

# 离散数学 (2023) 作业 12 - 二元关系

离散数学教学组

## Problem 1

设集合  $A = \{a, b, c\}$ , 判断以下结论是否正确。

1.  $\emptyset \subseteq A \times A$
2.  $\{a, c\} \in A$
3.  $\{a, b\} \in A \times A$
4.  $(c, c) \in A \times A$

答案:

1. 正确
2. 错误
3. 错误
4. 正确

## Problem 2

设  $A, B$  为任意集合, 证明: 若  $A \times A = B \times B$ , 则  $A = B$ 。

答案: 任取  $x$ ,

$$x \in A \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \Leftrightarrow (x, x) \in A \times A \Leftrightarrow (x, x) \in B \times B \Leftrightarrow x \in B \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in B$$

## Problem 3

证明  $A \times B \neq B \times A$  除非  $A = B$ , 其中  $A$  和  $B$  均为非空集合。

答案: 证明: 当  $A \neq B$  时, 有以下两种情形:

1.  $\exists x \in A (x \notin B)$ , 则在  $A \times B$  中第一个元素为  $x$  的序偶不存在于  $B \times A$  中, 因此  $A \times B \neq B \times A$ 。
2.  $\exists x \in B (x \notin A)$ , 由对称性,  $A \times B \neq B \times A$ 。

因此, 当  $A \neq B$  时,  $A \times B \neq B \times A$ 。当且仅当  $A = B$  时,  $A \times B = A \times A = B \times A$ 。

## Problem 4

设  $R$  是从集合  $A$  到集合  $B$  的关系, 从集合  $B$  到集合  $A$  的逆关系 (记作  $R^{-1}$ ) 是有序对集合  $\{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$ ; 而补关系  $\bar{R}$  是有序对集合  $\{(a, b) \mid (a, b) \notin R, a \in A, b \in B\}$ 。若  $R$  是正整数集合上的关系:  $R = \{(a, b) \mid a \text{ 整除 } b\}$ , 求:

1.  $R^{-1}$
2.  $\bar{R}$

答案:

1.  $R^{-1} = \{(a, b) \mid a \text{ 被 } b \text{ 整除}\}$
2.  $\bar{R} = \{(a, b) \mid a \text{ 不能整除 } b\}$

---

## Problem 5

设

$$A = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$$

$$B = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$$

求

1.  $A \cup B, A \cap B$
2.  $\text{dom } A, \text{dom } B, \text{dom } (A \cup B)$
3.  $\text{ran } A, \text{ran } B, \text{ran } (A \cap B)$
4.  $\text{fld } (A - B)$

答案:

1.  $A \cup B = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}, A \cap B = \{\langle 2, 4 \rangle\}$
2.  $\text{dom } A = \{1, 2, 3\}, \text{dom } B = \{1, 2, 4\}, \text{dom } (A \cup B) = \{1, 2, 3, 4\}$
3.  $\text{ran } A = \{2, 3, 4\}, \text{ran } B = \{2, 3, 4\}, \text{ran } (A \cap B) = \{4\}$
4.  $\text{fld } (A - B) = \{1, 2, 3\}$

## Problem 6

设  $R$  是关系  $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}$ ,  $S$  是关系  $\{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2)\}$ , 求  $S \circ R$ .

答案:  $S \circ R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

## Problem 7

设  $R_1$  和  $R_2$  分别是整数集合上的“模 3 同余”和“模 4 同余”关系, 即  $R_1 = \{(a, b) \mid a \equiv b(\text{mod } 3)\}$  和  $R_2 = \{(a, b) \mid a \equiv b(\text{mod } 4)\}$ 。求

1.  $R_1 \cup R_2$
2.  $R_1 \cap R_2$
3.  $R_1 - R_2$
4.  $R_2 - R_1$
5.  $R_1 \oplus R_2$

答案:

1.  $R_1 \cup R_2 = \{(a, b) \mid (a \equiv b(\text{mod } 3)) \vee (a \equiv b(\text{mod } 4))\}$
2.  $R_1 \cap R_2 = \{(a, b) \mid a \equiv b(\text{mod } 12)\}$
3.  $R_1 - R_2 = \{(a, b) \mid (a \equiv b(\text{mod } 3)) \wedge \neg(a \equiv b(\text{mod } 4))\}$
4.  $R_2 - R_1 = \{(a, b) \mid (a \equiv b(\text{mod } 4)) \wedge \neg(a \equiv b(\text{mod } 3))\}$
5.  $R_1 \oplus R_2 = \{(a, b) \mid ((a \equiv b(\text{mod } 3)) \vee (a \equiv b(\text{mod } 4))) \wedge \neg(a \equiv b(\text{mod } 12))\}$

## Problem 8

问

1. 在集合  $\{a, b, c, d\}$  上有多少个不同的关系?
2. 在集合  $\{a, b, c, d\}$  上有多少个关系包含有序对  $(a, a)$ ?

答案:

1. 有  $2^{4^2} = 65536$  个不同的关系。
2. 有  $2^{4^2-1} = 32768$  个不同的关系包含有序对  $(a, a)$ 。

## Problem 9

设  $R_1$  和  $R_2$  是  $A$  上的关系, 试证明:

1.  $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$ .
2.  $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$ .

答案:

1. 任取  $\langle x, y \rangle$ ,

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle \in (R_1 \cup R_2)^{-1} &\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R_1 \cup R_2 \\ &\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R_1 \vee \langle y, x \rangle \in R_2 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1^{-1} \vee \langle x, y \rangle \in R_2^{-1} \\ &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1^{-1} \cup R_2^{-1}\end{aligned}$$

2. 任取  $\langle x, y \rangle$ ,

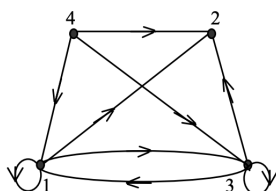
$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle \in (R_1 \cap R_2)^{-1} &\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R_1 \cap R_2 \\ &\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R_1 \wedge \langle y, x \rangle \in R_2 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1^{-1} \wedge \langle x, y \rangle \in R_2^{-1} \\ &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1^{-1} \cap R_2^{-1}\end{aligned}$$

## Problem 10

设  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $R$  是  $X$  上的二元关系,  $R = \{(1, 1), (3, 1), (1, 3), (3, 3), (3, 2), (4, 3), (4, 1), (4, 2), (1, 2)\}$ 。

1. 画出  $R$  的关系图;
2. 写出  $R$  的关系矩阵;
3. 说明  $R$  是否是自反、反自反、对称、传递的。

答案:



1.

2.  $R$  的关系矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. 由于对角线上不全为 1,  $R$  不是自反的; 由于对角线上存在非零元素,  $R$  不是反自反的; 由于矩阵不对称,  $R$  不是对称的; 经计算可得  $R^2 = R$ , 可知  $R$  是传递的。