微积分 II (第一层次)期中试卷 (2019.4.27)

一、计算下列各题（每题6分，共48分）

1. 计算极限 $I_1 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2+y^3} - \mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e}^{y^3} + 1}{\tan(x^4+y^4)}$.

2. 设函数 $z = f\big(xy,\ yg(x)\big)$，函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$. 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{(x,y)=(1,1)}$.

3. 求函数 $u = x^2 + \mathrm{e}^{yz} + \sin(z-x)$ 在点 $(1,-2,1)$ 处沿 $\vec{l} = (2,1,1)$ 的方向导数.

4. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，交换 $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x$ 的积分顺序.

5. 计算曲线积分 $I_3 = \displaystyle\oint_C (\mathrm{e}^x \sin y + \arcsin \frac{(x-1)^2}{2})\mathrm{d}x + (x + \mathrm{e}^x \cos y + \ln(y^4+2))\mathrm{d}y$, 其中 C 为圆周 $x^2+y^2=2x$, 逆时针方向.

6. 设区域 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0\}$, 计算二重积分 $I_4 = \displaystyle\iint_D \frac{2+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

7. 计算圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 被圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 所截下的部分曲面的面积 S.

8. 求 $f(x,y) = 4x^2 + 6xy + y^3$ 在开区域 $D = \{(x,y) | 4x^2 + 9y^2 < 36\}$ 内的极值.

二、(12分) 讨论函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\tan(x+y)}{x^2+y^2}, & (x,y) \ne (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性及可微性.

三、(10分) 求上半椭球 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1$ $(z \ge 0)$ 内接标准长方体的最大体积, 其中 $a,b,c > 0$. (注：这里的标准长方体是指各面平行于某坐标平面的长方体)

四、(10分) 设 $\Omega = \{(x,y,z) \mid \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1\}$, 计算三重积分 $I_5 = \displaystyle\iiint_\Omega x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

五、(10分) 已知空间曲线 C 为 $\begin{cases} x^2+y^2 = z^2 \\ (x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2 \end{cases}$ $(z \ge 0)$, 求曲线积分 $I_6 = \displaystyle\int_C z^3\,\mathrm{d}s$.

六、(10分) 1. 证明: $I_7 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$.

2. 证明: $I_8 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$.

3. 对于上面两个积分值不相等，给出你自己的看法.

微积分 II (第一层次)期中试卷 (2021.4.24)

一、计算下列各题（每题6分，共30分）

1. 求曲面 $x^2-xy-8x+z+5=0$ 在点 $(2,-3,1)$ 处的切平面与法线方程.

2. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$.

3. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 确定，求 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

4. 设 $z=f(xy,\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{x})$, 其中 f 二阶连续可微，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

5. 函数 $u=\arctan(x^2+2y+z)$ 在点 $(1,0,2)$ 处沿方向 $\overrightarrow{l}=(1,2,3)$ 的方向导数.

二、计算下列各题（每题8分，共40分）

1. 计算三重积分 $I_1=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与 $z=1, z=2$ 所围立体.

2. 计算曲线积分 $I_2=\oint_L\dfrac{(x+2)^2+(z-3)^2}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$, 其中 L 为曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y=0 \end{cases}$ $(a>0)$.

3. 计算曲线积分 $I_3=\int_C(x^2+2xy)\mathrm{d}y$, 其中 C 是上半椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0,y\geq 0)$, 逆时针方向.

4. 计算 $I_4=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x$.

5. 设 $D=\{(x,y)||x|\leq 2,|y|\leq 2\}$, 计算 $I_5=\iint\limits_{D}|x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

三、(10分)对任意 $k>0$, 设 Ω_k 为 $\sqrt{x^2+y^2}\leq kz$ 与 $x^2+y^2+z^2\leq 1$ 所交区域, 记其体积为 V_k. 已知存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{k\to 0^+}\dfrac{V_k}{k^\lambda}$ 为正数, 求 λ 的值及该极限.

四、(10分)求函数 $f(x,y,z)=x+y+z$ 在区域 $x^2+y^2\leq z\leq 1$ 上的最大值和最小值.

五、(10分）设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 讨论 f 在 y 轴点上的连续性,可偏导性及可微性.

微积分 II (第一层次)期中试卷 (2022.5.8)

一、计算下列各题:（每题6分，共30分）

1. 求二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} \dfrac{\mathrm{e}^{-(\frac{y}{x}+\frac{x}{y})}}{(\frac{y}{x}+\frac{x}{y})^{xy}}$.

2. 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, $w=f(x+y+z,xyz)$. 求 $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

3. 设函数 $y=y(x)$, $z=z(x)$ 由方程组 $\begin{cases} x^3+y^3+z^3=3xyz \\ x+y+z=a\ (a\neq 0) \end{cases}$ 确定. 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

4. 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

5. 交换积分次序并计算积分$I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{0}^{\arccos y} y^3\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{2\pi-\arccos y}^{2\pi} y^3\mathrm{d}x$.

