平面图及其应用

定义 如果图G存在一种图形表示，使其各边不在结点之外交叉，则称G是一个**平面图**。

阶数小于5的完全图都是平面图

完全图K_5是典型的非平面图，完全二部图$K_{3,3}$是典型的非平面图。

图的面

定义：由边围成的封闭区域、且其内部不再包含边数更少的封闭区域的区域。

- 每个平面图中有且仅有1个无限区域的面，称为**外部面**。其它的面称为**内部面**。围住面的边构成**面的边界**。
- 面的度：设F是图的面，令d(F)=围成F的边数，**但割边算2**，称之为面 F的**面度**。

- **定理**：任何平面图必满足$\sum d(F) = 2m$，其中m是图的边数。

平面图的欧拉公式

定理 设G是n个结点、m条边、f个面的连通平面图，则n -m +f =2。

一个图是平面图当且仅当它的每个支都是平面图。

注意，平行边和环都不影响图的平面性，只需考虑简单图的平面性就行了。

推论1：设G是 n个结点、m条边 、f 个面的简单连通平面图，则 $m \leq 3(n-2)$。因为G是简单图，其每个面的度至少是3，因此$3f \leq 2m$，代入欧拉公式后整理即得结论。

推论2：在简单连通平面图中至少有1个度不大于5的结点。阶小于6时明显成立。一般情况下，若$\delta > 5$成立，将导致$2m > 6n$，产生矛盾。

图的围长：图中最短圈的长度称为该图的围长，并记为g（当图中无圈时，规定$g = \infty$）

推论3：设G是一个g>2的（n, m）连通平面图，则$m \leq \frac{g(n-1)}{g-2}$由$d(F) \geq g, 2m = \sum d(F) \geq gf$，代入n-m+f=2可得。

Kuratowski定理

图的细分：在图的边上设置若干2度点后得到图称为原图的细分图。**图的细分不改变图的平面特性。即它们同为平面图或同为非平面图。**

Kuratowski定理：图G是平面图当且仅当G没有任何与K_5或$K_{3,3}$的细分图同构的子图。

对偶图

1。设G=(V, E)是含有面集V*={F1，F2，…，Ft}的平面图，定义图G*=(V*，E*）使对任何e∈E且 e 是面 F_i 和 F_j 的边界，都有 e* = F_iF_j∈E*与之一一对应，则称G* 为G的对偶图。

对偶图的性质

① 对偶图G*是连通图。

② 图G和对偶图G*同是平面图。

③ 如果图G是连通图，则$(G^*)^* \cong G$.

④ G的边割集对应G*的回路，G *的边割集对应G的回路。

如果$G^* \cong G$，则称G是**自对偶图**

第十三章 欧拉图与哈密顿图

欧拉图

如果图G=(V, E)存在一条包含全部边的简单回路, 则称 G是**欧拉图**。这条回路称为**欧拉回路**。

如果存在一条包含图G=(V, E)全部边的简单道路, 则称之为**欧拉道路**。

上面定义中加上“有向”二字，就可用于有向图。

定理 G是**欧拉图**当且仅当 G**连通**且其点**度都是偶数**。

定理 连通图G存在**欧拉道路**当且仅当G**最多有2个奇数度结点**。

定理 G是**有向欧拉图**当且仅当G**连通**且其每个点的**出度等于入度**。

定理 连通图G存在**有向欧拉道路**当且仅当G**最多有2个结点的入度不等于出度，且其中一个结点的出度比入度多1，另一个结点的出度比入度少1**。

由欧拉图构造欧拉回路算法

记号：G – C表示从图G中删去图C中的边后得到的图。

输入：欧拉图G

输出：欧拉回路C

步骤：

1. 初始化$C = \varnothing$。任选G中结点 u为当前结点t，即t=u。
2. 如果G – C是零图，输出C，算法结束。
3. 如果G – C中与 t关联的边e=tv 不是G – C的割边，则C=C+e，t=v，转2;
4. 如果G – C中与 t关联的边e=tv 都是G – C的割边，则C=C+e，t=v，转2。

无向图中中国邮递员问题的解法

①如果G中无奇度结点，则欧拉回路就是解。

②如果G中有奇度结点，为$v_1, v_2, ..., v_{2k}$，计算每对结点间最短道路（距离）。

③在这些道路中选出k条道路，使满足:

I.彼此无共同的起点或终点;

II.$P_1, P_2, ..., P_k$最短.

