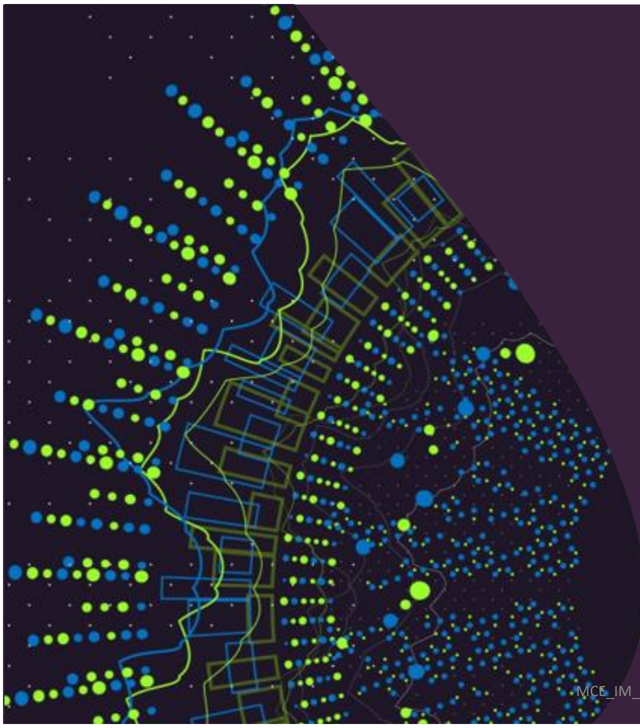


Mecânica e Campo Eletromagnético

Aula 7

Cap.2- Movimento oscilatório (conclusão)
- Movimento amortecido
- Movimento forçado
- Exemplos

Isabel Malaquias
imalaquias@ua.pt
Gab. 13.3.16

Oscilador amortecido

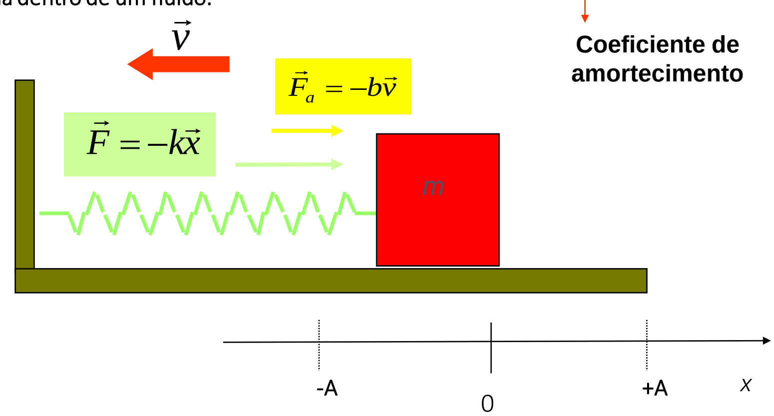
EXEMPLO de força dissipativa: **Força devida à viscosidade de um fluido**

$\vec{F}_a$

$$\vec{F}_a = -b\vec{v}$$

Coeficiente de amortecimento

A mola oscila dentro de um fluido:



Oscilador amortecido

A solução é:

$$x = A_o e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \phi)$$

Quando o amortecimento não é muito intenso, inferior a um valor crítico (b_c), esperamos que a solução corresponda a uma oscilação cuja amplitude diminua com o tempo

E a frequência de oscilação é

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Esta solução só é válida se:

$$\frac{b}{2m} < \omega_o$$

$$\boldsymbol{b < 2m\omega_0}$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Coeficiente de amortecimento crítico (b_c)

$$\boldsymbol{b_c = 2m\omega_0}$$

Oscilador amortecido

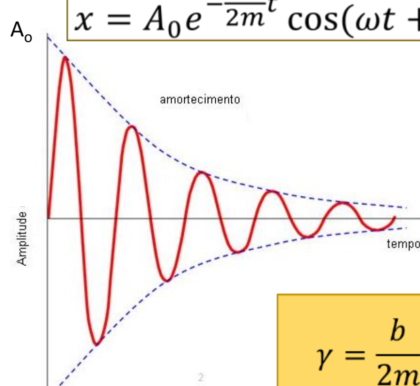
Na ausência de forças externas, a AMPLITUDE de um oscilador DIMINUI no tempo, devido a forças dissipativas (atrito, viscosidade, etc)

