

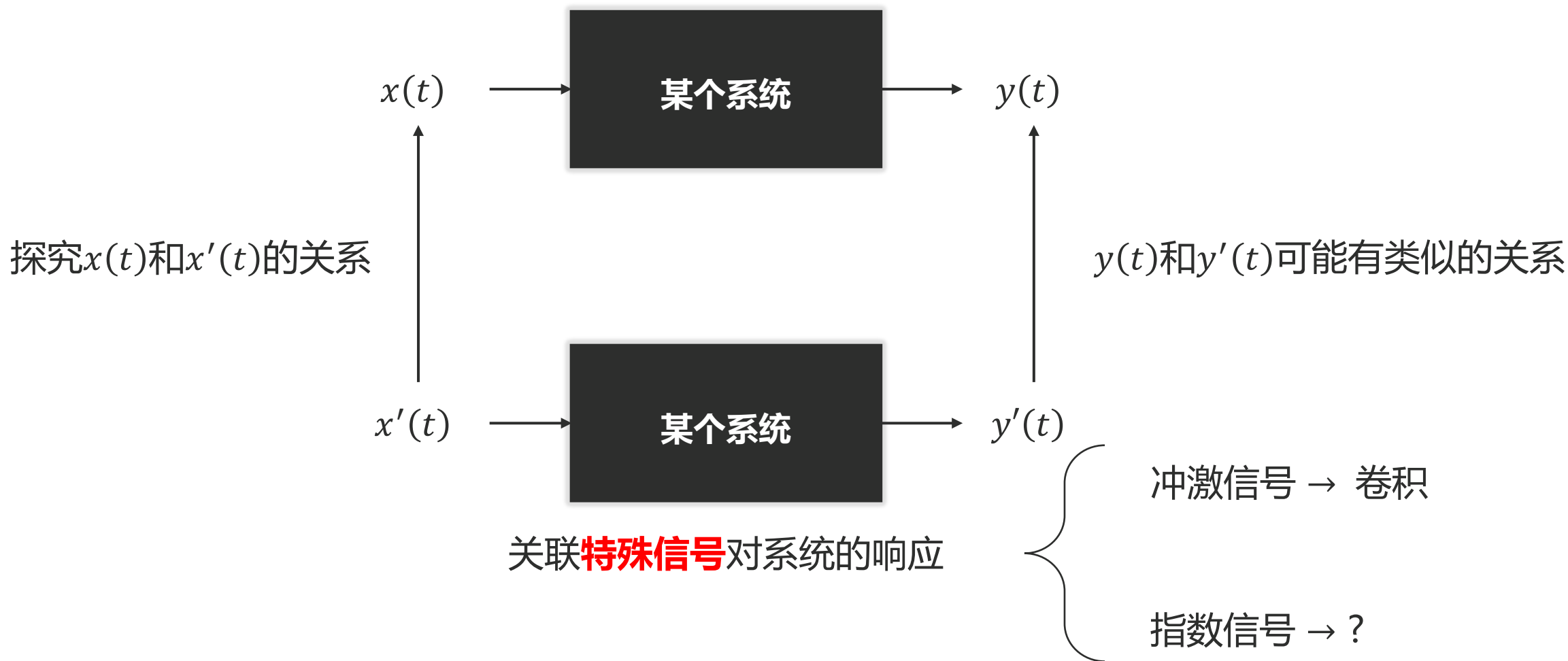
04 信号的傅里叶级数

如何从频率角度重构周期信号



如何探究一个系统

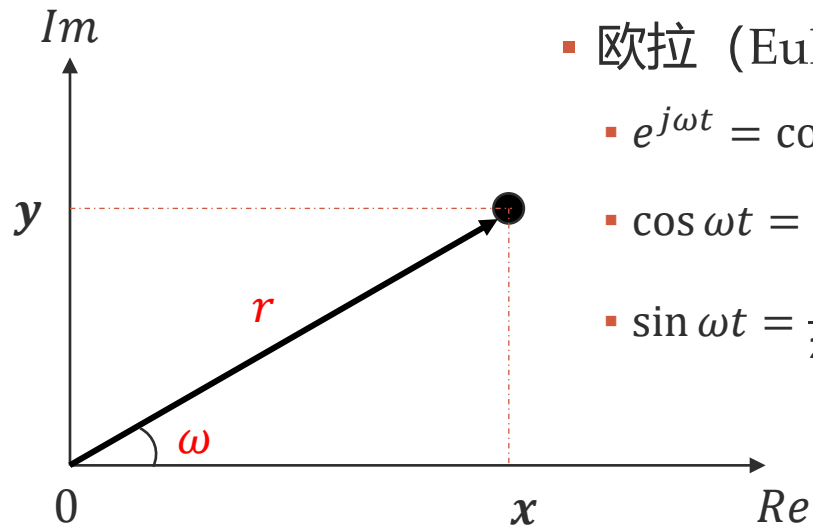
$x(t)$ 非常复杂，对于每个 $x(t)$ 都有不同的 $y(t)$ → 求解微分、差分方程



指数信号的特殊性

- 是线性时不变系统的特征信号

$$\begin{aligned}y(t) &= e^{j\omega t} * h(t) \\&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} h(\tau) d\tau \\&= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} h(\tau) d\tau \propto e^{j\omega t}\end{aligned}$$



- 欧拉 (Euler) 公式

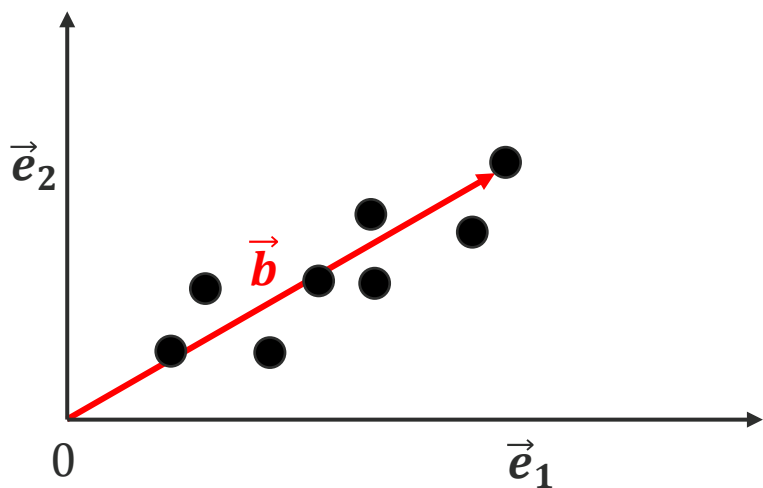
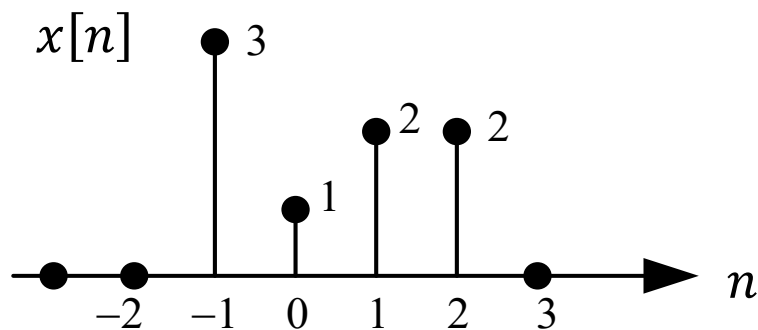
- $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$
- $\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$
- $\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$

指数信号，正弦（余弦）信号可能可以作为基信号

指数信号、正弦信号的表示能力

- 使用单位脉冲表示任意离散时间信号

$$x[n] = 3\delta[n+1] + \delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2]$$



$$\langle \sin, \cos \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \sin t \cos t dt = 0$$

- 三角级数构成**完备正交**函数集

- 在区间 $(t_0, t_0 + T)$ 上的完备正交集, 令 $\omega = \frac{2\pi}{T}$

- 三角函数

$$\{\cos n\omega t, \sin n\omega t\}, n = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

- 复指数函数

$$\{e^{jn\omega t}\}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$$

三角函数族的正交性

- 三角函数在区间 $(t_0, t_0 + T)$ 上的完备正交集, 令 $\omega = \frac{2\pi}{T}$
 $\{\cos n\omega t, \sin n\omega t\}, n = 0, 1, 2, \dots, \infty$

- 计算任意两个不同函数之间的内积:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos n\omega t \cdot \cos m\omega t \, dt &= 0, n \neq m \\ &\quad \searrow \frac{1}{2} [\cos(n+m)\omega t + \cos(n-m)\omega t] \\ \int_{t_0}^{t_0+T} \sin n\omega t \cdot \sin m\omega t \, dt &= 0, n \neq m \\ &\quad \searrow \frac{1}{2} [\cos(n-m)\omega t - \cos(n+m)\omega t] \\ \int_{t_0}^{t_0+T} \sin n\omega t \cdot \cos m\omega t \, dt &= 0 \\ &\quad \searrow \frac{1}{2} [\sin(n+m)\omega t + \sin(n-m)\omega t] \end{aligned}$$

- 函数的模为 $\|\sin n\omega t\|_2^2 = \|\cos n\omega t\|_2^2 = \frac{T}{2}$

指数函数族的正交性

- 复指数函数在区间 $(t_0, t_0 + T)$ 上的完备正交集, 令 $\omega = \frac{2\pi}{T}$
 $\{e^{jn\omega t}\}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm\infty$

- 计算任意两个不同函数之间的内积:

$$\begin{aligned}\langle e^{jn\omega t}, e^{jm\omega t} \rangle &= \int_{t_0}^{t_0+T} e^{jn\omega t} \cdot e^{-jm\omega t} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j(n-m)\omega t} dt = \begin{cases} T, n = m \\ 0, n \neq m \end{cases}\end{aligned}$$