④在G中复制$P_1, P_2, ..., P_k$的边；

⑤在新图中构造欧拉回路。

哈密顿图

如果图G=(V, E)存在一条包含全部结点的基本回路（或圈），则称 G是**哈密顿图**。这条回路称为**哈密顿圈**。

如果存在一条包含图G=(V, E)全部结点的基本道路, 则称之为**哈密顿道路**。

由定义，只需考虑简单图的哈密顿性。

必要条件 如果图G=(V, E)是哈密顿图，则对任何非空$S \subset V$，$\omega(G–S) \le |S|$。

充分条件 如果n阶简单图G=(V, E)的任何两个结点u和v，都使$d(u)+d(v) \ge n-1$成立，则G存在**哈密顿道路**。

如果 n(>2)阶简单图G=(V, E)的任何两个结点u和v，都使$d(u)+d(v) \ge n$成立，则G是哈密顿图。

图的闭包

定义：如果n(>2)阶简单连通图G=(V, E)存在非邻接结点u和v，使$d(u)+d(v) \ge n$，则构造新图$G+uv$，并在新图上重复上述步骤，直到不存在这种点为止，所得之图称为G的闭包，并记为cl(G)。

定理：简单连通图G是哈密顿图⇔cl(G)是哈密顿图。

平面哈密顿图 圈内（外）面数比边数多1。

定理：设G是n阶无环的连通平面图，若G含有哈密顿圈C，则$\sum_{i=1}^{n}(i-2)(f_i^{(1)}-f_i^{(2)})=0$，其中$f_i^{(1)}$和$f_i^{(2)}$分别是含在圈C内部和外部的i度面的面数。

第十四章 代数系统

运算

定义：设S是一个非空集合，映射$f: S^n \to S$称为集合S上的一个n元运算。

- 一元运算主要涉及补运算，并使用习惯的表达方式（如$\bar{a}$）。
- 设ϕ是二元运算，它可以用谓词定义，也可以用运算表定义。在表达式中二元运算$f: S^2 \to S$使用中缀式表示（如$x\phi y$）。

二元运算的性质

- 设 * 是集合S上的二元运算，

① **封闭性**：$\forall a、b \in S，a * b \in S$

② **交换性**：$\forall a、b \in S，a * b = b * a$

③ **结合性**：$\forall a、b、c \in S，(a * b) * c = a * (b * c)$

④ **幂等性**：$\forall a \in S，a * a = a$

- 设* 和 ° 是集合S上的二元运算，

⑤ **分配性**：$\forall a、b、c \in S，a * (b^{\circ} c) = (a * b)^{\circ} (a * c)，a^{\circ} (b * c) = (a^{\circ} b) * (a^{\circ} c)$

⑥ **吸收性**：$\forall a、b \in S，a * (a^{\circ} b) = a，a^{\circ} (a * b) = a$

代数系统

定义：由非空集合S及定义在其上的若干运算$\phi_1、\phi_2、...、\phi_n$构成的系统
$< S，\phi_1、\phi_2、...、\phi_n >$称为**代数系统**。

代数系统中的特殊元素

设$< S，* >$是含一个二元运算的代数系统，

① $e \in S$，如果$\forall a \in S，a * e = e * a = a$，就称e是系统的**幺元**(或**单位元**)。

② $q \in S$，如果$\forall a \in S，a * q = q * a = q$，就称q是系统的**零元**。

③ $a \in S$，如果$a * a = a$，就称 a 是系统中的**幂等元**。

定理：如果代数系统$< S，* >$中存在幺元，则幺元是**唯一**的；如果存在零元，则零元是**唯一**的。a 的逆元记为 a^{-1}

代数系统$< S，* >$的分层

① 如果$< S，* >$的运算满足封闭性，则称$< S，* >$为**广群**；

② 如果$< S，* >$为广群，且运算满足结合性，则称$< S，* >$为**半群**；

③ 如果$< S，* >$为半群，且运算含有幺元，则称$< S，* >$为**含幺半群**；

④ 如果$< S，* >$为含幺半群，且每个元素都有逆元，则称$< S，* >$为**群**。

第十五章 半群与群

半群

定理 有限半群$< S，* >$必有幂等元，即存在$a \in S，a^2 = a$。

子半群 设$< S，* >$是半群，非空子集$T \subseteq S$，如果$< T，* >$也是半群，则称之为 S 的**子半群**。

要证明$< T，* >$是$< S，* >$的子半群，只要证明“*”在T上**封闭**就行了。

群的性质

定理 对群$< G，^\circ >$中任何元素a、b，方程 a ∘ x = b 和 y ∘ a = b 有解。$x = a^{-1}{}^\circ b$和$y = b^\circ a^{-1}$

