二元关系

离散数学

马晓星
南京大学 · 计算机科学与技术系

回顾

- 直觉概率分析：三门问题
- 概率的公理化：概率空间
- 条件概率与贝叶斯定理
- 随机变量及其期望与方差

提要

- 二元关系
  - 有序对与笛卡尔积
  - 关系与函数
  - 关系的表示
- 关系的运算
- 关系的性质
  - 自反
  - 传递
  - 对称

集合与关系

- 集合中元素无序，元素之间的“关系”难以直接体现

- 体现关系的前提是区分“主”“客”–“有序对”
  - 君君臣臣，父父子子，尊卑有别，长幼有序
  - “平等”也是一种关系

有序对（Ordered pair）

- (a,b)是集合$\{\{a\},\{a,b\}\}$的简写
  - 卡齐米日·库拉托夫斯基 Kazimierz Kuratowski 1921
  - 这是现代通用的定义

- 有序对可以有其他的集合论定义方式：
  - Norbert Wiener 1914: $(a,b) := \left\{\{\{a\},\emptyset\},\{\{b\}\}\right\}$
  - Felix Hausdorff 2924: $(a,b) := \left\{\{a,1\},\{b,2\}\right\}$, where 1 and 2 are two distinct objects different from a and b.

有序对（Ordered pair）

- (a,b)是集合$\{\{a\},\{a,b\}\}$的简写

- 次序的体现
  - $(x,y) = (u,v)$ iff $x = u$ 且 $y = v$
  - 若$\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{u\},\{u,v\}\}$，则$\{x\} = \{u\}$或$\{x\} = \{u,v\}$, 因此$x = u$。
  - 假设$y \neq v$
  - (1) 若$x = y$, 左边$= \{\{x\}\}$, 而$v \neq x$, $\therefore$右边$\neq \{\{x\}\}$;
  - (2) 若$x \neq y$,则必有$\{x,y\} = \{u,v\}$, 但y既非u,又非v, 矛盾。

笛卡尔乘积（Cartesian Product）

- 对任意集合A,B 笛卡尔积

$$A\times B = \{ (a,b) \mid a \in A, b \in B \}$$

- 例：$\{1,2,3\}\times\{a,b\} = \{(1,a),(3,a),(3,a),(1,b),(2,b),(3,b)\}$

- 若A，B是有限集合，$|A\times B| = |A|\times|B|$

例题

- $A=\{1,2\}, \quad \mathcal{P}(A)\times A=?$
- $|A|=m, |B|=n,\ |A\times B|=?$
- $\emptyset\times\mathcal{P}(\emptyset)=?$
- $\left|\mathcal{P}(\emptyset)\times\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(\emptyset)\right)\right|=?$

关系（Relation）的定义

- 若A, B是集合,从A到B的一个（二元）关系是$A\times B$的一个子集.
$$R \subseteq A\times B$$
  是一个集合。
  - 集合的元素是有序对
  - 可以是空集
  - 集合R是从A到B的一个二元关系关系意味着
$$\forall r \in R. \exists x, y. \big(r = (x, y)\big)$$
    其中$x \in A, y \in B$.

二元关系

- 相关记号：令 $R \subseteq A \times B$
  - $(a, b) \in R$ 可简记为 aRb
  - $(a, b) \notin R$ 可简记为 $\neg aRb$ 或者 $a \not R b$
  - $aRb \wedge bRc$ 可简记为 $aRbRc$

  - 例如: $A = \{1,2\}, B = \{3,4,5\}, R = \{(1,3), (2,3), (1,5)\}$为从$A$到$B$的关系，有：$1R3$，$2R3$，$1R5$

二元关系

- 关系意味着什么？
  - 两类对象之间建立起来的联系！
- 例子
  - 常用的数学关系：不大于、整除、集合包含等
  - 网页链接、文章引用、相互认识

特殊的二元关系

- 集合A上的空关系$\emptyset$: 空关系即空集
- 全域关系 E_A: $E_A = \{ (x,y) \mid x,y \in A \}$
- 恒等关系 I_A: $I_A = \{ (x,x) \mid x \in A \}$

