Primeiro teste de Algoritmos e Estruturas de Dados

21 de Outubro de 2019 **14h10m – 15h00m**

Responda a todas as perguntas no enunciado do teste. Justifique todas as suas respostas.

Nome: André Almeida Oliveira

N. Mec.: 107637

Fórmulas:

- $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$
- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx \log n$
- $n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$

3.0 **1:** No seguinte código,

```
#include <stdio.h>

int f(int x) { return x % 3; }
int g(int x) { return x % 2; }

int main(void)
{
  int c = 0;
  for(int i = -1000;i <= 1000;i++)
    if( f(i) || g(i) )
    {
      printf("i = %d\n",i);
      (i > 0) && c++;
    }
  printf("c = %d\n",c);
}
```

1.0 **a)** para que valores da variável `i` é avaliada a função `g(x)`?

1.0 **b)** que valores de `i` são impressos?

1.0 **c)** que valor de `c` é impresso?

Respostas:

a) A função g(x) apenas é avaliado quando f(x) é falso (retorna 0), logo quando i é multiplo de 3

b) Serão impressos todos os valores que não são multiplo de 2 ou que não são multiplo de 3 ou que não são multiplo de nenhum.

c) Entre 1 e 1000 há 333 multiplo de 3, dos quais 166 são multiplos de 2, logo c = 1000 - 166 = 834

3.0 **2:** Ordene as seguintes funções por ordem crescente de ritmo de crescimento. Responda nas duas colunas da direita da tabela. Na coluna da ordem, coloque o número 1 na função com o ritmo de crescimento menor (e, obviamente, coloque o número 5 na com o ritmo de crescimento maior).

Número da função	função	termo dominante	ordem
1	$\boldsymbol{n^{99} + 1.1^n}$	1.1^n	3
2	$\dfrac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{42^n}}$	$\frac{n!}{42^n}$	5
3	$\boldsymbol{n^2 \log n^{99} + n^2 \sqrt[3]{n}}$	$n^2 \sqrt[3]{n}$	1
4	$\boldsymbol{1.2^n + n^2}$	1.2^n	4
5	$\sum_{k=1}^{n} (k^2 + k)$	$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	2

4.0 **3:** Um programador inexperiente escreveu a seguinte função para copiar uma zona de memória com `size` bytes que começa no endereço `src` para uma outra zona de memória que começa no endereço `dest`.

```
void mem_copy(char *src,char *dest,size_t size)
{
  for(size_t i = 0;i < size;i++)
    dest[i] = src[i];
}
```

Responda às seguintes perguntas, considerando que para cada uma das duas primeiras o conteúdo **inicial** do array `c` é `char c[10] = { 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 };`

1.3 **a)** qual o conteúdo do array `c` depois de `mem_copy(&c[3],&c[5],4);` ter sido executado?

Resposta:

c[0]	c[1]	c[2]	c[3]	c[4]	c[5]	c[6]	c[7]	c[8]	c[9]
0	1	2	3	4	3	4	3	4	9

1.3 **b)** qual o conteúdo do array `c` depois de `mem_copy(&c[5],&c[3],4);` ter sido executado?

Resposta:

c[0]	c[1]	c[2]	c[3]	c[4]	c[5]	c[6]	c[7]	c[8]	c[9]
0	1	2	5	6	7	8	7	8	9

1.4 **c)** num dos casos anteriores a cópia do conteúdo de parte do array não foi feita corretamente; sugira uma maneira de corrigir este problema (não é obrigatório escrever código).

Resposta:

```
void mem_copy (char *src, char *dst, size_t size)
{
  for (size_t i = size-1 ; i >=0 ; i--)
    dst[i] = src[i];
}
```

3.0 **4:** A notação "big Oh" é usualmente usada para descrever a complexidade computacional do pior caso de um algoritmo. Porquê?

Resposta (tente não exceder as 100 palavras):

A notação big Oh é usada para indicarmos o número máximo de instruções que o computador vai ter que executar para completar o código.

Estudamos este valor, pois queremos saber uma ideia do tempo máximo que o programa vai demorar, pois o tempo é diretamente proporcional à quantidade de instruções.

2.0 **5:** Escreva o código de uma função que tenha uma complexidade computacional de $\boldsymbol{\Theta(\sqrt{n})}$. Como alternativa, pode optar por escrever o código de uma função de tenha uma complexidade computacional de $\boldsymbol{\Theta(\log n)}$. (Pode usar pseudo-código, se bem que uma função em `C` será mais valorizada.)

