离散数学（2023）作业 16 - 布尔代数

离散数学教学组

Problem 1

设 B 是布尔代数，B 中的表达式 f 是 $(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c)$。

1. 化简 f
2. 求 f 的对偶式 f^*

Problem 2

设 B 为布尔代数，对于 $\forall a, b \in B$，证明：$a \preceq b \Leftrightarrow \bar{b} \preceq \bar{a}$。

Problem 3

设 B 为布尔代数，对于 $\forall a, b \in B$，证明：$a \preceq b \Leftrightarrow a \wedge \bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \vee b = 1$。

Problem 4

设 B 为布尔代数，$\forall a, b, c \in B$，若 $a \preceq c$，则 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$，这个等式称为模律。证明模律在布尔代数上成立。

Problem 5

设 B 是布尔代数，$a_1, a_2, \cdots, a_n \in B$，证明：

1. $\overline{(a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n)} = \overline{a_1} \wedge \overline{a_2} \wedge \cdots \wedge \overline{a_n}$
2. $\overline{(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n)} = \overline{a_1} \vee \overline{a_2} \vee \cdots \vee \overline{a_n}$

Problem 6

设 B 是 30 的正因数集合，定义 B 上的偏序关系 $\preceq$ 为 $a \mid b$，证明 B 是一个布尔代数。

Problem 7

判断由偏序关系 $a \mid b$ 定义的 $Z+$ 是否构成格，以及是否构成布尔代数。

Problem 8

今有 x, y, z 三个布尔变元，用 xyz 表示 $0 - 7$ 之间的一个二进制数。定义布尔函数 F：当 xyz 是一个斐波那契数时 $F(x, y, z) = 1$，否则 $F(x, y, z) = 0$。

1. 给出 F 的真值表
2. 以“布尔积之布尔和”的形式给出 F 的表达式（无需化简）
3. 化简该表达式

Problem 9

在布尔代数中，对一个包含若干运算（不一定为二元运算）的集合 S，若任意布尔函数都可以使用仅包含 S 中运算的公式表出，称 S 是“完备集”。请证明：

1. $S = \{\wedge, \vee, '\}$ 是完备集，其中 $'$ 为补运算
2. $S = \{\wedge, \vee\}$ 不是完备集
3. 存在基数为 1 的完备集

Problem 10

在布尔代数中，

- 对一条布尔表达式 A，可以通过对每一步运算增加括号，使其具有唯一明确的运算顺序，例如

  $$x \vee y \wedge z \vee w = (x \vee (y \wedge z)) \vee w$$

  在这样的表达式中，若将 $\wedge$ 和 $\vee$ 互换，将 0 和 1 互换，得到的表达式称为 A 的“对偶式”，记为 A^*；
- 对一条布尔表达式 A，记 v 为一种赋值方案，对出现在 A 中的所有变量确定一个真值，并记 $v(A)$ 为对表达式 A 使用方案 v 进行赋值后表达式的值。对一种赋值方案 v，记 v' 为其相反（互补）赋值，即：v' 将 v 中赋值为 0 的变量赋值为 1，反之亦然。

请证明：

1. 若 A 和 A^* 互为对偶式，同时 v 和 v' 互为相反赋值，则 $v(A^*) = (v'(A))'$；（提示：用数学归纳法）
2. 若 $A \Leftrightarrow B$，则 $A^* \Leftrightarrow B^*$。（提示：用上一题的结论）