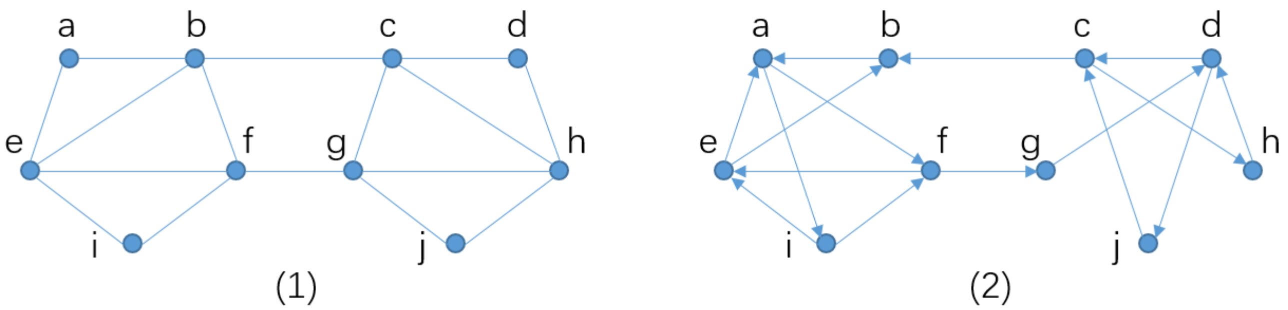
离散数学（2023）作业 23 - 欧拉图与哈密尔顿图

离散数学教学组

如无特意说明，以后各题只考虑有限个点的图。

Problem 1

试确定下方所示各图是否具有欧拉回路。若存在欧拉回路，则构造出一条欧拉回路。若不存在，试确定这个图是否具有欧拉通路。若存在欧拉通路，则构造出一条欧拉通路。



答案:

1. 存在欧拉回路，任意顶点出发均可，例如 a->b->c->d->h->j->g->h->c->g->f->i->e->b->f->e->a，注意回路需经过 16 条边。
2. 不存在欧拉回路，存在欧拉通路，仅可从 i 出发以 b 结束，例如 i->e->a->i->f->e->b->a->f->g->d->c->h->d->j->c->b，注意回路需经过 16 条边。

Problem 2

对哪些 m 和 n 值来说，完全二部图 $K_{m,n}$ 具有

1. 欧拉回路？
2. 欧拉通路？

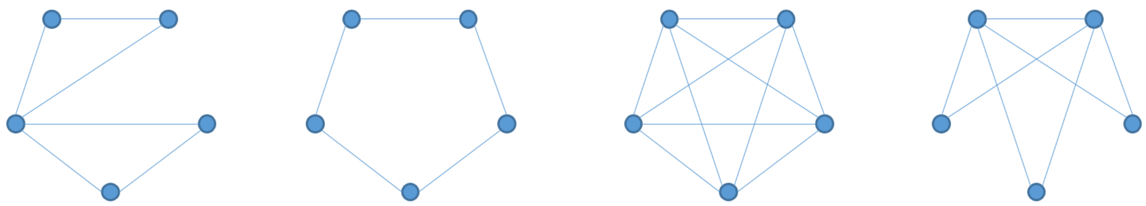
答案:

1. 欧拉回路：m 和 n 均为偶数
2. 欧拉通路：
   - m 和 n 均为偶数;
   - m 与 n 中一个为奇数，另一个为 2;
   - m 和 n 均为 1。

Problem 3

请找出所有互不同构的具有 5 个顶点的欧拉图（仅考虑无向简单图，画图示意即可）。

答案：



Problem 4

若无向简单图 G 有欧拉通路，证明或反驳：

1. 当 G 的顶点数是奇数时，若补图 $\bar{G}$ 是连通的，则 $\bar{G}$ 中存在欧拉通路。
2. 当 G 的顶点数是偶数时，若补图 $\bar{G}$ 是连通的，则 $\bar{G}$ 中不存在欧拉通路。

答案：

1. 证明：当 G 有奇数个顶点时，若 G 有欧拉通路，则 G 有 2 个（或 0 个）奇数度顶点，其他顶点的度均为偶数。则补图 $\bar{G}$ 中也只有 2 个（或 0 个）奇数度顶点，其他顶点度均为偶数。因此若 $\bar{G}$ 是连通的，则 $\bar{G}$ 存在欧拉通路。
2. 反驳：当 G 为 4 个顶点构成的简单通路时，G 和 $\bar{G}$ 均存在欧拉通路。

