Universidade de Aveiro
Teste 2 de Cálculo I - Agrupamento 2

7 de fevereiro de 2022
Duração total: 2 horas

NOME:______________________________ Nº MEC.:______________

DECLARO QUE DESISTO ______________________________

Informações

1. Esta prova é constituída por 6 questões, distribuídas por 4 folhas (Folha 1 - Questões 1 e 2; Folha 2 - Questões 3 e 4; Folha 3 - Questão 5 e Folha 4 - Questão 6).
   (a) Responda no próprio enunciado, usando, se necessário, o verso de cada folha.
   (b) Caso necessite de folhas de continuação, deve utilizar uma para cada questão e indicar na folha de continuação o número da questão no local indicado para o efeito.
   (c) Caso não responda a uma das questões escreva isso na respetiva folha.
2. Quando terminar a sua prova, organize-a de forma a juntar as folhas de continuação (caso as tenha utilizado) à folha da questão respetiva e coloque-as nos locais indicados pelo professor vigilante da sala. Não será necessário entregar esta folha de informações, exceto em caso de desistência da prova.
3. Caso pretenda desistir desta prova, assinale-o no cabeçalho desta folha, assinando no local a isso destinado e entregue todas as folhas de prova que lhe foram distribuídas. Contudo, se desistir mantém-se no regime de avaliação discreta, não podendo realizar o exame final.
4. Justifique todas as suas respostas das questões, indicando os cálculos efetuados e/ou os conceitos teóricos utilizados.
5. Só pode levar para a mesa onde vai realizar a prova material de escrita.
   (a) Não é permitida a utilização de qualquer tipo de calculadora.
   (b) Não pode ter consigo telemóvel nem qualquer dispositivo eletrónico (ainda que desligado).
   (c) Garanta que tem em cima da mesa de prova um documento que o identifique, com fotografia (preferencialmente o Cartão de Cidadão).

Fórmulas trigonométricas

$\sec u = \dfrac{1}{\cos u}$	$\operatorname{cosec} u = \dfrac{1}{\operatorname{sen} u}$	$\operatorname{cotg} u = \dfrac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$	$1+\operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u$	$1+\operatorname{cotg}^2 u = \operatorname{cosec}^2 u$
$\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1-\cos(2u)}{2}$	$\cos^2 u = \dfrac{1+\cos(2u)}{2}$	$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$ $\operatorname{sen}(u+v) = \operatorname{sen} u \cos v + \operatorname{sen} v \cos u$		
$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \dfrac{\cos(u-v)-\cos(u+v)}{2}$ $\cos u \cos v = \dfrac{\cos(u-v)+\cos(u+v)}{2}$ $\operatorname{sen} u \cos v = \dfrac{\operatorname{sen}(u-v)+\operatorname{sen}(u+v)}{2}$	$\cos^2(\operatorname{arcsen} u) = 1-u^2$ $\operatorname{sen}^2(\arccos u) = 1-u^2$			

Duas primitivas

Função	Primitiva	Função	Primitiva
$u' \sec u$	$\ln \lvert \sec u + \operatorname{tg} u \rvert$	$u' \operatorname{cosec} u$	$-\ln \lvert \operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u \rvert$

Uma fórmula de recorrência

$$\int \frac{1}{(x^2+a)^n}\,dx = \frac{1}{a}\left(\frac{x}{2(n-1)(x^2+a)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-1}\int \frac{1}{(x^2+a)^{n-1}}\,dx\right),\ a \neq 0,\ n \neq 1.$$

Formulário de Derivadas

Função	Derivada	Função	Derivada
$K\,u\ (K \in \mathbb{R})$	$K\,u'$	$\ln \lvert u \rvert$	$\frac{u'}{u}$
u^r	$r\,u^{r-1}u'$	$\log_a \lvert u \rvert$ $(a > 0$ e $a \neq 1)$	$\frac{u'}{u \ln a}$
e^u	$u'\,e^u$	$a^u (a > 0$ e $a \neq 1)$	$a^u\ \ln a\, u'$
$\operatorname{sen} u$	$u' \cos u$	$\cos u$	$-u' \operatorname{sen} u$
$\operatorname{tg} u$	$u' \sec^2 u$	$\operatorname{cotg} u$	$-u' \operatorname{cosec}^2 u$
$\sec u$	$\sec u \operatorname{tg} u\, u'$	$\operatorname{cosec} u$	$-\operatorname{cosec} u\ \operatorname{cotg} u\, u'$
$\operatorname{arcsen} u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arccos u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\operatorname{arctg} u$	$\frac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arccotg} u$	$-\frac{u'}{1+u^2}$
$\operatorname{senh} u$	$u' \cosh u$	$\cosh u$	$u' \operatorname{senh} u$