通过指数信号、正弦（余弦）信号构造正交基信号，用来表示周期信号

概要

1. 傅里叶级数的定义：

指数、正弦正交基
表示一般信号

2. 傅里叶级数和频域：

傅里叶级数怎么理解

3. 傅里叶级数的计算：

傅里叶级数的计算方法和性质

4. 系统函数：

傅里叶级数和系统的关系

概要

1. 傅里叶级数的定义：
指数、正弦正交基
表示一般信号

2. 傅里叶级数和频域：
傅里叶级数怎么理解

3. 傅里叶级数的计算：
傅里叶级数的计算方法和性质

4. 系统函数：
傅里叶级数和系统的关系

基于三角函数族、指数函数族的分解

三角函数族的分解

- 基函数集: $\{\cos n\omega t, \sin n\omega t\}, n = 0, 1, 2, \dots, \infty$

- 分解系数:

$$a_0 = \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$$

$$a_n = \frac{\langle x, \cos n\omega t \rangle}{\langle \cos n\omega t, \cos n\omega t \rangle} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos n\omega t dt$$

$$b_n = \frac{\langle x, \sin n\omega t \rangle}{\langle \sin n\omega t, \sin n\omega t \rangle} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin n\omega t dt$$

- 函数表示

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

指数函数族的分解

- 基函数集: $\{e^{jn\omega t}\}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm\infty$

- 分解系数:

$$X_n = \frac{\langle x, e^{jn\omega t} \rangle}{\langle e^{jn\omega t}, e^{jn\omega t} \rangle} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt$$

- 函数表示

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n (\cos n\omega t + j \sin n\omega t) \end{aligned}$$

基于三角函数族、指数函数族的分解

■ 指数函数族分解

$$X_n = \frac{\langle x, e^{jn\omega t} \rangle}{\langle e^{jn\omega t}, e^{jn\omega t} \rangle} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot (\cos n\omega t - j \sin n\omega t) dt = \frac{1}{2} a_n - \frac{j}{2} b_n$$

$$X_n^* = \frac{1}{2} a_n + \frac{j}{2} b_n$$

$$a_n = \frac{\langle x, \cos n\omega t \rangle}{\langle \cos n\omega t, \cos n\omega t \rangle} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos n\omega t dt$$

$$b_n = \frac{\langle x, \sin n\omega t \rangle}{\langle \sin n\omega t, \sin n\omega t \rangle} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin n\omega t dt$$

傅里叶变换的发展历程



Leonhard Paul Euler

Euler在研究声波传播时发现可以将传播函数分解为多个正弦信号之和

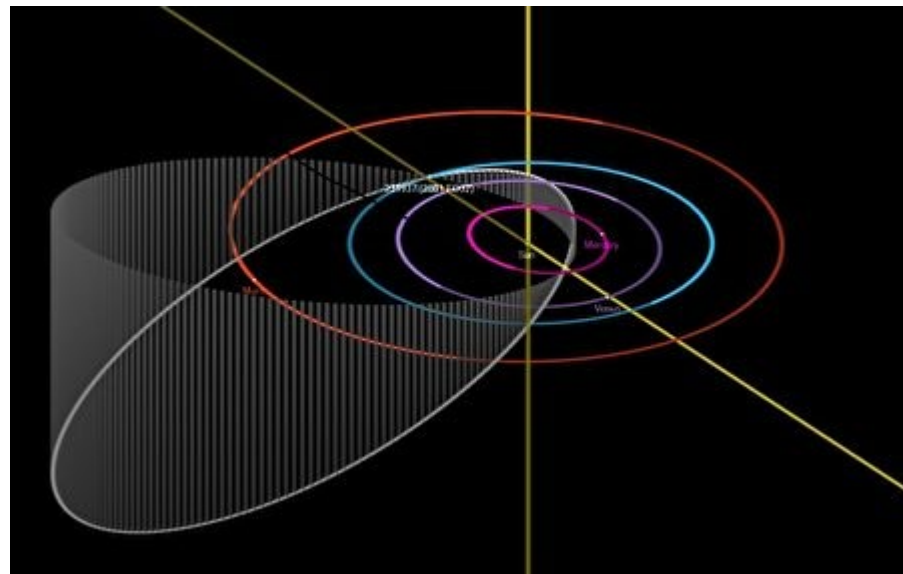


Joseph-Louis
Lagrange

Lagrange发展了Euler思想，将这一分解用于天体轨道的观察和预测中

$$f(x) = \sum_k a_k \cos(2\pi kx)$$

Lagrange使用轨道位置拟合 $\{a_k\}$ ，从而预测运行轨道。



对于不连续的“信号”还能否用三角函数进行分解？

傅里叶变换的发展历程

1822 年在代表作《热的分析理论》中解决了热在非均匀加热的固体中分布传播问题，成为分析学在物理中应用的最早例证之一，对19世纪数学和理论物理学的发展产生深远影响。



Joseph Fourier



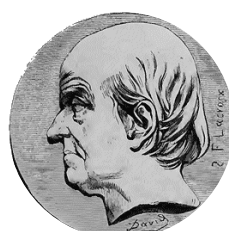
Gaspard Monge



Pierre-Simon
Laplace



Joseph-Louis
Lagrange



Sylvestre François
Lacroix



Peter Gustav
Lejeune Dirichlet



Joseph Willard
Gibbs

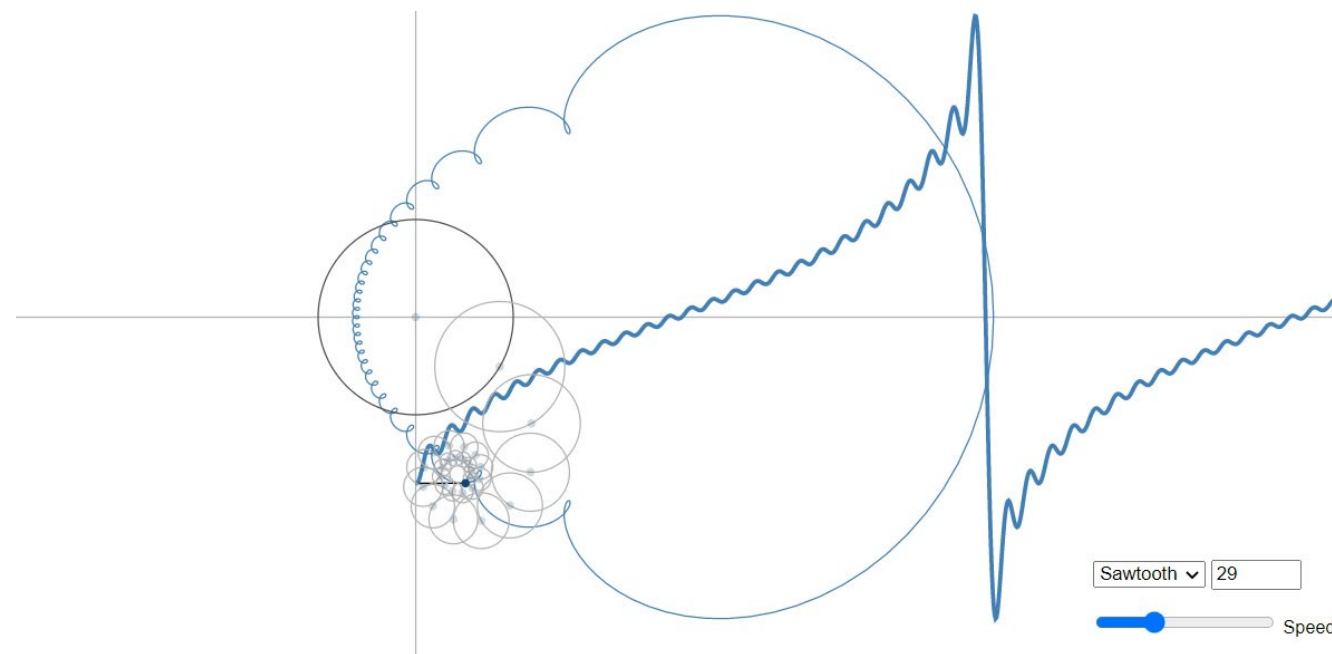
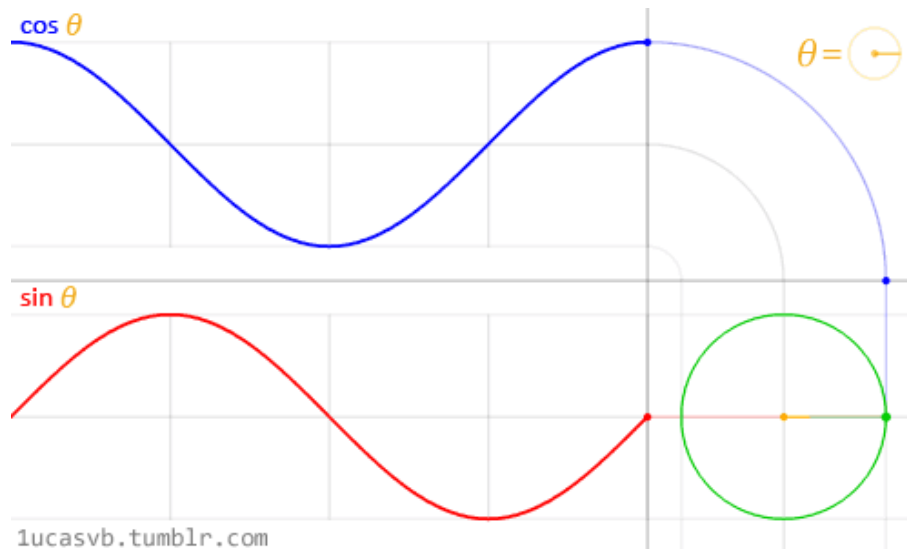
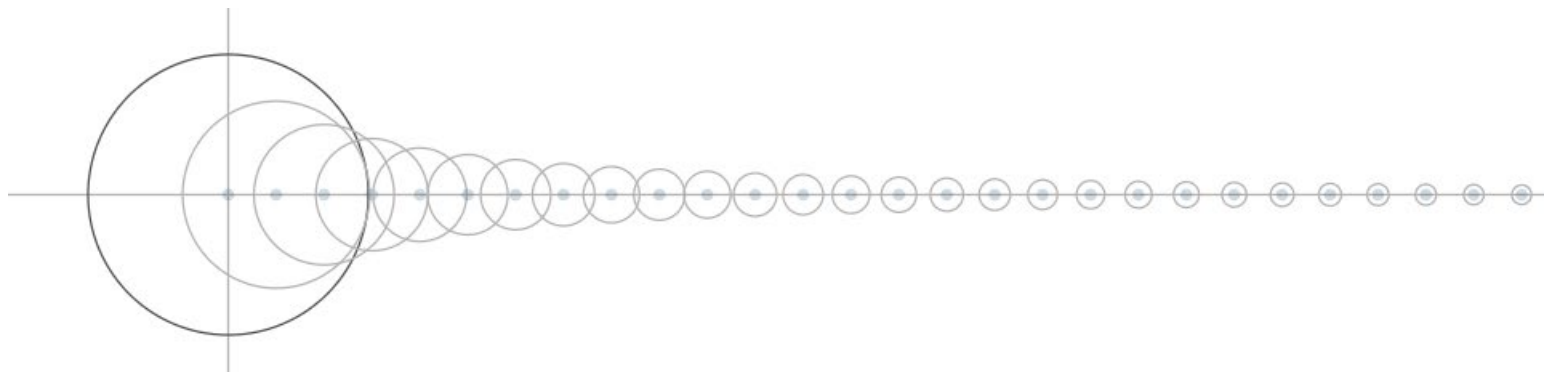
法国数学家、物理学家

