Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II – Agrupamento 1 **2021/2022**

Folha Prática 5

Equações Diferenciais Ordinárias

Exercícios Propostos

1. Verifique se as seguintes funções são solução (em $\mathbb{R}$) das equações diferenciais dadas:

   (a) $y = \operatorname{sen} x - 1 + \mathrm{e}^{-\operatorname{sen} x}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} + y\,\cos x = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2x);$

   (b) $z = \cos x$ $\qquad z'' + z = 0;$

   (c) $y = \cos^2 x$ $\qquad y'' + y = 0;$

   (d) $y = Cx - C^2 \quad (C \in \mathbb{R})$ $\qquad (y')^2 - xy' + y = 0.$

2. Indique uma equação diferencial para a qual a família de curvas indicada constitui um integral geral.

   (a) $y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}$ (retas do plano não verticais que passam pela origem);

   (b) $y = Ax + B, \quad A, B \in \mathbb{R}$ (retas do plano não verticais);

   (c) $y = \mathrm{e}^{Cx}, \quad C \in \mathbb{R}.$

3. Considere a família de curvas sinusoidais definidas por
$$y = A\operatorname{sen}(x + B) \qquad \text{com} \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$
   Indique uma EDO de terceira ordem para a qual estas funções constituam uma família de soluções

4. (a) Determine a solução geral da equação diferencial $y'' - \operatorname{sen} x = 0.$

   (b) Mostre que a função definida por $\varphi(x) = 2x - \operatorname{sen} x$ é uma solução particular da EDO da alínea anterior, que satisfaz as condições $\varphi(0) = 0$ e $\varphi'(0) = 1.$

5. Determine a solução geral das seguintes EDOs:

   (a) $y' - \dfrac{1}{(1 + x^2)\operatorname{arctg} x} = 0;$

   (b) $y' - \sqrt{1 - x^2} = 0;$

   (c) $y' - \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1} = 0.$

6. Determine um integral geral para cada uma das seguintes EDOs de variáveis separáveis:

   (a) $x + yy' = 0;$

   (b) $xy' - y = 0;$

   (c) $(t^2 - xt^2)\dfrac{dx}{dt} + x^2 = -tx^2;$

   (d) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0.$

7. Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

   (a) $xy' + y = y^2, \quad y(1) = 1/2;$

   (b) $xy + x + y'\sqrt{4 + x^2} = 0, \quad y(0) = 1;$

   (c) $(1 + x^3)y' = x^2 y, \quad y(1) = 2.$

8. Verifique que as seguintes equações diferenciais são homogéneas e determine um seu integral geral.

   (a) $(x^2 + y^2)y' = xy;$

   (b) $y'\left(1 - \ln \dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{y}{x}\,, \quad x > 0.$

9. Considere a equação diferencial $y' = \dfrac{y}{x}\,(1 + \ln y - \ln x)\,, \quad x > 0.$

   (a) Verifique que se trata de uma equação diferencial homogénea.

   (b) Determine um integral geral desta EDO.

10. Resolva as seguintes equações diferenciais exatas:

   (a) $(2x + \operatorname{sen} y)\,dx + x\cos y\,dy = 0\,;$

   (b) $(2xy - x - e^y)\,dx = (xe^y + y - x^2)\,dy\,;$

   (c) $\left(\dfrac{y}{x} + 6x\right)dx + (\ln x - 2)\,dy = 0\,.$

11. Resolva a equação $e^x \sec y - \operatorname{tg} y + y' = 0$ sabendo que ela admite um fator integrante da forma $\mu(x, y) = e^{\beta x}\cos y$.

12. Resolva as seguintes equações diferenciais, usando em cada caso o fator integrante indicado:

   (a) $y\,dx + (y^2 - x)\,dy = 0 \qquad [\ \mu(y) = y^{-2}\ ];$

   (b) $(2y - x^3)\,dx + x\,dy = 0 \qquad [\ \mu(x) = x\ ];$

13. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares usando fatores integrantes:

   (a) $y' + 2y = \cos x;$

   (b) $x^3 y' - y - 1 = 0;$

   (c) $\dfrac{1}{x}\,y' - \dfrac{1}{x^2 + 1}\,y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}\,, \qquad x \neq 0.$

14. Considere a EDO $x^2 y' + 2xy = 1$ em $]0, +\infty[$. Mostre que qualquer solução desta EDO tende para zero quando $x \to +\infty$.

15. Resolva as seguintes equações diferenciais de Bernoulli:

   (a) $xy' + y = y^2 \ln x, \qquad x > 0;$

   (b) $y' - \dfrac{y}{2x} = 5x^2 y^5\,, \qquad x \neq 0.$

16. Usando o método da variação das constantes, determine a solução geral das seguintes EDOs lineares:

    (a) $y' - \dfrac{2y}{x} = x^3$;

    (b) $y' \operatorname{sen} x + y \cos x = \operatorname{sen}^2 x$;

    (c) $y' - \dfrac{x}{x^2+1}\, y = \sqrt{x^2+1}\,, \qquad$ (rever EDO do 13 (c)).

