

## 多维随机变量的独立性及条件分布

### 一、作业 (提交时间: Nov. 13, 2023)

1. [76-3] 设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合分布列为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件  $\{X = 0\}$  与  $\{X + Y = 1\}$  相互独立, 求  $a, b$  的值.

2. [75-1/81-1/88-1] 一个箱子中装有 100 件同类产品, 其中一、二、三等品分别有 70, 20, 10 件. 已知  $(X_1, X_2)$  的联合分布列, 以及  $X_1, X_2$  的边缘分布列如上次作业题的第 1 题所得. 试求:

- (1)  $X_1, X_2$  是否互相独立? 为什么?
- (2) 给定条件  $\{X_1 = 1\}$  下  $X_2$  的条件分布列;
- (3) 给定条件  $\{X_2 = 0\}$  下  $X_1$  的条件分布列;
- (4) 给定条件  $\{X_2 = 0\}$  下  $X_1$  的条件分布函数  $F_{X_1|X_2}(x_1 | 0)$ .

3. [86-9] 设  $(X, Y)$  的服从区域  $G$  上的均匀分布, 其中  $G$  由曲线  $y = \frac{1}{x}$  以及直线  $y = 0, x = 1$  与  $x = e^2$  所围成. 求:

- (1)  $(X, Y)$  的联合密度函数;
- (2)  $X, Y$  的边缘密度函数;
- (3)  $X, Y$  是否互相独立? 为什么?

4. [90-3] 设  $(X, Y)$  的服从区域  $G$  上的均匀分布, 其中  $G$  由直线  $y = -x, y = x$  与  $x = 2$  所围成. 已知  $(X, Y)$  的联合密度函数, 以及  $X, Y$  的边缘密度函数如上次作业题的第 3 题所得. 求:

- (1) 条件密度函数  $f_{X|Y}(x | 1)$  和  $f_{X|Y}(x | y)$ , 其中  $|y| < 2$ ;
- (2) 条件概率  $P(X \leq \sqrt{2} | Y = 1)$ ;
- (3) 给定条件  $\{Y = 1\}$  下  $X$  的条件分布函数  $F_{X|Y}(x | 1)$ ;
- (4) 给定条件  $\{Y = y\}$  下  $X$  的条件分布函数  $F_{X|Y}(x | y)$ , 其中  $|y| < 2$ .

5. [93-7] 设某班车起点站上客人数  $X$  服从  $\lambda (\lambda > 0)$  的泊松分布, 每位乘客在中途下车的概率为  $p$  ( $0 < p < 1$ ), 且中途下车与否相互独立. 以  $Y$  表示中途下车的人数. 求:

- (1) 发车时上车人数为  $n$  的条件下, 中途有  $m$  人下车的概率  $P(Y = m | X = n)$ ;
- (2) 二维随机变量  $(X, Y)$  的联合分布律;
- (3) 证明  $Y$  服从  $\lambda p$  的泊松分布. [提示:  $P(Y = m) = \sum_{n=m}^{\infty} P(X = n)P(Y = m | X = n)$ .]

### 二、练习

1. [83-3] 设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合分布列为

X \ Y	1	2	3
1	1/6	1/9	1/18
2	1/3	$\alpha$	$\beta$

当  $\alpha$  与  $\beta$  取何值时  $X, Y$  相互独立?

2. [76-2/82-2/89-2] 两名水平相当的棋手弈棋三盘. 设  $X$  表示某名棋手获胜的盘数,  $Y$  表示他输赢盘数之差的绝对值. 假定没有和棋, 且每盘结果相互独立. 已知  $(X, Y)$  的联合分布列, 以及  $X, Y$  的边缘分布列如上次练习的第 1 题所得. 试求:

- (1)  $X, Y$  是否互相独立? 为什么?

---

(2) 给定条件  $\{Y = 1\}$  下  $X$  的条件分布列;

(3) 给定条件  $\{X = 1\}$  下  $Y$  的条件分布列.

3. [84-5] 已知随机变量  $X, Y$  的概率函数如下, 且  $P(XY = 0) = 1$ . 试求: (1)  $(X, Y)$  的联合分布列; (2)  $X, Y$  是否互相独立? 为什么?

X	-1	0	1
概率	1/4	1/2	1/4

Y	0	1
概率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

4. [92-4] 设  $(X, Y)$  的联合密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求:

(1) 条件密度函数  $f_{X|Y}(x | 1)$  和  $f_{X|Y}(x | y)$ , 其中  $y > 0$ ;

(2)  $(X, Y)$  的联合密度函数;

(3) 概率  $P(X < 1, Y > 2)$ .

5. [93-6] 设随机变量  $X \sim E(1)$ , 当已知  $X = x$  时,  $Y \sim U(0, x)$ , 其中  $x > 0$ . 试求  $(X, Y)$  的联合密度函数.