Resposta:

```
for (int i = 0; i² < M; i++)
    printf("%d\n", i);
```

5.0 **6:** Para a seguinte função,

```
int f(int n)
{
  int r = -1;

  for(int i = -2;i <= n;i++)
    for(int j = i;j >= -3;j--)
      r += i - j;
  return r;
}
```

2.0 **a)** quantas vezes é executada a linha `r += i - j;`? $\frac{m^2}{2} + \frac{9}{2} m + 9$

2.0 **b)** que valor é devolvido pela função? $-1 + \sum_{i=-2}^{m} \sum_{j=-3}^{i} (i-j)$

1.0 **c)** qual é a complexidade computacional da função? $O(m^2)$

Respostas:

a) $\sum_{i=-2}^{m} \sum_{j=-3}^{i} 1 = \sum_{i=-2}^{m} \sum_{j=1}^{i+4} 1 = \sum_{i=-2}^{m} (i+4) = \sum_{i=1}^{m+3} (i-3+4) = \sum_{i=1}^{m+3} (i+1) = \sum_{i=1}^{m+3} i + \sum_{i=1}^{m+3} 1 = \frac{(m+3)(m+4)}{2} + m + 3 =$

$= \frac{m^2+4m+3m+12}{2} + m + 3 = \frac{m^2}{2} + \frac{7}{2} m + 6 + m + 3 = \frac{m^2}{2} + \frac{9}{2} m + 9$

Segundo teste de Algoritmos e Estruturas de Dados

18 de Novembro de 2019 **14h10m – 15h00m**

Responda a todas as perguntas no enunciado do teste. Justifique todas as suas respostas.
O teste é composto por 5 grupos de perguntas.

Nome: André Almeida Oliveira

N. Mec.: 107637

4.0 **1:** Pretende-se que a seguinte função implemente uma pesquisa binária. Complete-a (isto é, preencha as caixas).

```
int binary_search(int n,int a[n],int v)
{
  int low = [ 0 ];
  int high = [ n-1 ];
  while(high [ >= ] low)
  {
    int middle = [ (low + high) / 2 ];
    if(a[middle] == v)
      return middle;
    if(a[middle] [ > ] v)
      [ high ] = middle - 1;
    else
      [ low ] = middle + 1;
  }
  return [ -1 ];
}
```

Indique (não é preciso justificar) qual é a complexidade computacional desta função.

Resposta: O(log n)

4.0 **2:** Explique como está organizado um *max-heap*. Para o *max-heap* apresentado a seguir, insira o número 8. Não apresente apenas o resultado final; mostre, passo a passo, o que acontece ao *array* durante a inserção. Em cada linha, basta escrever as entradas do *array* que foram alteradas.

Respostas:

9	6	7	3	1	4	5	2	8
			8					3
	8		6					
9	8	7	6	1	4	5	2	3
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]

3.0 **3:** Pretende-se implementar uma fila (*queue*) usando um *array* circular. O código seguinte define a estrutura de dados a usar (para simplificar, vamos usar variáveis globais).

```
#define array_size  1024

int array[array_size];
int read_pos = 1;  // incremented after reading
int write_pos = 0; // incremented before writing
int count = 0;     // equal to (read_pos - write_pos - 1) % array_size
```

Responda às seguintes perguntas:

1.5 **a)** Por que é que neste caso é vantajoso usar um *array* circular?

Resposta:

Uma queue é uma estrutura do tipo FIFO (first in, first out) onde o ponteiro read-pos aponta para o primeiro elemento e write-pos para o último. Usar um array circular é vantajoso, pois podemos simplesmente aceder ao índice de um elemento que queremos remover em vez de percorrer uma lista ligada por inteiro

1.5 **b)** Use algumas das seguintes linhas de código para implementar a função `enqueue` (que coloca um item de informação na fila). Risque as linhas que estão a mais.

```
int enqueue(int v)
void enqueue(int v)
{
 if(count == 0) exit(1); // underflow
  if(count == array_size) exit(1); // overflow
  array[write_pos] = v;
 v = array[write_pos];
  write_pos = (write_pos + 1 == array_size) ? 0 : write_pos + 1;
 write_pos = (write_pos > 0) ? write_pos - 1 : array_size - 1;
 array[write_pos] = v;
 v = array[write_pos];
 count--;
  count++;
 return v;
}
```

5.0 **4:** Um programador pretende utilizar uma *hash table* (tabela de dispersão, dicionário) para contar o número de ocorrências de palavras num ficheiro de texto. O programador está à espera que o ficheiro tenha cerca de 6000 palavras distintas, pelo que usou uma *hash table* do tipo *separate chaining* com 10007 entradas, e usou a seguinte *hash function*:

```
unsigned int hash_function(unsigned char *s,unsigned int hash_table_size)
{
  unsigned int sum;

  for(sum = 0;*s != '\0';s++)
    sum += (unsigned int)(*s);
  return sum % hash_table_size;
}
```

Infelizmente, as expetativas do programador estavam erradas, e o ficheiro de texto era muito maior que o esperado, tendo cerca de 1000000 palavras distintas. Responda às seguintes perguntas:

2.0 **a)** A *hash function* apresentada acima é muito má. Porquê? Sugira uma outra que seja bem melhor.

