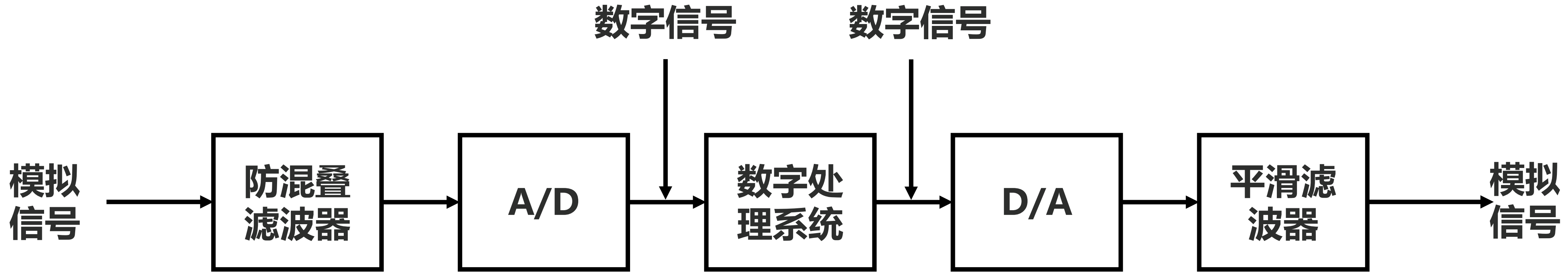
06 信号的采样

模拟信号和数字信号的互相转换

信号处理与分析的典型过程

- 数字信号的处理（**A:Analog, D:Digital**）



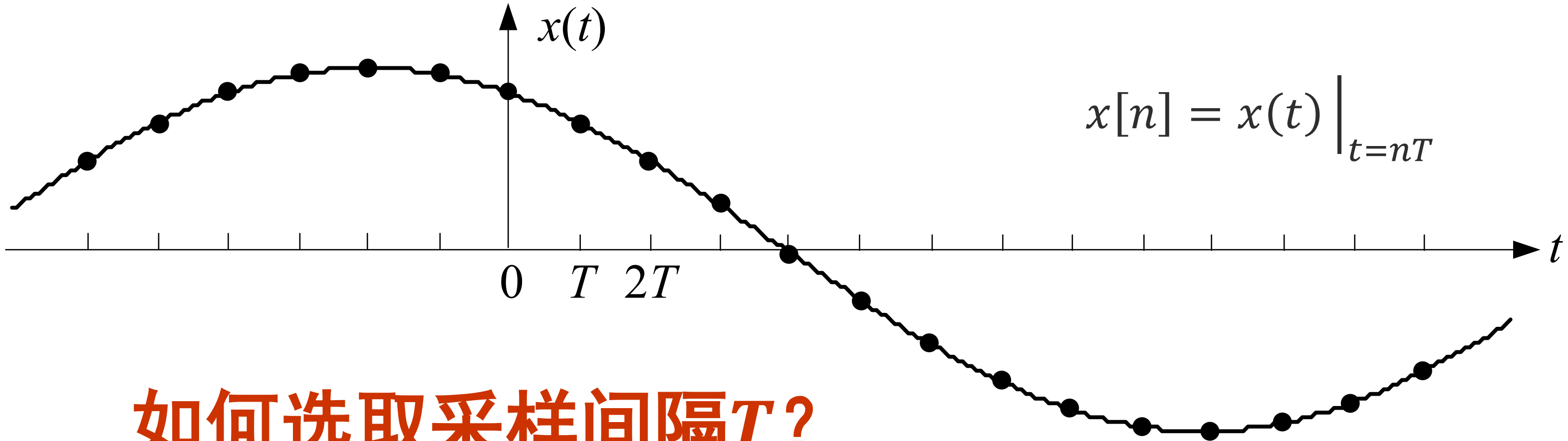
- 如何将模拟信号转化为数字信号?

- 如何将数字信号转化为模拟信号?

如何进行信号采样

- 图片信号

- 时序信号



$$x[n] = x(t)\big|_{t=nT}$$

如何选取采样间隔T？

为什么进行信号采样

- (1) 信号稳定性好：数据用二进制表示，受外界影响小。
- (2) 信号可靠性高：存储无损耗，传输抗干扰。
- (3) 信号处理简便：信号压缩，信号编码，信号加密等
- (4) 系统精度高： 可通过增加字长提高系统的精度。
- (5) 系统灵活性强：改变系统的系数使系统完成不同功能。

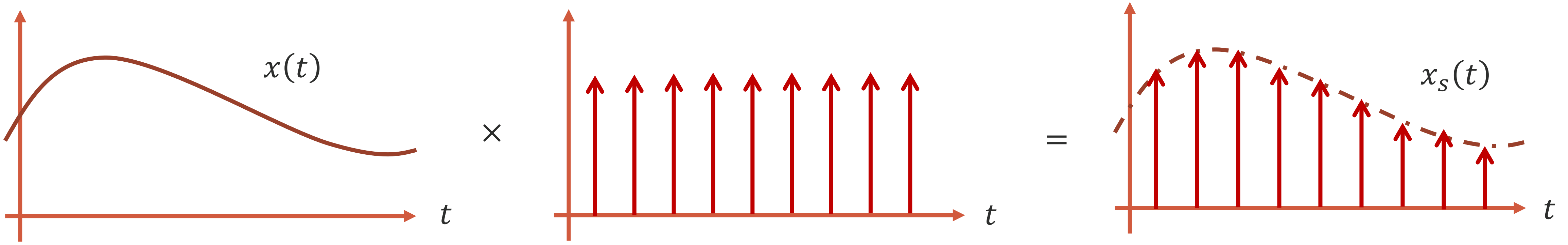
用数字方式处理模拟信号

信号的时域采样

- 信号$x(t)$使用脉冲序列

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

采样得到$x_s(t)$



$$x_s(t) = x(t) \cdot \delta_{T_s}(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

时域采样的频域分析

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

- 已知

$$x_s(t) = x(t) \cdot \delta_{T_s}(t)$$

- 设

$$\mathcal{F}[x(t)] = X(j\omega)$$

- 则

周期信号的傅里叶变换

$$\mathcal{F}\left[\delta_{T_s}(t)\right] = ?$$

时域采样的频域分析

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\mathcal{F}[x(t)]=\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_n e^{jn\omega_0 t}\right]=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_n\delta(\omega-n\omega_0)$$

- 已知

$$\delta_{T_s}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

求解$\mathcal{F}\left[\delta_{T_s}(t)\right]$

$$\omega_s=\frac{2\pi}{T_s}$$

- 针对周期信号首先计算**傅里叶级数**

$$X_n=\frac{1}{T_s}\int_{-T_s/2}^{T_s/2}\delta_{T_s}(t)\,e^{-jn\omega_s t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T_s}\int_{-T_s/2}^{T_s/2}\delta(t)\,e^{-jn\omega_s t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T_s}$$

傅里叶变换为

$$\mathcal{F}\left[\delta_{T_s}(t)\right]=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_n\delta(\omega-n\omega_s)=\omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$$

时域采样的频域分析

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

- 已知$x_s(t) = x(t) \cdot \delta_{T_s}(t)$, 设$\mathcal{F}[x(t)] = X(j\omega)$，且

$$\mathcal{F}[\delta_{T_s}(t)] = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

周期信号的傅里叶变换

- 由频域卷积特性

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

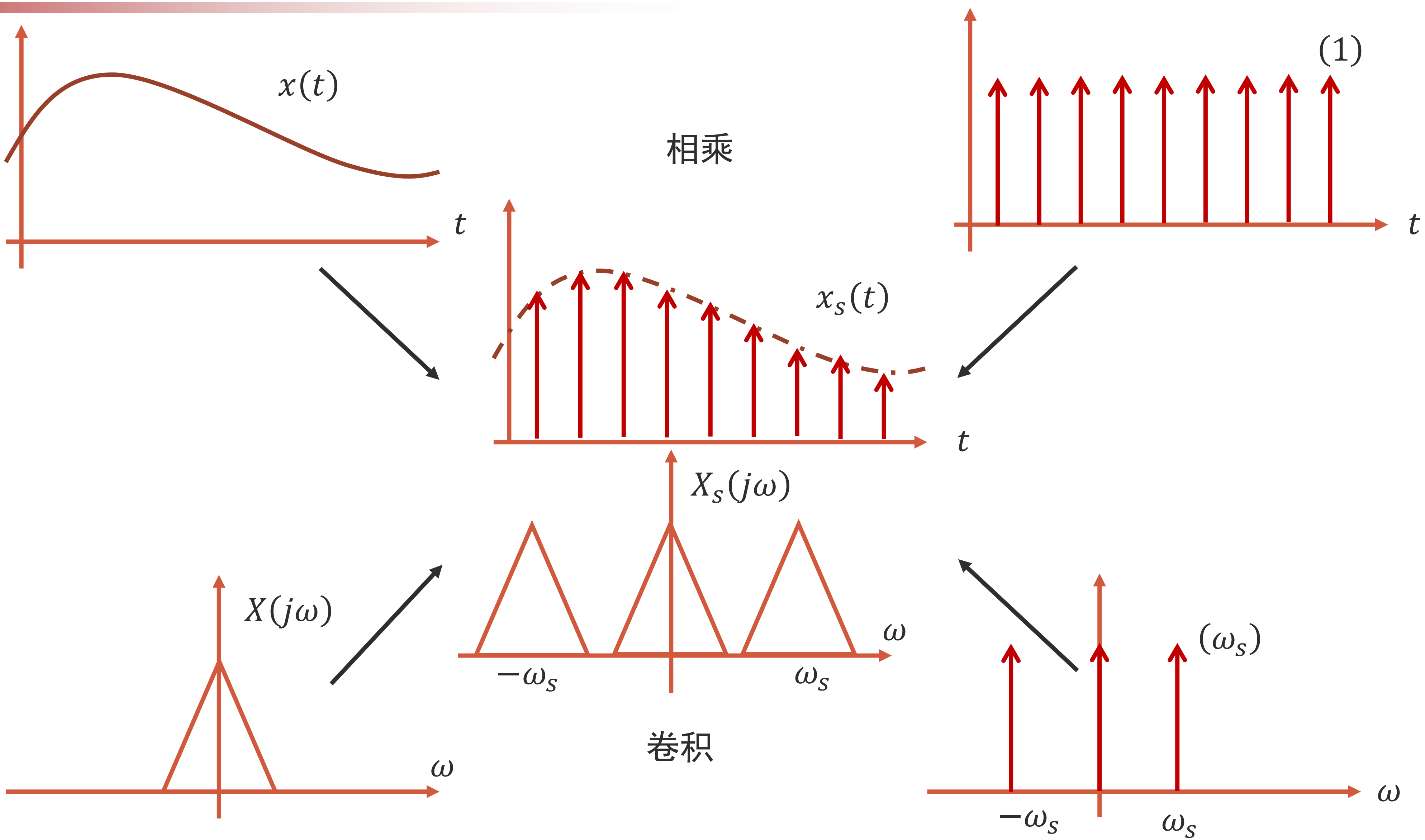
$$\mathcal{F}[x_s(t)] = \frac{1}{2\pi}\left[X(j\omega) * \mathcal{F}[\delta_{T_s}(t)]\right] = \frac{1}{2\pi}\left[X(j\omega) * \omega_s \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)\right]$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\big(j(\omega - n\omega_s)\big)$$

