

# GUIÕES DE CÁLCULO I - AGRUPAMENTO 2

## GUIÃO 4

### INTEGRAL IMPRÓPRIO

PAULA OLIVEIRA

2021/22

UNIVERSIDADE DE AVEIRO

# Conteúdo

<b>7</b>	<b>Integral impróprio</b>	<b>1</b>
7.1	Integrais impróprios de primeira espécie . . . . .	1
7.2	Integrais impróprios de segunda espécie . . . . .	5
7.3	Integrais impróprios de terceira espécie . . . . .	8
7.4	Propriedades do integral impróprio . . . . .	10
7.5	Critérios de convergência para integrais impróprios . . . . .	11
7.5.1	Critério de comparação . . . . .	11
7.5.2	Corolário do Critério de comparação . . . . .	12
7.6	Convergência absoluta . . . . .	14

## Capítulo 7

# Integral impróprio

A definição de integral de Riemann de uma função  $f$  num intervalo  $I$  exige que o intervalo  $I$  seja fechado e limitado e que a função  $f$  seja limitada nesse intervalo.

Vamos agora estender o conceito de integral a intervalos ilimitados, a intervalos que não são fechados e a funções ilimitadas no intervalo de integração. A este tipo de integral dá-se a designação de **integral impróprio**.

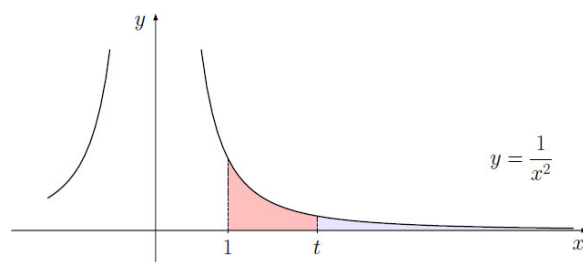
O que poderá significar

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx, \quad \int_0^2 \frac{1}{x^2} dx, \quad \text{ou} \quad \int_0^2 \frac{\text{sen } x}{x} dx ?$$

Seja  $F$  a função definida por  $F(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx$ ,  $t \in [1, +\infty[$ . Sabe-se que  $F(t) = 1 - \frac{1}{t}$  e que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1$ . Este limite denota-se por  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  e podemos escrever

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1.$$

Em termos geométricos podemos interpretar este integral como sendo a área da região (ilimitada) sob a curva de equação  $y = \frac{1}{x^2}$ , acima do eixo  $Ox$  e à direita da reta  $x = 1$ .



**Figura 7.1:** Representação do integral  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ .

### 7.1 Integrais impróprios de primeira espécie

Em primeiro lugar, vamos considerar os casos em que o intervalo de integração é fechado e ilimitado e em que a função está definida em todos os pontos desse intervalo. Um integral nestas condições diz-se **impróprio de 1ª espécie**.

**Definição 7.1.** Sejam  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  integrável em qualquer intervalo  $[a, t]$  com  $t \geq a$  e  $F$  a função definida em  $[a, +\infty[$  por

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx.$$

Se existir em  $\mathbb{R}$  o  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)$  diz-se que o integral impróprio  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  é convergente e escreve-se

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t).$$

Se o limite não existir em  $\mathbb{R}$  o integral impróprio diz-se divergente.

A definição 7.1 estende-se a intervalos  $] -\infty, b]$  e a  $\mathbb{R}$ .

**Definição 7.2.** Sejam  $f : ] -\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável em qualquer intervalo  $[t, b]$  com  $t \leq b$  e  $F$  a função definida em  $] -\infty, b]$  por

$$F(t) = \int_t^b f(x) dx.$$

Se existir em  $\mathbb{R}$  o  $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t)$  diz-se que o integral impróprio  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  é convergente e escreve-se

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} F(t).$$

Se o limite não existir em  $\mathbb{R}$  o integral impróprio diz-se divergente.

**Definição 7.3.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  integrável em qualquer intervalo  $[t, a]$ , com  $t \leq a$ , e em qualquer intervalo  $[a, s]$ , com  $s \geq a$ . Sejam ainda  $F$  e  $G$  as funções definidas respetivamente por

$$F(t) = \int_t^a f(x) dx, \quad t \in ] -\infty, a] \quad \text{e} \quad G(s) = \int_a^s f(x) dx, \quad s \in [a, +\infty[$$

Se existirem em  $\mathbb{R}$  os limites  $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t)$  e  $\lim_{s \rightarrow +\infty} G(s)$  diz-se que o integral impróprio  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  é convergente e escreve-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) + \lim_{s \rightarrow +\infty} G(s).$$

Se **um dos limites** não existir em  $\mathbb{R}$  o integral impróprio diz-se divergente.

