Guiões de Cálculo I - Agrupamento 2

Guião 3

Cálculo integral

Paula Oliveira

2021/22

Universidade de Aveiro

Conteúdo

Capítulo 6

Cálculo Integral

6.1 Introdução ao Cálculo Integral

Como calcular a área A de uma região do plano limitada pelo eixo Ox e pelo gráfico de uma função contínua não negativa definida num dado intervalo $[a, b]$?

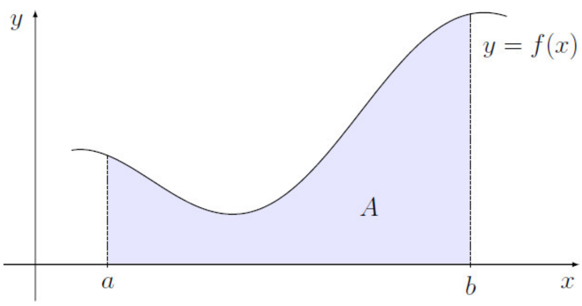


Figura 6.1: Área limitada pelo gráfico de uma função, pelo eixo das abcissas e duas retas verticais.

Podemos obter valores aproximados dessa área considerando retângulos como ilustrado nas figuras 6.2, 6.3 e 6.4.

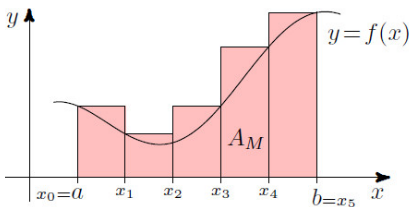


Figura 6.2: Aproximação 1.

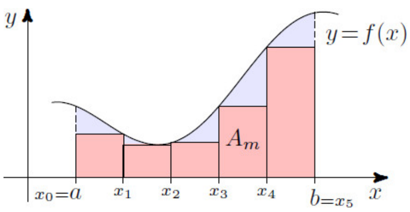


Figura 6.3: Aproximação 2.

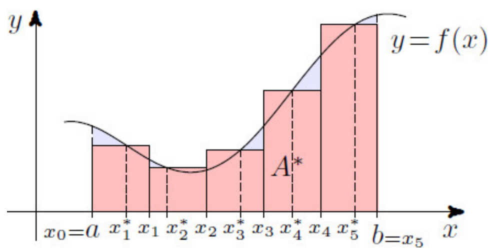


Figura 6.4: Aproximação 3.

A^*, A_m e A_M são valores aproximados da área A. Podemos determinar esses valores conhecendo a função f e, sendo retângulos, as suas áreas são dadas por *comprimento*$\times$*largura*. Assim,

1. $A_m = \displaystyle\sum_{i=1}^{5} m_i(x_i - x_{i-1})$, onde m_i é o mínimo global de f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, 5$

2. $A_M = \displaystyle\sum_{i=1}^{5} M_i(x_i - x_{i-1})$, sendo M_i o máximo global de f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, 5$

3. $A^* = \displaystyle\sum_{i=1}^{5} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$, com $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, 5$.

Note-se que

$$A_m \leq A \leq A_M \qquad A_m \leq A^* \leq A_M$$

Intuitivamente, poder-se-á esperar que quanto maior for o número de subintervalos de [a,b] considerados, menor será o erro que se comete ao aproximar A por cada um dos processos indicados, contudo isso não será necessariamente assim, pois depende da escolha dos subintervalos...

6.2 Partição de um intervalo

Definição 6.1. *Chama-se partição do intervalo $[a, b]$, com $a < b$, a um conjunto finito de pontos de $[a, b]$*

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},$$

tal que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.

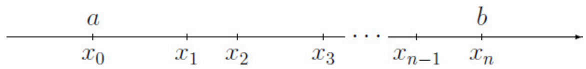


Figura 6.5: Partição de um intervalo.

