Matemática Discreta

Ano Letivo 2022/23 (Versão: 22 de Maio de 2023)

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
https://elearning.ua.pt/

Capítulo V
Elementos de Teoria dos Grafos

Parte II
Caminhos de custo mínimo

1. Alguns conceitos métricos

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Um **passeio** em G é uma sequência

$$P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k)$$

finita onde $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V$, $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E$ e, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, $\psi(e_i) = v_{i-1}v_i$.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Um **passeio** em G é uma sequência

$$P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k)$$

finita onde $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V$, $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E$ e, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, $\psi(e_i) = v_{i-1}v_i$.

Neste caso diz-se que P é um passeio entre os vértices v_0 e v_k (ou um passeio-(v_0, v_k)).

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Um **passeio** em G é uma sequência

$$P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k)$$

finita onde $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V$, $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E$ e, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, $\psi(e_i) = v_{i-1}v_i$.

Neste caso diz-se que P é um passeio entre os vértices v_0 e v_k (ou um passeio-(v_0, v_k)). O vértice v_0 designa-se por vértice inicial do passeio P e v_k designa-se por vértice final do passeio P, os vértices $v_1, \ldots, v_{k-1}$ designam-se por vértices intermédios.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Um **passeio** em G é uma sequência

$$P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k)$$

finita onde $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V$, $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E$ e, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, $\psi(e_i) = v_{i-1}v_i$.

Neste caso diz-se que P é um passeio entre os vértices v_0 e v_k (ou um passeio-(v_0, v_k)). O vértice v_0 designa-se por vértice inicial do passeio P e v_k designa-se por vértice final do passeio P, os vértices $v_1, \ldots, v_{k-1}$ designam-se por vértices intermédios.

Nota

Num grafo simples, um passeio é determinado pela sequência dos sucessivos vértices; isto é, basta considerar

$$P = (v_0, v_1, \ldots, v_k).$$

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

- Um **trajeto** é um passeio sem arestas repetidas.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

- Um **trajeto** é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se **fechado** quando tem pelo menos uma aresta e o vértice inicial coincide com o vértice final ($v_0 = v_k$). Um trajeto fechado diz-se também **circuito**.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

- Um **trajeto** é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se **fechado** quando tem pelo menos uma aresta e o vértice inicial coincide com o vértice final ($v_0 = v_k$). Um trajeto fechado diz-se também **circuito**.
- Um **caminho** é um trajeto que não repete vértices.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

- Um **trajeto** é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se **fechado** quando tem pelo menos uma aresta e o vértice inicial coincide com o vértice final ($v_0 = v_k$). Um trajeto fechado diz-se também **circuito**.
- Um **caminho** é um trajeto que não repete vértices.
- Um **ciclo** P em G é intuitivamente um «caminho fechado». Mais rigorosamente,

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

- Um **trajeto** é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se **fechado** quando tem pelo menos uma aresta e o vértice inicial coincide com o vértice final ($v_0 = v_k$). Um trajeto fechado diz-se também **circuito**.
- Um **caminho** é um trajeto que não repete vértices.
- Um **ciclo** P em G é intuitivamente um «caminho fechado». Mais rigorosamente,
  1. P é um *lacete* $P = (v_0, e, v_0)$, ou

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

- Um **trajeto** é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se **fechado** quando tem pelo menos uma aresta e o vértice inicial coincide com o vértice final ($v_0 = v_k$). Um trajeto fechado diz-se também **circuito**.
- Um **caminho** é um trajeto que não repete vértices.
- Um **ciclo** P em G é intuitivamente um «caminho fechado». Mais rigorosamente,
  1. P é um *lacete* $P = (v_0, e, v_0)$, ou
  2. $P = (v_0, a, v_1, b, v_0)$ com $v_0 \neq v_1$ e $a \neq b$, ou

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

- Um **trajeto** é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se **fechado** quando tem pelo menos uma aresta e o vértice inicial coincide com o vértice final ($v_0 = v_k$). Um trajeto fechado diz-se também **circuito**.
- Um **caminho** é um trajeto que não repete vértices.
- Um **ciclo** P em G é intuitivamente um «caminho fechado». Mais rigorosamente,
  1. P é um *lacete* $P = (v_0, e, v_0)$, ou
  2. $P = (v_0, a, v_1, b, v_0)$ com $v_0 \neq v_1$ e $a \neq b$, ou
  3. $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k, e_{k+1}, v_0)$ é um passeio com $k \geq 2$ e $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k)$ é um caminho.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

- Um **trajeto** é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se **fechado** quando tem pelo menos uma aresta e o vértice inicial coincide com o vértice final ($v_0 = v_k$). Um trajeto fechado diz-se também **circuito**.
- Um **caminho** é um trajeto que não repete vértices.
- Um **ciclo** P em G é intuitivamente um «caminho fechado». Mais rigorosamente,
  1. P é um *lacete* $P = (v_0, e, v_0)$, ou
  2. $P = (v_0, a, v_1, b, v_0)$ com $v_0 \neq v_1$ e $a \neq b$, ou
  3. $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k, e_{k+1}, v_0)$ é um passeio com $k \geq 2$ e $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k)$ é um caminho.

Nota

Num grafo simples, um ciclo tem pelo menos três vértices.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e seja $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots e_k, v_k)$ um passeio de G. Então, o **comprimento de P** é

$$\text{comp}(P) = k;$$

ou seja, $\text{comp}(P)$ é o número de arestas (com eventual repetição) que o constitui.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e seja $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots e_k, v_k)$ um passeio de G. Então, o **comprimento de P** é

$$\text{comp}(P) = k;$$

ou seja, $\text{comp}(P)$ é o número de arestas (com eventual repetição) que o constitui.

Nota

No caso dos caminhos e dos trajetos, o comprimento coincide com o número de arestas.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e seja $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots e_k, v_k)$ um passeio de G. Então, o **comprimento de P** é

$$\text{comp}(P) = k;$$

ou seja, $\text{comp}(P)$ é o número de arestas (com eventual repetição) que o constitui.

Nota

No caso dos caminhos e dos trajetos, o comprimento coincide com o número de arestas.

Exemplos

Uma aresta é um caminho de comprimento 1 e um vértice é um caminho de comprimento 0.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo (finito). Para $x, y \in V$, consideremos o conjunto

$$\mathcal{P}_{x,y} = \{\text{os caminhos entre } x \text{ e } y\}.$$

Designa-se por **distância** entre vértices de G a função

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}\colon V \times V &\longrightarrow \{0, 1, \dots, \nu(G), \infty\} \\ (x, y) &\longmapsto \begin{cases} \min\{\operatorname{comp}(P) \mid P \in \mathcal{P}_{x,y}\} & \text{se } \mathcal{P}_{x,y} \neq \varnothing, \\ \infty & \text{se } \mathcal{P}_{x,y} = \varnothing. \end{cases} \end{aligned}$$

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo (finito). Para $x, y \in V$, consideremos o conjunto

$$\mathcal{P}_{x,y} = \{\text{os caminhos entre } x \text{ e } y\}.$$

Designa-se por **distância** entre vértices de G a função

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}\colon V \times V &\longrightarrow \{0, 1, \dots, \nu(G), \infty\} \\ (x, y) &\longmapsto \begin{cases} \min\{\operatorname{comp}(P) \mid P \in \mathcal{P}_{x,y}\} & \text{se } \mathcal{P}_{x,y} \neq \varnothing, \\ \infty & \text{se } \mathcal{P}_{x,y} = \varnothing. \end{cases} \end{aligned}$$

Nota

Tem-se

$$\operatorname{dist}(x, x) = 0, \quad \operatorname{dist}(x, y) + \operatorname{dist}(y, z) \geq \operatorname{dist}(x, z),$$

e $\operatorname{dist}(x, y) = \operatorname{dist}(y, x)$, para todos os $x, y, z \in V$.

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.

- *G contém um caminho P tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.

- *G contém um caminho P tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então G contém um ciclo C tal que $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.*

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.

- *G contém um caminho P tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então G contém um ciclo C tal que $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.*

Demonstração.

Seja $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ um caminho de maior comprimento em G.

$\square$

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.

- *G contém um caminho P tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então G contém um ciclo C tal que $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.*

Demonstração.

Seja $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ um caminho de maior comprimento em G.

Portanto, todos os vizinhos de v_k pertencem ao caminho (se não, podia-se prolongar o caminho),

□

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.

- *G contém um caminho P tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então G contém um ciclo C tal que $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.*

Demonstração.

Seja $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ um caminho de maior comprimento em G.

