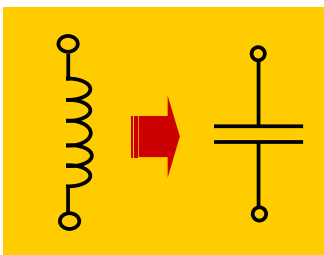


Sinais e Sistemas Electrónicos



Capítulo 3: Capacidade e Indutância



Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro



Sinais e Sistemas Electrónicos – 2023/2024

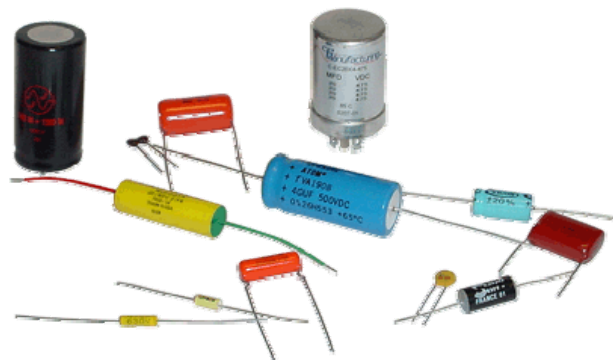
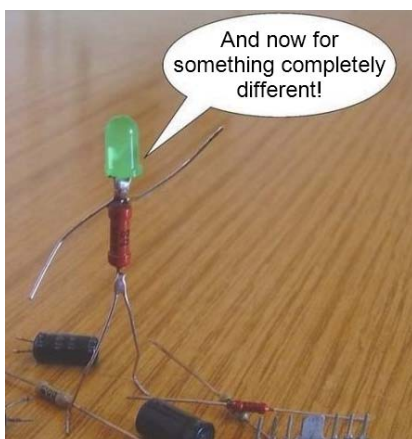
Sumário

- Capacidade e indutância como elementos passivos;
- Condensador e capacidade;
- Resposta ao degrau do circuito RC;
- Bobina e indutância;
- Combinação de bobinas e combinação de condensadores.

Introdução

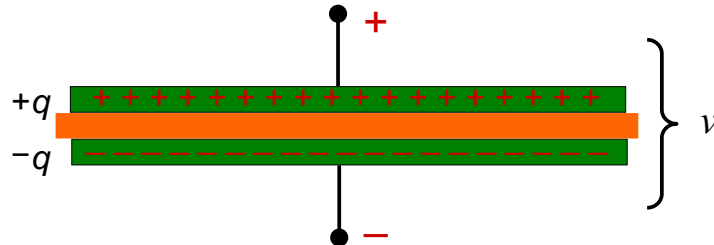
- A capacidade e a indutância são propriedades de dois novos elementos de circuito: o **condensador** e a **bobina**, respectivamente;
- Estes elementos são considerados **passivos** como as resistências, embora tenham a capacidade de **armazenar e fornecer quantidades finitas de energia**.

Condensador



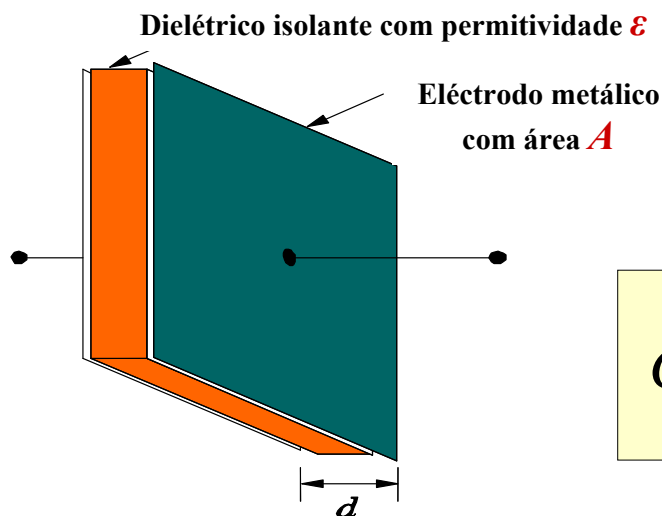
Condensador físico

- Constituído por duas superfícies condutoras paralelas separadas por um isolador.



