10 Z变换

针对离散信号的复频域分析

如何描述一个系统

1. Z变换的定义：
复频域分析的推广

2. Z变换的性质：
离散信号的复频域分析

3. Z反变换及其应用：
Z变换求解差分方程

如何描述一个系统

1. Z变换的定义：
复频域分析的推广

2. Z变换的性质：
离散信号的复频域分析

3. Z反变换及其应用：
Z变换求解差分方程

拉普拉斯变换到Z变换

- 连续**因果**信号通过抽样得到离散信号

$$x_s(t) = x(t) \cdot \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

- 两边同时取拉普拉斯变换

$$X_s(s) = \int_0^{\infty} x_s(t)\, e^{-st} \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \right] e^{-st} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s)\, e^{-snT_s}$$

得到　　令$z = e^{sT_s}, s = \frac{1}{T_s} \ln z$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s) z^{-n}$$

- 设置$T_s = 1$，因此

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}\ , \quad z = e^s$$

利用Z变换形式对离散信号进行分析

单边Z变换

- 序列$x[n]$的单边Z变换定义为

$$X(z) = \mathcal{Z}\big[x[n]\big] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$= x[0] + \frac{x[1]}{z} + \frac{x[2]}{z^2} + \cdots$$

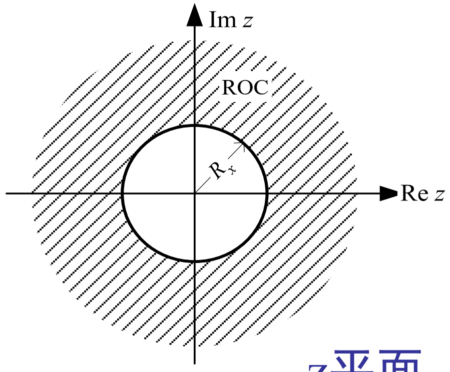
$X(z)$也称为$x[n]$的生成函数

- 其中z为**复数**。离散信号的Z变换是z^{-1}级数形式
- Z变换过程表示为

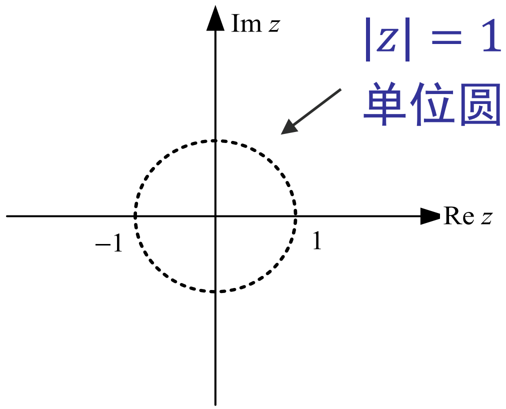
$$x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)$$

- 收敛域 (Region of Convergence, ROC)
  - 使上式级数收敛的所有z的范围称为$X(z)$的收敛域
  - 一般右边序列的收敛域为z平面中的一圆外区域

$|z| > R_x$



z平面



$|z| = 1$

单位圆

常用单边序列的z变换

- 单位脉冲序列

$$\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1, \quad |z| \geq 0$$

- 单位阶跃序列

$$\mathcal{Z}\{u[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots$$

$$= \frac{1}{1 - z^{-1}} \qquad |z| > 1$$

单边Z变换及其收敛域

- 斜变序列

$$\mathcal{Z}\big[x[n]\big] = \mathcal{Z}[nu[n]] = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n}$$

- 根据阶跃序列的Z变换

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}, |z| > 1$$

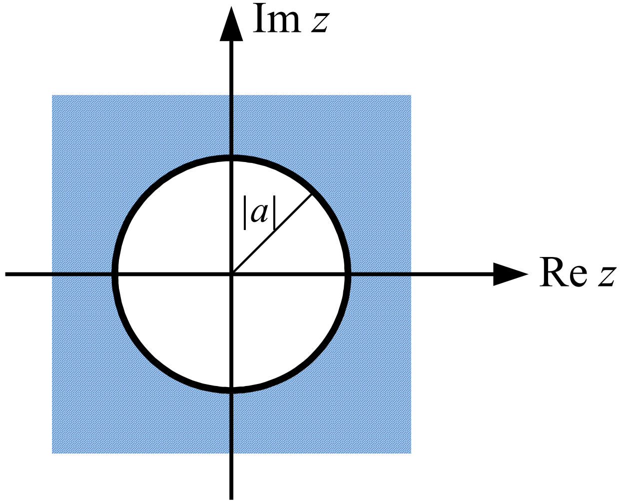
- 两边对z^{-1}求导，有

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\left(z^{-1}\right)^{n-1} = \frac{1}{(1-z^{-1})^2}$$

- 因此

$$\mathcal{Z}[nu[n]] = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}, |z| > 1$$

单边Z变换及其收敛域



- 指数序列

$$x[n] = a^n u[n]$$

- 根据定义

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

- 令$a = e^b$，当$|z| > \left|e^b\right|$，有

$$\mathcal{Z}\left[e^{bn}u[n]\right] = \frac{z}{z - e^b} = \frac{1}{1 - e^b z^{-1}}$$

