离散数学（2023）作业 10 - 排列组合

离散数学教学组

Problem 1

由 m 个 A 和 n 个 B 构成序列，其中 m, n 为正整数，$m \le n$。如果要求每个 A 后面至少紧跟一个 B，问：有多少个不同的序列？

答案：
【方法一】先放 n 个 B，只有一种放法。然后在每个 B 之间的 n 个空档选择 m 个放 A，每个空格至多放一个 A，共 $\mathcal{C}(n, m)$ 种放法。
【方法二】先放 m 个 AB，只有一种放法。把 AB 看成隔板，m 个隔板共构成 $m+1$ 个空格，在空格中放入 $n-m$ 个 B，这时每个空格可放多个 B。因此适用不定方程求解模型：求 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{m+1} = n - m$ 的非负整数解个数。答案是 $\mathcal{C}(n-m+m+1-1, n-m) = \mathcal{C}(n, n-m) = \mathcal{C}(n, m)$。

Problem 2

将 20 个相同的小球放入 3 个带有编号的盒子中，第一个盒子至少有 2 个球且最后一个盒子不超过 10 个球，一共有多少种放置的方法？

答案：
设三个盒子分别为 A，B，C，且 a，b，c 为对应盒子中的小球数量。因为 $b = 20 - a - c$，所以需满足如下条件：$2 \le a \le 20$，$0 \le c \le 10$，$a + c \le 20$。
当 $2 \le a \le 10$ 且 $0 \le c \le 10$ 时，$a + c \le 20$ 可以被满足。这种情况下有 $9 * 11 = 99$ 种放置方法。
当 $a = 11$ 且 $c \in \{0, .., 9\}$ 时，$a + c \le 20$ 可以被满足。
当 $a = 12$ 且 $c \in \{0, .., 8\}$ 时，$a + c \le 20$ 可以被满足。
以此类推，最终结果为 $99 + 10 + 9 + ... + 2 + 1 = 154$。

Problem 3

在婚礼上摄影师从 10 个人中（包括新娘新郎）安排 6 个人在一排拍照。如需满足下述条件，分别有多少种安排方式？

1. 新娘必须在照片中
2. 新娘和新郎必须都在照片中
3. 新娘和新郎恰好有一个在照片中

答案：

1. 先安排新娘的位置，有 6 种安排方法，其余位置有 $9 * 8 * 7 * 6 * 5 = 15120$ 种可能，则共有 $6 * 15120 = 90720$ 种安排方式。
2. 先安排新娘的位置，有 6 种安排方式，再安排新郎的位置，有 5 种安排方式，其余位置有 $8 * 7 * 6 * 5 = 1680$ 种，则共有 $6 * 5 * 1680 = 50400$ 种。
3. 只有新娘有 $90720 - 50400 = 40320$ 种（或 $6 * 8 * 7 * 6 * 5 * 4$），则共有 $2 * 40320 = 80640$ 种。

Problem 4

用 3 个 1，2 个 2，5 个 3，这十个数字能构成多少个能被 2 整除的四位数?

答案:

- 十位为 2：$2 \times 2 = 4$ 种；
- 百位为 2：$2 \times 2 = 4$ 种；
- 千位为 2：$2 \times 2 = 4$ 种；
- 没有 2：$2 \times 2 \times 2 = 8$ 种。

总共 20 种。

Problem 5

计算 $(x + 2y - 4z)^6$ 的展开式中，x^3y^2z 项的系数。

答案: $\frac{6!}{3!2!1!} \times 1^3 \times 2^2 \times (-4) = -960$

Problem 6

设 n 为任一正整数，证明：$C(2n, n+1) + C(2n, n) = \frac{1}{2}C(2n+2, n+1)$。

答案:

$$\begin{aligned} C(2n, n+1) + C(2n, n) &= C(2n + 1\mathbf{fin} + 1) \\ &= \frac{1}{2}[C(2n+1, n+1) + C(2n+1, n+1)] \\ &= \frac{1}{2}[C(2n+1, n+1) + C(2n+1, n)] \\ &= \frac{1}{2}C(2n+2, n+1) \end{aligned}$$

Problem 7

如果有 8 种不同的课程可供选择，每个学生必须选择 5 门课程来完成他/她的学习计划。那么最少有多少名学生，使得不管他们如何选择，至少有 10 名学生的学习计划相同?

答案: 由题可知一共有 $\mathcal{C}(8, 5) = 56$ 种不同的学习计划，如果有 n 名学生，那么根据鸽笼原理至少有 $\lceil n/56 \rceil$ 名学生学习计划相同，则 n 满足 $\lceil n/56 \rceil \geq 10$，因此 $n = 9 \times 56 + 1 = 505$。

Problem 8

集合 $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$，证明：如果从集合 A 中随机选择 7 个数，那么总能找到其中的 2 个数相加为 15。

答案: 将给定的集合 A 分成六个子集：$\{2, 13\}, \{3, 12\}, \{4, 11\}, \{5, 10\}, \{6, 9\}, \{7, 8\}$。如果从集合 A 中抽取 7 个数字，那么至少有一个子集的元素全部被选中，每个子集元素的值相加为 15，因此命题得证。

Problem 9

使用鸽笼原理证明任何的有理数可以表示为一个整数加上一个有限或循环小数。

答案: 将有理数 $\frac{m}{n}$ 看作是在做除法，n 为除数，那么余数有 $0, 1, 2, \ldots, n-1$ 这 n 种可能性。

- 如果除尽了，则该有理数可以表示为一个整数加上一个有限小数；
- 如果除不尽，则余数有无穷多个。根据鸽巢原理，至少会有两次得到的余数相同。而得到相同的余数后，后面的步骤仍然是除 n，因此该有理数可以表示为一个整数加上一个循环小数。

综上得证。

Problem 10

证明：任一整数是平方数的必要条件是它有奇数个正因子。

答案: 设 $n^2 = p_1^{a_1} \ldots p_t^{a_t}$，其中 $a_1, \ldots, a_t$ 为偶数。显然，n^2 的正因子 m 必可表示为 $m = p_1^{b_1} \ldots p_t^{b_t}$，其中 $b_i \in \{0, 1, \ldots, a_i\}$。因此总共有 $\prod_{i=1}^{t}(a_i + 1)$ 中选择，又因为 a_i 为偶数，因此得证。