数理逻辑

04 - Gödel不完备性定理简介

(Press ? for help, n and p for next and previous slide)

戴望州

南京大学智能科学与技术学院

2024年 - 春季

https://daiwz.net

Gödel 的不完备性定理做了什么?

Gödel 的论文

On formally undecidable propositions of *Principia mathematica* and related systems I[1]

(*1931*)

1

The development of mathematics toward greater precision has led, as is well known, to the formalization of large tracts of it, so that one can prove any theorem using nothing but a few mechanical rules. The most comprehensive formal systems that have been set up hitherto are the system of *Principia mathematica* (*PM*)[2] on the one hand and the Zermelo–Fraenkel axiom system of set theory (further developed by J. von Neumann)[3] on the other. These two systems are so comprehensive that in them all methods of proof today used in mathematics are formalized, that is, reduced to a few axioms and rules of inference. One might therefore conjecture that these axioms and rules of inference are sufficient to decide *any* mathematical question that can at all be formally expressed in these systems. It will be shown below that this is not the case, that on the contrary there are in the two systems mentioned relatively simple problems in the theory of integers[4] that cannot be decided on the basis of the axioms. This situa-

Gödel 的论文

1. 什么叫 *formally undecidable propositions*？
2. 为什么是 *Principia Mathematica*？
3. Part II 在哪？

可判定与可计算

定义 3.1（能行可判定，*effectively decidable*）：

一个性质 P（在某个论域 D 上定义）是能行可判定的当且仅当存在一个算法，在有穷步数内可判断任意 $o \in D$ 满足或不满足性质 P

- 命题逻辑中的重言式是能行可判定的
  - 枚举真值表
- wff 中的主连词
  - 对括号个数进行计数

可判定与可计算

定义 3.2（能行可计算，*effectively computable*）：

一个函数 f（在某个定义域 D 上的全函数）是能行可判定的当且仅当存在一个算法，对任意 $o \in D$ 都可以在有穷步数内计算出 $f(o)$

- 它比可判定性更加一般：对于一个定义在 D 上的性质，我们可定义一个特征函数（*characteristic function*）c_P，当 o 满足性质 P 时有 $c_P(o) = 1$，否则 $c_P(o) = 0$
- 可计算/可判定性的“算法”运行在一个“抽象的计算机”中，我们不考虑它的物理运算速度或者内存大小，唯一重要的是有穷步能输出

能行公理化的形式理论

定义3.3（能行形式化的语言，*effectively formalized language*）：

一个可解释的语言 L 是能行形式化的当且仅当它拥有：

1. 一个有穷的基本字符（*basic symbols*）集合
2. 能行可判定的语法性质（*syntactic properties*），例如什么叫项（*term*）、合式公式（*wff*）、自由变元（*free variable*）、语句（*sentence*）等等；且一个语句的语法结构是能行可决定的（*effective determiniable*），即在有穷步数内可解析
3. 上述句法结构与 L 中的语义规则可被用来能行地决定一个语句的唯一解释，令其拥有一个固定的真值（*fixed truth-value*）

能行公理化的形式理论

定义3.4（能行公理化的形式理论，*effectively axiomized formal theory*）：

一个能行公理化的形式理论T必须：

1. 基于一个能行形式化的语言L
2. 一组能行可判定为公理的L-wff
3. 一个能行可判定wff序列是否为T中的一个合法证明的证明系统

- “理论”（*Theory*）还有一个更一般的定义，见[Enderton, 155]
- 接下来我们所有提到的“理论”（theory）都是“能行公理化的形式理论”，除非另外说明
- **注意**：检验一个证明是否合法和判断是否存在不一样；“证明系统”也并不唯一：
  - $\Sigma \vdash_S \varphi$表示证明系统S可以从Σ推导出φ
  - $T \vdash \varphi$表示形式理论T可以通过它自身的证明系统推导出φ，即φ是一个T-定理（T-Theorem）

形式可判定

定义 3.5（形式可判定，*formally decides*）：

若T是一个理论，且φ是该理论所使用的形式语言描述的一个语句，那么我们称T形式可判定φ当且仅当：要么$T \vdash \varphi$，要么$T \vdash \neg\varphi$。显然，一个语句φ在T中是形式不可判定的当且仅当$T \nvdash \varphi$且$T \nvdash \neg\varphi$

