Guião 1

Funções reais de variável real

Linguagem da matemática

Revisões sobre funções reais de variável real

Funções trigonométricas inversas

Teoremas sobre funções contínuas e deriváveis

Paula Oliveira

2021/22

Departamento de Matemática - Universidade de Aveiro

Capítulo 4

Teoremas sobre funções contínuas e funções deriváveis

Neste capítulo serão estudados alguns teoremas sobre funções contínuas e funções deriváveis e a sua aplicação ao estudo completo de funções.

4.1 Teoremas sobre funções contínuas

Os teoremas seguintes foram estudados no ensino secundário e são aqui revisitados.

4.1.1 Teorema de Bolzano

Teorema 4.1. ***(Teorema de Bolzano ou dos valores intermédios)*** *Se f é uma função contínua num intervalo $[a,b], a < b$, e $f(a) < Y < f(b)$ ou $f(b) < Y < f(a)$ então existe $X \in]a,b[$ tal que $f(X) = Y$.*

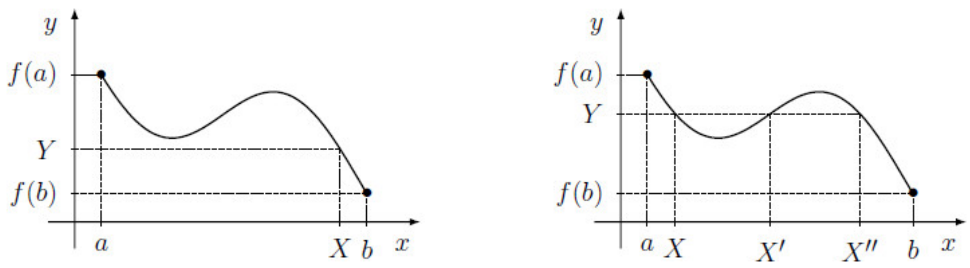

Figura 4.1: Interpretação geométrica do Teorema de Bolzano.

Este teorema estabelece que uma função contínua em $[a,b]$ assume todos os valores intermédios entre $f(a)$ e $f(b)$ (uma ou mais vezes).

Corolário 1. *Se f é contínua em $[a,b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$ então existe $x_0 \in]a,b[$ tal que $f(x_0) = 0$.*

Exemplo 4.1. A equação $\operatorname{sen} x + 2x - 1 = 0$ tem pelo menos uma solução em $\mathbb{R}$.

Consideremos a função contínua em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x + 2x - 1$. Calculando $f(0)$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ obtemos:

$$f(0) = -1 \quad \text{e} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi, \quad \text{portanto} \quad f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi < 0$$

e o Teorema de Bolzano (ou o seu corolário) permite-nos afirmar que a função se anula neste intervalo. Veremos à frente que esta função tem um único zero em $\mathbb{R}$.

Corolário 2. *Seja I um intervalo qualquer de $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então $f(I)$ é um intervalo.*

Demonstração. Sejam $y_1, y_2 \in f(I)$ arbitrários e suponha-se, sem perda de generalidade, que $y_1 < y_2$. Então

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad y_1 < y < y_2 \Rightarrow y \in f(I)$$

ou seja, $[y_1, y_2] \subseteq f(I)$, o que prova ser $f(I)$ um intervalo. □

4.1.1.1 Método da Bissecção

Uma das aplicações do corolário do teorema de Bolzano é a localização de raízes de equações não lineares.

