03 系统的时域分析

微分和差分方程的构建和求解

如何描述一个系统

什么是系统
（如何描述系统）

系统的分析
（输出怎么变化）

利用冲激信号
进行探索（卷积）

通过递推公式得到
明确表达式

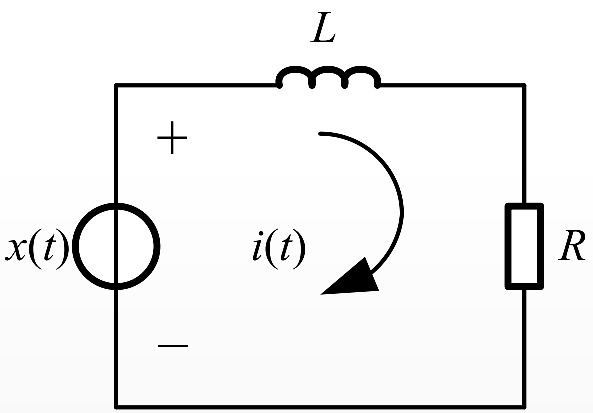
1. 微分方程：
针对连续时间系统

2. 差分方程：
针对离散时间系统

系统的时域分析

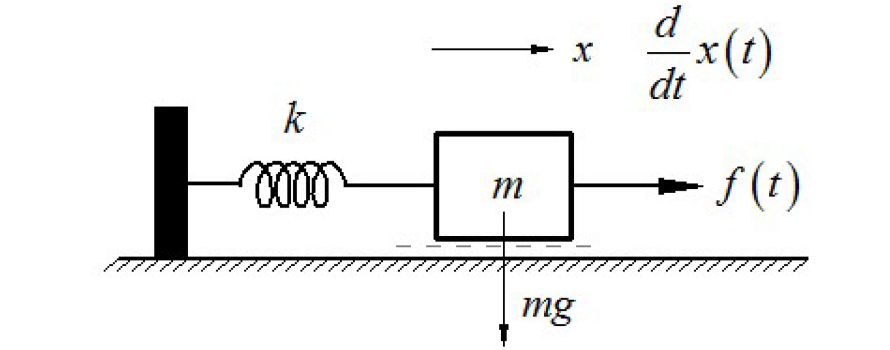
- 系统数学模型的时域表示
  - 端口（输入-输出）描述：一元N阶微分/差分方程

电路系统



$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+Ri(t)=x(t)$$

力学系统



$$\frac{d^2}{dt^2}x(t)+\frac{\mu}{m}\frac{d}{dt}x(t)+\frac{k}{m}x(t)=\frac{1}{m}f(t)$$

  - 状态方程描述：N元联立一阶微分/差分方程

微分方程

- 如果组成系统的原件都是参数恒定的**线性**元件，则相应的数学模型是一个**线性常系数常微分方程。**
- 若此时系统中各元件起始**无储能**，则构成一个线性**时不变**系统。
  - 微分方程（一般$N > M$）

$$
\begin{aligned}
&y^{(N)}(t) + a_{N-1}y^{(N-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) \\
&= b_M x^{(M)}(t) + b_{M-1}x^{(M-1)}(t) + \cdots + b_1 x'(t) + b_0 x(t)
\end{aligned}
$$

a_i, b_j为常数

$$
\frac{\mathrm{d}^N y(t)}{\mathrm{d}t^N} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{N-1} y(t)}{\mathrm{d}t^{N-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t)
$$

$$
= b_M \frac{\mathrm{d}^M x(t)}{\mathrm{d}t^M} + b_{M-1}\frac{\mathrm{d}^{M-1} x(t)}{\mathrm{d}t^{M-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx(t)}{\mathrm{d}t} + b_0 x(t)
$$

差分方程

案例一：空谷回声

- $x[n]$为当前时刻发出的声音， $y[n]$为当前时刻听到的声音，b_k刻画声音传播过程中的衰减

$$y[n] = x[n] + b_k x[n-k]$$

- 对于n时刻的输出仅仅和n之前时刻的输入相关的模型，称为MA (Moving Average)模型

案例二：银行理财

- 当前存款为$x[n]$，当前账户总额为$y[n]$，a_i为存款利率，则

$$y[n] = y[n-1] + a_i y[n-2] + x[n]$$

- 对于n时刻的输出仅仅和n之前时刻的输出相关的模型，称为AR (Auto Regressive)模型

差分方程

- （后向）线性常系数差分方程

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y[n-i] = \sum_{j=0}^{M} b_j x[n-j]$$

