

Equações Diferenciais Ordinárias

baseado no texto de Alexandre Almeida, Cálculo II, fev. 2018, pp. 51–92, e
versões anteriores de slides de Cálculo II

Isabel Brás

Universidade de Aveiro

2023/2024

Resumo dos Conteúdos

- 1 EDO – Introdução, Conceitos e Terminologia
- 2 Problemas de Valores Iniciais e Problemas de Valores na Fronteira
- 3 Equações de variáveis separáveis
- 4 Equações Diferenciais Homogéneas
- 5 Equações Diferenciais Redutíveis a Homogéneas
- 6 EDO Exatas
- 7 EDO Redutíveis a Exatas, usando fatores integrantes
- 8 EDO Lineares de Primeira Ordem
- 9 EDO de Bernoulli
- 10 EDO Lineares de Ordem Arbitrária
 - Solução Geral e Conjunto Fundamental de Soluções
 - Solução particular de uma EDO linear completa
 - Problemas de Cauchy

Equações Diferenciais, o que são?

Equações que envolvem uma função e as suas derivadas e/ou a variável que é o argumento dessa função.

Estas equações aparecem frequentemente quando se pretende modelar matematicamente fenómenos reais, em especial, naqueles de evolução temporal.

Exemplos:

- 1 Taxa de variação de temperatura de um objeto:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m),$$

$T(t)$ → temperatura do objeto,

T_m → temperatura do meio ambiente, k → constante positiva.

Exemplos (cont.):

2. Movimento harmónico de uma mola:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$m \rightarrow$ massa do objeto colocado na extremidade da mola vertical;

$x(t) \rightarrow$ deslocamento a partir da posição (inicial) de equilíbrio da mola;

$k > 0 \rightarrow$ constante de mola; Ver figura

3. Lei de Kirchhoff aplicada a uma malha constituída por uma bobine em série com uma resistência:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t),$$

onde L e R são constantes (indutância e resistência, respetivamente), $I(t)$ a intensidade de corrente e $E(t)$ a tensão da fonte de energia.

Equação diferencial ordinária

Definição:

Chama-se **equação diferencial ordinária (EDO)** de ordem n ($n \in \mathbb{N}$), a uma equação do tipo

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (\text{EDO})$$

onde y é função (real) de x .

Terminologia associada:

y é designada por **variável dependente**;

x é designada por **variável independente**;

Uma EDO diz-se estar na **forma normal** quando se apresenta na forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

Notação alternativa: No slide anterior $y^{(n)}$ denota a derivada de ordem n da função y . Em alternativa, podemos usar a notação $\frac{d^n y}{dx^n}$ e (re)escrever a EDO na forma

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0.$$

Exemplos :

1

$$-y' + x^3 - 1 = 0$$

é uma equação diferencial de ordem 1, onde x é a variável independente e y a variável dependente;

2

$$3t \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = \cos(t)$$

é uma equação diferencial de ordem 2, onde t é a variável independente e x a variável dependente;

Solução de uma EDO

Definição

Chama-se **solução da equação diferencial**

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

num intervalo I , a toda a função $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, com derivadas finitas até à ordem n , tal que

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Exemplo:

$\varphi_1(x) = \sin x$ e $\varphi_2(x) = \cos x - \sin x$ são duas soluções (em \mathbb{R}) de

$$y'' + y = 0$$

Identifique outras!



Mais terminologia associada a uma EDO de ordem n

Integral Geral: Família de soluções que se obtêm por técnicas de integração adequadas, que é definida, em geral, usando n constantes arbitrárias; o processo de obtenção dessa família de soluções é usualmente designado por integração(ou resolução) da EDO.

Integral Particular (ou solução particular): Solução que faz parte do integral geral;

Solução Singular: Solução que não se obtém a partir do integral geral;

Solução Geral: Conjunto de todas as soluções.

Exemplo: $(y')^2 - 4y = 0$.