定理 群$< G，^\circ >$中消去律成立。即对任何$a、b、c \in G$，如果 a ∘ c = b ∘ c 或 c ∘ a = c ∘ b，则 a=b。

推论 群$< G，^\circ >$运算表中每行和每列没有相同的元素。

子群 定义：设$< G，^\circ >$是群，非空子集$H \subseteq G$，如果$< H，^\circ >$也是群，则称之为G的**子群**。

定理 群和子群有共同的幺元。

要证明$< H，^\circ >$是$< G，^\circ >$的子群，可以采用如下方式：

① 按定义证明“∘”在H上封闭、有幺元、每元有逆元。

② **定理** $< H，^\circ >$是$< G，^\circ >$的子群当且仅当对任何$a、b \in H，a^\circ b^{-1} \in H$。

交换群和循环群

交换群 定义 如果群$< G，^\circ >$满足对任何$a、b \in G，a^\circ b = b^\circ a$，则称G是**交换群**。

定理 群$< G，^\circ >$是交换群当且仅当 对任何$a、b \in G，(a^\circ b)^2 = a^2{}^\circ b^2$或
$(a^\circ b)^m = a^m{}^\circ b^m$（$m > 1$）。

交换群习惯上称为加群。

循环群 如果群$< G，^\circ >$中存在元素 a，使对任何$b \in G，b = a^k$，则称G是**循环群**。 a 称为G的**生成元**，或者说G是由a生成的。

循环群一定是交换群。

如果 a 是循环群$< G，^\circ >$的生成元，可记群为**G=(a)**。

定理 每个群都包含**循环子群**。

元素的周期 定义 a是群$< G，^\circ >$中元素，e 是单位元，使$a^n = e$的最小正整数 n，称为 a 的周期。如果不存在这种最小正整数，则说 a 的周期为∞

定理 如果群$< G, \circ >$中元素 a 的周期是 n，那么

① $a^m = e \Rightarrow n|m$;

② $a^t = a^k \Rightarrow n|(t-k)$;

③ a^0，a^1，a^2，...，a^{n-1}互不相同。

陪集与拉格朗日定理

陪集 设$< H, * >$是群$< G, * >$的子群，$a \in G$,记$aH = \{a * h | h \in H\}$,称aH为子群H(关于a)的**左陪集**。同样可以定义**右陪集**, $Ha = \{h * a | h \in H\}$

- 当$a \in H$时, $aH = Ha = H$.

- 当运算*可以**交换**时, 对任何$a \in G, aH = Ha$.

由左(右)陪集所构成的集合的基数成为子群的**指标**

左陪集的性质

①群G中任何元素必属于某个左陪集.

- 因为对任何$a \in G, a \in aH$

②同一左陪集的元素, 其左陪集相同; 即$a \in bH$时,$b \in aH$.

- 因为$a \in bH$时, $aH \in (bH)H = bH$, 同理$bH \in aH$

③任何2个左陪集要么相等,要么不相交.

- 如果$aH \bigcap b \neq \varnothing$,必有$h_1$和$h_2$使$ah_1 = bh_2$,即$a \in G, a \in aH$

④任何2个左陪集等势.

- 据消去律, aH与H等势

这几条性质对右陪集同样成立。

定理：定义群G上的二元关系$R = \{(x, y) | x, y \in G \wedge y \in xH\}$, 则R是G上的等价关系。

群的陪集分解

根据上面定理，可知**每个左陪集就是一个等价类**。因此左陪集分解式为：
$G = eH \cup a_1H \cup a_2H \cup \ldots \cup a_iH \cup \ldots$

同理，右陪集分解式为：$G = He \cup Ha_1 \cup Ha_2 \cup \ldots \cup Ha_i \cup \ldots$

Lagrange定理：设H是有限群G的子群，那么H的阶是G的阶的因子。 由陪集性质及群的陪集分解式可得：|G|=(k+1)|H|

推论：有限群中每个元素的周期是群的阶的因子。 因为每个元素a可以生成一个阶与元素周期相同的有限子群(a)

