

Ch05: 多维随机向量

Multi-dimensional Random Vector and Distribution Function

October 29, 2023

多维随机向量

在很多实际问题中, 随机现象可能需要两种或两种以上的随机因素来描述, 仅仅用一个随机变量是不够的.

为考察某个地区儿童的身体素质, 可考虑他们的身高、体重、肺活量、视力等, 此时至少需要四个随机变量来进行描述.

这些随机变量之间可能存在某些关联, 分别对每个随机变量单独进行研究是不够的, 需要将其看作一个整体, 即多维随机向量.

定义 0.34 设 $X_1 = X_1(\omega), X_2 = X_2(\omega), \dots, X_n = X_n(\omega)$ 是定义在同一样本空间 Ω 上的 n 个随机变量, 其中 $\omega \in \Omega$, 由它们构成的向量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 称为 n 维随机向量, 或称 n 维随机变量.

本节课内容：二维随机变量

- 二维随机变量的分布函数
- 二维随机变量的边缘分布函数
- 二维随机离散型变量
- 二维随机连续型变量

二维随机向量的分布函数

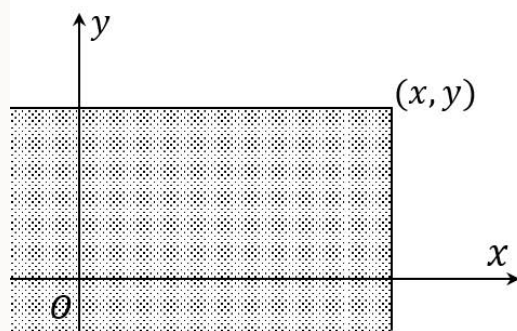
定义 0.35 设 (X, Y) 为二维随机向量, 对任意实数 x 和 y , 称

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

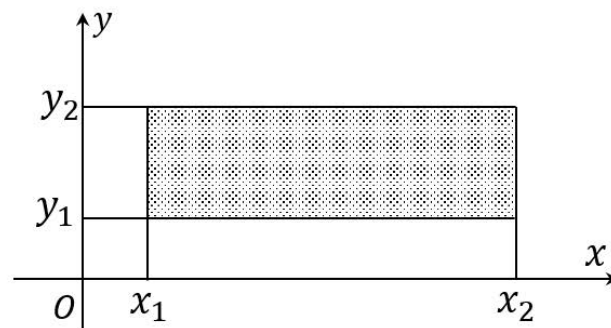
为二维随机向量 (X, Y) 的分布函数, 或称为随机变量 X 和 Y 的联合分布函数 (joint cumulative probability distribution function).

分布函数的几何解释: $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$

若将 (X, Y) 看作平面上随机点的坐标, 则分布函数 $F(x, y)$ 在点 (x, y) 的值是随机向量 (X, Y) 落入以 (x, y) 为顶点的左下方无穷区域的概率, 如图 (a) 所示.



(a)



(b)

如图 (b) 所示, (X, Y) 落入矩形区域 $\{(x, y) : x \in (x_1, x_2], y \in (y_1, y_2]\}$ 的概率:

$$P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$$

二维随机变量分布函数的性质

- **随坐标方向轴单调不减.** 分布函数 $F(x, y)$ 对每个变量单调不减
 - 固定 y , 当 $x_1 > x_2$ 时有 $F(x_1, y) \geq F(x_2, y)$
 - 固定 x , 当 $y_1 > y_2$ 时有 $F(x, y_1) \geq F(x, y_2)$

- **规范性.** 对任意实数 x 和 y , 分布函数 $F(x, y) \in [0, 1]$, 且

$$F(+\infty, +\infty) = 1, \quad F(-\infty, y) = F(x, +\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$$

- **单侧连续.** 分布函数 $F(x, y)$ 关于每个变量**右连续**

$$F(x, y) = F(x + 0, y), \quad F(x, y) = F(x, y + 0)$$

- **矩形运算.** 对任意实数 $x_1 < x_2$ 和 $y_1 < y_2$ 有

$$F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \geq 0$$

回顾：单变量分布函数的定义 – 连续性

一个函数 $F(x)$ 可以作为分布函数的充分必要条件为：满足以下三性质

- 单调不降
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
- 右连续或左连续.
 - 右连续: $F_1(x+0) = F_1(x)$ corresponding to $F_1(x) = P(X \leq x)$
 - 左连续: $F_2(x-0) = F_2(x)$ corresponding to $F_2(x) = P(X < x)$

二者反映 X 的概率规律是相同的. 即

$$F_1(x) = F_2(x) + P(X = x)$$

当 X 为连续型随机变量时, $P(X = x) = 0$, 这两者无本质区别.