Portanto, todos os vizinhos de v_k pertencem ao caminho (se não, podia-se prolongar o caminho), portanto,

$$\mathrm{comp}(P) \geq d(v_k) \geq \delta(G).$$

$\square$

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.

- *G contém um caminho P tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então G contém um ciclo C tal que $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.*

Demonstração.

Seja $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ um caminho de maior comprimento em G.

Portanto, todos os vizinhos de v_k pertencem ao caminho (se não, podia-se prolongar o caminho), portanto,

$$\mathrm{comp}(P) \geq d(v_k) \geq \delta(G).$$

Seja $i_0 = \min\{i \mid v_i v_k \in E\}$.

$\square$

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.

- *G contém um caminho P tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então G contém um ciclo C tal que $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.*

Demonstração.

Seja $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ um caminho de maior comprimento em G.

Portanto, todos os vizinhos de v_k pertencem ao caminho (se não, podia-se prolongar o caminho), portanto,

$$\mathrm{comp}(P) \geq d(v_k) \geq \delta(G).$$

Seja $i_0 = \min\{i \mid v_i v_k \in E\}$. Então, $C = (v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k, v_i)$ é um ciclo (note-se que $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k)$ tem pelo menos três vertices porque $d(v_k) \geq 2$) $\square$

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.

- *G contém um caminho P tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então G contém um ciclo C tal que $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.*

Demonstração.

Seja $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ um caminho de maior comprimento em G.

Portanto, todos os vizinhos de v_k pertencem ao caminho (se não, podia-se prolongar o caminho), portanto,

$$\mathrm{comp}(P) \geq d(v_k) \geq \delta(G).$$

Seja $i_0 = \min\{i \mid v_i v_k \in E\}$. Então, $C = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_i)$ é um ciclo (note-se que $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_k)$ tem pelo menos três vertices porque $d(v_k) \geq 2$) de comprimento $d(v_k) + 1 \geq \delta(G) + 1$. $\square$

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$.

- A **cintura** $g(G)$ de G é o comprimento de um circuito de menor comprimento em G se existe pelo menos um circuito em G; caso contrario $g(G) = \infty$.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$.

- A **cintura** $g(G)$ de G é o comprimento de um circuito de menor comprimento em G se existe pelo menos um circuito em G; caso contrario $g(G) = \infty$.
- Seja $v \in V$. A maior distância entre v e todos os vértices de G designa-se por **excentricidade** de v e denota-se por $e(v)$.

  Mais formalmente: $\quad e(v) = \max\limits_{u \in V} \operatorname{dist}_G(u, v).$

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$.

- A **cintura** $g(G)$ de G é o comprimento de um circuito de menor comprimento em G se existe pelo menos um circuito em G; caso contrario $g(G) = \infty$.
- Seja $v \in V$. A maior distância entre v e todos os vértices de G designa-se por **excentricidade** de v e denota-se por $e(v)$.

  Mais formalmente: $e(v) = \max_{u \in V} \operatorname{dist}_G(u, v)$.
- A maior excentricidade dos seus vértices designa-se por **diâmetro** de G e denota-se por $\operatorname{diam}(G)$.

  Nota: $\operatorname{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$.

- A **cintura** $g(G)$ de G é o comprimento de um circuito de menor comprimento em G se existe pelo menos um circuito em G; caso contrario $g(G) = \infty$.
- Seja $v \in V$. A maior distância entre v e todos os vértices de G designa-se por **excentricidade** de v e denota-se por $e(v)$.

  Mais formalmente: $e(v) = \max_{u \in V} \operatorname{dist}_G(u, v)$.
- A maior excentricidade dos seus vértices designa-se por **diâmetro** de G e denota-se por $\operatorname{diam}(G)$.

  Nota: $\operatorname{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.
- A menor excentricidade dos vértices de G designa-se por **raio** e denota-se por $r(G)$.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$.

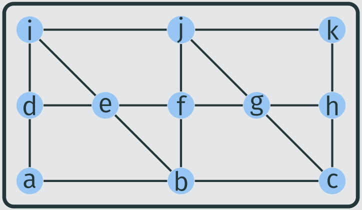
- A **cintura** $g(G)$ de G é o comprimento de um circuito de menor comprimento em G se existe pelo menos um circuito em G; caso contrario $g(G) = \infty$.
- Seja $v \in V$. A maior distância entre v e todos os vértices de G designa-se por **excentricidade** de v e denota-se por $e(v)$.

  Mais formalmente: $\quad e(v) = \max\limits_{u \in V} \operatorname{dist}_G(u, v).$
- A maior excentricidade dos seus vértices designa-se por **diâmetro** de G e denota-se por $\operatorname{diam}(G)$.

  Nota: $\quad \operatorname{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y).$
- A menor excentricidade dos vértices de G designa-se por **raio** e denota-se por $r(G)$.
- Um vértice v diz-se **central** quando $e(v) = r(G)$. O conjunto dos vértices centrais designa-se por **centro** do grafo.

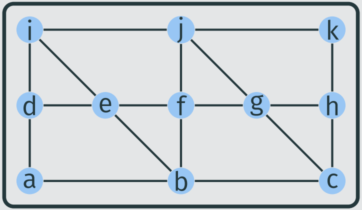
Exemplo (TPC)

Considere o seguinte grafo G.



Exemplo (TPC)

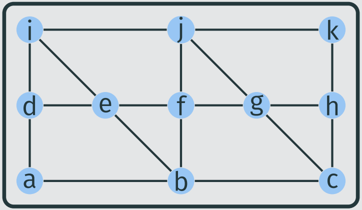
Considere o seguinte grafo G.



1. Determine a cintura do grafo G.

Exemplo (TPC)

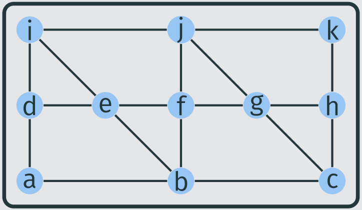
Considere o seguinte grafo G.



1. Determine a cintura do grafo G.
2. Determine a excentricidade dos vértices de G.

Exemplo (TPC)

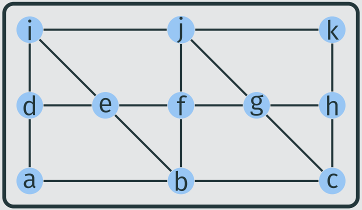
Considere o seguinte grafo G.



1. Determine a cintura do grafo G.
2. Determine a excentricidade dos vértices de G.
3. Determine o raio e o diâmetro de G.

Exemplo (TPC)

Considere o seguinte grafo G.



1. Determine a cintura do grafo G.
2. Determine a excentricidade dos vértices de G.
3. Determine o raio e o diâmetro de G.
4. Determine o centro de G.

Exemplo

Seja $G = (V, E, \psi)$ *um grafo finito com* $V \neq \varnothing$. *Então,*

$$r(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Exemplo

Seja $G = (V, E, \psi)$ *um grafo finito com* $V \neq \varnothing$. *Então,*

$$r(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

Exemplo

Seja $G = (V, E, \psi)$ *um grafo finito com* $V \neq \varnothing$. *Então,*

$$r(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y)$.

Exemplo

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$. Então,

$$r(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y)$.
- $\operatorname{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.

Exemplo

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$. Então,

$$r(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y)$.
- $\operatorname{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.
- $\operatorname{dist}(x, y) =$ comprimento do menor caminho entre x e y (ou ∞).

Exemplo

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$. Então,

$$r(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y)$.
- $\operatorname{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.
- $\operatorname{dist}(x, y) =$ comprimento do menor caminho entre x e y (ou ∞).

Logo, $r(G) \leq \operatorname{diam}(G)$.

Exemplo

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$. Então,

$$r(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y)$.
- $\operatorname{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.
- $\operatorname{dist}(x, y) =$ comprimento do menor caminho entre x e y (ou ∞).

Logo, $r(G) \leq \operatorname{diam}(G)$.

Caso 1: Suponhamos que existem $x, y \in V$ com $\operatorname{dist}(x, y) = \infty$.

Então, para todo o $z \in V$,

Exemplo

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$. Então,

$$r(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y)$.
- $\operatorname{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.
- $\operatorname{dist}(x, y) =$ comprimento do menor caminho entre x e y (ou ∞).

Logo, $r(G) \leq \operatorname{diam}(G)$.

Caso 1: Suponhamos que existem $x, y \in V$ com $\operatorname{dist}(x, y) = \infty$.

Então, para todo o $z \in V$, $\operatorname{dist}(z, x) = \infty$ ou $\operatorname{dist}(z, y) = \infty$ e por isso $r(G) = \infty$ e $\operatorname{diam}(G) = \infty$.

