Matemática Discreta

Ano Letivo 2022/23 (Versão: 18 de Abril de 2023)

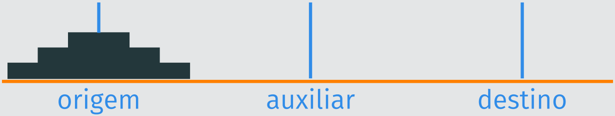
Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
https://elearning.ua.pt/

Capítulo IV
Recorrência e Funções Geradoras

Parte 1
Equações de Recorrência

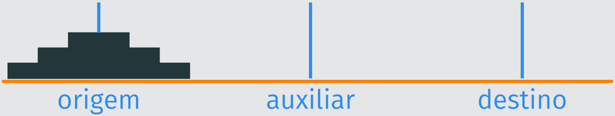
Introdução

O problema é



mover n discos de origem para destino com a ajuda de auxiliar, de modo que

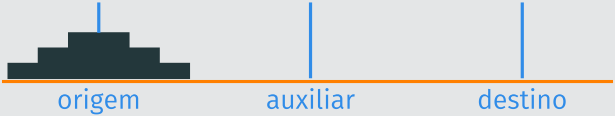
O problema é



mover n discos de origem para destino com a ajuda de auxiliar, de modo que

- apenas um disco poderia ser movido por vez, e
- um disco maior nunca pode fica acima de um disco menor.

O problema é

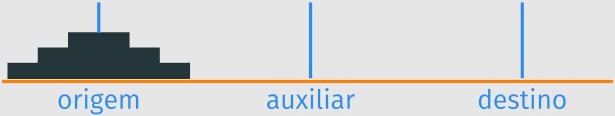


mover n discos de origem para destino com a ajuda de auxiliar, de modo que

- apenas um disco poderia ser movido por vez, e
- um disco maior nunca pode fica acima de um disco menor.

A lenda diz que, num templo, havia uma torre com 64 discos de ouro e mais duas estacas equilibradas sobre uma plataforma. Os monges foram ordenados pelo «Brama» de mover todos os discos de uma estaca para outra. Segundo a lenda, quando todos os discos fossem transferidos de origem para destino, o mundo desapareceria.

O problema é



mover *n* discos de origem para destino com a ajuda de auxiliar, de modo que

- apenas um disco poderia ser movido por vez, e
- um disco maior nunca pode fica acima de um disco menor.

A lenda diz que, num templo, havia uma torre com 64 discos de ouro e mais duas estacas equilibradas sobre uma plataforma. Os monges foram ordenados pelo «Brama» de mover todos os discos de uma estaca para outra. Segundo a lenda, quando todos os discos fossem transferidos de origem para destino, o mundo desapareceria.

Temos de preocupar-nós?

A questão

Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} =$??

A questão

Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} =??$

A solução

É mais fácil pensar recursivamente:

Torre de Hanói (5)

A questão

Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} =??$

A solução

É mais fácil pensar recursivamente:

- Se $n = 1$, basta mover o disco diretamente de origem para destino. Logo, $a_n = 1$.

A questão

Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} =??$

A solução

É mais fácil pensar recursivamente:

- Se $n = 1$, basta mover o disco diretamente de origem para destino. Logo, $a_n = 1$.
- Se $n > 1$, então:

A questão

Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} =??$

A solução

É mais fácil pensar recursivamente:

- Se $n = 1$, basta mover o disco diretamente de origem para destino. Logo, $a_n = 1$.
- Se $n > 1$, então:
  - mover os $n - 1$ discos acima de origem para auxiliar utilizando destino, depois

A questão

Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} =$??

A solução

É mais fácil pensar recursivamente:

- Se $n = 1$, basta mover o disco diretamente de origem para destino. Logo, $a_n = 1$.
- Se $n > 1$, então:
  - mover os $n - 1$ discos acima de origem para auxiliar utilizando destino, depois
  - mover o último disco de origem para destino; depois

A questão

Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} =$??

A solução

É mais fácil pensar recursivamente:

- Se $n = 1$, basta mover o disco diretamente de origem para destino. Logo, $a_n = 1$.
- Se $n > 1$, então:
  - mover os $n - 1$ discos acima de origem para auxiliar utilizando destino, depois
  - mover o último disco de origem para destino; depois
  - mover os $n - 1$ discos de auxiliar para destino utilizando origem.

A questão

Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} =$??

A solução

É mais fácil pensar recursivamente:

- Se $n = 1$, basta mover o disco diretamente de origem para destino. Logo, $a_n = 1$.
- Se $n > 1$, então:
  - mover os $n - 1$ discos acima de origem para auxiliar utilizando destino, depois
  - mover o último disco de origem para destino; depois
  - mover os $n - 1$ discos de auxiliar para destino utilizando origem.

Logo, $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1$.

Os números

Os famosos números de Fibonacci[a]

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots$$

[a] Leonardo Fibonacci ou Leonardo de Pisa (1170 – 1250), matemático italiano.

Os números

Os famosos números de Fibonacci[a]

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots$$

são os termos da sucessão $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que começa com $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$ e satisfaz a regra $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

[a] Leonardo Fibonacci ou Leonardo de Pisa (1170 – 1250), matemático italiano.

Os números

Os famosos números de Fibonacci[a]

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \dots$$

são os termos da sucessão $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que começa com $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$ e satisfaz a regra $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Embora os números de Fibonacci sejam completamente determinados pelos primeiros dois termos F_0 e F_1, não é fácil calcular, por exemplo, $F_{312493741}$ porque, pela definição, é necessário calcular primeiro $F_{312493740}$ e $F_{312493739}$, para isso precisamos de $F_{312493738}$ e $F_{312493737}$, … e assim até $F_2 = F_1 + F_0$.

[a] Leonardo Fibonacci ou Leonardo de Pisa (1170 – 1250), matemático italiano.

Os números

Os famosos números de Fibonacci[a]

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \dots$$

são os termos da sucessão $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que começa com $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$ e satisfaz a regra $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Embora os números de Fibonacci sejam completamente determinados pelos primeiros dois termos F_0 e F_1, não é fácil calcular, por exemplo, $F_{312493741}$ porque, pela definição, é necessário calcular primeiro $F_{312493740}$ e $F_{312493739}$, para isso precisamos de $F_{312493738}$ e $F_{312493737}$, ... e assim até $F_2 = F_1 + F_0$.

Estes números aparecem em muitos contextos ....

[a] Leonardo Fibonacci ou Leonardo de Pisa (1170 – 1250), matemático italiano.

Uma população de coelhos

Numa população de animais (digamos, de coelhos) há animais adultos (que podem ter descendentes) e animais jovens (que ainda não podem ter descendentes).

Uma população de coelhos

Numa população de animais (digamos, de coelhos) há animais adultos (que podem ter descendentes) e animais jovens (que ainda não podem ter descendentes). Suponhamos que

- cada par de coelhos adultos tem um par de descendentes (necessariamente jovem) no final do mês,

Uma população de coelhos

Numa população de animais (digamos, de coelhos) há animais adultos (que podem ter descendentes) e animais jovens (que ainda não podem ter descendentes). Suponhamos que

- cada par de coelhos adultos tem um par de descendentes (necessariamente jovem) no final do mês,
- depois de um mês, um coelho jovem passa a ser um coelho adulto, e

Uma população de coelhos

Numa população de animais (digamos, de coelhos) há animais adultos (que podem ter descendentes) e animais jovens (que ainda não podem ter descendentes). Suponhamos que

- cada par de coelhos adultos tem um par de descendentes (necessariamente jovem) no final do mês,
- depois de um mês, um coelho jovem passa a ser um coelho adulto, e
- sendo vegetarianos, os coelhos vivem «eternamente».

Uma população de coelhos

Numa população de animais (digamos, de coelhos) há animais adultos (que podem ter descendentes) e animais jovens (que ainda não podem ter descendentes). Suponhamos que

- cada par de coelhos adultos tem um par de descendentes (necessariamente jovem) no final do mês,
- depois de um mês, um coelho jovem passa a ser um coelho adulto, e
- sendo vegetarianos, os coelhos vivem «eternamente».

No que se segue, A_n denota o número de pares de coelhos adultos e J_n o número de pares de coelhos jovens no final do mês n. *Começando com um par de coelhos jovens, qual é o número $c_n = A_n + J_n$ de pares de coelhos?*

Uma população de coelhos

Numa população de animais (digamos, de coelhos) há animais adultos (que podem ter descendentes) e animais jovens (que ainda não podem ter descendentes). Suponhamos que

- cada par de coelhos adultos tem um par de descendentes (necessariamente jovem) no final do mês,
- depois de um mês, um coelho jovem passa a ser um coelho adulto, e
- sendo vegetarianos, os coelhos vivem «eternamente».

No que se segue, A_n denota o número de pares de coelhos adultos e J_n o número de pares de coelhos jovens no final do mês n. *Começando com um par de coelhos jovens, qual é o número $c_n = A_n + J_n$ de pares de coelhos?* Por hipotése, $A_0 = 0$, $J_0 = 1$, $A_1 = 1$, $J_1 = 0$ e, para $n \geq 1$,

$$A_n = A_{n-1} + J_{n-1} \quad \text{e} \quad J_n = A_{n-1}.$$

Uma população de coelhos

Numa população de animais (digamos, de coelhos) há animais adultos (que podem ter descendentes) e animais jovens (que ainda não podem ter descendentes). Suponhamos que

- cada par de coelhos adultos tem um par de descendentes (necessariamente jovem) no final do mês,
- depois de um mês, um coelho jovem passa a ser um coelho adulto, e
- sendo vegetarianos, os coelhos vivem «eternamente».

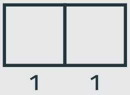
No que se segue, A_n denota o número de pares de coelhos adultos e J_n o número de pares de coelhos jovens no final do mês n. *Começando com um par de coelhos jovens, qual é o número $c_n = A_n + J_n$ de pares de coelhos?* Por hipotése, $A_0 = 0$, $J_0 = 1$, $A_1 = 1$, $J_1 = 0$ e, para $n \geq 1$,

$$A_n = A_{n-1} + J_{n-1} \quad \text{e} \quad J_n = A_{n-1}.$$

Portanto, para $n \geq 2$, $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$; e $c_n = A_n + J_n$ satisfaz

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 1, \quad c_n = c_{n-1} + c_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

Quadrados



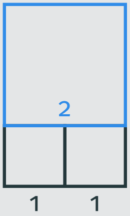
Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido. Qual é o comprimento de um lado do quadrado n?

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 = 1,$$
$$\vdots$$

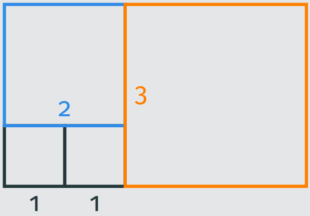
Quadrados

Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido. Qual é o comprimento de um lado do quadrado n?

