微积分 II（第一层次）期末试卷 (2020.8.18)

一、(8分）设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$ 讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性、可微性以及连续可微性.

二、计算下列各题（7分×3 = 21 分）

1. 求过直线 $L:\begin{cases} 10x+2y-2z=27, \\ x+y-z=0 \end{cases}$ 且与曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 相切的平面方程.

2. 求旋转抛物面 $x^2+y^2=2az\ (a>0)$ 与半球面 $z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$ 所围立体的表面积.

3. 计算 $I=\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^4+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D: x\geq 1, y\geq x^2$.

三、计算下列各题（7分×3 = 21 分）

1. 计算 $I=\displaystyle\int_C 2x\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+(x+2y-z)\mathrm{d}z$, 其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ y=z \end{cases}$ 上从点 $A(1,0,0)$ 到$B(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ 的位于第一卦限的一段曲线.

2. 计算 $I=\displaystyle\oint_C \frac{y^2}{2}\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\mathrm{d}z$, 其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y=R. \end{cases}$ 从 y 轴的正向看去是依顺时针方向.

3. 计算曲面积分 $I=\displaystyle\iint_S (x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的外侧.

四、计算下列各题（7分×4 = 28 分）

1. 考察级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

2. 判别级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 的敛散性.（提示：$\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$）

3. 求 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$ 的和函数，并求数项级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2\frac{1}{3^n}$ 的和.

4. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在 $[-1,1]$ 上的表达式为 $f(x)=x^2$. 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，并求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 的和.

五、计算下列各题（7分×2 = 14 分）

1. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin(1+x+y), y(0)=-1$ 的特解. 2. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^3}{2(xy^2-x^2)}$ 的通解.

六、(8分) 求微分方程 $y''+2y'+y=xe^{-x}$ 的通解.

微积分 II（第一层次）期末试卷 (2021.6.22)

一、计算下列各题（6分×5 = 30 分）

1. 求空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14, \\ 3x+2y+z=10 \end{cases}$ 在点 $P(1,2,3)$ 处的法平面与切线方程.

2. 求柱面 $x^2+y^2=ay\ (a>0)$ 位于球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部分曲面的面积.

3. 计算第二类曲线积分 $I_1=\int_C \cos(x+y^2)\mathrm{d}x+\big(2y\cos(x+y^2)-\sqrt{1+y^4}\ \big)\mathrm{d}y$, 其中 C 为旋轮线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$, 由 $O(0,0)$ 到 $A(2\pi a,0)$, 其中 $a>0$.

4. 计算第一类曲面积分 $I_2=\iint\limits_S (xy+yz+zx)\mathrm{d}S$, 其中 S 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax\ (a>0)$ 所截下的部分.

5. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

二、计算下列各题（8分×5 = 40 分）

1. 讨论数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$ 的敛散性.

2. 讨论数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{6})}{\sqrt{n}}$ 的敛散性. 如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛?

3. 求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Big(1-\frac{1}{3^n}\Big)$ 的和.

4. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3x^2+2xy-y^2}{2xy-x^2}$ 的通积分.

5. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^4+y^3}{xy^2}$ 的通积分.

三、(本题10分）计算 $I_3=\int_C y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$, 其中 C 是平面 $x+y+z=1$ 的第一卦限部分与三个坐标面的交线，从 z 周正向往 z 轴负向看去是逆时针方向.

四、(本题10分）计算 $I_4=\iint\limits_S 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S为曲线 $z=\mathrm{e}^y(0\le y\le a)$ 绕 z 轴旋转生成的旋转曲面，取下侧.

五、(本题10分）设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}x^{2(n+1)}$, $x\in(-1,1)$. 求出 $f(x)$ 满足的微分方程，并求解之. 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!!(n+1)}$.

微积分 II（第一层次）期末试卷 (2022.6.13)

一、简答题（8 分 $\times 6=48$ 分）

1. 计算 $I=\iint\limits_{D} x^{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由曲线 $xy=1, xy=2$ 以及 $y=x, y=2x$ 所围图形在第一象限的部分.

2. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\Big(\cos(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{2}})-\cos(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^{2}})\Big)$ 绝对收敛.

3. 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n(n+1)}$ 的和函数及收敛域.

4. 求方程 $y''+\mathrm{e}^{y'}=0, y(0)=0, y'(0)=0$ 的解.

5. 求函数 $y=\sqrt{1-x^{2}}$ 的马克劳林展式.

6. 求函数 $y=x\ (x\in[0,\pi])$ 的余弦级数.

二、(10 分) 已知 $y=\mathrm{e}^{x}$ 为方程 $y''+\tan x\, y'-(1+\tan x)y=0$ 的一个解, 求方程的通解.

三、(10 分) 计算第二型曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{1}{1+z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^{3}: x^{2}+y^{2}+z^{2}=1, z\geq 0\}$, 取上侧.

四、(10 分) 已知第二型曲线积分 $I_{L}=\int_{L}(x+y^{2}+\mathrm{e}^{z})\mathrm{d}x+(2xy+yz)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$ 与路径无关, $R(0,0,z)=z^{2}$. 求函数 $R(x,y,z)$ 的表达式以及当 L 的起点为 $(0,0,0)$, 终点为 $(1,1,1)$ 时 I_{L} 的值.

五、(10 分) 已知 $A=\lim\limits_{t\to 0^{+}}\frac{1}{t^{k}}\iiint\limits_{\Omega(t)}(e^{xy}-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为非零常数, 求 A 及 k 的值, 其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^{3}: x^{2}+y^{2}+z^{2}\leq t^{2}\}$.

六、(12 分) 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的有界连续函数, 记 $M=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$. 求方程 $y''-y=f(x)\ (-\infty<x<\infty)$ 的有界解, 并证明对任意的 $x\in\mathbb{R}$, 有 $|y(x)|\leq M$.

微积分 II（第一层次）期末试卷参考答案 (2020.8.18)

一、 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续、可偏导、可微、不连续可微.

二、1. $9x+y-z=27$ 或 $9x+17y-17z+27=0$.　　2. $\dfrac{16}{3}\pi a^2$.　　3. $\dfrac{\pi}{4}$.

三、1. $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{8}-\dfrac{1}{2}$.　　2. $-\dfrac{\sqrt{2}\pi R^3}{4}$.　　3. $\dfrac{29}{20}\pi a^5$

四、1. 收敛.　　2. 条件收敛.

3. $S(x)=\dfrac{x+1}{(1-x)^3},(-1<x<1)$. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2\frac{1}{3^n}=\frac{9}{32}$.

4. $x^2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\cos n\pi x, x\in(-\infty,+\infty)$, 取 $x=0$ 即得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

五、1. $\tan(1+x+y)-\sec(1+x+y)=x-1$.　　2. $y^2=Ce^{\frac{y^2}{x}}$.

六、$y=(C_1+C_2x)e^{-x}+\dfrac{1}{6}x^3e^{-x}$.

微积分 II（第一层次）期末试卷参考答案 (2021.6.22)

一、 1. 法平面方程为 $x-2y+z=0$, 切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$.

2. $4a^2$.　　3. $\sin(2\pi a)$.　　4. $\dfrac{64}{15}\sqrt{2}a^4$.　　5. 仅当 $p>0$ 时收敛；

二、1. 收敛.　　2. 条件收敛.　　3. $\ln\dfrac{3}{2}$.　　4. $x^3+x^2y-xy^2=C$.　　5. $y^3=x^3(C+3x)$.

三、-1.　　　　四、$(e^{2a}-1)\pi a^2$.

五、$f(x)$ 满足的微分方程为 $f''(x)-\dfrac{x}{1-x^2}f'(x)=\dfrac{8x^2}{1-x^2}$, 这是关于 $f'(x)$ 的一阶线性微分方程，解得 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big(C_1+4\arcsin x-4x\sqrt{1-x^2}\Big)$, 由 $f'(0)=0$ 得 $C_1=0$, 故 $f'(x)=4\Big(\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-x\Big)$, 两边再积分得 $f(x)=2(\arcsin x)^2-2x^2+C_2$, 由 $f(0)=0$ 得 $C_2=0$, 所以 $f(x)=2(\arcsin x)^2-2x^2$.
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!!(n+1)}=f(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{\pi^2-1}{8}$.

