Matemática Discreta

Ano Letivo 2022/23 (Versão: 24 de Março de 2023)

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
https://elearning.ua.pt/

Capítulo 3
Agrupamentos e Identidades Combinatórias

Introdução

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta:

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta: *Depende ... (do que consideramos diferente) ...*

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta: *Depende … (do que consideramos diferente) …*

- Podemos repetir elementos?

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta: *Depende … (do que consideramos diferente) …*

- Podemos repetir elementos?
- A ordem das escolhas interessa?

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta: *Depende … (do que consideramos diferente) …*

- Podemos repetir elementos?
- A ordem das escolhas interessa?

Nomenclatura

Falamos de

- arranjos quando a ordem das escolhas interessa,

«Marcaram Otávio e Jota» é diferente de «Marcaram Jota e Otávio».

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta: *Depende ... (do que consideramos diferente) ...*

- Podemos repetir elementos?
- A ordem das escolhas interessa?

Nomenclatura

Falamos de

- arranjos quando a ordem das escolhas interessa,
- e de combinações quando a ordem das escolhas não interessa.

«Marcaram Otávio e Jota» é igual à «Marcaram Jota e Otávio».

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta: *Depende … (do que consideramos diferente) …*

- Podemos repetir elementos?
- A ordem das escolhas interessa?

Nomenclatura

Falamos de

- arranjos quando a ordem das escolhas interessa,
- e de combinações quando a ordem das escolhas não interessa.

- Utilizamos o adjetivo simples para indicar que não permitimos repetições.

1. Arranjos

Definição

Um **arranjo com repetição de n elementos k a k** é uma «maneira» de escolher k elementos entre n com repetição e dependente da ordem; ou seja, é uma função do tipo

$$f\colon \{1,\dots,k\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}.$$

O número de arranjos com repetição de n elementos k a k denota-se por $A^r(n,k)$.

Aqui

- $f(1) =$ a primeira escolha,
- $f(2) =$ a segunda escolha,
- …
- $f(k) =$ a k-essima escolha.

Intuição: Escolher 3 elementos em $\{1,2,3,4\}$:

$$«124» \neq «112» \quad \text{e} \quad «112» \neq «121».$$

Definição

Um **arranjo com repetição de n elementos k a k** é uma «maneira» de escolher k elementos entre n com repetição e dependente da ordem; ou seja, é uma função do tipo

$$f\colon \{1,\dots,k\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}.$$

O número de arranjos com repetição de n elementos k a k denota-se por $A^r(n,k)$.

Como calcular?

$A^r(n,k) = n^k$ (pelo princípio da multiplicação).

Definição

Um **arranjo com repetição de n elementos k a k** é uma «maneira» de escolher k elementos entre n com repetição e dependente da ordem; ou seja, é uma função do tipo

$$f\colon \{1,\dots,k\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}.$$

O número de arranjos com repetição de n elementos k a k denota-se por $A^r(n,k)$.

Como calcular?

$A^r(n,k) = n^k$ (pelo princípio da multiplicação).

Nota (o caso de $k = 0$)

Para cada $n \in \mathbb{N}$: $A^r(n,0) = n^0 = 1$. Em particular, $A^r(0,0) = 0^0 = 1$.

Exemplo

Supondo que temos 6 pessoas, e fazemos a cada uma a pergunta «Qual é o dia da semana do seu aniversário?». Qual é o número de possíveis respostas?

Exemplo

Supondo que temos 6 pessoas, e fazemos a cada uma a pergunta «Qual é o dia da semana do seu aniversário?». Qual é o número de possíveis respostas?

Resposta: $A^r(7,6) = 7^6 = 117649.$

Exemplo

Supondo que temos 6 pessoas, e fazemos a cada uma a pergunta «Qual é o dia da semana do seu aniversário?». Qual é o número de possíveis respostas?

Resposta: $A^r(7,6) = 7^6 = 117649.$

Exemplo

Supondo que se encontra disponível um número não limitado de bolas vermelhas, azuis e verdes e sabendo que as bolas da mesma cor são indistinguíveis, determine o número de sequências de 5 bolas que é possível formar?

Exemplo

Supondo que temos 6 pessoas, e fazemos a cada uma a pergunta «Qual é o dia da semana do seu aniversário?». Qual é o número de possíveis respostas?

Resposta: $A^r(7,6) = 7^6 = 117649.$

Exemplo

Supondo que se encontra disponível um número não limitado de bolas vermelhas, azuis e verdes e sabendo que as bolas da mesma cor são indistinguíveis, determine o número de sequências de 5 bolas que é possível formar?

Ou seja, fazer uma sequência de $k = 5$ escolhas em $\{\bullet, \bullet, \bullet\}$.

Exemplo

Supondo que temos 6 pessoas, e fazemos a cada uma a pergunta «Qual é o dia da semana do seu aniversário?». Qual é o número de possíveis respostas?

Resposta: $A^r(7,6) = 7^6 = 117649.$

Exemplo

Supondo que se encontra disponível um número não limitado de bolas vermelhas, azuis e verdes e sabendo que as bolas da mesma cor são indistinguíveis, determine o número de sequências de 5 bolas que é possível formar?

Ou seja, fazer uma sequência de $k = 5$ escolhas em $\{\bullet, \bullet, \bullet\}$.

Resposta: $A^r(3,5) = 3^5 = 243.$

Definição

Um **arranjo sem repetição** (ou **arranjo simples**) de **n elementos k a k** é uma «maneira» de escolher k elementos entre n sem repetição e dependente da ordem; ou seja, é uma função injetiva do tipo

$$f\colon \{1,\dots,k\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}.$$

O número de arranjos sem repetição de n elementos k a k denota-se por $A^s(n,k)$.

