作业 08 - 归纳与递归

离散数学教学组

Problem 1

求出阿克曼函数值 $A(3,4)$。阿克曼函数的定义为：

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{m} = 0 \\ A(m-1,1) & \text{m} > 0\text{,n} = 0 \\ A(m-1,A(m,n-1)) & \text{m} > 0\text{,n} > 0 \end{cases}$$

答案: $A(3,4) = 125$

Problem 2

给出下述集合的递归定义：

1. 正偶数集合
2. 整系数多项式的集合
3. 3 的正整数次幂的集合

答案:

1. 正偶数集合 S 可以定义为
   - 基础步骤：$2 \in S$
   - 递归步骤：若 $x \in S$，则 $x + 2 \in S$
2. 整系数多项式的集合 S 可以定义为
   - 基础步骤：S 包含整数集合及所有可能的变元，即 $Z \subset S, \{x, y, z, ...\} \subset S$
   - 递归步骤：若 $a, b, c \in S$，则 $ab + c \in S$
3. 3 的正整数次幂的集合 S 可以定义为
   - 基础步骤：$3 \in S$
   - 递归步骤：若 $x \in S$，则 $3x \in S$

Problem 3

设 $P(n)$ 是命题：$n! < n^n$，其中 n 是大于 1 的整数。

1. 命题 $P(2)$ 是什么?
2. 证明 $P(2)$ 为真，完成基础步骤的证明。
3. 归纳假设是什么?
4. 在归纳步骤中你需要证明什么?
5. 完成归纳步骤。
6. 解释为什么只要 n 是一个大于 1 的整数，则上述步骤就可以证明不等式为真。

答案：

1. $2! < 2^2$。
2. 命题 $2! < 2^2$ 的不等式左侧值为 2，右侧值为 4，$2 < 4$，故 $P(2)$ 为真。
3. 对任意大于 1 的整数 k，$P(k)$ 为真。
4. 在归纳步骤中，需要证明对任意大于 1 的整数 k，如果 $P(k)$ 为真，那么 $P(k+1)$ 为真。
5. 由归纳假设，对任意大于 1 的整数 k，$k! < k^k$。不等式两边同时乘以 $k+1$，得 $(k+1)! < (k+1)k^k$。而 $(k+1)k^k < (k+1)(k+1)^k = (k+1)^{k+1}$，因此 $P(k+1)$ 成立。
6. 因为我们已经证明了 $P(2)$，又证明了对于大于 1 的整数 k，$\forall k\,(P(k) \to P(k+1))$，由正整数集合的良序性公理（或数学归纳法），结论可以推广到所有大于 1 的正整数。

Problem 4

证明 $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$，其中 n 为正整数，$f(n)$ 为斐波那契函数。

答案： 证明：

- 基础步骤：$n = 1$ 时显然成立，因为 $f_2 f_0 - f_1^2 = 1 \cdot 0 - 1^2 = -1 = (-1)^1$。
- 归纳步骤：假设 $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$ 成立，

$$\begin{aligned} f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2 &= (f_{n+1} + f_n)\, f_n - f_{n+1}^2 \\ &= f_{n+1}f_n + f_n^2 - f_{n+1}^2 \\ &= -f_{n+1}\,(f_{n+1} - f_n) + f_n^2 \\ &= -f_{n+1}f_{n-1} + f_n^2 \\ &= -\left(f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2\right) \\ &= -(-1)^n = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

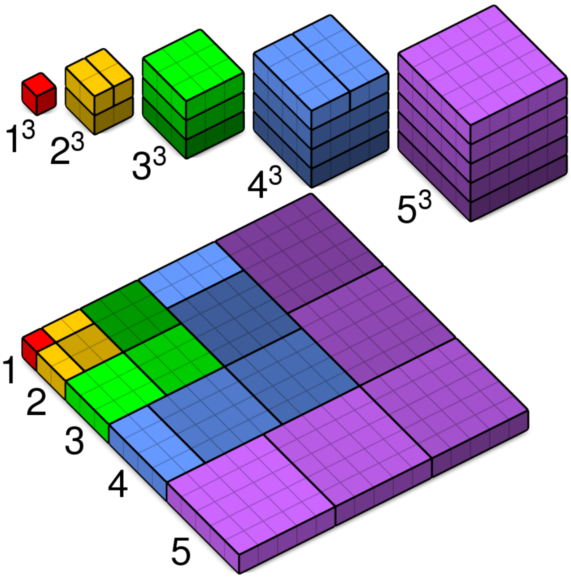
根据数学归纳法知，命题成立。

Problem 5

证明（亦可不用数学归纳法）：

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

答案： 【证法一】



【证法二】设 $P(n)$ 表示命题：$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$。

- 基础步骤：$P(1)$ 显然成立。
- 归纳步骤：假设 $P(n)$ 成立，可以推出 $\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3$，即 $P(n+1)$ 成立。

根据数学归纳法知，命题成立。

Problem 6

用数学归纳法证明平面上过同一点的 n 条直线将平面分为 $2n$ 个区域。

答案： 设 $P(n)$ 表示命题：平面上过同一点的 n 条直线将平面分为 $2n$ 个区域。

- 基础步骤：$P(1)$ 为真，因为 1 条直线可以将平面分为 2 个区域。
- 归纳步骤：假设 $P(k)$ 为真，即过同一点的 k 条直线将平面分为 2 个区域。在归纳假设的情形的基础上，添加一条过交点的直线，恰将原来的 2 个区域分为了 4 个区域。因此共有 $2k+2 = 2(k+1)$ 个区域，$P(k+1)$ 为真。