定义 3.6（否定完备性，*negation completeness*）：

我们称T是一个否定完备（也叫“语法完备”，*syntactical complete*）的理论，当且仅当它形式可判定它的语言描述的任意语句（闭公式），即对任意φ，要么$T \vdash \varphi$，要么$T \vdash \neg\varphi$

算术、逻辑主义与 *Principia*

1. 算术的基本语言和模型：0、后继、加法、乘法、逻辑连词、全称量词
2. 康德、先天综合判断
3. Gottlob Frege、分析哲学
4. 罗素、《数学原理》
   - “All mathematics [yes! – all mathematics] deals exclusively with concepts definable in terms of a very small number of logical concepts, and … all its propositions are deducible from a very small number of fundamental logical principles.”

“人类的绝望”

Gödel’s First Theorem says – at a good enough approximation for now – that *nicely formalized theories containing enough arithmetic are always negation incomplete*. Given any nice effectively axiomatized formal theory T, there will be arithmetic truths that can’t be proved in that particular theory.

哥德尔的证明思路

回顾

定义 3.6（可靠性，*Soundness*）：

若T是一个理论，那么它是可靠的当且仅当它的公理均为真（基于T的语言及其上的解释）且它的证明系统是保真（*truth-preserving*）的。也就是说，它的定理都是真的

定义 3.7（一致性，*Consistency*）：

若T是一个理论，那么它是（语法上）可靠的当且仅当不存在任何φ令$T \vdash \varphi$且$T \vdash \neg\varphi$，其中“$\neg$”是T中的否定词

基本算术理论的语言

定义 3.8（基本算术理论的语言）：

一个可解释的形式化语言 L 包含基本算术语言（*the language of basic arithmetic*）当且仅当 L 有:

- 一个表示零的项
- 表示后继、加法、乘法的算术函数符号
- 一般的逻辑连词、等词符号
- 以及能够对自然数进行量化的量词符号

哥德尔第一不完备性定理概述

定理3.9（哥德尔不完备性定理I）：

若T是一个能行公理化的形式理论且它的语言包含基本算术理论。那么若T是可靠的，那么就存在一个基本算术理论中为真的语句G_T，令$T \nvdash \mathrm{G}_T$且$T \nvdash \neg\mathrm{G}_T$。

也就是说，T是否定不完备的。

定理3.9'（哥德尔不完备性定理I'，纯语法版本）：

若T是一个能行公理化的形式理论且它的语言包含基本算术理论。那么若T是一致的且能够证明算术中最基础的某一小部分理论（以及一些常见形式算术理论中的额外性质），那么就存在一个基本算术理论中的语句G_T，令$T \nvdash \mathrm{G}_T$且$T \nvdash \neg\mathrm{G}_T$。

因此，T是否定不完备的。

不完备性与不可完备性

我们考虑语义上的不完备性，既然$T \nvdash \mathsf{G}_T$且$T \nvdash \neg\mathsf{G}_T$，那我们为什么不将$\mathsf{G}_T$加进去？即令

$$U = T \cup \{\mathsf{G}_T\}$$

是否U就完备了呢？

我们考察U的性质：

1. 是否可靠？
2. 是否仍然是一个公理化的形式理论？
3. 其语言是否包含算术基本理论？

哥德尔的完备性和不完备性定理

若T是由某个FOL表达的算术理论，我们有一套一阶演绎系统S（例如Hilbert System, Gentzen's Sequent Calculous, etc.），那么根据哥德尔完备性定理，我们有：