正规子群 设群$< H,^\circ >$是群$< G,^\circ >$的子群，如果对任何$a \in G$都有$aH = Ha$，则称$< H,^\circ >$是$< G,^\circ >$的正规子群。

定理：H是G的正规子群当且仅当对任何$a \in G$，都有$aHa^{-1} \in H$。

群的同态

同态 设$< A，^\circ >$和$< B，* >$是两个代数系统，如果存在映射$f : A \rightarrow B$，使对任何a_1、$a_2 \in A$，$f(a_1{}^\circ a_2) = f(a_1) * f(a_2)$，就说 f是 A到 B的**同态映射**，或 A(在f下) **同态**于B，并记为A ~ B。当 f 是双射时，就说 A**同构**于 B，并记为$A \cong B$。A在 f 下的同态像记为 f (A)。

定理 设$< A，^\circ >$和$< B，* >$是两个代数系统，如果A ~ B，同态映射为f，那么

① 如果“∘”在A上是**封闭的**，则 “*”在f(A)上也是封闭的;

② 如果“∘”在A上是**结合的**，则 “*”在f(A)上也是结合的;

③ 如果“∘”在A上的**幺元**是e，则“*”在f(A)上的幺元是f(e);

④ 如果“∘”在A上每元有逆元，则“*”在f(A)上每元有逆元。

推论 设$< A，^\circ >$和$< B，* >$是两个代数系统，如果A ~ B，同态映射为f，那么

① 如果$< A，^\circ >$是**广群**，则$< f(A)，* >$也是广群;

② 如果$< A，^\circ >$是**半群**，则$< f(A)，* >$也是半群;

③ 如果$< A，^\circ >$是**含幺半群**，则$< f(A)，* >$也是含幺半群;

④如果$< A，^\circ >$是**群**，则$< f(A)，* >$也是群。

群的同态核 f是群$< G，^\circ >$群$< H，* >$的同态映射，e和d分别是G和H中的幺元，构造集合$Ker(f) = \{x|x \in G 且 f(x) = d\}$，称Ker(f)为f的**同态核**。

同态核Ker(f)是G的正规子群。

第十六章 环和域

环

定义：设$< R，+，* >$是含两个二元运算的代数系统，如果

(1)$< R，+ >$是**加群（交换群）**;

(2)$< R，*$ 是**半群**;

(3) 运算“$*$”对于“+”可分配，即
$\forall a, b, c \in R$，$a*(b+c)=(a*b)+(a*c)$，$(b+c)*a=(b*a)+(c*a)$，

则称$<R$，$+$，$*>$是**环**。

环中运算

- 在环$<R$，$+$，$*>$中，加群$<R$，$+>$的幺元记为θ，元素 a的加法逆元记为–a，并把a+(–b)简记为a–b。因此在环中$a–a=\theta$，$a–b=c \Leftrightarrow a=b+c$。
- 在环$<R$，$+$，$*>$中，如果半群$<R$，$*>$存在幺元，则记为 e；如果元素 a存在逆元，则记为a^{-1}。

定理 在环$<R$，$+$，$*>$中，运算“+”的幺元θ是运算“*”的零元。

定理 在环$<R$，$+$，$*>$中，下述关系式成立：

1. $a*(–b)=(–a)*b=–a*b$
2. $a*(b–c)=a*b–a*c$

环中零因子 如果环$<R$，$+$，$*>$中非零元a、b满足$a*b=\theta$，则称 a和 b是R中的**零因子**。
整环 如果环$<R$，$+$，$*>$中运算“* ”可交换、有幺元e、且**无零因子**，则称该环为**整环**。按定义，意味着整环是**含幺环、交换环、和无零因子环。**

域

定义：如果$<R$，$+$，$*>$是整环，并且$R–\{\theta\}$中每元关于运算“* ”有逆元，则称该环为**域**。

注意，$<R$，$+$，$*>$是域也就意味着**半群**$<R–\{\theta\}$，$*>$也是**交换群**。

定理 有限整环$<R$，$+$，$*>$必是域。

子环及环的同态

定义 设$<R$，$+$，$*>$是环，$S \in R$，如果$<S$，$+$，$*>$也是环，则称之为R的一个**子环**。

定义 设$<R$，$+$，$*>$是环，$<S$，$+$，$*>$是一个代数系统，如果映射$f: R \to S$，使对所有$a, b \in R$

$f(a+b)=f(a) \bigoplus f(b)$

$f(a*b)=f(a) \bigotimes f(b)$

则称f是R到S的环**同态**，或说R（在f下）环**同态**于S。R在f下的同态像记为f(R)。

定理 设f 是环$<R$，$+$，$*>$到代数系统$<S$，$+$，$*>$的环同态，则$<f(R)$，$\bigoplus$，$\bigotimes>$也是环。