Exemplo 4.2. Seja $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Pretende-se encontrar $\overline{x}$ entre 1 e 2 tal que $f(\overline{x}) = 0$. Como,

$$\left.\begin{array}{l} f(1)f(2) < 0 \\ \\ f \text{ é contínua em } [1,2] \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \overline{x} \in]1,2[: f(\bar{x}) = 0$$

Consideremos agora o ponto médio de $[1, 2]$, $x_1 = 1.5$. Como $|x_1 - \overline{x}| < 0.5$, x_1 é uma aproximação de $\overline{x}$ com erro inferior a 0.5. Aplicando novamente o teorema,

$$\left.\begin{array}{l} f(1)f(x_1) < 0 \\ \\ f \text{ é contínua em } [1,x_1] \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \overline{x} \in]1,x_1[: f(\bar{x}) = 0$$

Uma raiz da equação está em $]1, 1.5[$. Repetindo o processo anterior, seja $x_2 = 1.25$ (ponto médio de $[1, 1.5]$), temos

$|x_2 - \overline{x}| < 0.25$ e portanto x_2 é uma aproximação da raiz da equação com erro inferior a 0.25.

Como,

$$\left.\begin{array}{l} f(1)f(x_2) < 0 \\ \\ f \text{ é contínua em } [1,x_2] \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \overline{x} \in]1,x_2[: f(\bar{x}) = 0$$

podemos aplicar sucessivamente o resultado até obter uma aproximação de $\overline{x}$ com a precisão desejada.

4.1.2 Teorema de Weierstrass

Este teorema garante a existência de máximo e mínimo de uma função contínua num intervalo fechado.

Comecemos por recordar estas noções.

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ com contradomínio CD_f. Um ponto $c \in D_f$ é

- ponto de *máximo* (*mínimo*) *global* se $f(c)$ é o máximo (mínimo) de CD_f;
- ponto de *máximo* (*mínimo*) *local* se existe uma vizinhança $\mathcal{V}(c)$ tal que c é ponto de máximo (mínimo) global da restrição da função f ao conjunto $D \cap \mathcal{V}(c)$.

Um ponto c de máximo ou de mínimo local (global) diz-se *ponto de extremo local* (*global*) de f. Ao valor $f(c)$ chama-se *extremo local* (*global*) de f.

Para encontrar os extremos globais é preciso estudar os extremo locais e compará-los.

Um ponto de extremo c da função f diz-se *extremo estrito* quando $f(x) \neq f(c)$ para todo o x diferente de c numa vizinhança de c.

Pode recordar estes conceitos assistindo aos vídeos da Khan Academy extremos e exemplo.

Exercício 4.1 Encontre extremos e pontos de extremo locais e globais da função definida em $[-4, 6[$ pelo gráfico representado na figura 4.2, indicando os extremos estritos:

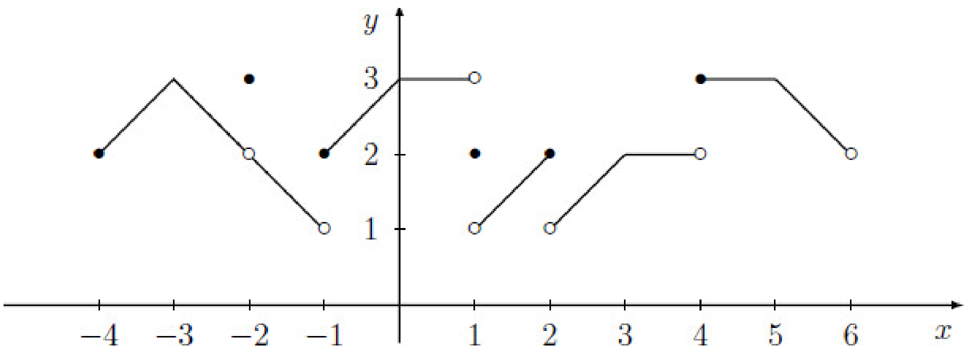

Figura 4.2: Gráfico da função.

