

离散数学（2023）作业 II - 离散概率

离散数学教学组

Problem 1

设 A 和 B 是两个事件, $P(A) = 0.5, P(B) = 0.3$ 且 $P(A \cap B) = 0.1$, 求

1. $P(A | B)$
2. $P(B | A)$
3. $P(A | A \cup B)$
4. $P(A | A \cap B)$
5. $P(A \cap B | A \cup B)$

Problem 2

设 E_1 和 E_2 是两个事件, 如果 $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$, 就称 E_1 和 E_2 是独立的。如果把一枚硬币被抛掷 3 次时所有可能的结果构成一个集合, 把这个集合的子集看做事件, 确定下面的每一对事件是否是独立的。

1. E_1 : 第一次硬币头像向下; E_2 : 第二次硬币头像向上。
2. E_1 : 第一次硬币头像向下; E_2 : 在连续 3 次中有 2 次但不是 3 次头像向上。
3. E_1 : 第二次硬币头像向下; E_2 : 在连续 3 次中有 2 次但不是 3 次头像向上。

Problem 3

某工厂有甲乙丙三个车间, 其产量比为 5 : 3 : 2, 其良品率分别为 0.95, 0.96, 0.98。请问从三个车间的产品中任取一件, 取到次品的概率。

Problem 4

设离散型随机变量 $X \in \{1, 2, 3\}, Y \in \{1, 2, 3\}$ 的联合概率 $P(X \cap Y)$ 分布为:

(X, Y)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)
Pr	1/6	1/9	1/18	1/3	a	b

若 X, Y 相互独立, 求 a, b 。

Problem 5

假如某诊所对病人的检测中有 4% 的人感染了禽流感病毒。此外, 假定对给定的禽流感血液检测 (检测结果为阳性不等价于感染病毒, 即感染了禽流感的人也可能呈阴性, 没有感染的人也可能呈阳性), 感染了禽流感的人中有 97% 的人禽流感检测呈阳性, 没感染禽流感的人中有 2% 的人禽流感检测呈阳性。那么, 下列概率是多少?

1. 禽流感检测呈阳性的人真的感染了禽流感病毒。
2. 禽流感检测呈阳性的人没有感染禽流感病毒。
3. 禽流感检测呈阴性的人感染了禽流感病毒。
4. 禽流感检测呈阴性的人没有感染禽流感病毒。

Problem 6

当一个均匀的骰子被掷 10 次时，出现 6 点的次数的方差是多少？

Problem 7

一个工业产品以 20 个产品为一个批次出货。由于测试每件产品确定是否有缺陷比较昂贵，因此制造商常常选择抽样测试。抽样测试是为了尽量减少运送给顾客的次品数量，要求从每批出货中抽取 5 件产品，并且如果观察到一个以上的次品则拒绝批次（如果批次被拒绝，其中的每件产品都会被检测）。如果批次中包含 4 件次品，它会被拒绝的概率是多少？样本大小为 5 的采样中次品的预期数量是多少？样本大小为 5 的采样中次品数量的方差是多少？

Problem 8

俄罗斯同胞喜欢玩一个叫轮盘赌（*Russian roulette*）的游戏：假设左轮手枪有六个弹膛，仅在其中放入一发子弹。若有 n ($n \leq 6$) 个人轮流开枪，直到子弹射出为止，将子弹射出者获胜。试问：这个游戏是否公平，即是否每一个参与的玩家获胜概率相等？请回答 $n = 2, 3, 4, 5, 6$ 的每个情形。

Problem 9

某人爱说谎，三句只能信两句。他扔了一个骰子，报告说是“四点”。问这个骰子真是四点的概率是多少？

Problem 10

试构造适当的概率模型证明：从正整数中随机取 2 个数，它们互素的概率为 $\frac{6}{\pi^2}$ 。

「提示 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 。」

「提示 2: 不大于自然数 n 且与 n 互素的正整数的个数为 $\phi(n) = n \cdot \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p})$ ，其中 $p|n$ 指 p 整除 n 。」