单边Z变换及其收敛域

- 由于

$$\mathcal{Z}\left[a^n u[n]\right] = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

- 两边对z^{-1}求导

$$\sum_{n=0}^{\infty} na^n \left(z^{-1}\right)^{n-1} = \frac{a}{(1 - az^{-1})^2}$$

- 因此

$$\mathcal{Z}\left[na^n u[n]\right] = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} = \frac{az}{(z - a)^2}$$

双边Z变换

- 双边Z变换

$$X(z)=\mathcal{Z}\{x[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

- z反变换

$$x[n]=\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c}X(z)z^{n-1}\,\mathrm{d}z$$

- C为$X(z)$的收敛域中一闭合曲线（包围$X(z)z^{n-1}$ 极点逆时针积分闭合曲线）
- 离散信号可分解为不同频率复指数z^n的线性组合

Z变换的发展历程

Abraham de Moivre

Pierre-Simon Laplace

Witold Hurewicz

John R. Ragazzini

Lotfi A. Zadeh

Eliahu I. Jury

法国数学家，1730年在研究概率论时引入生成函(Generating function)，与Z变换有类似的形式

拉普拉斯1785年使用形如

$$\int x^s \varphi(x)\mathrm{d}x$$

的变换对整个微分方程进行转换和求解，并研究其性质。1809年使用该变换求解空间任意形式的热扩散求解问题。

美国数学家，1947年Witold Hurewicz在处理基于雷达的抽样数据控制系统中使用Z变换基本想法，能够求解线性、常系数差分方程。

1952年哥伦比亚大学Ragazzini和Zadeh命名为Z变换

1973年，美国工程师E. I. Jury在Z变换基础上发展出高级Z变换，能够处理非抽样周期上的延迟。

如何描述一个系统

1. Z变换的定义：
复频域分析的推广

2. Z变换的性质：
离散信号的复频域分析

3. Z反变换及其应用：
Z变换求解差分方程

单边Z变换的主要性质

- 已知$x_1[n]\xleftrightarrow{z}X_1(z), |z|>R_{x1}, x_2[n]\xleftrightarrow{z}X_2(z), |z|>R_{x2}$

- 线性特性

$$ax_1[n]+bx_2[n]\xleftrightarrow{z}aX_1(z)+bX_2(z)$$

$$|z|>\max(R_{x1},R_{x2})$$

单边Z变换的主要性质

$$\mathcal{Z}\left[e^{bn}u[n]\right] = \frac{z}{z-e^b} = \frac{1}{1-e^b z^{-1}}$$

求$\sin(\omega_0 n)u[n]$ 和$\cos(\omega_0 n)u[n]$ 的z变换及收敛域

- 由于

$$Z\{e^{j\omega_0 n}u[n]\} = \frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}, |z| > 1$$

- 根据欧拉公式，利用线性特性

$$\cos(\omega_0 n)u[n] \longleftrightarrow \frac{1-\cos\omega_0\, z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2}}, \qquad |z| > 1$$

$$\sin(\omega_0 n)u[n] \longleftrightarrow \frac{\sin\omega_0\, z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2}}, \qquad |z| > 1$$

单边Z变换的主要性质

- 已知$x[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}X(z), |z|>R_x$
- 位移特性
  - 因果序列的位移

$$x[n-k]u[n-k]\overset{z}{\longleftrightarrow}z^{-k}X(z), |z|>\ R_x$$

  - 非因果序列的位移

$$Z\{x[n+k]u[n]\}=z^{k}\left[X(z)-\sum_{n=0}^{k-1}x[n]z^{-n}\right],\ |\mathrm{z}|>R_x$$

$$Z\{x[n-k]u[n]\}=z^{-k}\left[X(z)+\sum_{n=-k}^{-1}x[n]z^{-n}\right],\ |\mathrm{z}|>R_x$$

单边Z变换的主要性质

求$R_N[n]=u[n]-u[n-N]$的Z变换及收敛域

$$u[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}\frac{1}{1-z^{-1}},\quad |z|>1$$

- 利用因果序列的**位移特性**和**线性特性**，可得

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{z^{-N}}{1-z^{-1}}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

- 由于$R_N[n]$为有限长序列，故其收敛域为$|z|>0$
- 线性加权后序列z变换的ROC可能比原序列z变换的ROC大

单边Z变换的主要性质

- 已知$x[n] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} X(z), |z| > R_x$

- 指数加权特性

$$a^n x[n] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} X\left(\frac{z}{a}\right), \qquad \mathrm{ROC} = |a| R_x$$

单边Z变换的主要性质

求$a^n sin(\omega_0 n)\ u[n]$ 的Z变换及收敛域

$$\sin(\omega_0 n)u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{\sin\omega_0\, z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}},|z|>1$$

- 利用Z变换的指数加权特性，可得

$$\alpha^n\sin(\omega_0 n)u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{\sin\omega_0\,(z/\alpha)^{-1}}{1-2(z/\alpha)^{-1}\cos\omega_0+(z/\alpha)^{-2}}$$

$$=\frac{\alpha\sin\omega_0\, z^{-1}}{\alpha^2-2\alpha\ z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}},|z|>|a|$$