Exemplo

Escolher 3 elementos em $\{1,2,3,4\}$:

Intuição: «124» $\neq$ «142»   («112» não é permitido).

Definição

Um **arranjo sem repetição** (ou **arranjo simples**) de n **elementos** k **a** k é uma «maneira» de escolher k elementos entre n sem repetição e dependente da ordem; ou seja, é uma função injetiva do tipo

$$f\colon \{1,\dots,k\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}.$$

O número de arranjos sem repetição de n elementos k a k denota-se por $A^s(n,k)$.

Como calcular?

$$A^s(n,k) = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}_{k \text{ fatores}} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

(pelo princípio da multiplicação generalizada).

Definição

Um **arranjo sem repetição** (ou **arranjo simples**) de **n elementos k a k** é uma «maneira» de escolher k elementos entre n sem repetição e dependente da ordem; ou seja, é uma função injetiva do tipo

$$f\colon \{1,\dots,k\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}.$$

O número de arranjos sem repetição de n elementos k a k denota-se por $A^s(n,k)$.

Como calcular?

$$A^s(n,k) = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}_{k \text{ fatores}} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

(pelo princípio da multiplicação generalizada).

Nota (o caso de $k=0$)

Para cada $n \in \mathbb{N}$: $\quad A^s(n,0) = 1.$

Definição

Um **arranjo sem repetição** (ou **arranjo simples**) de n **elementos** k **a** k é uma «maneira» de escolher k elementos entre n sem repetição e dependente da ordem; ou seja, é uma função injetiva do tipo

$$f\colon \{1,\dots,k\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}.$$

O número de arranjos sem repetição de n elementos k a k denota-se por $A^s(n,k)$.

Como calcular?

$$A^s(n,k) = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}_{k\text{ fatores}} = \tfrac{n!}{(n-k)!}.$$

(pelo princípio da multiplicação generalizada).

Nota (o caso de $n = k$)

$A^s(n,n) =$ o número de permutações de n elementos $= n!$.

Definição

Um **arranjo sem repetição** (ou **arranjo simples**) de n **elementos** k **a** k é uma «maneira» de escolher k elementos entre n sem repetição e dependente da ordem; ou seja, é uma função injetiva do tipo

$$f\colon \{1,\dots,k\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}.$$

O número de arranjos sem repetição de n elementos k a k denota-se por $A^s(n,k)$.

Como calcular?

$$A^s(n,k) = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}_{k \text{ fatores}} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

(pelo princípio da multiplicação generalizada).

Nota (o caso de $n<k$)

$A^s(n,k) = 0.$

Exemplo

Determinamos o número de formas distintas[a] *de sentar k pessoas retiradas de um grupo de n pessoas*

- *num banco corrido.*

---

[a] duas «formas» são iguais se envolve as mesmas pessoas e cada pessoa tem os memos vizinhos nos mesmos lados.

Exemplo

Determinamos o número de formas distintas[a] *de sentar k pessoas retiradas de um grupo de n pessoas*

- *num banco corrido.*

  Resposta: $A^s(n,k)$.

[a] duas «formas» são iguais se envolve as mesmas pessoas e cada pessoa tem os memos vizinhos nos mesmos lados.

Exemplo

Determinamos o número de formas distintas[a] *de sentar k pessoas retiradas de um grupo de n pessoas*

- *num banco corrido.*

  Resposta: $A^s(n,k)$.

- *numa mesa redonda.*

---

[a] duas «formas» são iguais se envolve as mesmas pessoas e cada pessoa tem os memos vizinhos nos mesmos lados.

Exemplo

Determinamos o número de formas distintas[a] *de sentar k pessoas retiradas de um grupo de n pessoas*

- *num banco corrido.*

  Resposta: $A^s(n,k)$.

- *numa mesa redonda.*

  Aqui identificamos as maneiras que se obtém (uma a partir da outra) por *rotação*. Portanto, a resposta é

$$\frac{A^s(n,k)}{k}.$$

[a] duas «formas» são iguais se envolve as mesmas pessoas e cada pessoa tem os memos vizinhos nos mesmos lados.

Exemplo

Qual o número de alinhamentos possíveis de 12 escuteiros de tal modo que dois deles (fixos) sejam sempre vizinhos um do outro?

Exemplo

Qual o número de alinhamentos possíveis de 12 escuteiros de tal modo que dois deles (fixos) sejam sempre vizinhos um do outro?

Sejam A e B estes dois escuteiros, e tiramos A do grupo. O número de todos os alinhamentos dos restantes 11 é

Exemplo

Qual o número de alinhamentos possíveis de 12 escuteiros de tal modo que dois deles (fixos) sejam sempre vizinhos um do outro?

Sejam A e B estes dois escuteiros, e tiramos A do grupo. O número de todos os alinhamentos dos restantes 11 é

$$11! = 39916800.$$

Exemplo

Qual o número de alinhamentos possíveis de 12 escuteiros de tal modo que dois deles (fixos) sejam sempre vizinhos um do outro?

Sejam A e B estes dois escuteiros, e tiramos A do grupo. O número de todos os alinhamentos dos restantes 11 é

$$11! = 39916800.$$

Em cada destes alinhamentos, podemos inserir A ou à esquerda ou à direita de B; portanto, o número de alinhamentos onde A e B são vizinhos é

Exemplo

Qual o número de alinhamentos possíveis de 12 escuteiros de tal modo que dois deles (fixos) sejam sempre vizinhos um do outro?

Sejam A e B estes dois escuteiros, e tiramos A do grupo. O número de todos os alinhamentos dos restantes 11 é

$$11! = 39916800.$$

Em cada destes alinhamentos, podemos inserir A ou à esquerda ou à direita de B; portanto, o número de alinhamentos onde A e B são vizinhos é

$$2 \cdot 11! = 79833600.$$

2. Combinações

Definição

Uma **combinação sem repetição** (ou **combinação simples**) **de** n **elementos** k **a** k é um subconjunto de k elementos de um conjunto de n elementos.