关系的一些相关术语

- 关系的**定义域、值域和域**：设R为从A到B的关系（ $R \subseteq A\times B$ ）
  - R的定义域 Domain　$\mathrm{Dom}(R) = \{\, x \mid \exists y \in B. (x,y) \in R \,\}$
  - R的值域 Range　$\mathrm{Ran}(R) = \{\, y \mid \exists x \in A. (x,y) \in R \,\}$
  - R的域 Field　$\mathrm{Fld}(R) = \mathrm{Dom}(R) \cup \mathrm{Ran}(R)$

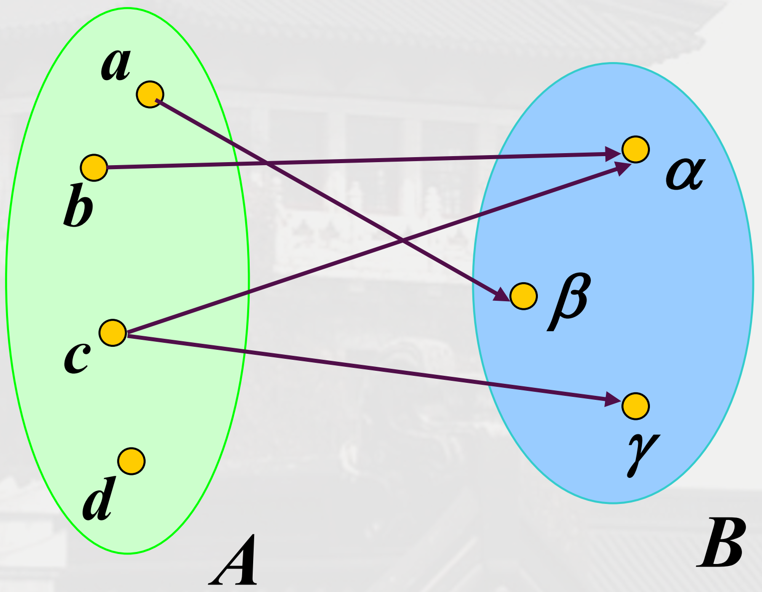
  - 例如：$A = \{1,2,3\}$，$B = \{r,s\}$，$R = \{(1,2),(2,s),(3,r)\}$ 其定义域、值域和域分别是什么？

二元关系的表示

- 假设$A = \{a, b, c, d\}, B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ // 假设为有限集合
- 集合表示: $R = \{(a, \beta), (b, \alpha), (c, \alpha), (c, \gamma)\}$

$$\begin{array}{c|ccc} & \alpha & \beta & \gamma \\ \hline a & & & \\ b & & & \\ c & & & \\ d & & & \end{array}\quad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

0-1矩阵表示



有向图表示

二元关系和有向图

关系 $R \subseteq A \times B$ ⟷ 有向图 (V_D, E_D)

A和B是集合

有序对集合

$(x,y) \in R$

若$A=B$, R中存在序列：(x_1,x_2), (x_2,x_3),…,(x_{n-1},x_n)

顶点集 $V_D = A \cup B$

有向边集E_D

从x到y有一条边

图D中存在从 x_1 到 x_n 的长度为 n-1的通路

函数是一种特殊的关系

- 若f是从A到B的一个函数，$R = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$是一个从$A$到$B$的一个关系。

- A 和 B 为非空集合, 若关系 $R \subseteq A \times B$ 满足
对于A 中的每个元素a，B中都有且仅有一个元素 b 使得 aRb
则 R 是一个从 A 到 B 的函数。

- 如何用逻辑公式表达上述条件？

关系的运算

关系的运算（1）

- 关系是集合, 所有的集合运算对关系均适用
  - 例子:
    - 自然数集合上: “$<$” $\cup$ “$=$” 等同于 “$\leq$”
    - 自然数集合上: “$\leq$” $\cap$ “$\geq$”等同于“$=$”
    - 自然数集合上: “$<$” $\cap$ “$>$”等同于$\varnothing$

    - -- 请注意“类型”问题（是哪个笛卡尔积的子集）。

关系的运算（2）

- 与定义域和值域有关的运算：设R为从A到B的关系
  - $R \uparrow S = \{ (x, y) \mid x \in S \land xRy \}$,
    - $R \uparrow S \subseteq R$
  - $R[S] = \{ y \mid \exists x (x \in S \land (x, y) \in R) \} = \mathrm{Ran}(R \uparrow S)$
    - $R[S] \subseteq \mathrm{Ran}(R)$
    - 有时我们用$R(a)$表示$R[\{a\}]$