Problem 5

给定无向简单图 G（$|G| \geq 3$），定义线图 $L(G)$ 如下：

- 对 G 中的每条边，$L(G)$ 中恰好有一个顶点与之对应；
- $L(G)$ 中任意两点相邻当且仅当它们在 G 中对应的两条边相邻（即有一个公共顶点）。

证明：若 G 是简单、连通的 r-正则图，则 $L(G)$ 是欧拉图。

答案：

- 先证明 $L(G)$ 是连通的：对于任意的 e_1, e_2，分别取它们的端点 u_1, u_2，由 G 的连通性知存在 $Path(u_1, u_2)$，因此存在路 $e_1, Path(u_1, u_2), e_2$，其上边都是相邻的，因此 $L(G)$ 中 e_1, e_2 是连通的。
- 再证明 $L(G)$ 每个点的度都是偶数：对于任意 e_0，考虑 e_0 的端点 u, v 及对应边集 $E_G(u) = \{e \in E(G) | u \in e\}, E_G(v) = \{e \in E(G) | v \in e\}$。因为 G 是 r- 正则的，所以 $|E_G(u)| = |E_G(v)| = r$，由 G 是简单图，得 $E_G(u) \cap E_G(v) = \{e_0\}$，于是在 $L(G)$ 中 $\deg(e_0) = |N_{L(G)}(e_0)| = |E_G(u) \cup E_G(v)| - 1 = 2(r-1)$。

综上，$L(G)$ 是欧拉图。

Problem 6

对哪些 m 和 n 值来说，完全二部图 $K_{m,n}$ 具有哈密尔顿回路？

答案： $m = n \geq 2$ (若额外回答出 $m = 0$ 且 $n = 1$、$m = 1$ 且 $n = 0$ 可算作正确)

Problem 7

证明或反驳：如果二部图 G 是哈密尔顿图，那么必有偶数个顶点。

答案： 由于图 G 的边全部在二部图的左右两边 (X, Y) 之间，如果 G 有哈密尔顿圈 C，则 G 中所有顶点全在 C 上，且必定是 X 的点和 Y 的点交替在 C 上出现，因此 G 必有偶数个顶点。

Problem 8

若简单图 G 满足 $V(G) \geq 3$ 且 $\delta(G) \geq \frac{V(G)-1}{2}$，证明或反驳：

1. G 一定存在哈密尔顿回路。
2. G 一定存在哈密尔顿通路。

答案：

1. 反驳，考虑两个通过割点相连的 K_3。
2. 证明，根据 Ore 定理的推论，对 G 中任意不相邻的顶点对 u, v 均满足 $d(u) + d(v) \geq n - 1$，因此 G 一定存在哈密尔顿通路。

Problem 9

考虑在 11 天安排 11 门课程的考试（每天考 1 门课），使得同一位老师所任的任意两门课程考试不排在接连的两天中，试证明如果没有老师担任多于 6 门课程，则符合上述要求的考试安排总是可能的。

答案： 设 G 为具有 11 个顶点的图，每个顶点对应于一门课程考试，如果这两个顶点对应的课程考试是由不同教师担任的，那么这两个顶点之间有一条边，因为每个教师所任课程数不超过 6，故每个顶点的度数至少是 5，任两个不相邻结点的度数之和至少是 10，根据 Ore 定理的推论，G 总是包含一条哈密尔顿通路，得证。

Problem 10

简单图 G 满足 $|G| > 2$，令 m 为 G 的边数，n 为 G 的顶点数。试证明：如果 $m > C_{n-1}^2 + 1$，则 G 一定存在哈密尔顿回路。
「**提示：**可使用数学归纳法证明。」

答案：

Basis $n = 3$ 时，结论显然成立。

I.H. 假设 $n < k$ 时 G 存在哈密尔顿回路。

I.S. 当 $n = k$ 时，G 的补图 $\bar{G}$ 的边数 $|E(\bar{G})| < C_n^2 - C_{n-1}^2 - 1 = n - 2$,这就意味着 $\bar{G}$ 至少有一个节点的度数为 0 或 1。不妨设这个节点为 v。

- A 度数为 1 的情况：$d(v) = n - 2$，在 G 中删除 v 后得到 G'，此时 G' 的边数满足归纳条件足 $|E(G')| > C_{n-2}^2 + 1$，存在哈密尔顿回路 C。由于 v 跟 G' 中 $n - 2$ 个顶点相连，总可以取其中的在 C 中相邻的顶点 u 和 w，将 $u - w$ 改成 $u - v - w$ 便得到 G 上的哈密尔顿回路。
- B 度数为 0 的情况：$d(v) = n - 1$。在图 G 中删除 v 得到 G'，下面对 G' 分情况讨论 (注意 G' 有 $n - 1$ 个顶点)：
  - (1) 如果 G' 是完全图，G' 一定存在哈密尔顿回路。由于 v 与 G' 中的点均相连，不妨取其中的相邻的顶点 u 和 w，将 $u - w$ 改成 $u - v - w$ 便得到 G 上的哈密尔顿回路。
  - (2) 如果 G' 不是完全图，我们向其中加入一条边 e，对于 $G' + \{e\}$ 满足 $|E(G' + \{e\})| > C_{n-1}^2 + 1 - (n-1) + 1 = C_{n-2}^2 + 1$，由归纳假设，$G' + \{e\}$ 中存在哈密尔顿回路。不妨设此回路为 C：
    - a) 如果 C 中不包含 e，则我们可以通过 (1) 的方式获得 G 的哈密尔顿回路；
    - b) 如果 C 中包含 e，将 e 从 C 中删除得到一条哈密尔顿通路，类似的，将 v 和 e 的两个端点相连便是一条哈密尔顿回路。