作业一

1.形式化

记鱼越大为命题 A，鱼刺越大为命题 B，鱼肉越少为命题 C。

(1) A→B (2) B→C (3) C→¬ A (4)结论：A→¬A

(1)与(3)相互矛盾，因为 A 与¬A 不可能同时成立，所以在逻辑上不是有效的，因此根据(1)(2)(3)得到结论(4)在逻辑上不是有效的。

2.证明：

因为每个命题符号都是 wff

所以存在长度为 1 的 wff

若 a,b 均为 wff,则(¬a)与(a□b)均为 wff,其中□□是∧,∨,→,↔中一个

所以存在长度为 4 或 5 的 wff，又因为除此以外的都不是 wff,所以不存在长度为 2 或 3 的 wff

假设存在长度为 6 的 wff,显然,这个 wff 的形式与(¬a)与(a□b)中的一个相同，这与不存在长度为 2 或 3 的 wff 矛盾，假设不成立，不存在长度为 6 的 wff

记 c 为长度为 1 的 wff

则 c,(c∨c),(c∨(c∨c))的长度分别为 1,5,9

又因为对原 wff 每取一次否会使 wff 的长度增加 3，所以 wff 的长度为 3n+1 或 3n+5 或 3n+9,(n=0,1,2,……)

综上所述,不存在长度为 2,3 或 6 的 wff,但其他任意正整数长度的 wff 均可能存在。

3.证明：

记 A 为长度为 1 的 wff

Base Case:当 c=0 时,α 形如 A 或(¬A),s=1,s=c+1 成立

Induction Hypothesis:假设当 c=n 时,s=c+1 成立,记此时 wff 为 B

Inductive Step:当 c=n+1 时,此时的 wff 必形如

(A□B),((¬A)□B),(B□A),(B□(¬A))中的一个,其中□是∧,∨,→,↔中一个,此时 s=c+1 显然成立

综上，由数学归纳法可知：若 α 是一个 wff,则 s=c+1 成立

4.证明：

先证 S′⊆S:

因为 S′ = {α | 存在有穷构造序列 <α0, α1, . . . , αn> 使得 αn = α 且对任意 i ≤ n 满足定义 1.4 的 3 个条件之一}

所以∀α∈S′,α 是 wff，所以 S′⊆S 成立

再证 S⊆S′:∀α∈S,α 是 wff，又因为 wff 均可由有限步产生，因此存在一个有穷构造序列 α0, α1, . . . , αn 使得 αn = α 且对任意 i ≤ n 满足定义 1.4 的 3 个条件之一，所以 S⊆S′成立

综上所述，S′ = S