右连续或者左连续是分布函数的一个性质, 即通过定义可以证明其右连续或左连续性.

二维随机变量分布函数的性质

充要条件:

$F(x, y)$ 是某二维随机向量的分布函数 $\Leftrightarrow F(x, y)$ 满足前面四条性质

值得说明的是, 当二元函数 $F(x, y)$ 仅仅满足前面的三条性质时, 不一定能成为某二维随机向量的分布函数. 例如

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 & x + y \geq -1 \\ 0, & x + y < -1 \end{cases}$$

很容易验证 $F(x, y)$ 仅仅满足前面的三条性质, 但因为

$$F(1, 1) - F(1, -1) - F(-1, 1) + F(-1, -1) = -1$$

因此不满足第四条性质, 不构成一个分布函数.

边缘分布函数

根据联合分布函数 $F(x, y)$ 还可研究每个分量的统计特征, 将 X 和 Y 看做单独的随机变量, 根据联合分布函数 $F(x, y)$ 来研究随机变量 X 和 Y 的分布函数 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 即 **边缘分布函数**.

定义 0.36 设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y)$, 称

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x, Y < +\infty) = F(x, +\infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y)$$

为随机变量 X 的 **边缘分布函数**.

同理定义随机变量 Y 的边缘分布函数为:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(Y \leq y, x < +\infty) = F(+\infty, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y)$$

遍历另一个随机变量的取值.

二维随机变量：例 0.72

例 0.72 设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为

$$F(x, y) = A(B + \arctan \frac{x}{2})(C + \arctan \frac{y}{3})$$

求随机变量 X 和 Y 的边缘分布函数, 以及概率 $P(Y > 3)$.

解答：例 0.72

题目：设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为

$$F(x, y) = A(B + \arctan \frac{x}{2})(C + \arctan \frac{y}{3})$$

求随机变量 X 和 Y 的边缘分布函数, 以及概率 $P(Y > 3)$.

解答:

- 由分布函数的性质 $F(+\infty, +\infty) = 1$, $F(-\infty, y) = 0$, $F(x, +\infty) = 0$, 计算常数 A, B, C 的值分别为 $A = \frac{1}{\pi^2}$, $B = \frac{\pi}{2}$, $C = \frac{\pi}{2}$.
- 由边缘分布函数的定义可得

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{x}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{y}{3} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{x}{2} \right),$$

同理可得 $F_Y(y) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{y}{3} \right)$.

- 由 Y 的边缘分布函数可得

$$P(Y > 3) = 1 - P(Y \leq 3) = 1 - F_Y(3) = \frac{1}{4}$$

二维离散型随机向量及其分布列

定义 0.37 若二维随机变量 (X, Y) 的取值是有限个或无限可列的, 称 (X, Y) 为 **二维离散型随机变量**. 设离散型随机向量 (X, Y) 的取值分别为 $(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \dots$, 则称

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$$

为 (X, Y) 的 **联合分布列**, 简称 **分布列**.

二维随机变量分布列具有以下性质:

$$\text{非负性: } p_{ij} \geq 0 \quad \text{规范性: } \sum_{i,j} p_{ij} = 1$$

二维离散型随机向量：边缘分布列

根据二维随机变量 (X, Y) 的联合分布列 p_{ij} , 还可研究每个随机变量的统计特征, 将 X 和 Y 看做单独的随机变量.

- 随机变量 X 的边缘分布列

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} = p_{i.}$$

- 随机变量 Y 的边缘分布列

$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij} = p_{.j}$$

- 遍历另一个随机变量的取值.

