Esta prova é constituída por 8 questões. A questão 8 deve ser respondida no próprio enunciado e entregue com as restantes folhas de resposta.

1. (**40 pts**) Considere a função definida por

$$f(x) = \operatorname{arcsen}(1 - e^x).$$

   (a) Determine o domínio e o contradomínio de f.

   (b) Calcule a derivada da função f e estude f quanto a intervalos de monotonia.

   (c) A função f admite máximo absoluto? E mínimo absoluto? Justifique a sua resposta.

   (d) A função f admite assíntotas? Em caso afirmativo, determine-as.

   (e) Determine a inversa da função f, indicando expressão analítica, domínio e contradomínio.

2. (**20 pts**) Seja $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.

   (a) Defina função estritamente decrescente em I.

   (b) Prove o seguinte resultado válido para qualquer função definida e contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$:

   Se f' assume valores estritamente negativos em $]a, b[$ então f é estritamente decrescente em $[a, b]$.

3. (**20 pts**) Seja f uma função racional definida em $\mathbb{R}^+$.

   (a) Supondo que

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 18}{x^2(x^2 + 9)^2},$$

   decomponha a função em elementos simples, sem efetuar os cálculos para determinar os coeficientes.

   (b) Supondo que

$$f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{x + 1}{x^2 + 9},$$

   determine $\displaystyle\int f(x)\, dx$.

4. (**15 pts**) Fazendo uma substituição adequada, determine $\displaystyle\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x} - 1}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$.

vire se faz favor

5. (**30 pts**) Considere a função g definida em $\mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x \cos^2 x & \text{se} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{\sqrt{x}}{2} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

(a) Determine as famílias de primitivas
(i) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos^2 x \, dx$; (ii) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{2} \, dx$.

(b) Justifique que a função g é integrável em qualquer intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ com $b > a$.

(c) Calcule a área da região do plano limitada pelo gráfico de g, pelo eixo Ox e pelas retas de equação $x = -\dfrac{\pi}{2}$ e $x = 2$.

6. (**25 pts**) Seja $f : [2, +\infty[\to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$.

(a) Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ e, em caso de convergência, indique o seu valor.

(b) Enuncie o Critério do Integral para séries numéricas e utilize-o para determinar a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$.

7. (**30 pts**) Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série numérica.

(a) Defina série convergente.

(b) Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-n} - e^{-n-2})$ é convergente e indique a sua soma.

(c) Determine a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n!}$ e, em caso de convergência, indique se a convergência é simples ou absoluta.

Universidade de Aveiro 23 de janeiro de 2023

Exame Final de Cálculo I - Agrupamento 2 Duração total: 2 horas 30 minutos

NOME:______________________________ Nº MEC.:__________

CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ______________________________

8. **(20 pts)** Para cada uma das questões seguintes, assinale a opção correta.

(a) Sabendo que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = -1$ e ainda que $a_1 = 2$ e $b_1 = -3$, podemos afirmar que

(A) $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1} + b_{n+1}) = 0$. .... ☐

(B) $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1} + b_{n+1}) = 1$. .... ☐

(C) $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1} + b_{n+1}) = -1$. .... ☐

(D) $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1} + b_{n+1}) = 2$. .... ☐

(b) Suponha que h é uma função satisfazendo as condições $h(1) = -2$, $h'(1) = 2$, $h''(1) = 3$, $h(2) = 6$, $h'(2) = 5$, $h''(2) = 13$ e h'' é uma função contínua em $\mathbb{R}$. Então,

(A) $\int_1^2 h''(u)\,du = 3$. .... ☐

(B) $\int_1^2 h''(u)\,du = 8$. .... ☐

(C) $\int_1^2 h''(u)\,du = 10$. .... ☐

(D) $\int_1^2 h''(u)\,du = -3$. .... ☐

(c) Se f é uma função contínua em $\mathbb{R}$ tal que $\int_0^x f(t)\,dt = xe^{2x} - \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt$, então