- Determinação de um integral geral:

$$\begin{array}{rcl} (y')^2 - 4y & = & 0 \\ (y')^2 & = & 4y \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{rcl} y' & = & 2\sqrt{y}, \quad y \geq 0 \\ y'(y)^{-\frac{1}{2}} & = & 2, \quad y > 0 \end{array} \right.$$

integrando em ordem a x ,

$$\int y'(y)^{-\frac{1}{2}} dx = \int 2 dx, \quad y > 0,$$

determinando as primitivas e simplificando, obtém-se o seguinte **integral geral**: $y = (x + C)^2$, onde $C \in \mathbb{R}$;

- Notar que $y = 0$ é também solução da EDO, mas não pertence ao integral geral obtido, esta solução é uma **solução singular** da EDO (em relação ao referido integral geral).
- Tomando no integral geral $C=0$ e $C=1$, obtém-se duas **soluções particulares**: $y = x^2$ e $y = (x + 1)^2$, respetivamente.

Problema de valores iniciais

Definição:

Chama-se **problema de valores iniciais** (PVI) (ou **problema de Cauchy**) a todo o problema que consiste em encontrar a solução (ou soluções) de uma dada equação diferencial satisfazendo certas condições (ditas condições iniciais) num mesmo ponto:

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Exemplo:

$y = -\frac{x^3}{6} + 1$ é solução do PVI

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Verifique!

Existência e Unicidade de Solução para um PVI

- Nem todo o PVI admite solução;
- Caso exista solução para o PVI, esta pode não ser única;
- É possível provar que um PVI de primeira ordem na forma normal, *i.e.*, do tipo

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admite uma e uma só solução (definida num intervalo centrado em x_0), desde que a função f satisfaça determinadas condições (*Teorema de Cauchy-Picard*). Não estudamos aqui este resultado, mas trataremos um caso particular a propósito das EDO lineares (mais à frente).

Exemplo 4.2 As equações diferenciais (4.2) e

$$y'' - y' + x^3 - 1 = 0$$

são ambas de segunda ordem. Repare-se nos diferentes papéis desempenhados pela variável x nas duas equações!

Definição 4.2 (solução de uma EDO)

Chama-se **solução da equação diferencial** (4.11), num intervalo I^{11} , a toda a função $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ com derivadas finitas até à ordem n e tal que

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Exemplo 4.3 As funções $\varphi_1(x) = \sin x$ e $\varphi_2(x) = \cos x - \sin x$ são duas soluções (em \mathbb{R}) da equação diferencial $y'' + y = 0$.

Observação 4.2 No Exemplo 4.3 temos duas soluções explícitas da equação indicada. No entanto, em geral, uma EDO poderá ter soluções na forma implícita. É o caso da relação $ye^y = x$, a qual define **implicitamente**¹² uma solução da equação diferencial

$$y' \left(1 - \ln \frac{y}{x} \right) = \frac{y}{x}, \quad x > 0.$$

Resolver (ou integrar) uma equação diferencial significa determinar o conjunto das suas soluções. Usando conhecimentos de integração de Cálculo I podemos determinar as soluções de algumas equações diferenciais simples, como é caso da equação (escrita na forma normal)

$$y' = f(x)$$

¹¹Na prática, muitas vezes não fazemos referência ao intervalo onde estamos a considerar a equação, desde que tal não seja realmente usado e daí não surjam ambiguidades.

¹²É possível mostrar que $ye^y = x$ define, de facto, y como função de x para $x, y > 0$ e que tal função $y = y(x)$ é mesmo diferenciável. Os alunos que irão frequentar Cálculo III terão oportunidade de estudar funções definidas implicitamente.

Exemplo 4.6 A equação diferencial (4.2) pode ser escrita na forma:

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad \omega^2 = k/m.$$

Mais tarde veremos que qualquer solução desta equação é do tipo

$$x(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t), \quad \text{com } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Atendendo ao contexto do problema, o aparecimento das funções seno e cosseno na solução geral da equação não é surpreendente, uma vez que a mola tem um comportamento oscilatório em torno do seu ponto de equilíbrio.