单边Z变换的主要性质

- 已知$x[n]\xleftrightarrow{z}X(z), |z|>R_x$

- z域微分特性

$$nx[n]\xleftrightarrow{z}-z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}, \mathrm{ROC}=R_x$$

单边Z变换的主要性质

求$x[n]=(n+1)a^n u[n]$的z变换及收敛域

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z|>|a|$$

- 利用z域微分特性，可得

$$Z\{na^n u[n]\} = -z\frac{\mathrm{d}\frac{1}{1-az^{-1}}}{\mathrm{d}z} = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, |z|>|a|$$

- 利用z变换的**线性**特性，可得

$$(n+1)a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{(1-az^{-1})^2}, |z|>|a|$$

单边Z变换的主要性质

- 已知$x_1[n]\xleftrightarrow{z}X_1(z), |z| > R_{x1}, x_2[n]\xleftrightarrow{z}X_2(z), |z| > R_{x2}$

- 序列卷积

$$x_1[k] * x_2[k]\xleftrightarrow{z}X_1(z)X_2(z)$$

$$|z| \in R_{x_1} \cap R_{x_2}$$

单边Z变换的主要性质

- 已知$x[n]\xleftrightarrow{z}X(z), |z| > R_x$

- 初值与终值定理

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

若$(z-1)X(z)$的收敛域包含单位圆，则

$$x[\infty] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

单边Z变换的主要性质

$$Z\{x[n+k]u[n]\} = z^k\left[X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x[n]z^{-n}\right],\ |z| > R_x$$

已知$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$，$|z| > |a|$ 求$x[0]$，$x[1]$和 $x[\infty]$

- 根据初值定理

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{1-az^{-1}} = 1$$

- 根据位移特性有

$$x[n+1]u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} z\{X(z) - x[0]\}$$

- 对上式应用初值定理，即得

$$x[1] = \lim_{z\to\infty} z\{X(z) - x[0]\} = \lim_{z\to\infty} \frac{a}{1-az^{-1}} = a$$

- 当$|a| < 1$时，$(z-1)X(z)$的收敛域包含单位圆，由终值定理，有

$$x[\infty] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{1-az^{-1}} = 0$$

Z变换的性质

Z变换性质	内容
线性特性	$ax_1[n]+bx_2[n]\xleftrightarrow{z}aX_1(z)+bX_2(z),\quad \lvert z\rvert>\max(R_{x1},R_{x2})$
因果序列位移特性	$x[n-k]u[n-k]\xleftrightarrow{z}z^{-k}X(z),\lvert z\rvert>R_x$
非因果序列的位移	$Z\{x[n-k]u[n]\}=z^{-k}\left[X(z)+\sum_{n=-k}^{-1}x[n]z^{-n}\right],\ \lvert z\rvert>R_x$
指数加权特性	$a^n x[n]\xleftrightarrow{z}X\left(\frac{z}{a}\right),\qquad \mathrm{ROC}=\lvert a\rvert R_x$
z域微分特性	$nx[n]\xleftrightarrow{z}-z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z},\mathrm{ROC}=R_x$
序列卷积	$x_1[k]*x_2[k]\xleftrightarrow{z}X_1(z)X_2(z),\ \lvert z\rvert\in R_{x_1}\cap R_{x_2}$
初值与终值定理	$x[0]=\lim_{z\to\infty}X(z)$，$x[\infty]=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$

Z变换与拉普拉斯变换性质对比

Z变换性质	内容	拉普拉斯变换性质	内容
线性特性	$ax_1[n]+bx_2[n]\xleftrightarrow{z}aX_1(z)+bX_2(z)$	线性特性	$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}a_1X_1(s)+a_2X_2(s)$
因果序列位移特性	$x[n-k]u[n-k]\xleftrightarrow{z}z^{-k}X(z)$	时移特性	$x(t-t_0)u(t-t_0)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}e^{-st_0}X(s)$
非因果序列的位移	$Z\{x[n-k]u[n]\}=z^{-k}\left[X(z)+\sum_{n=-k}^{-1}x[n]z^{-n}\right]$	**展缩特性（尺度变换）**	$x(at)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$
指数加权特性	$a^nx[n]\xleftrightarrow{z}X\left(\frac{z}{a}\right)$	指数加权特性	$e^{-\lambda t}x(t)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}X(s+\lambda)$
z域微分特性	$nx[n]\xleftrightarrow{z}-z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}$	s域微分	$-tx(t)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\frac{\mathrm{d}X(s)}{\mathrm{d}s}$
序列卷积	$x_1[k]*x_2[k]\xleftrightarrow{z}X_1(z)X_2(z)$	卷积特性 乘积特性	$x_1(t)*x_2(t)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}X_1(s)X_2(s)$ $x_1(t)x_2(t)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\frac{1}{2\pi j}[X_1(s)*X_2(s)]$
初/终值定理	$x[0]=\lim_{z\to\infty}X(z)$，$x[\infty]=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$	初/终值定理	$x(0_+)=\lim_{s\to\infty}sX(s),x(\infty)=\lim_{s\to 0}sX(s)$
		微/积分特性	$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}sX(s)-x(0\_)$, $\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\frac{X(s)}{s}+\frac{x^{-1}(0\_)}{s}$

