Universidade de Aveiro
Teste 2 de Cálculo I - Agrupamento 2

8 de janeiro de 2020
Duração: 2 horas

Leia com atenção

- Justifique todas as suas respostas, indicando os cálculos efetuados e/ou os conceitos teóricos utilizados.
- Não pode ter consigo telemóvel nem qualquer dispositivo eletrónico (ainda que desligado).

1. **(45 pts)** Estude a natureza das seguintes séries, indicando quais são absolutamente convergentes, quais são simplesmente convergentes e quais são divergentes:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$. (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$. (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2. **(45 pts)** Considere o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+2)}\,dx$.

   (a) Determine a natureza do integral.

   (b) Mostre que o integral impróprio e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ com $a_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}$ têm a mesma natureza.

   (c) Determine, caso exista, a soma da série dada na alínea anterior.

3. **(30 pts)** Considere a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-5n+1}$.

   (a) Indique o seu termo geral.

   (b) A série satisfaz a condição necessária de convergência? Justifique.

   (c) Determine a expressão do termo geral da sucessão das somas parciais.

   (d) A série converge? Em caso afirmativo determine a sua soma.

4. **(25 pts)** Considere a função F definida em $\mathbb{R}$ por $F(x) = \displaystyle\int_1^{e^{x^2}} \frac{(\ln t)\ln(1+t)}{t}\,dt$.

   (a) Justifique que F é derivável em $\mathbb{R}$ e mostre que

   $$F'(x) = 2x^3 \ln\left(1+e^{x^2}\right).$$

   (b) Estude F quanto à monotonia (indicando intervalos de monotonia, caso existam) e existência de extremos locais (indique os pontos extremantes, caso existam).

5. **(20 pts)** Calcule a área do domínio limitado pelas representações gráficas das funções

   $$y = e^{2x} \quad \text{e} \quad y = e^{-(x+1)}$$

   e pelo **eixo dos** yy.

6. **(20 pts)** Determine o valor de $\beta \in \mathbb{R}$ de modo que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \beta e^{-3|x-1|}\,dx = 2$.

7. **(15 pts)** Seja $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que $\displaystyle\int_0^2 (x-1) f\left((x-1)^2\right)\,dx = 0$.

Uma ajuda

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{sen} x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ND

$$\sec u = \frac{1}{\cos u}; \quad \operatorname{cosec} u = \frac{1}{\operatorname{sen} u}; \quad \operatorname{cotg} u = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$$

$$\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}; \quad \operatorname{sen}^2 u = \frac{1-\cos(2u)}{2};$$

$$1+\operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u; \qquad 1+\operatorname{cotg}^2 u = \operatorname{cosec}^2 u$$

$$\operatorname{sen}(u+v) = \operatorname{sen} u \cos v + \operatorname{sen} v \cos u$$

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}(\cos(u-v) - \cos(u+v))$$

$$\cos u \cos v = \tfrac{1}{2}(\cos(u-v) + \cos(u+v))$$

$$\operatorname{sen} u \cos v = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen}(u-v) + \operatorname{sen}(u+v))$$

$(e^u)' = u'\, e^u$	$(\ln\|u\|)' = \frac{u'}{u}$	$(u^r)' = r\, u^{r-1} u'$
$(a^u)' = a^u\ \ln a\, u' (a>0 \text{ e } a \neq 1)$	$(\log_a \|u\|)' = \frac{u'}{u \ln a}\ (a>0 \text{ e } a\neq 1)$	$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$
$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$	$(\operatorname{tg} u)' = u' \sec^2 u$	$(\operatorname{cotg} u)' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$
$(\sec u)' = \sec u \operatorname{tg} u\, u'$	$(\operatorname{cosec} u)' = -\operatorname{cosec} u\ \operatorname{cotg} u\, u'$	$(\operatorname{arcsen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$	$(\operatorname{arccotg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$

$P(u' \sec u) = \ln\|\sec u + \operatorname{tg} u\|$	$P(u' \operatorname{cosec} u) = -\ln\|\operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u\|$

P - primitiva