

第12章

马氏链模型

在考察有随机因素影响的动态系统时,常常碰到这样的情况:系统在每个时期所处的状态是随机的,从这个时期到下个时期的状态按照一定的概率进行转移,并且下个时期的状态只取决于这个时期的状态和转移概率,与以前各时期的状态无关.这种性质称为无后效性,或马尔可夫(Markov)性,通俗地说就是:已知现在,将来与历史无关.具有无后效性的,时间、状态均为离散的随机转移过程通常用马氏链(Markov Chain)模型描述.

马氏链模型在经济、社会、生态、遗传等许多领域中有着广泛的应用,值得提出的是,虽然它是解决随机转移过程的工具,但是一些确定性系统的状态转移问题也能用马氏链模型处理.

12.1节通过实例对本章模型用到的马氏链的基本知识作了简单介绍,不熟悉马氏链的读者请先阅读这一节.

12.1 健康与疾病

本节通过一个虽有实际背景、但数据纯系虚构的例子来介绍马氏链的基本概念,及其两种主要类型——正则链和吸收链——的性质.

人寿保险公司对受保人的健康状况特别关注,他们欢迎年轻力壮的人投保,患病者和高龄人则需付较高的保险金,甚至被拒之门外.人的健康状态随着时间的推移会发生转变,转变是随机的,保险公司要通过大量数据对状态转变的概率作出估计,才可能确定出不同年龄、不同健康状况的人的保险金和理赔金数额,下面分两种情况进行讨论.

1. 粗略地把人的健康状况分为健康和疾病两种状态,不妨以一年为一个时段研究状态的转变.假定对某一年龄段的人来说,今年健康、明年保持健康状态的概率为0.8,即明年转为疾病状态的概率为0.2;而今年患病、明年转为健康状态的概率为0.7,即明年保持疾病状态的概率为0.3.如果一个人投保时处于健康状态,我们研究以后若干年他分别处于这两种状态的概率.

用随机变量 X_n 表示第 n 年的状态, $X_n = 1$ 表示健康, $X_n = 2$ 表示疾病, $n = 0,$

1, 2, ... 用 $a_i(n)$ 表示第 n 年处于状态 i 的概率, $i = 1, 2$, 即 $a_i(n) = P(X_n = i)$. 用 p_{ij} 表示已知今年处于状态 i , 来年处于状态 j 的概率, $i, j = 1, 2$, 即 $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$. $a_i(n)$ 称为状态概率, p_{ij} 称为状态转移概率. 这种状态及其转移情况可以用图 1 表示.

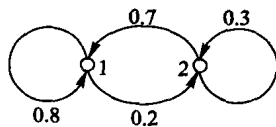


图 1 两种状态及其转移概率

显然, 第 $n+1$ 年的状态 X_{n+1} 只取决于第 n 年的状态 X_n 和转移概率 p_{ij} , 而与以前的状态 X_{n-1}, X_{n-2}, \dots 无关, 即状态转移具有无后效性. 第 $n+1$ 年的状态概率可由全概率公式得到

$$\begin{cases} a_1(n+1) = a_1(n)p_{11} + a_2(n)p_{21} \\ a_2(n+1) = a_1(n)p_{12} + a_2(n)p_{22} \end{cases} \quad (1)$$

由前 $p_{11} = 0.8, p_{12} = 0.2, p_{21} = 0.7, p_{22} = 0.3$, 投保人开始时处于健康状态, 即 $a_1(0) = 1, a_2(0) = 0$, 利用 (1) 式立即可以算出以后各年他处于两种状态的概率 $a_1(n), a_2(n), n = 1, 2, \dots$, 如表 1.

表 1 投保人开始处于健康状态时两种状态概率的变化

n	0	1	2	3	4	...	∞
$a_1(n)$	1	0.8	0.78	0.778	0.7778	...	7/9
$a_2(n)$	0	0.2	0.22	0.222	0.2222	...	2/9

表中最后一列是根据计算数值的趋势猜测的.

如果投保人开始时处于疾病状态, 即 $a_1(0) = 0, a_2(0) = 1$, 类似地可得表 2.

表 2 投保人开始处于疾病状态时两种状态概率的变化

n	0	1	2	3	4	...	∞
$a_1(n)$	0	0.7	0.77	0.777	0.7777	...	7/9
$a_2(n)$	1	0.3	0.23	0.223	0.2223	...	2/9

显然表中最后一列和表 1 相同.

可以将众多投保人处于两种状态的比例, 视为典型的投保人处于两种状态的概率, 比如若健康人占 3/4, 病人占 1/4, 则可设初始状态概率为 $a_1(0) = 0.75, a_2(0) = 0.25$, 读者计算一下就会发现 $n \rightarrow \infty$ 时 $a_1(n), a_2(n)$ 的趋向也和表 1、表 2 相同.

可以看到, 对于给定的状态转移概率, $n \rightarrow \infty$ 时状态概率 $a_1(n), a_2(n)$ 趋向于稳定值, 该值与初始状态无关, 这是一种主要的马氏链类型的重要性质.

2. 把人的死亡作为第 3 种状态, 用 $X_n = 3$ 表示. 今年健康、明年可能因突发

疾病或偶然事故而死亡,今年患病、明年更可能转为死亡,而一旦死亡当然就不能再转为健康或疾病状态.将3种状态的转移表示为图2.

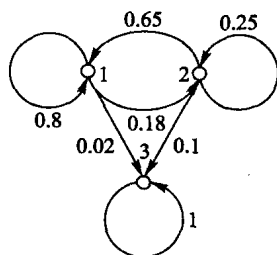


图2 三种状态及其转移概率

仍用 $a_i(n)$ 表示状态概率, $i=1,2,3$, 用 p_{ij} 表示状态转移概率, $i,j=1,2,3$, 具体数值见图2, 特别注意, $p_{31}=p_{32}=0, p_{33}=1$. 第 $n+1$ 年的状态概率可类似于(1)式用

$$\begin{cases} a_1(n+1) = a_1(n)p_{11} + a_2(n)p_{21} + a_3(n)p_{31} \\ a_2(n+1) = a_1(n)p_{12} + a_2(n)p_{22} + a_3(n)p_{32} \\ a_3(n+1) = a_1(n)p_{13} + a_2(n)p_{23} + a_3(n)p_{33} \end{cases} \quad (2)$$

计算,若投保人开始时处于健康状态,则由(2)式算出以后各年他处于三种状态的概率,如表3.

表3 投保人处于健康状态时三种状态概率的变化

n	0	1	2	3	...	30	...	50	...	∞
$a_1(n)$	1	0.8	0.757	0.728 5	...	0.269 8	...	0.129 3	...	0
$a_2(n)$	0	0.18	0.189	0.183 5	...	0.068 0	...	0.032 6	...	0
$a_3(n)$	0	0.02	0.054	0.088 0	...	0.662 1	...	0.838 1	...	1

表中最后一列是根据计算数值的趋势猜测的. 如果设初始状态概率为 $a_1(0) = 0.75, a_2(0) = 0.25, a_3(0) = 0$, 会发现 $n \rightarrow \infty$ 时 $a_1(n), a_2(n), a_3(n)$ 的趋向和表3相同.

可以看到,不论初始状态如何,最终都要转到状态3,这代表了另一种主要的马氏链类型.

通过这个例子容易了解下面给出的马氏链的基本概念.

马氏链及其基本方程 按照系统的发展,时间离散化为 $n=0,1,2,\dots$, 对每个 n , 系统的状态用随机变量 X_n 表示, 设 X_n 可以取 k 个离散值 $X_n=1,2,\dots,k$, 且记 $a_i(n) = P(X_n = i)$, 即状态概率, 从 $X_n = i$ 到 $X_{n+1} = j$ 的概率记 $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$, 即转移概率. 如果 X_{n+1} 的取值只取决于 X_n 的取值及转移概

率,而与 X_{n-1}, X_{n-2}, \dots 的取值无关,那么这种离散状态按照离散时间的随机转移过程称为马氏链. 由状态转移的无后效性和全概率公式可以写出马氏链的基本方程为

$$a_i(n+1) = \sum_{j=1}^k a_j(n) p_{ji}, \quad i=1, 2, \dots, k \quad (3)$$

并且 $a_i(n)$ 和 p_{ij} 应满足

$$\sum_{i=1}^k a_i(n) = 1, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

$$p_{ij} \geq 0, \quad i, j=1, 2, \dots, k \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^k p_{ij} = 1, \quad i=1, 2, \dots, k \quad (6)$$

引入状态概率向量(行向量)和转移概率矩阵(简称转移矩阵)

$$\mathbf{a}(n) = (a_1(n), a_2(n), \dots, a_k(n)), \mathbf{P} = \{p_{ij}\}_{k \times k} \quad (7)$$

则基本方程(3)可以表为

$$\mathbf{a}(n+1) = \mathbf{a}(n)\mathbf{P} \quad (8)$$

由此还可得到

$$\mathbf{a}(n) = \mathbf{a}(0)\mathbf{P}^n \quad (9)$$

(5) 式表明转移矩阵 \mathbf{P} 是非负阵, (6) 式表示 \mathbf{P} 的行和为 1, 称为随机矩阵.

对于上例的两种情况, 转移矩阵分别为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.18 & 0.02 \\ 0.65 & 0.25 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

容易看出, 对于马氏链模型最基本的问题是构造状态 X_n 及写出转移矩阵 \mathbf{P} . 一旦有了 \mathbf{P} , 那么给定初始状态概率 $\mathbf{a}(0)$ 就可以用(9)或(8)式计算任意时段 n 的状态概率 $\mathbf{a}(n)$.

应该指出, 这里的转移概率 p_{ij} 与时段 n 无关, 这种马氏链称为时齐的. 本章讨论的均为这种情况.

从上面的计算结果可以看出这两个马氏链之间有很大差别, 事实上它们属于马氏链的两个重要类型, 下面分别作简单介绍.

