思考题: 例 0.16

例 0.16 (匹配问题) 将 n 对夫妻任意分成 n 组, 每组 2 人, 不限男女, 问至少有一对夫妻被分到同一组的概率是多少?

① 基本事件的个数：2n个人两两分组：$C_{2n}^2 C_{2n-2}^2 C_{2n-4}^2 \cdots C_2^2 = \frac{(2n)!}{2^n}$.

② Consider "一对夫妻成功"：任取一对 C_n^1，其余 2n-2人任意两两组合

①的子问题

⋮

③ 上述事件满足容斥原理，即

$\cancel{C_n^1 \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}} - C_n^2 \frac{(2n-4)!}{2^{n-2}} + \cdots}$

$$\sum_i |A_i|_\# - \sum_{i<j} |A_iA_j|_\# + \cdots$$

$$\Rightarrow C_n^1 \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}} - C_n^2 \frac{(2n-4)!}{2^{n-2}} + C_n^3 \frac{(2n-6)!}{2^{n-3}} - \cdots\cdots = \sum_{i=1}^{n} C_n^i \frac{(2n-2i)!}{2^{n-i}} (-1)^{i+1}$$

整数的有序分解: 例 0.22

每一项可以展开为 $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ 的形式.
因此该问题与非负整数解的个数一致
即 C_{n+m-1}^{m-1} 个

例 0.22 思考题:

隔板法

- 整数有序分解问题二定理的证明思路
- 推论: 求方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m \leq n$ 非负整数解、正整数解的个数
- 问题: 在多项式 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ 的展开式中, 一共有多少种不同的展开项?

该问题是:

① $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ 的 非负、正整数解的个数

② $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n-1$ 的 . ——————.

⋮

③ $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 0$ 的 . ——————.

注意: 对于非负整数解; 有 $\sum_{i=0}^{n+1} C_{i+m-1}^{m-1} = C_{n+m}^{m}$

对于正整数解, 有 $\sum_{i=m}^{n-m+1} C_{i-1}^{m-1} = C_n^m$

Appendix: 作业

一个口袋中有 5 个球, 在这 5 个球上分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5. 从袋中不放回任取 3 个球, 每个球被取到的可能性相同, 求取到的球上标明的最大数字 X 的分布列.

X	取值	3	4	5
P	概率	$\frac{1}{C_5^3}$	$\frac{C_3^2}{C_5^3}$	$\frac{C_4^2}{C_5^3}$

多事件的独立性

定义 0.11 若事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 中任意 k $(k \le n)$ 个事件独立, 即对任意 $k \in [n]$ 有

$$P(A_{i_1} \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_k})$$

其中 $1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n$. 则称事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立.

Notice:

- n 个事件的相互独立性共有 $2^n - n - 1$ 个等式 (思考题)
- 事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的相互独立性与两两独立性存在区别
- 可以类似定义多个事件的条件独立性

$$\underbrace{C_n^2}_{\text{两两独立}} + \underbrace{C_n^3}_{\text{三三独立}} + \cdots + C_n^n = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} C_n^i}_{\text{二项式定理}} - C_n^1 - C_n^0 = 2^n - n - 1$$

正态分布的估计: 思考题

定理 0.13 若 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, 对任意 $\epsilon > 0$ 有

$$P(X \geq \epsilon) \leq \frac{1}{2}e^{-\epsilon^2/2}$$

$$P(|X| \geq \epsilon) \leq \min\left(1, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\epsilon}e^{-\frac{\epsilon^2}{2}}\right)$$

在上面的定理中, 第一个不等式具有广泛的应用, 在 $\epsilon \in (0,1)$ 时对真实的概率有更好的估计; 第二个不等式被称为 **Mill** 不等式, 在 $\epsilon \in (1,+\infty)$ 时对真实的概率有更好的估计.

这两个不等式都可以通过定义的放缩求得.

该证明于（人工智能学院用书） P88 定理4.7