Note-se que os pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ determinam uma divisão do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, com $i = 1, \ldots, n$, de amplitudes $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Definição 6.2. *Chama-se amplitude ou diâmetro de uma partição $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, e denota-se por $|\mathcal{P}|$, à maior das amplitudes dos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, isto é,*

$$|\mathcal{P}| = \max\{\Delta x_i : i = 1, \ldots, n\}.$$

Exemplo 6.1. Seja $\mathcal{P} = \left\{-2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ uma partição do intervalo $[-2, 1]$. O diâmetro da partição é

$$|\mathcal{P}| = \max\left\{-\frac{3}{2} - (-2), -\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right), 0 - \left(-\frac{1}{2}\right), \frac{1}{2} - 0, 1 - \frac{1}{2}\right\} = \max\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} = 1$$

Definição 6.3. *Chama-se conjunto compatível com a partição $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ a todo o conjunto*

$$\mathcal{C} = \{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\}$$

tal que, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$

$$x_i^* \in [x_{i-1}, x_i].$$

Definição 6.4. *Chama-se partição regular de amplitude $\Delta = \frac{b-a}{n}$ do intervalo $[a, b]$, com $a < b$, ao conjunto de pontos*

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\},$$

com $x_i = a + i\Delta = a + i\frac{b-a}{n}$, para $i = 0, \ldots, n$.

Note-se que neste tipo de partições se tem:

- $x_0 = a$ e $x_n = b$;
- $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$; logo todos os subintervalos têm a mesma amplitude que é precisamente o diâmetro da partição.

6.3 Integral definido

Definição 6.5. *Seja f uma função definida num intervalo $[a,b]$. Dada uma partição $\mathcal{P}$, definimos a Soma Superior $S_f(\mathcal{P})$ e a Soma Inferior $I_f(\mathcal{P})$ para a partição $\mathcal{P}$, como sendo respetivamente*

1. $S_f(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$, *sendo M_i o supremo de f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$*

2. $I_f(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$, *sendo m_i o ínfimo de f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$*

caso m_i e M_i, $i = 1, \ldots, n$, existam.

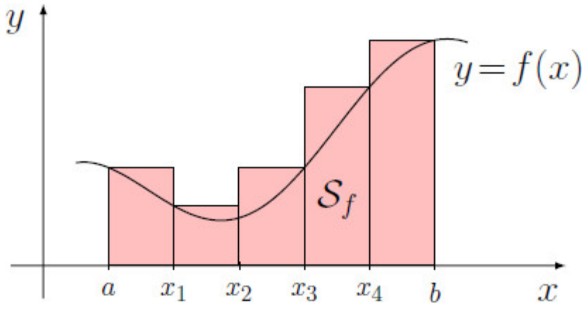


Figura 6.6: Soma superior.

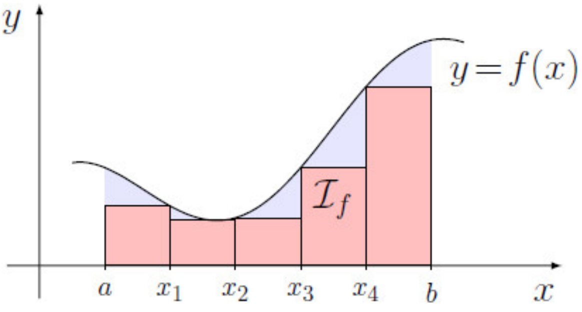


Figura 6.7: Soma inferior.

Definição 6.6. *Sejam f uma função definida num intervalo $[a,b]$, $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma partição de $[a,b]$ e $\mathcal{C} = \{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\}$ um conjunto compatível com a partição $\mathcal{P}$. A soma de Riemann de f relativamente à partição $\mathcal{P}$ e ao conjunto $\mathcal{C}$, $S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C})$, é o número real*

$$S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}).$$

Se f é contínua e limitada em $[a,b]$ então $S_f(P) = S_f(P, C)$ onde C é o conjunto dos maximizantes de f em cada subintervalo determinado pela partição P. Analogamente, $I_f(P) = S_f(P, C)$ onde C é o conjunto dos minimizantes.

Exercício resolvido 6.1. Seja $f(x) = x^2$, com $x \in [0,1]$, $\mathcal{P} = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ e $\mathcal{C} = \{x_i^* = x_{i-1} : i = 1, 2, 3\}$. Determine $S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C})$.