- Quando submetido a uma tensão, v , o condensador carrega com uma quantidade de carga, q , determinada pela sua capacidade, C .

Condensador físico



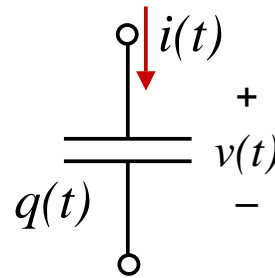
$$C = \epsilon \frac{A}{d}$$

Condensador – modelo matemático

- A capacidade do condensador define-se como:

$$C = \frac{q}{v}$$

$$1\text{Coulomb} / 1\text{Volt} = 1\text{ Farad}$$



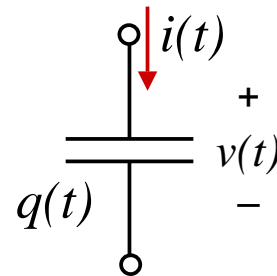
Símbolo

- Uma relação idêntica é:

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

Condensador – modelo matemático

$$i = C \frac{dv}{dt}$$



Símbolo

- Desta relação podemos desde logo concluir que:

- Uma **tensão constante** aos terminais de um condensador corresponde a uma **corrente nula** – o condensador é pois um **circuito aberto para DC**;
- Uma **variação brusca de tensão** aos terminais de um condensador requer uma **corrente infinita**. Como não temos nunca correntes infinitas, segue-se daqui que um condensador **não permite variações bruscas de tensão**.

Relação corrente-tensão

$$i = C \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow dv = \frac{1}{C} i dt$$

- Integrando ambos os lados da igualdade entre um instante inicial, t_0 , e t , obtém-se

$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt \Leftrightarrow v(t) - v(t_0) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt + v(t_0)$$

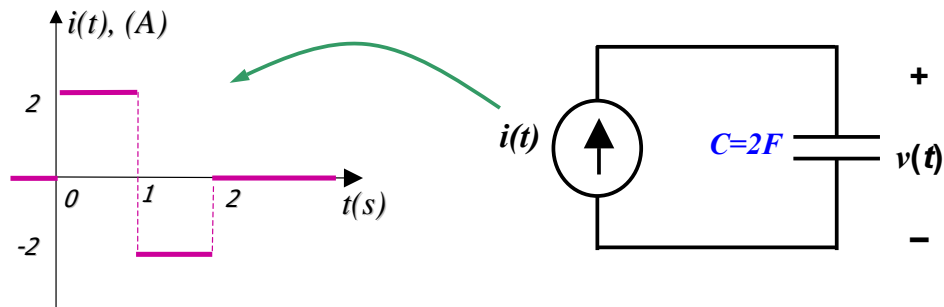
- Em muitas situações pode seleccionar-se, $t_0 = -\infty$ e $v(-\infty) = 0$, o que reduz o integral a

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt$$

Note-se que todas estas relações assumem a **Convenção de Sinais de Elemento Passivo** – a corrente entra no condensador pelo terminal marcado pela polaridade (+).

Exemplo 1

Calcular a tensão no condensador, $v(t)$, sabendo que $v(t=0) = -0.5V$.

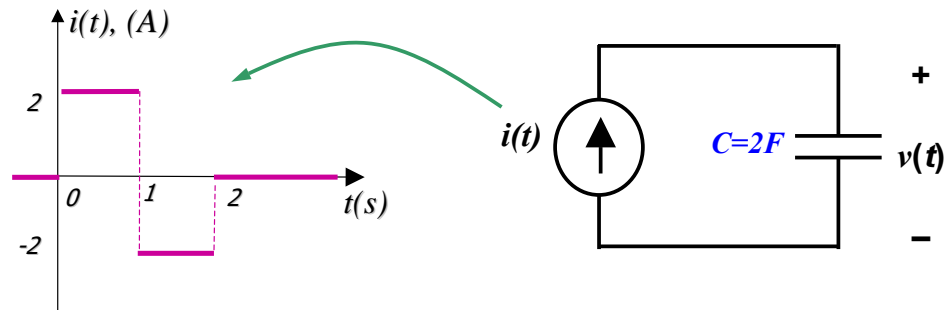


- Consideremos primeiro o intervalo 0 a 1s:

$$v_1(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + v(0) = \frac{1}{2} \int_0^t 2 dt - 0.5$$

$$v_1(t) = t - 0.5 \quad 0 \leq t \leq 1$$

Exemplo 1



● ... e agora o intervalo 1 a 2s:

