**Universidade de Aveiro** 21 de fevereiro de 2022

**Exame de Recurso de Cálculo I - Agrupamento 2** Duração: 2 h 30 min

| | |
|---|---|
| NOME:____________________________________________ | Nº MEC.:____________ |
| CLASSIFICAÇÃO: QUESTÃO 1 ____________ | QUESTÃO 2 ____________ |

**Justifique todas as suas respostas, indicando os cálculos efetuados e/ou os conceitos teóricos utilizados.**

1. **(65 pts)** Considere a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \operatorname{arctg} x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}.$$

   (a) Justifique que o domínio de $f$ é $\mathbb{R}$ e determine o contradomínio de $f$.

   (b) Estude a função $f$ quanto à continuidade.

   (c) Defina assíntota ao gráfico de uma função e determine as equações de todas as assíntotas ao gráfico de $f$.

   (d) Determine a função derivada de $f$, $f'$, indicando o seu domínio.

   (e) Indique, justificando, o valor lógico da proposição:

$$\exists x \in ]-\sqrt{3}, -1[ : f'(x) = \frac{\pi}{-12 + 12\sqrt{3}}$$

   (f) Justifique que a função $f$ é injetiva e determine a a expressão da sua inversa, indicando o domínio e o contradomínio.

2. **(14 pts)** Determine a família de primitivas $\displaystyle\int \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1}\, dx$.

**Universidade de Aveiro** 21 de fevereiro de 2022
**Exame de Recurso de Cálculo I - Agrupamento 2** Duração: 2 h 30 min

| | |
|---|---|
| NOME:______________________________ | Nº MEC.:__________ |
| CLASSIFICAÇÃO: QUESTÃO 3 __________ | QUESTÃO 4 __________ |

**Justifique todas as suas respostas, indicando os cálculos efetuados e/ou os conceitos teóricos utilizados.**

3. **(30 pts)** Mostre que

   (a) $\displaystyle\int_6^9 \frac{3}{x^2\sqrt{x^2-9}}\,dx = \frac{\sqrt{8}}{9} - \frac{\sqrt{3}}{6}.$

   **Ajuda:** $\operatorname{sen}(\arccos(a)) = \cos(\operatorname{arcsen}(a)) = \sqrt{1-a^2}$, $\forall a \in [-1,1]$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2.$

   **Sugestão:** Comece por verificar que se trata de uma série de Mengoli.

4. **(15 pts)** Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx.$

**Universidade de Aveiro** — 21 de fevereiro de 2022

**Exame de Recurso de Cálculo I - Agrupamento 2** — Duração: 2 h 30 min

| | |
|---|---|
| NOME:______________________ | Nº MEC.:__________ |
| CLASSIFICAÇÃO: QUESTÃO 5 __________ | QUESTÃO 6 __________ |

**Justifique todas as suas respostas, indicando os cálculos efetuados e/ou os conceitos teóricos utilizados.**

5. **(20 pts)** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Considere a função $H$ definida por

$$H(x) = \int_{2x}^{x+x^2} f(t)\, dt\,, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Justifique que $H$ é derivável em $\mathbb{R}$ e mostre que

$$H'(1) - H(1) = f(2).$$

6. **(24 pts)** Determine a natureza das seguintes séries numéricas, indicando, em caso de convergência, se se trata de convergência simples ou absoluta.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\alpha)}{2^n}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}{n^n}$.

**Universidade de Aveiro** 21 de fevereiro de 2022
**Exame de Recurso de Cálculo I - Agrupamento 2** Duração: 2 h 30 min

**(A) Responda nesta folha e entregue-a juntamente com as restantes folhas de prova.**

NOME:______________________________ Nº MEC.:__________

CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO 7: ______________________________

7. **(32 pts)** Para cada uma das questões seguintes, assinale a opção correta.

(a) Seja $F$ a função definida em $\mathbb{R}$ por $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} e^{-t^2} dt$. O $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{F(x)}{x-1}$ é:

**(A)** $e$. .......... ☐
**(B)** $+\infty$. .......... ☐
**(C)** $1$. .......... ☐
**(D)** $e^{-1}$. .......... ☐

(b) Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos positivos divergente. Pode afirmar-se que

**(A)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+a_n}$ diverge. .......... ☐
**(B)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a_n}$ converge. .......... ☐
**(C)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ converge. .......... ☐
**(D)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_n}$ diverge. .......... ☐

(c) Seja $f$ a função real de variável real definida por $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$.

