离散数学（2023）作业 11 - 离散概率

离散数学教学组

Problem 1

设 A 和 B 是两个事件，$P(A) = 0.5, P(B) = 0.3$ 且 $P(A \cap B) = 0.1$，求

1. $P(A \mid B)$
2. $P(B \mid A)$
3. $P(A \mid A \cup B)$
4. $P(A \mid A \cap B)$
5. $P(A \cap B \mid A \cup B)$

答案：

1. $P(A \mid B) = 0.1/0.3 = \frac{1}{3}$
2. $P(B \mid A) = 0.1/0.5 = \frac{1}{5}$
3. $P(A \mid A \cup B) = 0.5/(0.5 + 0.3 - 0.1) = \frac{5}{7}$
4. $P(A \mid A \cap B) = 1$
5. $P(A \cap B \mid A \cup B) = 0.1/(0.5 + 0.3 - 0.1) = \frac{1}{7}$

Problem 2

设 E_1 和 E_2 是两个事件，如果 $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$，就称 E_1 和 E_2 是独立的。如果把一枚硬币被抛掷 3 次时所有可能的结果构成一个集合，把这个集合的子集看做事件，确定下面的每一对事件是否是独立的。

1. E_1：第一次硬币头像向下；E_2：第二次硬币头像向上。
2. E_1：第一次硬币头像向下；E_2：在连续 3 次中有 2 次但不是 3 次头像向上。
3. E_1：第二次硬币头像向下；E_2：在连续 3 次中有 2 次但不是 3 次头像向上。

答案： 所有可能的结果：$(TTT), (TTH), (THT), (THH), (HTT), (HHT), (HTH), (HHH)$。

1. $P(E_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$，$P(E_2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$，$P(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = P(E_1)P(E_2)$。所以 E_1 和 E_2 是独立事件。
2. $P(E_1) = \frac{1}{2}$，$P(E_2) = \frac{3}{8}$，$P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{8} \neq P(E_1)P(E_2)$。所以 E_1 和 E_2 不是独立事件。
3. $P(E_1) = \frac{1}{2}$，$P(E_2) = \frac{3}{8}$，$P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{8} \neq P(E_1)P(E_2)$。所以 E_1 和 E_2 不是独立事件。

Problem 3

某工厂有甲乙丙三个车间，其产量比为 $5:3:2$，其良品率分别为 $0.95, 0.96, 0.98$。请问从三个车间的产品中任取一件，取到次品的概率。

答案： $P = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B_i|A_i) = 0.5 \times 0.05 + 0.3 \times 0.04 + 0.2 \times 0.02 = 0.041$

Problem 4

设离散型随机变量 $X \in \{1,2,3\}, Y \in \{1,2,3\}$ 的联合概率 $P(X \cap Y)$ 分布为：

(X, Y)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)
Pr	1/6	1/9	1/18	1/3	a	b

若 X, Y 相互独立，求 a, b。

答案： $a = \frac{2}{9}, b = \frac{1}{9}$

Problem 5

假如某诊所对病人的检测中有 4% 的人感染了禽流感病毒。此外，假定对给定的禽流感血液检测（检测结果为阳性不等价于感染病毒，即感染了禽流感的人也可能呈阴性，没有感染的人也可能呈阳性），感染了禽流感的人中有 97% 的人禽流感检测呈阳性，没感染禽流感的人中有 2% 的人禽流感检测呈阳性。那么，下列概率是多少？

1. 禽流感检测呈阳性的人真的感染了禽流感病毒。
2. 禽流感检测呈阳性的人没有感染禽流感病毒。
3. 禽流感检测呈阴性的人感染了禽流感病毒。
4. 禽流感检测呈阴性的人没有感染禽流感病毒。

答案： 记 E：检测呈阳性，F：感染了禽流感。

1. $P(F \mid E) = \frac{P(E|F)*P(F)}{P(E|F)*P(F)+P(E|\bar{F})*P(\bar{F})} = \frac{0.97*0.04}{0.97*0.04+0.02*0.96} \approx 0.669$
2. $P(\bar{F} \mid E) = \frac{P(E|\bar{F})*P(\bar{F})}{P(E|\bar{F})*P(\bar{F})+P(E|F)*P(F)} = \frac{0.02*0.96}{0.02*0.96+0.97*0.04} \approx 0.331$
3. $P(F \mid \bar{E}) = \frac{P(\bar{E}|F)*P(F)}{P(\bar{E}|F)*P(F)+P(\bar{E}|\bar{F})*P(\bar{F})} = \frac{0.03*0.04}{0.03*0.04+0.98*0.96} \approx 0.0013$
4. $P(\bar{F} \mid \bar{E}) = \frac{P(\bar{E}|\bar{F})*P(\bar{F})}{P(\bar{E}|\bar{F})*P(\bar{F})+P(\bar{E}|F)*P(F)} = \frac{0.98*0.96}{0.03*0.04+0.98*0.96} \approx 0.9987$

Problem 6

当一个均匀的骰子被掷 10 次时，出现 6 点的次数的方差是多少？

答案： 设随机变量 X 是骰子抛掷十次的结果，则 $V(x) = n(p\text{–}p^2) = 10 \times (\frac{1}{6}\text{–}(\frac{1}{6})^2) = \frac{25}{18}$。

