

普通物理の超絶援助

General Physics Assistance

混合普物 (H) 笔记小组 ◎ 著

目录

前言	i
约定	iii
正文部分	1
第一章 测量	2
1.1 单位与量纲	2
1.2 数据处理	3
1.3 课后习题: 测量	3
第二章 质点运动学与动力学基础	4
2.1 一维运动	4
2.1.1 质点运动学的基本概念	4
2.1.2 质点运动学有关的计算	5
2.2 高维的质点运动	6
2.2.1 向量	7
2.2.2 向量与标量	8
2.2.3 向量的大小与单位向量	8
2.2.4 向量的运算	9
2.2.5 极坐标	10
2.2.6 基变换	11

2.2.7	质点运动的向量表示法	12
2.2.8	抛体运动	13
2.2.9	匀速圆周运动	14
2.2.10	变速圆周运动	15
2.3	牛顿定律	16
2.3.1	牛顿第一定律	16
2.3.2	牛顿第二定律	17
2.3.3	牛顿第三定律	17
2.3.4	惯性参考系与非惯性参考系	17
2.3.5	惯性系中的相对运动	17
2.3.6	非惯性系中的相对运动	18
2.4	功与动能	19
2.4.1	恒力做功	19
2.4.2	变力做功	19
2.4.3	动能	21
2.4.4	动能定理	21
2.4.5	功率	21
2.5	能量守恒	22
2.5.1	动能定理复习	22
2.5.2	势能	22
2.5.3	保守力与非保守力	22
2.5.4	机械能守恒	23
2.5.5	系统的平衡性	24
2.6	动量守恒	24
2.6.1	动量定理	24
2.6.2	动量守恒	25
2.6.3	碰撞	26
2.6.4	质心系中的碰撞	26
2.7	重力	27
2.7.1	牛顿万有引力定律	27
2.7.2	行星运动以及开普勒定律	28

2.7.3 测量引力常数	29
2.7.4 自由落体加速度	30
2.7.5 卫星运动	31
2.7.6 火箭推进	32
2.8 课后习题：质点运动学与动力学	33
第三章 转动动力学	36
3.1 刚体	36
3.2 转动	36
3.2.1 极坐标系	36
3.2.2 叉乘	38
3.2.3 运动学概念	40
3.2.4 动力学概念	41
3.3 平行轴定理/施泰纳定理	43
3.4 刚体中的能量	44
3.4.1 纯转动中的能量	44
3.4.2 同时发生转动与平动时的能量	44
3.5 角动量	45
3.5.1 定义	45
3.5.2 角动量守恒	46
3.5.3 质心系转化	46
3.6 重心	47
3.7 非惯性系情形	47
3.7.1 非惯性力	47
3.7.2 科里奥利力 *	47
3.8 回顾与总结	49
3.9 课后习题：转动动力学	50
第四章 流体力学	54
4.1 流体的定义与性质	54
4.2 流体动力学	56
4.3 课后习题：流体力学	57

第五章 振动与波	59
5.1 平衡	59
5.2 振动	61
5.2.1 简谐运动	61
5.2.2 用匀速圆周运动表达简谐运动	63
5.2.3 阻尼振动 *	63
5.2.4 受迫振动 *	65
5.3 波	68
5.3.1 简介	68
5.3.2 机械波	68
5.3.3 脉冲波	69
5.3.4 波的叠加	70
5.3.5 波动方程	73
5.3.6 周期波	75
5.3.7 驻波	80
5.3.8 弹性	83
5.3.9 声波	84
5.3.10 多普勒效应	87
5.4 课后习题: 振动与波	89
第六章 狹义相对论	91
6.1 引入	91
6.1.1 绝对时空观	91
6.1.2 相对时空观	92
6.2 洛伦兹变换	93
6.2.1 尺缩效应	94
6.2.2 动钟变慢	96
6.2.3 速度变换	97
6.3 相对论能动量	99
6.3.1 相对论动量	99
6.3.2 相对论能量	99

6.3.3 不同惯性系中的转换	100
6.4 一些关联	101
6.4.1 量纲统一	101
6.4.2 不变量	103
6.5 多普勒效应	104
6.6 相对论的几何表述	105
6.6.1 阿氏时空	105
6.6.2 阿氏几何中的洛伦兹变换	107
6.6.3 时序和因果关系	108
6.6.4 回顾	110
6.7 课后习题：狭义相对论	114
第七章 热力学	121
7.1 导论	121
7.2 理想气体	121
7.3 分子动理论	122
7.3.1 压强的微观解释	122
7.3.2 能量均分原理	123
7.3.3 麦克斯韦分布	124
7.3.4 玻尔兹曼分布	125
7.3.5 平均自由程	126
7.3.6 范德华状态方程	126
7.4 热力学第零定律	126
7.4.1 引言	126
7.4.2 基本概念	127
7.4.3 温度	128
7.5 热力学第一定律	129
7.5.1 热与功	129
7.5.2 过程介绍	130
7.6 热力学第二定律	132
7.6.1 热机	132

7.6.2 熵	133
7.7 热力学第三定律	135
7.8 信息	135
7.9 课后习题：热力学	136
第八章 电磁学	141
8.1 导论	141
8.2 矢量分析基础 *	143
8.2.1 空间坐标系	143
8.2.2 梯度、散度、旋度	145
8.2.3 矢量恒等式与相关定理	146
8.3 高斯定理	147
8.4 电势	150
8.5 电偶极子	151
8.5.1 电偶极子及其性质	151
8.5.2 电偶极子总结	154
8.6 导体与等势面	155
8.7 电容与电容器	156
8.7.1 定义与计算	156
8.7.2 电容的性质	158
8.8 电介质的极化	160
8.8.1 极化的定义	160
8.8.2 电介质的高斯定律及其应用	162
8.9 欧姆定律	164
8.9.1 稳恒电流	164
8.9.2 欧姆定律	165
8.10 电路理论	166
8.10.1 基尔霍夫定律	167
8.10.2 一阶电路与复杂电路 *	168
8.11 磁场	171
8.12 安培定律	173

8.13 磁偶极子	175
8.14 磁介质的磁化	177
8.14.1 磁化的定义	177
8.14.2 磁介质的安培定律及其应用	178
8.15 电磁感应与电感	181
8.15.1 法拉第电磁感应定律与动生电动势	181
8.15.2 电感及其性质	183
8.15.3 互感	185
8.16 LC 电路与电路震荡	187
8.17 边界条件	187
8.17.1 电场和电流密度边界条件	187
8.17.2 磁场边界条件	189
8.18 电磁波	190
8.18.1 位移电流	190
8.18.2 电磁波的性质	192
8.19 总结	195
8.20 课后习题：电磁学	196
第九章 光学	201
第十章 量子物理	202
10.1 一切从光开始	202
10.2 康普顿效应	205
10.3 关于原子稳定性的讨论	206
10.4 不确定性原理	207
10.5 薛定谔方程	209
10.5.1 薛定谔方程	209
10.5.2 一维无限深势阱	212
10.5.3 量化能量与检测概率	213
10.5.4 隧穿效应	214
10.6 氢原子	216
10.7 X 射线、激光与能带	217

10.7.1 X 射线	218
10.7.2 激光	219
10.7.3 能带	223
10.8 课后习题：量子物理	225
证明部分	228
第一章 测量	229
第二章 质点运动学与动力学	230
第三章 转动动力学	237
第四章 流体力学	245
第五章 振动与波	246
第六章 狹义相对论	256
第七章 热力学	265
7.1 Part 1	265
7.2 Part 2	271
第八章 电磁学	279
第九章 光学	290
第十章 量子物理	291
答案部分	298
第一章 测量	299
第二章 质点运动学与动力学基础	300
第三章 转动动力学	305
第四章 流体力学	315

第五章 振动与波	319
第六章 狹义相对论	324
第七章 热力学	341
第八章 电磁学	354
第九章 光学	368
第十章 量子物理	369
后记	375

前言

第一版前言

在普物 (H) 的学习中，深感几个问题：

- 英文好难，不想看 ppt
- 老师讲得好抽象 (我的问题，老师其实讲得很好了)，听不懂
- 作业好烦，看不懂也找不到答案
- 小测好杂，内容好广
- 资料好少，复习好难
- 考试好可怕，还要读英文题目

因此，我产生了一个念头：编写一份中英混搭的普物资料，把 ppt 和其它教科书全都迭代掉。这个想法可能有些大胆，但我依旧相信，我们可以做到。

感谢普物 (H) 笔记计划的所有人 (详见后记致谢名单)，感谢大家的热情加入与支持。

另外，感谢学长薛宇航及其朋友提供的普物笔记，没有他们提供的资料，这份文档的出生将会走更长更长的路。

该笔记的内容基本基于 2023 学年春夏学期路欣老师的 PPT，不保证之后普物 (H) 教学内容是否有所调整，请使用者自行斟酌。另外，习题部分也取自 2023 学年春夏学期的课后作业与小测，并对部分题目做了改编。

本书中用到的图片，如果是非矢量图的，且未说明出处的，则来自 PPT；其它非矢量图则都注明了出处；矢量图均使用 tikz 绘制。

第二版前言

这是本资料的第二版，主要对普通物理学 II(H) 的内容，即电磁学、光学以及量子物理的内容进行补充。

编写这样一份资料实在是一个大工程，尤其是在从 0 到 1 的初创阶段，且主要编者普遍升入较高年级的前提下。最初，我只是希望将自己不那么痛苦的普物课程经历以及其中的总结的经验编写汇总，但整份文档实在太过于冗余。此时幸有很棒的同学提出了普物笔记计划，我也受邀欣然加入并提供了一点不足道的架构解析，参与第一版的流体力学部分介绍。

~~斑鸠~~ 为第一版资料的诞生付出了相当的精力，以至于后续的第二学期课程资料不便继续高强度整理。因此我在沟通后继续与 ~~大海怪~~ 学长完善后三章节的内容。在此也继续感谢所有参与同学的支持，以及尤其感谢 ~~斑鸠~~ 为此编写的相当完善的 LATEX 相关文件，第二版的改动继续沿用了第一版的架构和相关模块。

在第二版中，尽管只有新增三个章节，但知识密度更大。同样的，我们也将尽可能详细说明每一部分的内容，以做到让各位“知其然还知其所以然”。

该部分涉及的第八、九、十章节的内容以及其中重要定理的证明主要基于 2023 学年 wwy 老师的 PPT，并结合 fmh 老师课件补充。每一位老师的内容不完全相同，若有希望增加的知识可以尽管提出。此外，在编写相关内容的过程中，编者认为部分知识仅凭借 PPT 可能不足以做到较好的理解，因此参考了以下相关资料或课程内容：

- 第八章电磁学：教材《电磁场与电磁波》(正文与习题节选)、课件《电路与模拟电子技术》(正文)
- 第九章光学：暂无
- 第十章量子物理：《量子力学教程》(曾谨言)、《量子力学概论》(格里菲斯，美，中译版)，部分概念参考百度百科以及知乎。

本书中在第八、九、十章用到的图片主要来自于 PPT 及相关参考文件中的插图及其额外修改，以及来源于网络的图片。

约定

不要跳过一本书的约定，因为它能帮助你更好地阅读学习。

本书约定如下：

语言风格 中英混搭。可能一个中英混搭的文档看起来不伦不类，但我希望它能让还没那么习惯英文的学生能更好地度过这一段过渡期。本文档内，**解释说明**的语句将采用**中文**，而对于**问题的叙述**，以及一些**关键词**，将采用**英文**，以保证大家的英语阅读思维能得到培养，不至于面对作业题与考试题束手无措。

交互图层 很多关键词往往头一次见不是那么容易认得，因此，本文档提供交互图层：我们默认，当文字的颜色显示为**青色**（暗色版为**青绿色**）时，它将是可交互的（这个除外），读者可以通过在 PDF 阅读器中打开并用鼠标点击的方式切换它的中英文显示。当然，一些并非关键词，但初见可能不认识的词，也会用该方式处理，便于读者查找中文意思。

如果需要实现交互功能，可以选择 Adobe Reader, Foxit Reader 或 Okular 作为你的 pdf 阅读器，其中 Adobe Reader, Foxit Reader 收费^[1]，Okular 开源。相对而言，前两者功能更强大，Okular 则更简洁，轻便^[2]。如果有阅读和批注需要，Okular 会是很好的选择^[3]。

^[1] Foxit Reader 在浙大正版软件平台中可以下载。

^[2] 这是对于其支持可交互图层渲染和批注的功能而言的，600M 的大小比之 3G 的 Foxit Reader 当然算轻便，但和 Sumatra 那种完全旨在阅读的 pdf 阅读器来比当然算不了轻便。

^[3] 需要注意的是，右键打开含“#”目录下的 pdf 文件时，Okular 会出现显示错误。事实上，一些程序由于种种问题，在命名含“#”的文件夹内的工作可能会不正常，所以不建议命名文件夹时含有“#”。

对于 linux 用户，另外推荐使用 evince 阅读器，它支持交互图层，且性能表现良好。

使用其它 pdf 阅读器时，为了防止阅读器报错，请选择本书的稳定版。稳定版会直接显示英文与中文，不再支持交互功能。

超链接 为了便于阅读，在文档中将出现许多的超链接。我们默认，当文字的颜色显示为蓝色 (暗色版为黄色) 时 (这个也除外)，它将可以作为超链接被点击。

跳转卡片 很多理科书目的前后引用在实际阅读中其实是一件麻烦的事情，本书将提供可以反向跳转的的超链接跳转卡片 (如右)₁，读者可以通过在 PDF 阅读器中打开并用鼠标点击的方式点击跳转 ([章 零₁~P iv](#))。

I – P iv 引

* 标记 普物 I 中的部分内容较为困难，在实际考核中较少涉及。本书中部分内容用 * 标记，表示这些内容只需了解即可，不必掌握证明。

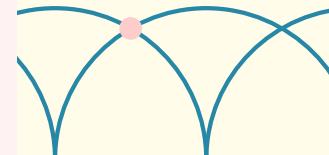
矢量与标量 本书中，不加粗的符号（如 v ）表示标量或取矢量的大小；加粗的符号（如 \mathbf{v} ）则表示矢量。

建议的阅读方式 本书因为叙述要求，在内容顺序上与课堂可能有一定出入。如果决定使用本书学习普物 (H)，请确保学习的连续性，不要碎片式学习，以免在写作业时遇到困难。

对于初学者，建议兼顾笔记的正文部分和证明部分；若是补天选手，如无特别说明，阅读正文部分即可。本书的习题部分都有详细的解答，可以自行练习。

正文部分

G.P.A



1

Measurement

本章节内容较为简单，一般相关题目会出现在日常上课的课后小测与作业内，大型考试基本不涉及。重点是掌握物理学的基本单位，以及利用国际单位制以及相关比例关系推导特殊物理量的单位表达式与可能的公式表达式。

1.1 Unit & Dimension

- *Basic Quantity* e.g. Length(L), Mass(M), Time(T)

在自然世界中，我们会用各种物理量来描述物质的性质。就像在平面几何中我们可以基于几大公理推出各种定理，在物理中，我们也可以规定一些“基本的量”，使得所有的物理量可以由这些量导出。自然地，我们就称呼这些量为基本量。

- *Unit* 在规定好一些物理量之后，我们会想办法去度量它们。既出于定量测量的要求，又出于减少物理公式参数的考量，人们定义了各种各样的单位。

- *SI Units* (1) e.g. meter(m), kilogram(kg), second(s)

(1) SI ⇔ International System of Units

- *Non SI Units* e.g. mm, μm, g

If you *convert* everything to the basic SI units, you can *omit* them during the calculation, but remember to put back the correct units at the end.

事实上，可以在计算过程中省略的约定也算是国际单位制存在的意义之一（*斑斑*: 大概吧）。

- *Dimension* 一个物理量的量纲指的是这个物理量关于基本量的导出式。

e.g. 速度的量纲可以表示为 $[v] = \frac{L}{T}$

- *Dimension Analysis* 量纲分析是检验物理公式正确性的好方法。简而言之，你可以简单地通过分析一个物理等式左右两边的量纲是否一致来初步判断这个等式可不可能成立。当然，量纲分析也可以作为导出实验公式大方向的一个指导，又或者……是你忘记了公式中的某一个物理量时尝试硬添物理量时的救命稻草。

1.2 Data Processing

这部分普通物理学实验 I^[1]会详细说明并实际计算运用，非常抱歉，此处略去。

1.3 课后习题: 测量

习题 1.1 量纲分析—*Solution 1.1* ~ P 299

The *displacement* of a particle moving under *uniform acceleration* is some function of the *elapsed time* and the acceleration. Suppose we write this displacement $s = ka^m t^n$, where k is a *dimensionless constant*.

- (1) Show by dimensional analysis that this expression is satisfied if $m = 1$ and $n = 2$.
- (2) Can this analysis give the value of k ?

^[1]说到这里，斑鸠还编写了一个用于普物实验数据处理的软件，链接为 <https://github.com/CrazySpottedDove/Lab-Assistance.git>，如有需要，可以自行下载。

2

Fundamentals of particle kinematics and dynamics

质点运动，即一个理想化的、质量集中于单一点的物体的运动。尽管现实世界中的物体都有一定的尺寸和形状，但通过将其简化为质点，我们可以更容易地分析和描述它们的运动特性。质点运动学就是研究质点运动的学科。它不关心引起运动的力，而是专注于描述运动本身：如位置、速度、加速度等随时间变化的规律。通过掌握这些基础的运动学概念和方程式，我们可以更好地理解和预测各种自然现象和工程应用中的运动行为。

相信大家在高中的时候都和质点运动学打过交道，那么大学的质点运动学和高中的又有什么不同呢？简而言之，就是加入了微积分这个强大的工具。

了解了运动学相关的知识后，我们将研究学习引起运动的力及其作用，包括功、能、动量等概念，也就是动力学的内容。

2.1 *Motion in 1D*

讲质点运动，首先从一维的运动说起。

2.1.1 *Basic Concepts of Particle Kinematics*

相信大家在高中时候以及对质点运动学的基本概念比较了解了，不多赘述，汇总如下^[1]：

^[1]此时，我们还没有引入向量的观点，因此这里的符号全都是标量形式。

- *Displacement* $\Delta x = x_f - x_i$
- *Average Velocity* $v_{avg} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$
- *Average Speed* $s_{avg} = \frac{\text{total distance}}{\text{total time}}$
- *Instantaneous Velocity* $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$
- *Instantaneous Speed* $|v| > 0$, 即瞬时速度的大小
- *Average Acceleration* $a_{avg} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$
- *Instantaneous Acceleration* $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

注意这里的下标, avg 代表 average, i 代表 initial, f 代表 final。做题的时候自己写上这样的下标也是很清晰的。

2.1.2 Calculations Related to Particle Kinematics

e.g. 已知位移与时间的关系 $x = At^n$, 可求得 t 时刻的瞬时速度为 $v = \frac{dx}{dt} = Ant^{n-1}$ 。进一步也可以求得 t 时刻的瞬时加速度, 留给读者。

那么, 上面例子中的过程能否反向进行呢? 知道瞬时加速度与时间的关系, 能否推出速度、位移与时间的关系呢? 下面是一个例子:

已知加速度关于时间的表达式为 $a = a(t)$, 初始时刻为 t_i , 那么由于 $a = \frac{dv}{dt}$, 形式上移项可得 $dv = a(t) dt$ 。等式两边从初始时刻 t_i 到当前时刻 t 积分, 可得⁽¹⁾

$$v(t) = \int_{t_i}^t a(t') dt' + C_1$$

(1) 左右两边的常数项合并了。

代入 $t = t_i$, 可求得 $C_i = v_i$ 。如此, 我们便得到了速度关于时间的表达式

$$v(t) = \int_{t_i}^t a(t') dt' + v_i$$

在上面计算的基础上, 进一步可以求得位移关于时间的表达式 (已知初始位

移为 x_i):

$$\begin{aligned}x(t) &= \int_{t_i}^t v(t') dt' + x_i \\&= \int_{t_i}^t dt' \left[\int_{t_i}^{t'} a(t'') dt'' + v_i \right] + x_i \\&= x_i + (t - t_i)v_i + \int_{t_i}^t dt' \int_{t_i}^{t'} dt'' a(t'')\end{aligned}$$

至此，我们已经得到了相当具有普遍性的两个公式，尽管它们显得十分复杂。如果加速度是一个常数 a ，那么化简这两个公式，就可以得到大家高中时候倒背如流的几个公式：

$$\begin{aligned}v(t) &= v_i + at \\x(t) &= x_i + v_i t + \frac{1}{2} a t^2 \\x(t) - x_i &= \frac{1}{2}(v_i + v_f)t = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2a}\end{aligned}$$

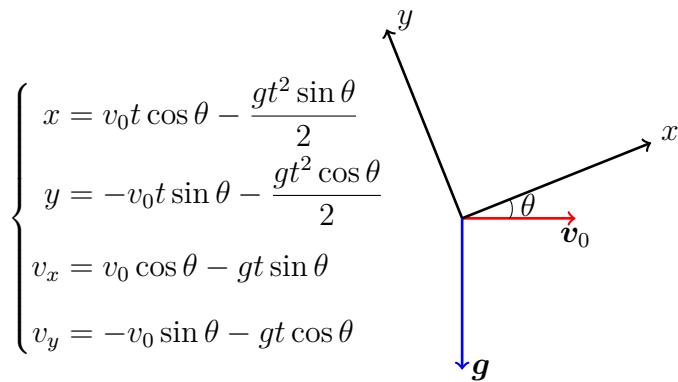
计算练习：已知 $a(t) = at^\alpha$ ，其中 α 是正的常数， v_i, x_i 都是已知的，试求出 $v(t)$, $x(t)$ 这两个表达式。

2.2 Motion in High Dimensions

看起来很高大上的节标题，其实就是引入向量来更好地研究质点运动。

首先让我们来回忆一下，高中时期我们是怎么研究一个小球的平抛运动的。很自然地，我们一般会从竖直方向和水平方向两个方向来分解这个平抛运动，得到两个还算简单的表达式，并认为我们成功描述了这个平抛运动。

但是，如果大家尝试从水平和竖直两个方向去描述一个斜抛运动，或是在一个倾斜的坐标系下去描述一个平抛运动，就会发现，结果是一个带着三角函数的复杂式子。这仅仅只是对于二维的、一个质点的讨论。可以想象，用这种 track each component 的研究分量的方式讨论更高的维度或是更多的质点，会有更多的麻烦。



在倾斜的坐标系下描述平抛运动

那么，有什么方法能够让我们避开对于多个分量的繁琐讨论呢？没错，就是 *vector*。

2.2.1 Vector

- *vector*: A *quantity* that has both *direction* and *magnitude* and also obeys the laws of vector addition ⁽²⁾.

