# 2022 线性代数（理工）期末考试（A 卷）参考答案

**一、填空题：（每题 3 分，共 18 分）**

1、设$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$均为 3 维列向量,

记矩阵$A=\left[\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\right]$ ,矩阵$B=\left[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\ \alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3\right]$,

如果$|A|=1$，那么$|B|=$ ___2___

**2**、设$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，则$A^{2022}-2A^{2021}=$ ___O___

**3**、设矩阵$A=\begin{bmatrix}1&\lambda&-1&2\\2&-1&\lambda&5\\1&10&-6&1\end{bmatrix}$，当参数$\lambda=$ ___3___时，矩阵$A$的秩最小。

**4**、三阶矩阵 A 的特征值为 1，1，2，则行列式$\left|\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}+\frac{1}{2}A^*-E\right|=$ ___9/4___

**5**、二维平面上的向量$\beta=(5,\ \ 6)^T$在基$\alpha_1=(1,\ \ 2)^T$，$\alpha_2=(3,\ \ 4)^T$下的坐标为___(-1,2)___

**6**、设二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=(x_1-ax_2)^2+(x_2-bx_3)^2+(x_3-cx_1)^2$，当且仅当$a,b,c$满足___abc≠1___条件时，该二次型$f$正定。

**二、解答题：（共 68 分）**

**1**、**（12 分）**解:由题意

$$A=\alpha\beta^T=\begin{bmatrix}1&1/2\\2&1\end{bmatrix},\qquad B=\beta^T\alpha=2$$

$$A^2=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T=2A,\qquad A^4=8A$$

代入原方程，可化简为：$(A-E)X=\frac{1}{8}\gamma=A\Rightarrow X=A=\begin{bmatrix}1&1/2\\2&1\end{bmatrix}$

也可以使用初等行变换：$\left[\begin{array}{cc|cc}0&4&8&4\\16&0&16&8\end{array}\right]\to\cdots\to\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&1&1/2\\0&1&2&1\end{array}\right]$得到$X=\begin{bmatrix}1&1/2\\2&1\end{bmatrix}$

**2**、**（14 分）**

解：（1）对方程组$I$的增广矩阵实施初等行变换，将其化为行最简形：

$$\begin{bmatrix}1&1&0&-2&-6\\4&-1&-1&-1&1\\3&-1&-1&0&3\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1&-2\\0&1&0&-1&-4\\0&0&1&-2&-5\end{bmatrix}$$

可见$r(A)=r(A,\ b)=3$，方程组有解，且导出组的基础解系仅包含 1 个向量，可取为

$\xi=$（1，1，2，1）$^{\mathrm{T}}$，方程组$I$的特解可取为$\eta_0=$（−2，−4，−5，0）$^{\mathrm{T}}$，则方程组$I$的通解可表示为：

$$x=\begin{bmatrix}-2\\-4\\-5\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\1\\2\\1\end{bmatrix}，k\in R$$

（2）　由题意，方程组$I$与方程组$II$同解，将特解$\eta_0=$（−2，−4，−5，0）$^{\mathrm{T}}$代入$II$中得：

$$\begin{cases}-2-4a+5=-5\\-4b+5=-11\\-5=-c+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=4\\c=6\end{cases}$$

代入方程组$II$，可验证方程组$II$与$I$具有相同的行最简形，即$II$与$I$同解。

**3、（12 分）**解：（1）对矩阵$A$进行初等行变换化为行最简形：

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&-1&1&-7\\1&-2&2&3&-1\\2&-4&1&8&-4\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&-2&0&0&\frac{-20}{3}\\0&0&1&0&\frac{4}{3}\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

所以矩阵$A$的第 1 列、第 3 列和第 4 列可构成$A$的列向量组的一个极大无关组。

（2）矩阵$A$的零空间$nul(A)$的维数是 2；

可取$\xi_1=$（2，1，0，0，0）$^{\mathrm{T}}$和$\xi_2=$（$\frac{20}{3}$，0,$\frac{-4}{3}$，−1，1）$^{\mathrm{T}}$作为$nul(A)$的一组最小生成集。

**4、（15 分）**解：（1）由题意，令三维向量$\alpha_0$的三个分量分别表示目前从事农、工、商工作的人数，则

$\alpha_0=$（25，15，10）$^{\mathrm{T}}$，1 年后从事农、工、商工作的人数$\alpha_1=A\alpha_0$，其中状态转移矩阵

$A=\begin{bmatrix}0.7&0.2&0.1\\0.2&0.7&0.1\\0.1&0.1&0.8\end{bmatrix}$，代入计算可得$\alpha_1=$（21.5，16.5，12）$^{\mathrm{T}}$.