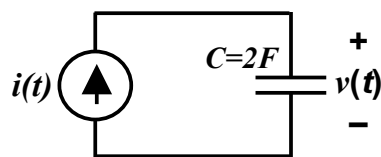
$$v_2(t) = \frac{1}{C} \int_1^t i dt + v_1(1) = \frac{1}{2} \int_1^t (-2) dt + 0.5 = \frac{1}{2} (-2t + 2) + 0.5$$

$$v_1(1) = 1 - 0.5 = 0.5V$$

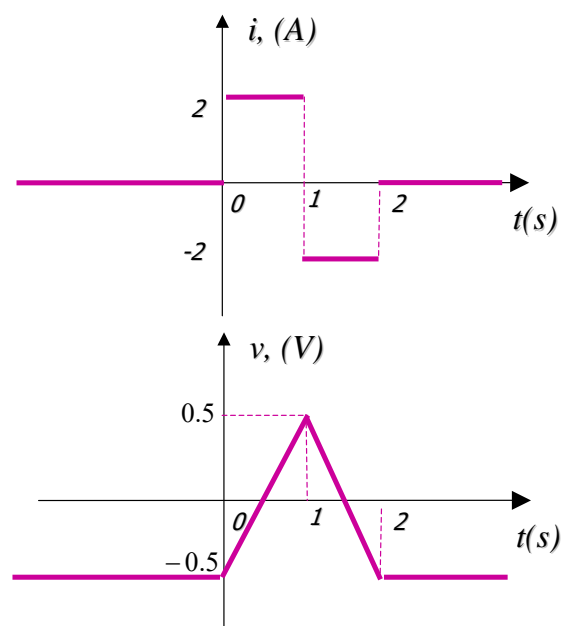
$$v_2(t) = -t + 1.5 \quad 1 \leq t \leq 2$$

Exemplo 1

● Obtemos então



$$v(t) = \begin{cases} -0.5 & t \leq 0 \\ t - 0.5 & 0 \leq t \leq 1 \\ -t + 1.5 & 1 \leq t \leq 2 \\ -0.5 & t \geq 2 \end{cases}$$

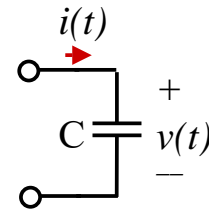


● $v(1)$ é igual à área do primeiro rectângulo de corrente x $1/C$ mais $v(0)$.

Energia armazenada num condensador

- A potência fornecida ao condensador é:

$$p = vi = vC \frac{dv}{dt}$$



- Como $p = dW/dt$, a energia armazenada no campo eléctrico é:

$$dw = p dt \Leftrightarrow \int_{W(t_0)}^{W(t)} dw = \int_{t_0}^t p dt = \int_{t_0}^t (vi) dt = C \int_{t_0}^t v \frac{dv}{dt} dt = C \int_{v(t_0)}^{v(t)} v dv$$

$$\int_{W(t_0)}^{W(t)} dw = C \left(\frac{v^2}{2} \right)_{v(t_0)}^{v(t)} \Leftrightarrow W(t) - W(t_0) = \frac{1}{2} C (v(t)^2 - v(t_0)^2)$$

- Se seleccionarmos t_0 de forma a que a tensão e a energia sejam ambos zero:

$$W(t) = \frac{1}{2} C v(t)^2$$

Condensador ideal – aspectos a reter

- Se a tensão aos terminais de um condensador **não varia com o tempo**, então a corrente através dele **é nula** – o condensador é um circuito aberto em DC;
- Uma quantidade finita de energia pode ser **armazenada** num condensador **mesmo quando $i = 0$** ;
- **É impossível variar instantaneamente** (i.e. em tempo zero) a tensão aos terminais de um condensador pois isso requer uma corrente infinita; Um condensador resiste a uma variação abrupta de tensão tal como uma mola resiste a uma mudança brusca no deslocamento;
- Ao contrário da resistência, um condensador **não dissipa energia**; apenas a armazena.