$$\boxed{\vec{F_a} = -b\vec{v}}$$

Se A diminui, a Energia Mecânica diminui também

$$\omega = \sqrt{\left[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2\right]}$$

$$\boxed{x = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \varphi)}$$



$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

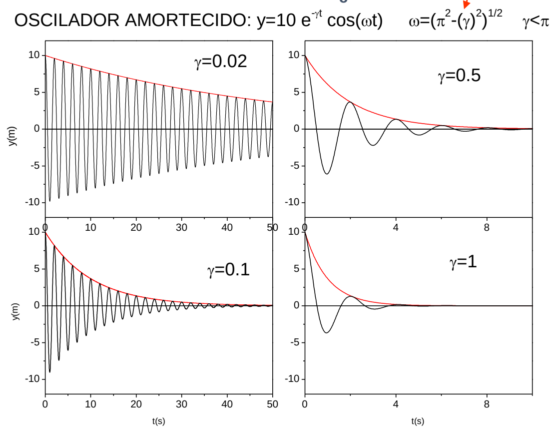
Oscilador amortecido

Graus de Amortecimento

$$x = A_o e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\boxed{\frac{b}{2m}}\right)^2}$$

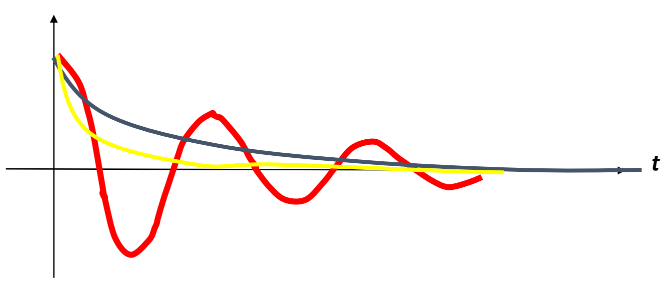
Para b < b_c



À medida que **b** aumenta, o decréscimo da amplitude das oscilações é cada vez mais rápido.

Oscilador amortecido

Graus de Amortecimento



Sub-Amortecido (Amortecimento fraco)

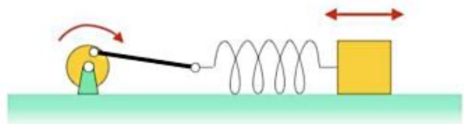
Amortecido criticamente (Amortecimento forte)

Sobre Amortecido (Amortecimento muito forte)

$$b < 2m\omega_0$$

$$b_c = 2m\omega_0$$

Oscilador Forçado



"mola" ligada a um "motor"

Oscilador Forçado

- Para manter um sistema a oscilar na presença de forças dissipativas, temos de fornecer energia, aplicando uma força externa. Ao fim de algum tempo, o movimento terá a frequência da força externa.
- Nessa altura, a energia fornecida (numa oscilação) será igual à dissipada, a amplitude mantém-se constante, e o seu valor depende da frequência externa.

Equações do movimento

Força externa:

$$F_{ext} = F_0 \cos \omega t$$

frequência angular da força externa

2ª Lei de Newton:

$$\sum F = F_0 \cos \omega t - b\frac{dx}{dt} - kx = ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

amortec.

força elástica

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos \omega t$$

com $\gamma = \dfrac{b}{2m}$

Solução geral

solução: $x(t) = x_t(t) + x_p(t)$

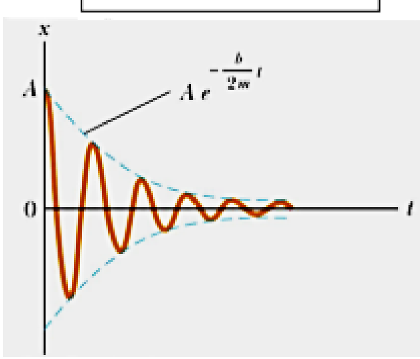
solução transiente:

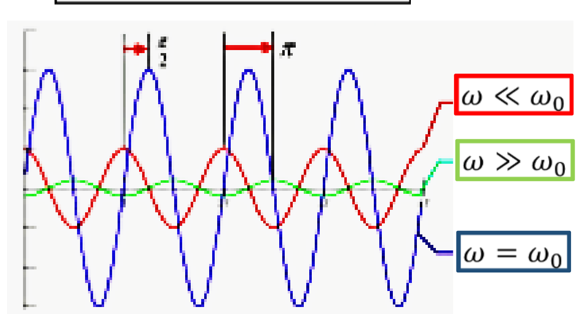
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

+

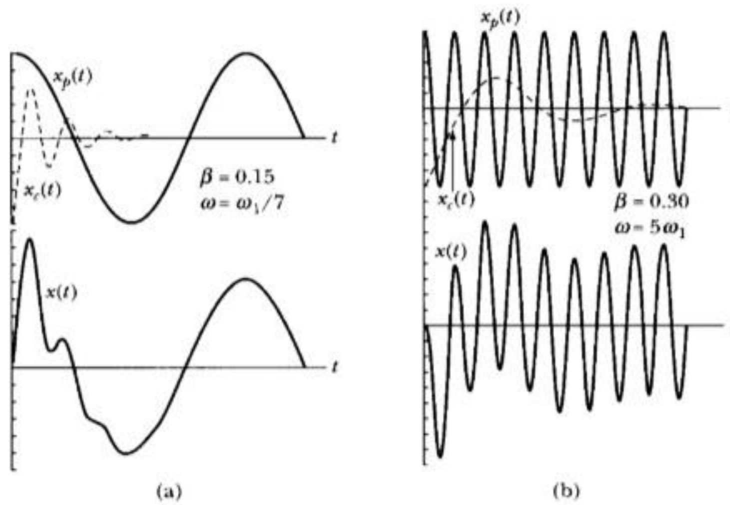
solução permanente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos \omega t$$





Solução transiente + solução permanente



Solução permanente

$$\boxed{x_p(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$$

com $A = \dfrac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$ amplitude

$\delta = \arctan \dfrac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ desfasamento entre a posição x e a força

$0 \le \delta \le \pi$

OSCILADOR FORÇADO

Força externa: $F_{ext}(t) = F_0 \cos(\omega t)$

Posição: $x_p(t) = A\cos(\omega t - \delta)$

Mesma frequência!

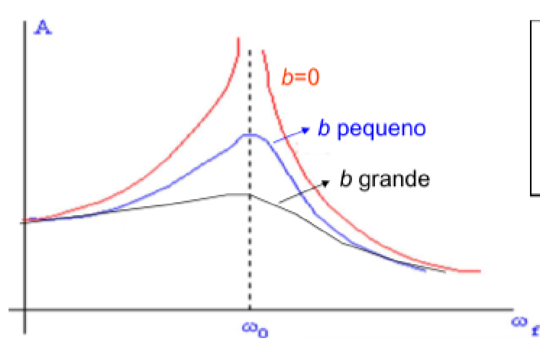
$$\text{Amplitude: } A = \frac{\dfrac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\dfrac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ressonância no oscilador forçado

$$A = \frac{\dfrac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\dfrac{b\omega}{m}\right)^2}} \Rightarrow$$

A é máximo quando $\omega \approx \omega_0$ ⇒ **ressonância**



Na ausência de amortecimento

$A \longrightarrow \infty$

quando $\omega \longrightarrow \omega_0$

Sobre a energia

Considerando a solução permanente,
NA RESSONÂNCIA, verifica-se:

- energia máxima dissipada
- trabalho máximo realizado pelo motor
- energia mecânica máxima do oscilador

NUM PERÍODO:
energia dissipada pelo atrito = trabalho realizado pelo motor

The Tacoma
Narrows Bridge Collapse

1940

https://youtu.be/7saC-DnQ9Rc?t=36

A Ponte do Estreito de Tacoma caiu em 1940, devido a torques vibracionais induzidos pelo vento, fazendo a ponte oscilar com $\omega \approx$ frequência de ressonância!