**Observação 7.1.** Repare-se que se houver convergência num intervalo ilimitado, essa convergência mantém-se em qualquer seu subintervalo, contudo, o valor do integral impróprio poderá ser diferente.

- Seja  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  integrável em  $[a, t]$ , para todo o  $t \geq a$ . Se  $c \geq a$ , então os integrais impróprios  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  e  $\int_c^{+\infty} f(x) dx$  são da mesma natureza.
- Seja  $f : ] -\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável em  $[t, b]$ , para todo o  $t \leq b$ . Se  $c \leq b$ , então os integrais impróprios  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  e  $\int_{-\infty}^c f(x) dx$  são da mesma natureza.
- O estudo de um integral impróprio  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ , com  $f$  integrável em todo o intervalo limitado e fechado, não depende do ponto  $a \in \mathbb{R}$  que se escolhe para estudar os integrais impróprios  $\int_{-\infty}^a f(x) dx$  e  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ .

Os resultados deste exercício são muito úteis na prática para determinar a convergência ou divergência de outros integrais impróprios como mais à frente se verá.

**Exercício 7.7** Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios:

1.  $\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx;$
3.  $\int_{-1}^1 \frac{1}{|x|} dx;$
5.  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} dx;$
2.  $\int_{-1}^2 \frac{1}{4-x^2} dx;$
4.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx;$
6.  $\int_0^3 \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx.$

**Observação 7.2.** Nos integrais impróprios de 2ª espécie exige-se que a função seja ilimitada. Contudo, se a função for limitada mas não definida num dos extremos do intervalo, pode considerar-se um outro tipo de *integrais impróprios*.

Seja  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em qualquer intervalo  $[t, b]$  com  $t \in ]a, b]$  e limitada em  $]a, b]$ . Tem-se que

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx,$$

pois este integral é sempre convergente. Analogamente se formula para funções do tipo  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Exemplo 7.5.** O integral  $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$  é convergente.

Basta observar que a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua em  $[0, 1]$  e portanto integrável neste intervalo. Como  $g$  difere de  $f$  apenas num ponto (neste caso  $x = 0$ ),

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

Repare-se que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_t^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

**Exercício 7.8** Calcule  $\int_0^1 \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx$ .

## 7.4 Propriedades do integral impróprio

**Teorema 7.1.** Sejam  $f$  e  $g$  duas funções definidas em  $[a, +\infty[$  e integráveis em  $[a, t]$  para todo o  $t \geq a$ .

Se os integrais impróprios  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  e  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  forem **convergentes** então, quaisquer que sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , o integral impróprio  $\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx$  é convergente e

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x) dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

**Observação 7.3.** Se apenas um dos integrais  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  ou  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  for divergente então  $\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x)) dx$  é divergente; contudo, se ambos forem divergentes nada se pode concluir sem analisar o integral  $\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x)) dx$ .

**Exemplo 7.6.** Consideremos os integrais impróprios divergentes  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  e  $\int_1^{+\infty} -\frac{1}{x} dx$ . O integral impróprio  $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) dx = \int_1^{+\infty} 0 dx = 0$  é convergente.

Consideremos agora os integrais impróprios divergentes  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  e  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ . O integral impróprio  $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$  é divergente.

**Observação 7.4.** Se  $\alpha \neq 0$ ,  $\int_a^{+\infty} \alpha g(x) dx$  e  $\alpha \int_a^{+\infty} g(x) dx$  são da mesma natureza (ambos convergentes ou ambos divergentes).

As propriedades apresentadas no teorema 7.1 podem ser estabelecidas para os demais tipos de integrais impróprios com as devidas adaptações. Apresentamos apenas um dos casos de integral impróprio de 2ª espécie.

**Teorema 7.2.** Sejam  $f$  e  $g$  duas funções definidas em  $[a, b[$  e integráveis em  $[a, t]$  para todo o  $a \leq t < b$ .

Se os integrais impróprios  $\int_a^b f(x) dx$  e  $\int_a^b g(x) dx$  forem **convergentes** então, quaisquer que sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , o integral impróprio  $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx$  é convergente e

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

## 7.5 Critérios de convergência para integrais impróprios

Frequentemente a determinação de uma primitiva ou o cálculo de limites são processos morosos e alguns difíceis, daí que quando se pretende estudar apenas a convergência ou divergência de um integral impróprio se recorra a critérios específicos.