- **时域**对信号做**离散化**，**频域**表现为原始时域信号频谱$X(j\omega)$的**周期延拓（重复）**，时域的离散化导致了频域的周期性

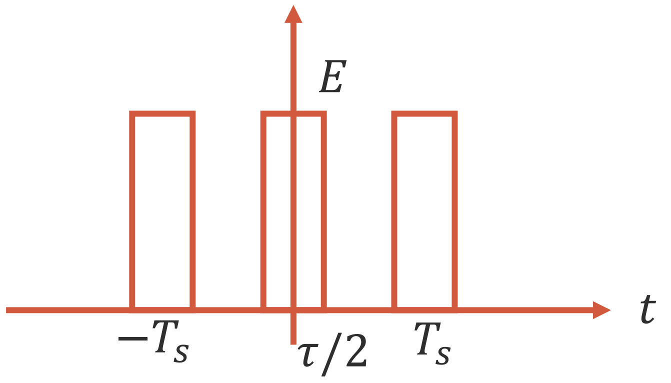
时域采样的频域分析

- 时域
- 频域



信号的时域采样

采样信号为周期矩形信号$p(t)$，求采样后信号的频谱



- 根据$x_s(t) = x(t) \cdot p(t)$，且$p(t)$的傅里叶级数为

$$P_n = \frac{1}{T_s}\int_{-T_s/2}^{T_s/2} p(t)e^{-jn\omega_s t}\mathrm{d}t = \frac{E\tau}{T_s}Sa\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)$$

因此

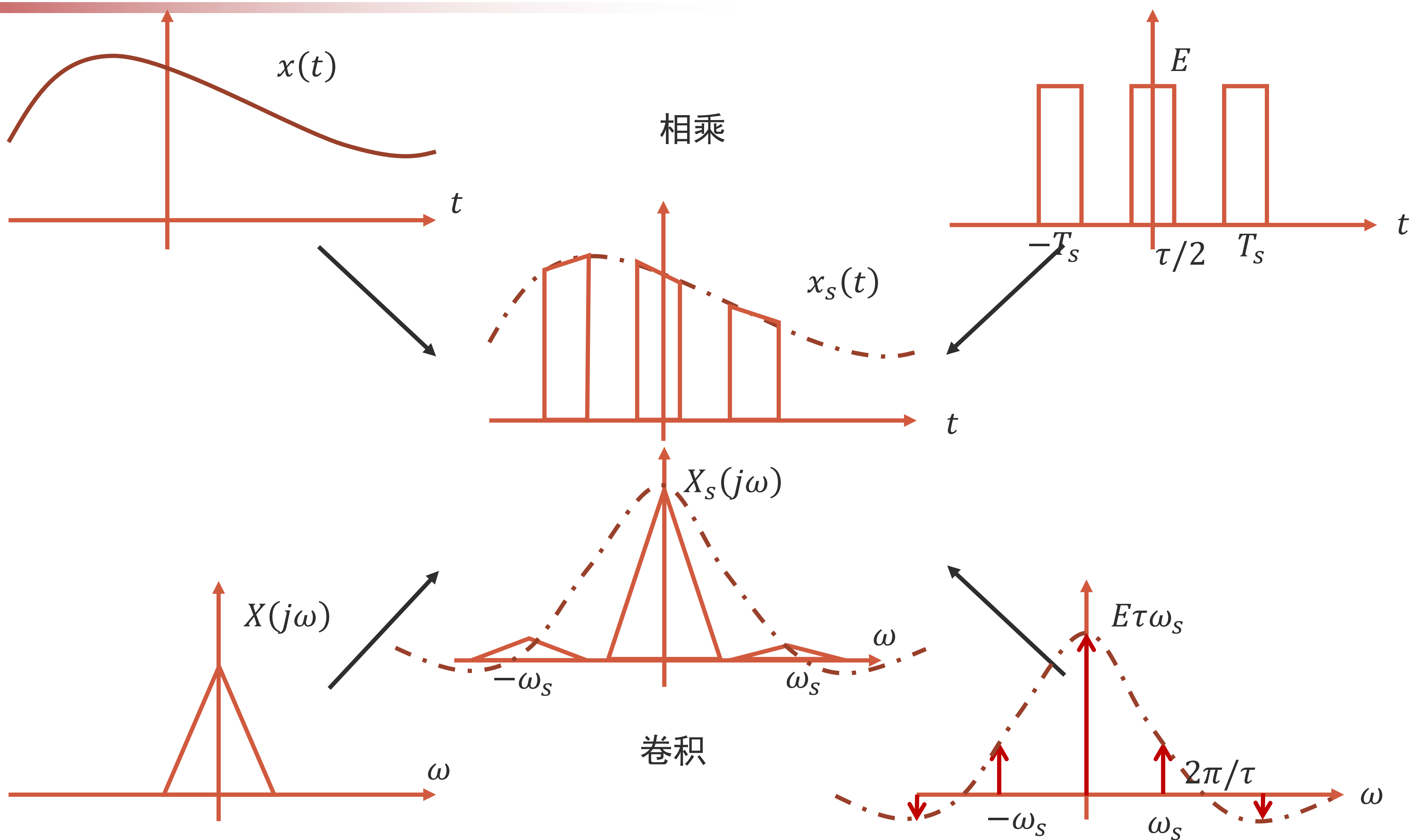
$$\mathcal{F}[p(t)] = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n\delta(\omega - n\omega_s)$$

- 所以

$$\mathcal{F}[x_s(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n X\big(j(\omega - n\omega_s)\big)$$

时域采样的频域分析

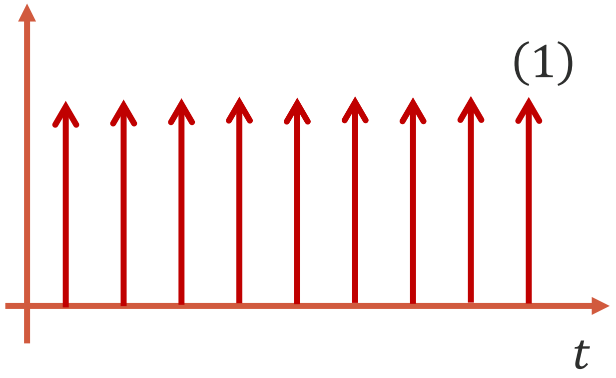
- 时域
- 频域



信号的时域采样

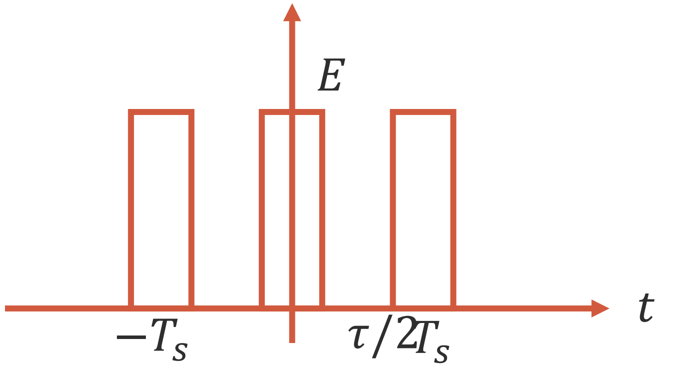
- 【理想采样】采样信号为周期冲激信号$\delta_{T_s}(t)$，采样后信号的频谱

$$\mathcal{F}[x_s(t)] = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\big(j(\omega - n\omega_s)\big)$$



- 采样信号为足够窄的周期矩形信号$p(t)$，采样后信号的频谱

$$\mathcal{F}[x_s(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n X\big(j(\omega - n\omega_s)\big)$$



信号的频域采样

- 频域信号$X(j\omega)$使用频域脉冲序列

$$\delta_{\omega_s}(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$$

采样得到$X_s(j\omega)$，因此

$$X_s(j\omega)=X(j\omega)\cdot\delta_{\omega_s}(\omega)$$

- 设$\mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)]=x(t)$，$\mathcal{F}^{-1}[X_s(j\omega)]=x_s(t)$，由于

$$\mathcal{F}\left[\delta_{T_s}(t)\right]=\omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)=\omega_s\delta_{\omega_s}(\omega)$$