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = 2,$$
$$\vdots$$



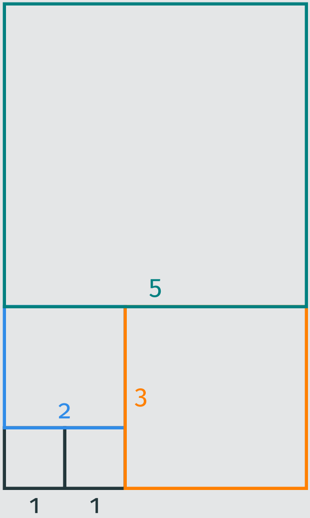
Quadrados



Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido. Qual é o comprimento de um lado do quadrado *n*?

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = 2,$$
$$a_3 = 3,$$
$$\vdots$$

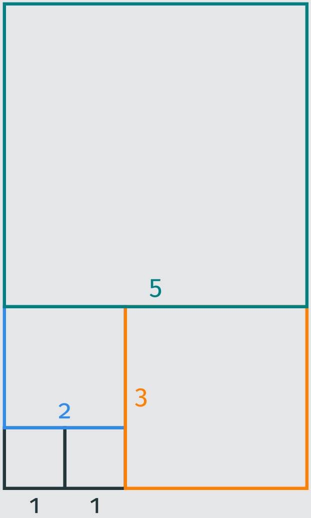
Quadrados



Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido. Qual é o comprimento de um lado do quadrado n?

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = 2,$$
$$a_3 = 3,$$
$$a_4 = 5,$$
$$\vdots$$

Quadrados



Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido. Qual é o comprimento de um lado do quadrado n?

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = 2,$$
$$a_3 = 3,$$
$$a_4 = 5,$$
$$\vdots$$
$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Exemplo

Determinamos a soma dos n primeiros números de Fibonacci.

Exemplo

Determinamos a soma dos n primeiros números de Fibonacci.

Utilizando $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ (para $n \geq 1$), calculamos

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_0 +$$

Exemplo

Determinamos a soma dos n primeiros números de Fibonacci.

Utilizando $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ (para $n \geq 1$), calculamos

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_0 +$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned}
&+ (F_2 - F_0) \\
&+ (F_3 - F_1) \\
&+ (F_4 - F_2) \\
&\dots \\
&+ (F_n - F_{n-2})
\end{aligned}$$

Exemplo

Determinamos a soma dos n primeiros números de Fibonacci.

Utilizando $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ (para $n \geq 1$), calculamos

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_0 + \sum_{k=2}^{n} F_k - \sum_{k=0}^{n-2} F_k$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned}
&+ (F_2 - F_0) \\
&+ (F_3 - F_1) \\
&+ (F_4 - F_2) \\
&\dots \\
&+ (F_n - F_{n-2})
\end{aligned}$$

Exemplo

Determinamos a soma dos n primeiros números de Fibonacci.

Utilizando $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ (para $n \geq 1$), calculamos

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_0 + \sum_{k=2}^{n} F_k - \sum_{k=0}^{n-2} F_k = F_n + F_{n-1} - 1$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned}
&+ (F_2 - F_0) \\
&+ (F_3 - F_1) \\
&+ (F_4 - F_2) \\
&\dots \\
&+ (F_n - F_{n-2})
\end{aligned}$$

Exemplo

Determinamos a soma dos n primeiros números de Fibonacci.

Utilizando $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ (para $n \geq 1$), calculamos

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_0 + \sum_{k=2}^{n} F_k - \sum_{k=0}^{n-2} F_k = F_n + F_{n-1} - 1 = F_{n+1} - 1.$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned}
&+ (F_2 - F_0)\\
&+ (F_3 - F_1)\\
&+ (F_4 - F_2)\\
&\dots\\
&+ (F_n - F_{n-2})
\end{aligned}$$

Exemplo

Quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \ldots, n\}$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*?*

Exemplo

Quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \ldots, n\}$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*?*

Se $n = 0$, então o número a_0 de ordens totais em $\varnothing$ é $a_0 = 1$.

Exemplo

Quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \dots, n\}$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*?*

Se $n = 0$, então o número a_0 de ordens totais em $\varnothing$ é $a_0 = 1$.

As ordens totais em $\{1, 2, \dots, n, n + 1\}$ podemos obter de seguinte modo:

Exemplo

Quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \dots, n\}$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$*?*

Se $n = 0$, então o número a_0 de ordens totais em $\varnothing$ é $a_0 = 1$.

As ordens totais em $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ podemos obter de seguinte modo:

- ordenamos primeiro $\{1, 2, \dots, n\}$, denotamos o número de maneiras por a_n; depois

Exemplo

Quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \dots, n\}$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*?*

Se $n = 0$, então o número a_0 de ordens totais em $\varnothing$ é $a_0 = 1$.

As ordens totais em $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ podemos obter de seguinte modo:

- ordenamos primeiro $\{1, 2, \dots, n\}$, denotamos o número de maneiras por a_n; depois
- podemos inserir $n+1$, aqui há $n+1$ possibilidades.

Exemplo

Quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \dots, n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$?

Se $n = 0$, então o número a_0 de ordens totais em $\varnothing$ é $a_0 = 1$.

As ordens totais em $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ podemos obter de seguinte modo:

- ordenamos primeiro $\{1, 2, \dots, n\}$, denotamos o número de maneiras por a_n; depois
- podemos inserir $n+1$, aqui há $n+1$ possibilidades.

Pelo princípio da multiplicação, o número a_{n+1} de ordens totais em $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ é

$$a_{n+1} = (n+1)a_n.$$

1. Noções gerais
2. Equações de recorrência lineares
3. Equações de recorrência lineares homogéneas
4. Equações de recorrência lineares em geral
5. Equações de recorrência não lineares

1. Noções gerais

Definição

- Uma equação de recorrência (ou relação de recorrência) é uma equação da forma

$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k}), \tag{*}$$

com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$.

Definição

- Uma equação de recorrência (ou relação de recorrência) é uma equação da forma

$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k}), \tag{*}$$

  com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$.
- A equação de recorrência (*) diz-se de ordem k ou que tem profundidade k (supondo que f «depende da última variável»).

Definição

- Uma equação de recorrência (ou relação de recorrência) é uma equação da forma
$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}), \tag{*}$$
com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$.
- A equação de recorrência (*) diz-se de ordem k ou que tem profundidade k (supondo que f «depende da última variável»).
- Uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diz-se solução de (*) quando os seus termos satisfazem a equação (*), para todo o $n \geq k$.

Definição

- Uma equação de recorrência (ou relação de recorrência) é uma equação da forma
$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}), \qquad (*)$$
com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$.
- A equação de recorrência (*) diz-se de ordem k ou que tem profundidade k (supondo que f «depende da última variável»).
- Uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diz-se solução de (*) quando os seus termos satisfazem a equação (*), para todo o $n \geq k$.

Nota

Resolver uma relação de recorrência significa determinar todas as suas soluções.

Definição

- Uma equação de recorrência (ou relação de recorrência) é uma equação da forma
$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}), \tag{*}$$
com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$.
- A equação de recorrência (*) diz-se de ordem k ou que tem profundidade k (supondo que f «depende da última variável»).
- Uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diz-se solução de (*) quando os seus termos satisfazem a equação (*), para todo o $n \geq k$.

Nota

Resolver uma relação de recorrência significa determinar todas as suas soluções. Estamos particularmente interessados em descrever as soluções com fórmulas fechadas; ou seja, na forma

$$a_n = \text{«uma expressão que apenas envolve a variável } n\text{»}.$$

2. Equações de recorrência lineares

Definição

- Uma equação de recorrência linear (de coeficientes constantes) de ordem k é uma equação da forma

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n, \qquad (*)$$

(para $n \geq k$) onde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ($c_k \neq 0$) são constantes e $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão.

Definição

- Uma equação de recorrência linear (de coeficientes constantes) de ordem k é uma equação da forma

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n, \tag{*}$$

(para $n \geq k$) onde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ($c_k \neq 0$) são constantes e $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão.

- A equação (*) diz-se homogénea quando $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a sucessão nula.

Definição

- Uma equação de recorrência linear (de coeficientes constantes) de ordem k é uma equação da forma

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n, \tag{*}$$

(para $n \geq k$) onde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ($c_k \neq 0$) são constantes e $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão.

- A equação (*) diz-se homogénea quando $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sucessão nula.
- A equação homogénea associada a (*) é a equação

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}.$$

Definição

- Uma equação de recorrência linear (de coeficientes constantes) de ordem k é uma equação da forma
$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n, \qquad (*)$$
(para $n \geq k$) onde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ($c_k \neq 0$) são constantes e $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão.
- A equação (*) diz-se homogénea quando $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sucessão nula.
- A equação homogénea associada a (*) é a equação
$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}.$$

Exemplo

- $x_n = 3x_{n-1} + 2x_{n-2} + 3n$ é uma equação de recorrência linear (não homogénea) de ordem 2.

Definição

- Uma equação de recorrência linear (de coeficientes constantes) de ordem k é uma equação da forma

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n, \qquad (*)$$

(para $n \geq k$) onde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ($c_k \neq 0$) são constantes e $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão.

- A equação (*) diz-se homogénea quando $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sucessão nula.
- A equação homogénea associada a (*) é a equação

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}.$$

Exemplo

- $x_n = 3x_{n-1} + 2x_{n-2} + 3n$ é uma equação de recorrência linear (não homogénea) de ordem 2.
- $x_n = 3x_{n-1} + 2x_{n-2}$ é a equação homogénea associada.

Exemplo

- A equação da recorrência $x_{n+1} = (n+1)x_n$ é linear e homogénea mas não tem coeficientes constantes.

Exemplo

- A equação da recorrência $x_{n+1} = (n+1)x_n$ é linear e homogénea mas não tem coeficientes constantes.
- A equação $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ $(n \geq 2)$ é uma equação de recorrência linear homogénea (de coeficientes constantes).

Exemplo

- A equação da recorrência $x_{n+1} = (n+1)x_n$ é linear e homogénea mas não tem coeficientes constantes.
- A equação $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ $(n \geq 2)$ é uma equação de recorrência linear homogénea (de coeficientes constantes).

  Verificamos que a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definida por*

  $$a_n = 3n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

  é solução desta equação.

Exemplo

- A equação da recorrência $x_{n+1} = (n+1)x_n$ é linear e homogénea mas não tem coeficientes constantes.
- A equação $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ $(n \geq 2)$ é uma equação de recorrência linear homogénea (de coeficientes constantes).