如何描述一个系统

1. Z变换的定义：
复频域分析的推广

2. Z变换的性质：
离散信号的复频域分析

3. Z反变换及其应用：
Z变换求解差分方程

单边Z反变换

- 单边Z反变换的定义

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{c} X(z) z^{k-1} \mathrm{d}z$$

- C为$X(z)$的ROC中的**一闭合**曲线

- 计算方法：
  - 幂级数展开和长除法
  - 留数计算法
  - **部分分式展开**

常见信号的Z变换

信号	形式1	形式2
$\delta[n]$	1	1
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\frac{z}{z-1}$
$nu[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\frac{z}{z-a}$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-\cos\omega_0 z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$
$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{\sin\omega_0 z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\frac{z\cdot\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$
$\alpha^n \sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{\alpha\sin\omega_0 z^{-1}}{1-2\alpha z^{-1}\cos\omega_0+\alpha^2 z^{-2}}$	$\frac{\alpha\sin\omega_0 z^2}{z^2-2\alpha z\cos\omega_0+\alpha^2}$

单边Z反变换

- 部分分式法：将Z变换结果表示为

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}}$$

- 考虑$m<n$，分母多项式无重根

$$X(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{1-p_iz^{-1}}$$

  - 各部分分式的系数为

$$r_i=\left(1-p_iz^{-1}\right)X(z)\Big|_{z=p_i}$$

单边Z反变换

- 部分分式法：将Z变换结果表示为

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}}$$

- $m<n$，分母多项式在$z=u$处有l阶重极点

$$X(z)=\sum_{i=1}^{n-l}\frac{r_i}{1-p_iz^{-1}}+\sum_{i=0}^{l-1}\frac{q_i}{(1-uz^{-1})^{l-i}}$$

$$q_i=\frac{1}{(-u)^i i!}\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}(z^{-1})^i}\left[(1-uz^{-1})^l X(z)\right]\bigg|_{z=u},\quad i=0,\ldots l-1$$

单边Z反变换

- 部分分式法：将Z变换结果表示为

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}}$$

- 考虑$m\geq n$

根据前两种情况处理

$$X(z)=\boxed{\sum_{i=1}^{m-n}k_iz^{-i}}+\boxed{\frac{B_1(z^{-1})}{A(z^{-1})}}$$

多项式

单边Z反变换

已知$X(z)=\frac{z^2}{z^2+a^2}=\frac{1}{1+a^2z^{-2}}, |z|>a$，求$x[n]$

- 根据$X(z)$有一对共轭复根，由于

$$\sin(\omega_0 n)u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{\sin\omega_0\, z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$$

- 可得

$$\sin[\omega_0(n+1)]u[n+1] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$$

单边Z反变换

已知$X(z)=\frac{z^2}{z^2+a^2}=\frac{1}{1+a^2z^{-2}}, |z|>a$，求$x[n]$

- 由于

$$X(z)=\frac{1}{1+(z/a)^{-2}}$$

- 针对$X_1(z)=\frac{1}{1+z^{-2}}$，可得

$$x_1[n]=\sin[\frac{\pi}{2}(n+1)]u[n+1]$$

- 由指数加权性质

$$x[n]=a^n\sin[\frac{\pi}{2}(n+1)]u[n+1]$$

单边Z反变换

$$z\{u[n]\} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$a^n x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X\left(\frac{z}{a}\right),$$

已知$X(z) = \frac{2z^2 - 0.5z}{z^2 - 0.5z - 0.5}$　$|z| > 1$，求$x[n]$

- 将$X(z)$化为z的负幂，可得

$$X(z) = \frac{2 - 0.5z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2}} = \frac{A}{1 - z^{-1}} + \frac{B}{1 + 0.5z^{-1}}$$

- 可求得

$$A = \left(1 - z^{-1}\right)X(z)\Big|_{z=1} = \frac{2 - 0.5z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}}\Big|_{z=1} = 1$$

$$B = (1 + 0.5z^{-1})X(z)\Big|_{z=-0.5} = \frac{2 - 0.5z^{-1}}{1 - z^{-1}}\Big|_{z=-0.5} = 1$$

- 将$X(z)$进行Z反变换，可得

$$x[n] = Z^{-1}\{X(z)\} = u[n] + (-0.5)^n u[n]$$

单边Z反变换

$$\mathcal{Z}\{u[n]\} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$a^n x[n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{z}{a}\right),$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}},$$

$$Z\{na^n u[n]\} = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$$

$$\mathcal{Z}[nu[n]] = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

已知$X(z) = \frac{2}{(1-2z^{-1})^2(1-4z^{-1})}$，$|z| > 4$，求$x[n]$

- 由于

$$X(z) = \frac{A}{(1-2z^{-1})^2} + \frac{B}{1-2z^{-1}} + \frac{C}{1-4z^{-1}}$$

- 可求得

$$A = (1-2z^{-1})^2 X(z)\Big|_{z=2} = \frac{2}{1-4z^{-1}} = -2$$

$$B = \frac{1}{(-2)} \frac{\mathrm{d}[X(z)(1-2z^{-1})^2]}{\mathrm{d}z^{-1}}\Big|_{z=2} = \frac{1}{-2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^{-1}} \frac{2}{1-4z^{-1}}\Big|_{z=2} = -4$$

