Universidade de Aveiro 7 de fevereiro de 2022

Exame Final de Cálculo I - Agrupamento 2 Duração: 2 horas e 30 minutos

Justifique todas as suas respostas, indicando os cálculos efetuados e/ou os conceitos teóricos utilizados.

1. **(40 pts)** Seja $g(x) = 2\,\text{arcsen}(\text{tg}\, x)$ onde $D_g \subset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

   (a) Determine o domínio de g, D_g.

   (b) Caracterize a função inversa de g, indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.

   (c) Justifique que g atinge mínimo e máximo globais no seu domínio e calcule esses valores.

   (d) Sabendo que
   $$\int f(x)\,dx = g(x) + C, C \in \mathbb{R},$$
   determine $f(0)$.

Resolução:

(a) Atendendo a que a tangente está definida em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e que o domínio do arcoseno é $[-1,1]$,

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq \text{tg}\, x \leq 1\} = [\text{arctg}\,(-1), \text{arctg}(1)] = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

(b) e (c) Como as funções arcoseno e tangente são estritamente crescentes, a composta das duas funções é também estritamente crescente, e, portanto,

- o máximo de g é atingido em $x = \frac{\pi}{4}$ e é $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\,\text{arcsen}\,(1) = \pi$;
- o mínimo de g é atingido em $x = -\frac{\pi}{4}$ e é $g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2\,\text{arcsen}\,(-1) = -\pi$.

Isto permite afirmar que o contradomínio de g é, $CD_g = [-\pi, \pi]$.

O domínio da inversa é o contradomínio da função e o contradomínio da inversa é o domínio da função, assim,

$$CD_{g^{-1}} = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \text{ e } D_{g^{-1}} = [-\pi, \pi].$$

Para determinar a expressão da inversa, resolve-se a equação $y = g(x)$ em ordem a x:

$$y = 2\,\text{arcsen}(\text{tg}\, x) \Leftrightarrow \text{sen}\left(\frac{y}{2}\right) = \text{tg}\,(x) \Leftrightarrow x = \text{arctg}\left(\text{sen}\left(\frac{y}{2}\right)\right).$$

A expressão da inversa é

$$g^{-1}(x) = \text{arctg}\left(\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

(d) Por definição de primitiva,

$$g'(x) = f(x).$$

Calculando a derivada de g vem

$$g'(x) = (2\,\text{arcsen}(\text{tg}\, x))' = 2\frac{(\text{tg}(x))'}{\sqrt{1-\text{tg}^2(x)}} = 2\frac{\sec^2(x)}{\sqrt{1-\text{tg}^2(x)}}, \ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[.$$

$$f(0) = g'(0) = 2\frac{\sec^2(0)}{\sqrt{1-\text{tg}^2(0)}} = 2.$$

2. **(30 pts)** Calcule:

   (a) o integral definido $\displaystyle\int_1^5 \frac{2x}{\sqrt{2x-1}}\,dx$;

   (b) a família de primitivas $\displaystyle\int (2x^3+x)\operatorname{arctg} x\,dx$.

Resolução:

(a) Considerando a mudança de variável definida por $\sqrt{2x-1}=t$, $t>0$, donde resulta $x=\dfrac{t^2+1}{2}$ e $dx=t\,dt$, e atendendo a que $x\in[1,5]$, conduz a $t\in[1,3]$, obtém-se

$$\int_1^5 \frac{2x}{\sqrt{2x-1}}\,dx=\int_1^3 \frac{t^2+1}{t}t\,dt=\int_1^3 t^2+1\,dt=\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_1^3=\frac{32}{3}.$$

(b) Utilizando primitivação por partes, fazendo $u'=(2x^3+x)$ e $v=\operatorname{arctg}(x)$, vem:

$$\int (2x^3+x)\operatorname{arctg} x\,dx=\frac{x^4+x^2}{2}\operatorname{arctg}(x)-\int \frac{x^4+x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Atendendo a que $x^4+x^2=x^2(x^2+1)$,

$$\int \frac{x^4+x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\int \frac{x^2}{2}\,dx=\frac{x^3}{6}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Então,

$$\int (2x^3+x)\operatorname{arctg} x\,dx=\frac{x^4+x^2}{2}\operatorname{arctg}(x)-\frac{x^3}{6}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

3. **(30 pts)** Dada uma função $f:[3,+\infty[\to\mathbb{R}$, considere o integral impróprio de 1^{a} espécie

$$\int_3^{+\infty} f(x)\,dx.$$

(a) Suponha que o integral impróprio referido acima é convergente. Explicite o significado matemático desta afirmação.

(b) Enuncie um teorema que lhe permite comparar a natureza de uma série numérica real com a de um integral impróprio adequado.

(c) Aplicando o teorema referido em (b) estude a natureza da série de

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n\,(\ln(\ln n))}.$$

Resolução:

(a) Se

$$\lim_{t\to+\infty}\int_3^t f(x)\,dx$$

existe e é finito, o integral impróprio de 1^{a} espécie $\displaystyle\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente.