二维离散型随机向量：边缘分布列

根据二维随机变量 (X, Y) 的联合分布列和边缘分布列可以通过下表表示:

<div> <div></div> <div>Y</div> <div>X</div> </div>	y_1	y_2	\cdots	y_j	\cdots	$p_{i\cdot} = \sum_j p_{ij}$
x_1	p_{11}	p_{12}	\cdots	p_{1j}	\cdots	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	\cdots	p_{2j}	\cdots	$p_{2\cdot}$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
x_i	p_{i1}	p_{i2}	\cdots	p_{ij}	\cdots	$p_{i\cdot}$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\ddots	\vdots
$p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	\cdots	$p_{\cdot j}$	\cdots	1

二维离散型随机向量：联合分布函数、边缘分布函数

根据二维随机变量 (X, Y) 的联合分布列 p_{ij} , 可得:

- 联合分布函数

$$F(x, y) = \sum_{x_i \leq x, y_j \leq y} p_{ij},$$

- 边缘分布函数

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} p_{i\cdot} = \sum_{x_i \leq x} \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} \quad \text{和} \quad F_Y(y) = \sum_{y_i \leq y} p_{\cdot j} = \sum_{y_j \leq y} \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij}$$

二维离散型随机变量：例 0.73

例 0.73 设某一个地区

- 15% 的家庭没有小孩
- 20% 的家庭有一个小孩
- 35% 的家庭有两个小孩
- 30% 的家庭有三个小孩

设每个家庭中小孩为男孩和女孩是等可能的且相互独立. 现从该地区随机任意选择一个家庭, 用随机变量 X, Y 分别表示该家庭中男孩和女孩的个数, 求概率 $P(X \geq 1)$, $P(Y \leq 2)$ 和 $P(X \leq Y)$.

解答：例 0.73

- 联合分布列及边缘分布列

$X \backslash Y$	0	1	2	3	$p_{i\cdot}$
0	0.1500	0.1000	0.0875	0.0375	0.3750
1	0.1000	0.175	0.1125	0	0.3875
2	0.0875	0.1125	0	0	0.2000
3	0.0375	0	0	0	0.0375
$p_{\cdot j}$	0.3750	0.3875	0.2000	0.0375	1

- X, Y 所有可能取值为 $\{0, 1, 2, 3\}$, 由条件概率可知:

$$\begin{aligned} P(X = i, Y = j) &= P(\text{选择的家庭有 } i + j \text{ 个小孩, 其中 } i \text{ 个男孩和 } j \text{ 个女孩}) \\ &= P(\text{选择的家庭有 } i + j \text{ 个小孩}) \cdot P(i \text{ 个男孩和 } j \text{ 个女孩} | \text{选择的家庭有 } i + j \text{ 个小孩}) \\ &= \binom{i+j}{i} \frac{1}{2^{i+j}} \cdot P(\text{选择的家庭有 } i + j \text{ 个小孩}) \end{aligned}$$

- 可列出 X, Y 的联合分布列及边缘分布列, 最后可得:

$$P(X \geq 1) = 0.625, \quad P(Y \leq 2) = 0.9625, \quad P(X \leq Y) = 0.6625.$$

常用二维离散分布 – 多项分布

伯努利试验: 试验 E 有 2 种可能的结果 A 或 \bar{A} . —— 二项分布

多可能试验: 试验 E 有 n 种可能的结果及概率, $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$

事件	A_1	A_2	\dots	A_n
概率	p_1	p_2	\dots	p_n
次数	X_1	X_2	\dots	X_n

将试验 E 独立重复地进行 m 次, 有

- X_i 取值为 $\{0, 1, \dots, m\}$
- $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = m$

则随机向量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 服从 多项分布.

常用二维离散分布 – 多项分布

定义 0.38 若 n 维随机向量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的分布列为

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_n = k_n) = \binom{m}{k_1, k_2, \dots, k_n} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$$

其中 k_1, k_2, \dots, k_n 是非负整数且满足 $k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$, 称随机向量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 服从参数为 m, p_1, p_2, \dots, p_n 的**多项分布 (multinomial distribution)**, 记为 $(X_1, X_2, \dots, X_n) \sim M(m, p_1, p_2, \dots, p_n)$.

定义 0.39 设随机变量 X 的分布列为

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

称随机变量 X 服从为**参数为 n 和 p 的二项分布 (binomial distribution)**, 记为 $X \sim B(n, p)$.

多项分布的性质: (思考题)

定理 0.14 若多维随机向量 $(X_1, X_2, \dots, X_n) \sim M(m, p_1, p_2, \dots, p_n)$, 则每个随机变量 $(X_i (i \in [n]))$ 的边缘分布为二项分布 $B(m, p_i)$.

