

2019-2020 年第一学期人工智能学院期末考试试卷

高等代数

一、(20 分) 设矩阵 $A=$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- (1) 求矩阵 A 的逆;
 (2) 求矩阵 A 各元素的代数余子式之和。

二、(10 分) 对于 m 个不同的整数 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$, 补充定义: $b_{m+1} = b_1$, 不存在整系数多项式 $f(x)$ 使得:

$$f(b_i) = b_{i+1} (i = 1, 2, 3, \dots, m)$$

三、(20 分) 用克拉默法则解方程:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0, \end{cases}$$

四、(20 分) 计算 M 的值:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{100} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{99}$$

五、(10 分) 设 α^T 是 α 的转置。求证: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ 线性无关的充要条件是

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 \alpha_1^T & \alpha_2 \alpha_1^T & \cdots & \alpha_n \alpha_1^T \\ \alpha_1 \alpha_2^T & \alpha_2 \alpha_2^T & \cdots & \alpha_n \alpha_2^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 \alpha_n^T & \alpha_2 \alpha_n^T & \cdots & \alpha_n \alpha_n^T \end{vmatrix} \neq 0$$

六、(20 分) 设 A 为 n 阶非奇异矩阵, α 为 n 维列向量, b 为常数。记分块矩阵

$$P = \begin{bmatrix} E & O \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{bmatrix}$$

其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵, E 为 n 阶单位矩阵

- (1) 计算并化简 PQ ;
 (2) Q 可逆的充要条件

2019-2020 年第一学期人工智能学院期末考试试卷

数学分析

一、计算积分：(30 分)

$$(1) \int |1-x|dx; (2) \int \frac{e^x(1+x)}{(1-xe^x)^2} dx; (3) \int (\arcsin x)^2 dx; (4) \int_0^e x|x-a|dx (a \text{ 为实常数}); (5) \int_{-2}^2 \frac{x^2 + x \ln(1+x^6)}{2 + \sqrt{4-x^2}} dx; (6) \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

二、求下列函数的单调区间、极值、凹凸区间、拐点、渐近线并作出函数图像：(14 分)

$$f(x) = \frac{x^2}{2(1+x)}$$

三、已知函数 $f(x)$ 在 I 上可积，在 I 上每一点连续，设 $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt, a \in I$ ，证明： $\varphi(x)$ 在 I 上可导且 $\varphi'(x) = f(x)$ 。(10 分)

四、计算极限：(8 分)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left[\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^2} \right]$$

五、已知 $f(x) \in C[a, b]$ ，其中 $b > a > 0$ ，计算极限： $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx$ (8 分)

六、已知周期函数 $g(x)$ 周期为 T ， $g(0) = 1$ ，设 $f(x) = \int_0^{2x} |x-t|g(t)dt$ ，求 $f'(T)$ 。(10 分)

七、 D 是由抛物线 $y = 2x - x^2$ 与 x 轴所围成的平面图形。直线 $y = kx$ 将 D 分为两部分，直线上面的一部分记作 D_1 ，直线下面的一部分记作 D_2 ，已知 D_1 和 D_2 的面积比为 1: 7，求 D_1 的周长以及 D_1 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。(10 分)

八、从下面两道题中任选一题作答：(8 分)

(1) 已知函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增，求证：

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx.$$

(2) 已知函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导， $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积， $f(a) = f(b) = 0$ ，求证：

$$\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq \frac{1}{2} \int_a^b |f'(x)|dx.$$

2019-2020 年第一学期人工智能学院期末考试试卷

离散数学

一、用谓词逻辑演算描述以下推理过程：(12 分)

前提：①只有猫才能抓住老鼠；②狗不能抓住老鼠；③在南大，南大神兽能抓住老鼠。

结论：在南大，南大神兽是猫不是狗。

二、证明在任何 6 个人中，总有 3 个人相互认识或者互不认识。(12 分)

三、设函数 $\prod_i(a_1, a_2, a_3) = a_i$ ，又设布尔函数 $t: \{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}^3$ 满足函数表达式： $t(x, y, z) = t(x, y, z \circ (x \wedge y))$ ，其中 $z \circ (x \wedge y) = (z + (x \wedge y)) \bmod 2$ 。据此，回答下列问题：(12 分)

(1) 求证： $t^{-1}(x, y, z) = t(x, y, z)$ 。

(2) 用函数 $t(x, y, z)$ 和 $\prod_i(a_1, a_2, a_3)$ 表示函数：

$$OR(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \vee y \neq 0 \\ 0, & x = 0 \wedge y = 0 \end{cases}, AND(x, y) = \begin{cases} 1, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}, NOT(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

四、假设外星文字中下列符号的出现频率如表所示：

符号	←	→	↑	↓	↔	↕
出现频率	0.31	0.19	0.09	0.15	0.12	0.13

要求用尽可能少的数字对这些外星文字进行二进制编码，求这些外星文字的编码表及编码由 100 个外星文字组成的密文所需要的字符数（假设外星文字的出现频率符合频率表）。(12 分)

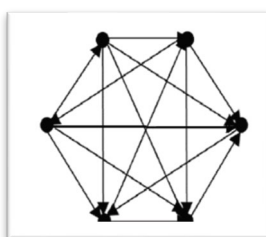
五、覆盖格中最小元素的元素称为这个格的原子。证明：一个布尔代数可以被一个原子构造出来。(12 分)

六、如果 p 是一个质数， a 是一个整数，求证： $a \equiv a^p \pmod{p}$ (10 分)

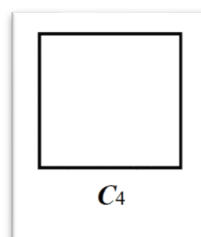
七、删除边 e 得到 G 的一个子图，记作 $G - e$ ，收缩边得到 G 的一个子图，记作 $G \cdot e$ ，定义函数 $\tau(G)$ ： G 中删除 $\tau(G)$ 条边后得到 G 的生成树。求证：(10 分)

$$\tau(G) = \tau(G \cdot e) + \tau(G - e).$$

八、竞赛图是通过在无向完全图中为每个无向边分配方向而获得的有向图。如图是一个 6 阶竞赛图。设 G 是竞赛图，即完全图的一个定向。证明： G 中至少有一条有向哈密顿通路。(10 分)



第八题图



第九题图

九、若图中任意两个顶点，都有且仅有一个公共顶点，则称这个图为友谊图。(10 分)

(1) 给出两个友谊图的示例；(2) 求证：任何包含子图 C_4 的图都不是友谊图；(3) 求证：友谊图中任意两个顶点度数相等。

附加题 求证：(友谊定理)若每个顶点都跟另一个顶点刚好只有一个共同相邻的顶点，这幅图中总有一个顶点和其他顶点都相邻。(10 分)