17. Determine a solução geral das seguintes EDOs lineares:

    (a) $y' + y = \operatorname{sen} x$;

    (b) $y'' - y + 2\cos x = 0$;

    (c) $y'' + y' = 2y + 3 - 6x$;

    (d) $y'' - 4y' + 4y = x\,\mathrm{e}^{2x}$;

    (e) $y'' + y' = \mathrm{e}^{-x}$;

    (f) $y'' + 4y = \operatorname{tg}(2x)$;

    (g) $y''' + y' = \operatorname{sen} x$;

    (h) $y'' + 9y = \operatorname{sen} x - \mathrm{e}^{-x}$.

18. Considere o problema de valores iniciais

$$y'' + 4y' + 4y = \cos(2x)\,, \qquad y(\pi) = 0\,, \quad y'(\pi) = 1.$$

    Justifique que este problema possui uma única solução (em $\mathbb{R}$) e determine-a.

19. Resolva o seguinte problema de valor inicial $\begin{cases} y' + y\cos x = \cos x \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

20. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

    (a) $(1+x^2)y' + 4xy = 0$;

    (b) $y'' + y + 2\operatorname{sen} x = 0$;

    (c) $(1+x^2)y' - y = 0$;

    (d) $y''' + 4y' = \cos x$;

    (e) $y' - 3x^2 y = x^2$;

    (f) $y''' - 3y' + 2y = 12\,\mathrm{e}^{x}$.

21. Resolva a EDO $xy'' - y' = 3x^2$ (<u>Sugestão</u>: Efetue a mudança de variável $z = y'$).

22. Considere a EDO linear homogénea (de coeficientes não constantes)

$$(1-x)y'' + xy' - y = 0\,, \qquad x \in]1, \infty[.$$

    (a) Mostre que $\{x, e^x\}$ forma um sistema fundamental de soluções da equação.

    (b) Obtenha a solução geral da EDO.

    (c) Resolva agora a EDO

$$(1-x)y'' + xy' - y = x^2 - 2x + 2\,, \qquad x \in]1, \infty[,$$

    começando por verificar que ela admite uma solução do tipo $y = \beta x^2$ para certo $\beta \in \mathbb{R}$.

Soluções

1. (a) Sim; (b) Sim; (c) Não; (d) Sim.

2. (a) $xy' - y = 0$; (b) $y'' = 0$; (c) $xy' - y\,\ln(y) = 0$.

3. $y''' + y' = 0$.

4. (a) $y = C_1 x - \operatorname{sen} x + C_2\,,\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

5. (a) $y = \ln(\operatorname{arctg} x) + C\,,\quad C \in \mathbb{R}$;

   (b) $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + C\,,\quad C \in \mathbb{R}$;

   (c) $y = \dfrac{x^3}{3} + \operatorname{arctg} x + C\,,\quad C \in \mathbb{R}$.

6. (a) $x^2 + y^2 = C\,,\quad C \in \mathbb{R}$;

   (b) $y = C\,x\,,\quad C \in \mathbb{R}$ (compare com o ex. 2(a));

   (c) $\dfrac{x}{t} = C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}-\frac{1}{t}}\,,\quad C \in \mathbb{R}$;

   (d) $y = \dfrac{1}{\ln|x^2-1| - C}\,,\quad C \in \mathbb{R}$;

7. (a) $y = \dfrac{1}{x+1}$; (b) $y = -1 + 2e^{2-\sqrt{4+x^2}}$; (c) $y^3 = 4(1+x^3)$.

8. (a) $\ln|y| - \dfrac{x^2}{2y^2} = C,\quad C \in \mathbb{R}$ ($y = 0$ é solução singular).

   (b) $y = x\,\mathrm{e}^{Ky}\,,\quad x > 0,\quad K \in \mathbb{R}$.

9. (b) $y = x\,\mathrm{e}^{Cx},\quad x > 0,\quad C \in \mathbb{R}$.

10. (a) $x^2 + x\operatorname{sen} y = C\,,\quad C \in \mathbb{R}$;

    (b) $x^2 + y^2 + 2xe^y - 2yx^2 = C\,,\quad C \in \mathbb{R}$;

    (c) $y = \dfrac{C - 3x^2}{\ln|x| - 2}\,,\quad C \in \mathbb{R}$.

11. $x + e^{-x}\operatorname{sen} y = C\,,\quad C \in \mathbb{R}$ (um fator integrante é $\mu(x,y) = e^{-x}\cos y$).

12. (a) $x + y^2 = Cy\,,\quad C \in \mathbb{R}$

    (b) $yx^2 - \dfrac{x^5}{5} = C\,,\quad C \in \mathbb{R}$

13. (a) $y = \dfrac{2}{5}\cos x + \dfrac{1}{5}\operatorname{sen} x + C\,\mathrm{e}^{-2x}\,,\quad C \in \mathbb{R}$;

    (b) $y = -1 + C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}}\,,\quad x \neq 0,\quad C \in \mathbb{R}$;

    (c) $y = (C+x)\sqrt{x^2+1}\,,\quad C \in \mathbb{R}$.

