离散数学（2023）作业 05 - 函数及其运算

March 21, 2023

Problem 1

1. 否。$f(n)$ 不是函数。
2. 是。
3. 否。$f(n)$ 是函数，但 $f(2) \notin \mathbf{R}$。

Problem 2

1. 是
2. 不是
3. 不是
4. 是

Problem 3

(因为 f 不是 $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 上的一一映射，所以不存在反函数。此处 f^{-1} 代表逆像。)

1. $\{-1, 1\}$
2. $\{x | -1 < x < 0 \vee 0 < x < 1\}$
3. $\{x | x > 2 \vee x < -2\}$

Problem 4

1. 通过证明 f 是单射且满射即证明 f 是可逆的：
   - 单射：$\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ 且 $x_1 \neq x_2$，假设 $f(x_1) = f(x_2)$，即 $ax_1 + b = ax_2 + b$。由于 $a \neq 0$，得出 $x_1 = x_2$。矛盾，f 是单射得证。
   - 满射：$\forall y \in \mathbf{R}$，都能找到 $x = \frac{y-b}{a} \in \mathbf{R}$ 使得 $f(x) = y$。f 是满射得证。
2. f 的反函数：$f^{-1}(x) = (x - b)/a$

Problem 5

1. 定义域为 $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$，值域为 $\mathbf{Z}^+$。
2. 定义域为所有位串的集合，值域为 $\mathbf{N}$。
3. 定义域为所有位串的集合，值域为 $\mathbf{N}$。
4. 定义域为 $\mathbf{Z}^+$，值域为 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$。

Problem 6

1. 是
2. 是
3. 是
4. 不是
5. 不是

Problem 7

- 证明 f 是单射 $\to f$ 是满射：f 是单射，则 $|f(A)| = |A|$，由 $|A| = |B|$ 推出 $|f(A)| = |B|$。又因为 $f(A) \subseteq B$，所以 $f(A) = B$，即 f 是满射。
- 证明 f 是满射 $\to f$ 是单射：反证，假设 f 不是单射，则 $\exists x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2)$，此时有 $f(A - \{x_1\}) = B$。因为 A 不是单射，则 $|A - \{x_1\}| \geq |B|$，与 $|A| = |B|$ 矛盾。

综上，f 是单射当且仅当它是满射。

Problem 8

- 证明若 $f \circ g = I_Y$，$g \circ f = I_X$ 则 $f^{-1} = g$，$g^{-1} = f$：

  I_X 为双射，则 $g \circ f$ 为双射，f 为单射，g 为满射。同理可知 g 为单射 f 为满射。于是 f 和 g 都为双射，存在反函数。所以 $f^{-1} = g$，$g^{-1} = f$。

- 证明若 $f^{-1} = g$，$g^{-1} = f$, 则 $f \circ g = I_Y$，$g \circ f = I_X$：

  对任意 $x \in X$，有 $f(x) = g^{-1}(x) = y \in Y$, 即 $f(x) = y$, $g(y) = x$。故 $g \circ f(x) = g[f(x)] = g(y) = x = I_X(x)$。$g \circ f = I_X$。反之同理。

综上得证。

Problem 9

1. 分别证明 $f(S \cup T) \subseteq f(S) \cup f(T)$ 和 $f(S) \cup f(T) \subseteq f(S \cup T)$:
   - 对于 $\forall y \in f(S)$，$\exists x \in S$ 使得 $f(x) = y \in f(S)$。因为 $S \subseteq S \cup T$，所以 $x \in S \cup T$，于是 $f(x) = y \in f(S \cup T)$。因此 $f(S) \subseteq f(S \cup T)$。同理可得 $f(T) \subseteq f(S \cup T)$。综上，$f(S) \cup f(T) \subseteq f(S \cup T)$。
   - 对于 $\forall y \in f(S \cup T)$, $\exists x \in S \cup T$ 使得 $f(x) = y \in f(S \cup T)$。如果 $x \in S$, 则 $y = f(x) \in f(S)$, 因此 $y \in f(S) \cup f(T)$；如果 $x \in T$，则 $y = f(x) \in f(T)$，因此 $y \in f(S) \cup f(T)$。综上可得 $y \in f(S) \cup f(T)$，即 $f(S \cup T) \subseteq f(S) \cup f(T)$。
2. 对于 $\forall y \in f(S \cap T)$, $\exists x \in S \cap T$ 使得 $f(x) = y \in f(S \cap T)$。因为 $x \in S \cap T$, 所以 $x \in S$ 且 $y \in T$。因为 $x \in S$，所以 $y = f(x) \in f(S)$；因为 $x \in T$，所以 $y = f(x) \in f(T)$。综上 $y \in f(S) \cap f(T)$，即 $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$。

Problem 10

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(\bar{S}) &= \{x \subseteq A | f(x) \not\subseteq S\} \\
&= \overline{\{x \subseteq A | f(x) \subseteq S\}} \\
&= \overline{f^{-1}(S)}
\end{aligned}
$$