

$$\begin{aligned}
1. S(P) &= \sum_{i=1}^n x_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{n^2} \times \frac{1+n}{2} \times n = \frac{1+n}{2n}; \\
2. I(P) &= \sum_{i=1}^n x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1) = \frac{1}{n^2} \times \frac{0+n-1}{2} \times n = \frac{n-1}{2n};
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\inf\{S(P) : P \in \mathcal{P}\} = \frac{1}{2} = \sup\{I(P) : P \in \mathcal{P}\}.$$

Logo a função é integrável em $[0, 1]$ e $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

6.4 Critérios de Integrabilidade

Nesta secção iremos apresentar alguns resultados que nos permitem determinar a integrabilidade de algumas funções.

Teorema 6.1. *Seja f uma função definida num intervalo $[a, b]$. Se f é contínua em $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.*

Teorema 6.2. *Seja f uma função definida num intervalo $[a, b]$. Se f é limitada em $[a, b]$ e é descontínua apenas num número finito de pontos de $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.*

Teorema 6.3. *Seja f uma função definida num intervalo $[a, b]$. Se f é monótona em $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.*

Teorema 6.4. *Sejam f e g funções definidas em $[a, b]$. Se f é integrável em $[a, b]$ e g difere de f apenas num número finito de pontos, então g é integrável em $[a, b]$ e*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Teorema 6.5. *Se f é integrável em $[a, b]$, então f é limitada em $[a, b]$.*

Exemplo 6.4. A função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

é integrável em qualquer intervalo fechado que não contenha o 0, mas não é integrável em $[a, 0]$ ($a < 0$) ou $[0, b]$ ($b > 0$) já que não é limitada nesses intervalos, bem como em nenhum outro intervalo $[a, b]$ tal que $0 \in [a, b]$.

O facto de f ser limitada em $[a, b]$ não garante que f seja integrável em $[a, b]$. Considere-se por exemplo a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1 & , x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

que é limitada mas não é integrável (confrontar exemplo 6.2).

Exercício 6.5 Estude quanto à integrabilidade, nos respectivos domínios, as seguintes funções:

$$\begin{aligned}
1. f(x) &= \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in [-1, 2] \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases} & 2. g(x) &= \begin{cases} e^x, & x \in [1, 5] \setminus \mathbb{Z} \\ x^3 + \ln x, & x \in [1, 5] \cap \mathbb{Z} \end{cases} & 3. h(x) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 3, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1(0) = 1$ g tem no máximo 5 pontos de descontinuidade tem um número finito de pontos

f e' continua $\Rightarrow f$ e' integrável $\Rightarrow \int f$ e' integrável | se de continuidade (um). Logo e' integrável.

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} h(u) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$$

$\Rightarrow h$ não e' limitada \Rightarrow
 h não e' integrável

$$\lim_{u \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} i(u) = +\infty \Rightarrow i \text{ não e' limitada}$$

\Rightarrow
 i não e' integrável

$$4. h(x) = \begin{cases} \ln |x|, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad 5. i(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ 2, & x = \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} x + \cos(2x), & x \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Exercício 6.6 Mostre que $\int_0^1 (x^3 - 6x) dx = -\frac{11}{4}$ sabendo que

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Exercício 6.7 Seja g a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}.$$

A função g é integrável em $[0, 2]$? Em caso afirmativo calcule $\int_0^2 g(x) dx$.



6.5 Propriedades do integral definido

Neste secção iremos apresentar algumas propriedades do integral definido que serão utilizadas para calcular alguns integrais.

Teorema 6.6. *Sejam f e g funções integráveis em $[a, b]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então αf e $f + g$ são funções integráveis em $[a, b]$ e*

- $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx.$
- $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$

Teorema 6.7. *Seja f uma função integrável em $[a, b]$. Então, f é integrável em qualquer subintervalo de $[a, b]$ e se $c \in]a, b[$, f é integrável em $[a, c]$ e $[c, b]$ e*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Exemplo 6.5. Seja f a função definida em $[-1, 1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1] \\ 2 & \text{se } x \in [-1, 0[\end{cases}$$

Então

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 2 dx + \int_0^1 x dx$$

Teorema 6.8. *Seja f uma função integrável em $[a, b]$. Se $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in [a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Exercício 6.6 Mostre que $\int_0^1 (x^3 - 6x) dx = -\frac{11}{4}$ sabendo que

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

$f(x) = x^3 - 6x$ é uma função polinomial. Portanto é contínua em \mathbb{R} e, em particular, em $[0, 1]$. Logo é integrável. Assim, podemos usar partições regulares para calcular o integral.