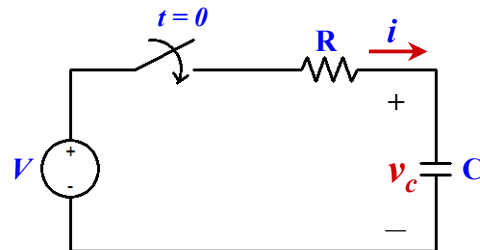
Resposta ao degrau do circuito RC

Resposta ao degrau do circuito RC

- O fecho do interruptor gera uma variação brusca da tensão no circuito

RC: um degrau de tensão;

- O condensador vai carregar gradualmente de 0 até V volts.



Aplicando KVL : $-V + Ri + v_c = 0$ com $i = C \frac{dv_c}{dt}$

$$RC \frac{dv_c}{dt} + v_c = V \Leftrightarrow RC dv_c = (V - v_c) dt \Leftrightarrow \frac{RC}{(V - v_c)} dv_c = dt$$

$$\Leftrightarrow RC \int_0^{v_c(t)} \frac{1}{V - v_c} dv_c = \int_0^t dt$$

Resposta ao degrau do circuito RC

$$RC \int_0^{v_c(t)} \frac{1}{V - v_c} dv_c = \int_0^t dt \quad \rightarrow \quad \boxed{\int \frac{1}{a + bx} = \frac{1}{b} \ln(a + bx)}$$

$$\Leftrightarrow -RC \ln(V - v_c) \Big|_0^{v_c(t)} = t \Big|_0^t$$

$$\Leftrightarrow -RC [\ln(V - v_c(t)) - \ln V] = t \quad \Leftrightarrow \ln \frac{V - v_c(t)}{V} = -\frac{t}{RC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{V - v_c(t)}{V} = e^{-t/RC}$$

$$\Rightarrow v_c(t) = V(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{em que } \tau = RC$$

é a **constante de tempo** do circuito

Resposta ao degrau do circuito RC

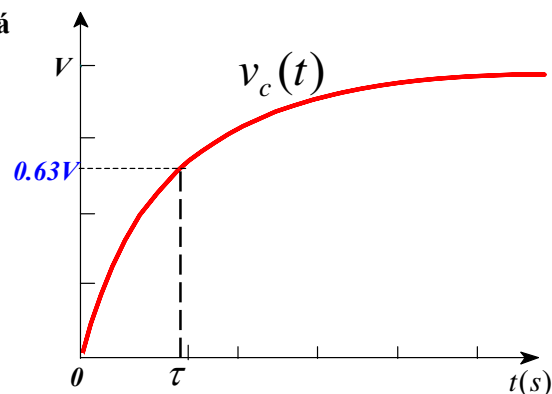
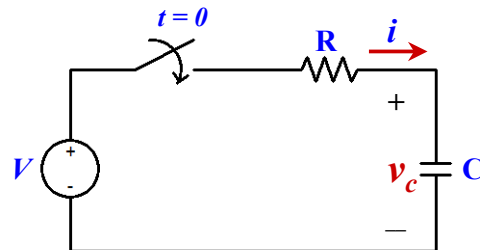
- Também chamada de **resposta transitória**.

$$v_c(t) = V(1 - e^{-t/\tau})$$

- τ quantifica a velocidade do circuito a responder ao degrau;

- Para $t = \tau$ a tensão no condensador está a **63%** do valor final.

