Operations on Multi-dimensional Random Variables – 1

November 12, 2023

引言

已知二维随机向量 (X, Y) 的概率分布, 求随机变量 (X, Y) 的函数 $Z = g(X, Y)$ 的概率分布, 分离散和连续两种情况讨论.

离散型随机变量函数的分布

已知离散型随机向量 (X, Y) 的联合分布列, 求随机变量 $Z = g(X, Y)$ 的分布列:

- 根据 X, Y 的各种取值, 计算随机变量 Z 的取值;

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
x_1	$X = x_1, Y = y_1$	$X = x_1, Y = y_2$	$\dots$	$X = x_1, Y = y_n$
x_2	$X = x_2, Y = y_1$	$X = x_2, Y = y_2$	$\dots$	$X = x_2, Y = y_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_m	$X = x_m, Y = y_1$	$X = x_m, Y = y_2$	$\dots$	$X = x_m, Y = y_n$

- 对相同的 Z 值合并, 对应的概率相加.

举例：离散型随机变量函数的分布

求随机变量 $Z = g(X, Y) = X * Y$ 的分布列:

- X, Y 的分布列

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{41}
2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{42}
3	p_{31}	p_{23}	p_{33}	p_{43}
4	p_{41}	p_{24}	p_{34}	p_{44}

- 对相同的 Z 值合并, 对应的概率相加

Z	1	2	3	4	6	8	9	12	16
P	p_{11}	$p_{12} + p_{21}$	$\ldots$	$p_{14} + p_{41} + p_{22}$	$\ldots$	$p_{24} + p_{42}$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

二维离散型随机变量和 (和函数 $g = X + Y$) 的分布

定理 0.18 [卷积公式 – 和函数] 若离散随机变量 X 与 Y 独立, 其分布列为

$$a_i = P(X = i) \quad 和 \quad b_j = P(Y = j) \quad (i, j \in \mathbb{N}^+)$$

则随机变量 $Z = X + Y$ 的分布列为

$$P(Z = X + Y = k) = \sum_{i=1}^{k} a_i b_{k-i}$$

<u>Remarks:</u>

- 独立性: $P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j)$.
- 将 $k = i + j$ 的项加在一起.
- 比如: $k = 3$, 有 $P(Z = 3) = P(X = 1)P(Y = 2) + P(X = 2)P(Y = 1) = a_1 b_2 + a_2 b_1$.

命题一：二项分布之和是二项分布

定理 0.19 若随机变量 $X \sim B(n_1, p)$ 和 $Y \sim B(n_2, p)$ 独立, 则

$$Z = X + Y \sim B(n_1 + n_2, p)$$

<u>Remarks of Proof:</u> 二项分布 $P(X = i) = \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ $(i \in \mathbb{N})$.

$$\begin{aligned}
P(Z = k) &= \sum_{i=0}^{k} P(X = i) P(Y = k - i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{n_2}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-(k-i)} \\
&= \left[\sum_{i=0}^{k} \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{k-i} \right] p^k p^{n_1+n_2-k} = \binom{n_1+n_2}{k} p^k p^{n_1+n_2-k}
\end{aligned}$$

命题一：二项分布之和是二项分布

推论 (多变量推论: 二项分布) 若相互独立的随机变量 $X_i \sim B(1,p) \quad (i \in \mathbb{N}^+)$, 则

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$$

命题二：泊松分布之和是泊松分布

定理 0.20 若随机变量 $X \sim P(\lambda_1)$ 和 $Y \sim P(\lambda_2)$ 独立, 则

$$Z = X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Remarks of Proof: 泊松分布 $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ $(k \in \mathbb{N})$.

$$\begin{aligned}
P(Z = k) &= \sum_{i=0}^{k} P(X = i) P(Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n_1}{i} \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda_2} \\
&= \left[\frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} \right] e^{-\lambda_1 - \lambda_2} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{k!} (\lambda_1 + \lambda_2)^k
\end{aligned}$$

连续型随机向量函数的分布

设二维连续型随机向量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$, 求随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的概率密度:

- 先计算分布函数 (积分区域)

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(g(x,y)\le z)=\int\int_{g(x,y)\le z} f(x,y)dxdy$$

- 对分布函数 $F_Z(z)$ 求导得到密度函数

$$f_Z(z)=F_Z'(z)$$

连续型随机向量函数的分布：例 0.84

例 0.84 设随机变量 X 与 Y 相互独立、且服从标准正态分布, 求下列随机变量的密度函数.