Fourier于1807年向巴黎科学院呈交《热的传播》论文，推导出著名的热传导方程，并在求解该方程时发现解函数可以由三角函数构成的级数形式表示，从而提出任一函数都可以展成三角函数的无穷级数。

1829年Dirichlet给出傅里叶级数收敛的精确条件（针对信号不连续情况）

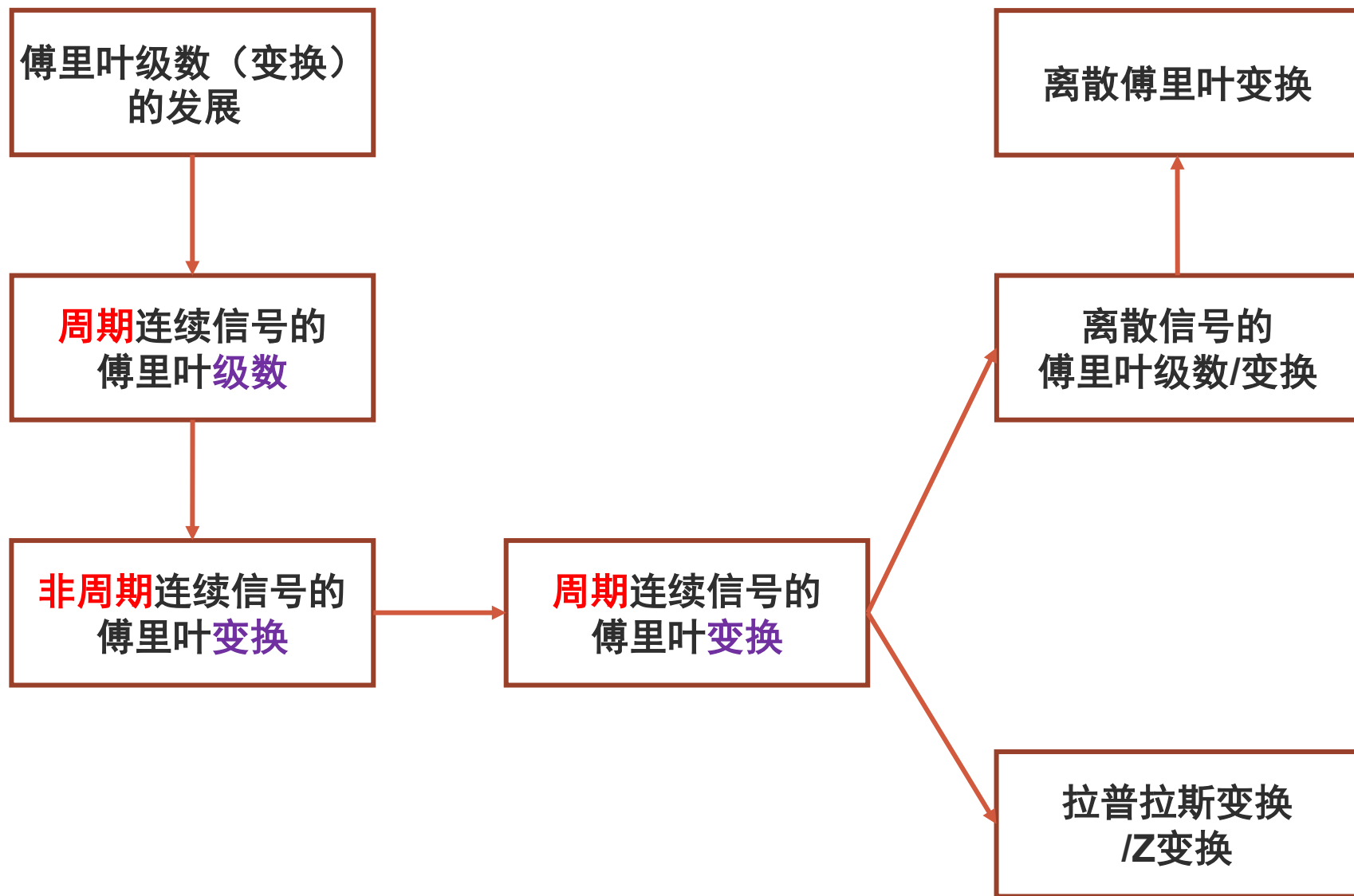
1899 Gibbs给出针对跳变信号处9%震荡的“吉布斯现象”

正弦函数的研究



<https://bl.ocks.org/jinroh/7524988>

傅里叶变换部分的思路



概要

1. 傅里叶级数的定义:

指数、正弦正交基
表示一般信号

2. 傅里叶级数和频域:

傅里叶级数怎么理解

3. 傅里叶级数的计算:

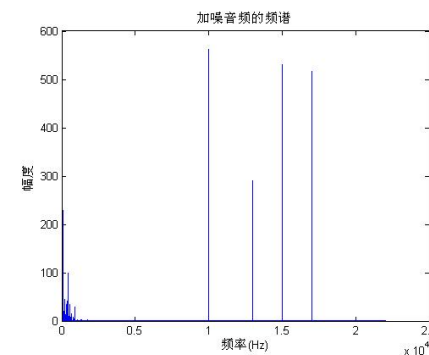
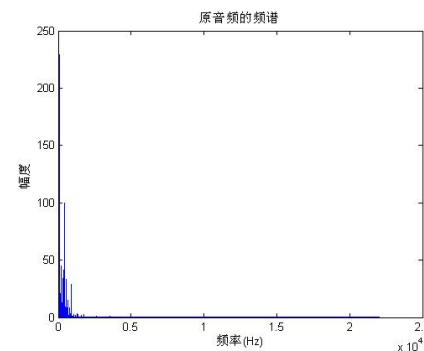
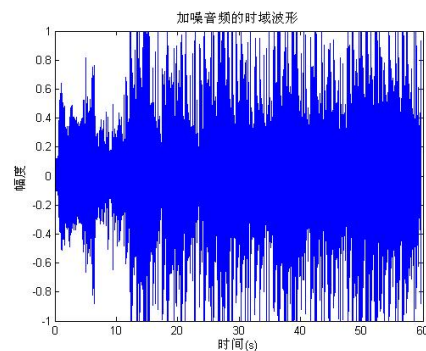
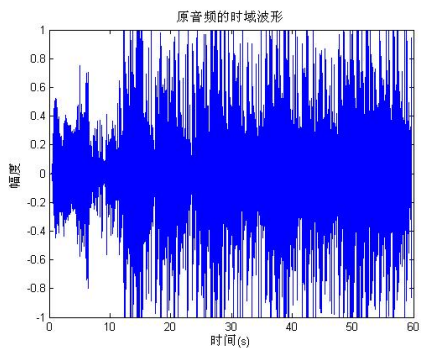
傅里叶级数的计算方法和性质

4. 系统函数:

傅里叶级数和系统的关系

时域 vs. 频域

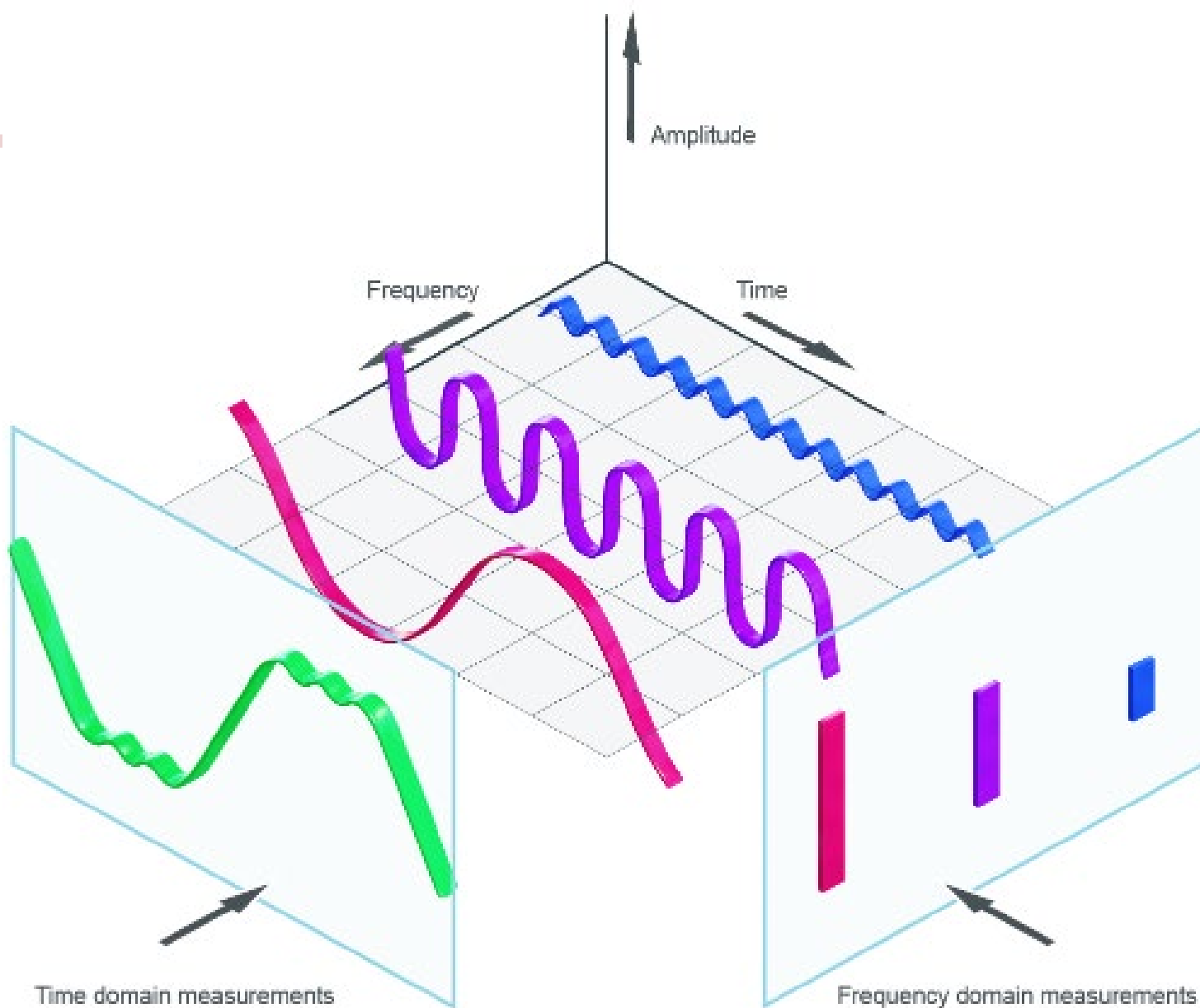
- 频域将信号表示为不同频率正弦分量的线性组合
 - 从**信号**分析的角度，将信号表示为不同频率正弦分量的线性组合，为不同信号之间进行比较提供了途径。
- 从**系统**分析角度，已知单频正弦信号激励下的响应，利用迭加特性可求得多个不同频率正弦信号同时激励下的总响应,及每个正弦分量通过系统后的变化。



时域 vs. 频域

- 时域：时间 – 幅度

- 频域：频率 – 幅度



周期信号的傅里叶级数（三角形式）

- 信号（函数）的傅里叶级数表示

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

- 直流分量：

$$a_0 = \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$$

- 余弦分量：

$$a_n = \frac{\langle x, \cos n\omega t \rangle}{\langle \cos n\omega t, \cos n\omega t \rangle} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos n\omega t dt = a_{-n}$$

- 正弦分量：

$$b_n = \frac{\langle x, \sin n\omega t \rangle}{\langle \sin n\omega t, \sin n\omega t \rangle} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin n\omega t dt = -b_{-n}$$

周期信号的傅里叶级数（三角形式）

- 信号（函数）的傅里叶级数表示

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos n\omega t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin n\omega t dt$$

$$c_0 = a_0$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$b_n = -c_n \sin \varphi_n, a_n = c_n \cos \varphi_n$$

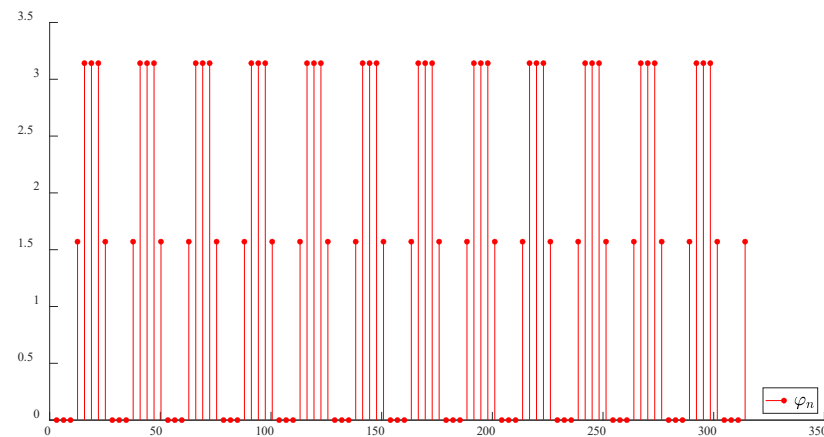
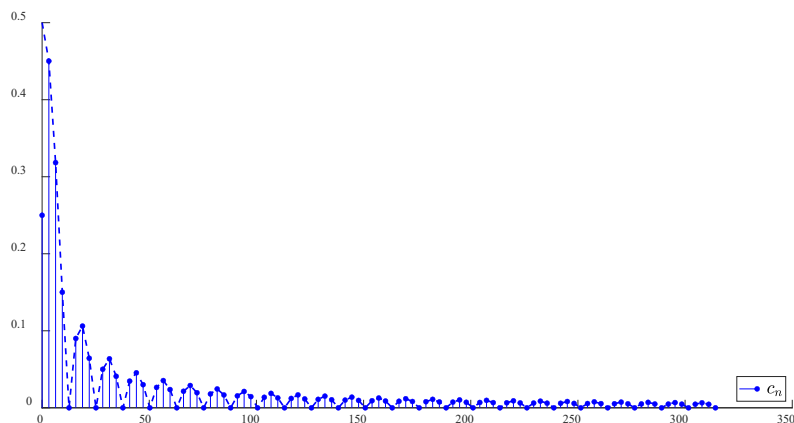
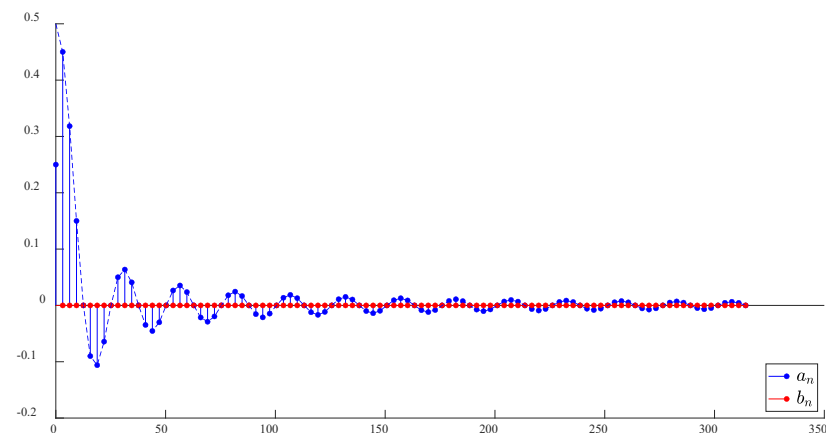
$$\tan \varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}$$

- c_0 为信号的直流分量
- $c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$ 为 n 次谐波分量
- 正弦、余弦分量的频率为基频 $f = 1/T$ 的整数倍

周期信号的傅里叶级数（三角形式）

■ 信号（函数）的傅里叶级数表示

- 离散
- 谐波
- 衰减



周期信号的傅里叶级数（指数形式）

- 周期信号 $x(t)$ 可以分解为不同频率虚指数信号之和

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega t}$$

合成（synthesis）公式

- 分量

$$X_n = \frac{\langle x, e^{jn\omega t} \rangle}{\langle e^{jn\omega t}, e^{jn\omega t} \rangle} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt$$

分析（analysis）公式

- $n = \pm 1$ ，两项的基波频率为 ω ，两项合起来称为信号的**基波**分量
- $n = \pm 2$ ，两项的基波频率为 2ω ，两项合起来称为信号的2次谐波分量
- $n = \pm N$ ，两项的基波频率为 $N\omega$ ，两项合起来称为信号的 N 次谐波分量

周期信号的傅里叶级数（指数形式）

- 周期信号 $x(t)$ 可以分解为不同频率虚指数信号之和

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega t}$$

- 分量

$$X_n = \frac{\langle x, e^{jn\omega t} \rangle}{\langle e^{jn\omega t}, e^{jn\omega t} \rangle} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot (\cos n\omega t - j \sin n\omega t) dt = \frac{1}{2} a_n - \frac{j}{2} b_n$$

$$\begin{aligned} X_0 &= c_0 = a_0, & X_{-n} &= \frac{1}{2} a_n + \frac{j}{2} b_n, & |X_n| &= \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ a_n &= X_n + X_{-n}, & b_n &= j(X_n - X_{-n}), & c_n &= |X_n| + |X_{-n}| \end{aligned}$$