Teorema 4.2. ***(Teorema de Weierstrass)*** *Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se D_f é um conjunto limitado e fechado e f é contínua em D_f, então f atinge em D_f o seu máximo e o seu mínimo, isto é, existem $x_m, x_M \in D_f$ tais que, $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$, para todo o $x \in D_f$. Consequentemente, o contradomínio da função é $f(D_f) = [f(x_m), f(x_M)]$.*

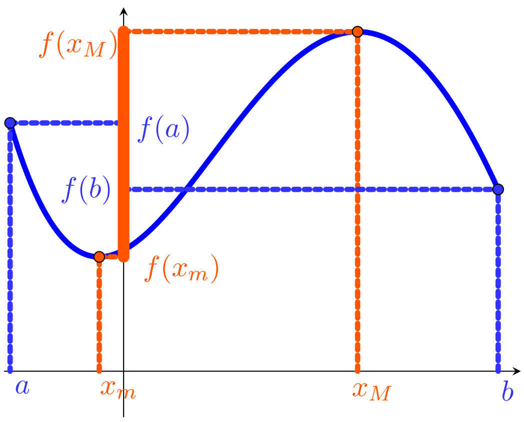

Figura 4.3: Interpretação geométrica do Teorema de Weierstrass.

Demonstração. Comecemos por provar que f é limitada. Suponha-se, pelo contrário, que f é contínua, mas não limitada em $[a, b]$. Então, para todo o $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in [a, b]$ tal que se tem $|f(x_n)| > n$. A sucessão $(x_n)_{n \geq 1}$ é limitada, já que $a \leq x_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e, portanto, admite uma subsucessão $(x_{n_\tau})_{\tau \geq 1}$, convergente[1]. Seja $\lim\limits_{\tau \to \infty} x_{n_\tau} = \overline{x} \in [a, b]$.
Tem-se então, por um lado, que

$$\lim_{\tau \to \infty} |f(x_{n_\tau})| = +\infty$$

[1] Toda a sucessão limitada admite uma subsucessão convergente.

enquanto que

$$\lim_{\tau\to\infty} |f(x_{n_\tau})| = |f(\overline{x})| < +\infty$$

já que, da continuidade de f decorre (como facilmente se verifica) a continuidade de $|f|$.
A contradição resultou de se ter suposto que a função f era não limitada.

Seja $M = \sup f(x)$ e suponha-se que

$$f(x) < M \ , \ \forall x \in [a,b].$$

Então a função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \ , \ a \le x \le b$$

é contínua e, portanto, de acordo com o o que vimos no início da demonstração para a função f, é limitada.
Seja $c = \sup g(x)$. É claro que se tem $c > 0$ e

$$g(x) \le c \ , \ \forall x \in [a,b]$$

donde resulta que

$$f(x) \le M - \frac{1}{c} \ , \ \forall x \in [a,b]$$

o que é contrário à definição de M.
Consequentemente,

$$\exists x_1 \in [a,b] : f(x_1) = M$$

e, portanto, $M = \max f(x)$.
Demonstração análoga se pode fazer para o caso do mínimo. $\square$

- A função $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ não é limitada. Isto contradiz o teorema anterior?
- A função $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ é contínua e limitada. Assume o valor máximo em $x=0$, mas não existe $x \in [0,+\infty[$ tal que $g(x)$ seja mínimo. Porquê?

Exercício 4.2 Considere a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \arctan x & \text{se } x \ge 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

1. Estude f quanto à continuidade.
2. Determine, caso existam, as assímptotas ao gráfico de f.
3. Determine os pontos de intersecção do gráfico de f com a reta de equação $y = \frac{1}{2}$.

Exercício 4.3 Considere a função g dada por

$$g(x) = \frac{3\pi}{5} - \arccos\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

Utilize o teorema de Bolzano para justificar que g admite uma raiz no intervalo $]0,2[$.

Exercício 4.4 Considere a função f, real de variável real, tal que $f(x) = \frac{1}{x-1}$

1. f é contínua em $]1,2]$? f é limitada em $]1,2]$?
2. Existe contradição com o teorema de Weierstrass?

Exercício 4.2 Considere a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \arctan x & \text{se } x \geq 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

1. Estude f quanto à continuidade.
2. Determine, caso existam, as assímptotas ao gráfico de f.
3. Determine os pontos de intersecção do gráfico de f com a reta de equação $y = \frac{1}{2}$.

1. $x > 0$ ...

$x < 0$ ...

