离散数学（2023）作业 14 - 偏序关系

离散数学教学组

Problem 1

下面哪些是偏序集？

1. $(\mathbb{Z}, =)$
2. $(\mathbb{Z}, \neq)$
3. $(\mathbb{Z}, \geq)$
4. $(\mathbb{Z}, \nmid)$

答案：

1. 是
2. 不是
3. 是
4. 不是

Problem 2

在下面的偏序集中，找出两个不可比元素：

1. $(2^{\{0,1,2\}}, \subset)$
2. $(\{1, 2, 4, 6, 8\}, |)$

答案：

1. 例如：$\{0\}$ 和 $\{1\}$
2. 例如：4 和 6

Problem 3

集合 S 的幂集上的偏序 $\{(A, B) \mid A \subseteq B\}$ 的覆盖关系是什么？其中 $S = \{a, b, c\}$。

答案：
$(\varnothing, \{a\}), (\varnothing, \{b\}), (\varnothing, \{c\}),$
$(\{a\}, \{a, b\}), (\{a\}, \{a, c\}),$
$(\{b\}, \{a, b\}), (\{b\}, \{b, c\}),$
$(\{c\}, \{a, c\}), (\{c\}, \{b, c\}),$
$(\{a, b\}, \{a, b, c\}), (\{a, c\}, \{a, b, c\}), (\{b, c\}, \{a, b, c\})$

Problem 4

证明：一个有穷偏序集可以从它的覆盖关系重新构造出来。
「**提示：** 证明偏序集是它的覆盖关系的自反传递闭包。」

答案： 设 $(S,\preceq)$ 是一个有穷偏序集。需要验证这个有穷偏序集合是它的覆盖关系的传递闭包。即需要证明：1) 对于 $(S,\preceq)$ 中的 $\forall(a,b)\in$ 它的覆盖关系的自反传递闭包；2) 对于覆盖关系的传递闭包中的 $\forall(a,b)\in(S,\preceq)$。

1. $\forall(a,b)\in(S,\preceq)$，则 $a=b$，则 $(a,a)\in$ 它的覆盖关系自反传递闭包；或 $a\prec b$ 且不存在 z，$a\prec z\prec b$，在 $(a,a)\in$ 它的覆盖关系；或存在 $a_1,a_2,...,a_n$ 使得 $a\prec a_1\prec a_2\prec ...\prec a_n\prec b$ 且 $a\prec a_1\in$ 它的覆盖关系。则 $(a,b)\in$ 它的覆盖关系自反传递闭包。对于 $(S,\preceq)$ 中的 $\forall(a,b)\in$ 它的覆盖关系的自反传递闭包。

2. $\forall(a,b)\in$ 覆盖关系的自反传递闭包，则 $a=b$，则 $(a,a)\in(S,\preceq)$；或 $a\prec b$，$(a,a)\in(S,\preceq)$；或者 $a\prec a_1\prec a_2\prec ...\prec a_n\prec b$，因为 $\preceq$ 是传递的，所以 $(a,b)\in(S,\preceq)$。

Problem 5

对偏序集

$$(\{\{1\},\{2\},\{4\},\{1,2\},\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\},\subseteq)$$

回答下述问题：

1. 求极大元素。
2. 求极小元素。
3. 存在最大元素吗？如果存在请求出。
4. 存在最小元素吗？如果存在请求出。
5. 求 $\{\{2\},\{4\}\}$ 的所有上界。
6. 如果存在的话，求 $\{\{2\},\{4\}\}$ 的最小上界。
7. 求 $\{\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$ 的所有下界。
8. 如果存在的话，求 $\{\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$ 的最大下界。

答案：

1. $\{1,2\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}$
2. $\{1\},\{2\},\{4\}$
3. 不存在
4. 不存在
5. $\{2,4\},\{2,3,4\}$
6. $\{2,4\}$
7. $\{3,4\},\{4\}$
8. $\{3,4\}$