正则链 这类马氏链的特点是, 从任意状态出发经过有限次转移都能达到另外的任意状态, 有如下定义.

定义 1 一个有 k 个状态的马氏链如果存在正整数 N , 使从任意状态 i 经 N 次转移都以大于零的概率到达状态 j ($i, j=1, 2, \dots, k$), 则称为正则链.

用下面的定理容易检验一个马氏链是否是正则链.

定理 1 若马氏链的转移矩阵为 \mathbf{P} , 则它是正则链的充要条件是, 存在正整

数 N , 使 $P^N > 0$ (指 P^N 的每一元素大于零).

上面第 1 种情况的转移矩阵显然满足定理 1, 即它是正则链. 我们已经看到, 从任意初始状态 $a(0)$ 出发, $n \rightarrow \infty$ 时状态概率 $a(n)$ 趋于与 $a(0)$ 无关的稳定值. 事实上有如下的定理.

定理 2 正则链存在唯一的极限状态概率 $w = (w_1, w_2, \dots, w_k)$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时状态概率 $a(n) \rightarrow w$, w 与初始状态概率 $a(0)$ 无关. w 又称稳态概率, 满足

$$wP = w \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^k w_i = 1 \quad (11)$$

定理中的 (10) 式可以从 (8) 式直接得到. P 给定后 (10) 和 (11) 式构成求解 w 的线性方程组. 表 1, 2 中的 $w = (7/9, 2/9)$ 即可直接从相应的代数方程求出.

从 (9) 或 (10) 式还不难看出, $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ 存在, 记作 P^∞ , 并且 P^∞ 的每一行都是稳态概率 w . 如果记 $P^\infty = \{p_{ij}^{(\infty)}\}$, 那么有 $p_{ii}^{(\infty)} = w_i$.

从状态 i 出发经 n 次转移, 第一次到达状态 j 的概率称为 i 到 j 的首达概率, 记作 $f_{ij}(n)$. 于是

$$\mu_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}(n) \quad (12)$$

为由状态 i 第一次到达状态 j 的平均转移次数. 特别地, μ_{ii} 是状态 i 首次返回的平均转移次数. μ_{ii} 与稳态概率 w 有密切关系, 即

定理 3 对于正则链

$$\mu_{ii} = 1/w_i \quad (13)$$

吸收链 上面第 2 种情况状态 3 的转移概率 $p_{33} = 1$, 于是系统一旦进入状态 3 就再不会离开它, 可以把它看作“吸收”其他状态的一个状态. 并且从状态 1 或 2 出发, 可以经有限次转移到达状态 3, 有如下定义.

定义 2 转移概率 $p_{ii} = 1$ 的状态 i 称为吸收状态. 如果马氏链至少包含一个吸收状态, 并且从每一个非吸收状态出发, 能以正的概率经有限次转移到达某个吸收状态, 那么这个马氏链称为吸收链.

吸收链的转移矩阵可以写成简单的标准形式. 若有 r 个吸收状态, $k-r$ 个非吸收状态, 则转移矩阵 P 可表为

$$P = \begin{bmatrix} I_{r \times r} & O \\ R & Q \end{bmatrix} \quad (14)$$

其中 $k-r$ 阶子方阵 Q 的特征值 λ 满足 $|\lambda| < 1$. 这要求子阵 $R_{(k-r) \times r}$ 中必含有非零元素, 以满足从任一非吸收状态出发经有限次转移可到达某吸收状态的条件. 这样 Q 就不是随机矩阵, 它至少存在一个小于 1 的行和, 且如下定理成立.

定理 4 对于吸收链 P 的标准形式 (14), $I - Q$ 可逆,

$$M = (I - Q)^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} Q^s \quad (15)$$

记元素全为 1 的列向量为 $e = (1, 1, \dots, 1)^T$, 则

$$y = Me \quad (16)$$

的第 i 分量是从第 i 个非吸收状态出发, 被某个吸收状态吸收的平均转移次数.

设状态 i 是非吸收状态, j 是吸收状态, 那么首达概率 $f_{ij}(n)$ 实际上是 i 经 n 次转移被 j 吸收的概率, 而

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n) \quad (17)$$

则是从非吸收状态 i 出发终将被吸收状态 j 吸收的概率. 记 $F = \{f_{ij}\}_{(k-r) \times r}$, 下面的定理给出了计算 f_{ij} 的方法.

定理 5 设吸收链的转移矩阵 P 表为标准形式 (14), 则

$$F = MR \quad (18)$$

12.2 钢琴销售的存贮策略

像钢琴这样的奢侈品销售量很小, 商店里一般不会有这么大的库存量让它积压资金. 这里通过一个简单的实例来分析、评价一种存贮策略的效果.

一家商店根据以往经验, 平均每周只能售出 1 架钢琴. 现在经理制订的存贮策略是, 每周末检查库存量, 仅当库存量为零时, 才订购 3 架供下周销售; 否则, 不订购. 试估计在这种策略下失去销售机会的可能性有多大, 以及每周的平均销售量是多少^[53].

问题分析 对于钢琴这种商品的销售, 顾客的到来是相互独立的, 在服务系统中通常认为需求量近似服从泊松分布, 其参数可由均值为每周销售 1 架得到, 由此可以算出不同需求量的概率. 周末的库存可能是 0, 1, 2, 3 (架), 而周初的库存量则只有 1, 2, 3 这 3 种状态, 每周不同的需求将导致周初库存状态的变化, 于是可用马氏链来描述这个过程. 当需求超过库存时就会失去销售机会, 可以计算这种情况发生的概率. 在动态过程中这个概率每周是不同的, 每周的销售量也不同, 通常采用的办法是在时间充分长以后, 按稳态情况进行分析和计算.

模型假设

1. 钢琴每周需求量服从泊松分布, 均值为每周 1 架.
2. 存贮策略是: 当周末库存量为零时, 订购 3 架, 周初到货; 否则, 不订购.
3. 以每周初的库存量作为状态变量, 状态转移具有无后效性.
4. 在稳态情况下计算该存贮策略失去销售机会的概率和每周的平均销售量.

模型建立 记第 n 周的需求量为 D_n , 由假设 1, D_n 服从均值为 1 的泊松分布, 即

$$P(D_n = k) = e^{-1}/k! \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

记第 n 周初的库存量为 S_n , $S_n \in \{1, 2, 3\}$ 是这个系统的状态变量, 由假设 2, 状态转移规律为

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n - D_n, & D_n < S_n \\ 3, & D_n \geq S_n \end{cases} \quad (2)$$

由(1)式不难算出 $P(D_n = 0) = 0.368$, $P(D_n = 1) = 0.368$, $P(D_n = 2) = 0.184$, $P(D_n = 3) = 0.061$, $P(D_n > 3) = 0.019$, 由此计算状态转移矩阵

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

其中

$$p_{11} = P(S_{n+1} = 1 | S_n = 1) = P(D_n = 0) = 0.368$$

$$p_{12} = P(S_{n+1} = 2 | S_n = 1) = 0$$

$$p_{13} = P(S_{n+1} = 3 | S_n = 1) = P(D_n \geq 1) = 0.632$$

$$p_{21} = P(S_{n+1} = 1 | S_n = 2) = P(D_n = 1) = 0.368$$

$$p_{22} = P(S_{n+1} = 2 | S_n = 2) = P(D_n = 0) = 0.368$$

$$p_{23} = P(S_{n+1} = 3 | S_n = 2) = P(D_n \geq 2) = 0.264$$

$$p_{31} = P(S_{n+1} = 1 | S_n = 3) = P(D_n = 2) = 0.184$$

$$p_{32} = P(S_{n+1} = 2 | S_n = 3) = P(D_n = 1) = 0.368$$

$$p_{33} = P(S_{n+1} = 3 | S_n = 3) = P(D_n = 0) + P(D_n \geq 3) = 0.448$$

得到

$$P = \begin{bmatrix} 0.368 & 0 & 0.632 \\ 0.368 & 0.368 & 0.264 \\ 0.184 & 0.368 & 0.448 \end{bmatrix} \quad (3)$$

记状态概率 $a_i(n) = P(S_n = i)$, $i = 1, 2, 3$, $\mathbf{a}(n) = (a_1(n), a_2(n), a_3(n))$, 根据状态转移具有无后效性的假设, 有 $\mathbf{a}(n+1) = \mathbf{a}(n)P$. 用 12.1 节的定理 1 对照得到的转移矩阵 P , 可知这是一个正则链, 具有稳态概率 \mathbf{w} , \mathbf{w} 可由 12.1 节 (10), (11) 式得到:

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) = (0.285, 0.263, 0.452) \quad (4)$$

该存贮策略(第 n 周)失去销售机会的概率为 $P(D_n > S_n)$, 按照全概率公式有

$$P(D_n > S_n) = \sum_{i=1}^3 P(D_n > i | S_n = i) P(S_n = i) \quad (5)$$

其中的条件概率 $P(D_n > i | S_n = i)$ 容易由(1)式计算. 当 n 充分大时, 可以认为

$$P(S_n = i) = w_i, \quad i = 1, 2, 3$$

最终得到

$$P(D_n > S_n) = 0.264 \times 0.285 + 0.080 \times 0.263 + 0.019 \times 0.452 = 0.105$$

即从长期看,失去销售机会的可能性大约 10%.

在计算该存贮策略(第 n 周)的平均销售量 R_n 时,应注意到,当需求超过存量时只能销售掉存量,于是

$$R_n = \sum_{i=1}^3 \left[\sum_{j=1}^{i-1} jP(D_n = j | S_n = i) + iP(D_n \geq i | S_n = i) \right] P(S_n = i) \quad (6)$$

同样地,当 n 充分大时用稳态概率 w_i 代替 $P(S_n = i)$,得到

$$R_n = 0.632 \times 0.285 + 0.896 \times 0.263 + 0.976 \times 0.452 = 0.857$$

即从长期看,每周的平均销售量为 0.857 架.你能解释为什么这个数值略小于模型假设中给出的每周平均需求量为 1 架吗?