所以$\mathcal{F}^{-1}\left[\delta_{\omega_s}(\omega)\right]=\frac{1}{\omega_s}\delta_{T_s}(t)$

- 设

$$\mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)]=x(t)$$
$$\mathcal{F}^{-1}[X_s(j\omega)]=x_s(t),$$
$$\mathcal{F}^{-1}\left[\delta_{\omega_s}(\omega)\right]=\frac{1}{\omega_s}\delta_{T_s}(t)$$

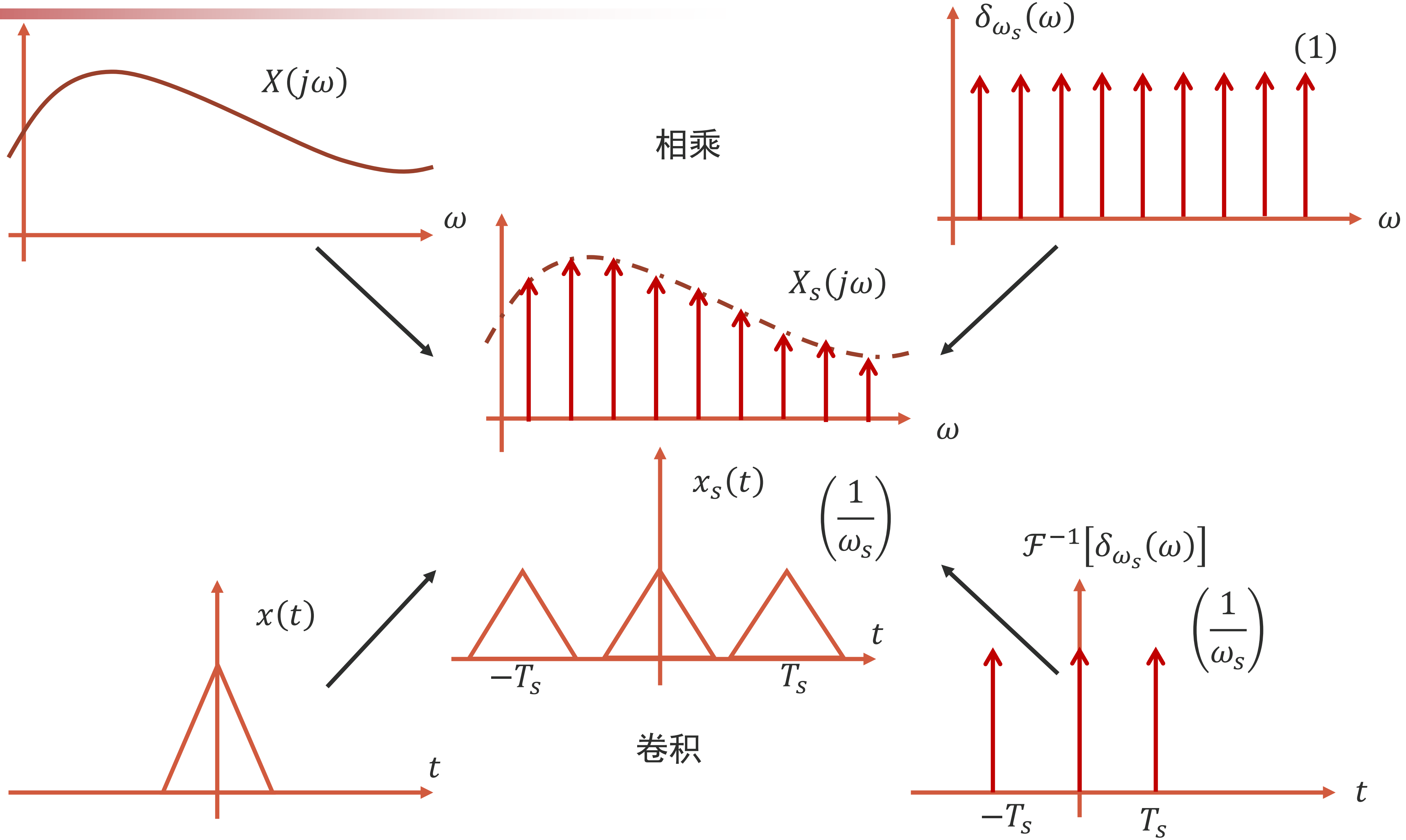
- 由卷积定理

$$x_s(t)=x(t)*\mathcal{F}^{-1}\left[\delta_{\omega_s}(\omega)\right]$$
$$=x(t)*\left[\frac{1}{\omega_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\right]$$
$$=\frac{1}{\omega_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t-nT_s)$$