(b) Critério do integral:

Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos não negativos e $f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$ uma função decrescente, integrável em qualquer intervalo $[1,b]$, $b\geq 1$ e tal que $f(n)=a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Então

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

têm a mesma natureza.

(c) Sejam $a_n = \dfrac{1}{n\ln n\,(\ln(\ln n))}$, $n \geq 3$ e $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x\,(\ln(\ln x))}$, $x \in [3, +\infty]$.

Como $n \geq 3$, $\ln n > 1$ e $\ln(\ln n) > 0$. Logo $a_n \geq 0$, $\forall n \geq 3$.

Tendo em conta que

$$f'(x) = \frac{-\left(x\ln x\,(\ln(\ln x))\right)'}{\left(x\ln x\,(\ln(\ln x))\right)^2} = -\frac{(\ln x + 1)\ln(\ln x) + 1}{\left(x\ln x\,(\ln(\ln x))\right)^2} < 0,\ \forall x \in [3, +\infty],$$

conclui-se que f é uma função decrescente em $[3, +\infty]$. Por outro lado, como f é uma função contínua em $[3, +\infty]$, f é integrável em qualquer intervalo $[3, b]$, $b \geq 3$. Assim, pelo critério do integral, conclui-se que

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n\,(\ln(\ln n))} \quad \text{e} \quad \int_3^{+\infty} \frac{1}{x\ln x\,(\ln(\ln x))}\,dx$$

têm a mesma natureza.

Como

$$\lim_{t\to+\infty} \int_3^t \frac{1}{x\ln x\,(\ln(\ln x))}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_3^t \frac{\frac{1}{x\ln x}}{\ln(\ln x)}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\ln|\ln(\ln x)|\right]_3^t = +\infty,$$

conclui-se que o integral impróprio $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{x\ln x\,(\ln(\ln x))}\,dx$ é divergente. Deste modo, a série $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n\,(\ln(\ln n))}$ é divergente.

4. **(28 pts)** Determine a natureza das seguintes séries numéricas, indicando, em caso de convergência, se se trata de convergência simples ou absoluta:

(a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1} \cos[(n+1)\pi]$.

Resolução:

(a) Neste caso pode aplicar-se o Critério de Cauchy:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = e^{-2}.$$

Como $e^{-2} < 1$, pode afirmar-se que a série $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}$ converge absolutamente.

(b) Observe-se que $\cos[(n+1)\pi] = (-1)^{n+1}$ e, portanto, a série dada é alternada, já que $\dfrac{n}{n^2+1} > 0$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1} \cos[(n+1)\pi] = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}.$$

Começando por estudar a série dos módulos, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2+1}$, usando o critério de comparação por passagem ao limite, comparando com a série divergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

portanto, as séries têm a mesma natureza e assim, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}\right|$ diverge.

Sendo uma série alternada, pode aplicar-se o Critério de Leibniz:

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2+1} = 0.$$

- (a_n) é monótona decrescente, isto é, $a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1} \Leftrightarrow (n+1)(n^2+1) \leq n((n+1)^2+1) \Leftrightarrow 0 \leq n^2+n-1$$

  que é uma proposição verdadeira.

Pode então concluir-se que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$ converge, mas como a série dos módulos diverge, a convergência é simples.

5. **(15 pts)** Mostre que a equação $x^2 = x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x$ tem exatamente duas soluções em $\mathbb{R}$.

Resolução:

Considere-se a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 - x\,\mathrm{sen}\,x - \cos x$ e procurem-se os zeros desta função. f é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = 2x - \mathrm{sen}\,(x) - x\cos(x) + \mathrm{sen}(x) = 2x - x\cos(x) = x(2-\cos(x)).$$

O único zero de f' é $x = 0$ já que $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ e, portanto, $2 - \cos(x) \neq 0$. Como consequência do Teorema de Rolle, a função f terá no máximo dois zeros (entre dois zeros da função existe pelo menos um zero da derivada, ora, se existissem 3 zeros teria que haver pelo menos um outro zero de f').

Pode ainda observar-se que, como $2-\cos(x) > 0$, $f'(x) < 0$ se $x < 0$ e, portanto, f é decrescente em $]-\infty, 0[$, e $f'(x) > 0$ se $x > 0$, e, f é crescente em $]0, +\infty[$.

Como $f(0) = -1$, escolha-se um valor à esquerda de zero e um outro à direita de modo que f seja positivo nesses pontos. Ora, $f(\pi) = \pi^2 - \pi\,\mathrm{sen}\,\pi - \cos\pi = \pi^2 + 1 = f(-\pi)$.

Pode então afirmar-se que existem exatamente dois zeros para a função f em $\mathbb{R}$, um em $]-\pi, 0[$ e outro em $]0, \pi[$.

6. **(25 pts)** Sejam $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e derivável em $\mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \int_x^{x^2}\varphi(t)\,dt,\ x \in \mathbb{R}.$$

(a) Mostre que f é duas vezes derivável e determine expressões para f' e f''.

(b) Prove que f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$.

(c) Estude o sinal de f em $\mathbb{R}$.

