



Justifique todas as suas respostas, indicando os cálculos efetuados e/ou os conceitos teóricos utilizados.

1. (40 pts) Seja $g(x) = 2 \arcsen(\operatorname{tg} x)$ onde $D_g \subset] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

- (a) Determine o domínio de g , D_g .
- (b) Caracterize a função inversa de g , indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.
- (c) Justifique que g atinge mínimo e máximo globais no seu domínio e calcule esses valores.
- (d) Sabendo que

$$\int f(x) dx = g(x) + C, C \in \mathbb{R},$$

determine $f(0)$.

2. (30 pts) Calcule:

- (a) o integral definido $\int_1^5 \frac{2x}{\sqrt{2x-1}} dx$;
- (b) a família de primitivas $\int (2x^3 + x) \operatorname{arctg} x dx$.

3. (30 pts) Dada uma função $f : [3, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, considere o integral impróprio de 1ª espécie

$$\int_3^{+\infty} f(x) dx.$$

- (a) Suponha que o integral impróprio referido acima é convergente. Explícite o significado matemático desta afirmação.
- (b) Enuncie um teorema que lhe permite comparar a natureza de uma série numérica real com a de um integral impróprio adequado.
- (c) Aplicando o teorema referido em (b) estude a natureza da série de

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))}.$$

4. (28 pts) Determine a natureza das seguintes séries numéricas, indicando, em caso de convergência, se se trata de convergência simples ou absoluta:

- (a) $\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}$;
- (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2 + 1} \cos[(n+1)\pi]$.

5. (15 pts) Mostre que a equação $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ tem exatamente duas soluções em \mathbb{R} .

6. (25 pts) Sejam $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e derivável em \mathbb{R} e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \int_x^{x^2} \varphi(t) dt, x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Mostre que f é duas vezes derivável e determine expressões para f' e f'' .
- (b) Prove que f é estritamente decrescente em $] -\infty, 0[$.
- (c) Estude o sinal de f em \mathbb{R} .

Fórmulas trigonométricas				
$\sec u = \frac{1}{\cos u}$	$\operatorname{cosec} u = \frac{1}{\operatorname{sen} u}$	$\cotg u = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$	$1 + \operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u$	$1 + \cotg^2 u = \operatorname{cosec}^2 u$
$\operatorname{sen}^2 u = \frac{1 - \cos(2u)}{2}$		$\cos^2 u = \frac{1 + \cos(2u)}{2}$		$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$ $\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \operatorname{sen} v \cos u$

Duas primitivas

$$\int u' \sec u = \ln |\sec u + \operatorname{tg} u| \quad \left\| \int u' \operatorname{cosec} u = -\ln |\operatorname{cosec} u + \cotg u| \right.$$

Formulário de Derivadas			
Função	Derivada	Função	Derivada
$K u \ (K \in \mathbb{R})$	$K u'$	$\ln u $	$\frac{u'}{u}$
u^r	$r u^{r-1} u'$	$\log_a u \ (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$	$\frac{u'}{u \ln a}$
e^u	$u' e^u$	$a^u \ (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$	$a^u \ln a u'$
$\operatorname{sen} u$	$u' \cos u$	$\cos u$	$-u' \operatorname{sen} u$
$\operatorname{tg} u$	$u' \sec^2 u$	$\cotg u$	$-u' \operatorname{cosec}^2 u$
$\sec u$	$\sec u \operatorname{tg} u u'$	$\operatorname{cosec} u$	$-\operatorname{cosec} u \cotg u u'$
$\arcsen u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arccos u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\operatorname{arctg} u$	$\frac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arccotg} u$	$-\frac{u'}{1+u^2}$
$\operatorname{senh} u$	$u' \cosh u$	$\cosh u$	$u' \operatorname{senh} u$



Responda nesta folha e entregue-a juntamente com as restantes folhas de prova.

NOME: _____ N.º MEC.: _____

CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO 7: _____

7. (32 pts) Para cada uma das questões seguintes, assinale a opção correta.

(a) Sejam f e g as funções definidas por $f(x) = -\arccos(x+5)$ e $g(x) = 3 \arcsen(x+4)$.

(A) $\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ ☐

(B) $\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ ☐

(C) $\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ☐

(D) $\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{3}$ ☐

(b) Seja f uma função contínua em $[8, 13]$, derivável em $]8, 13[$ e satisfazendo a condição $f(8) = f(13) = 0$. Seja ainda g uma função definida em $[8, 13]$ por $g(x) = e^{-3x} f(x)$.