频域的**离散化**对应时域信号的**周期延拓**

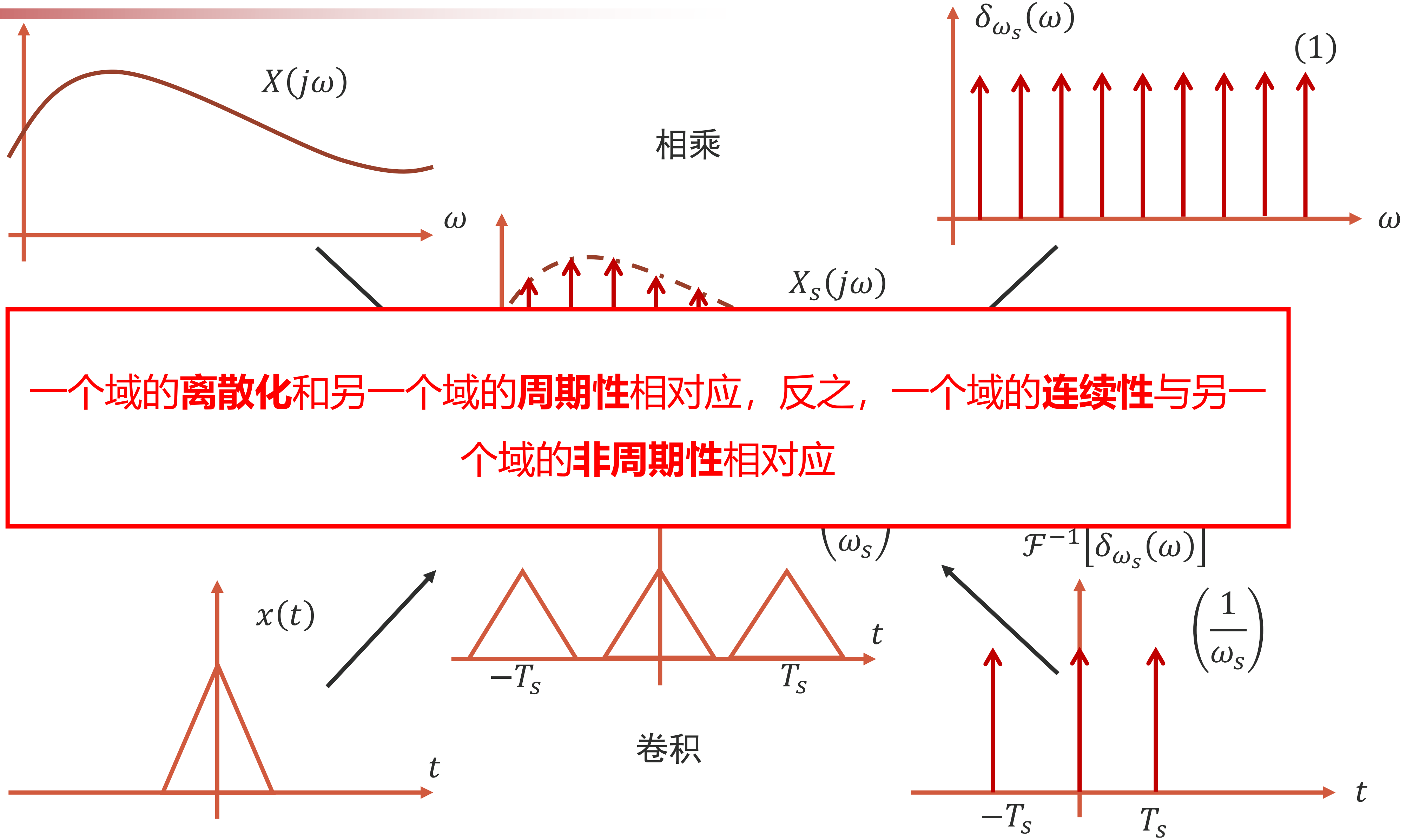
信号的频域采样

- 频域
- 时域



信号的频域采样

- 频域
- 时域



一个域的**离散化**和另一个域的**周期性**相对应，反之，一个域的**连续性**与另一个域的**非周期性**相对应

时域采样定理

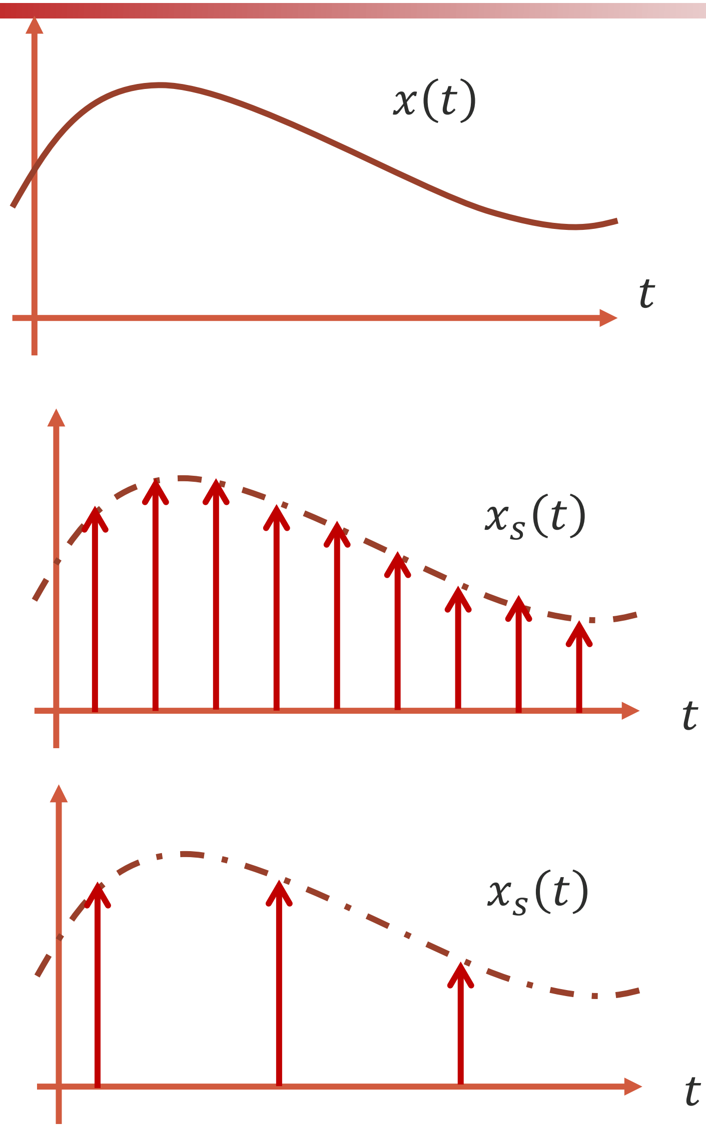
- 采样定理：若**连续**信号$x(t)$是**一个频带受限**信号（若$|\omega| > \omega_m$则$X(j\omega) = 0$，$\omega_m = 2\pi f_m$），$x(t)$ 的等间隔样本值$x_s(t)$，用$x_s(t)$**唯一表示**$x(t)$的条件是

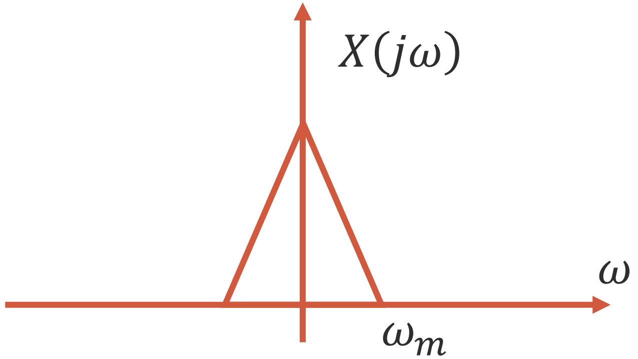
$$T_s < \frac{1}{2f_m}, \qquad 即\omega_s > 2\omega_m$$

  $f_s = 2f_m$ 为最小采样频率，称为Nyquist Rate.

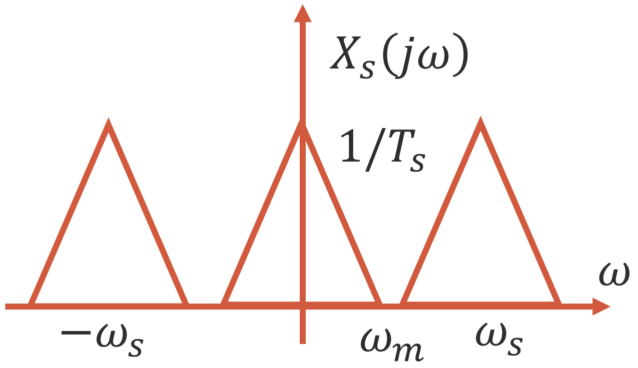
- 条件
  - 等间隔采样，频带受限信号
  - 唯一恢复条件（采样频率）
  - 恢复方法（低通滤波器）