$$T \vDash \varphi \quad \Rightarrow \quad T \vdash_S \varphi$$

根据哥德尔不完备性定理，我们有：存在一些对于理论T来说为真的wff φ，令

$$T \nvdash \varphi \quad \text{且} \quad T \nvdash \neg\varphi$$

不仅如此，就算我们把这些φ加进T，仍然会出现其它的φ'导致这个新的形式理论不完备，即T永远不可完备

证明所使用的记号

定义3.10（简写）：$\overline{\mathsf{n}}$表示自然数n在标准数字记法下的简写

- 标准数字记法只有数字0和后继S函数。$\overline{5}$即为数字$5 = \mathsf{SSSSS0}$的简写

定义3.11（含自由变元的公式）：

- 语言L中的开公式（*open wff*）$\varphi(x)$用来表示一个数的性质P：对任意n，$\varphi(\overline{\mathsf{n}})$为真，当且仅当$n$拥有性质$P$
- 类似地，开公式$\psi(x, y)$用来表示一个数字间的二元关系R：对任意m, n，$\psi(\overline{\mathsf{m}}, \overline{\mathsf{n}})$为真，当且仅当$m, n$满足关系$R$
- 开公式$\chi(x, y)$用来表示一个一元函数f：对任意m, n，$\chi(\overline{\mathsf{m}}, \overline{\mathsf{n}})$为真，当且仅当$f(m) = n$

哥德尔数

如今，我们对各种数据都可以用数字编码这一事实已经完全熟悉了。

1931年，这个想法当然并不像今天这样普及。

但即便如此，以下这种定义当时也应该显得相当没有问题：

定义 3.12（哥德尔数，*Gödel number*）：

一个形式理论T的哥德尔编码模式（Gödel number scheme），是一种将T的表达式（以及表达式序列）能行地编码为自然数的方法。该模式提供了一个将表达式（或表达式序列）转换为自然数的算法；同时也提供了一个解码算法，即将被编码的自然数转换回将它所编码的唯一表达式（或表达式序列）。

对于一个编码模式，一个表达式（或表达式序列）的哥德尔编码数字即是其唯一的哥德尔数。

哥德尔数

定义 3.13（公式和证明的哥德尔编码）：

取一个能行公理化的形式理论T，并固定一个对T的语言中的表达式/表达式序列进行哥德尔编码的模式。那么，相对于该编码模式，我们可以定义以下性质/关系：

1. $Wff_T(n)$当且仅当n是T-wff的哥德尔数
2. $Sent_T(n)$当且仅当n是T-句子（*sentence*）的哥德尔数
3. $Prf_T(m,n)$当且仅当m是一个T-证明的哥德尔数，它证明了哥德尔数n的T-句子

哥德尔数

定理3.14：

若T是一个能行公理化的形式理论，且有一个哥德尔编码模式。那么定义3.13中几种关于数字的性质$Wff_T(n)$、$Sent_T(n)$、$Prf_T(m,n)$均为能行可判定的。

证明概要：

1. 对于Wff_T和$Sent_T$两种性质，由于n解码为字符串是能行的，且字符串的语法判定也是能行的，所以这两种性质是能行可判定的
2. 对于Prf_T，由于一个能行公理化的形式理论的证明系统是能行可判定的，且证明序列中的每个哥德尔编码的解码和字符串解析也是能行的，因此该性质仍然是能行可判定的

T 可以表达 Prf_T

有了以上结论，我们就能够得到以下两个更关键的结论：我们能够在 T 中表达“可证”

定理 3.15：

若 T 是一个能行公理化的形式理论，且它能够表达基本算术理论。给定一个哥德尔编码模式。那么 T 就能表达关于数字的性质 Prf_T，该性质能够被表达为一个算术 wff（即被编码的 T-wff）$\mathrm{Prf}_T(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

这个结果并不是显而易见的，它的证明大概分两种方法：

1. 自底向上地构造：选取一个特殊的 T，详细地构建一个基本算术公式来表达 $PrfT$ 关系。然后对它进行概括，以令它对任意满足定义要求的 T 都成立
2. 自顶向下地证明：通常来说，基本算术的语言有能力表达任何可判定的性质和关系。因为定理 3.14 告诉我们，当 T 是一个能行公理化的形式理论时，数值关系 Prf_T 是可判定的。所以我们能够将这个关于表达能力的性质应用于 Prf_T（哥德尔采用了这个版本）

T中的“一个命题可证”

基于定理3.15，我们能够构造如下关于“可证”在T中如何表达的定义：

定义3.16（可证明性谓词，*provability predicate*）：

定义$\mathrm{Prov}_T(x) \equiv \exists z\, \mathrm{Prf}_T(z, x)$（量词作用在自然数域上）。

那么，$\mathrm{Prov}_T(\bar{n})$，即$\exists z \mathrm{Prf}_T(z, \bar{n})$为真，当且仅当某个数z恰好是哥德尔编码为$\bar{n}$的句子的一个$T$-证明，也即当且仅当哥德尔编码为$\bar{n}$的句子是$T$的一个定理。因此，$\mathrm{Prov}_T$被称为可证明性谓词。