$\binom{n}{k}$ denota o número de combinações simples de n elementos k a k.

Exemplo

Escolher 3 elementos em $\{1, 2, 3, 4\}$:

Intuição: «124» $=$ «142» $\neq$ «143» («112» não é permitido).

Combinações sem repetição (11)

Definição

Uma **combinação sem repetição** (ou **combinação simples**) **de** n **elementos** k **a** k é um subconjunto de k elementos de um conjunto de n elementos.

$\binom{n}{k}$ denota o número de combinações simples de n elementos k a k.

Como calcular?

$$\binom{n}{k} = \frac{A^s(n,k)}{}$$

Ideia

$\binom{4}{3} = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{}$

213	321	214	421	324	423	314	413
132	312	142	412	243	432	143	431
123	231	124	241	234	342	134	341

Definição

Uma **combinação sem repetição** (ou **combinação simples**) **de** n **elementos** k **a** k é um subconjunto de k elementos de um conjunto de n elementos.

$\binom{n}{k}$ denota o número de combinações simples de n elementos k a k.

Como calcular?

$$\binom{n}{k} = \frac{A^s(n,k)}{}$$

Ideia

$\binom{4}{3} = \frac{4\cdot3\cdot2}{3!} = 4$

213	321	214	421	324	423	314	413
132	312	142	412	243	432	143	431
123	231	124	241	234	342	134	341

Combinações sem repetição

Definição

Uma **combinação sem repetição** (ou **combinação simples**) **de** n **elementos** k **a** k é um subconjunto de k elementos de um conjunto de n elementos.

$\binom{n}{k}$ denota o número de combinações simples de n elementos k a k.

Como calcular?

$$\binom{n}{k} = \frac{A^s(n,k)}{k!}$$

Ideia

$\binom{4}{3} = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3!} = 4$

213	321	214	421	324	423	314	413
132	312	142	412	243	432	143	431
123	231	124	241	234	342	134	341

Definição

Uma **combinação sem repetição** (ou **combinação simples**) **de** n **elementos** k **a** k é um subconjunto de k elementos de um conjunto de n elementos.

$\binom{n}{k}$ denota o número de combinações simples de n elementos k a k.

Como calcular?

$$\binom{n}{k} = \frac{A^s(n,k)}{k!} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}^{k \text{ fatores}}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Ideia

$\binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4$

213	321	214	421	324	423	314	413
132	312	142	412	243	432	143	431
123	231	124	241	234	342	134	341

Exemplo

Há 6 tipos de bilhetes da lotaria. Quantas maneiras existem de comprar 3 bilhetes de tipos diferentes?

Exemplo

Há 6 tipos de bilhetes da lotaria. Quantas maneiras existem de comprar 3 bilhetes de tipos diferentes?

Resposta: $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20.$

Exemplo

Há 6 tipos de bilhetes da lotaria. Quantas maneiras existem de comprar 3 bilhetes de tipos diferentes?

Resposta: $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20.$

Exemplo

Num grupo de 16 raparigas e 15 rapazes, quantos grupos de 5 pessoas com pelo menos 3 rapazes se pode formar?

Exemplo

Há 6 tipos de bilhetes da lotaria. Quantas maneiras existem de comprar 3 bilhetes de tipos diferentes?

Resposta: $\binom{6}{3} = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20.$

Exemplo

Num grupo de 16 raparigas e 15 rapazes, quantos grupos de 5 pessoas com pelo menos 3 rapazes se pode formar?

Resposta:

$$\begin{aligned}\binom{15}{3}\cdot\binom{16}{2}+\binom{15}{4}\cdot\binom{16}{1}+\binom{15}{5}\cdot\binom{16}{0} &= 54600+21840+3003\\ &= 79443.\end{aligned}$$

Teorema

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$ com $k \leq n$. Então:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Ideia

Seja $X = \{1, 2, \ldots, n\}$

Sobre 1: A função

$$f\colon \{A \subseteq X \mid |A| = k\} \longrightarrow \{B \subseteq X \mid |B| = n-k\}$$
$$A \longmapsto A^{\complement}$$

é invertível e por isso bijetiva.

Teorema

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$ com $k \leq n$. Então:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ *(suponhamos $n > 0$ e $k > 0$).*

Ideia

Sejam $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $Y = \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Sobre 2: Temos:

$$\begin{aligned}\{A \subseteq X \mid |A| = k\} &= \{A \subseteq X \mid |A| = k, n \notin A\} \cup \{A \subseteq X \mid |A| = k, n \in A\} \\ &= \{A \subseteq Y \mid |A| = k\} \cup \{B \cup \{n\} \mid B \subseteq Y, |B| = k-1\}\end{aligned}$$

Teorema

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$ com $k \leq n$. Então:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ *(suponhamos $n > 0$ e $k > 0$).*
3. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

Ideia

Seja $X = \{1, 2, \ldots, n\}$

Sobre 3: Temos:

$$\begin{aligned} P(X) &= \bigcup_{i=0}^{n} \{A \subseteq X \mid |A| = i\} \\ &= \{\varnothing\} \cup \{\{1\}, \ldots, \{n\}\} \cup \cdots \cup \{X\} \end{aligned}$$

(dois a dois disjunta).