信号的时域采样

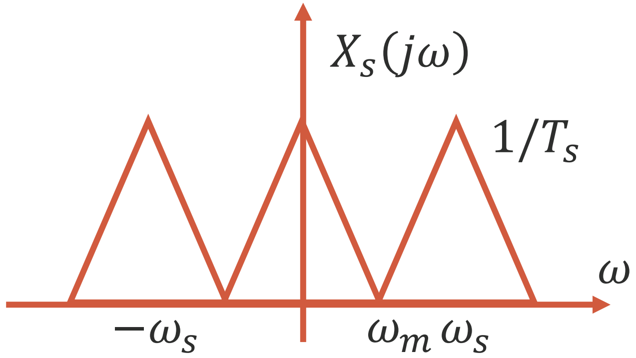




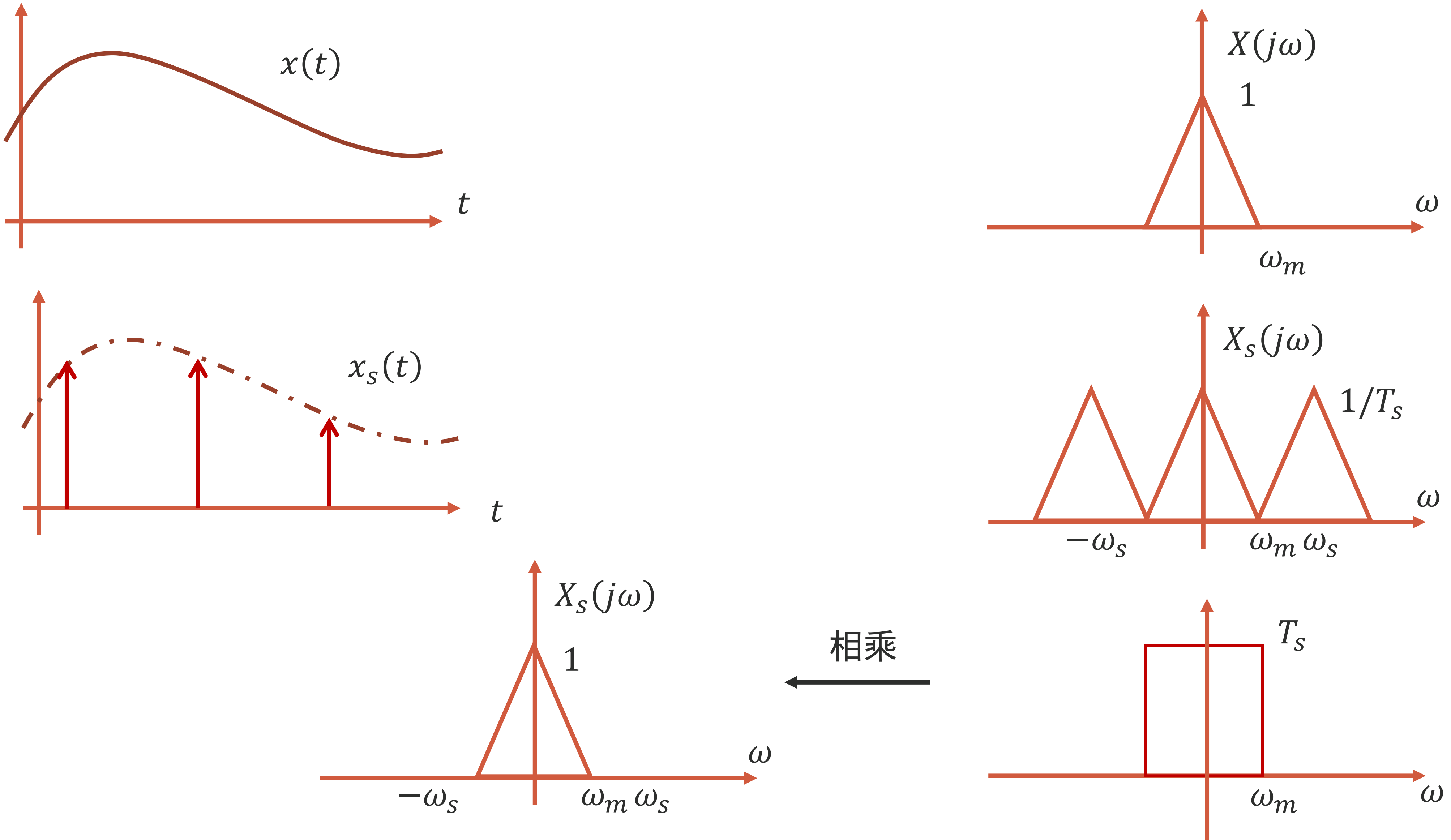
$\omega_s > 2\omega_m$



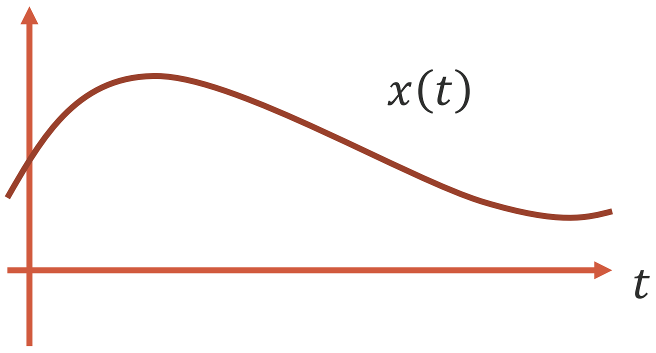
$\omega_s = 2\omega_m$

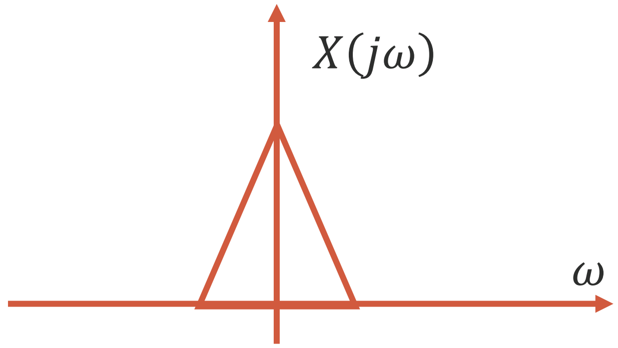


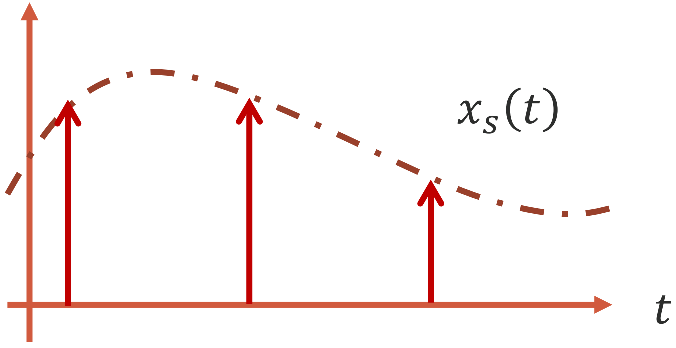
信号时域采样的恢复



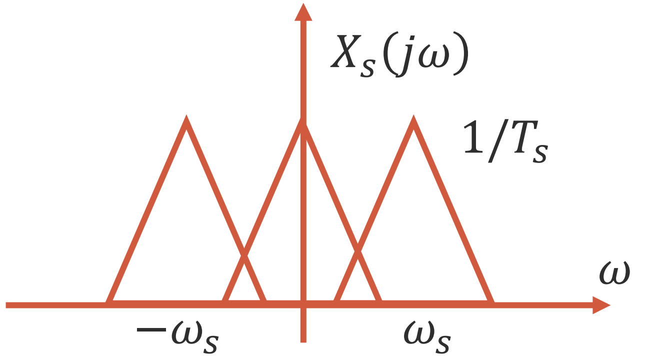
信号的时域采样







$\omega_s < 2\omega_m$



产生混叠 (aliasing)

信号的时域采样

已知实信号$x(t)$的最高频率为f_m (Hz)，试计算对各信号$x(2t)$， $x(t) * x(2t)$， $x(t) \cdot x(2t)$采样不混叠的最小采样频率。

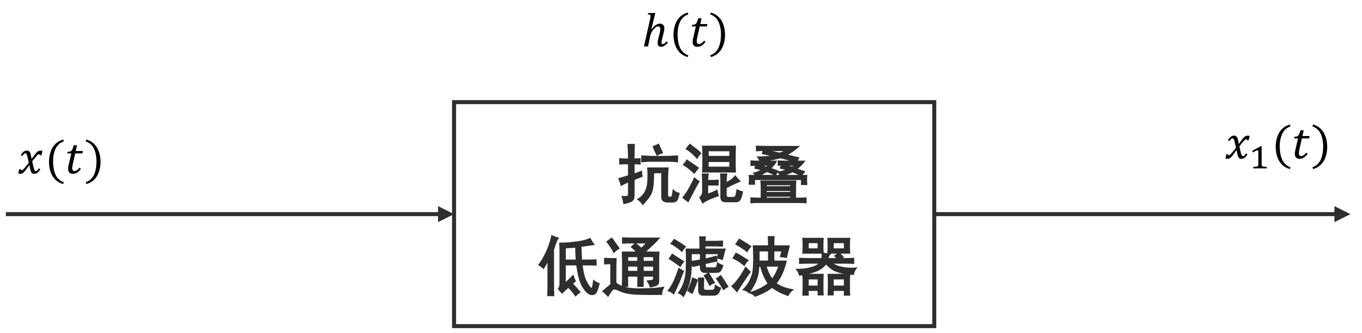
- 对信号$x(2t)$采样时，最小采样频率为$4f_m\ (Hz)$
- 对$x(t) * x(2t)$采样时，最小采样频率为$2f_m\ (Hz)$
- 对$x(t)\ \cdot\ x(2t)$采样时，最小采样频率为$6f_m\ (Hz)$