- 给定初始条件后，可使用**递推法**进行求解

- 一个线性时不变（LTI）系统可以用常系数微分方程或常系数差分方程描述。
- 但一个常系数微分方程或差分方程描述的系统**不一定是**线性时不变系统。

微分方程求解

- 微分方程

$$y^{(N)}(t)+a_{N-1}y^{(N-1)}(t)+\cdots+a_1y'(t)+a_0y(t)$$

$$=b_Mx^{(M)}(t)+b_{M-1}x^{(M-1)}(t)+\cdots+b_1x'(t)+b_0x(t)$$

的（完全）解由**齐次解$\boldsymbol{y_h(t)}$**和**特解$\boldsymbol{y_p(t)}$**构成。

- 求解步骤
  - 求**齐次解**：**输入**有关的各项全部为0时方程的解
  - 求**特解**：方程任意一个解
  - 借助初始条件求**待定系数**

求齐次解

- 当微分方程的激励项及其各阶导数都为零时，方程的解为**齐次解**

$$y^{(N)}(t)+a_{N-1}y^{(N-1)}(t)+\cdots+a_1y'(t)+a_0y(t)=0$$

- 齐次解为形如$Ae^{\alpha t}$函数的线性组合，令$y(t)=Ae^{\alpha t}$，代入有

$$A\alpha^N e^{\alpha t}+Aa_{N-1}\alpha^{N-1}e^{\alpha t}+\cdots+Aa_0e^{\alpha t}=0$$

化简为（特征方程）

$$\alpha^N+a_{N-1}\alpha^{N-1}+\cdots+a_0=0$$

具有N个特征根

$$\alpha_1,\ldots,\alpha_N$$

求齐次解

- 构建特征方程

$$\alpha^N + a_{N-1}\alpha^{N-1} + \cdots + a_0 = 0$$

- 求解N个特征根$\alpha_1, \dots, \alpha_N$，分情况讨论
  - 特征根各不相同（**无重根**），齐次解为

$$y_h(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + \cdots + A_N e^{\alpha_N t} = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{\alpha_i t}$$

  $A_1, A_2, \dots, A_N$为待定系数

  - 若有**共轭复根**$\alpha_1 = m + jn, \alpha_2 = m - jn$，则

$$\begin{aligned} y_h(t) &= A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} \\ &= e^{mt}\big((A_1 + A_2)\cos nt + (A_1 - A_2) j \sin nt\big) \end{aligned}$$

  齐次解为增长或衰减的正弦函数

求齐次解

- 构建特征方程

$$\alpha^N + a_{N-1}\alpha^{N-1} + \cdots + a_0 = 0$$

- 求解N个特征根$\alpha_1, \ldots, \alpha_N$，分情况讨论

  - 特征根**有重根**，设α_1为k阶重根，即

$$\alpha^N + a_{N-1}\alpha^{N-1} + \cdots + a_0 = (\alpha - \alpha_1)^k \prod_{i=2}^{N-k+1} (\alpha - \alpha_i)$$

齐次解为

$$y_h(t) = \boldsymbol{(A_1 t^{k-1} + A_2 t^{k-2} + \cdots + A_{k-1} t + A_k) e^{\alpha_1 t}} + A_2 e^{\alpha_2 t} + \cdots + A_{N-k+1} e^{\alpha_{N-k+1} t}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} A_i t^{k-i} \right) e^{\alpha_1 t} + \sum_{i=2}^{N-k+1} A_i e^{\alpha_i t}$$

