离散数学（2023）作业 16 - 布尔代数

离散数学教学组

Problem 1

设 B 是布尔代数，B 中的表达式 f 是 $(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c)$。

1. 化简 f
2. 求 f 的对偶式 f^*

答案：

1.

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c) &= ((a \wedge b) \vee ((a \wedge b) \wedge c)) \vee (b \wedge c)\\ &= (a \wedge b) \vee (b \wedge c)\\ &= b \wedge (a \vee c)\end{aligned}$$

2. $b \vee (a \wedge c)$

Problem 2

设 B 为布尔代数，对于 $\forall a, b \in B$，证明：$a \preceq b \Leftrightarrow \bar{b} \preceq \bar{a}$。

答案： 由 Problem 3 可以得到 $a \preceq b \Leftrightarrow a \wedge \bar{b} = 0$，则 $b \preceq \bar{a} \Leftrightarrow \bar{b} \wedge \bar{\bar{a}} = 0 \Leftrightarrow \bar{b} \wedge a = 0$，故得证。

Problem 3

设 B 为布尔代数，对于 $\forall a, b \in B$，证明：$a \preceq b \Leftrightarrow a \wedge \bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \vee b = 1$。

答案： 先证 $a \preceq b \Rightarrow a \wedge \bar{b} = 0$：

$$a \preceq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Rightarrow a \wedge \bar{b} = (a \wedge b) \wedge \bar{b} = a \wedge (b \wedge \bar{b}) = a \wedge 0 = 0$$

再证 $a \wedge \bar{b} = 0 \Rightarrow \bar{a} \vee b = 1$：

$$a \wedge \bar{b} = 0 \Leftrightarrow \overline{a \wedge \bar{b}} = 1 \Leftrightarrow \bar{a} \vee b = 1$$

最后证 $\bar{a} \vee b = 1 \Rightarrow a \preceq b$：

$$a = a \wedge 1 = a \wedge (\bar{a} \vee b) = (a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b) = 0 \vee (a \wedge b) = a \wedge b \Leftrightarrow a \preceq b$$

Problem 4

设 B 为布尔代数，$\forall a, b, c \in B$，若 $a \preceq c$，则 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$，这个等式称为模律。证明模律在布尔代数上成立。

答案：
由 $a \preceq c$，可以推出 $a \vee c = c$，故 $\therefore a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c$。

Problem 5

设 B 是布尔代数，$a_1, a_2, \cdots, a_n \in B$，证明：

1. $\overline{(a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n)} = \overline{a_1} \wedge \overline{a_2} \wedge \cdots \wedge \overline{a_n}$
2. $\overline{(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n)} = \overline{a_1} \vee \overline{a_2} \vee \cdots \vee \overline{a_n}$

答案：

1. 对 n 进行归纳。当 $n = 2$ 时是德摩根律，假设对于 $n = k$ 命题为真，则

$$\begin{aligned}\overline{(a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n)} &= \overline{((a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k) \vee a_{k+1})} \\ &= \overline{(a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k)} \wedge \overline{a_{k+1}} \\ &= (\overline{a_1} \wedge \overline{a_2} \wedge \cdots \wedge \overline{a_k}) \wedge \overline{a_{k+1}} \\ &= \overline{a_1} \wedge \overline{a_2} \wedge \cdots \wedge \overline{a_k} \wedge \overline{a_{k+1}}\end{aligned}$$

2. 与 (1) 类似

Problem 6

设 B 是 30 的正因数集合，定义 B 上的偏序关系 $\preceq$ 为 $a \mid b$，证明 B 是一个布尔代数。

答案： 易知，$B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$，其中的最大元素 $I = 30$，最小元素 $O = 1$，定义 $\vee$ 运算为 Z 上的乘法运算，$\wedge$ 运算为 $a \wedge b = gcd(a, b)$。则 $\forall a \in B$，有 $a \vee \bar{a} = I, a \wedge \bar{a} = O$。由最大公约数的性质可知，$a \cdot gcd(b, c) = gcd(ab, ac)$，即 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$，因此 B 有补且满足分配律，是一个布尔代数。

Problem 7

判断由偏序关系 $a \mid b$ 定义的 $Z+$ 是否构成格，以及是否构成布尔代数。

答案：

- $Z+$ 构成格，其上确界为 $lcm(a, b)$，下确界为 $gcd(a, b)$。
- $Z+$ 不是布尔代数，因为找不到最大值 I，使得 $\forall a \in Z+$，有 $a \preceq I$。

Problem 8

今有 x, y, z 三个布尔变元，用 xyz 表示 $0 - 7$ 之间的一个二进制数。定义布尔函数 F：当 xyz 是一个斐波那契数时 $F(x, y, z) = 1$，否则 $F(x, y, z) = 0$。

