# 微积分 II (第一层次)期中试卷 2019.4.27

一、计算下列各题（每题6分，共48分）

1. 计算极限 $I_1 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2+y^3} - \mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e}^{y^3} + 1}{\tan(x^4+y^4)}$.

2. 设函数 $z = f\big(xy,\ yg(x)\big)$, 函数 $f$ 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$. 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{(x,y)=(1,1)}$.

3. 求函数 $u = x^2 + \mathrm{e}^{yz} + \sin(z-x)$ 在点 $(1,-2,1)$ 处沿 $\vec{l} = (2,1,1)$ 的方向导数.

4. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，交换 $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x$ 的积分顺序.

5. 计算曲线积分 $I_3 = \displaystyle\oint_C (\mathrm{e}^x \sin y + \arcsin\frac{(x-1)^2}{2})\mathrm{d}x + (x + \mathrm{e}^x\cos y + \ln(y^4+2))\mathrm{d}y$, 其中 $C$ 为圆周 $x^2+y^2=2x$, 逆时针方向.

6. 设区域 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0\}$, 计算二重积分 $I_4 = \displaystyle\iint_D \frac{2+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

7. 计算圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 被圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 所截下的部分曲面的面积 $S$.

8. 求 $f(x,y) = 4x^2+6xy+y^3$ 在开区域 $D = \{(x,y) | 4x^2+9y^2 < 36\}$ 内的极值.

二、(12分) 讨论函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\tan(x+y)}{x^2+y^2}, & (x,y) \ne (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性及可微性.

三、(10分) 求上半椭球 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1$ $(z \ge 0)$ 内接标准长方体的最大体积, 其中 $a,b,c>0$. (注：这里的标准长方体是指各面平行于某坐标平面的长方体)

四、(10分) 设 $\Omega = \{(x,y,z) \mid \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1\}$, 计算三重积分 $I_5 = \displaystyle\iiint_\Omega x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

五、(10分) 已知空间曲线 $C$ 为 $\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ (x^2+y^2)^2 = x^2-y^2 \end{cases}$ $(z \ge 0)$, 求曲线积分 $I_6 = \displaystyle\int_C z^3\,\mathrm{d}s$.

六、(10分) 1. 证明: $I_7 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$.

2. 证明: $I_8 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$.

3. 对于上面两个积分值不相等，给出你自己的看法.