例：$A = \{1,2,3,4,5\}, B = \{1,3,5,6\}$，$A$上关系$R$：

$$R = \{(1,2), (1,4), (2,3), (3,5), (5,2)\}$$

求 $R \uparrow B$, $R[B]$、$R(1)$和$R(2)$

关系的运算（3）

- 逆运算

$$R^{-1} = \{ (x, y) \mid (y, x) \in R \}$$

- 注意:如果R是从A到B的关系,则R^{-1}是从B到A的。
- $(R^{-1})^{-1} = R$

例：$(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$

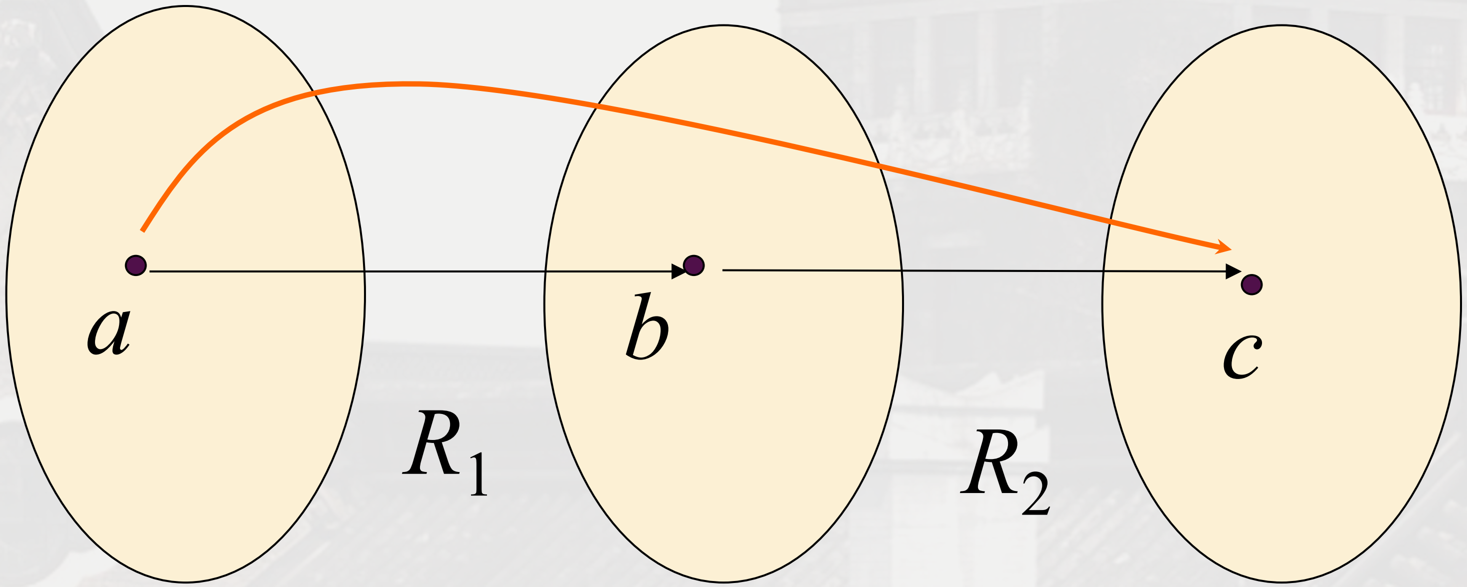
$$\begin{aligned}
(x, y) \in (R_1 \cup R_2)^{-1} &\Leftrightarrow (y, x) \in (R_1 \cup R_2) \\
&\Leftrightarrow (y, x) \in R_1 \text{ 或 } (y, x) \in R_2 \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in R_1^{-1} \text{或 } (x, y) \in R_2^{-1}
\end{aligned}$$

关系的运算（4）

- 关系的**复合**（合成, **Composition**）

设$R_1 \in A \times B, R_2 \in B \times C$, R_1与R_2的复合, 记为$R_2 \circ R_1$, 定义如下：

$$R_2 \circ R_1 = \{ (a,c) \in A \times C \mid \exists b \in B. \big((a,b) \in R_1 \land (b,c) \in R_2\big) \}$$



关系的复合运算：举例

- 设$A=\{a,b,c,d\}$, R_1, R_2为A上的关系，其中：

  $R_1 = \{(a,a),(a,b),(b,d)\}$, $R_2 = \{(a,d),(b,c),(b,d),(c,b)\}$

  则：

$$R_2 \circ R_1 = \{(a,d),(a,c),(a,d)\}$$

$$R_1 \circ R_2 = \{(c,d)\}$$

$$R_1^2 = R_1 \circ R_1 = \{(a,a),(a,b),(a,d)\}$$

关系的复合运算的性质（1）

- 结合律

给定$R_1 \in A\times B, R_2 \in B\times C, R_3 \subseteq C\times D$, 则有:

$$R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1$$

证明左右两个集合相等.