周期信号的傅里叶级数（指数形式）

- 周期信号 $x(t)$ 可以分解为不同频率虚指数信号之和

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega t}$$

- 分量

$$X_n = \frac{\langle x, e^{jn\omega t} \rangle}{\langle e^{jn\omega t}, e^{jn\omega t} \rangle} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt$$

- 不同的时域信号，只是傅里叶级数的系数 X_n 不同，因此通过研究傅里叶级数的系数来研究信号的特性。
- X_n 是频率的函数，它反映了组成信号各次谐波的幅度和相位随频率变化的规律，称频谱函数。

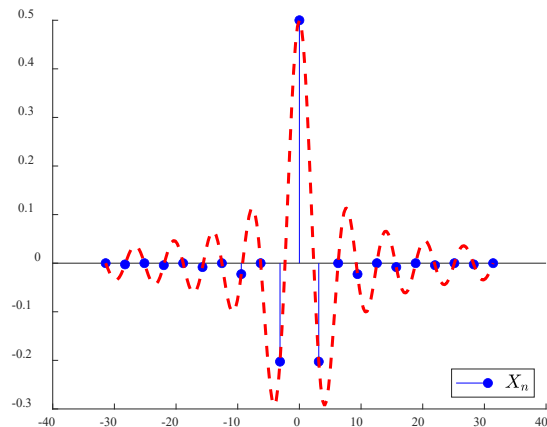
周期信号的傅里叶级数（指数形式）

- 周期信号 $x(t)$ 可以分解为不同频率虚指数信号之和

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega t}$$

- 分量

$$X_n = \frac{\langle x, e^{jn\omega t} \rangle}{\langle e^{jn\omega t}, e^{jn\omega t} \rangle} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt = |X_n| e^{j\varphi_n}$$



- 双边频谱（包络线是三角频谱高度的一半）
- 负频率是计算的结果，没有实际物理意义

周期信号的傅里叶级数收敛条件

■ 收敛

- 分析公式中的积分不收敛（系数无穷大）
- 代入系数后，无法收敛于（重构）原始信号

■ 所有连续信号都有傅里叶级数表示

■ 大多数不连续信号也有类似性质

■ 能量条件

- 周期信号 $x(t)$ 在一个周期内的能量

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < \infty$$

有限

- 能量有限不代表重构的信号和 $x(t)$ 在每一个 t 值上都相等，只说明二者在能量上没有差异

■ 波形条件

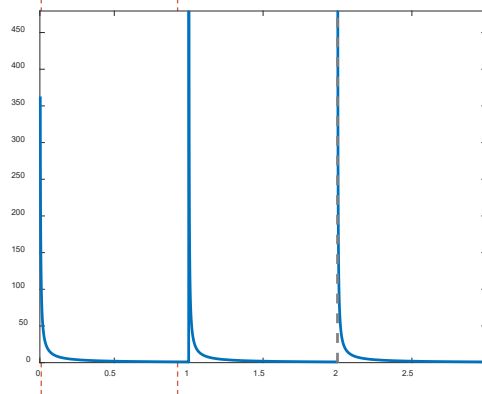
- (1) 在一个周期内绝对可积，即满足 $\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)| dt < \infty$
- (2) 在一个周期内只有有限个有限的不连续点；
- (3) 在一个周期内只有有限个极大值和极小值。

周期信号的傅里叶级数收敛条件

- Dirichlet条件（波形条件）

- （1）【充分非必要条件】在一个周期内绝对可积，即满足 $\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)| dt < \infty$
- （2）【必要非充分条件】在一个周期内只有有限个有限的不连续点；
- （3）【必要非充分条件】在一个周期内只有有限个极大值和极小值。
- 在 $x(t)$ 不连续点处，傅里叶级数重构信号收敛于不连续点两边的平均值

$$x(t) = \frac{1}{t}, (0 < t < T)$$

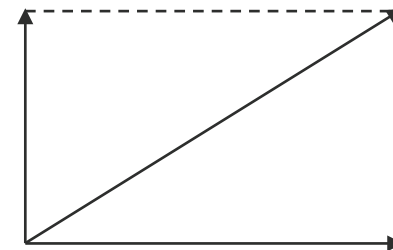


帕塞瓦尔定理

- 时域和频域能量/功率守恒定理

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x^2(t)| dt$$

$$= a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = c_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2$$



- 物理意义：任意周期信号的平均功率等于信号所包含的直流、基波以及各次谐波的平均功率之和。
- 周期信号的功率频谱： $|X_n|^2$ 随 $n\omega$ 分布情况称为周期信号的功率频谱，简称功率谱。

概要

1. 傅里叶级数的定义:

指数、正弦正交基
表示一般信号

2. 傅里叶级数和频域:

傅里叶级数怎么理解

3. 傅里叶级数的计算:

傅里叶级数的计算方法和性质

4. 系统函数:

傅里叶级数和系统的关系

傅里叶级数的对称特性

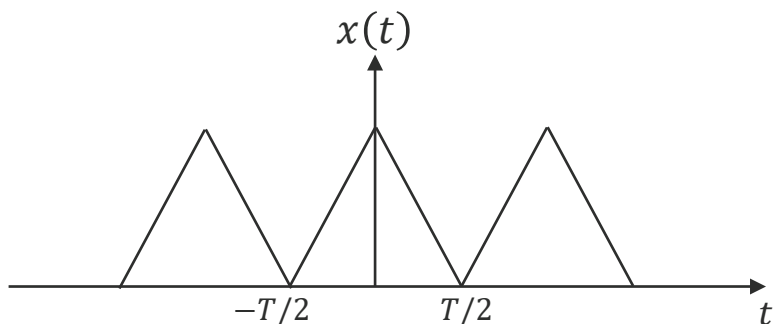
- 偶信号: $x(t) = x(-t)$
 - 傅里叶级数展开式中只含有直流项与余弦项

- $a_0 = X_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x(t) dt$

- $a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos n\omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos n\omega t dt \quad (n \neq 0)$

- $b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin n\omega t dt = 0$

- $X_n = X_{-n} = \frac{a_n}{2} \quad (n \geq 1)$



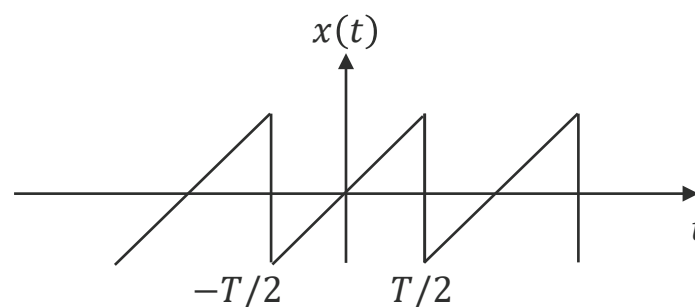
- 奇信号: $-x(t) = x(-t)$
 - 傅里叶级数展开式中只含有正弦项。

- $a_0 = X_0 = 0$

- $a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos n\omega t dt = 0$

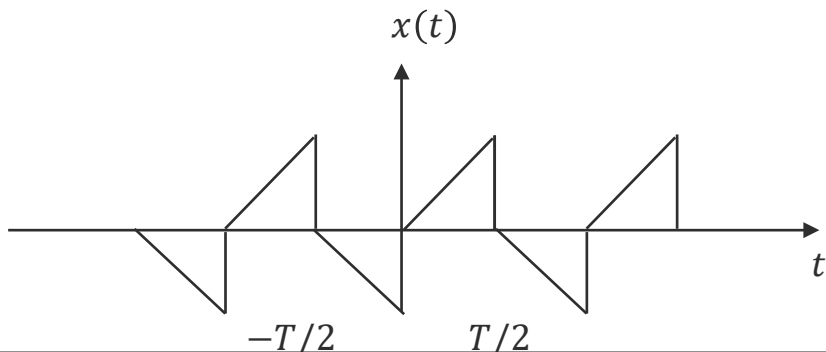
- $b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin n\omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin n\omega t dt \quad (n \geq 1)$

- $X_n = X_{-n} = -j \frac{b_n}{2} \quad (n \geq 1)$

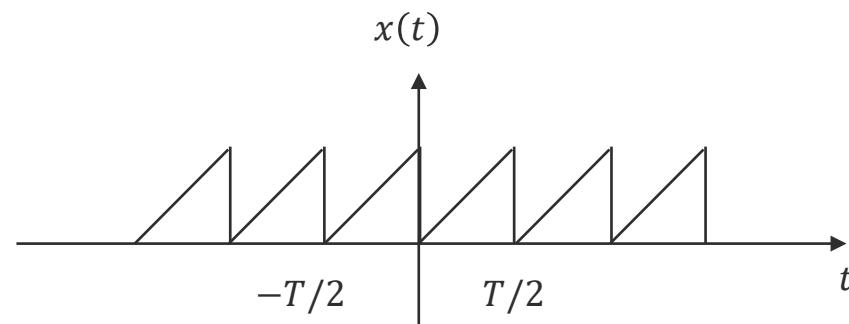


傅里叶级数的对称特性

- 奇谐（半波镜像）信号： $x(t) = -x\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$
 - 只含有正弦与余弦的奇次谐波分量，而无直流分量与偶次谐波分量。
 - $a_0 = X_0 = 0$; $a_n = b_n = 0$, n 为偶数
 - $a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos n\omega t dt$, n 为奇数
 - $b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin n\omega t dt$, n 为奇数
 - $X_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$, n 为奇数