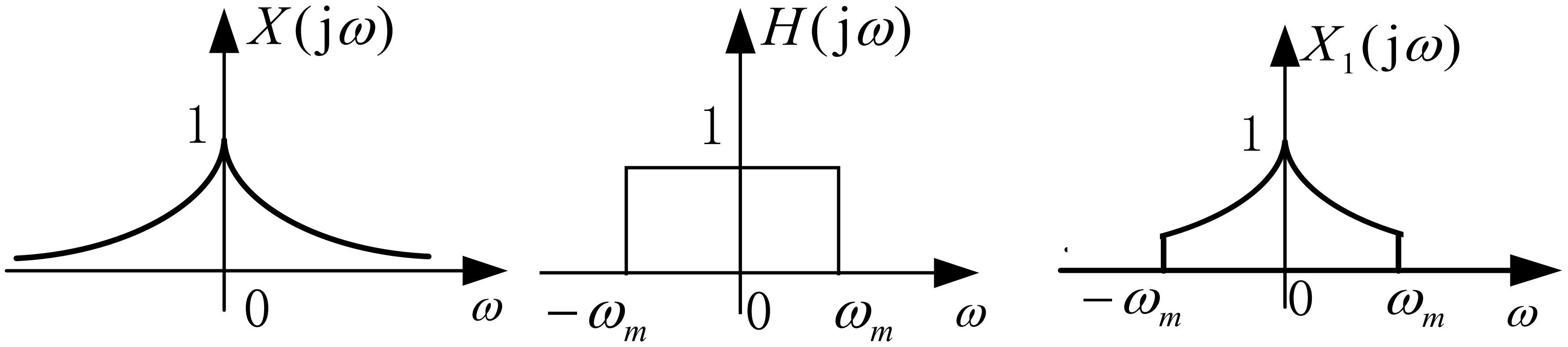
时域相乘相当于频域卷积，所以带宽为$\omega1 + \omega2$

时域卷积相当于频域相乘，所以带宽为$\min\ (\omega1，\omega2)$

采样定理的实际应用

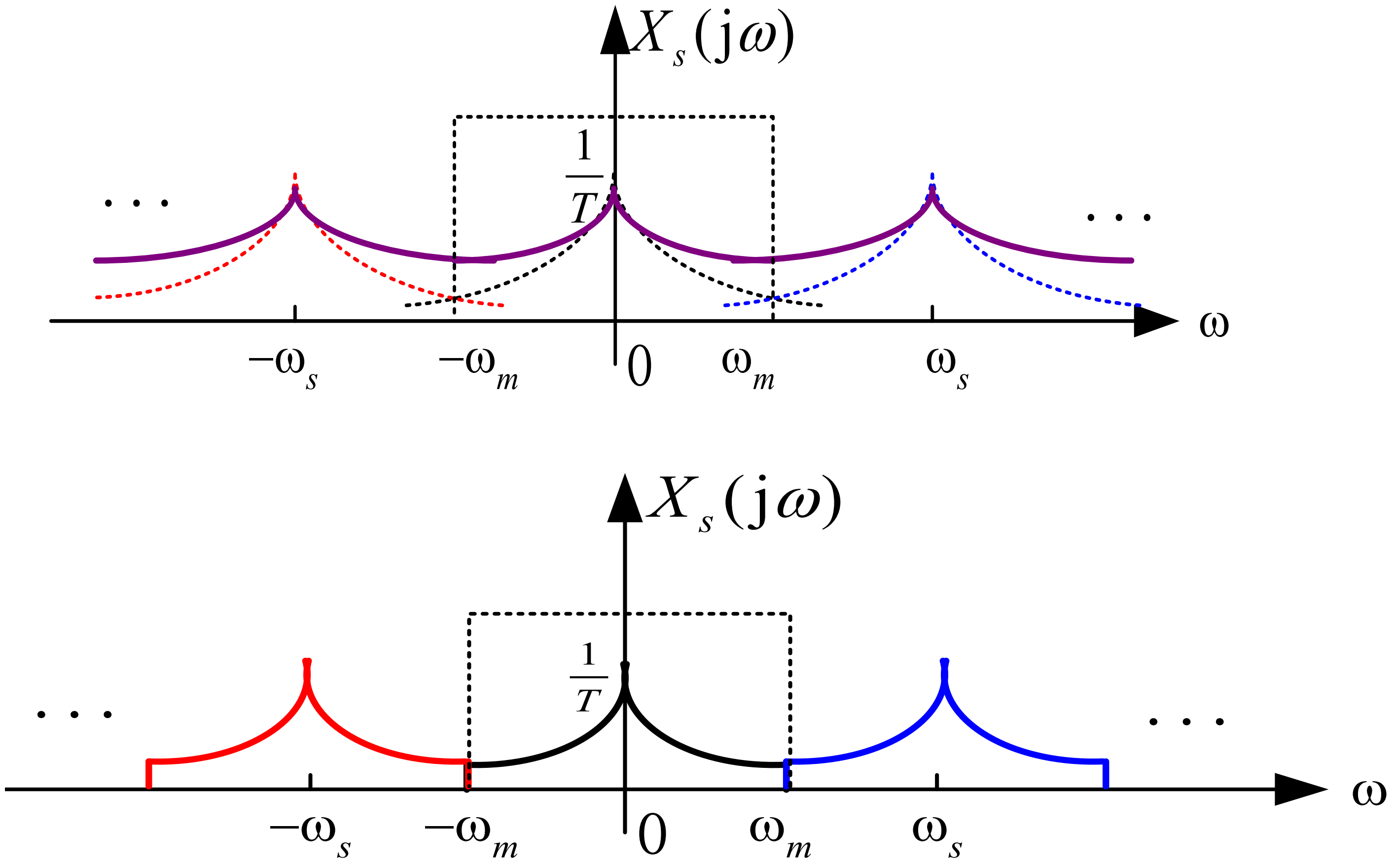
- 许多实际工程信号不满足**带限**条件

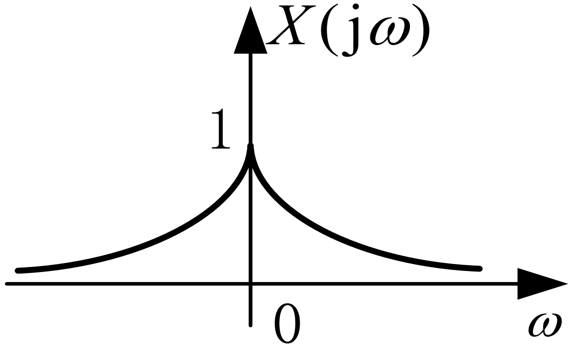


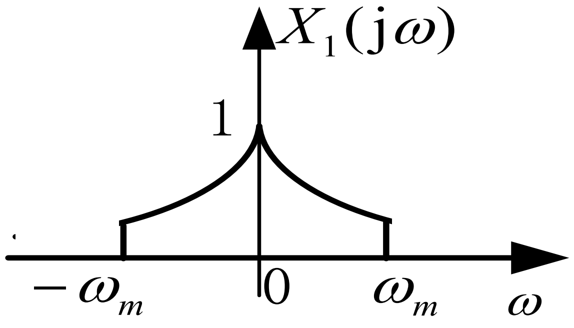


采样定理的实际应用

- 混叠误差与截断误差比较



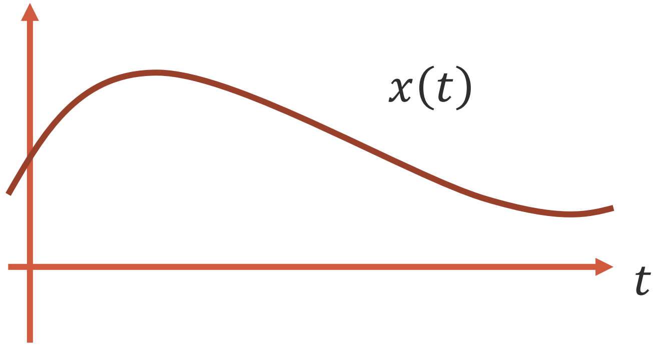


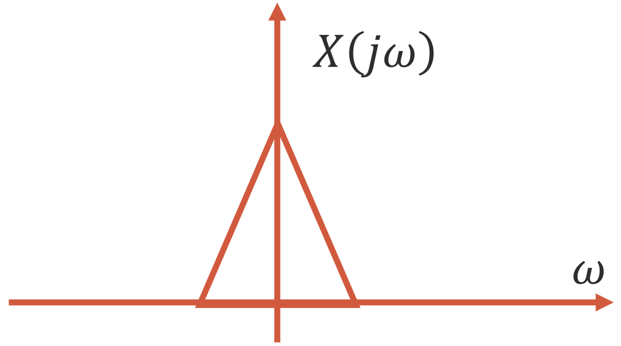


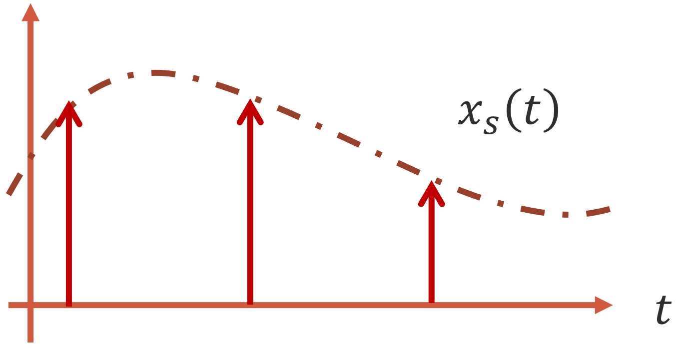
为避免频谱混叠，通常把采样频率设为$\omega_s = (3 \sim 4)\omega_m$或更高

信号的时域采样（欠采样）

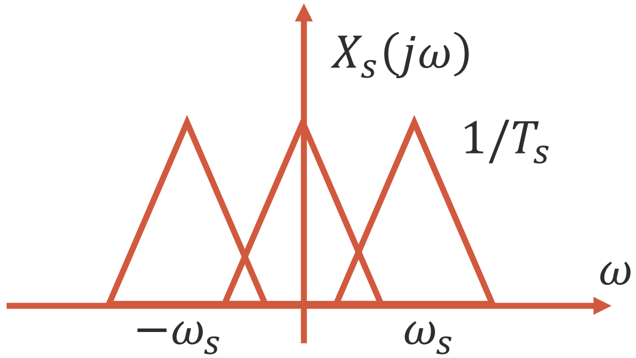
- 不满足采样定理条件时，信号重构时可能会干扰原始频谱







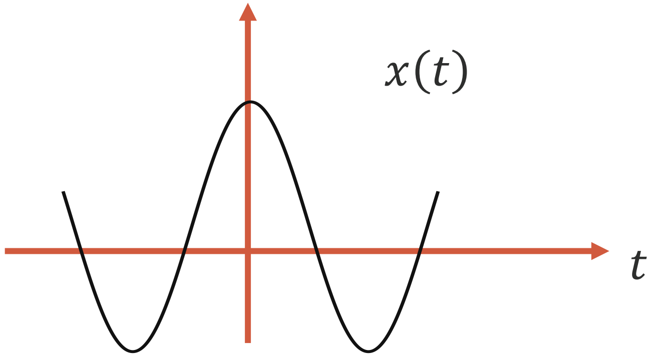
$\omega_s < 2\omega_m$

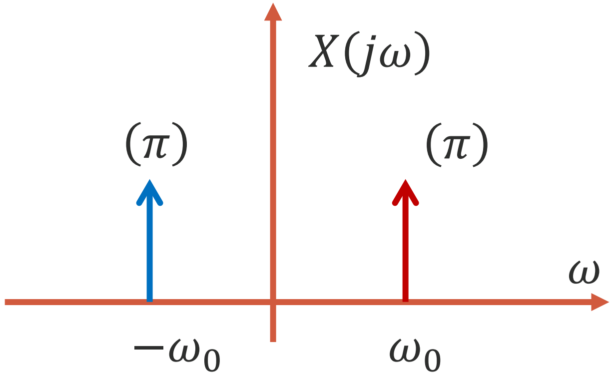


产生混叠 (aliasing)

信号的时域采样（欠采样）

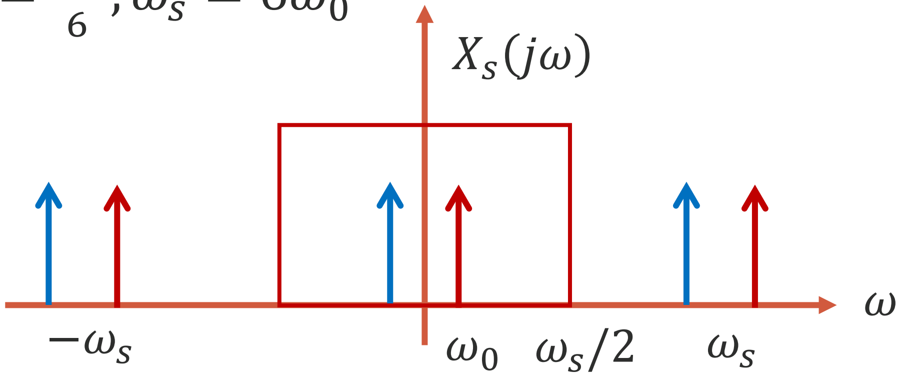
- 设$x(t) = \cos(\omega_0 t)$



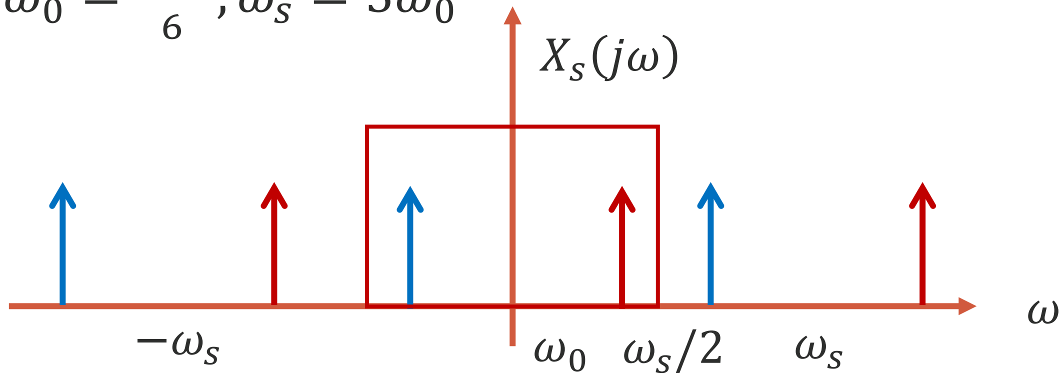


- **固定ω_s**, 考察不同ω_0与ω_s的关系时的情况

$\omega_0 = \frac{\omega_s}{6}, \omega_s = 6\omega_0$

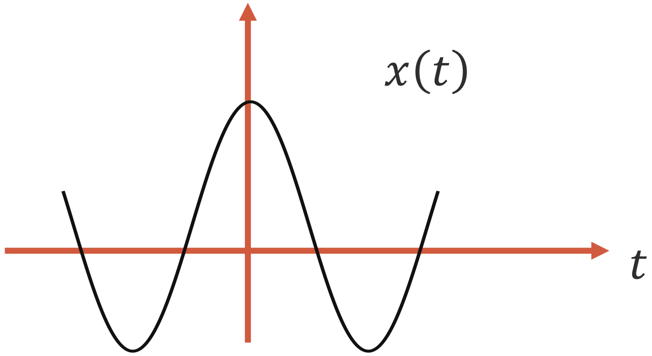


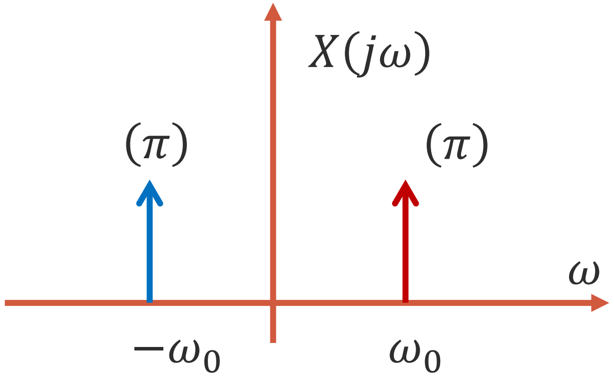
$\omega_0 = \frac{2\omega_s}{6}, \omega_s = 3\omega_0$



