函数及其运算

马晓星

http://cs.nju.edu.cn/xxm

南京大学计算机科学与技术系

回顾

- 集合的基本概念
  - 集合及其描述
  - 集合相等、子集关系
  - 幂集、笛卡尔乘积
- 集合运算
  - 交并补、广义交、广义并
  - 集合恒等式
  - 集合相关命题的证明方式

提要

- 函数
  - 关系
  - 函数的定义
  - 单射与满射
  - 反函数
  - 函数的运算
  - 函数构成的集合、序列

有序对（Ordered pair）

- (a,b)是集合$\{\{a\},\{a,b\}\}$的简写

- 次序的体现

  $(x,y)=(u,v)$ iff $x=u$ 且 $y=v$

  - 若$\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{u\},\{u,v\}\}$，则$\{x\}=\{u\}$或$\{x\}=\{u,v\}$, 因此$x=u$。
  - 假设$y\neq v$
  - (1) 若$x=y$, 左边$=\{\{x\}\}$, 而$v\neq x$, $\therefore$右边$\neq\{\{x\}\}$;
  - (2) 若$x\neq y$,则必有$\{x,y\}=\{u,v\}$, 但y既非u,又非v, 矛盾。

笛卡尔乘积（Cartesian Product）

- 对任意集合A, B 笛卡尔积

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

- 例：$\{1,2,3\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (3, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$

- 若A，B是有限集合， $|A \times B| = |A| \times |B|$

例题

- $A = \{1,2\}, \quad \mathcal{P}(A)\times A = ?$
- $|A| = m, |B| = n, \quad |A\times B| = ?$
- $\emptyset\times\mathcal{P}(\emptyset) = ?$
- $\left|\mathcal{P}(\emptyset)\times\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(\emptyset)\right)\right| = ?$

关系（Relation）的定义

- 若A, B是集合,从A到B的一个（二元）关系是$A\times B$的一个子集.

$$R \subseteq A\times B$$

  是一个集合。
  - 集合的元素是有序对
  - 可以是空集

- 关系意味着什么？
  - 两类对象之间建立起来的联系！

二元关系

- 笛卡尔乘积的子集
  - “从A到B的关系”R；$R \subseteq A \times B$
  - 若$A = B$： 称为“集合A上的（二元）关系”

- 例子
  - 常用的数学关系：不大于、整除、集合包含等
  - 网页链接、文章引用、相互认识

特殊的二元关系

- 集合A上的空关系$\emptyset$: 空关系即空集
- 全域关系 E_A: $E_A = \{(x, y) \mid x, y \in A\}$
- 恒等关系 I_A: $I_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$

函数(function)

- 设A和B为非空集合，从集合A到B的**函数** f 是对元素的一种指派：给A的每个元素均指派B的一个元素。记作 $f: A \to B$
  - $f: A \to B$ ： 函数的**型构**
  - f的**定义域**（domain）是A， f的**伴域**（codomain）是B
  - 如果f为A中元素a指派的B中元素为b，就写成 $f(a) = b$。此时，称b是a的**像**，而a是b的**一个原像**。
  - A中元素的像构成的集合称为f**的值域**（range）。
  - 函数也称为**映射**(mapping)或**变换**(transformation)。

函数

- 备注
  - 函数在其定义域中的每个元素都有唯一的取值
  - 函数的值域是其伴域的子集
  - 函数相等 $f = g$ iff
    - $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$
    - $\forall x\big(x \in \mathrm{dom}(f) \rightarrow f(x) = g(x)\big)$
    - $\mathrm{codom}(f) = \mathrm{codom}(g)$

  - 若A和B皆是非空的有限集合，从A到B的不同的函数有$|B|^{|A|}$个。($a_1, a_2, \dots, a_{|A|}$的像, 均有$|B|$种选择)