### 7.5.1 Critério de comparação

Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $b \in \widetilde{\mathbb{R}}^2$  com  $b > a$  e  $f, g : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  funções integráveis em  $[a, t]$  para todo o  $t$  tal que  $a < t < b$ .

Se existe  $c \in ]a, b[$  tal que  $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in ]c, b[$  e

(i) se  $\int_a^b g(x) dx$  converge, então,  $\int_a^b f(x) dx$  é convergente;

(ii) se  $\int_a^b f(x) dx$  diverge, então,  $\int_a^b g(x) dx$  é divergente.

---

<sup>2</sup>Poderemos ter integrais impróprios de 1ª espécie, quando  $b = +\infty$ .

Este critério aplica-se a integrais impróprios de 1ª espécie, quando  $b = +\infty$  ou a integrais impróprios de 2ª espécie onde a função  $f$  é ilimitada numa vizinhança de  $b \in \mathbb{R}$ .

De modo análogo, estabelece-se o critério de comparação para outros integrais impróprios de 1ª e de 2ª espécie.

**Observação 7.5.** Deve ter-se em atenção o facto de não se poder aplicar o critério de comparação entre integrais impróprios de espécies diferentes ou impróprios em pontos distintos.

**Exemplo 7.7.**  $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) dx$  é convergente?

Uma vez que,

- para cada  $x \geq 1$ ,  $0 \leq \sin\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$  ( $\forall x \geq 0$ ,  $\sin x \leq x$ )
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx$  é convergente (Proposição 7.1),

podemos concluir, pelo critério de comparação, que  $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) dx$  é convergente.

**Exercício resolvido 7.5.** Mostre que o integral  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x+1)^5} dx$  converge.

**Resolução do exercício 7.5.** Atendendo às seguintes desigualdades

$$0 \leq \frac{e^{-x^2}}{(x+1)^5} \leq \frac{1}{(x+1)^5} \leq \frac{1}{x^5}, \quad \forall x \geq 1$$

e ao facto de que  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^5} dx$  é convergente (Proposição 7.1) pode concluir-se que  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x+1)^5} dx$  é convergente. Como  $\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{(x+1)^5} dx$  é o integral de uma função contínua em  $[0, 1]$  logo existe (não é um integral impróprio), pode afirmar-se que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x+1)^5} dx = \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{(x+1)^5} dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x+1)^5} dx$$

é um integral convergente.

**Exercício 7.9** O integral  $\int_3^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$  converge?

### 7.5.2 Corolário do Critério de comparação

O critério de comparação enunciado em 7.5.1 pode ser usado sob a forma de limite.

**Proposição 7.3. (Critério do Limite)** Sejam  $f, g : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  integráveis em  $[a, t]$ , para todo o  $t \geq a$ . Suponhamos que, para cada  $x \in [a, +\infty[$ ,

$$f(x) \geq 0 \quad e \quad g(x) > 0$$

e seja  $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ .

- (i) Se  $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , então os integrais impróprios  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  e  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  são da mesma natureza.
- (ii) Se  $L = 0$  e  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  é convergente, então  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  é convergente.
- (iii) Se  $L = +\infty$  e  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  é divergente, então  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  é divergente.

**Observação 7.6.** De modo análogo, estabelece-se o critério do limite para integrais de 1ª espécie impróprios no limite inferior de integração. Com as devidas alterações, também se pode enunciar o critério do limite para integrais impróprios de 2ª espécie.

Exemplifica-se o critério do limite para um integral de 2ª espécie em que o problema se situa no extremo inferior de um intervalo  $]a, b]$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Proposição 7.4. (Critério do Limite)** Sejam  $f, g : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integráveis em  $[t, b]$ , para todo o  $t$  que satisfaz  $a < t \leq b$ . Suponhamos que, para cada  $x \in ]a, b]$ ,

$$f(x) \geq 0 \quad \text{e} \quad g(x) > 0$$

$$\text{e seja } L = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

- (i) Se  $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , então os integrais impróprios  $\int_a^b f(x) dx$  e  $\int_a^b g(x) dx$  são da mesma natureza.
- (ii) Se  $L = 0$  e  $\int_a^b g(x) dx$  é convergente, então  $\int_a^b f(x) dx$  é convergente.
- (iii) Se  $L = +\infty$  e  $\int_a^b g(x) dx$  é divergente, então  $\int_a^b f(x) dx$  é divergente.

Assim como no caso do critério de comparação, deve ter-se em atenção o facto de não se poder aplicar o critério do limite entre integrais impróprios de espécies diferentes ou impróprios em pontos distintos.

