Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrup. 1 **08/07/2019**

Exame de recurso Duração: 2h30

Os resultados usados devem ser enunciados com precisão e rigor. A qualidade e cuidado na redação da resposta são elementos importantes para a avaliação. Dúvidas na interpretação das questões devem ser explicitadas na prova.

3,0 val. **1.** Determine a série de Taylor da função $f(x) = xe^{-2x}$ no ponto $c = 0$. Qual é o raio de convergência da série?

2,0 val. **2.** Determine a série de Fourier da função f definida sobre o intervalo $[-\pi, \pi]$ e dado por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x, & -\pi \leq x < 0, \\ \frac{\pi}{2} - x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

4,0 val. **3.** Determine o mínimo da função $f(x, y) = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$ onde x e y são sujeitos a condição $x^2 - y^2 = 4$.

4,0 val. **4.** Determine a solução da seguinte equação com derivadas ordinárias

$$x^2 y' - y^3 = xy.$$

4,0 val. **5.** Determine a solução geral da seguinte equação com derivadas ordinárias

$$y'' + 3y' + 4y = 4x^2 - 2x.$$

3,0 val. **6.** Determine a transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{4}{s(s+2)(s+3)}.$$

4,0 val. **4.** Determine a solução da seguinte equação com derivadas ordinárias

$$x^2y' - y^3 = xy. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2 y' - xy = y^3$. Dividindo por x^2 vem,

$y' - \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2} y^3 \rightarrow$ Bernoulli com $\alpha = 3$.

Dividindo por y^3 temos

$$y^{-3} y' - \frac{1}{x} y^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

Fazendo $z = y^{1-\alpha} = y^{-2}$, $z' = -2y^{-3}y'$

$$-\frac{z'}{2} - \frac{1}{x} z = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow z' + \frac{2}{x} z = -\frac{2}{x^2} \rightarrow \text{linear.}$$

Fator integrante $\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2\ln|x|} = e^{\ln x^2} = x^2$.

$$x^2\left(z' + \frac{2}{x} z\right) = x^2 \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right) \Leftrightarrow (x^2 z)' = -2$$

$$x^2 z = -2x + c \Leftrightarrow z = -\frac{2}{x} + \frac{c}{x^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Voltando a y

$\frac{1}{y^2} = \frac{c - 2x}{x^2}$. Solução: $y^2 = \frac{x^2}{c - 2x}$, $c \in \mathbb{R}$.

(Verificação: $\bullet\ 2yy' = \frac{2x(c-2x) + 2x^2}{(c-2x)^2} \Leftrightarrow 2yy' = \frac{2xc - 4x^2 + 2x^2}{(c-2x)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{yy'} = \frac{xc - x^2}{(c-2x)^2}$

$\bullet\ \underline{\frac{1}{x} y^2 + \frac{1}{x^2} y^4} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{c-2x} + \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{x^2}{c-2x}\right)^2 = \frac{x(c-2x) + x^2}{(c-2x)^2} = \frac{xc - x^2}{(c-2x)^2}$

Equação: $x^2 yy' - y^4 = xy^2 \Leftrightarrow x^2 yy' = xy^2 + y^4 \Leftrightarrow \underline{yy'} = \underline{\frac{1}{x} y^2 + \frac{1}{x^2} y^4}$)

4,0 val. **5.** Determine a solução geral da seguinte equação com derivadas ordinárias

$$y'' + 3y' + 4y = \underbrace{4x^2 - 2x}_{b(x)}.$$

$y'' + 3y' + 4y = 0$

$p(r) = r^2 + 3r + 4$

$= \left(r + \frac{3}{2}\right)^2 + 4 - \frac{9}{4}$

$= \left(r + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$

$y_H = c_1 e^{-\frac{3}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + c_2 e^{-\frac{3}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right),$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$b(x) = P_m(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ com

$\alpha = \beta = 0$ e $P_m(x) = 4x^2 - 2x$ (grau 2)

$y_p = x^K e^{\overset{0}{\alpha} x} \left(\underbrace{Q(x)}_{\text{grau } 2} \underbrace{\cos(\overset{0}{\beta} x)}_{1} + R(x) \underbrace{\sin(\overset{0}{\beta} x)}_{0}\right)$

$= x^K (Ax^2 + Bx + C).$

$\alpha + i\beta = 0$ não é raiz de $P(r)$

Assim, $K = 0$ e

$y_p = Ax^2 + Bx + C$

$y_p = Ax^2 + Bx + C$, $y_p' = 2Ax + B$, $y_p'' = 2A$

Substituindo na equação completa obtem-se A, B e C:

$y_p'' + 3y_p' + 4y_p = 4x^2 - 2x \iff 2A + 3(2Ax + B) + 4(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2 - 2x$

$\iff 4Ax^2 + (6A + 4B)x + 2A + 3B + 4C = 4x^2 - 2x$

$$\begin{cases} 4A = 4 \\ 6A + 4B = -2 \\ 2A + 3B + 4C = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = \frac{1}{4}(-2 - 6A) = -2 \\ C = \frac{1}{4}(-2A - 3B) = \frac{1}{4}(-2 + 6) = 1 \end{cases}$$

$y_p = x^2 - 2x + 1$

Solução geral: $y = y_H + y_p = c_1 e^{-\frac{3}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + c_2 e^{-\frac{3}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + x^2 - 2x + 1$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3,0 val. **6.** Determine a transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{4}{s(s+2)(s+3)}.$$

$$\frac{4}{s(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

$$4 = A(s+2)(s+3) + Bs(s+3) + Cs(s+2)$$

$s = 0 \Rightarrow 4 = 6A \Leftrightarrow A = 2/3$

$s = -2 \Rightarrow 4 = B \times (-2) \times 1 \Leftrightarrow B = -2$

$s = -3 \Rightarrow 4 = C \times (-3) \times (-1) \Leftrightarrow C = 4/3$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s(s+2)(s+3)}\right\} = \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$$

$$= \underbrace{\frac{2}{3} - 2e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{-3t}}_{f(t)}, \quad t \geq 0.$$