函数是一种特殊的关系

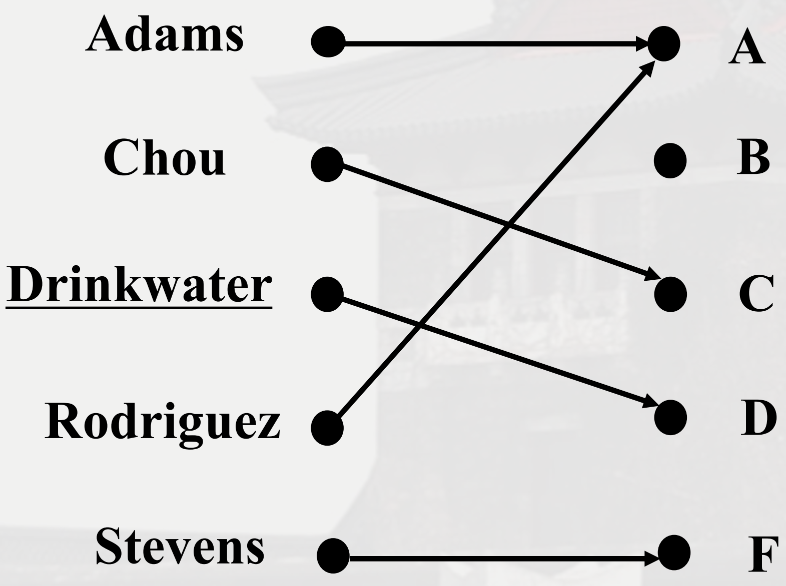
- 若f是从A到B的一个函数，$R = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$是一个从$A$到$B$的一个关系。

- A 和 B 为非空集合, 若关系 $R \subseteq A \times B$ 满足
对于A 中的每个元素a，B中都有且仅有一个元素 b 使得 aRb
则 R 是一个从 A 到 B 的函数。

- 如何用逻辑公式表达上述条件？

函数举例

- 某课程成绩

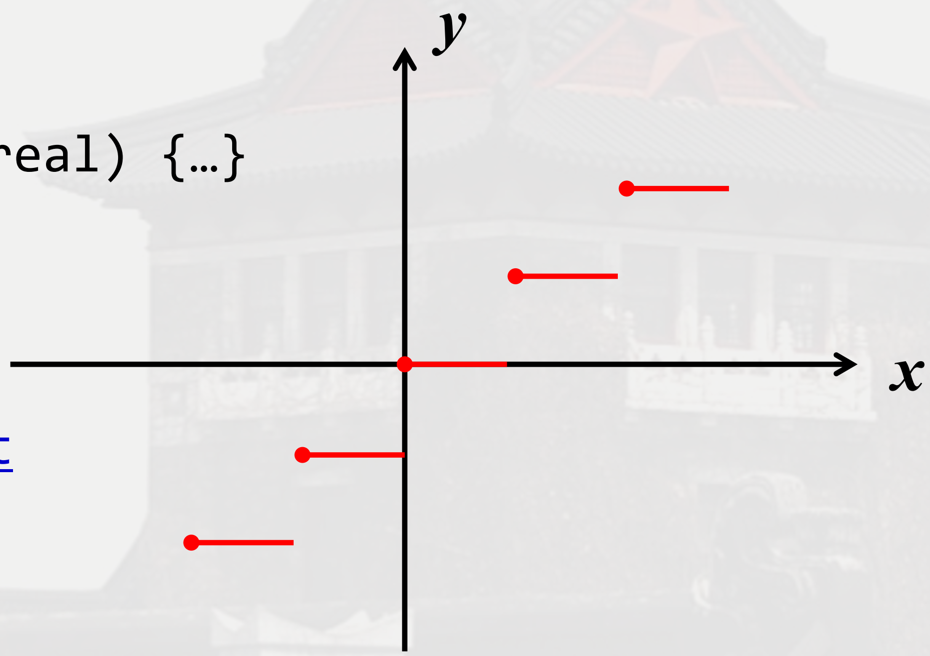


函数举例

- 下取整函数$\lfloor x \rfloor: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$

```
Java Program
int  floor(float real) {…}
```

```
floor: float → int
```

