Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrup. 1 **19/06/2019**

Exame final Duração: 3h00

Os resultados usados devem ser enunciados com precisão e rigor. A qualidade e cuidado na redação da resposta são elementos importantes para a avaliação. Dúvidas na interpretação das questões devem ser explicitadas na prova.

3,0 val. **1.** Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4^{n+1}}(x+1)^{2n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16}x + \frac{1}{64}x^2 - \cdots$$

(a) Determine o raio de convergência da série.

(b) Justifique que a série de potências dada é a série de Taylor da função $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+5}$ centrada no ponto $c = -1$.

3,0 val. **2.** Determine a série de Fourier da função $f(x) = x^2, -\pi \leq x < \pi$. Usando a série de Fourier obtida justifique que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

4,0 val. **3.** Determine e classifique os extremos da função $f(x,y) = x^2 - 6x + (3-x)(y^3 - 3y)$.

3,0 val. **4.** Determine a solução da seguinte equação com derivadas ordinárias

$$y' = 2xy$$

que satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$.

4,0 val. **5.** Determine a solução geral da seguinte equação com derivadas ordinárias

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$$

3,0 val. **6.** Determine a transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{e^t \frac{d^{50}}{dt^{50}}\left(e^{-t}t^{50}\right)\}(s),$$

recordando que $\frac{d^{50}}{dt^{50}}f(t) = f^{(50)}(t)$.