向量的常见表示方法：**a**(boldface 粗体表示) 或者 **a**。本书中采用后者。

用向量来研究高维质点运动的好处：

⁽²⁾ 我们假设读者已经知道向量加法规则，此略。

- *concise*: 精确而简洁。
- *independent of the choice of the coordinate axes*: 用向量研究质点运动时，确定坐标系不再是必要的。

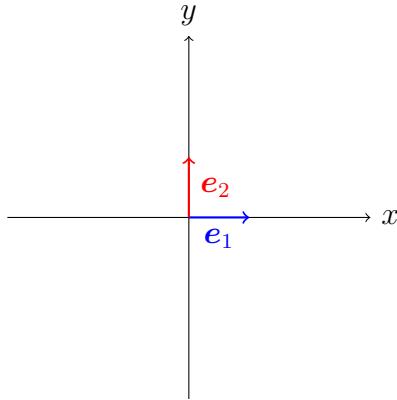
虽然说向量与坐标系的选取无关，但我们常常在一个给定的坐标系下去描述一个向量。对于不同的坐标系及不同的基底 (base)，同一个向量的表示也是不一样的。如何理解这句话呢？给大家看一个例子₄:

首先，我们从最常见的笛卡尔坐标系 (cartesian coordinate) 说起。对于向量 \mathbf{r} ，高中的时候，我们会假设 $\mathbf{r} = (x, y)$ ——其实这里我们省略了基的选取。更加严谨而普遍的表示方式应该是：设 $\mathbf{r} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ ^[2]。对于

I - P9 引

^[2]这里的花括号其实就是矩阵的括号，用花括号是为了表示基底的更加清晰（但不严谨）的写法。大家可以将这个表达式理解为一个行向量和列向量的矩阵乘法（向量内积），这样更好记忆。但事实上 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 应该是一个分块矩阵的表示，因为 \mathbf{e}_1 和 \mathbf{e}_2 本身也是列向量。

Cartesian Coordinate, e_1 是 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, e_2 是 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (也就是 x 轴, y 轴方向的单位向量), 代入上面假设的表达式, 可以得到 $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 。



笛卡尔坐标系的基底

进一步, 我们应当跳脱笛卡尔坐标系, 去考量一些更加普遍的情况。在线性代数中, 我们学习过线性空间和它的基。对于我们要考虑的 n 维空间, 只要取 n 个 *linearly independent* 的 e_i 就可以了。这个时候, 一个向量可能会表示成这个样子:

$$\mathbf{a} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

2.2.2 Vector versus Scalar

为了让大家更好地理解向量, 这里区分一组概念: *vector* 和 *scalar*。

- *scalar* A quantity having magnitude but no direction is a scalar.

常见的标量: T(*temperature*), m(*mass*), s(*speed*)₍₃₎

(3) 注意, 向量的大小就是一个标量。

2.2.3 Magnitude and Unit Vector

向量 \mathbf{A} 的大小被表示为 A 或 $|\mathbf{A}|$ 。说两个向量相等, 等价于说两个向量大小相等, 方向相同。

单位向量就是大小为 1 个单位的向量。

- *unit vector* A unit vector is a dimensionless vector having a magnitude of exactly 1.

注意，量纲的英文是 dimension，题目中出现的时候要注意上下文语义。

欲求一个向量同方向的单位向量，可取 $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ 。

2.2.4 Vector Algebra

向量加法 (vector addition)，大家高中的时候都学过，共起点的时候使用平行四边形法则，首尾相连的时候使用三角形法则。

加法运算满足下面两个规律：

- *Associative law of addition*: $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
- *Commutative law of addition*: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

这两个规律的证明，除了图像几何证明之外，还可以用上面我们提到的向量的表示方法⁽⁴⁾ 来证明，推荐大家自己尝试一下。尝试之后可以发现，向量的加法交换律和结合律，都是基于实数的加法交换律和结合律。

(4) 见小节 2.2.1~P7

一个向量 \mathbf{A} 的负向量 (negative) $-\mathbf{A}$ 定义为与 \mathbf{A} 的向量和为 $\mathbf{0}$ (零向量)的向量，也就是与原向量等大反向的向量。

向量的减法 (vector subtraction) 可以用向量的加法与负向量定义：

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

在新的视角下，向量的数乘也可以这样理解 (α 是参与数乘的标量)：

$$\alpha \mathbf{a} = \alpha \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n (\alpha a_i) \mathbf{e}_i$$

向量的内积 (scalar product)_¶:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \left(\sum_i a_i \mathbf{e}_i \right) \left(\sum_j b_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_i \sum_j a_i b_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)$$

特别的，对于 cartesian coordinate⁽⁵⁾，有⁽⁶⁾

(5) 这里拓展到多维情形。

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

(6) δ 念作 delta。

于是有

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i \sum_j a_i b_j \delta_{ij} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

向量内积满足下面几个基本律：

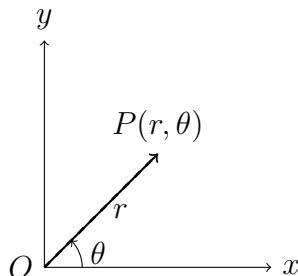
- *Commutative Law* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- *Distributive Law* $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
- *Scalar Multiplication Property* $k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b})$, 其中 k 是实数。

向量的模长可以用内积表示: $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}$ 。

2.2.5 Polar Coordinate

I - P37 引

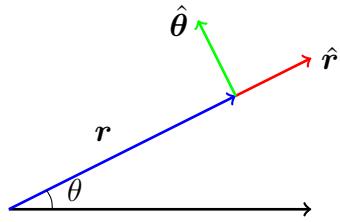
二维的情况: $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$



二维极坐标

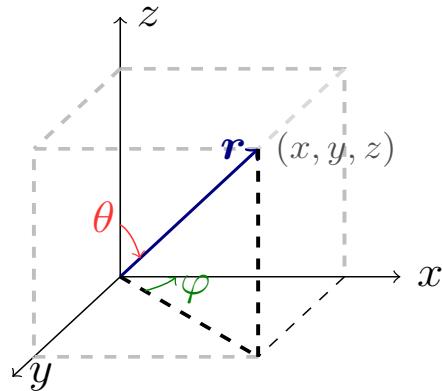
二维极坐标系的基本要素是极点和极轴，其中，极轴是一条从极点引出的有向轴。在上图中，极点即为 O ，而极轴则与 x 轴方向相同。我们用 $(|\mathbf{r}|, \theta)$ 来表示一个点的位置。其中， \mathbf{r} 表示以极点为起点，以被描述点为终点的向量，称为极径矢量； θ 则表示从极轴出发逆时针旋转到极径矢量的角度。可以发现， θ 并不唯一，我们一般取 2π 以内的角。

注意极坐标系同样也是有基底的，而且也是正交的。在极坐标中，特别定义 $\hat{\mathbf{r}}$ 为 \mathbf{r} 增加方向的单位矢量， $\hat{\theta}$ 为 θ 增加方向的单位矢量，两者构成一对单位正交基。



二维极坐标系的基底

三维的情况: $\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$

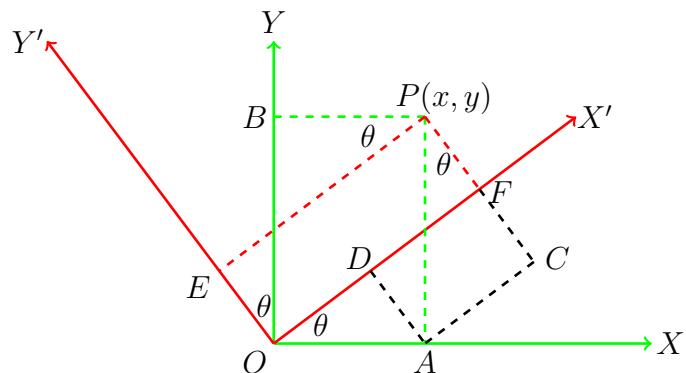


三维极坐标 (来自

<https://www.latexstudio.net/index/details/index/mid/2316>)

2.2.6 Basis Transformation

我们考虑一个简单的坐标系旋转的变换:



$$\begin{cases} x' = OD + DF = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = PC - FC = y \cos \theta - x \sin \theta \end{cases}$$

两个式子可以用一个矩阵乘法的式子表示：

$$[x', y'] = [x, y] \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

对于原坐标系中的一点 (x, y) , 只需要乘上基变换矩阵 $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, 就能得到该点在新坐标系下的坐标 (x', y') 。

2.2.7 Vector Representation of Particle Motion

无论是一维质点运动还是高维质点运动, 都可以统一用向量来表示。

- *Position* \mathbf{r}
- *Displacement* $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$
- *Average Velocity* $\mathbf{v}_{avg} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$
- *Instantaneous Velocity* $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$
- *Average acceleration* $\mathbf{a}_{avg} = \frac{\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i}{t_f - t_i}$
- *Instantaneous acceleration* $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$

而且向量表示也为我们对于基底以及分量的分析提供了便利:

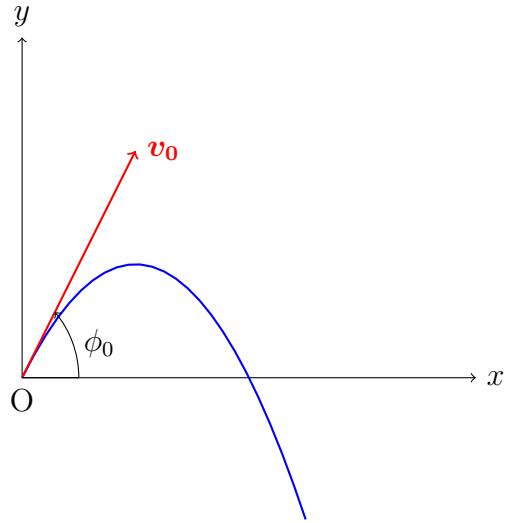
$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x \hat{\mathbf{i}}_{(7)} + y \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}} \\ \Rightarrow \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt} \hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt} \hat{\mathbf{k}} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} + v_z \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

(7) $\hat{\mathbf{i}}$ 的上标符号用于表示基底。

类似的, 对于加速度也有:

$$\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}} + a_z \hat{\mathbf{k}}$$

2.2.8 Projectile Motion

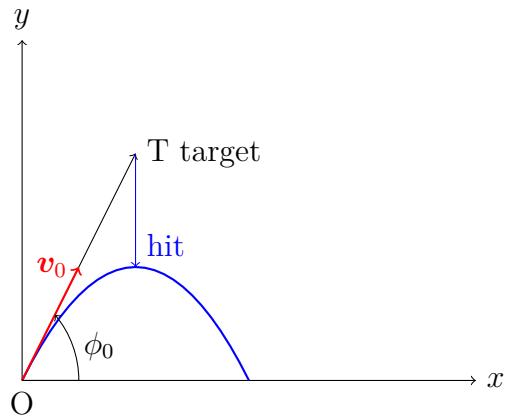


普遍的，对于一个匀加速运动，有 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2$ 。

对于上图所示的简单的抛体运动，我们这样计算物体重新落到 x 轴上时，距离开始的时间和距离：

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_f &= s\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_0 \cos \phi_0 t \\ -v_0 \sin \phi_0 t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow t &= \frac{2v_0 \sin \phi_0}{g} \\ \Rightarrow s &= \frac{v_0^2 \sin 2\phi_0}{g}\end{aligned}$$

再来看一个射击自由落体的靶子的例子：



Q1：在靶子下落的一瞬间开枪，问枪应该瞄准哪里？

一个很巧妙的方法，就是进行一个坐标系变换，即考虑竖直向下以加速度 g 运动的非惯性参考系。在该参考系中，靶子是静止的，而枪的子弹不会下落而是作直线运动。那自然就应该直接瞄准靶子就行了。

Q2：子弹发射的最小速度是多少？

在上一问的参考系中，很容易得出子弹飞行的时间是 $\frac{|OT|}{v_0}$ 。 OT 的长度是给定的，那么要求的最小速度，可以通过求最大飞行时间来得到。最大飞行时间是多少呢？很简单，就是在靶子要落地的瞬间才击中，这样时间最长，这个问题也就迎刃而解了。

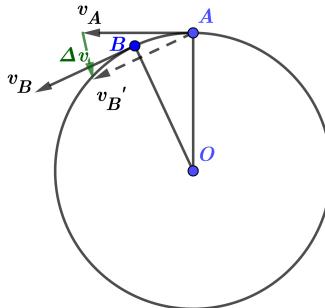
当然，也可以不用坐标系的变换，直接这样计算：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{子弹位置: } \mathbf{r}_P = \mathbf{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \hat{\mathbf{j}} \\ \text{靶子位置: } \mathbf{r}_T = (|OT| \cos \phi_0 \hat{\mathbf{i}} + |OT| \sin \phi_0 \hat{\mathbf{j}}) - \frac{1}{2} g t^2 \hat{\mathbf{j}} \end{array} \right.$$

加之 $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_T$ ，即可解出要打中需要的角度和击中的时间。

2.2.9 Uniform Circular Motion

下面，用我们用向量方法来研究一下匀速圆周运动的加速度表达式：



$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

由简单的几何关系可知，任何一点的加速度 \mathbf{a} 都垂直于切线方向，指向圆心。

匀速圆周运动 (本图出自<https://www.cnblogs.com/1024th/p/10744727.html>)

确定方向后，再确定大小，即有：

$$\begin{aligned} |\Delta \mathbf{v}| &= 2v \sin \frac{\theta}{2} \\ \Rightarrow |\mathbf{a}| &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2v \sin \frac{\theta}{2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2v \sin \frac{v \Delta t}{2r}}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} \\ \Rightarrow \mathbf{a} &= -\frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

也可以用上极坐标来研究这个问题。之前提到过，极坐标也有一对正交基，如果将其理解为 x, y 轴正交基的旋转的话，就有如下表达式：

$$\{\hat{r}, \hat{\theta}\} = \{\hat{i}, \hat{j}\} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

对称地，也有：

$$\{\hat{i}, \hat{j}\} = \{\hat{r}, \hat{\theta}\} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

如此可以推出

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{r}}{dt} &= \frac{d \cos \theta}{dt} \hat{i} + \frac{d \sin \theta}{dt} \hat{j} \\ &= -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \hat{i} + \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \hat{j} \\ &= -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) + \cos \theta \frac{d\theta}{dt} (\sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}) \\ &= \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} \end{aligned}$$

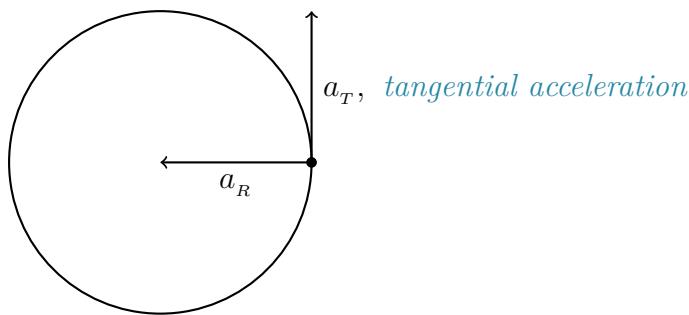
类似地^[3]，也有

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \hat{r}$$

这两个式子和匀速圆周运动加速度有啥关系？别急，慢慢推导：

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr\hat{r}}{dt} = r \frac{d\hat{r}}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} = r\omega\hat{\theta} \\ \Rightarrow \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = r\omega \frac{d\hat{\theta}}{dt} = r\omega \left(-\frac{d\theta}{dt}\hat{r}\right) = -\omega^2 r \hat{r} = -\frac{v^2}{r} \hat{r} \end{aligned}$$

2.2.10 Non-uniform Circular Motion



$$\bullet \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \omega r \hat{\theta}$$

^[3]这要仔细想想， $\frac{d\theta}{dt}$ 是角速度的大小，但 $\frac{d\hat{\theta}}{dt}$ 却并不是角速度！目前我们讨论的暂时都是角速度的大小，至于角速度本身，将在第三章详细介绍。

- $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
- $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r \hat{\theta} (\text{tangential}) - \omega^2 r \hat{r} (\text{centripetal})$

2.3 Newton's Laws

牛顿定律研究的是什么？简而言之，力与加速度之间的关系。

牛顿定律是普适的吗？不是，有两个限制条件：

low speed, macroscopic scale of interaction

突破了前一个限制条件，也就是不再远小于光速，就需要用相对论来讨论，这在之后的章节会详细介绍。突破了后一个限制条件，就需要量子力学来讨论了。

2.3.1 Newton's First Law of Motion

定理 2.1 Newton's First Law of Motion — Prove 2.1 ~ P 230

If no force acts on a body, the body's velocity cannot change. That is, when no force acts on an object, the acceleration of the object is zero. Any isolated object (one that does not interact with its environment) is either at rest or moving with constant velocity.

牛顿定律提出的背景：384BC~322BC，*Aristotle* 提出，物体的运动需要持续的动力 (need continuous action of an agent)⁽⁸⁾；1564~1642，*Galilei* 提出，物体在没有阻碍的情况下会维持原来的运动状态 (objects retain their motion in absence of any *impediments*)。

(8) 当然，你知道这是错误的。

2.3.2 Newton's Second Law of Motion

定理 2.2 *Newton's Second Law of Motion —Prove 2.2~P 232*

The acceleration of an object is directly proportional to the net force acting on it and inversely proportional to its mass.

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

2.3.3 Newton's Third Law of Motion

定理 2.3 *Newton's Third Law of Motion —Prove 2.3~P 232*

The action force is equal in magnitude to the reaction force and opposite in direction.

2.3.4 Inertial Reference Frame & Non-inertial Reference Frame

- 惯性参考系是指一个不受外力作用、未被加速且静止或匀速直线运动的参考系。在这个惯性参考系中，牛顿定律成立，即物体保持原有状态（静止或匀速直线运动）。
- 非惯性参考系是指一个相对于惯性参考系不保持匀速直线运动或静止的参考系。在非惯性参考系中，牛顿定律不成立^[4]。

在应用中，人们往往通过牛顿第二定律分析物体的受力与运动的关系。为了在非惯性参考系中可以用牛顿第二定律处理问题，人们引入了称为惯性力的虚拟力。当我们认为非惯性参考系中的物体都额外受到惯性力 $\mathbf{F}_{fictitious} = -m\Delta\mathbf{a}$ ⁽⁹⁾ 时，牛顿第二定律依旧成立 (*Prove 2.4~P 233*)。

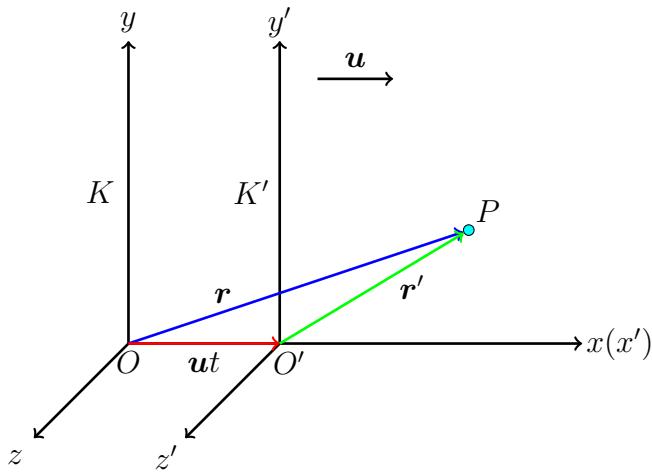
2.3.5 Relative Motion(Still in Inertial Frame)

对于不同惯性参考系的观察者来说，对于同一个质点运动，他们观察到的加速度是一样的，但是观察到的位移和速度很可能是不一样的。

^[4]这很好理解，不妨考虑一个不受力的物体，它在非惯性参考系中可以拥有加速度，这与牛顿第一定律冲突，因此牛顿定律不再成立。

(9) 其中 $\Delta\mathbf{a}$ 为非惯性参考系相对惯性参考系的加速度。

下面用伽利略变换^{I-P24 引}来证明上面的结论：

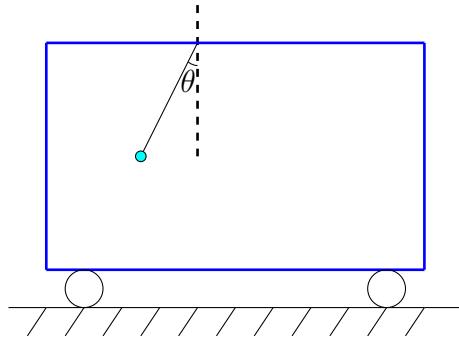


伽利略变换

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \mathbf{u}t \\ \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}'}{dt} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{v}_0 \\ \Leftrightarrow \mathbf{v}' &= \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \\ \Rightarrow \frac{d\mathbf{v}'}{dt} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ \Leftrightarrow \mathbf{a}' &= \mathbf{a} \end{aligned}$$

2.3.6 Relative Motion in Non-inertial Frame

先来看一个例子：



向右匀加速运动车厢中的小球（小球与车厢相对静止）

在高中时，我们往往在地面参考系中对这个小球的受力情况进行分析，并求解车厢的加速度。而现在，我们尝试在车厢这个非惯性参考系中研究它。

在车厢这个参考系中，小球受到绳子的拉力，重力，以及水平向左的惯性力 $\mathbf{F}_{fictitious}$ 。由于以车厢为参考系，小球是静止的，那么以水平方向受力为 0 和竖直方向受力为 0 就能列出两个式子，并解得

$$F_{fictitious} = T \sin \theta = mg \tan \theta$$

再结合惯性力的定义，有 $F_{fictitious} = -m\Delta a$ ，即得车厢的加速度大小为 $g \tan \theta$ 。

2.4 Work and Kinetic Energy

2.4.1 Work Done by a Constant Force

- *Definition: The work W done on an object by an agent exerting a constant force on the object is the product of the component of the force in the direction of the displacement and the magnitude of the displacement.*

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = F d \cos \theta$$

在高中时期，我们反复提及两种不做功的情况：力作用在物体上但物体没有移动，或是力的作用方向 *perpendicular to* 物体的位移方向。

由定义可知，功是力与位移的 *scalar product*⁽¹⁰⁾。因此，功是一个标量，其单位为 N · m 或 J。

(10) 若忘了内积相关知识，可参见小节 2.2.4 ~ P 9。

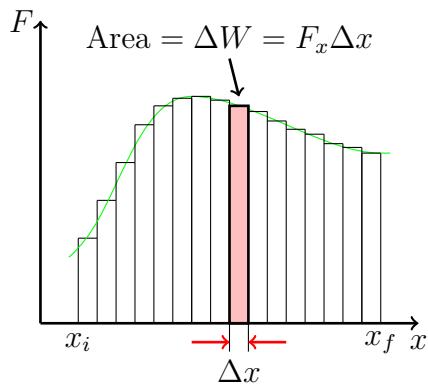
2.4.2 Work Done By a Varying Force

由于功的定义只与力和位移有关，所以这个变力不宜理解为力随时间变化而变化。更准确的理解是，力会随力所作用的物体的位移变化而变化。

变力与恒力做功之间，能够用微分的思想架起桥梁，即

$$W = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx$$

在这里，我们将变力做功转化为无数个小位移时的恒力做功的和。计算出来的结果，也就是这个力在 $F - x$ 图上的曲线与 x 轴围成的面积，如下。



变力做功的计算

力会随位移而改变的一个经典例子是弹簧，这就不得不提到著名的胡克定律^[5]：

$$\mathbf{F}_s = -k\mathbf{x}$$

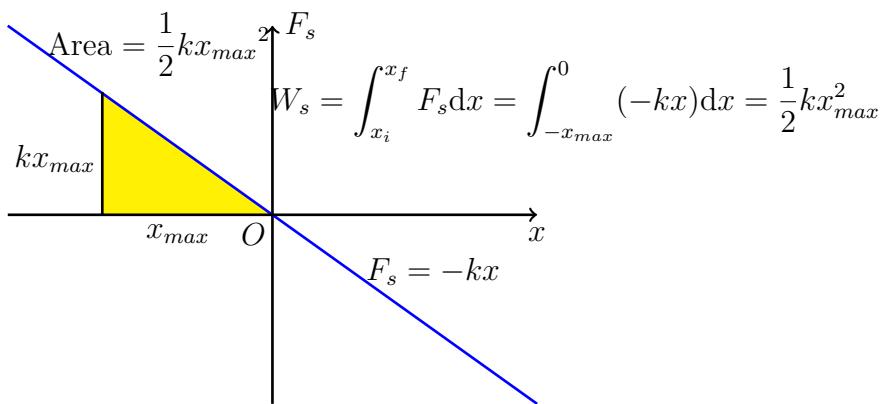
这里的 k 表示弹簧的劲度系数， \mathbf{x} 表示弹簧被拉伸的一段相对于其初始位置的位移。

还记得高中时候讲的弹簧形变量为 x_{max} 的时候，弹簧储存的能量是多少吗？没错，是 $\frac{1}{2}kx_{max}^2$ 。现在，我们就可以用上面变力做功的公式来证明它：

I - P22 引

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F_s dx = \int_{-x_{max}}^0 (-kx) dx = \frac{1}{2}kx_{max}^2$$

这时候有人可能要问，这积分的方向咋看，积出来是负的咋办？其实这是要看做功时的位移方向的。我们要计算弹簧储存的弹性势能，这里考察的是弹簧从拉伸状态恢复为原长的过程中释放的能量，那么积分方向就应该是弹簧复原的方向，从 $-x_{max}$ 到 0 或是 x_{max} 到 0 都可以计算出正的结果。



弹簧的变力做功

^[5]需要注意，这里的负号十分重要，这表示弹簧提供的力与弹簧被拉伸一段的位移是相反的，这符合 \mathbf{F}_s 与 \mathbf{x} 的矢量属性。

2.4.3 Kinetic Energy

大家应该都知道低速运动物体的动能公式是 $\frac{1}{2}mv^2$, 但是为什么要这样定义? 这个 $\frac{1}{2}$ 是怎么来的? 其实这样的定律, 从一个简单的匀加速运动中就可以看出其合理性:

设一个物体质量为 m , 且在恒力作用下作加速度为 a 的匀加速直线运动, 则可作如下推导:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum W = Fd = (ma)d \\ d = \frac{1}{2}(v_i + v_f)t \\ a = \frac{v_f - v_i}{t} \\ \Rightarrow \sum W = m \frac{v_f - v_i}{t} \frac{1}{2}(v_i + v_f)t \\ = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \end{array} \right.$$

这样, 动能公式的定义就显得十分合理了。物体动能的变化量等于外力做功, 这就是下面会详细介绍的动能定理。

对于高速运动物体的动能, 就需要用相对论来讨论了, 这在之后的章节中会详细介绍。事实上, 利用相对论意义下的动能公式的近似, 也可以推导出 $\frac{1}{2}mv^2$ 的公式。

2.4.4 Work-kinetic Energy Theorem

定理 2.4 Work-kinetic energy theorem —Prove 2.5, ~P 233

The net work done on a particle by the net force acting on it is equal to the change in the kinetic energy of the particle.

