Universidade de Aveiro
Exame Final de Cálculo I - Agrupamento 2

8 de janeiro de 2020
Duração: 2 horas 30 minutos

Leia com atenção

- Justifique todas as suas respostas, indicando os cálculos efetuados e/ou os conceitos teóricos utilizados.
- Não pode ter consigo telemóvel nem qualquer dispositivo eletrónico (ainda que desligado).
- Esta prova é constituída por **9 questões**.

1. **(35 pts)** Seja f a função dada por
$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2\,\text{arcsen}\,(1-x)}{3}$$
   (a) Represente o domínio de f sob a forma de intervalo de números reais.
   (b) Caracterize a função inversa de f (indique expressão analítica e domínio).
   (c) Calcule $\text{sen}\,(f(2))$.

2. **(20 pts)** Seja f a função real de variável real definida por
$$f(x) = e^{x^2-1} - 1.$$
   (a) Mostre que no intervalo $[-1,1]$ se verificam as condições de aplicação do Teorema de Rolle.
   (b) Calcule o único ponto $c \in]-1,1[$ em que a derivada da função f se anula.

3. **(40 pts)** Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{x(x+2)}$.
   (a) Determine a família de primitivas $\displaystyle\int f(x)\,dx$.
   (b) Determine a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.
   (c) Mostre que o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ e a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ com $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$ têm a mesma natureza.
   (d) Determine, caso exista, a soma da série dada na alínea anterior.

4. **(20 pts)** Determine a primitiva F da função definida por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$, que satisfaz a condição $F(1) = \pi$.
   Sugestão: Use a mudança de variável $x = 2 + 2\,\text{sen}\,t$.

5. **(25 pts)** Estude a natureza das seguintes séries, indicando quais são absolutamente convergentes, quais são simplesmente convergentes e quais são divergentes:
   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$.   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

vire se faz favor

6. **(20 pts)** Considere a série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-5n+1}$.

   (a) Indique o seu termo geral.

   (b) A série satisfaz a condição necessária de convergência? Justifique.

   (c) Determine a expressão do termo geral da sucessão das somas parciais.

   (d) A série converge? Em caso afirmativo determine a sua soma.

7. **(20 pts)** Considere a função F definida em $\mathbb{R}$ por $F(x) = \displaystyle\int_1^{e^{x^2}} \frac{(\ln t)\ln(1+t)}{t}\,dt$.

   (a) Justifique que F é derivável em $\mathbb{R}$ e mostre que

   $$F'(x) = 2x^3 \ln\left(1 + e^{x^2}\right).$$

   (b) Estude F quanto à monotonia (indicando intervalos de monotonia, caso existam) e existência de extremos locais (indique os pontos extremantes, caso existam).

8. **(20 pts)** Calcule a área do domínio limitado pelas representações gráficas das funções

   $$y = e^{2x} \quad \text{e} \quad y = e^{-(x+1)}$$

   e pelo eixo dos yy.

9. **(20 pts)** Considere a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = e^{-3|x-1|}$.

   (a) Determine $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$.

   (b) Determine o valor de $\beta \in \mathbb{R}$ de modo que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \beta f(x)\,dx = 2$.

FIM

Uma ajuda

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{sen} x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ND

$$\sec u = \frac{1}{\cos u}; \quad \operatorname{cosec} u = \frac{1}{\operatorname{sen} u}; \quad \operatorname{cotg} u = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$$

$$\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}; \quad \operatorname{sen}^2 u = \frac{1-\cos(2u)}{2};$$

$$1+\operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u; \qquad 1+\operatorname{cotg}^2 u = \operatorname{cosec}^2 u$$

$$\operatorname{sen}(u+v) = \operatorname{sen} u \cos v + \operatorname{sen} v \cos u$$

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}(\cos(u-v) - \cos(u+v))$$

$$\cos u \cos v = \tfrac{1}{2}(\cos(u-v) + \cos(u+v))$$

$$\operatorname{sen} u \cos v = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen}(u-v) + \operatorname{sen}(u+v))$$

$(e^u)' = u'\, e^u$	$(\ln\lvert u\rvert)' = \frac{u'}{u}$	$(u^r)' = r\, u^{r-1} u'$
$(a^u)' = a^u\ \ln a\, u' (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$	$(\log_a \lvert u\rvert)' = \frac{u'}{u \ln a}\ (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$	$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$
$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$	$(\operatorname{tg} u)' = u' \sec^2 u$	$(\operatorname{cotg} u)' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$
$(\sec u)' = \sec u \operatorname{tg} u\, u'$	$(\operatorname{cosec} u)' = -\operatorname{cosec} u\ \operatorname{cotg} u\, u'$	$(\operatorname{arcsen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$	$(\operatorname{arccotg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$

$P(u' \sec u) = \ln\lvert \sec u + \operatorname{tg} u\rvert$	$P(u' \operatorname{cosec} u) = -\ln\lvert \operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u\rvert$

P - primitiva