关系的复合运算的性质（2）

- 复合关系的**逆关系**

给定$R_1 \in A \times B, R_2 \in B \times C$, 则：

$$(R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$$

同样，证明左右两个**集合相等**

$$\begin{aligned}(x,y) \in (R_2 \circ R_1)^{-1} &\Leftrightarrow (y,x) \in R_2 \circ R_1 \\ &\Leftrightarrow \exists t \in B.\big((y,t) \in R_1 \wedge (t,x) \in R_2\big) \\ &\Leftrightarrow \exists t \in B.\big((t,y) \in R_1^{-1} \wedge (x,t) \in R_2^{-1}\big) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in R_1^{-1} \circ R_2^{-1}\end{aligned}$$

关系的复合运算的性质（3）

- 给定$F \subseteq A \times B, G \subseteq B \times C, H \subseteq B \times C$, 则：
  - 对集合并运算满足分配律：

$$(G \cup H) \circ F = (G \circ F) \cup (H \circ F)$$

  - 对集合交运算：

$$(G \cap H) \circ F \subseteq (G \circ F) \cap (H \circ F)$$

注意：等号不成立。考虑

$A = \{a\}, \ B = \{s,t\}, \ C = \{b\}$ ；

$F = \{(a,s),(a,t)\}, G = \{(s,b)\}, H = \{(t,b)\}$;

$G \cap H = \emptyset$, 但是 $(G \circ F) \cap (H \circ F) = \{(a,b)\}$

0–1 矩阵运算

- 令0-1矩阵$M_1 = [a_{i,j}], M_2 = [b_{i,j}]$:
  - **交(Join):** $C = M_1 \wedge M_2$: $c_{i,j} = 1$ *iff.* $a_{i,j} = b_{i,j} = 1$
  - **并(Meet):** $C = M_1 \vee M_2$: $c_{i,j} = 1$ *iff.* $a_{i,j}$或者$b_{i,j} = 1$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A} \vee \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \vee 0 & 0 \vee 1 & 1 \vee 0 \\ 0 \vee 1 & 1 \vee 1 & 0 \vee 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \wedge 0 & 0 \wedge 1 & 1 \wedge 0 \\ 0 \wedge 1 & 1 \wedge 1 & 0 \wedge 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

0-1 矩阵运算

- 令$r\times s$矩阵$M_1 = [a_{i,j}]$； $s\times t$矩阵$M_2 = [b_{i,j}]$:
  - $C = M_1 \odot M_2$: $c_{i,j} = 1$ *iff.* $\exists k(a_{i,k} = 1 \wedge b_{k,j} = 1)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} (1\wedge 1)\vee(0\wedge 0) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(0\wedge 1) \\ (0\wedge 1)\vee(1\wedge 0) & (0\wedge 1)\vee(1\wedge 1) & (0\wedge 0)\vee(1\wedge 1) \\ (1\wedge 1)\vee(0\wedge 0) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(0\wedge 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\vee 0 & 1\vee 0 & 0\vee 0 \\ 0\vee 0 & 0\vee 1 & 0\vee 1 \\ 1\vee 0 & 1\vee 0 & 0\vee 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

关系运算的矩阵算法（1）

- 命题

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2}$$

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2}$$

$$M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1} \odot M_{R_2}$$

若R是有限集合A上的关系，$M_{R^n} = M_R \odot \ldots \odot M_R = (M_R)^n$

关系运算的矩阵算法（2）

- $M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1} \odot M_{R_2}$

  证明：

  令$R_1 : X \to Y; R_2 : Y \to Z;$

  令$\mathrm{A} = \mathrm{M}_{\mathrm{R}_1}$，$\mathrm{B} = \mathrm{M}_{\mathrm{R}_2}$，$\mathrm{C} = \mathrm{M}_{\mathrm{R2 \circ R1}}$，$\mathrm{D} = \mathrm{M}_{\mathrm{R}_1} \odot \mathrm{M}_{\mathrm{R}_2}$有

