

# 数理逻辑（2024 春）作业 - 07

## I 证明（二选一）

1. [Enderton, pp.145] (语义 EI 规则) 假设常数符  $c$  在 wff  $\varphi$  和  $\psi$  以及 wff 集  $\Gamma$  中从未出现, 且  $\Gamma \cup \{\varphi_c^x\} \models \psi$ , 证明 (不使用可靠性与完备性定理)  $\Gamma \cup \{\exists x \varphi\} \models \psi$ .
2. [Enderton, pp.145] 假设  $\Gamma \vdash \varphi$ , 且  $P$  是一个从未出现在  $\Gamma$  和  $\varphi$  中的谓词符号。问: 是否存在一个从  $\Gamma$  出发到  $\varphi$  的证明, 其中  $P$  不出现?

## 2 证明（二选一）

1. [Enderton, pp.146] 令  $\Gamma = \{\neg \forall v_1, P v_1, P v_2, P v_3, \dots\}$ . 请问  $\Gamma$  是一致的吗? 它是可满足的吗? 请证明你的结论。
2. [Enderton, pp.146] 证明: 一张无穷的地图 (有无穷个国家) 能用四种颜色着色, 当且仅当它的每一个有穷的子地图可以。

## 3 证明（四选二）

1. [Enderton, pp.146] 完备性定理告诉我们, 每个语句要么是有效的, 即存在一个证明 (从  $\emptyset$  出发); 要么就有一个结构令其为假。请判断下面的语句是否有效, 并证明你的结论
  - (a)  $\forall x (Qx \rightarrow \forall y Qy)$
  - (b)  $(\exists x Px \rightarrow \forall y Qy) \rightarrow \forall z (Pz \rightarrow Qz)$
  - (c)  $\forall z (Pz \rightarrow Qz) \rightarrow (\exists x Px \rightarrow \forall y Qy)$
  - (d)  $\neg \exists y \forall x (Pxy \leftrightarrow \neg Pxx)$