Problem 7

一个工业产品以 20 个产品为一个批次出货。由于测试每件产品确定是否有缺陷比较昂贵，因此制造商常常选择抽样测试。抽样测试是为了尽量减少运送给顾客的次品数量，要求从每批出货中抽取 5 件产品，并且如果观察到一个以上的次品则拒绝批次（如果批次被拒绝，其中的每件产品都会被检测）。如果批次中包含 4 件次品，它会被拒绝的概率是多少？样本大小为 5 的采样中次品的预期数量是多少？样本大小为 5 的采样中次品数量的方差是多少？

答案： 设 Y 等于样本中次品的数量。那么 $N = 20, r = 4, n = 5$。如果 $Y = 2, 3, 4$，那么

$$\begin{aligned} P(\text{Reject}) &= P(Y \geq 2) \\ &= P(Y=2) + P(Y=3) + P(Y=4) \\ &= 1\text{–}P(Y=0)\text{–}P(Y=1) \\ &= 1 - \frac{C(4,0)*C(16,5)}{C(20,5)} - \frac{C(4,1)*C(16,4)}{C(20,5)} \\ &= 1 - 0.2817 - 0.4696 = 0.2487 \end{aligned} \tag{1}$$

样本大小为 5 的采样中次品的预期数量为 $\frac{5 \times 4}{20} = 1$，方差为 $5 \times \frac{4}{20} \times \frac{20-4}{20} \times \frac{20-5}{20-1} = 0.632$（超几何分布）。

Problem 8

俄罗斯同胞喜欢玩一个叫轮盘赌（*Russian roulette*）的游戏：假设左轮手枪有六个弹膛，仅在其中放入一发子弹。若有 $n\,(n \leq 6)$ 个人轮流开枪，直到子弹射出为止，将子弹射出者获胜。试问：这个游戏是否公平，即是否每一个参与的玩家获胜概率相等？请回答 $n = 2, 3, 4, 5, 6$ 的每个情形。

答案： 当 $n = 2, 3, 6$ 的时候，是公平的。当 $n = 4, 5$ 的时候，将会有人出现少射一轮的情形，因此不公平。

Problem 9

某人爱说谎，三句只能信两句。他扔了一个骰子，报告说是“四点”。问这个骰子真是四点的概率是多少？

答案： 令骰子是四点为事件 F，某人报告四点为事件 E。则 $P(F) = \frac{1}{6}, P(\bar{F}) = \frac{5}{6}, P(E \mid F) = \frac{2}{3}, P(E \mid \bar{F}) = \frac{1}{15}$。

$$P(F \mid E) = \frac{P(E \mid F) \times P(F)}{P(E)} = \frac{2}{3}$$

Problem 10

试构造适当的概率模型证明：从正整数中随机取 2 个数，它们互素的概率为 $\frac{6}{\pi^2}$。

「**提示 1：** $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$。」

「**提示 2：** 不大于自然数 n 且与 n 互素的正整数的个数为 $\phi(n) = n \cdot \Pi_{p|n}(1 - \frac{1}{p})$，其中 $p|n$ 指 p 整除 n。」

答案：

【方法一】

设 $p_1, p_2, p_3, \ldots$ 是从小到大排列的全体素数，即 $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$。从正整数中任意取一个数，它能被某一素数 p_i 整除对概率为 $\frac{1}{p_i}$。

从正整数中任意取两个数，它们同时都能被素数 p_i 整除，即它们有素数公因子 p_i 的概率为 $\frac{1}{p_i} \cdot \frac{1}{p_i} = \frac{1}{p_i^2}$。因此，它们没有素数公因子 p_i 的概率为 $1 - \frac{1}{p_i^2}$。

所以，任取两个正整数，它们没有任何素数公因子，即这两个正整数互素的概率为：

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_i^2}\right) &= \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^2}}} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{p_i^2} + \frac{1}{p_i^4} + \cdots\right)} \\
&= \frac{1}{(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots)(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \cdots)(1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \cdots)(1 + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} + \cdots)\cdots} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2^2 \cdot 5^2} + \cdots} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots} \\
&= \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\frac{\pi^2}{6}} = \frac{6}{\pi^2}
\end{aligned}$$

【方法二】

设任意两个自然数为 a, b，它们互素的概率为 p，设一自然数 k，则 k 为 a, b 的公因子的概率为 $\frac{1}{k^2}$（即 a, b 同时是 k 的倍数的概率）。

令 $a = m \cdot k, b = n \cdot k$，则 m, n 互素的充分必要条件为：k 是 a, b 的最大公因子。由于在 k 是 a, b 的公因子的前提下，m, n 也等价于两个任意自然数，所以它们互素的概率也为 p，即在 k 是 a, b 公因子的前提下，k 是 a, b 最大公因子的概率为 p。由于 k 不是 a, b 公因子的情况下，k 是最大公因子的概率为零。所以 k 是 a, b 最大公因子的总概率为 $P(k\text{是}a,b\text{公因子}) \cdot P(k\text{是}a,b\text{最大公因子} \mid k\text{是}a,b\text{公因子}) = \frac{p}{k^2}$。

对 k 取全部自然数，上述概率之和为必然概率 1。所以有 $1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p}{k^2}$。上式右端为 $p \cdot \frac{\pi^2}{6}$，所以求得 $p = \frac{6}{\pi^2}$。