  $$c_{ij} = 1 \Leftrightarrow \langle x_i, z_j \rangle \in R_2 \circ R_1 \Leftrightarrow \exists y_k \in Y(\langle x_i, y_k \rangle \in R_1 \wedge \langle y_k, z_j \rangle \in R_2)$$

  $$\Leftrightarrow a_{ik} = 1 \wedge b_{kj} = 1 \Leftrightarrow d_{ij} = 1$$

关系的性质

关系的性质：自反性 reflexivity

- 集合A上的关系 R 是:
  - 自反的 **reflexive**：定义为：对所有的 $a \in A, (a,a) \in R$
  - 反自反的 **irreflexive**：定义为：对所有的$a \in A, (a,a) \notin R$
    - 注意区分 “非” 与 “反”: 反自反不是自反的否定。

设 $A = \{1,2,3\}, R \subseteq A \times A$

$R = \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,1),(3,3)\}$ 是自反的

$R = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ 是反自反的

$R = \{(1,2),(2,2),(2,3),(3,1)\}$ 既不是自反的，也不是反自反的

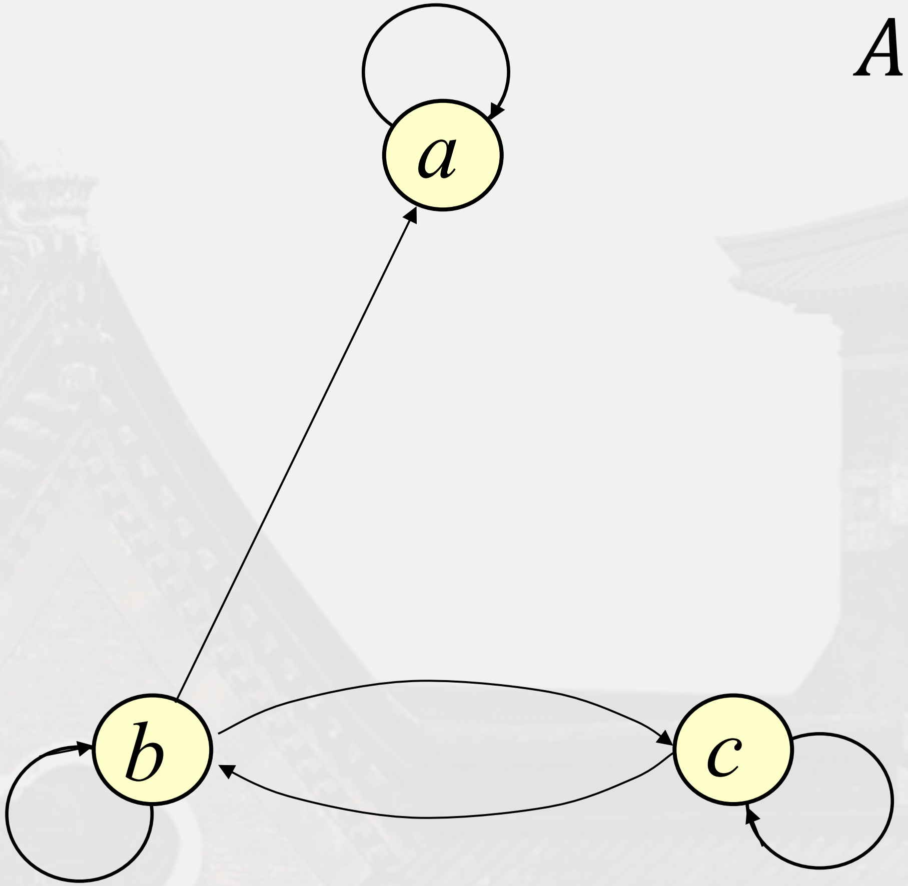
自反性与恒等关系

- R 是 A 上的自反关系 $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$,
  - 这里I_A是集合A上的恒等关系,即: $I_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$
  - 直接根据定义证明:

    $\Rightarrow$ 只需证明：对任意(a,b)，若$(a,b) \in I_A$, 则$(a,b) \in R$

    $\Leftarrow$ 只需证明：对任意的a, 若$a \in A$, 则$(a,a) \in R$

自反关系的有向图和0-1矩阵



$$A=\{a,b,c\}$$

$$M_R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

关系的性质：对称性 Symmetry

- 集合A上的关系R是:
  - **对称的 symmetric**：若 $(a,b) \in R$, 则 $(b,a) \in R$
  - **反对称的 antisymmetric**：若$(a,b) \in R$且$(b,a) \in R$，则$a = b$
  - **非对称的 asymmetric**：若$(a,b) \in R$则$(b,a) \notin R$