$$C = \left(1-4z^{-1}\right) X(z)\Big|_{z=4} = 8$$

进行Z反变换，得

$$x[n] = [-2(n+1)2^n - 4 \cdot 2^n + 8 \cdot 4^n]u[n]$$

单边Z反变换（另一种分解方式）

已知$X(z)=\frac{2}{(1-2z^{-1})^2(1-4z^{-1})}$，$|z|>4$，求$x[n]$

- 可转化为

$$X(z)=\frac{2z^3}{(z-2)^2(z-4)}$$

- 针对$\frac{X(z)}{z}$进行分解

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A}{(z-2)^2}+\frac{B}{z-2}+\frac{C}{z-4}$$

- 可求得

$$C=(z-4)\frac{X(z)}{z}\bigg|_{z=4}=8$$

单边Z反变换（另一种分解方式）

已知$X(z)=\frac{2}{(1-2z^{-1})^2(1-4z^{-1})}$，$|z|>4$，求$x[n]$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A}{(z-2)^2}+\frac{B}{z-2}+\frac{C}{z-4}$$

- 可求得

$$A=(z-2)^2\frac{X(z)}{z}\bigg|_{z=2}=-4$$

$$B=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}(z-2)^2\frac{X(z)}{z}\Big|_{z=2}=-6$$

- 因此

$$X(z)=\frac{-4z}{(z-2)^2}+\frac{-6z}{z-2}+\frac{8z}{z-4}$$

$-2\cdot n2^nu[n]$ $\quad$ $-6\cdot 2^nu[n]$ $\quad$ $8\cdot 4^nu[n]$

离散时间系统响应的z域分析

- 使用Z变换求解差分方程

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\text{时域差分方程} \arrow[r, "\text{解差分方程}"] \arrow[d, "\text{Z变换}"'] & \text{时域响应}y[n] \\
z\text{域代数方程} \arrow[r, "\text{解代数方程}"'] & z\text{域响应}Y(z) \arrow[u, "\text{Z反变换}"']
\end{tikzcd}$$

二阶系统响应的z域求解

- 针对差分方程，已知初始状态为$y[-1], y[-2]$，求解

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1], \qquad n \geq 0$$

- 对差分方程两边做Z变换，利用

$$\mathcal{Z}\{y[n-1]u[n]\} = z^{-1}Y(z) + y[-1]$$

$$\mathcal{Z}\{y[n-2]u[n]\} = z^{-2}Y(z) + y[-1]z^{-1} + y[-2]$$

- 可得

$$Y(z) + a_1 z^{-1}Y(z) + a_1 y[-1] + a_2 z^{-2}Y(z) + a_2 y[-2] + a_2 y[-1]z^{-1}$$

$$= b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z)$$

二阶系统响应的z域求解

- 整理$Y(z)$可得

$Y_{zs}(z)$

$$Y(z)=\frac{-a_1y[-1]-a_2y[-2]-a_2y[-1]z^{-1}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}+\frac{b_0+b_1z^{-1}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}X(z)$$

- 因此有

$Y_{zi}(z)$

$$Y_{zi}(z)=-\frac{a_1y[-1]+a_2y[-2]+a_2y[-1]z^{-1}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$

$$Y_{zs}(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}X(z)$$

综合可得$y[n]=\mathcal{Z}^{-1}\{Y_{zi}(z)+Y_{zs}(z)\}$

二阶系统响应的z域求解

某离散LTI系统满足 $y[n]-4y[n-1]+4y[n-2]=4x[n]$, 已知$y[-1]=0$，$y[-2]=2$，$x[n]=(-3)^n\,u[n]$，求$y_{zi}[n], y_{zs}[n], y[n]$.

- 将差分方程两边进行单边Z变换得

$$Y(z)-4\{z^{-1}Y(z)-y[-1]\}$$

$$+4\{z^{-2}Y(z)+z^{-1}y[-1]+y[-2]\}=4X(z)$$

- 求解此代数方程可得系统完全响应的z域表示式

$$Y(z)=\underbrace{\frac{4y[-1]-4z^{-1}y[-1]-4y[-2]}{1-4z^{-1}+4z^{-2}}}_{Y_{zi}(z)}+\overbrace{\frac{4X(z)}{1-4z^{-1}+4z^{-2}}}^{Y_{zs}(z)}$$

二阶系统响应的z域求解

某离散LTI系统满足 $y[n]-4y[n-1]+4y[n-2]=4x[n]$,已知$y[-1]=0$，$y[-2]=2$，$x[n]=(-3)^n\,u[n]$，由z域求$y_{zi}[n], y_{zs}[n], y[n]$.

- 化简$Y_{zi}(z)$：

$$Y_{zi}(z)=\frac{4y[-1]-4z^{-1}y[-1]-4y[-2]}{1-4z^{-1}+4z^{-2}}=\frac{-8}{(1-2z^{-1})^2}$$

- 可得

$$y_{zi}[n]=\mathcal{Z}^{-1}\{Y_{zi}(z)\}=-8n(2)^n-8(2)^n,\qquad n\geq 0$$

二阶系统响应的z域求解

某离散LTI系统满足 $y[n]-4y[n-1]+4y[n-2]=4x[n]$,已知$y[-1]=0$，$y[-2]=2$，$x[n]=(-3)^n u[n]$，由$z$域求$y_{zi}[n], y_{zs}[n], y[n]$.