敏感性分析 这个模型用到的惟一个原始数据是,平均每周售出 1 架钢琴,这个数值会有波动.为了计算当平均需求在 1 附近波动时,最终结果有多大变化,设 D_n 服从均值为 λ 的泊松分布,即有 $P(D_n = k) = \lambda^k e^{-\lambda} / k!$ ($k = 0, 1, 2, \dots$),由此得状态转移矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} e^{-\lambda} & 0 & 1 - e^{-\lambda} \\ \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 1 - (1 + \lambda)e^{-\lambda} \\ \lambda^2 e^{-\lambda} / 2 & \lambda e^{-\lambda} & 1 - (\lambda + \lambda^2 / 2)e^{-\lambda} \end{bmatrix} \quad (7)$$

对于不同的平均需求 λ (在 1 附近),类似于上面的计算过程,记 $P = P(D_n > S_n)$,可得到以下结果:

λ	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
P	0.073	0.089	0.105	0.122	0.139

即当平均需求增长(或减少)10%时,失去销售机会的概率将增长(或减少)约 15%,这是可以接受的.

类似地可以作每周平均销售量的敏感性分析.

评注 本节介绍的是对已经制订的存贮策略,用两个指标加以评价,还可以给出其他的策略和指标,作进一步的研究,见习题 1,2.

动态随机存贮策略是马氏链的典型应用,关键之一是在无后效性的前提下恰当地定义系统的状态.本例中以每周初的库存量作为状态变量即可,但是如果制订的存贮策略不仅与本周的销售有关,还要考虑上周销售的情况,那么状态变量就要扩充,包含 S_n 和 S_{n-1} ,相应的状态转移概率也要改变.

12.3 基因遗传

豆科植物茎的颜色有绿有黄,生猪的毛有黑有白,有粗有光,人类会出现先天性疾病如色盲等,这些都是基因遗传的结果. 基因从一代到下一代的转移是随机的,并且具有无后效性,因此马氏链模型是研究遗传学的重要工具之一. 本节给出的简单模型属于完全优势基因遗传理论的范畴.

生物的外部表征,如豆科植物茎的颜色,人的皮肤或头发的色素,由生物体内相应的基因决定. 基因分优势基因和劣势基因两种,分别用 d 和 r 表示. 每种外部表征由体内的两个基因决定,而每个基因都可以是 d 或 r 中的一个,于是有三种基因类型,即 $D(dd)$, $H(dr)$ 和 $R(rr)$,分别称为优种、混种和劣种. 含优种 D 和混种 H 基因类型的个体,外部表征呈优势,如豆科植物的茎呈绿色,人的皮肤或头发有色素;含劣种 R 基因类型的个体,外部表征呈劣势,如豆科植物的茎呈黄色,人的皮肤或头发无色素.

生物繁殖时,一个后代随机地继承父亲两个基因中的一个和母亲两个基因中的一个^①,形成它的两个基因. 一般两个基因中哪一个遗传下去是等概率的,所以父母的基因类型就决定了每一后代基因类型的概率. 父母基因类型有全是优种 DD ,全是劣种 RR ,一优种一混种 DH (父为 D ,母为 H 或父为 H ,母为 D),及 DR, HH, HR 共 6 种组合,对每种组合简单的计算可以得到其后代各种基因类型的概率,如表 1 所示.

表 1 父母基因类型决定后代各种基因类型的概率

父母基因类型 后代基因类型	DD	RR	DH	DR	HH	HR
D	1	0	1/2	0	1/4	0
H	0	0	1/2	1	1/2	1/2
R	0	1	0	0	1/4	1/2

下面我们以马氏链为工具讨论两个具体的基因遗传模型^[64,85].

随机交配 这是自然界中生物群体的一种常见的、最简单的交配方式. 假设一个群体中雄性和雌性的比例相等,并且有相同的基因类型分布,即雄性中 D, H, R 的比例和雌性中 D, H, R 的比例相等. 所谓随机交配是指:对于每一个(不论属于 D, H 或 R)的雌性(或雄性)个体,都以 D, H, R 的数量比例为概率,与一

① 本节的模型主要针对人类以外的生物,但是为了叙述的方便,仍沿用父亲、母亲这样的称谓.

个雄性(或雌性)个体交配,其后代则按照前面所说的方式,等概率地继承其父母亲的各一个基因,形成它的基因类型.假定在初始一代的群体中,三种基因类型的数量比例是 $D(dd):H(dr):R(rr) = a:2b:c$,满足 $a+2b+c=1$.记 $p=a+b, q=b+c$,则群体中优势基因 d 与劣势基因 r 的数量比例为 $d:r=p:q$,且 $p+q=1$.

下面讨论随机交配方式产生的一系列后代群体中的基因类型分布.

用 $X_n=1,2,3$ 分别表示第 n 代的一个体属于 D, H 及 R 基因类型,即 3 种状态, $n=0,1,2,\dots$. $a_i(n)$ 表示个体属于第 i 种状态的概率, $i=1,2,3$, 可视为第 n 代的群体属于第 i 种基因类型的比例.转移概率 p_{ij} 可用 $p_{ij}=P(\text{一个后代具有基因类型 } j | \text{母亲具有基因类型 } i)$ 计算^①.在已知母亲基因类型的条件下,后代的基因类型取决于父亲的基因类型.值得指出的是,在计算 p_{ij} 时与其考虑被随机选择为父亲的 3 种不同基因类型的比例 $a:2b:c$,不如直接考察从雄性群体中以 $p:q$ 的比例获得优势基因 d 和劣势基因 r .比如 $p_{11}=P(\text{后代为 } D(dd) | \text{母亲为 } D(dd))=p$,因为后代只需从雄性群体中以概率 p 获得 d .类似地有 $p_{12}=P(\text{后代为 } H(dr) | \text{母亲为 } D(dd))=q, p_{13}=P(\text{后代为 } R(rr) | \text{母亲为 } D(dd))=0$.而 $p_{21}=P(\text{后代为 } D(dd) | \text{母亲为 } H(dr))=p/2$,因为后代需以 $1/2$ 的概率从母体获得 d ,同时以 p 的概率从雄性群体中获得 d .同理有 $p_{22}=P(\text{后代为 } H(dr) | \text{母亲为 } H(dr))=p/2+q/2=1/2, p_{23}=q/2$.用同样的方法算出 p_{31}, p_{32}, p_{33} 后得到转移矩阵

$$P = \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ p/2 & 1/2 & q/2 \\ 0 & p & q \end{bmatrix} \quad (1)$$

若初始一代是从 3 种基因类型比例为 $a:2b:c$ 的群体中随机选取的,那么初始状态概率为 $a(0)=(a, 2b, c)$,其中 $a, 2b, c$ 满足

$$p=a+b, \quad q=b+c \quad (2)$$

利用马氏链基本方程(12.1 节(8)式)可以得到

$$a(1)=a(0)P=(p^2, 2pq, q^2) \quad (3)$$

$$a(2)=a(1)P=(p^2, 2pq, q^2) \quad (4)$$

显然这个分布将保持下去.这表明在随机交配方式中第一代继承者的基因类型分布为 $D:H:R=p^2:2pq:q^2$,并永远不变.这个结果在遗传学中称 Hardy-Weinberg 平稳定律.

由 12.1 节定理 1 容易知道这是一个正则链,由 12.1 节(10)式算出其稳态概率也是 $w=(p^2, 2pq, q^2)$.表明即使初始一代不是从群体中随机选取,在随机交配方式下,经过足够长时间,3 种基因类型的分布也趋向上述稳定分布.

① p_{ij} 中的条件也可用“父亲具有基因类型 i ”,结果相同.

这个模型得到的结果的正确性已由观察和实验证明. 如自然界中通常有 $p = q = 1/2$, 于是 3 种基因类型的稳定分布为 $D:H:R = 1/4:1/2:1/4$, 而优种 D 和混种 H 的外部表征呈优势. 据观察, 豆科植物茎呈绿色(优势表征)的约占 $3/4$, 与上面的结果相一致.

最后考察在随机交配下 3 种基因类型的首次返回平均转移次数, 即平均经过多少代每种基因类型首次回到原来的类型. 据 12.1 节定理 3, D, H, R 类型的首次返回平均换代数目

$$\mu_{11} = \frac{1}{p^2}, \quad \mu_{22} = \frac{1}{2pq}, \quad \mu_{33} = \frac{1}{q^2} \quad (5)$$

即一个群体中基因 d 越多(p 越大), 基本类型 $D(dd)$ 的平均换代数目越小. 特别, 当 $p = q = 1/2$ 时, D, H, R 的平均换代数目分别为 4(代), 2(代)和 4(代).

近亲繁殖 这是指这样一种繁殖方式, 从同一对父母的大量后代中, 随机地选取一雄一雌进行交配, 产生后代, 如此继续下去, 考察一系列后代的基因类型的演变情况.

与前面的模型不同的是, 那里讨论后代群体中基因类型的分布, 只需设置 D, H, R 三个状态即可. 这里则需按照随机选取的雄雌配对, 分析后代配对中基因类型的变化. 于是状态应取雄雌 6 种基因类型组合, 设 $X_n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 依次定义为 DD, RR, DH, DR, HH, HR .