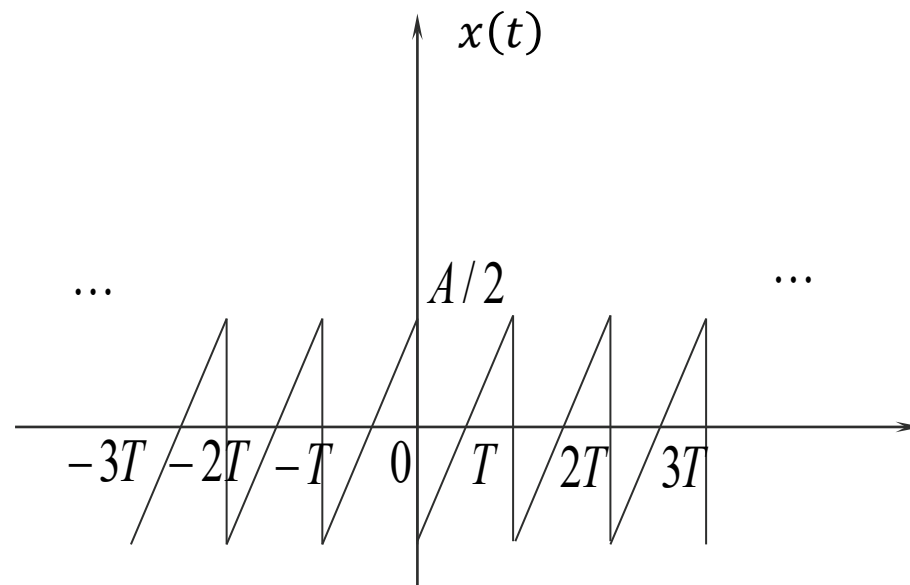
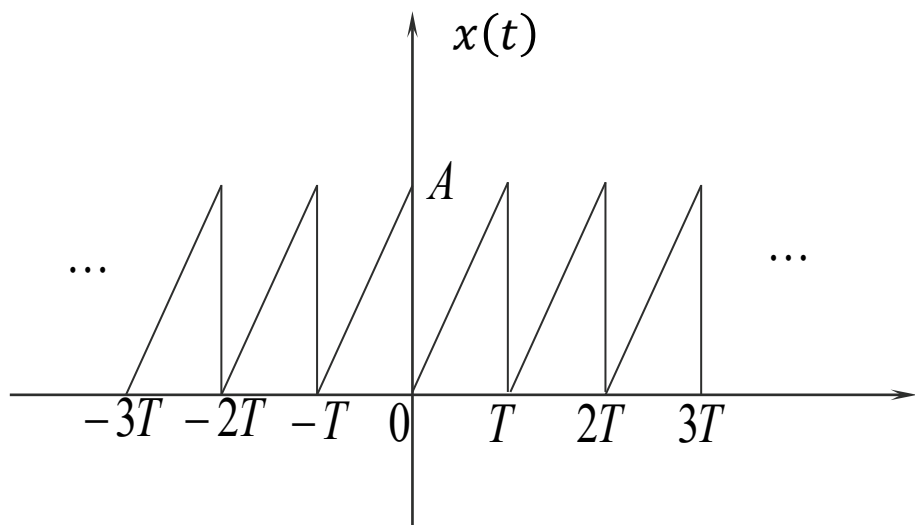


- 偶谐（半波重叠）信号 $x(t) = x\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$
 - 半波重叠周期信号只含有正弦与余弦的偶次谐波分量，而无奇次谐波分量



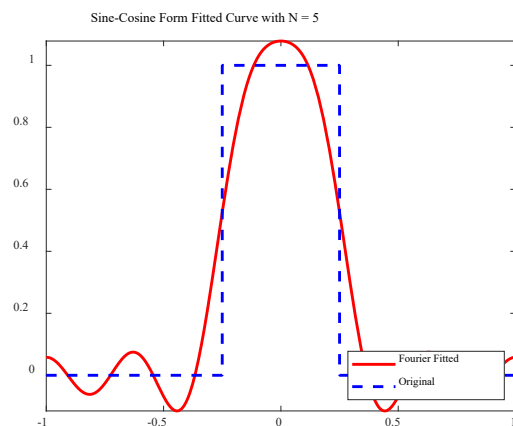
傅里叶级数的对称特性

- 某些信号波形经上下或左右平移后，才呈现出某种对称特性
 - 去掉直流分量后，信号呈奇对称，只含有正弦各次谐波分量。
 - 因此该信号含有正弦各次谐波分量，直流分量。

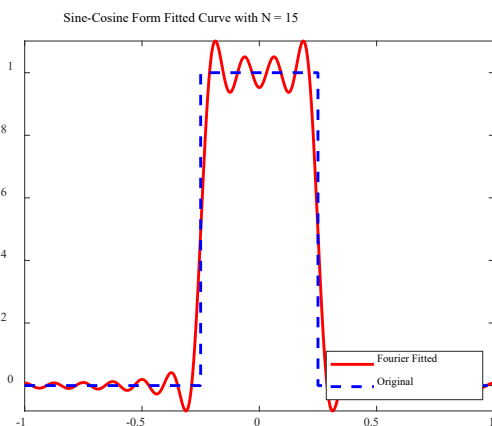


吉布斯（Gibbs）现象

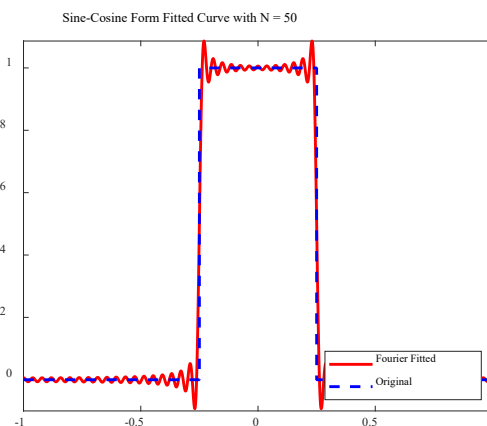
- 用**有限次**谐波分量来近似原信号，在**不连续点**出现过冲，过冲峰值不随谐波分量增加而减少，随 N 增大而**趋于一个常数**，约等于总跳变值的9%。
- 吉布斯现象产生原因
 - 时间信号存在跳变破坏了信号的收敛性，使得在间断点傅里叶级数出现非一致收敛。



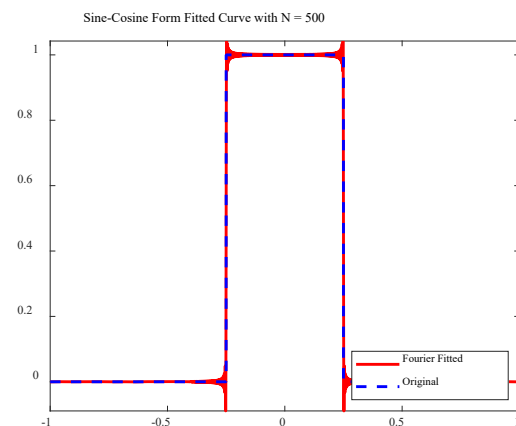
$N=5$



$N=15$



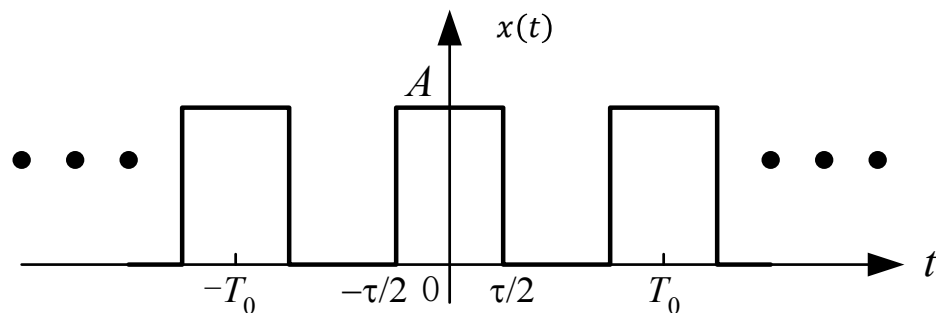
$N=50$



$N=500$

傅里叶级数计算

计算图示周期矩形脉冲信号的傅里叶级数展开式



$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$Sa(x) = \frac{\sin x}{x}$$

■ 直流分量:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{A\tau}{T}$$

■ 正弦余弦分量

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos n\omega t dt = \frac{2A}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos n\omega t dt = \frac{4A}{Tn\omega} \sin \frac{n\omega\tau}{2} = \frac{2A}{n\pi} \sin \frac{\pi n\tau}{T} = \frac{2A\tau}{T} Sa\left(\frac{\pi n\tau}{T}\right)$$
$$b_n = 0$$

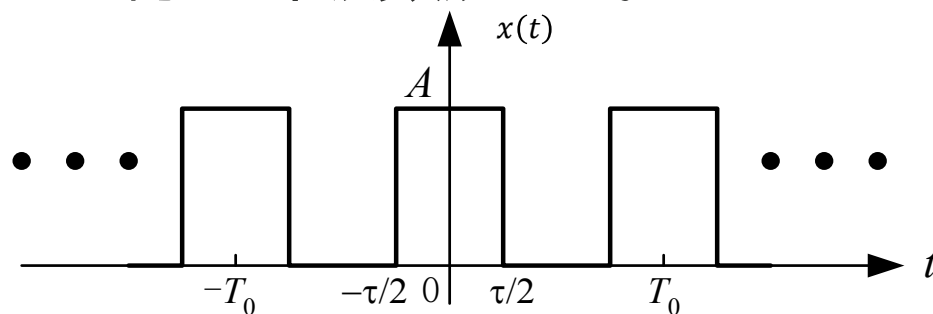
$$x(t) = \frac{A\tau}{T} + \frac{2A\tau}{T} \sum_{n=1}^{\infty} Sa\left(\frac{\pi n\tau}{T}\right) \cos n\omega t$$