$A_1, A_2, \ldots, A_N$为待定系数

求齐次解

求微分方程$y^{(3)}(t)+7y^{(2)}(t)+16y'(t)+12y(t)=x(t)$的齐次解

- 特征方程为

$$\alpha^3+7\alpha^2+16\alpha+12=0$$

$$(\alpha+2)^2(\alpha+3)=0$$

特征根为$\alpha_1=-2$ (重根), $\alpha_2=-3$

齐次解为

$$y_h(t)=(A_1t+A_2)e^{-2t}+A_3e^{-3t}$$

求特解

- **特解**的形式和**激励函数的形式**有关，通过代入激励函数，观察形式，代入微分方程求解待定系数

<table>
<tr><th>激励函数$x(t)$</th><th>响应函数$y(t)$的特解</th></tr>
<tr><td>常数</td><td>B</td></tr>
<tr><td>t^p</td><td>$B_1t^p + B_2t^{p-1} + \cdots + B_pt + B_{p+1}$</td></tr>
<tr><td>e^{at}</td><td>Be^{at}</td></tr>
<tr><td>$\cos(\omega t)$</td><td rowspan="2">$B_1\cos(\omega t) + B_2\sin(\omega t)$</td></tr>
<tr><td>$\sin(\omega t)$</td></tr>
<tr><td>$t^pe^{at}\cos(\omega t)$</td><td rowspan="2">$\left(B_1t^p + B_2t^{p-1} + \cdots + B_pt + B_{p+1}\right)e^{at}\cos(\omega t) +$
$\left(D_1t^p + D_2t^{p-1} + \cdots + D_pt + D_{p+1}\right)e^{at}\sin(\omega t) +$</td></tr>
<tr><td>$t^pe^{at}\sin(\omega t)$</td></tr>
</table>

- 若特解和齐次解重复，如均为e^{at}，则特解设为B_0te^{at}
- 若对应的特征根为二重根，齐次解为te^{at}，特解为$B_0t^2e^{at}$
- 若特解为0时刻加入，则微分方程的解区间为$0_+ \le t < \infty$

求特解

微分方程$y^{(2)}(t)+2y'(t)+3y(t)=x'(t)+x(t)$, 设$x(t)=t^2$，求特解

- 代入$x(t)$，右端为$2t+t^2$，设特解形式为

$$y_p(t)=B_1t^2+B_2t+B_3$$

- 代入得

$$3B_1t^2+(4B_1+3B_2)t+(2B_1+2B_2+3B_3)=t^2+2t$$

得$B_1=\frac{1}{3}, B_2=\frac{2}{9}, B_3=-\frac{10}{27}$

- 特解为$y_p(t)=\frac{1}{3}t^2+\frac{2}{9}t-\frac{10}{27}$

求特解

微分方程$y^{(2)}(t)+2y'(t)+3y(t)=x'(t)+x(t)$, 设$x(t)=e^{t}$，求特解

- 代入$x(t)$，右端为$2e^{t}$，设特解形式为

$$y_p(t)=Be^{t}$$

- 代入得

$$(B+2B+3B)e^{t}=2e^{t}$$

得$B=\frac{1}{3}$

- 特解为$y_p(t)=\frac{1}{3}e^{t}$

基于初始条件求待定系数

- 基于齐次解$y_h(t)$和特解$y_p(t)$构造完全解$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$，需借助**边界条件**确定齐次解中的待定系数。
  - 求解方程组，需要一组已知数据，确定待定系数

- 边界条件：
  - 给定某一时刻t_0，要求解满足$y(t_0), y'(t_0), \ldots, y^{N-1}(t_0)$处的各值（一般设该时刻为$t_0 = 0$）
  - 边界条件是t_0时的**瞬时**状态，将其作为已知数据，根据系统模型和$t > t_0$时的激励信号，即可求出t_0之后所有时刻的响应

微分方程求解

微分方程$y^{(2)}(t)+7y'(t)+6y(t)=6\sin(2t)$, $(t\geq 0)$, 边界条件为$y(0)=0, y'(0)=0$.

- 求**齐次解**，特征方程为

$$\alpha^2+7\alpha+6=(\alpha+1)(\alpha+6)=0$$

齐次解为$y_h(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-6t}$

- 求**特解**，设特解形式为

$$B_1\sin(2t)+B_2\cos(2t)$$

- 代入，得

$$y_p(t)=\frac{3}{50}\sin(2t)-\frac{21}{50}\cos(2t)$$

- **求待定系数**

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$$

$$=A_1e^{-t}+A_2e^{-6t}+\frac{3}{50}\sin(2t)-\frac{21}{50}\cos(2t)$$

根据初始条件，有

$$\begin{cases} A_1+A_2-\dfrac{21}{50}=0 \\ -A_1-6A_2+\dfrac{3}{25}=0 \end{cases}$$