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^3 - 6x) dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) (x_i - x_{i-1}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \end{aligned}$$

TPC

$$\left(\begin{aligned} \Delta &= \frac{1-0}{n} \\ x_i &= x_0 + i \Delta \\ &= 0 + i \times \frac{1}{n} = \frac{i}{n} \end{aligned} \right)$$

$$\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right]$$

$\underline{x_i^* = x_i = \frac{i}{n}}$

Na hipótese de f ser integrável em $[a, b]$, será que se pode afirmar que:

1. se $\int_a^b f(x)dx = 0$ então $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$?

2. se $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ então $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$?

Exemplo 6.6. Seja $f(x) = x, x \in [-1, 1]$. Temos que

$$\int_{-1}^1 x dx = 0$$

e a função não é a função nula em $[-1, 1]$.

Exemplo 6.7. Seja $f(x) = x, x \in [-1, 2]$. Temos que

$$\int_{-1}^2 x dx > 0$$

e a função não é positiva em $[-1, 2]$.

Teorema 6.9. Se f é integrável em $[a, b]$ e se existem constantes $m, M \in \mathbb{R}$ tais que,

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ para todo } x \in [a, b],$$

então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0 \\ f(x) &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exemplo 6.8. Seja $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 1}}$ em $[-5, 10]$. Como $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}, \forall x \in [-5, 10]$, podemos afirmar que

$$0 \leq \int_{-5}^{10} f(x) dx \leq \frac{1}{2} \times 15.$$

$$\frac{1}{2} \times (10 - (-5))$$

Teorema 6.10. Se f e g são duas funções integráveis em $[a, b]$ e se $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Exemplo 6.9. Sejam $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ e $g(x) = e^x$ definidas em $[1, 3]$.

Como $f(x) \leq g(x), \forall x \in [1, 3]$, temos

$$\int_1^3 \frac{e^x}{x+1} dx \leq \int_1^3 e^x dx.$$

Teorema 6.11. Seja f uma função integrável em $[a, b]$. Então $|f|$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Exemplo 6.10.

$$\left| \int_0^\pi \sin x dx \right| \leq \int_0^\pi |\sin x| dx.$$

Teorema 6.12. Se f e g são duas funções integráveis em $[a, b]$, então $f \cdot g$ é integrável em $[a, b]$.

Atenção: No teorema anterior apenas se afirma que o produto de funções integráveis é integrável, mas não é verdade que $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$.

Teorema 6.13. (Teorema do valor médio para integrais) Se f é uma função contínua num intervalo $[a, b]$, então existe $c \in [a, b]$ tal que,

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

Suponha que $f(x) > 0$, para todo $x \in [a, b]$ e interprete geometricamente o teorema dado.

6.6 Integral indefinido

Seja f uma função integrável num intervalo I e $a \in I$. Para cada $x \in I$, tem-se que f é integrável no intervalo fechado de extremos a e x sendo, portanto, possível definir a seguinte função:

$$F : I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Note-se que esta função se anula em $x = a$. Porquê?

Teorema 6.14. Seja f uma função integrável num intervalo I e $a \in I$. A função definida em I por $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ é contínua em I .

Demonstração. Seja $x_0 \in I$ e consideremos que $x_0 < x$ (análogo se $x_0 > x$). Então, como f é integrável em I , existe $\int_a^{x_0} f(t) dt = F(x_0)$. Assim,

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Como f é integrável em I , f é limitada neste intervalo e consequentemente é limitada em $[x_0, x]$, isto é, existem m e M em \mathbb{R} tais que

$$m \leq f(t) \leq M, \forall t \in [x_0, x].$$

Então, pelo teorema 6.9,

$$m(x - x_0) \leq \int_{x_0}^x f(t) dt \leq M(x - x_0).$$

Como $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0$, resulta que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (F(x) - F(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0),$$

ou seja, F é contínua em x_0 (ponto arbitrário de I). □

Exemplo 6.11. Dada a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por, $f(x) = \ln 2$, seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $F(x) = \int_0^x \ln 2 dt$.

