Universidade de Aveiro 15 de julho de 2020

Exame de Recurso de Cálculo II - Agrupamento 2 Duração total: 2 horas

NOME:______________________________	Nº MEC.:__________
DECLARO QUE DESISTO ______________________________	

Informações

1. Esta prova é constituída por 5 questões.
2. Cada folha contém uma questão que deve ser respondida na própria folha (utilize, sempre que necessário, também o verso da folha).
3. Caso necessite de folhas de continuação, deve utilizar uma para cada questão e indicar na folha de continuação o número da questão no local indicado para o efeito.
4. Receberá também uma folha com o formulário que poderá utilizar durante a prova.
5. Caso pretenda desistir desta prova, assinale-o no cabeçalho desta folha assinando no local a isso destinado, entregue todas as folhas de prova que lhe foram distribuídas e coloque-as no local que lhe for indicado pelo professor vigilante da sala.
6. Caso não responda a uma das questões escreva isso na respetiva folha.
7. Quando terminar a sua prova organize-a de forma a juntar as folhas de continuação (caso as tenha utilizado) à folha da questão respetiva e coloque-as nos locais indicados pelo professor vigilante da sala. Não será necessário entregar esta folha de informações, exceto em caso de desistência.
8. Justifique todas as suas respostas das questões **1 a 4**, indicando os cálculos efetuados e/ou os conceitos teóricos utilizados.
9. Não pode ter consigo telemóvel nem qualquer dispositivo eletrónico (ainda que desligado).
10. Respeite todas as regras de segurança e mantenha o distanciamento social adequado.
11. Garanta que tem em cima da mesa de prova um documento que o identifique, com fotografia.
12. Só pode levar para a mesa onde vai realizar a prova, material de escrita. Não é permitida a utilização de qualquer tipo de calculadora.

Bom trabalho!

Universidade de Aveiro 15 de julho de 2020
Exame de Recurso de Cálculo II - Agrupamento 2 Duração total: 2 horas

NOME:____ Nº MEC.:____________

CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ____________________________________

Questão 1 (50pts)

Seja $f : \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(1+2x)$.

(a) Justifique que a derivada de ordem n da função f é dada por

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{2^n(n-1)!}{(1+2x)^n},\ n \geq 1.$$

(b) Escreva o polinómio de Taylor, $T_0^4(f(x))$, e o resto de Lagrange, $R_0^4(f(x))$, de ordem 4 da função f em torno de 0.

(c) Mostre que o polinómio $T_0^4(f(x))$ aproxima o valor de $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ com um erro absoluto que não excede 2^{-5}.

(d) Mostre que

$$\ln(1+2x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n\,x^n}{n}$$

indicando o maior intervalo aberto onde a igualdade é válida.

(e) Determine a soma da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\,2^n}$.

NOME:______________________________ Nº MEC.:____________

CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ______________________________

Questão 2 (40pts)

Considere a equação diferencial $y''' - 3y' - 2y = 0$.

(a) Verifique que $y = e^{2x}$ é solução da equação.

(b) Indique um sistema fundamental de soluções da equação diferencial dada.

(c) Determine uma solução particular da equação completa $y''' - 3y' - 2y = 2x + 1$.

(d) Determine a solução geral da equação completa $y''' - 3y' - 2y = 2x + 1$.

Universidade de Aveiro 15 de julho de 2020
Exame de Recurso de Cálculo II - Agrupamento 2 Duração total: 2 horas

NOME:______________________________ Nº MEC.:______________

CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ______________________________

Questão 3 (30pts)

Seja f a função $2\pi-$periódica definida em $]-\pi,\pi]$ por $f(x)=-|x|$.

(a) Faça um esboço do gráfico de f no intervalo $[-3\pi,3\pi]$.

(b) Justifique que a função f é par.

(c) Determine, justificando, os coeficientes da série de Fourier associada à função f e escreva a expressão dessa série.

(d) Indique, justificando, a função soma da série de Fourier obtida na alínea anterior.

Caso ajude...

$$\int x\ \mathrm{sen}\,(nx)\,dx=-\frac{x}{n}\cos(nx)+\frac{1}{n^2}\,\mathrm{sen}\,(nx)+K \quad \text{e} \quad \int x\cos(nx)\,dx=\frac{x}{n}\,\mathrm{sen}\,(nx)+\frac{1}{n^2}\cos(nx)+K,\ K\in\mathbb{R}$$

Nome:______________________________ Nº Mec.:____________

Classificação Questão: ______________________________

Questão 4 (40pts)

Considere uma chapa circular plana definida por $P = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\right\}$. A chapa, incluindo a sua fronteira, é aquecida de modo que a temperatura em qualquer ponto $(x, y) \in P$ é dada por $T(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$.

(a) Determine e classifique os pontos críticos de T no interior de P.