二、计算下列各题:（每题8分，共40分）

1. 计算二重积分 $I_2=\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

2. 计算三重积分 $I_3=\displaystyle\iiint\limits_{V}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leq 1\ (a,b,c>0)$.

3. 求圆柱面 $x^2+y^2=1$ 被两平面 $z=\pm y$ 所截下的有限部分的面积 S.

4. 计算曲线积分 $I_4=\displaystyle\int_C y\,\mathrm{d}s$. 其中 C 是摆线 $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ 在 $0\leq t\leq 2\pi$ 的一拱.

5. 计算曲线积分 $I_5=\displaystyle\oint_L (x+y)^2\mathrm{d}x-(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$. 其中 L 是以 $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(1,1)$ 为顶点的正向三角形闭路 $ABCA$.

三、(12分) 设函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin xy}{x}, & x\neq 0, \\ y, & x=0. \end{cases}$ 讨论 f 的连续性, 可偏导性, 及可微性.

四、(10分) 求函数 $z=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 4\}$ 上的最大值与最小值.

五、(8分) 设函数 $f(x,y)$ 在平面区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq a^2\}\ (a>0)$ 上连续可微, 在 D 的边界上取值为 0. 证明:

(1) $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_D x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_D y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(2) $\displaystyle\left|\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leq \frac{\pi a^3}{3}\max_{(x,y)\in D}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

微积分 II (第一层次)期中试卷参考答案 2019.4.27

一、 1. 0; 2. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1)}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1)$. 3. $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\Big|_{(1,-2,1)}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\big(3-\mathrm{e}^{-2}\big)$

4. $I_2=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{1-x}f(x,y)\mathrm{d}y$; 5. π; 6. $\pi\ln 2$. 7. 16;

8. 两个驻点 $(0,0)$ 和 $\big(-\dfrac{9}{8},\dfrac{3}{2}\big)$. $(0,0)$ 不是极值点. $f\big(-\dfrac{9}{8},\dfrac{3}{2}\big)=-\dfrac{27}{16}$ 是极小值.

二、$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，可偏导，不可微. 三、$\dfrac{4\sqrt{3}}{9}abc$. 四、$\dfrac{4\pi}{15}a^3bc$. 五、$\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$.

六、1. 注意到 $\dfrac{x-y}{(x+y)^3}=\dfrac{(x+y)-2y}{(x+y)^3}=\dfrac{1}{(x+y)^2}-\dfrac{2y}{(x+y)^3}$,

则 $\displaystyle\int\frac{x-y}{(x+y)^3}\mathrm{d}x=\int_0^1\Big(\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{2y}{(x+y)^3}\Big)\mathrm{d}x=-\frac{1}{x+y}+\frac{y}{(x+y)^2}=\frac{-x}{(x+y)^2}$,

$$I_7=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{-x}{(x+y)^2}\Big|_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}y=-\int_0^1\frac{1}{(1+y)^2}\mathrm{d}y=-\frac{1}{2},$$

上面的式子出现极限，是因为 $\dfrac{-x}{(x+y)^2}\Big|_{x=0}$ 在 $y=0$ 无定义(无界).

2. 注意到 $\dfrac{x-y}{(x+y)^3}=\dfrac{(-x-y)+2x}{(x+y)^3}=-\dfrac{1}{(x+y)^2}+\dfrac{2x}{(x+y)^3}$,

则 $\displaystyle\int\frac{x-y}{(x+y)^3}\mathrm{d}y=\int\Big(-\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{2x}{(x+y)^3}\Big)\mathrm{d}y=\frac{1}{x+y}-\frac{x}{(x+y)^2}=\frac{y}{(x+y)^2}$,

$$I_8=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{y}{(x+y)^2}\Big|_{y=0}^{y=1}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

上面的式子出现极限，是因为 $\dfrac{y}{(x+y)^2}\Big|_{y=0}$ 在 $x=0$ 无定义(无界).

微积分 II (第一层次)期中试卷参考答案 (2021.4.24)

一、 1. 切平面方程为 $(x-2)+2(y+3)-(z-1)=0$; 法线方程为 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

2. 0; 3. 2; 4. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'-\dfrac{1}{y^2}f_2'-\dfrac{1}{x^2}f_3'+xyf_{11}''-\dfrac{x}{y^3}f_{22}''-\dfrac{y}{x^3}f_{33}''+\dfrac{2}{xy}f_{23}''$; 5. $\dfrac{9}{10\sqrt{14}}$.