构造马氏链模型的关键是写出转移概率 p_{ij} , 它可根据本节开始给出的表 1 算出. 显然 $p_{11} = 1, p_{1j} = 0 (j \neq 1), p_{22} = 1, p_{2j} = 0 (j \neq 2)$, 因为父母全为优种 D (或劣种 R) 时, 后代全是优种(或劣种), 随机选取的雄雌配对当然也是. $p_{31} = 1/4$, 因为配对 DH (状态 3) 的后代中 D 和 H 各占 $1/2$, 所以随机选取的配对为 DD (状态 1) 的概率是 $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$, 而 $p_{33} = P(\text{后代配对为 } DH | \text{父母配对为 } DH) = P(\text{后代雄性为 } D, \text{雌性为 } H | \text{父母配对为 } DH) + P(\text{后代雄性为 } H, \text{雌性为 } D | \text{父母配对为 } DH) = 1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/2 = 1/2$, 同理有 $p_{35} = 1/4$. 又因配对 DH 的后代中没有 R , 故对于含有 R 的状态 2, 4, 6, 有 $p_{32} = p_{34} = p_{36} = 0$. 其他的 p_{ij} 可以类似地计算(留作习题 3), 最后得到转移矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/16 & 1/16 & 1/4 & 1/8 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

容易看出, 状态 1(DD) 和状态 2(RR) 是吸收状态, 这是一个吸收链(12.1 节定义 2). 它表明不论最初选取的配对是哪种基因类型组合, 经过若干代近亲

繁殖, 终将变为 DD 或 RR , 即变成全是优种或全是劣种, 而且一旦如此, 就永远保持下去。

为了计算从任一非吸收状态 $3, 4, 5, 6$ 出发, 平均经过多少代就会被吸收状态 $1, 2$ 吸收, 我们首先将 (6) 式表示的 P 化为 12.1 节给出的转移矩阵的标准形式 (14) 式, 得到

$$Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/8 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1/16 & 1/16 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \quad (7)$$

然后按 12.1 节 (15), (16), (18) 式计算

$$M = (I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 8/3 & 1/6 & 4/3 & 2/3 \\ 4/3 & 4/3 & 8/3 & 4/3 \\ 4/3 & 1/3 & 8/3 & 4/3 \\ 2/3 & 1/6 & 4/3 & 8/3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$y = Me = \left(4 \frac{5}{6}, 6 \frac{2}{3}, 5 \frac{2}{3}, 4 \frac{5}{6} \right)^T \quad (9)$$

$$F = MR = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \quad (10)$$

M 的第 1 行至第 4 行依次代表非吸收状态 DH, DR, HH 和 HR , 根据 12.1 节定理 4 对于向量 y 的各个分量的解释, 从 DH 配对的状态出发, 在近亲繁殖的情况下平均经过 $4 \frac{5}{6}$ 代就会被状态 DD 或 RR 吸收, 即全变成优种或劣种。而根据定理 5, 被吸收状态吸收的概率为矩阵 F 的第 1 行元素, 即变成优种和劣种的概率分别为 $3/4$ 和 $1/4$ 。从其他状态 DR, HH 和 HR 出发, 可以得到相应的结论。

上述结果的实用价值在于, 在农业和畜牧业中常常是纯种 (优种或劣种) 生物的某些品质 (如抗病性) 不如混种, 所以在近亲繁殖情况下大约经过 $5 \sim 6$ 代就应该重新选种, 以防止品质的下降。

12.4 等级结构

在社会系统中常常按照人们的职务或地位划分出许多等级, 如大学教师分为教授、讲师和助教, 工厂技术人员分为高级工程师、工程师和技术员, 军队里有将、校、尉, 学生也有研究生、大学生、中学生等。不同等级人员的比例形成一个等

级结构,合适的、稳定的等级结构有利于教学、科研、生产等各方面工作的顺利进行.因此希望建立一个模型来描述等级结构的变化状况,根据已知条件和当前的结构预报未来的结构,以及寻求为了达到某个理想的等级结构而应采取的策略^[8].

引起等级结构变化的因素有两种,一是系统内部等级间的转移,即提升或降级;二是系统内外的交流,即调入或退出(包括调离、退休、死亡等).系统各个等级的人员每个时期按一定的比例变化,本是一个确定性的转移问题,但是如果我们把这种比例视为各等级的每个成员提升、降级或退出的概率,就能利用处理随机转移的马氏链模型描述等级结构的变化.当然在这种观点下各等级成员的数量应理解为相应的平均值.为了叙述的统一和方便,以下均采用比例、比例分布等词汇,不称概率、概率分布等.

下面先定义若干基本量,建立基本方程,然后讨论如何调节调入成员在各等级的比例,保持等级结构的稳定,以及怎样尽快地达到或接近某个理想的等级结构.

基本量与基本方程 设一个社会系统由低到高地分为 k 个等级,如大学教师有助教、讲师、教授 3 个等级.时间以年为单位离散化,即每年进行且只进行一次调级.等级记作 $i = 1, 2, \dots, k$, 时间记作 $t = 0, 1, 2, \dots$. 引入以下的定义和记号:

成员按等级的分布向量 $\mathbf{n}(t) = (n_1(t), n_2(t), \dots, n_k(t))$, 其中 $n_i(t)$ 为 t 年属于等级 i 的人数; $N(t) = \sum_{i=1}^k n_i(t)$ 为系统 t 年的总人数.

成员按等级的比例分布 $\mathbf{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), \dots, a_k(t))$, 其中 $a_i(t) = \frac{n_i(t)}{N(t)}$, 于是有 $a_i(t) \geq 0$, $\sum_{i=1}^k a_i(t) = 1$, $\mathbf{a}(t)$ 又称为等级结构.

转移比例矩阵 $\mathbf{Q} = \{p_{ij}\}_{k \times k}$, 其中 p_{ij} 为每年从等级 i 转移至等级 j 的成员(在等级 i 中占的)比例.

退出比例向量 $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k)$, 其中 w_i 为每年从等级 i 退出系统的成员(在等级 i 中占的)比例; t 年退出系统总人数为

$$W(t) = \sum_{i=1}^k w_i n_i(t) = \mathbf{n}(t) \mathbf{w}^T \quad (1)$$

容易看出, p_{ij}, w_i 满足

$$p_{ij}, w_i \geq 0, \sum_{j=1}^k p_{ij} + w_i = 1 \quad (2)$$

调入比例向量 $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_k)$, 其中 r_i 为每年调入等级 i 的成员(在总调入人数中占的)比例; 记 t 年调入总人数为 $R(t)$, 则 t 年调入等级 i 的人数为 $r_i R(t)$. r_i 满足

$$r_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^k r_i = 1 \quad (3)$$

等级结构的基本方程 为了导出成员按等级的分布 $n(t)$ 的变化规律,先写出总人数 $N(t)$ 的方程

$$N(t+1) = N(t) + R(t) - W(t) \quad (4)$$

和每个等级人数的转移方程

$$n_j(t+1) = \sum_{i=1}^k p_{ij} n_i(t) + r_j R(t), \quad j=1,2,\dots,k \quad (5)$$

请读者考虑,为什么在形式上方程(5)中没有像(4)中那样,减去退出的人数.

用向量、矩阵符号可将(5)式表为

$$\mathbf{n}(t+1) = \mathbf{n}(t)\mathbf{Q} + R(t)\mathbf{r} \quad (6)$$

从 t 到 $t+1$ 年总人数的增长量记为 $M(t)$,再由(4),(1)式可得

$$R(t) = W(t) + M(t) = \mathbf{n}(t)\mathbf{w}^T + M(t) \quad (7)$$

将(7)代入(6)式得到

$$\mathbf{n}(t+1) = \mathbf{n}(t)(\mathbf{Q} + \mathbf{w}^T\mathbf{r}) + M(t)\mathbf{r} \quad (8)$$

记

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{w}^T\mathbf{r} \quad (9)$$

从(2),(3)式可知 \mathbf{P} 的行和为 1,是一个随机矩阵.(8)式记为

$$\mathbf{n}(t+1) = \mathbf{n}(t)\mathbf{P} + M(t)\mathbf{r} \quad (10)$$

当已知系统内部转移比例矩阵 \mathbf{Q} ,调入比例 \mathbf{r} ,初始的成员等级分布 $\mathbf{n}(0)$,以及每年调入总人数 $R(t)$ 或每年总增长量 $M(t)$ 时,可以用(6)式或(9),(10)式计算成员等级分布的变化情况 $\mathbf{n}(t)$. (6)或(9),(10)即为等级结构的基本方程.

基本方程的特殊形式 当每年系统总人数以固定的百分比 α 增长时,即 $M(t) = \alpha N(t)$,可用成员的等级结构 $\mathbf{a}(t)$ 代替 $\mathbf{n}(t)$ 而将(10)式表示为

$$\mathbf{a}(t+1) = (1 + \alpha)^{-1} [\mathbf{a}(t)\mathbf{P} + \alpha\mathbf{r}] \quad (11)$$

如果每年进出系统的人数大致相等,可以简化地假定系统总人数 $N(t)$ 保持不变,即 $M(t) = 0$ (或 $\alpha = 0$),这样(10)或(11)式化为相当简单的形式

$$\mathbf{a}(t+1) = \mathbf{a}(t)\mathbf{P} = \mathbf{a}(t)(\mathbf{Q} + \mathbf{w}^T\mathbf{r}) \quad (12)$$

与马氏链的基本方程(12.1节(8)式)完全一致,等级结构 $\mathbf{a}(t)$ 相当于状态概率,只是要注意到这里的转移矩阵 \mathbf{P} 的 i, j 元素为 $p_{ij} + w_i r_j$,即系统内部转移比例 p_{ij} 加上系统内外交流的比例 $w_i r_j$.

下面在方程(12)的基础上进行讨论.

用调入比例进行稳定控制 我们的中心问题是通过对调入比例 \mathbf{r} 的调节,尽快地达到或接近给定的理想等级结构 \mathbf{a}^* . 但是等级结构 $\mathbf{a}(t)$ 是按照(12)式的规律变化的,人们自然希望 \mathbf{a}^* 一旦达到,就能够通过选取适当的调入比例使

a^* 保持不变. 下面将看到并不是任何一个等级结构都可以用调入比例控制不变的. 本段的目的是: 给定了内部转移比例矩阵 $Q = \{p_{ij}\}$ (由(2)式, 退出向量 w 也完全被确定), 研究哪些等级结构用合适的调入比例可以保持不变, 称为调入比例对等级结构的稳定控制.