14. Comece por verificar que a solução geral possui a forma $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{C}{x^2}\,,\quad C \in \mathbb{R}$.

15. (a) $y = \dfrac{1}{1 + Cx + \ln x}\,,\quad x > 0,\quad C \in \mathbb{R}$ ($y = 0$ é solução singular).

    (b) $y^4 = \dfrac{x^2}{C - 4x^5}\,,\quad C \in \mathbb{R}$ ($y = 0$ é solução singular).

16. (a) $y = \dfrac{x^4}{2} + K\,x^2\,, \qquad K \in \mathbb{R};$

(b) $y = \dfrac{x}{2}\,\mathrm{cosec}x - \dfrac{\cos x}{2} + K\,\mathrm{cosec}x\,, \qquad K \in \mathbb{R}.$

17. (a) $y = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{2} - \dfrac{\cos x}{2};$

(b) $y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + \cos x;$

(c) $y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-2x} + 3x;$

(d) $y = \left(C_1 + C_2 x + \dfrac{x^3}{6}\right)\mathrm{e}^{2x};$

(e) $y = C_1 + (C_2 - x)\,\mathrm{e}^{-x};$

(f) $y = C_1\,\mathrm{sen}\,(2x) + C_2\,\cos(2x) - \dfrac{1}{4}\cos(2x)\,\ln|\sec(2x) + \mathrm{tg}\,(2x)|;$

(g) $y = C_1 + C_2\,\cos x + C_3\,\mathrm{sen}\,x - \dfrac{x}{2}\,\mathrm{sen}\,x;$

(h) $y = C_1\,\mathrm{sen}\,(3x) + C_2\,\cos(3x) + \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{8} - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{10}.$

(C_1, C_2, C_3 são constantes reais arbitrárias).

18. $y = \dfrac{3}{4}(x - \pi)\,\mathrm{e}^{2(\pi - x)} + \dfrac{\mathrm{sen}\,(2x)}{8}.$

19. $y = 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{sen}\,x}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$

20. (a) $y = \dfrac{K}{(x^2+1)^2}\,, \qquad K \in \mathbb{R};$

(b) $y = C_1\,\cos x + C_2\,\mathrm{sen}\,x + x\,\cos x\,, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R};$

(c) $y = C\,\mathrm{e}^{\mathrm{arctg}\,x}\,, \qquad C \in \mathbb{R};$

(d) $y = C_1 + C_2\,\cos(2x) + C_3\,\mathrm{sen}\,(2x) + \dfrac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,x\,, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R};$

(e) $y = K\,\mathrm{e}^{x^3} - \dfrac{1}{3}\,, \qquad K \in \mathbb{R};$

(f) $y = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + (C_2 + C_3 x + 2x^2)\,\mathrm{e}^{x}\,, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

21. $y = Cx^2 + x^3 + K\,, \qquad C, K \in \mathbb{R}.$

22. (a) –

(b) $y = C_1 x + C_2 e^{x}\,, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

(c) $y = C_1 x + C_2 e^{x} + x^2\,, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

6. Determine um integral geral para cada uma das seguintes EDOs de variáveis separáveis:

(a) $x + yy' = 0$;

$\boxed{\text{(b) } xy' - y = 0;}$, $x > 0$

(a) $yy' = -x$

$$y \frac{dy}{dx} = -x$$

$$y\,dy = -x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$x^2 + y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

---

(1)

$$xy' - y = 0$$

$$xy' = y$$

$$x \frac{dy}{dx} = y$$

(2)

$$x\,dy = y\,dx$$

$$\frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln|y| = \ln|x| + K$$

(3)

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x| + K}$$

$$|y| = e^K \cdot e^{\ln|x|}$$

$$|y| = e^K |x|$$

(4)

$$y = \underbrace{\cancel{\pm e^K}}_{c} |x|$$

$$y = c|x|$$

$$y = c|x|, \quad c \in \mathbb{R}.$$

($y = 0$ também é solução de $xy' - y = 0$)

(c) $(1+x^3)y' = x^2 y, \quad y(1) = 2.$

$$(1+x^3)\frac{dy}{dx} = x^2 y$$

$$\frac{1}{y}\,dy = \frac{x^2}{1+x^3}\,dx$$

$$\ln y = \frac{1}{3}\ln(1+x^3) + C$$

$$\ln 2 = \frac{1}{3}\ln(1+1) + C$$

$$\ln 2 = \ln\left(2^{1/3}\right) + C$$

$$C = \ln\left(\frac{2}{2^{1/3}}\right) = \ln\left(2^{2/3}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\ln 2$$

$$\ln y = \frac{1}{3}\ln(1+x^3) + \frac{2}{3}\ln 2$$

$$y = e^{1/3\ln(1+x^3) + \frac{2}{3}\ln 2}$$

$$y = e^{\ln\left((1+x^3)^{1/3} \times 2^{2/3}\right)} =$$

$$= \sqrt[3]{4+4x^3}$$