3.0 **b)** Uma implementação do tipo *separate chaining* usa habitualmente uma lista ligada para armazenar todas as chaves (neste caso, as palavras) para as quais a *hash function* tem o mesmo valor. Que vantajens/desvantagens teria uma implementação que usa uma árvore binária ordenada em vez da lista ligada? E se for uma árvore binária ordenada e balanceada?

Respostas:

a) Por um lado, esta função não retorna valores uniformes pela hash table, pois apenas retorna uma gama bastante baixa de valores. Por outro lado, não é capaz de distinguir anagramas.

b) A busca, inserção e remoção de elementos seria mais eficiente em termos de tempo, pois a árvore binária ordenada é uma estrutura de dados auto-balanceada e tem uma complexidade $O(\log n)$, enquanto a lista ligada tem complexidade $O(n)$. Também ocuparia menos espaço, pois as árvores binárias têm menos overhead de dados do que as listas ligadas.
A implementação seria mais complexa, pois é necessário manter a árvore binária ordenada, enquanto a lista ligada é mais simples de implementar.
Se a árvore binária for balanceada, pode melhorar ainda mais a eficiência da busca, inserção e remoção de elementos, pois o tempo de acesso seria garantido $O(\log n)$ independentemente da estrutura de dados. No entanto, a manutenção de uma árvore balanceada é mais complexa do que uma árvore binária ordenada não balanceada.

4.0 **5:** Apresentam-se a seguir várias funções que visitam todos os nós de uma árvore binária, e mostram-se várias ordens pelas quais a função `visit` foi chamada para cada um dos nós (1 significa que o nó correspondente foi o primeiro a chamar a função `visit`, 2 que foi o segundo, e assim por diante). Para cada uma das ordens apresentadas, indique que função, ou funções, deram origem a essa ordem.

```
void f1(tree_node *link)
{
  queue *q = new_queue();
  enqueue(q,link);
  while(is_empty(q) == 0)
  {
    link = dequeue(q);
    if(link != NULL)
    {
      visit(link);
      enqueue(q,link->left);
      enqueue(q,link->right);
    }
  }
  free_queue(q);
}
```

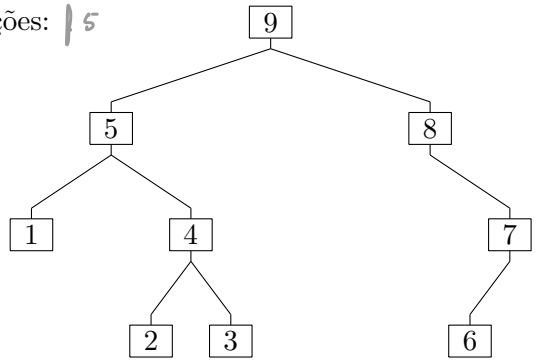
```
void f2(tree_node *link)
{
  stack *s = new_stack();
  push(s,link);
  while(is_empty(s) == 0)
  {
    link = pop(s);
    if(link != NULL)
    {
      visit(link);
      push(s,link->right);
      push(s,link->left);
    }
  }
  free_stack(s);
}
```

```
void f3(tree_node *link)
{
  if(link != NULL)
  {
    visit(link);
    f3(link->left);
    f3(link->right);
  }
}
```

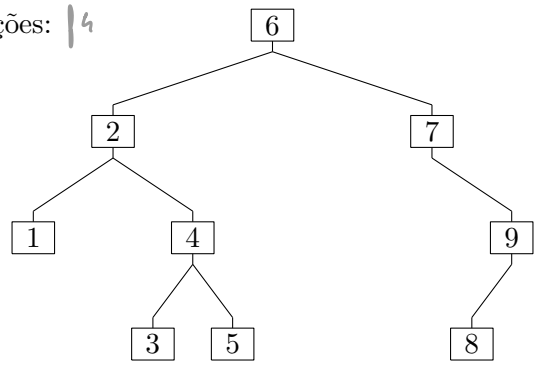
```
void f4(tree_node *link)
{
  if(link != NULL)
  {
    f4(link->left);
    visit(link);
    f4(link->right);
  }
}
```

```
void f5(tree_node *link)
{
  if(link != NULL)
  {
    f5(link->left);
    f5(link->right);
    visit(link);
  }
}
```