得$A_1=\frac{12}{25}, A_2=-\frac{3}{50}$

求差分方程齐次解

- 当微分方程的激励项及其各阶导数都为零时，方程的解为**齐次解**

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y[n-i] = 0$$

- 齐次解为形如$C\alpha^n$函数的线性组合，令$y[n] = C\alpha^n$，代入有

$$a_N C\alpha^{n-N} + a_{N-1} C\alpha^{N-1} + \cdots + a_0 C\alpha^0 = 0$$

化简为（特征方程）

$$a_0\alpha^N + a_1\alpha^{N-1} + \cdots + a_N = 0$$

具有N个特征根

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_N$$

求齐次解

系统	连续时间系统	离散时间系统
方程	$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} x(t)$	$\sum_{i=0}^{N} a_i y[n-i] = \sum_{j=0}^{M} b_j x[n-j]$
齐次方程	$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} y_h(t) = 0$	$\sum_{i=0}^{N} a_i y_j[n-i] = 0$
特征方程	$\sum_{k=0}^{N} a_k \alpha^k = 0$	$\sum_{k=0}^{N} a_k \alpha^{N-k} = 0$
齐次解	α_i为单根，$y_h(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{\alpha_i t}$ α_j为k重根，$y_h(t)$中α_j对应项变为 $\left(\sum_{i=1}^{k} A_i t^{k-i}\right) e^{\alpha_j t}$	α_i为单根，$y_h[n] = \sum_{i=1}^{N} C_i \alpha_i^n$ α_j为k重根，$y_h[n]$中α_j对应项变为 $\left(\sum_{i=1}^{k} A_i n^{k-i}\right) \alpha_j^n$

求特解

<table>
<tr><td colspan="2">微分方程</td><td colspan="2">差分方程</td></tr>
<tr><td>激励函数$x(t)$</td><td>特解$y_p(t)$</td><td>激励函数$x[n]$</td><td>特解$y_p[n]$</td></tr>
<tr><td>常数</td><td>常数</td><td>常数</td><td>常数</td></tr>
<tr><td>t^p</td><td>$\sum_{i=0}^{p} B_i t^i$</td><td>n^k</td><td>$\sum_{i=0}^{k} C_i n^i$</td></tr>
<tr><td>$\cos(\omega t)$</td><td rowspan="2">$B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)$</td><td>$\cos[\omega n]$</td><td rowspan="2">$C_1 \cos[\omega n] + C_2 \sin[\omega n]$</td></tr>
<tr><td>$\sin(\omega t)$</td><td>$\sin[\omega n]$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">e^{at}</td><td>Be^{at}, a不是方程的特征根</td><td rowspan="3">a^n</td><td>Ca^n, a不是方程的特征根</td></tr>
<tr><td>$(B_1 t + B_2)e^{at}$, a是方程的特征单根</td><td>$(C_1 n + C_2)a^n$, a是方程的特征单根</td></tr>
<tr><td>$\sum_{i=0}^{k} B_i t^i e^{at}$
a是方程的k重特征根</td><td>$\sum_{i=0}^{k} C_i n^i$
a是方程的k重特征根</td></tr>
</table>

差分方程求解

激励信号$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n], y[-1]=0, y[-2]=1, y[-3]=\frac{1}{2}$, 求差分方程

$$y[n]+\frac{1}{3}y[n-1]-\frac{5}{9}y[n-2]+\frac{1}{9}y[n-3]=x[n]-x[n-1]$$

的完全响应

特征方程：$\alpha^3+\frac{1}{3}\alpha^2-\frac{5}{9}\alpha+\frac{1}{9}=0$

特征根：$\alpha_1=-1, \alpha_2=\alpha_3=\frac{1}{3}$

齐次解为：

$$y_h[n]=A_1(-1)^n+(A_2+A_3 n)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

设特解为$y_p[n]=C\left(\frac{1}{2}\right)^n$

代入，得$C=-3$

特解为：

$$y_p[n]=-3\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

差分方程求解

激励信号$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n], y[-1]=0, y[-2]=1, y[-3]=\frac{1}{2}$, 求差分方程

$$y[n]+\frac{1}{3}y[n-1]-\frac{5}{9}y[n-2]+\frac{1}{9}y[n-3]=x[n]-x[n-1]$$

的完全响应

激励信号在$\boldsymbol{n}=\mathbf{0}$**时刻**引入，令$n=0$有

$$y[0]+\frac{1}{3}y[-1]-\frac{5}{9}y[-2]+\frac{1}{9}y[-3]=x[0]-x[-1]$$

代入，得$\boldsymbol{y[0]=\frac{3}{2}, y[1]=-\frac{10}{9}, y[2]=\frac{103}{108}}$

完全解为：

$$y[n]=\frac{35}{12}(-1)^n+\left(\frac{109}{32}+\frac{25}{24}n\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n-3\left(\frac{1}{2}\right)^n, n\geq 0$$

