离散数学（2023）作业 19 - 子群与拉格朗日定理

离散数学教学组

Problem 1

设 H, K 是群 $\langle G, \circ \rangle$ 的子群，下面哪些代数系统是 $\langle G, \circ \rangle$ 的子群？

A. $\langle H \cup K, \circ \rangle$ B. $\langle H \cap K, \circ \rangle$ C. $\langle K - H, \circ \rangle$ D. $\langle H - K, \circ \rangle$

Problem 2

设 G 是一个有限群，K 是 G 的子群，H 是 K 的子群。证明：$|G/H| = |G/K| \cdot |K/H|$。

Problem 3

设 G 为群，a 是 G 中给定元素，a 的正规化子 $N(a)$ 表示 G 中与 a 可交换的元素构成的集合，即 $N(a) = \{x \mid x \in G \wedge xa = ax\}$。证明：$N(a)$ 是 G 的子群。

Problem 4

设 H 是群 G 的子群，$x \in G$，令 $xHx^{-1} = \{xhx^{-1} \mid h \in H\}$，证明：$xHx^{-1}$ 是 G 的子群，称为 H 的共轭子群。

Problem 5

设 H 和 K 分别为群 G 的 r, s 阶子群，若 r 与 s 互素，证明：$H \cap K = \{e\}$。

Problem 6

证明：若 G 中只有一个 2 阶元，则这个 2 阶元一定与 G 中所有元素可交换。

Problem 7

证明：在群 G 中，如果 $g, h \in G$ 满足 $gh = hg$，并且 $\gcd(|g|, |h|) = 1$，那么 $|gh| = |g||h|$。
「**提示：** 令 $N = |gh||g|$，使用阶的性质和交换律。」

Problem 8

设群 G 有子群 H，H 是正规子群当且仅当

$$\forall g \in G, \forall h \in H : ghg^{-1} \in H.$$

证明：若子群 H 为正规子群，则左右陪集相等。即证 $\forall g \in G, gH = Hg$。

Problem 9

设 H, K 是群 G 的子群，证明 HK 是 G 的子群的充要条件是：$HK = KH$。

Problem 10

证明：使用阶的概念证明费马小定理。即对素数 p 和任意整数 a，均有 $a^p \equiv \pmod p$。
「**提示：**考虑集合 $\mathbb{Z}_n^* := \{[m]_n \in \mathbb{Z}_n \mid \gcd(m, n) = 1\}$ 在乘法下构成的群。」

$$[a]_p^{p-1} = [1]_p$$