哥德尔语句 G_T

接下来，哥德尔构造了一个奇特的语句：

定理 3.17（哥德尔语句，*Gödel sentence*）：

我们可以在基本算术语言中为理论 T 构造一个哥德尔语句 G_T，它具有以下性质：G_T 为真当且仅当 $\neg\mathsf{Prov}_T(\overline{\ulcorner \mathsf{G}_T \urcorner})$ 为真，其中 $\overline{\ulcorner \mathsf{G}_T \urcorner}$ 正是 G_T 的哥德尔编码

- 通过构造可得，G_T 在解释时为真当且仅当 $\neg\mathsf{Prov}_T(\overline{\ulcorner \mathsf{G}_T \urcorner})$ 也为真
- 即当且仅当由 $\overline{\ulcorner \mathsf{G}_T \urcorner}$ 表示的哥德尔编码对应的公式不是 T 的定理
- 即当且仅当 G_T 不是 T 的定理
- 简而言之，定理 3.17 告诉我们可以找到一个算术语句 G_T，它在且仅在它不是 T 的定理时才为真

不完备性定理的证明

定理3.9（哥德尔不完备性定理I）：

若T是一个能行公理化的形式理论且它的语言包含基本算术理论。那么若T是可靠的，那么就存在一个基本算术理论中为真的语句G_T，令$T \nvdash \mathrm{G}_T$且$T \nvdash \neg \mathrm{G}_T$。

也就是说，T是否定不完备的。

证明：

- 设G_T为定理3.17中引入的哥德尔语句。假设T是可靠的并且$T \vdash \mathrm{G}_T$，即G_T是一个T-定理。根据G_T的定义，它为假
- 那么T 中存在一个错误的定理，即T将不可靠，与假设相矛盾
- 因此，T不能证明G_T。即$T \nvdash \mathrm{G}_T$
- 再次根据它的定义，由于G_T当且仅当不可证时为真，所以G_T为真
- 那么$\neg \mathrm{G}_T$为假。但由于T是可靠的，所以它不能证明$\neg \mathrm{G}_T$。因此，我们也有$T \nvdash \neg \mathrm{G}_T$
- 所以，T无法形式化地判定G_T。根据定义3.6，T是否定不完全的 Q.E.D.

说谎者悖论和不完备性定理

看起来都是自指语句，为什么说谎者悖论是悖论，而哥德尔不完备性定理是定理？

- 这个问题触及了不完备性定理的深层根源
- 简而言之，假设T是一个能行公理化的理论，可以表达足够的算术理论。那么，T就可以表达作为一个可证明的 T 句子的性质。
- 然而在事实上，T不能表达“什么叫做真的T-语句”这一性质（如果它能够，那么T当然会陷入说谎者悖论）
- 所以，“真的T-语句”和“可证的T-语句”是两种完全不同的性质
- 因此，要么有在T为真但不可证的句子，要么有在T中为假但可证明句子
- 假设中的“T是可靠的”排除了第二种情况，所以结论是T中的“真”超出了T中语法可证的定理范围。也就是说，T**不可能**是否定完全的

不可判定性与对角化证明

能行可枚举

定义 3.18（能行可枚举，*effectively enumerable*）：

一个集合 Σ 是能行可枚举的，当且仅当存在一个算法能够逐步输出该集合元素的一个列表 $s_1, s_2, s_3, \ldots$（允许重复），使得：对任意一个 Σ 中的元素，当算法运行足够步数后它最终会出现在该列表中

定理 3.19：

一个能行公理化的理论 T 中的定理是能行可枚举的

能行可枚举

定理3.19：

一个能行公理化的理论T中的定理是能行可枚举的

证明概要：

1. 根据定义3.3和3.4，T的语言L只有有穷个基本符号。那么我们可以依字典序对所有的L字符串排序并输出
   - （注意定义3.18中的“算法运行足够步数”并未要求“有限步数”）
2. 由于L中的wff都是可判定的，所以一定可以能行的判定哪些字符串是wff（类别a）、哪些是wff序列（类别b）、哪些这两者均不是（类别c）
3. 因为T是能行公理化的，那么就可以能行地判定一个b类字符串是否是一个T-证明
4. 这些属于T-证明的字符串中的最后一个wff就是T-定理。这时我们将它加入输出队列
5. 该过程能够机械化地不断执行下去，因此T中的定理是能行可枚举的