Pode afirmar-se que existe $t \in]8, 13[$ tal que

(A) $f(t) = \frac{1}{3} f'(t)$ ☐

(B) $f(t) = 3 f'(t)$ ☐

(C) $g'(t) = \frac{1}{3} g(t)$ ☐

(D) $g'(t) = 3 g(t)$ ☐

(c) Seja f uma função real de variável real de domínio \mathbb{R} . Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ então o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2} dx$$

(A) é convergente. ☐

(B) é divergente. ☐

(C) é igual a $+\infty$ ☐

(D) é igual a 2. ☐

(d) A área da região **limitada** pelas curvas de equação $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x^2$ e $x = -1$ pode ser dada por

(A) $\int_{-1}^1 (\sqrt[3]{x} - x^2) dx$ ☐

(B) $\int_{-1}^1 (x^2 - \sqrt[3]{x}) dx$ ☐

(C) $\int_{-1}^0 (\sqrt[3]{x} - x^2) dx + \int_0^1 (x^2 - \sqrt[3]{x}) dx$ ☐

(D) $\int_{-1}^0 (x^2 - \sqrt[3]{x}) dx + \int_0^1 (\sqrt[3]{x} - x^2) dx$ ☐

Leia com atenção

- Justifique todas as suas respostas, indicando os cálculos efetuados e/ou os conceitos teóricos utilizados.
- Não pode ter consigo telemóvel nem qualquer dispositivo eletrónico (ainda que desligado).
- Se desistir neste teste manter-se-á em avaliação discreta e não pode realizar o exame final.

1. **(60 pts)** Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(-x) & \text{se } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \\ \arctg\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- A função f é contínua em $x = 0$? Justifique.
- A função f é derivável em $x = 0$? Justifique.
- Indique, caso existam, os extremos de f no intervalo $] -\infty, 0[$.
- Seja g a restrição de f a \mathbb{R}^+ . Caracterize a função g^{-1} , indicando expressão analítica, domínio e contradomínio.
- Seja $h(x) = e^x f(x)$ com $x \in [0, 1]$. Prove que existe $c \in]0, 1[$ tal que $h'(c) = (e - 2)\frac{\pi}{4}$.

2. **(50 pts)** Determine as seguintes famílias de primitivas

(a) $\int x(x^2 + 2019)^{2020} dx;$

(b) $\int \frac{(1 + 2 \arctg x)^3}{1 + x^2} dx;$

(c) $\int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^3} dx.$

3. **(25 pts)** Determine a família de primitivas $\int \sqrt{16 - 4x^2} dx$ usando a substituição $x = 2 \cos t$, com $t \in [0, \pi]$.

4. **(25 pts)** Determine a expressão analítica da função $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ que verifica as condições: $f'(x) = (1 + \ln x)^2$ e $f(1) = 5$.

5. **(20 pts)** Seja f a função real de variável real definida em \mathbb{R} por

$$f(x) = \sin(x^2 - 1) + 2x^2.$$

Prove que f tem exatamente dois zeros em \mathbb{R} .

6. **(20 pts)** Determine $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{e^{ax} - e^x - x}{x^2}$ tenha limite finito quando x tende para 0 e calcule esse limite.

Uma ajuda

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ND

$$\sec u = \frac{1}{\cos u}; \quad \operatorname{cosec} u = \frac{1}{\sin u}; \quad \cotg u = \frac{\cos u}{\sin u}$$

$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos(2u)}{2}; \quad \sin^2 u = \frac{1 - \cos(2u)}{2};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u; \quad 1 + \cotg^2 u = \operatorname{cosec}^2 u$$

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u$$

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

$$\sin u \sin v = \frac{1}{2}(\cos(u - v) - \cos(u + v))$$

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2}(\cos(u - v) + \cos(u + v))$$

$$\sin u \cos v = \frac{1}{2}(\sin(u - v) + \sin(u + v))$$

$(e^u)' = u' e^u$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	$(u^r)' = r u^{r-1} u'$
$(a^u)' = a^u \ln a u' (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$	$(\sin u)' = u' \cos u$
$(\cos u)' = -u' \sin u$	$(\operatorname{tg} u)' = u' \sec^2 u$	$(\cotg u)' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$
$(\sec u)' = \sec u \operatorname{tg} u u'$	$(\operatorname{cosec} u)' = -\operatorname{cosec} u \cotg u u'$	$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1 + u^2}$	$\operatorname{arccotg} u = -\frac{u'}{1 + u^2}$

$$P(u' \sec u) = \ln |\sec u + \operatorname{tg} u|$$

$$P(u' \operatorname{cosec} u) = -\ln |\operatorname{cosec} u + \cotg u|$$

P - primitiva