Problem 6

证明：一个有穷非空偏序集有一个极大元素。

答案： 反证法。假设有穷非空偏序集没有极大元素，那么 $\forall b$，存在 a 比它大，所以集合必然无穷，这与集合有穷矛盾。命题得证。

Problem 7

给定集合 $A = \{1, 2, 3, ..., 100\}$，定义关系

$$xRy \Leftrightarrow \frac{y}{x} = 2^k,$$

其中 $k \geq 0$ 是某一个整数。证明：(A, R) 是一个偏序集。

答案： 为了证明 (A, R) 是一个偏序集，我们需要证明关系 R 是自反性、反对称性和传递性的。

- 自反性：对于任意 $x \in A$，都有 $x/x = 1 = 2^0$，因此 xRx 成立。
- 反对称性：假设 xRy 且 yRx，则存在整数 k 和 l 使得 $\frac{y}{x} = 2^k$ 和 $\frac{x}{y} = 2^l$，所以 $2^k \cdot 2^l = 2^{k+l} = 1$，这意味着 $k + l = 0$，即 $k = l = 0$。因此，$\frac{y}{x} = 1$ 且 $\frac{x}{y} = 1$，即 $x = y$，证毕。
- 传递性：假设 xRy 且 yRz，则存在整数 k 和 l 使得 $\frac{y}{x} = 2^k$ 和 $\frac{z}{y} = 2^l$。因此，我们有 $\frac{z}{x} = \frac{z}{y} \cdot \frac{y}{x} = 2^l \cdot 2^k = 2^{k+l}$。因为 k 和 l 都是非负整数，所以 $k + l$ 也是非负整数，因此，xRz 成立，证毕。

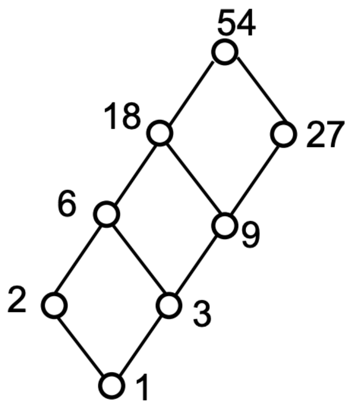
综上所述，我们证明了关系 R 是自反性、反对称性和传递性的，因此 (A, R) 是一个偏序集。

Problem 8

已知 A 是由 54 的所有因子组成的集合，设 $|$ 为 A 上的整除关系，

1. 画出偏序集 $(A, |)$ 的哈斯图。
2. 确定 A 中最长链的长度，并按字典序写出 A 中所有最长的链。
3. A 中元素至少可以划分成多少个互不相交的反链，并完整写出这些反链。

答案：

1. 

2. 最长链长：5。最长链：$\{1, 2, 6, 18, 54\}, \{1, 3, 6, 18, 54\}, \{1, 3, 9, 18, 54\}, \{1, 3, 9, 27, 54\}$
3. 至少划分成 5 个互不相交的反链：$\{54\}, \{18, 27\}, \{6, 9\}, \{2, 3\}, \{1\}$

Problem 9

若 $(A, \preceq)$ 是一个偏序集，证明存在函数 $f \colon A \to 2^A$(A 的幂集)，从而使得

$$f(a) \subseteq f(b) \Leftrightarrow a \preceq b$$

答案： 定义函数 $f(a) = \{x \mid x \leq a\}$。

Problem 10

证明：长度为 $mn + 1$ 的偏序集存在大小为 $m + 1$ 的链或存在大小为 $n + 1$ 的反链。

答案： 若 X 的高度为 r，宽度为 s。根据 Dilworth 定理，X 可以划分为 r 个反链 $C_1, C_2, \ldots, C_r$，并且有 $|C_1| + \cdots + |C_r| = |X|$。因此 $|X| = |C_1| + \cdots + |C_r| \leq sr$。若 $s \leq n$ 并且 $r \leq m$，则 $|X| \leq mn < mn + 1$ 矛盾。