# 离散数学（2023）作业 17 - 代数系统与半群

离散数学教学组

## Problem 1

设 $S$ 为 $n$ 元集，问：

1. 集合 $S$ 上可以定义多少个不同的二元运算？
2. 其中有多少个二元运算是可交换的？
3. 其中有多少个二元运算是幂等的？
4. 其中有多少个二元运算是既不可交换又不幂等的？

**答案：**

1. $n^{n^2}$ 个
2. $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 个
3. $n^{n^2-n}$ 个
4. $n^{n^2} - n^{\frac{n(n+1)}{2}} - n^{n^2-n} + n^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 个

## Problem 2

设 $A = \{a, b, c\}$，$a, b, c \in \mathbb{R}$，能否确定 $a, b, c$ 的值，使得：

1. $A$ 对普通加法封闭？
2. $A$ 对普通乘法封闭？

**答案：**

1. 不能。假设存在满足题意的集合 $A$，那么 $A$ 中必然存在绝对值最大的非零元素，不妨假设是 $a$，那么 $|a + a| = 2|a| > |a|$ 比 $A$ 中绝对值最大的元素还大，因此不属于 $A$，矛盾。故不存在满足题意的集合。
2. 能，$A = \{-1, 0, 1\}$。

## Problem 3

判断下列集合对所给的二元运算是否封闭：

1. 整数集合 $\mathbb{Z}$ 和普通的减法运算
2. 非零整数集合 $\mathbb{Z}^*$ 和普通的除法运算
3. 全体 $n \times n$ 实数矩阵集合 $M_n(\mathbb{R})$ 和矩阵加法及乘法运算，其中 $n \geq 2$
4. 全体 $n \times n$ 实可逆矩阵集合关于矩阵加法和乘法运算，其中 $n \geq 2$
5. 正实数集合 $\mathbb{R}^+$ 和 $\circ$ 运算，其中 $\circ$ 运算定义为：
$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, a \circ b = ab - a - b$$
6. $\mathbb{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$，$n \geq 2$，其中 $\circ$ 运算定义如下：
$$\forall a, b \in \mathbb{A}, a \circ b = b$$

7. $\mathbb{S}=\{0,1\}$ 关于普通加法和乘法运算
8. $\mathbb{S}=\{x|x=2^n,n\in\mathbb{Z}^+\}$ 关于普通的加法和乘法运算
9. $\mathbb{S}=\{x|x=\ln n,n\in\mathbb{Z}^+\}$ 关于普通的加法和乘法运算

**答案:**

1. 封闭
2. 不封闭
3. 加法，乘法都封闭
4. 加法不封闭，乘法封闭
5. 不封闭
6. 封闭
7. 加法不封闭，乘法封闭
8. 加法不封闭，乘法封闭
9. 加法封闭，乘法不封闭

# Problem 4

$\mathbb{R}$ 为实数集，定义以下 4 个函数 $f_1,f_2,f_3,f_4$. $\forall x,y\in\mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned} &f_1((x,y))=x\cdot y, && f_2((x,y))=x-y,\\ &f_3((x,y))=\max(x,y), && f_4((x,y))=|x-y|. \end{aligned}$$

1. 判断上述二元运算是否为可交换，可结合，幂等的；
2. 求上述二元运算的单位元，零元以及每一个可逆元素的逆元；
3. 设 $A=\{a,b\}$，试给出 $A$ 上一个不可交换，也不可结合的二元运算。

**答案:**

1.

| | 可交换 | 可结合 | 幂等 |
|---|---|---|---|
| $f_1$ | √ | √ | × |
| $f_2$ | × | × | × |
| $f_3$ | √ | √ | √ |
| $f_4$ | √ | × | × |

2.

| | 单位元 | 零元 | 逆元 |
|---|---|---|---|
| $f_1$ | $1$ | $0$ | $1/x(x\neq 0)$ |
| $f_2$ | × | × | × |
| $f_3$ | × | × | × |
| $f_4$ | × | × | × |

3.

| $\circ$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $b$ |
| $b$ | $a$ | $a$ |

## Problem 5

设 $S=\{1,2,\ldots,10\}$，问下面定义的运算能否与 $S$ 构成代数系统 $\langle S,*\rangle$？如果能，则说明 $*$ 运算是否满足交换律、结合律，并给出单位元和零元。

1. $x*y=\text{gcd}(x,y)$，$\text{gcd}(x,y)$ 是 $x$ 与 $y$ 的最大公约数；
2. $x*y=\text{lcm}(x,y)$，$\text{lcm}(x,y)$ 是 $x$ 与 $y$ 的最小公倍数；
3. $x*y=\max(x,y)$；
4. $x*y=$ 质数 $p$ 的个数，其中 $x\le p\le y$。

**答案：**

| | 代数系统 | 交换律 | 结合律 | 单位元 | 零元 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | √ | √ | √ | × | 1 |
| 2 | × | | | | |
| 3 | √ | √ | √ | 1 | 10 |
| 4 | × | | | | |

## Problem 6

设 $A$ 是一个非空集合，定义 $\circ$：$a\circ b=a,\forall a,b\in A$。试证明：$\langle A,\circ\rangle$ 是一个半群。

**答案：** 显然 $\circ$ 是 $A$ 上的二元运算。对于任意的 $a,b,c\in A$，由

$$(a\circ b)\circ c=a\circ c=a, a\circ(b\circ c)=a\circ b=a,$$

恒有

$$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c).$$

即结合律成立，所以 $\langle A,\circ\rangle$ 是一个半群。

## Problem 7

设 $(S,*)$ 是一个半群，$a\in S$，在 $S$ 上定义 $\circ$：$x\circ y=x*a*y,\forall x,y\in S$。证明：$(S,\circ)$ 也是一个半群。