t	v_c/V
τ	0.632
2τ	0.865
3τ	0.950
4τ	0.982
5τ	0.993



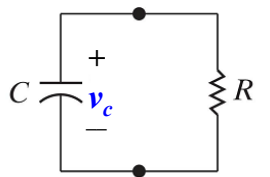
Resposta ao degrau do circuito RC

- Mais genericamente, a variação da tensão num condensador pode ser obtida por

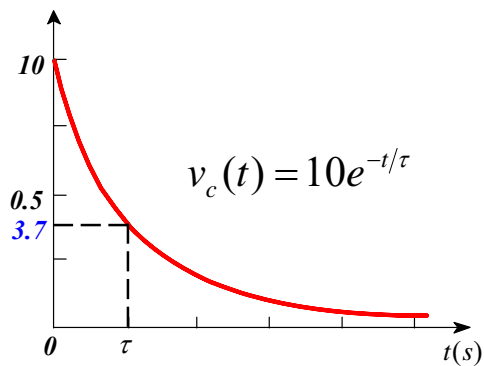
$$v_c(t) = V_{cf} + (V_{ci} - V_{cf})e^{-t/\tau}$$

em que V_{ci} – Tensão inicial no condensador ($t = 0$);
 V_{cf} – Tensão final no condensador ($t = \infty$).

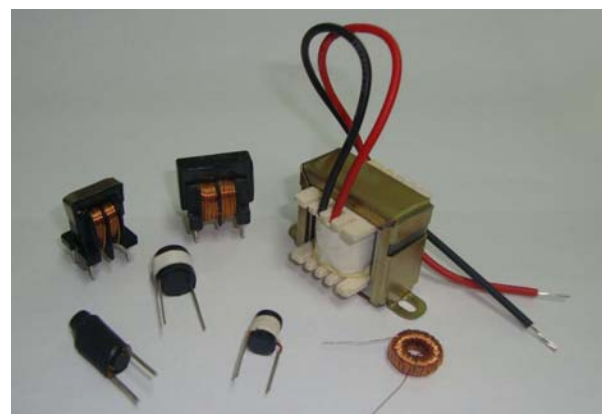
- Exemplo:



$$V_{ci} = 10V; V_{cf} = 0V$$

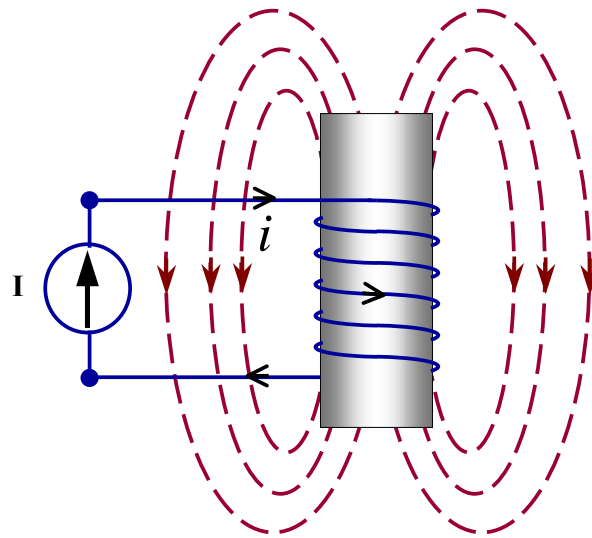


Bobinas



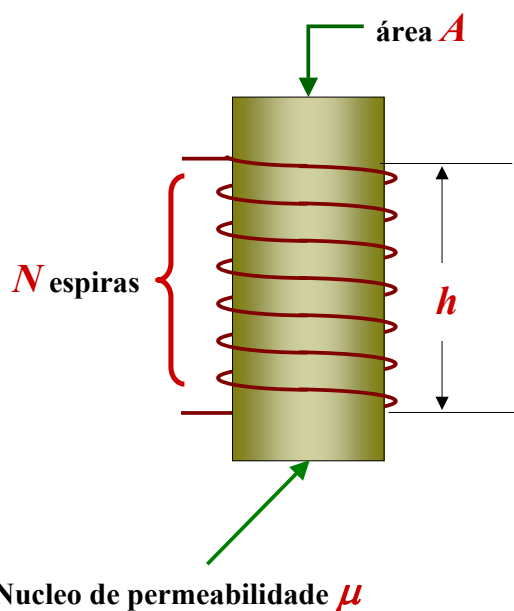
Bobina física

- Constituída por um certo número de espiras de fio condutor enroladas.