Mais adiante vamos ver como determinar um integral geral (ou mesmo a solução geral) de alguns tipos de equações diferenciais. Não iremos aprofundar o estudo de soluções singulares¹³.

Exemplo 4.7 Considere-se a EDO de primeira ordem (em \mathbb{R})

$$(y')^2 - 4y = 0.$$

Um integral geral desta equação é dado por $y = (x + C)^2$, onde C é uma constante real arbitrária.

A função definida por $y = x^2$ é uma solução particular daquela equação, enquanto que $y = 0$ é uma solução singular. [Porquê?]

Exemplo 4.8 As famílias de funções $y = x + C$ e $y = -x + C$ ($C \in \mathbb{R}$) constituem dois integrais gerais para a EDO de primeira ordem $(y')^2 = 1$. Repare-se que cada solução particular de um é uma solução singular relativamente ao outro. [Verifique!]

Em muitas aplicações mais importante do que determinar um integral geral para a equação diferencial envolvida é encontrar a(s) solução(ões) particular(es) que satisfaz(em) determinadas condições previamente fixadas.

¹³Do ponto de vista geométrico, uma tal solução poderá corresponder a uma curva tangente a todas as curvas do integral geral (veja-se o caso da curva $y = 0$ no Exemplo 4.7).

Exemplo 4.10 Retomando o Exemplo 4.7 vemos que $y = x^2$ e $y = 0$ são duas soluções do problema de Cauchy

$$\begin{cases} (y')^2 - 4y = 0 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Exemplo 4.11 O PVI

$$\begin{cases} |y'| + |y| = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

não tem solução, uma vez que a equação diferencial $|y'| + |y| = 0$ tem apenas a solução $y = 0$.

Os exemplos anteriores sugerem, por um lado, que nem todo o PVI admite solução e, por outro, que a existir solução esta poderá não ser única. Do ponto de vista de aplicações, é importante conhecer condições que garantam a existência e unicidade de solução. É possível provar que um problema de Cauchy de primeira ordem na forma normal, i.e., do tipo

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(com x_0, y_0 dados) admite uma e uma só solução (definida num intervalo centrado em x_0), desde que a função f seja suficientemente “regular”¹⁴. Apesar da existência de um tal resultado (de natureza local) para funções f “gerais”, iremos apenas detalhar o caso em que a equação envolvida é “linear”. Voltaremos a esta questão mais adiante quando tratarmos especificamente este tipo de equações.

Um dos objetivos principais deste capítulo é apresentar métodos de resolução que permitem obter a solução analítica¹⁵ de alguns tipos de equações

¹⁴Este resultado é conhecido pelo *Teorema de Cauchy-Picard* e pressupõe que a função f seja contínua num conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e satisfaça a condição

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M |y_1 - y_2|$$

onde $M > 0$ é uma constante independente de $(x, y_1), (x, y_2) \in D$.

¹⁵Em alguns casos a procura de soluções poderá ser feita do ponto de vista geométrico através de “campos de inclinações”. Para resolver uma equação da forma $y' = f(x, y)$,

é dada (implicitamente) por

$$y^2 + \operatorname{sen} y = 2x^3 + \pi^2 - 2.$$

Exemplo 4.15 Consideremos o seguinte problema de aplicação da chamada *Lei do Arrefecimento de Newton* (cf. Secção 4.1):

Uma esfera de cobre é aquecida a uma temperatura de 100°C . A esfera é então colocada num recipiente com água em que esta é mantida a uma temperatura constante de 30°C . Determine a forma como varia a temperatura (T) da esfera ao longo do tempo (t).

