Universidade de Aveiro 24 de junho de 2020
Teste Final de Cálculo II - Agrupamento 2 Duração total: 2 horas

NOME:______________________________ Nº MEC.:__________

DECLARO QUE DESISTO ______________________________

Informações

1. Esta prova é constituída por 5 questões.
2. Cada folha contém uma questão que deve ser respondida na própria folha (utilize, sempre que necessário, também o verso da folha).
3. Caso necessite de folhas de continuação, deve utilizar uma para cada questão e indicar na folha de continuação o número da questão no local indicado para o efeito.
4. Receberá também uma folha com o formulário que poderá utilizar durante a prova.
5. Caso pretenda desistir desta prova, assinale-o no cabeçalho desta folha assinando no local a isso destinado, entregue todas as folhas de prova que lhe foram distribuídas e coloque-as no local que lhe for indicado pelo professor vigilante da sala.
6. Caso não responda a uma das questões escreva isso na respetiva folha.
7. Quando terminar a sua prova organize-a de forma a juntar as folhas de continuação (caso as tenha utilizado) à folha da questão respetiva e coloque-as nos locais indicados pelo professor vigilante da sala. Não será necessário entregar esta folha de informações.
8. Justifique todas as suas respostas das questoes **1 a 4**, indicando os cálculos efetuados e/ou os conceitos teóricos utilizados.
9. Não pode ter consigo telemóvel nem qualquer dispositivo eletrónico (ainda que desligado).
10. Respeite todas as regras de segurança e mantenha o distanciamento social adequado.
11. Garanta que tem em cima da mesa de prova um documento que o identifique, com fotografia.
12. Só pode levar para a mesa onde vai realizar a prova, material de escrita. Não é permitida a utilização de qualquer tipo de calculadora.

BOA SORTE!

Universidade de Aveiro
Teste Final de Cálculo II - Agrupamento 2

24 de junho de 2020
Duração total: 2 horas

Nome: ______________________ Nº Mec.: ____________

Classificação Questão: ______________________

Questão 1 (40pts)

Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}.$$

(a) Determine o domínio de convergência da série, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

(b) Justifique que, no intervalo de convergência, a série de potências dada é a série de MacLaurin (série de Taylor em torno de $c = 0$) da função f definida por $f(x) = \ln(x+1)$.

(c) Determine o valor de $f^{(26)}(0)$.

Universidade de Aveiro
Teste Final de Cálculo II - Agrupamento 2

24 de junho de 2020
Duração total: 2 horas

NOME:______________________________ Nº MEC.:____________

CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ______________________________

Questão 2 (35pts)

Considere a equação diferencial ordinária

$$y' = (2-y)^2\,\mathrm{sen}(x), \text{ com } x \in]-\pi,\pi[.$$

(a) Obtenha o integral geral da equação diferencial.

(b) Determine uma solução particular que satisfaça a condição $y(0) = 1$.

(c) Determine, caso exista, uma solução da equação diferencial que satisfaça a condição $y(0) = 2$.

Universidade de Aveiro
Teste Final de Cálculo II - Agrupamento 2

24 de junho de 2020
Duração total: 2 horas

NOME: ______________________________	Nº MEC.: __________
CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ______________________________	

Questão 3 (35pts)

(a) Mostre que $\{x, e^x\}$ é um sistema fundamental de soluções da EDO linear homogénea

$$(1-x)y'' + xy' - y = 0, \;\; x \in]1, +\infty[.$$

(b) Determine a solução geral da EDO homogénea da alínea anterior.

(c) Determine a constante A tal que $y = Ax^2$ seja uma solução particular de

$$(1-x)y'' + xy' - y = x^2 - 2x + 2, \;\; x \in]1, +\infty[.$$

(d) Indique a solução geral da equação diferencial $(1-x)y'' + xy' - y = x^2 - 2x + 2, \;\; x \in]1, +\infty[$.

Universidade de Aveiro
Teste Final de Cálculo II - Agrupamento 2

24 de junho de 2020
Duração total: 2 horas

NOME:____ Nº MEC.:____________

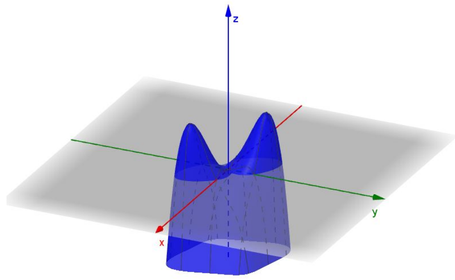
CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ____

Questão 4 (50pts)

Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = (x-y)^2 - x^4 - y^4$$

e cujo gráfico está representado na figura.



(a) Calcule as derivadas parciais de f, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

(b) Verifique que os únicos pontos críticos de f são $(0,0)$, $(1,-1)$ e $(-1,1)$.

