Universidade de Aveiro
Teste 2 de Cálculo I - Agrupamento 2

23 de janeiro de 2023
Duração total: 2 horas

NOME:______________________________	Nº MEC.:__________
CLASSIFICAÇÃO QUESTÕES: 1____________	2____________

(Questão 1 + Questão 2 no verso)

1. (**40 pts**) Considere a função definida em $[-1,2]$ por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} & \text{se} \quad x \in [-1,2]\backslash\{0\} \\ 1 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

(a) Determine, justificando, uma função F definida em $[-1,2]$ tal que $F'(x) = f(x)$.

(b) Seja H a função definida em $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[$ por

$$H(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arcsen}(x)} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\, dt.$$

Determine, justificando, a derivada da função H.

(c) Mostre que:

$$\operatorname{sen}(2)\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{2} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx \leq \frac{4}{\pi} - 1.$$

2. (**35 pts**) Considere a função g definida em $\mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x \cos^2 x & \text{se} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{\sqrt{x}}{2} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

(a) Justifique que a função g é integrável em qualquer intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ com $b > a$.

(b) Calcule a área da região do plano delimitada pelo gráfico de g, pelo eixo Ox e pelas retas de equação $x = -\dfrac{\pi}{2}$ e $x = 2$.

Universidade de Aveiro
Teste 2 de Cálculo I - Agrupamento 2

23 de janeiro de 2023
Duração total: 2 horas

NOME:______________________________	Nº MEC.:__________
CLASSIFICAÇÃO QUESTÕES: 3______________	4______________

(Questão 3 + Questão 4 no verso)

3. (**45 pts**) Seja $f : [p, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função positiva, decrescente, integrável em $[p, t]$, $\forall t \in [p, +\infty[$, tal que $f(n) = a_n$ para todo o $n \geq p$ ($n \in \mathbb{N}$).

   (a) O que diz o Critério do Integral em relação à série $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ e ao integral impróprio $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(x)dx$?

   (b) Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ e, em caso de convergência, indique o seu valor.

   (c) Determine, utilizando o Critério do Integral, a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$.

   (d) Enuncie o Critério de Leibniz e aplique-o ao estudo da natureza da série alternada

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n)}.$$

   Em caso de convergência, indique, justificando, se a convergência é simples ou absoluta.

4. (**40 pts**) Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série numérica.

(a) Defina série convergente.

(b) Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{-n} - e^{-n-2})$ é convergente e indique a sua soma.

(c) Determine a natureza das seguintes séries, indicando, em caso de convergência, se a convergência é simples ou absoluta:

i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arcsen}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$;

ii. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n!}$.

Universidade de Aveiro
Teste 2 de Cálculo I - Agrupamento 2

23 de janeiro de 2023
Duração total: 2 horas

NOME:______________________________ Nº MEC.:____________

CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ______________________________

5. **(40 pts)** Para cada uma das questões seguintes, assinale a opção correta.

(a) Suponha que h é uma função satisfazendo as condições $h(1) = -2$, $h'(1) = 2$, $h''(1) = 3$, $h(2) = 6$, $h'(2) = 5$, $h''(2) = 13$ e h'' é uma função contínua em $\mathbb{R}$. Então,

(A) $\displaystyle\int_1^2 h''(u)\,du = 10.$ .... ☐

(B) $\displaystyle\int_1^2 h''(u)\,du = -3.$ .... ☐

(C) $\displaystyle\int_1^2 h''(u)\,du = 8.$ .... ☐

(D) $\displaystyle\int_1^2 h''(u)\,du = 3.$ .... ☐

(b) Se f é uma função contínua em $\mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = xe^{2x} - \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt$, então

(A) $f(x) = \dfrac{2xe^{3x}}{e^x+1}.$ .... ☐

(B) $f(x) = \dfrac{e^{3x}(2x+1)}{e^x+1}.$ .... ☐

(C) $f(x) = \dfrac{2xe^{2x}}{e^x+1}.$ .... ☐

(D) $f(x) = \dfrac{e^{2x}(2x+1)}{e^x+1}.$ .... ☐

(c) Sabendo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = -1$ e ainda que $a_1 = 2$ e $b_1 = -3$, podemos afirmar que