Recordando a equação (4.1), temos neste caso $T_m = 30$. Como a temperatura no instante inicial é de 100°C , a resolução do problema anterior passa pela resolução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -k(T - 30) \\ T(0) = 100 \end{cases} \quad (4.19)$$

onde a constante (de arrefecimento) $k > 0$ pode ser determinada a partir dos dados fornecidos. Ora, a equação diferencial envolvida é de variáveis separáveis, visto ser equivalente à equação

$$\frac{dT}{T - 30} = -k dt, \quad T \neq 30.$$

Por integração de ambos os membros obtemos o integral geral

$$T = C e^{-kt} + 30,$$

onde C é uma constante real não nula [[Verifique!](#)]. Repare-se, no entanto, que a função constante $T = 30$, inicialmente excluída, é igualmente solução da equação diferencial em (4.19) e poderá obter-se do integral geral considerando $C = 0$.

Usando a condição inicial $T(0) = 100$, chegamos à solução (particular) do problema

$$T = 70 e^{-kt} + 30, \quad t \geq 0.$$

Observe-se que a constante de arrefecimento k poderia ser calculada a partir de informação adicional. Por exemplo, se a temperatura da esfera fosse de 70°C ao fim de 3 minutos, o seu valor seria $k = \frac{1}{3} \ln(\frac{7}{4}) \simeq 0,1865$.

4.3.2 EDOs homogéneas

A equação diferencial (4.16) diz-se *homogénea* se f for uma *função homogénea de grau zero*¹⁹, i.e.

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y), \quad \forall (x, y) \in D, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{tais que } (\lambda x, \lambda y) \in D.$$

Neste caso temos $f(x, y) = f(1, y/x)$ ($x \neq 0$) [Porquê?], pelo que uma equação homogénea pode sempre escrever-se na forma

$$\boxed{y' = g(y/x)} \quad (4.20)$$

em que g é uma função de uma variável apenas. Por sua vez, esta equação pode ser reduzida a uma equação de variáveis separáveis através de uma mudança de variável adequada. De facto, efetuando a substituição de variável (dependente) $y = zx$, a equação (4.20) fica na forma

$$z + xz' = g(z),$$

a qual é uma equação de variáveis separáveis em x e z [Porquê?]. Para determinar um integral geral desta última equação usamos a técnica de resolução discutida anteriormente para este tipo de equações. Um integral geral da equação homogénea inicial obtém-se então a partir deste último tendo em conta a substituição inversa $z = y/x$.

Exemplo 4.16 Vamos resolver a equação $x^2 dy = (x^2 + xy + y^2) dx$. Esta pode escrever-se na forma

$$y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2} = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2, \quad x \neq 0,$$

logo a equação diferencial dada é homogénea. Através da substituição $y = zx$, obtemos a equação de variáveis separáveis

$$\frac{1}{1 + z^2} z' = \frac{1}{x},$$

¹⁹Uma função real f definida num subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ é **homogénea de grau $m \geq 0$** se

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$$

para todos $(x, y) \in D$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $(\lambda x, \lambda y) \in D$.

que admite o integral geral

$$\operatorname{arctg} z = \ln |x| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad [\text{Verifique!}]$$

Por conseguinte, um integral geral da equação homogénea dada tem a forma

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln |x| + C, \quad \text{i.e.} \quad y = x \operatorname{tg} (\ln |x| + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Observação 4.4 As equações diferenciais da forma

$$y' = h \left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \right), \quad (4.21)$$

em que h é uma função de uma variável real e a_1, a_2, b_1, b_2 são constantes reais, transformam-se em equações já conhecidas através de uma mudança de variável(eis) adequada(s):

- se $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, então a equação já é de variáveis separáveis, ou então uma das substituições $z = a_1 x + b_1 y$ ou $z = a_2 x + b_2 y$ converte-a numa equação desse tipo;
- se $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, então existem constantes α e β tais que a substituição de variáveis dada pela translação

$$x = u + \alpha \quad \text{e} \quad y = z + \beta$$

transforma a equação (4.21) numa equação homogénea nas variáveis u (independente) e z (dependente), daí dizer-se, neste caso, que (4.21) é uma EDO *reduzível a uma equação homogénea*. O par (α, β) é a solução do sistema²⁰

$$\begin{cases} a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1 = 0 \\ a_2 \alpha + b_2 \beta + c_2 = 0. \end{cases}$$

Sugestão: Como **aplicação** resolva a equação diferencial $y' = \frac{x + y + 4}{x - y - 6}$.

