编/lzb　zyc

2019-2020 年第一学期人工智能学院期中考试试卷

高等代数

一、已知：$f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9, g(x)=2x^3-x^2-5x+4$. 设$\big(f(x),g(x)\big)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$，
求$(f(x),g(x))$及$u(x),v(x)$（20 分）

二、计算行列式：（15 分）

$$\begin{vmatrix} a_n^n & a_n^{n-1}b_n & a_n^{n-2}b_n^2 & \cdots & a_nb_n^{n-1} & b_n^n \\ a_{n-1}^n & a_{n-1}^{n-1}b_{n-1} & a_{n-1}^{n-2}b_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}b_{n-1}^{n-1} & b_{n-1}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_0^n & a_0^{n-1}b_0 & a_0^{n-2}b_0^2 & \cdots & a_0b_0^{n-1} & b_0^n \end{vmatrix}$$

三、若已知 x 和数域 P 上的多项式$f_i(x), i=1,2,\dots,n$

$$(x^n-1)|x^{n-1}f_n(x^n)+x^{n-2}f_{n-1}(x^n)+\cdots+f_1(x^n)$$

求证：$x-1|f_i(x), i=1,2,\dots,n$（15 分）

四、已知 *c* 为常数，*f(x)*为数域 P 上的多项式，若$f(x-c)=f(x)$
求证：$f(x)$为常数。（15 分）

五、计算行列式：（15 分）

$$\begin{vmatrix} xy & x+y & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & xy & x+y & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & xy & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & xy \end{vmatrix}$$

六、若行列式$D=|a_{ij}|$满足：各列之和、各行之和均为 0，求证：D 的所有代数余子式A_{ij}全部相等。（20 分）

编/lzb　zyc

2019-2020 年第一学期人工智能学院期中考试试卷

数学分析

一、计算极限：（18 分）

$$1.\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}\quad 2.\lim_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}\quad 3.\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}\right)^n\ (\lambda,x\text{为常数})$$

二、求下列函数的间断点并指出间断点的类型：（12 分）

$$(1)[|\cos x|]\quad (2)\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$$

三、（1）已知$y=\ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$，求$y'$；（2）已知$y=\frac{1}{x^2-x-6}$，求$y^{(2019)}$；（3）已知$f(x)$可导，求$g(x)=f(2^x-xf^2(x))$的导数；（4）已知$y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$，求$y'$.（24 分）

四、$f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\frac{1}{x},\ x\neq 0,\\ 0,\ x=0\end{cases}$　（1）若$f(x)$在x=0 处连续，求 α 的取值；（2）若$f(x)$在x=0 处可导，求 α 的取值；（3）若f'在x=0 处连续，求 α 的取值。（12 分）

五、$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且$\lim_{x\to\infty}f(x)$存在。（1）证明：$f(x)$在$[a,+\infty)$上有界；（2）$f(x)$在$[a,+\infty)$上是否存在最大值或最小值？若存在，请证明；若不存在，请举例说明。（14 分）

六、求证：$f(x)=\sqrt{x}$在$(0,+\infty)$上一致连续（10 分）

七、请从下面两道试题中任选一道解答：（10 分）

（1）若$f(x)$在$[a,b]$上无界，求证：$\exists c\in[a,b]\ s.t.\ \forall\delta>0, f(x)$在$(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]$上无界；

（2）一组开区间$\{I_n\}$覆盖区间[0,1]，其中 $I_n=(a_n,b_n)$,n=1,2,…，求证：$\exists\delta>0$,使[0,1]中$\forall x',x''\ s.t.\ |x'-x''|<\delta$必属于某一区间$I_n$。

2019-2020 年第一学期人工智能学院期中考试试卷

程序设计基础

一、简述题：15 分

1. 请简述程序设计的步骤。
2. 编译和解释执行的区别是什么？请简要说明。
3. 程序的流程控制有哪几种?