(A) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (a_n - b_n) = -3.$ .... ☐

(B) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (a_n - b_n) = -2.$ .... ☐

(C) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (a_n - b_n) = 2.$ .... ☐

(D) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (a_n - b_n) = 3.$ .... ☐

(d) Sabendo que o termo geral da sucessão das somas parciais da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é $S_n = \sqrt{n}$, podemos afirmar que

(A) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}.$ .... ☐

(B) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$ .... ☐

(C) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}.$ .... ☐

(D) $a_n = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}.$ .... ☐

Fórmulas trigonométricas

$\sec u = \dfrac{1}{\cos u}$; $\operatorname{cosec} u = \dfrac{1}{\operatorname{sen} u}$; $\operatorname{cotg} u = \dfrac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$; $1 + \operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u$; $1 + \operatorname{cotg}^2 u = \operatorname{cosec}^2 u$

$\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1 - \cos(2u)}{2}$; $\cos^2 u = \dfrac{1 + \cos(2u)}{2}$; $\cos^2(\operatorname{arcsen} u) = 1 - u^2 = \operatorname{sen}^2(\arccos u)$

$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$; $\operatorname{sen}(u+v) = \operatorname{sen} u \cos v + \operatorname{sen} v \cos u$

$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \dfrac{\cos(u-v) - \cos(u+v)}{2}$; $\cos u \cos v = \dfrac{\cos(u-v) + \cos(u+v)}{2}$;

$\operatorname{sen} u \cos v = \dfrac{\operatorname{sen}(u-v) + \operatorname{sen}(u+v)}{2}$

Funções hiperbólicas

$\operatorname{senh}(u) = \dfrac{e^u - e^{-u}}{2}$; $\cosh(u) = \dfrac{e^u + e^{-u}}{2}$; $\cosh^2(u) - \operatorname{senh}^2(u) = 1$

Progressão aritmética de razão r

Termo geral: $u_n = u_1 + (n-1)r$; Soma dos n primeiros termos: $S_n = \dfrac{u_1 + u_n}{2} n$

Progressão geométrica de razão $r \neq 1$

Termo geral: $u_n = u_1 r^{n-1}$; Soma dos n primeiros termos: $S_n = u_1 \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Formulário de Derivadas

Função	Derivada	Função	Derivada	Função	Derivada
$K\,u\ (K \in \mathbb{R})$	$K\,u'$	$\ln\lvert u\rvert$	$\dfrac{u'}{u}$	u^r	$r\,u^{r-1}u'$
$\log_a \lvert u\rvert\ (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$	$\dfrac{u'}{u \ln a}$	e^u	$u'\,e^u$	$\operatorname{sen} u$	$u' \cos u$
$a^u (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$	$a^u \ln a\, u'$	$\cos u$	$-u' \operatorname{sen} u$	$\operatorname{tg} u$	$u' \sec^2 u$
$\operatorname{cotg} u$	$-u' \operatorname{cosec}^2 u$	$\sec u$	$\sec u \operatorname{tg} u\, u'$	$\operatorname{cosec} u$	$-\operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u\, u'$
$\operatorname{arcsen} u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arccos u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\operatorname{arctg} u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$
$\operatorname{arccotg} u$	$-\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{senh} u$	$u' \cosh u$	$\cosh u$	$u' \operatorname{senh} u$

Primitivas:

$$\int u' \sec u = \ln\lvert \sec u + \operatorname{tg} u\rvert \quad \text{e} \quad \int u' \operatorname{cosec} u = -\ln\lvert \operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u\rvert$$

$$\int \frac{1}{(x^2+a)^n}\,dx = \frac{1}{a}\left(\frac{x}{2(n-1)(x^2+a)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-1}\int \frac{1}{(x^2+a)^{n-1}}\,dx\right),\ a \neq 0,\ n \neq 1.$$