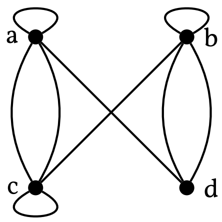
离散数学（2023）作业 22 - 图的连通性

离散数学教学组

Problem 1

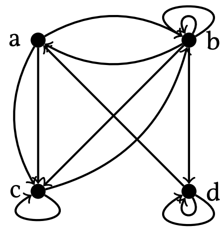
用邻接矩阵表示左侧的图；并画出右侧邻接矩阵表示的有向图。



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

答案：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Problem 2

具有 $2, 3, 4$ 个顶点的非同构的简单图分别有多少个？

答案： $2, 4, 11$

Problem 3

具有 4 个顶点的非同构简单图中，有多少个

1. 包含 C_3？
2. 无孤立点？
3. 是二部图？

答案：

1. 4
2. 7
3. 7

Problem 4

G 的围长是指 G 中最短回路的长；若 G 没有回路，则定义 G 的围长为无穷大。证明：围长为 4 的 $k-$ 正则图至少有 $2k$ 个顶点，且恰有 $2k$ 个顶点的这样的图（在同构意义下）只有一个。

答案： 设 u, v 是 G 中相邻顶点，$N(u)$ 和 $N(v)$ 分别代表 u 和 v 的邻居构成的集合，则 $N(u)$ 和 $N(v)$ 不相交，否则 G 的围长为 3，产生矛盾。因此，G 至少有 $2(k-1)+2$ 个顶点。

因为是 k 正则图，每个顶点应该连接 k 个顶点，易知 $N(u)$ 和 $N(v)$ 内部不能相连，否则围长为 3, 因此将 $N(u) \setminus \{v\}$ 中的 $k-1$ 个顶点分别和 $N(v) \setminus \{u\}$ 中的 $k-1$ 个顶点相连，这样每个顶点的度数都为 k，即可得到 $2k$ 个顶点的围长为 4 的图，此时 $G - \{u, v\}$ 是一个完全二部图，这样的图（在同构意义下）只有一个，加上 $\{u, v\}$ 后在同构意义下依然唯一。

Problem 5

证明：简单图 G 是二部图，当且仅当 G 没有包含奇数条边的简单回路。

答案：

- 必要性：设 G 是偶图，设两个不相交的非空顶点集合为 A 和 B。若 G 存在回路 c，设 c 的起点属于 A，则从 A 出发时通路在奇数步后停在 B，在偶数步后停在 A。所以回路 c 的长度必为偶数。
- 充分性：若所有的回路长度都为偶数，要证图 G 是偶图。假设 G 是连通图，若不连通，则每次仅考虑一个连通分支。设 v 是图的一个顶点，设 A 是有从 v 出发奇数长度通路的所有顶点的集合，设 B 是有从 v 出发偶数长度通路的所有顶点的集合。由于这个分支是连通的，所以每个顶点都属于 A 或 B。没有顶点同时属于 A 和 B，若假设存在一个顶点 v' 同时属于 A 和 B，则从 v 到 v' 的奇长度通路，加上 v' 到 v 的偶长度通路，就得到一个奇回路，与前提矛盾。因此，顶点集合划分成两个部分。要证每条边的端点都在不同的部分中，假设 (x, y) 是一条边，$x \in A$，则从 v 到 x 的奇长度通路加上 (x, y) 就产生从 v 到 y 的偶长度通路，所以 $y \in B$。同理可证 $x \in B$ 的情况。综上所述可得 G 是二部图。

Problem 6

证明：$\kappa(G) = 1$ 的 r-正则图 G，若 $r > 1$，总满足 $\lambda(G) \leq \frac{r}{2}$。

答案： 考虑 G 的割点 v，$G - v$ 至少有 2 个连通分量 C_1, C_2，其中至少一个与 v 相连的边数量不超过 $\frac{r}{2}$，这些边构成 G 的一个割边集，于是 $\lambda(G) \leq \frac{r}{2}$。