根据方程(12), 对于某个等级结构 a , 如果存在调入比例 r 使得

$$a = a(Q + w^T r) \quad (13)$$

则称 a 为稳定结构, 注意这里的 r 必须满足基本关系(3)式, 即 $r_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^k r_i = 1$. 由(13)式不难得到

$$r = \frac{a - aQ}{aw^T} \quad (14)$$

可以验证(14)式给出的 r 满足 $\sum_{i=1}^k r_i = 1$. 为满足 $r_i \geq 0$ 的要求, 可知稳定结构 a 的范围由

$$a \geq aQ \quad (15)$$

确定, 称为等级结构的稳定域. 下面举一个例子, 看看如何得到这种稳定域.

例 设大学教师的 3 个职称(助教、讲师和教授)依次记为等级 $i = 1, 2, 3$. 每年等级之间的转移比例矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \quad (16)$$

这表示只有提升, 没有降级, 而且只能升一级, 如每年由助教升入讲师的比例为 40%. 求等级结构 a 的稳定域.

将(16)代入(15)式得

$$\begin{cases} a_1 \geq 0.5a_1 \\ a_2 \geq 0.4a_1 + 0.6a_2 \\ a_3 \geq 0.3a_2 + 0.8a_3 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} a_2 \geq a_1 \\ a_3 \geq 1.5a_2 \end{cases} \quad (17)$$

这就是 a 的稳定域. 我们先从几何上把(17)式给定的区域表示出来.

任何一个等级结构 $a = (a_1, a_2, a_3)$ 可看作三维空间的一个点, 并且位于第一象限的平面

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1, \quad a_1, a_2, a_3 \geq 0 \quad (18)$$

上. 这是一个以 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ 为顶点的等边三角形, 将它铺在平面

上,如图1,记作 A ,称可行域.

为了在 A 中找到(17)式所示的 a 的稳定域,画出 $a_2 = a_1, a_3 = 1.5a_2$ 两条直线,它们相交于 s_1 点,容易看出,不等式(17)界定的是以 s_1 和 $s_2(0, 0.4, 0.6)$, $s_3(0, 0, 1)$ 为顶点的三角形,记作 B , B 即稳定域,且可以算出 s_1 的坐标为 $(0.286, 0.286, 0.428)$.

在这个例子中,稳定域 B 是以可行域 A 的顶点 s_3 为一个顶点、以 A 的一条边的部分线段为一边的三角形,这是有代表性的.为进一步得到一般情况下稳定域的构造,我们需要从(14)式出发加以研究.

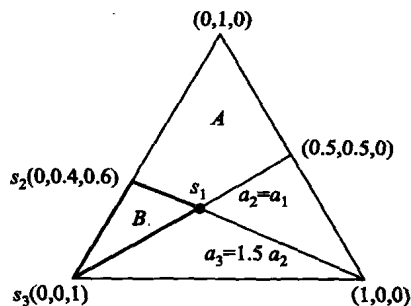


图1 教师等级结构的可行域和稳定域

稳定域的构造 设至少有一个 i 使 $\sum_{j=1}^k p_{ij} < 1$, 则 $I - Q$ 可逆, 记 $M = \{m_{ij}\} = (I - Q)^{-1}$, 则由(14)式可得

$$a = (aw^T) rM \quad (19)$$

记第 i 元素为 1、其余元素为 0 的单位行向量为 e_i , r 可表示为 $r = \sum_{i=1}^k r_i e_i$. 又记 M 的第 i 行向量为 $m_i = (m_{i1}, m_{i2}, \dots, m_{ik})$, $\mu_i = \sum_{j=1}^k m_{ij}$, 则 $rM = \sum_{i=1}^k r_i e_i M = \sum_{i=1}^k r_i m_i$. 对向量表达式(19)的诸分量求和, 注意到其左端为 1, 可以得到

$$aw^T = \left(\sum_{j=1}^k r_j \mu_j \right)^{-1} \quad (20)$$

$$a = \sum_{i=1}^k \frac{r_i m_i}{\sum_{j=1}^k r_j \mu_j} \quad (21)$$

为了得到便于应用的结果, 将(21)式进一步表示为

$$a = \sum_{i=1}^k b_i s_i, \quad b_i = \frac{r_i \mu_i}{\sum_{j=1}^k r_j \mu_j}, \quad s_i = \frac{m_i}{\mu_i} \quad (22)$$

对于 b_i , 容易知道 $\sum_{i=1}^k b_i = 1$; 又因为 M 的元素 m_{ij} 非负(为什么?), μ_i 非负,

$\sum_{j=1}^k r_j \mu_j$ 非负(为什么?), 所以当且仅当 $r_i \geq 0$ 时, $b_i \geq 0$. 对于 $s_i = (s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{ik})$,

有 $s_{ij} = \frac{m_{ij}}{\mu_i}$, 所以 $s_{ij} \geq 0$, $\sum_{j=1}^k s_{ij} = 1$. 上述分析表明:

当且仅当 a 能够表示为以 b_i 为系数的 s_i 的线性组合(22)式,且 b_i 满足

$$b_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^k b_i = 1 \quad (23)$$

时, a 是稳定结构,即存在 r , 满足 $r_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^k r_i = 1$, 使(13)式成立.

回到上面教师等级结构的例子,先从(16)式算出

$$M = (I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2.5 & 3.75 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

于是 $\mu_1 = 7, \mu_2 = 6.25, \mu_3 = 5$. 然后由(22)式得到 $s_1 = (0.286, 0.286, 0.428)$, $s_2 = (0, 0.4, 0.6)$, $s_3 = (0, 0, 1)$. 稳定结构 a 可表示为 $a = b_1 s_1 + b_2 s_2 + b_3 s_3$, $b_1, b_2, b_3 \geq 0, b_1 + b_2 + b_3 = 1$, 这正是图1中的稳定域 B .

从计算过程可以看到,当等级转移只有提升一级使 Q 的非零元素只能位于(16)式所示的位置时, M 必是上三角形矩阵,从而必然有 $s_3 = (0, 0, 1)$, $s_2 = (0, *, *)$, $s_1 = (*, *, *)$ ($*$ 表示非零元素). 注意到 s_3 表示全部是教授的职称结构, s_2 表示全部是讲师或教授的结构,由稳定域 B 的构造可知,较高级职称所占比例较大的结构才是稳定的. 这是职称只升不降的必然结果.

上面这个3等级例题的结果可以推广到一般包括 k 个等级的情况.

第一,等级结构 $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ 的可行域 A 是 k 维空间中由下式决定的 $k-1$ 维超平面,

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = 1, \quad a_1, a_2, \dots, a_k \geq 0 \quad (24)$$

而稳定域 B 则是 A 中以 s_1, s_2, \dots, s_k 为顶点的凸域.

第二,当系统内部只有提升一级的转移,即转移比例矩阵具有

$$Q = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & & 0 \\ & p_{22} & \ddots & \\ & & \ddots & p_{k-1,k} \\ 0 & & & p_{kk} \end{bmatrix} \quad (25)$$

形式时, B 的顶点为 $s_k = (0, \dots, 0, 1)$, $s_{k-1} = (0, \dots, 0, *, *)$, \dots , $s_2 = (0, *, \dots, *)$, $s_1 = (*, *, \dots, *)$.

用调入比例进行动态调节 下面讨论我们最关心的问题. 设理想的等级结构是 a^* , 并合理地假设 $a^* \in B$, 已知转移比例矩阵 Q 和初始等级结构 $a(0)$, 求调入比例 r 使 $a(1)$ 达到或尽量接近 a^* . 如果没有达到 a^* , 接着可以将 $a(1)$ 作为新的 $a(0)$, 再求调入比例 r (不一定与上面的 r 相同), 使 $a(2)$ 达到或尽量接近 a^* . 如此继续下去直到某个 $a(t)$ 达到 a^* 或与之接近到满意的程度. 不妨将这个过称称为用调入比例对等级结构进行动态调节.

首先,要衡量 $\mathbf{a}(1)$ 接近 \mathbf{a}^* 的程度,必须定义两个等级结构之间的所谓距离. 对于 $\mathbf{a}^{(1)} = (a_1^{(1)}, \dots, a_k^{(1)})$ 和 $\mathbf{a}^{(2)} = (a_1^{(2)}, \dots, a_k^{(2)})$, 可以合理地定义二者之间的距离

$$D(\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (a_i^{(1)} - a_i^{(2)})^2 \quad (26)$$

其中 $\lambda_i (\geq 0)$ 为对等级 i 的加权因子.

