离散数学（2023）作业 20 - 循环群与群同构

离散数学教学组

Problem 1

证明：三阶群必为循环群。

Problem 2

证明：循环群一定是交换群。

Problem 3

设 p 是素数，证明每一个 p 阶群都是循环群，且以每一个非单位元的元素作为它的生成元。

Problem 4

考虑整数加群 $(\mathbb{Z}, +)$ 的循环子群 $\langle a \rangle$ 和 $\langle b \rangle$，其中 a, b 分别是两个循环群的生成元，则 $\langle a \rangle$ 是 $\langle b \rangle$ 的子群当且仅当 $b \mid a$。

Problem 5

设 ϕ 是群 G 到 $G^{'}$ 的同构映射，$a \in G$，证明：a 的阶和 $\phi(a)$ 的阶相等。

Problem 6

设 G_1 为循环群，f 是群 G_1 到 G_2 的同态映射，证明 $f(G_1)$ 也是循环群。

Problem 7

对以下各小题给定的群 G_1 和 G_2，以及 $f: G_1 \to G_2$，说明 f 是否为群 G_1 到 G_2 的同态，如果是，说明是否为单同态、满同态和同构。

1. $G_1 = \langle Z, + \rangle, G_2 = \langle R^*, \cdot \rangle$, 其中 R^* 为非零实数集合，$+$ 和 $\cdot$ 分别表示数的加法和乘法。

$$f: Z \to R^*, f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 是偶数} \\ -1 & x \text{ 是奇数} \end{cases}$$

2. $G_1 = \langle Z, + \rangle, G_2 = \langle A, \cdot \rangle$，其中 $+$ 和 $\cdot$ 分别表示数的加法和乘法，$A = \{x | x \in C \wedge |x| = 1\}$，其中 C 为复数集合。

$$f: Z \to A, f(x) = \cos x + i \sin x$$

Problem 8

令 G, G' 为群，函数 $f: G \to G'$ 是一个群同态。证明：

1. $\ker f = \{x \in G | f(x) = e\}$ 是 G 的子群
2. $\operatorname{img} f = \{x \in G' | \exists g \in G, f(g) = x\}$ 是 G' 的子群

Problem 9

我们记 n 阶循环群为 C_n，欧拉函数 $\phi(m)$ 定义为与 m 互素且不大于 m 的正整数的个数，考虑以下三个事实：

1. 对正整数 m，欧拉函数的结果 $\phi(m)$ 为 C_m 的生成元的个数
2. C_n 的每个元素均生成 C_n 的一个子群
3. C_n 的每个子群均是一个循环群 C_m，且 $m \mid n$

证明公式

$$\sum_{m>0, m|n} \phi(m) = n$$

Problem 10

证明：整数加群 Z **不与**有理数加群 Q 同构。