Problem 7

证明：G 是 2-边连通图当且仅当 G 中任意两个顶点之间至少有两条不含公共边的通路。
「**提示：**证明过程中可使用 Whitney 定理，但需注意和本题的差异。」

答案：

- 若 G 中任意两顶点都至少有两条边不重道路连接，显然对任意 $e \in E(G)$，$G - e$ 是连通的，故 G 为 2-边连通的。
- 若 G 是 2-边连通的，则 G 无割边。把 G 分解成块，块与块之间以 G 中的割点互相连接。设 u, v 是 G 中任意两顶点。分两种情况：
  - 若 u, v 同属于 G 的某一块，则由 Whitney 定理知，结论成立。
  - 若 u, v 属于 G 的不同块，设 $B_1, B_2, ..., B_n$ 是 G 的块，其中块 B_i 与块 B_{i+1} 以割点 V_i 相互连接且 $|v(B_i)| \geq 3$。不妨设 $u \in B_1$，$v \in B_n$。由之前的证明可知，在 B_1 中存在两条由 u 到 v_1 的不相交的路 P_{11}, P_{12}；同理在 B_i 中存在两条由 v_{i-1} 到 v_i 的不相交的路 P_{i1}, P_{i2}；在 B_n 中存在两条由 v_{n-1} 由 v 的不相交的路 P_{n1}, P_{n2}。于是我们找到两条 u 到 v 的边不相交的路：$P_{11} \cup P_{21} \cup ... \cup P_{n1}$ 和 $P_{12} \cup P_{22} \cup ... \cup P_{n2}$。

Problem 8

证明：若 G 是 k-连通图，从 G 中任意删除 k 条边，最多得到 2 个连通分支。

答案： 证明：首先，假设图的边连通度为 r，有 $r \geq k$；其次，易知一条边最多连接两个连通分支，任意去掉一条边，只可能使连通分支数增加 0 个或者 1 个。考虑到边连通度 $r \geq k$，因此删除任意 $k-1$ 条边后依然连通，即 1 个连通分支。删除第 k 条边之后，原图最多为 2 个连通分支。

Problem 9

证明：设 G 是一个简单图，k 是一个自然数，若 $\delta(G) \geq \frac{v+k-2}{2}$, 则 G 是 k-连通的。

答案： 用反证法。假如 G 不是 k-连通的，则 G 的连通 $\kappa < k$，即存在 G 的点割集 S，使得 $|S| < k$, 且 $G-S$ 不连通。因 $G-S$ 有 $v-|S|$ 个顶点，且至少有两个连通分支，故必有 $G-S$ 的某个连通分支 G' 含有不超过 $\frac{v-|S|}{2}$ 个顶点。注意到 G' 中任一个顶点只可能与 G' 内的点及 S 中的点相邻, 因而其在 G 中的顶点度 $\leq \frac{v-|S|}{2} - 1 + |S| = \frac{v+|S|-2}{2}$。结合 $|S| < k$，这意味着 $\delta(G) \leq \frac{v+|S|-2}{2} < \frac{v+k-2}{2}$，与定理条件矛盾。证毕。

Problem 10

设图 G 顶点数为 n，边数为 m，试证明：若 $m > C_{n-1}^2$，则 G 为连通图。

答案： 证明：假设 G 不连通，有 2 个或以上连通分支。设其中一个连通分支中顶点数为 $n_1 \geq 1$，其余顶点数为 $n_2 \geq 1$，$n_1 + n_2 = n$，$m \leq C_{n_1}^2 + C_{n_2}^2$。可以验证：$C_{n_1}^2 + C_{n_2}^2 \leq C_{n-1}^2$，即 $n_1(n_1-1) + n_2(n_2-1) \leq (n-1)(n-2)$，验证中用到关键等式：$0 \leq (n1-1)(n2-1)$，因此 $m \leq C_{n-1}^2$，矛盾。所以 G 为连通图。