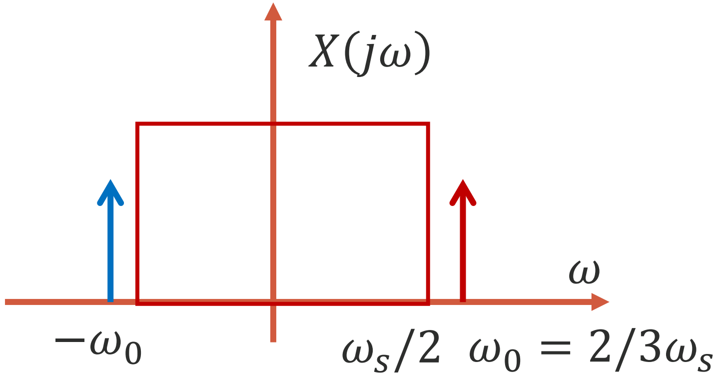
信号的时域采样（欠采样）

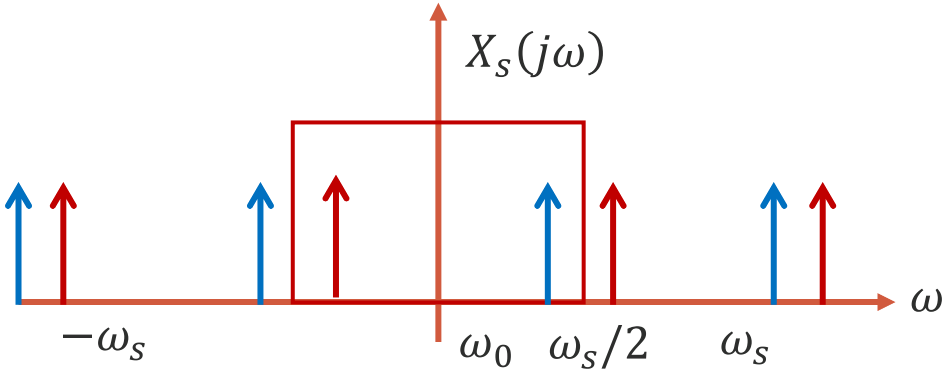
- 设$x(t)=\cos(\omega_0 t)$





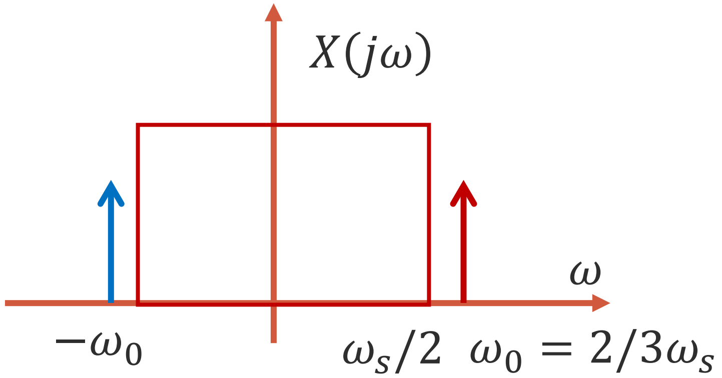
- **固定$\boldsymbol{\omega_s}$**，考察不同ω_0与ω_s的关系时的情况
  - $\omega_0=\frac{4\omega_s}{6}, \omega_s=1.5\omega_0$ （发生混叠）

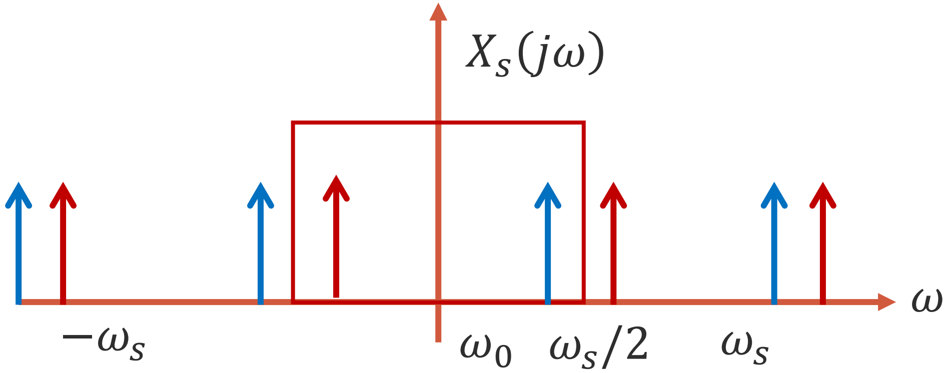




信号的时域采样（欠采样）

- 设$x(t) = \cos(\omega_0 t)$，固定ω_s，考察不同ω_0与ω_s的关系时的情况
  - $\omega_0 = \frac{4\omega_s}{6}, \omega_s = 1.5\omega_0$ （发生混叠）

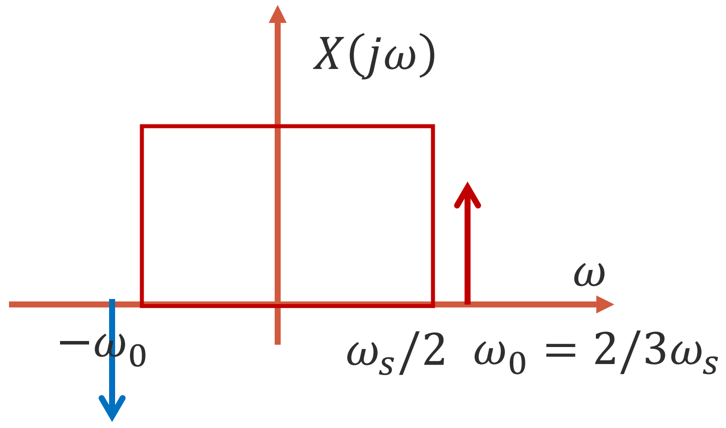


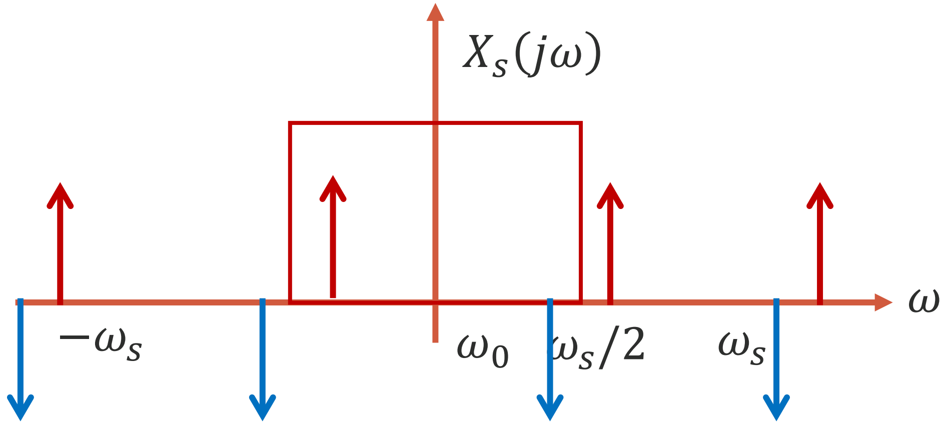


- 原始频率ω_0被混叠为低频率$\omega_s - \omega_0$
  - 当$\frac{\omega_s}{2} < \omega_0 < \omega_s$时，随$\omega_0$相对$\omega_s$的增加，输出频率$\omega_s - \omega_0$会减小
  - $\omega_s = \omega_0$时，重建后的信号为常数（每个周期只采样一次）