设 $A = \{1,2,3\}, R \subseteq A \times A$

$\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(3,3)\}$ 是对称的

$\{(1,2),(2,3),(2,2),(3,1)\}$ 是反对称的，但不是非对称的

理解对称性

- 关系R满足对称性：
  对任意(a,b)，若 $(a,b) \in R$, 则 $(b,a) \in R$
  - 注意：$\emptyset$是对称关系。

- 反对称并不是对称的否定

令：$A = \{1,2,3\}, R \subseteq A \times A$
$R = \{(1,1),(2,2)\}$ 既是对称的，也是反对称的;
$\emptyset$是对称关系，也是反对称关系。

对称性与逆关系

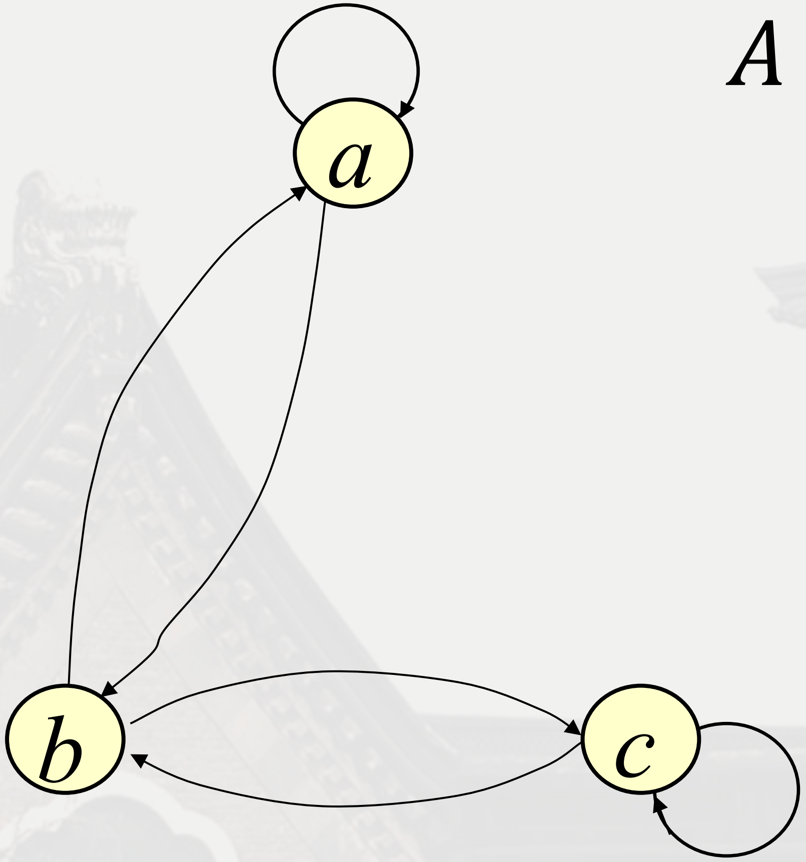
- R 是集合A上的对称关系 $\Leftrightarrow$ $R^{-1} = R$

$\Rightarrow$ 证明一个集合等式 $R^{-1} = R$

  - 若$(a, b) \in R^{-1}$, 则$(b, a) \in R$, 由R的对称性可知$(a, b) \in R$, 因此：$R^{-1} \subseteq R$; 同理可得： $R \subseteq R^{-1}$;

$\Leftarrow$ 只需证明：对任意的(a, b) 若$(a, b) \in R$, 则$(b, a) \in R$.

对称关系的有向图和0-1矩阵



$$A = \{a, b, c\}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

关系的性质：传递性 transitivity

- 集合A上的关系R是
  - **传递的 transitive**: 若 $(a,b) \in R$, $(b,c) \in R$, 则 $(a,c) \in R$

设 $A = \{1,2,3\}, R \subseteq A \times A$

$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ 传递的

$R = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ 是非传递的

$\{(1,3)\}$?

$\emptyset$?