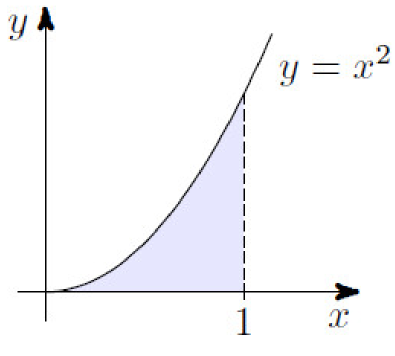


Figura 6.8: Área limitada pelo gráfico da função $f(x) = x^2$.

Resolução do exercício 6.1.

$$S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}) = f(0)\left(\frac{1}{3} - 0\right) + f\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{31}{216}.$$

Exercício resolvido 6.1. Seja $f(x) = x^2$, com $x \in [0, 1]$, $\mathcal{P} = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$ e $\mathcal{C} = \{x_i^* = x_{i-1} : i = 1, 2, 3\}$. Determine $S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C})$.

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$x_1^* = x_0$

$x_2^* = x_1$

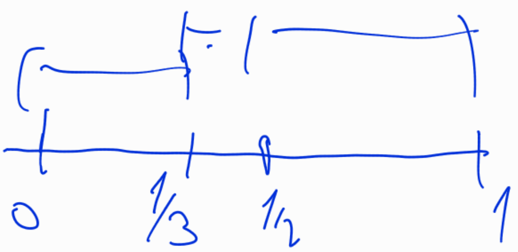
$x_3^* = x_2$

$$S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= f(x_1^*)(x_1 - x_0) + f(x_2^*)(x_2 - x_1) + f(x_3^*)(x_3 - x_2)$$

$$= f(0)\left(\frac{1}{3} - 0\right) + f\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) =$$



$$= 0 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{9 \times 6} + \frac{1}{4 \times 2} = \frac{1}{54} + \frac{1}{8} = \frac{8 + 54}{8 \times 54}$$

3. Se $\mathcal{P}' = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ e $\mathcal{C}' = \{x_i^* = x_{i-1} : i = 1, 2, 3, 4\}$ determine $S_f(\mathcal{P}', \mathcal{C}')$.

$$S_f(\mathcal{P}', \mathcal{C}') = f(x_1^*)\overbrace{(x_1 - x_0)}^{1/4} + f(x_2^*)\overbrace{(x_2 - x_1)}^{1/4} + f(x_3^*)\overbrace{(x_3 - x_2)}^{1/4} + f(x_4^*)\overbrace{(x_4 - x_3)}^{1/4}$$

$$f(0)\,1/4 + f\left(\frac{1}{4}\right) \times 1/4 + f\left(\frac{1}{2}\right) 1/4 + f(3/4)\,1/4$$

$$0 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times 1/4 + (1/2)^2 \times 1/4 + (3/4)^2 \times 1/4$$

Tem sentido dizer que $S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ é um valor aproximado da área da região assinalada na figura 6.8?

Exercício 6.1 Considere a função definida na Figura 6.8.

1. Se $\mathcal{C}_1 = \{x_i^* = x_i : i = 1, 2, 3\}$, determine $S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}_1)$.
2. Se $\mathcal{C}_2 = \{x_i^* = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}, i = 1, 2, 3\}$, determine $S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}_2)$.
3. Se $\mathcal{P}' = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ e $\mathcal{C}' = \{x_i^* = x_{i-1} : i = 1, 2, 3, 4\}$ determine $S_f(\mathcal{P}', \mathcal{C}')$.

Exercício 6.2 Seja $g(x) = -x^2$, com $x \in [0, 1]$, $\mathcal{P} = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ e $\mathcal{C} = \{x_i^* = x_i : i = 1, 2, 3\}$. Determine $S_g(\mathcal{P}, \mathcal{C})$.

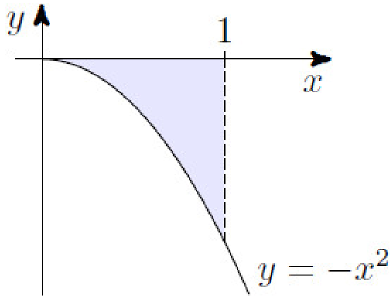


Figura 6.9: Área limitada pelo gráfico da função $f(x) = -x^2$.

Será que neste caso tem sentido dizer que $S_g(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ é um valor aproximado da área da região assinalada na figura 6.9?

