**线性代数小论文**

**——关于部分线性代数概念的几何意义讨论**

**摘要**

线性代数是和几何分不开的。学习线性代数如果脱离了实际意义，转而投身于无止境的计算当中，无疑是不利于理解线性代数本质的，而且更重要的是无法在以后所学习的专业领域上熟练地运用线性代数解决实际问题。因此，学习线性代数的同时把它和几何联系是很重要的。本文主要参考了各处资料，依次简要讨论部分概念的几何理解。

**关键词：线性代数，几何，空间**

**一、向量与向量空间**

向量是线性代数的基础。线性代数中，向量通常以原点作为起点。对于一个n维的坐标系，我们很显然可以用一个含有n个数的有序数组来表示这个坐标系中一个确定的向量。我们将向量理解为空间中的某种确定方向和距离的运动，这样就可以理解向量的加减、数量积，即：空间中的带方向和对应方向上运动距离的运动之和。

对于点积和叉积我们后面讨论。

对于一个确定n维的空间，能取n个基向量，基向量的全部线性组合构成了整个空间。

**二、矩阵变换和矩阵乘法**

现在我们有一个二维空间和一个确定的向量A，我们希望能找到某种变换后，这个向量变成的另一个向量。

我们对单位矩阵分析：我们将单位阵的第一列看作基向量i，第二列看作是基向量j。当i变成时，E变成B=此时我们如何判断基向量变换之后A的变化情况呢？用B右乘A即BA：此时矩阵乘法的结果是,我们解读这个结果：A原本的意义是由i和j一定线性组合的结果（i\*a+j\*b），那么变换之后，这个线性组合是不变的，即跟随i和j的变化而变化，而由于i变成，那么对应的A就是=。

所以这就是矩阵乘法的本质。而对于两个二维矩阵相乘比如我们固然可以把右边矩阵看作是两个待变换的原始列向量的组合，但是同时我们可以这样考虑：在右边再加上一个列向量，那么先和右边的矩阵相乘，我们解释为经历了一次变换，然后再和左边矩阵相乘，称为第二次变换，最终得到结果。那么就可以解释两个方阵相乘的几何意义了，即：两次变换的综合效果。所以矩阵连乘的意义就是多次基向量变换的综合。

N维矩阵的乘法同理。

**三、行列式的几何意义**

行列式和矩阵密切相关，我们从单位矩阵着手，它的行列式=1。当i基向量发生变化，行列式为2，我们画坐标图可以看到，i向量伸长为原来的两倍。当j基向量发生变化，行列式不变，j向量的末端向右平移。从数学计算的敏感我们可以大胆推测行列式的值和面积有关。

事实上我们可以如此理解，如果我们将任何一个行列式看作是由单位阵对应的行列式变换而来的，那么变换后的行列式的值就是基向量构成的 面积/体积/更高维单位 对应的变化比例。并且利用矩阵变换的几何理解（基向量变换）可以推导行列式计算公式。

我们就可以探讨公式：|AB|=|A||B|；由二已经表述的矩阵的几何意义可以知道，AB表示基向量的两次变换的综合，这个综合结果的行列式显然和分别变换的行列式的乘积的值是相同的，因为最后面积变化比例是一样的。同样的，我们可以对其他行列式公式进行几何意义上的分析。

特别的，我们考虑行列式为零的情况，即二维上基向量变换后组成的面积为零（基向量重合），或者三维上组成的立方体积为零（基向量共面）。这种情况就对应降秩。

对于行列式为负，就是指图像发生了翻转，即i和j相对位置关系发生了反转。

**四、逆矩阵，线性方程，列空间，零空间**

由矩阵乘法，我们考虑一个向量到另一个向量的变换是通过左乘一个矩阵来实现的。那么当我们想要找到最开始的向量自然就想到左乘另外一个矩阵，即通过一次反向变换来找到原向量，这个矩阵就是变换矩阵的逆矩阵。

逆矩阵一定存在吗？不是。如何从几何层面直观地解释呢？我们知道行列式不为0的矩阵存在逆矩阵。以二维矩阵为例，由行列式的几何意义可以知道，当行列式=0，则基向量i和j重合，经过这个变换以后的原向量一定被压缩到一条直线上了，在这种情况下是不可能找到它原来在二维空间的向量的。同理n维。