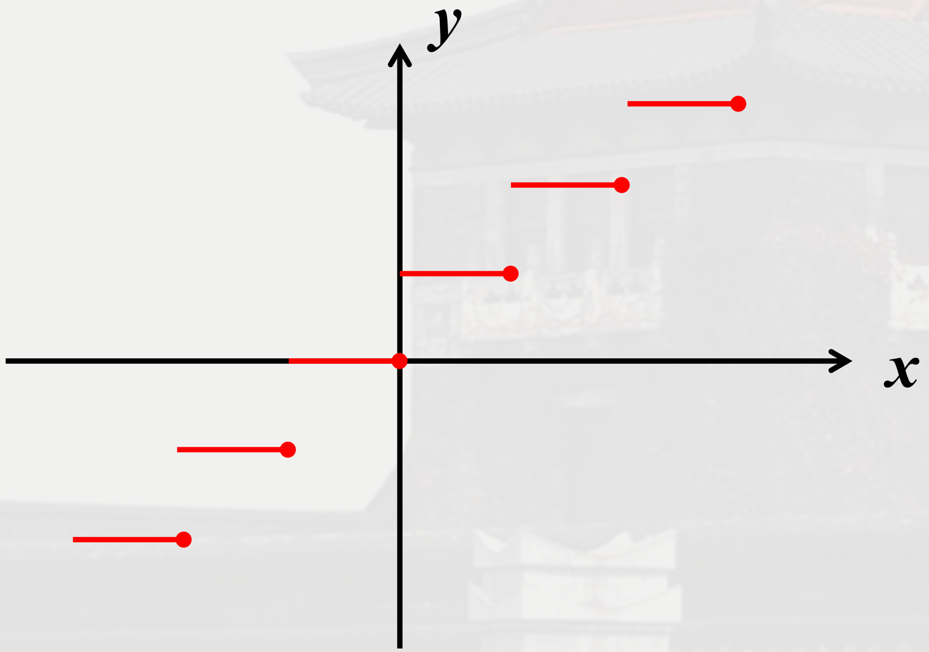


- 函数 f 的图像(graph): $\{ (a,b) \mid a \in A \land f(a) \in b \}$

函数举例

- 上取整函数$\lceil x \rceil: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$

ceiling function



函数举例

- 对于任意实数$x, \lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$
- 对于任意实数$x, \lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$
  - 令$x = n + \epsilon\, , n \in \mathbb{Z}, 0 \leq \epsilon < 1$. 采用分情形证明方法
  - $0 \leq \epsilon < \frac{1}{2}$
  - $\frac{1}{2} \leq \epsilon < 1$
- “对于任意实数x, y, $\lceil x + y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$” – 对不对？
  - 反例： $x = y = \frac{1}{2}$

函数举例

- 设A为非空集合，A上的 恒等函数$\iota_A: A \to A$定义为

$$\iota_A(x) = x, \quad x \in A$$

- 设U为非空集合，对任意的$A \subseteq U$, 特征函数$\chi_A: U \to \{0,1\}$ 定义为:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ x, & x \in U - A \end{cases}$$