Resolução:

(a) O Teorema Fundamental do Cálculo Integral afirma o seguinte:

Seja φ uma função contínua no intervalo J e f a função definida por

$$f(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \varphi(t)dt,$$

com g_1 e g_2 definidas em $I \subseteq \mathbb{R}$ tais que $g_1(I) \subseteq J$ e $g_2(I) \subseteq J$.
Se φ é contínua em J e g_1 e g_2 são deriváveis em I, então

$$f'(x) = \varphi(g_2(x))g_2'(x) - \varphi(g_1(x))g_1'(x), \text{ para todo o } x \in I.$$

Neste caso $I = J = \mathbb{R}$, $g_2(x) = x^2$ e $g_1(x) = x$ são funções deriváveis em $\mathbb{R}$, e φ é uma função contínua. Então:

$$f'(x) = \varphi(x^2)(x^2)' - \varphi(x)(x)' = 2x\varphi(x^2) - \varphi(x).$$

Como a função φ é derivável, pode determinar-se a função f'':

$$f''(x) = (2x\varphi(x^2) - \varphi(x))' = (2x)'\varphi(x^2) + 2x(\varphi(x^2))' - \varphi'(x) = 2\varphi(x^2) + (2x)^2\varphi'(x^2) - \varphi'(x).$$

(b) Pode determinar-se o sinal de f' analisando a sua expressão:

- $\varphi(t) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, portanto, $\varphi(x^2) > 0$ e $\varphi(x) > 0$, independentemente do x;
- $2x < 0, \forall x < 0$, logo $2x\varphi(x^2) < 0$, em $]-\infty, 0[$.

Então, $f'(x) = 2x\varphi(x^2) - \varphi(x) < 0$, $\forall x < 0$ e, portanto, f é (estritamente) decrescente neste intervalo.

(c) Como $f(0) = \int_0^0 \varphi(t)\,dt = 0$ e f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$, então, $f(x) > 0$ neste intervalo (se a função decresce até $x = 0$, o seu valor para $x < 0$ tem que ser positivo).

Repare-se que f tem um outro zero em $x = 1$: $f(1) = \int_1^{1^2} \varphi(t)\,dt = \int_1^1 \varphi(t)\,dt = 0$.

Uma das propriedades do integral definido afirma o seguinte:

Seja f uma função integrável em $[a, b]$, com $a < b$. Se $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Ora, no intervalo $]0, 1[$, $x > x^2$, portanto

$$\int_x^{x^2} \varphi(t)\,dt = -\int_{x^2}^{x} \varphi(t)\,dt < 0 \text{ (porque } \int_{x^2}^{x} \varphi(t)\,dt > 0).$$

No intervalo $]1, +\infty[$, como $x^2 > x$, $\displaystyle\int_x^{x^2} \varphi(t)\,dt > 0$.

Concluindo:

- $f(x) > 0$ se $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$,
- $f(x) < 0$ se $x \in]0, 1[$ e
- $f(x) = 0$ se $x = 0$ ou $x = 1$.

Responda nesta folha e entregue-a juntamente com as restantes folhas de prova.

7. **(32 pts)** Para cada uma das questões seguintes, assinale a opção correta.

   (a) Sejam f e g as funções definidas por $f(x) = -\arccos(x+5)$ e $g(x) = 3\,\text{arcsen}\,(x+4)$.

   (A) $\lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$. .... ☒

   (B) $\lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$. .... ☐

   (C) $\lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. .... ☐

   (D) $\lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\dfrac{1}{3}$. .... ☐

   (b) Seja f uma função contínua em $[8,13]$, derivável em $]8,13[$ e satisfazendo a condição $f(8) = f(13) = 0$. Seja ainda g uma função definida em $[8,13]$ por $g(x) = e^{-3x} f(x)$.
   Pode afirmar-se que existe $t \in]8,13[$ tal que

   (A) $f(t) = \dfrac{1}{3} f'(t)$. .... ☒

   (B) $f(t) = 3\,f'(t)$. .... ☐

   (C) $g'(t) = \dfrac{1}{3} g(t)$. .... ☐

   (D) $g'(t) = 3\,g(t)$. .... ☐

   (c) Seja f uma função real de variável real de domínio $\mathbb{R}$. Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ então o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2}\,dx$$

   (A) é convergente. .... ☒

   (B) é divergente. .... ☐

   (C) é igual a $+\infty$. .... ☐

   (D) é igual a 2. .... ☐

   (d) A área da região **limitada** pelas curvas de equação $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x^2$ e $x = -1$ pode ser dada por

   (A) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (\sqrt[3]{x} - x^2)\,dx$. .... ☐

   (B) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2 - \sqrt[3]{x})\,dx$. .... ☐

   (C) $\displaystyle\int_{-1}^{0} (\sqrt[3]{x} - x^2)\,dx + \int_0^1 (x^2 - \sqrt[3]{x})\,dx$. .... ☐

   (D) $\displaystyle\int_{-1}^{0} (x^2 - \sqrt[3]{x})\,dx + \int_0^1 (\sqrt[3]{x} - x^2)\,dx$. .... ☒