二、程序分析题：50 分

1. 下面这段代码是统计输入字符序列中数字字符和字母字符的个数。找出下面的代码中的错误。

```
#include<iostream>
using namespace std;
int main() {
    char a;
    int x1, x2;
    while (a != '#') {
        if (a >= '0' || a <'= 9)
            x1++;
        else
            x2++;
        cin >> a;
    }
    cout << x1 << " " << x2 << endl;
    return 0;
}
```

2. 写出下列程序的输出结果:

```
#include<iostream>
using namespace std;
int main() {
    int a = 0, b = 0;
    switch (a) {
    case 0:
        a++;
    case 2:
        a++, b++;
    }
    cout << "a=" << a << ",b=" << b << endl;
    return 0;
}
```

3. 写出下列程序的输出结果:

```
#include<iostream>
using namespace std;
int main() {
    int a[5] = { 0 };
```

```
    for (int i = 1; i <= 4; i++)
        a[i] = a[i - 1] * 2 - 1;
    for (int i = 0; i <= 4; i++)
        cout << a[i];
    return 0;
}
```

4. 写出下列程序的输出结果:

```
#include<iostream>
using namespace std;
int main() {
    for (int i = 8; i >= 2; i--) {
        for (int k = 1; k <= (i + 5); k++)
            cout << " ";
        for (int j = 8; j >= i; j--)
            cout << "# ";
        cout << endl;
    }
    return 0;
}
```

5. 写出下列程序的输出结果:

```
#include<iostream>
using namespace std;
int main() {
    for (int time = 0; time <= 2; time++);
    cout << "I love you" << endl;
    return 0;
}
```

三、编程题: 35 分（语言: C++）

1.（10 分）输出 1-1000 内所有含 6 的整数的和。

2.（10 分）输入 a，使用迭代法输出$\sqrt{a}$。开方的迭代公式:

$$x_1 = x_0 + \frac{a}{x_0}$$

3.（15 分）输入 1000 个整数，请设计程序从小到大输出这 1000 个整数（重复的整数只输出一次）。

图片处理/lzb　zyc

南京大学人工智能学院 2019－2020 学年秋季学期

离散数学期中测验题

（2019 年 11 月 26 日）

注　意：本试题册回收，请在下面写清学号与姓名
学　号：　　　　　　　　姓　名：

答题时间为 2 小时，请将所有答案写在答题纸上（写清题号，不必抄题）．

1. （12 分）设P,Q,R为命题变元，定义一个命题联结词 IF–THEN–ELSE: <u>IF P THEN Q ELSE R</u>表达的含义与一般程序设计语言中的布尔变量判断表达式的含义一致，即若P为真，划线命题与Q同真假；否则划线命题与R同真假.

(1) 请通过命题联结词集合$\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$给出与上述划线命题逻辑等价的命题表达式；

(2) 证明{IF–THEN–ELSE}是命题联结词功能完备集（ASC）．

注：定义(命题联结词功能完备集)：设C为命题联结词集合，若对于任意命题表达式均存在与之逻辑等价的命题表达式且后者仅含有C中的命题联结词，则C为命题联结词功能完备集(adequate set of connectives).

2. （12 分）设A,B,C为集合，证明：$A\cup B\cup C=(A-B)\cup(B-C)\cup(C-A)\cup(A\cap B\cap C)$

3. （10 分）设R是集合A上的等价关系，$|A|=n$，$|R|=r$，$|A/R|=t$，证明：$r\cdot t\geq n^2$．

4. （10 分）设集合X和函数$f\in X^X$，证明：函数f是传递关系当且仅当$f^2=f$.

注：$X^X=\{f|f:X\rightarrow X\}$

5. （10 分）证明：$\binom{n}{k}$总为正整数（$n\geq k$）．

注：$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$即组合数$C_n^k$，也称二项式系数；提示：将一个大小为$k!\,(n-k)!$的集合$S_n$构造成群，考虑其作为子群的性质.

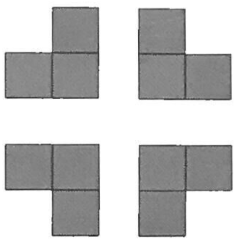
6. （12 分）Cantor 集由 G. Cantor 于 1883 年构造，其几何表现为单位线段上的分形点集. Cantor 集的具体构造如下：如图所示，在单位线段（即闭区间$F_0=[0,1]$）中删除中间1/3长度的开区间$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$，即得 2 条线

段：$F_1=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]$，这称为 Cantor 集的第一分形；在$F_1$中删除每条子线段中间1/3长度的开区间即得第二分形：$F_2=\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right]$；上述过程可一直进行下去. Cantor 集$\mathcal{C}$是闭区间$[0,1]$内在上述所有过程中未被删除的点集：$\mathcal{C}:=\bigcap_{k=0}^{\infty}F_k$.