Exemplo

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$. Então,

$$r(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y)$.
- $\operatorname{diam}(G) = \max_{x, y \in X} d(x, y)$.
- $\operatorname{dist}(x, y) =$ comprimento do menor caminho entre x e y (ou ∞).

Logo, $r(G) \leq \operatorname{diam}(G)$.

Caso 2: Suponhamos que $\operatorname{dist}(x, y) < \infty$, para todos os $x, y \in V$.

Exemplo

Seja $G = (V, E, \psi)$ *um grafo finito com* $V \neq \varnothing$*. Então,*

$$r(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y)$.
- $\operatorname{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.
- $\operatorname{dist}(x, y) =$ comprimento do menor caminho entre x e y (ou ∞).

Logo, $r(G) \leq \operatorname{diam}(G)$.

Caso 2: Suponhamos que $\operatorname{dist}(x, y) < \infty$, para todos os $x, y \in V$.

Sejam x, y os vértices com a maior distância $\operatorname{dist}(x, y) = \operatorname{diam}(G)$ e seja z um vértice central (ou seja, $e(z) = r(G)$).

Exemplo

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$. Então,

$$r(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y)$.
- $\mathrm{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.
- $\mathrm{dist}(x, y) =$ comprimento do menor caminho entre x e y (ou ∞).

Logo, $r(G) \leq \mathrm{diam}(G)$.

Caso 2: Suponhamos que $\mathrm{dist}(x, y) < \infty$, para todos os $x, y \in V$.

Sejam x, y os vértices com a maior distância $\mathrm{dist}(x, y) = \mathrm{diam}(G)$ e seja z um vértice central (ou seja, $e(z) = r(G)$). Portanto:

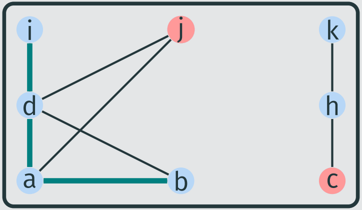
$$\mathrm{diam}(G) = \mathrm{dist}(x, y) \leq \mathrm{dist}(x, z) + \mathrm{dist}(z, y) \leq 2\, e(z) = 2r(G).$$

2. Conexidade

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Os vértices $u, v \in V$ dizem-se **conexos** quando existe um caminho entre eles em G.

Exemplo

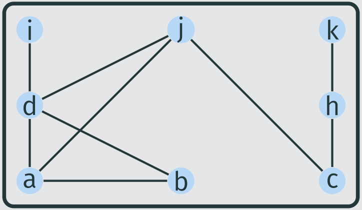


Por exemplo: i e b são conexos, e j e c não são conexos.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Os vértices $u, v \in V$ dizem-se **conexos** quando existe um caminho entre eles em G. O grafo G com pelo menos um vértice diz-se **conexo** quando todos os seus vértices são conexos.

Exemplo

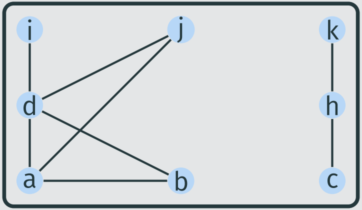


Grafo conexo

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Os vértices $u, v \in V$ dizem-se **conexos** quando existe um caminho entre eles em G. O grafo G com pelo menos um vértice diz-se **conexo** quando todos os seus vértices são conexos. Um grafo não conexo diz-se **desconexo**.

Exemplo



Grafo desconexo

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Os vértices $u, v \in V$ dizem-se **conexos** quando existe um caminho entre eles em G. O grafo G com pelo menos um vértice diz-se **conexo** quando todos os seus vértices são conexos. Um grafo não conexo diz-se **desconexo**.

Nota

A relação de conexidade definida por

$$x \sim y \text{ quando } x \text{ e } y \text{ são conexos}$$

é uma relação de equivalência em V.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Os vértices $u, v \in V$ dizem-se **conexos** quando existe um caminho entre eles em G. O grafo G com pelo menos um vértice diz-se **conexo** quando todos os seus vértices são conexos. Um grafo não conexo diz-se **desconexo**.

Nota

A relação de conexidade definida por

$$x \sim y \text{ quando } x \text{ e } y \text{ são conexos}$$

é uma relação de equivalência em V.

Nota

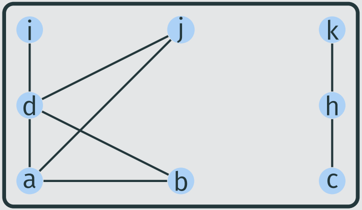
Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo conexo. Então, $\nu(G) \leq \varepsilon(G) + 1$.

Ver a solução do exercício 25 (dentro de momentos).

Definição

Os subgrafos induzidos pelas classes de equivalência da relação de conexidade dizem-se **componentes conexas**.

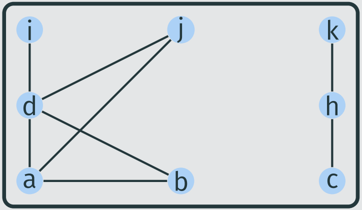
Exemplo



Definição

Os subgrafos induzidos pelas classes de equivalência da relação de conexidade dizem-se **componentes conexas**. O número de componentes conexas de G denota-se por $\mathrm{cc}(G)$.

Exemplo

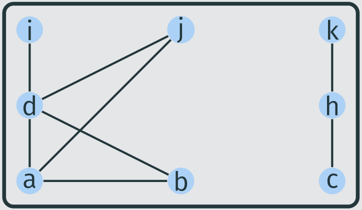


$\mathrm{cc}(G) = 2.$

Definição

Os subgrafos induzidos pelas classes de equivalência da relação de conexidade dizem-se **componentes conexas**. O número de componentes conexas de G denota-se por $\mathrm{cc}(G)$.

Exemplo



$\mathrm{cc}(G) = 2.$

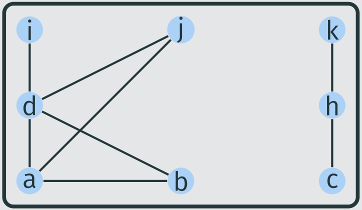
Nota

- Um grafo G é conexo se e só se $\mathrm{cc}(G) = 1$.

Definição

Os subgrafos induzidos pelas classes de equivalência da relação de conexidade dizem-se **componentes conexas**. O número de componentes conexas de G denota-se por $\operatorname{cc}(G)$.

Exemplo



$\operatorname{cc}(G) = 2.$

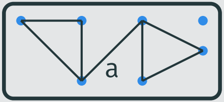
Nota

- Um grafo G é conexo se e só se $\operatorname{cc}(G) = 1$.
- As componentes conexas são precisamente os subgrafos (induzidos) conexos maximais.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Uma aresta $a \in E$ diz-se uma **ponte** (ou uma **aresta de corte**) quando $\operatorname{cc}(G - a) > \operatorname{cc}(G)$.

Exemplo

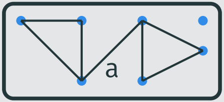
G: 

A aresta a é uma ponte de G.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Uma aresta $a \in E$ diz-se uma **ponte** (ou uma **aresta de corte**) quando $\mathrm{cc}(G - a) > \mathrm{cc}(G)$.

Exemplo

G: 

A aresta a é uma ponte de G.

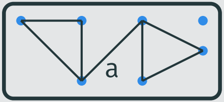
Nota

Ou seja, a é uma ponte de G se a eliminação de a aumenta o número de componentes de G.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Uma aresta $a \in E$ diz-se uma **ponte** (ou uma **aresta de corte**) quando $\operatorname{cc}(G - a) > \operatorname{cc}(G)$.

Exemplo

G: 

A aresta a é uma ponte de G.