用公式表示, 即 $\sum W = K_f - Ki = \Delta K$ 。无论这个 *net force* 是否恒定, 这个公式都是适用的。

2.4.5 Power

- *Power*: The *time rate* of doing work, or energy transfer.
- *Average power*: $\bar{P} = \frac{W}{\Delta t}$

- *Instantaneous power*: $P = \frac{dW}{dt} = F \cdot \frac{ds}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$
- SI Unit of power: the watt $W = 1\text{J/s} = 1\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$

2.5 Conservation of Energy

2.5.1 Revisit Work-kinetic Energy Theorem

- The *net work* done on a particle by the net force acting on it is equal to the change in the kinetic energy of the particle.

用公式表示就是: $\sum W = K_f - K_i = \Delta K$

下面给出一个例子。对于一个匀加速运动, 一个质量为 m 的物体受到恒力的作用, 以加速度 a 作匀加速运动。尝试用动能定理推导出

$$x_f - x_i = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2a}$$

2.5.2 Potential Energy

势能简单来说, 就是与一个系统有关的能量。比如说, 一个弹簧组成的系统中可能存储弹性势能, 一个物体和地球这两者组成的系统中会储存重力势能。还有一种说法, 就是势能是相互作用的物体凭借其相对位置而具有的能量。

弹簧弹性势能 (小节 2.4.2~P 20) 为 $U_s = \frac{1}{2}kx^2$, 其中 k 是弹簧的弹性势能, x 是弹簧的形变量。

对于重力势能来说, 近地表物体的重力势能公式为 $U_g = mgh$, 其中 h 为物体距离参考平面的高度^[6]。

接下来, 大家思考一下, 摩擦力的产生也需要相互作用的物体, 那么摩擦力是否有势能呢? 在解答这个问题之前, 首先来了解一下保守力和非保守力这一组概念。

2.5.3 Conservative & Non-conservative Forces

摩擦力有一个特征, 那就是始终沿着相对运动的反方向。那么很容易想象, 如果摩擦力大小恒定为 f , 而且它在阻碍一个物体做一定轨迹的运动。那么摩

^[6]课上的 ppt 认为 h 就是距离地球表面的高度, 也许是为了将重力势能标准化。

擦力做的功就是 $W = -f \cdot l$, 其中 l 是轨迹的长度。而重力做功则不一样, 根据重力做功的表达式 mgh , 重力做功只与起始位置和终点的高度差有关, 而与路径无关。

从这个例子中, 我们提取一个规律: 重力做功与路径无关, 而摩擦力做功与路径有关。所以, 我们称重力是 *conservative*, 摩擦力是 *nonconservative*。

- A force is *conservative* if the work it does on a particle moving between any two points is independent of the path taken by the particle.
- The work done by a conservative force on a particle moving through any *closed path* is zero. A closed path is one in which the beginning and end points are identical.

2.5.4 Conservation of Mechanical Energy

一个保守力 \mathbf{F} 在一个系统内做功为⁽¹¹⁾

$$\sum W = \int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = U_i - U_f$$

(11) 再次说明, i 表示 initial, f 表示 final

也即所做的功等于系统前后势能之差。

另一方面, 由动能定理, 有

$$\sum W = K_f - K_i = \Delta K$$

综上, 两式联立, 即得

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

如此, 我们得到机械能守恒定律如下:

- The total *mechanical energy* of a system remains constant in any isolated system of objects that interact only through *conservative forces*.
- —No energy is added to or removed from the system(isolated).
- —No nonconservative forces are doing work within the system.
- —Sum over the potential energy is only associated with each conservative force.

注意第三条性质，总势能只与保守力有关，这也就意味着摩擦力并不具有势能，解答了之前的问题。

还有一个特别的计算方法：

Any conservative force acting on an object within a system equals the negative derivative of the potential energy of the system with respect to \mathbf{r} .

也就是说，保守力等于该保守力对应势能对位矢 \mathbf{r} 的负导数。用向量表示就是

$$\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial U}{\partial x} - \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial U}{\partial y} - \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial U}{\partial z}$$

比如对于弹簧，有

$$\mathbf{F}_s = -\frac{dU_s}{dx}\hat{\mathbf{i}} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)\hat{\mathbf{i}} = -k\mathbf{x}$$

对于重力，有

$$\mathbf{F}_g = -\frac{dU_g}{dy}\hat{\mathbf{j}} = -\frac{d(mgy)}{dy}\hat{\mathbf{j}} = -mg\hat{\mathbf{j}} = m\mathbf{g}$$

2.5.5 Equilibrium of a System

以下考虑只有一维坐标 x 的情形。

- In general, positions of *stable equilibrium* correspond to points for which $U(x)$ is a *minimum*, that is, $\frac{dU}{dx} = 0 \quad \frac{d^2U}{dx^2} > 0$.
- In general, positions of *unstable equilibrium* correspond to points for which $U(x)$ is a *maximum*, that is, $\frac{dU}{dx} = 0 \quad \frac{d^2U}{dx^2} < 0$.

2.6 Conservation of Momentum

2.6.1 Impulse-Momentum Theorem

首先，让我们从一个看似无关的问题开始讨论：

在伽利略变换（小节 2.3.5~P 18）下，动能定理是否依旧成立，即动能定理在伽利略变换下是否具有不变性？

考虑一个最简单的情况——一个受恒力 F 的质点在做一维的运动。首先，让我们把变换前后的功和动能建立起联系：

$$W' = Fd' = F(d - v_0t) = W - v_0Ft$$

$$K' = \frac{1}{2}m(v')^2 = \frac{1}{2}m(v - v_0)^2 = K - v_0mv + \frac{1}{2}mv_0^2$$

联立上面两个式子，有

$$W' - (K'_f - K'_i) = W - (K_f - K_i) - v_0Ft + v_0m(v_f - v_i)$$

根据动能定理 $W = K_f - K_i$ ，要想 $W' = K'_f - K'_i$ 依然成立，就必须有 $Ft = mv_f - mv_i$ 成立。幸运的是，我们发现这个式子确实成立。所以，动能定理在伽利略变换下具有不变性。同时，我们将这个式子命名为动量定理。

定理 2.5 Impulse-Momentum Theorem —Prove 2.6 ~ P 234

The *impulse* of the force \mathbf{F} acting on a particle equals the change in the linear momentum of the particle caused by that force, that is, $\mathbf{I} = \Delta\mathbf{p}$.

其中，*Linear momentum* 定义为 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ ，*Impulse* 定义为 $\mathbf{I} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt$ 。

2.6.2 Conservation of Linear Momentum

先考虑两个小球 1 和 2 碰撞的情形（两小球与世隔绝）。由牛顿第二定律，有

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} \quad \mathbf{F}_{12} = \frac{d\mathbf{p}_2}{dt}$$

又由牛顿第三定律有

$$\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12} = \mathbf{0}$$

于是有

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \mathbf{0}$$

这个规律可以有如下推广：

- *Conservation of Linear Momentum* Whenever two or more particles in an isolated system interact, the total momentum of the system remains constant.
- Note: the only requirement is that the forces must be *internal* to the system.

2.6.3 Collision

- Definition: Collision is the event of two particles' coming together for a short time and thereby producing impulsive forces on each other.

在任何没有合外力或是合外力可以忽略的碰撞中，碰撞系统的动量都是守恒的。然而，这个系统的动能不一定守恒。我们把碰撞过程中动能守恒的碰撞称作 *Elastic collision*，反之则称为 *Inelastic collision*。

特别地，在 *Inelastic collision* 中，有种碰撞叫 *Perfectly Inelastic Collision*。在这种情况下，碰撞后的物体会挨在一起，拥有一个共同速度。此时，动能的损失是最大的。这用柯尼希定理 (定理 3.2~P 45) 很容易证明。

关于一维的弹性碰撞，我们常常碰到相关的计算问题，这里提供一个比较容易的背结论的方法：

设两物体 m_1, m_2 发生碰撞，初速度分别为 \mathbf{v}_{1i} 和 \mathbf{v}_{2i} 。首先，计算质心速度为

$$\mathbf{v} = \frac{m_1 \mathbf{v}_{1i} + m_2 \mathbf{v}_{2i}}{m_1 + m_2}$$

然后，我们就可以直接得到末速度

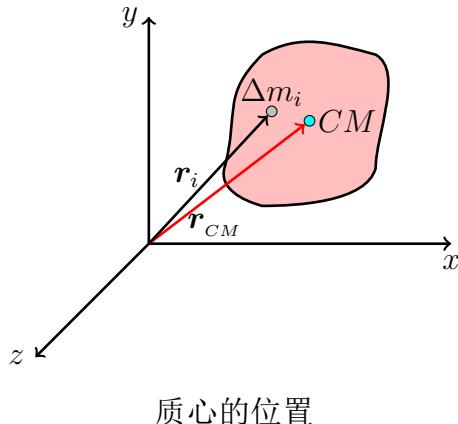
$$\begin{cases} \mathbf{v}_{1f} = 2\mathbf{v} - \mathbf{v}_{1i} \\ \mathbf{v}_{2f} = 2\mathbf{v} - \mathbf{v}_{2i} \end{cases}$$

若是遇到有角度的二维碰撞，情况就略复杂一点，但总体思路也是很简单的，无非是动量守恒和能量守恒表达式的联立。其中动量守恒会涉及多个方向的分析，可能不止一个表达式。

2.6.4 Collision in the CM(Center of Mass) Frame

质心是分析系统的运动学性质时非常重要的概念。在向量意义下，选定了参考原点后，一个物体（或是一个多质点体系）的质心的位置被定义为

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} dm$$



对于一个系统，其将质心作为参考系原点的参考系被称为系统的质心系(CM Frame)。因此，在质心系中，有

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M} = \mathbf{0}$$

此外，关于质心系还有一个很重要的结论，即

定理 2.6 质心系中，系统的总动量为 **0** —Prove 2.7~P 234

记系统在其质心系中的总动量为 \mathbf{P}^{CM} ，则有

$$\mathbf{P}^{CM} = \mathbf{0}$$

2.7 The Law of Gravity

2.7.1 Newton's Law of Universal Gravitation

牛顿观察到三种现象：苹果从树上坠落到地面，月球绕着地球公转，以及行星绕着太阳公转。这三件事在我们看来理所应当，这是因为我们已经知道了万有引力的存在。如果我们能够将自己代入牛顿的年代，几乎没有任何的与引力有关的理论铺垫，没有矢量运算工具，没有微积分工具，我们就会感叹牛顿是多么天才，才能够将这三件事的内在联系发掘出来。

通过这三类现象和一些计算推导^[7]（牛顿有非常恐怖的数学功底），牛顿统一了天上和地上的运动：

^[7] 在《自然哲学的数学原理》这本书中，牛顿记录了推导万有引力的计算方法。主要运用的工具是欧几里得几何学、代数学以及自己的“微分和积分的思想”。

定理 2.7 The Law of Universal Gravitation —Prove 2.8,~P 235

Every particle in the Universe attracts every other particle with a force that is directly proportional to the product of their masses and inversely proportional to the square of the distance between them.

若用公式表示万有引力的大小，就是 $F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ 。

地月检验进一步证明了万有引力定律的正确性：

设地球质量为 M_E ，月球质量为 M_M ，两者之间的平均距离为 R 。根据万有引力定律，地球对月球的引力 F_E 为：

$$F_E = G \frac{M_E M_M}{R^2}$$

月球的运动可以用开普勒定律（[定理 2.8~P 29](#)）描述。根据万有引力定律，月球的运动周期 T 应满足：

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{G(M_E + M_M)}$$

因为 M_M 相对 M_E 较小，可以近似认为

$$T^2 \approx \frac{4\pi^2 R^3}{GM_E}$$

根据实际观测，月球的运动周期约为 27.3 天。计算得到周期应符合：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM_E}}$$

通过将 R 和 M_E 的已知值代入，可以得到理论计算的周期，并与观测值进行比较。

通过精确测量月球的轨道周期和位置，以及计算得到的引力，科学家们发现万有引力定律能够准确预测月球的运动。这一结果不仅验证了牛顿的理论，而且奠定了经典力学的基础。

2.7.2 Motion of the planets & Kepler's laws

通过实验观察和数据分析，开普勒总结出了三大定律。

定理 2.8₄ 开普勒三大定律

I - P28 引

- All planets move in *elliptical* orbits with the Sun at one *focal point*.
- The radius vector drawn from the Sun to a planet *sweeps out* equal areas in equal *time interval* (Exactly reflects the conservation of angular momentum).
- The square of the orbital period of any planet is proportional to the cube of the *semimajor axis* of the elliptical orbit.

这里提一下 *Conic Section*。牛顿分析后认为，重力场中可能的环绕轨迹是圆锥曲线⁽¹²⁾。

(12) 圆锥曲线由于它们能够通过切割一个圆锥面得到而获名。

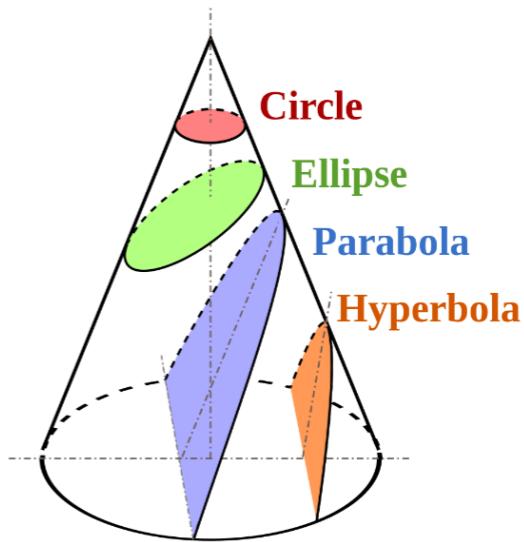


图 2.1: 圆锥曲线

2.7.3 Measuring the gravitational constant

测量重力常数的扭摆实验由亨利·卡文迪许 (Henry Cavendish) 在 1798 年首次进行。

- 使用一个水平的扭摆装置，悬挂两个小质量 m 的球体。
- 通过引力将球体放置在较大质量 M 的球体附近。
- 测量扭摆装置的角位移 θ 。

- 根据扭摆的转动方程 $\tau = -k\theta$ 计算扭矩，其中 k 是扭摆常数。

根据平衡条件，可以得到：

$$G = \frac{4\pi^2 kr^2}{m_1 m_2 \sin \theta}$$

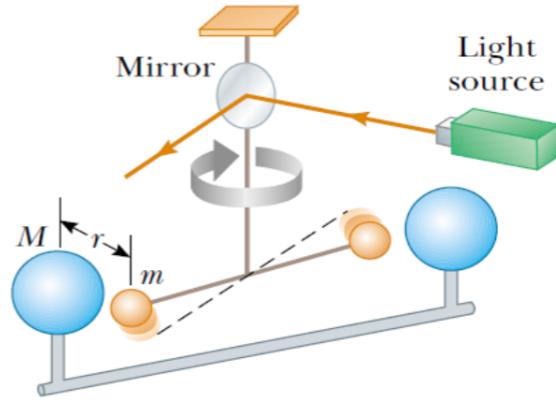


图 2.2: 扭摆实验

现代测量方法 * 涉及更精确的仪器和技术：

- 使用高精度振动天平来测量小质量的引力。
- 利用激光干涉仪技术提高测量精度。

通过多次实验，重力常数的国际标准值为：

$$G \approx 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

2.7.4 Free-fall acceleration

在更加大的尺度上，自由落体的加速度大小不能用 g 来一言以蔽之。设靠近地球表面的物体的重力加速度大小为 g_0 ，地球质量为 M_E ，半径为 R_E ，则对于离地球表面高度为 h 的物体，其严格的重力加速度为

$$g' = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2} \approx g_0 - 2g_0 \frac{h}{R_E}$$

2.7.5 Satellite motion

卫星的总机械能(不考虑推进器以及旋转的动能)为 $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$ 。

第一宇宙速度

卫星要作环绕地球的匀速圆周运动,于是有

$$\frac{GMm}{r^2} = ma = \frac{mv^2}{r}$$

所需机械能则可化简为

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$$

考虑最小速度,那么 r 近似为地球半径,故有

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R_E} = -\frac{GMm}{2R_E}$$

可得

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_E}} \approx 7.8 \text{ km/s}$$

第二宇宙速度

第二宇宙速度是指物体能够克服地球引力的发射速度。

为了克服引力,物体需达到的总能量为零⁽¹³⁾:

$$E = K + U = 0$$

也即

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = 0$$

因此,第二宇宙速度 v_2 为

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \approx 11.2 \text{ km/s}$$

⁽¹³⁾ 设物体恰好能够到达无穷远处,此时速度几乎为 0, 地球对物体的引力势能也几乎为 0。

第三宇宙速度 *

第三宇宙速度 v_3 是指物体能够挣脱太阳引力的在地球上的发射速度。

注意，这里不能仅仅将推导第二宇宙速度的公式中的 M 换成太阳的质量。在这种情况下，航天器需要同时挣脱地球的引力和太阳的引力；同时，地球绕太阳公转也为航天器提供了一部分初速度。

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \approx 42.2 \text{ km/s}$$

其中 M 为太阳的质量， R 为地球与太阳的距离。

减去地球公转速度，为

$$v' = v - v_0 = 42.2 - 29.8 = 12.4 \text{ km/s}$$

请注意，这里的 v' 是以地球为参考系时，物体达到无穷远时需拥有的速度。

于是，物体在地球上发射时，还应拥有用于克服地球引力的动能，即第二宇宙速度对应的动能，故有

$$\frac{1}{2}mv_3^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}m(v')^2$$

可解得

$$v_3 = 16.7 \text{ km/s}$$

2.7.6 Rocket propulsion

从动量角度研究火箭推进是很多题目喜欢考察的：



图 2.3: 火箭推进

由动量定理有

$$(M + \Delta m)v = M(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_e) \quad (14)$$

(14) v_e 中 e 表示 eject, v_e 就是气体喷射速度。气体喷射速度是一个相对速度。

整理得

$$M\Delta v = v_e \Delta m \Rightarrow M dv = v_e dm = -v_e dM$$

由此可以得到

$$\int_{v_i}^{v_f} v = -v_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

即

$$v_f - v_i = v_e \ln \frac{M_i}{M_f}$$

这也告诉我们，火箭不带燃料的部分越轻，火箭所带燃料越多，火箭能达到的速度越大。

其实广义来讲，火箭推进也算一类非弹性碰撞。整个过程中动量守恒，但机械能是增加的。

2.8 课后习题：质点运动学与动力学

习题 2.1 质点运动学的计算—Solution 2.1~P 300

计算练习：已知 $a(t) = at^\alpha$, α 是正的常数，初始时间、速度和位置 t_i , v_i , x_i 都是已知的，求出 $v(t)$, $x(t)$ 这两个表达式。

习题 2.2 质点运动学的计算—Solution 2.2~P 301

Automotive engineers refer to the time rate of change of acceleration as the ‘*jerk*’ . If an object moves in one dimension such that its jerk J is constant,

- (a) determine expressions for its acceleration a_t , velocity v_t , and position x_t , given that its initial acceleration, speed, and position are a_0 , v_0 , and x_0 , respectively.
- (b) Show that $a_t^2 = a_0^2 + 2J(v_t - v_0)$.

习题 2.3 质点动力学的计算—Solution 2.3~P 301

Assume that the *resistive force* acting on a speed skater is $f = -kmv^2$, where k is a constant and m is the skater’s mass. The skater crosses the finish line of a straight-line race with speed v_f and then slows down by coasting on his skates. Show that the skater’s speed at any time t after

crossing the finish line is $v_t = v_f / (1 + kt v_f)$.

习题 2.4 质点动力学相关计算—*Solution 2.4~P 302*

A *semisphere* of mass M and radius R is put on a *frictionless* horizontal table and can move freely. A block of mass m is located on the top of this semisphere. Initially both the semisphere and the block are at rest. Then the block is *perturbed* such that it starts to slide down the semisphere from rest. The block *detaches* the semisphere at angle θ . Neglect the size of the block and the friction between the block and the semisphere.

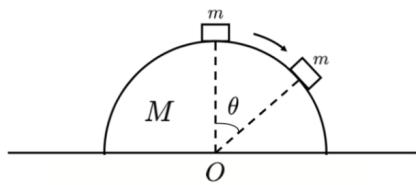


图 2.4: 第四题图

- (a) Find the angle θ (It is enough to give the equation in which θ is the only unknown quantity. You do not need to solve this equation if it is too complicated for you).
- (b) What is the value of θ when $m \ll M$ and $m \gg M$?

习题 2.5 质点动力学相关计算—*Solution 2.5~P 303*

A small mass m is pulled to the top of a *frictionless half-cylinder* (of radius R) by a *cord* that passes over the top of the cylinder.

- (a) If the mass moves at a constant speed, show that $F = mg \cos \theta$ (Hint: If the mass moves at a constant speed, the component of its acceleration tangent to the cylinder must be zero at all times.).
- (b) By directly integrating $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, find the work done in moving the mass at constant speed from the bottom to the top of the half-cylinder.

Here $d\mathbf{s}$ represents an *incremental* displacement of the small mass.

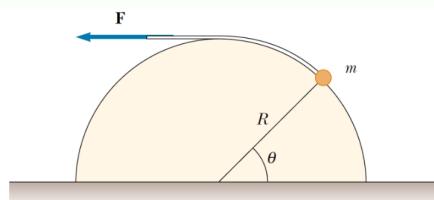


图 2.5: 第五题图

3

Rotation Dynamics

在质点运动学中，我们讨论的都是质点。然而，物体往往是占据着一定的空间，有着自己的质量分布特性的。那么，只靠质点运动学，还能够解决物体的运动问题吗？答案是否定的。为了解决这个问题⁽¹⁾，物理学家们建立了转动动力学。

(1) 更严谨地说，刚体的运动问题

3.1 Rigid Body

想象一个物体，它受到力产生加速度的同时，各个部位还会发生形变，这样的运动显然是非常复杂的。我们简化了研究对象，选择那些具有体积，且形状固定不变的物体。这样的物体就叫做刚体。

- *rigid body* : An object that is *nondeformable*, or in other words, an object in which the separations between all parts of particles remain constant.

