Universidade de Aveiro
Teste 2 de Cálculo II - Agrupamento 2

5 de julho de 2021
Duração total: 2 horas

NOME:____	Nº MEC.:____________
CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ____________________________________	

Questão 1 (50 pts)

Considere a equação diferencial linear de primeira ordem

$$3y' - 6y = e^{2t}cos(t).$$

(a) Utilizando a transformada de Laplace, determine a solução particular da equação que satisfaz $y(0) = -\dfrac{1}{3}$.

Ajuda: $\dfrac{-s^2+5s-7}{((s-2)^2+1)(3s-6)} = \dfrac{\frac{1}{3}}{(s-2)^2+1} - \dfrac{1}{3s-6}$.

(b) **Justifique** que a equação diferencial dada é linear de primeira ordem e determine a sua solução geral.

(c) Determine a solução particular da equação diferencial que satisfaz $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Universidade de Aveiro
Teste 2 de Cálculo II - Agrupamento 2

5 de julho de 2021
Duração total: 2 horas

Nome:______________________________	N^{o} Mec.:____________
Classificação Questão: ______________________________	

Questão 2 (35 pts)

Seja f a função definida por

$$f(x,y) = \frac{xy - y^2}{x^2}.$$

(a) Determine o domínio de f.

(b) Calcule as derivadas parciais de f, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, e justifique que f é diferenciável no seu domínio.

(c) Determine o integral geral, $y = y(x)$, da equação diferencial $y' = f(x,y)$ com $x > 0$.

Universidade de Aveiro 5 de julho de 2021
Teste 2 de Cálculo II - Agrupamento 2 Duração total: 2 horas

Nome:______________________________ Nº Mec.:______________

Classificação Questão: ______________________________

Questão 3 (45 pts)

Considere a equação diferencial linear homogénea

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

(a) Justifique que o conjunto $\{e^x, e^{2x}\}$ é um sistema fundamental de soluções para a EDO linear homogénea.

(b) Considere a equação diferencial linear completa $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}$.

(i) Justifique que não pode aplicar o Método dos Coeficientes Indeterminados para obter uma solução particular desta equação.

(ii) Determine, usando o Método da Variação das Constantes, uma solução particular desta equação.

Ajuda: $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1}\,dx = x - \ln(e^x+1) + k,\ k \in \mathbb{R}$ e $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \ln(e^x+1) + k,\ k \in \mathbb{R}$

(iii) Apresente a sua solução geral.

Universidade de Aveiro
Teste 2 de Cálculo II - Agrupamento 2

5 de julho de 2021
Duração total: 2 horas

NOME:____________________________________ Nº MEC.:____________

CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: __________________________________

Questão 4 (50 pts)

Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$.

(a) Justifique que f admite mínimo global mas não admite máximo global em $\mathbb{R}^2$.

(b) Considere a região $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

- (i) Justifique, sem os calcular, que f tem máximo e mínimo globais em A.
- (ii) Determine os máximo e mínimo globais de f em A e respetivos maximizantes e minimizantes.

  Observação: Faça o estudo dos extremos considerando o interior da região A e a fronteira de A separadamente.

Universidade de Aveiro
Teste 2 de Cálculo II - Agrupamento 2

5 de julho de 2021
Duração total: 2 horas

NOME:______________________________ Nº MEC.:____________

CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ______________________________

Questão 5 (20 pts)

Seja f a função definida por $f(t) = t^{50}$, $t \geq 0$. Determine, justificando, a transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{e^t f^{(50)}(t)\}(s),$$

onde $f^{(50)}(t)$ é a derivada de ordem 50 da função f.