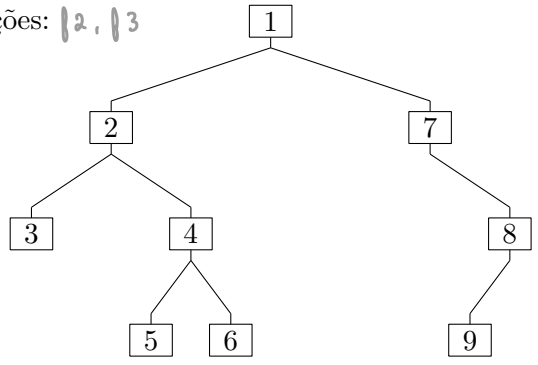
Funções: f5



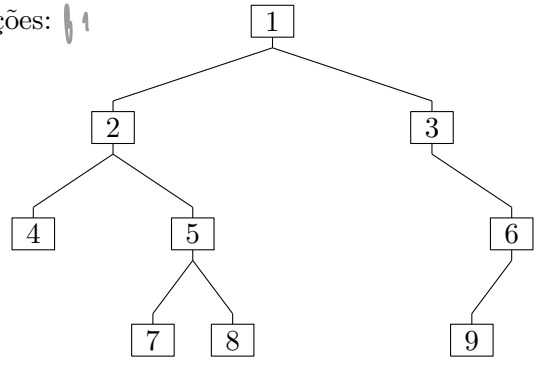
Funções: f4



Funções: f2, f3



Funções: f1



Terceiro teste de Algoritmos e Estruturas de Dados

9 de Dezembro de 2019 **14h10m – 15h00m**

Responda a todas as perguntas no enunciado do teste. Justifique todas as suas respostas.
O teste é composto por 5 grupos de perguntas.

Nome: André Almeida Oliveira

N. Mec.: 107637

4.0 **1:** O algoritmo *merge sort* divide o *array* a ser ordenado ao meio, ordena (recursivamente) cada uma das duas partes, e depois junta-as. A sua complexidade computacional é $\boldsymbol{\Theta(n \log n)}$. Um aluno está convencido que se em vez de se dividir o array em duas partes se se dividir em três partes (todas mais ou menos do mesmo tamanho), então a complexidade computacional desta variante do *merge sort* será ainda mais baixa. Responda às seguintes perguntas:

1.0 **a)** Que estratégia algoritmica usa o *merge sort*? Divide and Conquer

2.0 **b)** O aluno tem razão? Justifique.

1.0 **c)** Indique uma desvantagem do *merge sort*, quando comparado com o *quicksort*.

Respostas:

b) $a = 3$ -> operações na 3 arrays
$b = 3$ -> divisão do array em 3 partes
$T(n) = O(n^{\log_3 3} \log n) = O(n \log n)$, pois $\log_3 3 = 1$
O aluno não tem razão, pois a complexidade mantém-se

c) O merge sort precisa de mais memória, como por exemplo, um buffer que é usado para a união de 2 subarrays

O *master theorem* afirma que se $\boldsymbol{T(n) = aT(n/b) + f(n)}$ então

- se $\boldsymbol{f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})}$ para um $\boldsymbol{\epsilon > 0}$, então $\boldsymbol{T(n) = \Theta(n^{\log_b a})}$,
- se $\boldsymbol{f(n) = \Theta(n^{\log_b a})}$, então $\boldsymbol{T(n) = O(n^{\log_b a} \log n)}$,
- se $\boldsymbol{f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})}$ para um $\boldsymbol{\epsilon > 0}$ e se $\boldsymbol{af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)}$ para $\boldsymbol{c < 1}$ e $\boldsymbol{n}$ suficientemente grande, então $\boldsymbol{T(n) = \Theta(f(n))}$.

6.0 **2:** Num tabuleiro de xadrez, pretende-se ir do canto inferior esquerdo $(0,0)$ para o canto superior direito $(7,7)$ fazendo movimentos apenas para a direita e para cima. Quando se está em (x,y), o custo de ir para a direita é dado por R_{xy} e o custo de ir para cima é dado por U_{xy}. O custo total é a soma dos custos dos **14** movimentos efetuados (**7** para a direita e **7** para cima). Sabe-se que $4 \leq R_{xy} \leq 10$ e que $6 \leq U_{xy} \leq 20$. No programa que foi usado para calcular o **custo mínimo** para ir de $(0,0)$ até $(7,7)$, os valores de R_{xy} e U_{xy} estão guardados nas matrizes

```
int R[7][8], U[8][7]; // initialized elsewhere
```

