离散数学（2023）作业 18 - 群论导引

离散数学教学组

Problem 1

判断下列集合关于指定的运算是否构成半群和群：

1. a 是正实数，$G = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$，运算是普通乘法
2. $\mathbb{Q}^+$ 为正有理数，运算是普通乘法
3. $\mathbb{Q}^+$ 为正有理数，运算是普通加法
4. 一元实系数多项式的集合关于多项式的加法
5. 一元实系数多项式的集合关于多项式的乘法
6. $U_n = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge x^n = 1\}$，$n$ 为某个给定正整数，$\mathbb{C}$ 为复数集合，运算是复数乘法

「**注：**(4)(5) 两小题中，形如 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，只有 x 一个变元，系数均为实数的多项式，叫做一元实系数多项式。」

Problem 2

设 $i = \sqrt{-1}$，$S = \{1, -1, i, -i\}$，证明 $\langle S, * \rangle$ 构成群，其中 $*$ 为复数域上的乘法运算。

Problem 3

设 $(G, *)$ 是一个群，$x \in G$。定义：$a \circ b = a * x * b, \forall a, b \in G$，证明 $(G, \circ)$ 也是群。

Problem 4

证明：设 a 是群 $\langle G, \circ \rangle$ 的幂等元，则 a 一定是单位元。

Problem 5

证明：对任意群 G 以及 $g, h \in G$ 我们有 $(gh)^{-1} = h^{-1} g^{-1}$。对于正整数 n，给出 $(g_1 g_2 ... g_n)^{-1}$ 的一个形式。

Problem 6

设 G 是一个群，$a, b \in G$ 且 $(ab)^2 = a^2 b^2$。证明：$ab = ba$。

Problem 7

设 G 是一个群，并且 $|G|$ 为偶数，证明 G 中必定存在一个元素 g 满足 $g \neq e$ 且 $g = g^{-1}$。

Problem 8

设 G 是一个有限群，证明：G 中使得 $x^3 = e$ 的元素 x 的个数是奇数。

Problem 9

假定集合 S 上定义的二元操作 $\circ$ 满足结合律。我们知道二元操作只定义在两个元素上，当参与运算的元素超过两个时，会有很多种不同的顺序，比如，假定 $a, b, c, d \in S$，那么可能会有的情况有

$$(a \circ b) \circ (c \circ d), (a \circ (b \circ c)) \circ d, a \circ ((b \circ c) \circ d)$$

等等，注意到**每一步只进行一次运算**。证明：无论我们怎么放置括号，这种嵌套运算的最终结果是不变的。即证明对 $s_1 s_2 ... s_n \in S$，任意括号嵌套顺序下的结果都等同于 $((...((s_1 \circ s_2) \circ s_3)...) \circ s_n)$。
「**提示：**使用数学归纳法，基础情况是 $n = 2$，手动尝试一下从 $n = 4$ 到 $n = 5$ 的情况。」

Problem 10

我们知道，在整数集合 Z 上的同余关系是一个等价关系。我们用记号 $[a]_n$ 表示 a 的模 n 同余类，即

$$b \in [a]_n \Leftrightarrow a \equiv b \pmod n$$

模 n 同余类构成的集合是一个重要的概念，有许多记法，例如 $\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 等。例如 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0]_2, [1]_2\}$。对于正整数 n，我们记扩展的加法为

$$[a]_n + [b]_n := [a + b]_n$$

易证 $\mathbb{Z}_n$ 在扩展加法下构成一个群。类似地，扩展乘法为

$$[a]_n \times [b]_n := [a \times b]_n$$

现在令 $\mathbb{Z}_n^* := \{[m]_n \in \mathbb{Z}_n | \gcd(m, n) = 1\}$，证明：$\mathbb{Z}_n^*$ 在扩展乘法下构成一个群。