**Exemplo 7.8.** Considere-se o integral impróprio de 1ª espécie  $\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x} dx$ .

Observe-se que

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x} \geq 0, \quad \forall x \geq 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

Como  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  é divergente pode afirmar-se, por (i) da proposição 7.3, que  $\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x} dx$  é divergente.

**Exercício resolvido 7.6.** Determine a natureza do integral impróprio de 2ª espécie  $\int_1^2 \frac{x}{(x-1)(x+2)} dx$ .

**Resolução do exercício 7.6.** Só poderemos comparar integrais impróprios da mesma espécie e no mesmo ponto. Assim, consideremos o integral impróprio de 2ª espécie  $\int_1^2 \frac{1}{x-1} dx$ , que é divergente,

já que, sendo  $F(t) = \int_t^2 \frac{1}{x-1} dx = -\ln |t-1|$ , se tem

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} F(t) = +\infty.$$



No intervalo  $]1, 2]$ , as funções  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  e  $g(x) = \frac{x}{(x-1)(x+2)}$  são ambas positivas e estamos em condições de poder aplicar o critério do limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x}{(x-1)(x+2)}}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x+2} = \frac{1}{3}.$$

Sendo este limite um número real, podemos afirmar, por (i) do critério 7.4, que os integrais impróprios  $\int_1^2 \frac{1}{x-1} dx$  e  $\int_1^2 \frac{x}{(x-1)(x+2)} dx$  têm a mesma natureza. Como  $\int_1^2 \frac{1}{x-1} dx$  é divergente, também o integral  $\int_1^2 \frac{x}{(x-1)(x+2)} dx$  é divergente.

**Exercício 7.10** Estude, utilizando o critério de comparação ou critério do limite, a natureza dos seguintes integrais impróprios:

✓ 1.  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{\frac{5}{2}}} dx;$

3.  $\int_1^{+\infty} \frac{2x}{e^{2x}-1} dx;$

5.  $\int_0^{+\infty} e^{x^2} dx;$

✗ 2.  $\int_0^1 \frac{\pi}{1-\sqrt{x}} dx;$

4.  $\int_1^{+\infty} \frac{5x^2-3}{x^8+x-1} dx;$

✗ 6.  $\int_{-1}^0 \frac{-x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

## 7.6 Convergência absoluta

Um integral impróprio  $\int_a^b f(x) dx$ , com  $a, b \in \widetilde{\mathbb{R}}$ , diz-se **absolutamente convergente** quando o integral impróprio do módulo da função integranda,  $\int_a^b |f(x)| dx$ , for convergente.

**Teorema 7.3.** *Seja  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  integrável em  $[a, t]$  para todo o  $t \geq a$ . Se o integral impróprio  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  for convergente então  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  é também convergente.*

**Observação 7.7.** Podemos enunciar um resultado análogo a esta proposição para integrais de 1ª espécie impróprios no limite inferior de integração. Com as devidas alterações também se pode enunciar esta proposição para integrais impróprios de 2ª espécie.

Resumindo, **todo o integral impróprio absolutamente convergente é convergente.**

**Exemplo 7.9.** O integral impróprio  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{\sin x}{x^2} dx$  é absolutamente convergente. Repare-se que

$$\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}, \quad \forall x \leq -1$$

e que o integral impróprio  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$  é convergente. Então, pelo Critério de Comparação, o integral impróprio  $\int_{-\infty}^{-1} \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| dx$  converge e, portanto,  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{\sin x}{x^2} dx$  também converge (absolutamente).

**Exercício 7.11** Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios:

- ~~✓~~ 1.  $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ 
~~✓~~ 6.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} dx$ 
✓ 10.  $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx$
- ✓ 2.  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^5 + 2x}} dx$ 
~~✓~~ 7.  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 
~~✓~~ 11.  $\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx$
- ✓ 3.  $\int_0^{+\infty} e^{-2x} \operatorname{sen} \sqrt{x} dx$ 
✓ 8.  $\int_2^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)} dx$ 
~~✓~~ 12.  $\int_{-3}^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx$
- ✓ 4.  $\int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$ 
~~✓~~ 9.  $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^{\frac{5}{2}}} dx$ 
✓ 13.  $\int_1^{+\infty} \frac{-1}{x^3+1} dx$
- ✓ 5.  $\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos(3x)}{x^2+2} dx$

✓ **Exercício 7.12** Seja  $f(x) = \begin{cases} m & \text{se } |x| \leq 2 \\ 0 & \text{se } |x| > 2 \end{cases}$ . Determine  $m \in \mathbb{R}$  de modo a que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ .

