Universidade de Aveiro 19 de julho de 2021
Exame de Recurso de Cálculo II - Agrupamento 2 Duração total: 2 h 30 min

NOME:____ Nº MEC.:____________
ASSINALE A SUA OPÇÃO: RESPONDO SÓ À PARTE 1 DO EXAME ☐ RESPONDO SÓ À PARTE 2 DO EXAME ☐ RESPONDO AO EXAME COMPLETO ☐
DECLARO QUE DESISTO ☐ ____________________________________

Informações

1. Esta prova é constituída por 2 partes: parte 1 e parte 2.
2. Os alunos que **realizaram os dois testes de avaliação discreta** podem **optar por responder apenas a uma das partes correspondente ao teste em que tiveram pior nota** (Teste 1 - Parte 1, Teste 2 - Parte 2). Nesse caso, a classificação final à UC será a média aritmética da nota do melhor teste e a nota da parte que responderem neste exame. Podem também optar por resolver o exame na totalidade (Parte 1+Parte 2) e, nesse caso, a classificação final será a nota obtida neste exame. A nota final à UC para os estudantes que realizam o exame de recurso para melhoria será a melhor nota entre a classificação obtida na época normal e a obtida na época de recurso.
3. Deve usar uma folha para responder a cada questão e, se necessário, folhas de continuação distintas para cada questão.
4. Quando terminar a sua prova organize-a por questões e junte à folha de resposta de cada questão as correspondentes folhas de continuação (caso as tenha utilizado).
5. Preencha o cabeçalho desta folha com os seus dados e indicando a sua opção: Respondo só à Parte 1, Respondo só à parte 2, Respondo ao exame completo. No final, juntamente com a sua prova, entregue esta folha com o cabeçalho preenchido.
6. Justifique todas as suas respostas das questões, indicando os cálculos efetuados e/ou os conceitos teóricos utilizados.
7. Caso pretenda desistir desta prova, assinale-o no cabeçalho desta folha assinando no local a isso destinado e entregue todas as folhas de prova que lhe foram distribuídas.
8. Garanta que tem em cima da mesa de prova um documento que o identifique, com fotografia (preferencialmente o Cartão de Cidadão).
9. Só pode levar para a mesa onde vai realizar a prova material de escrita, não sendo permitido o uso de qualquer tipo de calculadora. **Não pode ter consigo telemóvel nem qualquer dispositivo eletrónico** (ainda que desligado).
10. No verso desta folha tem o formulário que pode usar na prova.

Formulário Transformada de Laplace

Função	Transformada	Função	Transformada	Função	Transformada
t^n $(n \in \mathbb{N}_0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $(s > 0)$	e^{at} $(a \in \mathbb{R})$	$\frac{1}{s-a}$ $(s > a)$	$\operatorname{sen}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$
$\cos(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$	$\operatorname{senh}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2-a^2}$ $(s > \|a\|)$	$\cosh(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2-a^2}$ $s > \|a\|$

Propriedades da transformada de Laplace

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, com $s > s_f$

$\mathcal{L}\{f(t)+g(t)\}(s) = F(s)+G(s)\,,\ s > \max\{s_f, s_g\}$	$\mathcal{L}\{\alpha f(t)\}(s) = \alpha F(s)\,,\ s > s_f$ e $\alpha \in \mathbb{R}$
$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\}(s) = F(s-\lambda)\,,\ s > s_f + \lambda$ e $\lambda \in \mathbb{R}$	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s)\,,\ s > s_f$ e $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{L}\{f(t-a)\}(s) = e^{-as} F(s)\,,\ s > s_f$ e $a > 0$	$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)\,,\ s > a\, s_f$ e $a > 0$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-2} f''(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

com $s > \max\{s_f, s_{f'}, s_{f''} \ldots, s_{f^{(n-1)}}\}$, $n \in \mathbb{N}$

Formulário de Primitivas

Função	Primitiva	Função	Primitiva	Função	Primitiva
$u^r u'$ $(r \neq -1)$	$\frac{u^{r+1}}{r+1}$	$\frac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	$u' e^u$	e^u
$u' a^u$	$\frac{a^u}{\ln a}$	$u' \cos u$	$\operatorname{sen} u$	$u' \operatorname{sen} u$	$-\cos u$
$u' \sec^2 u$	$\operatorname{tg} u$	$u' \operatorname{cosec}^2 u$	$-\operatorname{cotg} u$	$u' \sec u$	$\ln\|\sec u + \operatorname{tg} u\|$
$u' \operatorname{cosec} u$	$-\ln\|\operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u\|$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$-\arccos u$ ou $\operatorname{arcsen} u$	$\frac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arctg} u$ ou $-\operatorname{arccotg} u$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec u = \frac{1}{\cos u}$ $\operatorname{cosec} u = \frac{1}{\operatorname{sen} u}$	$\operatorname{sen}(2u) = 2 \operatorname{sen} u \cos u$ $\cos(2u) = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u$	$\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}$ $\operatorname{sen}^2 u = \frac{1-\cos(2u)}{2}$	$1 + \operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u$ $1 + \operatorname{cotg}^2 u = \operatorname{cosec}^2 u$

