05 信号的傅里叶变换

傅里叶级数

- 针对连续周期信号

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \, e^{jn\omega t}$$

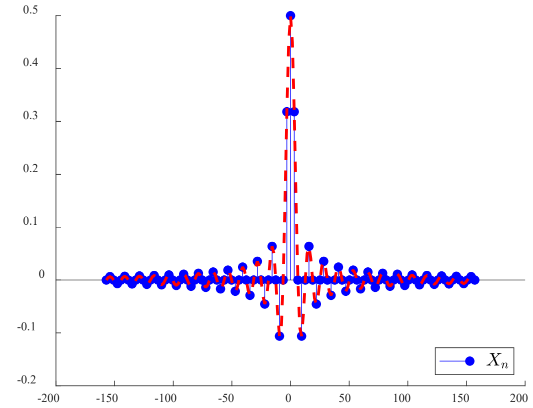
其中

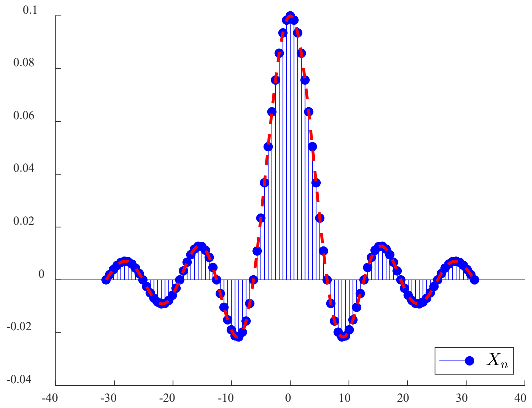
$$X_n = \frac{\langle x, e^{jn\omega t} \rangle}{\langle e^{jn\omega t}, e^{jn\omega t} \rangle} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-jn\omega t} \, \mathrm{d}t$$

- 如何推广到（一般的）**非周期**信号?

离散频谱特性

- 增大周期$T \to \infty$
  - 信号近似非周期信号，谱线间隔$\omega \to 0$，离散频谱趋于连续频谱
  - $X_n \to 0$





频谱密度

- 傅里叶级数

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{X(nj\omega)}_{X_n}e^{jn\omega t}$$

$$X(nj\omega)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\cdot e^{-jn\omega t}\,\mathrm{d}t$$

- 两边乘T

$$TX(nj\omega)=\frac{X(nj\omega)2\pi}{\omega}=\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\cdot e^{-jn\omega t}\,\mathrm{d}t$$

- $T\rightarrow\infty$时$TX(nj\omega)=\frac{X(nj\omega)2\pi}{\omega}$趋于有限值
- 定义频谱密度函数

$$X(j\omega)=\lim_{T\to\infty}X(nj\omega)T=\lim_{\omega\to 0}\frac{X(nj\omega)2\pi}{\omega}$$

- $\frac{X(nj\omega)}{\omega}$表示单位频带的频谱值，即频谱密度

$$X(j\omega)=\lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\cdot e^{-jn\omega t}\,\mathrm{d}t\quad\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

- 谱线间隔$\Delta(n\omega)=\omega$

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(nj\omega)\,e^{jn\omega t}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi\,X(nj\omega)}{\omega}e^{jn\omega t}\cdot\Delta(n\omega)$$

- 得

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)\,e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

傅里叶变换

- 傅里叶变换

$$X(j\omega)=\mathcal{F}[x(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

- 傅里叶逆变换

$$x(t)=\mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)\,e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

非周期信号可以分解为无数个频率为ω，复振幅为$\frac{X(j\omega)}{2\pi}\mathrm{d}\omega$的虚指数信号$e^{j\omega t}$的线性组合。

$X(j\omega)$一般是复函数，

$$X(j\omega)=|X(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$|X(j\omega)|$ $-\ \omega$曲线为幅度频谱

$e^{j\varphi(\omega)}$ $-\ \omega$曲线为相位频谱

傅里叶变换

- 对于实信号$x(t)$，有

$$x(t)=\mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)\,e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}\,e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|\cos\big(\omega t+\varphi(\omega)\big)\,\mathrm{d}\omega+\frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|\sin\big(\omega t+\varphi(\omega)\big)\,\mathrm{d}\omega$$

- 傅里叶变换的正弦/余弦分量表示

收敛条件（类比傅里叶级数的收敛条件）

- 能量条件
- 波形条件
  - 非周期信号在无限区间上绝对可积 $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$
  - 在任意有限区间内，信号只有有限个最大值和最小值
  - 在任意有限区间内，信号仅有有限个不连续点，且这些点必须是有限值
- 是**充分**条件，但不是必要条件

傅里叶变换与傅里叶级数

- $\hat{x}(t)$为周期信号，$x(t)$为有限持续信号，信号的值为$\hat{x}(t)$在一个周期T内的值，在周期外的值为0
- $x(t)$的傅里叶变换

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t}\, \mathrm{d}t$$

- $\hat{x}(t)$的傅里叶级数

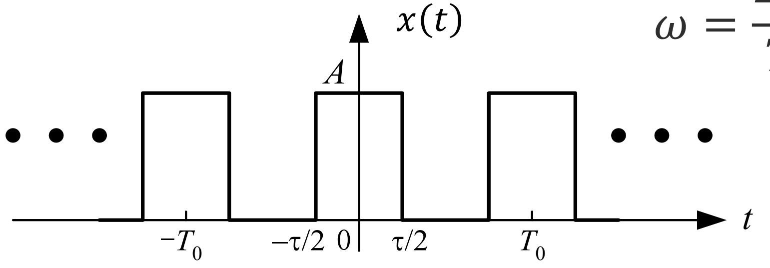
$$X_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \hat{x}(t) e^{-jn\omega t} \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega t} \mathrm{d}t \qquad x(t)\text{在}-\frac{T}{2}\sim\frac{T}{2}\text{之外值为}0$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jn\omega t} \mathrm{d}t = \frac{1}{T} X(j\omega)\Big|_{\omega = n\omega}$$

傅里叶变换与傅里叶级数

计算**周期**矩形脉冲信号的傅里叶**级数**

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$



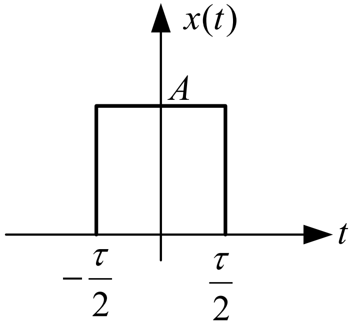
$$X_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cdot e^{-jn\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A\cdot e^{-jn\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{A\tau}{T}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right)$$

- 傅里叶级数

$$x(t) = \frac{A\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right)e^{jn\omega t}$$

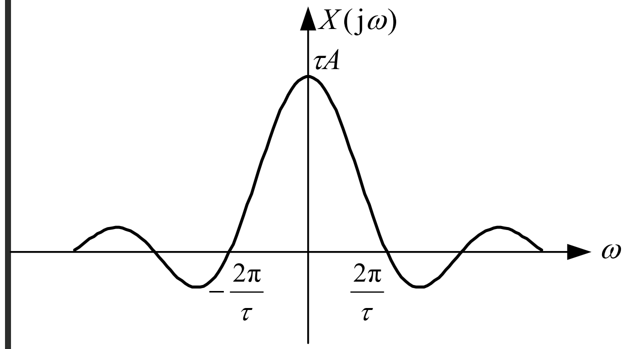
求图示**非周期**矩形脉冲信号的频谱函数。



$$x(t) = \begin{cases} A, & |t| \le \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

- 由傅里叶变换定义式，可得

$$X(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = A\tau\cdot\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