  Verificamos que a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

  $$a_n = 3n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

  é solução desta equação. De facto, para cada $n \geq 2$,

  $$2a_{n-1} - a_{n-2} = 2(3(n-1)) - 3(n-2) = \\ 3(2(n-1) - (n-2)) = 3n = a_n.$$

Exemplo

- A equação da recorrência $x_{n+1} = (n+1)x_n$ é linear e homogénea mas não tem coeficientes constantes.
- A equação $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ $(n \geq 2)$ é uma equação de recorrência linear homogénea (de coeficientes constantes).

  Verificamos que a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

  $$a_n = 3n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

  é solução desta equação. De facto, para cada $n \geq 2$,

  $$2a_{n-1} - a_{n-2} = 2(3(n-1)) - 3(n-2) = \\ 3(2(n-1) - (n-2)) = 3n = a_n.$$

  Um cálculo semelhante revela que as sucessões

  $$(0)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (1)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (5n+2)_{n\in\mathbb{N}}$$

  são soluções da equação acima.

Teorema

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \tag{*}$$

obtém-se como

$\boxed{\text{uma solução particular de (*).}}$ + $\boxed{\text{todas as soluções da equação homogénea associada à equação (*)}}$.

Teorema

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \qquad (*)$$

obtém-se como

$\boxed{\text{uma solução particular de (*).}}$ + $\boxed{\text{todas as soluções da equação homogénea associada à equação (*)}}$.

Nota

Um resultado deste tipo já conhecemos de

- ALGA $\rightsquigarrow$ resolver equações lineares;
- Cálculo II $\rightsquigarrow$ resolver equações diferenciais lineares.

Teorema

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \qquad (*)$$

obtém-se como

$\boxed{\text{uma solução particular de (*).}}$ + $\boxed{\text{todas as soluções da equação homogénea associada à equação (*)}}$.

Demonstração.

- Se b é uma solução de (*) e a é uma solução da equação homogénea associada, então $a + b$ é uma solução de (*).

Teorema

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \tag{*}$$

obtém-se como

$$\boxed{\text{uma solução particular de (*).}} + \boxed{\text{todas as soluções da equação homogénea associada à equação (*)}}.$$

Demonstração.

- Se b é uma solução de (*) e a é uma solução da equação homogénea associada, então $a + b$ é uma solução de (*).
- Se b_1 e b_0 são soluções de (*), então $b_1 - b_0$ é uma solução da equação homogénea associada, e $b_1 = b_0 + (b_1 - b_0)$. □

3. Equações de recorrência lineares homogéneas

Considerações iniciais

Seja

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} \tag{*}$$

($c_k \neq 0$) uma equação de recorrência linear homogénea de ordem k.

Considerações iniciais

Seja

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} \tag{*}$$

($c_k \neq 0$) uma equação de recorrência linear homogénea de ordem k.

- O conjunto das soluções de (*) é um subespaço do espaço vetorial de todas as sucessões (reais ou complexos).

Considerações iniciais

Seja

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} \tag{*}$$

($c_k \neq 0$) uma equação de recorrência linear homogénea de ordem k.

- O conjunto das soluções de (*) é um subespaço do espaço vetorial de todas as sucessões (reais ou complexos).
- Cada solução $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de (*) é completamente determinada pelos primeiros k termos. De facto,

  $$\begin{aligned} \mathbb{C}^k \text{ ou } \mathbb{R}^k &\longrightarrow \{\text{as soluções de } (*)\} \\ (a_0, \dots, a_{k-1}) &\longmapsto (a_0, \dots, a_{k-1}, c_1 a_{k-1} + \cdots + c_k a_0, \dots) \end{aligned}$$

  é um isomorfismo;

Considerações iniciais

Seja

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} \tag{*}$$

($c_k \neq 0$) uma equação de recorrência linear homogénea de ordem k.

- O conjunto das soluções de (*) é um subespaço do espaço vetorial de todas as sucessões (reais ou complexos).
- Cada solução $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de (*) é completamente determinada pelos primeiros k termos. De facto,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^k \text{ ou } \mathbb{R}^k &\longrightarrow \{\text{as soluções de } (*)\} \\ (a_0, \dots, a_{k-1}) &\longmapsto (a_0, \dots, a_{k-1}, c_1 a_{k-1} + \cdots + c_k a_0, \dots) \end{aligned}$$

  é um isomorfismo; logo: $\dim\{\text{as soluções de } (*)\} = k$.

Considerações iniciais

Seja

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} \tag{*}$$

($c_k \neq 0$) uma equação de recorrência linear homogénea de ordem k.

- O conjunto das soluções de (*) é um subespaço do espaço vetorial de todas as sucessões (reais ou complexos).
- Cada solução $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de (*) é completamente determinada pelos primeiros k termos. De facto,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^k \text{ ou } \mathbb{R}^k &\longrightarrow \{\text{as soluções de } (*)\} \\ (a_0, \dots, a_{k-1}) &\longmapsto (a_0, \dots, a_{k-1}, c_1 a_{k-1} + \cdots + c_k a_0, \dots) \end{aligned}$$

  é um isomorfismo; logo: $\dim\{\text{as soluções de } (*)\} = k$.

Conclusão

Para descrever todas as soluções de (*), procuramos uma sequência de k soluções de (*) linearmente independente.

Uma tentativa (mais ou menos) «esperta»

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1,\ c_k \neq 0). \tag{*}$$

Uma tentativa (mais ou menos) «esperta»

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1,\ c_k \neq 0). \tag{*}$$

Para uma sucessão da forma $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, para quais valores de q obtemos uma soluções?

Uma tentativa (mais ou menos) «esperta»

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \dots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1,\ c_k \neq 0). \tag{*}$$

Para uma sucessão da forma $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, para quais valores de q obtemos uma soluções? Seguramente não para $q = 0$,

Uma tentativa (mais ou menos) «esperta»

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1,\ c_k \neq 0). \tag{*}$$

Para uma sucessão da forma $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$, para quais valores de q obtemos uma soluções? Seguramente não para $q = 0$, e para $q \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= q^n - c_1 q^{n-1} - c_2 q^{n-2} - \cdots - c_k q^{n-k} \\ &= q^{n-k}(q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k), \end{aligned}$$

Uma tentativa (mais ou menos) «esperta»

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1,\ c_k \neq 0). \tag{*}$$

Para uma sucessão da forma $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, para quais valores de q obtemos uma soluções? Seguramente não para $q = 0$, e para $q \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= q^n - c_1 q^{n-1} - c_2 q^{n-2} - \cdots - c_k q^{n-k} \\ &= q^{n-k}(q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k), \end{aligned}$$

portanto, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é solução de (*) se e somente se

$$0 = \underbrace{q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k.}_{\text{polinómio em } q \text{ de grau } k}$$

Uma tentativa (mais ou menos) «esperta»

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \dots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1,\ c_k \neq 0). \tag{*}$$

Para uma sucessão da forma $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, para quais valores de q obtemos uma soluções? Seguramente não para $q = 0$, e para $q \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= q^n - c_1 q^{n-1} - c_2 q^{n-2} - \dots - c_k q^{n-k} \\ &= q^{n-k}(q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \dots - c_k), \end{aligned}$$

portanto, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é solução de (*) se e somente se

$$0 = \underbrace{q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \dots - c_k.}_{\text{polinómio em } q \text{ de grau } k}$$

A equação acima diz-se equação caraterística de (*).

Exemplo

Procuramos todas as solução da equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2). \tag{*}$$

Exemplo

Procuramos todas as solução da equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2). \tag{*}$$

A equação caraterística é

$$0 = q^2 - q - 2 =$$

Exemplo

Procuramos todas as solução da equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2). \qquad (*)$$

A equação caraterística é

$$0 = q^2 - q - 2 =$$

Nota: As raízes inteiras de um polinómio da forma

$$q^n + \cdots + c$$

dividem c (e as outras raízes são irracionais).

Exemplo

Procuramos todas as solução da equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2). \tag{*}$$

A equação caraterística é

$$0 = q^2 - q - 2 = (q - 2)$$

Nota: As raízes inteiras de um polinómio da forma

$$q^n + \cdots + c$$

dividem c (e as outras raízes são irracionais).

Exemplo

Procuramos todas as solução da equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2). \tag{*}$$

A equação caraterística é

$$0 = q^2 - q - 2 = (q-2)(q+1),$$

Nota: As raízes inteiras de um polinómio da forma

$$q^n + \cdots + c$$

dividem c (e as outras raízes são irracionais).

Exemplo

Procuramos todas as solução da equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2). \tag{*}$$

A equação caraterística é

$$0 = q^2 - q - 2 = (q-2)(q+1),$$

com as soluções $q_0 = 2$ e $q_1 = -1$.

Exemplo

Procuramos todas as solução da equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2). \tag{*}$$

A equação caraterística é

$$0 = q^2 - q - 2 = (q - 2)(q + 1),$$

com as soluções $q_0 = 2$ e $q_1 = -1$. Verifica-se que as sucessões

$$(2^n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{e} \quad ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

são linearmente independentes (em breve veremos que são vetores próprios associados a valores próprios diferentes); portanto,

Exemplo

Procuramos todas as solução da equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2). \tag{*}$$

A equação caraterística é

$$0 = q^2 - q - 2 = (q-2)(q+1),$$

com as soluções $q_0 = 2$ e $q_1 = -1$. Verifica-se que as sucessões

$$(2^n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{e} \quad ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

são linearmente independentes (em breve veremos que são vetores próprios associados a valores próprios diferentes); portanto, todas as soluções (reais) da equação (*) tem a forma

$$(\alpha 2^n + \beta(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

A solução geral:

$$(\alpha 2^n + \beta(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, procuramos a solução da equação de recorrência

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

que satisfaz também $x_0 = 5$ *e* $x_1 = 4$ (o número de condições iniciais coincide com a ordem da equação);

Exemplo

A solução geral:

$$(\alpha 2^n + \beta(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, procuramos a solução da equação de recorrência

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

que satisfaz também $x_0 = 5$ *e* $x_1 = 4$ (o número de condições iniciais coincide com a ordem da equação); ou seja, aquele solução com

$$\alpha + \beta = 5 \;\; (\text{o caso } n = 0) \quad \text{e} \quad 2\alpha - \beta = 4 \;\; (\text{o caso } n = 1).$$

Exemplo

A solução geral:

$$(\alpha 2^n + \beta(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, procuramos a solução da equação de recorrência

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

que satisfaz também $x_0 = 5$ *e* $x_1 = 4$ (o número de condições iniciais coincide com a ordem da equação); ou seja, aquele solução com

$$\alpha + \beta = 5 \;\text{ (o caso } n = 0) \quad \text{e} \quad 2\alpha - \beta = 4 \;\text{ (o caso } n = 1).$$

Resolvendo este sistema de duas equações lineares dá $\alpha = 3$ e $\beta = 2$.

