

离散数学（2023）作业 2I - 图的基本概念

离散数学教学组

Problem 1

是否存在一个有 15 个顶点且每个顶点的度数都为 5 的简单图？

Problem 2

有 n 支球队 ($n \geq 4$)，已经比赛完了 $n + 1$ 场，证明：一定有一个球队比赛了至少 3 场。

Problem 3

设 G 是一个 n 个顶点， $n + 1$ 条边的无向图，证明： G 中存在顶点 u 使得 $d(u) \geq 3$ 。

Problem 4

证明或反驳：若无向图 G 至少有两个顶点且各顶点度数均不相同，则 G 不是简单图。

Problem 5

一个图的**度序列**是由该图的各个顶点的度按**非递增顺序**排列的序列。求下列各个图的度序列。

1. K_5
2. C_3
3. W_4
4. Q_3

Problem 6

证明：设 $G = \langle V, E \rangle$ 是一个连通图，且 $|V| = |E| + 1$ ，则 G 中至少有一个度为 1 的顶点。

Problem 7

设无向图 G 有 ν 个顶点， ε 条边， $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示 G 中度最小和度最大的顶点的度，证明： $\delta(G) \leq \frac{2\varepsilon}{\nu} \leq \Delta(G)$ 。

Problem 8

令 G 是至少有两个顶点的无向图，证明或反驳：

1. 从图中删去一个度最大的顶点不会使其顶点平均度增加。
2. 从图中删去一个度最小的顶点不会使其顶点平均度减少。

「提示：Problem 7 中 $\frac{2\varepsilon}{\nu}$ 称为图的**顶点平均度**。」

Problem 9

令 G 是一个顶点平均度为 a 的无自环的无向图。

1. 证明: G 删去一个顶点 x 后平均度至少为 a , 当且仅当 $\deg(x) \leq \frac{a}{2}$;
2. 证明或反驳: 如果 $a > 0$, 那么 G 有一个最小度大于 $\frac{a}{2}$ 的子图。

Problem 10

简单图 G 有 n 个顶点且不包含三角形 K_3 作为子图, 证明: 其边数 m 必满足 $m \leq \frac{n^2}{4}$ 。