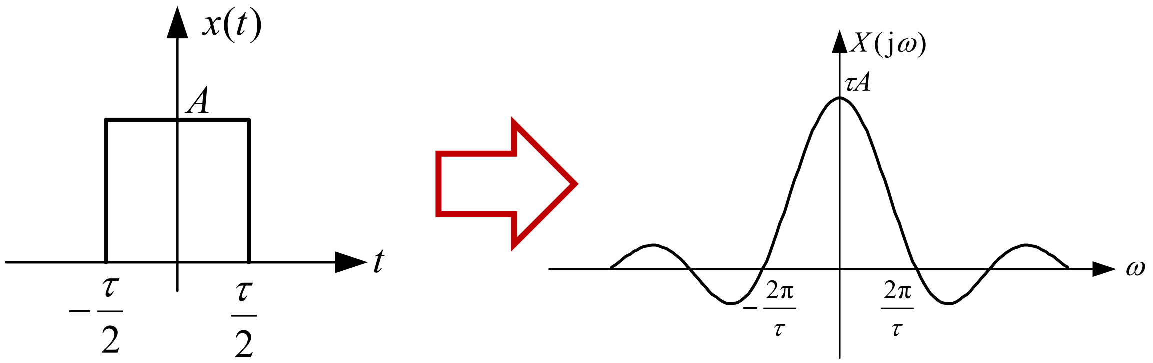


幅度谱： $|X(j\omega)| = A\tau\left|Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right|$

相位谱： $\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & \frac{4n\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{2(2n+1)\pi}{\tau} \\ \pi, & \frac{2(2n+1)\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{4(n+1)\pi}{\tau} \end{cases}$

傅里叶变换的特点

- 非周期矩形脉冲信号的频谱是**连续**频谱，其形状与周期矩形脉冲信号离散频谱的包络线相似



- 周期信号的离散频谱可以通过对非周期信号的连续频谱**等间隔抽样**求得

- 信号在时域有限，则在频域将**无限延续**

- 信号的频谱分量主要集中在零频到第一个过零点之间，工程中往往将此宽度作为**有效带宽**

- 脉冲宽度τ越窄，有效带宽越宽，高频分量越多。即信号信息量大，传送信号所占用频带越宽。

概要

1. 典型信号的傅里叶变换：
傅里叶变换的定义和计算技巧

2. 傅里叶变换的性质：
对称性，尺度变换，频域卷积

3.周期信号的傅里叶变换：
关联连续信号的傅里叶变换和傅里叶级数

4. 傅里叶变换的应用：
傅里叶变换思想在AI中的应用

概要

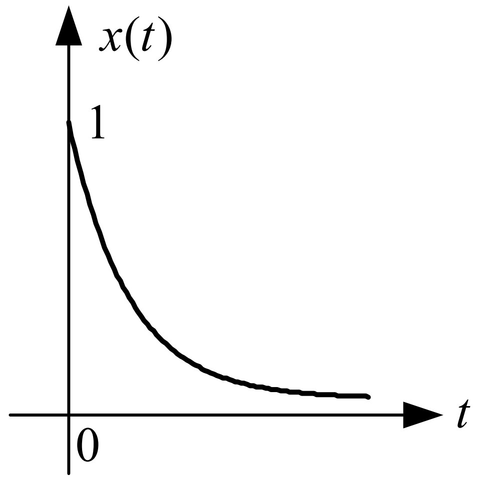
1. 典型信号的傅里叶变换：
傅里叶变换的定义和计算技巧

2. 傅里叶变换的性质：
对称性，尺度变换，频域卷积

3.周期信号的傅里叶变换：
关联连续信号的傅里叶变换和傅里叶级数

4. 傅里叶变换的应用：
傅里叶变换思想在AI中的应用

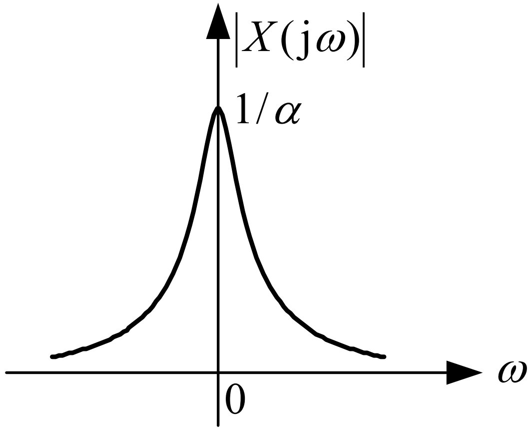
单边指数信号的频谱



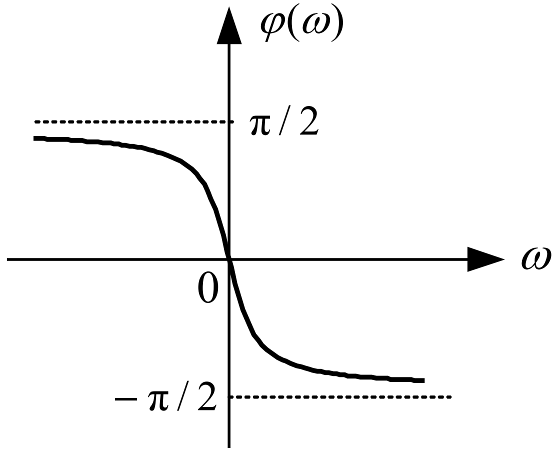
- 单边指数信号 $x(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$，$\alpha>0$，
- 根据定义

$$X(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{j}\omega)t}}{-(\alpha+\mathrm{j}\omega)}\Bigg|_{0}^{\infty}=\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}$$

幅度谱：$|X(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$



相位谱：$\varphi(\omega)=-\arctan(\frac{\omega}{\alpha})$



双边指数信号的频谱

- 双边指数信号 $e^{-a|t|}$

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|t|}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{-at}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{0}e^{at}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t=2\int_{0}^{\infty}e^{-at}\cos\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$=2\mathrm{e}^{-\alpha t}\frac{(\omega\sin\omega\,t-\alpha\cos\omega\,t)}{\alpha^2+\omega^2}\bigg|_0^{\infty}=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

- 幅度谱：$|X(\mathrm{j}\omega)|=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$

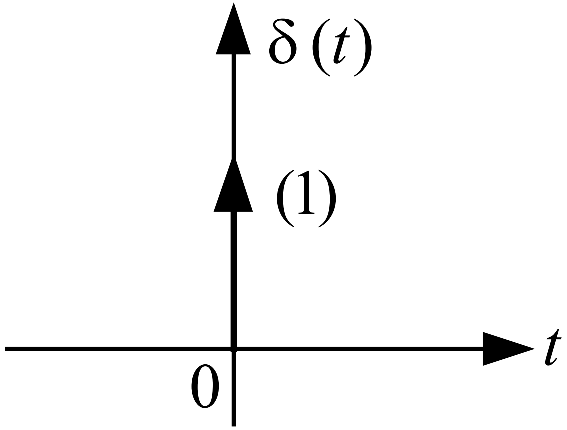
- 相位谱：$\varphi(\omega)=0$

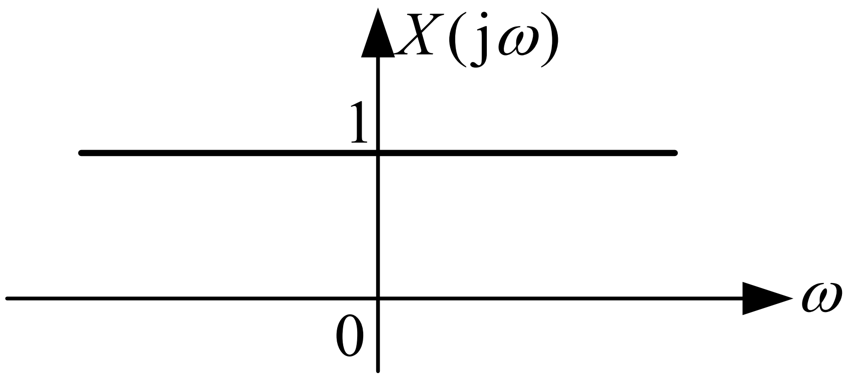
单位冲激信号的频谱

- 单位冲激信号$\delta(t)$
  - 由于冲激信号的抽样特性：

$$F[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=1$$

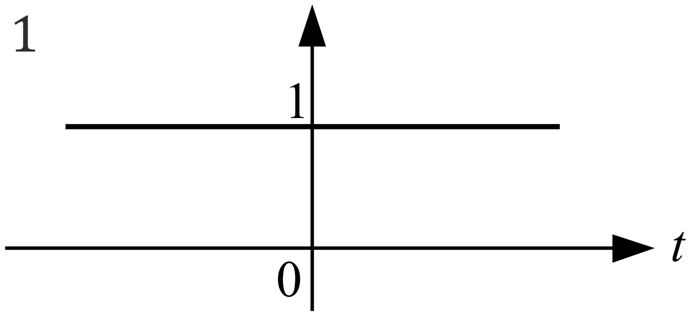
  - 时域变化异常剧烈的冲激函数包含幅度相等的所有频率分量，这种频谱也称为“均匀谱”或“白色谱”