Definição 6.7. *Seja f uma função definida num intervalo $[a, b]$. Diz-se que f é integrável em $[a, b]$ se existir um número real I tal que*

$$\lim_{n\to+\infty} S_f(\mathcal{P}_n, \mathcal{C}_n) = I,$$

para toda a sucessão $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de partições de $[a, b]$ com $\lim_{n\to+\infty} |\mathcal{P}_n| = 0$ e para toda a sucessão $(\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_n$ é compatível com $\mathcal{P}_n$.

Se f é integrável em $[a, b]$, a este valor chamamos integral de Riemann da função f entre a e b e designa-se pelo símbolo

$$\int_a^b f(x)dx,$$

onde a é o limite inferior de integração, b é o limite superior de integração e x a variável de integração.

Observação 6.1. Na definição de integral de Riemann pressupõe-se que $a < b$. Dá-se, no entanto, significado a $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ quando $a > b$ ou $a = b$:

- Se $a > b$, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (se o integral do 2º membro existir).
- Se $a = b$, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$.

Como consequência da definição 6.7, temos

Proposição 6.1. *Seja f uma função limitada num intervalo $[a, b]$ e $\mathcal{P}$ o conjunto de todas as partições de $[a, b]$. Diz-se que f é integrável em $[a, b]$ se e só se o ínfimo das somas superiores é igual ao supremo das somas inferiores,*

$$\inf\{S(P) : P \in \mathcal{P}\} = \sup\{I(P) : P \in \mathcal{P}\} = I,$$

e nesse caso,

$$\int_a^b f(x)\, dx = I.$$

Se f é integrável em $[a, b]$, para calcular $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ pode-se considerar uma qualquer sucessão de partições de $[a, b]$ cujo diâmetro tenda para zero.

É usual considerar a sucessão $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de partições regulares de $[a, b]$ $\left(\text{com } \Delta = \dfrac{b-a}{n}\right)$, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},$$

com $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Repare-se que neste caso

$$\lim_{n\to+\infty} |\mathcal{P}_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} = 0.$$

Exercício 6.3 Seja f, tal que $f(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Sabendo que f é integrável em qualquer intervalo fechado e limitado de $\mathbb{R}$, mostre que, para cada $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b c\, dx = c(b-a).$$

Exercício 6.4 Sabendo que a função dada por $f(x) = 2x + 1$, é integrável em $[0, 3]$, calcule

$$\int_0^3 (2x+1)dx.$$

Exemplo 6.2. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Vejamos que f não é integrável em $[0, 1]$. Consideremos uma qualquer partição P de $[0, 1]$.

Uma vez que o supremo de f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ é 1 e que o ínfimo de f nesse intervalo é 0, para todo $n \in \mathbb{N}$ resulta

$$S(P) = \sum_{i=1}^n 1 \times (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = 1 \quad \text{e} \quad I(P) = \sum_{i=1}^n 0 \times (x_i - x_{i-1}) = 0.$$

Logo

$$\inf\{S(P) : P \in \mathcal{P}\} = 1 \neq 0 = \sup\{I(P) : P \in \mathcal{P}\},$$

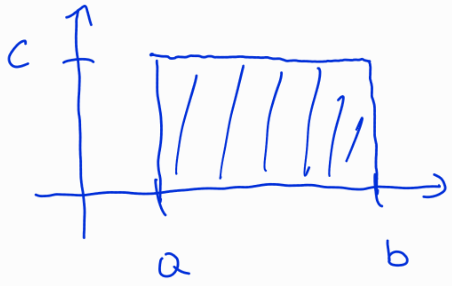
onde $\mathcal{P}$ é o conjunto de todas as partições de $[0, 1]$.

Exemplo 6.3. Seja $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$. Consideremos as partições regulares do intervalo $[0, 1]$ de diâmetro $\dfrac{1}{n}$.

