Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrup. 1 **19/06/2019**

Teste 2 - avaliação discreta Duração: 2h00

Os resultados usados devem ser enunciados com precisão e rigor. A qualidade e cuidado na redação da resposta são elementos importantes para a avaliação. Dúvidas na interpretação das questões devem ser explicitadas na prova.

5,0 val. **1.** Determine a solução da seguinte equação com derivadas ordinárias

$$y' = 2xy$$

que satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$.

6,0 val. **2.** Determine a solução da seguinte equação com derivadas ordinárias

$$y' - 2y = (x+1)y^2.$$

6,0 val. **3.** Determine a solução geral da seguinte equação com derivadas ordinárias

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}.$$

3,0 val. **4.** Determine a transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{e^t \frac{d^{50}}{dt^{50}}\left(e^{-t}t^{50}\right)\}(s),$$

recordando que $\frac{d^{50}}{dt^{50}} f(t) = f^{(50)}(t)$.

5,0 val. **1.** Determine a solução da seguinte equação com derivadas ordinárias

$$y' = 2xy$$

que satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$.

$$\frac{1}{y}\,dy = 2x\,dx$$

$$\ln|y| = x^2 + K$$

$$y = ce^{x^2}, \; c \in \mathbb{R}$$

$y(0) = 1 \Leftrightarrow$

$1 = ce^0 \Leftrightarrow c = 1$

solução: $y(x) = e^{x^2}$

(Verificação: $y = e^{x^2} \Rightarrow \begin{cases} y' = 2x\underbrace{e^{x^2}}_{y} = 2xy \; \checkmark \\ y(0) = e^0 = 1. \end{cases}$)

6,0 val. **2.** Determine a solução da seguinte equação com derivadas ordinárias

$$y' - 2y = (x+1)y^2.$$

EDO de Bernoulli com $\alpha = 2$.

Multiplicando a equação por y^{-2} obtem-se

$$y^{-2}y' - 2y^{-1} = x+1$$

Fazendo $z = y^{1-\alpha} = y^{-1}$ e $z' = -y^{-2}y'$ vem

$$-z' - 2z = x+1 \quad , \text{ ou seja,}$$

$$z' + 2z = -x-1$$

Como esta equação é linear de ordem 1 podemos usar o fator integrante $\mu(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$:

$$e^{2x}(z'+2z) = e^{2x}(-x-1) \Leftrightarrow$$

$$(e^{2x}z)' = -e^{2x}(x+1) \Leftrightarrow e^{2x}z = -\int \underbrace{e^{2x}}_{u'}\underbrace{(x+1)}_{v}dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}z = -\left(\left[\frac{e^{2x}}{2}\cdot(x+1) - \int \frac{e^{2x}}{2}\cdot 1\,dx\right)\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}z = -\frac{1}{2}e^{2x}(x+1) + \frac{1}{4}e^{2x} + c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{4} + ce^{-2x}$$

Voltando à variável y:

$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{4} + ce^{-2x}.$$

Solução: $y(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}(x+1) + ce^{-2x}} = \dfrac{4}{4ce^{-2x} - 2x - 1}$, $c \in \mathbb{R}$.

6,0 val. **3.** Determine a solução geral da seguinte equação com derivadas ordinárias

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = \underbrace{e^{-x}}_{b(x)}.$$

(1)

$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

$P(r) = r^3 + 3r^2 + 3r + 1$

$P(-1) = (-1)^3 + 3 - 3 + 1 = 0$ (*)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & & -1 & -2 & -1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & \lfloor 0 \end{array}$$

$P(r) = (r+1)(r^2+2r+1)$

$= (r+1)(r+1)^2 = (r+1)^3$

$y_H = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{* alternativa} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array} \\ P(r) = (r+1)^3 \end{array}}$

(2)

$b(x) = P_m(x)\, e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ com $\alpha = -1$, $\beta = 0$

e $P_m(x) = 1$ (grau 0).