~~✓~~ **Exercício 7.13** Mostre que o integral impróprio  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$  é convergente e tem valor igual a 2.

~~✓~~ **Exercício 7.14** Sejam  $\alpha > 0$  e  $f$  uma função real positiva e contínua no intervalo  $[0, 1]$ . Estude a natureza do seguinte integral impróprio em função do parâmetro  $\alpha$ .

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x^\alpha} dx.$$

✓ **Exercício 7.15** Estude a natureza do integral impróprio seguinte, indicando o seu valor em caso de convergência:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx.$$

✓ **Exercício 7.16** Considere a função de domínio  $\mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \frac{\arctan(2x)}{1+4x^2}.$$

1. Determine a família de primitivas  $\int f(x) dx$ .

2. Estude a natureza do integral impróprio  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ , indicando o seu valor em caso de convergência.

## Soluções dos exercícios

### Exercício 7.2

1. Converte e  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+x^2} dx = 2\pi$ .
2. Diverge.
3. Converte e  $\int_0^{+\infty} te^{-2t} dt = \frac{1}{4}$ .
4. Converte e  $\int_0^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-t} dt = \frac{1}{1-\alpha}$ ,  $(\alpha < 1)$ .

**Exercício 7.4** Diverge se  $\alpha \geq 0$  e converge se  $\alpha < 0$  sendo neste caso  $\int_0^{+\infty} e^{\alpha x} dx = -\frac{1}{\alpha}$ .

### Exercício 7.5

1. Diverge;
2. Diverge.

### Exercício 7.6

1. Diverge qualquer que seja  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
2. Se  $\alpha \leq 0$  o integral diverge, se  $\alpha > 0$  o integral converge e  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{\alpha x}} dx = \frac{1}{\alpha}$ .

### Exercício 7.7

1. Converte e  $\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \pi$ ;
2. Diverge;
3. Diverge;
4. Diverge;
5. Converte e  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} dx = \pi$ ;
6. Diverge.

**Exercício 7.8**  $e^{-1}$ .

**Exercício 7.9** Diverge.

### Exercício 7.10

- |              |              |              |
|--------------|--------------|--------------|
| 1. Converte; | 3. Converte; | 5. Diverge;  |
| 2. Diverge;  | 4. Converte; | 6. Converte. |

**Exercício 7.11**

- |                            |                             |                             |
|----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 1. Converge absolutamente; | 6. Converge absolutamente;  | 11. Diverge;                |
| 2. Converge absolutamente; | 7. Converge absolutamente;  |                             |
| 3. Converge absolutamente; | 8. Diverge;                 | 12. Converge absolutamente; |
| 4. Converge absolutamente; | 9. Converge absolutamente;  |                             |
| 5. Converge absolutamente; | 10. Converge absolutamente; | 13. Converge absolutamente. |

**Exercício 7.12**  $m = \frac{1}{4}$ .

**Exercício 7.14** O integral converge se  $\alpha < 1$  e diverge se  $\alpha \geq 1$ .

**Exercício 7.15** Divergente.

**Exercício 7.16**

1.  $\frac{\arctan^2(2x)}{4} + C$ , com  $C \in \mathbb{R}$ .
2. Converge e o seu valor é  $\frac{\pi^2}{16}$ .

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{\frac{5}{2}}} dx;$$

$$\begin{cases} \frac{\sin^2 u}{u^{5/2}} \leq \frac{1}{u^{5/2}} \\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{5/2}} du = \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^d} du \text{ com } d = 5/2 > 1 \\ \text{converge} \end{cases}$$

Pelo critério de comparação,  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^{5/2}} du$  converge

$$3. \int_1^{+\infty} \frac{2x}{e^{2x} - 1} dx;$$

$$4. \int_1^{+\infty} \frac{5x^2 - 3}{x^8 + x - 1} dx;$$

$$P_m \frac{5u^2 - 3}{u^8 + u - 1} \sim \frac{1}{u^6} \quad 5 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

converge p.p.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^6} du = \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^d} du$$

com  $d > 1$  converge

$$\int_1^{+\infty} \frac{2u}{e^{2u}} du = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{2u e^{-2u}}{1} du =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \left[ \frac{2u e^{-2u}}{-2} \right]_1^t - \int_1^t \frac{2 e^{-2u}}{-2} du \right) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \underbrace{-t e^{-2t}}_{\rightarrow 0} + e^{-1} + \left[ \frac{e^{-2u}}{-2} \right]_1^t \right) =$$

$$\left( e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} \right) = \frac{3}{2} e^{-1} \text{ converge}$$