直流信号的频谱

- 直流信号$x(t) = 1$



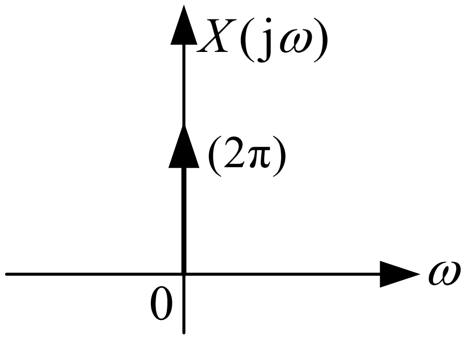
$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

- 类比$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$，由于

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\, e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}$$

- 所以

$$\mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega)] = 1$$



- 直流信号的傅里叶变换是冲激信号

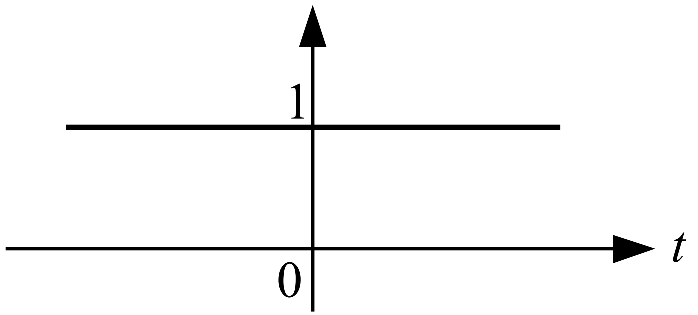
直流信号的频谱

- 直流信号$x(t) = 1$
- 直流信号**不满足**绝对可积条件，可用**极限**的方法求出傅里叶变换。

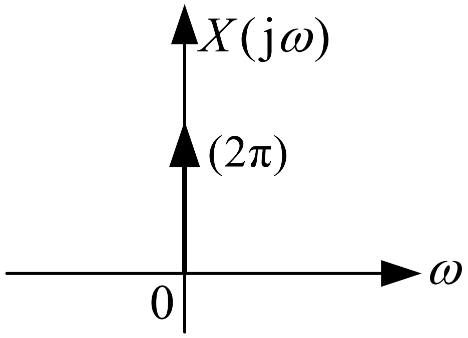
$$\mathcal{F}[1] = \lim_{\sigma \to 0} F\left[1 \cdot \mathrm{e}^{-\sigma|t|}\right] = \lim_{\sigma \to 0}\left[\frac{2\sigma}{\sigma^2 + \omega^2}\right] = 2\pi\delta(\omega)$$

$$\lim_{\sigma \to 0}\left[\frac{2\sigma}{\sigma^2 + \omega^2}\right] = \begin{cases} 0 & \omega \neq 0 \\ \infty & \omega = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} \mathrm{d}\omega = 2\arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 2\pi$$



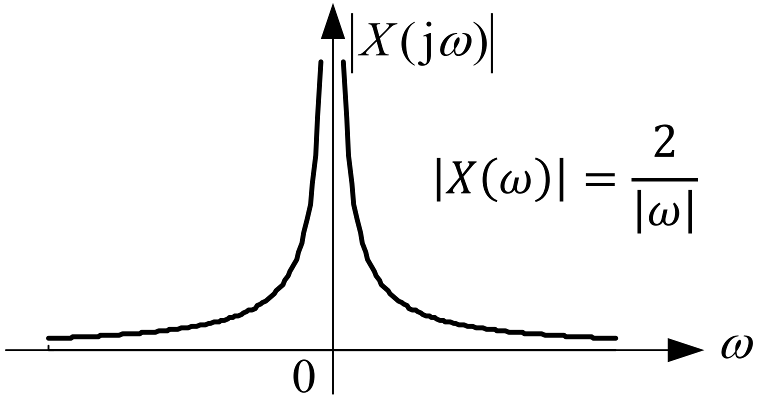
- 对照冲激、直流时频曲线可看出：
  - 时域持续越宽的信号，其频域的频谱越窄；
  - 时域持续越窄的信号，其频域的频谱越宽。



符号函数的频谱

- 符号函数信号

$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}-1 & t<0\\ 0 & t=0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

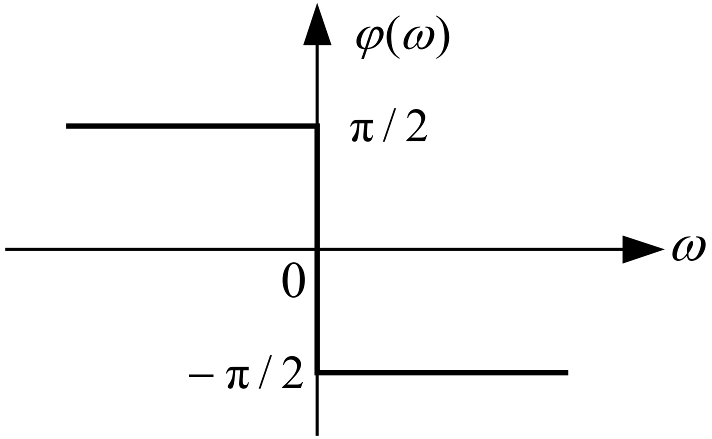


- 根据定义

$$\mathcal{F}[\mathrm{sgn}(t)\mathrm{e}^{-\sigma|t|}]=\int_{-\infty}^{0}(-1)\mathrm{e}^{\sigma t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\sigma t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

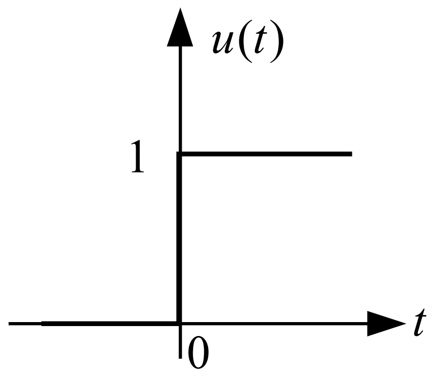
$$=-\left.\frac{\mathrm{e}^{(\sigma-\mathrm{j}\omega)t}}{\sigma-\mathrm{j}\omega}\right|_{t=-\infty}^{0}-\left.\frac{\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}}{\sigma+\mathrm{j}\omega}\right|_{t=0}^{\infty}=\frac{-1}{\sigma-\mathrm{j}\omega}+\frac{1}{\sigma+\mathrm{j}\omega}$$

$$\mathcal{F}[\mathrm{sgn}(t)]=\lim_{\sigma\to 0}\{\mathcal{F}[\mathrm{sgn}(t)\mathrm{e}^{-\sigma|t|}]\}=\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$$



单位阶跃信号的频谱

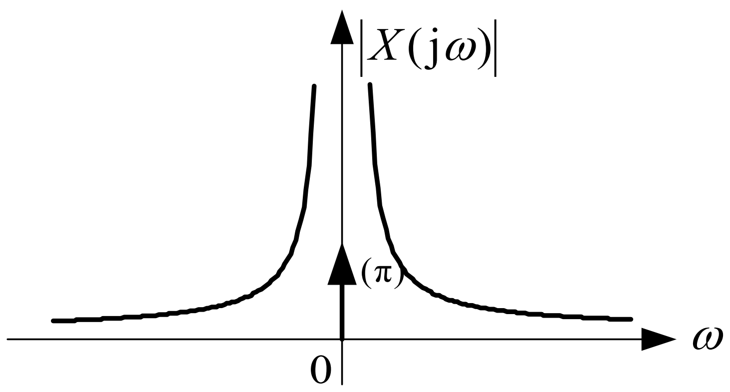
- 单位阶跃信号$u(t)$

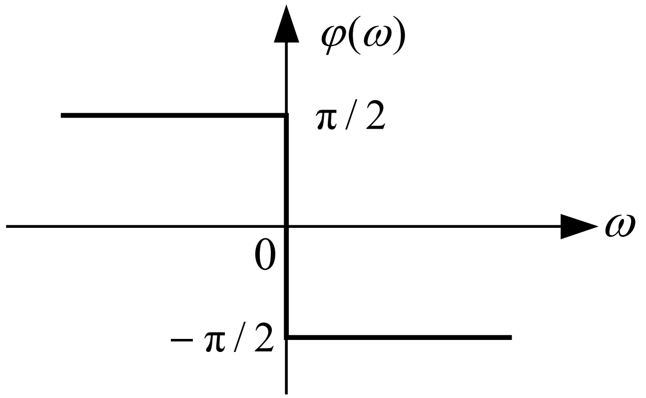


$$u(t)=\frac{1}{2}\{u(t)+u(-t)\}+\frac{1}{2}\{u(t)-u(-t)\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$$

