**作业一**

**1.形式化**

记鱼越大为命题A，鱼刺越大为命题B，鱼肉越少为命题C。

(1) A→B (2) B→C (3) C→¬ A (4)结论：A→¬A

(1)与(3)相互矛盾，因为A与¬A不可能同时成立，所以在逻辑上不是有效的，因此根据(1)(2)(3)得到结论(4)在逻辑上不是有效的。

**2.证明：**

因为每个命题符号都是wff

所以存在长度为1的wff

若a,b均为wff,则(¬a)与(a□b)均为wff,其中□□是∧,∨,→,↔中一个

所以存在长度为4或5的wff，又因为除此以外的都不是wff,所以不存在长度为2或3的wff

假设存在长度为6的wff,显然,这个wff的形式与(¬a)与(a□b)中的一个相同，这与不存在长度为2或3的wff矛盾，假设不成立，不存在长度为6的wff

记c为长度为1的wff

则c,(c∨c),(c∨(c∨c))的长度分别为1,5,9

又因为对原wff每取一次否会使wff的长度增加3，所以wff的长度为3n+1或3n+5或3n+9,(n=0,1,2,……)

综上所述,不存在长度为2,3或6的wff,但其他任意正整数长度的wff均可能存在。

**3.证明：**

记A为长度为1的wff

Base Case:当c=0时,*α*形如A或(¬A),s=1,s=c+1成立

Induction Hypothesis:假设当c=n时,s=c+1成立,记此时wff为B

Inductive Step:当c=n+1时,此时的wff必形如(A□B),((¬A)□B),(B□A),(B□(¬A))中的一个,其中□是∧,∨,→,↔中一个,此时s=c+1显然成立

综上，由数学归纳法可知：若*α*是一个wff,则s=c+1成立

**4.证明：**

先证S′⊆S:

因为S′ = {α | 存在有穷构造序列 <α0, α1, . . . , αn> 使得 αn = α 且对任意 i ≤ n 满足定义 1.4 的3个条件之一}

所以∀*α*∈S′,*α*是wff，所以S′⊆S成立

再证S⊆S′:∀*α*∈S,*α*是wff，又因为wff均可由有限步产生，因此存在一个有穷构造序列 α0, α1, . . . , αn 使得 αn = α 且对任意 i ≤ n 满足定义 1.4 的 3 个条件之一，所以S⊆S′成立

综上所述，S′ = S