**(A)** O domínio de $f$ é $[-1,1]$ e o contradomínio é $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. .......... ☐
**(B)** O domínio de $f$ é $]-\infty, 0]$ e o contradomínio é $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. .......... ☐
**(C)** O domínio de $f$ é $]-\infty, 0[$ e o contradomínio é $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. .......... ☐
**(D)** O domínio de $f$ é $]-\infty, 0[$ e o contradomínio é $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. .......... ☐

(d) Seja A a região plana definida por:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \le 2a \wedge x^2 y \le a^3 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0 \wedge x \le 2a\}, \text{ com } a > 0.$$

A área da região $A$ pode ser dada por:

**(A)** $\displaystyle\int_0^{a/\sqrt{2}} 2a\, dx + \int_{a/\sqrt{2}}^{2a} \frac{a^3}{x^2}\, dx$. .......... ☐
**(B)** $\displaystyle\int_0^{2a} \frac{a^3}{x^2}\, dx$. .......... ☐
**(C)** $\displaystyle\int_0^{2a} \left(2a - \frac{a^3}{x^2}\right) dx$. .......... ☐
**(D)** $\displaystyle\int_0^{a/\sqrt{2}} \left(\frac{a^3}{x^2} - 2a\right) dx + \int_{a/\sqrt{2}}^{2a} \frac{a^3}{x^2}\, dx$. .......... ☐

**Fórmulas trigonométricas**

| | | |
|---|---|---|
| $\sec u = \dfrac{1}{\cos u}$ | $1 + \operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u$ | $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$ |
| $\operatorname{cosec} u = \dfrac{1}{\operatorname{sen} u}$ | $1 + \operatorname{cotg}^2 u = \operatorname{cosec}^2 u$ | $\operatorname{sen}(u+v) = \operatorname{sen} u \cos v + \operatorname{sen} v \cos u$ |
| $\operatorname{cotg} u = \dfrac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$ | $\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1-\cos(2u)}{2}$ | $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{sen} u)}{\cos u}$ | $\cos^2 u = \dfrac{1+\cos(2u)}{2}$ | $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ |

**Formulário de Derivadas**

| Função | Derivada | Função | Derivada |
|---|---|---|---|
| $K\,u\ (K \in \mathbb{R})$ | $K\,u'$ | $\ln\lvert u\rvert$ | $\dfrac{u'}{u}$ |
| $u^r$ | $r\,u^{r-1}u'$ | $\log_a \lvert u\rvert\ (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$ | $\dfrac{u'}{u \ln a}$ |
| $e^u$ | $u'\,e^u$ | $a^u (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$ | $a^u\ \ln a\, u'$ |
| $\operatorname{sen} u$ | $u' \cos u$ | $\cos u$ | $-u' \operatorname{sen} u$ |
| $\operatorname{tg} u$ | $u' \sec^2 u$ | $\operatorname{cotg} u$ | $-u' \operatorname{cosec}^2 u$ |
| $\sec u$ | $\sec u \operatorname{tg} u\, u'$ | $\operatorname{cosec} u$ | $-\operatorname{cosec} u\ \operatorname{cotg} u\, u'$ |
| $\operatorname{arcsen} u$ | $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ | $\arccos u$ | $-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| $\operatorname{arctg} u$ | $\dfrac{u'}{1+u^2}$ | $\operatorname{arccotg} u$ | $-\dfrac{u'}{1+u^2}$ |
| $\operatorname{senh} u$ | $u' \cosh u$ | $\cosh u$ | $u' \operatorname{senh} u$ |

**Duas primitivas**

| | |
|---|---|
| $\displaystyle\int u' \sec u = \ln\lvert \sec u + \operatorname{tg} u\rvert$ | $\displaystyle\int u' \operatorname{cosec} u = -\ln\lvert \operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u\rvert$ |