$\alpha + i\beta = -1$ é raiz de $P(r)$ com mult. 3

$y_p = x^3 e^{-x}(A\cos 0 + B\sin 0) =$

$= \underbrace{Ax^3}\underbrace{e^{-x}}$

$y_p' = 3Ax^2 e^{-x} - Ax^3 e^{-x} = \underbrace{(-Ax^3 + 3Ax^2)}\underbrace{e^{-x}}$

$y_p'' = (-3Ax^2 + 6Ax)e^{-x} - (-Ax^3 + 3Ax^2)e^{-x}$

$= (Ax^3 - 3Ax^2 - 3Ax^2 + 6Ax)e^{-x}$

$= (Ax^3 - 6Ax^2 + 6Ax)e^{-x}$

$y_p''' = (3Ax^2 - 12Ax + 6A)e^{-x} - (Ax^3 - 6Ax^2 + 6Ax)e^{-x}$

$(-Ax^3 + 9Ax^2 - 18Ax + 6A)e^{-x}$

$y_p''' + 3y_p'' + 3y_p' + y_p = e^{-x} \Leftrightarrow$

$(\cancel{-Ax^3} + 9Ax^2 \cancel{- 18Ax} + 6A + \cancel{3Ax^3} - 18Ax^2 \cancel{+ 18Ax} \cancel{- 3Ax^3} + 9Ax^2 + \cancel{Ax^3})e^{-x} = e^{-x}$

$\Leftrightarrow 6Ae^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow 6A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{6}$

$y_p = \frac{1}{6} x^3 e^{-x}$

Solução geral: $y = y_H + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x} + \frac{1}{6} x^3 e^{-x}$

3,0 val. **4.** Determine a transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{e^t \frac{d^{50}}{dt^{50}}(e^{-t}t^{50})\}(s),$$

recordando que $\frac{d^{50}}{dt^{50}} f(t) = f^{(50)}(t)$.

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\}(s) = F(s-\lambda), \quad s > s_f + \lambda$$

$$\mathcal{L}\{e^t \underbrace{\frac{d^{50}}{dt^{50}}(e^{-t}t^{50})}_{g(t)}\}(s) = \mathcal{L}\{\frac{d^{50}}{dt^{50}}(\underbrace{e^{-t}t^{50}}_{f(t)})\}(s-1), \quad s > s_g + 1$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(s)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

$s > \max\{s_f, s_{f'}, \ldots, s_{f^{(n-1)}}\}$

$f(t) = e^{-t} t^{50}, \quad f(0) = 0$

$f'(t) = -e^{-t} \cdot t^{50} + e^{-t} \cdot 50 t^{49}; \quad f'(0) = 0$

$\vdots$

$f^{(49)}(0) = 0$

$$\mathcal{L}\{\underbrace{\frac{d^{50}}{dt^{50}}(e^{-t}t^{50})}_{g(t)}\}(s) = s^{50} \mathcal{L}\{e^{-t} \cdot t^{50}\}(s) = \quad (*)$$

$$= s^{50} \mathcal{L}\{t^{50}\}(s-(-1)), \quad s > -1 \quad (s_g = -1)$$

$$= s^{50} \mathcal{L}\{t^{50}\}(s+1) = s^{50} \cdot \frac{50!}{(s+1)^{51}}$$

Assim,

$$\mathcal{L}\{e^t \frac{d^{50}}{dt^{50}}(e^{-t} \cdot t^{50})\}(s) = \mathcal{L}\{\frac{d^{50}}{dt^{50}}(e^{-t} \cdot t^{50})\}(s-1) = 50! \frac{(s-1)^{50}}{s^{51}},$$

$$s > s_g + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$\left(\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0\right)$$

(*) (alternativa, mais complicada!)

$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s), \quad s > s_f$

$(s-1)^{50}\mathcal{L}\{e^{-t}\cdot t^{50}\}(s-1) = (s-1)^{50}\cdot(-1)^{50}\left(\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s-1)\right)^{(50)} \underset{(s-1>-1)}{=}$

$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}, \quad s > a$

$= (s-1)^{50}\left(\frac{1}{(s-1)-(-1)}\right)^{(50)} = (s-1)^{50}\cdot\left(s^{-1}\right)^{(50)} =$

$= (s-1)^{50}\cdot 50!\, s^{-51} = 50!\,\frac{(s-1)^{50}}{s^{51}}, \quad \underline{s > 0}$

$\left(g(s) = s^{-1},\ g'(s) = -s^{-2},\ g''(s) = 2s^{-3},\ g'''(s) = 3\times 2\, s^{-4},\ \dots,\ g^{(50)}(s) = (-1)^{50}\, 50!\, s^{-51}\right)$