

离散数学（2023）作业 14 - 偏序关系

离散数学教学组

Problem 1

下面哪些是偏序集？

1. $(\mathbb{Z}, =)$
2. (\mathbb{Z}, \neq)
3. (\mathbb{Z}, \geq)
4. (\mathbb{Z}, \dagger)

Problem 2

在下面的偏序集中，找出两个不可比元素：

1. $(2^{\{0,1,2\}}, \subset)$
2. $(\{1, 2, 4, 6, 8\}, |)$

Problem 3

集合 S 的幂集上的偏序 $\{(A, B) \mid A \subseteq B\}$ 的覆盖关系是什么？其中 $S = \{a, b, c\}$ 。

Problem 4

证明：一个有穷偏序集可以从它的覆盖关系重新构造出来。

「提示：证明偏序集是它的覆盖关系的自反传递闭包。」

Problem 5

对偏序集

$$(\{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}, \subseteq)$$

回答下述问题：

1. 求极大元素。
2. 求极小元素。
3. 存在最大元素吗？如果存在请求出。
4. 存在最小元素吗？如果存在请求出。
5. 求 $\{\{2\}, \{4\}\}$ 的所有上界。
6. 如果存在的话，求 $\{\{2\}, \{4\}\}$ 的最小上界。
7. 求 $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ 的所有下界。
8. 如果存在的话，求 $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ 的最大下界。

Problem 6

证明：一个有穷非空偏序集有一个极大元素。

Problem 7

给定集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ ，定义关系

$$xRy \Leftrightarrow \frac{y}{x} = 2^k,$$

其中 $k \geq 0$ 是某一个整数。证明： (A, R) 是一个偏序集。

Problem 8

已知 A 是由 54 的所有因子组成的集合，设 $|$ 为 A 上的整除关系，

1. 画出偏序集 $(A, |)$ 的哈斯图。
2. 确定 A 中最长链的长度，并按字典序写出 A 中所有最长的链。
3. A 中元素至少可以划分成多少个互不相交的反链，并完整写出这些反链。

Problem 9

若 (A, \leq) 是一个偏序集，证明存在函数 $f: A \rightarrow 2^A$ (A 的幂集)，从而使得

$$f(a) \subset f(b) \Leftrightarrow a \leq b$$

Problem 10

证明：长度为 $mn + 1$ 的偏序集存在大小为 $m + 1$ 的链或存在大小为 $n + 1$ 的反链。