我们的目的归结为求解问题 E_1 :

$$\begin{aligned} \min D(\mathbf{a}(1), \mathbf{a}^*) \\ \text{s. t. } \mathbf{a}(1) = \mathbf{a}(0)(\mathbf{Q} + \mathbf{w}^T \mathbf{r}), \quad r_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^k r_i = 1 \end{aligned} \quad (27)$$

E_1 的一种解法如下.

$$\mathbf{a}^* - \mathbf{a}(1) = \mathbf{a}^* - \mathbf{a}(0)(\mathbf{Q} + \mathbf{w}^T \mathbf{r}) = \mathbf{a}(0) \mathbf{w}^T \left[\frac{\mathbf{a}^* - \mathbf{a}(0) \mathbf{Q}}{\mathbf{a}(0) \mathbf{w}^T} - \mathbf{r} \right]$$

式中的因子 $\mathbf{a}(0) \mathbf{w}^T$ 为常数, 若记

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{a}^* - \mathbf{a}(0) \mathbf{Q}}{\mathbf{a}(0) \mathbf{w}^T}, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k) \quad (28)$$

则 $\mathbf{a}^* - \mathbf{a}(1)$ 与 $\mathbf{y} - \mathbf{r}$ 成正比, 其中 y_i 由已知数据算出, 并且不难验证

$$\sum_{i=1}^k y_i = 1 \quad (29)$$

于是由 (26) 式问题 E_1 转化为问题 E_2 :

$$\begin{aligned} \min_{r_i} \sum_{i=1}^k \lambda_i (y_i - r_i)^2 \\ \text{s. t. } r_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^k r_i = 1 \end{aligned} \quad (30)$$

若 $y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k$, 则 E_2 的解显然为

$$r_i = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (31)$$

否则, 将 y_i 分为 $y_i > 0$ 和 $y_i \leq 0$ 两部分. 与 \mathbf{y} 的分量 (下标) 相对应, \mathbf{r} 也分为 r_j 和 r_l 两部分. 因为

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i (y_i - r_i)^2 = \sum_j \lambda_j (y_j - r_j)^2 + \sum_l \lambda_l (|y_l| + r_l)^2 \quad (32)$$

右端第一项随 r_j 由 0 至 y_j 的增加而减少, 第二项随 r_l 的增加而增加, 又 $\sum_j y_j > 1$, 所以为使和式最小, 应该有 $r_j \leq y_j$, 及

$$r_l = r_l^* = 0 \quad (33)$$

(用 r_l^* 表示最优值), 而 r_j 由问题 E_3 :

$$\min_{r_j} \sum_j \lambda_j (y_j - r_j)^2$$

$$\text{s. t. } 0 \leq r_j \leq y_j, \quad \sum_j r_j = 1 \quad (34)$$

解出. 用乘子法解这个条件极值问题, 令

$$G(r_j) = \sum_j \lambda_j (y_j - r_j)^2 + 2\alpha \sum_j r_j \quad (35)$$

解 $\frac{\partial G}{\partial r_j} = 0$, 可得

$$r_j = y_j - \frac{\alpha}{\lambda_j} \quad (36)$$

由 $\sum_j r_j = 1$ 可以算出

$$\alpha = \frac{\sum_j y_j - 1}{\sum_j \lambda_j^{-1}} \quad (37)$$

于是 E_3 的解为^①

$$r_j^* = \begin{cases} y_j - \frac{\alpha}{\lambda_j}, & y_j > \frac{\alpha}{\lambda_j} \\ 0, & y_j \leq \frac{\alpha}{\lambda_j} \end{cases} \quad (38)$$

用前面教师职称等级结构的例子, 说明用调入比例进行动态调节的方法. 设 Q 如(16)式所示, $a(0) = (0, 0, 1)$, $a^* = (0.286, 0.286, 0.428)$, 即图1中的 s_1 , 求 r 使 $a(1)$ 尽量接近 a^* .

在距离函数(26)中设权 $\lambda_i = 1 (i = 1, 2, 3)$. 按照(28)式可以算出 $y_1 = 1.43$, $y_2 = 1.43$, $y_3 = -1.86$. 根据(33)式应令 $r_3^* = 0$. 由(37)式算出 $\alpha = 0.93$, 再由(38)式得 $r_1^* = 0.5$, $r_2^* = 0.5$, 即调入比例为 $r^* = (0.5, 0.5, 0)$. 还可以算出 $a(1) = a(0)(Q + w^T r^*) = (0.1, 0.1, 0.8)$, 这是由 $a(0)$ 出发一年后达到的最接近 a^* 的等级结构(在(26)式定义的距离的意义下).

记上面的 $r^* = r(1)$, 由 $a(1)$ 出发用同样的方法可以得到 $r^* = r(2)$ 和 $a(2)$, 如此下去的计算结果如表1.

$$a(0) = (0, 0, 1), a^* = (0.286, 0.286, 0.428)$$

由表1可以看出, $a(7)$ 已经相当接近 a^* .

评注 这个模型不仅能描述一个社会系统中的等级结构, 也可以研究不同部门间成员的迁移, 如在人才自由流动的情况下, 从商、从政、从工、从教的人员

① 如果有某个 j' 使 $y_{j'} \leq \frac{\alpha}{\lambda_{j'}}$, 则由(38)式有 $r_{j'}^* = 0$, 然后用 $\sum_{j \neq j'} r_j^* = 1$ 重新确定 α , 直到剩下的 j 全有

$y_j > \frac{\alpha}{\lambda_j}$, 从而得到 r_j^* . 这样的 j 至少有一个.

结构的变化,或电子、钢铁、机械、建筑及第三产业中劳动力构成的演变等。

表1 调入比例 r 对 $a(t)$ 的调节

t	1	2	3	4	5	6	7
$r(t)$	0.5	0.639	0.747	0.827	0.883	0.922	0.949
	0.5	0.361	0.253	0.173	0.117	0.078	0.051
	0	0	0	0	0	0	0
$a(t)$	0.1	0.165	0.207	0.235	0.253	0.264	0.272
	0.1	0.165	0.207	0.235	0.253	0.264	0.272
	0.8	0.670	0.586	0.531	0.495	0.472	0.457

本节讨论的是最基本的、也是最简单的问题,即在总人数和内部转移比例不变的情况下,用调入比例来控制等级结构的变化.为了解决实际问题可以有各方面的推广,例如总人数按一定比例增长的情况(基本方程如(11)式);调入比例有上下界的情况;调入比例固定而用转移比例控制等级结构的问题,事实上许多社会系统是从外部向最低等级调入成员,如学生入学,军人入伍.新教师也基本上由助教当起,即可认为调入比例固定为 $r = (1, 0, \dots, 0)$.而转移比例,比如只考虑提升一级的比例,却是按照人们制订的政策可以改变的.用转移比例对等级结构进行控制的问题要比用调入比例复杂得多,因为调入比例是 k 维向量(实际上只有 $k-1$ 个分量可变),而转移比例,即使只许提升一级也有 $2k-1$ 个可以调节的量(如果退出比例 w 也可以改变).控制变量多了,对等级结构的调节更为灵活,计算也更为复杂.上述各种推广问题的讨论可参阅[6].

12.5 资 金 流 通

若干地区之间资金每年按一定比例相互流动,各个地区还有一部分资金流出这些地区,并且不再回来.银行为了使这些地区的资金分布趋向给定的稳定分布,计划每年向各地区投放或收回一定的资金.本节要建立一个模型描述各地区资金分布的变化规律,讨论在什么条件下可以趋近稳定分布,并确定银行应投放或收回多少资金^[64].

这个问题与上节的等级结构有相似之处.地区间的资金流通可类比等级间的成员转移,资金流出这些地区可类比成员退出系统,而银行投放或收回资金相当于成员的调入.也有几点不同之处,一是进入各地区的资金可正(投放)可负(收回),而成员的调入比例不能为负;二是各地区资金总和每年是变化的,而上节是在系统总人数不变的假定下进行讨论的.

下面先建立资金分布的基本方程,再研究趋向稳定分布的问题.

设有 k 个地区,第 t 年地区 i 的资金为 $c_i(t)$, $i=1,2,\dots,k, t=0,1,2,\dots$, 每年从地区 i 流入地区 j 的资金的比率为 p_{ij} , 每年银行向地区 i 投放的资金为 d_i (当 d_i 为负时表示从地区 i 收回). 这些量满足 $c_i(t) \geq 0, p_{ij} \geq 0, \sum_{j=1}^k p_{ij} \leq 1$ (总有某些地区每年有一定比例资金流出该系统). 记 $c(t) = (c_1(t), c_2(t), \dots, c_k(t))$, $Q = \{p_{ij}\}$, $d = (d_1, d_2, \dots, d_k)$, 类似于上节的(6)式, 容易得到

$$c(t+1) = c(t)Q + d \quad (1)$$

经递推可得

$$c(t) = c(0)Q^t + d \sum_{s=0}^{t-1} Q^s \quad (2)$$

如果 k 个地区的资金视为系统的 k 个状态,并增加一个状态 0 表示资金流出这个系统,资金流通的无后效性表明可以用马氏链模型描述其变化过程. 暂不考虑资金投放,资金在 $k+1$ 个状态间的转移矩阵可表为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R & Q \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中第 1 行对应于状态 0, 因为资金一旦流出系统, 就不再回来, 所以状态 0 是一个吸收状态, 不妨假定各地区均对应于非吸收状态, 并且从这些状态出发可以到达状态 0, 即形成一个吸收链(12.1 节定义 2). 于是由 12.1 节转移矩阵 P 的标准形式和定理 4 可知, $I - Q$ 可逆, 且 $(I - Q)^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} Q^s$. 这隐含着 $Q^t \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$. 这样对(2)式令 $t \rightarrow \infty$ 就有

$$c(\infty) = d(I - Q)^{-1} \quad (4)$$

设银行希望各地区资金趋向于稳定分布 c^* , 在(4)式中令 $c(\infty) = c^*$ 可以得到

$$d = c^*(I - Q) = c^* - c^*Q \quad (5)$$

这就是说, 对于给定的 c^* 和 Q , 由(5)式算出的 d 可使 $c(t) \rightarrow c^* (t \rightarrow \infty)$. 但是我们必须检查当(5)代入(2)式后得到的

$$c(t) = c(0)Q^t + (c^* - c^*Q) \sum_{s=0}^{t-1} Q^s \quad (6)$$

是否对于 $t=1, 2, \dots$ 都有 $c(t) \geq 0$ (指每个 $c_i(t) \geq 0$).

分两种情况讨论上述问题.

1. 因为 $c(0) \geq 0, Q \geq 0$ (指每个元素不小于零), 所以由(6)式可知, 若

$$c^* \geq c^*Q \quad (7)$$

则对于任意的初始分布 $c(0)$ 都有 $c(t) \geq 0 (t=1, 2, \dots)$. 这时由(5)式给出的 d

就是使 $c(t) \rightarrow c^*(t \rightarrow \infty)$ 的银行资金投放量,不妨称 c^* 是可达到的.