3.2 Rotation

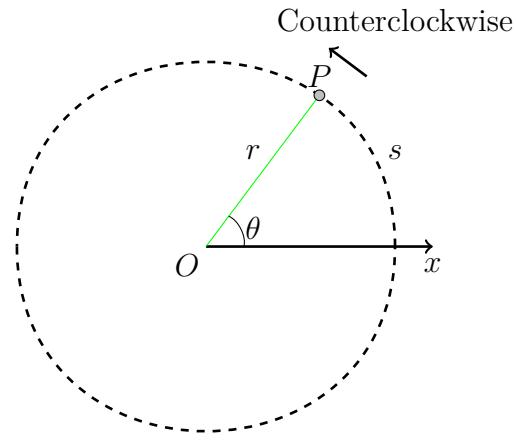
我们已经非常了解平动了。鉴于刚体的运动可以分为平动和转动，我们不妨先放弃平动，单独对转动做出分析。

3.2.1 Polar Coordinate & Cylindrical Coordinate

转动显然涉及旋转，旋转又显然涉及角度，而角度大小的确定需要一个基准，这就给了我们“选定一个旋转轴”分析转动的思想。

为了描述角度，我们引入极坐标系这一数学工具。

极坐标系^[1]的基本要素是极点和极轴，其中极轴是一条从极点引出的有向轴。



这是一个极坐标系， O 为极点， x 轴方向为极轴方向

在极坐标系中，我们使用坐标 (r, θ) 或者 $(|r|, |\theta|)$ 描述点的位置。

- r 即起点为极点，终点为被描述点的向量，称为极径矢量。
- θ 即角度矢量，方向₁垂直于坐标平面向纸面外。我们规定，从极轴出发旋转到极径矢量的旋转角，*counterclockwise* 时方向为正，*clockwise* 时方向为负^[2]。

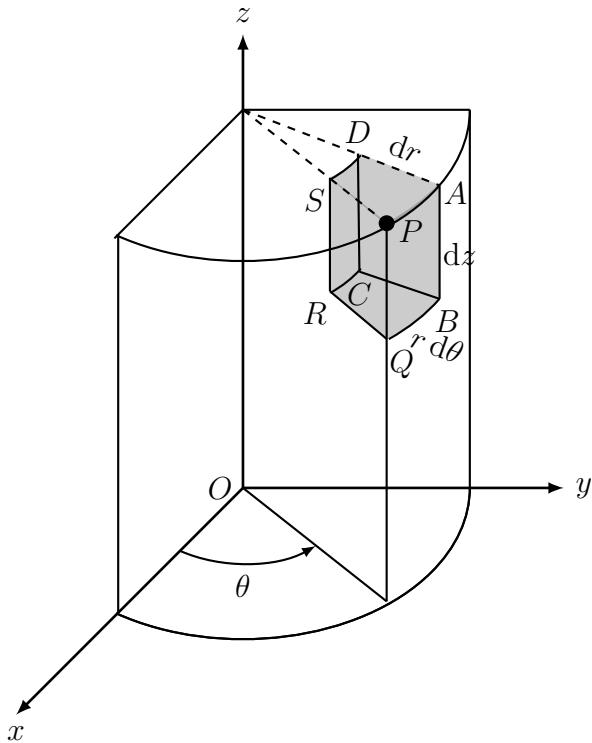
然而，仅仅介绍极坐标系是不足够的，因为极坐标系仅有二维，但一个刚体的运动却极有可能是三维的。因此，我们还需要进一步介绍柱坐标系。

柱坐标系是极坐标系往 z 轴平面的延伸。柱坐标相比极坐标的 r, θ 还多了一个 z ，用于指示点在 z 轴上的投影位置。

^[1] 你可能会注意到，在小节 2.2.5~P10 中，我们已经介绍过了极坐标系。然而，这里将引入的极坐标系，其中的一些约定将与之前有所不同。传统上，我们对极坐标系的基底的定义与之前的定义相同，这是因为，我们只考虑了二维的情况，无法再添加一个维度来描述角度矢量。而在这里，为了更好地研究旋转，我们在对角度矢量的定义中引入了垂直于平面的方向。在本章及其证明与习题中所提到的极坐标系，都按照本章的约定方式。

^[2] 当然，对于一个第四象限的点，你可以认为它是逆时针旋转得到的优角（就是大于 180 度的角），也可以认为它是顺时针旋转得到的锐角。在本书中，由于叉乘的考量，我们往往取锐角考虑。

I - P39 引

图 3.1: 柱坐标系^a

^a本图来自 <https://www.latexstudio.net/index/details/index/mid/813.html>

在对刚体运动进行描述时，我们往往选取刚体的旋转轴作为 z 轴建立柱坐标系，然后借助柱坐标系说明其运动的相关参数。

3.2.2 Cross Product₁

I - P41 引

在介绍转动的有关概念前，我们还需引入叉乘这一数学工具。

由于叉乘的具体内容介绍属于线性代数与数学分析的任务，这里并不会展开讲。

叉乘可以看成这样一个运算：按顺序输入两个向量 \mathbf{A}, \mathbf{B} ，输出一个特定长度且与它们都正交的向量 \mathbf{C} 。当然，这样的描述是不精确的，一是长度需要确定的值，二是与 \mathbf{A}, \mathbf{B} 都正交的向量方向不唯一⁽²⁾。因此，接下来，我们要对长度和方向作出具体描述。

(2) 除了 $\mathbf{0}$ ，还有正反两个方向

- 长度： $C = AB \sin \theta$ ，其中 θ 是由 \mathbf{A} 旋转至 \mathbf{B} 所成的小于 $\frac{\pi}{2}$ 的角^[3]。在几何意义上， $|\mathbf{C}|$ 即是 \mathbf{A}, \mathbf{B} 构成的平行四边形的面积。

- 方向: \mathbf{C} 的方向是介绍长度时所述的 θ 的方向⁽³⁾。在几何意义上, \mathbf{C} 与 \mathbf{A}, \mathbf{B} 所张成平面的法向量平行。

如果这么说不够直观, 我们可以参考右手定则:

(3) 关于角度矢量的方向, 可回见

小节 3.2.1~P37。

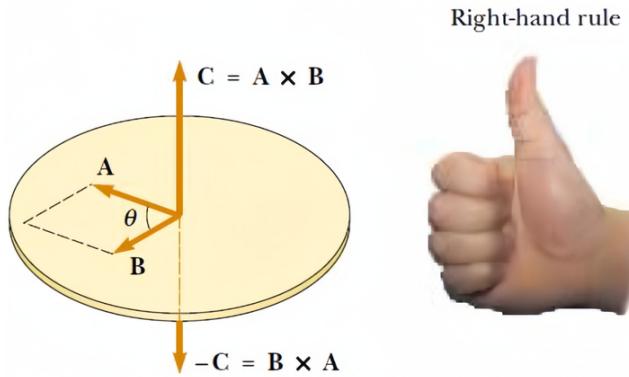


图 3.2: Right-Hand Rule

以 \mathbf{A} 为起始, 右手手指向 \mathbf{B} 弯曲 (取 $< \frac{\pi}{2}$ 方向), 大拇指方向为 \mathbf{C} 的方向

我们称 \mathbf{A} 叉乘 \mathbf{B} 等于 \mathbf{C} , 记作 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$

下面不加证明地给出叉乘的有关性质和定理:

- Anti-Commutative Law* $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$, 即交换两向量顺序, 它们的夹角方向会取反。

- Distributive Law* $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$

- Derivative* $\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}$

It is important to preserve the multiplicative order of A and B.

鉴于反交换率, 保证叉乘的顺序正确是十分重要的。

I - P240 引

- Lagrange's Identity* $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \begin{vmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} & \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} \end{vmatrix}$

[3]事实上, 这里不规定旋转, 对于长度是没有影响的。这里这么说, 主要是希望在介绍长度和方向时, 这个角度可以统一。回想一下, 在介绍极坐标系时, 我们就规定逆时针是正方向了, 所以这么规定可以合理地引出正负。

- Double Cross Product I-II-III

$$(A \times B) \times C = (A \cdot C)B - (B \cdot C)A$$

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$$

I - P237 引II - P239 引III - P243 引

这里也可以发现，叉乘不满足结合律。

有些同学初次看见那么多公式难免慌张。事实上，普通物理 I 对于叉乘的考察非常有限，基本只要清楚定义和基本的运算律即可。

3.2.3 Concepts in Kinematics

在定好一个柱坐标系后之后，确定刚体的角度矢量及其与时间的关系，就能确定刚体的转动。

- Angular displacement (4) $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$

(4) θ 的单位 rad 属于数学单位，它是一个无量纲量。

- Instantaneous angular velocity $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

- Instantaneous angular acceleration $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

When rotating about a fixed axis, every particle on a rigid object rotates through the same angle and has the same angular speed and the same angular acceleration.

平动与转动有如下关系：

I - P237 引

- arc length $s = r\theta$, 此指圆周运动。

- $v_t = \omega \times r$ & $v_t = \omega r$, 其中 t 下标指 *tangential*, v_t 即同时垂直于 z 轴^[4]和 r 的速度分量。

- $a_t = \alpha \times r$ & $a_t = \alpha r$, a_t 即同时垂直于 z 轴和 r 的加速度分量。

这里叉乘的先后顺序可能并不那么好记，推荐读者自己画一个圆周运动的图，用右手定则对应验证一遍如上关系，以加深理解与记忆。

[4]注意这里垂直于 z 轴的条件，我们考虑的是绕轴旋转，所以任何轴向的速度分量也不在我们研究转动的考虑之中。

3.2.4 Concepts in Dynamics

在引入了叉乘 (见小节 3.2.2~P38) 这一数学工具后, 我们得以较为轻松地描述转动的动力学概念。

以下默认已经选定转轴_I。

I - P43 引

- *The Moment of Inertia* $I = \sum_i m_i r_i^2$, 其中把刚体看成由多个质点组合而成, r_i 即是质点 m_i 的极径矢量大小。

The moment of inertia is a measure of the resistance of an object to changes in its rotational motion, just as mass is a measure of the tendency of an object to resist changes in its linear motion.

- *Torque* $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{/z}$, 其中 \mathbf{r} 是力 \mathbf{F} 的作用点对应的极径矢量, $\mathbf{F}_{/z} = \mathbf{F} - \mathbf{F}_z$, \mathbf{F}_z 即 \mathbf{F} 在 z 轴上的分矢量^[5]。
- *Net Torque* $\tau_{net} = \sum_i \tau_i$
- 类似牛顿第二定律, 有: 在惯性系中, $\tau_{net} = I\alpha$, 即合外力矩等于刚体的转动惯量乘以角加速度。

^[5]事实上, 力矩拥有两种定义, 一种是对点定义的, 为 $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$; 另一种是对轴定义的, 为 $\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{/z}$ 。鉴于我们使用了柱坐标系建立这些概念, 这里选择对轴定义的力矩。

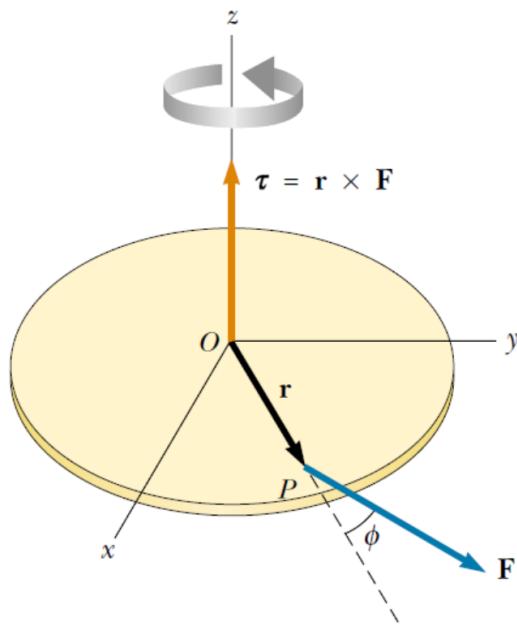


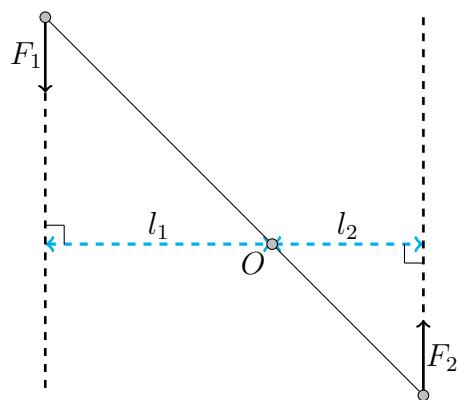
图 3.3: 力矩示意图

在本图中, 由于 \mathbf{F} 没有 z 轴上的分量, 所以 $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{/z}$ 。

事实上, 普物 I 中基本没有出现过 \mathbf{F} 有 z 轴分量的情况。

关于以上内容的证明, 见 *Prove 3.1~P 237*。

其中, 为了便于计算力矩, 我们可以引入 *moment arm/force arm* 的概念, 其大小即为转轴到力的作用线的距离。有了这一点, 力矩的大小就可以通过力臂乘以力得到。



l_1 是 F_1 的力臂, l_2 是 F_2 的力臂。

对于常见的物体, 其转动惯量是应当记住的:

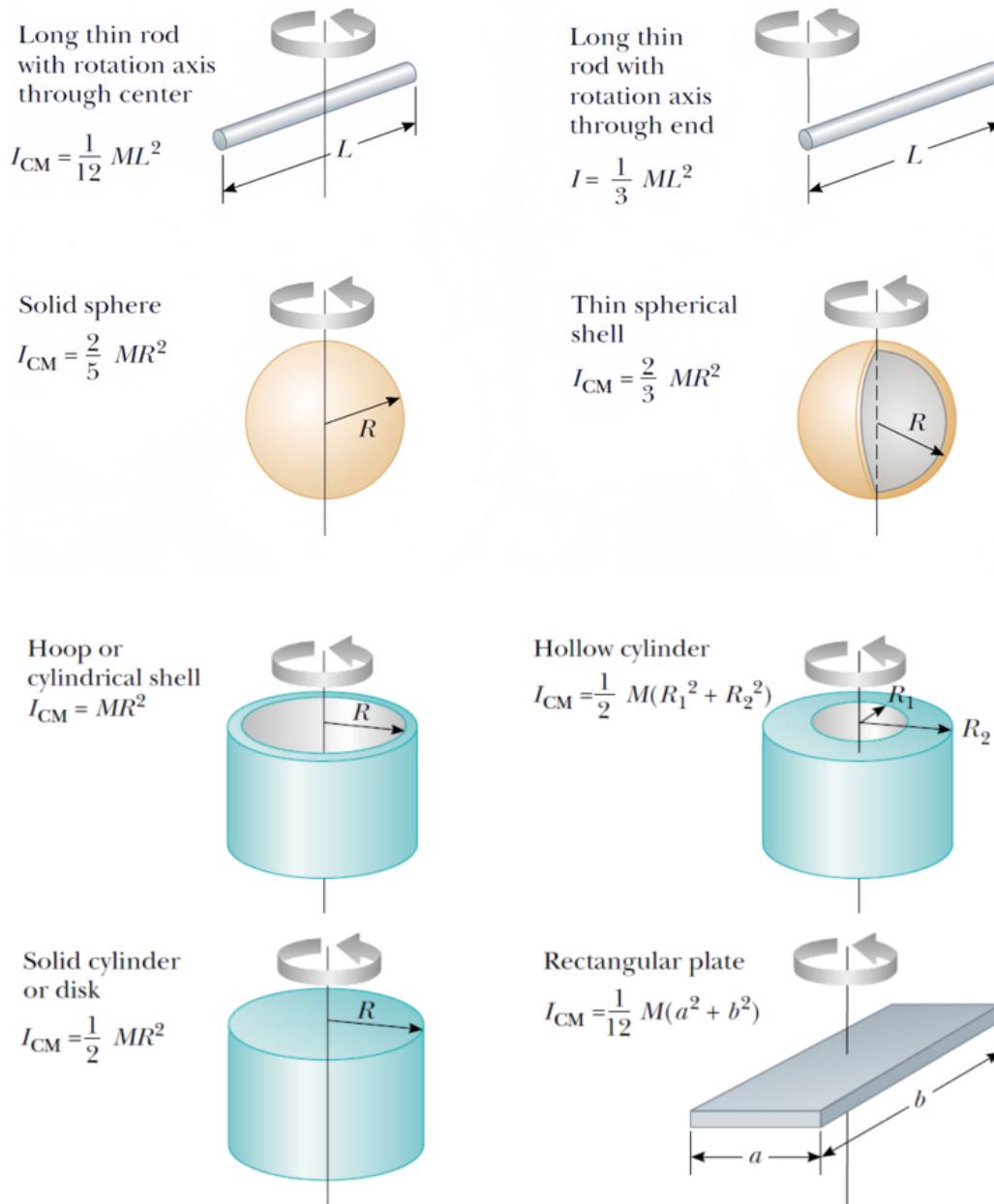


图 3.4: 常见物体的转动惯量

(I - P307 引)

对于更一般的物体，则往往通过积分的方式求取它们的转动惯量。

3.3 Parallel Axis Theorem/Steiner Theorem

在之前对转动的动力学概念的讨论中，我们默认转轴是选定的⁽⁵⁾，这是因为，当转轴不同时，转动惯量与合力矩都会发生变化。平行轴定理是解决转轴变化过程中转动惯量变化的利器，其表述如下：

(5) 见小节 3.2.4~P41

定理 3.1 *Parallel Axis Theorem/Steiner Theorem —Prove 3.2~P 238*

I - P309 引

记刚体 M 以过质心的轴 (简称质心轴) 为转动轴时的转动惯量为 I_{CM} , 以任意平行于质心轴的轴为转动轴时的转动惯量为 I , 这两条轴之间的距离为 h , 则有

$$I = I_{CM} + Mh^2$$

幸于拥有平行轴公式, 我们在背诵常见刚体的转动惯量时, 一般只要记下它以质心轴为转动轴时的转动惯量即可。

3.4 Energy in a Rigid Body

好比从牛顿三律进发到能量定律, 我们将开始研究刚体中的能量。

3.4.1 Energy in Rotation ONLY

首先, 让我们思考一个只发生转动的刚体所带的能量 (*Prove 3.3~P 238*)。

- 动能定理 $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$
- 做功 $dW = \tau d\theta$
- 功率 $P = \tau\omega$
- 旋转势能 $U = \frac{1}{2}\kappa\theta^2$

其中, 旋转势能是指由弹性旋转体扭转回原位的趋势产生的, 只依赖于其状态的能量, 在数值上等于将旋转体自原位扭转至当前位置所做的功。 κ 称为扭转常数, 单位为 $N \cdot m$ 。

当旋转体扭转了角度 θ 时, 就会产生反力矩 $\tau = -\kappa\theta$ 。

3.4.2 Energy in Rotation & Translation

现在, 让我们思考一个问题:

一个刚体在质心系中能够发生平动吗?

答案是否定的。如果刚体在质心系中发生平动，那么质心就会拥有平动速度，然而，在质心系中，质心又一直处于原点，这与质心拥有平动速度相矛盾，因此刚体在质心系中只能发生转动¹。

既然如此，我们便会有这样的想法：利用质心系，把同时发生平动和转动的物体转化成只发生转动的物体来研究。如此，便产生了柯尼希定理：

I - P239 引

定理 3.2 Konig's Theorem — Prove 3.4 ~ P239

记一个系统 M 的质心速度为 v_{CM} ，在质心系中的动能为 K^{CM} ，在静止参考系中的动能为 K ，并记 $K_{CM} = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$ ，则有

$$K = K_{CM} + K^{CM}$$

I - P26 引

如果考虑对一个刚体使用柯尼希定理，则有：

$$K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

在研究一个同时发生平动和转动的物体的动能时，我们往往使用柯尼希定理，分别求解其质心的平动能和在质心系中的转动动能。

3.5 Angular Momentum

与平动时的动量类似，我们可以定义刚体的角动量。

3.5.1 Definition

- *Angular Momentum* $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_{i/z} = I\boldsymbol{\omega}$ ，其中 $\mathbf{p}_{i/z} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{iz}$ ， $\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_{i/z}$ 应视作质点 m_i 的角动量。角动量的方向总是与角速度的方向一致^[6]。
- 类似动量，我们有 $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{net}$ 。

以上内容证明见 *Prove 3.5 ~ P239*。

^[6]对于这句话需持谨慎态度。在本章所定义的概念体系中，这句话是成立的，但由于大多数对角动量的定义都是对点定义，即 $\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ ，就出现了角动量方向与角速度方向不一致的说法。当出现这类判断时，请读者优先考虑不一致的说法。

3.5.2 Conservation of Angular Momentum

- *Conservation of Angular Momentum* 由角动量的性质，我们可以发现，当合外力矩的值为 $\mathbf{0}$ 时，系统的角动量保持守恒。

$$\tau_{net} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{L} = Constant$$

利用角动量守恒，可以解释开普勒第二定律。

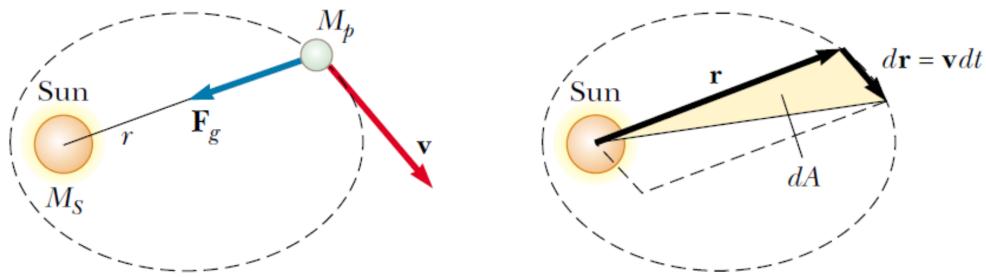


图 3.5: Kepler's Second Law

对 M_p 分析，有 $\tau_{net} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_g = \mathbf{0}$ ，因此角动量守恒

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = \frac{L}{M_p} \Rightarrow \text{单位时间扫过面积相等}$$

When a force is directed toward or away from a fixed point and is function of \mathbf{r} only, it is called a Central Force.