- 化简$Y_{zs}(z)$：

$$Y_{zs}(z)=\frac{4}{1-4z^{-1}+4z^{-2}}\frac{1}{1+3z^{-1}}=\frac{1.6}{(1-2z^{-1})^2}+\frac{0.96}{1-2z^{-1}}+\frac{1.44}{1+3z^{-1}}$$

- 可得

$$y_{zs}[n]=\mathcal{Z}^{-1}\{Y_{zs}(z)\}=[1.6(n+1)(2)^n+0.96(2)^n+1.44(-3)^n]u[n]$$

$$y[n]=y_{zi}[n]+y_{zs}[n]=\ -6.4n(2)^n-5.44(2)^n+1.44(-3)^n, n\geq 0$$

二阶系统响应的z域求解

已知一LTI离散系统满足差分方程

$$\begin{cases} 2y[n+2]+3y[n+1]+y[n]=x[n+2]+x[n+1]-x[n] \quad n\geq 0 \\ y[-1]=2, y[-2]=-1, x[n]=u[n] \end{cases}$$

由z域求系统零输入响应，零状态响应和完全响应

- 令$n=n-2$

$$2y[n]+3y[n-1]+y[n-2]=x[n]+x[n-1]-x[n-2]$$

- 对差分方程两边做Z变换

$$2Y(z)+3(z^{-1}Y(z)+y[-1])+(z^{-2}Y(z)+y[-1]z^{-1}+y[-2])$$
$$=(1+z^{-1}-z^{-2})X(z)$$

可得

$$Y(z)=-\frac{3y[-1]+y[-1]z^{-1}+y[-2]}{2+3z^{-1}+z^{-2}}+\frac{1+z^{-1}-z^{-2}}{2+3z^{-1}+z^{-2}}X(z)$$

二阶系统响应的z域求解

已知一LTI离散系统满足差分方程

$$\begin{cases} 2y[n+2]+3y[n+1]+y[n]=x[n+2]+x[n+1]-x[n] \quad n\geq 0 \\ y[-1]=2, y[-2]=-1, x[n]=u[n] \end{cases}$$

由z域求系统零输入响应，零状态响应和完全响应

- 零输入响应为

$$Y_{zi}(z)=-\frac{3y[-1]+y[-1]z^{-1}+y[-2]}{2+3z^{-1}+z^{-2}}=-\frac{5+2z^{-1}}{2+3z^{-1}+z^{-2}}$$

$$=\frac{-3}{1+z^{-1}}+\frac{0.5}{1+0.5z^{-1}}$$

- 因此

$$y_{zi}[n]=\mathcal{Z}^{-1}\{Y_{zi}(z)\}=3(-1)^{n+1}-(-0.5)^{n+1}, n\geq 0$$

二阶系统响应的z域求解

已知一LTI离散系统满足差分方程

$$\begin{cases} 2y[n+2]+3y[n+1]+y[n]=x[n+2]+x[n+1]-x[n] \quad n\geq 0 \\ y[-1]=2, y[-2]=-1, x[n]=u[n] \end{cases}$$

由z域求系统零输入响应，零状态响应和完全响应

- 由于

$$u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-z^{-1}}$$

- 零状态响应为

$$Y_{ZS}(z)=\frac{(1+z^{-1}-z^{-2})}{2+3z^{-1}+z^{-2}}\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{1/6}{1-z^{-1}}+\frac{-0.5}{1+z^{-1}}+\frac{5/6}{1+0.5z^{-1}}$$

- 因此

$$y_{ZS}[n]=Z^{-1}\{Y_{ZS}(z)\}=\{1/6-0.5(-1)^n+(5/6)(-0.5)^n\}u[n]$$

系统函数

- 系统在**零状态**条件下，输出的Z变换与输入的Z变换之比，记为$H(z)$

$$H(z) = \frac{\mathcal{Z}\{y_{zs}[n]\}}{\mathcal{Z}\{x[n]\}} = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)}$$

- $H(z)$与$h[n]$的关系

$$\delta[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow \quad y_{zs}[n] = \delta[n] * h[n] = h[n]$$

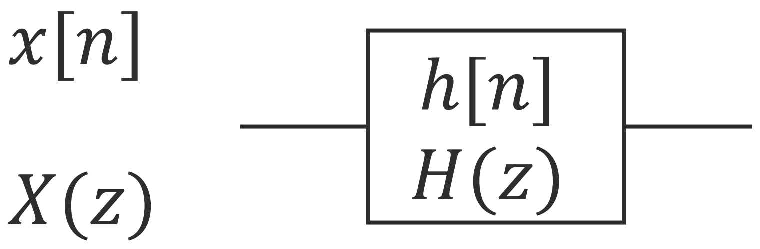
- 因此

$$H(z) = \frac{\mathcal{Z}\{y_{zs}[n]\}}{\mathcal{Z}\{\delta[n]\}} = \frac{\mathcal{Z}\{h[n]\}}{1} = \mathcal{Z}\{h[n]\}$$

