微积分II（第一层次）期中试卷$_{2018.5.5}$

一、计算下列各题（5分×12 = 60分）

1. 求极限: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2y^3)}{\ln(1+x^4+y^4)}$.

2. 设 $z=f(x^2-y^2,\mathrm{e}^{xy})$, 其中 f 具有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

3. 设由方程 $F(xy,\dfrac{z}{y})=0$ 确定函数 $z=z(x,y)$, 其中 $F(u,v)$ 一阶连续可微且 $F'_u\neq 0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

4. 求曲面 $\sqrt{x}+2\sqrt{y}+3\sqrt{z}=6$ 在 $(1,1,1)$ 处的切平面.

5. 求函数 $f(x,y)=x^4+y^4-(x+y)^2$ 的所有驻点，并判断是否取得极值.

6. 函数 $f(x,y,z)=xyz+\ln(xyz)$ 在点 $(2,1,1)$ 处沿什么方向的方向导数取得最大值?

7. 交换累次积分 $I_1=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 的次序.

8. 求二重积分 $I_2=\displaystyle\iint\limits_D (|x|+|y|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1$.

9. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，并设 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=A$, 求 $I_3=\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$.

10. 求第一类曲线积分 $I_4=\displaystyle\int_C (x+y)\,\mathrm{d}s$,其中 C 为双纽线 $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$ 的右半分支.

11. 求第二类曲线积分 $I_5=\displaystyle\int_C (y-z)\,\mathrm{d}x+(z-x)\,\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$, 其中 C 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $y=x\tan\beta$ $(0<\beta<\dfrac{\pi}{2})$ 的交线，从 x 轴正向看去是逆时针方向.

12. 证明：$(2x\cos y+y^2\cos x)\,\mathrm{d}x+(2y\sin x-x^2\sin y)\,\mathrm{d}y$ 在整个 xOy 平面上是某个函数的全微分，并求出它的一个原函数.

二、(8分）讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)\ln(1+xy)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性、以及可微性，

三、(8分） 在椭圆抛物面 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ $(a>0,b>0)$ 及平面 $z=1$ 所围成的区域内嵌入一个长方体，且有一面在 $z=1$ 上，求此长方体体积的最大值.

四、(8分）计算积分 $I_6=\displaystyle\iiint\limits_\Omega (y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2\le 2x$.

五、(8分）求曲面 $(2x+3y)^2+(2y+3z)^2+(2z+3x)^2=1$ 所围立体体积.

六、(8分）设 D 为两条直线 $y=x,y=4x$ 和两条双曲线 $xy=1,xy=4$ 所围成的闭区域，$F(u)$ 是连续可微函数，C 是闭区域 D 的边界，取正向. 记 $f(u)=F'(u)$, 证明：$I_7=\displaystyle\int_C\frac{F(xy)}{y}\mathrm{d}y=\ln 2\int_1^4 f(u)\mathrm{d}u$.