Universidade de Aveiro 11 de setembro de 2020
Exame Especial de Cálculo II - Agrupamento 2 Duração total: 2 horas

NOME:____	Nº MEC.:____________
DECLARO QUE DESISTO ______________________________________	

Informações

1. Esta prova é constituída por 5 questões.
2. Cada folha contém uma questão que deve ser respondida na própria folha (utilize, sempre que necessário, também o verso da folha).
3. Caso necessite de folhas de continuação, deve utilizar uma para cada questão e indicar na folha de continuação o número da questão no local indicado para o efeito.
4. Receberá também uma folha com o formulário que poderá utilizar durante a prova.
5. Assine esta folha e coloque-a em cima da mesa de trabalho de modo a que fique visível, juntamente com um documento com fotografia que permita a sua identificação.
6. Caso pretenda desistir desta prova, assinale-o no cabeçalho desta folha assinando no local a isso destinado, entregue todas as folhas de prova que lhe foram distribuídas e coloque-as no local que lhe for indicado pelo professor vigilante da sala.
7. Caso não responda a uma das questões escreva isso na respetiva folha.
8. Quando terminar a sua prova organize-a de forma a juntar as folhas de continuação (caso as tenha utilizado) à folha da questão respetiva e coloque-as nos locais indicados pelo professor vigilante da sala.
9. Justifique todas as suas respostas das questões **1 a 4**, indicando os cálculos efetuados e/ou os conceitos teóricos utilizados.
10. Não pode ter consigo telemóvel nem qualquer dispositivo eletrónico (ainda que desligado).
11. Respeite todas as regras de segurança e mantenha o distanciamento social adequado.
12. Só pode levar para a mesa onde vai realizar a prova, material de escrita. Não é permitida a utilização de qualquer tipo de calculadora.

Bom trabalho!

NOME:____ Nº MEC.:____________

CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ____________________________________

Questão 1 (40pts)

Considere a função $f(x,y) = \begin{cases} x - y, \ se\ xy = 0, \\ \\ 1\ se\ xy \neq 0. \end{cases}$

(a) Verifique que f não é contínua na origem.

(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) Seja $u = (u_1, u_2)$ um vetor não nulo de $\mathbb{R}^2$. Mostre que $D_u f(0,0)$ não existe se ambas as coordenadas do vetor u forem não nulas e calcule $D_u f(0,0)$ nos restantes casos.

Universidade de Aveiro
Exame Especial de Cálculo II - Agrupamento 2

11 de setembro de 2020
Duração total: 2 horas

Nome:______________________________ Nº Mec.:__________

Classificação Questão: ______________________________

Questão 2 (40pts)

Considere a função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + yz + 2xz - xy$.

(a) Determine os pontos críticos de f.

(b) Calcule a matriz hessiana da função f num ponto genérico (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$.

(c) Usando um teste da hessiana, estude a natureza dos pontos críticos obtidos na primeira alínea.

(d) Mostre que f não tem máximo global. Explique, em seguida, porque é que tal não invalida o teorema de Weierstrass (condição suficiente para a existência de extremos globais).

Universidade de Aveiro
Exame Especial de Cálculo II - Agrupamento 2

11 de setembro de 2020
Duração total: 2 horas

NOME:____ Nº MEC.:______________

CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ____

Questão 3 (40pts)

Resolva as seguintes equações diferenciais:

(a) $y'' - 2y' = x^2 - 1$.

(b) $y' + y\ \operatorname{cotg}(x) = 5\ e^{\cos(x)}$, com $x \in]0, \pi[$.

NOME:________________________________ Nº MEC.:______________

CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ________________________________

Questão 4 (40pts)

Considere $f : \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

(a) Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem n com resto de Lagrange $R_0^n f$ para a função f.

(b) Verifique que existe $c > 0$ tal que

$$|R_0^n f(x)| \leq c|2x|^{n+1}, \forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[.$$

(c) Mostre que se pode desenvolver f em série de MacLaurin e determine essa série.

(d) Obtenha a série de MacLaurin para a função $g : \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$.

Universidade de Aveiro 11 de setembro de 2020
Exame Especial de Cálculo II - Agrupamento 2 Duração total: 2 horas

NOME:____ Nº MEC.:____________

CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ____________________________________

Questão 5 (40pts)

Para cada uma das alíneas assinale a **única** afirmação verdadeira.

(a) Considere a EDO $xy'' - (x+1)y' + y = xe^x$.

