Universidade de Aveiro 7 de fevereiro de 2022

Teste 2 de Cálculo I - Agrupamento 2 Duração total: 2 horas

1. **(45 pts)** Determine a natureza das seguintes séries numéricas, indicando, em caso de convergência, se se trata de convergência simples ou absoluta:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+6}{3(n^2+2n-1)(n^2+5)}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$;

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1} \cos\left[(n+1)\pi\right]$.

   Resolução:

   (a) A série é de termos positivos e pode usar-se o critério de comparação por passagem ao limite, comparando com a série divergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^3+6}{3(n^2+2n-1)(n^2+5)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n^3+6)}{3(n^2+2n-1)(n^2+5)} = \frac{1}{3},$$

   portanto, as séries têm a mesma natureza, logo a série $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$ diverge.

   (b) Neste caso pode aplicar-se o Critério de Cauchy:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n = e^{-2}.$$

   Como $e^{-2} < 1$, pode afirmar-se que a série $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$ converge absolutamente.

   (c) Observe-se que $\cos\left[(n+1)\pi\right] = (-1)^{n+1}$ e, portanto, a série dada é alternada, já que $\dfrac{n}{n^2+1} > 0$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1} \cos\left[(n+1)\pi\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}.$$

   Começando por estudar a série dos módulos, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$, usando o critério de comparação por passagem ao limite, comparando com a série divergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

   portanto, as séries têm a mesma natureza e assim, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}\right|$ diverge.

   Sendo uma série alternada, pode aplicar-se o Critério de Leibniz:

- $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0.$$
- (a_n) é monótona decrescente, isto é, $a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1} \Leftrightarrow (n+1)(n^2+1) \leq n((n+1)^2+1) \Leftrightarrow 0 \leq n^2+n-1$$
que é uma proposição verdadeira.

Pode entaõ concluir-se que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$ converge, mas como a série dos módulos diverge, a convergência é simples.

2. **(20 pts)** Mostre, usando séries numéricas, que a dízima infinita periódica $1,7(9)$ é igual a $\frac{18}{10}$.

Resolução:

Observe-se que
$$1,7(9) = 1,7 + 0,09 + 0,0009 + \ldots = 1,7 + \sum_{n=1}^{+\infty} 9 \times 10^{-n-1}.$$

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} 9 \times 10^{-n-1}$ é uma série geométrica de razão $r = 10^{-1}$, logo convergente e com soma
$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{9 \times 10^{-2}}{1-10^{-1}} = 0,1.$$

Assim,
$$1,7(9) = 1,7 + \sum_{n=1}^{+\infty} 9 \times 10^{-n-1} = 1,7 + 0,1 = 1,8.$$

3. **(40 pts)** Dada uma função $f : [3, +\infty[\to \mathbb{R}$, considere o integral impróprio de 1ª espécie
$$\int_3^{+\infty} f(x)\, dx.$$

(a) Suponha que o integral impróprio referido acima é convergente. Explicite o significado matemático desta afirmação.

(b) Enuncie um teorema que lhe permite comparar a natureza de uma série numérica real com a de um integral impróprio adequado.

(c) Aplicando o teorema referido em (b) estude a natureza da série
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n\, (\ln(\ln n))}.$$

Resolução:

(a) Se
$$\lim_{t\to+\infty} \int_3^t f(x)\, dx$$
existe e é finito, o integral impróprio de 1ª espécie $\int_3^{+\infty} f(x)\, dx$ é convergente.

(b) Critério do integral:

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos não negativos e $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função decrescente, integrável em qualquer intervalo $[1, b]$, $b \geq 1$ e tal que $f(n) = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

têm a mesma natureza.

(c) Sejam $a_n = \dfrac{1}{n \ln n\,(\ln(\ln n))}$, $n \geq 3$ e $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x\,(\ln(\ln x))}$, $x \in [3, +\infty]$.
Como $n \geq 3$, $\ln n > 1$ e $\ln(\ln n) > 0$. Logo $a_n \geq 0$, $\forall n \geq 3$.
Tendo em conta que

$$f'(x) = \frac{-\left(x \ln x\,(\ln(\ln x))\right)'}{\left(x \ln x\,(\ln(\ln x))\right)^2} = -\frac{(\ln x + 1)\ln(\ln x) + 1}{\left(x \ln x\,(\ln(\ln x))\right)^2} < 0, \, \forall x \in [3, +\infty],$$

conclui-se que f é uma função decrescente em $[3, +\infty]$. Por outro lado, como f é uma função contínua em $[3, +\infty]$, f é integrável em qualquer intervalo $[3, b]$, $b \geq 3$. Assim, pelo critério do integral, conclui-se que

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n\,(\ln(\ln n))} \quad \text{e} \quad \int_3^{+\infty} \frac{1}{x \ln x\,(\ln(\ln x))}\, dx$$

têm a mesma natureza.
Como

$$\lim_{t\to+\infty} \int_3^t \frac{1}{x \ln x\,(\ln(\ln x))}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_3^t \frac{\frac{1}{x \ln x}}{\ln(\ln x)}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\ln|\ln(\ln x)|\right]_3^t = +\infty,$$

conclui-se que o integral impróprio $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{x \ln x\,(\ln(\ln x))}\, dx$ é divergente. Deste modo, a série $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n\,(\ln(\ln n))}$ é divergente.

4. **(25 pts)** Calcule o integral definido $\displaystyle\int_1^5 \frac{2x}{\sqrt{2x-1}}\, dx$.