$x = 0$ $\quad f(0) = \frac{1}{2} + \arctan 0 = \frac{1}{2} + 0 = 1/2 = \lim_{x \to 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0 \neq 1/2$$

$\therefore$ $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe e por isso f não é contínua em 0.

2. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ $\quad$ assimpt. $y = 1$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2} + \arctan x = \frac{1}{2} + \pi/2$

assimpt. $y = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}$

3. $f(x) = 1/2 \Leftrightarrow \left(\cancel{1/2} + \arctan x = \cancel{1/2} \wedge x \geq 0 \right) \vee$

$\left(e^{1/x} = 1/2 \wedge x < 0 \right)$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee 1/x = \ln(1/2) \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{1}{\ln 2}$

4.2 Teoremas sobre funções deriváveis

Vamos estudar alguns teoremas sobre funções deriváveis em intervalos de $\mathbb{R}$ que nos permitem fazer o estudo completo de funções, incluindo monotonia, extremos e sentidos das concavidades dos seus gráficos.

4.2.1 O Teorema de Rolle

Teorema 4.3. ***(Teorema de Rolle)*** *Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$ então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

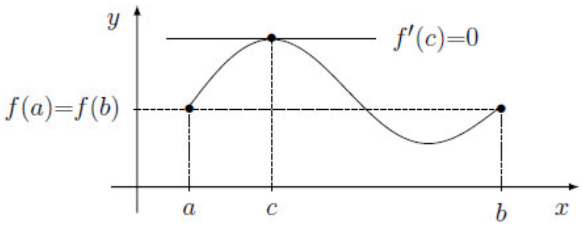

Figura 4.4: Teorema de Rolle.

Podemos afirmar que nas condições do Teorema de Rolle a função tem um ponto no interior do intervalo $[a, b]$ onde a tangente é uma reta horizontal.

Demonstração. Nas condições do Teorema de Rolle, f tem máximo e mínimo em $[a, b]$ (pelo Teorema de Weierstrass).

Se a função for constante em $[a, b]$, isto é, $f(x) = k$ onde $k = f(a) = f(b)$, $\forall x \in [a, b]$ e o máximo é igual ao mínimo e igual a k. Então, em qualquer ponto do intervalo $]a, b[$ a derivada é nula, pelo que o teorema é verdadeiro neste caso.

Suponhamos agora que f não é constante. Como f é contínua, então, pelo Teorema de Weierstrass, admite no intervalo $[a, b]$ um máximo M e um mínimo m e $m \neq M$ já que a função não é constante.

Então a função admite no interior do intervalo $[a, b]$ um máximo, um mínimo ou até os dois.

Admita-se que f admite o valor máximo M no ponto c tal que $a < c < b$.

Então para valores de $x < c$ vem $x - c < 0$ e também $f(x) - f(c) \leq 0$ e portanto

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Como f é derivável no intervalo, vem

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \geq 0.$$

Para valores de x à direita de c, $x - c > 0$ e $f(x) - f(c) \leq 0$ e portanto

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$

e também,

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \leq 0.$$

Mas então conclui-se que

$$f'(c) \geq 0 \text{ e } f'(c) \leq 0$$

o que só é possível se $f'(c) = 0$, provando-se assim o teorema.

A prova seria análoga se considerássemos o mínimo m atingido num ponto do interior do intervalo. □

Exercício resolvido 4.1. 1. Seja f contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$ com $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a, b[$. f é injetiva em $[a, b]$? E monótona?

2. Se f é estritamente monótona e derivável em $]a, b[$, então $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a, b[$?

3. Prove que entre duas raízes (dois zeros) consecutivas duma função, derivável em $\mathbb{R}$, existe uma raiz da sua derivada. Prove ainda que entre raízes consecutivas da derivada existe quando muito uma raiz da função.