有$H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\}$， $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)]$

系统函数

- 求零状态响应



$$y_{zs}[n] = x[n] * h[n]$$

$$Y_{zs}(z) = X(z)H(z)$$

- 求$H(z)$的方法
  - 由系统的单位脉冲响应求解：$H(z) = Z\{h[n]\}$
  - 由定义
  - 由系统的差分方程写出$H(z)$

系统函数

求单位延时器$y[n]=x[n-1]$的系统函数$H(z)$。

- 设

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$$

- 利用z变换的位移特性，有

$$x[n-1] \xleftrightarrow{z} z^{-1}X(z)$$

- 根据系统函数的定义，可得

$$H(z)=\frac{Y_{ZS}(z)}{X(z)}=\frac{z^{-1}X(z)}{X(z)}=z^{-1}$$

- 即单位延时器的系统函数$H(z)$为z^{-1}

系统函数

- 离散系统使用差分方程

$$y[n]-ay[n-1]=bx[n]$$

描述，求系统函数$H(z)$和$h[n]$

- 两边同时做Z变换

$$Y(z)-az^{-1}Y(z)-ay[-1]=bX(z)$$

即

$$Y(z)=\frac{b}{1-az^{-1}}X(z)+\frac{ay[-1]}{1-az^{-1}}$$

零状态下$y[-1]=0$，

$$H(z)=\frac{b}{1-az^{-1}},\quad h[n]=ba^{n}u[n]$$

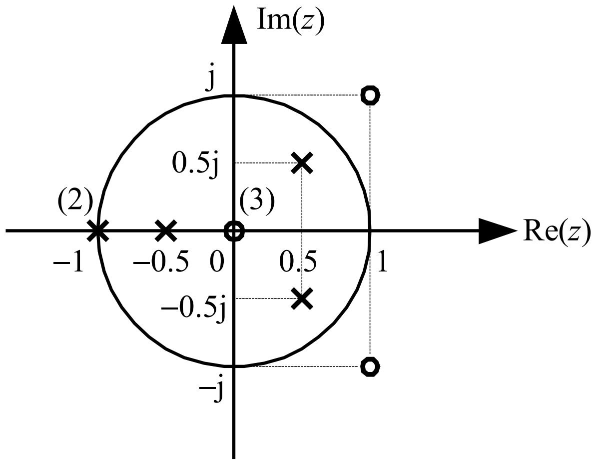
系统函数的零极点分布

- 系统函数可以表达为零极点增益形式，即

$$H(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=K\frac{(z-r_1)(z-r_2)\cdots(z-r_m)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)}$$

- $D(z)=0$的根是$H(z)$的极点，在z平面用×表示。
- $N(z)=0$的根是$H(z)$的零点，在z平面用 o表示

$$H(z)=\frac{z^3(z-1-\mathrm{j})(z-1+\mathrm{j})}{(z+0.5)(z+1)^2(z-0.5-\mathrm{j}0.5)(z-0.5+\mathrm{j}0.5)}$$