Notemos que, como f é uma função crescente, o supremo de f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ é $f(x_i) = x_i = \dfrac{i}{n}$ e o ínfimo é $f(x_{i-1}) = x_{i-1} = \dfrac{i-1}{n}$. Logo

Exercício 6.3 Seja f, tal que $f(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Sabendo que f é integrável em qualquer intervalo fechado e limitado de $\mathbb{R}$, mostre que, para cada $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a).$$



$\mathcal{P}_n$ partições regulares

$$S_f(\mathcal{P}_n, \mathcal{C}_n) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(x_i^*)}_{c} \left(\frac{b-a}{n}\right) =$$

$$= \frac{c(b-a)}{n} \times \sum_{i=1}^{n} 1 =$$

$$= \frac{c(b-a)}{n} \times n = c(b-a).$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_f(\mathcal{P}_n, \mathcal{C}_n) = c(b-a)$$

Exercício 6.4 Sabendo que a função dada por $f(x) = 2x+1$, é integrável em $[0,3]$, calcule

$$\int_0^3 (2x+1)dx.$$

$$\Delta = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

$$x_i^* = x_i$$

$$S_f(\mathcal{P}_n, \mathcal{C}_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\underbrace{(x_{i+1}-x_i)}_{3/n} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, 3/n = \sum_{i=1}^{n} f\left(0 + i \cdot \frac{3}{n}\right) \cdot \frac{3}{n} =$$

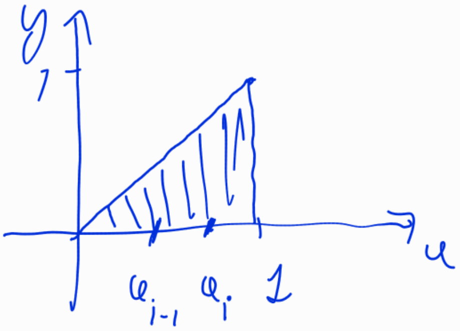
$$= \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right) = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(2\left(\frac{3i}{n}\right)+1\right) =$$

$$= \frac{3}{n}\left(\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right) =$$

$$= \frac{3}{n}\left(\cancel{\frac{6}{n}} \times \underbrace{\frac{1+n}{2} \times \cancel{n}} + n\right) = 9\left(\frac{n+1}{n}\right) + 3$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_f(\mathcal{P}_n, \mathcal{C}_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(9\left(\frac{n+1}{n}\right)+3\right) = 9+3 = 12$$

Exemplo 6.3. Seja $f(x) = x,\ x \in [0,1]$. Consideremos as partições regulares do intervalo $[0,1]$ de diâmetro $\dfrac{1}{n}$.



$$S_f(\mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \times \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} x_i \times \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(0 + i\,\frac{1}{n}\right) \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2} \times \frac{1+n}{2} \times n = \frac{n+1}{2n}$$

$$I_f(\mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(0 + (i-1)\cdot\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \times \sum_{i=1}^{n} (i-1) =$$

$$\frac{1}{n^2} \times \frac{0 + (n-1)}{2} \times n = \frac{n-1}{2n}$$

$$\inf\left(S_f(\mathcal{P}_n)\right) = \inf\left\{ \frac{n+1}{2n} : n \in \mathbb{N} \right\} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$= \sup\left(I_f(\mathcal{P}_n)\right)$$

1. $S(P) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2} \times \frac{1+n}{2} \times n = \frac{1+n}{2n}$;

2. $I(P) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{1}{n^2} \times \frac{0+n-1}{2} \times n = \frac{n-1}{2n}$;

e portanto,

$$\inf\{S(P) : P \in \mathcal{P}\} = \frac{1}{2} = \sup\{I(P) : P \in \mathcal{P}\}.$$

Logo a função é integrável em $[0,1]$ e $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

6.4 Critérios de Integrabilidade

Nesta secção iremos apresentar alguns resultados que nos permitem determinar a integrabilidade de de algumas funções.

Teorema 6.1. *Seja f uma função definida num intervalo $[a,b]$. Se f é contínua em $[a,b]$, então f é integrável em $[a,b]$.*

Teorema 6.2. *Seja f uma função definida num intervalo $[a,b]$. Se f é limitada em $[a,b]$ e é descontínua apenas num número finito de pontos de $[a,b]$, então f é integrável em $[a,b]$.*

Teorema 6.3. *Seja f uma função definida num intervalo $[a,b]$. Se f é monótona em $[a,b]$, então f é integrável em $[a,b]$.*

Teorema 6.4. *Sejam f e g funções definidas em $[a,b]$. Se f é integrável em $[a,b]$ e g difere de f apenas num número finito de pontos, então g é integrável em $[a,b]$ e*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Teorema 6.5. *Se f é integrável em $[a,b]$, então f é limitada em $[a,b]$.*

Exemplo 6.4. A função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & , x \neq 0 \\ \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

é integrável em qualquer intervalo fechado que não contenha o 0, mas não é integrável em $[a,0]$ $(a<0)$ ou $[0,b]$ $(b>0)$ já que não é limitada nesses intervalos, bem como em nenhum outro intervalo $[a,b]$ tal que $0 \in [a,b]$.