$$\mathcal{F}[u(t)]=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$$

  - 由于$u(t)$含有直流分量，因此$\omega=0$处有冲激函数
  - $u(t)$在$t=0$时有跳变，频谱中也包含其他分量





概要

1. 典型信号的傅里叶变换：
傅里叶变换的定义和计算技巧

2. 傅里叶变换的性质：
对称性，尺度变换，频域卷积

3.周期信号的傅里叶变换：
关联连续信号的傅里叶变换和傅里叶级数

4. 傅里叶变换的应用：
傅里叶变换思想在AI中的应用

线性特性

- 傅里叶变换的线性特性：若$x_1(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_1(j\omega)$，$x_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_2(j\omega)$，

  则$ax_1(t) + bx_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} aX_1(j\omega) + bX_2(j\omega)$，其中$a$和$b$均为常数

对称性

- 对称性：若$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega)$，则$X(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 2\pi x(-j\omega)$；若$x(t)$为偶函数，则$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(j\omega)$
- 由于

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega$$

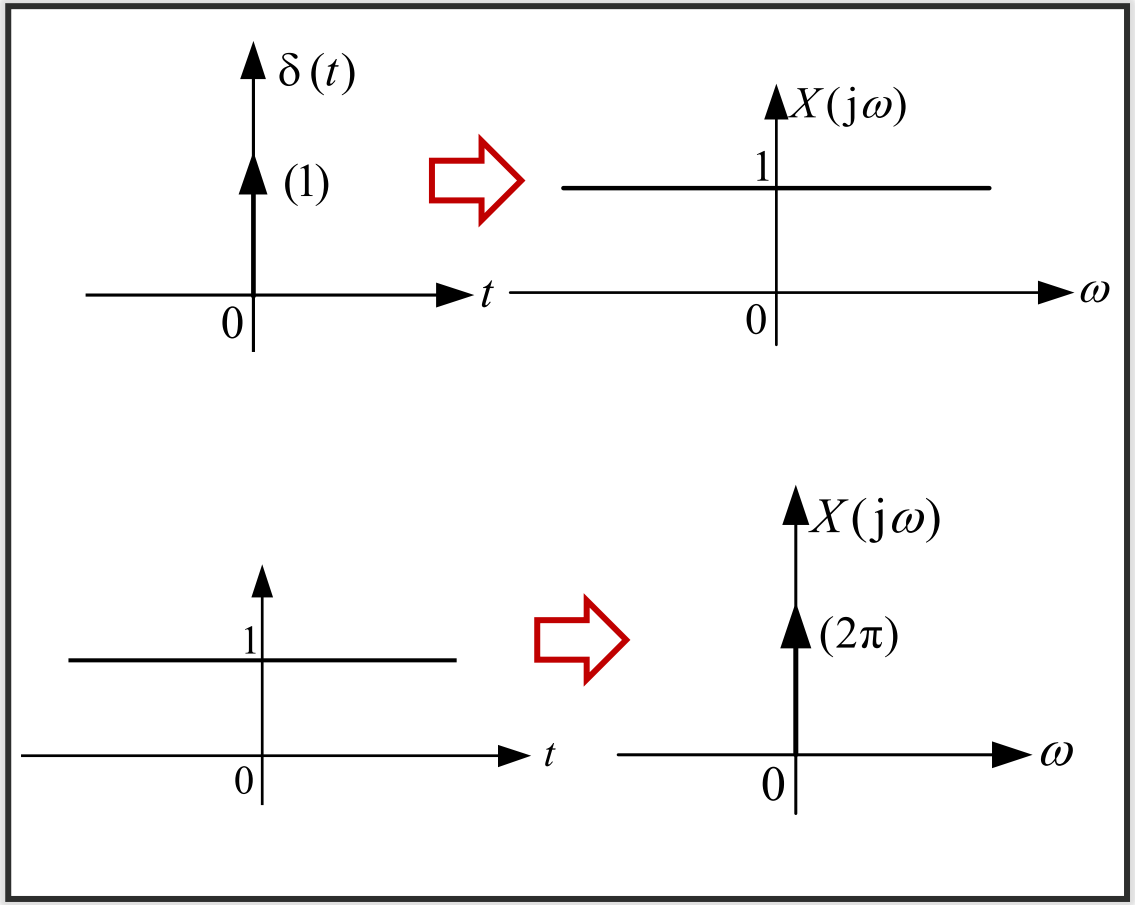
$$x(-t) = \mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{-j\omega t} \mathrm{d}\omega$$

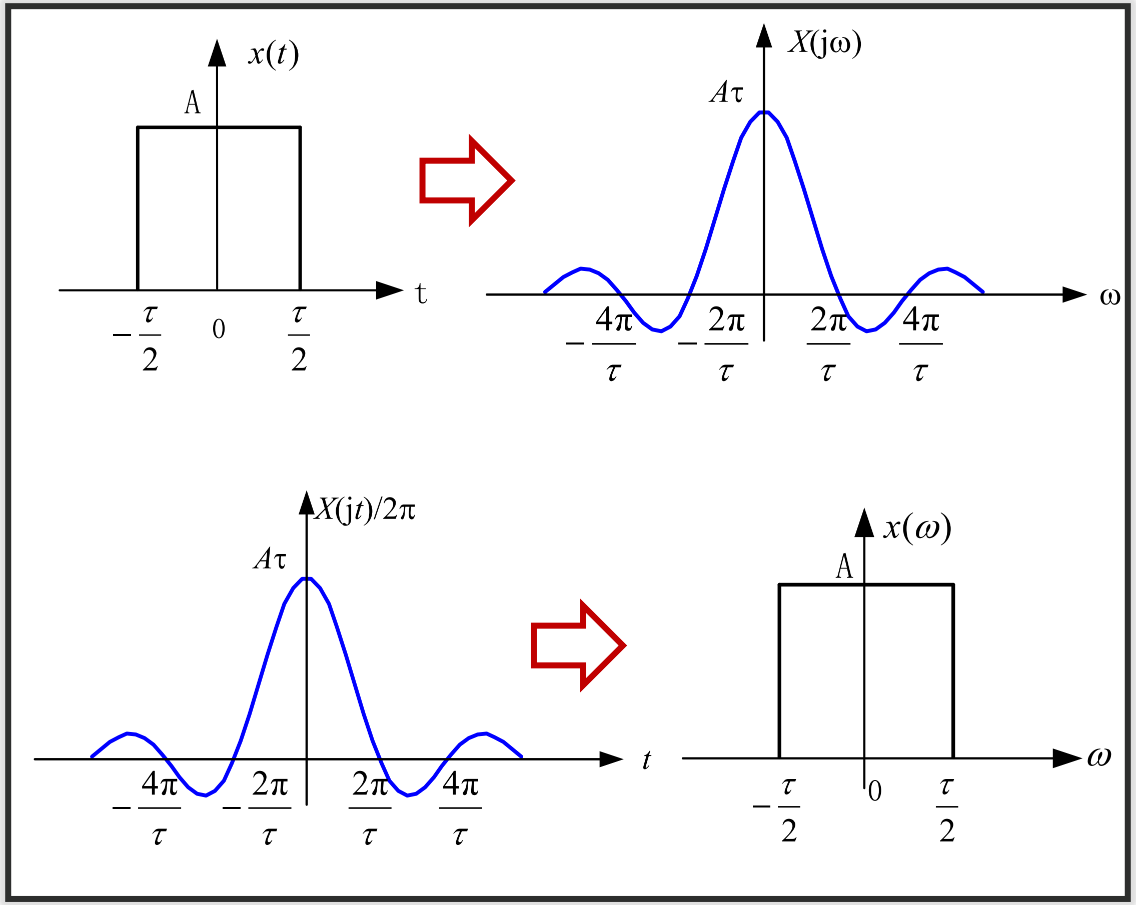
将t和jω互换

$$x(-j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(t)\, e^{-j\omega t} \mathrm{d}t = \frac{\mathcal{F}[X(t)]}{2\pi}$$