微积分 II（第一层次）期末试卷参考答案 (2022.6.13)

一、 1. $\dfrac{3}{8}$.

2. $\Big|n\Big(\cos(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2})-\cos(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2})\Big)\Big|=2n\sin\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n^2}\le\dfrac{2}{n^2}$, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ 收敛，故原级数绝对收敛.

3. 收敛域为$[-1,1]$，和函数$S(x)=\begin{cases} -\ln(1-x)+1+\frac{\ln(1-x)}{x}, & x\in[-1,1), x\neq 0, \\ 1, & x=1, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

4. $y=-x\ln(1+x)+x-\ln(1+x)$.

5. $\sqrt{1-x^2}=1-\dfrac{x^2}{2}-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^{2n}, \quad (|x|\leq 1)$.

6. x 的余弦级数为 $\dfrac{\pi}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1)\cos(nx), \quad x\in[0,\pi]$.

二. 通解为 $y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}(\sin x-2\cos x)$, 其中$c_1,c_2$ 为任意常数.

三. $(\dfrac{8}{3}-2\ln 2)\pi$.

四. $R(x,y,z)=x\mathrm{e}^z+\dfrac{1}{2}y^2+z^2$. 当$L$ 的起点为$(0,0,0)$, 终点为$(1,1,1)$ 时, $I_L=\mathrm{e}+\frac{7}{3}$.

五. 解: 由泰勒公式可得，当 $(x,y,z)\in\Omega(t)$ 时, $\mathrm{e}^{xy}-1=xy+\frac{1}{2}x^2y^2+o(t^4)$.

$$\iiint\limits_{\Omega(t)}(\mathrm{e}^{xy}-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega(t)}x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+o(t^7)=\iint\limits_{x^2+y^2\leq t^2}x^2y^2\sqrt{t^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+o(t^7)$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^t\rho^5\sqrt{t^2-\rho^2}\mathrm{d}\rho+o(t^7)\ \overset{(\sqrt{t^2-\rho^2}=u)}{=\!=\!=\!=}\ \frac{\pi}{4}\int_0^t u^2(t^2-u^2)^2\mathrm{d}u+o(t^7)$$

$$=\frac{2\pi}{105}t^7+o(t^7).\quad \text{因此}\ k=7, A=\frac{2\pi}{105}.$$

六. 解: 齐次方程的通解为$y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}$.

利用常数变易法, 设非齐次方程的解为$y=c_1(x)\mathrm{e}^x+c_2(x)\mathrm{e}^{-x}$, 则有

$$\begin{cases} c_1'(x)\mathrm{e}^x+c_2'(x)\mathrm{e}^{-x}=0 \\ c_1'(x)\mathrm{e}^x-c_2'(x)\mathrm{e}^{-x}=f(x) \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} c_1'(x)=\frac{1}{2}f(x)\mathrm{e}^{-x} \\ c_2'(x)=-\frac{1}{2}f(x)\mathrm{e}^{x} \end{cases}$$

为了保证方程的解为有界解, 形式上需要 $c_1(+\infty)=0, c_2(-\infty)=0$.

从而我们取 $c_1(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{+\infty}^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, \quad c_2(x)=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t$.

因此形式上非齐次方程的解为 $y(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}\displaystyle\int_{+\infty}^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t$.

同时由于对任意的 $t\in\mathbb{R}$, $|f(t)|\leq M$, 从而

$$|y(x)|\leq\frac{\mathrm{e}^x}{2}\left|\int_{+\infty}^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right|+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\left|\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t\right|\leq\frac{M\mathrm{e}^x}{2}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t+\frac{M\mathrm{e}^{-x}}{2}\int_{-\infty}^x\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t\leq M.$$