






# 数理逻辑 (2024 春) 作业 - 05

## I 利用一阶逻辑证明二元关系中的相关结论

回忆你在《离散数学》中学过关于“二元关系” (relation) 的知识, 特别是关于传递性 (transitive)、对称性 (symmetric)、自反性 (reflexive) 和等价性 (equivalent) 的定义。在此基础上, 对一个集中的二元关系  $R$  来说:

- 如果当  $R(a, b)$  和  $R(a, c)$  成立则  $R(b, c)$  也成立, 那么我们称  $R$  是一个**欧几里得关系** (Euclidean)
  - 注: 这里其实只定义了**右欧几里得性** (right-Euclidean), 但不影响问题的理解和证明
- 如果只要  $R(a, b)$  成立则必有  $R(b, a)$  不成立, 那么我们称  $R$  是**非对称的** (asymmetric)
- 如果任意一个元素与自己都不构成  $R$  关系, 那么我们称  $R$  是**反自反的** (irreflexive)

请举例一个“既不自反也不反自反”的关系; 再举例一个“既不对称也不非对称”的关系。接下来, 请判断它们是否正确, 并形式化为 FOL 来证明你的结论 (六选三)。注意, 若你认为命题是假的, 那么举一个有效的反例即可 (不必要进行形式化证明)。

1. 若  $R$  是非对称的, 那么它是反自反的 
2. 若  $R$  是传递且反自反的, 那么它是非对称的 
3. 若  $R$  是传递且对称的, 那么它是自反的 
4. 若  $R$  是等价关系, 那么它也是欧几里得关系 
5. 若  $R$  是欧几里得关系且是非对称的, 那么它是反自反的 
6. 若  $R$  是欧几里得关系且是自反的, 那么它是一个等价关系 