# Operations on Multi-dimensional Random Variables – 2

November 12, 2023

## 多维随机变量的分布函数和密度函数

将二维随机向量及分布推广到多维随机向量, 二维与多维随机变量没有本质性的区别, 只是相关概念和结论的扩展.

**定义 0.49** 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 为 $n$ 维随机向量, 对任意实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, 函数

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n)$$

称为$n$ 维随机向量 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 的分布函数, 或随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的联合分布函数. 若存在可积函数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 使得对任意实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 有

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, u_2, \ldots, u_n) du_1 du_2 \ldots du_n,$$

则称$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 为连续型随机向量, 称 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 为$n$ 维联合密度函数.

# $n$ 维联合密度函数的性质

- 非负性. 对任意实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 有 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$;
- 规范性.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2, \ldots, u_n)\, du_1 du_2 \ldots du_n = 1$$

- 连续性. 若 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 在点 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 处连续, 则有

$$\frac{\partial F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- 有界区域可积. 设 $G$ 是 $n$ 维空间的一片区域, 则有

$$P((X_1, X_2, \ldots, X_n) \in G) = \int \ldots \int_G f(u_1, u_2, \ldots, u_n)\, du_1 du_2 \ldots du_n$$

# 多维随机变量的边缘分布函数和边缘密度函数

**定义 0.50** $n$ 维随机向量 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 中任意 $k$ $(k \leq n)$ 个分量所构成的随机向量, 它的分布函数和密度函数被称为 $k$ 维边缘分布函数和 $k$ 维边缘密度函数.

例如，随机向量 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 前 $k$ 维随机向量的边缘分布函数和边缘密度函数分布为

$$
\begin{aligned}
&F_{X_1,X_2,\ldots,X_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \\
&= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_k \leq x_k) = \lim_{\substack{x_{k+1}\to+\infty \\ x_n\to+\infty}} F(x_1, x_2, \ldots, x_k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_{X_1,X_2,\ldots,X_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n) du_{k+1} \ldots du_n
\end{aligned}
$$

# 多维随机变量的独立性

将二维随机向量及分布推广到多维随机向量, 二维与多维随机变量没有本质性的区别, 只是相关概念和结论的扩展.

**定义 0.51** 若随机向量 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 的联合分布函数 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 满足

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\ldots F_{X_n}(x_n)$$

则称 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立. 若随机向量 $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ 和 $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ 的联合分布函数 $F(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ 满足

$$F(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = F_X(x_1, \ldots, x_m)F_Y(y_1, \ldots, y_n)$$

则称随机向量 $X$ 和 $Y$ 相互独立.

# 多维正态分布

多维随机向量中最重要的常用是多维正态分布.

**定义 0.52** 给定一个向量 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ 和正定矩阵 $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 对任意实数向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ 若随机向量 $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 的密度函数为

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2}\exp(-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})/2)$$

则称随机向量 $X$ 服从参数为 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的多维正态分布 (multivariate normal distribution), 记

$$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

特别的, 当 $n = 2$ 时, 二维随机变量 $(X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$ 可以写成矩阵形式

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

## 多维标准正态分布及标准化

回顾: 一维随机变量 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y = (X-\mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0,1)$. 即一般的正态变量都可以通过一个线性变换 (标准化) 化成标准状态变量.

**定义 0.53** 当 $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}_n$(全为零的 $n$ 维向量), 以及 $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{I}_n$($n \times n$ 单位阵) 时, 正态分布 $\mathcal{N}(\mathbf{0}_n, \boldsymbol{I}_n)$ 被称为$n$ 维标准正态分布.

**定理 0.27** 设 $n$ 维随机向量 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, 以及正定矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的特征值分解 $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{U}$, 则随机向量

$$Y = \boldsymbol{\Lambda}^{-1/2} \boldsymbol{U}(X - \boldsymbol{\mu}) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_n, \boldsymbol{I}_n).$$

# 多维正态分布的可加性

**定理 0.28** 随机向量 $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, 则有

$$Y = \boldsymbol{A}X + \boldsymbol{b} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}^\top)$$

其中 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

## 多维正态分布其他性质

**定理 0.29** 设随机向量 $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top$ 和 $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)^\top$, 以及

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left( \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu_x} \\ \boldsymbol{\mu_y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma_{xx}} & \boldsymbol{\Sigma_{xy}} \\ \boldsymbol{\Sigma_{yx}} & \boldsymbol{\Sigma_{yy}} \end{pmatrix} \right),$$

- 随机向量 $X$ 和 $Y$ 的边缘分布为 $X \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu_x}, \boldsymbol{\Sigma_{xx}})$ 和 $Y \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu_y}, \boldsymbol{\Sigma_{yy}})$;
- 随机向量 $X$ 和 $Y$ 相互独立的充要条件是 $\boldsymbol{\Sigma_{xy}} = \mathbf{0}_{m\times n}$(元素全为零的 $m \times n$ 矩阵);
- 在 $X = \boldsymbol{x}$ 的条件下随机向量 $Y \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu_y} + \boldsymbol{\Sigma_{yx}}\boldsymbol{\Sigma_{xx}^{-1}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_x}), \boldsymbol{\Sigma_{yy}} - \boldsymbol{\Sigma_{yx}}\boldsymbol{\Sigma_{xx}^{-1}}\boldsymbol{\Sigma_{xy}})$;
- 在 $Y = \boldsymbol{y}$ 的条件下随机向量 $X \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu_x} + \boldsymbol{\Sigma_{xy}}\boldsymbol{\Sigma_{yy}^{-1}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu_y}), \boldsymbol{\Sigma_{xx}} - \boldsymbol{\Sigma_{xy}}\boldsymbol{\Sigma_{yy}^{-1}}\boldsymbol{\Sigma_{yx}})$.