Teorema

Sejam $G = (V, E, \psi)$ um grafo e $a \in E$ com $\psi(a) = \{u, v\}$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

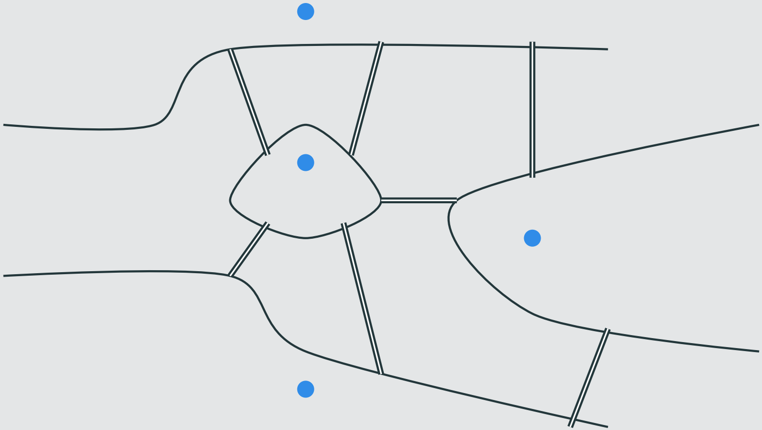
(i) *A aresta a é uma ponte de G*

(ii) $\operatorname{cc}(G - a) = \operatorname{cc}(G) + 1$ *(supondo que G é finito).*

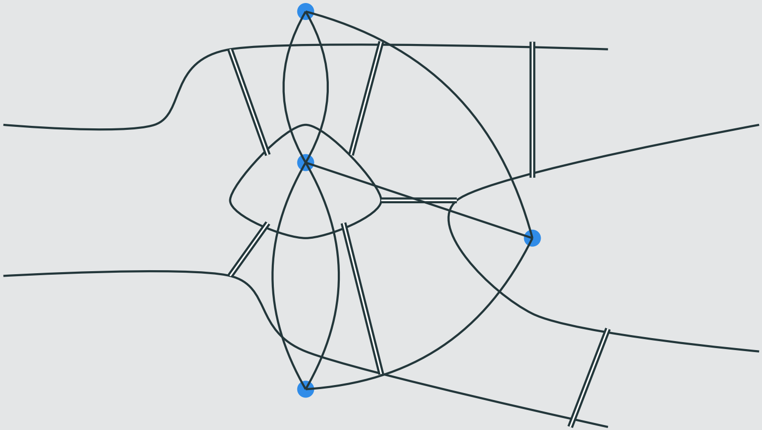
(iii) *Os vértices u e v não são conexos em $G - a$.*

(iv) *A aresta a não pertence a nenhum circuito de G.*

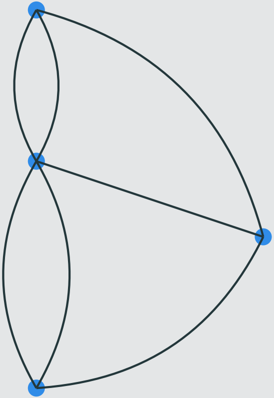
Exemplo



Exemplo



Exemplo



Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito. Um circuito em G diz-se **circuito de Euler** quando contém todas as arestas de G.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito. Um circuito em G diz-se **circuito de Euler** quando contém todas as arestas de G.

Teorema

Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de G tem grau par.

Teorema

Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de G tem grau par.

Demonstração.

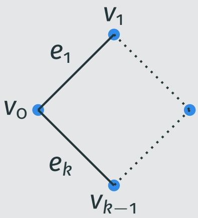
Teorema

Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de G tem grau par.

Demonstração.

Suponha que G tem um circuito de Euler, digamos

P:

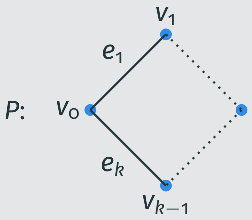


Teorema

Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de G tem grau par.

Demonstração.

Suponha que G tem um circuito de Euler, digamos



Se um vértice v aparece n vezes em P, então $d(v) = 2n$ é par.

Teorema

Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de G tem grau par.

Demonstração.

Suponha agora que todos os vértices de G tem grau par.

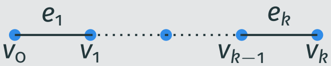
Teorema

Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de G tem grau par.

Demonstração.

Suponha agora que todos os vértices de G tem grau par. Seja

P:



um trajeto de maior comprimento em G.

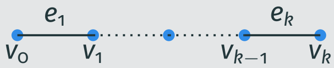
Teorema

Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de G tem grau par.

Demonstração.

Suponha agora que todos os vértices de G tem grau par. Seja

P:



um trajeto de maior comprimento em G. Logo, P contém todas as arestas com um vértice em v_k. Logo, como $d(v_k)$ é par, $v_0 = v_k$.

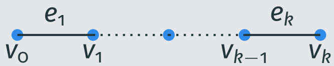
Teorema

Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de G tem grau par.

Demonstração.

Suponha agora que todos os vértices de G tem grau par. Seja

P:



um trajeto de maior comprimento em G. Logo, P contém todas as arestas com um vértice em v_k. Logo, como $d(v_k)$ é par, $v_0 = v_k$. Suponha que existe uma aresta fora de P; neste caso existe uma aresta v — v_i fora de P com v_i em P.

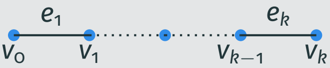
Teorema

Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de G tem grau par.

Demonstração.

Suponha agora que todos os vértices de G tem grau par. Seja

P:

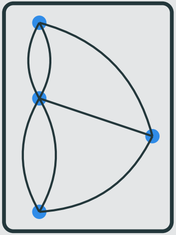


um trajeto de maior comprimento em G. Logo, P contém todas as arestas com um vértice em v_k. Logo, como $d(v_k)$ é par, $v_0 = v_k$. Suponha que existe uma aresta fora de P; neste caso existe uma aresta $v \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet v_i$ fora de P com v_i em P. Então,

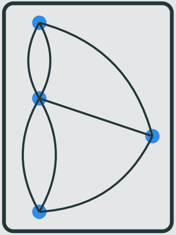
P:

é um trajeto mais comprido, uma contradição. $\square$

Exemplo

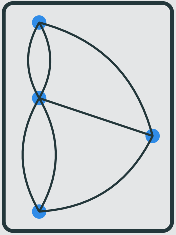


Exemplo



Os vértices tem grau 3, 5, 3 e 3, respetivamente; logo, não existe um circuito de Euler.

Exemplo

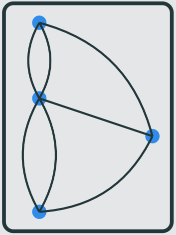


Os vértices tem grau 3, 5, 3 e 3, respetivamente; logo, não existe um circuito de Euler.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito. Um trajeto em G diz-se **trajeto de Euler** quando contém todas as arestas de G.

Exemplo



Os vértices tem grau 3, 5, 3 e 3, respetivamente; logo, não existe um circuito de Euler.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito. Um trajeto em G diz-se **trajeto de Euler** quando contém todas as arestas de G.

Teorema

Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um trajeto de Euler se e só o número de vértices de grau ímpar é 0 ou 2.

3. Grafos particulares

Definição

Um grafo simples G diz-se **completo** quando todos os pares de vértices são adjacentes.

Definição

Um grafo simples G diz-se **completo** quando todos os pares de vértices são adjacentes. Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se **nulo** quando $E = \varnothing$; ou seja, quando não tem arestas.

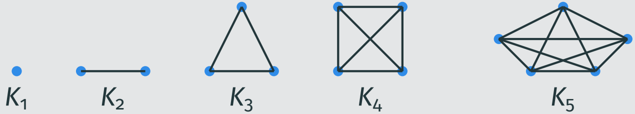
Definição

Um grafo simples G diz-se **completo** quando todos os pares de vértices são adjacentes. Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se **nulo** quando $E = \varnothing$; ou seja, quando não tem arestas.

Nota

- A menos de isomorfismo, existe um único grafo completo de ordem $n \in \mathbb{N}$. Denota-se este grafo por K_n, e tem-se $\epsilon(K_n) = \binom{n}{2}$.

Exemplos (Grafos completos)



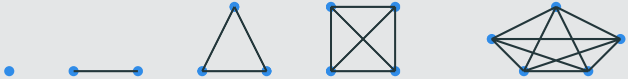
Definição

Um grafo simples G diz-se **completo** quando todos os pares de vértices são adjacentes. Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se **nulo** quando $E = \varnothing$; ou seja, quando não tem arestas.

Nota

- A menos de isomorfismo, existe um único grafo completo de ordem $n \in \mathbb{N}$. Denota-se este grafo por K_n, e tem-se $\epsilon(K_n) = \binom{n}{2}$.
- Cada grafo nulo é simples, de facto, os grafos nulos são precisamente os grafos complementares dos grafos completos. Portanto, denotamos o grafo nulo com n vértices por $K_n^{\complement}$.

Exemplos (Grafos completos)



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

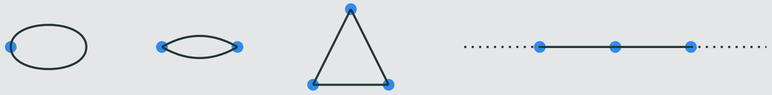
Definição

Seja $k \in \mathbb{N}$. Um grafo G diz-se **k-regular** quando todos os seus vértices têm grau k. Um grafo G diz-se **regular** quando G é k-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.