总是可以选择合适的轴，使得中心力产生的力矩为 $\mathbf{0}$ 。

花样滑冰时选手收紧胳膊旋转较快，而张开双臂后旋转变慢，这也是角动量守恒的功劳。你可能会发现，收紧胳膊时，人的动能变大了，这是生物能的功劳。

3.5.3 Center of Frame Translation

角动量在静止参考系和质心系间的转化与柯尼希定理类似。

定理 3.3 *Angular Momentum Translation Using C.M. Frame^[7]* —

Prove 3.6~P 240

记质心角动量为 $\mathbf{L}_{CM} = M\mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{v}_{CM}$, 刚体在质心系中的角动量为 $\mathbf{L}^{CM} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i^{CM} \times \mathbf{v}_i^{CM}$, 刚体在静止参考系中的角动量为 \mathbf{L} , 且保证两个参考系中选取的轴平行, 则有

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} + \mathbf{L}^{CM}$$

3.6 Center of Gravity

我们会注意到, 在分析重力产生的合力矩时, 依据定义, 应该对每一个质元求分力矩, 然后进行求和。这似乎是一件复杂的事情。有没有办法寻找一个点, 使得刚体的合重力在此作用时, 得到的力矩恰等于重力的合力矩呢? 事实上, 我们把这样的点称作重心。

一个重要的结论是:

对于均匀的重力场, 刚体的重心与质心重合 (*Prove 3.7~P 241*)。

至于不均匀的情况, 就需要依据定义进行计算了。

3.7 Non-Inertial Frame Situation

3.7.1 Inertial Force

由于转动动力学的所有定律都是基于牛顿运动定律, 结合数学方法推出的, 因此, 对于一个拥有加速度 \mathbf{a}_{frame} 的平动非惯性参考系⁽⁶⁾, 我们需要在分析其中的物体时添上惯性力 $\mathbf{F}_{fictional} = -m\mathbf{a}_{frame}$, 其中 m 为物体的质量。此时, 牛顿运动定律保持成立, 转动动力学中的定律也保持成立。

I - P47 引

3.7.2 Coriolis Force *

你可能注意到了, 之前的表述中, 我们讲的是“拥有加速度 \mathbf{a}_{frame} 的平动非惯性参考系”⁽⁶⁾。这暗示着, 如果参考系还发生着转动, 情况又会有所不同。

(6) 见小节 3.7.1~P 47

^[7]对于对点定义的角动量, 也有类似的结论, 证明方法也基本相同。

对于一个仅发生转动的参考系，有如下定理：

定理 3.4 Frame Translation with Rotation*—Prove 3.8, ~P 241

如果希望牛顿运动定律在一个转动参考系 \mathcal{F}' 中依然成立，我们需要对 \mathcal{F}' 中的物体添加三个假想力，分别是 $-2m\omega \times v'$, $-m\alpha \times r'$, $m\omega^2 r'$ 。

其中， ω 是 \mathcal{F}' 的角速度， α 是 \mathcal{F}' 的角加速度， v' 是物体在 \mathcal{F}' 中的速度， r' 是物体在 \mathcal{F}' 中的极径矢量。

如果我们将条件简化，认为 \mathcal{F}' 没有角加速度，则无需考虑 $-m\alpha \times r'$ 。

我们称 $-2m\omega \times v'$ 为 *Coriolis Force*, $m\omega^2 r'$ 为 *Centrifugal Force*。

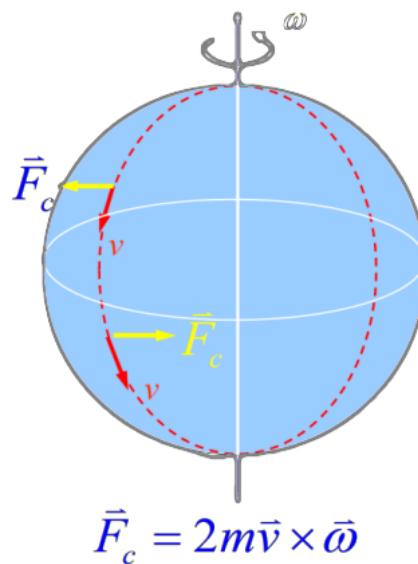


图 3.6: 地球的科里奥利力

如果考虑地球的科里奥利力，我们会发现，在北半球上，科里奥利力永远指向物体运动方向的右侧，而在南半球正好相反。

台风的旋转方向在北半球是逆时针，在南半球是顺时针，这也是科里奥利力的影响。

科里奥利力是一种假想力^[8]。

^[8] 我们有时会看见类似“科里奥利力是由于地球自转而施加给地球上的物体的力”的说法，这么讲可能是因为我们往往以地球为参考系分析问题，此时要想保证牛顿第二定律成立，就要认为物体受到科里奥利力。不过，一般而言，科里奥利力较小，在日常生活的分析中大多可忽略不计。

3.8 Review and Summary

在我们的推导中，我们发现，转动力学的结论与平动力学有着惊人的相似性。关注这份相似性既能体会物理的美感，又能加深对结论的记忆。

$$\text{Angular speed } \boldsymbol{\omega} = d\theta/dt$$

$$\text{Linear speed } \mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$$

$$\text{Angular acceleration } \boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$$

$$\text{Linear acceleration } \mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$$

$$\text{Resultant torque } \sum \boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}$$

$$\text{Resultant force } \sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

If

$$\boldsymbol{\alpha} = \text{constant} \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_f = \boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\alpha}t \\ \theta_f - \theta_i = \omega_i t + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}t^2 \\ \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \end{cases}$$

If

$$\mathbf{a} = \text{constant} \begin{cases} \mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}t \\ \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_i = \mathbf{v}_i t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \\ v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \end{cases}$$

$$\text{Work } W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta$$

$$\text{Work } W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

$$\text{Rotational kinetic energy } K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$\text{Kinetic energy } K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{Power } P = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$\text{Power } P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

$$\text{Angular momentum } \mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$$

$$\text{Linear momentum } \mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

$$\text{Resultant torque } \sum \boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$$

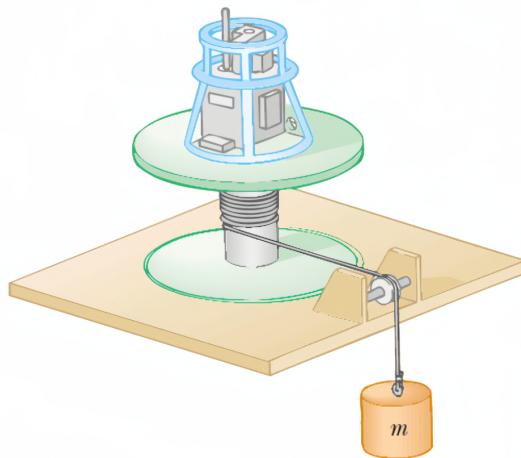
$$\text{Resultant force } \sum \mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$$

3.9 课后习题：转动动力学

习题 3.1 Determine the Moment of Inertia of an Irregularly Shaped Object—

Solution 3.1 ~ P 305

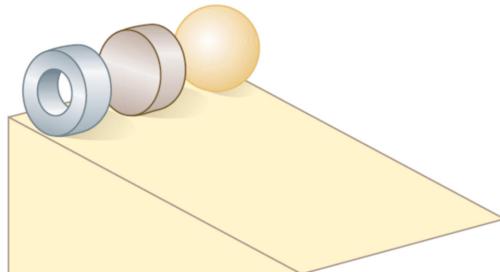
This problem describes one experimental method of determining the moment of inertia of an irregularly shaped object such as the *payload* for a satellite.



The figure shows a mass m *suspended* by a *cord wound* around a spool of radius r , forming part of a *turntable* supporting the object. When the mass is released from rest, it *descends* through a distance h , acquiring a speed v . Show that the moment of inertia I of the equipment (including the turntable) is $mr^2(\frac{2gh}{v^2} - 1)$.

习题 3.2 Rolling Items—Solution 3.2 ~ P 306

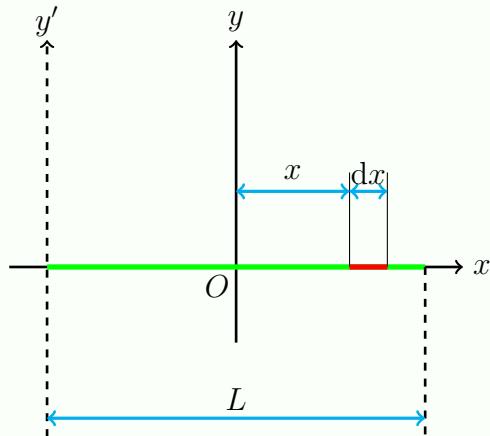
Three objects of *uniform density* — a *solid sphere*, a *solid cylinder*, and a *hollow cylinder* — are placed at the top of an *incline*.



If they all are released from rest at the same *elevation* and roll without *slipping*, which object reaches the bottom first?

习题 3.3 Calculation of the Moment of Inertia—*Solution 3.3~P 308*

A rod's *linear density* is given by $\lambda = kx$, where x represents the distance from the point to the rod's center.

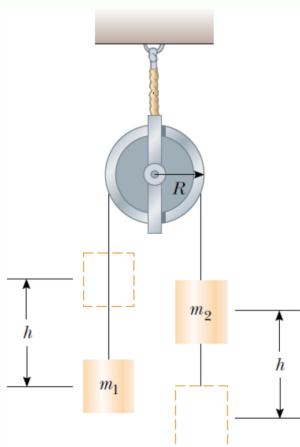


Given the length of the rod L , try to calculate the moment of inertia of the rod, given the rotation axis at:

- (1) Center O as the y axis shows.
- (2) One end as the y' axis shows.

习题 3.4 Massive Pulley—*Solution 3.4~P 309*

Consider two *cylinders* having masses m_1 and m_2 , where $m_1 < m_2$, connected by a string passing over a pulley. The pulley has a radius R and moment of inertia I about its axis of rotation.

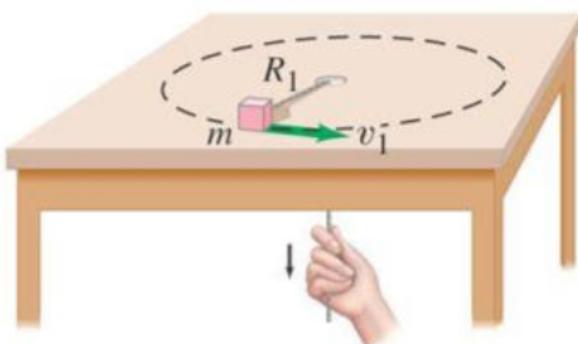


The string does not *slip* on the pulley, and the system is released from rest.

Find the linear speeds of the cylinders after cylinder 2 *descends* through a distance h , and the angular speed ω of the pulley at this time.

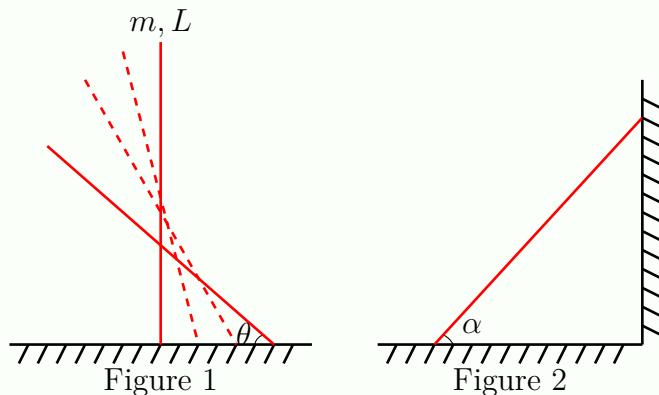
**习题 3.5 Object rotating on a string of changing length—
Solution 3.5 ~ P 310**

Initially, the mass *revolves* with a speed $v_1 = 2.4 \text{ m/s}$ in a circle of radius $R_1 = 0.80 \text{ m}$. The string is then pulled slowly through the hole so that the radius is reduced to $R_2 = 0.48 \text{ m}$. What is the speed, v_2 , of the mass now?



**习题 3.6 Rotation of a sliding rigid rod—
Solution 3.6 ~ P 311**

Consider a rod with mass m and length L standing straight on the frictionless ground. When we release the rod, it will fall from the unstable *equilibrium position*.



- (a) Calculate the angular velocity of the rod, when it has an angle of θ with respect to the ground as illustrated in Figure 1.
- (b) What is the final angular velocity ω_1 of the rod before it hits the ground?
- (c) If the same rod is leaning to a frictionless wall with an initial angle of to the frictionless ground (see Figure 2), what is the final angular velocity ω_2 of the rod before it hits the ground?

Note that there is a possibility that the right end of the rod leaves from the wall before the rod hits the ground.

4

Fluid Mechanics

本章节存在一定的特殊性：在 2022 年及之前，流体力学是普物 I 的内容，而在 2023 级，这一块内容被路欣老师为代表的教学组删去了。

当看到流体力学的时候，你想到的是什么？或许是初中的水的压强，又或者是湍流等复杂情景。其实都无所谓，毕竟它们都是流体的研究。当今世界对于流体力学的探究也是一个重要的力学方向，小到潜水，大到飞机飞船，都需要关注流体对于物体的影响。但是，我们这门课程的流体力学相当简单和浅层，按照笔者当时授课较为简单的 pzz 老师的内容，我用一句话定义这一块内容：两个公式走天下！这是由于我们使用了大量的理想情景，抛除复杂情景所致。

4.1 Definition & Properties of Fluids

生活中的物体可分为固体、液体和气体三大类，其中，我们一般将液体和气体统称为流体。它们一般受到的力是不一样的：

- *solid*: *compression force* (指物体能够从两侧被挤压), *tensile force* (指物体能够受力被拉伸), *shearing force* (指物体能够受到不在同一直线上的两个相反方向的力而保持形状不变)
- *liquid*: compression force, tensile force, no shearing force
- *gas* : compression force, no tensile force, no shearing force

在静止的液体中，我们已经了解到物体一定会受到水的压力，进而定义压强。

定理 4.1 静止流体中的压强

利用微元法分析，我们可以知道物体受到的静止流体的压强为：

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g, \text{ 积分可得 } p = p_0 + \rho gh$$

其中 p_0 是液体表面的压力， h 为深度， y 为该点相对于参考平面的高度。

对于静止流体，我们也有两个重要的而且很直观的性质：

定理 4.2 Pascal's Principle

施加在封闭流体上的力被不减弱地传递到流体的每一部分和容器的壁上。

假设流体中受力面积为 S 的某点处原有压强为 p_0 ，在其上方平面施加垂直向下的力 F ，则该点处当前的压力为：

$$F' = p_0 S + F$$

这是很容易理解的，我们以按压海绵为例，力的作用会逐渐传导到物体的每个位置。当然，帕斯卡原理强调了在流体中这个力是不会减弱的，而海绵是固体，力是会减弱的。

定理 4.3 Archimedes's Principle

一个部分或者完全浸入液体中的物体受到的浮力等同于它所排出的液体的重力。

最简单的例子，就是我们初中学过的物体受到水的浮力的公式：

$$F = \rho g V$$

我们可以很容易地知道这个公式的本质就是阿基米德原理。

在液体中存在表面张力，表面张力是一种由于液体分子间的相互吸引与拉扯而产生的力的作用，其大小与物体间的接触长度有关。定义表面张力系数为：

$$\gamma = \frac{F}{l}$$

其中 F 为该处受到的表面张力大小， l 表示接触面的长度。这里的表面张力定义与普通化学 (H) 中的定义相同。当表面张力产生时，由于物体具有一定

厚度，一般情况下会产生两个液体膜的拉力作用，因此计算时通常需要将长度以两倍长度，即 $2l$ 计算。

由于物体与液体间的表面张力系数不同，会产生浸润与非浸润的区别。这个概念与普化课程一致，且一般不作考察，因此我们暂不讨论。

4.2 Fluid Dynamics

或许你一直有疑问：我感觉我也没学啥呀，怎么就动力学了？确实，我们到目前的流体力学都是初中水平。而接下来，就是流体力学两个方程走天下的经典例子。

我们定义流体的通量为： $Q = \frac{\delta m}{\delta t} = \rho A v$ ，表示单位时间内流过截面积为 A 的流体的质量，其中 ρ 表示流体密度， A 表示流体通过的截面面积， v 表示通过这个截面时的流体流速。首先考虑一个水管，里面充满了水，水管不可压缩变形，水也不可压缩变形。那么很明显，水管的一端进入多少水，另一端就会有多少水流出来。

定理 4.4 管流原理 (连续性原理)

流体流入某个管的通量等于流出该管的通量，即： $\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$

在这个方程中，我们看到了同一个流体的管流特点。当然，这个方程忽略了压强和位置的变化。因此，我们针对理想流体，即不可被压缩、遵循管流原理、没有湍流现象或其他扰动的流体，提出了伯努利方程：

定理 4.5 Bernoulli's Equation

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g y = \text{constant}$$

只需要在使用中注意的一点是，这里的 y 表示的是位置相对于参考平面的高度，而非相对于液面的深度。在满足上述条件的情况下，只要是同一个连通的流体，在其内部每一点处，上述等式左边的结果均相等。

当然，看到这里，我们已经了解了两个重要的方程。结合中学的压强的定义，我们已经可以用两个方程大步走入流体力学的世界了。最后，这些已经足够我们普物的内容了，更为复杂的情况，交给流体力学的专家们解决吧。

4.3 课后习题: 流体力学

习题 4.1 流体静力学—*Solution 4.1 ~ P 315*

A fluid is rotating at constant angular velocity ω about the central vertical axis of a cylindrical container. As shown in Figure 4-1:

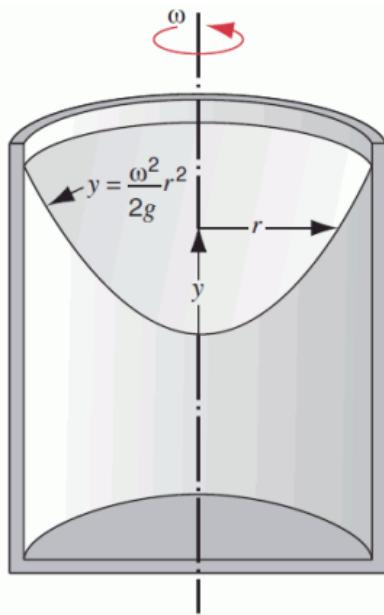


图 4.1: 流体静力学

(a) Show that the *variation* of pressure in the *radial direction* is given by $\frac{dp}{dr} = \rho\omega^2r$.

(b) Take $p = p_c$ at the axis of rotation ($r = 0$) and show that the pressure p at any point r is

$$p = p_c + \frac{1}{2}\rho\omega^2r^2$$

(c) Show that the liquid surface is of *paraboloidal* form (Figure 4-1); that is, a vertical cross section of the surface is the curve $y = \frac{\omega^2r^2}{2g}$.

习题 4.2 流体动力学—*Solution 4.2~P 317*

As shown in Figure 4-2, it is an *air suction device*. Given that the depth of the centerline of the *catheter* below the liquid level in container A is h , the height difference between the liquid level in container B and the centerline of the horizontal catheter is h_b , *the cross-sectional area* at the *nozzle* d is S_d , and the cross-sectional area at the *contraction section* c is S_c . What are the conditions for the *ratio* of S_d to S_c to occur for *suction*?

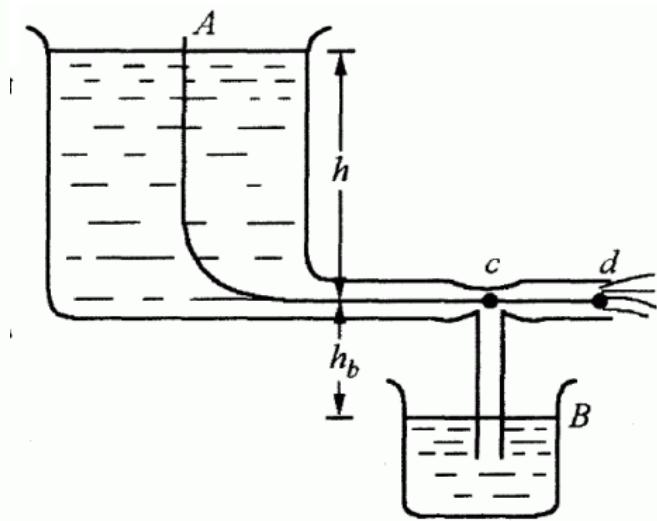


图 4.2: 流体动力学

5

Oscillations and Waves

波是振动的传播。

在本章中，我们做以下符号上的约定：

- \mathbf{F} : Force, where \mathbf{F}_{net} refers to the net external force.
- τ : Torque, where τ_{net} refers to the net external torque.
- \mathbf{p} : Momentum.
- \mathbf{L} : Angular momentum.
- U : Potential energy.
- K : Kinetic energy.
- E : Mechanical energy.
- \mathbf{x} : Displacement.

5.1 Equilibrium

回忆高中物理，我们知道，振动的最基本形式——简谐振动的一大特点便是具有平衡位置。因此，在开始正式讨论振动与波之前，我们先来研究一下物体平衡的条件。

平衡的定义如下：

- *Equilibrium*: The condition of a system when neither its state of motion nor its internal energy state tends to change with time.

通过前面章节力学部分的学习，我们知道，上面的定义可以写作以下两种形式：

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{net} = 0 \\ \boldsymbol{\tau}_{net} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{p} = Const \\ \mathbf{L} = Const \end{cases}, \text{ 或 } \left\{ \frac{dU}{dx} = 0 \right.$$

让我们分别观察两个等价的表达式，它们分别从受力与能量的角度描述了何为“平衡”。

先从受力的角度。我们知道，物体的所受的力矩大小与转轴位置有关。那么，一个自然的问题是，平衡的物体重新选取转轴位置后，总力矩依旧为零吗？答案是肯定的。

定理 5.1 Prove 5.1, ~P 246

$$\begin{cases} \sum_i \mathbf{F}_i = 0 \\ \sum_i \boldsymbol{\tau}_i = 0 \end{cases} \implies \sum_i \boldsymbol{\tau}_{i,O'} = 0, \text{ for any other point } O'.$$

特别地，对于 $\mathbf{p} = 0, \mathbf{L} = 0$ 的情况，我们称之为 *Static equilibrium* —— 显然，这与坐标系的选取有关。

而从能量的角度，能量关于时间一阶导为零，根据其二阶导的符号，我们又可将其分为以下三种情况⁽¹⁾：

- *Stable equilibrium*: $\frac{dU}{dx} = 0, \frac{d^2U}{dx^2} < 0$
- *Unstable equilibrium*: $\frac{dU}{dx} = 0, \frac{d^2U}{dx^2} > 0$
- *Neutral equilibrium*: $\frac{dU}{dx} = 0, \frac{d^2U}{dx^2} = 0$

直观上讲，*Stable equilibrium* 位置势能取最小值，好比是一个落入坑中的小球，在施以一定干扰的情况下是“稳定”的；*Unstable equilibrium* 位置势能取最大值，好比是一个停留在穹顶的小球，虽然静止，但一旦受到外力干扰便会打破其平衡的状态；而 *Neutral equilibrium* 可以理解为物体的平衡状态不会被位移所改变，例如一根横躺的圆柱，无论滚到哪里都可以保持静止。

(1) 值得注意的是，此处的 U 是一个向量函数，因此所谓的“符号”指其 Hessian 矩阵的正定/负定/不定。

5.2 Oscillations

5.2.1 Simple Harmonic Motion (SHM)

简谐运动想必大家已经非常了解了，下面我们用另外一种方式引入。

考虑一个 *Stable equilibrium* 的物体，在平衡点 \mathbf{x}_0 对 U 做关于 \mathbf{x} 的 *Taylor expansion*

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}) &= U(\mathbf{x}_0) + \left. \frac{dU}{d\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{d\mathbf{x}^2} \right|_{\mathbf{x}_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 + \dots \\ &\approx U(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} k (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2, \quad k = \left. \frac{d^2U}{d\mathbf{x}^2} \right|_{\mathbf{x}_0} \quad (\mathbf{x} \sim \mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

而我们又知道 $\mathbf{F} = -\frac{dU}{d\mathbf{x}}$, 于是得到:

$$\mathbf{F} = -k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

如果将 k 近似看做一个正常数，显然，这便与我们高中接触的简谐运动的定义相同。由此可见，简谐运动实际上是一种具有更为广泛意义的运动。

下面我们给出简谐运动的完整定义:

- *Simple harmonic motion*: The motion of an object whose acceleration of the system, and therefore the net force, is proportional to the displacement and acts in the opposite direction of the displacement.

利用牛顿第二定律，我们可以列出以下微分方程⁽²⁾:

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0)$$

解这个微分方程 (*Prove 5.2~P 246*)，得到:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + x_0$$

其中

- A : *Amplitude* , the maximum displacement from the equilibrium position.
- ω : *Angular frequency* , which identically equals to $\sqrt{\frac{k}{m}}$.

⁽²⁾ 在接下来的讨论中，
我们要求运动是一维
的。因此，这里使用标
量式

- φ : *Initial phase angle*, which determines the initial position of the motion at $t = 0$.

我们再定义两个物理量：

- T : *Period*, the time taken for one complete cycle of motion.
- f : *Frequency*, the number of cycles per unit time.