Recordamos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Recordamos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

A recorrência

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & & & & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & & & & & & & \binom{4}{4} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & & & 1 & & \\
 & 1 & & & & & & 1 & \\
1 & & & & & & & & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Recordamos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

A recorrência

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & & & & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & & & & & & & \binom{4}{4} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & & & 1 & & \\
 & 1 & & & & & & 1 & \\
1 & & & & & & & & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Recordamos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

A recorrência

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & & & & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & & & & & & & \binom{4}{4} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & & & & & 1 & \\
1 & & & & & & & & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

O triângulo de Pascal

Recordamos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

A recorrência

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & & & & & & & \binom{4}{4} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & & & & & 1 & \\
1 & & & & & & & & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Recordamos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

A recorrência

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & & & & & & & \binom{4}{4} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & & & 1 & \\
1 & & & & & & & & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

O triângulo de Pascal

Recordamos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

A recorrência

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & & & & & & & \binom{4}{4} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & & & 1 & \\
1 & & & & & & & & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Recordamos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

A recorrência

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & & & & & & & \binom{4}{4} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & & & & & & & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Recordamos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

A recorrência

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & & & & & & & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Recordamos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

A recorrência

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Teorema

1. *Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então,*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Ideia

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= \overbrace{(1+x)(1+x)\dots(1+x)}^{n \text{ factores}} \\ &= 1 \cdot 1 \dots 1 \\ &\quad + \\ &\quad + \\ &\quad + \\ &\quad + \qquad .\end{aligned}$$

Teorema

1. *Sejam* $x \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$. *Então,*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Ideia

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &= \overbrace{(1+x)(1+x)\dots(1+x)}^{n \text{ factores}} \\
&= 1\cdot 1\dots 1 \\
&\quad + \quad \underbrace{x\cdot 1\dots 1}_{x \text{ do primeiro factor}} \quad + \quad \underbrace{1\cdot x\cdot 1\dots 1}_{x \text{ do segundo factor}} \quad + \dots + 1\dots 1x \\
&\quad + \\
&\quad + \\
&\quad + \qquad .
\end{aligned}$$

Teorema

1. *Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então,*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Ideia

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &= \overbrace{(1+x)(1+x)\dots(1+x)}^{n \text{ factores}} \\
&= 1 \cdot 1 \dots 1 \\
&\quad + \underbrace{x \cdot 1 \dots 1}_{x \text{ do primeiro factor}} + \underbrace{1 \cdot x \cdot 1 \dots 1}_{x \text{ do segundo factor}} + \dots + 1 \dots 1x \\
&\quad + x \cdot x \cdot 1 \dots 1 + x \cdot 1 \cdot x \cdot 1 \dots 1 + \dots + 1 \dots 1 \cdot x \cdot x \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \qquad .
\end{aligned}$$

Teorema

1. *Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então,*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Ideia

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &= \overbrace{(1+x)(1+x)\dots(1+x)}^{n \text{ factores}} \\
&= 1 \cdot 1 \dots 1 \\
&\quad + \underbrace{x \cdot 1 \dots 1}_{x \text{ do primeiro factor}} + \underbrace{1 \cdot x \cdot 1 \dots 1}_{x \text{ do segundo factor}} + \dots + 1 \dots 1x \\
&\quad + x \cdot x \cdot 1 \dots 1 + x \cdot 1 \cdot x \cdot 1 \dots 1 + \dots + 1 \dots 1 \cdot x \cdot x \\
&\quad + \dots \\
&\quad + x \dots x.
\end{aligned}$$

Teorema

1. *Sejam* $x \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$. *Então,*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

2. *Em particular, com* $x = 1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$

Teorema

1. *Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então,*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

2. *Em particular, com $x = 1$:* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$

3. *Em geral, para todos os $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

(a fórmula binomial de Newton).

O número $\binom{n}{k}$ diz-se também ***coeficiente binomial****.*

Exemplo (Recordamos de «Enumeração Combinatória»)

O número de sequências binárias com k uns e m zeros coincide com o número de subconjuntos de k elementos de um conjunto de $k+m$ elementos.

Logo, há $\binom{k+m}{k}$ tais sequências binárias.

Ideia. De facto, com $X = \{1, \dots, k+m\}$, a função

$$\{A \subseteq X \mid |A| = k\} \longrightarrow \{\text{sequências binárias com } k \text{ uns e } m \text{ zero}\}$$

$$A \longmapsto a_1 a_2 \dots a_{k+m} \quad \text{onde } a_i = \begin{cases} 1 & i \in A, \\ 0 & i \notin A \end{cases}$$

tem a função inversa

$$\{\text{sequências binárias com } k \text{ uns e } m \text{ zero}\} \longrightarrow \{A \subseteq X \mid |A| = k\}$$

$$a_1 a_2 \dots a_{k+m} \longmapsto \{i \in X \mid a_i = 1\}.$$

Exemplo (Recordamos de «Enumeração Combinatória»)

O número das soluções da equação $x_1 + \dots + x_n = k$ (com $x_i \in \mathbb{N}$, $n > 0$) coincide com o número de sequências binárias com k uns e $n - 1$ zeros.

Portanto, o número de soluções é $\binom{n+k-1}{k}$.

Ideia

A uma tal solução $(s_1, \dots, s_n)$ corresponde à sequência

$$\underbrace{1\dots1}_{s_1 \text{ vezes}}0\underbrace{1\dots1}_{s_2 \text{ vezes}}0\dots0\underbrace{1\dots1}_{s_n \text{ vezes}}.$$

Exemplo: Consideremos a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 5$.

$$(2,3,0) \longmapsto 1101110, \qquad (2,2,1) \longmapsto 1101101.$$

Definição

Seja X um conjunto finito. Um **multiconjunto** M em X é um par (X, ν) onde $\nu\colon X \longrightarrow \mathbb{N}$. Aqui $\nu(x)$ representa «o número de repetições» de x ou «a multiplicidade» de x.