Definição

Seja $k \in \mathbb{N}$. Um grafo G diz-se **k-regular** quando todos os seus vértices têm grau k. Um grafo G diz-se **regular** quando G é k-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.

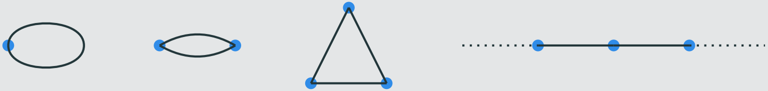
Exemplos (Grafos 2-regulares)



Definição

Seja $k \in \mathbb{N}$. Um grafo G diz-se **k-regular** quando todos os seus vértices têm grau k. Um grafo G diz-se **regular** quando G é k-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.

Exemplos (Grafos 2-regulares)



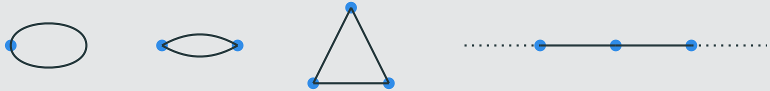
Nota

- Os grafos 3-regulares designam-se também por grafos cúbicos.

Definição

Seja $k \in \mathbb{N}$. Um grafo G diz-se ***k*-regular** quando todos os seus vértices têm grau k. Um grafo G diz-se **regular** quando G é k-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.

Exemplos (Grafos 2-regulares)



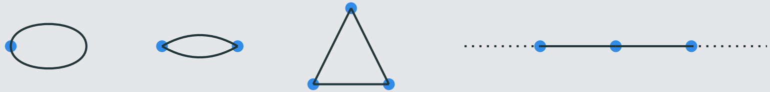
Nota

- Os grafos 3-regulares designam-se também por grafos cúbicos.
- O grafo K_n é $(n-1)$-regular.

Definição

Seja $k \in \mathbb{N}$. Um grafo G diz-se **k-regular** quando todos os seus vértices têm grau k. Um grafo G diz-se **regular** quando G é k-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.

Exemplos (Grafos 2-regulares)



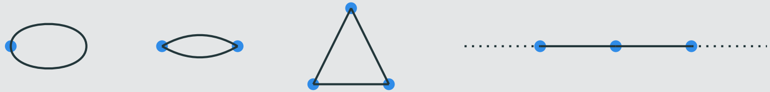
Nota

- Os grafos 3-regulares designam-se também por grafos cúbicos.
- O grafo K_n é $(n-1)$-regular. De facto, um grafo simples G com n vértices é $(n-1)$-regular se e só se G é completo.

Definição

Seja $k \in \mathbb{N}$. Um grafo G diz-se **k-regular** quando todos os seus vértices têm grau k. Um grafo G diz-se **regular** quando G é k-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.

Exemplos (Grafos 2-regulares)



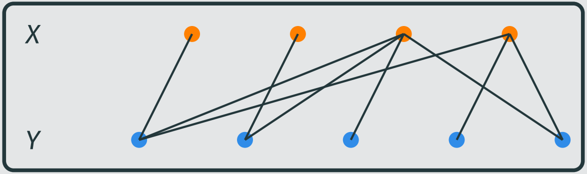
Nota

- Os grafos 3-regulares designam-se também por grafos cúbicos.
- O grafo K_n é $(n-1)$-regular. De facto, um grafo simples G com n vértices é $(n-1)$-regular se e só se G é completo.
- Um grafo G é 0-regular se e só se G é um grafo nulo.

Definição

Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se **bipartido** quando existem subconjuntos não-vazios $X, Y \subseteq V$ de V com $V = X \cup Y$ e $X \cap Y = \varnothing$ tais que os grafos $G[X]$ e $G[Y]$ são nulos.

Exemplo

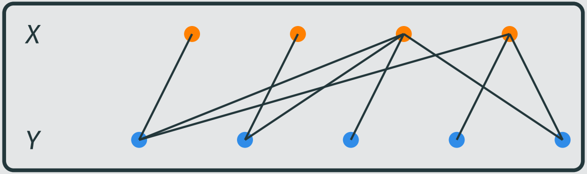


Definição

Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se **bipartido** quando existem subconjuntos não-vazios $X, Y \subseteq V$ de V com $V = X \cup Y$ e $X \cap Y = \varnothing$ tais que os grafos $G[X]$ e $G[Y]$ são nulos.

Isto é, não existem arestas entre qualquer par de vértices de X nem entre qualquer par de vértices de Y; ou seja, cada aresta de G tem um extremo em X e outro em Y.

Exemplo



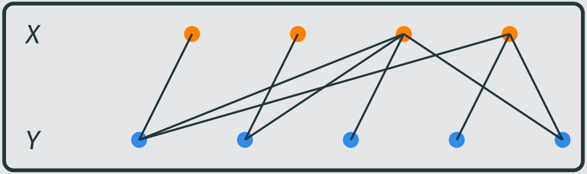
Definição

Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se **bipartido** quando existem subconjuntos não-vazios $X, Y \subseteq V$ de V com $V = X \cup Y$ e $X \cap Y = \varnothing$ tais que os grafos $G[X]$ e $G[Y]$ são nulos.

Isto é, não existem arestas entre qualquer par de vértices de X nem entre qualquer par de vértices de Y; ou seja, cada aresta de G tem um extremo em X e outro em Y.

Uma tal partição $\{X, Y\}$ do conjunto V dos vértices de G designa-se por **bipartição dos vértices**. Neste caso denota-se G por (X, Y, E, ψ) (ou simplesmente (X, Y, E) se G é simples).

Exemplo



Teorema

Um grafo G com pelo menos dois vértices é bipartido se e só se G não tem circuitos de comprimento ímpar.

Teorema

Um grafo G com pelo menos dois vértices é bipartido se e só se G não tem circuitos de comprimento ímpar.

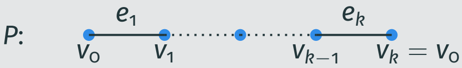
Demonstração.

Teorema

Um grafo G com pelo menos dois vértices é bipartido se e só se G não tem circuitos de comprimento ímpar.

Demonstração.

Suponha que G é bipartido (com a partição $\{X, Y\}$) e seja



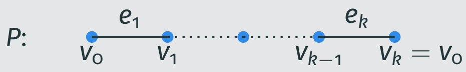
um circuito em G. Suponhamos que $v_0 \in X$.

Teorema

Um grafo G com pelo menos dois vértices é bipartido se e só se G não tem circuitos de comprimento ímpar.

Demonstração.

Suponha que G é bipartido (com a partição $\{X, Y\}$) e seja



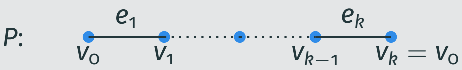
um circuito em G. Suponhamos que $v_0 \in X$. Então, $v_1 \in Y$, $v_2 \in X$, ..., $v_{k-1} \in Y$ e $v_0 \in X$.

Teorema

Um grafo G com pelo menos dois vértices é bipartido se e só se G não tem circuitos de comprimento ímpar.

Demonstração.

Suponha que G é bipartido (com a partição $\{X, Y\}$) e seja



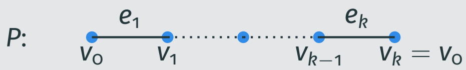
um circuito em G. Suponhamos que $v_0 \in X$. Então, $v_1 \in Y$, $v_2 \in X$, ..., $v_{k-1} \in Y$ e $v_0 \in X$. Portanto, há um número ímpar de vértices em P — contando possivelmente com repetição — e por isso

Teorema

Um grafo G com pelo menos dois vértices é bipartido se e só se G não tem circuitos de comprimento ímpar.

Demonstração.

Suponha que G é bipartido (com a partição $\{X, Y\}$) e seja



um circuito em G. Suponhamos que $v_0 \in X$. Então, $v_1 \in Y$, $v_2 \in X$, ..., $v_{k-1} \in Y$ e $v_0 \in X$. Portanto, há um número ímpar de vértices em P — contando possivelmente com repetição — e por isso um número par de arestas.

Teorema

Um grafo G com pelo menos dois vértices é bipartido se e só se G não tem circuitos de comprimento ímpar.

Demonstração.

Suponha agora que $G = (V, E, \psi)$ não tem circuitos de comprimento ímpar (e G é conexo).

Teorema

Um grafo G com pelo menos dois vértices é bipartido se e só se G não tem circuitos de comprimento ímpar.

Demonstração.