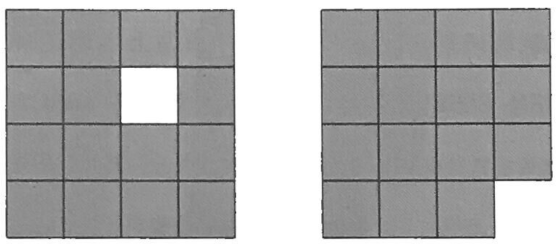
(1) 给出 Cantor 集的第n分形F_n的递归定义（$n\geq 1$）；

(2) 证明：$\mathrm{card}\mathcal{C}=\aleph$. 注：$\aleph$表示实数集的基数.

7. （10 分）棋盘覆盖问题：对于$\forall n\in\mathbb{Z}^+$，是否可以用如左图所示的四种 L 形砖块铺满任意去掉 1 格的$2^n\times 2^n$大小的棋盘（每一块 L 形砖块可覆盖 3 格棋盘，任何 L 形砖块不可重叠）？请给出结论并证明结论.



（四种 L 形砖块）



（去掉一格的棋盘的 2 个例子）

8. （12 分）定义实数集上的“算术三角函数”集合如下：

(1) 恒同函数$I(x)=x$、任意常函数（i.e.常数）和正弦函数$\sin(x)$均为算术三角函数；

(2) 若f和g是算术三角函数，则 $f+g$，$f\cdot g$，$f\circ g$ 均为算术三角函数；

(3) 算术三角函数仅限于此.

用结构归纳法证明：若$f(x)$是算术三角函数，则导函数$f'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$也是算术三角函数.

9. （12 分）**定义（正规子群）**：群G的子群H称为正规子群（normal subgroup，记为$H\trianglelefteq G$）当且仅当$\forall a\in G: Ha=aH$. **定义（群的同态核）**：群$\langle G_1,\circ\rangle$同态于群$\langle G_2,\star\rangle$当且仅当存在函数$f: G_1\to G_2$使$\forall x,y\in G_1: f(x\circ y)=f(x)\star f(y)$，这里 f 称为群同态映射(group homomorphism). 设G_2的单位元为e_2，称G_1的子集 $\ker f=\{x\in G_1\mid f(x)=e_2\}$ 为上述群同态映射f的同态核（kernel）.

(1) 证明：对于群G的子群N，$N\trianglelefteq G\Leftrightarrow\forall g\in G,n\in N: gng^{-1}\in N$；

(2) 证明：从G_1到G_2的群同态映射 f 的同态核 $\ker f$是G_1的一个正规子群，即$\ker f\trianglelefteq G_1$.

南京大学人工智能学院 2018—2019 学年秋季学期

离散数学期中测验题

（2018 年 11 月 14 日）

答题时间为 2 小时，请将所有答案写在答题纸上（写清题号，不必抄题）.

1. （10 分）以下来自“极限”的英文维基百科词条中关于“函数的极限”的描述：

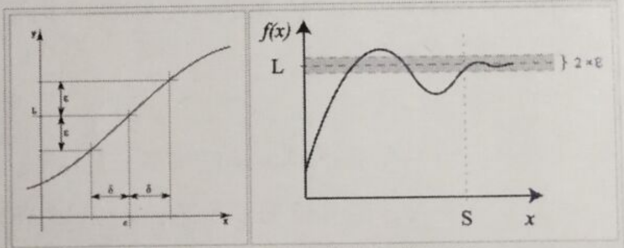
Limit of a function [edit source]

Main article: Limit of a function

Suppose f is a real-valued function and c is a real number. Intuitively speaking, the expression

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

means that $f(x)$ can be made to be as close to L as desired by making x sufficiently close to c. In that case, the above equation can be read as "the limit of f of x, as x approaches c, is L".



Whenever a point x is within δ units of c, $f(x)$ is within ε units of L.

For all $x > S$, $f(x)$ is within ε of L.