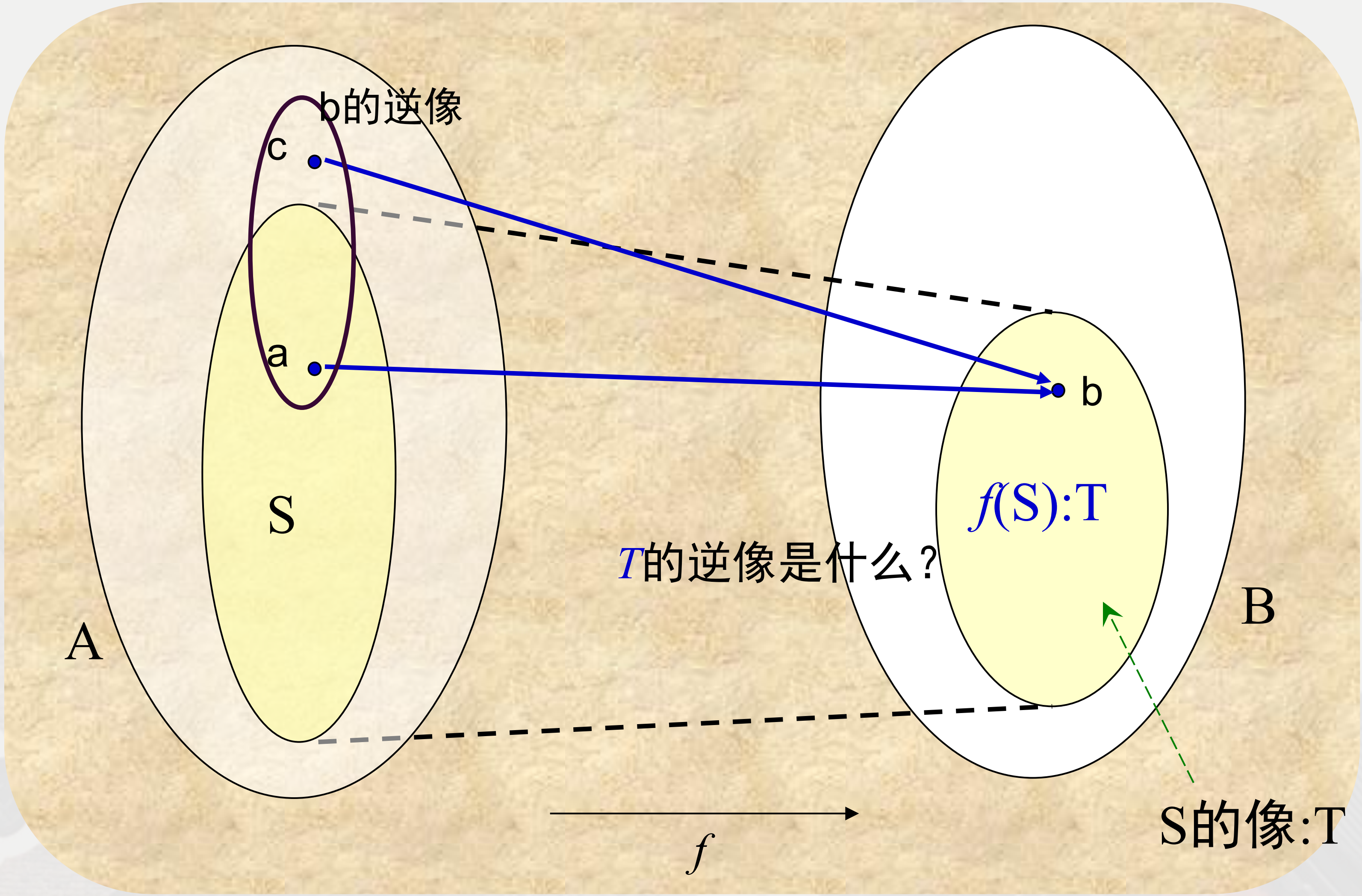
如果要记录每节离散数学课的到课情况？

子集在函数下的像

- 设 f 是从集合A到B的函数，S 是A的一个子集。S在f下的像，记为$f(S)$，定义如下：
$$f(S) = \{\mathrm{t} \mid \exists s \in S.t = f(s)\}$$

- 备注：$f(A)$ 即为 f 的值域。

S的像和逆像



并集的像

- 设函数 $f: A \to B$，且X, Y是A的子集，则 $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$
- 证明:
  - $f(X \cup Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$

    对任意的t，若$t \in f(X \cup Y)$,则存在$s \in X \cup Y$,满足$f(s) = t$;

    若$s \in X$,则$t \in f(X)$;否则$s \in Y$,则$t \in f(Y)$. $\therefore t \in f(X) \cup f(Y)$
  - $f(X) \cup f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$

    对任意的t，若$t \in f(X) \cup f(Y)$，

    情况1：$t \in f(X)$,则存在$s \in X \subseteq X \cup Y$,满足$f(s) = t$, $\therefore t \in f(X \cup Y)$