Suponha agora que $G = (V, E, \psi)$ não tem circuitos de comprimento ímpar (e G é conexo). Seja $x_0 \in V$. Consideremos a partição $V = X \cup Y$ dada por

$$X = \{x \in V \mid \mathrm{dist}(x, x_0) \text{ é par}\} \neq \varnothing,\ Y = \{y \in V \mid \mathrm{dist}(y, x_0) \text{ é ímpar}\} \neq \varnothing.$$

Teorema

Um grafo G com pelo menos dois vértices é bipartido se e só se G não tem circuitos de comprimento ímpar.

Demonstração.

Suponha agora que $G = (V, E, \psi)$ não tem circuitos de comprimento ímpar (e G é conexo). Seja $x_0 \in V$. Consideremos a partição $V = X \cup Y$ dada por

$$X = \{x \in V \mid \operatorname{dist}(x, x_0) \text{ é par}\} \neq \varnothing,\ Y = \{y \in V \mid \operatorname{dist}(y, x_0) \text{ é ímpar}\} \neq \varnothing.$$

Suponhamos que existem $x, x' \in X$ adjacentes (com $a \in E$).

Teorema

Um grafo G com pelo menos dois vértices é bipartido se e só se G não tem circuitos de comprimento ímpar.

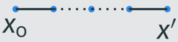
Demonstração.

Suponha agora que $G = (V, E, \psi)$ não tem circuitos de comprimento ímpar (e G é conexo). Seja $x_0 \in V$. Consideremos a partição $V = X \cup Y$ dada por

$$X = \{x \in V \mid \operatorname{dist}(x, x_0) \text{ é par}\} \neq \varnothing,\ Y = \{y \in V \mid \operatorname{dist}(y, x_0) \text{ é ímpar}\} \neq \varnothing.$$

Suponhamos que existem $x, x' \in X$ adjacentes (com $a \in E$). Sejam

P: 

P': 

caminhos de menor comprimento (necessariamente par).

Teorema

Um grafo G com pelo menos dois vértices é bipartido se e só se G não tem circuitos de comprimento ímpar.

Demonstração.

Suponha agora que $G = (V, E, \psi)$ não tem circuitos de comprimento ímpar (e G é conexo). Seja $x_0 \in V$. Consideremos a partição $V = X \cup Y$ dada por

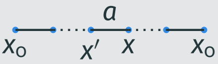
$$X = \{x \in V \mid \operatorname{dist}(x, x_0) \text{ é par}\} \neq \varnothing, \; Y = \{y \in V \mid \operatorname{dist}(y, x_0) \text{ é ímpar}\} \neq \varnothing.$$

Suponhamos que existem $x, x' \in X$ adjacentes (com $a \in E$). Sejam

P: 

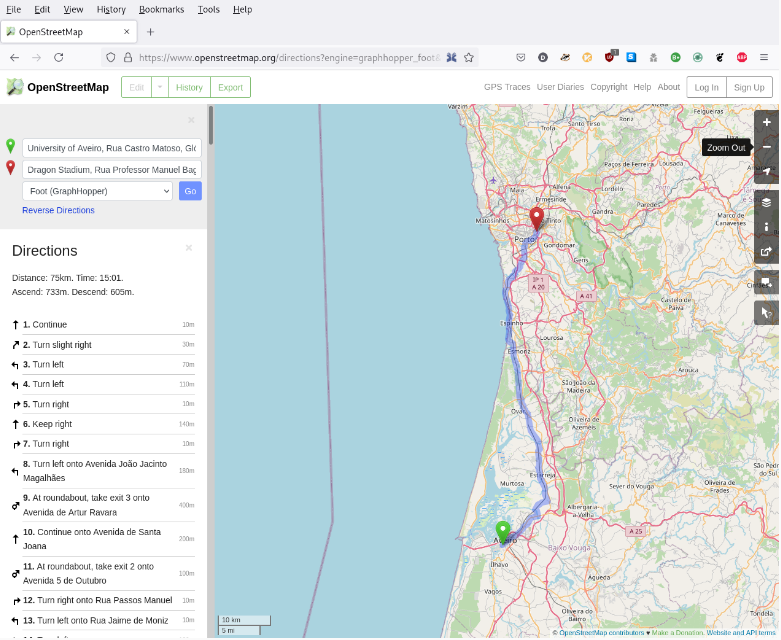
P': 

caminhos de menor comprimento (necessariamente par). Portanto,

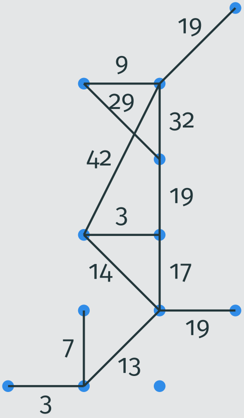


é um passeio fechado de comprimento ímpar, logo existe um circuito de comprimento ímpar (TPC!!), uma contradição. □

4. Problemas de caminho de «custo mínimo» em grafos


File Edit View History Bookmarks Tools Help
OpenStreetMap
https://www.openstreetmap.org/directions?engine=graphhopper_foot&
OpenStreetMap
Edit
History
Export
GPS Traces
User Diaries
Copyright
Help
About
Log In
Sign Up
University of Aveiro, Rua Castro Matoso, Glc
Dragon Stadium, Rua Professor Manuel Bag
Foot (GraphHopper)
Go
Reverse Directions
Directions
Distance: 75km. Time: 15:01.
Ascend: 733m. Descend: 605m.
1. Continue 10m
2. Turn slight right 30m
3. Turn left 70m
4. Turn left 110m
5. Turn right 10m
6. Keep right 140m
7. Turn right 10m
8. Turn left onto Avenida João Jacinto Magalhães 180m
9. At roundabout, take exit 3 onto Avenida de Artur Ravara 400m
10. Continue onto Avenida de Santa Joana 200m
11. At roundabout, take exit 2 onto Avenida 5 de Outubro 100m
12. Turn right onto Rua Passos Manuel 10m
13. Turn left onto Rua Jaime de Moniz 10m
Zoom Out
Porto
Matosinhos
Maia
Gondomar
Espinho
Ovar
Estarreja
Murtosa
Aveiro
Ílhavo
Vagos
Águeda
Arouca
10 km
5 mi
© OpenStreetMap contributors ♥ Make a Donation. Website and API terms

Na linguagem de grafos



- Os vértices representam cruzamentos
- As arestas representam estradas com distância/tempo/preço/ ...

Definição

Um **grafo com custos não negativos nas arestas** $G = (V, E, W)$ é dado por um grafos simples (V, E) e uma **matriz de custos**

$$W\colon V \times V \longrightarrow [0, \infty]$$

tais que, $W(u, v) = W(v, u)$, $W(u, u) = 0$ e, para todos os $u \neq v \in V$, $W(u, v) = \infty$ se $uv \notin E$.

Definição

Um **grafo com custos não negativos nas arestas** $G = (V, E, W)$ é dado por um grafos simples (V, E) e uma **matriz de custos**

$$W\colon V \times V \longrightarrow [0, \infty]$$

tais que, $W(u, v) = W(v, u)$, $W(u, u) = 0$ e, para todos os $u \neq v \in V$, $W(u, v) = \infty$ se $uv \notin E$. (Logo, podemos dispensar E.)

Definição

Um **grafo com custos não negativos nas arestas** $G = (V, E, W)$ é dado por um grafos simples (V, E) e uma **matriz de custos**

$$W\colon V \times V \longrightarrow [0, \infty]$$

tais que, $W(u, v) = W(v, u)$, $W(u, u) = 0$ e, para todos os $u \neq v \in V$, $W(u, v) = \infty$ se $uv \notin E$. (Logo, podemos dispensar E.)

Para um caminho $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ em G, o **custo de P** é

$$W(P) = \sum_{i=0}^{k-1} W(v_i, v_{i+1})$$

(onde $\alpha + \infty = \infty = \infty + \alpha$).

Definição

Um **grafo com custos não negativos nas arestas** $G = (V, E, W)$ é dado por um grafos simples (V, E) e uma **matriz de custos**

$$W\colon V \times V \longrightarrow [0, \infty]$$

tais que, $W(u, v) = W(v, u)$, $W(u, u) = 0$ e, para todos os $u \neq v \in V$, $W(u, v) = \infty$ se $uv \notin E$. (Logo, podemos dispensar E.)

Para um caminho $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ em G, o **custo de P** é

$$W(P) = \sum_{i=0}^{k-1} W(v_i, v_{i+1})$$

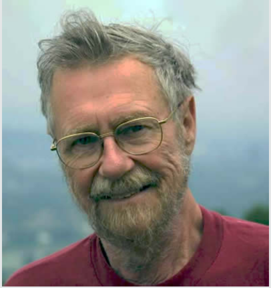
(onde $\alpha + \infty = \infty = \infty + \alpha$).