O número $\sum_{x \in X} \nu(x)$ designa-se por **tamanho de M** ou **número de elementos de M** ou **cardinalidade de M**.

Definição

Seja X um conjunto finito. Um **multiconjunto** M em X é um par (X, ν) onde $\nu \colon X \longrightarrow \mathbb{N}$. Aqui $\nu(x)$ representa «o número de repetições» de x ou «a multiplicidade» de x.

O número $\sum_{x \in X} \nu(x)$ designa-se por **tamanho de M** ou **número de elementos de M** ou **cardinalidade de M**.

Nota

Seja $M = (X, \nu)$ um multiconjunto com $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Com $a_i = \nu(x_i)$, representamos o multiconjunto M da forma mais intuitiva por

$$M = \{x_1^{a_1}, \dots, x_n^{a_n}\} \quad \text{ou} \quad M = \{\underbrace{x_1, \dots x_1}_{a_1 \text{ vezes}}, \dots, \underbrace{x_n, \dots x_n}_{a_n \text{ vezes}}\}.$$

Definição

Uma **combinação com repetição de n elementos k a k** é um multiconjunto de k elementos num conjunto de n elementos.

O número de combinações com repetição de n elementos k a k denota-se por $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

Definição

Uma **combinação com repetição de n elementos k a k** é um multiconjunto de k elementos num conjunto de n elementos.

O número de combinações com repetição de n elementos k a k denota-se por $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

Exemplo

Escolher 3 elementos em $\{1, 2, 3, 4\}$: *Intuição*: «114» $=$ «141» $\neq$ «143».

Definição

Uma **combinação com repetição de n elementos k a k** é um multiconjunto de k elementos num conjunto de n elementos.

O número de combinações com repetição de n elementos k a k denota-se por $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

Exemplo

Escolher 3 elementos em $\{1, 2, 3, 4\}$: *Intuição*: «114» $=$ «141» $\neq$ «143».

Teorema

O número de combinações com repetição de n elementos k a k é igual ao número de soluções de $x_1 + \cdots + x_n = k$ com $x_i \in \mathbb{N}$. Portanto, se $n > 0$,

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Exemplo

Vamos determinar o número de possibilidades de colocação de 20 bolas indistinguíveis em 5 caixas numeradas, com pelo menos duas bolas em cada caixa.

Exemplo

Vamos determinar o número de possibilidades de colocação de 20 bolas indistinguíveis em 5 caixas numeradas, com pelo menos duas bolas em cada caixa.

Começamos por pôr duas bolas em cada caixa.

Exemplo

Vamos determinar o número de possibilidades de colocação de 20 bolas indistinguíveis em 5 caixas numeradas, com pelo menos duas bolas em cada caixa.

Começamos por pôr duas bolas em cada caixa. Depois, para cada uma das restantes bolas, escolhemos uma das 5 caixa; ou seja, fazemos uma sequência de 10 escolhas entre 5 elementos

$$\text{(por exemplo: } 13353\dots 2)$$

Exemplo

Vamos determinar o número de possibilidades de colocação de 20 bolas indistinguíveis em 5 caixas numeradas, com pelo menos duas bolas em cada caixa.

Começamos por pôr duas bolas em cada caixa. Depois, para cada uma das restantes bolas, escolhemos uma das 5 caixa; ou seja, fazemos uma sequência de 10 escolhas entre 5 elementos

$$\text{(por exemplo: } 13353\dots 2)$$

mas o resultado final é independente da ordem das escolhas (no fim, apenas podemos observar quantas bolas estão em cada caixa).

Exemplo

Vamos determinar o número de possibilidades de colocação de 20 bolas indistinguíveis em 5 caixas numeradas, com pelo menos duas bolas em cada caixa.

Começamos por pôr duas bolas em cada caixa. Depois, para cada uma das restantes bolas, escolhemos uma das 5 caixa; ou seja, fazemos uma sequência de 10 escolhas entre 5 elementos

$$\text{(por exemplo: } 13353\dots2)$$

mas o resultado final é independente da ordem das escolhas (no fim, apenas podemos observar quantas bolas estão em cada caixa).

Portanto, temos uma combinação com repetição de 5 elementos 10 a 10:

$$\left(\!\!\binom{5}{10}\!\!\right) = \binom{10+5-1}{4} = \binom{14}{4} = \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 7\cdot 13\cdot 11 = 1001.$$

Teorema

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$. Então:

1. $\left(\!\binom{n}{0}\!\right) = 1$.

Teorema

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$. *Então:*

1. $\left(\!\binom{n}{0}\!\right) = 1$.
2. *Para* $k > 0$, $\left(\!\binom{0}{k}\!\right) = 0$.

Teorema

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$. *Então:*

1. $\left(\!\binom{n}{0}\!\right) = 1$.
2. *Para* $k > 0$, $\left(\!\binom{0}{k}\!\right) = 0$.
3. *Para* $n > 0$ *e* $k > 0$, $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n}{k-1}\!\right) + \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right)$.

Ideia.