一言以蔽之: [多项分布的边缘分布是二项分布]

思路: 我们可以将第 i 类别定义为“成功”, 其他所有类别的结合定义为“失败”. 成功的概率就是第 i 类别的发生概率 p_i , 失败的概率就是其他所有类别的概率之和:

$$1 - p_i = p_1 + \dots + p_{i-1} + p_{i+1} + \dots + p_n$$

例 1: 在一个掷骰子的实验中, 每个骰子面可能被视为一个类别, 每个面被选中的概率可以不同.

多项分布的边缘分布是二项分布：例 0.74

例 0.74 假设我们进行了一项实验

事件	A	B	C
概率	0.3	0.4	0.5

总共进行了 5 次实验. 求结果 A 发生的次数的分布.

解答：例 0.74 — 咨询 ChatGPT-4

现在我们计算类别A发生1次、2次、3次、4次和5次的概率：

$$x_A = 1, x_B = 2, x_C = 2:$$

$$P(X_A = 1, X_B = 2, X_C = 2) = \frac{5!}{1!2!2!} \cdot (0.3)^1(0.4)^2(0.3)^2 \approx 0.3024$$

$$x_A = 2, x_B = 1, x_C = 2:$$

$$P(X_A = 2, X_B = 1, X_C = 2) = \frac{5!}{2!1!2!} \cdot (0.3)^2(0.4)^1(0.3)^2 \approx 0.216$$

$$x_A = 3, x_B = 1, x_C = 1:$$

$$P(X_A = 3, X_B = 1, X_C = 1) = \frac{5!}{3!1!1!} \cdot (0.3)^3(0.4)^1(0.3)^1 \approx 0.1512$$

$$x_A = 4, x_B = 0, x_C = 1:$$

$$P(X_A = 4, X_B = 0, X_C = 1) = \frac{5!}{4!0!1!} \cdot (0.3)^4(0.4)^0(0.3)^1 \approx 0.027$$

$$x_A = 5, x_B = 0, x_C = 0:$$

$$P(X_A = 5, X_B = 0, X_C = 0) = \frac{5!}{5!0!0!} \cdot (0.3)^5(0.4)^0(0.3)^0 \approx 0.00243$$

这些就是类别A发生1次、2次、3次、4次和5次的概率。

现在让我们来看看，如果我们把这些概率组合起来，得到了类别A发生次数的二项分布：

$$P(X_A = k) = \binom{5}{k} \cdot (0.3)^k \cdot (1 - 0.3)^{5-k}$$

其中，k可以是1、2、3、4或5。

Appendix: 二项分布和多项分布的关系

综上可知,

- 多项分布的边缘分布是二项分布 (已证)
- Label Distribution
 - 在机器学习中, 二项分布可对应于二分类任务的类别分布
 - 在机器学习中, 多项分布可对应于多分类任务的类别分布
- 第二次交互式课堂

二维连续型随机变量

定义 0.40 设二维随机变量的分布函数为 $F(x, y)$, 如果存在二元非负可积函数 $f(x, y)$ 使得对任意实数 (x, y) 有

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$$

则称 (X, Y) 为二维连续型随机变量, 称 $f(x, y)$ 称为二维随机变量 (X, Y) 的概率密度, 或称为 随机变量 X 和 Y 的联合密度函数.

联合密度函数的性质

- 非负性. $f(x, y) \geq 0$;
- 规范性. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$;
- 连续性. 若 $f(x, y)$ 在 (x, y) 连续, 则