Pelo exercício 6.3 podemos dizer que $F(4) = \int_0^4 \ln 2 dt = 4 \ln 2$ e $F(-3) = -3 \ln 2$.

Qual o valor de $F(0)$?

Exercício 6.8 Considere a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1[\\ 2, & x \in [1, 2[\\ 3, & x \in [2, 3] \end{cases}$$

a) Mostre que $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \begin{cases} x, & x \in [0, 1[\\ 2x - 1, & x \in [1, 2[\\ 3x - 3, & x \in [2, 3] \end{cases}$

b) Verifique que F é contínua em $[0, 3]$.

Observação 6.2. Observe que

$$G(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1[\\ 2x, & x \in [1, 2[\\ 3x, & x \in [2, 3] \end{cases}$$

não pode ser dado por $G(x) = \int_0^x f(t)dt$.

6.6.1 Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo Integral (T.F.C.I.)

Teorema 6.15. *Seja f uma função contínua num intervalo I e $a \in I$. Se*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

para cada $x \in I$, então F é uma função diferenciável e $F'(x) = f(x)$.

Demonstração. Pelo teorema 6.14, a função F é contínua em I . O Teorema do Valor Médio para Integrais (teorema 6.13) diz-nos que, no intervalo $]x_0, x[$ (supondo $x > x_0$, o caso contrário é análogo), existe c tal que

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt = f(c)(x - x_0)$$

e, portanto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(c).$$

Pela continuidade da função f , $\lim_{x \rightarrow x_0} f(c) = f(x_0)$. Como $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = F'(x_0)$, resulta que $F'(x_0) = f(x_0)$. \square

Corolário 1. *Se f é uma função contínua em I e $a \in I$, então f tem uma primitiva em I que é dada por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.*

O teorema 6.15 pode ser generalizado usando como extremos funções deriváveis.

Teorema 6.16. *Seja f uma função contínua no intervalo J e H a função definida por*

$$H(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)dt,$$

com g_1 e g_2 definidas em $I \subseteq \mathbb{R}$ tais que $g_1(I) \subseteq J$ e $g_2(I) \subseteq J$.

Se f é contínua em J e g_1 e g_2 são deriváveis em I , então

$$H'(x) = f(g_2(x))g_2'(x) - f(g_1(x))g_1'(x),$$

para todo $x \in I$.

Demonstração. Começemos por observar que $H(x) = F(g_2(x)) - F(g_1(x))$ com $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ e portanto,

$$H'(x) = (F(g_2(x)) - F(g_1(x)))' = (F(g_2(x)))' - (F(g_1(x)))'$$

e usando a derivada da função composta podemos afirmar que

$$(F(g_2(x)))' = F'(g_2(x))g_2'(x) \text{ e } (F(g_1(x)))' = F'(g_1(x))g_1'(x)$$

e, finalmente, pelo teorema 6.15, como $F'(x) = f(x)$, temos

$$H'(x) = f(g_2(x))g_2'(x) - f(g_1(x))g_1'(x).$$

□

Exercício 6.9

1. Seja $F(x) = \int_0^{\arcsen x} (x+1)^2 \arcsen t \, dt$ uma função definida em $[0, \frac{\pi}{2}]$. Calcule $F'(x)$.

2. Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que $F'(1) = 0$, sendo F a função dada por

$$F(x) = \int_{x^2}^{k \ln x} e^{-t^2} dt.$$

3. Seja F a função dada por $F(x) = \int_0^x \left(\int_0^t e^{-u^2} du \right) dt$. Calcule $F''(x)$.

4. Seja f uma função real de variável real contínua e positiva em \mathbb{R} .
Mostre que a função F dada por

$$F(x) = \int_0^{6x-x^2} f(t)dt$$

admite um só extremo no ponto de abscissa $x = 3$. Classifique esse extremo.

6.6.2 Segundo Teorema Fundamental do Cálculo Integral (T.F.C.I.)

Teorema 6.17. *Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e F uma primitiva de f . Então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Habitualmente escrevemos $[F(x)]_a^b$ ou $F(x)|_a^b$ para denotar $F(b) - F(a)$.