- $Z_1 = \sqrt{X^2 + Y^2}$
- $Z_2 = X^2 + Y^2$

解答：例 0.84

题目: 设随机变量 X 与 Y 相互独立、且服从标准正态分布, 求随机变量 $Z_1 = \sqrt{X^2+Y^2}$ 和 $Z_2 = X^2+Y^2$ 的密度函数.

解答:

- 由独立性有 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = e^{-(x^2+y^2)/2}/2\pi \qquad (x,y\in\mathbb{R})$$

- 当 $z_1 \le 0$ 时有 $F_{Z_1}(z_1) = 0$; 当 $z_1 > 0$ 时有

$$F_{Z_1}(z_1) = P(Z_1 \le z_1) = P(\sqrt{X^2+Y^2} \le z_1) = \int\int_{X^2+Y^2\le z_1^2} e^{-(x^2+y^2)/2}/2\pi dxdy$$

利用极坐标积分变换 $x = r\cos\theta$ 和 $y = r\sin\theta$ 有

$$F_{Z_1}(z_1) = \int_0^{2\pi}\int_0^{z_1}\frac{r}{2\pi}e^{-r^2/2}d\theta dr = \int_0^{z_1} re^{-r^2/2}dr = 1 - e^{-z_1^2/2}$$

- 对分布函数 $F_{Z_1}(z_1)$ 求导得到密度函数

$$f_{Z_1}(z_1) = \begin{cases} z_1 e^{-z_1^2/2}, & z_1 > 0 \\ 0, & z_1 \le 0 \end{cases}$$

上述分布称为瑞利分布 (Rayleigh distribution), 该分布常用于通信等领域.

- 同理可证随机变量 $Z_2 \sim E(\frac{1}{2})$, 即

$$f_{Z_2}(z_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} z_2 e^{-z_2/2}, & z_2 > 0 \\ 0, & z_2 \le 0 \end{cases}$$

二维连续型随机向量和 (和函数 $g = X + Y$) 的分布

定理 0.21 [求和基本公式] 设随机向量 (X, Y) 的联合密度为 $f(x, y)$, 则随机变量 $Z = X + Y$ 的分布函数为

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= \int\int_{x+y \le z} f(x, y) dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) dy \right] dx \quad \text{(积分区域)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{z} f(x, u-y) du \right] dx \quad \text{(变量)} \\
&= \int_{-\infty}^{z} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, u-y) dx \right] du
\end{aligned}
$$

因此, 概率密度为

$$
f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy
$$

二维连续型随机向量和的分布

定理 0.22 [卷积公式 – 和函数] 若连续随机变量 X 与 Y 相互独立, 其概率密度函数分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$, 则随机变量 $Z = X + Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$$

推论: 更一般的情况, 对于同定义域上的函数 $f(x), g(x)$, 其卷积为

$$f * g\,(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(y-x)\, dx$$

二维连续随机向量函数和的分布 – 均匀分布: 例 0.85

例 0.85 设随机变量 $X \sim U(0,1)$ 和 $Y \sim U(0,1)$ 相互独立, 求 $Z = X+Y$ 的概率密度.

