Universidade de Aveiro 7 de fevereiro de 2022
Exame Final de Cálculo I - Agrupamento 2 Duração: 2 horas e 30 minutos

Justifique todas as suas respostas, indicando os cálculos efetuados e/ou os conceitos teóricos utilizados.

1. **(40 pts)** Seja $g(x) = 2\,\mathrm{arcsen}(\mathrm{tg}\, x)$ onde $D_g \subset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
   (a) Determine o domínio de g, D_g.
   (b) Caracterize a função inversa de g, indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.
   (c) Justifique que g atinge mínimo e máximo globais no seu domínio e calcule esses valores.
   (d) Sabendo que
   $$\int f(x)\,dx = g(x) + C, C \in \mathbb{R},$$
   determine $f(0)$.

2. **(30 pts)** Calcule:
   (a) o integral definido $\displaystyle\int_1^5 \frac{2x}{\sqrt{2x-1}}\,dx$;
   (b) a família de primitivas $\displaystyle\int (2x^3 + x)\ \mathrm{arctg}\, x\,dx$.

3. **(30 pts)** Dada uma função $f : [3, +\infty[\to \mathbb{R}$, considere o integral impróprio de 1ª espécie
   $$\int_3^{+\infty} f(x)\,dx.$$
   (a) Suponha que o integral impróprio referido acima é convergente. Explicite o significado matemático desta afirmação.
   (b) Enuncie um teorema que lhe permite comparar a natureza de uma série numérica real com a de um integral impróprio adequado.
   (c) Aplicando o teorema referido em (b) estude a natureza da série de
   $$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n\,(\ln(\ln n))}.$$

4. **(28 pts)** Determine a natureza das seguintes séries numéricas, indicando, em caso de convergência, se se trata de convergência simples ou absoluta:
   (a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}$;
   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1} \cos\left[(n+1)\pi\right]$.

5. **(15 pts)** Mostre que a equação $x^2 = x \,\mathrm{sen}\, x + \cos x$ tem exatamente duas soluções em $\mathbb{R}$.

6. **(25 pts)** Sejam $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e derivável em $\mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por
   $$f(x) = \int_x^{x^2} \varphi(t)\,dt,\ x \in \mathbb{R}.$$
   (a) Mostre que f é duas vezes derivável e determine expressões para f' e f''.
   (b) Prove que f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$.
   (c) Estude o sinal de f em $\mathbb{R}$.

Fórmulas trigonométricas

$\sec u = \dfrac{1}{\cos u}$	$\operatorname{cosec} u = \dfrac{1}{\operatorname{sen} u}$	$\operatorname{cotg} u = \dfrac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$	$1 + \operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u$	$1 + \operatorname{cotg}^2 u = \operatorname{cosec}^2 u$
$\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1 - \cos(2u)}{2}$	$\cos^2 u = \dfrac{1 + \cos(2u)}{2}$	$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$ $\operatorname{sen}(u+v) = \operatorname{sen} u \cos v + \operatorname{sen} v \cos u$		

Duas primitivas

$$\int u' \sec u = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| \quad \Big\| \quad \int u' \operatorname{cosec} u = -\ln|\operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u|$$

Formulário de Derivadas

Função	Derivada	Função	Derivada
$K\,u\ (K \in \mathbb{R})$	$K\,u'$	$\ln\lvert u\rvert$	$\dfrac{u'}{u}$
u^r	$r\,u^{r-1}u'$	$\log_a \lvert u\rvert\ (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$	$\dfrac{u'}{u \ln a}$
e^u	$u'\,e^u$	$a^u (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$	$a^u\ \ln a\, u'$
$\operatorname{sen} u$	$u' \cos u$	$\cos u$	$-u' \operatorname{sen} u$
$\operatorname{tg} u$	$u' \sec^2 u$	$\operatorname{cotg} u$	$-u' \operatorname{cosec}^2 u$
$\sec u$	$\sec u \operatorname{tg} u\, u'$	$\operatorname{cosec} u$	$-\operatorname{cosec} u\ \operatorname{cotg} u\, u'$
$\operatorname{arcsen} u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arccos u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\operatorname{arctg} u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arccotg} u$	$-\dfrac{u'}{1+u^2}$
$\operatorname{senh} u$	$u' \cosh u$	$\cosh u$	$u' \operatorname{senh} u$

Universidade de Aveiro 7 de fevereiro de 2022

Exame Final de Cálculo I - Agrupamento 2 Duração: 2 horas e 30 minutos

Responda nesta folha e entregue-a juntamente com as restantes folhas de prova.

NOME:______________________________ Nº MEC.:____________
CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO 7: ______________________________

7. **(32 pts)** Para cada uma das questões seguintes, assinale a opção correta.

(a) Sejam f e g as funções definidas por $f(x) = -\operatorname{arccos}(x+5)$ e $g(x) = 3 \operatorname{arcsen}(x+4)$.

(A) $\displaystyle\lim_{x\to -4^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$. .... ☐

(B) $\displaystyle\lim_{x\to -4^-} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$. .... ☐

(C) $\displaystyle\lim_{x\to -4^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. .... ☐

(D) $\displaystyle\lim_{x\to -4^-} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{3}$. .... ☐

(b) Seja f uma função contínua em $[8,13]$, derivável em $]8,13[$ e satisfazendo a condição $f(8) = f(13) = 0$. Seja ainda g uma função definida em $[8,13]$ por $g(x) = e^{-3x} f(x)$.
Pode afirmar-se que existe $t \in]8,13[$ tal que

(A) $f(t) = \frac{1}{3} f'(t)$. .... ☐

(B) $f(t) = 3 f'(t)$. .... ☐

(C) $g'(t) = \frac{1}{3} g(t)$. .... ☐

(D) $g'(t) = 3 g(t)$. .... ☐

(c) Seja f uma função real de variável real de domínio $\mathbb{R}$. Se $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ então o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2}\, dx$$

(A) é convergente. .... ☐

(B) é divergente. .... ☐

(C) é igual a $+\infty$. .... ☐

(D) é igual a 2. .... ☐

(d) A área da região **limitada** pelas curvas de equação $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x^2$ e $x = -1$ pode ser dada por

(A) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (\sqrt[3]{x} - x^2)\, dx$. .... ☐

(B) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2 - \sqrt[3]{x})\, dx$. .... ☐

(C) $\displaystyle\int_{-1}^{0} (\sqrt[3]{x} - x^2)\, dx + \int_{0}^{1} (x^2 - \sqrt[3]{x})\, dx$. .... ☐

(D) $\displaystyle\int_{-1}^{0} (x^2 - \sqrt[3]{x})\, dx + \int_{0}^{1} (\sqrt[3]{x} - x^2)\, dx$. .... ☐