则有以下关系：

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

而利用 $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + x_0$, 我们可以进一步得到:

$$\begin{cases} v = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) &= \omega A \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \\ a = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) &= \omega^2 A \cos(\omega t + \varphi + \pi) \end{cases}$$

两个小结论：

- 偏离平衡位置的位移与加速度符号相反。
- 位移、速度与加速度周期一致。

下面，我们来讨论简谐运动物体的机械能：

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \\ U &= \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

于是

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2$$

这说明简谐运动系统总机械能守恒，且振幅大小的平方与总机械能大小正相关^[1]。

对动能与势能的表达式稍加变形：

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}kA^2 \frac{1 - \cos(2\omega t + 2\varphi)}{2} \\ U &= \frac{1}{2}kA^2 \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)}{2} \end{aligned}$$

即得到两者的周期均为运动周期的一半。

^[1]不知大家此时有没有想到 Parseval 恒等式呢

5.2.2 Expressing SHM With Uniform Circular Motion

看到三角函数，我们自然会想到圆。简谐运动与匀速圆周运动之间的关系是非常直接的。

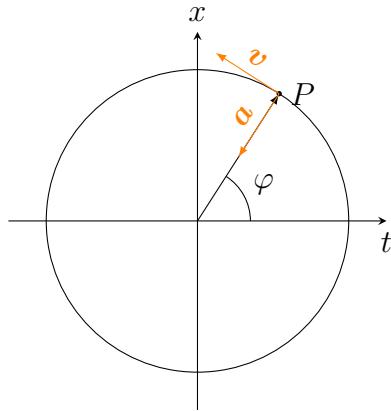


图 5.1: 圆周运动示意图

考虑 P 点在 x 轴上的投影，显然有 $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ 。于是我们知道，每一个简谐运动都可以与一个圆周运动相对应。这种思想将会在后续内容中有所体现。

5.2.3 Damped Oscillations^{*}

下面我们来稍微超越一下高中范围。我们知道，生活中难以存在真正的简谐运动的一大原因是阻力的存在。我们先考虑一种最普遍的阻力——流体阻力。在低速条件下，流体阻力的大小可以由下式表达：

$$F_d = -bv^{[2]}$$

其中 b 被称为阻尼系数，是一个由物体形状与流体性质决定的量。直观理解，如果阻尼不大，系统的运动方式应当接近简谐运动，但是随时间会有能量的损耗；而阻尼很大时，系统可能就不能震荡了。

与解决简谐运动问题一样，我们用牛顿第二定律列出微分方程：

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) - b\dot{x}$$

^[2]实际上，流体阻力公式应为 $F_d = \frac{1}{2}\rho v^2 C_d A$ ，课内要求的仅仅是解决低速情况。针对更准确的表达式，我们将在补充材料中讨论。

解这个微分方程 (*Prove 5.3~P 247*), 会发现它的解实际上需要分为三类。按照物理图像的不同, 我们分别称它们为: *Underdamped*, *Overdamped*, *Critically damped*。

我们定义 *Natural angular frequency* 为 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, 然后有解:

- *Underdamped* ($\frac{k}{m} < (\frac{b}{2m})^2$):

$$x = A e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{b}{2m})^2} t + \varphi) + x_0$$

- *Overdamped* ($\frac{k}{m} < (\frac{b}{2m})^2$):

$$x = A_1 \exp\left[\left(-\frac{b}{2m} + \sqrt{\frac{b}{2m} - (\frac{k}{m})^2}\right)t\right] + A_2 \exp\left[\left(-\frac{b}{2m} - \sqrt{\frac{b}{2m} - (\frac{k}{m})^2}\right)t\right] + x_0$$

- *Critically damped* ($\frac{k}{m} = (\frac{b}{2m})^2$):

$$x = (A_1 + A_2 t) e^{-\frac{b}{2m}t} + x_0$$

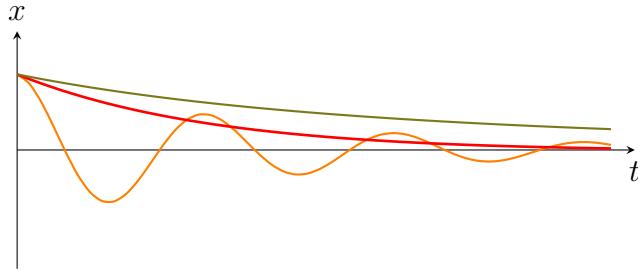


图 5.2: 三种阻尼振动

如果阻尼较小, 物体会振荡, 且随着能量被阻力消耗, 振幅会逐渐减小。其极限情况便是“临界阻尼”⁽³⁾。如果阻尼很大, 质点在运动时不会振荡, 而是会慢慢返回到平衡位置。

有趣的是, 能量耗散最快的情况是临界阻尼。一种理解方式是考虑两种极限情况: 阻尼接近零时, 系统接近于简谐运动, 能量几乎不消耗; 阻尼无穷大时, 系统接近静止, 能量同样几乎不消耗。临界阻尼的这种特性被应用于电流表的阻尼设计中。

(3) 即恰好不发生振荡的情况

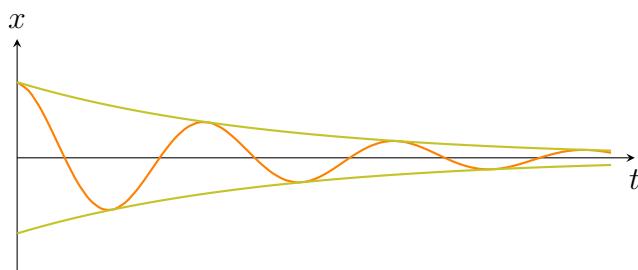


图 5.3: 欠阻尼的包络线

对于欠阻尼的情况，还可以将其看作是能量的指数衰减与周期运动的叠加。相对于无阻尼的情况，体系的周期会增大。

5.2.4 *Forced Oscillations*^{*}

下面让我们转向另一类常见的振动形式：

- *Forced Oscillations*: The condition of system when it is driven by a periodic force that is external to the oscillating system.

在阻尼运动的基础上⁽⁴⁾，我们设驱动力的表达式为 $F_d = F_{ext} \cos \omega t$ 。同样，我们用牛顿第二定律列出微分方程：

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) - b\dot{x} + F_{ext} \cos \omega t$$

解这个微分方程 (*Prove 5.4*~*P 248*)，得到：

$$x = \underbrace{A'e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega't + \varphi')}_\text{transient solution} + \underbrace{A \cos(\omega t - \varphi)}_\text{steady solution} + x_0$$

令 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ，则其中⁽⁵⁾

$$\begin{cases} A = \frac{F_{ext}/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (b\omega/m)^2}} \\ \tan \varphi = \frac{b\omega/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases}$$

(4) 原因且埋一个伏笔

(5) φ 被称为 relative phase，即相对（驱动力）的相位

观察解的表达式可以发现，当 t 很大的时候，解的前半部分因为存在指数衰减因子，几乎对 x 不起作用——于是此时物体便近似在做简谐运动，也即“稳定”了。这就是为什么解的前半部分被称为 *transient solution*，后半部分被称为 *steady solution*。

下面，我们采用比较“物理”的方式来分析稳态解的一些极端表现。

将微分方程改写为

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \omega^2 x + \frac{F_{ext}}{m} \cos \omega t = 0$$

同时我们有

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega t - \varphi) \\ \dot{x} = \omega A \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}) \\ \ddot{x} = \omega^2 A \cos(\omega t - \varphi + \pi) \\ F = F_{ext} \cos(\omega t) \end{cases}$$

我们可以把以上式子中的每一项与一个简谐运动所对应，再将其分别与一个匀速圆周运动所对应。于是我们可以用这样一幅图来表达：

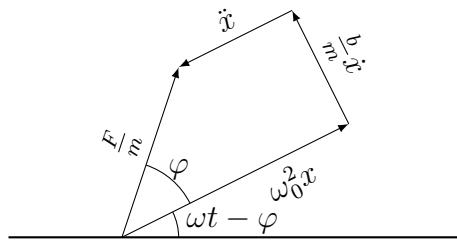


图 5.4: 用匀速圆周运动表达受迫振动

- Slow drive ($\omega \ll \omega_0$):

此时 \dot{x}, \ddot{x} 很小，于是有

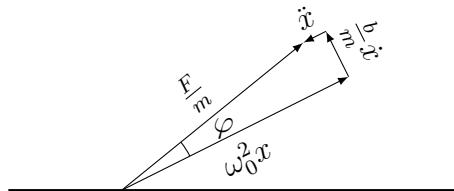


图 5.5(1)

可以看出， $\frac{F}{m} \approx \omega_0^2 x$ ，也即 $F_{ext} \cos(\omega t) \approx kA \cos(\omega t - \varphi)$ ，这说明

$$\begin{cases} A \approx \frac{F_{ext}}{k} \\ \varphi \approx 0 \end{cases}$$

即物体运动与驱动力同步。

- Fast drive ($\omega \gg \omega_0$):

此时 $\ddot{x} \gg \omega_0^2 x$ ，于是有

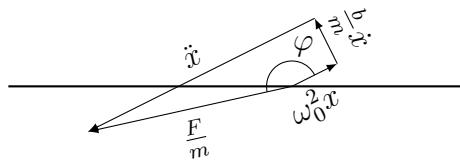


图 5.5(2)

可以看出, $\frac{F}{m} \approx \ddot{x}$, 也即 $F_{ext} \cos(\omega t) \approx mA\omega^2 \cos(\omega t - \varphi + \pi)$, 这说明

$$\begin{cases} A \approx \frac{F_{ext}/m}{\omega^2} \approx 0 \\ \varphi \approx \pi \end{cases}$$

即物体运动与驱动力恰好反相。

- *Resonance* ($\omega = \omega_0$)⁽⁶⁾:

此时 $\omega_0^2 x = \ddot{x}$, 于是有

⁽⁶⁾ 实际上, 这是不严格的 (见图 5.5~P 68)

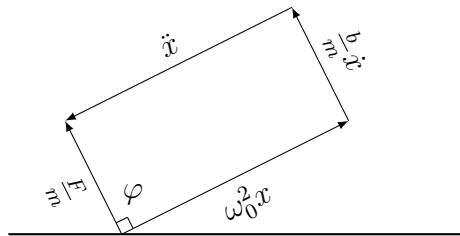


图 5.5(3)

可以看出, $\frac{F}{m} = \frac{b}{m}\dot{x}$, 也即 $F_{ext} \cos(\omega t) = Ab\omega \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})$, 这说明

$$\begin{cases} A = \frac{F_{ext}}{b\omega_0} \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

此时我们便可以收回前文的伏笔: 当 $b \rightarrow 0$, 即忽略阻尼时, 与驱动力共振的物体的振幅将会达到无穷大——这显然是不可能的。

下面我们来从数学的角度对稳态解作进一步分析。

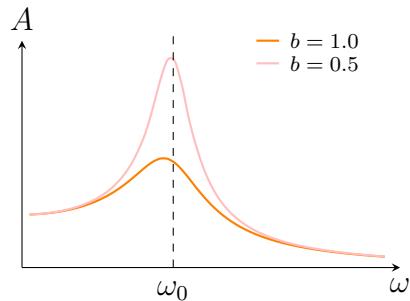


图 5.6: 不同阻尼系数情况下振幅与驱动力频率的关系

我们很容易求出振幅 A 的极值点:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{m^2}} \approx \omega_0$$

因此, 物体的共振频率实际略小于物体的固有频率^{I-P67 引}, 但为了方便起见, 我们一般认为它们相等。当物体处于共振状态时, 振幅达到最大值; 阻尼系数越接近 0, 物体的最大振幅越大:

$$A_{max} = \frac{F_{ext}/b}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{m^2}}} \approx \frac{F_{ext}}{b\omega_0}$$

5.3 Waves

5.3.1 Introduction

波随处可见。从物理的角度而言, 我们将某一物理量的扰动或振动在空间逐点传递时形成的运动称为波。不同形式的波虽然在产生机制、传播方式和与物质的相互作用等方面存在很大差别, 但在传播时却表现出多方面的共性, 可用相同的数学方法描述和处理。

波可以分为以下三类:

- *Mechanical Waves*: e.g. Water, Sound, *Seismic Waves*...
- *Electromagnetic Waves*: e.g. Light, Radio...
- *Matter Waves*: Quantum mechanical view of fundamental particles.

5.3.2 Mechanical Wave

下面我们主要讨论机械波。机械波的正式定义如下:

- A mechanical wave is the large movement of a disturbance in a *medium*, whereas the particles that make up the medium oscillate about a fixed equilibrium position.

机械波的形成需要以下三个条件:

1. *Source of disturbance*
2. *Medium*
3. Physical connection between *adjacent portions* of the medium

5.3.3 Pulse Wave

脉冲波是一个有限长度的波。例如，如果只摇晃绳子的末端一次，则会产生脉冲波，如下图所示：

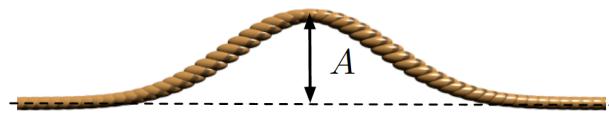


图 5.7: Wave pulse

我们称脉冲通过之前以及之后绳子所在的位置为 *Equilibrium position*，称绳上质点位移的最大值为 *Amplitude* (7)，用 A 表示。波的振幅由波源决定；与振动类似，波的能量与振幅正相关。

(7) 振幅总是非负的

脉冲波是一种 *traveling wave*。我们称 *Displacement* y 为 *Wave Function*：

$$y = f(x, t) = f(x \pm vt)$$

其中， v 是 *wave speed*， $f(x - vt)$ 代表 *right-moving wave*， $f(x + vt)$ 代表 *left-moving wave*。

出于对 *polarization* 的研究，按照振动方向与传播方向的不同关系，波又可以分为以下两类

- *Transverse Wave*: A wave is transverse if the displacement from equilibrium is perpendicular to the direction the wave is traveling, or $\Delta\mathbf{y} \perp \mathbf{v}$.

e.g. Light, or the wave along a string...

- *Longitudinal Wave*: A material wave is longitudinal if the medium displacement from equilibrium is in the same direction that the wave is traveling, or $\Delta\mathbf{y} \parallel \mathbf{v}$.

e.g. Sound, or the wave along a *spring*...

5.3.4 Superposition of Waves

在满足线性近似的情况下，波的叠加是线性的⁽⁸⁾。我们可以用下面的公式表达波的叠加：

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

(8) 我们将在补充材料中证明这一点

对于满足这一关系的波，我们称之为 *Linear Waves*；否则称之为 *Nonlinear Waves*。线性波假设下，两束相遇的行波才可以穿过对方而不对其本身产生任何影响。

下面，我们先给出 *interference* 的定义：

- The combination of separate waves in the same region of space to produce a *resultant* wave is called interference.

根据两束波叠加时的表现，我们将其分为以下两类：

- Constructive Interference*: The phenomenon where two or more waves combine to form a wave with greater amplitude.

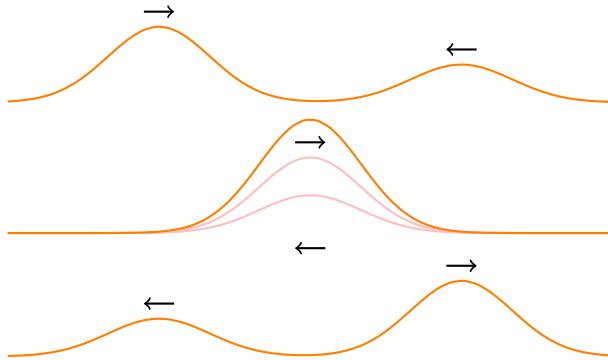


图 5.8: *Constructive Interference*

- Destructive Interference*: The phenomenon where two or more waves combine to form a wave with reduced or zero amplitude.

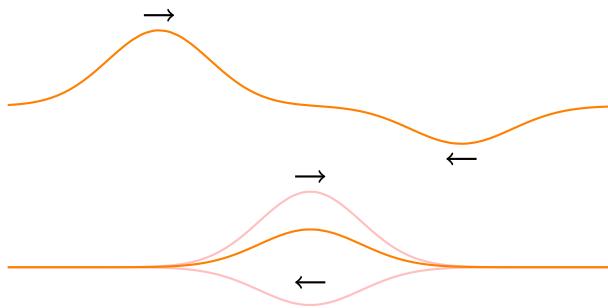


图 5.9: *Destructive Interference*

Reflection of Waves

当绳波遇到绳的端点⁽⁹⁾，会发生反射现象。绳波的反射形式与端点的约束有关。一般地，我们称之为 *Boundary Condition*。

(9) 介质剧烈变化的点

我们先介绍最简单的两种边界条件形式：

- *Fixed Boundary Condition* :

顾名思义，该情况对应的是绳波一个端点固定的情况。根据牛顿第三定律知，反射波将会与入射波相反。

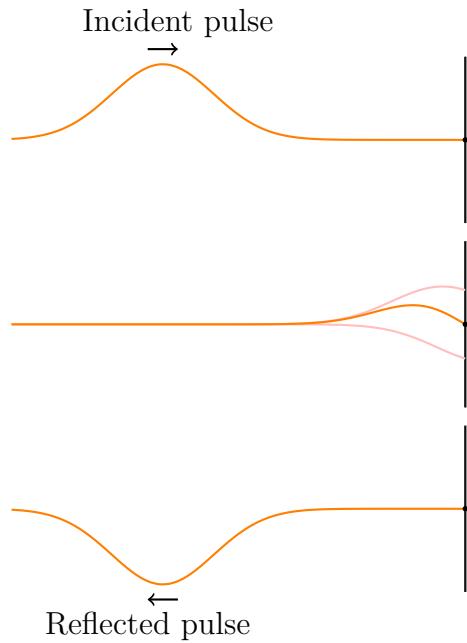


图 5.10: 固定边界条件下波的反射

- *Free Boundary Condition* :

该情况对应的是绳波一个端点可以上下自由移动的情况（例如用一个圆环套在杆子上）。对端点进行受力分析可知，反射波将会与入射波相同。

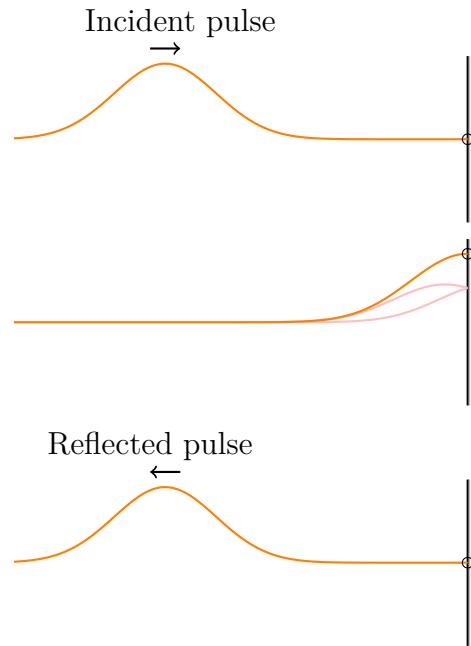


图 5.11: 自由边界条件下波的反射

Transmission of Waves

我们可以将波的反射看作是极端情况下的透射（没有波成功透射）。若边界的状态介于这两种极端之间，则部分入射波会被反射，另一部分则透过边界传播。不妨记介质一中波速为 v_1 ，介质二中波速为 v_2 ，根据不同介质中波速的相对大小关系，我们将其分为以下两类：

- $v_1 > v_2$: 此时波的传播接近于 *Fixed Boundary Condition*，发生 *Half-wave losses*（即反射波反相）。

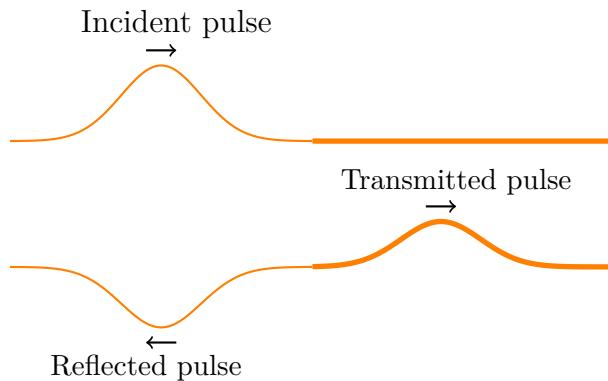


图 5.12

- $v_1 < v_2$: 此时波的传播接近于 *Free Boundary Condition*，反射波不反相。

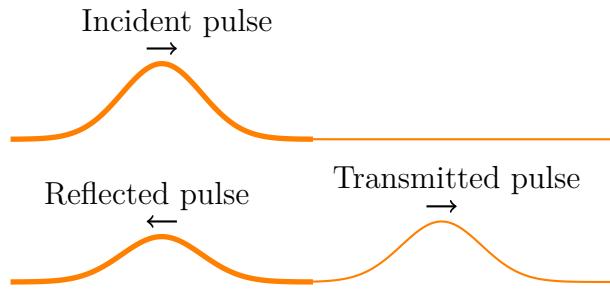
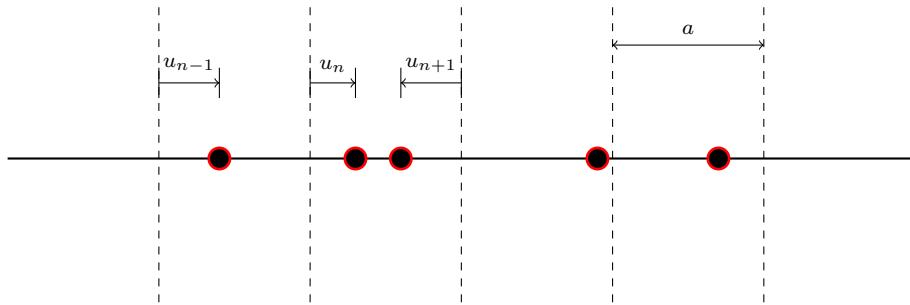


图 5.13

5.3.5 Linear Wave Equation

在前面对脉冲波的讨论中，我们主要是从相对物理的角度来观察波传播中的现象。下面，我们通过数学的角度来严格刻画波的传播过程。

我们先介绍 *phonon* 模型，描述固体材料中机械波的传播。

图 5.14: Mechanical waves in *monoatomic crystal*

记晶格常数为 a ，则第 n 个声子的平衡位置 $X_n = na$ 。再记第 n 个声子的实际位置为 x_n ，则它偏离平衡位置的位移为 $u_n = X_n - x_n$ 。

为简单起见，我们只考虑相邻声子间的相互作用。记势能函数为 $\psi(\Delta x)$ ，在 $\Delta x = a$ 点展开，我们有

$$\begin{aligned}\psi(\Delta x) &= \psi_0 + \frac{1}{2}k(\Delta x - a)^2 + \dots \\ &= \psi_0 + \frac{1}{2}k(x_n - x_{n-1} - a)^2 + \dots \\ &\approx \psi_0 + \frac{1}{2}k(u_n - u_{n-1})^2\end{aligned}$$

于是

$$U^{total} \approx U_0^{total} + \frac{k}{2} \sum_n (u_n - u_{n-1})^2$$

对于第 n 个声子，我们有

$$F_n = -\frac{dU^{total}}{du_n} = k(u_{n+1} - u_n) - k(u_n - u_{n-1})$$

再由牛顿第二定律

$$m\ddot{u}_n = k(u_{n+1} - u_n) - k(u_n - u_{n-1})$$

在 $\lambda \gg a$ 的条件下，作如下变形⁽¹⁰⁾

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_n &= ka \frac{u_{n+1} - u_n}{a} - ka \frac{u_n - u_{n-1}}{a} \\ &= ka \frac{u_{n+1} - u_n}{x_{n+1} - x_n} - ka \frac{u_n - u_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \\ &= ka \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_n + \frac{a}{2}} - ka \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_n - \frac{a}{2}} \\ &= ka^2 \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_n + \frac{a}{2}} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_n - \frac{a}{2}}}{(x_n + \frac{a}{2}) - (x_n - \frac{a}{2})} \\ &= ka^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_n} \end{aligned}$$

最后，令 $v \equiv a\sqrt{\frac{k}{m}}$ ⁽¹¹⁾，我们得到了波动方程

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

上面的推导过程是基于纵波的，下面我们基于绳波，对横波进行推导。

假设绳子的振幅很小，我们对一小段绳子进行受力分析：

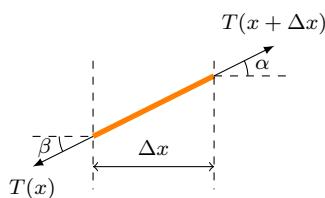


图 5.15：对绳子的受力分析

α, β 都很小，于是有

$$T(x + \Delta x) \cos \alpha \approx T(x) \cos \beta \approx T$$

记绳子的线密度为 μ ，离开平衡位置的位移为 u ，根据牛顿第二定律，有

$$\begin{aligned} \mu \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= T(x + \Delta x) \sin \alpha - T(x) \sin \beta \\ &\approx T \tan \alpha - T \tan \beta \\ &= T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \\ &= T \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned}$$

(10) 根据导数定义，容易理解这里的变形

(11) 不妨思考其物理含义

约去 Δx , 令 $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, 得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

显然, 方程的形式是完全一致的。

经过简单的验证可知, 波动方程的解⁽¹²⁾ 具有以下形式

$$u = F(x + vt) + G(x - vt)$$

其中, $F(x + vt)$ 代表左行波, $G(x - vt)$ 代表右行波。

(12) 我们在
Prove 5.5~P 250* 给出波动方程在不同边界条件下的求解

5.3.6 Periodic Wave

物理世界中的波千千万, 本着从简单到复杂的理念, 我们先讨论一种特殊的波——周期波。而周期波中最简单的莫过于正弦波了。仿照简谐振动, 我们定义以下几个物理量来描述一个正弦波。

- *Amplitude* A : The maximum displacement of the particle from the equilibrium position.
- *Period* T : The time taken for one complete cycle of motion.
- *Frequency* f : The number of cycles per unit time.
- *Wavelength* λ : Distance of points whose oscillations differ by 2π .
- *Angular frequency* ω : Which identically equals to $\frac{2\pi}{T}$.
- *Angular wave numbers* k : Which identically equals to $\frac{2\pi}{\lambda}$.