    情况2：$t \in f(Y)$,同样可得$t \in f(X \cup Y)$

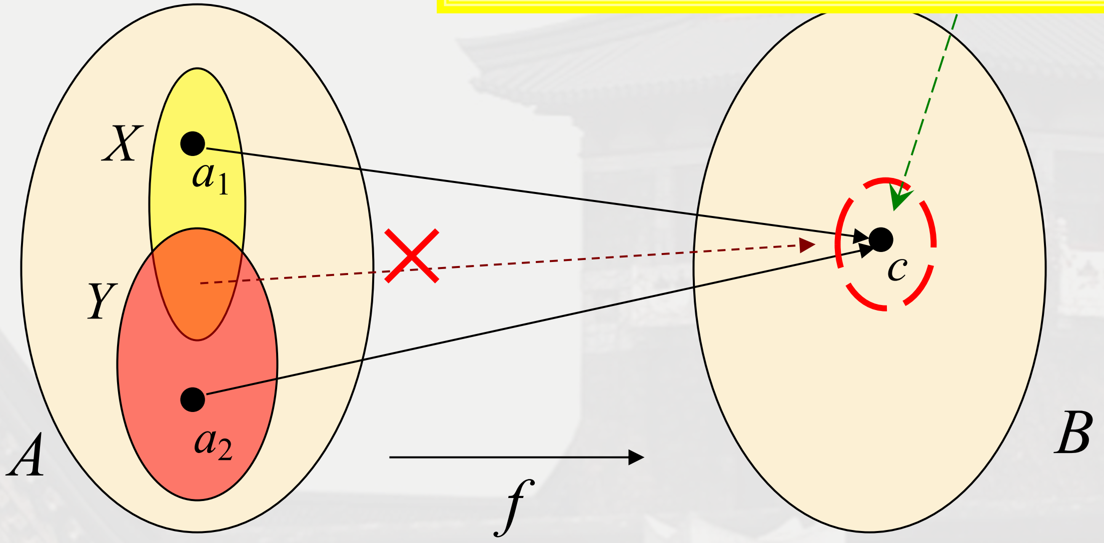
    $\therefore t \in f(X \cup Y)$

  于是有$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$。 ■

交集的像

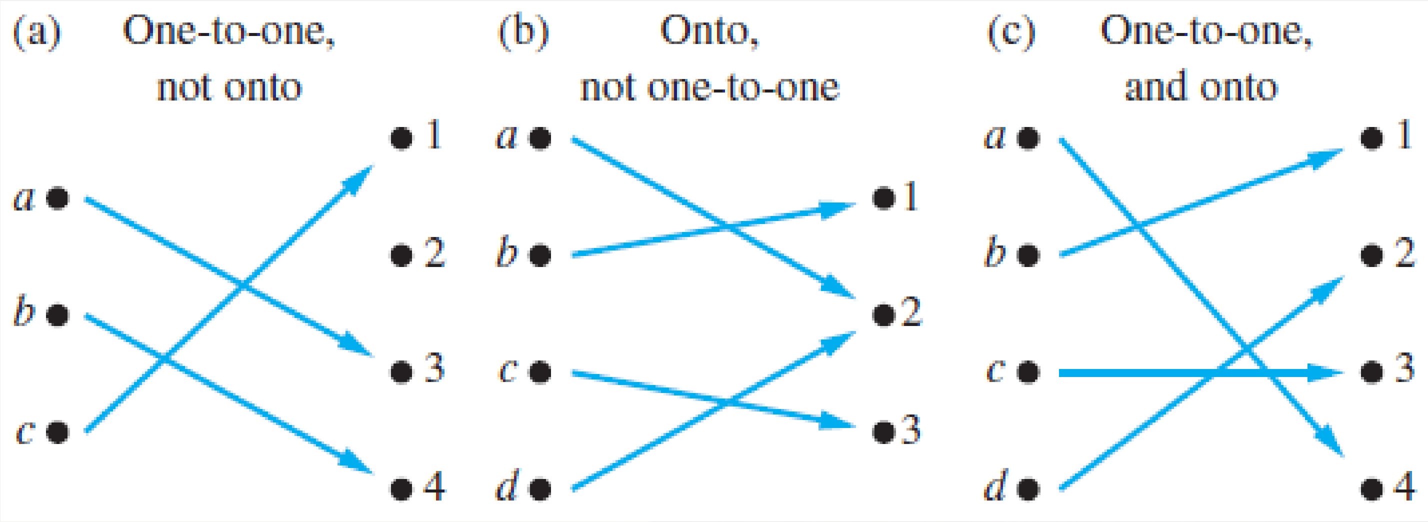
- 设函数 $f: A \to B$，且X, Y是A的子集，则 $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$