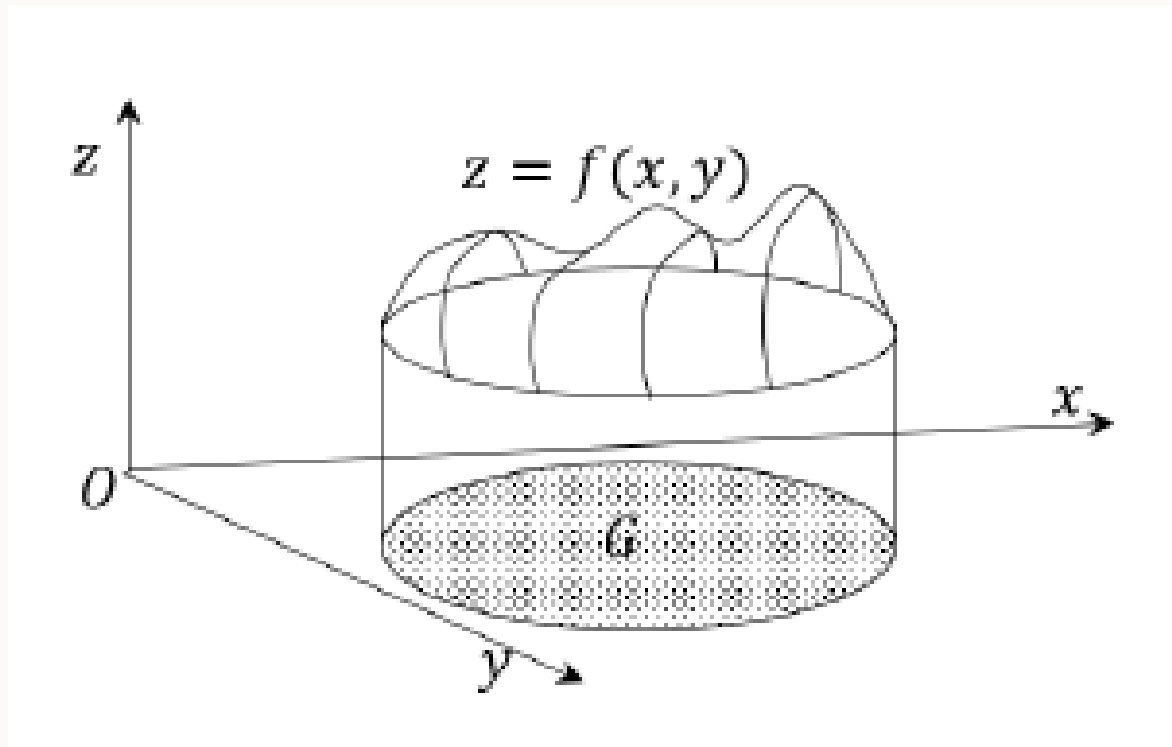
$$f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(X \in (x, x + \Delta x], Y \in (y, y + \Delta y])}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

- 有界区域可积. 若 G 为平面上的一个区域, 则点 (X, Y) 落入 G 的概率为

$$P((X, Y) \in G) = \iint_{(x, y) \in G} f(x, y) dx dy$$

联合密度函数的性质 — 有界区域可积的几何解释

$$P((X, Y) \in G) = \iint_{(x,y) \in G} f(x, y) dx dy$$



二维连续型随机变量：边缘概率密度

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, 由边缘分布函数的定义可知:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(X \leq x, Y < +\infty) = F(x, +\infty) \\ &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, y) dt dy = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, y) dy \right) dt \end{aligned}$$

由此可得随机变量 X 的边缘概率密度为:

$$f_X(x) = F'_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

同理可得随机变量 Y 的边缘概率密度.

二维连续型随机变量：边缘概率密度

定义 0.41 设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为 $f(x, y)$, 随机变量 X 和 Y 的 **边缘密度函数**分别为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

其相对应的 **边缘分布函数**分别为

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, y) dy \right) dt$$
$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, s) dx \right) ds$$

二维连续型随机变量：例 0.75

例 0.75 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} ce^{-(3x+4y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求：

- 常数 c ;
- 联合分布函数 $F(x, y)$;
- X 和 Y 的边缘概率密度;
- $P(X + Y \leq 2)$ 的值.

解答：例 0.75

题目：如上所述.

解答：

- 由规范性可知 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$, 计算后得 $c = 12$.
- 由分布函数的定义可知, 当 $x > 0$ 和 $y > 0$ 时有

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^x \int_0^y 12e^{-(3x+4y)} dx dy = (1 - e^{-3x})(1 - e^{-4y})$$

- 由边缘密度函数的定义可知,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^{+\infty} 12e^{-(3x+4y)} dx dy = 3e^{-3x}$$

同理可得 $f_Y(y) = 4e^{-4y}$.