二、 1. $\dfrac{7}{3}\pi$. 2. $\dfrac{3\pi a}{2}+\dfrac{26\pi}{a}$; 3. $\dfrac{4}{3}ab^2$; 4. $\dfrac{3\mathrm{e}}{8}-\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$; 5. $\dfrac{80}{3}+\pi$.

三、 $\lambda=2$, 所求极限为 $\dfrac{\pi}{3}$.

四、最小值 $f(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})=-\dfrac{1}{2}$, 最大值 $f(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},1)=1+\sqrt{2}$.

五、(1) f 在 y 轴点上连续, 可偏导, 可微.

微积分 II (第一层次)期中试卷参考答案 (2022.5.8)

一、 1. 0; 2. $\dfrac{\partial w}{\partial x}=f_1'+yzf_2'$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=f_{11}''+y(x+z)f_{12}''+xy^2zf_{22}''+yf_2'$.

3. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{z-x}{y-z}$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y}{y-z}$. 4. $x-y+2z=\pm\sqrt{\dfrac{11}{2}}$. 5. $I_1=\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_{-1}^{\cos x}y^3\mathrm{d}y=-\dfrac{5}{16}\pi$.

二、 1. $\dfrac{9\pi}{16}$; 2. $\dfrac{\pi^2}{4}abc$; 3. 8; 4. $\dfrac{32}{3}$; 5. $-\dfrac{14}{3}$.

三、解: 显然 f 在 $x\neq 0$ 时是连续的、可偏导的以及可微的. 下面讨论 $x=0$ 的情形. $\forall y_0\in\mathbb{R}$,

(1) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}}\frac{\sin xy}{x}=y_0=f(0,y_0)$, 所以 f 在 $x=0$ 时连续.

(2) $f_x'(0,y_0)=\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y_0)-f(0,y_0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin xy_0}{x}-y_0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin xy_0-xy_0}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{y_0\cos xy_0-y_0}{2x}=0$

$f_y'(0,y_0)=\displaystyle\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,y_0+\Delta y)-f(0,y_0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{y_0+\Delta y-y_0}{\Delta y}=1$,

所以 f 在 $x=0$ 时可偏导.

(3) $\omega=f(\Delta x,y_0+\Delta y)-f(0,y_0)-f_x'(0,y_0)\Delta x-f_y'(0,y_0)\Delta y=f(\Delta x,y_0+\Delta y)-(y_0+\Delta y)$.

当 $\Delta x\neq 0$ 时, $\omega=\dfrac{\sin\Delta x(y_0+\Delta y)}{\Delta x}-(y_0+\Delta y)=\dfrac{\sin\Delta x(y_0+\Delta y)-\Delta x(y_0+\Delta y)}{\Delta x}$,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\omega}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\omega}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sin\Delta x(y_0+\Delta y)-\Delta x(y_0+\Delta y)}{(\Delta x)^2}\cdot\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$$

当 $\Delta x=0$ 时, $\omega=(y_0+\Delta y)-(y_0+\Delta y)=0$. 仍有 $\displaystyle\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\omega}{\rho}=0$.

于是 f 在 $x=0$ 时可微. (注: 也可以证明 f 在 $x=0$ 时连续可微, 从而可微.)

四、最大值为 $z(0,\pm 2)=8$, 最小值为 $z(0,0)=0$.

五、证明: 设 L 为 D 的边界. 由格林公式, 有

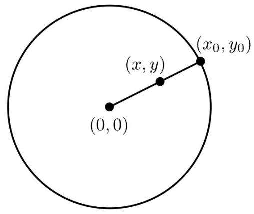
$$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x=-\iint_D\left(f(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$\oint_L xf(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D\left(f(x,y)+x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

从而有

$$
\begin{aligned}
|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y| &= |\frac{1}{2}\iint\limits_D \left(x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y| \\
&\le \frac{1}{2}|\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\left((\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y| \\
&\le \frac{1}{2}\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \max_{(x,y)\in D}\left((\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\pi a^3}{3}\max_{(x,y)\in D}\left((\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$



第2问方法二:

$\forall (x,y)\in D$, 按如图方式取 (x_0,y_0), 则由中值定理

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f'_x(\xi,\eta)(x-x_0)+f'_y(\xi,\eta)(y-y_0)=f'_x(\xi,\eta)(x-x_0)+f'_y(\xi,\eta)(y-y_0)$$

$$|f(x,y)|=|f'_x(\xi,\eta)(x-x_0)+f'_y(\xi,\eta)(y-y_0)|\le\left((f'_x(\xi,\eta))^2+(f'_y(\xi,\eta))^2\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta, M=\max\limits_{(x,y)\in D}\left((\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 则

$$|f(x,y)|\le M(a-\rho)$$

$$|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y|\le\iint\limits_D|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le\iint\limits_D M(a-\rho)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=M\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a(a-\rho)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi a^3}{3}M.$$