傅里叶变换的对称性

- 对称性：若$x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(j\omega)$，则$X(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}2\pi x(-j\omega)$；若$x(t)$为偶函数，则$X(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}2\pi x(j\omega)$





奇偶虚实性

- $X(j\omega)$可表示为

$$X(j\omega)=|X(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}=\boxed{X_R(\omega)}+j\boxed{X_I(\omega)}$$

且有

$$|X(\omega)|=\sqrt{X_R^2(\omega)+X_I^2(\omega)},\ \varphi(\omega)=\arctan\frac{X_I(\omega)}{X_R(\omega)}$$

- 若$x(t)$是实函数，

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t}-j\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t}$$

则$X_R(\omega)$为偶函数，$X_I(\omega)$为奇函数， $|X(\omega)|$为偶函数， $\varphi(\omega)$为奇函数，$X(-j\omega)=X^*(j\omega)$

奇偶虚实性

- 若$x(t)$是实函数，

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t}_{X_R(\omega)}-j\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t}_{X_I(\omega)}$$

- 若$x(t)$是实**偶**函数， $X_I(\omega)=0$

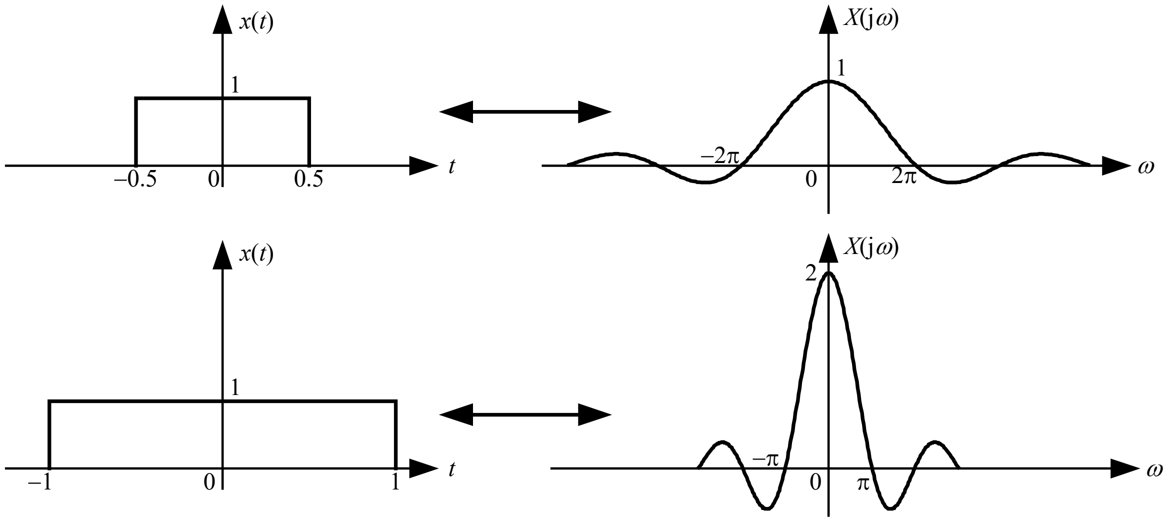
$$X(j\omega)=X_R(\omega)=2\int_{0}^{\infty}x(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t$$

- 若$x(t)$是实**奇**函数，$X_R(\omega)=0$

$$X(j\omega)=jX_I(\omega)=-2j\int_{0}^{\infty}x(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$

尺度变换特性

- 若$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega)$，则$x(at) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|}X(j\omega/a)$
- 若$a=-1$，则$x(-t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(-j\omega)$，时域翻转频域也翻转
- 时域压缩，则频域拉伸；拉伸时域，则频域压缩。



- 证明:

$$\mathcal{F}[x(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

- 令 $\lambda = at$，则 $\mathrm{d}\lambda = a\mathrm{d}t$ ，
- 代入上式可得

$$\mathcal{F}[x(at)] = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{a}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda$$

$$= \frac{1}{|a|}X(\mathrm{j}\frac{\omega}{a})$$

尺度变换特性

- 若$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega)$，则$x(at) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|}X(j\omega/a)$

- 由于$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$，所以

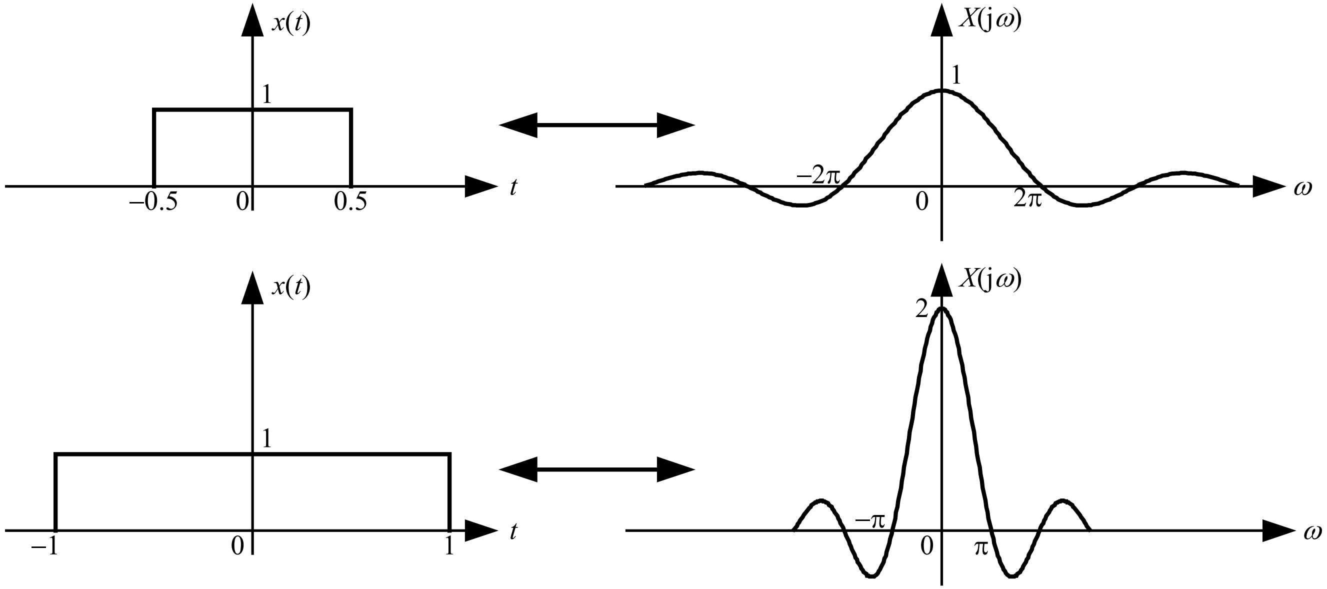
$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{d}t$$

