作业 09 - 基本计数技术

离散数学教学组

Problem 1

长度为 $n(n>5)$ 且以 000 开始或以 111 结尾的二进制串有多少个?

答案: $2^{n-3}+2^{n-3}-2^{n-6}=15*2^{n-6}$

Problem 2

从 1000 到 9999 之间，包含多少个正整数

1. 被 9 整除?
2. 被 5 或 7 整除?
3. 是偶数?
4. 不被 5 也不被 7 整除?
5. 有不同的十进制数字?
6. 被 5 整除但不被 7 整除?
7. 不被 3 整除?
8. 被 5 和 7 整除?

答案:

1. 1000
2. 被 5 整除的有 1800 个，被 7 整除的有 1286 个，被 35 整除的有 257 个，答案为 $1800+1286-257=2829$
3. 4500
4. $9000-2829=6171$
5. $9*9*8*7=4536$
6. 即被 5 整除且不被 35 整除的正整数个数，答案为 $1800-257=1543$
7. 6000
8. 即被 35 整除的正整数个数，答案为 257

Problem 3

给定 $A=\{1,2,3,4,5\}$，集合 A 的有多少个子集，满足其中所有元素的乘积能被 10 整除?

答案: 必须要有 5，和（2 或 4），共 12 种。

Problem 4

长度为 12 且不包含“11”子串的二进制串有多少个?

答案: 由题知二进制串最多包含 6 个 11，且包含 k 个 11 的二进制串的集合 A_k 的元素个数为 $|A_k|=\mathcal{C}(13-k,13-2k)$，则结果为

$$\mathcal{C}(13,13)+\mathcal{C}(12,11)+\mathcal{C}(11,9)+\mathcal{C}(10,7)+\mathcal{C}(9,5)+\mathcal{C}(8,3)+\mathcal{C}(7,1)=377$$

Problem 5

设 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 和 x_6 是正整数，方程 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6<32$ 有多少个解？

答案： $\mathcal{C}(31,6)=736281($ 考虑 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=32)$

Problem 6

由一个正 n 边形的顶点构成的三角形有多少个？如果正 n 边形的边不能是构成三角形的边，这样的三角形又有多少个？

答案： 从 n 边中选三点的情况有 $\mathcal{C}(n,3)=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ 种。
如果三角形的边是正 n 边形的边有两种情况，第一种是有一条边是正 n 边形的边，这种情况有 $(n-4)\times n$ 种；第二种是有两条边是正 n 边形的边，这种情况有 n 种。
则三角形的边不是正 n 边形的边的情况有 $\mathcal{C}(n,3)-(n-4)n-n=\frac{n(n-4)(n-5)}{6}$ 种。

Problem 7

使用数学归纳法证明容斥原理。

答案：

- 基本步骤：$n=2$，显然公式成立。
- 归纳步骤：假设 $n=k$ 时成立。当 $n=k+1$ 时，公式可写成

$$|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k\cup A_{k+1}|=|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k|+|A_{k+1}|-|(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k)\cap A_{k+1}| \tag{1}$$

又因为

$$\begin{aligned}&|(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k)\cap A_{k+1}|\\=&|(A_1\cap A_{k+1})\cup(A_2\cap A_{k+1})\cup\ldots\cup(A_k\cap A_{k+1})|\\=&\sum_{i=1}^{k}|A_i\cap A_{k+1}|-\sum_{1\le i\le j\le k}|A_i\cap A_j\cap A_{k+1}|+\ldots+(-1)^{k+1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{k+1}|\end{aligned} \tag{2}$$

且

$$|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k|=\sum_{i=1}^{k}|A_i|-\sum_{1\le i\le j\le k}|A_i\cap A_j|+\ldots+(-1)^{k+1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k| \tag{3}$$

将式 (2)，式 (3) 带入式 (1) 中可得 $|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k\cup A_{k+1}|=\sum_{i=1}^{k+1}|A_i|-\sum_{1\le i\le j\le k+1}|A_i\cap A_j|+\ldots+(-1)^k|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{k+1}|$。

综上，由数学归纳法，得证。

Problem 8

有 6 个集合，如果知道其中任 3 个集合都是不相交的，根据容斥原理写出关于这 6 个集合并集元素个数的显式公式。

答案：

$$\begin{aligned}&|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5\cup A_6|=\\&\quad|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|+|A_5|+|A_6|\\&\quad-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_1\cap A_4|-|A_1\cap A_5|-|A_1\cap A_6|\\&\quad-|A_2\cap A_3|-|A_2\cap A_4|-|A_2\cap A_5|-|A_2\cap A_6|\\&\quad-|A_3\cap A_4|-|A_3\cap A_5|-|A_3\cap A_6|\\&\quad-|A_4\cap A_5|-|A_4\cap A_6|\\&\quad-|A_5\cap A_6|\end{aligned}$$

Problem 9

考虑用红，蓝两种颜色着色 3×3 的方格棋盘，在允许图形翻转和旋转的情况下，一共有多少种不同的着色方案?

答案: 本题需要使用 Burnside 计数定理 $L = \frac{1}{|G|}\Sigma_{g\in G}|D(g)|$。其中，$L$ 表示总方案数，G 表示所有等价变换组成的集合，$D(g)$ 表示置换后本质未发生改变的方案个数。不考虑旋转和翻转，共有 $2^9 = 512$ 种着色方案。接下来考虑各种置换:

- 旋转 0 度没有改变状态的方案: $2^9 = 512$ 种
- 旋转 90 度没有改变状态的方案: $2^3 = 8$ 种
- 旋转 180 度没有改变状态的方案: $2^5 = 32$ 种
- 旋转 270 度没有改变状态的方案: $2^3 = 8$ 种
- 上下翻转没有改变状态的方案: $2^6 = 64$ 种
- 左右翻转没有改变状态的方案: $2^6 = 64$ 种
- 左上右下斜向翻转没有改变状态的方案: $2^6 = 64$ 种
- 左下右上斜向翻转没有改变状态的方案: $2^6 = 64$ 种

根据 Burnside 计数定理，共有 $(512 + 8 + 32 + 8 + 64 + 64 + 64 + 64)/8 = 102$ 种不同的着色方案。

Problem 10

考虑一个 $N \times N$ 网格，其中的每一个单元格可以取值 $+1$ 或 -1。我们称这种网格为*二进制网格 (Binary grid)*。任何行的*行乘积 (row product)* 都被定义为该单行中所有元素的乘积。同样，一列的*列乘积 (column product)* 被定义为该单个列中所有元素的乘积。如果 N 行的行乘积中，有且只有一个结果为 -1，而 N 列的列乘积中，有且只有一个结果为 -1，则该 $N \times N$ 的二元网格称为魔术网格。换句话说，魔术网格要求其他 $N-1$ 个行乘积全部为 $+1$，其他 $N-1$ 个列乘积应也全部为 $+1$。试计算所有 $N \times N$ 的网格中，魔术网格的数量。

答案:

- 确定要使其行列乘积为 -1 的行和列。可以有 n 种方式选择行，对于选定的每一行，可以有 n 种方式选择列。总共 n^2 种方式。
- 接下来，随机填充剩余的 $(n-1)^2$ 个单元格（都不属于先前选择的行或列）。这可以有 $2^{(n-1)^2}$ 种方式。
- 现在，我们得到一个 $N \times N$ 的网格, 所有行和列乘积都已知。此时，填充第一步选中的行和列。显然，对于该行和列中的元素，是可以唯一地确定要插入的数字的符号。

根据基本计数原理，魔方格子总数为 $n^2 \times 2^{(n-1)^2}$。