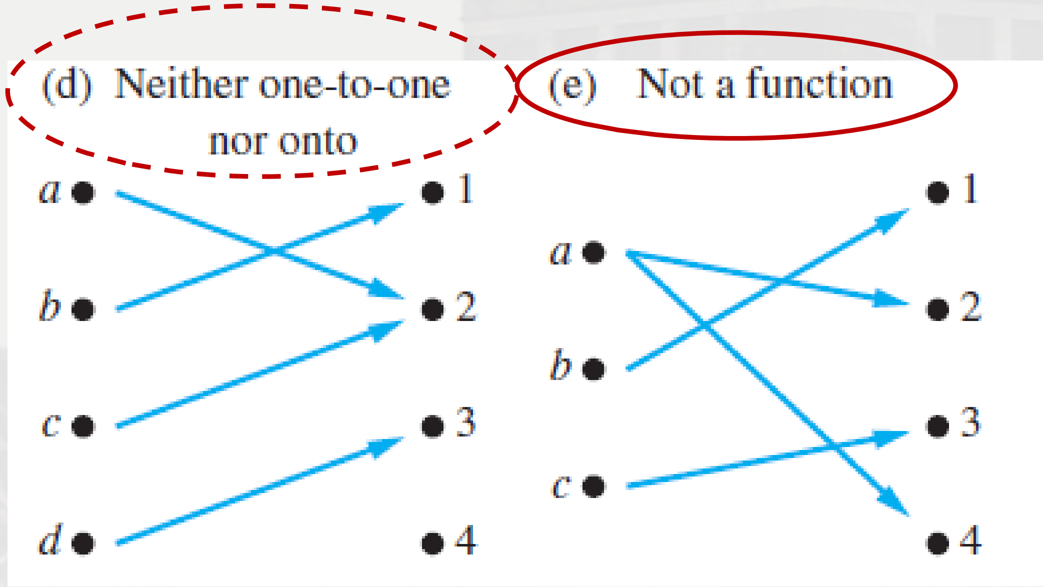
在$f(X) \cap f(Y)$中，但不在$f(X \cap Y)$中



函数性质

- 函数 $f: A \to B$ 是**单射**（一对一的, injection, injective function, one-to-one function ）
  - $\forall x_1, x_2 \in A$, 若 $x_1 \neq x_2$，则 $f(x_1) \neq f(x_2)$
  - 等价的说法：$\forall x_1, x_2 \in A$, 若 $f(x_1) = f(x_2)$，则 $x_1 = x_2$
  - //另一种等价的说法？
- 函数 $f: A \to B$ 是**满射**（映上的, surjection, surjective function, onto function ）
  - $\forall y \in B. \exists x \in A. f(x) = y$
  - //等价的说法：$f\ (A) = B$
- 函数 $f: A \to B$ 是双射（一一对应）
  - bijection, bijective function, one-to-one correspondence
  - 满射+单射


(a) One-to-one, not onto
a
b
c
1
2
3
4
(b) Onto, not one-to-one
a
b
c
d
1
2
3
(c) One-to-one, and onto
a
b
c
d
1
2
3
4


(d) Neither one-to-one nor onto
a
b
c
d
1
2
3
4
(e) Not a function
a
b
c
1
2
3
4

函数性质的证明

- 判断$f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $f(\langle x, y\rangle) = \langle x+y, x-y\rangle$的性质

- 单射？
  - 令$f(\langle x_1, y_1\rangle) = f(\langle x_2, y_2\rangle)$
    - $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$且$x_1 - y_1 = x_2 - y_2$,易见： $x_1 = x_2$且$y_1 = y_2$
    - $\langle x_1, y_1\rangle = \langle x_2, y_2\rangle$

- 满射？
  - 对于任意的$\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$，总存在 $\langle\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\rangle$,使得
  - $f\left(\left\langle\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right\rangle\right) = \langle a, b\rangle$

函数性质的证明

- 设A为有限集合，f 是从A到A的函数。f 是单射当且仅当 f是满射。

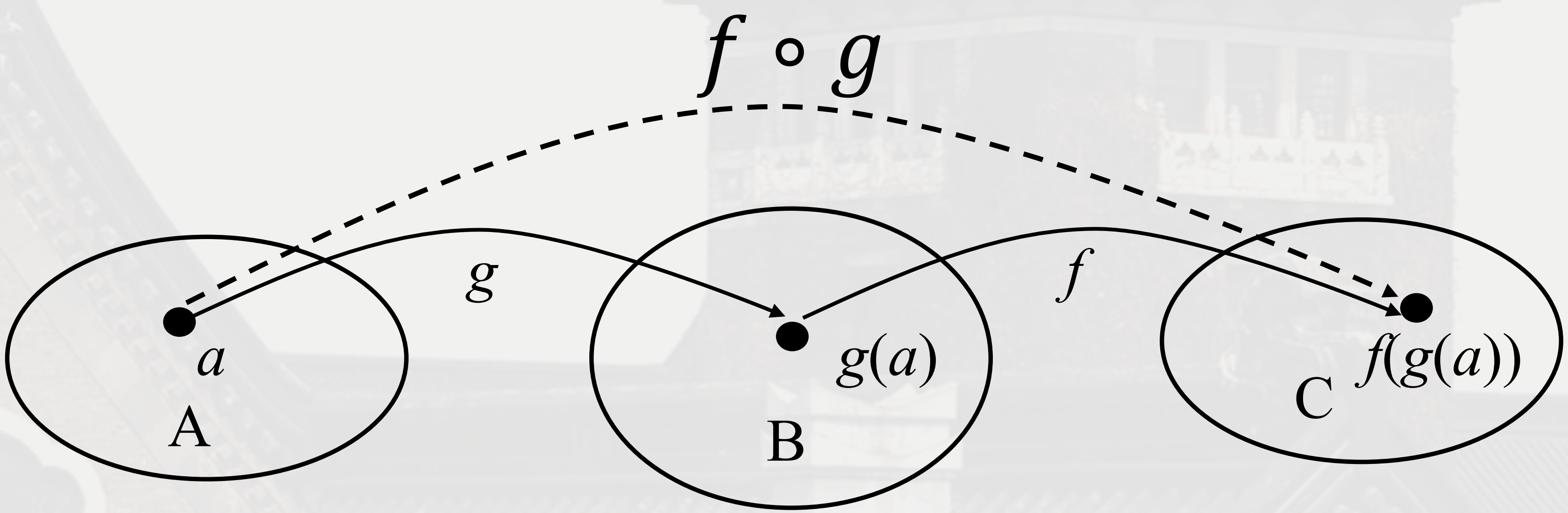
反函数

- 设f 是从A到B的双射，f 的反函数是从B到A的函数，它指派给B中元素b的是A中满足$f(a) = b$的（唯一的）a。f 的反函数记作f^{-1}。
  - $f(a) = b$ 当且仅当 $f^{-1}(b) = a$
  - 任何函数都有反函数吗？