Resolução do exercício 4.1. 1. Provemos que f é injetiva. Suponhamos, por redução ao absurdo, que f não era injetiva, isto é, que existiam x_1 e x_2 distintos ($x_1 < x_2$) mas $f(x_1) = f(x_2)$. Se aplicarmos o Teorema de Rolle ao intervalo $[x_1, x_2]$, como f é contínua neste intervalo, derivável em $]x_1, x_2[$ e $f(x_1) = f(x_2)$, existiria um $c \in]x_1, x_2[\subseteq]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$, contrariando a hipótese de que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a, b[$.

Logo f é injetiva em $[a, b]$.

Provemos agora que a função é estritamente monótona em $[a, b]$. Suponhamos que não, isto é, ou existem x_1 e x_2 em $[a, b]$ distintos tais que $f(x_1) = f(x_2)$ e neste caso a função não seria injetiva, ou existem $x_1 < x_2 < x_3$ em $[a, b]$ tais que $f(x_1) < f(x_2)$ e $f(x_2) > f(x_3)$ ou $f(x_1) > f(x_2)$ e $f(x_3) > f(x_2)$.

Consideremos o primeiro caso, isto é, $x_1 < x_2 < x_3$ com $f(x_1) < f(x_2)$ e $f(x_3) < f(x_2)$. Podem suceder duas situações: $f(x_1) > f(x_3)$ ou $f(x_1) < f(x_3)$. Se $f(x_1) > f(x_3)$, pelo Teorema de Bolzano (4.1), existirá um $c \in]x_2, x_3[$ tal que $f(c) = f(x_1)$ e a função não seria injetiva.

Se $f(x_1) < f(x_3)$, pelo Teorema de Bolzano (4.1), existirá um $d \in]x_1, x_2[$ tal que $f(d) = f(x_3)$ e a função não seria injetiva.

A prova seria análoga para o caso em que $f(x_1) > f(x_2)$ e $f(x_3) > f(x_2)$. Portanto podemos afirmar que a função tem que ser estritamente monótona em $[a, b]$.

2. Não. Seja f a função definida em $[-1, 1]$ por $f(x) = x^3$. Esta função é estritamente crescente e no entanto a derivada anula-se em $x = 0$.

3. Sejam $r_1 < r_2$ dois zeros consecutivos de f, isto é, $f(r_1) = f(r_2) = 0$. f é contínua em $[r_1, r_2]$, derivável em $]r_1, r_2[$ e $f(r_1) = f(r_2)$. Aplicando o Teorema de Rolle podemos afirmar que existe um zero da derivada em $]r_1, r_2[$.

Sejam agora $s_1 < s_2$ duas raízes consecutivas da derivada de f. Suponhamos que existiam dois zeros distintos de f, $r_1 < r_2$, entre s_1 e s_2, isto é, $s_1 \leq r_1 < r_2 \leq s_2$. Pelo que foi dito no parágrafo anterior, existiria um zero da derivada, s_3, entre r_1 e r_2, contrariando o facto de que s_1 e s_2 são zeros consecutivos de f', ou seja, teríamos $s_1 \leq r_1 < s_3 < r_2 \leq s_2$.

4.2.2 O Teorema de Lagrange

O seguinte teorema é também conhecido por **Teorema dos Acréscimos Finitos**.

Teorema 4.4. ***(Teorema de Lagrange)*** *Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Então existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

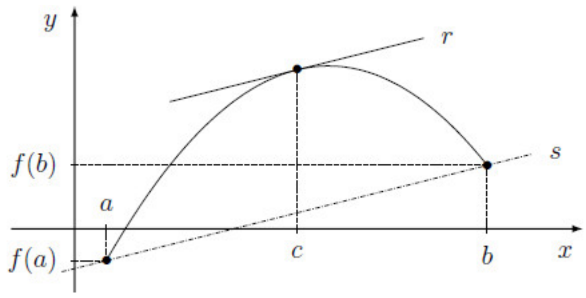

Figura 4.5: Interpretação geométrica do Teorema de Lagrange.