2. (7)式只是 $c(t) \geq 0$ 的充分条件. 当(7)式不成立时可以进一步将(6)式化为

$$\begin{aligned} c(t) &= c(0)Q^t + c^*(I - Q)(I + Q + \cdots + Q^{t-1}) \\ &= c(0)Q^t + c^*(I - Q^t) \\ &= c^* - [c^* - c(0)]Q^t \end{aligned} \quad (8)$$

记

$$h(t) = [c^* - c(0)]Q^t \quad (9)$$

由(8)式可得 $c(t) \geq 0$ 的充要条件为 E_t :

$$c^* \geq h(t), \quad t=1, 2, \dots \quad (10)$$

条件 E_t 可以方便地用来检验 c^* 不能达到, 因为只要存在一个 t , 使 E_t 不满足即可; 但是无法判断 c^* 可以达到, 因为我们不能对所有的 $t=1, 2, \dots$ 都来验证 E_t 的正确性.

有一个判断 E_t 成立的充分条件, 可以与条件 E_t 结合起来使用. 下面不加证明地引述一个定理.

定理 设 $c^* > 0$, $h(s)$ 由(9)式定义, 记^①

$$\bar{h}(s) = \sum_{i=1}^k |h_i(s)|, \quad h(s) = (h_1(s), \dots, h_k(s)) \quad (11)$$

1) 若存在某个 $s(s=0, 1, 2, \dots)$ 使条件 F_s :

$$\min_i c_i^* \geq \bar{h}(s) \quad (12)$$

成立, 则条件 E_t 对 $t \geq s$ 均成立.

2) 必存在某个 s_0 使条件 F_{s_0} 成立.

根据以上的分析(7)~(12)式, 对于给定的 c^* , Q 和 $c(0)$, 判断 c^* 能否达到的程序如图1所示.

按照图中箭头方向先检验(7)式是否成立, 然后交替检验条件 $F_s (s=0, 1, 2, \dots)$ 和条件 $E_t (t=1, 2, \dots)$. 一旦 F_s 成立, 则 c^* 可达到; 一旦 E_t 不成立, 则 c^* 不可达到. 而根据上述定理, 判断程序不会无限地进行下去.

例 3个地区的资金流通比例矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

^① 实际应用中常能满足 c_i^* 不为零的要求.

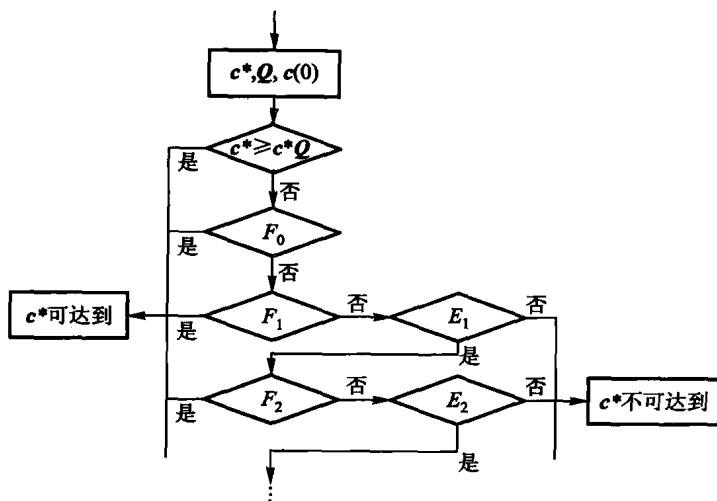


图1 判断 c^* 是否可达到程序示意图

初始分布为 $c(0) = (9, 3, 6)$. 判断稳定分布 $c^* = (12, 6, 3)$ 能否达到;若能达到,问银行每年应如何投放资金.

按照图1的程序,步骤如下:

1. 检验 $c^* \geq c^*Q$. 计算 $c^*Q = (6, 4, 7)$, $c^* \geq c^*Q$ 不成立.
2. 检验 F_0 . 计算 $h(0) = c^* - c(0) = (3, 3, -3)$, $\bar{h}(0) = 9$, 而 $\min_i c_i^* = 3$, $F_0: \min_i c_i^* \geq \bar{h}(0)$ 不成立.
3. 检验 F_1 . 计算 $h(1) = h(0)Q = (2, -1, 1)$, $\bar{h}(1) = 4$, $F_1: \min_i c_i^* \geq \bar{h}(1)$ 不成立.
4. 检验 E_1 . $c^* \geq h(1)$ 成立.
5. 检验 F_2 . 计算 $h(2) = h(1)Q = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\bar{h}(2) = \frac{4}{3}$, $F_2: \min_i c_i^* \geq \bar{h}(2)$ 成立.

检验完毕, c^* 可达到. 银行应投放的资金 d 由(5)式计算, 有

$$d = c^* - c^*Q = (6, 2, -4)$$

即每年向地区1, 2分别投放6和2个资金单位, 从地区3收回4个资金单位.

习 题

1. 在12.2节中将钢琴销售的存贮策略修改为: 当周末库存量为0或1时, 订购, 使下周初的库存达到3架; 否则, 不订购. 建立马氏链模型, 计算稳态下失去销售机会的概率和每周

的平均销售量.

2. 在 12.2 节中将钢琴销售的存贮策略修改为:当周末库存量为 0 时,订购量为本周销售量加 2 架;否则,不订购. 建立马氏链模型,计算稳态下失去销售机会的概率和每周的平均销售量.

3. 对于 12.3 节中的近亲繁殖模型,推导转移概率矩阵 P ((6) 式) 的第 4, 5 行.

4. 在基因遗传过程中,考虑 3 种基因类型:优种 $D(dd)$, 混种 $H(dr)$ 和劣种 $R(rr)$. 对于任意的个体,每次用一混种与之交配,所得后代仍用混种交配,如此继续下去. 构造马氏链模型,说明它是正则链,求稳态概率及由优种和混种出发的首次返回平均转移次数. 如果改为每次用优种交配,再构造马氏链模型,说明它是吸收链,求由混种和劣种出发变为优种的平均转移次数.

5. 色盲具有遗传性,由两种基因 c 和 s 的遗传规律决定. 男性只有一个基因 c 或 s ; 女性有两个基因 cc, cs 或 ss , 当某人具有基因 c 或 cc 时则呈色盲表征. 基因遗传关系是:男孩等概率地继承母亲两个基因中的一个;女孩继承父亲的那个基因,并等概率地继承母亲的一个基因. 由此可以看出,当母亲是色盲时男孩一定色盲,女孩却不一定. 用马氏链模型研究非常极端的近亲结婚情况下的色盲遗传,即同一对父母的后代婚配. 父母的基因组合共有 6 种类型,形成马氏链模型的 6 种状态,问哪些是吸收状态. 若父亲非色盲而母亲为色盲,问平均经过多少代其后代就会变成全为色盲或全不为色盲的状态,变成这两种状态的概率各为多大?

6. 两种不同的外部表征是由两种不同基因决定的,这两种基因的遗传关系是相互独立的. 例如猪的毛有颜色表征(黑和白)与质地表征(粗和光). 对于每一种表征仍分为优种 $D(dd)$, 混种 $H(dr)$ 和劣种 $R(rr)$ 3 种基因类型,两种表征的组合则有 9 种基因类型. 在完全优势遗传中,优种和混种的猪毛颜色黑、质地粗,劣种则颜色白、质地光,这样共有 4 种外部表征组合,即黑粗、黑光、白粗、白光. 假设群体的两种外部表征对应的基因中 d 和 r 的比例相同(即均为 $1/2$),在随机交配情况下构造马氏链模型. 证明在稳定情况下上述 4 种外部表征组合的比例为 $9:3:3:1$.

7. 设等级结构的转移比例矩阵 Q 仍由 12.4 节 (16) 式给出,理想的结构为 $a^* = (0.2, 0.3, 0.5)$, 证明 $a^* \in B(\text{稳定域})$, 若初始结构为 $a(0) = (0.2, 0.8, 0)$, 用 12.4 节介绍的问题 E_1, E_2, E_3 的解法求调入比例 r , 使 $a(1)$ 尽量接近 a^* .

8. 如果在等级结构模型中将距离函数的定义由 12.4 节 (26) 式改为 $D(a^{(1)}, a^{(2)}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i |a_i^{(1)} - a_i^{(2)}|$, 试给出求解问题 E_i 的方法.

*9. 一个服务网络由 k 个工作站 v_1, v_2, \dots, v_k 依次串接而成,当某种服务请求到达工作站 v_i 时, v_i 能够处理的概率为 p_i , 转往下一站 v_{i+1} 处理的概率为 q_i ($i=1, 2, \dots, k-1$, 设 $q_k=0$), 拒绝处理的概率为 r_i , 满足 $p_i + q_i + r_i = 1$. 试构造马氏链模型, 确定到达 v_i 的请求平均经过多少工作站才能获得接受处理或拒绝处理的结果, 被接受和拒绝的概率各多大?

*10. 用马氏链模型讨论空气污染问题. 有 k 个城市 v_1, v_2, \dots, v_k , 每一时刻 $t=0, 1, 2, \dots, v_i$ 的空气中污染物浓度为 $c_i(t)$, 从 t 到 $t+1$, v_i 空气中污染物扩散到 v_j 去的比例是 p_{ij} , 有 $\sum_{j=1}^k p_{ij} \leq 1$ ($i=1, 2, \dots, k$), 而扩散到 k 个城市之外的那部分污染物永远不再回来. 在每个时刻各城市的污染源都排出一定的污染物, 记 v_i 排出的为 d_i . 按照环境管理条例要求, 对充分大的 t 必须

$c_i(t) \leq c_i^*$. 试建立马氏链模型, 在已知 p_{ij} 和 c_i^* 的条件下确定 d_i 的限制范围, 满足管理条例的要求. 设 $k=3$, p_{ij} 由矩阵 $Q = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ 给出, $c_i^* = 25 (i=1, 2, 3)$, 求 d_i 的范围^[64].