- 例子
  - $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(\langle x,y\rangle) = \langle x+y, x-y\rangle$
  - $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f^{-1}(\langle x,y\rangle)= \langle ?,?\rangle$

函数的复合

- 设g是从A到B的函数，f是从B到C的函数，f和g的复合用$f \circ g$表示，定义为：$(f \circ g)(x) = f(g(x))$， $x \in A$



复合运算的性质

- 函数的复合满足结合律

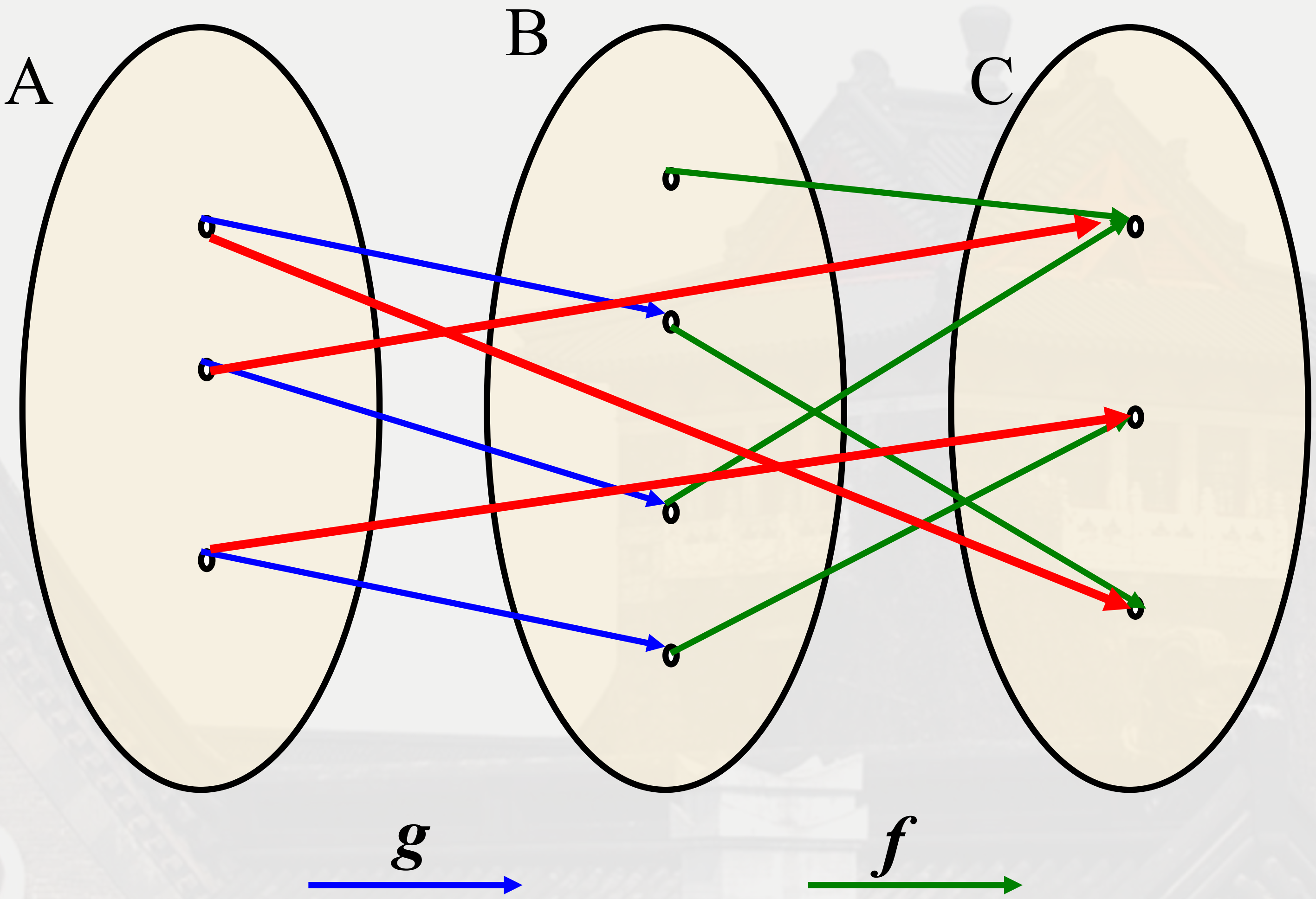
$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