- Quando atravessada por uma corrente, i , a bobina produz um campo magnético com intensidade de fluxo, Φ , determinada pela sua indutância, L .

Bobina física



$$L = \mu \frac{N^2 A}{h}$$

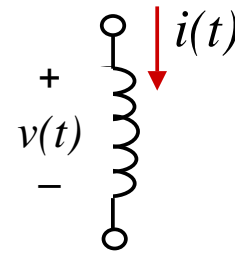
Expressão
aproximada, válida só
quando $h \gg \text{diâmetro}$

Bobina – modelo matemático

- A indutância da bobina define-se como:

$$L = \frac{\phi}{i}$$

$$1\text{Volt}.1\text{Segundo}/1\text{Ampére} = 1\text{ Henry}$$



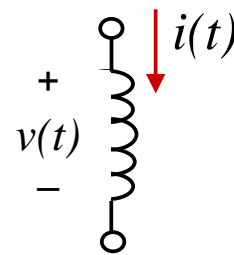
Símbolo

- Uma relação idêntica é:

$$v = L \frac{di}{dt}$$

Bobina – modelo matemático

$$v = L \frac{di}{dt}$$



Símbolo

- **Desta relação podemos desde logo concluir que:**
 - Tensão é **proporcional à taxa de variação da corrente**;
 - Se a corrente é constante a tensão é nula - **bobina é um curto-circuito para DC**;
 - Uma variação brusca de corrente requer tensão infinita. Como não temos tensões infinitas, segue-se que uma **bobina não permite variações bruscas de corrente**.

Relação corrente-tensão

$$v = L \frac{di}{dt} \Leftrightarrow di = \frac{1}{L} v dt$$

- Integrando ambos os lados da igualdade entre um instante inicial, t_0 , e t , obtém-se

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} di = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt \Leftrightarrow i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt + i(t_0)$$

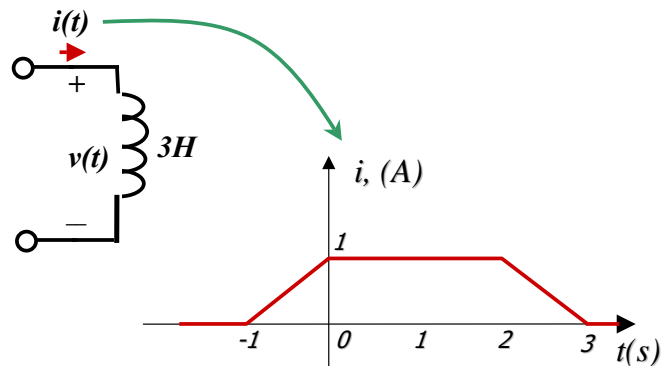
- Em muitas situações pode seleccionar-se, $t_0 = -\infty$ e $i(-\infty) = 0$, o que reduz o integral a

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v dt$$

Note-se que todas estas relações assumem a **Convenção de Sinais de Elemento Passivo** – a corrente entra na bobina pelo terminal marcado pela polaridade (+).

Exemplo 2

- Efeito da velocidade de variação da corrente na tensão da bobina

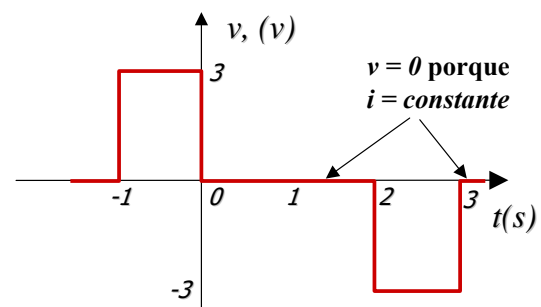


- No intervalo $-1 < t < 0$ a tensão será:

$$v_1 = L \frac{di}{dt} = 3 \frac{1\text{A}}{1\text{s}} = 3\text{V}$$

- No intervalo $2 < t < 3$ a tensão será:

$$v_2 = L \frac{di}{dt} = 3 \frac{-1\text{A}}{1\text{s}} = -3\text{V}$$



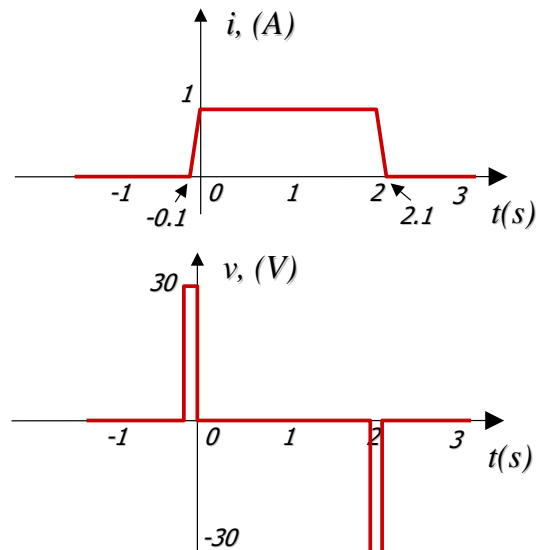
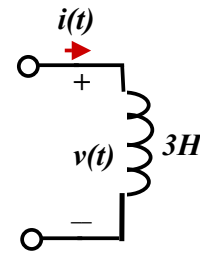
Exemplo 3

- Se a corrente variar mais rapidamente teremos na bobina tensões de:

$$v_1 = L \frac{di}{dt} = 3 \frac{1\text{A}}{0.1\text{s}} = 30\text{V};$$

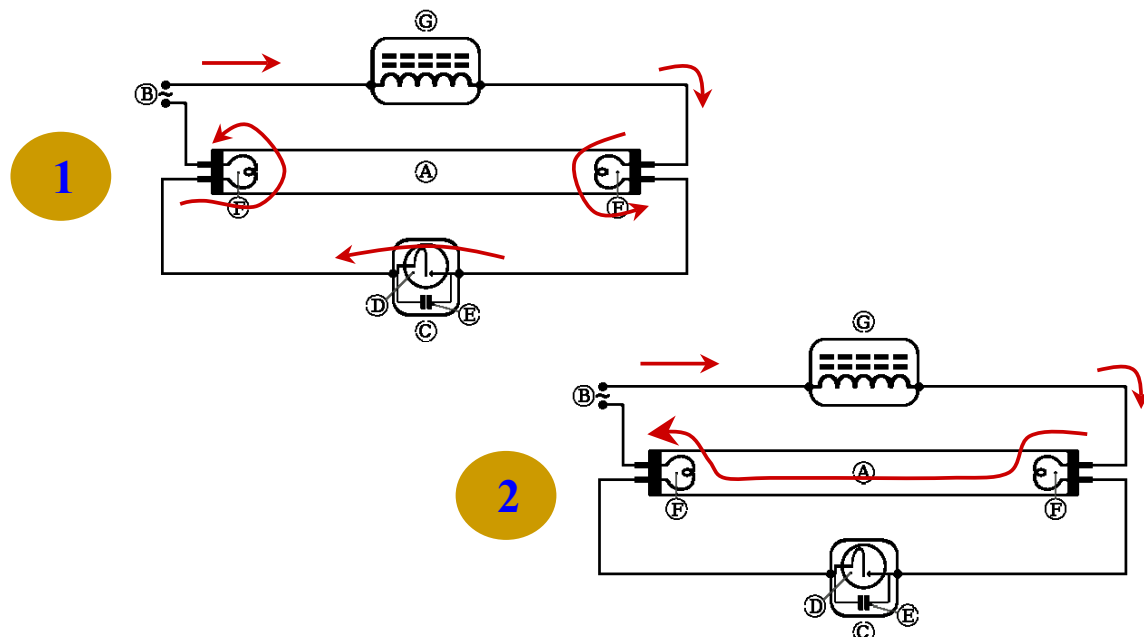
$$v_2 = -30\text{V}$$

- É por este motivo que a abertura de um interruptor num circuito indutivo causa, em geral, o aparecimento de um arco eléctrico – devido à tensão elevada que surge.