Exemplo

A solução geral:

$$(\alpha 2^n + \beta(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, procuramos a solução da equação de recorrência

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

que satisfaz também $x_0 = 5$ *e* $x_1 = 4$ (o número de condições iniciais coincide com a ordem da equação); ou seja, aquele solução com

$$\alpha + \beta = 5 \;\text{ (o caso } n = 0) \quad \text{e} \quad 2\alpha - \beta = 4 \;\text{ (o caso } n = 1).$$

Resolvendo este sistema de duas equações lineares dá $\alpha = 3$ e $\beta = 2$.

Assim, a solução é a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com

$$a_n = 3 \cdot 2^n + 2 \cdot (-1)^n, \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

Corolário

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1,\ c_k \neq 0). \tag{*}$$

Se a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k$$

de (*) têm as k soluções (diferentes) q_1, q_2, ..., q_k, então as soluções de (*) são precisamente as combinações lineares das sucessões (necessariamente linearmente independente) $(q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$, ..., $(q_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$; ou seja, as sucessões da forma

$$(\alpha_1 q_1^n + \alpha_2 q_2^n + \cdots + \alpha_k q_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

com constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Exemplo

Recordamos que os números de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazem as equações

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Exemplo

Recordamos que os números de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazem as equações

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Para resolver a equação de recorrência linear homogénea

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

consideremos a equação $q^2 - q - 1 = 0$ de segundo grau que tem as duas soluções:

$$\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Exemplo

Recordamos que os números de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazem as equações

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Para resolver a equação de recorrência linear homogénea

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

consideremos a equação $q^2 - q - 1 = 0$ de segundo grau que tem as duas soluções:

$$\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Portanto, todas as soluções da equação homogénea são combinações lineares das sucessões $(\phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\psi^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Em particular,

$$(F_n)_{n\in\mathbb{N}} = \alpha(\psi^n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(\phi^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Exemplo

Note-se que $\phi \cdot \psi = -1$, $\phi + \psi = 1$ e $\phi - \psi = \sqrt{5}$.

Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos

$$1 = \alpha + \beta, \qquad 1 = \alpha \overbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}^{\psi} + \beta \overbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}^{\phi}.$$

Exemplo

Note-se que $\phi \cdot \psi = \text{-}1$, $\phi + \psi = 1$ e $\phi - \psi = \sqrt{5}$.

Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos

$$1 = \alpha + \beta, \qquad 1 = \alpha \overbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}^{\psi} + \beta \overbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}^{\phi}.$$

Fazendo redução com a correspondente matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \psi & \phi & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \phi - \psi & (1-\psi) \end{bmatrix}$$

produz $\beta = \frac{1-\psi}{\phi-\psi} = \frac{\phi}{\sqrt{5}}$ e $\alpha = 1 - \beta = \text{-}\frac{\psi}{\sqrt{5}}$.

Exemplo

Note-se que $\phi \cdot \psi = -1$, $\phi + \psi = 1$ e $\phi - \psi = \sqrt{5}$.

Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos

$$1 = \alpha + \beta, \qquad 1 = \alpha \overbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}^{\psi} + \beta \overbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}^{\phi}.$$

Fazendo redução com a correspondente matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \psi & \phi & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \phi - \psi & (1 - \psi) \end{bmatrix}$$

produz $\beta = \frac{1-\psi}{\phi-\psi} = \frac{\phi}{\sqrt{5}}$ e $\alpha = 1 - \beta = -\frac{\psi}{\sqrt{5}}$. Portanto, obtém-se a fórmula de Binet[a]:

$$F_n = \frac{\phi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

[a] Jacques Philippe Marie Binet (1786 – 1856), matemático francês.

Nota

$\phi = 1.6180339887498949\ldots$ é o número de ouro, e
$\psi = -\frac{1}{\phi} = 1 - \phi = -(\phi - 1) = -0.61803988749894\ldots$

Nota

$\phi = 1.618033988749894\ldots$ é o número de ouro, e
$\psi = -\frac{1}{\phi} = 1 - \phi = -(\phi - 1) = -0.61803988749894\ldots$

Dividir retas

Dividimos uma reta

em duas partes (com comprimentos $a \geq b > 0$) tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

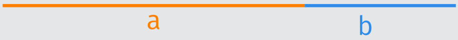
Sobre o número de ouro

Nota

$\phi = 1.618033988749894\ldots$ é o número de ouro, e
$\psi = -\frac{1}{\phi} = 1 - \phi = -(\phi - 1) = -0.61803988749894\ldots$

Dividir retas

Dividimos uma reta



em duas partes (com comprimentos $a \geq b > 0$) tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Denotamos a razão $\frac{a}{b}$ por ϕ, então temos

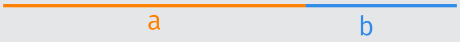
$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi};$$

Nota

$\phi = 1.618033988749894\ldots$ é o número de ouro, e
$\psi = -\frac{1}{\phi} = 1 - \phi = -(\phi - 1) = -0.61803988749894\ldots$

Dividir retas

Dividimos uma reta



em duas partes (com comprimentos $a \geq b > 0$) tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Denotamos a razão $\frac{a}{b}$ por ϕ, então temos

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi};$$

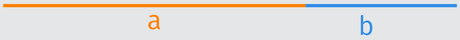
ou seja, $\phi^2 - \phi - 1 = 0$,

Nota

$\phi = 1.618033988749894\ldots$ é o número de ouro, e
$\psi = -\frac{1}{\phi} = 1 - \phi = -(\phi - 1) = -0.61803988749894\ldots$

Dividir retas

Dividimos uma reta



em duas partes (com comprimentos $a \geq b > 0$) tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Denotamos a razão $\frac{a}{b}$ por ϕ, então temos

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi};$$

ou seja, $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, o que implica $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (a única raiz positiva).

Nota

Utilizando a fórmula de Binet:

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{\phi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\phi^n - \psi^n} = \phi \, \frac{1 - (\frac{\psi}{\phi})^{n+1}}{1 - (\frac{\psi}{\phi})^n} \longrightarrow \phi$$

para $n \to \infty$ porque $|\frac{\psi}{\phi}| < 1$.

... de ordem k com k raízes diferentes

Consideremos $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$.

Exemplo

- Consideremos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.

... de ordem k com k raízes diferentes

Consideremos $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$.

- Obter a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k$$

Exemplo

- Consideremos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Equação caraterística: $0 = q^3$

... de ordem k com k raízes diferentes

Consideremos $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$.

- Obter a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k$$

Exemplo

- Consideremos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Equação caraterística: $0 = q^3 + 2q^2 - q - 2$

. . . de ordem k com k raízes diferentes

Consideremos $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$.

- Obter a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k$$

- e obter as soluções da equação caraterística:

$$\cdots = (q - q_1)(q - q_2) \ldots (q - q_k).$$

Exemplo

- Consideremos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Equação caraterística: $0 = q^3 + 2q^2 - q - 2 = (q -$

. . . de ordem k com k raízes diferentes

Consideremos $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$.

- Obter a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k$$

- e obter as soluções da equação caraterística:

$$\cdots = (q - q_1)(q - q_2) \dots (q - q_k).$$

Exemplo

- Consideremos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Equação caraterística: $0 = q^3 + 2q^2 - q - 2 = (q - 1)(q$

. . . de ordem k com k raízes diferentes

Consideremos $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$.

- Obter a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k$$

- e obter as soluções da equação caraterística:

$$\cdots = (q - q_1)(q - q_2) \ldots (q - q_k).$$

Exemplo

- Consideremos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Equação caraterística: $0 = q^3 + 2q^2 - q - 2 = (q-1)(q+1)(q$

. . . de ordem k com k raízes diferentes

Consideremos $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$.

- Obter a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k$$

- e obter as soluções da equação caraterística:

$$\cdots = (q - q_1)(q - q_2) \ldots (q - q_k).$$

Exemplo

- Consideremos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Equação caraterística: $0 = q^3 + 2q^2 - q - 2 = (q - 1)(q + 1)(q + 2)$.

. . . de ordem k com k raízes diferentes

Consideremos $x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \cdots + c_kx_{n-k}$.

- Obter a equação caraterística
$$0 = q^k - c_1q^{k-1} - c_2q^{k-2} - \cdots - c_k$$
- e obter as soluções da equação caraterística:
$$\cdots = (q - q_1)(q - q_2) \dots (q - q_k).$$
- Se obtemos k soluções diferentes, então todas as soluções da equação de recorrência tem a forma
$$(C_1q_1^n + C_2q_2^n + \cdots + C_kq_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$$
com constantes $C_1, C_2, \dots, C_k$.

Exemplo

- Consideremos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Equação caraterística: $0 = q^3 + 2q^2 - q - 2 = (q - 1)(q + 1)(q + 2)$.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2 = (q$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2 = (q - 1)(q$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2 = (q-1)(q+2)(q$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2 = (q-1)(q+2)(q-1)$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2 = (q-1)(q+2)(q-1) = (q-1)^2(q+2).$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2 = (q-1)(q+2)(q-1) = (q-1)^2(q+2).$$

E agora? Temos apenas as duas soluções linearmente independente

$$(1^n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{e} \quad ((\text{-}2)^n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \ldots$$

Teorema

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} \qquad (k \geq 1,\ c_k \neq 0) \qquad (*)$$

com a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \ldots (q - q_l)^{n_l}$$

com $n_1 + \cdots + n_l = k$ *e* $n_i > 0$.

Teorema

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} \qquad (k \geq 1,\ c_k \neq 0) \qquad (*)$$

com a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \ldots (q - q_l)^{n_l}$$

com $n_1 + \cdots + n_l = k$ *e* $n_i > 0$. *Então, as soluções da equação (*) são precisamente as combinações lineares das* k *sucessões*

$$\begin{aligned}
&(q_1^n)_{n\in\mathbb{N}},\\
&(q_2^n)_{n\in\mathbb{N}},\\
&\qquad\ldots\\
&(q_l^n)_{n\in\mathbb{N}},
\end{aligned}$$

Teorema

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} \qquad (k \geq 1,\ c_k \neq 0) \qquad (*)$$

com a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \ldots (q - q_l)^{n_l}$$

com $n_1 + \cdots + n_l = k$ e $n_i > 0$. Então, as soluções da equação (*) são precisamente as combinações lineares das k sucessões

$$\begin{array}{ll} (q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n \cdot q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, \\ (q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n \cdot q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, \\ \ldots & \\ (q_l^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n \cdot q_l^n)_{n\in\mathbb{N}}, \end{array}$$

Teorema

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} \qquad (k \geq 1,\ c_k \neq 0) \qquad (*)$$

com a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \ldots (q - q_l)^{n_l}$$

com $n_1 + \cdots + n_l = k$ e $n_i > 0$. Então, as soluções da equação (*) são precisamente as combinações lineares das k sucessões

$$\begin{array}{lllll}
(q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n \cdot q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n^2 \cdot q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, & \ldots & (n^{n_1-1} \cdot q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, \\
(q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n \cdot q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n^2 \cdot q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, & \ldots & (n^{n_2-1} \cdot q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, \\
\quad\ldots & & & & \\
(q_l^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n \cdot q_l^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n^2 \cdot q_l^n)_{n\in\mathbb{N}}, & \ldots & (n^{n_l-1} \cdot q_l^n)_{n\in\mathbb{N}}.
\end{array}$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$x_n = 5x_{n-1} - 8x_{n-2} + 4x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

com os valores iniciais $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ *e* $x_2 = 18$.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$x_n = 5x_{n-1} - 8x_{n-2} + 4x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

com os valores iniciais $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ *e* $x_2 = 18$.