- 满射的复合是满射
- 单射的复合是单射
- 双射的复合是双射
- 设f 是从A到B的双射

$$f^{-1} \circ f = \iota_A$$
$$f \circ f^{-1} = \iota_B$$

但是…

- 若$f\circ g$是满射，能推出f 和g是满射吗？
  - f一定是满射，g不一定是满射。
- 若$f\circ g$是单射，能推出f 和g是单射吗？
  - g一定是单射，f 不一定是单射。


A
B
C
g
f

函数的加法、乘法

- 设f和g是从A到$\mathbb{R}$的函数，那么 $f+g$ 和 $f\cdot g$ (或写作fg)也是从A到$\mathbb{R}$的函数，其定义为

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad x\in A$$

$$fg(x)=f(x)\,g(x),\quad x\in A$$

递增（递减）函数

- 设f的定义域和伴域都是实数(或其子集)，
- f是递增的

$$\forall x \forall y\left(x<y \rightarrow f(x) \leq f(y)\right)$$

- f是严格递增的

$$\forall x \forall y\left(x<y \rightarrow f(x)<f(y)\right)$$

部分函数（Partial Functions）

- 从集合A到集合B的部分函数f是对元素的一种指派，对A中的某些元素各指派B的一个元素。记作$f: A \rightharpoonup B$ 或$f: A \nrightarrow B$或$f: A \hookrightarrow B$
  - 对A中的某些元素，部分函数f没有定义
  - 有定义的元素全体构成f的定义域

- 举例：$f: \mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{R} \quad f(n) = \sqrt{n}$

函数构成的集合（回顾）

- 初等函数（$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$）
  - 基本初等函数：常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数
  - 四则运算
  - 函数的复合
- 微积分
  - 基本初等函数
  - 连续？可导？可积分？
  - 运算（加、乘、除、复合）之后，连续？可导？可积分？
  - 多元函数？

函数构成的集合

- B^A：A到B的所有函数构成的集合，A和B皆非空。
  - 若A和B皆有限，$|B^A|=|B|^{|A|}$
  - 若$|A|=1$，$|B^A|=|B|$
  - 若$|B|=1$，$|B^A|=1$
  - 若 $B=\{0,1\}$，B^A等同于 $\mathcal{P}(A)$，为何$\mathcal{P}(A)$有时记为2^A？

序列（sequence）

- 一个**序列**是从$\mathbb{Z}$的一个子集（通常是$\mathbb{N}$或$\mathbb{Z}^+$）到某个集合S的一个函数。我们用a_n代表整数n的像，称为这个序列的项，$\{a_n\}$代表这个序列。
  - 有限序列 vs 无穷序列
  - $\left\{\frac{1}{n}\right\}, n \in \mathbb{Z}^+$；$\{n^2\}$；$\{a_n\}$, 其中$a_{2k} = 0, a_{2k+1} = 1, k \in \mathbb{N}$
- 一个0/1无穷序列是$\mathbb{N}$到{0,1}的一个函数，等同于$\mathbb{N}$的某个子集
- $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$：0/1无穷序列全体构成的集合，也可记为$2^{\mathbb{N}}$
- 区间$[0, 1)$中的一个实数是否可以表示为一个0/1序列？

一个有趣的例子

- 自然数$1,2,3,\dots,n^2+1$的任何一种排列中，必然含一个长度不小于$n+1$的严格递增链或严格递减链。
    - 7,4,3,5,2,1,9,8,6,10//////10,3,2,6,4,7,5,9,1,8
  - 在所给的序列中，以k开始的严格递增序列长度记为$I(k)$, 以k开始的严格递减序列长度记为$D(k)$。
  - $f\colon k \to \big(I(k), D(k)\big), k \in \{1,2,\dots,n^2+1\}$
    - $f(7)=(3,5), f(4)=(4,4), f(3)=(4,3), f(5)=(3,3), f(2)=(3,2), f(1)=(3,1)$
    - $f(9)=(2,3), f(8)=(2,2), f(6)=(2,1), f(10)=(1,1)$
  - f是单射：对于$k_1<k_2$，如果k_1排在k_2前面, 则$I(k_1)>I(k_2)$, 如果k_2排在k_1前面, 则$D(k_2)>D(k_1)$
- 反证法：给定任一种排列，假设严格递增与递减序列最大长度均不大于n：
  - f的值域最多有n^2个元素
  - f不可能是单射

小结

- 函数的定义
- 单射与满射
- 反函数
- 函数的运算
- 函数构成的集合、序列

Q&A

- 欢迎提问