Consideremos $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Então,

$$\begin{aligned}\{k\text{-multiconjuntos em } X\} = \{&k\text{-multiconjuntos em } X \text{ com } \nu(x_n) > 0\} \\ &\cup \{k\text{-multiconjuntos em } X \text{ com } \nu(x_n) = 0\}.\end{aligned}$$

$\square$

Escolher k elementos entre n elementos:

	com repetição	sem repetição (simples)
dependente da ordem (arranjos)	$A^r(n,k) = n^k$	$A^s(n,k) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}_{k \text{ fatores}}$
independente da ordem (combinações)	$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{n-1}$ se $(n > 0)$	$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}^{k \text{ fatores}}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\ k!}$ (coeficiente binomial)

Algumas igualdades:

- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \qquad \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m},$
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad (n, k > 0).$

3. Permutações com repetição

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma $2\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma 2 $- - - - - - - -$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma 2 $- - - - - - - -$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma $2 - - - - - - - -$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma $2 - - - - - - - -$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma 2 $-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma 2 $- - - - - - - -$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1}.$$

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma $2 - - - - - - - -$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot$$

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma $2 - - - - - - - -$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2}.$$

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma $2 - - - - - - - -$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} =$$

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma $2 - - - - - - - -$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = \frac{8 \qquad\qquad\qquad\qquad}{1!}$$

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma 2 $-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1! \cdot 4!}$$

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma 2 $- - - - - - - -$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1! \cdot 4! \cdot 2!}$$

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma $2 - - - - - - - -$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!}$$

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma 2 $- - - - - - - -$; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{8!}{1! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!} = 840.$$

Definição

Seja $M = (X, \nu)$ um multiconjunto de tamanho n. Uma **permutação de M** (ou **permutação com repetição**) é uma sequência $s = (x_1, \ldots, x_n)$ de elementos de X tal que cada $x \in X$ ocorre $\nu(x)$ vezes em s.

Definição

Seja $M = (X, \nu)$ um multiconjunto de tamanho n. Uma **permutação de M** (ou **permutação com repetição**) é uma sequência $s = (x_1, \ldots, x_n)$ de elementos de X tal que cada $x \in X$ ocorre $\nu(x)$ vezes em s.

Teorema

O número de permutações do multiconjunto $\{x_1^{n_1}, \ldots, x_k^{n_k}\}$ de tamanho n é

$$\frac{n!}{n_1! \cdot \cdots \cdot n_k!}.$$

Exemplo

Pelo exemplo anterior, o número de permutações do multiconjunto $\{2, 3, 3, 3, 3, 6, 6, 9\}$ de 8 elementos é

$$\frac{8!}{1! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!} = 840.$$

Definição

Seja X um conjunto de n elementos e sejam $n_1, n_2, \dots, n_k$ números naturais com $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. O número de sequências $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ de k subconjuntos de X dois a dois disjuntos e com $|A_i| = n_i$, $i = 1, \dots, k$, designa-se por **coeficiente multinomial** e denota-se por

$$\binom{n}{n_1 \; n_2 \; \dots \; n_k}.$$

Definição

Seja X um conjunto de n elementos e sejam $n_1, n_2, \dots, n_k$ números naturais com $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. O número de sequências $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ de k subconjuntos de X dois a dois disjuntos e com $|A_i| = n_i$, $i = 1, \dots, k$, designa-se por **coeficiente multinomial** e denota-se por

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \dots\ n_k}.$$

Teorema

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \dots\ n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Ideia

$$\underbrace{\binom{n}{n_1}}_{\text{(escolher } A_1\text{)}} \cdot \underbrace{\binom{n-n_1}{n_2}}_{\text{(escolher } A_2\text{)}} \cdot \dots \cdot \underbrace{\binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}=n_k}{n_k}}_{\text{(escolher } A_k\text{)}} = \frac{n(n-1)\cdots(n-n_1+1)\cdots 1}{n_1! \dots n_k!}.$$

Definição

Seja X um conjunto de n elementos e sejam $n_1, n_2, \dots, n_k$ números naturais com $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. O número de sequências $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ de k subconjuntos de X dois a dois disjuntos e com $|A_i| = n_i$, $i = 1, \dots, k$, designa-se por **coeficiente multinomial** e denota-se por

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \dots\ n_k}.$$

Teorema

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \dots\ n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Nota

- Se $k = 2$, obtemos o coeficiente binomial: $\binom{n}{m\ \ (n-m)} = \binom{n}{m}$.

Definição

Seja X um conjunto de n elementos e sejam $n_1, n_2, \dots, n_k$ números naturais com $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. O número de sequências $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ de k subconjuntos de X dois a dois disjuntos e com $|A_i| = n_i$, $i = 1, \dots, k$, designa-se por **coeficiente multinomial** e denota-se por

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \dots\ n_k}.$$

Teorema

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \dots\ n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot \cdots \cdot n_k!}.$$

Nota

- Se $k = 2$, obtemos o coeficiente binomial: $\binom{n}{m\ \ (n-m)} = \binom{n}{m}$.
- Se $n_1 = \cdots = n_k = 1$ (e por isso $k = n$): $\binom{n}{n_1\ n_2\ \dots\ n_k} =$

Definição

Seja X um conjunto de n elementos e sejam $n_1, n_2, \ldots, n_k$ números naturais com $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. O número de sequências $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ de k subconjuntos de X dois a dois disjuntos e com $|A_i| = n_i$, $i = 1, \ldots, k$, designa-se por **coeficiente multinomial** e denota-se por

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_k}.$$

Teorema

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot \cdots \cdot n_k!}.$$

Nota

- Se $k = 2$, obtemos o coeficiente binomial: $\binom{n}{m\ \ (n-m)} = \binom{n}{m}$.
- Se $n_1 = \cdots = n_k = 1$ (e por isso $k = n$): $\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_k} = n!$.