根据波在一个周期内的平移, 我们有关系式

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$

考虑如下正弦波:

$$\begin{aligned} y &= A \sin(kx - \omega t + \varphi) \\ &= A \sin \left[k \left(x - \frac{\omega}{k} t \right) + \varphi \right] \\ &= A \sin [k(x - vt) + \varphi] \\ &= F(x - vt) \end{aligned}$$

因此, $y = A \sin(kx - \omega t + \varphi)$ 是波动方程 $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ 的解。

容易求得, 对于该波上的一个质点, 其速度 v 与加速度 a 分别为:

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

Rate of Energy Transfer

在波动过程中, 介质中的每个质点都在做简谐振动, 因此波的能量包括动能和势能两部分。

设线密度为 μ , 我们有 $dm = \mu dx$, 故质点的动能为

$$dK = \frac{1}{2}(\mu dx)v^2$$

其中, μdx 是质点的质量, v 是质点的振动速度。

对于正弦波 $y = A \sin(kx - \omega t + \varphi)$, 质点的振动速度为

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

因此, 动能为

$$dK = \frac{1}{2}(\mu dx)A^2\omega^2 \cos^2(kx - \omega t + \varphi)$$

动能传输速率为

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}\mu v A^2 \omega^2 \cos^2(kx - \omega t + \varphi)$$

从而得到动能传输速率平均值为

$$\left(\frac{dK}{dt} \right)_{avg} = \frac{1}{4}\mu v \omega^2 A^2$$

对于同一正弦波, 势能为

$$\begin{aligned} dU &= T \cdot (dl - dx) = T \cdot \left(\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} - dx \right) \\ &= T dx \left[\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{2} T \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2} v^2 \mu \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 \mu \cos^2(kx - \omega t + \varphi) dx \end{aligned}$$

势能传输速率为

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2}\mu v A^2 \omega^2 \cos^2(kx - \omega t + \varphi)$$

从而得到势能传输速率平均值为

$$\left(\frac{dU}{dt} \right)_{avg} = \frac{1}{4}\mu v \omega^2 A^2$$

可以发现，在波动过程中，任一质元的动能和势能相等，且同相位变化。于是质点的总能量，即其动能和势能之和，为

$$dE = dK + dU = \mu v A^2 \omega^2 \cos^2(kx - \omega t + \varphi)$$

总能量的传输速率平均值为

I - P86 引

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_{avg} = \frac{1}{2}\mu v A^2 \omega^2$$

Interference of Waves

当两列或多列周期波在同一介质中传播时，它们会在相遇的区域产生干涉现象。此处“干涉”的要求强于我们在 *Superposition of Waves* 一节中讨论的。

两列周期波产生稳定干涉图样的条件是：

- 频率相同
- 相位差恒定
- 振动方向相同

考虑两列正弦波

$$y_1 = A \sin(kx - \omega t + \varphi_1)$$

$$y_2 = A \sin(kx - \omega t + \varphi_2)$$

它们的合成波为

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

其中， $2A \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)$ 是合成波的振幅，取决于相位差 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ 。

干涉可分为以下两类：

- *Constructive interference (in phase)*: 当两列波的相位差为 π 的偶数倍时，振幅相加，形成加强的波。
- *Destructive interference (out of phase)*: 当两列波的相位差为 π 的奇数倍时，振幅相减，形成减弱的波。

Temporal Interference

下面，我们讨论更一般的情况。考虑两列正弦波：

$$y_1 = A \sin(k_1 x - \omega_1 t + \varphi_1)$$

$$y_2 = A \sin(k_2 x - \omega_2 t + \varphi_2)$$

先假设 $v_1 = v_2 = v$, i.e. $\frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} = v$, 有：

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 \\ &= A \sin(k_1 x - \omega_1 t + \varphi_1) + A \sin(k_2 x - \omega_2 t + \varphi_2) \\ &= 2A \sin\left(\frac{(k_1 x - \omega_1 t + \varphi_1) + (k_2 x - \omega_2 t + \varphi_2)}{2}\right) \\ &\quad \cdot \cos\left(\frac{(k_1 x - \omega_1 t + \varphi_1) - (k_2 x - \omega_2 t + \varphi_2)}{2}\right) \end{aligned}$$

令

$$\omega_{avg} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$$

则合成波可以表示为

$$y = 2A \cos\left[\frac{\Delta\omega}{2}\left(\frac{x}{v} - t\right) + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right] \sin\left[\omega_{avg}\left(\frac{x}{v} - t\right) + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right]$$

进一步地，我们可以这样看：

- $\sin\left[\omega_{avg}\left(\frac{x}{v} - t\right) + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right]$ 表示一个高频载波。
- $2A \cos\left[\frac{\Delta\omega}{2}\left(\frac{x}{v} - t\right) + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right]$ 表示一个低频调制波⁽¹³⁾。

如果两列波的频率接近 ($\omega_1 \approx \omega_2$)，则 $\Delta\omega$ 很小，调制波的频率 $\frac{\Delta\omega}{2}$ 也很小。此时，合成波会表现出明显的 *beat* 现象，即振幅随时间缓慢变化，变化频率为 $\Delta\omega$ 。

(13) 我们也称其为 envelop function(包络函数)

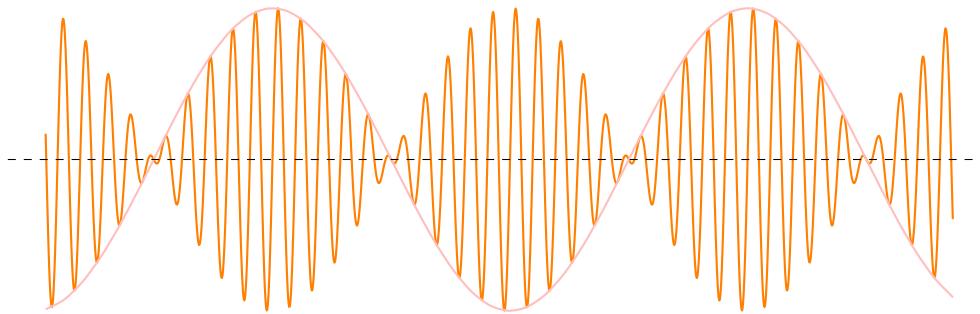


图 5.15：合成波示意图

- 在小尺度上，我们有

$$\lambda \sim \frac{2\pi}{k} \sim \frac{2\pi v}{\omega_{avg}}$$

- 在大尺度上，我们有

$$\lambda' \sim \frac{2\pi v}{\Delta\omega/2}$$

我们称

$$f_{beat} = \frac{1}{2\pi} |\omega_1 - \omega_2|$$

为 *beat frequency*。它可以应用于乐器调音。

Wavepacket^{*}

进一步地，去掉 $v_1 = v_2 = v$ 的假设，我们可以得到合成波的表达式为：

$$y = 2A \sin(\bar{k}x - \bar{\omega}t + \bar{\varphi}) \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

其中

$$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2},$$

$$\Delta k = k_1 - k_2, \quad \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2, \quad \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

此时，我们得到的波函数称为一个 *Wavepacket*⁽¹⁴⁾。类似于“拍”现象，Wavepacket 的运动也由小尺度上的振动与大尺度上的包络线运动所构成。我们定义下面两个物理量来描述它：

- *Group Velocity* : $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$ (for $\Delta\omega \rightarrow 0, \Delta k \rightarrow 0$)
- *Phase Velocity* : $v_p = \frac{\omega}{k}$

(14) 针对的是其中一个“包”

Group Velocity 是 Wavepacket 运动的速度，它是对 Wavepacket 运动的一阶近似。因为不同波的速度不同，Wavepacket 在运动过程中会扩散开来，于是不一定能保持其形状不变，我们便用 *Dispersion relation*⁽¹⁵⁾ 来描述它。通过 *Phase Velocity*，我们可以对 Dispersion relation 进行分析。

根据群速度与相速度的不同，*Dispersion relation* 分为以下三类：

- $v_g = v_p$: *Non-dispersive* e.g. Light in a vacuum.
- $v_g < v_p$: *Normal Dispersive* e.g. Light in a medium.
- $v_g > v_p$: *Anomalous Dispersive*

(15) 色散一词来自光学，不同颜色的光在同一介质中速度不同，便会发生“色散”

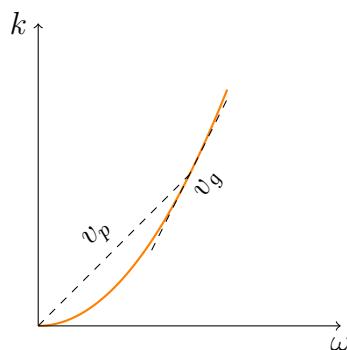


图 5.15: *Dispersion relation*

5.3.7 Standing Wave

Standing Wave 是两列振幅相同、频率相同、传播方向相反的波叠加形成的特殊干涉现象。

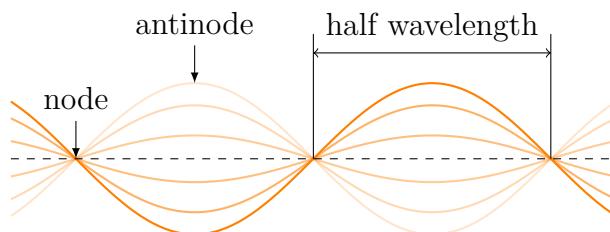


图 5.15: *Standing Wave*

驻波的方程为：

$$y = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$$

驻波中，始终静止不动的点称为 *Node*；振幅最大的点称为 *Antinode*；相邻的节点或相邻的波腹之间的距离均为 *Half Wavelength*。

驻波上每一点都在做简谐运动，没有能量传输。

驻波发生在拨动一条两端固定的弦时。

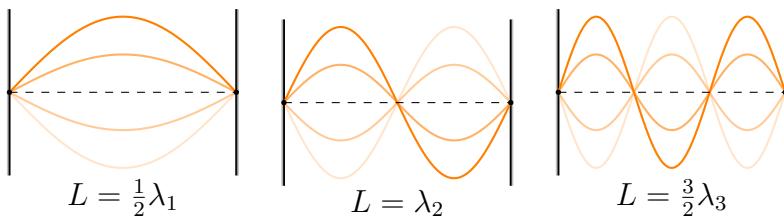


图 5.16：两端固定情况下弦的振动

更一般的，我们有

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$f_n = n \cdot \frac{v}{2L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

下面，我们考虑一个实际的场景：吉他的发声原理。

我们可以把吉他弦简单抽象为一根两个端点固定的弦

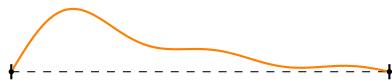


图 5.17：吉他弦的振动

吉他弦的振动产生了声音。声音的三个基本要素是 *Pitch*、*Loudness* 和 *Timbre*。音高由频率决定，频率越高，音高越高；响度由振幅决定，振幅越大，声音越响；音色则由波形决定，不同的波形会产生不同的音色。

吉他弦的振动不仅包含基频 f_1 ，还包含一系列整数倍^[3]于基频的 *Harmonics*。这些泛音构成了 *Harmonic Series*，其频率为：

$$f_n = n \cdot f_1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

其中， f_1 是基频， f_2, f_3, \dots 分别是第二、第三泛音，依此类推。

为了更直观地理解泛音列，我们可以将声音的频域表示画出来。下图展示了图 5.17 所示吉他弦的频域分布：

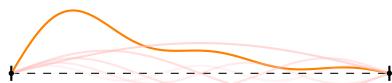


图 5.18：吉他弦的振动

^[3]这是因为两端点固定情况下只允许驻波解。下学期的量子力学将会从这个角度得到量子化。

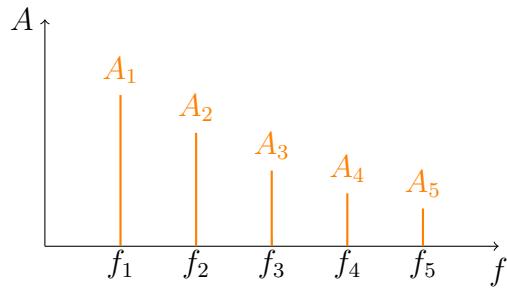


图 5.19: 吉他弦振动的频域表示

从图中可以看出，泛音的振幅随着频率的增加逐渐减小。通过调整弦的材料、张力以及演奏方式，可以改变泛音的分布，从而产生不同的音色效果——这也就是不同乐器音色不同的真正原因。如何求得频域表示？我们通过傅里叶变换来实现。

Fourier Analysis^{*}

任何周期性振动都可以通过 *Fourier Series* 展开为一系列正弦波的叠加：

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[A_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + B_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right] \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)] \end{aligned}$$

其中⁽¹⁶⁾

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ A_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ B_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

⁽¹⁶⁾ 证明见
Prove 5.6 ~ *P 254*

根据欧拉公式，我们也可以把傅里叶级数写成如下形式：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Z_n e^{in\omega t}, \quad Z_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt$$

对于非周期函数（如脉冲波），我们可以把它看做是周期为无穷大的函数。通常意义下的傅里叶级数没有意义，但是经过一些推导⁽¹⁷⁾，我们可以得到称为 *Fourier transform* 的结果

⁽¹⁷⁾ 见
Prove 5.7 ~ *P 254*

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

它们也被记作

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \quad \text{傅里叶变换}$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] \quad \text{傅里叶逆变换}$$

傅里叶变换实际沟通了时域与频域，具有十分重要的意义。限于篇幅，仅做简介。

5.3.8 Elasticity

弹性是介质在外力作用下发生形变，并在外力撤去后恢复原状的性质。了解介质的弹性性质，有利于我们之后理解声波。

我们先介绍两个概念：

- *Stress*: Deforming force per area.
- *Strain*: Unit *deformation*.

对于小应力，我们有：

$$\text{Stress} = \text{Modulus(模量)} \times \text{Strain}$$

根据外力作用方式的不同，弹性可以分为以下几类：

- *Tension & Compression*: 当介质受到拉伸或压缩时，其长度发生变化。
 - *Stress*: F/A
 - *Strain*: $\Delta L/L$

其中， F 是作用力， A 是横截面积， ΔL 是长度变化， L 是原长。对应的模量为 *Young's Modulus E*:

$$E = \frac{F/A}{\Delta L/L}$$

- *Shearing*: 当介质受到切向力作用时，其形状发生变化。
 - *Stress*: F/A
 - *Strain*: $\Delta x/L$.

对应的模量为 *Shear Modulus* G , 定义为:

$$G = \frac{F/A}{\Delta x/L}$$

其中, Δx 是切向位移, L 是介质高度。

- *Hydraulic Stress*: 当介质受到均匀压力时, 其体积发生变化。
 - *Hydraulic Stress*: ΔP
 - *Strain*: $\Delta V/V$.

对应的模量为 *Bulk Modulus* B , 定义为:

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}$$

其中, ΔP 是压力变化, ΔV 是体积变化, V 是原体积。

Stress-Strain Curve

应力-应变曲线描述了介质在外力作用下的形变行为。典型曲线包括弹性区域、屈服点、塑性区域和断裂点。

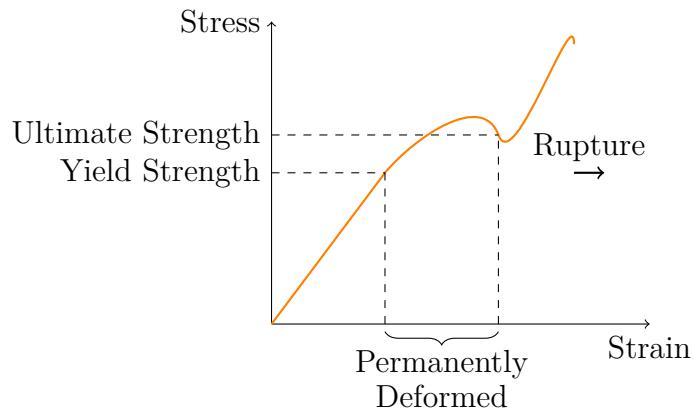


图 5.20: 应力-应变曲线

5.3.9 Sound Wave

声波是一种机械波, 通过介质中的弹性振动传播。

The Definition of Sound Wave

一切（机械）纵波都可以称为声波。声波的传播需要介质，不能在真空中传播。描述声波，我们可以使用 *Wavefront* 这一概念。

Wavefront 是声波传播过程中相位相同的点构成的曲面。波前的形状取决于声源的几何形状和传播介质的性质。

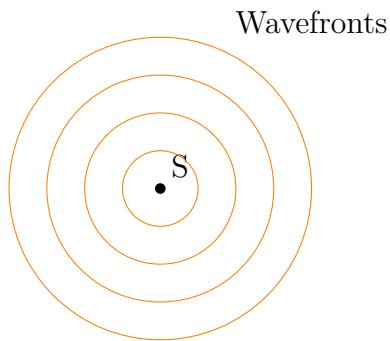


图 5.21: 波前示意图

Speed of Sound

空气中的声速 v 可以通过介质的弹性性质和密度推导得出。

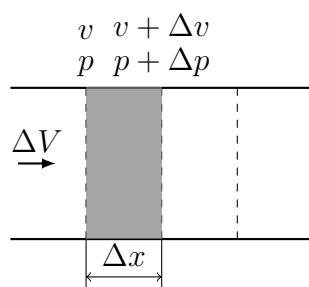


图 5.22: 空气压缩示意图

设空气从左往右运动，截面积为 A ，密度为 ρ ，体积模量为 B 。

左侧空气对右侧空气进行压缩，使得接触面速度减小 ($\Delta v < 0$)，压强增大 ($\Delta p > 0$)。根据牛顿第二定律，我们有：

$$\begin{aligned} F &= ma \\ \Rightarrow [p - (p + \Delta p)]A &= (\rho \Delta x A) \frac{\Delta v}{\Delta t} \\ \Rightarrow -\Delta p A &= \rho A v \Delta v \end{aligned}$$

易知空气体积为 $V = A \Delta x = A v \Delta t$ ，体积变化量为 $\Delta V = A \Delta v \Delta t$ ，于是有

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{A v \Delta t}{A \Delta v \Delta t} = \frac{\Delta v}{v}$$

进一步，我们有

$$\begin{aligned}\Delta p &= \rho v \Delta v \\ \Rightarrow \Delta p &= \rho v^2 \frac{\Delta V}{V} \\ \Rightarrow \rho v^2 &= -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} = B\end{aligned}$$

最终得到

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

Intensity

声强 I 是单位时间内通过单位面积的声能，定义为：

$$I = \frac{P}{A}$$

其中， P 是声功率， A 是面积。

对于正弦波，我们有

$$S = A \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

根据 小节 5.3.6~P77 的结果，我们有

$$I = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 A^2$$

根据能量守恒，对于点声源，我们有

$$I = \frac{P_s}{4\pi r^2}$$

其中， P_s 是声源功率， r 是到声源的距离。

声强与声压 *₍₁₈₎ 的关系为：

$$I = \frac{p^2}{2\rho v}$$

Sound Level

(18) 介质中有声场时的压强 p_1 与没有声场时的压强 p_0 之差为声压 p

声级 L 是声强的对数尺度表示，单位为分贝（dB），定义为：

$$L = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

其中， $I_0 = 10^{-12} \text{W/m}^2$ 是参考声强。

5.3.10 Doppler Effect

多普勒效应描述了声源和观察者相对运动时频率的变化。设观察者速度为 v_D , 声源速度为 v_S , 声速为 v , 分以下情况讨论:

- Both Stationary:

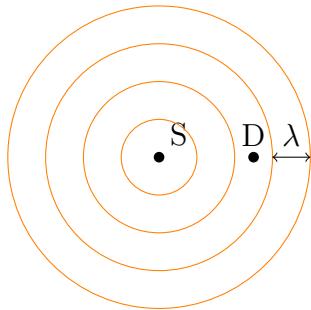


图 5.23: (1)

频率 f 是单位时间通过观察者的波前数量。显然, 此时我们有

$$f = \frac{vt/\lambda}{t} = \frac{v}{\lambda}$$

- Source stationary, Detector moving:

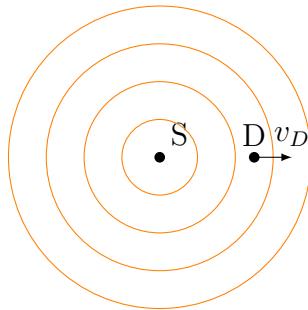


图 5.23: (2)

此时我们有

$$f' = \frac{(v \pm v_D)t/\lambda}{t} = \frac{v \pm v_D}{\lambda} = \frac{v \pm v_D}{v} f$$

- Detector stationary, Source moving:

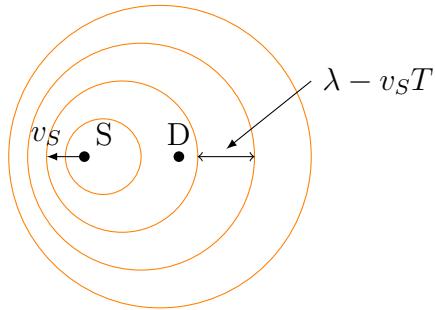


图 5.23: (2)

此时我们有

$$f' = \frac{vt/(\lambda \pm v_S T)}{t} = \frac{v}{vT \pm v_S T} = \frac{v}{v \pm v_S} f$$

- Both moving:

综合以上情况，得

$$f' = \frac{v \pm v_D}{v \pm v_S} f$$

在 *supersonic speeds* 的情况下，波前会出现一些有趣的现象：

- $v_S = v$:

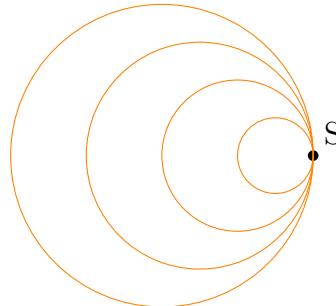


图 5.24: (1)

可见，波前都在声源处堆积，出现 *sound barrier*。

- $v_S > v$ (*Shock Wave*):

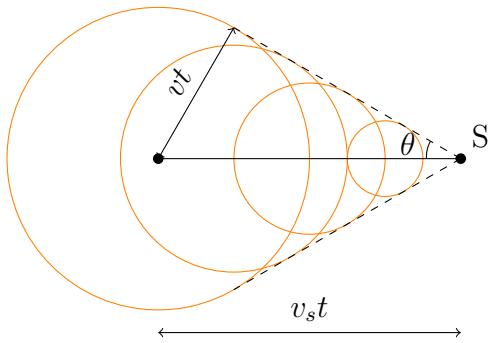


图 5.25: (2)

我们称波前的包络面为 *Mach Cone*, 并且有

- *Mach Cone Angle*: $\theta = \arcsin \frac{vt}{v_s t} = \arcsin \frac{v}{v_s}$
- *Mach Number*: $\frac{v_s}{v}$

5.4 课后习题: 振动与波

习题 5.1 Traveling Sinusoidal Wave—Solution 5.1~P 319

A sinusoidal wave traveling in the $-x$ direction (to the left) has an amplitude of 20.0 cm, a wavelength of 35.0 cm, and a frequency of 12.0 Hz. The displacement of the wave at $t = 0$, $x = 0$ is $y = -3.00$ cm, and at this same point, a particle of the medium has a positive velocity.