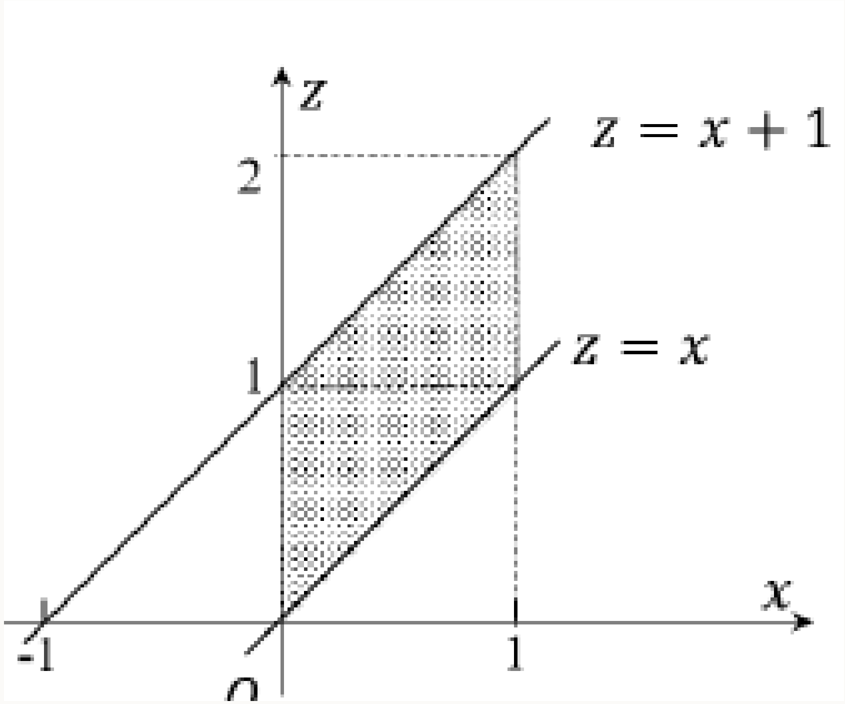
解答：例 0.85

题目: 设随机变量 $X \sim U(0,1)$ 和 $Y \sim U(0,1)$ 相互独立, 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

解答:

- 根据卷积公式有
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$
分析 $f_X(x), f_Y(z-x)$ 的取值情况可知:
  - 当 $x \in [0,1]$ 时, 有 $f_X(x) = 1$
  - 当 $z - x \in [0,1]$ 时, 有 $f_Y(z-x) = 1$

  因此, 积分区域为 $\{x \in [0,1], z - x \in [0,1]\}$.
- 由下图所示:
  - 当 $z \leq 0$ 或 $z \geq 2$ 时, 有 $f_Z(z) = 0$
  - 当 $z \in (0,1)$ 时, 有 $f_Z(z) = \int_0^z 1\, dz = z$
  - 当 $z \in [1,2)$ 时, 有 $f_Z(z) = \int_{z-1}^1 1\, dx = 2 - z$



- $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} z, & z \in [0,1] \\ 2 - z, & z \in [1,2] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

二维连续随机向量函数和的分布 – 泊松分布：例 0.86

例 0.86 设随机变量 $X \sim e(\lambda)$ 和 $Y \sim e(\lambda)$ 相互独立, 求 $Z = X + Y$ 的分布函数和概率密度.

解答：例 0.86

题目: 设随机变量 $X \sim e(\lambda)$ 和 $Y \sim e(\lambda)$ 相互独立, 求 $Z = X + Y$ 的分布函数和概率密度.

解答:

- 根据卷积公式有
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$
分析 $f_X(x), f_Y(z-x)$ 的取值情况可知,
  - 当 $x \geq 0$ 时, 有 $f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$;
  - 当 $z - x \geq 0$ 时, 有 $f_Y(z-x) = \lambda \exp(-\lambda(z-x))$,

  因此积分区域为 $\{x \in [0, +\infty], z - x \in [0, +\infty]\}$.
- 当 $z \geq 0$ 时有
$$f_Z(z) = \lambda^2 \int_0^z \exp(-\lambda x) \exp(-\lambda(z-x)) dx = \lambda^2 z \exp(-\lambda z)$$

命题三：正态分布之和是正态分布

定理 0.23 若随机变量 $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ 相互独立, 则

$$X + Y \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$$

推论 若相互独立的随机变量 $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2) \quad (i \in [n])$, 则

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$$

证明 若随机变量 $X \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ 和 $Y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$, 则根据正太分布的性质有

$$X' = X - \mu_x \sim \mathcal{N}(0, \sigma_x^2) \qquad \text{和} \qquad Y' = Y - \mu_y \sim \mathcal{N}(0, \sigma_y^2) \ .$$

因此只需证明 $Z = X' + Y' \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. 根据卷积公式有

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(z-x)^2}{2\sigma_2^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}(x - \frac{\sigma_1^2 z}{\sigma_1^2+\sigma_2^2})^2 - \frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right) dx \\
&= \frac{\exp\left(-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \times \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}(x - \frac{\sigma_1^2 z}{\sigma_1^2+\sigma_2^2})^2\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right) \ ,
\end{aligned}$$

最后一个等式成立是因为正太分布的规范性.

随机变量的乘/除法分布

前面提及了连续型随机变量的加法, 减法是同样的计算. 接下来我们介绍关于乘法/除法的计算.

