多维随机变量及其分布函数

一、作业 (提交时间：Nov. 6, 2023)

1. [75-1/81-1] 一个箱子中装有 100 件同类产品, 其中一、二、三等品分别有 70, 20, 10 件. 现从中随机抽取一件, 试求:

(1) (X_1, X_2) 的联合分布列, 其中

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{如果抽到}i\text{等品} \\ 0, & \text{如果抽到非}i\text{等品} \end{cases} \qquad i = 1, 2;$$

(2) 分别求 X_1, X_2 的边缘分布列.

2. [78-6/85-6] 设 (X, Y) 的联合密度函数

$$f(x,y) = \begin{cases} c(6-x-y), & 0<x<2, 2<y<4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求常数 c 的值;

(2) 求概率 $P(X+Y<4)$;

(3) 求概率 $P(X<1 \mid X+Y<4)$;

(4) 计算 X, Y 的边缘密度函数.

3. [80-2/90-3] 设 (X, Y) 的服从区域 G 上的均匀分布, 其中 G 由直线 $y=-x$, $y=x$ 与 $x=2$ 所围成. 求:

(1) (X, Y) 的联合密度函数;

(2) 概率 $P(X+Y<2)$;

(3) X, Y 的边缘密度函数.

4. [87-10] 设区域 G 为: 由 $(0,0)$, $(1,1)$, $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 为顶点的四边形与以 $\left(\frac{1}{2},0\right)$, $(1,0)$, $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ 为顶点的三角形合成, 而 (X, Y) 服从区域 G 上的均匀分布. 求:

(1) (X, Y) 的联合密度函数;

(2) X, Y 的边缘密度函数.

二、练习

1. [76-2/82-2/89-2] 两名水平相当的棋手弈棋三盘. 设 X 表示某名棋手获胜的盘数, Y 表示他输赢盘数之差的绝对值. 假定没有和棋, 且每盘结果相互独立. 试求:

(1) (X, Y) 的联合分布列;

(2) 分别求 X, Y 的边缘分布列.

2. [79-7/85-7] 设 (X, Y) 的联合密度函数

$$f(x,y) = \begin{cases} ce^{-(x+2y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求常数 c 的值;

(2) 求概率 $P(X<1, Y>2)$;

(3) 求 X, Y 的边缘密度函数.

3. [78-5] 假设随机变量 Y 服从参数为 $\lambda = 1$ 得指数分布, 随机变量

$$X_k = \begin{cases} 1, & Y > k \\ 0, & Y \le k \end{cases} \qquad k = 1, 2;$$

求 (X_1, X_2) 的联合分布列.

4. [79-8/86-8] 设 (X, Y) 的联合密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy, & (x, y) \in G \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中, 区域 $G = \{(x, y) : 0 < y < 2x\text{且}0 < x < 2\}$.

(1) 求常数 c 的值;

(2) 求概率 $P(X + Y < 1)$;

(3) 求 X, Y 的边缘密度函数.

5. [80-1] 设 (X, Y) 服从以原点为圆心的单位圆上的均匀分布, 记

$$U = \begin{cases} 1, & X + Y \le 0 \\ 0, & X + Y > 0 \end{cases}$$

$$V = \begin{cases} 1, & X - Y \le 0 \\ 0, & X - Y > 0 \end{cases}$$

求 (X_1, X_2) 的联合分布列.