1. 给出 F 的真值表
2. 以“布尔积之布尔和”的形式给出 F 的表达式（无需化简）
3. 化简该表达式

答案：

1. 真值表为：

$F(0,0,0)$	0
$F(0,0,1)$	1
$F(0,1,0)$	1
$F(0,1,1)$	1
$F(1,0,0)$	0
$F(1,0,1)$	1
$F(1,1,0)$	0
$F(1,1,1)$	0

2. $F = \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}z$
3. $F = \bar{y}z + \bar{x}y$

Problem 9

在布尔代数中，对一个包含若干运算（不一定为二元运算）的集合 S，若任意布尔函数都可以使用仅包含 S 中运算的公式表出，称 S 是“完备集”。请证明：

1. $S = \{\wedge, \vee, '\}$ 是完备集，其中 $'$ 为补运算
2. $S = \{\wedge, \vee\}$ 不是完备集
3. 存在基数为 1 的完备集

答案：

1. 任意 n 元布尔函数都可以作出真值表。对于真值表中每个使得函数值为 1 的行，用 $'$ 修饰这一行中取值为 0 的变量，再用 $\wedge$ 将所有变量连接，可以得到一条表达式；将所有这样的表达式用 $\vee$ 连接，即可得到和原布尔函数等价的表达式（析取范式），因此 $S = \{\wedge, \vee, '\}$ 是完备集。
2. 一元布尔函数 $f(x) = 0$ 无法表示，因此 $S = \{\wedge, \vee\}$ 不是完备集。
3. 可以定义二元运算 $\downarrow$(NOR)：$0 \downarrow 0 = 1$，其余时候为 0，可以证明 $x' = x \downarrow x$，$x \wedge y = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$，$x \vee y = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$，并利用第一问结论。类似地也可以定义二元运算 NAND 并验证。

Problem 10

在布尔代数中，

- 对一条布尔表达式 A，可以通过对每一步运算增加括号，使其具有唯一明确的运算顺序，例如

$$x \vee y \wedge z \vee w = (x \vee (y \wedge z)) \vee w$$

  在这样的表达式中，若将 $\wedge$ 和 $\vee$ 互换，将 0 和 1 互换，得到的表达式称为 A 的“对偶式”，记为 A^*；

- 对一条布尔表达式 A，记 v 为一种赋值方案，对出现在 A 中的所有变量确定一个真值，并记 $v(A)$ 为对表达式 A 使用方案 v 进行赋值后表达式的值。对一种赋值方案 v，记 v' 为其相反（互补）赋值，即：v' 将 v 中赋值为 0 的变量赋值为 1，反之亦然。

请证明：

1. 若 A 和 A^* 互为对偶式，同时 v 和 v' 互为相反赋值，则 $v(A^*) = (v'(A))'$；（提示：用数学归纳法）
2. 若 $A \Leftrightarrow B$，则 $A^* \Leftrightarrow B^*$。（提示：用上一题的结论）

答案：

1. 对表达式的运算符号个数 n 用数学归纳法：

   - 当 $n = 1$ 时结论显然成立；
   - 假设当 $n \leq k$ 时结论成立，即对任意含不超过 k 个运算符号的布尔表达式 A 和任意赋值 v 都有 $v(A^*) = (v'(A))'$。当 $n = k+1$ 时，对任意含 $k+1$ 个运算符号的布尔表达式 A，不妨假设参与第一步运算的变量为 x 和 y。先假设 A 的第一步运算为 $x \wedge y$，构造一个新的布尔表达式 B，将 A 中第一步运算的 $x \wedge y$ 替换为 z，其余部分和 A 相同；再构造一个新的赋值方案 w，将 z 赋值为 $v(x \wedge y)$，其余赋值和 v 相同。由归纳假设可知：对于含 1 个运算符号的布尔表达式 $x \wedge y$ 和赋值方案 v 有 $(v(x \vee y))' = v'(x \wedge y)$，即：方案 w' 对 z 的赋值恰为 $v'(x \wedge y)$，因此 $w'(B^*) = v'(A^*)$。同时，注意到 $w(B) = v(A)$ 以及（由归纳假设）$w(B) = (w'(B^*))'$，因此 $v(A) = (v'(A^*))'$，故 $n = k+1$ 时结论成立。

   由归纳公理知命题对一切 $n \in \mathbb{N}$ 成立。

2. 对任意赋值 v，因为 $A \Leftrightarrow B$，因此 $v'(A) = v'(B)$，故

$$v(A^*) = (v'(A))' = (v'(B))' = v(B^*)$$

   因此 $A^* \Leftrightarrow B^*$。