定理 0.24 设随机向量 (X, Y) 的联合密度为 $f(x, y)$, 则随机变量 $Z = XY$ 的概率密度为

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{z}{x}) dx$$

随机变量 $Z = Y/X$ 的概率密度为

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, xz) dx$$

随机变量的乘/除法分布: 证明

求证:

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{z}{x}) dx$$

证明: 对 $F_{XY}(z)$ 关于 z 求导即可,

$$\begin{aligned}
F_{XY}(z) &= P(XY \leq z) \\
&= \int\int_{xy \leq z} f(x,y)\, dxdy = \int_{x<0}\int_{y \geq z/x} f(x,y)\, dxdy + \int_{x \geq 0}\int_{y \leq z/x} f(x,y)\, dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{0} \left[\int_{z/x}^{+\infty} f(x,y)\, dy\right] dx + \int_{0}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{z/x} f(x,y)\, dy\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} \left[\int_{z}^{-\infty} \frac{1}{x} f(x, \frac{t}{x})\, dt\right] dx + \int_{0}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{z} \frac{1}{x} f(x, \frac{t}{x})\, dt\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} \left[\int_{-\infty}^{z} -\frac{1}{x} f(x, \frac{t}{x})\, dt\right] dx + \int_{0}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{z} \frac{1}{x} f(x, \frac{t}{x})\, dt\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{z} \left[\int_{-\infty}^{0} -\frac{1}{x} f(x, \frac{t}{x})\, dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x} f(x, \frac{t}{x})\, dx\right] dt = \int_{-\infty}^{z} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{t}{x})\, dx\right] dt
\end{aligned}$$

命题四：连续随机向量函数的分布：例 0.87

例 0.87 若标准正态分布的随机变量 X 与 Y 相互独立, 证明: 则随机变量 $Z = Y/X$ 服从柯西分布.

Proof: 根据独立性和定理0.24有

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, xz) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) f_Y(xz) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-x^2(1+z^2)/2} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} x e^{-x^2(1+z^2)/2} dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{e^{-x^2(1+z^2)/2}}{1+z^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\pi(1+z^2)}
\end{aligned}
$$

证毕.

最大值和最小值的分布

定理 0.25 设 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立、分布函数为 $F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}(x_n)$, 则

- 随机变量 $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$ 的分布函数为

$$F_Y(y) = F_{X_1}(y)\, F_{X_2}(y)\ \ldots\ F_{X_n}(y)$$

- 随机变量 $Z = \min(X_1, \ldots, X_n)$ 的概率密度为

$$F_Z(z) = 1\ -\ [1 - F_{X_1}(z)]\ [1 - F_{X_2}(z)]\ \ldots\ [1 - F_{X_n}(z)]$$

Proof Sketches:

- For max, $P(Y \le y) = P(\max(X_1, \ldots, X_n) \le y) = P(X_1 \le y, X_2 \le y, \ldots, X_n \le y)$
- For min, $P(Z \le z) = P(\min(X_1, \ldots, X_n) \le z) = 1 - P(\min(X_1, \ldots, X_n) > z) = 1 - P(X_1 > z, X_2 > z, \ldots, X_n > z)$

最大值和最小值的分布: 证明

- 随机变量 $Y = \max(X_1, \dots, X_n) \le y$, 则需要每一个 $X_i \le y$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \le y) \\ &= P(X_1 \le y, X_2 \le y, \dots, X_n \le y) \\ &= P(X_1 \le y) P(X_2 \le y) \dots P(X_n \le y) \\ &= F_{X_1}(y)\ F_{X_2}(y)\ \dots\ F_{X_n}(y) \end{aligned}$$

- 随机变量 $Z = \min(X_1, \dots, X_n) \le z$, 则需要每一个 $1 - X_i \ge y$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \le z) = P(\min(X_1, \dots, X_n) \le z) = 1 - P(\min(X_1, \dots, X_n) > z) \\ &= 1 - P(X_1 > z, X_2 > z, \dots, X_n > z) \\ &= 1 - P(X_1 > z) P(X_2 > z) \dots P(X_n > z) \\ &= 1 - [1 - P(X_1 \le z)]\ [1 - P(X_2 \le z)]\ \dots\ [1 - P(X_n \le z)] \\ &= 1 - [1 - F_{X_1}(z)]\ [1 - F_{X_2}(z)]\ \dots\ [1 - F_{X_n}(z)] \end{aligned}$$

最大值和最小值的分布: 推论

推论 若相互独立的随机变量 $X_1, \ldots, X_n$ 其分布函数和密度函数分别为 $F(x)$ 和 $f(x)$, 即

$$F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x) = \cdots = F_{X_n}(x) = F(x)$$

$$f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = \cdots = f_{X_n}(x) = f(x)$$

则随机变量 $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$ 的分布函数和密度函数分别为

$$F_Y(y) = (F(y))^n \qquad \text{和} \qquad f_Y(y) = n(F(y))^{n-1} f(y)$$

随机变量 $Z = \min(X_1, \ldots, X_n)$ 的分布函数和密度函数分别为

$$F_Z(z) = 1 - (1 - F(z))^n \qquad \text{和} \qquad f_Z(z) = n(1 - F(z))^{n-1} f(z)$$

连续随机向量函数的分布：例 0.88 泊松分布

例 0.88 若随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim e(\alpha)$ 和 $Y \sim e(\beta)$, 求随机变量 $Z_1 = \max(X, Y)$ 和 $Z_2 = \min(X, Y)$ 的概率密度.