(b) Determine os pontos críticos de T na fronteira de P.

(c) Justifique que a função T admite máximo e mínimo globais na região P e determine-os, indicando o(s) maximizante(s) e minimizante(s).

NOME:______________________________ Nº MEC.:__________

CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ______________________________

Questão 5 (40pts)

Para cada uma das alíneas assinale a **única** afirmação verdadeira.

(a) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Considere que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(5,-2) = \frac{\partial f}{\partial y}(5,-2) = 0 \quad \text{e} \quad \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(5,-2)\right] \cdot \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(5,-2)\right] < 0.$$

Então,

- **(A)** $(5,-2)$ é um ponto de sela de f. ☐
- **(B)** $(5,-2)$ é um maximizante local de f. ☐
- **(C)** $(5,-2)$ é um minimizante local de f. ☐
- **(D)** nada se pode concluir usando o teste da segunda derivada no ponto $(5,-2)$. ☐

(b) A transformada de Laplace inversa de $F(s) = \dfrac{s + s^2 - 4}{s(s^2-4)}$, $s > 2$ é

- **(A)** $f(t) = 2\,\text{sen}\,(t) + t$, $t \geq 0$ ☐
- **(B)** $f(t) = 2\,\text{senh}\,(2t) + 1$, $t \geq 0$ ☐
- **(C)** $f(t) = \dfrac{1}{2}\,\text{senh}\,(2t) + 1$, $t \geq 0$. ☐
- **(D)** $f(t) = \dfrac{1}{2}\,\text{sen}\,(2t) + t$, $t \geq 0$ ☐

(c) Considere a equação diferencial

$$xy' - y - x^2 e^x = 0.$$

A equação diferencial dada é

- **(A)** uma EDO de variáveis separáveis. ☐
- **(B)** uma EDO homogénea. ☐
- **(C)** uma EDO linear homogénea. ☐
- **(D)** uma EDO linear completa. ☐

(d) Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy^2 - x^2y}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

- **(A)** Não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$. ☐
- **(B)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 1$. ☐
- **(C)** g é contínua em $\mathbb{R}^2$. ☐
- **(D)** g é descontínua em $(0,0)$. ☐

Formulário Transformada de Laplace

Função	**Transformada**	**Função**	**Transformada**	**Função**	**Transformada**
t^n $(n \in \mathbb{N}_0)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ $(s > 0)$	e^{at} $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{1}{s-a}$ $(s > a)$	$\operatorname{sen}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$
$\cos(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$	$\operatorname{senh}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$ $(s > \lvert a\rvert)$	$\cosh(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$ $s > \lvert a\rvert$

Propriedades da transformada de Laplace

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, com $s > s_f$

$\mathcal{L}\{f(t)+g(t)\}(s) = F(s)+G(s)\,,\ s > \max\{s_f, s_g\}$	$\mathcal{L}\{\alpha f(t)\}(s) = \alpha F(s)\,,\ s > s_f$ e $\alpha \in \mathbb{R}$
$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\}(s) = F(s-\lambda)\,,\ s > s_f + \lambda$ e $\lambda \in \mathbb{R}$	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s)\,,\ s > s_f$ e $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{L}\{f(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s)\,,\ s > s_f$ e $a > 0$	$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \dfrac{1}{a}\,F\left(\dfrac{s}{a}\right)\,,\ s > a\,s_f$ e $a > 0$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - s^{n-2}f''(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

com $s > \max\{s_f, s_{f'}, s_{f''} \ldots, s_{f^{(n-1)}}\}$, $n \in \mathbb{N}$

Formulário de Primitivas

Função	Primitiva	Função	Primitiva	Função	Primitiva
$u^r u'$ $(r \neq -1)$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	$u'e^u$	e^u
$u'a^u$	$\dfrac{a^u}{\ln a}$	$u'\cos u$	$\operatorname{sen} u$	$u'\operatorname{sen} u$	$-\cos u$
$u'\sec^2 u$	$\operatorname{tg} u$	$u'\operatorname{cosec}^2 u$	$-\operatorname{cotg} u$	$u'\sec u$	$\ln\lvert\sec u + \operatorname{tg} u\rvert$
$u'\operatorname{cosec} u$	$-\ln\lvert\operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u\rvert$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$-\arccos u$ ou $\operatorname{arcsen} u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arctg} u$ ou $-\operatorname{arccotg} u$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec u = \dfrac{1}{\cos u}$ $\operatorname{cosec} u = \dfrac{1}{\operatorname{sen} u}$	$\operatorname{sen}(2u) = 2\operatorname{sen} u\cos u$ $\cos(2u) = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u$	$\cos^2 u = \dfrac{1+\cos(2u)}{2}$ $\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1-\cos(2u)}{2}$	$1 + \operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u$ $1 + \operatorname{cotg}^2 u = \operatorname{cosec}^2 u$