初始松弛条件

- 一种特殊的边界条件（相当于激励信号加入时的零起始条件）：
  - 微分方程：若$x(t) = 0, t \le t_0$，可得$y(t) = 0, t \le t_0$，则对$t > t_0$的响应可以使用的初始条件为：

$$y(t_0) = y'(t_0) = \cdots = y^{(N-1)}(t_0) = 0$$

  - 差分方程：若$x[n] = 0, n \le n_0$，可得$y[n] = 0, n \le n_0$

- 若边界条件为初始松弛条件，则系统为因果、线性、时不变系统

自由响应与强迫相应

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

齐次解，自由响应

特解，强迫响应

- 自由响应：齐次解，反应系统的固有频率（本身的特性）
  - 齐次解的形式和激励信号无关，但待定系数和激励信号有关
- 强迫响应：特解，和激励函数形式有关

确定解的初始条件0_+

- 实际系统中，系统的初始条件要根据激励信号接入瞬时系统所处状态决定。由于激励信号作用，响应$y(t)$及其各阶导数可能在$t=0$处发生**跳变**（$\mathbf{0_- \to 0_+}$）。
- 系统状态：系统在$t=t_0$时刻的状态是一组必须要知道的最少量数据，根据这组数据、系统的数学模型、$t>t_0$接入的激励信号，就能完全确定t_0**以后任意时刻**系统的响应。对于n阶系统，这组数据由n个独立条件给定（如系统响应的各阶导数值）。
- 0_-状态：$y^{(n)}(0_-)=\left[y(0_-),y'(0_-),\ldots,y^{(n-1)}(0_-)\right];$
- 0_+状态：$y^{(n)}(0_+)=\left[y(0_+),y'(0_+),\ldots,y^{(n-1)}(0_+)\right]$

- 如何判断信号在0时刻输入是否发生改变（跳变）
  - 奇异函数匹配法
  - 差分方程迭代

系统的零输入响应和零状态响应

- **零输入响应**：无外加激励信号（输入信号为零），仅由系统的**起始状态（起始时刻系统储能）单独作用**而产生的响应，记为$y_{zi}(t)$;

$$y_{zi}^{(N)}(t)+a_{N-1}y_{zi}^{(N-1)}(t)+\cdots+a_1y_{zi}'(t)+a_0y_{zi}(t)=0$$

并符合$y^{(N)}(0_-)$约束，是齐次解的一部分

$$y_{zi}(t)=\sum_{k=1}^{N}A_{zik}e^{\alpha_k t}$$

由于从$t<0$到$t>0$没有激励，所以系统的状态在**0**点不会变化$y^{(N)}(0_-)$=$y^{(N)}(0_+)$

- **零状态响应**：不考虑系统起始时刻储能的作用（起始状态为0），由系统**外加激励信号所产生的响应**，记为$y_{zs}(t)$

$$y_{zs}^{(N)}(t)+a_{N-1}y_{zs}^{(N-1)}(t)+\cdots+a_1y_{zs}'(t)+a_0y_{zs}(t)=$$

$$=b_Mx^M(t)+b_{M-1}x^{(M-1)}(t)+\cdots+b_1x'(t)+b_0x(t)$$

并符合$y^{(N)}(0_-)=0$约束，包含齐次解（的一部分）和特解

无储能

$$y_{zs}(t)=\sum_{k=1}^{N}A_{zsk}e^{\alpha_k t}+B(t)$$

系统的零输入响应和零状态响应

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{N} A_k e^{\alpha_k t}}_{\text{自由响应}} + \underbrace{B(t)}_{\text{强迫响应}}$$

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{N} A_{zik} e^{\alpha_k t}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N} A_{zsk} e^{\alpha_k t} + B(t)}_{\text{零状态响应}}$$

