四川大学期末考试试题（闭卷）

（2018——2019 学年　第 1 学期）　　A 卷

课程号：201080030 课序号：　　课程名称：线性代数(理工)　任课教师：　　　成绩：

适用专业年级：　　　学生人数：　　印题份数：　　　学号：　　　　　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

一、填空题（每题 3 分，共 21 分）

1. 若矩阵 $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&4\\1&2&3&4\\1&0&0&x\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}3&2&0&0\\1&2&0&0\\0&0&4&y\\0&0&1&1\end{bmatrix}$ 相似，则 $xy=$ ________.

2. 若存在3维列向量不能由向量组 $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\k\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ 线性表出，则 $k=$ ________.

3. 若二次型 $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&2&4\\0&2&2\\0&0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 正定，则 k 的取值范围为 ________.

4. 设A为3阶实对称阵, $A^2-A=2E, tr(A)=0$,则二次型 X^TAX 的规范形为 ________.

5. 行列式 $\begin{vmatrix}0&0&0&1&1&1\\0&0&0&2&3&4\\0&0&0&3&5&9\\3&4&2&5&5&5\\5&9&5&7&1&8\\3&0&0&6&2&3\end{vmatrix}=$ ________.

6. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为规范正交向量组，则向量 $2\alpha_1-3\alpha_2+6\alpha_3$ 的长度为 __________.

7. 多项选择：下述集合中，________不是 R^3 的子空间.

A. $\{(x_1,x_2,x_3)|\ x_1+2x_2=x_2+3x_3=0; x_1,x_2,x_3\in R\}$

B. $\{(x_1,x_2,x_3)|\ x_1x_2=0; x_1,x_2,x_3\in R\}$

C. $\{(x_1,x_2,x_3)|\ (x_1-x_2+x_3)^2+(3x_2-4x_3)^2=0; x_1,x_2,x_3\in R\}$

D. $\{(x_1,x_1+1,x_3)|x_1,x_3\in R\}$

E. $\{(x_1+1,x_2-1,x_1+x_2)|x_1,x_2\in R\}$.

二、计算题（共 60 分）

1. （10 分）求向量组 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\5\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}4\\4\\6\\10\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}4\\3\\4\\6\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}1\\2\\4\\8\end{bmatrix}$ 张成的子空间的维数，以及该向量组的一个极大线性无关组，并用该极大线性无关组线性表示其余向量.

2. （10 分）矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&0\\5&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 满足方程 $A^2+B=AB+A^*$, 求矩阵 B.

3. （8 分）已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ 和 $\beta_1=\begin{pmatrix}5\\1\\7\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}7\\2\\9\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{R}^3$ 的同一个子空间的两组基. 求出基 α_1,α_2 到基 β_1,β_2 的过渡矩阵，进一步求 $\beta_1+\beta_2$ 在基 α_1,α_2 下的坐标.

4. （12 分）当 a,b 取何值时，方程组 $\begin{cases}x_1-x_2-6x_3-x_4=b\\x_1+x_2-2x_3+3x_4=0\\2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1\\3x_1+2x_2+ax_3+7x_4=-1\end{cases}$ 有解？有解时求出通解.

5. （12 分）用正交变换将下述二次型化为标准形，并写出所用的正交变换.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2^2-4x_2x_3+x_3^2.$$

6.（8 分）给定两个互质的整数 a,b, 其中 $b\geq 2$, 欲求整数 x 使得 $ax-1$ 为 b 的整数倍. 对此问题，古希腊数学家欧几里得提出了辗转相除法. 我国北宋数学家秦九韶则提出了大衍求一术，从线性代数的角度来看，即为如下方法：首先构造矩阵 $\begin{pmatrix}a&1\\b&0\end{pmatrix}$. 接下来对 $\begin{pmatrix}a&1\\b&0\end{pmatrix}$ 作第 3 类初等行变换（即倍加变换，要求为整数倍），将之化作形如 $\begin{pmatrix}1&x\\y&z\end{pmatrix}$ 的矩阵，则 $ax-1$ 为 b 的整数倍（本题不需证明这个结论）. 据此，求正整数 x, $1\leq x\leq 36$, 使得 $94x-1$ 为 37 的倍数.

三、证明题（共 19 分）

1.（7 分）证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的充分必要条件是向量组 $\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.

2.（6 分）设方阵 A 使得 $A^3=2A$, 证明 A^2-E 可逆，并求 A^2-E 的逆矩阵.

3.（6 分）设 n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$. 则 α 是齐次线性方程组 $AX=0$ 解的充分必要条件为：存在向量 β 使得 $\alpha=\beta-A\beta$.