第十七章 格与布尔代数

格

格的代数定义：如果代数系统$< L，\vee，\wedge >$满足

① 封闭性： $a、b \in L，a \vee b \in L，a \wedge b \in L$

② 结合性：$a、b \in L，(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)，(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

③ 交换性：$a、b \in L，a \vee b = b \vee a，a \wedge b = b \wedge a$

④ 吸收性： $a、b \in L，a \vee (a \wedge b) = a，a \wedge (a \vee b) = a$

则称$< L，\vee，\wedge >$是格。

格的偏序定义 如果偏序集$< L，\leq>$满足$a、b \in L$，存在最小上界$lub(a,b)$和最大下界$glb(a,b)$，则称$< L，\leq>$为偏序格。据定义，如果L是有限集合，它必有最大元和最小元。

子格 设$< L，\vee，\wedge >$是格，$S \subseteq L$，如果$< S，\vee，\wedge >$也是格，则称之为L的子格。

格的几个式子

- 如果$a \leq b$，则$a \wedge c \leq b \wedge c，a \wedge c \leq b \wedge c$
- 如果$a \leq b，c \leq d$，则$a \vee c \leq b \vee d，a \wedge c \leq b \wedge d$
- 如果$a \leq c，b \leq c$，则$a \vee b \leq c$
- 如果$a \leq b，a \leq d$，则$a \leq b \wedge d$
- 准分配性：$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)，(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$

对偶格 设$< L，\leq>$是偏序格，在L上另定义偏序$\leq'$如下：$\forall a、b \in L，a \leq' b \Leftrightarrow b \leq a$，则称$< L，\leq'>$为$< L，\leq>$的对偶格。

对偶格的特点

- 对偶格Hasse图互为倒置，因而最大元、最小元、最小上界、最大下界都实现互换。
- 对偶格对应的运算互换。

对偶原理

- **对偶式** 设E是格$< L，\vee，\wedge >$中的一个公式，将公式中的最大元与最小元互换、$\vee$与$\wedge$互换后所得公式记为E*，称为E的对偶式。
- **对偶原理** 设X和Y是格$< L，\leq>$中的2个公式，如果X = Y，则X* = Y*。

格的同态 设$< L，\vee，\wedge >$和$< Q，\bigoplus，\bigotimes >$是2个格，如果存在映射$f : L \rightarrow Q$，使对所有$a, b \in L$，

$$f(a \vee b) = f(a) \bigoplus f(b),$$

$$f(a \wedge b) = f(a) \bigotimes f(b),$$

则称f是L到Q的**格同态，当f为双射时，称为格同构**。

保序定理 设f是格$< L, \leq >$到格$< Q, \leq' >$的同态，则对所有$a, b \in L$，如果$a \leq b$，必有$f(a) \leq' f(b)$。

分配格 如果格$< L, \vee, \wedge >$满足，

① $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$，

② $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$。

则称 L为**分配格**。

定理 分配格中消去律成立，即当$a \vee b = a \vee c$，$a \wedge b = a \wedge c$时， b = c。

有界格 如果格$< L, \leq >$存在最大元和最小元，则称之为**有界格**。有限格必是有界格。有界格的最大元一般用$\mathbf{1}$表示，最小元用$\mathbf{0}$表示。

有界格中元素的补元 设格$< L, \leq >$的最大元是1，最小元是0。$a \in L$，如果存在$b \in L$， 使$a \vee b = 1$，$a \wedge b = 0$，则说 b是a 的补元。

有补格 每个元素都有补元的有界格。 可见，格中的分配性和有补性是相互独立的。

有补分配格 满足分配性和有补性的格。有补分配格又称为**布尔代数**，并记为$< B, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1 >$

布尔代数

定理 有补分配格中每个元素的**补元唯一**

定理 有补分配格中**DeMorgan律**成立。

定理 任何有限布尔代数都同构于某个幂集格$< 2A, \cup, \cap >$

推论 有限布尔代数的元素个数是2的幂。