时域覆盖面积

- 由于$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$，所以

$$2\pi x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

频域覆盖面积



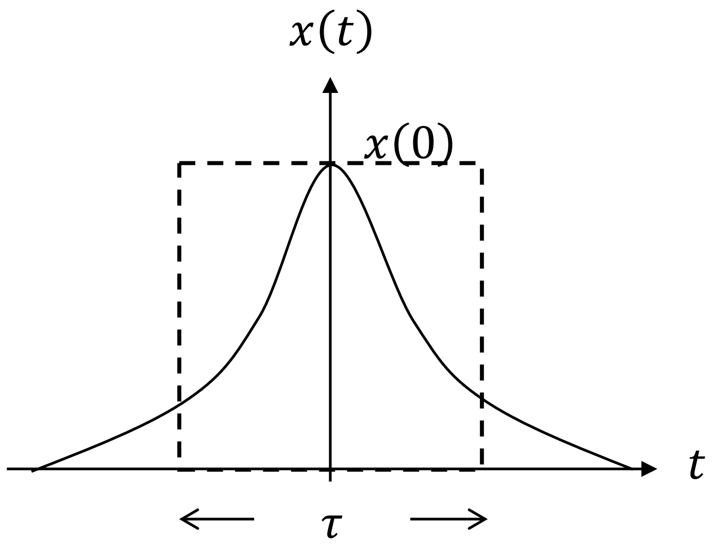
尺度变换特性

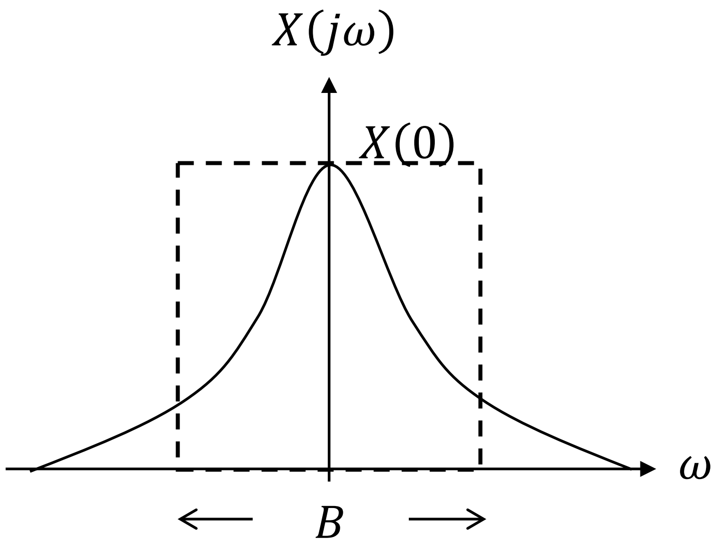
$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{d}t \quad x(0)\tau$$

时域覆盖面积

$$2\pi x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\,\mathrm{d}\omega \quad X(0)B$$

频域覆盖面积





$$B = \frac{2\pi}{\tau}$$

若要压缩信号的通信时间，需占用更大的频带宽度

时移特性

- 若$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega)$，则$x(t-t_0) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

- 信号在时域中的时移，对应频谱函数在频域中产生的附加**相移**，而幅度频谱保持不变。

- 同理，若$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega)$，则

$$x(at-t_0) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

$$x(t_0-at) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|}X\left(-\frac{j\omega}{a}\right)e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

频移特性（调制定理）

- 若$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega)$，则$x(t)e^{j\omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X\big(j(\omega-\omega_0)\big)$；$x(t)e^{-j\omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X\big(j(\omega+\omega_0)\big)$
- 频谱移动时，时域信号乘以因子$e^{j\omega_0 t}$或$e^{-j\omega_0 t}$
- 信号$x(t)$与余弦信号$\cos\omega_0 t$ 相乘后，其频谱是将原来信号频谱向**左右**搬移ω_0，**幅度减半。**

$$\mathcal{F}[x(t)\cos\omega_0 t] = \frac{1}{2}\mathcal{F}[x(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}] + \frac{1}{2}\mathcal{F}[x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}]$$

$$= \frac{1}{2}X[\mathrm{j}(\omega-\omega_0)] + \frac{1}{2}X[\mathrm{j}(\omega+\omega_0)]$$

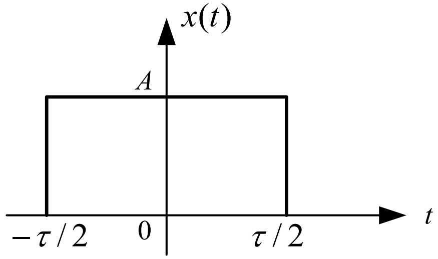
$$\mathcal{F}[x(t)\sin\omega_0 t] = \frac{1}{2\mathrm{j}}\mathcal{F}[x(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}] - \frac{1}{2\mathrm{j}}\mathcal{F}[x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}]$$

$$= -\frac{\mathrm{j}}{2}X[\mathrm{j}(\omega-\omega_0)] + \frac{\mathrm{j}}{2}X[\mathrm{j}(\omega+\omega_0)]$$

频移特性（调制定理）

- 求矩形脉冲信号$x(t)$与余弦信号$\cos\omega_0 t$ 相乘后信号的频谱函数
  - 已知宽度为τ的矩形脉冲信号对应的频谱函数为

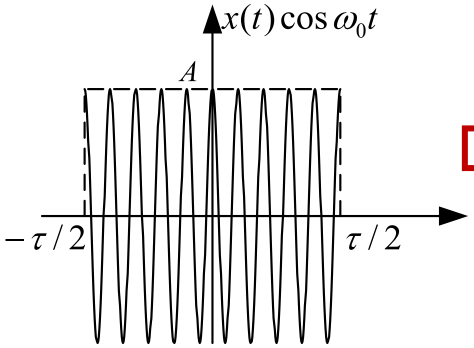
$$X(\mathrm{j}\omega)=A\tau\cdot \mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$$

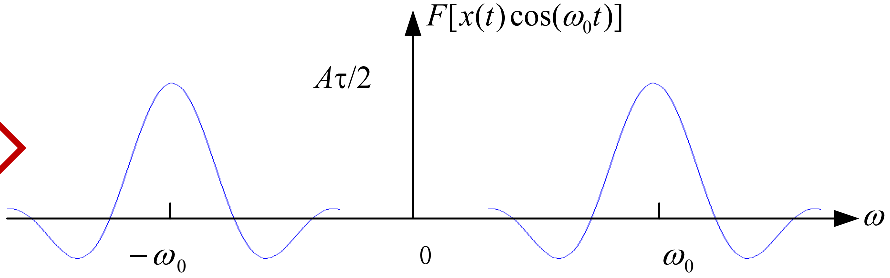


$$\mathcal{F}[x(t)\cos\omega_0 t]=\frac{1}{2}X[\mathrm{j}(\omega-\omega_0)]+\frac{1}{2}X[\mathrm{j}(\omega+\omega_0)]$$

  - 应用频移特性可得

$$=\frac{A\tau}{2}\{\mathrm{Sa}\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2}+\mathrm{Sa}\frac{(\omega+\omega_0)\tau}{2}\}$$





时域积分微分特性

- 若$x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(j\omega)$，则

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}\frac{X(j\omega)}{j\omega}+\pi X(0)\delta(\omega)$$

  - $X(0)$为时域信号的面积，若**面积**$\boldsymbol{\int x(t)\mathrm{d}t}$**为0**，则第二项可忽略，如：$x(t)$为奇函数；$x(t)$为偶函数的导数；$x(t)$为**有限长**函数的导数

- 若$x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(j\omega)$，则$\frac{\mathrm{d}^n x(\mathrm{t})}{\mathrm{d}t^n}\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}(j\omega)^n\cdot X(j\omega)$
  - 时域微分，频域使用$j\omega$进行加权，增加高频

- 【修正】若$x'(t)=x_1(t)$，且$x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(j\omega)$，$x_1(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X_1(j\omega)$，则

$$X(\mathrm{j}\omega)=\pi[x(\infty)+x(-\infty)]\delta(\omega)+\frac{X_1(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}$$

频域微分特性

- 若$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega)$，则$t^n x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j^n \frac{\mathrm{d}X^n(j\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$

- 求单位斜坡信号$tu(t)$的频谱
  - 已知单位阶跃信号傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

  - 故利用频域微分特性可得:

$$\mathcal{F}[tu(t)] = j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] = j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$$

时域卷积特性

- 若$x_1(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_1(j\omega)$, $x_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_2(j\omega)$, 则$x_1(t) * x_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_1(j\omega)X_2(j\omega)$

$$\mathcal{F}[x_1(t) * x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t-\tau)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\,X_2(j\omega)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau = X_1(j\omega)X_2(j\omega)$$