- 由联合密度函数的性质可知,

$$P(X + Y \leq 2) = 12 \int_0^2 f(x, y) dx \int_0^{2-x} e^{-(3x+4y)} dy = 1 - 4e^{-6} + 3e^{-8}$$

常用二维连续分布 — 均匀分布

定义 0.42 设 G 为平面上的一个有界区域, 其面积为 A_G , 若二维随机向量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{A_G}, & (x, y) \in G \\ 0, & (x, y) \notin G \end{cases}$$

则称 (X, Y) 服从区域 G 上的**二维均匀分布**.

二维均匀分布所描述的随机现象就是向区域 G 上随机投点, 该点落在区域 G 上的某一点是等可能的, 本质上就是 (平面) 几何概型的随机向量描述.

均匀分布：例 0.76

例 0.76 在坐标原点为中心、半径为 R 的圆内等可能随机投点. 用 (X, Y) 分别表示落点的横坐标和纵坐标.

求随机向量 (X, Y) 的联合密度函数, 边缘密度函数, 以及 (X, Y) 落入 $X^2 + Y^2 \leq r^2 (0 < r \leq R)$ 的概率.

解答：例 0.76

题目：如上所述.

解答：

- 由均匀分布的定义可知, 随机向量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0, & x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$$

- 由边缘密度函数的定义可知, 当 $x^2 \leq R^2$ 时有

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi R^2} dy = \frac{2}{\pi R^2} \sqrt{R^2 - x^2}$$

同理可得随机变量 Y 的边缘概率密度.

- 由联合密度函数的性质可知,

$$P(X^2 + Y^2 \leq r^2) = \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} \frac{1}{\pi R^2} dx dy = \frac{r^2}{R^2}$$

常用二维连续分布 – 正态分布

定义 0.43 对任意实数 x, y , 若随机向量 (X, Y) 的密度函数 $f(x, y)$ 等于

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]\right)$$

其中常数 $\mu_x, \mu_y \in (-\infty, +\infty)$, $\sigma_x, \sigma_y \in (0, +\infty)$ 和 $\rho \in (-1, 1)$, 则称 (X, Y) 服从 **二维正态分布**, 记 $(X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$.

Remark:

$$[.^2 + .^2 - ..] \quad \text{refer to} \quad \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} - \frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2$$

二维随机正态分布的性质

定理 0.15 设二维随机变量 $(X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$, 则随机变量 X 和 Y 的边缘分布为

$$X \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2), \quad Y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2).$$

Remark:

- 该证明可以参考《概率论与数理统计 (人工智能或计算机专业用书)》
- ρ 为结合曲率, 确保边缘分布 $F_X(x)$ 中关于 $Y \in (-\infty, +\infty)$ 的积分为 1.

正态分布：例 0.77

例 0.77 假设有两个随机变量 X 和 Y , 它们的联合分布是一个二维正态分布, 均值向量为 $(1, 2)$. 求

- $P(X > 2, Y < 3)$.
- 边缘分布 $P(X > 2)$ 和 $P(Y < 3)$

解答：例 0.77— 咨询 ChatGPT-4

答案：

1. $P(X > 2, Y < 3)$

我们要求 $P(X > 2, Y < 3)$ ，可以通过对概率密度函数在给定区域上的积分来计算：

$$P(X > 2, Y < 3) = \iint_R f(x, y) dx dy$$

这里 R 是满足 $x > 2$ 且 $y < 3$ 条件的区域。

1. 边缘分布 $P(X > 2)$ 和 $P(Y < 3)$

边缘分布是指在所有可能的 y 值上积分以得到 X 的概率分布，或者在所有可能的 x 值上积分以得到 Y 的概率分布。

$$P(X > 2) = \int_2^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x, y) dy dx$$

$$P(Y < 3) = \int_{-\infty}^3 \int_{-\infty}^\infty f(x, y) dx dy$$

同样，这些计算可能会比较繁琐，可能需要使用数值积分方法或者计算机软件来进行估算。

请给出上述积分的数值解

很抱歉，由于我目前无法进行数值计算或使用实时数据，我不能直接提供数值解。然而，我可以指导你如何使用常见的数学软件（如 Python 中的 SciPy 库）来计算这些积分。

Appendix: 联合概率分布和边缘分布的关系

综上所述,

- 二维联合分布可以唯一确定二维随机变量的边缘分布 (根据定义)
- 反之, 不成立 (why?)
- 第二次交互式课堂