A equação caraterística é

$$0 = q^3 - 5q^2 + 8q - 4 = (q-1)(q-2)(q-2) = (q-1)(q-2)^2;$$

portanto, as solução da equação de recorrência são as sucessões da forma (com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$)

$$(\alpha 1^n + \beta 2^n + \gamma n 2^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$x_n = 5x_{n-1} - 8x_{n-2} + 4x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

com os valores iniciais $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ *e* $x_2 = 18$.

A equação caraterística é

$$0 = q^3 - 5q^2 + 8q - 4 = (q-1)(q-2)(q-2) = (q-1)(q-2)^2;$$

portanto, as solução da equação de recorrência são as sucessões da forma (com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$)

$$(\alpha 1^n + \beta 2^n + \gamma n 2^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Considerando os valores iniciais, procuramos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha + \beta = 0, \quad \alpha + 2\beta + 2\gamma = 4, \quad \alpha + 4\beta + 8\gamma = 18.$$

Exemplo

Utilizando a primeira equação, o sistema

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0, \\ \alpha + 2\beta + 2\gamma &= 4, \\ \alpha + 4\beta + 8\gamma &= 18 \end{aligned}$$

reduz ($\alpha = -\beta$) ao sistema

$$\begin{aligned} \beta + 2\gamma &= 4, \\ 3\beta + 8\gamma &= 18; \end{aligned}$$

cuja solução é $\gamma = 3$ e $\beta = -2$, logo $\alpha = 2$.

Exemplo

Utilizando a primeira equação, o sistema

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0, \\ \alpha + 2\beta + 2\gamma &= 4, \\ \alpha + 4\beta + 8\gamma &= 18 \end{aligned}$$

reduz ($\alpha = -\beta$) ao sistema

$$\begin{aligned} \beta + 2\gamma &= 4, \\ 3\beta + 8\gamma &= 18; \end{aligned}$$

cuja solução é $\gamma = 3$ e $\beta = -2$, logo $\alpha = 2$. Assim, a solução da equação de recorrência com os valores iniciais é a sucessão

$$(2 - 2 \cdot 2^n + 3 \cdot n \cdot 2^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Preparação

Consideremos a função linear S «esquecer o primeiro termo» definida no espaço das sucessões por

$$S((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Preparação

Consideremos a função linear S «esquecer o primeiro termo» definida no espaço das sucessões por

$$S((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Então, uma sucessão $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é solução da equação de recorrência

$$0 = x_n - c_1x_{n-1} - c_2x_{n-2} - \cdots - c_kx_{n-k}$$

se e somente se

$$\begin{aligned}\text{sucessão nula} &= S^n(a) - c_1S^{n-1}(a) - \cdots - c_kS^{n-k}(a)\\ &= (S^n - c_1S^{n-1} - \cdots - c_kS^{n-k})(a)\\ &= S^{n-k}\circ(S^k - c_1S^{k-1} - \cdots - c_k\,\mathrm{id})(a),\end{aligned}$$

para cada $n \geq k$.

Preparação

Consideremos a função linear S «esquecer o primeiro termo» definida no espaço das sucessões por

$$S((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Então, uma sucessão $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é solução da equação de recorrência

$$0 = x_n - c_1x_{n-1} - c_2x_{n-2} - \cdots - c_kx_{n-k}$$

se e somente se

$$\begin{aligned}
\text{sucessão nula} &= S^n(a) - c_1S^{n-1}(a) - \cdots - c_kS^{n-k}(a)\\
&= (S^n - c_1S^{n-1} - \cdots - c_kS^{n-k})(a)\\
&= S^{n-k} \circ (S^k - c_1S^{k-1} - \cdots - c_k\,\mathrm{id})(a),
\end{aligned}$$

para cada $n \geq k$. Veremos agora quais sucessões a função linear

$$S^k - c_1S^{k-1} - \cdots - c_k\,\mathrm{id}$$

anula.

Decompor a função

Seja (com $n_1 + \cdots + n_l = k$, $n_i > 0$)

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \ldots (q - q_k)^{n_k}$$

a equação caraterística,

Decompor a função

Seja (com $n_1 + \cdots + n_l = k$, $n_i > 0$)

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \dots (q - q_k)^{n_k}$$

a equação caraterística, então

$$S^k - c_1 S^{k-1} - \cdots - c_k \,\mathrm{id} = (S - q_1 \,\mathrm{id})^{n_1} \circ \cdots \circ (S - q_k \,\mathrm{id})^{n_k}.$$

Decompor a função

Seja (com $n_1 + \cdots + n_l = k$, $n_i > 0$)

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \ldots (q - q_k)^{n_k}$$

a equação caraterística, então

$$S^k - c_1 S^{k-1} - \cdots - c_k \operatorname{id} = (S - q_1 \operatorname{id})^{n_1} \circ \cdots \circ (S - q_k \operatorname{id})^{n_k}.$$

«A chave» da prova do teorema é o seguinte lema.

Decompor a função

Seja (com $n_1 + \cdots + n_l = k$, $n_i > 0$)

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \dots (q - q_k)^{n_k}$$

a equação caraterística, então

$$S^k - c_1 S^{k-1} - \cdots - c_k \operatorname{id} = (S - q_1 \operatorname{id})^{n_1} \circ \cdots \circ (S - q_k \operatorname{id})^{n_k}.$$

«A chave» da prova do teorema é o seguinte lema.

Lema

Para $q \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, a função linear $(S - q \operatorname{id})^m$ anula as sucessões

$$(q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (n \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (n^2 \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \dots \qquad (n^{m-1} \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Lema

Para $q \in \mathbb{R}$ *e* $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, *a função linear* $(S - q\,\mathrm{id})^m$ *anula as sucessões*

$$s_1 = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad s_2 = (n \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \dots \qquad s_m = (n^{m-1} \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Lema

Para $q \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, a função linear $(S - q\,\mathrm{id})^m$ anula as sucessões

$$s_1 = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad s_2 = (n \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \dots \qquad s_m = (n^{m-1} \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Demonstração.

Para $m = 1$: $S((q^n)_{n\in\mathbb{N}}) = (q^{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = q(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$; ou seja

$$(S - q\,\mathrm{id})(s_1) = \text{a sucessão nula.}$$

Nota: Portanto, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um vetor próprio de S associado ao valor próprio q.

Lema

Para $q \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, a função linear $(S - q\,\mathrm{id})^m$ anula as sucessões

$$s_1 = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad s_2 = (n \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \dots \qquad s_m = (n^{m-1} \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Demonstração.

Seja agora $m > 1$ e suponhamos que $(S - q\,\mathrm{id})^{m-1}$ anula $s_1, \dots, s_{m-1}$. Logo, $(S - q\,\mathrm{id})^m$ também anula $s_1, \dots, s_{m-1}$.

Lema

Para $q \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, a função linear $(S - q\,\mathrm{id})^m$ anula as sucessões

$$s_1 = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad s_2 = (n \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \dots \qquad s_m = (n^{m-1} \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Demonstração.

Seja agora $m > 1$ e suponhamos que $(S - q\,\mathrm{id})^{m-1}$ anula $s_1, \dots, s_{m-1}$. Logo, $(S - q\,\mathrm{id})^m$ também anula $s_1, \dots, s_{m-1}$. Calculamos primeiro, para cada $n \in \mathbb{N}$, o termo n de $(S - q\,\mathrm{id})(s_m)$:

$$\begin{aligned} (n+1)^{m-1} \cdot q^{n+1} - n^{m-1}q^{n+1} &= \left(\sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} \cdot n^i \cdot q^{n+1}\right) - n^{m-1}q^{n+1} \\ &= \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{m-2} q \cdot \binom{m-1}{i} \cdot n^i \cdot q^n\right)}_{\text{combinação linear do termo } n \text{ de } s_1,\dots,s_{m-1}} ; \end{aligned}$$

Lema

Para $q \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, a função linear $(S - q\,\mathrm{id})^m$ anula as sucessões

$$s_1 = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad s_2 = (n \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \dots \qquad s_m = (n^{m-1} \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Demonstração.

Seja agora $m > 1$ e suponhamos que $(S - q\,\mathrm{id})^{m-1}$ anula $s_1, \dots, s_{m-1}$. Logo, $(S - q\,\mathrm{id})^m$ também anula $s_1, \dots, s_{m-1}$. Calculamos primeiro, para cada $n \in \mathbb{N}$, o termo n de $(S - q\,\mathrm{id})(s_m)$:

$$\begin{aligned}(n+1)^{m-1} \cdot q^{n+1} - n^{m-1}q^{n+1} &= \left(\sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} \cdot n^i \cdot q^{n+1}\right) - n^{m-1}q^{n+1} \\ &= \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{m-2} q \cdot \binom{m-1}{i} \cdot n^i \cdot q^n\right)}_{\text{combinação linear do termo } n \text{ de } s_1,\dots,s_{m-1}} \quad ;\end{aligned}$$

Logo, $(S - q\,\mathrm{id})(s_m) = \alpha_1 s_1 + \dots \alpha_{m-1} s_{m-1}$ e por isso

$$(S - q\,\mathrm{id})^m(s_m) = \text{a sucessão nula.}$$

□

Um par de raízes complexas

Suponhamos que o polinómio caraterístico de uma equação de recorrência linear homogénea tem as raízes complexas

$$z = a + ib \qquad \text{e} \qquad \bar{z} = a - ib.$$

Um par de raízes complexas

Suponhamos que o polinómio caraterístico de uma equação de recorrência linear homogénea tem as raízes complexas

$$z = a + ib \qquad \text{e} \qquad \bar{z} = a - ib.$$

Portanto, obtemos as duas soluções (da equação de recorrência):

$$a = (z^n)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$b = (\bar{z}^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Um par de raízes complexas

Suponhamos que o polinómio caraterístico de uma equação de recorrência linear homogénea tem as raízes complexas

$$z = a + ib \qquad \text{e} \qquad \bar{z} = a - ib.$$

Portanto, obtemos as duas soluções (da equação de recorrência):

$$a = (z^n)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$b = (\bar{z}^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

- $z = a + ib = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$

  com $r = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ e $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ (se $a \neq 0$).