第 12 章 习题参考解答

1. 仍以第 n 周初的库存量为状态 $S_n, S_n = 2, 3$. 需求概率不变. 容易算出状态转移概率矩阵为 $P = \begin{bmatrix} 0.368 & 0.632 \\ 0.368 & 0.632 \end{bmatrix}$. 稳态概率分布为 $w = (0.368, 0.632)$. 稳态下失去销售机会的概率 $p = 0.041$, 每周的平均销售量 $R = 0.947$.

2. 需求概率不变, 算出 $P(D_n = 0) = P(D_n = 1) = 0.368, P(D_n = 2) = 0.184, P(D_n = 3) = 0.061, P(D_n = 4) = 0.015, P(D_n = 5) = 0.003, P(D_n = 6) = 0.001, P(D_n > 6) = 0$ (在小数点后取 3 位意义下). 仍以第 n 周初的库存量为状态 $S_n, S_n = 1, 2, 3, \dots, 8$. 可以算出状态转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0.368 & 0 & 0.632 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.368 & 0.368 & 0 & 0.264 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.184 & 0.368 & 0.368 & 0 & 0.080 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.061 & 0.184 & 0.368 & 0.368 & 0 & 0.019 & 0 & 0 & 0 \\ 0.015 & 0.061 & 0.184 & 0.368 & 0.368 & 0 & 0.004 & 0 & 0 \\ 0.003 & 0.015 & 0.061 & 0.184 & 0.368 & 0.368 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0.001 & 0.003 & 0.015 & 0.061 & 0.184 & 0.368 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0.003 & 0.015 & 0.061 & 0.184 & 0.368 & 0.368 & 0 \end{bmatrix}$$

稳态概率分布为 $w = (0.2497, 0.2375, 0.3369, 0.1266, 0.0450, 0.0040, 0.0003, 0)$. 稳态下失去销售机会的概率 $p = 0.0919$.

3. 根据 12.3 节表 4 计算, 对于状态 $i = 1(DD), 2(RR), 3(DH), 4(DR), 5(HH), 6(HR), p_{45} = 1, p_{4j} = 0 (j \neq 5)$ 是显然的. $p_{51} = P(\text{后代配对为 } DD | \text{父母配对为 } HH) = 1/4 \times 1/4 = 1/16, p_{53} = P(\text{后代雄性为 } D, \text{雌性为 } H | \text{父母配对为 } HH) + P(\text{后代雄性为 } H, \text{雌性为 } D | \text{父母配对为 } HH) = 1/4 \times 1/2 + 1/2 \times 1/4 = 1/4, p_{54} = 1/4 \times 1/4 + 1/4 \times 1/4 = 1/8$. 其余类推.

4. 状态定义为 $i = 1(D), 2(H), 3(R)$, 用混种交配时, 转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

由 $P^2 > 0$ 知, 马氏链是正则链, 稳定状态向量为 $w = (1/4, 1/2, 1/4)$. 由优种 (D) 和混种 (R) 出发的首次平均转移次数分别为 4 和 2.

用优种交配时,转移概率矩阵为 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $i=1(D)$ 是吸

收状态, $p_{21} > 0$, 马氏链是吸收链.

由 $M = (I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $y = Me = (2, 3)^T$. 知由 $i=2(H)$, $i=3(R)$ 出发, 变为 $i=1(D)$ 的平均转移次数分别为 2 和 3.

5. 六种状态 (c, cc) , (s, ss) , (c, cs) , (c, ss) , (s, cc) , (s, cs) , 记作 $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$. 状态转移概率矩阵 P 及 $M = (I - Q)^{-1}$, $y = Me$, $F = MR$ 为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$M = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 8 \\ 8 & 1 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

可知, $i=1(c, cc)$, $2(s, ss)$ 是吸收态. 由 $i=5(s, cc)$ 平均经过 6 代变为 (c, cc) 的概率为 $2/3$, 变为 (s, ss) 的概率为 $1/3$.

6. 定义 $i=1(DD)$, $2(DH)$, $3(DR)$, $4(HD)$, $5(HH)$, $6(HR)$, $7(RD)$, $8(RH)$, $9(RR)$. 其中第 1 字母表示颜色基因类型, 第 2 字母表示质地基因类型. 在这两种基因类型中 d 与 r 的比例均为 $1/2$, 且随机交配方式下, 转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/8 & 1/8 & 0 \\ 1/16 & 1/8 & 1/16 & 1/8 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & 1/8 & 1/16 \\ 0 & 1/8 & 1/8 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 & 1/4 & 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

DD DH DR HD HH HR RD RH RR

与 12.3 节(1)式转移概率矩阵(其中 $p = q = 1/2$) $P' = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{matrix} D \\ R \\ H \end{matrix}$

比较,不妨用分块矩阵将 P 表示为 $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}$, P' 表示为 $P' = (a'_{ij})$. 则

可以看出 $P_{ij} = a'_{ij} P'(i, j = 1, 2, 3)$. 从本题与 P' 的意义不难解释上面的结果.

注意到,对于 P' 的马氏链,稳定分布是 $w' = (1/4, 1/2, 1/4)$, 它对应于 H 的行向量. 可以验证,对于本题,稳定分布是对应于 HH 的行向量,即 $w = (1/16, 1/8, 1/16, 1/8, 1/4, 1/8, 1/16, 1/8, 1/16)$. 4 种外部表征组合:黑粗包含状态 1(DD), 2(DH), 4(HD), 5(HH), 黑光包含 3(DR), 6(HR), 白粗包含 7(RD), 8(RH), 白光为 9(RR). 将 w 中对应这 4 个组合的概率相加,即得其比例为 9:3:3:1.

7. 由 12.4 节(17)式可立即验证 $a^* \in B$. 在所给数据下,可以算出 $y_1 = 1$, $y_2 = -2.6$, $y_3 = 2.6$, 故令 $r_2^* = 0$, 再由 $r_1 = y_1 - \alpha$, $r_3 = y_3 - \alpha$, 确定 $\alpha = 1.3$. 因 $y_1 - 1.3 \leq 0$, 故令 $r_1^* = 0$, 由 $r_3 = y_3 - \alpha$ 重新确定 $\alpha = 1.6$, 故 $r_3^* = 1$. 即调入比例 $r^* = (0, 0, 1)$, 可使 $a(1)$ 尽量接近 a^* , 不难算出 $a(1) = (0.1, 0.56, 0.34)$.

8. 对于问题 E_1 , 在与(29)式一样的记号下, 问题 E_2 为

$$\min_{r_i} \sum_{i=1}^k \lambda_i |y_i - r_i|, r_i \geq 0, \sum_{i=1}^k r_i = 1$$

与 12.3 节解 E_2 的方法相似, 得 y_i 分为 $y_i \geq 0$ 和 $y_i < 0$, 有

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i |y_i - r_i| = \sum_j \lambda_j (y_j - r_j) + \sum_l \lambda_l (|y_l| + r_l),$$

令 $r_l = r_l^* = 0$, r_j 由问题 E_3

$$\min_{r_j} \sum_j \lambda_j y_j - \sum_j \lambda_j r_j, 0 \leq r_j \leq y_j, \sum_j r_j = 1$$

确定. 为解 E_3 , 将 λ_j 由大到小排列, 不妨设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$, 令 $r_1 = r_1^* = \min(y_1, 1)$, 若 $r_1^* = 1$ 则停止; 若 $r_1^* < 1$, 则令 $r_2 = r_2^* = \min(y_2, 1 - r_1^*)$; 若 $r_1 + r_2 = 1$, 则停止, 否则继续进行下去.

特别, 若 $\lambda_j = 1 (\forall j)$, $\sum_j r_j = 1$ 为常数, 则 r_j 可在满足条件 $0 \leq r_j \leq y_j$, $\sum_j r_j = 1$ 下任取.

*9. 服务请求到达工作站 v_i 记作状态 $i, i = 1, 2, \dots, k$. 增加状态 $i = 0$ 表示请

求被拒绝; $i=00$ 表示请求被接受. 于是转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & & 0 & \\ p_1 & r_1 & 0 & q_1 & \\ p_2 & r_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{k-1} & r_{k-1} & 0 & & q_{k-1} \\ p_k & r_k & & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (00) \\ (0) \\ (1) \\ (2) \\ \vdots \\ (k-1) \\ (k) \end{matrix}$$

(00) (0) (1) (2) ... (k)

可以算出

$$M = (I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & q_1 & q_1 q_2 & \cdots & q_1 q_2 \cdots q_{k-1} \\ & 1 & q_2 & \cdots & q_2 q_3 \cdots q_{k-1} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

到达 v_i 的请求获得接受或拒绝时, 平均经过的工作站数由 $y = Me$ 算出为 $1 + q_i + q_i q_{i+1} + \cdots + q_i \cdots q_{k-1}$. 由 $F = MR$ 可得, 被接受的和被拒绝的概率分别为 $p_i + q_i p_{i+1} + \cdots + q_i \cdots q_{k-1} p_k$ 和 $r_i + q_i r_{i+1} + \cdots + q_i \cdots q_{k-1} r_k$.

10. 建模完全类似于 12.5 节资金流通, 其中 (2) 式为 $c(t) = c(0)Q^T + d \sum_{s=0}^{t-1} Q^s$. $c(t) = (c_1(t), \cdots, c_k(t))$ 为污染物浓度. $Q = (p_{ij})$ 为扩散比例. $d = (d_1, \cdots, d_k)$ 为排放浓度. 由 (4) 式, 在 t 充分大时, 要求 $c(\infty) = d(I - Q)^{-1} \leq c^T, c^ = (c_1^*, \cdots, c_k^*)$. d 的限制范围由此式确定. 对于所给的 Q 和 c^* , 上式为

$$\begin{cases} 3d_1 + 3d_2 + 3d_3 \leq 25 \\ 3d_1 + 6d_2 + 6d_3 \leq 25 \\ 3d_1 + 4.5d_2 + 6d_3 \leq 25 \end{cases}$$

可以看出, 对于 $d_1, d_2, d_3 \geq 0$, 只需 $3d_1 + 6d_2 + 6d_3 \leq 25$ 即可.