离散数学（2023）作业 03 - 证明方法

March 13, 2023

Problem 1

证明.

1.		$\forall x(P(x) \lor Q(x))$	premise
2.		$\forall x(\neg Q(x) \lor S(x))$	premise
3.		$\forall x(R(x) \to \neg S(x))$	premise
4.		$\exists x \neg P(x)$	premise
5.	u	$P(u) \lor Q(u)$	$\forall$e 1
6.		$\neg Q(u) \lor S(u)$	$\forall$e 2
7.		$R(u) \to \neg S(u)$	$\forall$e 3
8.		$\neg P(u)$	$\exists$e 4
9.		$P(u)$	assumption
10.		$\perp$	$\neg$e 8,9
11.		$Q(u)$	$\perp$e 10
12.		$Q(u)$	assumption
13.		$Q(u)$	12
14.		$Q(u)$	$\lor$e 5,9-11,12-13
15.		$\neg Q(u)$	assumption
16.		$\perp$	$\neg$e 14,15
17.		$S(u)$	$\perp$e 16
18.		$S(u)$	assumption
19.		$S(u)$	19
20.		$S(u)$	$\lor$e 6,15-17,18-19
21.		$\neg R(u)$	MT 7,20
22.		$\exists x \neg R(x)$	$\exists$i 21
23.		$\exists x \neg R(x)$	$\exists$i 1-4, 5-22

□

Problem 2

证明.

1.		$\forall x(P(x) \land R(x))$	premise
2.		$\forall x(P(x) \to (Q(x) \land S(x)))$	premise
3.	u	$P(u) \to (Q(u) \land S(u))$	$\forall$e 2
4.		$P(u) \land R(u)$	$\forall$e 1
5.		$P(u)$	$\land$e$_1$ 4
6.		$Q(u) \land S(u)$	$\to$i 5,3
7.		$S(u)$	$\land$e$_2$ 6
8.		$R(u)$	$\land$e$_2$ 4
9.		$R(u) \land S(u)$	$\land$i 7,8
10.		$\forall(R(x) \land S(x))$	$\forall$i 9
11.		$\forall(R(x) \land S(x))$	$\forall$i 1,2,3-10

□

Problem 3

x 和 y 奇偶性相反，不失一般性，假设 x 为奇数，即 $x = 2m + 1$（m 为整数）；y 为偶数，即 $y = 2n$（n 为整数）；那么 $x^2 - x \cdot y - y^2 = 2(2m^2 + 2m - 2mn - n - 2n^2) + 1$，所以 $x^2 - x \cdot y - y^2$ 为奇整数。

Problem 4

分情况讨论：

1. a 是三个数中最小的。那么 $\min(a, \min(b, c)) = a$，$\min(\min(a, b), c) = \min(a, c) = a$，二者相等。
2. b 是三个数中最小的。那么 $\min(a, \min(b, c)) = \min(a, b) = b$，$\min(\min(a, b), c) = \min(b, c) = b$，二者相等。
3. c 是三个数中最小的。那么 $\min(a, \min(b, c)) = \min(a, c) = c$，$\min(\min(a, b), c) = c$，二者相等。

综上得证。

Problem 5

偶数的平方 $(2k)^2 = 4k^2 \equiv 0 \pmod 4$；奇数的平方 $(2k+1)^2 = 4(k^2 + k) + 1 \equiv 1 \pmod 4$。因此，任意两个整数的平方和模 4 的余数只可能为 0 或 1 或 2，而 $4m + 3 \equiv 3 \pmod 4$。

Problem 6

证明 $\sqrt{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)} \geq \frac{1}{2}(x + y)$:

由 $(x - y)^2 \geq 0$，可得 $2x^2 + 2y^2 \geq x^2 + 2xy + y^2$，即 $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \geq \frac{1}{4}(x + y)^2$。显然，不等式两边均为非负数，因此 $\sqrt{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)} \geq \frac{1}{2}(x + y)$ 得证。

Problem 7

使用反证法证明：假设方程 $ax + b = c$ 有两个解 x_1 和 x_2，且 $x_1 \neq x_2$。

将解代入方程得 $ax_1 + b = c$ 和 $ax_2 + b = c$。将两个方程左右两边分别相减，可得 $ax_1 + b - (ax_2 + b) = 0$，即 $a(x_1 - x_2) = 0$。因为 $a \neq 0$，因此 $x_1 - x_2 = 0$，即 $x_1 = x_2$，与假设矛盾。

方程 $ax + b = c$ 的解是唯一的得证。

Problem 8

令 $n = \lceil x \rceil$ 且 $\epsilon = n - x$。显然，对于任意实数 x，$n = \lceil x \rceil$ 是唯一的，因此 $\epsilon = n - x$ 也是唯一的。得证。

Problem 9

分情况讨论：

1. 如果 $|y| \geq 2$，那么 $2x^2 + 5y^2 \geq 2x^2 + 20 \geq 20$，不满足方程。
2. 如果 $|y| < 2$，即 $y = 0$，或 $y = 1$，或 $y = -1$；当 $y = 0$ 时，$2x^2 = 14$；当 $y = 1$ 或 $y = -1$ 时，$2x^2 = 9$；显然这两个方程没有整数解。

综上，原始方程没有 x 和 y 的整数解。

Problem 10

设有理数 $x = 2$，无理数 $y = \sqrt{2}$。此时 $x^y = 2^{\sqrt{2}}$，Gelfond-Schneider Theorem 证明了 $2^{\sqrt{2}}$ 为无理数。即存在一个有理数 x 和无理数 y 令 x^y 是无理数。