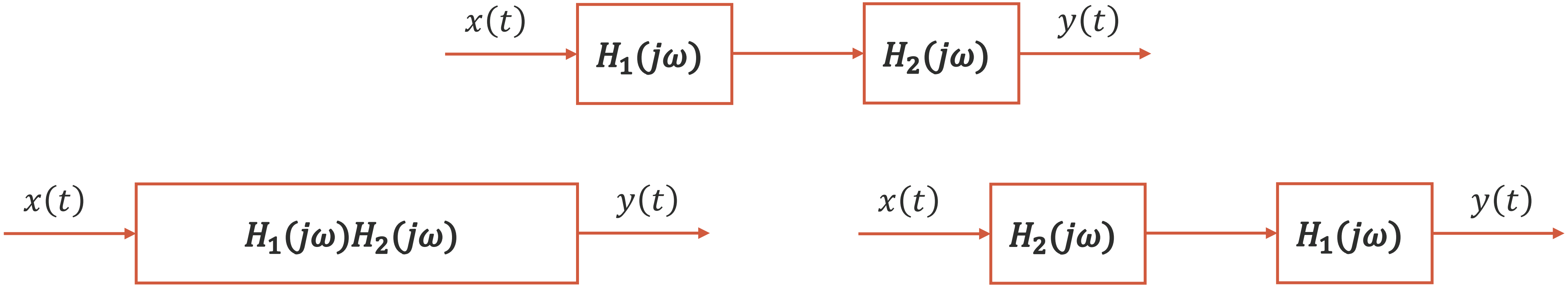
- 时域函数**卷积**的频谱等于各个时域信号的频谱的**乘积**

时域卷积特性

- 线性时不变系统

$$y(t) = h(t) * x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$$

- 通过让某一频带$H(j\omega) \to 0$，即可消除该频带能的频率分量



频域卷积特性（调制特性）

- 若

$$x_1(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_1(j\omega),\ x_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_2(j\omega)$$

- 则

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi}[X_1(j\omega) * X_2(j\omega)]$$

  - 时域信号的乘积正比于对应信号在频域的卷积（类比傅里叶变换的对称性）

非周期信号的能量谱密度

- Parseval能量守恒定理

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\mathrm{j}\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

- 上式表明信号的能量也可以由$|X(j\omega)|^2$在整个频率范围的积分乘以$1/2\pi$ 来计算。

- 物理意义：非周期能量信号的归一化能量在时域中与在频域中相等，保持**能量守恒。**

- 定义单位角频率的信号能量为能量频谱密度函数 $G(\omega)=\frac{1}{2\pi}|X(\mathrm{j}\omega)|^2$

$$W=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X^*(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega]\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X^*(\mathrm{j}\omega)[\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t]\ \mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X^*(\mathrm{j}\omega)\cdot X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\mathrm{j}\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

傅里叶变换性质总结

线性特性	$ax_1(t)+bx_2(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}aX_1(j\omega)+bX_2(j\omega)$
对称特性	$X(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}2\pi x(-j\omega)$
展缩特性	$x(at)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}\frac{1}{\lvert a\rvert}X(j\omega/a)$
时移特性	$x(t-t_0)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$
频移特性	$x(t)e^{j\omega_0 t}\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X\big(j(\omega-\omega_0)\big)$
时域卷积特性	$x_1(t)*x_2(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X_1(j\omega)X_2(j\omega)$
频域卷积特性	$x_1(t)\cdot x_2(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}\frac{1}{2\pi}[X_1(j\omega)*X_2(j\omega)]$
时域微分特性	$\frac{\mathrm{d}^n x(\mathrm{t})}{\mathrm{d}t^n}\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}(j\omega)^n\cdot X(j\omega)$
积分特性	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}\frac{X(j\omega)}{j\omega}+\pi X(0)\delta(\omega)$
频域微分特性	$t^n x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}j^n\frac{\mathrm{d}X^n(j\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$

概要

1. 典型信号的傅里叶变换：
傅里叶变换的定义和计算技巧

2. 傅里叶变换的性质：
对称性，尺度变换，频域卷积

3.周期信号的傅里叶变换：
关联连续信号的傅里叶变换和傅里叶级数

4. 傅里叶变换的应用：
傅里叶变换思想在AI中的应用

连续周期信号的傅里叶变换

- 傅里叶级数（针对周期信号）

$$X_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cdot e^{-jn\omega t}\,\mathrm{d}t$$

- 傅里叶变换（针对非周期信号）
  - 周期信号**不满足**傅里叶变换的绝对可积条件

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

典型周期信号

- 正弦、余弦信号的傅里叶变换
  - 已知

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$$

  - 利用频移特性，有

$$\mathcal{F}\left[e^{j\omega_0 t}\right] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$
$$\mathcal{F}\left[e^{-j\omega_0 t}\right] = 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

  - 合并，有

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right]\right] = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

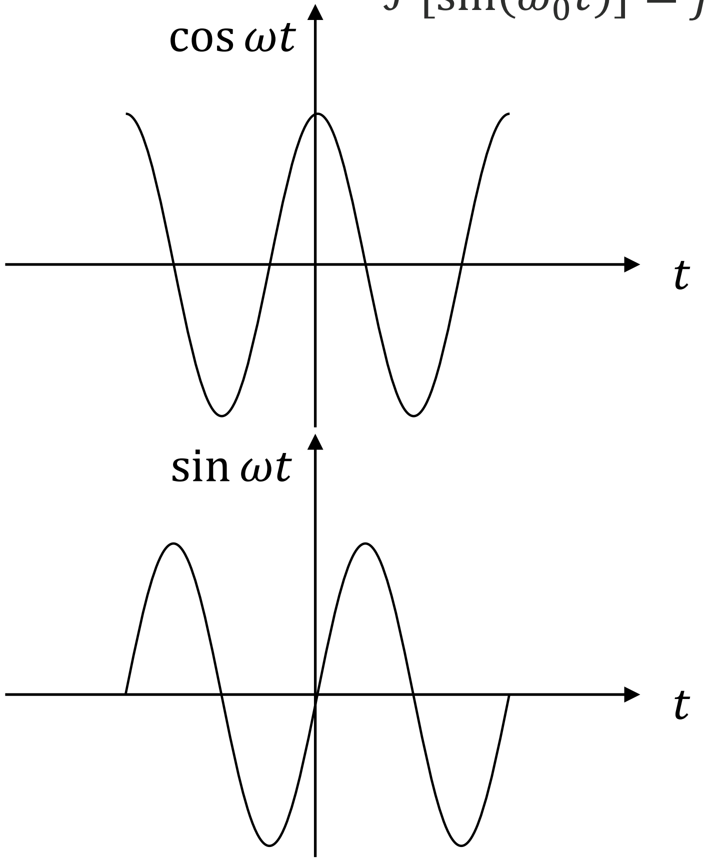
$$\mathcal{F}[\sin(\omega_0 t)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2j}\left[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right]\right] = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \pi\delta(\omega - \omega_0)]$$

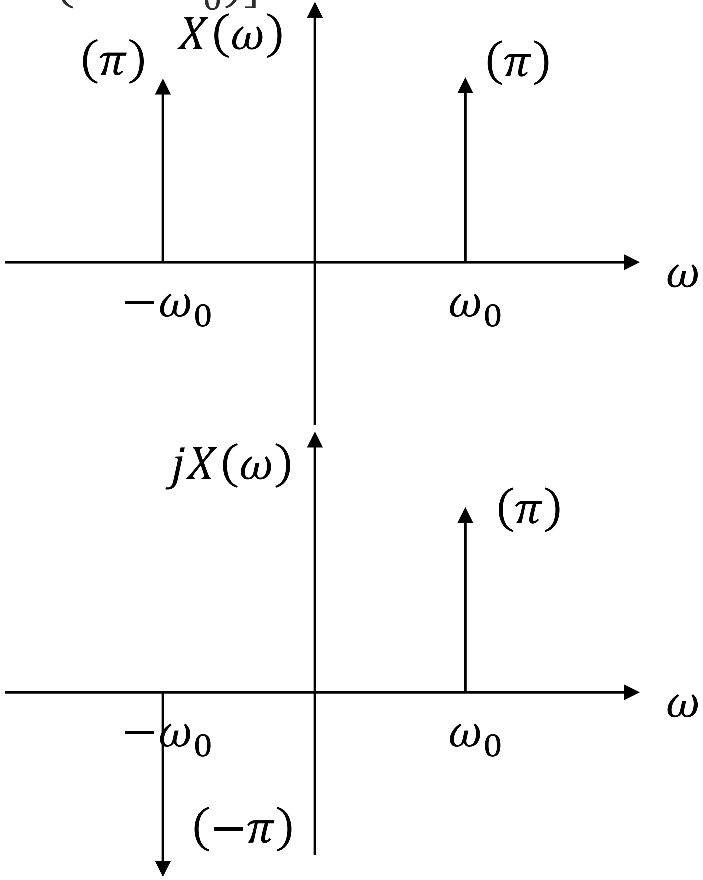
典型周期信号

- 正弦、余弦信号的傅里叶变换

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] = \pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

$$\mathcal{F}[\sin(\omega_0 t)] = j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\pi\delta(\omega-\omega_0)]$$