**答案：** 显然 $\circ$ 是 $S$ 上的二元运算。对于 $\forall x,y,z\in S$，有

$$(x\circ y)\circ z=(x\circ y)*a*z=(x*a*y)*a*z=(x*a)*y*a*z=x*a*(y\circ z)=x\circ y\circ z$$

因此 $\circ$ 满足结合律，$(S,\circ)$ 是一个半群。

## Problem 8

设 $(S,*)$ 是一个半群，如果对所有的 $a,b\in S$，只要 $a\neq b$，必有 $a*b\neq b*a$，证明：

1. $\forall a\in S$，有 $a*a=a$；
2. $\forall a,b\in S$，有 $a*b*a=a$；
3. $\forall a,b,c\in S$，有 $a*b*c=a*c$。

**答案：** 由题设，对所有的 $a,b\in S$，只要 $a*b=b*a$，必有 $a=b$：

1. $\forall a\in S,(a*a)*a=a*(a*a)$，故 $a*a=a$。
2. $\forall a,b\in S$，由第一问有 $(a*b*a)*a=a*b*(a*a)=a*b*a, a*(a*b*a)=(a*a)*b*a=a*b*a$，故 $(a*b*a)*a=a*(a*b*a)$，因此 a*b*a=a。
3. $\forall a,b,c\in S$，由第二问有 $(a*b*c)*(a*c)=a*b*(c*a*c)=a*b*c, (a*c)*(a*b*c)=(a*c*a)*b*c=a*b*c$，故 $(a*b*c)*(a*c)=(a*c)=(a*b*c)$，因此 $a*b*c=a*c$。

## Problem 9

设代数系统 $(A,*)$ 是一个有限的半群，证明 $A$ 中必存在某个元素 $a$，使得 $a*a=a$。

**答案：** 对任意 $x\in A$，$x^2,x^3,x^4\ldots,x^n,\ldots$ 均在 $A$ 中，由于 $A$ 是有限的，存在 $i<j$，使得 $x^i=x^j$，则有 $x^j=x^{j-i}\cdot x^i$，取 $p=j-i\geq 1$，对任意的 $q>i$，

$$x^q=x^{q-i}\cdot x_i=x^{q-i}\cdot(x^p\cdot x^i)=x^p\cdot x^q$$

由于 $p\geq 1$，存在 $k$，使得 $kp\geq i$，从而

$$x^{kp}=x^p\cdot x^{kp}=x^p\cdot(x^p\cdot x^{kp})=x^{2p}\cdot x^{kp}=x^{2p}\cdot(x^p\cdot x^{kp})=\cdots=x^{kp}\cdot x^{kp}$$

取 $a=x^{kp}$，则有 $a\cdot a=a$。

## Problem 10

设 $\langle A,\oplus\rangle$ 和 $\langle B,\odot\rangle$ 是两个代数系统，$f$ 是 $\langle A,\oplus\rangle$ 到 $\langle B,\odot\rangle$ 的同构映射。证明：

1. 如果 $\oplus$ 是可结合的，那么 $\odot$ 也是可结合的；
2. 如果 $e$ 是 $\langle A,\oplus\rangle$ 的单位元，那么 $f(e)$ 是 $\langle B,\odot\rangle$ 的单位元；
3. 如果在 $\langle A,\oplus\rangle$ 中 $b$ 是 $a$ 的逆元，那么在 $\langle B,\odot\rangle$ 中 $f(a)$ 是 $f(b)$ 的逆元。

**答案：**

1. 如果 $\oplus$ 是可结合的，那么对于任意的 $x,y,z\in A$，有 $(x\oplus y)\oplus z=x\oplus(y\oplus z)$。由同构映射 $f$ 的定义可知，$f$ 保持运算，即 $f(x\oplus y)=f(x)\odot f(y)$。因此，$(f(x)\odot f(y))\odot f(z)=f(x)\odot(f(y)\odot f(z))$。根据结合律的定义，这说明 $\odot$ 也是可结合的。
2. 如果 $e$ 是 $\langle A,\oplus\rangle$ 的单位元，则对于任意的 $x\in A$，有 $x\oplus e=e\oplus x=x$。根据同构映射 $f$ 的定义，$f$ 保持单位元，即 $f(e)$ 是 $\langle B,\odot\rangle$ 的单位元。因此，对于任意的 $y\in B$，有 $y\odot f(e)=f(x\oplus e)\odot f(y)=f(x)\odot f(y)=f(x\oplus e)\odot f(y)=y\odot f(e)$。这说明 $f(e)$ 是 $\langle B,\odot\rangle$ 的单位元。
3. 如果在 $\langle A,\oplus\rangle$ 中 $b$ 是 $a$ 的逆元，则 $b\oplus a=a\oplus b=e$，其中 $e$ 是 $\langle A,\oplus\rangle$ 的单位元。根据同构映射 $f$ 的定义，$f$ 保持逆元，即对于任意的 $x\in A$，有 $f(x^{-1})=f(x)^{-1}$。因此，$f(b)\odot f(a)=f(b\oplus a)=f(e)=e_B$，其中 $e_B$ 是 $\langle B,\odot\rangle$ 的单位元。同样地，$f(a)\odot f(b)=f(a\oplus b)=f(e)=e_B$。这说明 $f(a)$ 是 $f(b)$ 的逆元。