微积分II（第一层次）期中试卷$_{2017.4.22}$

一、计算下列各题（6分×8 = 48分）

1. 求极限: $I=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{1-x^2-y^2}-1}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}$.

2. 设函数 $u=x^2y+y^2z+z^2x$, 求 u 在点 $(1,1,1)$ 处沿方向 $\overrightarrow{l}=(1,2,1)$ 的方向导数.

3. 已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x-z,y-z)=0$ 确定, 其中 F 连续可微且 $F_1'+F_2'\neq 0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

4. 设 $x=e^u\cos v, y=e^u\sin v, z=uv$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial y}$.

5. 求积分 $I=\iint\limits_D e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由直线 $x=0, y=1$ 和 $x=y$ 所围成的闭区域.

6. 求 $I=\int_C(1+ye^x)\,\mathrm{d}x+(x+e^x)\,\mathrm{d}y$, 其中 C 为沿椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0)$ 由点 $A(a,0)$ 按逆时针方向到 $B(-a,0)$ 的弧线.

7. 求三重积分 $I=\iiint\limits_\Omega(x+y+z)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为区域 $\{(x,y,z)|x^2+y^2\le z\le 2$.

8. 求曲线积分 $I=\int_C xy\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为 $y^2=2x$ 上 $(0,0)$ 到 $(2,2)$ 的一段弧.

二、（8分）求曲线 $\begin{cases} y^2-2x=1,\\ x^2+2y^2+z^2=6\end{cases}$ 在点 $P_0(0,1,2)$ 处的切线和法平面方程.

三、（10分）求二元函数 $f(x,y)=3x^2+2\sqrt{2}xy+4y^2$ 在约束条件 $x^2+y^2=1$ 下的最大值和最小值。

四、（10分）已知 S 是圆柱体

$$C_1=\{(x,y,z):x^2+y^2\le 1,-1\le z\le 1\},\qquad C_2=\{(x,y,z):x^2+z^2\le 1,-1\le y\le 1\},$$

的交集所在区域的表面，求曲面 S 的面积.

五、（12分）设 $D_t=\{(x,y):t\le xy\le 2t, t\le \dfrac{y}{x}\le 2t, x>0,y>0\}\,(t>0)$.

(1) 对固定的 $t>0$, 求区域 D_t 的面积；

(2) 求常数 α,β, 使得 $\beta=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t^2}\left(\iint\limits_{D_t}e^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\alpha t\right)$.

六、（12分）讨论函数 $u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)\arcsin(xy^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性、可微性及连续可微性，其中 $\varphi(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续可微函数.