（2）假设$n$年之后从事农、工、商工作的人数为$\alpha_n$，则$\alpha_n=A^n\alpha_0$，为方便计算$A^n$，先求$A$的特征值，由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-0.7&-0.2&-0.1\\-0.2&\lambda-0.7&-0.1\\-0.1&-0.1&\lambda-0.8\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&-0.2&-0.1\\1&\lambda-0.7&-0.1\\1&-0.1&\lambda-0.8\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-0.5)(\lambda-0.7)$$

容易求得$A$的特征值为：$\lambda_1=1，\lambda_2=0.5，\lambda_3=0.7$.

相应的特征向量可取为：$\xi_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\xi_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\xi_3=\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}$, 注意到 $A$ 是实对称矩阵，可构造可逆矩阵

$P=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]$ 和对角矩阵 $\Lambda=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 0.5 & \\ & & 0.7\end{bmatrix}$，使得 $A=P\Lambda P^{-1}$，则 $A^n=P\Lambda^n P^{-1}$，

$$\alpha_n=A^n\alpha_0=P\begin{bmatrix}1^n & & \\ & 0.5^n & \\ & & 0.7^n\end{bmatrix}P^{-1}\alpha_0\approx P\begin{bmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{bmatrix}P^{-1}\alpha_0=\begin{bmatrix}\frac{50}{3}\\ \frac{50}{3}\\ \frac{50}{3}\end{bmatrix}$$

所以只要 $n$ 足够大，$0.5^n\to 0$，　$0.7^n\to 0$ 从事各行业人员总数趋于相等。

**5、（15 分）**解：（1）二次型 $f$ 的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}a & 0 & b\\ 0 & 2 & 0\\ b & 0 & -2\end{bmatrix}$，由题意

$$tr(A)=a+2-2=1\Rightarrow a=1$$

$$|A|=2(-2a-b^2)=-12\Rightarrow b=2$$

（2）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -2\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -2 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3)$，故 $A$ 的特征值为：$\lambda_{1,2}=2$，$\lambda_3=-3$

当 $\lambda_{1,2}=2$ 时，解齐次方程 $(2E-A)X=0$，得基础解系 $\xi_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，$\xi_2=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$

当 $\lambda_3=-3$ 时，解齐次方程 $(2E-A)X=0$，得基础解系 $\xi_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}$

注意到 $\xi_1,\xi_2$ 正交，只需将 $\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 单位化即可得到正交变换的矩阵 $Q=\begin{bmatrix}0 & \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt5} & \frac{-2}{\sqrt5}\end{bmatrix}$

二次型 $f$ 在正交变换下的标准形为：$f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$

**三、证明题（14 分）：**

1、（6 分）证：由 $A^4\alpha = A\cdot A^3\alpha = 3A^2\alpha - 2A^3\alpha = 3A^2\alpha - 2(3A\alpha - 2A^2\alpha) = -6A\alpha + 7A^2\alpha$

所以 $B = \left(\alpha, A^2\alpha, A^4\alpha\right) = \left(\alpha, A^2\alpha, -6A\alpha + 7A^2\alpha\right) = \left(\alpha, A\alpha, A^2\alpha\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

3 维列向量组 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha$ 线性无关，故 $\left[\alpha, A\alpha, A^2\alpha\right]$ 可逆，又 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$，故矩阵

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ 可逆，矩阵 $B$ 可以分解为两个可逆矩阵的乘积，因此 $B$ 可逆。

**2、（8 分）证：由** $A^2 = A$ 可知，$A$ 的特征值满足：$\lambda^2 = \lambda$，即 $A$ 的特征值为 0 或者 1.
因为

$$A - A^2 = (E - A)A = O$$

故 $r(E-A) + r(A) \le n$

又 $r(E-A) + r(A) \ge r(E - A + A) = r(E) = n$

故 $r(E-A) + r(A) = n$，即 $r(E-A) = n - r(A) = n - r$.

对 $\lambda = 1$，对应的齐次方程组 $(E-A)X = 0$，因为 $r(E-A) = n - r$，故有 $r$ 个线性无关的特征向量

$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$；

对 $\lambda = 0$，对应的齐次方程组 $(0E - A)X = 0$，因为 $r(-A) = r$，故有 $n - r$ 个线性无关的特征向量

$\xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \cdots, \xi_n$；

于是存在可逆矩阵 $P = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]$，使得 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} E_r & \\ & O \end{bmatrix}$.