Um par de raízes complexas

Suponhamos que o polinómio caraterístico de uma equação de recorrência linear homogénea tem as raízes complexas

$$z = a + ib \qquad \text{e} \qquad \bar{z} = a - ib.$$

Portanto, obtemos as duas soluções (da equação de recorrência):

$$\begin{aligned} a &= (z^n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n(\cos(\varphi) + i\,\mathrm{sen}(\varphi))^n)_{n\in\mathbb{N}}, \\ b &= (\bar{z}^n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n(\cos(\varphi) - i\,\mathrm{sen}(\varphi))^n)_{n\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

- $z = a + ib = r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$

  com $r = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ e $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ (se $a \neq 0$).

Um par de raízes complexas

Suponhamos que o polinómio caraterístico de uma equação de recorrência linear homogénea tem as raízes complexas

$$z = a + ib \qquad \text{e} \qquad \bar{z} = a - ib.$$

Portanto, obtemos as duas soluções (da equação de recorrência):

$$a = (z^n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n(\cos(\varphi) + i\,\mathrm{sen}(\varphi))^n)_{n\in\mathbb{N}},$$
$$b = (\bar{z}^n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n(\cos(\varphi) - i\,\mathrm{sen}(\varphi))^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

- $z = a + ib = r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$

  com $r = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ e $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ (se $a \neq 0$).
- $(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\,\mathrm{sen}(n\varphi)$.

Abraham de Moivre (1667 – 1754), matemático francês.

Um par de raízes complexas

Suponhamos que o polinómio caraterístico de uma equação de recorrência linear homogénea tem as raízes complexas

$$z = a + ib \qquad \text{e} \qquad \bar{z} = a - ib.$$

Portanto, obtemos as duas soluções (da equação de recorrência):

$$a = (z^n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n(\cos(n\varphi) + i\,\mathrm{sen}(n\varphi)))_{n\in\mathbb{N}},$$
$$b = (\bar{z}^n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n(\cos(n\varphi) - i\,\mathrm{sen}(n\varphi)))_{n\in\mathbb{N}}.$$

- $z = a + ib = r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$

  com $r = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ e $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ (se $a \neq 0$).
- $(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\,\mathrm{sen}(n\varphi)$.

Abraham de Moivre (1667 – 1754), matemático francês.

Um par de raízes complexas

Suponhamos que o polinómio caraterístico de uma equação de recorrência linear homogénea tem as raízes complexas

$$z = a + ib \qquad \text{e} \qquad \bar{z} = a - ib.$$

Portanto, obtemos as duas soluções (da equação de recorrência):

$$a = (z^n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n(\cos(n\varphi) + i\,\mathrm{sen}(n\varphi)))_{n\in\mathbb{N}},$$
$$b = (\bar{z}^n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n(\cos(n\varphi) - i\,\mathrm{sen}(n\varphi)))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Assim, obtemos as soluções (linearmente independentes)

$$\frac{a+b}{2} = (r^n\cos(n\varphi))_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{e} \quad \frac{a-b}{2i} = (r^n\,\mathrm{sen}(n\varphi))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Um par de raízes complexas

Suponhamos que o polinómio caraterístico de uma equação de recorrência linear homogénea tem as raízes complexas

$$z = a + ib \qquad \text{e} \qquad \bar{z} = a - ib.$$

Portanto, obtemos as duas soluções (da equação de recorrência):

$$a = (z^n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n(\cos(n\varphi) + i\,\mathrm{sen}(n\varphi)))_{n\in\mathbb{N}},$$
$$b = (\bar{z}^n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n(\cos(n\varphi) - i\,\mathrm{sen}(n\varphi)))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Assim, obtemos as soluções (linearmente independentes)

$$\frac{a+b}{2} = (r^n\cos(n\varphi))_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{e} \quad \frac{a-b}{2i} = (r^n\,\mathrm{sen}(n\varphi))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Finalmente, se z e $\bar{z}$ são raízes múltiplas, consideremos

$$\dots, (r^n n^l\cos(n\varphi))_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (r^n n^l\,\mathrm{sen}(n\varphi))_{n\in\mathbb{N}}, \dots.$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0, \quad \textit{com} \quad a_0 = 0,\, a_1 = 1.$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0, \quad \textit{com} \quad a_0 = 0,\, a_1 = 1.$$

A correspondente equação caraterística é $0 = q^2 - q + 1$,

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0, \quad \textit{com} \quad a_0 = 0,\, a_1 = 1.$$

A correspondente equação caraterística é $0 = q^2 - q + 1$, com as soluções

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0, \quad \textit{com} \quad a_0 = 0,\ a_1 = 1.$$

A correspondente equação caraterística é $0 = q^2 - q + 1$, com as soluções

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, $r = 1$ e $\tan(\varphi) = \sqrt{3}$, logo $\varphi = \frac{\pi}{3}$;

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0, \quad \textit{com} \quad a_0 = 0,\ a_1 = 1.$$

A correspondente equação caraterística é $0 = q^2 - q + 1$, com as soluções

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, $r = 1$ e $\tan(\varphi) = \sqrt{3}$, logo $\varphi = \frac{\pi}{3}$; e a solução geral é dada por

$$\left(\alpha \cos\left(\frac{n\,\pi}{3}\right) + \beta \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0, \quad \textit{com} \quad a_0 = 0,\, a_1 = 1.$$

A correspondente equação caraterística é $0 = q^2 - q + 1$, com as soluções

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, $r = 1$ e $\tan(\varphi) = \sqrt{3}$, logo $\varphi = \frac{\pi}{3}$; e a solução geral é dada por

$$\left(\alpha \cos\left(\frac{n\,\pi}{3}\right) + \beta \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Com a condição inicial $a_0 = 0$ obtemos $\alpha = 0$,

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0, \quad \textit{com} \quad a_0 = 0,\, a_1 = 1.$$

A correspondente equação caraterística é $0 = q^2 - q + 1$, com as soluções

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, $r = 1$ e $\tan(\varphi) = \sqrt{3}$, logo $\varphi = \frac{\pi}{3}$; e a solução geral é dada por

$$\left(\alpha \cos\left(\frac{n\,\pi}{3}\right) + \beta \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Com a condição inicial $a_0 = 0$ obtemos $\alpha = 0$, e com $a_1 = 1$ obtemos

$$1 = \beta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \beta\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0, \quad com \quad a_0 = 0,\ a_1 = 1.$$

A correspondente equação caraterística é $0 = q^2 - q + 1$, com as soluções

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, $r = 1$ e $\tan(\varphi) = \sqrt{3}$, logo $\varphi = \frac{\pi}{3}$; e a solução geral é dada por

$$\left(\alpha \cos\left(\frac{n\,\pi}{3}\right) + \beta \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Com a condição inicial $a_0 = 0$ obtemos $\alpha = 0$, e com $a_1 = 1$ obtemos

$$1 = \beta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \beta\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, a solução é a sucessão $\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Equações de recorrência lineares em geral

Recordamos

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \tag{*}$$

obtém-se como

$\boxed{\text{todas as soluções da equação homogénea associada à (*)}}$ +

Recordamos

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \qquad (*)$$

obtém-se como

$$\boxed{\text{todas as soluções da equação homogénea associada à (*)}} + \boxed{\text{uma solução particular de (*)}}.$$

Recordamos

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \qquad (*)$$

obtém-se como

$$\boxed{\text{todas as soluções da equação homogénea associada à } (*)} + \boxed{\text{uma solução particular de } (*)}.$$

Nota

- Já sabemos resolver a primeira questão.

Recordamos

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \dots + c_k x_{n-k} + d_n \qquad (*)$$

obtém-se como

todas as soluções da equação homogénea associada à (*)	+	uma solução particular de (*)	.

Nota

- Já sabemos resolver a primeira questão.
- Estudamos agora métodos para obter uma solução particular de (*).

Obter uma solução particular

Seja $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n$.

Obter uma solução particular

Seja $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n$.

(A) Se $d_n = c \cdot p^n$: Procuramos uma solução da forma

$$b_n = A \cdot p^n$$

($A \in \mathbb{R}$ a determinar) se p não é solução da equação caraterística

Obter uma solução particular

Seja $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n$.

(A) Se $d_n = c \cdot p^n$: Procuramos uma solução da forma

$$b_n = A \cdot p^n \qquad \text{resp.} \qquad b_n = A \cdot n^m \cdot p^n$$

($A \in \mathbb{R}$ a determinar) se p não é solução da equação caraterística (mais geral, se p é solução da equação caraterística de multiplicidade m).

Obter uma solução particular

Seja $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n$.

(A) Se $d_n = c \cdot p^n$: Procuramos uma solução da forma

$$b_n = A \cdot p^n \qquad \text{resp.} \qquad b_n = A \cdot n^m \cdot p^n$$

($A \in \mathbb{R}$ a determinar) se p não é solução da equação caraterística (mais geral, se p é solução da equação caraterística de multiplicidade m).

(B) Se $d_n =$ um polinómio em n de grau j: Procuramos uma solução da forma

$$b_n = A_0 + A_1 n + \cdots + A_j n^j \qquad (A_i \in \mathbb{R} \text{ a determinar})$$

se 1 não é solução da equação caraterística respetivamente

Obter uma solução particular

Seja $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n$.

(A) Se $d_n = c \cdot p^n$: Procuramos uma solução da forma

$$b_n = A \cdot p^n \qquad \text{resp.} \qquad b_n = A \cdot n^m \cdot p^n$$

($A \in \mathbb{R}$ a determinar) se p não é solução da equação caraterística (mais geral, se p é solução da equação caraterística de multiplicidade m).

(B) Se $d_n =$ um polinómio em n de grau j: Procuramos uma solução da forma

$$b_n = A_0 + A_1 n + \cdots + A_j n^j \qquad (A_i \in \mathbb{R} \text{ a determinar})$$

se 1 não é solução da equação caraterística respetivamente

$$b_n = (A_0 + A_1 n + \cdots + A_j n^j) \cdot n^m \quad (A_i \in \mathbb{R} \text{ a determinar})$$

se 1 é solução da equação caraterística de multiplicidade m.

Obter uma solução particular

Seja $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n$.

(A) Se $d_n = c \cdot p^n$: Procuramos uma solução da forma

$$b_n = A \cdot p^n \qquad \text{resp.} \qquad b_n = A \cdot n^m \cdot p^n$$

($A \in \mathbb{R}$ a determinar) se p não é solução da equação caraterística (mais geral, se p é solução da equação caraterística de multiplicidade m).

