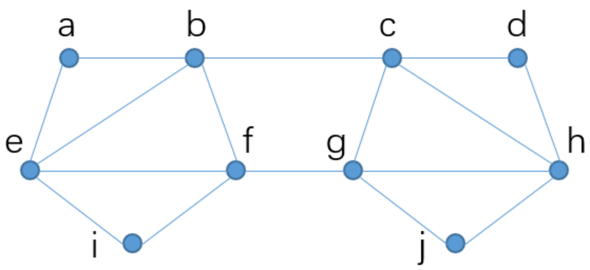
离散数学（2023）作业 23 - 欧拉图与哈密尔顿图

离散数学教学组

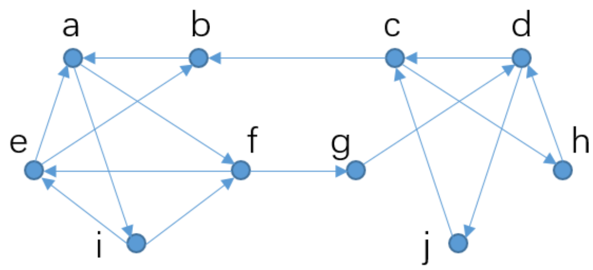
如无特意说明，以后各题只考虑有限个点的图。

Problem 1

试确定下方所示各图是否具有欧拉回路。若存在欧拉回路，则构造出一条欧拉回路。若不存在，试确定这个图是否具有欧拉通路。若存在欧拉通路，则构造出一条欧拉通路。



(1)



(2)

Problem 2

对哪些 m 和 n 值来说，完全二部图 $K_{m,n}$ 具有

1. 欧拉回路？
2. 欧拉通路？

Problem 3

请找出所有互不同构的具有 5 个顶点的欧拉图（仅考虑无向简单图，画图示意即可）。

Problem 4

若无向简单图 G 有欧拉通路，证明或反驳：

1. 当 G 的顶点数是奇数时，若补图 $\bar{G}$ 是连通的，则 $\bar{G}$ 中存在欧拉通路。
2. 当 G 的顶点数是偶数时，若补图 $\bar{G}$ 是连通的，则 $\bar{G}$ 中不存在欧拉通路。

Problem 5

给定无向简单图 G（$|G| \geq 3$），定义线图 $L(G)$ 如下：

- 对 G 中的每条边，$L(G)$ 中恰好有一个顶点与之对应；
- $L(G)$ 中任意两点相邻当且仅当它们在 G 中对应的两条边相邻（即有一个公共顶点）。

证明：若 G 是简单、连通的 r-正则图，则 $L(G)$ 是欧拉图。

Problem 6

对哪些 m 和 n 值来说，完全二部图 $K_{m,n}$ 具有哈密尔顿回路？

Problem 7

证明或反驳：如果二部图 G 是哈密尔顿图，那么必有偶数个顶点。

Problem 8

若简单图 G 满足 $V(G) \geq 3$ 且 $\delta(G) \geq \frac{V(G)-1}{2}$，证明或反驳：

1. G 一定存在哈密尔顿回路。
2. G 一定存在哈密尔顿通路。

Problem 9

考虑在 11 天安排 11 门课程的考试（每天考 1 门课），使得同一位老师所任的任意两门课程考试不排在接连的两天中，试证明如果没有老师担任多于 6 门课程，则符合上述要求的考试安排总是可能的。

Problem 10

简单图 G 满足 $|G| > 2$，令 m 为 G 的边数，n 为 G 的顶点数。试证明：如果 $m > C_{n-1}^{2} + 1$，则 G 一定存在哈密尔顿回路。
「**提示：**可使用数学归纳法证明。」