Demonstração. Seja

$$\begin{aligned} G &: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow G(x) = \int_a^x f(t)dt. \end{aligned}$$

Por hipótese, F é uma primitiva de f em $[a, b]$. Do Primeiro T.F.C.I. podemos concluir que G é também uma primitiva de f em $[a, b]$. Logo, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \in [a, b]$, $G(x) = F(x) + c$ (vimos no capítulo anterior que duas primitivas de uma mesma função apenas diferem de uma constante). Podemos determinar essa constante c . Em particular, para $x = a$, vem $G(a) = F(a) + c$. Como $G(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ tem-se que $c = -F(a)$.

Exercício 6.9

1. Seja $F(x) = \int_0^{\sin x} (x+1)^2 \arcsen t \, dt$ uma função definida em $[0, \frac{\pi}{2}]$. Calcule $F'(x)$.

$$F(u) = \underbrace{(u+1)^2}_{H(u)} \underbrace{\int_0^{\sin u} \arcsen t \, dt}_{f(t)}$$

$$F'(u) = 2(u+1)H(u) + (u+1)^2 \cdot H'(u)$$

$$\begin{aligned} H'(u) &= \arcsen(\sin u) \times \cos u - \arcsen(0) \times 0 \\ &= u \cos u. \end{aligned}$$

2. Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que $F'(1) = 0$, sendo F a função dada por

$$F(x) = \int_{x^2}^{k \ln x} \underbrace{e^{-t^2}}_{f(t)} dt.$$

$$F'(u) = e^{-(k \ln u)^2} \cdot \frac{k}{u} - e^{-(u^2)^2} \cdot 2u$$

$$F'(1) = 0 \Leftrightarrow e^0 \cdot k - e^{-1} \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{e}$$

Por outro lado $G(b) = F(b) + c$ e, como $G(b) = \int_a^b f(t)dt$ então,

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) = F(b) + c = F(b) - F(a).$$

□

Exemplo 6.12. Vejamos alguns exemplos simples de cálculo do integral definido, usando uma primitiva da função integranda.

1. $\int_{-1}^0 e^x dx = e^x \Big|_{-1}^0 = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}.$
2. $\int_{-e}^{-1} \frac{1}{x} dx = \ln |x| \Big|_{-e}^{-1} = \ln 1 - \ln e = -1.$
3. $\int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$

Exercício 6.10 Calcule os seguintes integrais definidos:

1. $\int_0^5 x e^{3x^2+4} dx;$
2. $\int_0^2 \frac{1}{1+(2x)^2} dx;$
3. $\int_1^3 \frac{1}{x(2x+4)} dx.$

6.6.3 Substituição no integral definido

O processo de substituição no integral definido torna-se mais simples do que nas primitivas, já que não será necessário regressar à variável inicial...se a substituição for bem feita!

Exemplo 6.13. Consideremos o integral definido $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx.$

Podemos calcular uma primitiva da função $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ por substituição, usando a mudança de variável dada por $t^2 = x + 1$, com $t > 0$. Neste caso $dx = 2t dt$ e a função a primitivar será:

$$\int \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt = \frac{2}{3} t^3 - 2t + C, C \in \mathbb{R}.$$

Regressando à variável inicial temos

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Pelo segundo T.F.C.I. (teorema 6.17) vem

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} \Big|_0^3 = \frac{8}{3}.$$

Contudo, podemos fazer a substituição diretamente no integral definido. Atendendo a que $x \in [0, 3]$, pela substituição acima referida $t^2 = x + 1$, com $t > 0$, conduz a $t \in [1, 2]$ (para $x = 0$ vem $t = 1$ e para $x = 3$ vem $t = 2$). Assim,

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int_1^2 \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt = 2 \int_1^2 (t^2 - 1) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^2 = \frac{8}{3}.$$

6.8 Exercícios do capítulo

Exercício 6.13 Calcule os seguintes integrais definidos:

1. $\int_0^1 e^{-x} \cos(e^{-x}) dx$
2. $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$ (Sugestão: Faça a substituição $t = \sqrt{x}$)

Exercício 6.14 Considere a função F definida por

$$F(x) = \int_{x^2}^{k \ln(x)} e^{-t^2} dt$$

1. Determine a expressão da derivada de F , $F'(x)$.
2. Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo a que $F'(1) = 0$.