若 $\tau = T/2$, 则

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \dots \right)$$

傅里叶级数计算

计算图示周期矩形脉冲信号的傅里叶级数展开式。



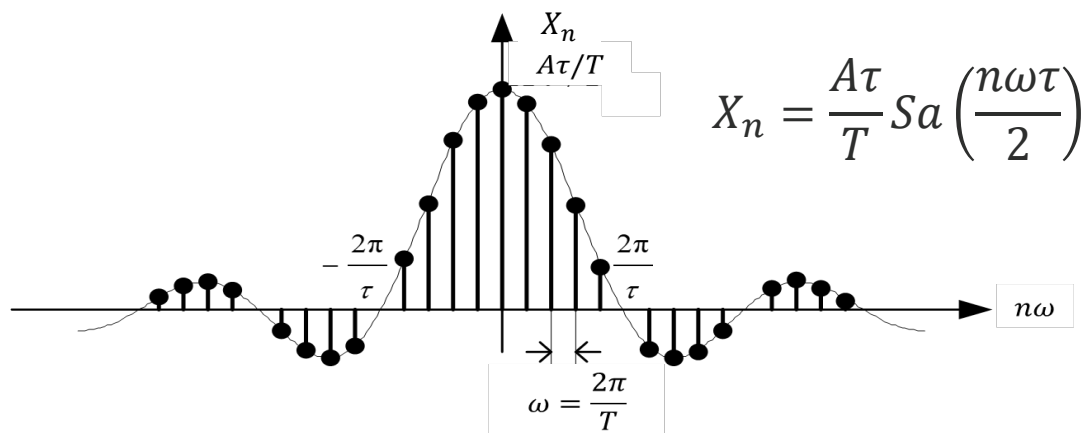
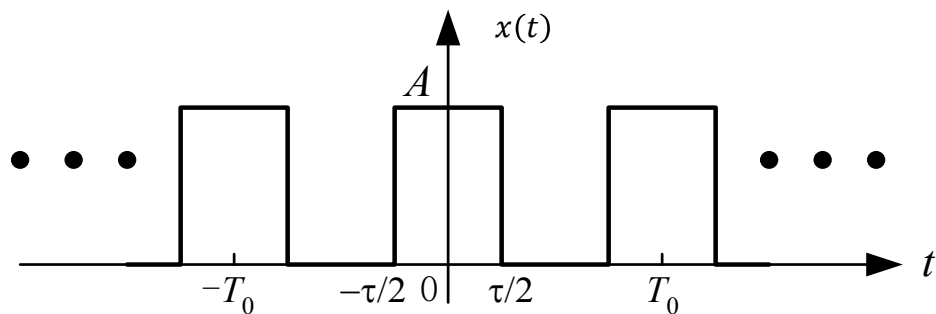
▪ 指数分量

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \cdot e^{-jn\omega t} dt = \frac{A\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right)$$

$$x(t) = \frac{A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right) e^{jn\omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

傅里叶级数计算

- 周期信号的频谱是由间隔为 ω 的谱线组成的。
 - 信号周期 T 越大， ω 就越小，则谱线越密。反之， T 越小， ω 越大，谱线则越稀疏。
 - 当周期信号的幅度频谱随着谐波 $n\omega$ 增大时，幅度频谱 $|X_n|$ 不断衰减，并最终趋于零。



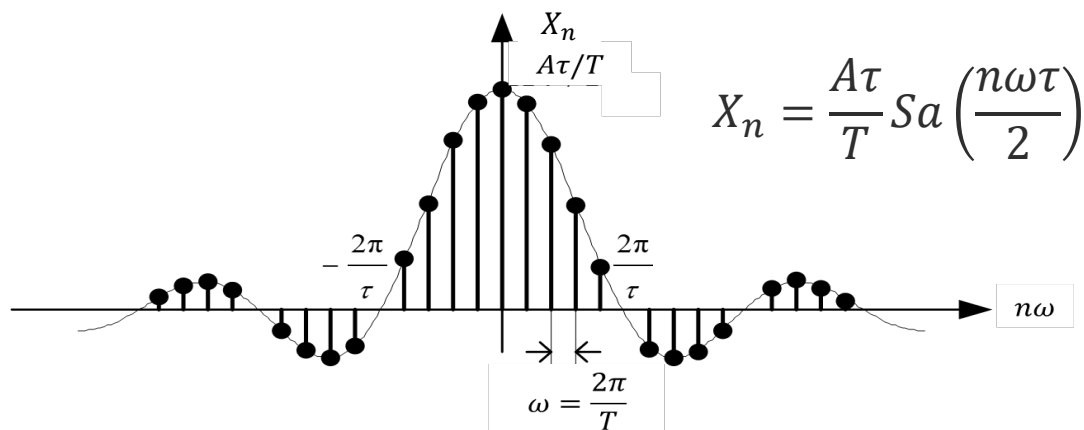
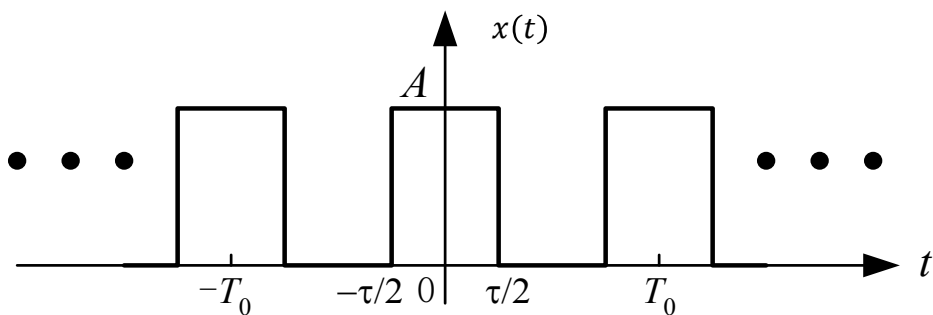
离散频谱特性

- 信号的有效带宽

- $0 \sim 2\pi/\tau$ 这段频率范围称为周期矩形脉冲信号的**有效频带宽度**, 即

$$\omega_B = \frac{2\pi}{\tau}$$

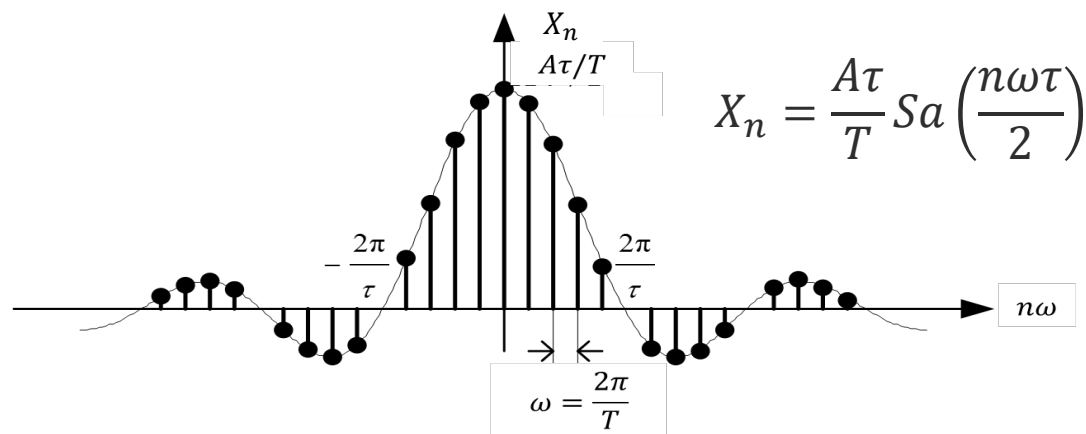
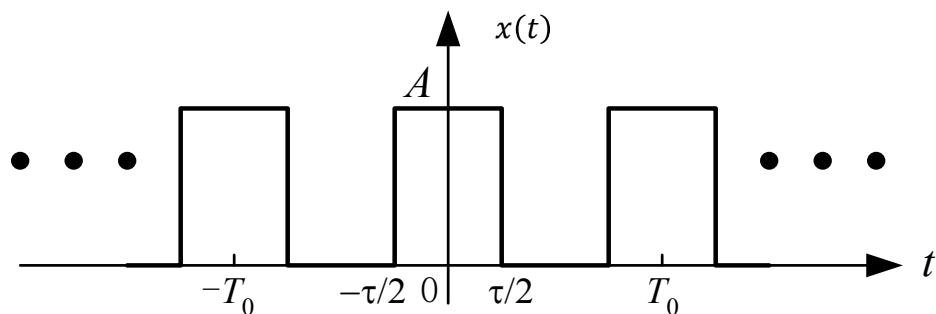
- 信号的有效带宽与信号时域的持续时间 τ 成反比。 τ 越大, 其 ω_B 越小; 反之, τ 越小, 其 ω_B 越大。
- 信号的有效带宽的物理意义: 在信号的有效带宽内, **集中了信号绝大部分谐波分量**。若信号丢失有效带宽以外的谐波成分, 不会对信号产生明显影响。当信号通过系统时, 信号与系统的有效带宽必须“匹配”。