Teorema

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$*, então*

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_k} a_1^{n_1} \ldots a_k^{n_k}.$$

Recordamos (a fórmula binomial)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{n_1+n_2=n} \binom{n}{n_1\ n_2} a^{n_1} b^{n_2}.$$

Teorema

Sejam $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *então*

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \binom{n}{n_1\ n_2\ \dots\ n_k} a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k}.$$

Recordamos (a fórmula binomial)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{n_1+n_2=n} \binom{n}{n_1\ n_2} a^{n_1} b^{n_2}.$$

Exemplo

$$(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c) = \binom{3}{3\ 0\ 0} a^3 + \binom{3}{0\ 3\ 0} b^3 + \binom{3}{0\ 0\ 3} c^3 + \binom{3}{2\ 1\ 0} a^2 b + \binom{3}{2\ 0\ 1} a^2 c + \binom{3}{1\ 1\ 1} abc + \dots$$

Teorema

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *então*

$$(a_1 + a_2 + ... + a_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_k} a_1^{n_1} \ldots a_k^{n_k}.$$

Ideia

- Desenvolvendo o produto de n fatores

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)\cdots(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$$

Teorema

Sejam $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *então*

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \binom{n}{n_1\ n_2\ \dots\ n_k} a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k}.$$

Ideia

- Desenvolvendo o produto de n fatores

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \cdots (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$$

- obtêm-se os termos da forma

$$a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k},$$

com $n_1 + \cdots + n_k = n$, que correspondem à escolha de a_1 em n_1 dos fatores, a_2 em n_2 dos restantes fatores, ...

Teorema

Sejam $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \binom{n}{n_1\ n_2\ \dots\ n_k} a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k}.$$

Ideia

- Desenvolvendo o produto de n fatores

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)\cdots(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$$

- obtêm-se os termos da forma

$$a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k},$$

  com $n_1 + \cdots + n_k = n$, que correspondem à escolha de a_1 em n_1 dos fatores, a_2 em n_2 dos restantes fatores, ...

- Logo, existem $\binom{n}{n_1\ n_2\ \dots\ n_k}$ termos da forma $a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k}$.

4. Identidades Combinatórias

Já aprendemos:

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$
- $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$

No caso das últimas duas identidades, na prova conta-se os elementos do mesmo conjunto de duas maneiras diferentes.

Exemplo

Para todos os $n, m, l \in \mathbb{N}$*,*

$$\sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} = \binom{n+m}{l}.$$

Exemplo

Para todos os $n, m, l \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} = \binom{n+m}{l}.$$

Justificação: Consideremos X e Y com $|X| = n$, $|Y| = m$ e $X \cap Y = \varnothing$.

Exemplo

Para todos os $n, m, l \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k}\binom{m}{l-k} = \binom{n+m}{l}.$$

Justificação: Consideremos X e Y com $|X| = n$, $|Y| = m$ e $X \cap Y = \varnothing$.

- Assim, há $\binom{n+m}{l}$ subconjuntos de $X \cup Y$ com l elementos.

Exemplo

Para todos os $n, m, l \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k}\binom{m}{l-k} = \binom{n+m}{l}.$$

Justificação: Consideremos X e Y com $|X| = n$, $|Y| = m$ e $X \cap Y = \varnothing$.

- Assim, há $\binom{n+m}{l}$ subconjuntos de $X \cup Y$ com l elementos.
- Por outro lado, podemos obter estes subconjuntos escolhendo k elementos em X e $l - k$ elementos em Y, para cada número k entre 0 e l.

Exemplo

Para todos os $n, m, l \in \mathbb{N}$*,*

$$\sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} = \binom{n+m}{l}.$$

Justificação: Consideremos X e Y com $|X| = n$, $|Y| = m$ e $X \cap Y = \varnothing$.

- Assim, há $\binom{n+m}{l}$ subconjuntos de $X \cup Y$ com l elementos.
- Por outro lado, podemos obter estes subconjuntos escolhendo k elementos em X e $l-k$ elementos em Y, para cada número k entre 0 e l.

Exemplo

Em particular, para $m = n = k$,

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Exemplo

Para cada $n \geq 1$ *e* $n_1, \ldots, n_k \geq 1$ *com* $n_1 + \cdots + n_k = n$,

$$\binom{n}{n_1 \;\ldots\; n_k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{n-1}{n_1 \;\ldots\; (n_i - 1) \;\ldots\; n_k}.$$

Exemplo

Para cada $n \geq 1$ *e* $n_1, \dots, n_k \geq 1$ *com* $n_1 + \cdots + n_k = n$*,*

$$\binom{n}{n_1 \;\dots\; n_k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{n-1}{n_1 \;\dots\; (n_i - 1) \;\dots\; n_k}.$$

Justificação: No que se segue, uma sequência $(A_1, \dots, A_k)$ de subconjuntos de um conjunto finito $X = \{1, 2, \dots, n\}$ dois a dois disjuntos, com $|A_i| = n_i$ $(i \in \{1, \dots, k\})$, é designada por partição de X do tipo $(n_1, \dots, n_k)$.

Exemplo

Para cada $n \geq 1$ *e* $n_1, \dots, n_k \geq 1$ *com* $n_1 + \dots + n_k = n$,

$$\binom{n}{n_1 \;\dots\; n_k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{n-1}{n_1 \;\dots\; (n_i - 1) \;\dots\; n_k}.$$

Justificação: No que se segue, uma sequência $(A_1, \dots, A_k)$ de subconjuntos de um conjunto finito $X = \{1, 2, \dots, n\}$ dois a dois disjuntos, com $|A_i| = n_i$ ($i \in \{1, \dots, k\}$), é designada por partição de X do tipo $(n_1, \dots, n_k)$.

Por definição, $\binom{n}{n_1 \dots n_k}$ é o número de elementos do conjunto

$$\{\text{as partições } (A_1, \dots, A_k) \text{ de } X \text{ do tipo } (n_1, \dots, n_k)\}.$$

Exemplo

Para cada $n \geq 1$ e $n_1, \dots, n_k \geq 1$ com $n_1 + \dots + n_k = n$,

$$\binom{n}{n_1 \;\dots\; n_k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{n-1}{n_1 \;\dots\; (n_i - 1) \;\dots\; n_k}.$$

Justificação: No que se segue, uma sequência $(A_1, \dots, A_k)$ de subconjuntos de um conjunto finito $X = \{1, 2, \dots, n\}$ dois a dois disjuntos, com $|A_i| = n_i$ $(i \in \{1, \dots, k\})$, é designada por partição de X do tipo $(n_1, \dots, n_k)$.

