设$f(x)$ 为$\mathbb{R}$ 上的有界连续函数, 记$M=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$. 求方程$y''-y=f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ 的有界解, 并证明对任意的$x\in\mathbb{R}$, 有$|y(x)|\le M$.

解: 齐次方程的通解为$y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}$.

利用常数变易法, 设非齐次方程的解为$y=c_1(x)\mathrm{e}^x+c_2(x)\mathrm{e}^{-x}$, 则有

$$\begin{cases} c_1'(x)\mathrm{e}^x+c_2'(x)\mathrm{e}^{-x}=0 \\ c_1'(x)\mathrm{e}^x-c_2'(x)\mathrm{e}^{-x}=f(x) \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} c_1'(x)=\frac{1}{2}f(x)\mathrm{e}^{-x} \\ c_2'(x)=-\frac{1}{2}f(x)\mathrm{e}^{x} \end{cases}$$

为了保证方程的解为有界解, 形式上需要 $c_1(+\infty)=0, c_2(-\infty)=0$.

从而我们取 $c_1(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{+\infty}^{x}f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t,\quad c_2(x)=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t.$

因此形式上非齐次方程的解为 $y(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}\displaystyle\int_{+\infty}^{x}f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t.$

同时由于对任意的 $t\in\mathbb{R}$, $|f(t)|\le M$, 从而

$$|y(x)|\le\frac{\mathrm{e}^x}{2}\left|\int_{+\infty}^{x}f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right|+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\left|\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t\right|\le\frac{M\mathrm{e}^x}{2}\int_{x}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t+\frac{M\mathrm{e}^{-x}}{2}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t\le M.$$

补充证明：为了保证方程的解为有界解，形式上需要 $c_1(+\infty)=0, c_2(-\infty)=0$.

$c_1'(x)=\dfrac{1}{2}f(x)\mathrm{e}^{-x}$, 则 $c_1(x)=c_1(a)+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^x f(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$c_2'(x)=-\dfrac{1}{2}f(x)\mathrm{e}^{x}$, 则 $c_2(x)=c_2(a)-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^x f(x)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x.$

广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}c_1(x)$ 存在.　同理，$\lim\limits_{x\to-\infty}c_2(x)$ 存在.

$|c_2(x)|\le|c_2(a)|+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^x|f(x)|\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\le|c_2(a)|+\dfrac{M}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^a)\le|c_2(a)|+\dfrac{M}{2}\mathrm{e}^x\le M\mathrm{e}^x$ (x 充分大)

所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}c_2(x)=0$.

要使 $y=c_1(x)e^x+c_2(x)e^{-x}$ 有界，即存在常数 N, 使得 $|y|\le N$,

而 $c_1(x)\mathrm{e}^x=y-c_2(x)\mathrm{e}^{-x}$, $|c_1(x)\mathrm{e}^x|\le|y|+|c_2(x)|\mathrm{e}^{-x}\le N+M\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}=N+M$,

所以 $|c_1(x)|\le(N+M)\mathrm{e}^{-x}$. 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}c_1(x)=0$.