42729 - Cálculo II - Agrupamento 2 Teste 2

Data: 19 de junho de 2023 Duração: 2:00 h

Nome: ____________________

Curso: ____________

NMec: ____________

Nº folhas extra: ______

Questão	Cotação	Classificação
1	10	
2	5	
3	5	
Total:	20	

- **Desligue o telemóvel.**
- **Não é permitido o uso de qualquer material eletrónico.**
- **Na questão 1 escreva V ou F consoante a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique a sua resposta de modo sucinto: apenas uma frase. A resposta só é válida se for justificada.**
- **Nas restantes questões mostre os seus cálculos mas faça-o de modo claro e sucinto.**

Transformadas de Laplace fundamentais

1. $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \dfrac{1}{s-a}, \; s > a, a \in \mathbb{R}$
2. $\mathcal{L}\{\cos(at)\}(s) = \dfrac{s}{s^2+a^2}, \; s > 0, a \in \mathbb{R}$
3. $\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\}(s) = \dfrac{a}{s^2+a^2}, \; s > 0, a \in \mathbb{R}$
4. $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \; s > 0, n \in \mathbb{N}_0$
5. $\mathcal{L}\{\cosh(at)\}(s) = \mathcal{L}\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\}(s) = \dfrac{s}{s^2-a^2}, \; s > |a|, a \in \mathbb{R}$
6. $\mathcal{L}\{\operatorname{senh}(at)\}(s) = \mathcal{L}\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\}(s) = \dfrac{a}{s^2-a^2}, \; s > |a|, a \in \mathbb{R}$

Algumas propriedades das Transformadas de Laplace

$e^{\lambda t} f(t) \;\; (\lambda \in \mathbb{R})$	$F(s-\lambda)\,,\; s > s_f + \lambda$
$t^n f(t) \;\; (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n F^{(n)}(s)\,,\; s > s_f$
$f(t-a) \;\; (a > 0)$	$e^{-as} F(s)\,,\; s > s_f$
$f(at) \;\; (a > 0)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)\,,\; s > a\, s_f$
$f^{(n)}(t) \;\; (n \in \mathbb{N})$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$, onde $f^{(0)} \equiv f$, $s > \max\{s_f, s_{f'}, s_{f''} \ldots, s_{f^{(n-1)}}\}$

(10 val.) 1. No local próprio escreva V ou F consoante a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique a sua resposta usando apenas uma frase (se precisar fazer cálculos use uma folha de rascunho).

(a) ___ A função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$, é diferenciável em $(0,0)$.

(b) ___ Se $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ e $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, verificando

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)=0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\neq 0,$$

então (a,b) é um ponto de sela de f.

(c) ___ O ponto $(0,0)$ é maximizante local da função f definida por:

$$f(x,y)=4-x^4-y^4.$$

(d) ___ Sendo $f\in C^1(\mathbb{R}^3)$ e $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$ tais que $f(x,y,z)=z\,g(x,y)$, tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=z\,\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial g}{\partial x}(x,y).$$

(e) ___ Seja $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que $f(-1,3)=-1$ e $\nabla f(-1,3)=(0,2)$. Uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(-1,3,-1)$ é $z=2(y-3)$.

(f) ___ $y' = f(x,y)$, com $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$ é uma EDO homogénea.

(g) ___ O conjunto de funções $\{e^{-x}, e^{2x}\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação diferencial $y'' + 4y' + 3y = 0$.

(h) ___ Para $\alpha = 1$, a EDO de Bernoulli $y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha}$ é uma EDO de variáveis separáveis.

(i) ___ A transformada de Laplace da função $f(t) = t\,e^{2t}$ é dada por $\mathcal{L}\{f\}(s) = \dfrac{1}{s^2(s-2)}$, para $s > 2$.

(j) ___ Se $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que $f(0) = 1$ é um mínimo da função, então $\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\}(s) = s^2\,\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) + s$.

Por favor, responda a cada uma das questões seguintes em folhas independentes.

2. Considere a EDO completa $y''' + 3y'' + 3y' + y = \cos(x)$.
   (2 val.) (a) Determine a solução geral da EDO homogénea associada à EDO completa, sabendo que -1 é raiz da equação característica correspondente.
   (2 ½ val.) (b) Determine uma solução particular $y_p(x)$ da EDO completa. (Sugestão: Use o método dos coeficientes indeterminados.)
   (½ val.) (c) Determine a solução geral da EDO completa.

3. Considere o seguinte problema:
   Pretende-se determinar as dimensões do retângulo de maior área inscrito na elipse de equação $2x^2 + y^2 = 1$.
   (1 val.) (a) Justifique que o problema tem solução, ou seja, que tal retângulo existe.
   (1 val.) (b) Formule o problema como um problema de otimização com restrições.
   (3 val.) (c) Resolva o problema e indique a área do retângulo pedido.