(A) $f(x) = \dfrac{e^{3x}(2x+1)}{e^x+1}$. .... ☐

(B) $f(x) = \dfrac{e^{2x}(2x+1)}{e^x+1}$. .... ☐

(C) $f(x) = \dfrac{2xe^{3x}}{e^x+1}$. .... ☐

(D) $f(x) = \dfrac{2xe^{2x}}{e^x+1}$. .... ☐

(d) Seja f uma função derivável e invertível em $\mathbb{R}$ satisfazendo as condições $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f'(1) = \frac{1}{4}$ e $f'(2) = 2$. Então

(A) $\left(f^{-1}\right)'(2) = 2$. .... ☐

(B) $\left(f^{-1}\right)'(2) = \dfrac{1}{2}$. .... ☐

(C) $\left(f^{-1}\right)'(2) = \dfrac{1}{4}$. .... ☐

(D) $\left(f^{-1}\right)'(2) = 4$. .... ☐

Fórmulas trigonométricas

$\sec u = \dfrac{1}{\cos u}$; $\operatorname{cosec} u = \dfrac{1}{\operatorname{sen} u}$; $\operatorname{cotg} u = \dfrac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$; $1 + \operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u$; $1 + \operatorname{cotg}^2 u = \operatorname{cosec}^2 u$

$\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1 - \cos(2u)}{2}$; $\cos^2 u = \dfrac{1 + \cos(2u)}{2}$; $\cos^2(\operatorname{arcsen} u) = 1 - u^2 = \operatorname{sen}^2(\arccos u)$

$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$; $\operatorname{sen}(u+v) = \operatorname{sen} u \cos v + \operatorname{sen} v \cos u$

$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \dfrac{\cos(u-v) - \cos(u+v)}{2}$; $\cos u \cos v = \dfrac{\cos(u-v) + \cos(u+v)}{2}$;

$\operatorname{sen} u \cos v = \dfrac{\operatorname{sen}(u-v) + \operatorname{sen}(u+v)}{2}$

Funções hiperbólicas

$\sinh(u) = \dfrac{e^u - e^{-u}}{2}$; $\cosh(u) = \dfrac{e^u + e^{-u}}{2}$; $\cosh^2(u) - \sinh^2(u) = 1$

Progressão aritmética de razão r

Termo geral: $u_n = u_1 + (n-1)r$; Soma dos n primeiros termos: $S_n = \dfrac{u_1 + u_n}{2} n$

Progressão geométrica de razão $r \neq 1$

Termo geral: $u_n = u_1 r^{n-1}$; Soma dos n primeiros termos: $S_n = u_1 \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Formulário de Derivadas

Função	Derivada	Função	Derivada	Função	Derivada
$K\, u \ (K \in \mathbb{R})$	$K\, u'$	$\ln\lvert u\rvert$	$\dfrac{u'}{u}$	u^r	$r\, u^{r-1} u'$
$\log_a \lvert u\rvert \ (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$	$\dfrac{u'}{u \ln a}$	e^u	$u'\, e^u$	$\operatorname{sen} u$	$u' \cos u$
$a^u (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$	$a^u \ln a\, u'$	$\cos u$	$-u' \operatorname{sen} u$	$\operatorname{tg} u$	$u' \sec^2 u$
$\operatorname{cotg} u$	$-u' \operatorname{cosec}^2 u$	$\sec u$	$\sec u \operatorname{tg} u\, u'$	$\operatorname{cosec} u$	$-\operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u\, u'$
$\operatorname{arcsen} u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arccos u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\operatorname{arctg} u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$
$\operatorname{arccotg} u$	$-\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{senh} u$	$u' \cosh u$	$\cosh u$	$u' \operatorname{senh} u$

Primitivas:

$$\int u' \sec u = \ln\lvert \sec u + \operatorname{tg} u\rvert \quad \text{e} \quad \int u' \operatorname{cosec} u = -\ln\lvert \operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u\rvert$$

$$\int \frac{1}{(x^2+a)^n}\, dx = \frac{1}{a}\left(\frac{x}{2(n-1)(x^2+a)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-1}\int \frac{1}{(x^2+a)^{n-1}}\, dx\right),\ a \neq 0,\ n \neq 1.$$