利用逆矩阵我们可以求解诸如AX=B的矩阵方程，这个方程的意义是什么呢？事实上，A是一次基变换，我们要做的实际上是找到一个X向量在经过这样一个特定变换后能够变成B向量。这就是解矩阵方程的意义。通常的解线性方程组也是这样。

我们考虑线性方程组AX=B的解。对于A中所有列向量线性组合张成的空间就称为列空间（零向量一定在列空间中）。但是这个方程是不一定有解的。

当B不为0向量的时候，因为我们已经讨论过，当A的行列式为0的时候，X在变换的过程中维数就被降低了。我们难以将维数降低的变换后的X与一个原本维数的向量对应。但是如果这个向量维数也和变换后X的维数相同，那就恰好会有解存在。

而当B为0向量的时候，（一定有0向量经过变换仍然为0向量）我们仍然从A的行列式出发：如果为0，则说明原空间的维数被压缩，那么这个时候，必然存在非0的X经过变换成为0向量。举例说明：一个三维线性变换将空间压缩到平面上，必然有一整条直线上的所有向量都变换为0向量。如果一个三维线性变换将空间压缩到一条直线上上，必然有一整个平面上的所有向量都变换为0向量。而这些变换为0向量的原向量，组成了矩阵的零空间，也就是经过A变换后成为0向量的方程的解。

这是线性方程组解的几何讨论，也是列空间、零空间概念的具体分析。

**五、点积和叉积**

在讨论叉积之前，我们先看一下点积。对于，为什么可以看作是一个向量的投影大小乘另一个向量的大小呢？我们从矩阵乘法的角度来理解，仍然观察i、j以及k基向量，发现它们经过变换变成了一维的向量，这时候我们知道经过变换，空间上的所有向量被压缩到一条直线上，所以点积最终呈现为这一个维度上原向量的投影长度。

就三维坐标来说，叉积的定义就是就是大小为两个向量夹成矩形的面积且方向由右手法则确定的一个向量。再加上点积的几何意义，我们就可以理解为什么混合积的结果是三个向量构成的立方体的体积。

**六、特征值、特征向量以及相似对角化**

我们考虑一个二维空间中的单位矩阵E，其中包含两个基向量，在经过某次基变换之后变成，那么此时对于原来坐标系中的所有向量都一定经历了这个变换，即向量末端位置发生了一定程度的改变。

此时我们考虑原本平面中存在一条直线，这个直线的方向是原点和变换前向量末端连接成的。那么有没有可能在经历变换的前后，向量始终在直线上呢？很显然，i向量始终在它原本的方向上，事实上，我们还能找到也满足这个条件。这些向量就被称为特征向量，对应的向量的模的变换比例就是对应的特征值。对于AX=，其几何意义就是一个向量X，经过了A对应的变换以后，其方向没有发生改变，只是大小发生了比例为的变化。我们可以改写它：AX=，即：X=O，当X为0向量的时候，等式一定成立，X不为0时，根据矩阵乘法的几何意义，只有的行列式=0，即变换使得空间维数降低，才能使得X经过变换成为0向量。这就是我们求特征值的方法。

我们紧接着考虑这样的情况：基坐标变成，我们发现在这种情况下，平面内的所有向量都只发生了缩放，而方向没有发生改变。所以：

对于，我们考虑右乘A=，也就是对应的基向量矩阵：即先经过基变换，把基向量变成特征向量，那么在进行对应的变换时，空间中所有向量就只有缩放变换了。我们在整个式子的左边再乘A的逆矩阵，这个操作使得A是以新空间描述，新空间情况下，我们就得到了一个对角矩阵。这个矩阵和A相似。

本文探讨了部分线性代数概念的几何意义。举例等实有不完善之处。借鉴资料主要来自3blue1brown的可视化视频以及部分csdn和知乎的文档博客。写这篇小论文的过程中我感觉到我有关线性代数的理解得到了很大程度的深化，这对我的学习非常有帮助。非常推荐大家到B站观看3blue1brown的视频，有利于直观地理解线性代数的本质。