作业四

1、证明

1. $\forall x\forall yPxy$ Hyp
2. $\forall a\forall bPab$ 将x,y分别替换为a,b
3. $\forall y\forall xPyx$ 将a,b分别替换为y,x

   Q.E.D.

2、证明

2.1

Lemma 1:$\{a\rightarrow b,b\rightarrow c\}\vdash a\rightarrow c$ 显然成立。

(1)

先证$\rightarrow$:

1. $\lnot\forall x\lnot\alpha\rightarrow\lnot(\lnot\alpha)^x_t$

   AX2.7.2

2. $\lnot\forall x\lnot\beta\rightarrow\lnot(\lnot\beta)^x_t$

   AX2.7.2

3. $\lnot(\lnot\alpha)^x_t\rightarrow(\lnot(\lnot\alpha)^x_t\vee\lnot(\lnot\beta)^x_t)$

   AX1.22.4

4. $\lnot(\lnot\beta)^x_t\rightarrow(\lnot(\lnot\alpha)^x_t\vee\lnot(\lnot\beta)^x_t)$

   AX1.22.5

5. $\lnot\forall x\lnot\alpha\rightarrow(\lnot(\lnot\alpha)^x_t\vee\lnot(\lnot\beta)^x_t)$

   Lemma 1

6. $\lnot\forall x\lnot\beta\rightarrow(\lnot(\lnot\alpha)^x_t\vee\lnot(\lnot\beta)^x_t)$

   Lemma 1

7. $\lnot\forall x\lnot\alpha\vee\lnot\forall x\lnot\beta\rightarrow(\lnot(\lnot\alpha)^x_t\vee\lnot(\lnot\beta)^x_t)$

AX1.22.6

8. $\lnot\forall x\lnot\alpha\vee\lnot\forall x\lnot\beta\rightarrow(\lnot\forall x\lnot(\alpha\vee\beta))$

AX2.7.4

9. $\exist x\alpha\vee\exist x\beta\rightarrow(\exist x(\alpha\vee\beta))$

rewrite

再证$\leftarrow$:同理可证。

综上，$\vdash\exist x\alpha\vee\exist x\beta \leftrightarrow\exist x (\alpha\vee\beta)$

Q.E.D.

(2)

1. $\forall x\alpha\rightarrow(\alpha)^x_t$

AX2.7.2

2. $\forall x\beta\rightarrow(\beta)^x_t$

AX2.7.2

3. $(\alpha)^x_t\rightarrow((\alpha)^x_t\vee(\beta)^x_t)$

AX1.22.4

4. $(\beta)^x_t\rightarrow((\alpha)^x_t\vee(\beta)^x_t)$

AX1.22.5

5. $\forall x\alpha\rightarrow((\alpha)^x_t\vee(\beta)^x_t)$

Lemma 1

6. $\forall x\beta\rightarrow((\alpha)^x_t\vee(\beta)^x_t)$

Lemma 1

7. $\forall x\alpha\vee\forall x\beta\rightarrow((\alpha)^x_t\vee(\beta)^x_t)$

AX1.22.6

8. $\forall x\alpha\vee\forall x\beta\rightarrow(\forall x(\alpha\vee\beta))$

AX2.7.4

Q.E.D.

2.2

Lemma 1:$\{a\rightarrow b,b\rightarrow c\}\vdash a\rightarrow c$ 显然成立。

(1)

1. $\lnot\forall x\lnot(\alpha\wedge\beta)\rightarrow\lnot(\lnot(\alpha\wedge\beta))^{x}_{t}$

   AX2.7.2

2. $\lnot(\lnot(\alpha\wedge\beta)^{x}_{t})\rightarrow\lnot(\lnot((\alpha)^{x}_{t}\wedge(\beta)^{x}_{t}))$

   def

3. $\lnot\forall x\lnot(\alpha\wedge\beta)\rightarrow\lnot(\lnot((\alpha)^{x}_{t}\wedge(\beta)^{x}_{t}))$

   Lemma 1

4. $\lnot\forall x\lnot(\alpha\wedge\beta)\rightarrow\lnot(\forall x\lnot\alpha)\wedge(\forall x\lnot\beta)$

   AX2.7.4

5. $\exist x(\alpha\wedge\beta)\rightarrow((\exist x\alpha)\wedge(\exist x\beta))$

   rewrite

Q.E.D.

(2)

先证$\rightarrow$:同2.2（1）证法易证。

再证$\leftarrow$:

1. $\forall x\alpha\wedge\forall x\beta\rightarrow(\alpha^{x}_{t})\wedge(\beta^{x}_{t})$

   AX2.7.2

2. $(\alpha^{x}_{t})\wedge(\beta^{x}_{t})\rightarrow(\alpha\wedge\beta)^{x}_{t}$

   def

3. $\forall x\alpha\wedge\forall x\beta\rightarrow(\alpha\wedge\beta)^{x}_{t}$

Lemma 1

4. $\forall$x$\alpha$$\wedge$$\forall$x$\beta$$\rightarrow$$\forall$x($\alpha$$\wedge$$\beta$)

AX2.7.4

综上，$\vdash$$\forall$x($\alpha$$\wedge$$\beta$)$\leftrightarrow$ $\forall$x$\alpha$$\wedge$$\forall$x$\beta$

Q.E.D.