(B) Se $d_n =$ um polinómio em n de grau j: Procuramos uma solução da forma

$$b_n = A_0 + A_1 n + \cdots + A_j n^j \qquad (A_i \in \mathbb{R} \text{ a determinar})$$

se 1 não é solução da equação caraterística respetivamente

$$b_n = (A_0 + A_1 n + \cdots + A_j n^j) \cdot n^m \quad (A_i \in \mathbb{R} \text{ a determinar})$$

se 1 é solução da equação caraterística de multiplicidade m.

Os valores dos parâmetros A, A_i obtém-se substituindo b_n na equação de recorrência dada.

Exemplo

Vamos determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \ldots;$$

com $x_0 = 0$ *e* $x_1 = -2$.

Exemplo

Vamos determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots ;$$

com $x_0 = 0$ *e* $x_1 = -2$.

Procuramos primeiro a solução geral da equação homogénea associada, cuja equação caraterística é

Exemplo

Vamos determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots;$$

com $x_0 = 0$ *e* $x_1 = -2$.

Procuramos primeiro a solução geral da equação homogénea associada, cuja equação caraterística é

$$0 = q^2 - 3q + 2 =$$

Exemplo

Vamos determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots;$$

com $x_0 = 0$ *e* $x_1 = -2$.

Procuramos primeiro a solução geral da equação homogénea associada, cuja equação caraterística é

$$0 = q^2 - 3q + 2 = (q-2)(q-1).$$

Exemplo

Vamos determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots;$$

com $x_0 = 0$ *e* $x_1 = -2$.

Procuramos primeiro a solução geral da equação homogénea associada, cuja equação caraterística é

$$0 = q^2 - 3q + 2 = (q-2)(q-1).$$

Portanto, a solução geral da equação de recorrência homogénea é a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$a_n = \alpha \cdot 1^n + \beta \cdot 2^n = \alpha + \beta \cdot 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Exemplo

Agora procuramos uma solução de

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 2^n, \quad n = 2, 3, \ldots$$

da forma

Exemplo

Agora procuramos uma solução de

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

da forma

$$b_n = n \cdot A \cdot 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

tendo em conta que 2 é uma raiz simples de $q^2 - 3q + 2$.

Exemplo

Agora procuramos uma solução de

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

da forma

$$b_n = n \cdot A \cdot 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

tendo em conta que 2 é uma raiz simples de $q^2 - 3q + 2$.

Substituindo na equação acima, obtemos

$$An2^n - 3A(n-1)2^{n-1} + 2A(n-2)2^{n-2} = 2^n,$$

Exemplo

Agora procuramos uma solução de

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

da forma

$$b_n = n \cdot A \cdot 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

tendo em conta que 2 é uma raiz simples de $q^2 - 3q + 2$.

Substituindo na equação acima, obtemos

$$An2^n - 3A(n-1)2^{n-1} + 2A(n-2)2^{n-2} = 2^n,$$

o que é equivalente a

$$2 = 2An - 3A(n-1) + A(n-2) = A.$$

Exemplo

Agora procuramos uma solução de

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

da forma

$$b_n = n \cdot A \cdot 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

tendo em conta que 2 é uma raiz simples de $q^2 - 3q + 2$.

Substituindo na equação acima, obtemos

$$An2^n - 3A(n-1)2^{n-1} + 2A(n-2)2^{n-2} = 2^n,$$

o que é equivalente a

$$2 = 2An - 3A(n-1) + A(n-2) = A.$$

Logo, uma solução da equação de recorrência acima é $(n2^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemplo

Assim, sabemos que a solução geral da equação

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

é dada por $(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemplo

Assim, sabemos que a solução geral da equação

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

é dada por $(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Finalmente, procuramos aquele solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.

Exemplo

Assim, sabemos que a solução geral da equação

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

é dada por $(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Finalmente, procuramos aquele solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$. Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos as equações

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta + 4 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -6 &= \alpha + 2\beta \end{aligned} .$$

Exemplo

Assim, sabemos que a solução geral da equação

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \ldots$$

é dada por $(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Finalmente, procuramos aquele solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$. Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos as equações

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta + 4 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -6 &= \alpha + 2\beta \end{aligned}.$$

Subtraindo a primeira linha à segunda dá $\beta = -6$ e por isso $\alpha = 6$.

Exemplo

Assim, sabemos que a solução geral da equação

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

é dada por $(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Finalmente, procuramos aquele solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$. Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos as equações

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta + 4 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -6 &= \alpha + 2\beta \end{aligned}.$$

Subtraindo a primeira linha à segunda dá $\beta = -6$ e por isso $\alpha = 6$.

Portanto, a solução é

$$(6 - 6 \cdot 2^n + n2^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Teorema

Seja

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n^{(1)} + \cdots + d_n^{(m)} \qquad (*)$$

uma equação de recorrência linear e suponhamos que as sucessões $b^{(1)}$, $b^{(2)}, \dots, b^{(m)}$ *são soluções de*

$$\begin{aligned} x_n &= c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n^{(1)}, \\ x_n &= c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n^{(2)}, \\ &\vdots \\ x_n &= c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n^{(m)}, \end{aligned}$$

respetivamente. Então, a sucessão $b^{(1)} + \cdots + b^{(m)}$ *é uma solução de* (*).

Exemplo

Vamos agora determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + (1 + n), \quad n = 2, 3, \ldots$$

com $x_0 = 0$ *e* $x_1 = -2$.

Exemplo

Vamos agora determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + (1+n), \quad n = 2, 3, \ldots$$

com $x_0 = 0$ *e* $x_1 = -2$.

A solução geral desta equação (ignorando as condições iniciais) é da forma

$$(a_n + b_n^{(1)} + b_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$$

Exemplo

Vamos agora determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + (1+n), \quad n = 2, 3, \dots$$

com $x_0 = 0$ *e* $x_1 = -2$.

A solução geral desta equação (ignorando as condições iniciais) é da forma

$$(a_n + b_n^{(1)} + b_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$$

onde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denota a solução geral da equação homogénea associada,

Exemplo

Vamos agora determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + (1+n), \quad n = 2, 3, \dots$$

com $x_0 = 0$ *e* $x_1 = -2$.

A solução geral desta equação (ignorando as condições iniciais) é da forma

$$(a_n + b_n^{(1)} + b_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$$

onde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denota a solução geral da equação homogénea associada, $(b_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \qquad n = 2, 3, \dots,$$

Exemplo

Vamos agora determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + (1+n), \quad n = 2, 3, \dots$$

com $x_0 = 0$ *e* $x_1 = -2$.

A solução geral desta equação (ignorando as condições iniciais) é da forma

$$(a_n + b_n^{(1)} + b_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$$

onde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denota a solução geral da equação homogénea associada, $(b_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \qquad n = 2, 3, \dots,$$

e $(b_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + (1+n), \qquad n = 2, 3, \dots.$$

Exemplo

Falta determinar uma solução da equação de recorrência

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 1 + n, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Exemplo

Falta determinar uma solução da equação de recorrência

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 1 + n, \quad n = 2, 3, \dots .$$

Uma vez que $1 + n$ é um polinómio de grau 1 e 1 é raiz de multiplicidade 1 da equação característica

$$0 = q^2 - 3q + 2 = (q-2)(q-1),$$

consideremos $b_n^{(2)} = (A_0 + A_1 n)n^1 = A_0 n + A_1 n^2$.

Exemplo

Falta determinar uma solução da equação de recorrência

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 1 + n, \quad n = 2, 3, \dots .$$

Uma vez que $1 + n$ é um polinómio de grau 1 e 1 é raiz de multiplicidade 1 da equação característica

$$0 = q^2 - 3q + 2 = (q - 2)(q - 1),$$

consideremos $b_n^{(2)} = (A_0 + A_1 n)n^1 = A_0 n + A_1 n^2$. Substituindo na equação acima, obtemos $b_n^{(2)} = -\frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2$.

Exemplo

Falta determinar uma solução da equação de recorrência

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 1 + n, \quad n = 2, 3, \dots .$$

Uma vez que $1 + n$ é um polinómio de grau 1 e 1 é raiz de multiplicidade 1 da equação característica

$$0 = q^2 - 3q + 2 = (q-2)(q-1),$$

consideremos $b_n^{(2)} = (A_0 + A_1 n)n^1 = A_0 n + A_1 n^2$. Substituindo na equação acima, obtemos $b_n^{(2)} = -\frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2$.

Portanto, a solução geral da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + (1+n), \quad n = 2, 3, \dots$$

é dada por

$$(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1} - \frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2)_{n \in \mathbb{N}} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Exemplo

Finalmente, procuramos aquele solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.

Exemplo

Finalmente, procuramos aquele solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$. Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ em

$$(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1} - \frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2)_{n\in\mathbb{N}}$$

obtemos as equações

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta + 4 - \tfrac{7+1}{2} \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta \end{aligned} \;;$$

Exemplo

Finalmente, procuramos aquele solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$. Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ em

$$(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1} - \frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2)_{n\in\mathbb{N}}$$

obtemos as equações

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta + 4 - \tfrac{7+1}{2} \end{aligned} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta \end{aligned};$$

logo $\beta = -2$ e $\alpha = 2$.

Exemplo

Finalmente, procuramos aquele solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$. Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ em

$$(\alpha + \beta\, 2^n + n 2^{n+1} - \frac{7}{2} n - \frac{1}{2} n^2)_{n \in \mathbb{N}}$$

obtemos as equações

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta + 4 - \tfrac{7+1}{2} \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta \end{aligned};$$

logo $\beta = -2$ e $\alpha = 2$.

Logo, a solução da equação de recorrência dada com as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$ é

$$(2 - 2 \cdot 2^n + n 2^{n+1} - \frac{7}{2} n - \frac{1}{2} n^2)_{n \in \mathbb{N}}.$$

5. Equações de recorrência não lineares

O problema

Nesta parte consideremos equações de recorrência onde x_n não depende da forma linear dos termos $x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$.

O problema

Nesta parte consideremos equações de recorrência onde x_n não depende da forma linear dos termos $x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$. Em muitos casos podemos «linearizar» a equação utilizando um substituição adequada.

O problema

Nesta parte consideremos equações de recorrência onde x_n não depende da forma linear dos termos $x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$. Em muitos casos podemos «linearizar» a equação utilizando um substituição adequada.

Exemplo (substituição «simples»)

Consideremos a equação de recorrência não linear

$$x_n^2 = 2x_{n-1}^2 + 1 \qquad (n \geq 1),$$

com a condição inicial $x_0 = 2$*; aqui suponhamos* $x_n \geq 0$*, para todo o* $n \in \mathbb{N}$.

O problema

Nesta parte consideremos equações de recorrência onde x_n não depende da forma linear dos termos $x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$. Em muitos casos podemos «linearizar» a equação utilizando um substituição adequada.