零极点与时域特性

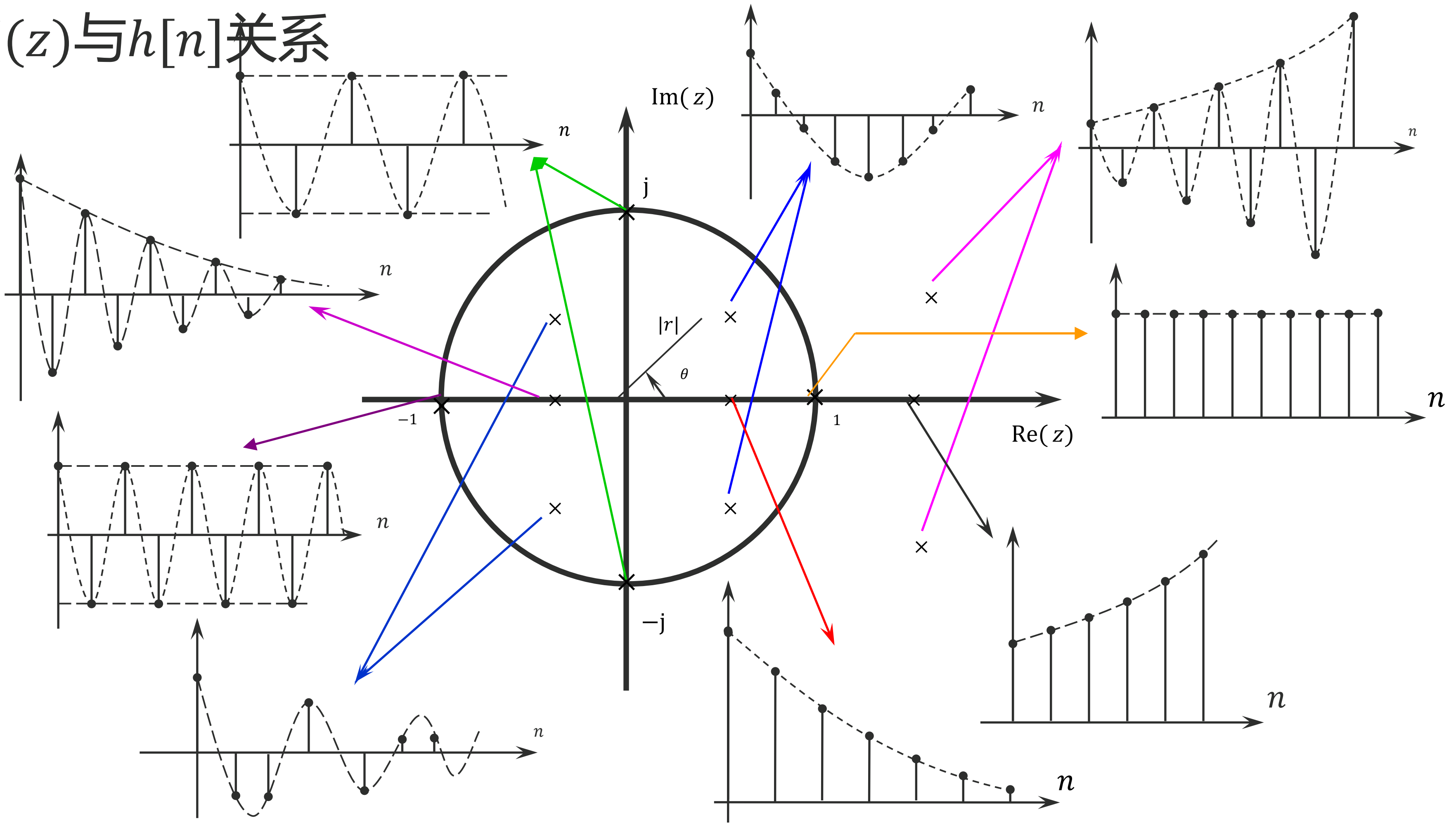
- 由系统函数$H(z)$的零极点分布，可将$H(z)$展开成部分分式，对每个部分分式取Z反变换可得$h[n]$。
- 系统的时域特性主要取绝于系统的**极点**
- 如$H(z)$为单极点时，有

$$H(z) = K\frac{(z-r_1)(z-r_2)\cdots(z-r_m)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_k)} = \sum_{i=1}^{k}\frac{A_i}{z-z_i}$$

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \sum_{i=1}^{k} A_i\,(z_i)^{n-1}u[n-1]$$

零极点与时域特性

- 离散系统$H(z)$与$h[n]$关系



离散系统的稳定性

- 离散LTI系统稳定的充要条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

- 由$H(z)$判断系统的稳定性：
  - $H(z)$的收敛域包含单位圆则系统稳定
  - 因果系统的极点全在单位圆内则该系统稳定

离散系统的稳定性

判断下面因果LTI离散系统的稳定性

$$H(z)=\frac{1}{(1-0.5z^{-1})(1-1.5z^{-1})}$$

- 从收敛域看
  - 该因果系统的收敛域为$|z|>1.5$
  - 收敛域不包含单位圆，故系统不稳定

- 从极点看
  - 系统的极点为$z_1=0.5$，$z_2=1.5$
  - 极点$z_2=1.5$在单位圆外，故系统不稳定。

离散系统的稳定性

- 离散系统对应的差分方程为

$$y[n]+0.2y[n-1]-0.24y[n-2]=x[n]+x[n-1]$$

求$H(z), h[n]$,判断此因果系统是否稳定，当$x[n]=u[n]$时的零状态响应

- 两边进行Z变换

$$Y(z)+0.2z^{-1}Y(z)-0.24z^{-2}Y(z)=X(z)+z^{-1}X(z)$$

$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{1+0.2z^{-1}-0.24z^{-2}}=\frac{z(z+1)}{(z-0.4)(z+0.6)}$$

- 极点为0.4和-0.6，在单位圆内，收敛域为$|z|>0.6$,为稳定的因果系统

离散系统的稳定性

- 离散系统对应的差分方程为

$$y[n] + 0.2y[n-1] - 0.24y[n-2] = x[n] + x[n-1]$$

求$H(z), h[n]$,判断此因果系统是否稳定，当$x[n] = u[n]$时的零状态响应

- 分解

$$H(z) = \frac{z(z+1)}{(z-0.4)(z+0.6)} = \frac{1.4}{(1-0.4z^{-1})} - \frac{0.4}{(1+0.6z^{-1})}$$

- 进行Z反变换

$$h[n] = (1.4(0.4)^n - 0.4(-0.6)^n)u[n]$$

离散系统的稳定性

- 离散系统对应的差分方程为

$$y[n] + 0.2y[n-1] - 0.24y[n-2] = x[n] + x[n-1]$$

求$H(z), h[n]$,判断此因果系统是否稳定，当$x[n] = u[n]$时的零状态响应

- 若$x[n] = u[n]$， $X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$，则

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1+z^{-1}}{1+0.2z^{-1}-0.24z^{-2}}\frac{1}{1-z^{-1}}$$

- 进行Z反变换

$$\mathrm{y}[n] = (2.08 - 0.93(0.4)^n - 0.15(-0.6)^n)u[n]$$