Resolução:

Considerando a mudança de variável definida por $\sqrt{2x-1} = t$, $t > 0$, donde resulta $x = \dfrac{t^2+1}{2}$ e $dx = t\,dt$, e atendendo a que $x \in [1, 5]$, conduz a $t \in [1, 3]$, obtém-se

$$\int_1^5 \frac{2x}{\sqrt{2x-1}}\, dx = \int_1^3 \frac{t^2+1}{t} t\, dt = \int_1^3 t^2 + 1\, dt = \left[\frac{t^3}{3} + t\right]_1^3 = \frac{32}{3}.$$

5. **(40 pts)** Sejam $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e derivável em $\mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \int_x^{x^2} \varphi(t)\, dt, \; x \in \mathbb{R}.$$

(a) Mostre que f é duas vezes derivável e determine expressões para f' e f''.

(b) Prove que f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$.

(c) Estude o sinal de f em $\mathbb{R}$.

Resolução:

(a) O Teorema Fundamental do Cálculo Integral afirma o seguinte:

Seja φ uma função contínua no intervalo J e f a função definida por

$$f(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \varphi(t)dt,$$

com g_1 e g_2 definidas em $I \subseteq \mathbb{R}$ tais que $g_1(I) \subseteq J$ e $g_2(I) \subseteq J$.
Se φ é contínua em J e g_1 e g_2 são deriváveis em I, então

$$f'(x) = \varphi(g_2(x))g_2'(x) - \varphi(g_1(x))g_1'(x), \text{ para todo o } x \in I.$$

Neste caso $I = J = \mathbb{R}$, $g_2(x) = x^2$ e $g_1(x) = x$ são funções deriváveis em $\mathbb{R}$, e φ é uma função contínua. Então:

$$f'(x) = \varphi(x^2)(x^2)' - \varphi(x)(x)' = 2x\varphi(x^2) - \varphi(x).$$

Como a função φ é derivável, pode determinar-se a função f'':

$$f''(x) = (2x\varphi(x^2) - \varphi(x))' = (2x)'\varphi(x^2) + 2x(\varphi(x^2))' - \varphi'(x) = 2\varphi(x^2) + (2x)^2\varphi'(x^2) - \varphi'(x).$$

(b) Pode determinar-se o sinal de f' analisando a sua expressão:

- $\varphi(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, portanto, $\varphi(x^2) > 0$ e $\varphi(x) > 0$, independentemente do x;
- $2x < 0, \forall x < 0$, logo $2x\varphi(x^2) < 0$, em $]-\infty, 0[$.

Então, $f'(x) = 2x\varphi(x^2) - \varphi(x) < 0, \forall x < 0$ e, portanto, f é (estritamente) decrescente neste intervalo.

(c) Como $f(0) = \int_0^0 \varphi(t)\,dt = 0$ e f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$, então, $f(x) > 0$ neste intervalo (se a função decresce até $x = 0$, o seu valor para $x < 0$ tem que ser positivo).

Repare-se que f tem um outro zero em $x = 1$: $f(1) = \int_1^{1^2} \varphi(t)\,dt = \int_1^1 \varphi(t)\,dt = 0$.

Uma das propriedades do integral definido afirma o seguinte:

Seja f uma função integrável em $[a, b]$, com $a < b$. Se $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Ora, no intervalo $]0, 1[$, $x > x^2$, portanto

$$\int_x^{x^2} \varphi(t)\,dt = -\int_{x^2}^{x} \varphi(t)\,dt < 0 \text{ (porque } \int_{x^2}^{x} \varphi(t)\,dt > 0).$$

No intervalo $]1, +\infty[$, como $x^2 > x$, $\displaystyle\int_x^{x^2} \varphi(t)\,dt > 0$.

Concluindo:

- $f(x) > 0$ se $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$,
- $f(x) < 0$ se $x \in]0, 1[$ e
- $f(x) = 0$ se $x = 0$ ou $x = 1$.

6. **(30 pts)** Para cada uma das questões seguintes, assinale **a opção** correta.

(a) A área da região **limitada** pelas curvas de equação $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x^2$ e $x = -1$ pode ser dada por

(A) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (\sqrt[3]{x} - x^2)\, dx.$ .... ☐

(B) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2 - \sqrt[3]{x})\, dx.$ .... ☐

(C) $\displaystyle\int_{-1}^{0} (\sqrt[3]{x} - x^2)\, dx + \int_{0}^{1} (x^2 - \sqrt[3]{x})\, dx.$ .... ☐

(D) $\displaystyle\int_{-1}^{0} (x^2 - \sqrt[3]{x})\, dx + \int_{0}^{1} (\sqrt[3]{x} - x^2)\, dx.$ .... ☒

(b) Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série cuja natureza se pretende determinar e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ uma série cuja natureza se conhece. Qual das seguintes conclusões é verdadeira?

(A) Se $|a_n| < |b_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ converge, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também converge. .... ☒

(B) Se $|a_n| > |b_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ converge, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também converge. .... ☐

(C) Se $|a_n| > |b_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ diverge, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também diverge. .... ☐

(D) Se $|a_n| < |b_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ diverge, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também diverge. .... ☐

(c) Seja f uma função real de variável real de domínio $\mathbb{R}$. Se $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ então o integral impróprio

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2}\, dx$$

(A) é convergente. .... ☒

(B) é divergente. .... ☐

(C) é igual a $+\infty$. .... ☐

(D) é igual a 2. .... ☐