Objetivo

Encontrar o caminho de menor custo entre dois vértices.

Considerações iniciais

Se $(v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k)$ é o caminho de «menor custo» entre v_0 e v_k, então $(v_0, v_1, \ldots, v_{k-1})$ é o caminho de «menor custo» entre v_0 e v_{k-1}.

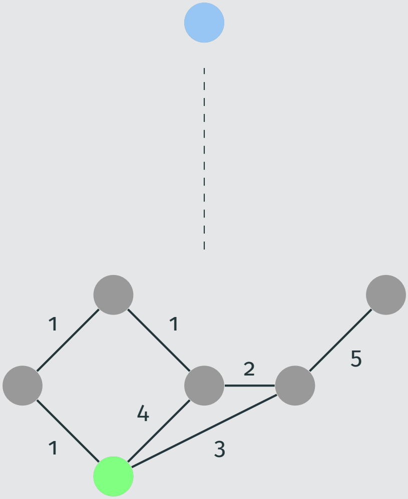


DIJKSTRA, EDSGER W. (1959). **«A note on two problems in connexion with graphs».** Em: *Numerische Mathematik* **1**.(1), pp. 269–271.

Edsger Wybe Dijkstra (1930 – 2002), matemático e cientista da computação holandês.

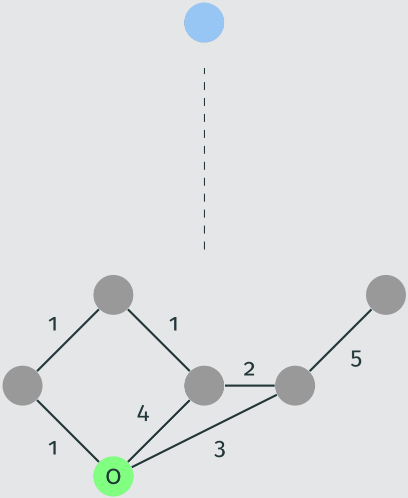
Ver também `https://www.cs.utexas.edu/users/EWD/welcome.html`.

A ideia



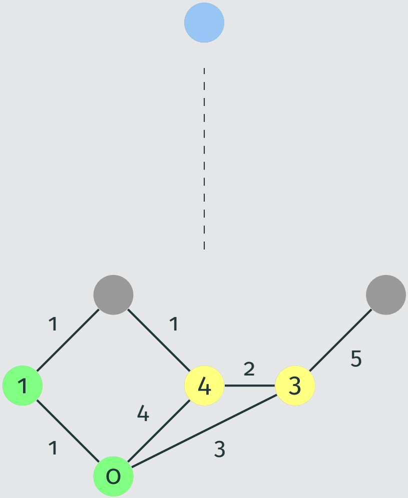
Procuramos o caminho de menor custo entre ● e ●.

A ideia



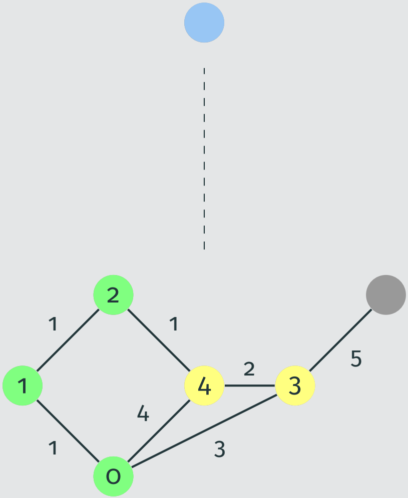
Procuramos o caminho de menor custo entre ● e ●.

A ideia



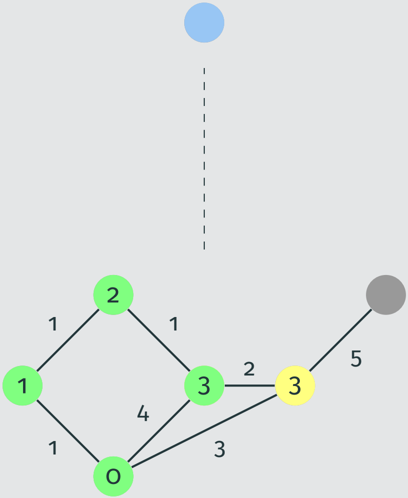
Procuramos o caminho de menor custo entre ● e ●.

A ideia



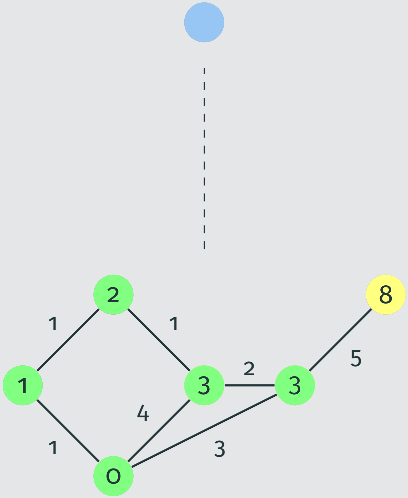
Procuramos o caminho de menor custo entre ● e ●.

A ideia



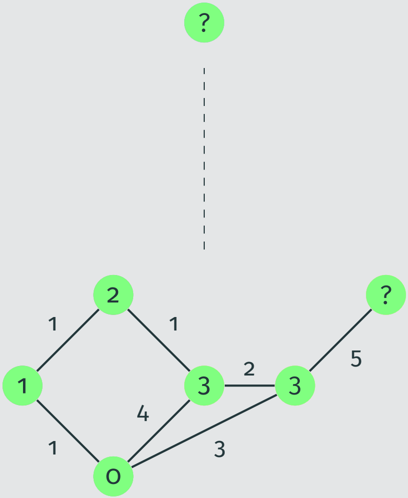
Procuramos o caminho de menor custo entre ● e ●.

A ideia



Procuramos o caminho de menor custo entre ● e ●.

A ideia



Procuramos o caminho de menor custo entre ● e ●.

As variáveis

- `start` = o vértice inicial.

As variáveis

- `start` = o vértice inicial.
- Para cada $v \in V$:

As variáveis

- `start` $=$ o vértice inicial.
- Para cada $v \in V$:
  - **marca**(v) $=$ «custo» do caminho de menor «custo» entre `start` e v (até o momento).

As variáveis

- `start` = o vértice inicial.
- Para cada $v \in V$:
  - **marca**(v) = «custo» do caminho de menor «custo» entre `start` e v (até o momento).
  - **ant**(v) = antecessor de $v \neq$ `start` no caminho de menor «custo» entre `start` e v (até o momento).

As variáveis

- `start` = o vértice inicial.
- Para cada $v \in V$:
  - **marca**(v) = «custo» do caminho de menor «custo» entre `start` e v (até o momento).
  - **ant**(v) = antecessor de $v \neq$ `start` no caminho de menor «custo» entre `start` e v (até o momento).
- **temp** = lista dos vértices com valores temporários.

As variáveis

- `start` = o vértice inicial.
- Para cada $v \in V$:
  - **marca**(v) = «custo» do caminho de menor «custo» entre `start` e v (até o momento).
  - **ant**(v) = antecessor de $v \neq$ `start` no caminho de menor «custo» entre `start` e v (até o momento).
- **temp** = lista dos vértices com valores temporários.
- `menor` = vértice de menor «custo» (neste momento).

O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:

O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
  - Para cada $v \in V$: **marca**$(v) = \infty$, **ant**$(v) = \varnothing$.

O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
    - Para cada $v \in V$: **marca**$(v) = \infty$, **ant**$(v) = \varnothing$.
    - **marca**$(\texttt{start}) = 0$.

O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
  - Para cada $v \in V$: $\textbf{marca}(v) = \infty$, $\textbf{ant}(v) = \varnothing$.
  - $\textbf{marca}(\texttt{start}) = 0$.
  - $\textbf{temp} = V \setminus \{\texttt{start}\}$ e $\texttt{menor} = \texttt{start}$.

O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
  - Para cada $v \in V$: **marca**$(v) = \infty$, **ant**$(v) = \varnothing$.
  - **marca**$(\texttt{start}) = 0$.
  - **temp** $= V \setminus \{\texttt{start}\}$ e $\texttt{menor} = \texttt{start}$.
- Repetir:

Até $\texttt{menor}$ = o vértice terminal.