(c) Escreva a matriz hessiana da função f num ponto genérico $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(d) Usando o teste da segunda derivada, conclua, se possível, a natureza dos pontos críticos de f, indicando caso existam, maximizante(s), minimizante(s), máximo(s) e mínimo(s) locais.

(e) Considere as funções $g(x) = f(x,x)$ e $h(x) = f(x,-x)$ para mostrar que o ponto crítico $(0,0)$ é um ponto de sela.

(f) Mostre que a função f não atinge mínimo global.

Universidade de Aveiro
Teste Final de Cálculo II - Agrupamento 2

24 de junho de 2020
Duração total: 2 horas

NOME:______________________________ Nº MEC.:____________

CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ______________________________

Questão 5 (40pts)

Para cada uma das alíneas assinale a **<u>única</u>** afirmação verdadeira.

(a) Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a.1) Podemos afirmar que:

(A) $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=mx,\, m\in\mathbb{R}}} f(x,y) = 0.$ .... ☐

(B) $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=mx,\, m\in\mathbb{R}}} f(x,y) = 1.$ .... ☐

(C) A função f é contínua em $(0,0)$. .... ☐

(D) Não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. .... ☐

(a.2) Atendendo às derivadas parciais de f em $(0,0)$ podemos afirmar que:

(A) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$ .... ☐

(B) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1.$ .... ☐

(C) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ não existe. .... ☐

(D) f é diferenciável em $(0,0)$. .... ☐

(b) Seja $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-2)^n$ uma série de potências com raio de convergência 4. Então:

(A) Podemos garantir que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, 4^n$ diverge. .... ☐

(B) Podemos garantir que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, (-7)^n$ converge. .... ☐

(C) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1)^n a_n = 0.$ .... ☐

(D) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0.$ .... ☐

(c) Recorde o conceito de transformada de Laplace e assinale qual o valor de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\cos(t)\, e^{-2t}\, dt.$

(A) $\dfrac{1}{10}$ .... ☐

(B) $\dfrac{3}{25}$ .... ☐

(C) $\dfrac{2}{5}$ .... ☐

(D) $-\dfrac{1}{5}$ .... ☐

Formulário Transformada de Laplace

Função	Transformada	Função	Transformada	Função	Transformada
t^n $(n \in \mathbb{N}_0)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ $(s>0)$	e^{at} $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{1}{s-a}$ $(s>a)$	$\operatorname{sen}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$ $(s>0)$
$\cos(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$ $(s>0)$	$\operatorname{senh}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$ $(s>\lvert a\rvert)$	$\cosh(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$ $s>\lvert a\rvert$

Propriedades da transformada de Laplace

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, com $s > s_f$

$\mathcal{L}\{f(t)+g(t)\}(s) = F(s)+G(s)\,,\ s > \max\{s_f, s_g\}$	$\mathcal{L}\{\alpha f(t)\}(s) = \alpha F(s)\,,\ s > s_f$ e $\alpha \in \mathbb{R}$
$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{\lambda t} f(t)\}(s) = F(s-\lambda)\,,\ s > s_f + \lambda$ e $\lambda \in \mathbb{R}$	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s)\,,\ s > s_f$ e $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{L}\{f(t-a)\}(s) = \mathrm{e}^{-as} F(s)\,,\ s > s_f$ e $a > 0$	$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \dfrac{1}{a}\, F\left(\dfrac{s}{a}\right)\,,\ s > a\, s_f$ e $a > 0$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-2} f''(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

com $s > \max\{s_f, s_{f'}, s_{f''} \ldots, s_{f^{(n-1)}}\}$, $n \in \mathbb{N}$

Formulário de Primitivas

Função	Primitiva	Função	Primitiva	Função	Primitiva
$u^r u'$ $(r \neq -1)$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	$u' e^u$	e^u
$u' a^u$	$\dfrac{a^u}{\ln a}$	$u' \cos u$	$\operatorname{sen} u$	$u' \operatorname{sen} u$	$-\cos u$
$u' \sec^2 u$	$\operatorname{tg} u$	$u' \operatorname{cosec}^2 u$	$-\operatorname{cotg} u$	$u' \sec u$	$\ln\lvert \sec u + \operatorname{tg} u\rvert$
$u' \operatorname{cosec} u$	$-\ln\lvert \operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u\rvert$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$-\arccos u$ ou $\operatorname{arcsen} u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arctg} u$ ou $-\operatorname{arccotg} u$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec u = \dfrac{1}{\cos u}$	$\operatorname{sen}(2u) = 2 \operatorname{sen} u \cos u$	$\cos^2 u = \dfrac{1+\cos(2u)}{2}$	$1 + \operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u$
$\operatorname{cosec} u = \dfrac{1}{\operatorname{sen} u}$	$\cos(2u) = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u$	$\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1-\cos(2u)}{2}$	$1 + \operatorname{cotg}^2 u = \operatorname{cosec}^2 u$