Universidade de Aveiro 7 de fevereiro de 2022

Teste 2 de Cálculo I - Agrupamento 2 Duração total: 2 horas

NOME:______________________________________	Nº MEC.:____________
CLASSIFICAÇÃO: QUESTÃO 1 ____________	QUESTÃO 2 ____________

1. **(45 pts)** Determine a natureza das seguintes séries numéricas, indicando, em caso de convergência, se se trata de convergência simples ou absoluta:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+6}{3(n^2+2n-1)(n^2+5)}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$;

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1} \cos\left[(n+1)\pi\right]$.

2. **(20 pts)** Mostre, usando séries numéricas, que a dízima infinita periódica $1,7(9)$ é igual a $\frac{18}{10}$.

Universidade de Aveiro
Teste 2 de Cálculo I - Agrupamento 2

7 de fevereiro de 2022
Duração total: 2 horas

NOME:____________________	Nº MEC.:__________
CLASSIFICAÇÃO: QUESTÃO 3 __________	QUESTÃO 4 __________

3. **(40 pts)** Dada uma função $f : [3, +\infty[\to \mathbb{R}$, considere o integral impróprio de 1ª espécie

$$\int_3^{+\infty} f(x)\, dx.$$

(a) Suponha que o integral impróprio referido acima é convergente. Explicite o significado matemático desta afirmação.

(b) Enuncie um teorema que lhe permite comparar a natureza de uma série numérica real com a de um integral impróprio adequado.

(c) Aplicando o teorema referido em (b) estude a natureza da série

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n\, (\ln(\ln n))}.$$

4. **(25 pts)** Calcule o integral definido $\displaystyle\int_1^5 \frac{2x}{\sqrt{2x-1}}\, dx$.

Universidade de Aveiro
Teste 2 de Cálculo I - Agrupamento 2

7 de fevereiro de 2022
Duração total: 2 horas

NOME:____ Nº MEC.:____________

CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO 5: ____________________________________

5. **(40 pts)** Sejam $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e derivável em $\mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \int_x^{x^2} \varphi(t)\, dt, \ x \in \mathbb{R}.$$

(a) Mostre que f é duas vezes derivável e determine expressões para f' e f''.

(b) Prove que f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$.

(c) Estude o sinal de f em $\mathbb{R}$.

Universidade de Aveiro — 7 de fevereiro de 2022
Teste 2 de Cálculo I - Agrupamento 2 — Duração total: 2 horas

NOME:______________________________	Nº MEC.:__________
CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO 6: ______________________________	

6. **(30 pts)** Para cada uma das questões seguintes, assinale **a opção** correta.

   (a) A área da região **limitada** pelas curvas de equação $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x^2$ e $x = -1$ pode ser dada por

   (A) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (\sqrt[3]{x} - x^2)\, dx.$ .... ☐

   (B) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2 - \sqrt[3]{x})\, dx.$ .... ☐

   (C) $\displaystyle\int_{-1}^{0} (\sqrt[3]{x} - x^2)\, dx + \int_{0}^{1} (x^2 - \sqrt[3]{x})\, dx.$ .... ☐

   (D) $\displaystyle\int_{-1}^{0} (x^2 - \sqrt[3]{x})\, dx + \int_{0}^{1} (\sqrt[3]{x} - x^2)\, dx.$ .... ☐

   (b) Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série cuja natureza se pretende determinar e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ uma série cuja natureza se conhece. Qual das seguintes conclusões é verdadeira?

   (A) Se $|a_n| < |b_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ converge, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também converge. .... ☐

   (B) Se $|a_n| > |b_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ converge, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também converge. .... ☐

   (C) Se $|a_n| > |b_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ diverge, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também diverge. .... ☐

   (D) Se $|a_n| < |b_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ diverge, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também diverge. .... ☐

   (c) Seja f uma função real de variável real de domínio $\mathbb{R}$. Se $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ então o integral impróprio

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2}\, dx$$

   (A) é convergente. .... ☐

   (B) é divergente. .... ☐

   (C) é igual a $+\infty$. .... ☐

   (D) é igual a 2. .... ☐