Demonstração. Seja

$$\begin{array}{rccc} g & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a). \end{array}$$

Então g também é contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Além disso, $g(a)=g(b)=0$. Logo, pelo Teorema de Rolle, existe algum $c \in]a,b[$ tal que $g'(c)=0$. Mas

$$g'(c)=0 \Longleftrightarrow f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Longleftrightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

Pelo teorema existe um ponto $c \in]a,b[$ em que a reta r tangente ao gráfico da função f é paralela à reta secante em a e b (a reta s, na figura).

Facilmente se constata que estando c estritamente compreendido entre a e b, então pode expressar-se de forma única como

$$c=a+\theta(b-a),\ 0<\theta<1$$

e, portanto, a fórmula dos acréscimos finitos pode tomar o seguinte aspecto

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a+\theta(b-a)),\ 0<\theta<1$$

ou ainda, fazendo $b=a+h$,

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h),\ 0<\theta<1.$$

Exercício 4.5 Seja $f:[3,2+e]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x+\ln(x-2)$. Verifique que f satisfaz a hipótese do Teorema de Lagrange e encontre a equação da reta tangente ao gráfico e paralela à secante nos extremos do domínio.

4.2.2.1 Monotonia e Teorema de Lagrange

Da definição de derivada resulta que, sendo $f:D\to\mathbb{R}$ uma função derivável em $]a,b[\subseteq D$,

se f é crescente em sentido lato em $[a,b]$ então $f'(x)\geq 0$, $\forall x \in]a,b[$;

se f é decrescente em sentido lato em $[a,b]$ então $f'(x)\leq 0$, $\forall x \in]a,b[$;

(em particular) se$f(x)$ é constante em $[a,b]$ então $f'(x)=0$, $\forall x \in]a,b[$.

Contudo, o Teorema de Lagrange permite inferir acerca das recíprocas destas proposições. São consequências imediatas do Teorema de Lagrange as seguintes proposições:

Corolário 3. *Sendo f uma função definida e derivável num intervalo aberto $I\subseteq\mathbb{R}$ (com mais de um ponto) tal que $f'(x)=0$, $\forall x\in I$, então f é uma função constante em I.*

Demonstração. Sejam x_1 e x_2 pontos arbitrários em I, com $x_1 < x_2$. Sendo f derivável em I, pode aplicar-se o Teorema de Lagrange ao intervalo $[x_1, x_2]$ e portanto existe $c \in]x_1, x_2[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Como $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$, resulta que $f'(c) = 0$ e consequentemente,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0, \text{ ou seja, } f(x_2) = f(x_1).$$

Como x_1 e x_2 são pontos arbitrários de I podemos concluir que f é constante. □

Corolário 4. *Se f e g são funções deriváveis em D e $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in D$, então em cada intervalo $I \subseteq D$ existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + C$, $\forall x \in I$.*

Corolário 5. *Se f é uma função derivável em I e para todo o x pertencente a um intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ (com mais de um ponto) se tiver $f'(x) > 0$, então f é estritamente crescente em I e, se for $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, então f é estritamente decrescente em I.*

Demonstração. Sejam x_1 e x_2 pontos arbitrários em I, com $x_1 < x_2$. Sendo f derivável em I, pode aplicar-se o Teorema de Lagrange ao intervalo $[x_1, x_2]$ e portanto existe $c \in]x_1, x_2[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, resulta que $f'(c) > 0$ e consequentemente,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0, \text{ ou seja, } f(x_2) > f(x_1)(\text{ já que } x_2 > x_1).$$

Como x_1 e x_2 são pontos arbitrários de I podemos concluir que f é estritamente crescente.

Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, resulta que $f'(c) < 0$ e consequentemente,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0, \text{ ou seja,} f(x_2) < f(x_1) \text{ (já que } x_2 > x_1).$$

Como x_1 e x_2 são pontos arbitrários de I podemos concluir que f é estritamente decrescente. □

Note-se que nestes dois corolários I designa sempre um intervalo, pois de contrário não fica garantida a veracidade das afirmações feitas: por exemplo, a função

$$f(x) = \frac{|x|}{x}, \; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

tem derivada nula em todos os pontos do seu domínio (que não é um intervalo) e, no entanto, não é constante nesse domínio.