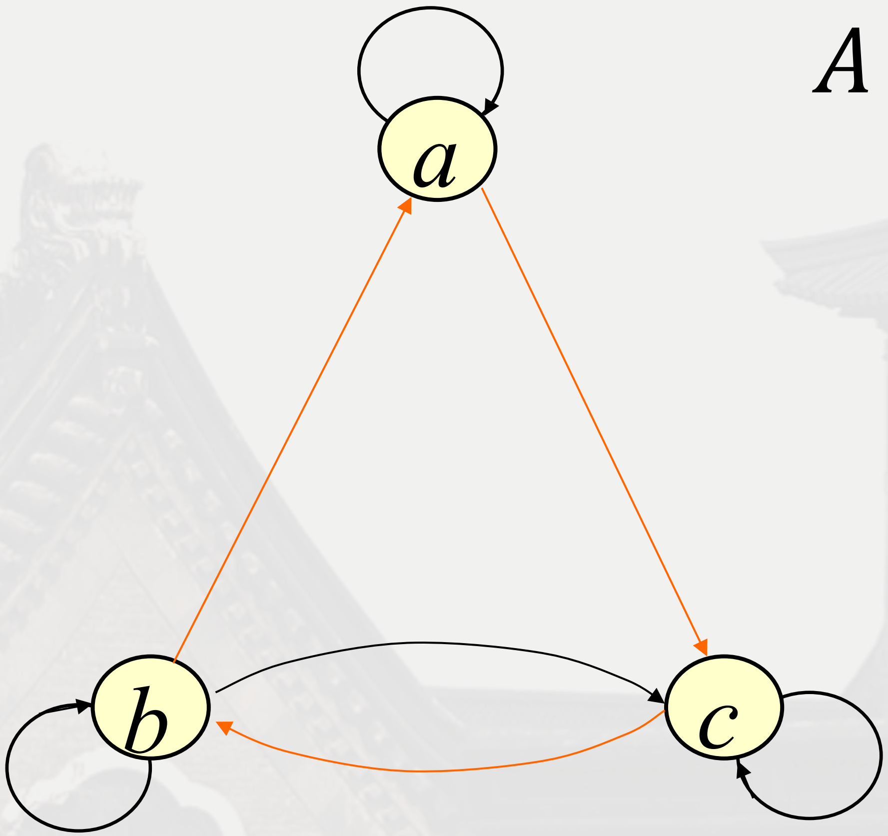
传递性与关系的乘幂

- 关系的复合(乘)运算满足结合律，可以用 R^n 表示

$$R \circ R \circ \cdots \circ R \quad (n\text{是正整数})$$

- 命题：$(a,b) \in R^n$ 当且仅当：存在$t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} \in A$, 满足：$(a,t_1),(t_1,t_2),\ldots,(t_{n-2},t_{n-1}),(t_{n-1},b) \in R$ 。
  - 对$n \geq 1$用数学归纳法：$n = 1$, trivial.
    奠基 $n = 2$,直接由关系复合的定义可得；
    归纳 基于：$R^n = R^{n-1} \circ R$
- 集合A上的关系R是传递关系 $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$
  - 必要性：$\Rightarrow$ 任取$(a,b) \in R^2$,根据上述命题以及R的传递性可得$(a,b) \in R$ 。
  - 充分性：$\Leftarrow$ 若$(a,b) \in R$, $(b,c) \in R$, 则$(a,c) \in R^2$, 由$R^2 \subseteq R$ 可得 $(a,c) \in R$，于是 R是传递关系。

传递关系的有向图和0-1矩阵



$$A = \{a, b, c\}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

一些常用关系的性质

	$=$	$\leq$	$<$	$\mid$	$\equiv_3$	$\emptyset$	E
自反	✓	✓	✗	✓	✓	✗	✓
反自反	✗	✗	✓	✗	✗	✓	✗
对称	✓	✗	✗	✗	✓	✓	✓
反对称	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✗
传递	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

关系运算与性质的保持

	自反	反自反	对称	反对称	传递
R_1^{-1}	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \cap R_2$	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \cup R_2$	✓	✓	✓	✗	✗
$R_1 \circ R_2$	✓	✗	✗	✗	✗

小结

- 关系：笛卡尔积的子集
- 关系的运算
  - 集合运算；复合运算；逆
- 0-1矩阵运算
- 关系的性质
  - reflexivity, ir-~; symmetry, anti-~; transitivity
  - 图特征；矩阵特征