(A) A solução geral da EDO é $y = A(x+1) + Be^x$. .... ☐

(B) $\{x, e^x\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação diferencial homogénea associada à equação diferencial dada. .... ☐

(C) A solução geral da EDO homogénea associada à equação diferencial dada é $y = A(x+1) + Be^x$ com A, $B \in \mathbb{R}$. .... ☐

(D) Uma solução particular da EDO dada é $y = e^x$. .... ☐

(b) O intervalo de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{4^n(2n+1)}$ é:

(A) $]-3,5[$. .... ☐

(B) $]-4,4[$. .... ☐

(C) $\mathbb{R}$. .... ☐

(D) $\{1\}$. .... ☐

(c) A transformada de Laplace da função f definida por $f(t) = t\cos^2 t$ é:

(A) $\dfrac{1}{s^2} \times \dfrac{s}{2(s^2+4)}$. .... ☐

(B) $-\dfrac{1}{2s^2} - \dfrac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$. .... ☐

(C) $\dfrac{1}{s^2} \times \left(\dfrac{s}{s^2+4}\right)^2$. .... ☐

(D) $\dfrac{1}{2s^2} + \dfrac{s^2-4}{2(s^2+4)^2}$. .... ☐

(d) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função $2\pi-$periódica definida em $[0, 2\pi]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \pi & \text{para} \quad 0 \le x \le \frac{2\pi}{3} \\ -x & \text{para} \quad \frac{2\pi}{3} < x \le 2\pi. \end{cases}$$

O coeficiente a_0 da série de Fourier associada à função f é:

(A) $-\dfrac{2}{3}$. .... ☐

(B) $-\dfrac{1}{3}$. .... ☐

(C) $-\dfrac{\pi}{3}$. .... ☐

(D) $-\dfrac{2\pi}{3}$. .... ☐

Formulário Transformada de Laplace

Função	Transformada	Função	Transformada	Função	Transformada
t^n $(n \in \mathbb{N}_0)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ $(s > 0)$	e^{at} $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{1}{s-a}$ $(s > a)$	$\operatorname{sen}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$
$\cos(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$	$\operatorname{senh}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$ $(s > \|a\|)$	$\cosh(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$ $s > \|a\|$

Propriedades da transformada de Laplace

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, com $s > s_f$

$\mathcal{L}\{f(t)+g(t)\}(s) = F(s) + G(s)\,,\ s > \max\{s_f, s_g\}$	$\mathcal{L}\{\alpha f(t)\}(s) = \alpha F(s)\,,\ s > s_f$ e $\alpha \in \mathbb{R}$
$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\}(s) = F(s-\lambda)\,,\ s > s_f + \lambda$ e $\lambda \in \mathbb{R}$	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s)\,,\ s > s_f$ e $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{L}\{f(t-a)\}(s) = e^{-as} F(s)\,,\ s > s_f$ e $a > 0$	$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \dfrac{1}{a}\, F\left(\dfrac{s}{a}\right)\,,\ s > a\, s_f$ e $a > 0$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-2} f''(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

com $s > \max\{s_f, s_{f'}, s_{f''} \ldots, s_{f^{(n-1)}}\}$, $n \in \mathbb{N}$

Formulário de Primitivas

Função	Primitiva	Função	Primitiva	Função	Primitiva
$u^r u'$ $(r \neq -1)$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	$u' e^u$	e^u
$u' a^u$	$\dfrac{a^u}{\ln a}$	$u' \cos u$	$\operatorname{sen} u$	$u' \operatorname{sen} u$	$-\cos u$
$u' \sec^2 u$	$\operatorname{tg} u$	$u' \operatorname{cosec}^2 u$	$-\operatorname{cotg} u$	$u' \sec u$	$\ln\|\sec u + \operatorname{tg} u\|$
$u' \operatorname{cosec} u$	$-\ln\|\operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u\|$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$-\arccos u$ ou $\operatorname{arcsen} u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arctg} u$ ou $-\operatorname{arccotg} u$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec u = \dfrac{1}{\cos u}$ $\operatorname{cosec} u = \dfrac{1}{\operatorname{sen} u}$	$\operatorname{sen}(2u) = 2 \operatorname{sen} u \cos u$ $\cos(2u) = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u$	$\cos^2 u = \dfrac{1+\cos(2u)}{2}$ $\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1-\cos(2u)}{2}$	$1 + \operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u$ $1 + \operatorname{cotg}^2 u = \operatorname{cosec}^2 u$