Exemplo (substituição «simples»)

Consideremos a equação de recorrência não linear

$$x_n^2 = 2x_{n-1}^2 + 1 \qquad (n \geq 1),$$

com a condição inicial $x_0 = 2$*; aqui suponhamos* $x_n \geq 0$*, para todo o* $n \in \mathbb{N}$.

Escrevendo $y_n = x_n^2$, esta equação de recorrência não linear transforma-se na equação de recorrência linear

$$y_n = 2y_{n-1} + 1 \qquad (n \geq 1),$$

com a condição inicial $y_0 = x_0^2 = 4$.

Exemplo

$$y_n = 2y_{n-1} + 1 \qquad (n \geq 1), \qquad y_0 = 4.$$

Exemplo

$$y_n = 2y_{n-1} + 1 \qquad (n \geq 1), \qquad y_0 = 4.$$

- A solução geral da equação homogénea associada $y_n = 2y_{n-1}$ é dada por $c \cdot (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $c \in \mathbb{R}$.

Exemplo

$$y_n = 2y_{n-1} + 1 \qquad (n \geq 1), \qquad y_0 = 4.$$

- A solução geral da equação homogénea associada $y_n = 2y_{n-1}$ é dada por $c \cdot (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $c \in \mathbb{R}$.
- Como o termo «não homogéneo» é o polinómio 1 de grau zero, e como 1 não é raiz do polinómio caraterístico $q - 2$, sabemos que existe uma solução particular $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ onde $b_n = A$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Substituindo na equação produz $A = 2A + 1$, ou seja, $A = -1$.

Exemplo

$$y_n = 2y_{n-1} + 1 \qquad (n \geq 1), \qquad y_0 = 4.$$

- A solução geral da equação homogénea associada $y_n = 2y_{n-1}$ é dada por $c \cdot (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $c \in \mathbb{R}$.
- Como o termo «não homogéneo» é o polinómio 1 de grau zero, e como 1 não é raiz do polinómio caraterístico $q - 2$, sabemos que existe uma solução particular $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ onde $b_n = A$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Substituindo na equação produz $A = 2A + 1$, ou seja, $A = -1$.
- Consequentemente, as soluções desta equação de recorrência são precisamente as sucessões $(c \cdot 2^n - 1)_{n \in \mathbb{N}}$, com $c \in \mathbb{R}$.

Exemplo

$$y_n = 2y_{n-1} + 1 \qquad (n \geq 1), \qquad y_0 = 4.$$

- A solução geral da equação homogénea associada $y_n = 2y_{n-1}$ é dada por $c \cdot (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $c \in \mathbb{R}$.
- Como o termo «não homogéneo» é o polinómio 1 de grau zero, e como 1 não é raiz do polinómio caraterístico $q - 2$, sabemos que existe uma solução particular $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $b_n = A$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Substituindo na equação produz $A = 2A + 1$, ou seja, $A = -1$.
- Consequentemente, as soluções desta equação de recorrência são precisamente as sucessões $(c \cdot 2^n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$, com $c \in \mathbb{R}$.
- Tendo em conta a condição inicial $y_0 = 4$, obtemos $c = 5$; assim, a solução da equação $x_n^2 = 2x_{n-1}^2 + 1$ com $x_0 = 2$ é a sucessão

$$(\sqrt{5 \cdot 2^n - 1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, a função $\log_a \colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva e satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, a função $\log_a \colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva e satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

Logo, em muitos casos podemos «linearizar» passando para o logaritmo.

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, a função $\log_a \colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva e satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

Logo, em muitos casos podemos «linearizar» passando para o logaritmo.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência não linear

$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad x_0 = x_1 = 2.$$

Logo, $x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva e satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

Logo, em muitos casos podemos «linearizar» passando para o logaritmo.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência não linear

$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad x_0 = x_1 = 2.$$

Logo, $x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.
Estas equações são equivalentes às equações (para $n \geq 2$)

$$\log_2(x_n) = \log_2(x_{n-1}) + \log_2(x_{n-2}), \quad \log_2(x_0) = \log_2(x_1) = 1.$$

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva e satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

Logo, em muitos casos podemos «linearizar» passando para o logaritmo.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência não linear

$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad x_0 = x_1 = 2.$$

Logo, $x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.
Estas equações são equivalentes às equações (para $n \geq 2$)

$$\log_2(x_n) = \log_2(x_{n-1}) + \log_2(x_{n-2}), \quad \log_2(x_0) = \log_2(x_1) = 1.$$

Fazendo $y_n = \log_2(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos a equação de recorrência linear

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad y_0 = y_1 = 1;$$

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva e satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

Logo, em muitos casos podemos «linearizar» passando para o logaritmo.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência não linear

$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad x_0 = x_1 = 2.$$

Logo, $x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.
Estas equações são equivalentes às equações (para $n \geq 2$)

$$\log_2(x_n) = \log_2(x_{n-1}) + \log_2(x_{n-2}), \quad \log_2(x_0) = \log_2(x_1) = 1.$$

Fazendo $y_n = \log_2(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos a equação de recorrência linear

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad y_0 = y_1 = 1;$$

cuja solução é a sucessão $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos números de Fibonacci.

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva e satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

Logo, em muitos casos podemos «linearizar» passando para o logaritmo.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência não linear

$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad x_0 = x_1 = 2.$$

Logo, $x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, a solução da equação acima com as condições iniciais é

$$(2^{F_n})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Exemplo

Consideremos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\ldots \sqrt{x_0}}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$.

Exemplo

Consideremos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\dots \sqrt{x_0}}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$. Portanto, $x_1 = \sqrt{x_0} = 2$,

Exemplo

Consideremos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\ldots \sqrt{x_0}}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$. Portanto, $x_1 = \sqrt{x_0} = 2$, e para $n \geq 2$ temos

Exemplo

Consideremos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\dots \sqrt{x_0}}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$. Portanto, $x_1 = \sqrt{x_0} = 2$, e para $n \geq 2$ temos

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + x_{n-1}} > 0;$$

Exemplo

Consideremos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\ldots \sqrt{x_0}}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$. Portanto, $x_1 = \sqrt{x_0} = 2$, e para $n \geq 2$ temos

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + x_{n-1}} > 0;$$

ou seja $x_n^2 = 2x_{n-1}$ $(n \geq 2)$;

Exemplo

Consideremos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\dots \sqrt{x_0}}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$. Portanto, $x_1 = \sqrt{x_0} = 2$, e para $n \geq 2$ temos

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + x_{n-1}} > 0;$$

ou seja $x_n^2 = 2x_{n-1}$ $(n \geq 2)$; o que é equivalente a

$$2\log_2(x_n) = 1 + \log_2(x_{n-1}) \quad (n \geq 2).$$

Exemplo

Consideremos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\dots \sqrt{x_0}}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$. Portanto, $x_1 = \sqrt{x_0} = 2$, e para $n \geq 2$ temos

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + x_{n-1}} > 0;$$

ou seja $x_n^2 = 2x_{n-1}$ $(n \geq 2)$; o que é equivalente a

$$2\log_2(x_n) = 1 + \log_2(x_{n-1}) \quad (n \geq 2).$$

Fazendo $y_n = \log_2(x_n)$, obtemos a equação de recorrência linear

$$y_n = \frac{1}{2}y_{n-1} + \frac{1}{2} \quad (n \geq 2)$$

com a condição inicial $y_1 = 1$.

Exemplo

$$y_n = \frac{1}{2} y_{n-1} + \frac{1}{2} \quad (n \geq 2), y_1 = 1 \quad (y_n = \log_2(x_n)).$$

A solução geral da equação de recorrência (ignorando a condição inicial) é dado por

$$(c(\frac{1}{2})^n + 1)_{n \geq 1} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Exemplo

$$y_n = \frac{1}{2}y_{n-1} + \frac{1}{2} \quad (n \geq 2), y_1 = 1 \quad (y_n = \log_2(x_n)).$$

A solução geral da equação de recorrência (ignorando a condição inicial) é dado por

$$(c(\frac{1}{2})^n + 1)_{n\geq 1} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Utilizando a condição inicial $y_1 = 1$ obtemos

$$1 = c(\frac{1}{2}) + 1;$$

Exemplo

$$y_n = \frac{1}{2}y_{n-1} + \frac{1}{2} \quad (n \geq 2), y_1 = 1 \quad (y_n = \log_2(x_n)).$$

A solução geral da equação de recorrência (ignorando a condição inicial) é dado por

$$(c(\frac{1}{2})^n + 1)_{n\geq 1} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Utilizando a condição inicial $y_1 = 1$ obtemos

$$1 = c(\frac{1}{2}) + 1;$$

logo, $c = 0$.

Exemplo

$$y_n = \frac{1}{2} y_{n-1} + \frac{1}{2} \quad (n \geq 2), y_1 = 1 \quad (y_n = \log_2(x_n)).$$

A solução geral da equação de recorrência (ignorando a condição inicial) é dado por

$$(c\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1)_{n \geq 1} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Utilizando a condição inicial $y_1 = 1$ obtemos

$$1 = c\left(\frac{1}{2}\right) + 1;$$

logo, $c = 0$. Portanto, para todo o $n \geq 1$,

$$x_n = 2^{y_n} = 2,$$

e $x_0 = 4$.

Exemplo

Finalmente, consideremos a equação de recorrência (linear mas não com coeficientes constantes)

$$x_n = n \cdot x_{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

Exemplo

Finalmente, consideremos a equação de recorrência (linear mas não com coeficientes constantes)

$$x_n = n \cdot x_{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

Com $x_n = n! \cdot y_n$, a equação acima é equivalente a

$$n! \cdot y_n = n \cdot (n-1)! \cdot y_{n-1} = n! \cdot y_{n-1},$$

Exemplo

Finalmente, consideremos a equação de recorrência (linear mas não com coeficientes constantes)

$$x_n = n \cdot x_{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

Com $x_n = n! \cdot y_n$, a equação acima é equivalente a

$$n! \cdot y_n = n \cdot (n-1)! \cdot y_{n-1} = n! \cdot y_{n-1},$$

o que é equivalente a $y_n = y_{n-1}$, para todo o $n \geq 1$.

Exemplo

Finalmente, consideremos a equação de recorrência (linear mas não com coeficientes constantes)

$$x_n = n \cdot x_{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

Com $x_n = n! \cdot y_n$, a equação acima é equivalente a

$$n! \cdot y_n = n \cdot (n-1)! \cdot y_{n-1} = n! \cdot y_{n-1},$$

o que é equivalente a $y_n = y_{n-1}$, para todo o $n \geq 1$. Portanto, a solução geral da equação acima é dada por

$$(n! \cdot c)_{n \in \mathbb{N}} \qquad (c \in \mathbb{R}).$$