O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
    - Para cada $v \in V$: **marca**$(v) = \infty$, **ant**$(v) = \varnothing$.
    - **marca**$(\texttt{start}) = 0$.
    - **temp** $= V \setminus \{\texttt{start}\}$ e $\texttt{menor} = \texttt{start}$.
- Repetir:
    - $c_{\mathrm{aux}} = \infty$.
    - Para todo o v em **temp**:
        - Se **marca**$(v) >$ **marca**$(\texttt{menor}) + W(\texttt{menor}, v)$, então

$$\begin{aligned} \textbf{marca}(v) &= \textbf{marca}(\texttt{menor}) + W(\texttt{menor}, v), \\ \textbf{ant}(v) &= \texttt{menor}\,. \end{aligned}$$

Até $\texttt{menor} =$ o vértice terminal.

O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
  - Para cada $v \in V$: **marca**$(v) = \infty$, **ant**$(v) = \varnothing$.
  - **marca**$(\texttt{start}) = 0$.
  - **temp** $= V \setminus \{\texttt{start}\}$ e $\texttt{menor} = \texttt{start}$.
- Repetir:
  - $c_{\mathrm{aux}} = \infty$.
  - Para todo o v em **temp**:
    - Se **marca**$(v) >$ **marca**$(\texttt{menor}) + W(\texttt{menor}, v)$, então

$$\mathbf{marca}(v) = \mathbf{marca}(\texttt{menor}) + W(\texttt{menor}, v),$$
$$\mathbf{ant}(v) = \texttt{menor}\,.$$

    - Se **marca**$(v) < c_{\mathrm{aux}}$ então $c_{\mathrm{aux}} =$ **marca**(v) e $v_{\mathrm{aux}} = v$ (lembrar do «menor custo»).

Até $\texttt{menor}$ = o vértice terminal.

O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
  - Para cada $v \in V$: **marca**$(v) = \infty$, **ant**$(v) = \varnothing$.
  - **marca**$(\texttt{start}) = 0$.
  - **temp** $= V \setminus \{\texttt{start}\}$ e $\texttt{menor} = \texttt{start}$.
- Repetir:
  - $c_{\mathrm{aux}} = \infty$.
  - Para todo o v em **temp**:
    - Se **marca**$(v) >$ **marca**$(\texttt{menor}) + W(\texttt{menor}, v)$, então

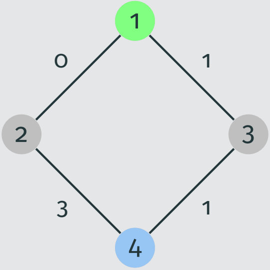
$$\mathbf{marca}(v) = \mathbf{marca}(\texttt{menor}) + W(\texttt{menor}, v),$$
$$\mathbf{ant}(v) = \texttt{menor}\,.$$

    - Se **marca**$(v) < c_{\mathrm{aux}}$ então $c_{\mathrm{aux}} =$ **marca**(v) e $v_{\mathrm{aux}} = v$ (lembrar do «menor custo»).
  - **temp** $=$ **temp** $\setminus\{v_{\mathrm{aux}}\}$ e $\texttt{menor} = v_{\mathrm{aux}}$.

  Até $\texttt{menor}$ = o vértice terminal.

Exemplo

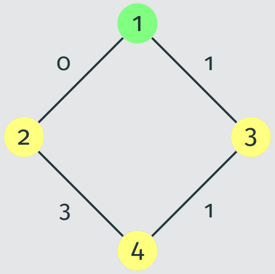
1	2	3	4	menor	**temp**
$(0, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	1	$\{2, 3, 4\}$



- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

Exemplo

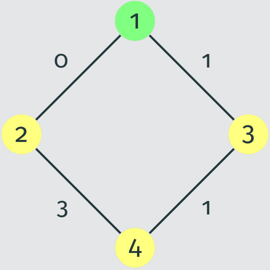
1	2	3	4	menor	**temp**
$(0, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	1	$\{2, 3, 4\}$



- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

Exemplo

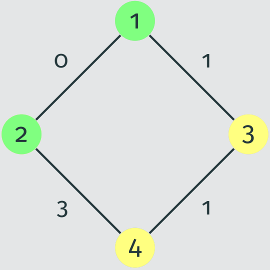
1	2	3	4	menor	**temp**
$(0, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	1	$\{2, 3, 4\}$
	$(0, 1)$	$(1, 1)$	$(\infty, -)$		



- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

Exemplo

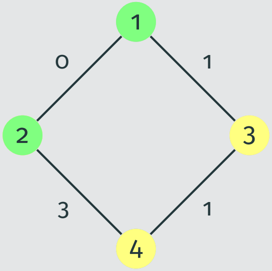
1	2	3	4	menor	**temp**
$(0, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	1	$\{2, 3, 4\}$
	$(0, 1)$	$(1, 1)$	$(\infty, -)$	2	$\{3, 4\}$



- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

Exemplo

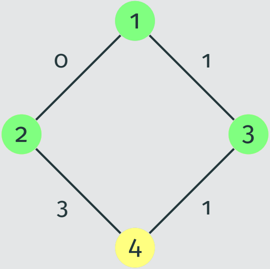
1	2	3	4	menor	**temp**
$(0, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	1	$\{2, 3, 4\}$
	$(0, 1)$	$(1, 1)$	$(\infty, -)$	2	$\{3, 4\}$
		$(1, 1)$	$(3, 2)$		



- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

Exemplo

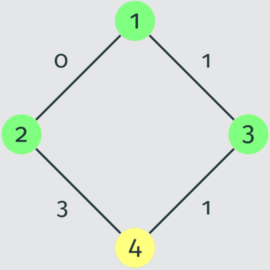
1	2	3	4	menor	**temp**
$(0, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	1	$\{2, 3, 4\}$
	$(0, 1)$	$(1, 1)$	$(\infty, -)$	2	$\{3, 4\}$
		$(1, 1)$	$(3, 2)$	3	$\{4\}$



- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

Exemplo

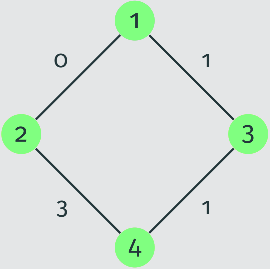
1	2	3	4	menor	**temp**
$(0, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	1	$\{2, 3, 4\}$
	$(0, 1)$	$(1, 1)$	$(\infty, -)$	2	$\{3, 4\}$
		$(1, 1)$	$(3, 2)$	3	$\{4\}$
			$(2, 3)$		



- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

Exemplo

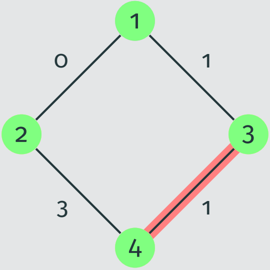
1	2	3	4	menor	**temp**
$(0, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	1	$\{2, 3, 4\}$
	$(0, 1)$	$(1, 1)$	$(\infty, -)$	2	$\{3, 4\}$
		$(1, 1)$	$(3, 2)$	3	$\{4\}$
			$(2, 3)$	4	$\emptyset$



- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

Exemplo

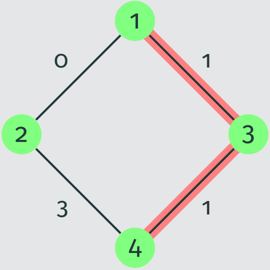
1	2	3	4	menor	**temp**
$(0, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	1	$\{2, 3, 4\}$
	$(0, 1)$	$(1, 1)$	$(\infty, -)$	2	$\{3, 4\}$
		$(1, 1)$	$(3, 2)$	3	$\{4\}$
			$(2, 3)$	4	$\varnothing$



- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

Exemplo

1	2	3	4	menor	**temp**
$(0, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	1	$\{2, 3, 4\}$
	$(0, 1)$	$(1, 1)$	$(\infty, -)$	2	$\{3, 4\}$
		$(1, 1)$	$(3, 2)$	3	$\{4\}$
			$(2, 3)$	4	$\varnothing$



- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

- DOLAN, STEPHEN (2013). **«Fun with semirings: a functional pearl on the abuse of linear algebra».** Em: *Proceedings of the 18th ACM SIGPLAN international conference on Functional programming - ICFP '13*. Vol. 48. 9. ACM. ACM Press, pp. 101–110. URL: `https://www.cl.cam.ac.uk/~sd601/papers/semirings.pdf`.
- JONES, SIMON PEYTON e GOLDBERG, ANDREW (2010). **«Getting from A to B: fast route-finding on slow computers».** URL: `https://www.microsoft.com/en-us/research/video/getting-from-a-b-fast-route-finding-using-slow-computers/`. A talk by Simon Peyton-Jones for Think Computer Science 2010.