解答：例 0.88

题目: 若随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim E(\alpha)$ 和 $Y \sim E(\beta)$, 求随机变量 $Z_1 = \max(X, Y)$ 和 $Z_2 = \min(X, Y)$ 的概率密度.

解答:

- 根据定理0.25有, 随机变量 Z_1 的分布函数为

$$F_{Z_1}(z_1) = F_X(z_1)F_Y(z_1) = \int_{-\infty}^{z_1} f_X(t)dt \int_{-\infty}^{z_1} f_Y(t)dt$$

当 $z_1 \leq 0$ 时有 $F_{Z_1}(z_1) = 0$; 当 $z_1 > 0$ 时

$$F_{Z_1}(z_1) = \int_{-\infty}^{z_1} f_X(t)dt \int_{-\infty}^{z_1} f_Y(t)dt = \int_{-\infty}^{z_1} \alpha e^{-\alpha t}dt \int_{-\infty}^{z_1} \beta e^{-\beta t}dt = (1-e^{-\alpha z_1})(1-e^{-\beta z_1})$$

等式两边对 z_1 求导可得其密度函数为

$$f_{Z_1}(z_1) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z_1} + \beta e^{-\beta z_1} - (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z_1}, & z_1 > 0 \\ 0, & z_1 \leq 0 \end{cases}$$

- 同理可得, 随机变量 Z_2 的分布函数和密度函数分别为

$$F_{Z_2}(z_2)=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z_2}, & z_2>0\\ 0, & z_2\le 0\end{cases} \qquad \text{和} \qquad f_{Z_2}(z_2)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z_2}, & z_2>0\\ 0, & z_2\le 0\end{cases}$$

连续型随机变量复合函数的联合分布函数

问题: 随机变量 (X, Y) 的联合密度为 $f(x, y)$, 设 (X, Y) 的函数

$$U = u(x, y), \qquad V = v(x, y).$$

如何求 (U, V) 的联合分布. 这里二元函数 $u(\cdot, \cdot)$ 和 $v(\cdot, \cdot)$ 具有连续的偏导, 并满足

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad \text{存在唯一的反函数} \quad \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

连续型随机变量复合函数的联合分布函数

定理 0.26 设 $U = u(X,Y)$ 和 $V = v(X,Y)$ 有连续偏导, 反函数 $X = x(U,V)$ 和 $Y = y(U,V)$. 若 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$, 则 (U,V) 的联合密度为

$$F_{UV}(u,v) = F_{XY}(x(u,v), y(u,v))|J|,$$

其中 J 为变换的雅可比行列式, 即

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}^{-1},$$

上述结论可推广到一般的 n 维随机变量.

连续型随机向量复合函数的分布：例 0.89

例 0.89 设 X 与 Y 是相互独立的标准正态分布随机变量. 证明: 有随机变量

$$R^2 = X^2 + Y^2 \quad \text{与} \quad \theta = \arctan(Y/X)$$

相互独立, 且有 $R \sim e(1/2)$ 以及 $\theta \sim U(0, 2\pi)$.

解答：例 0.89

题目: 设 X 与 Y 是相互独立的标准正太分布随机变量, 证明: 有随机变量 $R^2 = X^2 + Y^2$ 与 $\theta = \arctan(Y/X)$ 相互独立, 且有 $R \sim e(1/2)$ 以及 $\theta \sim U(0, 2\pi)$.

解答:

- 根据定理0.26列出雅可比行列式

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}.$$

- 由此可得 R 与 Θ 的联合分布为

$$f_{R\times\Theta}(r,\theta) = f_{X\times Y}(\sqrt{r}\cos\theta, \sqrt{r}\sin\theta)|J| = \frac{1}{4\pi}\exp(-r/2) = \frac{1}{2}\exp(-r/2) \times \frac{1}{2\pi}$$

由此可发现 $R \sim E(1/2)$ 以及 $\theta \sim U(0, 2\pi)$, R 与 Θ 相互独立.