Augustin-Louis Cauchy in 1821,[2] followed by Karl Weierstrass, formalized the definition of the limit of a function which became known as the (ε, δ)-definition of limit. The definition uses ε (the lowercase Greek letter *epsilon*) to represent any small positive number, so that "$f(x)$ becomes arbitrarily close to L" means that $f(x)$ eventually lies in the interval $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, which can also be written using the absolute value sign as $|f(x) - L| < \varepsilon$.[2] The phrase "as x approaches c" then indicates that we refer to values of x whose distance from c is less than some positive number δ (the lower case Greek letter *delta*)—that is, values of x within either $(c - \delta, c)$ or $(c, c + \delta)$, which can be expressed with $0 < |x - c| < \delta$. The first inequality means that the distance between x and c is greater than 0 and that $x \neq c$, while the second indicates that x is within distance δ of c.[2]

The above definition of a limit is true even if $f(c) \neq L$. Indeed, the function f need not even be defined at c.

For example, if

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

then $f(1)$ is not defined (see division by zero), yet as x moves arbitrarily close to 1, $f(x)$ correspondingly approaches 2:

请结合数学分析知识自定义谓词，给出定义“函数的极限”的谓词逻辑表达式.

2. （12 分）设A为n元集合，试求：
   (1) A上的自反且对称关系有多少个；
   (2) A上的反对称关系有多少个；
   (3) A上既不对称又不反对称的关系有多少个.

（提示：可从关系的矩阵表示方面来考虑）

3. （10 分）证明：对于集合A，B，$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \to A = B$.

4. （12 分）证明：$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{R}$，其中$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f \mid f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$.

5. （12 分）“麦卡锡 91 函数”由人工智能奠基人之一 John McCarthy 定义：$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$M(n) = \begin{cases} n-10 & (n > 100) \\ M\big(M(n+11)\big) & (n \le 100) \end{cases}$$

(1) 求$M(99)$的值；

(2) 证明：$M(k) = 91\ (0 \le k \le 100)$.

6. （12 分）设函数$f{:}\,X \to Y$，$g{:}\,Y \to X$，若$g \circ f$为X上的恒同函数（i.e. $\forall x \in X{:}\ g\big(f(x)\big) = \boldsymbol{I_X}(x) = x$），证明：(1) f为单射函数；(2) g为满射函数.

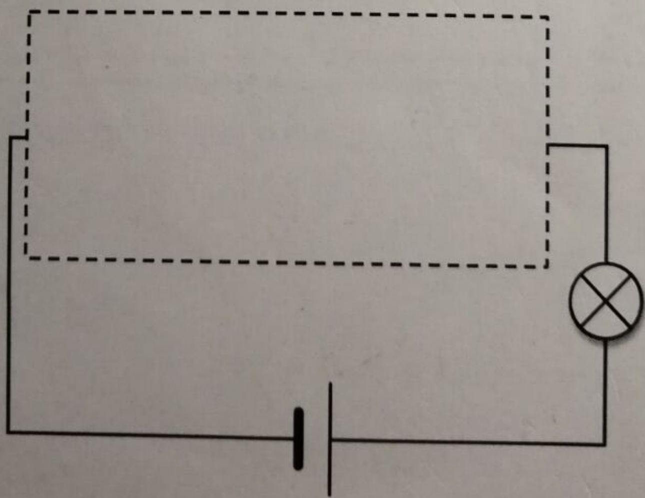
7. （10 分）设$\langle G,*\rangle$为群，$u \in G$，在G中定义运算$\circ$如下：$a \circ b = au^{-1}b$,
证明:$\langle G,\circ\rangle$为群.

8. （10 分）试通过自然数集$\mathbb{N}$和定义在$\mathbb{N}$上的等价关系定义整数集$\mathbb{Z}$.
（提示：可考虑引入序偶）

9. （12分）请用命题逻辑方法辅助设计包含3个开关A, B, C的照明线路，使得电灯在下列三种条件下不亮，其余情况下均亮：(1) 三个开关均断开；(2) 开关A与B断开且开关C闭合；(3) 开关B与C断开且开关A闭合.

(1) 定义命题变元，写出关于电灯与开关状态的命题逻辑表达式；

(2) 将3个开关（用——表示，标明字母）画在线路图的虚线框中，使线路尽可能简单（图中表示灯泡，表示直流电源）.



（请将此图画在答题纸上）