



Nome: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_

NMec: \_\_\_\_\_

Nº folhas extra: \_\_\_\_\_

Questão	Cotação	Classificação
1	10	
2	5	
3	5	
Total:	20	

- Desligue o telemóvel.
- Não é permitido o uso de qualquer material eletrónico.
- Na questão 1 escreva V ou F consoante a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique a sua resposta de modo sucinto: apenas uma frase. A resposta só é válida se for justificada.
- Nas restantes questões mostre os seus cálculos mas faça-o de modo claro e sucinto.

---

### Transformadas de Laplace fundamentais

1.  $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}, s > a, a \in \mathbb{R}$
2.  $\mathcal{L}\{\cos(at)\}(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0, a \in \mathbb{R}$
3.  $\mathcal{L}\{\sin(at)\}(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0, a \in \mathbb{R}$
4.  $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0, n \in \mathbb{N}_0$
5.  $\mathcal{L}\{\cosh(at)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right\}(s) = \frac{s}{s^2 - a^2}, s > |a|, a \in \mathbb{R}$
6.  $\mathcal{L}\{\sinh(at)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right\}(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}, s > |a|, a \in \mathbb{R}$

(10 val.) 1. No local próprio escreva V ou F consoante a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique a sua resposta usando apenas uma frase (se precisar fazer cálculos use uma folha de rascunho).

(a) \_\_\_ A equação diferencial  $(y')^5 + xy'' = 0$  é uma EDO de ordem 5.

(b) \_\_\_ A equação  $x^2 dy = (x^2 + xy + y^2) dx$  é de variáveis separáveis.

(c) \_\_\_ A relação (curva)  $y(x) = x^2$  é uma solução (explícita) da equação diferencial  $\frac{dy}{dx} + y = x(x + 2)$ .

(d) \_\_\_ A família de funções  $y = \frac{e^x}{C-x}$ ,  $C \in \mathbb{R}$ , é a solução geral da EDO:

$$y' - y = -e^x y^2.$$

(e) \_\_\_ O problema

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$$

é um problema de valor inicial.

(f) \_\_\_ Sabendo que toda a solução da equação diferencial  $x^2 y - 2xy' + 2y = 0$  pode ser escrita na forma  $y = C_1 x + C_2 x^2$ , a solução do problema

$$x^2 y - 2xy' + 2y = 0, \quad y(2) = 0, \quad y(3) = 4$$

é  $y(x) = \frac{4}{3}(x^2 - 2x)$ .

- (g) \_\_\_\_ A equação diferencial  $xy' + (1+x)y = x^3$  é uma EDO linear de primeira ordem. Um fator integrante é  $\mu(x) = e^{x^2+x}$ .

- (h) \_\_\_\_ A transformada de Laplace de uma função  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  é

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{st} dt.$$

- (i) \_\_\_\_ A transformada de Laplace inversa de  $G(s) = \frac{5s}{s^2-2s-24}$  é  $f(t) = 2e^{4t} + 3e^{-6t}$ .

- (j) \_\_\_\_ Se  $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{2}{(s-1)^3}$  então  $\mathcal{L}\{f(2t)\} = \frac{8}{(s-1)^3}$ .

---

**Nas questões seguintes mostre todos os seus cálculos para ter cotações parciais.**

---

- (5 val.) 2. Considere a equação diferencial de Bernoulli  $-4y' + \frac{3}{x}y = y^5$ , com  $x > 0$ .
- (a) Encontre a solução geral desta equação.
  - (b) Qual é a solução particular que satisfaz  $y(4) = 1$ ? E a solução particular que satisfaz  $y(4) = -1$ ? Indique o intervalo para  $x$  onde estas soluções particulares são definidas.
- (5 val.) 3. Considere a equação diferencial  $y'' + 4y' + 4y = 4x$ .
- Calcule a solução geral desta equação. Diga explicitamente qual é o método que usa.