Universidade de Aveiro 19 de julho de 2021
Exame de Recurso de Cálculo II - Agrupamento 2 Duração total: 2 h 30 min

Parte 1 (100pts)

1. (**40pts**) Considere a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

   (a) Determine o domínio de convergência, D, desta série de potências, indicando os pontos onde a série é absolutamente convergente.

   (b) Mostre que a série dada converge uniformemente em qualquer intervalo da forma $[-a,a]$ com $a\in\mathbb{R}^+$.

   (c) Sabendo que $\operatorname{sen} x=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x\in D$,

      i. escreva o polinómio de Taylor de ordem $2n+1$ em torno de 0 da função $f(x)=\operatorname{sen} x$;

      ii. indique um polinómio de Taylor em torno de 0 da função $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ de modo a que o erro cometido ao aproximar f por esse polinómio seja inferior a 10^{-3} quando $|x|<1$. Justifique a sua resposta.

2. (**35pts**) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função periódica de período 2π definida em $]-\pi,\pi]$ por $f(x)=\pi-|x|$.

   (a) Mostre que a função f é par.

   (b) Prove que a série de Fourier de f é dada por
$$\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos\left((2n+1)x\right)}{(2n+1)^2}.$$

   (c) Determine a função soma da série de Fourier de f e esboce o seu gráfico no intervalo $\left[-\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$.

   (d) Calcule a soma da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}$.

3. (**25pts**) Sejam $\alpha\in\mathbb{R}$ e f a função definida em $\mathbb{R}^2$ por
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-4)^2(y-4)}{3(x-4)^2+3(y-4)^2}, & (x,y)\neq(4,4)\\ \alpha^2+\alpha, & (x,y)=(4,4)\end{cases}.$$

   (a) Mostre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,4)}f(x,y)=0$.

   (b) Determine o(s) valor(es) de α de modo a que f seja contínua em $(4,4)$.

Parte 2 no verso da folha.

Parte 2 (100pts)

4. (**25pts**) Considere a equação diferencial

$$y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}.$$

   (a) Determine o integral geral da equação diferencial.
   Sugestão: Use a substituição $\sqrt{y} = z$.

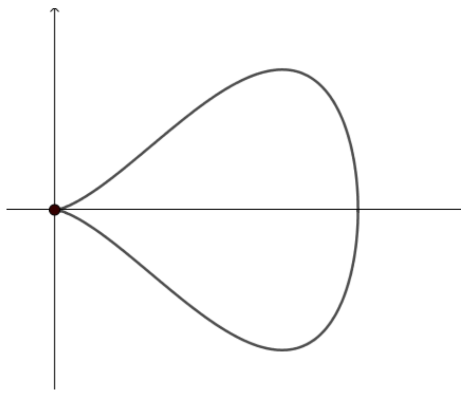
   (b) Determine uma solução particular da equação dada que satisfaça $y(0) = 2$.

5. (**25pts**) Determine uma equação diferencial linear completa de 2ª ordem de coeficientes constantes que satisfaça as seguintes condições:

   - $y_p = x^2$ é uma solução particular da equação completa;
   - $\{e^x, xe^x\}$ é um sistema fundamental de soluções para a equação diferencial linear homogénea associada.

6. (**25pts**) Seja f a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 6x^2 + y^2$. Encontre e classifique todos os pontos críticos de f.

7. (**25pts**) Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = x$ e a curva C de equação $y^2 + x^4 - x^3 = 0$ representada na figura seguinte.



   (a) Justifique que a função f admite máximo e mínimo absolutos sobre a curva C.

   (b) Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange para obter o máximo da função f sobre a curva C.

   (c) Indique, justificando, o mínimo da função f sobre a curva C.

Observação: Caso esteja nas condições do ponto 2 das informações e responda só a uma das partes do exame, a cotação de cada questão é o dobro da indicada.