Por definição, $\binom{n}{n_1 \;\dots\; n_k}$ é o número de elementos do conjunto

$$\{\text{as partições } (A_1, \dots, A_k) \text{ de } X \text{ do tipo } (n_1, \dots, n_k)\}.$$

Podemos representar este conjunto como a união dos seguintes conjuntos (dois a dois disjuntos).

Exemplo (continuação)

- o conjunto das sequências $(B_1 \cup \{n\}, B_2 \ldots, B_k)$ onde $(B_1, B_2 \ldots, B_k)$ é uma partição de $\{1, \ldots, n-1\}$ do tipo $(n_1 - 1, n_2, \ldots, n_k)$;

Logo:

$$= \binom{n}{n_1 \;\ldots\; n_k}.$$

Exemplo (continuação)

- o conjunto das sequências $(B_1 \cup \{n\}, B_2 \dots, B_k)$ onde $(B_1, B_2 \dots, B_k)$ é uma partição de $\{1, \dots, n-1\}$ do tipo $(n_1 - 1, n_2, \dots, n_k)$;

Logo:

$$\binom{n-1}{(n_1-1)\ n_2\ \dots\ n_k} = \binom{n}{n_1\ \dots\ n_k}.$$

Exemplo (continuação)

- o conjunto das sequências $(B_1 \cup \{n\}, B_2 \ldots, B_k)$ onde $(B_1, B_2 \ldots, B_k)$ é uma partição de $\{1, \ldots, n-1\}$ do tipo $(n_1 - 1, n_2, \ldots, n_k)$;
- o conjunto das sequências $(B_1, B_2 \cup \{n\} \ldots, B_k)$ onde $(B_1, B_2 \ldots, B_k)$ é uma partição de $\{1, \ldots, n-1\}$ do tipo $(n_1, n_2 - 1, \ldots, n_k)$;

Logo:

$$\binom{n-1}{(n_1-1)\ n_2\ \ldots\ n_k} + \binom{n-1}{n_1\ (n_2-1)\ \ldots\ n_k} \qquad = \binom{n}{n_1\ \ldots\ n_k}.$$

Exemplo (continuação)

- o conjunto das sequências $(B_1 \cup \{n\}, B_2 \ldots, B_k)$ onde $(B_1, B_2 \ldots, B_k)$ é uma partição de $\{1, \ldots, n-1\}$ do tipo $(n_1 - 1, n_2, \ldots, n_k)$;
- o conjunto das sequências $(B_1, B_2 \cup \{n\} \ldots, B_k)$ onde $(B_1, B_2 \ldots, B_k)$ é uma partição de $\{1, \ldots, n-1\}$ do tipo $(n_1, n_2 - 1, \ldots, n_k)$;
- $\ldots$
- o conjunto das sequências $(B_1, B_2 \ldots, B_k \cup \{n\})$ onde $(B_1, B_2 \ldots, B_k)$ é uma partição de $\{1, \ldots, n-1\}$ do tipo $(n_1, n_2, \ldots, n_k - 1)$.

Logo:

$$\binom{n-1}{(n_1-1)\ n_2\ \ldots\ n_k} + \binom{n-1}{n_1\ (n_2-1)\ \ldots\ n_k} + \cdots + \binom{n-1}{n_1\ n_2\ \ldots\ (n_k-1)} = \binom{n}{n_1\ \ldots\ n_k}.$$

Exemplo

Para todos os $n, m \in \mathbb{N}$ *(*$n \leq m$*),*

$$\binom{m+1}{n+1} = \sum_{k=n}^{m} \binom{k}{n}.$$

Exemplo

Para todos os $n, m \in \mathbb{N}$ ($n \leq m$),

$$\binom{m+1}{n+1} = \sum_{k=n}^{m} \binom{k}{n}.$$

O número binomial $\binom{m+1}{n+1}$ é igual ao tamanho do conjunto

$$Y = \{A \subseteq \{1, \dots, m+1\} \mid \quad |A| = n+1\}.$$

Exemplo

Para todos os $n, m \in \mathbb{N}$ *(*$n \leq m$*),*

$$\binom{m+1}{n+1} = \sum_{k=n}^{m} \binom{k}{n}.$$

O número binomial $\binom{m+1}{n+1}$ é igual ao tamanho do conjunto

$$Y = \{A \subseteq \{1, \dots, m+1\} \mid \quad |A| = n+1\}.$$

Para cada $k \in \{n, \dots, m\}$, consideremos

$$Y_k = \{A \subseteq \{1, \dots, m+1\} \mid \max A = k+1, |A| = n+1\};$$

assim, $Y = Y_n \cup Y_{n+1} \cup \cdots \cup Y_m$ (dois a dois disjuntos).

Exemplo

Para todos os $n, m \in \mathbb{N}$ ($n \leq m$),

$$\binom{m+1}{n+1} = \sum_{k=n}^{m} \binom{k}{n}.$$

O número binomial $\binom{m+1}{n+1}$ é igual ao tamanho do conjunto

$$Y = \{A \subseteq \{1, \dots, m+1\} \mid \quad |A| = n+1\}.$$

Para cada $k \in \{n, \dots, m\}$, consideremos

$$Y_k = \{A \subseteq \{1, \dots, m+1\} \mid \max A = k+1, |A| = n+1\};$$

assim, $Y = Y_n \cup Y_{n+1} \cup \dots \cup Y_m$ (dois a dois disjuntos). Portanto,

$$|Y| = \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \dots + \binom{m}{n}.$$