一般周期信号

- 设信号$x(t)$的周期为T_0，角频率$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$，$x(t)$的傅里叶级数为

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\mathcal{F}\left[e^{j\omega_0 t}\right]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$
$$\mathcal{F}\left[e^{-j\omega_0 t}\right]=2\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

- 两边同时取傅里叶变换

$$\mathcal{F}[x(t)]=\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_n e^{jn\omega_0 t}\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_n\mathcal{F}\left[e^{jn\omega_0 t}\right]$$

$$2\pi\delta(\omega-n\omega_0)$$

$$=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_n\delta(\omega-n\omega_0)$$

一般周期信号

- 设信号$x(t)$的周期为T_0，角频率$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$，

$$\mathcal{F}[x(t)]=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_n\delta(\omega-n\omega_0)$$

$$X_n=\frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)\cdot e^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$$

- 周期信号$x(t)$的傅里叶变换有位于$0,\pm\omega_0,\pm 2\omega_0,\ldots$处的冲激信号组成，冲激信号的强度等于对应傅里叶级数系数的2π倍
- 傅里叶变换反应频谱密度，因此周期信号的傅里叶变换不是有限值，是冲激函数，表明在**无穷小的频带范围内取得无穷大的频谱值**
- 周期信号的频谱是**离散**的

周期信号傅里叶级数与傅里叶变换的关系

- 设信号$x(t)$的周期为T_0，角频率$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$，
  - 傅里叶级数

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$X_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cdot e^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$$

  - 截取一个周期的信号，对应的傅里叶变换为

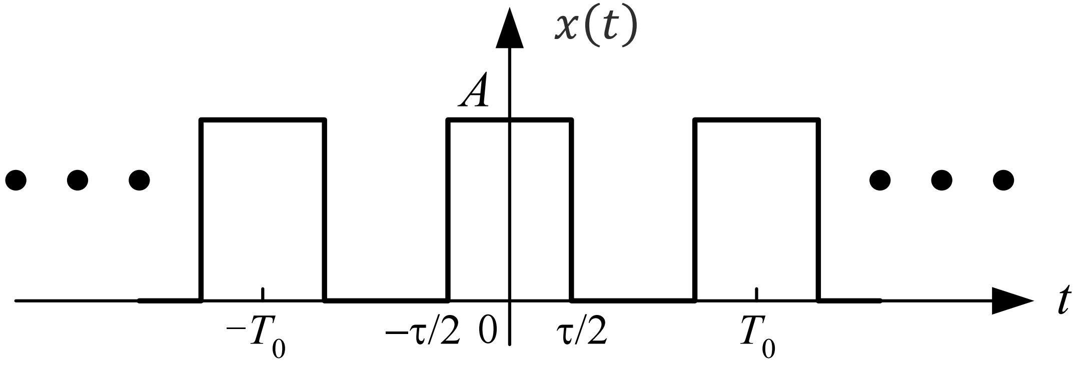
$$X_{T_0}(j\omega)=\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cdot e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$X_n=\frac{1}{T_0}X_{T_0}(j\omega)\Big|_{\omega=n\omega_0}$$

周期信号的傅里叶级数的系数等于一个周期的信号的傅里叶变换在$n\omega_0$点处取值乘$\frac{1}{T_0}$

周期信号傅里叶变换

求周期矩形脉冲的傅里叶级数和傅里叶变换



- 矩形脉冲的傅里叶变换为

$$X_{T_0}(j\omega) = A\tau Sa\left(\frac{\omega_0\tau}{2}\right)$$

- 对应周期矩形脉冲的

傅里叶级数为 $x(t) = \frac{A\tau}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) e^{jn\omega_0 t}$ $\quad X_n = \frac{A\tau}{T_0} Sa\left(\frac{\omega_0\tau}{2}\right) = \frac{A\tau}{T_0} Sa\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$

傅里叶变换为 $X(j\omega) = A\tau\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)\delta(\omega - n\omega_0)$

概要

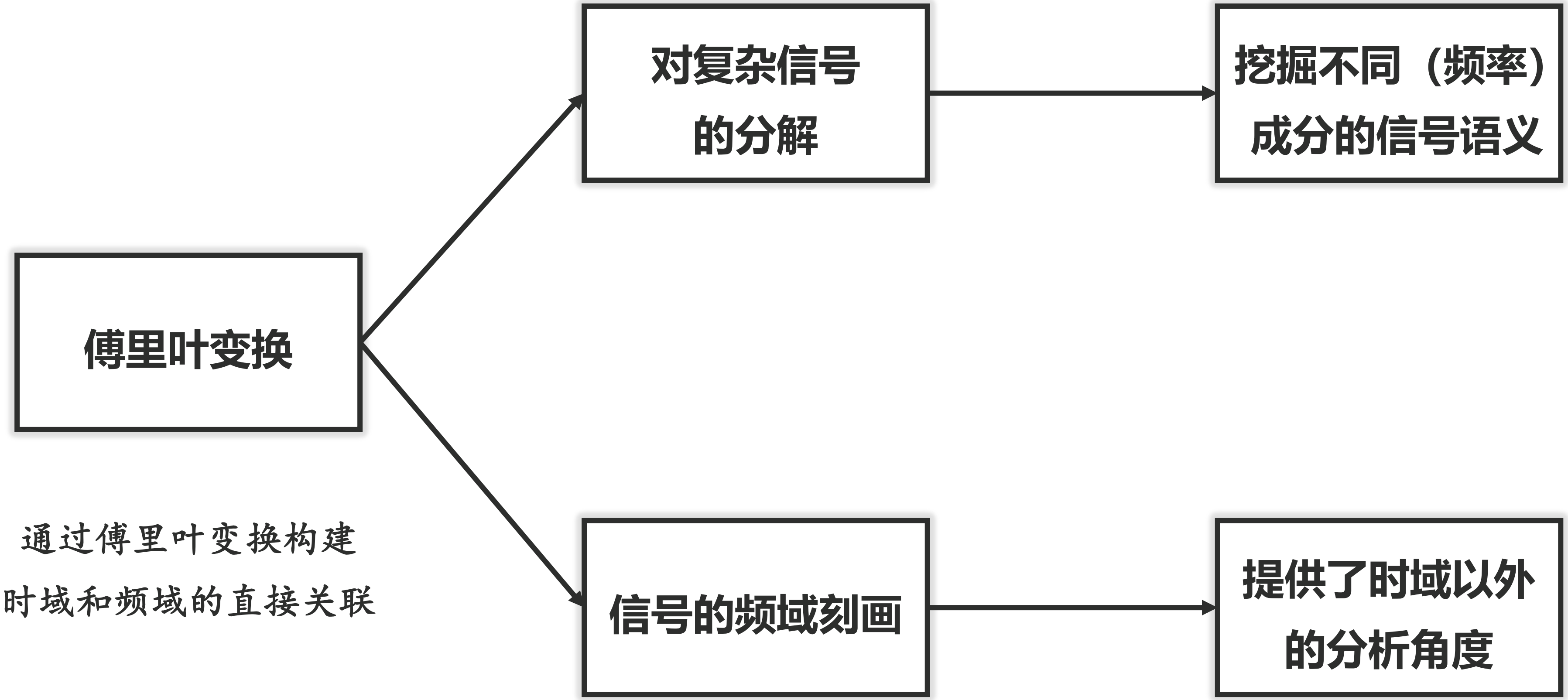
1. 典型信号的傅里叶变换：
傅里叶变换的定义和计算技巧

2. 傅里叶变换的性质：
对称性，尺度变换，频域卷积

3.周期信号的傅里叶变换：
关联连续信号的傅里叶变换和傅里叶级数

4. 傅里叶变换的应用：
傅里叶变换思想在AI中的应用

傅里叶变换的应用


傅里叶变换
对复杂信号
的分解
挖掘不同（频率）
成分的信号语义
信号的频域刻画
提供了时域以外
的分析角度
通过傅里叶变换构建
时域和频域的直接关联