信号的时域采样（欠采样）

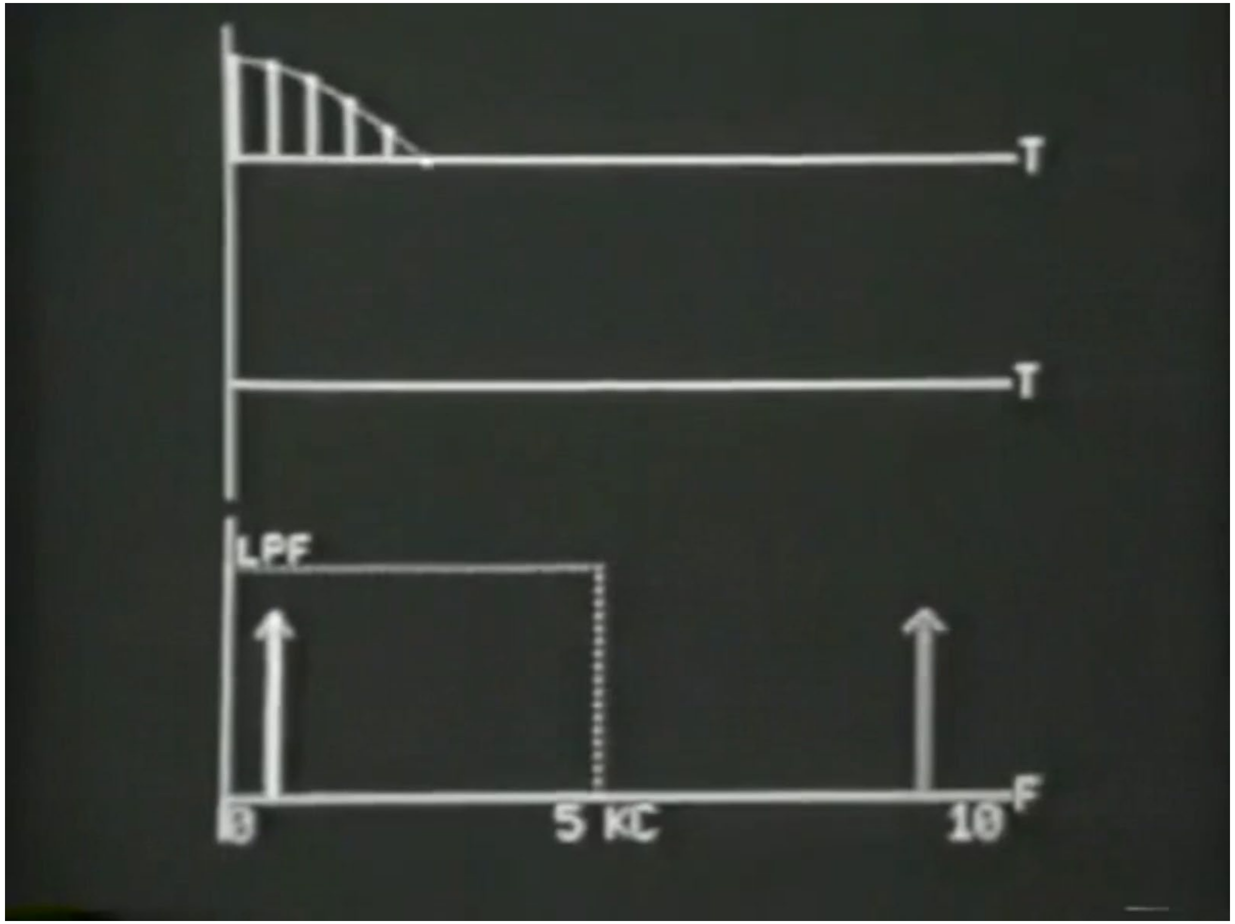
- 设$x(t)=\sin(\omega_0 t)$，固定ω_s, 考察不同ω_0与ω_s的关系时的情况
  - $\omega_0=\frac{4\omega_s}{6}, \omega_s=1.5\omega_0$ （发生混叠）





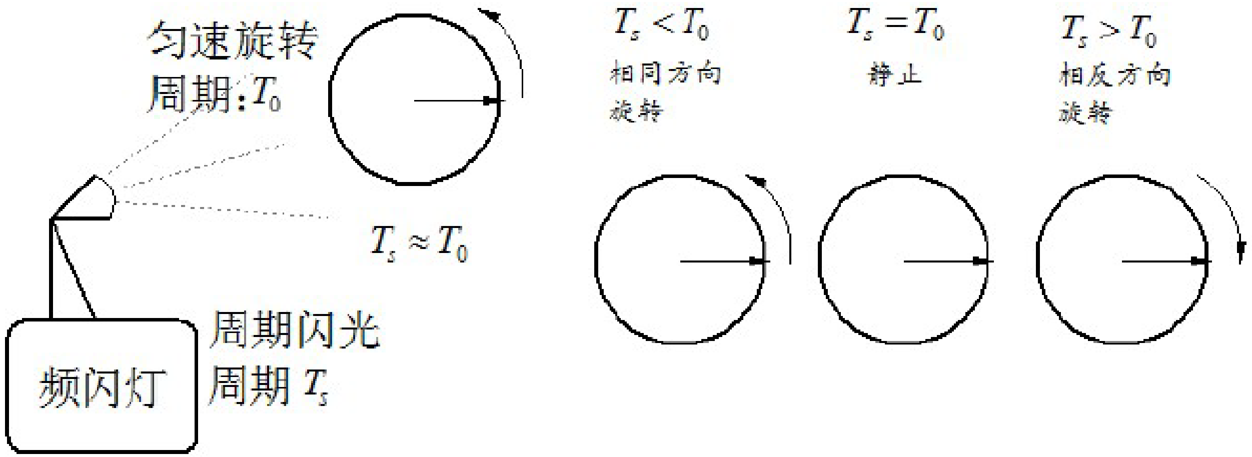
- 产生相位倒置（phase reversal）

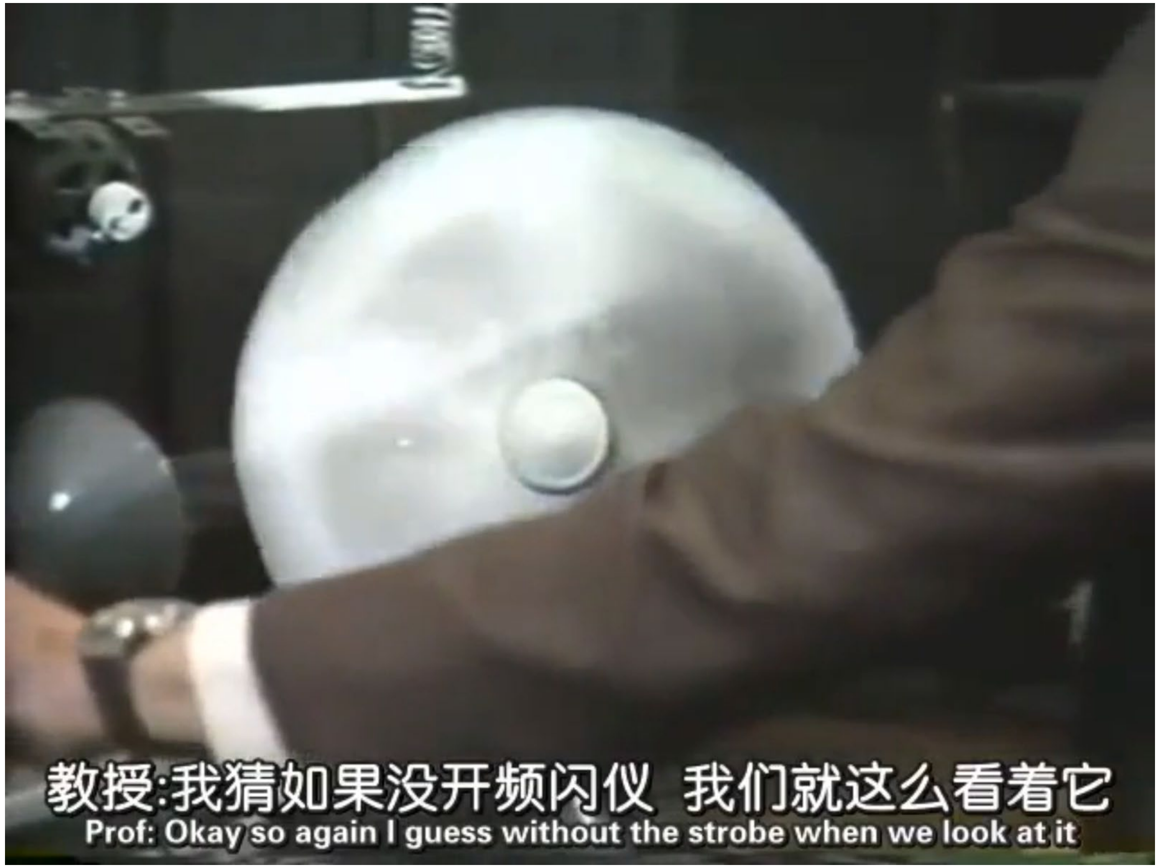
信号的时域采样（欠采样）



欠采样示例

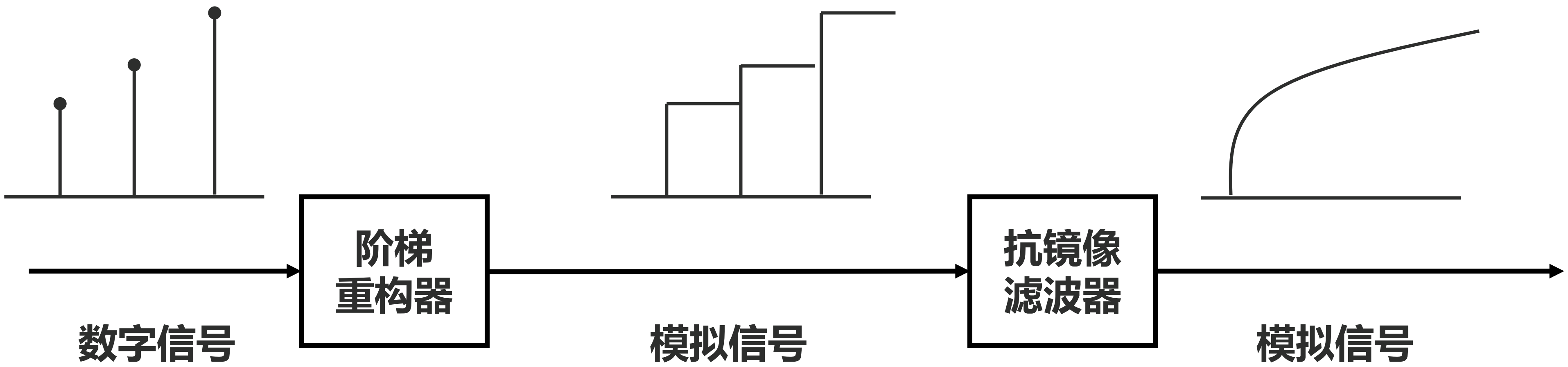
- 频率混叠对低频的影响，原本是高频信号，采样后会变成低频序列，干扰原始信号的低频频谱





从数字信号到模拟信号

- D/A的工作流程



保持信号，使当前时刻的样本值保持到下一个时刻，使信号更加光滑（滤除高频部分）

再次通过低通滤波器，进一步滤除高频分量