否定完备性蕴涵可判定性

一个形式理论的可判定性就是它的所有定理的可判定性：

定义 3.20：

一个理论T是可判定的，当且仅当性质（谓词）“是T的定理”是能行可判定的，即对任意L中的语句φ存在一个机械的方式可以决定它是否为T的定理

注意区分下面的定义（主要区别在哪？）：

1. 一个理论T可形式化判定一个语句φ，当且仅当$T \vdash \varphi$或$T \vdash \neg\varphi$
2. T是可判定的，当且仅当L中的任意语句均能被判定是否是T的定理
3. 一个理论可能本身是可判定的，但它却无法判定L中的所有语句。比如前面例子中$\{p, q, r\}$语言中的理论$\{p \wedge \neg r\}$

否定完备性蕴涵可判定性

定理 3.21：

任意一致的、否定完备的、能行公理化的形式理论都是可判定的

证明概要:

1. 根据定理 3.19，一个能行公理化的形式理论 T 中的定理都是能行可枚举的
2. 那么由于 T 是否定完备的，对任意 wff φ，它或它的否定迟早会出现在以上枚举中
   - 如果 φ 出现在枚举中，那么它是 T-定理
   - 若 $\neg\varphi$ 出现在枚举中，根据 T 的一致性，φ 不是 T-定理

将公式性质转化为数值性质

注意到，前面所讨论的“性质”是用来描述L语言中的字符串，或wff的。未来我们要用哥德尔编码将wff以及证明转换为数，因此还要定义如何描述可判定的“数字的性质”

定义 3.22（数值性质，*numerical propertiy*）：

数值性质P由含有基本算术的语言L中带有一个自由变量的开公式$\varphi(x)$表达，它当且仅当对于每一个n，

1. 如果n具有性质P，那么$\varphi(\bar{n})$为真
2. 如果n不具有性质P，那么$\neg\varphi(\bar{n})$为真

下面，我们可以描述在形式理论T中可机械化判定的数值性质

定义 3.23（刻画，*captures*）：

一个形式理论T可通过开公式$\varphi(x)$刻画（captures）数值性质P，当且仅当对任意n，

1. 如果n具有性质P，那么$T \vdash \varphi(\bar{n})$
2. 如果n不具有性质P，那么$T \vdash \neg\varphi(\bar{n})$

我们希望的——“充分强的形式理论”

定义 3.24（充分强的理论，*sufficiently strong theory*）：

我们称一个形式理论T是充分强的，当且仅当它能够刻画任意能行可判定的数值性质

换言之，它应该能做到以下两件事情：

1. 它的语言能够构建开放公式$\varphi(\mathsf{x})$来表达可判定的数值性质P
2. 若某个数字n有性质P，那么$T \vdash \varphi(\bar{\mathsf{n}})$；否则$T \vdash \neg\varphi(\bar{\mathsf{n}})$

充分强的形式理论是不可判定的

下面，我们可以证明出这个比较强的结论（尽管和哥德尔不完备性定理有一点不一样）：

定理3.25：

任意一致的、能行公理化的、且充分强的形式理论都是不可判定的

证明（对角化）：

- 下面使用反证法。我们假设T是一致的、能行公理化的、充分强的，且它是可判定的
- 由于T是充分强的，因此它能够用开公式表达任意数值性质。由于它是能行公理化的，那么它的语言L必然可判定什么叫“包含1个自由变元的开公式”，因此可以仿照定理3.19证明这些开公式是可枚举的。令它们的枚举为：

$$\varphi_0(\mathsf{x}), \varphi_1(\mathsf{x}), \ldots$$

- 定义一个数值性质D：n具有性质D当且仅当$T \vdash \neg\varphi_n(\bar{\mathsf{n}})$
  - 根据我们的假设，D是能行可判定的：对任意n我们可以用有穷步枚举至$\varphi_n(\mathsf{x})$，将其中的x替换为$\bar{\mathsf{n}}$（甚至在前面再加一个$\neg$）。由于我们设它是可判定的，那么就存在能行的算法证明$T \vdash \varphi_n(\mathsf{x})$或$T \vdash \neg\varphi_n(\mathsf{x})$