离散频谱特性

■ 幅度衰减特性

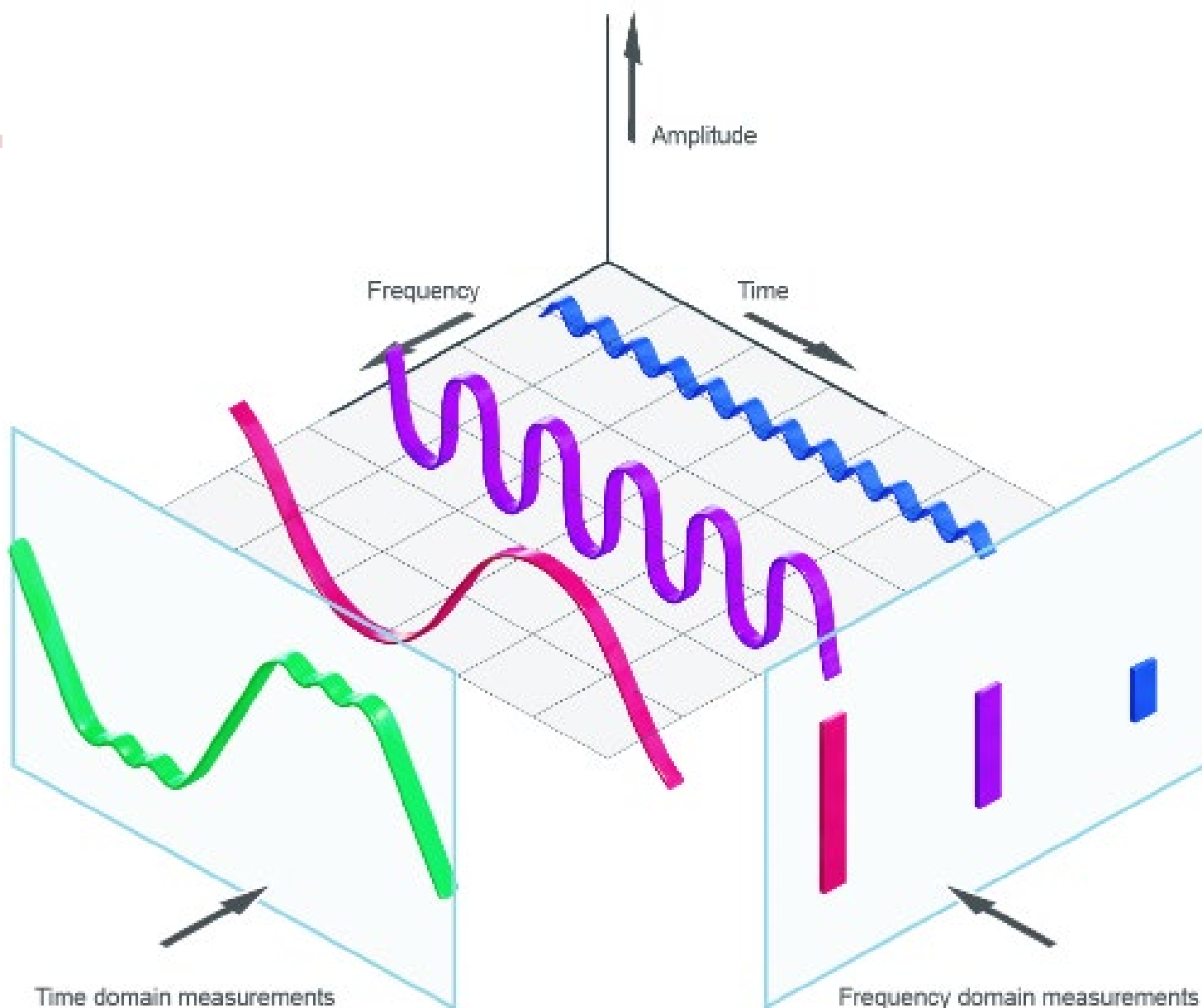
- 若信号时域波形变化越平缓，高次谐波成分就越少，幅度频谱衰减越快；若信号时域波形变化跳变越多，高次谐波成分就越多，幅度频谱衰减越慢。
- $x(t)$ 不平滑， $|X_n|$ 按 $1/n$ 的速度衰减
- $x(t)$ 平滑， $|X_n|$ 按 $1/n^2$ 的速度衰减



时域 vs. 频域

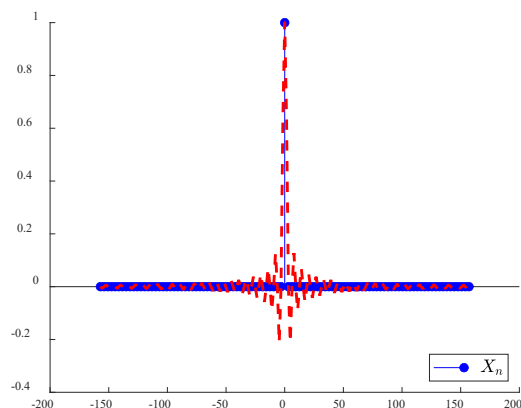
- 时域：时间 – 幅度

- 频域：频率 – 幅度

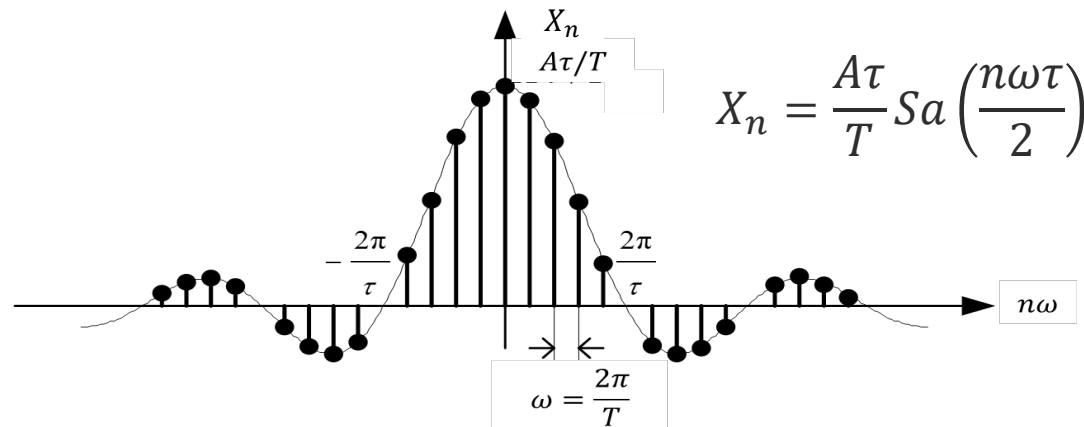
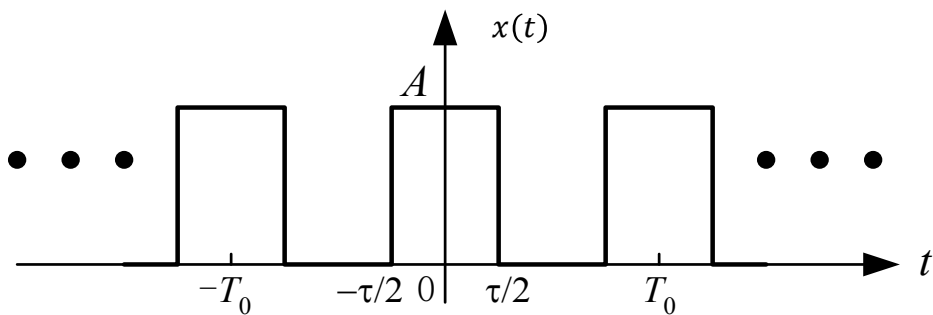
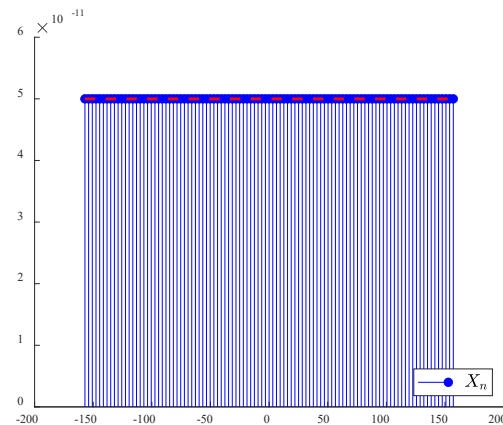


离散频谱特性

- $\tau \rightarrow T$, 信号变为直流信号
- 频谱变为冲激信号



- $\tau \rightarrow 0$, 信号变为周期脉冲序列
- 频谱变平坦 (白色频谱)



概要

1. 傅里叶级数的定义:

指数、正弦正交基
表示一般信号

2. 傅里叶级数和频域:

傅里叶级数怎么理解

3. 傅里叶级数的计算:

傅里叶级数的计算方法和性质

4. 系统函数:

傅里叶级数和系统的关系

系统函数

- 假设 $h(t)$ 为线性时不变系统的单位冲激响应，则

$$\begin{aligned} e^{j\omega t} * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} h(\tau) d\tau \\ &= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} h(\tau) d\tau = e^{j\omega t} H(j\omega) \end{aligned}$$

- 针对一般复数 s ， $H(s)$ 为系统函数；
- 若为纯虚数，则 $H(j\omega)$ 为频率响应

系统函数

- 若周期信号的傅里叶级数为

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega t}$$

- 若该信号输入冲激响应为 $h(t)$ 的线性时不变系统，则输出为

$$y(t) = x(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n H(jn\omega) e^{jn\omega t}$$

- $y(t)$ 也是周期的，与 $x(t)$ 有相同的基波频率， $\{X_n H(jn\omega)\}$ 为 $y(t)$ 的傅里叶级数