

## 参数估计 – 点估计

### 一、作业 (提交时间: Dec. 18, 2023)

1.[194-1] 设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是取自总体  $X$  的一个样本, 总体  $X$  的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{a^2}(a-x), & 0 < x < a \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求  $a$  的矩估计量.

2.[195-4] 设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是取自总体  $X$  的一个样本, 总体  $X$  的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中  $\theta$  未知,  $\theta > 0$ . 求  $\theta$  的矩估计量和最大似然估计量.

3.[196-5] 设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是取自总体  $X$  的一个样本, 总体  $X$  的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

其中  $\theta$  未知,  $\theta > 0$ . 求  $\theta$  的矩估计量和最大似然估计量.

4.[197-7/201-5] 设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是取自总体  $X$  的一个样本, 总体  $X$  的分布列为

X	-1	0	1
概率	$\frac{\theta}{2}$	$1 - \theta$	$\frac{\theta}{2}$

其中  $\theta$  未知,  $0 < \theta < 1$ . 求  $\theta$  的矩估计量和最大似然估计量, 并讨论  $\theta$  的矩估计量和最大似然估计量的无偏性.

5.[199-1] 设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是取自总体  $X$  的一个样本, 总体  $X \sim B(1, p)$ , 其中  $p$  未知且  $0 < p < 1$ , 证明 (1)  $X_1$  是  $p$  的无偏估计; (2)  $X_1^2$  是  $p^2$  的无偏估计; (3) 当  $n \geq 2$  时,  $X_1 X_2$  是  $p^2$  的无偏估计.

6.[200-3] 设总体  $X \sim U(\theta, \theta+1)$ ,  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是取自总体  $X$  的一个样本, 证明:  $\hat{\theta}_1 = \bar{X} - \frac{1}{2}$ ,  $\hat{\theta}_2 = X_{(n)} - \frac{n}{n+1}$ ,  $\hat{\theta}_3 = X_{(1)} - \frac{1}{n+1}$  都是  $\theta$  的无偏估计.

7.[203-10] 设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是取自总体  $X$  的一个样本, 且总体  $X$  的期望  $E[X] = \mu$ , 方差  $\sigma(X) = \sigma^2$ , 证明:  $\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i X_i$  是未知参数  $\mu$  的无偏估计量, 也是一致性估计量.

### 二、练习

1.[194-2] 设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是取自总体  $X$  的一个样本, 其中总体  $X$  服从参数为  $\lambda$  的泊松分布, 其中  $\lambda$  未知,  $\lambda > 0$ , 求  $\lambda$  的矩估计量和最大似然估计量.

2.[195-3] 设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是取自总体  $X$  的一个样本, 总体  $X$  的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 - x^{-\theta}, & x \geq 1 \end{cases}$$

其中  $\theta$  未知,  $\theta > 1$ . 求  $\theta$  的矩估计量和最大似然估计量.

3.[196-6] 设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是取自总体  $X$  的一个样本, 总体  $X$  服从几何分布, 其分布列为  $P(X = x; p) = p(1-p)^{x-1}$ ,  $(x = 1, 2, \dots)$ . 其中  $p$  未知,  $0 < p < 1$ , 求  $p$  的矩估计量.

4.[197-8] 设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是取自总体  $X$  的一个样本, 总体  $X$  的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x-\theta}{\lambda}}, & x \geq \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中  $\lambda > 0$ . 求  $\theta$  及  $\lambda$  的最大似然估计量.

---

5.[199-2] 设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是取自总体  $X$  的一个样本, 总体  $X$  的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\mu)}, & x > \mu \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中  $-\infty < \mu < +\infty$ ,  $\mu$  未知, 易知  $\mu$  的最大似然估计量  $\hat{\mu}_1 = X_1$ , 问 (1)  $\hat{\mu}_1$  是  $\mu$  的无偏估计吗? 若不是请修正; (2)  $\mu$  的矩估计量  $\hat{\mu}_2$  是  $\mu$  的无偏估计吗? 是一致性估计量吗?

6.[200-4] 设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是取自总体  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  的一个样本, 选适当的值  $c$ , 使得  $\hat{\sigma}^2 = c \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$  是  $\sigma^2$  的无偏估计.

7.[202-8] 设  $(X_1, X_2, X_3)$  是取自总体  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  的一个样本, 证明:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{6}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{2}X_3, \quad \hat{\mu}_2 = \frac{2}{5}X_1 + \frac{1}{5}X_2 + \frac{2}{5}X_3.$$

都是总体均值  $\mu$  的无偏估计, 并进一步判断哪个估计量更有效.