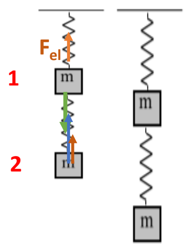
Osciladores acoplados

16 Duas molas iguais de constante K_{mola} estão penduradas e ligadas a corpos de massa *m* como está representado na figura ao lado. Desprezando a massa das molas calcule:

a) as frequências dos modos normais de oscilação do sistema.

b) a relação das amplitudes de oscilação das massas nos dois modos normais de oscilação.

Nota: não é necessário considerar a aceleração da gravidade porque esta não tem influência na oscilação.



1 $F_1 = - k_1x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$ $\qquad$ $m_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = - k_1x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$

2 $F_2 = - k_2x_2 - k_2 (x_2 - x_1)$ $\qquad$ $m_2 \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = - k_2x_2 - k_2 (x_2 - x_1)$

$k_1 = k_2 = k$ $\qquad$ $m_1 = m_2 = m$

Osciladores acoplados

16 Duas molas iguais de constante K_{mola} estão penduradas e ligadas a corpos de massa *m* como está representado na figura ao lado. Desprezando a massa das molas calcule:

a) as frequências dos modos normais de oscilação do sistema.

1 $\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}x_1 - \dfrac{k}{m}(x_1 - x_2) \Leftrightarrow \dfrac{d^2x_1}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x_1 + \dfrac{k}{m}(x_1 - x_2) = 0$

2 $\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}x_2 - \dfrac{k}{m}(x_2 - x_1) \Leftrightarrow \dfrac{d^2x_2}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x_2 + \dfrac{k}{m}(x_2 - x_1) = 0$

SOLUÇÕES POSSÍVEIS:

$x_1 = A \cos \omega t$

$x_2 = B \cos \omega t$

Derivar 1 e 2 vezes x_1 e x_2 e substituir nas equações diferenciais

1 $- mA\omega^2 \cos \omega t + 2kA \cos \omega t - kB \cos \omega t = 0$

2 $- mB\omega^2 \cos \omega t + 2kB \cos \omega t - kA \cos \omega t = 0$

$\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} - mA\omega^2 + 2kA - kB &= 0 \\ - mB\omega^2 + 2kB - kA &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} A(2k - m\omega^2) - kB &= 0 \\ - kA + B(2k - m\omega^2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ANÁLISE DAS SOLUÇÕES POSSÍVEIS

A = B = 0 o que significaria que não havia oscilação.

Resolvendo o determinante, deveremos chegar a alguma conclusão

$$\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2k - m\omega^2)(k - m\omega^2) - k^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 - 3km\omega^2 + m^2\omega^4 = 0$$

Usando a fórmula resolvente para equações de 2º grau, obtém-se

$$\boxed{\omega_1^2 = \frac{3\,k + \sqrt{5}\,k}{2\,m}}$$

$$\boxed{\omega_2^2 = \frac{3\,k - \sqrt{5}\,k}{2\,m}}$$

FREQUÊNCIAS DOS MODOS NORMAIS DE VIBRAÇÃO DO SISTEMA
(ω_1 e ω_2)

16. b) a relação das amplitudes de oscilação das massas nos dois modos normais de oscilação.

Tínhamos
$$\begin{cases} A(2k - m\omega^2) - kB = 0 \\ -kA + B(2k - m\omega^2) = 0 \end{cases}$$

Usando, por exemplo, a 1ª equação, tem-se:

$$A(2k - m\,\boxed{\omega^2}) - kB = 0$$

$$\boxed{\omega_1^2 = \frac{3\,k + \sqrt{5}\,k}{2\,m}}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{2}{(1-\sqrt{5})} = -1{,}61$$ valor negativo ➡ oposição de fase

$$\boxed{\omega_2^2 = \frac{3\,k - \sqrt{5}\,k}{2\,m}}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{2}{(1+\sqrt{5})} = 0{,}61$$ valor positivo ➡ em fase