Exercício 6.15 Considere a função definida em \mathbb{R} por $f(x) = xe^x$.

1. Diga, justificando, se a função f é integrável em qualquer intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ com $b > a$.
2. Calcule o valor da área da região limitada do plano situada entre $x = -1$ e $x = 1$ e compreendida entre o gráfico de f e o eixo das abscissas.

Exercício 6.16 Considere a função F definida por $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} \arctan t dt$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

1. Determine $F'(x)$ e o seu domínio.
2. Estude F quanto à existência de extremos locais.

Exercício 6.17 Considere a função F definida por $F(x) = \int_0^{x^2} t \ln(1 + e^t) dt$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

1. Justifique que F é diferenciável em \mathbb{R} e determine $F'(x)$.
2. Estude F quanto à monotonia e existência de extremos locais.

Exercício 6.18 Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região assinalada na figura

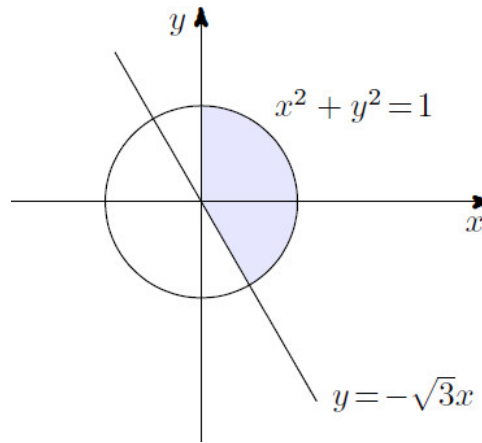


Figura 6.18: Área da região definida no exercício 6.18.

Exercício 6.19 Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq (x - 3)^2 \wedge y \geq x - 1 \wedge y \leq 4\}$.

1. Represente geometricamente a região A .
2. Calcule a área da região A .

Exercício 6.20 Determine a área da região de \mathbb{R}^2 delimitada pelos gráficos de $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$ e $g(x) = x$ e pelas retas de equações $x = -2$ e $x = 2$.

Exercício 6.21 Considere a função F dada por

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt$$

para $x \in [1, +\infty[$. Determine $F(1)$.

Exercício 6.22 Considere a função real de variável real f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{se } x > 0 \\ k & \text{se } x \leq 0 \end{cases}, \quad \text{onde } k \text{ é um número real.}$$

1. Diga, justificando, para que valores de k a função f é integrável no intervalo $[-1, 1]$.
2. Determine a família de primitivas $\int x \ln x \, dx$, definidas no intervalo $]0, +\infty[$.
3. Determine o valor da área da região limitada do plano situada entre $x = 1/e$ e $x = e$ e delimitada pelo gráfico de f e pelo eixo das abscissas.

Exercício 6.23 Considere a função definida por $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t+t^2} dt$. Determine o subconjunto de \mathbb{R} onde o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima.

Exercício 6.24 Prove que se f é uma função contínua em \mathbb{R} e a é uma constante arbitrária, então

$$\int_0^a f(x) \, dx = \int_0^a f(a-x) \, dx.$$

Soluções dos exercícios

Exercício 6.1 1. $S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}_1) = \frac{125}{216}$; 2. $S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}_2) = \frac{23}{72}$; 3. $S_f(\mathcal{P}', \mathcal{C}') = \frac{7}{32}$.

Exercício 6.2 $S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}_1) = -\frac{125}{216}$.

Exercício 6.4 $\int_0^3 (2x+1)dx = 12$.

Exercício 6.5

1. f é contínua em $[-1, 2]$, logo, pelo teorema 6.1 é integrável.
2. g é limitada em $[1, 5]$ e descontínua apenas nos inteiros $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, logo, pelo teorema 6.2 é integrável.
3. h é limitada em $[0, 3]$ e descontínua em $x = 1$, logo, pelo teorema 6.2 é integrável.
4. A função h não é limitada em $[0, 1]$, logo, pelo teorema 6.5 não é integrável neste intervalo.
5. A função i não é limitada em $[0, \pi]$ já que $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} i(x) = +\infty$, logo, pelo teorema 6.5, i não é integrável neste intervalo.

