统计的基本概念

一、作业 (提交时间：Dec. 18, 2023)

1.[174-4] 设总体 $X \sim \mathcal{N}(40, 5^2)$, (1) 抽取容量为 36 的样本, 求 $P(38 \le \bar{X} \le 43)$; (2) 样本容量 n 多大时, 才能使得 $P(|\bar{X} - 40| < 1) = 0.95$.
2.[176-8] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x \ge \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$. 求最小次序统计量 $X_{(1)}$ 的均值和方差.
3.[177-3] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_6)$ 是取自总体 $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 的一个样本, 求

(1) $k\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{\sqrt{X_5^2+X_6^2}}$ 服从什么分布, 及其自由度和 k 的取值?

(2) $c\frac{X_4^2+X_5^2}{(X_2+X_3)^2}$ 服从什么分布, 及其自由度和 c 的取值?

4.[178-6] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_5)$ 是取自总体 $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 的一个样本, 求 $a\frac{X_1+X_2}{|X_3-X_4-X_5|}$ 服从什么分布, 及其自由度和 a 的取值?
5.[180-5] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_{10})$ 是取自总体 $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 的一个样本, 求下列统计量的抽样分布

(1) $Y_1 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{10} X_i^2$;

(2) $Y_2 = \frac{\sqrt{6}\sum_{i=1}^{4} X_i}{2\sqrt{\sum_{i=5}^{10} X_i^2}}$;

(3) $Y_3 = \frac{3\sum_{i=1}^{4} X_i^2}{2\sum_{i=5}^{10} X_i^2}$.

6[183-4] 设 X_1, X_2 相互独立且服从相同的分布 $\mathcal{N}(1, \sigma^2)$, 求 $\frac{X_1-1}{|X_2-1|}$ 的分布.

二、练习

1.[b248-1] 设总体 $X \sim \mathcal{N}(7.6, 4)$ 中抽取容量为 n 的样本, 如果要求样本均值落在 (5.6, 9.6) 内的概率不小于 0.95, 则 n 至少为多少?
2.[b248-2] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 $X \sim \mathcal{N}(\mu, 16)$ 的一个样本, 问 n 多大时才能使得 $P(|\bar{X} - \mu| < 1) \ge 0.95$ 成立?
3.[184-9] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求最大次序统计量 $X_{(n)}$ 的均值和方差.
4.[178-4] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_5)$ 是取自总体 $X \sim \mathcal{N}(0, 4)$ 的一个样本,

(1) 给出常数 c, 使得 $c(X_1^2 + X_2^2)$ 服从 χ^2 分布, 求其自由度和 c 的取值;

(2) 给出常数 d, 使得 $d\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}$ 服从 t 分布, 求其自由度和 d 的取值;

(3) 给出常数 k, 使得 $k\frac{X_1^2+X_2^2}{X_3^2+X_4^2+X_5^2}$ 服从 F 分布, 求其自由度和 k 的取值.

5.[179-1] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, 求 $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$ 的分布.
6.[183-5] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_4)$ 是取自总体 $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 的一个样本, 确定常数 c, 使得 $P\left(\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_1+X_2)^2+(X_3-X_4)^2} > c\right) = 0.05$. (提醒: $F_{0.95}(1,1) = 161$)