Pode ainda deduzir-se do Teorema de Lagrange o seguinte corolário:

Corolário 6. *Dadas duas funções $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deriváveis, então*

$$f(a) \leq g(a) \; \wedge \; f'(x) \leq g'(x) \Rightarrow f(x) \leq g(x), \; \forall x \in [a, b[.$$

Demonstração. Seja $x \in [a, b[$ qualquer e $\varphi : [a, b[\to \mathbb{R}$ a função definida por $\varphi(x) = f(x) - g(x)$. Pela fórmula dos acréscimos finitos, para cada $x \in]a, b[$, existe pelo menos um $c \in]a, x[$ tal que

$$\varphi(x) - \varphi(a) = (x - a)\varphi'(c).$$

Como $\varphi'(c) = f'(c) - g'(c) \leq 0$ qualquer que seja $c \in]a,b[$, então obtém-se

$$\varphi(x) - \varphi(a) \leq 0, \ \forall x \in]a,b[$$

donde resulta

$$f(x) - g(x) \leq f(a) - g(a) \leq 0$$

ou seja,

$$f(x) \leq g(x), \ \forall x \in [a,b[$$

como se pretendia provar. □

Exercício 4.6

1. Mostre que $\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \forall x \in [-1,1]$
2. Estude o domínio e o gráfico de $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$. (Ajuda: calcule f'!)

Exemplo 4.3. Mostremos que $f(x) = x + k \operatorname{sen} x$ é invertível se e só se $|k| \leq 1$.
A derivada de f é $f'(x) = 1 + k\cos x$ e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow k\cos x = -1$.

- Se $|k| < 1$ então $|k\cos x| = |k|\,|\cos x| \leq |k| < 1$ e assim $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Se $k = \pm 1$ então $f'(x) \geq 0$ e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \mp 1$ é satisfeita em pontos isolados
- Se $|k| > 1$ então f' muda de sinal: $f'(0) = 1 + k$ e $f'(\pi) = 1 - k$ têm sinais opostos.

Conclui-se que f é estritamente crescente, logo invertível, se e só se $|k| \leq 1$.

4.2.3 Máximos e mínimos locais

O elemento $a \in \operatorname{Int}(D_f)$ é *ponto crítico* de f se $f'(a) = 0$ ou se $a \notin D_{f'}$, ou seja, se a derivada se anula nesse ponto ou se não existe derivada nesse ponto.

Exemplo 4.4. Seja $f :]-2,2[\to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = |1 - x^2|$. Os pontos críticos são $\{-1, 0, 1\}$.
Esta função não tem derivada em $c = -1$ nem em $c = 1$ e a derivada anula-se em $c = 0$.

Teorema 4.5. ***(Teorema de Fermat)*** *Seja f uma função definida e derivávell num intervalo aberto $]a,b[$, $a < b$. Se f tiver um extremo local num ponto $c \in]a,b[$, então $f'(c) = 0$.*

Demonstração. **(a)** Suponha-se que f tem um máximo local em $c \in]a,b[$. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall x \in]a,b[\quad x \in]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\Rightarrow f(x) \leq f(c)$$

e, portanto, qualquer que seja $x \in]a,b[$,

$$\text{se } c - \varepsilon < x < c, \text{ então } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

e

$$\text{se } c < x < c + \varepsilon, \text{ então } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

donde resulta, por passagem ao limite quando $x \to c$ à esquerda e à direita, que

$$f'_e(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad \text{e} \quad f'_d(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Como f é derivável em c, então ter-se-á $f'_e(c) = f'(c) = f'_d(c)$, o que implica que seja $f'(c) = 0$.
(b) Analogamente se demonstra o caso em que f tem um mínimo local no ponto $c \in]a,b[$. □