²⁰Trata-se de um sistema possível e determinado (uma vez que $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$), o qual pode ser resolvido pelo método de substituição (já conhecido do Ensino Básico/Secundário), ou então através da chamada *regra de Cramer* (conhecida pelos alunos que frequentaram ALGA).

Recordando a equação (4.1), temos neste caso $T_m = 30$. Como a temperatura no instante inicial é de 100°C , a resolução do problema anterior passa pela resolução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -k(T - 30) \\ T(0) = 100 \end{cases}$$

multiplicar por $\frac{dt}{T-30}$

$$\frac{1}{T-30} dT = -k dt$$

$$\ln|T-30| = -kt + C$$

$$e^{\ln|T-30|} = e^{-kt+C}$$

$$|T-30| = e^C e^{-kt}$$

$C \in \mathbb{R}^+$

$$T-30 = \underbrace{t e^C}_{\substack{\mathbb{R}^+ \\ \text{?}}} e^{-kt}$$

$$T-30 = d e^{-kt}, \quad d \in \mathbb{R}$$

(com $d=0$ obtemos $T=30$,
que também é solução da
equação)

$$T(t) = 30 + d e^{-kt}, \quad d \in \mathbb{R}$$

$$T(0) = 100 \Leftrightarrow 30 + d e^0 = 100 \Leftrightarrow d = 70$$

$$\text{SOLUÇÃO: } T(t) = 30 + 70 e^{-kt}$$

Exemplo 4.16 Vamos resolver a equação $x^2 dy = (x^2 + xy + y^2) dx$. Esta

$$\begin{array}{l|l}
 u^2 \frac{dy}{du} = u^2 + uy + y^2 & f(u, y) = \frac{(u^2 + uy + y^2)}{(u)^2} \\
 y' = \frac{u^2 + uy + y^2}{u^2} & = \frac{\cancel{u^2} (u^2 + uy + y^2)}{\cancel{u^2} u^2} = \\
 & = f(u, y)
 \end{array}$$

$$y = zu \quad (y(u) = z(u)u)$$

$$y' = z'u + z$$

Substituímos na equação

$$z'u + z = \frac{u^2 + u zu + (zu)^2}{u^2}$$

$$z'u + z = \cancel{u^2} (1 + z + z^2) \quad \cancel{u^2}$$

$$u \frac{dz}{du} = z^2 + 1$$

$$\frac{1}{z^2 + 1} dz = \frac{1}{u} du$$

$$\arctg z = \ln |u| + C$$

$$\arctg \frac{y}{u} = \ln |u| + C$$

$$y = u \operatorname{tg}(\ln |u| + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

8. Verifique que as seguintes equações diferenciais são homogêneas e determine um seu integral geral.

(a) $(x^2 + y^2)y' = xy$;

(b) $y' \left(1 - \ln \frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}$, $x > 0$.

(a) $y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ $\uparrow (u, v)$

$y = zu$ $y' = z'u + z$

$z'u + z = \frac{u z u}{u^2 + (zu)^2}$

$\uparrow (\lambda u, \lambda y) = \frac{\lambda u \lambda y}{\lambda^2 u^2 + \lambda^2 y^2}$
 $= \frac{uy}{u^2 + y^2} = \uparrow (u, y)$

$\arctg\left(\frac{v}{u}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2\right) = \ln|u| + C, C \in \mathbb{R}$

$\arctg\left(\frac{y+5}{u-1}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{y+5}{u-1}\right)^2\right) = \ln|u-1| + C$