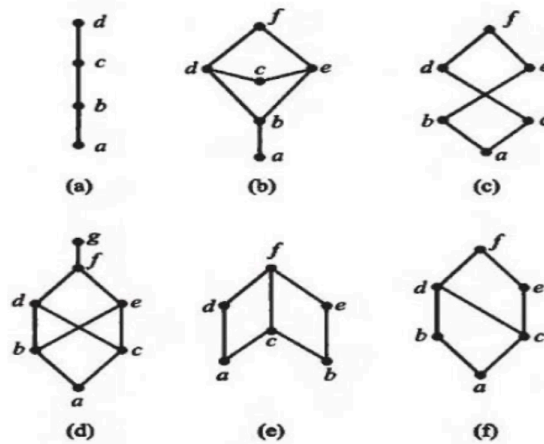


# 离散数学（2023）作业 I5 - 格

离散数学教学组

## Problem 1

下图给出了 6 个偏序集的哈斯图。判断其中哪些是格。如果不是格，请说明理由。



## Problem 2

针对 Problem 1 中的每个格，如果格中的元素存在补元，则求出这些补元。

## Problem 3

说明 Problem 1 中的每个格是否为分配格、有补格和布尔格，并说明理由。

## Problem 4

给定由集合  $S = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$  及整除关系构成的偏序集  $(S, |)$ ：

1. 画出  $(S, |)$  的哈斯图，并判定集合  $A = \{2, 3, 5, 6\}$  的上确界、下确界是否存在，如存在请给出；
2. 判定该偏序集  $(S, |)$  是否构成格；若是格，是否构成分配格、有补格、布尔代数；
3. 若  $(S, |)$  为格，请判定  $(\{1, 2, 15, 30\}, |)$  和  $(\{1, 2, 3, 30\}, |)$  是否为  $(S, |)$  定子格并说明理由。

## Problem 5

设  $L$  是格， $a, b, c \in L$ ，且  $a \leq b \leq c$ ，证明  $a \vee b = b \wedge c$ 。

## Problem 6

设  $L$  是格，求以下公式的对偶式：

1.  $a \wedge (a \vee b) \leq a$
2.  $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
3.  $b \vee (c \wedge a) \leq (b \vee c) \wedge a$

---

### Problem 7

设  $\langle L, \preceq \rangle$  是格, 任取  $a \in L$ , 令  $S = \{x | x \in L \wedge x \preceq a\}$ , 证明  $\langle S, \preceq \rangle$  是  $L$  的子格。

### Problem 8

证明在任意格中, 均有

1.  $x \vee (y \wedge z) \preceq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

2.  $x \wedge (y \vee z) \succeq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

### Problem 9

设  $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$  是有界格, 证明  $\forall a \in L$ , 有

$$a \wedge 0 = 0, a \vee 0 = a, a \wedge 1 = a, a \vee 1 = 1$$

### Problem 10

求证: 在格  $\langle L, \times, \oplus \rangle$  中, 若  $a \times (b \oplus c) = (a \times b) \oplus (a \times c)$ , 则  $a \oplus (b \times c) = (a \oplus b) \times (a \oplus c)$ 。