

# 离散数学 (2023) 作业 04 - 集合及其运算

March 21, 2023

## Problem 1

1. false
2. true
3. false
4. false

## Problem 2

1. 不是
2. 是  $\{a\}$  的幂集
3. 不是
4. 是  $\{a, b\}$  的幂集

## Problem 3

1.  $\{1, 2, 3, \dots\}$
2.  $\emptyset$
3.  $\{\dots, -3, -2, -1, 2, 3, \dots\}$

## Problem 4

1. 易知  $B \subseteq A \cup B$ , 接下来证明  $A \cup B \subseteq B$ : 若  $x \in A \cup B$ , 则  $x \in A$  或  $x \in B$ , 因为  $A \subseteq B$ , 所以  $x \in A$  可以推出  $x \in B$ ,  $x \in B$  总是成立, 得证。
2. 易知  $A \cap B \in A$ , 接下来证明  $A \in A \cap B$ : 若  $x \in A$ , 因为  $A \subseteq B$ , 则  $x \in A \cap B$ , 得证。

## Problem 5

1. 不能。当  $A$  和  $B$  都是  $C$  的子集时, 即使  $A \neq B$ , 也满足  $A \cup C = B \cup C$ 。
2. 不能。当  $C = \emptyset$  时, 即使  $A \neq B$ , 也满足  $A \cap C = B \cap C$ 。
3. 能。对于任意  $x \in A$ , 分情况讨论:
  - 若  $x \in C$ , 因为  $x \in A \cap C = B \cap C$ , 则  $x \in B$ ;
  - 若  $x \notin C$ , 因为  $x \in A \cup C = B \cup C$ , 则  $x \in B$ 。

综上可推出  $A = B$ 。

### Problem 6

$$A \subseteq B \equiv \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \equiv \forall x(x \notin B \rightarrow x \notin A) \equiv \forall x(x \in \overline{B} \rightarrow x \in \overline{A}) \equiv \overline{B} \subseteq \overline{A}$$

### Problem 7

1.  $A \oplus A = (A - A) \cup (A - A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$
2.  $A \oplus U = (A - U) \cup (U - A) = \emptyset \cup \overline{A} = \overline{A}$

### Problem 8

1.  $\{\dots, -2, -1, 0, 1, \dots, n\}$
2.  $\{\dots, -2, -1, 0, 1\}$

### Problem 9

有限集是指含有  $k$  个元素的集合，其中  $k$  是自然数。假设  $A$  含有  $n$  个元素， $B$  含有  $m$  个元素。那么  $A \cup B$  的元素最多有  $n + m$  个，也是自然数。所以  $A \cup B$  是有限集。

### Problem 10

1.  $\{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$
2.  $\{\emptyset\}$
3.  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
4.  $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$