Curiosidade

- O aparecimento de uma tensão elevada devido à interrupção da corrente numa bobina constitui o princípio de funcionamento das lâmpadas fluorescentes:



Energia armazenada numa bobina

- A potência fornecida à bobina é:

$$p = vi = L \frac{di}{dt} i$$

- Como $p = dW/dt$, a energia armazenada no campo magnético é:

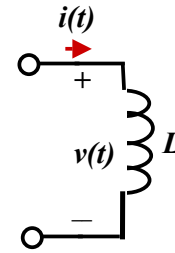
$$dw = p dt \Leftrightarrow \int_{W(t_0)}^{W(t)} dw = \int_{t_0}^t p dt = L \int_{t_0}^t i \frac{di}{dt} dt = L \int_{i(t_0)}^{i(t)} i di$$

$$\int_{W(t_0)}^{W(t)} dw = L \left(\frac{i^2}{2} \right)_{i(t_0)}^{i(t)}$$

$$W(t) - W(t_0) = \frac{1}{2} L (i(t)^2 - i(t_0)^2)$$

- Se seleccionarmos t_0 de forma a que a corrente e a energia sejam ambos zero:

$$W(t) = \frac{1}{2} L i(t)^2$$



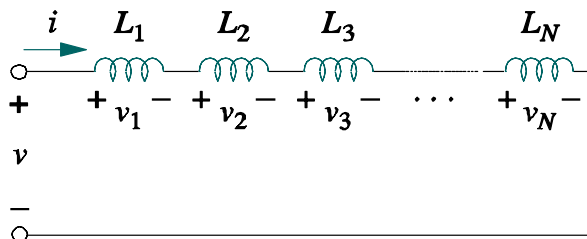
Bobina ideal – aspectos a reter

- A tensão aos terminais duma bobina **é zero** se a corrente que a atravessa **não varia com o tempo** – a bobina **é um curto-circuito em DC**;
- Uma quantidade finita de energia pode ser **armazenada** numa bobina mesmo quando $v = 0$ (i.e. a corrente é constante);
- É **impossível variar instantaneamente** (i.e. em tempo zero) a corrente aos terminais de uma bobina pois isso requer uma tensão infinita; Uma bobina **resiste a uma variação abrupta de corrente** assim como uma massa resiste a uma mudança brusca na velocidade;
- Ao contrário da resistência, uma bobina **não dissipa energia**; apenas a armazena.

Combinação de bobinas e condensadores

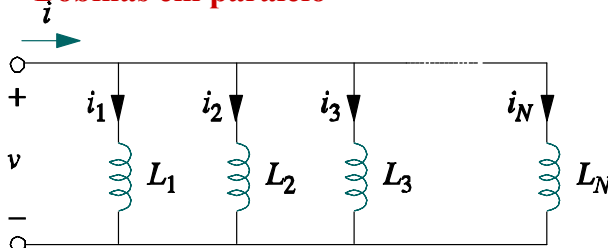
Combinações de bobinas

Bobinas em série



$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_N$$

Bobinas em paralelo



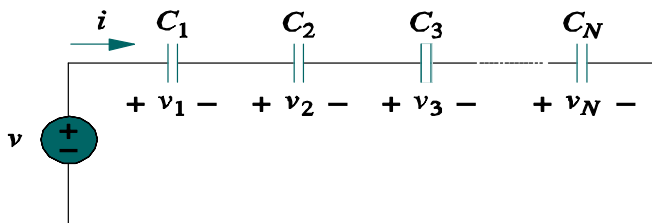
$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_N}$$

Nota: Para $N=2$ a indutância equivalente é dada por:

$$L_{eq2} = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}$$

Combinações de condensadores

Condensadores em série

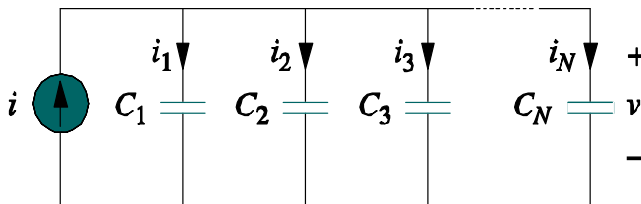


$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}$$

Nota: Para $N=2$ a capacidade equivalente é dada por:

$$C_{eq2} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

Condensadores em paralelo



$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_N$$