离散数学（2023）作业17 - 代数系统与半群

离散数学教学组

Problem 1

设 S 为 n 元集，问：

1. 集合 S 上可以定义多少个不同的二元运算？
2. 其中有多少个二元运算是可交换的？
3. 其中有多少个二元运算是幂等的？
4. 其中有多少个二元运算是既不可交换又不幂等的？

Problem 2

设 $A = \{a, b, c\}$，$a, b, c \in \mathbb{R}$，能否确定 a, b, c 的值，使得：

1. A 对普通加法封闭？
2. A 对普通乘法封闭？

Problem 3

判断下列集合对所给的二元运算是否封闭：

1. 整数集合 $\mathbb{Z}$ 和普通的减法运算
2. 非零整数集合 $\mathbb{Z}^*$ 和普通的除法运算
3. 全体 $n \times n$ 实数矩阵集合 $M_n(\mathbb{R})$ 和矩阵加法及乘法运算，其中 $n \geq 2$
4. 全体 $n \times n$ 实可逆矩阵集合关于矩阵加法和乘法运算，其中 $n \geq 2$
5. 正实数集合 $\mathbb{R}^+$ 和 $\circ$ 运算，其中 $\circ$ 运算定义为：
$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, a \circ b = ab - a - b$$
6. $\mathbb{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$，$n \geq 2$，其中 $\circ$ 运算定义如下：
$$\forall a, b \in \mathbb{A}, a \circ b = b$$
7. $\mathbb{S} = \{0, 1\}$ 关于普通加法和乘法运算
8. $\mathbb{S} = \{x | x = 2^n, n \in \mathbb{Z}^+\}$ 关于普通的加法和乘法运算
9. $\mathbb{S} = \{x | x = \ln n, n \in \mathbb{Z}^+\}$ 关于普通的加法和乘法运算

Problem 4

$\mathbb{R}$ 为实数集，定义以下 4 个函数 f_1, f_2, f_3, f_4. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned} f_1((x,y)) &= x \cdot y, & f_2((x,y)) &= x - y, \\ f_3((x,y)) &= \max(x,y), & f_4((x,y)) &= |x - y|. \end{aligned}$$

1. 判断上述二元运算是否为可交换，可结合，幂等的；
2. 求上述二元运算的单位元，零元以及每一个可逆元素的逆元；
3. 设 $A = \{a, b\}$，试给出 A 上一个不可交换，也不可结合的二元运算。

Problem 5

设 $S=\{1,2,\ldots,10\}$，问下面定义的运算能否与 S 构成代数系统 $\langle S,*\rangle$？如果能，则说明 $*$ 运算是否满足交换律、结合律，并给出单位元和零元。

1. $x*y=\mathrm{gcd}(x,y)$，$\mathrm{gcd}(x,y)$ 是 x 与 y 的最大公约数；
2. $x*y=\mathrm{lcm}(x,y)$，$\mathrm{lcm}(x,y)$ 是 x 与 y 的最小公倍数；
3. $x*y=\max(x,y)$；
4. $x*y=$ 质数 p 的个数，其中 $x\le p\le y$。

Problem 6

设 A 是一个非空集合，定义 $\circ$：$a\circ b=a,\forall a,b\in A$。试证明：$\langle A,\circ\rangle$ 是一个半群。

Problem 7

设 $(S,*)$ 是一个半群，$a\in S$，在 S 上定义 $\circ$：$x\circ y=x*a*y,\forall x,y\in S$。证明：$(S,\circ)$ 也是一个半群。

Problem 8

设 $(S,*)$ 是一个半群，如果对所有的 $a,b\in S$，只要 $a\neq b$，必有 $a*b\neq b*a$，证明：

1. $\forall a\in S$，有 $a*a=a$；
2. $\forall a,b\in S$，有 $a*b*a=a$；
3. $\forall a,b,c\in S$，有 $a*b*c=a*c$。

Problem 9

设代数系统 $(A,*)$ 是一个有限的半群，证明 A 中必存在某个元素 a，使得 $a*a=a$。

Problem 10

设 $\langle A,\oplus\rangle$ 和 $\langle B,\odot\rangle$ 是两个代数系统，f 是 $\langle A,\oplus\rangle$ 到 $\langle B,\odot\rangle$ 的同构映射。证明：

1. 如果 $\oplus$ 是可结合的，那么 $\odot$ 也是可结合的；
2. 如果 e 是 $\langle A,\oplus\rangle$ 的单位元，那么 $f(e)$ 是 $\langle B,\odot\rangle$ 的单位元；
3. 如果在 $\langle A,\oplus\rangle$ 中 b 是 a 的逆元，那么在 $\langle B,\odot\rangle$ 中 $f(a)$ 是 $f(b)$ 的逆元。