充分强的形式理论是不可判定的

证明（对角化，Cont'd）：

- 由于我们假设T充分强，那么它能够刻画任意可判定的数值性质，也包括D
- 假设刻画性质D的开公式为$\varphi_d(\mathsf{x})$，根据刻画的定义，它的意思是：
  1. 若n拥有性质D，则$T \vdash \varphi_d(\bar{\mathsf{n}})$
  2. 若n没有性质D，则$T \vdash \neg\varphi_d(\bar{\mathsf{n}})$
- 令$n = d$，得到
  1. 若d拥有性质D，则$T \vdash \varphi_d(\bar{\mathsf{d}})$
  2. 若d没有性质D，则$T \vdash \neg\varphi_d(\bar{\mathsf{d}})$
- 然而根据上一页的红字定义：d具有性质D当且仅当$T \vdash \neg\varphi_n(\bar{\mathsf{d}})$
  - 与上面第2点结合得到：不管d是否拥有性质D均有$T \vdash \neg\varphi_d(\bar{\mathsf{d}})$。也就是说$\neg\varphi_d(\bar{\mathsf{d}})$是$T$-定理
- 因此d确实拥有性质D，从而根据上面的第1点得$\varphi_d(\bar{\mathsf{d}})$也是$T$-定理
- 以上结论与T是一致的矛盾，因此T是不可判定的 Q.E.D.

不可能三角（不完备性！）

定理 3.21：

任意一致的、否定完备的、能行公理化的形式理论都是可判定的

定理 3.25：

任意一致的、能行公理化的、且充分强的形式理论都是不可判定的

根据这两条定理，很快就能得到另一种形式的不完备性定理：

定理 3.26：

任意一致的、能行公理化的、且充分强的形式理论都是否定不完备的

准备工作 1：一阶 Peano 算术

Baby Arithmetic

在定义一阶Peano算术前，我们先定义两类比较简单的算术，并考察它们分别能做什么。

第一种算术理论叫Baby Arithmetic，记为BA。它的语言为L_B。它的词汇表如下：

符号	说明
0	常元，表示零
$S, +, \times$	函词：后继、加法、乘法
$=$	谓词：等于
$\neg, \to$	逻辑连词
$(,)$	标点：括号

简写：

- 项$\bar{5}$表示SSSSS0；项$(\bar{1}+(\bar{2}\times\bar{3}))$表示$S0+SS0\times SSS0$
- wff的例子：$\neg(\bar{1}+\bar{2}=\bar{2}\times\bar{2})$；或简写为$\bar{1}+\bar{2}\neq\bar{2}\times\bar{2}$

BA 的公理

注意，由于BA没有变元和量词，它和命题逻辑中一样，每条公理都是一个模式。我们继续用希腊字母来作为元语言中的变元来描述它们。它的公理包括以下内容：

- **命题逻辑公理以及关于等词的公理**，例如Leibniz's Law $\vdash \tau = \sigma \to \varphi(\tau) = \varphi(\sigma)$
- **非逻辑公理**：对任意数字ζ, ξ有

1. $0 \neq \mathsf{S}\zeta$
2. $\mathsf{S}\zeta = \mathsf{S}\xi \to \zeta = \xi$
3. $\zeta + 0 = \zeta$
4. $\zeta + \mathsf{S}\xi = \mathsf{S}(\zeta + \xi)$
5. $\zeta \times 0 = 0$
6. $\zeta \times \mathsf{S}\xi = (\zeta \times \xi) + \zeta$