根据数学归纳法知，命题成立。

Problem 7

一个字符串的逆是字符串内字符的反序排列，记为 w^R. 如 $w = 1010, w^R = 0101$。

1. 给出 w^R 的递归定义（假设空字符串为 λ）。
2. 用结构归纳证明 $(w_1w_2)^R = w_2^R w_1^R$。

答案：

1. 基础步骤：$\lambda^R = \lambda$；递归步骤：令 $w = ux$，其中 x 为最右边的字符，u 为除了 x 之外的字符串，$(ux)^R = xu^R$。
2. 设命题 $P(w_1w_2)$ 为：$(w_1w_2)^R = w_2^R w_1^R$：
   - 基础步骤：$(w_1\lambda)^R = w_1^R = \lambda w_1^R = \lambda^R w_1^R$。
   - 归纳步骤：假设命题 $P(w_1w_2)$ 为真。$(w_1w_2x)^R = x(w_1w_2)^R = xw_2^R w_1^R = (w_2x)^R w_1^R$。

   综上，当 $P(w_1w_2)$ 为真时，可推出 $P(w_1w_2a)$ 为真，由结构归纳法，命题得证。

Problem 8

1. 对于表示十进制数字的非空字符串 s，给出计算 s 中最小数字的函数 $m(s)$ 的递归定义。
2. 用结构归纳法证明 $m(s \cdot t) = \min(m(s), m(t))$。（其中 $s \cdot t$ 表示位串 s 和位串 t 的连接）

答案：

1. 基础步骤：$m(a) = a$（a 为表示一个数字的单个字符）；递归步骤：$m(s \cdot a) = \min(m(s), a)$。
2. 设命题 $P(st)$ 为：当 s, t 均为十进制数字的非空字符串时，$m(s \cdot t) = \min(m(s), m(t))$。
   - 基础步骤：$m(\lambda \cdot a) = \min(m(\lambda), m(a)) = a$（$a$ 为表示一个数字的单个字符，λ 表示空串），此时 $P(\lambda a)$ 为真。
   - 归纳步骤：假定命题 $P(xy)$ 为真，即 $m(x \cdot y) = \min(m(x), m(y))$ 成立。根据 m 函数的递归定义：

   $$m(x \cdot y \cdot a) = \min(m(x), m(y), a) = \min(m(x), m(y \cdot a))$$

   综上，当 $P(xy)$ 为真时，可推出 $P(xya)$ 为真，由结构归纳法，命题得证。

Problem 9

正整数 n 的拆分是把 n 写成正整数之和的方式。例如，$7 = 3 + 2 + 1 + 1$ 是 7 的拆分。设 P_m 等于 m 的不同分拆的数目，其中和式里项的顺序无关紧要，并设 $P_{m,n}$ 是用不超过 n 的正整数之和来表示 m 的不同方式数。

1. 证明：$P_{m,m} = P_m$。
2. 证明：下面的 $P_{m,n}$ 的递归定义是正确的。

$$P_{m,n} = \begin{cases} 1 & \mathrm{m = 1} \\ 1 & \mathrm{n = 1} \\ P_{m,m} & \mathrm{m < n} \\ 1 + P_{m,m-1} & \mathrm{m = n > 1} \\ P_{m,n-1} + P_{m-n,n} & \mathrm{m > n > 1} \end{cases}$$

3. 用这个递归定义求出 5 和 6 的拆分数。

答案:

1. m 无法用于大于 m 的数参与分拆，因此 $P_{m,m} = P_m$。
2. 对定义逐条证明：
   - $m = 1$ 时，只有一种拆分方法，即 1 本身，因此 $P_{1,n} = 1$。
   - $n = 1$ 时，只有一种拆分方法，即拆成 m 个 1 的和，因此 $P_{m,1} = 1$。
   - $m < n$ 时，由第一问证明可知，此时 n 的大小不影响结果，因此等于 $P_{m,m}$。
   - $m = n > 1$ 时，存在 $m = (m-1) + 1$ 这种拆分方式，以及其他 $P_{m,m-1}$ 种拆分方式，因此等于 $1 + P_{m,m-1}$。
   - $m > n > 1$ 时，存在不含 n 的拆分 $P_{m,n-1}$ 和包含 n 的拆分 $P_{m-n,n}$ 两种情况, 因此等于 $P_{m,n-1} + P_{m-n,n}$。
3. $P_5 = 7, P_6 = 11$。

Problem 10

1. 利用数学归纳法证明：
   (i) $\sum_{k=1}^{n} k^1 = \frac{n(n+1)}{2}$.
   (ii) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. 尝试说明：$\sum_{k=1}^{n} k^m$ 是关于 n 的 $m + 1$ 阶多项式 (即，式中 n 的最高次幂为 $m + 1$)。

答案:

1. 略，写清基础步骤与归纳步骤。
2. 由递归式

$$\begin{aligned}(n+1)^{m+1} &= \sum_{k=0}^{n}(k+1)^{m+1} - \sum_{k=0}^{n} k^{m+1} \\ &= \binom{m+1}{1}\sum_{k=0}^{n} k^m + \binom{m+1}{2}\sum_{k=0}^{n} k^{m-1} + \cdots\end{aligned}$$

   因此，有

$$\binom{m+1}{1}\sum_{k=0}^{n} k^m = (n+1)^{m+1} - \binom{m+1}{2}\sum_{k=0}^{n} k^{m-1} - \binom{m+1}{3}\sum_{k=0}^{n} k^{m-2} + \cdots$$