Responda às seguintes perguntas:

3.0 **a)** Complete o seguinte código, que resolve o problema usando a técnica *branch-and-bound*.

```
void go_to(int x,int y,int partial_cost,int *min_cost) {
  if(partial_cost + [   ] * (7 - x) + 6 * ([   ]) [   ] *min_cost) return;
  if(x < 7) go_to(x + 1,y,partial_cost + [      ],min_cost);
  if(y < 7) go_to(x,y + 1,partial_cost + [      ],min_cost);
  if(x == 7 && y == 7) *min_cost = partial_cost;
}
int compute_min_cost_bb(void) {
  int min_cost = [      ]; go_to(0,0,[   ],&min_cost); return min_cost; }
```

3.0 **b)** Pretende-se também resolver este problema usando programação dinâmica. Para isso, o custo mínimo para ir de $(0,0)$ até (x,y) é guardado na matriz

```
int C[8][8];
```

Complete o seguinte código. (No fim, estamos interessados no valor de `C[7][7]`, mas, para o calcular, dá jeito conhecer os outros valores.)

```
int update_C(int x,int y,int C[8][8]) {
  if(x [ < ] 0 || y < 0) return 1000000000;
  if(C[x][y] [ < ] 0)
  {
    int Cx = update_C(x - 1,y,C) + [ R[x-1][y] ];
    int Cy = update_C(x,y - 1,C) + [ U[x][y-1] ];
    C[x][y] = (Cx < Cy) ? Cx : Cy;
  }
  return C[x][y]; }
int compute_min_cost_dp(void) {
  int C[8][8]; // -1 means not yet known
  for(int x = 0;x < 8;x++)
    for(int y = 0;y < [ 8 ];y++)
      C[x][y] = (x == 0 && y == 0) ? 0 : [ -1 ];
  update_C([ 7 ],[ 7 ],C);
  return C[7][7]; }
```

3.0 **3:** Os **5** vértices, numerados de **0** a **4**, de um grafo têm as seguintes listas de adjacência:

0	**→ 1 → 3 → 4 → NULL**
1	**→ 4 → 2 → NULL**
2	**→ NULL**
3	**→ 2 → NULL**
4	**→ 3 → 1 → NULL**

Responda às seguintes perguntas:

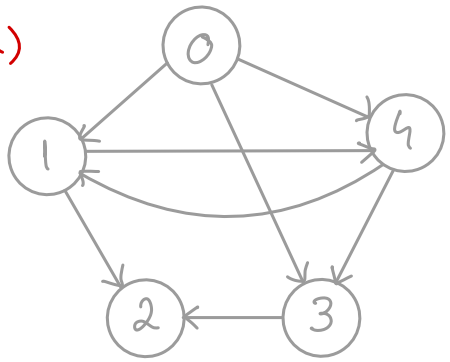
1.0 **a)** Desenhe o grafo.

1.0 **b)** Represente o grafo usando uma matriz de adjacência.

1.0 **c)** É possível representar este grafo usando um único inteiro de **32** *bits*? Se sim, como? Se não, por que não?

Respostas:

a)



b)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0
3	1	0	0	0	1
4	1	1	0	0	0

b) Será possível, pois no máximo teria $5 \times 5 = 25$ arestas, logo 25 bits necessária que é menor que 32

3.0 **4:** Explique para que serve e como funciona o algoritmo *union find*.

O algoritmo union find pode encontrar a qual conjunto um certo elemento pertence e unir conjuntos existentes. Este algoritmo é altamente utilizado em problemas relacionados com grafos, como por exemplo, unir dois componentes conexos.

4.0 **5:** Considere um labirinto desenhado na superfície de uma esfera. Pretende-se ir, a andar, do pólo norte até ao pólo sul. (Considere que a esfera tem um raio relativamente pequeno, pelo que ir a pé não demora meses, mas pode demorar dias.) Responda às seguintes perguntas:

1.0 **a)** Que algoritmo usaria para encontrar uma solução? Depth first search

1.5 **b)** Que material levaria consigo para o ajudar?

1.5 **c)** Acha que é possível encontrar a solução mais curta de uma forma eficiente? (Não se esqueça que tem de fazer todo o caminho a pé.) Porquê?

Answers:

b) Algum objeto para marcar a zitica por onde já tenha passado

c) Não, a única maneira "mais eficiente" neste caso seria usar breath first search, mas teríamos de percorrer uma distância muito grande. Se já conhecêssemos o labirinto na totalidade, poderíamos usar o algoritmo dijkstra calculando o caminho mais curto