Exercício 6.7 Sim. $\int_0^2 g(x)dx = 2$

Exercício 6.9

1. $F'(x) = 2(x+1) \int_0^{\sin x} \arcsen t \, dt + (x+1)^2 \cos x$.
2. $k = \frac{2}{e}$.
3. $F''(x) = e^{-x^2}$.
4. $x = 3$ é um maximizante de F .

Exercício 6.10

1. $\int_0^5 x e^{3x^2+4} dx = \frac{1}{6} (e^{79} - e^4)$;
2. $\int_0^2 \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{1}{2} \arctan 4$;
3. $\int_1^3 \frac{1}{x(2x+4)} dx = \frac{1}{4} \ln \frac{18}{10}$.

Exercício 6.11 $A = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{1}{1+e^{2x}} dx$.

Exercício 6.12 $A = \int_0^1 (x^2 - 2x + 2) dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx$.

Exercício 6.13 1. $\sin 1 - \sin\left(\frac{1}{e}\right)$; 2. $2(1 + \ln 2)$.

Exercício 6.14 1. $F'(x) = e^{-k^2 \ln^2 x} - 2xe^{-x^4}$; 2. $k = \frac{2}{e}$.

Exercício 6.15 1. Sim, porque é uma função contínua em \mathbb{R} , logo também o é em qualquer intervalo $[a, b]$. 2. $2 - 2/e$.

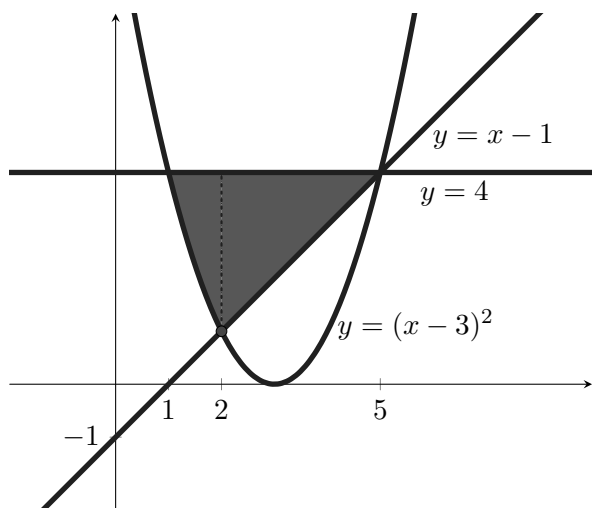
Exercício 6.16 1. $F'(x) = 2xe^{-x^4} \arctan(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$; 2. F admite um mínimo absoluto em $x = 0$ sendo $F(0) = 0$. Não tem máximo.

Exercício 6.17 1. $F'(x) = 2x^3 \ln(1 + e^{x^2})$; 2. F tem um mínimo absoluto em $x = 0$ e é zero; é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e estritamente crescente em $]0, +\infty[$.

Exercício 6.18 $A = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{3}x dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$.

Exercício 6.19

1.



2. $A = \frac{37}{6}$.

Exercício 6.20 $A = \frac{32}{3}$.

Exercício 6.21 $A = \frac{\pi}{2}$.

Exercício 6.22 1. Para qualquer valor de k a função é seccionalmente contínua (note que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$), logo integrável em qualquer intervalo de números reais. Em particular, se $k = 0$ a função é contínua. 2. $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$, $C \in \mathbb{R}$;

3. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4e^2} + \frac{e^2}{4}$.

Exercício 6.23 O gráfico tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -\frac{1}{2}[$

Exercício 6.24 Se f é contínua em \mathbb{R} , então é integrável em qualquer intervalo da forma $[0, a]$, com $a \in \mathbb{R}$. Efetuando a mudança de variável $u = a - x$ ($x = a - u$, $dx = -1 \cdot du$, $x = 0 \Rightarrow u = a$ e $x = a \Rightarrow u = 0$), obtém-se

$$\int_0^a f(a-x) dx = \int_a^0 f(u)(-1) du = - \int_a^0 f(u) du = \int_0^a f(u) du = \int_0^a f(x) dx,$$

o que demonstra a propriedade pedida.