- **自由响应和零输入响应都满足齐次方程的解，但系数不同**

  $y_{zi}(t)$的系数仅由起始储能情况决定，而y_h要同时依赖起始状态和激励信号

- 若起始无储能，则0_状态为0，$y_{zi}(t) = 0$，$y_h(t)$可以非零

- $y_{zi}(t)$由$0_- \rightarrow 0_+$不跳变，若有跳变则出现在$y_{zs}(t)$中

系统的响应

系统$y'(t)+3y(t)=3u(t)$，起始状态为$y(0_-)=\frac{3}{2}$，**无跳变**，求解自由响应和强迫响应。

- 特征方程$\alpha+3=0,\alpha=-3$，齐次解为Ae^{-3t}
- 激励信号为$u(t)$，特解为常数1
- 由于无跳变，则$y(0_+)=y(0_-)=\frac{3}{2}$
  - 求解待定系数$A=\frac{1}{2}$
- 自由响应：$y_h(t)=\frac{1}{2}e^{-3t}$，强迫响应：1
- 完全响应：$y(t)=\frac{1}{2}e^{-3t}+1$

系统的响应

系统$y'(t)+3y(t)=3u(t)$，起始状态为$y(0_-)=\frac{3}{2}$，**无跳变**，求解零输入响应和零状态响应。

- 求零输入响应：
  - 特征方程$\alpha+3=0, \alpha=-3$，齐次解为Ae^{-3t}
  - 根据初始条件$y(0_-)=\frac{3}{2}$，求得$A=\frac{3}{2}$
  - **零输入响应**：$y_{zi}(t)=\frac{3}{2}e^{-3t}$
- 求零状态响应：
  - 基于$y(0_-)=0$求 $Ae^{-3t}+1$的待定系数，得$A=-1$
  - **零状态响应：** $y_{zs}(t)=-e^{-3t}+1$
- 完全响应：$y(t)=\frac{1}{2}e^{-3t}+1$

系统的响应

系统$y'(t)+3y(t)=3u(t)$，起始状态为$y(0_-)=\frac{3}{2}$，**无跳变**，求解零输入响应和零状态响应。

- 求零输入响应：
  - 特征方程$\alpha+3=0,\alpha=-3$，齐次解为Ae^{-3t}
  - 根据初始条件$y(0_-)=\frac{3}{2}$，求得$A=\frac{3}{2}$

微分、差分方程的不足之处

1. 若微分（差分）方程右边激励项较复杂，则难以处理。

2. 若激励信号发生变化，则须全部重新求解。

3. 若初始条件发生变化，则须全部重新求解。

4. 这种方法是一种纯数学方法，无法突出系统响应的物理概念。

连续线性时不变系统的响应

- 响应时域求解方法
  - 经典法：求解微分、差分方程
  - 卷积法：系统**完全**响应 = 零输入响应 + 零状态响应

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = y_{zi}(t) + x(t) * h(t)$$

    - 求解齐次微分方程得到零输入响应
    - 利用卷积积分可求出零状态响应

利用卷积求解零状态响应

已知系统微分方程为：

$$y'(t) + 3y(t) = 2x(t)$$

系统的冲激响应 $h(t) = 2e^{-3t}u(t)$，$x(t) = 3u(t)$，试求系统的零状态响应$y_{zs}(t)$

- 求解卷积

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 3u(\tau) \cdot 2\mathrm{e}^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \begin{cases} \int_0^t 3 \cdot 2\mathrm{e}^{-3(t-\tau)}\mathrm{d}\tau & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2(1-\mathrm{e}^{-3t}) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = 2(1-\mathrm{e}^{-3t})u(t)$$

冲激响应求解

某离散**因果**线性时不变系统的差分方程为

$$y[n]+3y[n-1]+2y[n-2]=x[n]$$

求冲激响应$h[n]$

已知因果系统，因此

$$h[-1]=h[-2]=0$$

代入

$$h[0]+3h[-1]+2h[-2]=\delta[0]=1$$

$$h[1]+3h[0]+2h[-1]=\delta[1]=0$$

求得初始条件：$h[0]=1, h[1]=-3$

冲激响应对应差分方程

$$h[n]+3h[n-1]+2h[n-2]=\delta[n]$$

特征方程：$\alpha^2+3\alpha+2=0$

特征根: $\alpha_1=-1, \alpha_2=-2$

齐次解：$h[n]=C_1(-1)^n+C_2(-2)^n, n\geq 0$

代入初始条件，求解$C_1=-1, C_2=2$

冲激响应$h[n]=[-1(-1)^n+2(-2)^n]u[n]$