离散数学（2023）作业 25 - 二部图与匹配

离散数学教学组

Problem 1

证明：二部图 G 是简单图且有 $\mathcal{V}$ 个顶点 $\mathcal{E}$ 条边，证明：$\mathcal{E} \leq \mathcal{V}^2/4$。

答案： 设 G 的两部分别有 a 和 b 个顶点，$(a+b) = \mathcal{V}$，则 $\mathcal{E} \leq a * b = a * (\mathcal{V} - a) \leq \mathcal{V}^2/4$

Problem 2

令 k 为一整数。对于任意有限集合，证明对它的任意两个 k 划分都存在一个相同的代表集。

- 集合的 k **划分**指划分为大小相同的互不相交的 k 个子集，为简便起见，设集合的大小为 k 的整数倍从而每个子集均有相同个元素。
- 一个划分的**代表集**指从每个子集中取出一个元素而构成的集合。

举例：集合 $\{1,2,3,4\}$ 的一个 2 划分为 $A : \{1,2\}\{3,4\}$。此划分的代表集有 $\{1,3\}$,$\{2,3\}$,$\{1,4\}$,$\{2,4\}$，但 $\{1,2\}$ 不是其代表集。集合的另外一个划分为 $B : \{2,3\}\{1,4\}$。易见，A 与 B 存在相同的代表集 $\{1,3\}$。

答案： 证明：构造二部图 $G = (V_1, V_2, E)$，V_1 中的每个顶点代表集合的一种 k 划分的每个子集，V_2 中的每个顶点代表集合的另一种 k 划分的每个子集，$|V_1| = |V_2| = k$。$\forall a \in V_1, b \in V_2$，若所代表的集合有公共元素，则 a, b 相邻。可知对任意 $A \subseteq V_1$，$|N(A)| \geq |A|$，因为 $N(A)$ 中顶点代表的子集包括 A 中顶点代表的子集中的所有元素。由 $Hall$ 定理，G 有饱和 V_1 的匹配，又因为 $|V_1| = |V_2|$，G 有完全匹配。则将完全匹配中的每条边的两个顶点对应的两个集合中任取一个公共元素，所组成的集合即为这两个 k 划分的相同代表集。

Problem 3

对于哪些 n 值来说，下列图存在完美匹配的二部图？

1. K_n
2. C_n
3. Q_n

答案：

1. $n = 2$ 时 K_n 为存在完美匹配的二部图。$n = 1$ 时无完美匹配，$n > 2$ 时不是二部图。
2. n 为偶数时 C_n 为存在完美匹配的二部图。
3. 对于任意 n，Q_n 均为存在完美匹配的二部图。对每个顶点二进制编码，根据编码中 1 的个数的奇偶性可将顶点分为两部分。对所有编码为 $a_0a_1a_2...a_{n-1}0$ 的顶点，将其匹配到 $a_0a_1a_2...a_{n-1}1$，即可得到完美匹配。

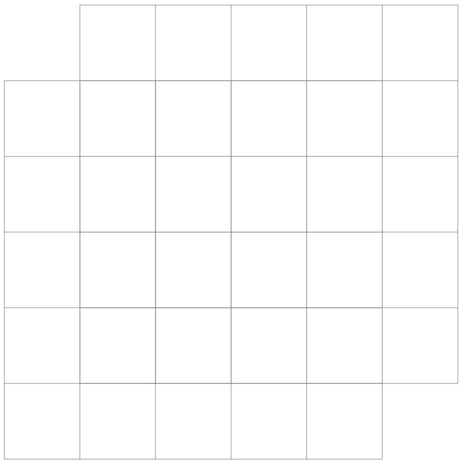
Problem 4

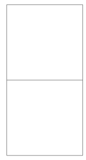
假设某校计算机系学生选导师时出现了这样的情况：对于每一位学生，至少对 k 名导师感兴趣；对于每一位导师，至多有 k 名学生对他感兴趣。假设每位导师只能指导 1 名学生，且每位学生也只能选择 1 名导师。试证明：存在这样的匹配，使得每位学生都能选到自己感兴趣的导师。

答案： 记所有学生的集合为 A，所有导师的集合为 B，对于任意学生的子集 S，每个学生至少关联 k 条边，所以至少关联 $k * |S|$ 条边；而 $|N(S)|$ 中每个老师最多关联 k 条边，所以至多关联 $k * |N(S)|$ 条边。因为 $k * |S| \leq k * |N(S)|$，所以 $|S| \leq |N(S)|$，根据霍尔婚姻定理，知该图有学生顶点集到导师顶点集的完备匹配。

Problem 5

证明一个 6×6 的方格纸板挖去左上角和右下角后不能用剪刀裁剪成若干 1×2 的小矩形。





答案： 注意到能裁成 1×2 的矩形中两个方格必须有公共边，以原方格纸的小格为顶点，两个格是否有公共边构成图。易见所得图为二部图，用剪刀将方格纸裁成 1×2 的矩形等价于找到一个该二部图的完全匹配。从任意一个方格出发，先将其标为黑色，将与之相邻的标为白色，然后继续对所有标为白色的方格标记他们的邻居方格为黑色。重复以上步骤直至整张图被标记为黑白两种颜色。因为该二部图的黑白点集大小不相等（分别为 18 和 16），所以不存在一个完全匹配。