O facto de f ser limitada em $[a,b]$ não garante que f seja integrável em $[a,b]$. Considere-se por exemplo a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ \\ 1 & , x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

que é limitada mas não é integrável (confrontar exemplo 6.2).

Exercício 6.5 Estude quanto à integrabilidade, nos respetivos domínios, as seguintes funções:

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \in [-1,2] \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 2. $g(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [1,5] \setminus \mathbb{Z} \\ x^3 + \ln x, & x \in [1,5] \cap \mathbb{Z} \end{cases}$ 3. $h(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 3, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

4. $h(x) = \begin{cases} \ln|x|, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 5. $i(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ 2, & x = \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} x + \cos(2x), & x \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$

Exercício 6.6 Mostre que $\displaystyle\int_0^1 (x^3 - 6x)dx = -\frac{11}{4}$ sabendo que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Exercício 6.7 Seja g a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}.$$

A função g é integrável em $[0, 2]$? Em caso afirmativo calcule $\displaystyle\int_0^2 g(x)dx$.

6.5 Propriedades do integral definido

Neste secção iremos apresentar algumas propriedades do integral definido que serão utilizadas para calcular alguns integrais.

Teorema 6.6. *Sejam f e g funções integráveis em $[a, b]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então αf e $f + g$ são funções integráveis em $[a, b]$ e*

- $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$
- $\displaystyle\int_a^b \Big(f(x) + g(x)\Big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

Teorema 6.7. *Seja f uma função integrável em $[a, b]$. Então, f é integrável em qualquer subintervalo de $[a, b]$ e se $c \in]a, b[$, f é integrável em $[a, c]$ e $[c, b]$ e*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Exemplo 6.5. Seja f a função definida em $[-1, 1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in [0, 1] \\ 2 & \text{se} \quad x \in [-1, 0[\end{cases}$$

Então

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 2\,dx + \int_0^1 x\,dx$$

Teorema 6.8. *Seja f uma função integrável em $[a, b]$. Se $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in [a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Na hipótese de f ser integrável em $[a,b]$, será que se pode afirmar que:

1. se $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ então $f(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$?

2. se $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$ então $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$?

Exemplo 6.6. Seja $f(x) = x$, $x \in [-1,1]$. Temos que

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$

e a função não é a função nula em $[-1,1]$.

Exemplo 6.7. Seja $f(x) = x$, $x \in [-1,2]$. Temos que

$$\int_{-1}^{2} x\,dx > 0$$

e a função não é positiva em $[-1,2]$.

Teorema 6.9. *Se f é integrável em $[a,b]$ e se existem constantes m, $M \in \mathbb{R}$ tais que,*

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ para todo o } x \in [a,b],$$

então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Exemplo 6.8. Seja $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}$ em $[-5,10]$. Como $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$, $\forall x \in [-5,10]$, podemos afirmar que

$$0 \leq \int_{-5}^{10} f(x)\,dx \leq \frac{1}{2} \times 15.$$

Teorema 6.10. *Se f e g são duas funções integráveis em $[a,b]$ e se $f(x) \leq g(x)$, para todo o $x \in [a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Exemplo 6.9. Sejam $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$ e $g(x) = e^x$ definidas em $[1,3]$.

Como $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [1,3]$, temos

$$\int_1^3 \frac{e^x}{x+1}\,dx \leq \int_1^3 e^x\,dx.$$

Teorema 6.11. *Seja f uma função integrável em $[a,b]$. Então $|f|$ é integrável em $[a,b]$ e*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Exemplo 6.10.

$$\left|\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx\right| \leq \int_0^\pi |\operatorname{sen} x|\,dx.$$

Teorema 6.12. *Se f e g são duas funções integráveis em $[a,b]$, então $f \cdot g$ é integrável em $[a,b]$.*

Atenção: No teorema anterior apenas se afirma que o produto de funções integráveis é integrável, mas **não é verdade** que $\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \cdot \int_a^b g(x)\, dx$.

