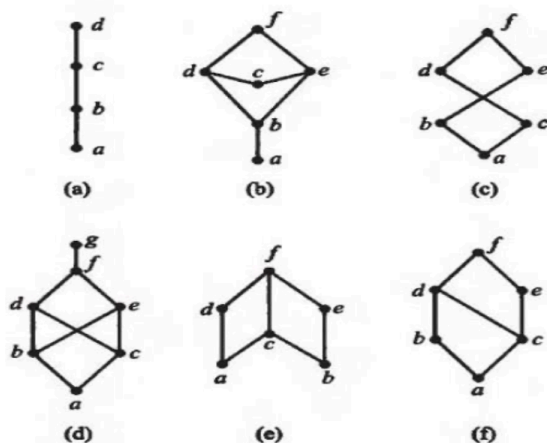


离散数学（2023）作业 I5 - 格

离散数学教学组

Problem 1

下图给出了 6 个偏序集的哈斯图。判断其中哪些是格。如果不是格，请说明理由。



答案： (a)(c)(f) 是格，(b)(d)(e) 不是格。在 (b) 中 $\{d, e\}$ 没有最大下界，在 (d) 中 $\{d, e\}$ 没有最大下界，在 (e) 中 $\{a, b\}$ 没有最大下界。

Problem 2

针对 **Problem 1** 中的每个格，如果格中的元素存在补元，则求出这些补元。

答案：

(a) a 与 d 互为补元，其他元素没有补元。

(c) a 与 f 互为补元， b 的补元是 c 和 d ， c 的补元是 b 和 e ， d 的补元是 b 和 e ， e 的补元是 c 和 d 。

(f) a 与 f 互为补元， b 与 e 互为补元， c 与 d 没有补元。

Problem 3

说明 **Problem 1** 中的每个格是否为分配格、有补格和布尔格，并说明理由。

答案：

(a) 是分配格，因为任何链都是分配格；不是有补格和布尔格，因为 b 与 c 没有补元。

(c) 不是分配格，因为含有 5 元子格与五角格同构；是有补格，每个元素都有补元；不是布尔格，因为不是分配格。

(f) 是分配格，因为不含有与钻石格和五角格同构的子格；不是有补格和布尔格，因为 c 与 d 没有补元。

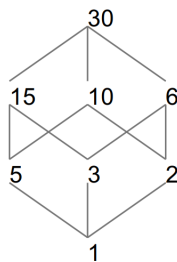
Problem 4

给定由集合 $S = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ 及整除关系构成的偏序集 $(S, |)$:

1. 画出 $(S, |)$ 的哈斯图, 并判定集合 $A = \{2, 3, 5, 6\}$ 的上确界、下确界是否存在, 如存在请给出;
2. 判定该偏序集 $(S, |)$ 是否构成格; 若是格, 是否构成分配格、有补格、布尔代数;
3. 若 $(S, |)$ 为格, 请判定 $(\{1, 2, 15, 30\}, |)$ 和 $(\{1, 2, 3, 30\}, |)$ 是否为 $(S, |)$ 定子格并说明理由。

答案:

1. 上确界、下确界均存在, 上确界 $Sup(\{2, 3, 5, 6\}) = 30$, 下确界 $Inf(\{2, 3, 5, 6\}) = 1$ 。



2. 偏序集 $(S, |)$ 构成格, 构成分配格、有补格、布尔代数。
3. $(\{1, 2, 15, 30\}, |)$ 构成 $(S, |)$ 的子格, 因为其各元素的上下确界均对自身封闭; $(\{1, 2, 3, 30\}, |)$ 构成格, 但不是 $(S, |)$ 的子格, 因为 $2 \wedge 3 = 6 \notin \{1, 2, 3, 30\}$, 不符合子格的定义。

Problem 5

设 L 是格, $a, b, c \in L$, 且 $a \leq b \leq c$, 证明 $a \vee b = b \wedge c$ 。

答案: 由 $a \leq b$ 得 $a \vee b = b$, 由 $b \leq c$ 得 $b = b \wedge c$, 因此 $a \vee b = b \wedge c$ 。

Problem 6

设 L 是格, 求以下公式的对偶式:

1. $a \wedge (a \vee b) \leq a$
2. $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
3. $b \vee (c \wedge a) \leq (b \vee c) \wedge a$

答案:

1. $a \vee (a \wedge b) \geq a$
2. $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
3. $b \wedge (c \vee a) \geq (b \wedge c) \vee a$

Problem 7

设 $\langle L, \leq \rangle$ 是格, 任取 $a \in L$, 令 $S = \{x | x \in L \wedge x \leq a\}$, 证明 $\langle S, \leq \rangle$ 是 L 的子格。

答案: 因为 $a \in S$, 所以 S 非空。任取 $x, y \in S$, 则有 $x \leq a, y \leq a$ 。因此, 有 $x \wedge y \leq x \leq a, x \vee y \leq a \vee a \leq a$ 。故运算封闭, 得证。

Problem 8

证明在任意格中, 均有

1. $x \vee (y \wedge z) \preceq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

2. $x \wedge (y \vee z) \succeq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

答案:

1. 显然, 我们有 $x \preceq (x \vee y)$ 和 $x \preceq (x \vee z)$, 并且 $(y \wedge z) \preceq y \preceq (x \vee y)$ 和 $(y \wedge z) \preceq z \preceq (x \vee z)$ 。故我们有 $x \preceq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ 和 $(y \wedge z) \preceq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, 得证。

2. 由对偶原理直接可得。

Problem 9

设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ 是有界格, 证明 $\forall a \in L$, 有

$$a \wedge 0 = 0, a \vee 0 = a, a \wedge 1 = a, a \vee 1 = 1$$

答案:

- $a \wedge 0 \preceq 0, 0 \preceq 0$, 且 $0 \preceq a \Rightarrow 0 \preceq a \wedge 0$, 根据反对称性 $a \wedge 0 = 0$;
- $a \preceq a \vee 0, 0 \preceq a$, 且 $a \preceq a \Rightarrow a \vee 0 \preceq a$, 根据反对称性 $a \vee 0 = a$;
- $a \wedge 1 \preceq a, a \preceq a$, 且 $a \preceq 1 \Rightarrow a \preceq a \wedge 1$, 根据反对称性 $a \wedge 1 = a$;
- $1 \preceq a \vee 1, 1 \preceq 1$, 且 $a \preceq 1 \Rightarrow a \vee 1 \preceq 1$, 根据反对称性 $a \vee 1 = 1$ 。

Problem 10

求证: 在格 $\langle L, \times, \oplus \rangle$ 中, 若 $a \times (b \oplus c) = (a \times b) \oplus (a \times c)$, 则 $a \oplus (b \times c) = (a \oplus b) \times (a \oplus c)$ 。

答案: 证明:

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \times (a \oplus c) &= ((a \oplus b) \times a) \oplus ((a \oplus b) \times c) \\ &= a \oplus (c \times (a \oplus b)) \\ &= a \oplus ((c \times a) \oplus (c \times b)) \\ &= (a \oplus (a \times c)) \oplus (b \times c) \\ &= a \oplus (b \times c)\end{aligned}$$