

离散数学（2023）作业 13 - 关系闭包与等价关系

离散数学教学组

Problem 1

确定定义在所有人的集合上的关系 R 是否是自反的, 对称的, 反对称的和传递的, 其中 $(a, b) \in R$ 当且仅当

1. a 比 b 高
2. a 和 b 同名
3. a 和 b 在同一天出生
4. a 和 b 有共同的祖父母

Problem 2

由 n 个元素组成的集合上, 有多少个关系是:

1. 对称的?
2. 反对称的?
3. 非对称的?
4. 反自反的?
5. 自反的和对称的?
6. 既不是自反的也不是反自反的?

Problem 3

设 $A = \{1, 2, \dots, 10\}$, 定义 A 上的关系

$$R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x + y = 10\}$$

说明 R 具有哪些性质, 并说明理由。

Problem 4

证明: 集合 A 上的关系 R 是自反的当且仅当其逆关系 R^{-1} 是自反的。

Problem 5

设 R 是集合 A 上的二元关系, 试证明: R 是反对称的当且仅当 $R \cap \bar{R} \subseteq I_A$ 。

Problem 6

设 R 是非空集合 A 上的二元关系, 且 R 是自反和传递的。证明: $R^n = R$, 其中 n 为大于 1 的整数。

Problem 7

使用沃舍尔算法找出下面 $\{a, b, c, d, e\}$ 上的关系的传递闭包。

1. $\{(a, c), (b, d), (c, a), (d, b), (e, d)\}$
2. $\{(b, c), (b, e), (c, e), (d, a), (e, b), (e, c)\}$
3. $\{(a, b), (a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b), (d, a), (e, d)\}$
4. $\{(a, e), (b, a), (b, d), (c, d), (d, a), (d, c), (e, a), (e, b), (e, c), (e, e)\}$

Problem 8

设 R 是定义在正整数的有序对构成的集合上的关系, $((a, b), (c, d)) \in R$ 当且仅当 $a + d = b + c$ 。证明 R 是等价关系。

Problem 9

设 $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, R 是 A 上的关系, 且 $R = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle e, f \rangle\}$, 设 $R^* = t(s(r(R)))$, 则 R^* 是 A 上的等价关系。

1. 给出 R^* 的关系矩阵。
2. 写出商集 A/R^* 。

Problem 10

设 R 是非空有限集合 A 上的一个等价关系, A/R 是 A 关于 R 的商集, $|A| = n, |R| = r, |A/R| = t$ 。

1. 设 $A/R = \{A_1, A_2, \dots, A_t\}$, 证明: $\bigcup_{i=1}^t (A_i \times A_i) = R$;
2. 证明: $r \cdot t \geq n^2$ 。