Teorema 6.13. ***(Teorema do valor médio para integrais)*** *Se f é uma função contínua num intervalo $[a, b]$, então existe $c \in [a, b]$ tal que,*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Suponha que $f(x) > 0$, para todo $x \in [a, b]$ e interprete geometricamente o teorema dado.

6.6 Integral indefinido

Seja f uma função integrável num intervalo I e $a \in I$. Para cada $x \in I$, tem-se que f é integrável no intervalo fechado de extremos a e x sendo, portanto, possível definir a seguinte função:

$$\begin{aligned} F \quad &: \quad I \to \mathbb{R} \\ & \quad x \to F(x) = \int_a^x f(t)dt \end{aligned}$$

Note-se que esta função se anula em $x = a$. Porquê?

Teorema 6.14. *Seja f uma função integrável num intervalo I e $a \in I$. A função definida em I por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é contínua em I.*

Demonstração. Seja $x_0 \in I$ e consideremos que $x_0 < x$ (análogo se $x_0 > x$). Então, como f é integrável em I, existe $\int_a^{x_0} f(t)dt = F(x_0)$. Assim,

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Como f é integrável em I, f é limitada neste intervalo e consequentemente é limitada em $[x_0, x]$, isto é, existem m e M em $\mathbb{R}$ tais que

$$m \le f(t) \le M, \ \forall t \in [x_0, x].$$

Então, pelo teorema 6.9,

$$m(x - x_0) \le \int_{x_0}^x f(t)dt \le M(x - x_0).$$

Como $\lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$, resulta que

$$\lim_{x \to x_0} \big(F(x) - F(x_0)\big) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0),$$

ou seja, F é contínua em x_0 (ponto arbitrário de I). $\square$

Exemplo 6.11. Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por, $f(x) = \ln 2$, seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $F(x) = \int_0^x \ln 2\, dt$.

Pelo exercício 6.3 podemos dizer que $F(4) = \int_0^4 \ln 2\, dt = 4 \ln 2$ e $F(-3) = -3 \ln 2$.

Qual o valor de $F(0)$?

Exercício 6.8 Considere a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1[\\ 2, & x \in [1,2[\\ 3, & x \in [2,3] \end{cases}$$

a) Mostre que $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt = \begin{cases} x, & x \in [0,1[\\ 2x-1, & x \in [1,2[\\ 3x-3, & x \in [2,3] \end{cases}$

b) Verifique que F é contínua em $[0,3]$.

Observação 6.2. Observe que

$$G(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1[\\ 2x, & x \in [1,2[\\ 3x, & x \in [2,3] \end{cases}$$

não pode ser dado por $G(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

6.6.1 Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo Integral (T.F.C.I.)

Teorema 6.15. *Seja f uma função contínua num intervalo I e $a \in I$. Se*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

para cada $x \in I$, então F é uma função diferenciável e $F'(x) = f(x)$.

Demonstração. Pelo teorema 6.14, a função F é contínua em I. O Teorema do Valor Médio para Integrais (teorema 6.13) diz-nos que, no intervalo $]x_0, x[$ (supondo $x > x_0$, o caso contrário é análogo), existe c tal que

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt = f(c)(x - x_0)$$

e, portanto,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(c).$$

Pela continuidade da função f, $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(c) = f(x_0)$. Como $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = F'(x_0)$, resulta que $F'(x_0) = f(x_0)$. □

Corolário 1. *Se f é uma função contínua em I e $a \in I$, então f tem uma primitiva em I que é dada por $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.*

O teorema 6.15 pode ser generalizado usando como extremos funções deriváveis.

Teorema 6.16. *Seja f uma função contínua no intervalo J e H a função definida por*

$$H(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)dt,$$

com g_1 e g_2 definidas em $I \subseteq \mathbb{R}$ tais que $g_1(I) \subseteq J$ e $g_2(I) \subseteq J$.

Se f é contínua em J e g_1 e g_2 são deriváveis em I, então

$$H'(x) = f(g_2(x))g_2'(x) - f(g_1(x))g_1'(x),$$

para todo o $x \in I$.