尽管它的公理数量是无穷的，但它仍然是一个能行公理化的形式理论：给定一个候选公式，我们显然可以能行地判定它是否是那六个模式中的实例，从而确定它是否是一条公理

理论BA

定义3.27（*Baby Arithmetic*, BA）：

BA是一个语言为L_B的形式理论，它包含关于否定词、蕴含词和等词的经典逻辑规则，且它的非逻辑公理包含以上模式1到6的所有数值实例

它能够证明许多定理，例如BA $\vdash \bar{2} + \bar{2} = \bar{2}$，即$\mathsf{SS0} + \mathsf{SS0} = \mathsf{SSSS0}$

$$
\begin{array}{llr}
1. & \mathsf{SS0} + \mathsf{0} = \mathsf{SS0} & \text{Ax 3} \\
2. & \mathsf{SS0} + \mathsf{S0} = \mathsf{S}(\mathsf{SS0} + \mathsf{0}) & \text{Ax 4} \\
3. & \mathsf{SS0} + \mathsf{S0} = \mathsf{SSS0} & \text{1, 2 Leibniz's Law (LL)} \\
4. & \mathsf{SS0} + \mathsf{SS0} = \mathsf{S}(\mathsf{SS0} + \mathsf{S0}) & \text{Ax 4} \\
5. & \mathsf{SS0} + \mathsf{SS0} = \mathsf{SSSS0} & \text{3, 4 LL}
\end{array}
$$

BA的完备性

定理3.28：

若τ是L_B语言中的一个项，且假设它在BA的解释中取值为t，那么BA必然能够在其内部证明这一点，即BA $\vdash \tau = \bar{\mathrm{t}}$

- 也就是说，不管τ多么复杂，BA总能计算出它的正确取值，比如 $(\mathrm{BA} \vdash \bar{2} + \bar{3}) \times (\bar{2} \times \bar{2}) = \overline{20}$
- 因为BA只有一个谓词（“等于”），所以如下几条“完备性定理”显然成立

定理3.29：

1. 若算术等式$\sigma = \tau$为真，那么BA $\vdash \sigma = \tau$
2. 若s和t是不同的数字，那么BA $\vdash \bar{\mathrm{s}} \neq \bar{\mathrm{t}}$
3. 若算术等式$\sigma = \tau$为假，那么BA $\vdash \sigma \neq \tau$

BA 的完备性

定理 3.30： BA 是一个可靠的（sound）能行公理化形式理论，且它是否定完备的

证明概要：

1. 可靠性显然成立。因为算术公理是正确的，且逻辑推导系统（命题逻辑）是可靠的（或“保真的”），因此推出的任意 BA-定理都是正确的
2. 下面证明其否定完备性（negation completeness）：
   - L_B 中的 wff φ 由逻辑连词和原子公式 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 构成，其中每个原子公式都是算术等式。因此 BA 中的推理可通过考虑 α_i 本身的真值进行
   - 令 v 是原子公式上的一个赋值，定义：α_i 为真时 α_i^v 表示 α_i，否则它表示 $\neg\alpha_i$。同理，φ^v 当 φ 为真时表示 φ，否则表示 $\neg\varphi$
   - 显然有 $\alpha_1^v, \alpha_2^v, \ldots, \alpha_n^v$ 重言蕴涵 φ^v。根据命题逻辑（PL）的可靠性，我们有 $\alpha_1^v, \alpha_2^v, \ldots, \alpha_n^v \vdash_{PL} \varphi^v$
   - 根据定理 3.29，每个 α_i^v 在 BA 中都是可证的
   - 再因为 BA 包含命题逻辑，所以上面对 φ^v 的证明（不论 φ 还是 $\neg\varphi$ 为真）均在 BA 中可表达。即，它是否定完备的

Robinson Arithmetic

接下来，我们引入量词定义一种FOL下的算术语言L_A（Language of Arithmetics）。它的基本成分和L_B一致，只多了量词与变元

符号	说明
0	常元，表示零
$\mathsf{S}, +, \times$	函词：后继、加法、乘法
$=$	谓词：等于
$\neg, \rightarrow$	逻辑连词
$(,)$	标点：括号
$x_0, x_{\mathsf{S}0}, \ldots$	变元
$\forall$	量词：量化自然数

Robinson Arithmetic（Q）的公理

由于Q有变元和量词，所以可以直接在公理中表达变元，即它的非逻辑公理Q便有限了！

- **FOL 公理**
- **非逻辑公理**:

1. $\forall x\,(0 \neq Sx)$
2. $\forall x \forall y\,(Sx = Sy \to x = y)$
3. $\forall x\,(x \neq 0 \to \exists y\,(x = Sy))$
   - 以上公理只说0不是后继，并未明确其他数字的性质。L_A中因为我们直接列出所有常量，所以不用操心该性质。现在有了变元和量词，因此有必要引入该公理
4. $\forall x\,(x + 0 = x)$
5. $\forall x \forall y\,(x + Sy = S(x + y))$
6. $\forall x\,(x \times 0 = 0)$
7. $\forall x \forall y\,(x \times Sy = (x \times y) + x)$

理论Q

定义3.31（*Robinson Arithmetic*, Q）：

Robinson算术Q是一个语言为L_A的形式理论，它包含以上公理1-7以及经典的FOL

定理3.32（Q包含BA）：

Q可正确地判定每一个无量词的L_A语句。换句话说，如果无量词wff φ为真，则$Q \vdash \varphi$；如果无量词wff φ为假，则$Q \vdash \neg\varphi$

定理3.33（Q可以刻画"序"）：

Robinson算术中，"小于等于"关系可以用如下wff刻画：

$$\exists v\,(v + x = y)$$

Q是不完备的

Q看起来很强大，它能证明任意一个这样的公式：$0+\bar{n}=\bar{n}$，比如$0+\bar{1}=\bar{1}$

但它无法证明该公式的泛化（思考：FOL的常数概括定理失效了吗？），因此有如下定理：

定理3.34：$Q \nvdash \forall x\,(0+x=x)$

证明：

- 由于Q包含经典FOL，因此对任意L_A-语句φ，我们有$Q \vdash \varphi \Rightarrow Q \vDash \varphi$（FOL的可靠性）
- 那么证明思路如下：令语句$U \equiv \forall x\,(0+x=x)$，只需证明$Q \nvDash U$即可证明$Q \nvdash U$
  - 根据逻辑有效性的定义，我们只需找到一个L_A的结构（一个偏离常理的、非预期的“非标准”的解释），令Q中的公理全都为真，但U为假
- 接下来，我们定义一个新的数域$\mathbb{N}^*$，它除了包含$\mathbb{N}$中所有元素以外，还包含两个新常元$\{a, b\}$（你可以任意地解释它们，比如a代表哥德尔，b代表他的好朋友爱因斯坦）
- 我们仍然将0解释为“零”，将$S, +, \times$解释为“后继、加法、乘法”函数，且所有函数在常规自然数上的意义也是不变的

Q是不完备的

证明（Cont'd）：

- a, b不是自然数，所以我们必须对S, $+, \times$进行延拓（下面只考虑S和$+$，$\times$该如何延拓留作练习）
- 定义$\{a, b\}$上的后继函数如下：$Sa = a, Sb = b$，即它们的后继就是自己（*self-successor*）
- 容易验证，在这个新的解释下，后继函数仍然满足公理1-3
- 定义$\mathbb{N}^*$上的加法如下，其中$m, n \in \mathbb{N}$：

$+$	n	a	b
m	$m+n$	b	a
a	a	b	a
b	b	b	a

- 同样可以验证，在该解释下的加法满足公理4-5
- 然而，在该新解释下我们们有$0 + a \neq a$
- 根据全称量词的解释，U为假，因此Q无法逻辑蕴涵U（因为Q的公理全为真时U为假）
- 所以，根据FOL可靠性有Q $\nvDash$ U $\Rightarrow$ Q $\nvdash$ U

Q.E.D.

Q是不完备的

最终，我们可以得到如下定理：

定理3.35：Q是否定不完备的

- 该定理显然成立：它不仅无法证明U，还无法证明¬U（只需回到L_A的标准解释即可）
- Q看起来比较“弱”，但它已经足够刻画全部的能行可判定的数值属性了，因此根据我们的定义，它是“充分强”的算术理论
  - 不仅如此，它也是满足哥德尔定理的“最弱”的算术理论之一
- 不过，就像我们上面展示的这样：尽管它能够case-by-case地证明某个具体的数字是否满足一个可判定的数值属性，但它完全无法对这样的证明进行泛化
- 因此，哥德尔考虑的是更强的Peano算术

准备工作2：量词复杂性

原始递归函数

哥德尔编码

第一不完备性定理