Universidade de Aveiro 2 de setembro de 2020
Exame Especial de Cálculo I - Agrupamento 2 Duração total: 2 horas

NOME:____________________________________ Nº MEC.:____________

DECLARO QUE DESISTO ____________________________________

Informações

1. Esta prova é constituída por 4 questões.
2. Cada folha contém uma questão que deve ser respondida na própria folha (utilize, sempre que necessário, também o verso da folha).
3. Caso necessite de folhas de continuação, deve utilizar uma para cada questão e indicar na folha de continuação o número da questão no local indicado para o efeito.
4. Receberá também uma folha com o formulário que poderá utilizar durante a prova.
5. Caso pretenda desistir desta prova, <u>assinale-o no cabeçalho desta folha</u> assinando no local a isso destinado, entregue todas as folhas de prova que lhe foram distribuídas e coloque-as no local que lhe for indicado pelo professor vigilante da sala.
6. Caso não responda a uma das questões escreva isso na respetiva folha.
7. Quando terminar a sua prova organize-a de forma a juntar as folhas de continuação (caso as tenha utilizado) à folha da questão respetiva e coloque-as nos locais indicados pelo professor vigilante da sala. Não será necessário entregar esta folha de informações, exceto em caso de desistência.
8. <u>Justifique</u> todas as suas respostas das questões **1 a 3**, indicando os cálculos efetuados e/ou os conceitos teóricos utilizados.
9. Não pode ter consigo telemóvel nem qualquer dispositivo eletrónico (ainda que desligado).
10. Respeite todas as regras de segurança e mantenha o distanciamento social adequado.
11. Garanta que tem em cima da mesa de prova um documento que o identifique, com fotografia.
12. Só pode levar para a mesa onde vai realizar a prova, material de escrita. Não é permitida a utilização de qualquer tipo de calculadora.

Bom trabalho!

Universidade de Aveiro
Exame Especial de Cálculo I - Agrupamento 2

2 de setembro de 2020
Duração total: 2 horas

NOME:______________________________ Nº MEC.:__________

CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ______________________________

Questão 1 (50pts)

Considere a função real de variável real definida por $f(x) = (1-x)e^{-x}$.

1. Determine a primitiva da função f cujo gráfico contém o ponto $(0, 1)$.
2. Considere a função G definida em $\mathbb{R}$ por $G(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Estude a função G quanto a intervalos de monotonia e indique, caso existam, máximos e mínimos locais e absolutos de G.
3. Determine, justificando, a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.
4. Calcule a área da região do plano limitada pelo gráfico da função f e pela reta $y = 0$ no intervalo $[0, 5]$.

Universidade de Aveiro
Exame Especial de Cálculo I - Agrupamento 2

2 de setembro de 2020
Duração total: 2 horas

NOME:______________________________ Nº MEC.:__________
CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ______________________________

Questão 2 (50pts)

Considere a função definida em $D \subseteq \mathbb{R}$ por $h(x) = \ln(\arccos(x))$.

1. Determine o domínio D de h.
2. Determine a função inversa de h indicando o seu domínio.
3. Calcule a função derivada de h, indicando o seu domínio.
4. Calcule a família de primitivas $\displaystyle\int \frac{\ln(\arccos(x))}{\arccos(x)\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Universidade de Aveiro
Exame Especial de Cálculo I - Agrupamento 2

2 de setembro de 2020
Duração total: 2 horas

NOME:______________________________ Nº MEC.:____________

CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ______________________________

Questão 3 (50pts)

1. Estude a natureza da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n}{2^{2n}+2n}$, indicando se é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente.

2. Considere a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

   (a) Determine a expressão da sucessão das suas somas parciais.

   (b) Estude a convergência da série e indique o valor da sua soma (não necessariamente finita).

NOME:________________________________ Nº MEC.:____________

CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ______________________________

Questão 4 (50pts)

Para cada uma das alíneas assinale a **única** afirmação verdadeira.

1. O limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-e^{2x}}{\operatorname{sen} x}$ é

   (A) 0. .... ☐
   (B) -2. .... ☐
   (C) 2. .... ☐
   (D) 1. .... ☐

2. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}^+ \\ \frac{\pi}{2} + \ln\left(1-x^2\right) & \text{se} \quad x \notin \mathbb{R}^+ \end{cases}.$$

   (A) A função f é descontínua em 0. .... ☐
   (B) A função f é contínua no seu domínio. .... ☐
   (C) O domínio de f é $\mathbb{R}$. .... ☐
   (D) A função f não é derivável em $\dfrac{\pi}{2}$. .... ☐

3. O integral $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{sen} x + |\cos x|)\, dx$ é

   (A) 2. .... ☐
   (B) 0. .... ☐
   (C) -2. .... ☐
   (D) 4. .... ☐

4. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2}{1+n^3}$

   (A) é absolutamente convergente. .... ☐
   (B) é divergente. .... ☐
   (C) é simplesmente convergente. .... ☐
   (D) tem soma 1. .... ☐

5. O integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{6}{9+4x^2}\, dx$ é

   (A) absolutamente convergente. .... ☐
   (B) divergente. .... ☐
   (C) de terceira espécie. .... ☐
   (D) igual a 1. .... ☐

Uma ajuda

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{sen} x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ND

$$\sec u = \frac{1}{\cos u}; \quad \operatorname{cosec} u = \frac{1}{\operatorname{sen} u}; \quad \operatorname{cotg} u = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$$

$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos(2u)}{2}; \quad \operatorname{sen}^2 u = \frac{1 - \cos(2u)}{2};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u; \quad 1 + \operatorname{cotg}^2 u = \operatorname{cosec}^2 u$$

$$\operatorname{sen}(u+v) = \operatorname{sen} u \cos v + \operatorname{sen} v \cos u$$

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}(\cos(u-v) - \cos(u+v))$$

$$\cos u \cos v = \tfrac{1}{2}(\cos(u-v) + \cos(u+v))$$

$$\operatorname{sen} u \cos v = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen}(u-v) + \operatorname{sen}(u+v))$$

$(e^u)' = u'\, e^u$	$(\ln\lvert u\rvert)' = \frac{u'}{u}$	$(u^r)' = r\, u^{r-1} u'$
$(a^u)' = a^u \ln a\, u' (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$	$(\log_a \lvert u\rvert)' = \frac{u'}{u \ln a}$ $(a > 0 \text{ e } a \neq 1)$	$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$
$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$	$(\operatorname{tg} u)' = u' \sec^2 u$	$(\operatorname{cotg} u)' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$
$(\sec u)' = \sec u \operatorname{tg} u\, u'$	$(\operatorname{cosec} u)' = -\operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u\, u'$	$(\operatorname{arcsen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$	$(\operatorname{arccotg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$

$P(u' \sec u) = \ln\lvert\sec u + \operatorname{tg} u\rvert$	$P(u' \operatorname{cosec} u) = -\ln\lvert\operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u\rvert$

P - primitiva