- Sketch the wave at $t = 0$.
- Find the angular wavenumber, period, angular frequency, and wave speed of the wave.
- Write an expression for the wave function $y(x, t)$.

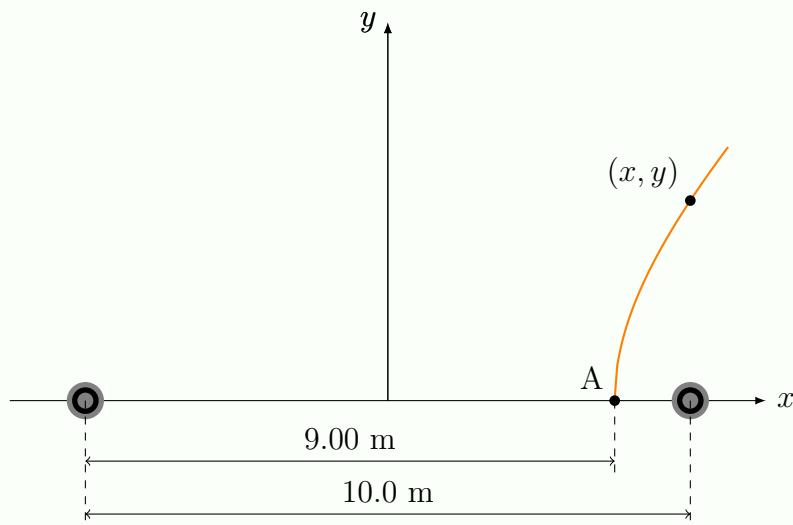
习题 5.2 Measuring Ocean Depth—Solution 5.2~P 320

An earthquake on the ocean floor in the Gulf of Alaska produces a tsunami (sometimes called a “tidal wave”) that reaches Hilo, Hawaii, 4450 km away, in a time of 9 hours 30 minutes. Tsunamis have enormous wavelengths (100–200 km), and the propagation speed of these waves is $u \approx \sqrt{gd}$, where

d is the average depth of the water. From the information given, find the average wave speed and the average ocean depth between Alaska and Hawaii.

习题 5.3 Two Speakers *Solution 5.3 ~ P 321*

Two identical *speakers* 10.0 m apart are driven by the same *oscillator* with a frequency of $f = 21.5$ Hz.



- Explain why a receiver at point A records a minimum in sound intensity from the two speakers.
- If the receiver is moved in the plane of the speakers, what path should it take so that the intensity remains at a minimum? That is, determine the relationship between x and y (the coordinates of the receiver) that causes the receiver to record a minimum in sound intensity. Take the speed of sound to be 343 m/s.

习题 5.4 未完工—*Solution 5.4 ~ P 323*

A 2.00-m-long wire having a mass of 0.100 kg is fixed at both ends. The tension in the wire is maintained at 20.0 N. What are the frequencies of the first three allowed modes of vibration? If a node is observed at a point 0.400 m from one end, in what mode and with what frequency is it vibrating?

6

Special relativity

进入狭义相对论，我们就从熟悉的三维世界来到了陌生的四维世界。可惜的是，作为三维世界的生物，大家都没有进化出适用于四维空间的大脑。也许，我们并不能建立对于四维世界的直观认知；我们能做的，仅仅只是通过一些抽象的数学工具，来尝试刻画这个神秘而又复杂的四维空间。

6.1 Lead In

6.1.1 *Absolute Spacetime View*

在介绍相对时空观之前，我们先回忆下绝对时空观。

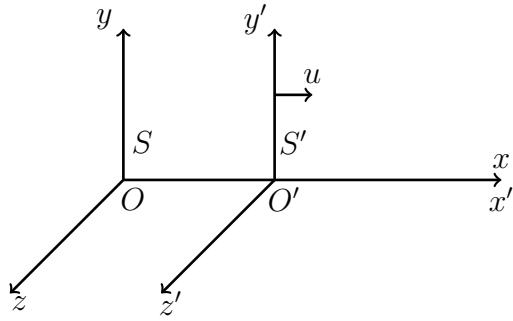
经典力学的奠基人牛顿曾在《自然哲学的数学原理》一书中写过：

1. 绝对的、真正的数学时间，出于其本性而自行均匀地流逝着，与外界任何事物无关。
2. 绝对的空间，就其本质而言，永远保持不变和不动，且与外界任何事物无关。

这事实上反映了，在牛顿力学中，时间和空间与物质的运动无关，它们彼此也互不相关。

而在此基础上，伽利略指出，一个匀速运动的人是无法判断自己的运动情况的。这是因为，对于任何惯性参考系，物体的机械运动规律以及表达它们的牛顿力学定律的形式都是一样的。这个结论被称为 *Galilean Principle of Relativity*。

现在，让我们通过描述的方式引入事件的概念。一个事件的发生是与参考系的选取无关的。不管选择哪一个参考系来描述，事件总是在某一时刻某一位置发生。而在任意的一个参考系中，我们可以通过给出一组时空坐标的 (x, y, z, t) 的方式来描述一件事件。



考虑两个惯性系 S, S' ，其中 S' 相对 S 做速度为 u 的匀速运动。我们取事件 P 在 S 系中的描述为 (x, y, z, t) ，在 S' 系中的描述为 (x', y', z', t') 。

在经典力学的视角下，有

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \right. \quad (6.1)$$

式 (6.1) 反映了发生相对运动的两个惯性系描述同一事件的时空坐标之间的联系，通常被称为 *Galilean Transformation*。

在伽利略变换的基础上，依据 $v = \frac{dx}{dt}$ 与 $v' = \frac{dx'}{dt'}$ ，我们可以得到速度变换公式

$$v' = v - u \quad (6.2)$$

这个公式被称为牛顿力学的速度相加原理。

6.1.2 Relative Spacetime View

通过麦克斯韦的电磁理论，我们发现，光在真空中的速率是一个常数。这意味着，在任何参考系中测量光在真空中的速率，测量结果都相同。

显然，光的运动速度是不符合牛顿力学的速度相加原理的。由于牛顿力学的速度相加原理是伽利略变换的必然结果，我们得出，光的运动速度不服从伽利略变换，从而也不服从力学相对性原理。

我们还知道，光是一种电磁学现象。这似乎意味着，电磁现象是不服从力学相对性原理的。

然而，物理学家们相信，物理定律是拥有普适性的。为了使电磁现象与相对性原理相适应，爱因斯坦基于两个基本假设，提出了相对时空观。

- *Principle of the Constancy of Lightspeed* 光在真空中的速率在任何惯性参考系中都相等。
- *The Principle of Relativity* 不仅力学规律，一切物理规律对所有惯性系都是一样的，不存在任何一个特殊的惯性系。

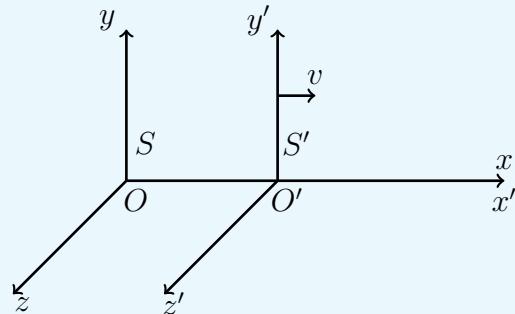
I - P104 引

在绝对时空观中，存在伽利略变换来反映同一事件在两个惯性系中的时空坐标之间的联系；同样地，在相对时空观中，也需要一种变换来反映这个联系。这个变换名叫 *Lorentz Transformation*。掌握洛伦兹变换，是理解狭义相对论的关键。

6.2 Lorentz Transformation

定理 6.1 *Lorentz Transformation —Prove 6.1~P 256*

I - P98 引



设 S' 系相对 S 系有 x 方向的速度 v ，并分别用 t, t' 表示 S 系， S' 系中的时间，用 x, y, z 与 x', y', z' 表示 S 系， S' 系中的坐标，则有

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \beta \frac{x}{c}) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

其中

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{1 - \beta^2}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

在之后的讨论中， v 统一代表两个参考系的相对速度。

洛伦兹变换给出了狭义相对论下，同一事件在两个惯性系中的时空坐标之间的关系。通过洛伦兹变换，我们可以发现，两个惯性系中的时空不再是相同的。

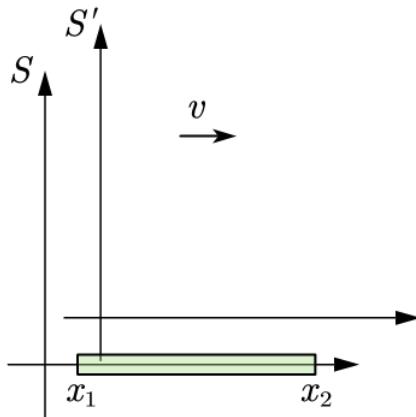
利用洛伦兹变换，我们可以进一步解释两个著名的相对论效应，即 *Length Contraction* 和 *Time dilation*。

6.2.1 Length Contraction

首先，我们需要声明一件事情：

在同一参考系下，对长度的测量应当保证在同一时间进行。

承认这一点后，我们开始对 *Length Contraction* 的讨论。



考虑一根在惯性参考系 S 静止的杆，它顺着 x 轴放置，杆两端的坐标为 x_1 和 x_2 。显然，在该参考系下，杆的长度即为

$$L_0 = x_2 - x_1$$

这里的 L_0 被称为杆的 *Proper Length*。

而在 S' 系看来, 由洛伦兹变换得

$$\begin{cases} x'_1 = \gamma(x_1 - vt_1) \\ x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2) \\ t'_1 = \gamma(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1) \\ t'_2 = \gamma(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2) \end{cases}$$

由于我们是在 S' 系下做的测量, 应有

$$t'_2 - t'_1 = \gamma[(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)] = 0$$

设 S' 系中的测量结果为 L , 则有

$$L = x'_2 - x'_1 = \gamma[(x_2 - x_1) - \frac{v^2}{c^2}(x_2 - x_1)] = \frac{L_0}{\gamma}$$

我们记 $s = \frac{1}{\gamma}$, 则有

$$L = sL_0 \quad (6.3)$$

显然, $s < 1$, 因此, 在任何相对杆子运动的惯性参考系看来, 杆子的长度将短于原长。这一结论往往被记为原长最长。

如何用自然语言解释这个效应呢? 我们可以发现, 在 S 系中同时的事件, 经过洛伦兹变换后, 在 S' 系中看来可能是不同时的。用数学语言来表达, 也就是

$$t_1 - t_2 = 0 \iff t'_1 - t'_2 = 0$$

这一现象被称为同时的相对性, 与绝对时空观中同时的绝对性相对应。

那么, 在 S' 系中的人看来, S 系中对杆子的测量总是不同时的, 且对杆子左端的测量晚于对右端的测量^[1]。于是, 在对左端测量时, 杆子已经向左运动了一定距离, 测量的结果也就变大了。

这一效应可以形象地理解成运动的尺子缩短了, 因此得名尺缩效应。

对于尺缩效应, 还有一个补充₁:

I - P98 引

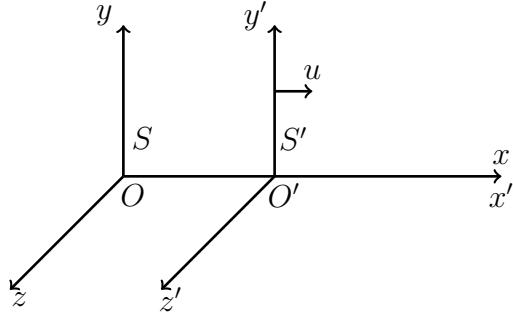
就长度而言, 尺缩效应只对物体长度方向^[2]的速度生效 (*Prove 6.2~P 258*)。

^[1] 由于在 S 系中同时测量, 有 $t_2 - t_1 = 0$, 于是 $t'_2 - t'_1 = \gamma[(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)] = -\gamma\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)$ 。

^[2] e.g. 一根杆子在 x 方向有原长, 但它同时拥有 x, y 方向的速度, 那么在计算运动杆子的长度时, 只需考虑 x 方向的速度。

6.2.2 Time dilation

让我们再次参考这张图：



考虑一个时钟，记时钟的指针到达某一刻度为事件 E_1 ，到达下一刻度为事件 E_2 ，并设时钟在惯性参考系 S 中静止。

设在 S 系中，事件 E_1 对应坐标 (x_1, t_1) ， E_2 对应坐标 (x_2, t_2) ⁽¹⁾。

显然，在 S 系中，时间间隔的测量结果为

(1) 在这里，我们省略对 y 和 z 的讨论

$$\tau = t_2 - t_1$$

这里的 τ 称为 *Proper Time*。

而在 S' 系看来，由洛伦兹变换得

$$\begin{cases} t'_1 = \gamma(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1) \\ t'_2 = \gamma(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2) \end{cases}$$

由于时钟在 S 系中静止，有 $x_2 - x_1 = 0$ ，于是

$$t'_2 - t'_1 = \gamma[(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)] = \gamma(t_2 - t_1)$$

记 S' 系中测得的时间间隔为 t ，则有

$$t = \gamma\tau \quad (6.4)$$

显然， $\gamma > 1$ ，因此 $t > \tau$ 。也就是说，在任何相对时钟运动的惯性参考系看来，时钟的一刻度对应的时间间隔长于其原时。这一结论往往被记为原时最短。

我们同样尝试用自然语言解释这件事情。在 S 系中静止的钟，在 S' 系中却是运动的。因此，事件 E_1 和 E_2 在 S' 系中的观察者看来不是同一地点发生的。由于光的传播需要时间，“ E_1 发生”和“ E_2 发生”两个信息传播至 S' 系中的观察者具有一定的时间差。因此，观察到两个信息的时间间隔就比原时要长。

这一效应可以形象地理解成运动者的时间延缓了，因此得名时延效应。

例题 6.1 π^+ 介子衰变

一个 π^+ 介子衰变成一个 μ^+ 介子和一个中微子。 π^+ 介子在其自身静止的参考系中，衰变前的平均寿命约为 $2.5 \times 10^{-8}s$ 。如果产生一束速度 $\beta \approx 0.9$ 的 π^+ 介子，那么在实验室系看 π^+ 介子束的寿命是多少？

解答 6.1 π^+ 介子衰变

由时延效应可知，

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 5.7 \times 10^{-8}s$$

那么衰变前粒子通过的距离约是非相对论预期值的 2 倍，这也是验证时间膨胀效应的重要实验依据。

6.2.3 Speed Transformation

类似于牛顿力学的速度相加原理，在相对论中，我们也有自己的速度相加原理。

定理 6.2 Speed Transformation — Prove 6.3 ~ P 259

对于满足洛伦兹变换

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \beta \frac{x}{c}) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

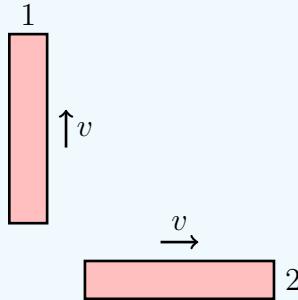
的 S 系和 S' 系，设物体在 S 系中的速度坐标为 (u_x, u_y, u_z) ， S' 系中的速度坐标为 (u'_x, u'_y, u'_z) ，则有

$$\begin{cases} u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{u_y}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} = s \frac{u_y}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_z = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{u_z}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} = s \frac{u_z}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \end{cases}$$

尽管在洛伦兹变换中， $y \rightarrow y'$, $z \rightarrow z'$ 保持不变，只要意识到时间发生了变化，就很好理解为什么 u'_y, u'_z 发生了变化。

例题 6.2 Perpendicular moving rigids

如下图所示，两把尺子静止长度都为 L_0 ，朝着垂直的方向以速度 v 运动，问在一把尺子上看另一把尺子的长度是多少？



解答 6.2 Perpendicular moving rigids

我们不妨考虑在尺 2 眼中，尺 1 的长度。显然地，尺 1 与尺 2 有一个相对速度。由于尺缩效应只对物体长度方向的速度生效⁽²⁾，我们只考虑尺 1 方向上的相对速度。

以尺 2 方向为 x 轴，以尺 1 方向为 y 轴，可以建立惯性系 S, S' 。其中，在 S 系中，尺 2 有 x 轴方向速度 v ，尺 1 有 y 轴方向速度 $u_y = v$ ；在 S' 系中，尺 2 保持静止。

由速度变换公式，有

$$u'_y = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{u_y}{1 - \frac{v \cdot 0}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} v = \sqrt{1 - \beta^2} v$$

由尺缩效应公式，有

$$L' = L_0 \sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}} = L_0 \sqrt{1 - \beta^2(1 - \beta^2)}$$

注： $\beta = \frac{v}{c}$ ，最早在洛伦兹变换⁽³⁾中提及。

(2) 见小节 6.2.1~P 95

(3) 见定理 6.1~P 93

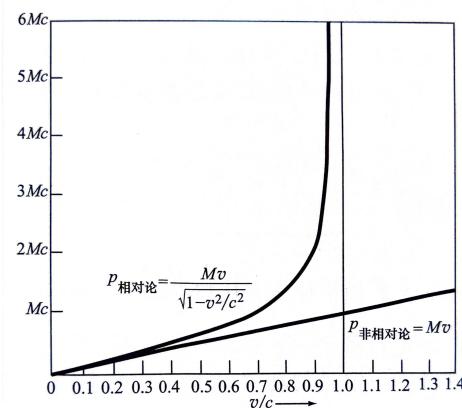
6.3 Relativistic Energy and Momentum

6.3.1 Relativistic Momentum

我们知道，在经典力学中，动量被定义为物体质量和速度的乘积。而在狭义相对论中，我们知道，光速是物体能达到的最高速度。那么，我们自然会要求一个有质量的物体在趋于光速时具有无穷大的动量⁽⁴⁾。于是，我们要把经典力学的动量修正 (*Prove 6.4~P 260*) 为相对论动量，修正结果如下：

$$p \equiv \frac{M_0 v}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \equiv \gamma M_0 v$$

如下图所示，我们看到动量在 v 趋于 c 时发散，这与我们之前的讨论相吻合。



这时，我们得引入一些新的概念来解释上述现象。由于我们认为速度有限，一个突破口就是认为质量随速度改变。因此，我们引入动质量

$$M(v) = \frac{M_0}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} = \gamma M_0$$

同时定义 M_0 为物体的静质量。这样修正之后，我们就得到了一个逻辑环闭合的理论^[3]。

动量守恒定律在动量定义得到修正后依旧适用。

6.3.2 Relativistic Energy

我们知道，在经典力学中，动能被定义为 $\frac{1}{2}M_0v^2$ 。那么，在相对论中，我们又该如何定义动能和能量呢？回想起在经典力学中我们是用做功来定义动能，

^[3]关于静质量和动质量的概念是否合理，在学术上有一定的讨论，如感兴趣可以自行了解。在我们的课程中，暂时承认这两个概念。

(4) 否则就可以通过某些手段得到速度超越光速的物体

我们不妨沿用这个思路，并将牛顿定律写成如下形式：

$$F = \frac{dp}{dt}$$

令 F 在 x 方向上，那么功 W 就是

$$W = \int_0^{x_f} \frac{dp}{dt} dx$$

求解 (*Prove 6.5~P 262*) 这个积分式，最终可以得到

$$K = W = (\gamma - 1)M_0c^2 \quad (6.5)$$

新的表达式在 $v \ll c$ 时会退化成经典情形，这是因为

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots,$$

忽略高阶小量，我们就得到了

$$K = \frac{1}{2} M v^2$$

因此，我们说经典力学定律是相对论力学定律在低速下的近似。

爱因斯坦质能方程告诉我们，一个粒子在静止时也具有能量，具体来说是

$$E_0 = M_0c^2 \quad (6.6)$$

式中 M 是粒子的静质量。我们将这种能量称为静止能量，将其与动能 K 相加，就得到了总能量

$$E \equiv \frac{M_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \equiv \gamma M_0c^2 \quad (6.7)$$

光子的情况则有些特殊——它并没有质量。光子的能动量⁽⁵⁾由公式

$$E = h\nu \quad p = \frac{h\nu}{c} \quad (6.8)$$

给出，其中 ν ⁽⁵⁾ 即光子的频率， h 为普朗克常数。

能量守恒定律在能量定义得到修正后依旧适用。

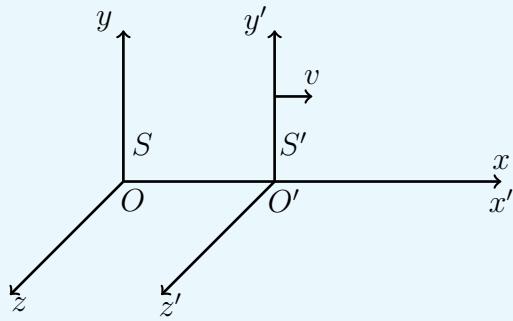
I – P339 引

(5) 读作 ‘Nju’

6.3.3 Transformation In Different Frames

我们知道，洛伦兹变换反映了在不同惯性系中时空坐标的变换。同样地，我们也可以得到在不同惯性系中相对论能量与动量的变换关系。

定理 6.3 Energy and Momentum Transformation —Prove 6.6, ~P 263



设 S' 系相对 S 系有 x 方向的速度 v , 并分别用 p, p' 表示任一物体在 S 系, S' 系中的动量, 用 E, E' 表示该物体在 S 系, S' 系中的能量, 则有

$$\begin{cases} E' = \gamma(E - p_x v) \\ p'_x = \gamma(p_x - \frac{E}{c^2}v) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \end{cases}$$

此处的 γ 为 $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ 。

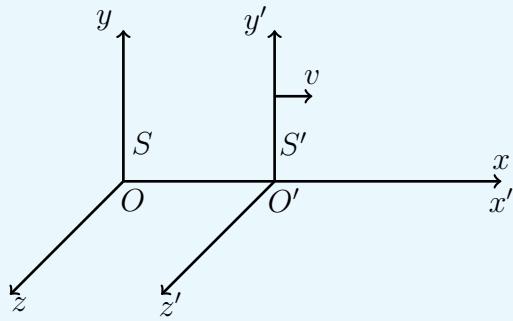
6.4 Some Relations

在这一节, 让我们整理一下之前的内容, 寻找各个量之间的关联。

6.4.1 Unified Dimension

我们之前的变换, 不论是关于时空, 还是关于能动量, 其中的一些量总是量纲不统一。让我们尝试着统一量纲, 看看会发生什么事情。

首先是关于时空变换。时间相对于空间, 欠缺了量纲 $\left[\frac{L}{T}\right]$, 可以用光速来补足。因此, 接下来, 我们把 (ct) 看作整体。

定理 6.4 Lorentz Transformation With Unified Dimension

设 S' 系相对 S 系有 x 方向的速度 v , 并分别用 t, t' 表示 S 系, S' 系中的时间, 用 x, y, z 与 x', y', z' 表示 S 系, S' 系中的坐标, 则有

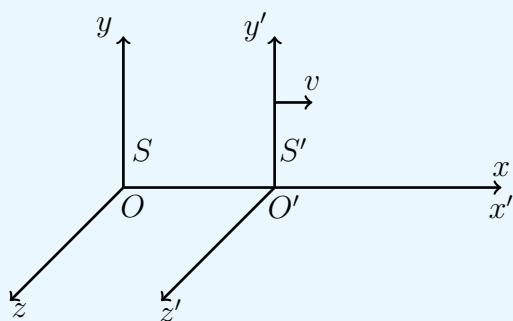
$$\left\{ \begin{array}{l} (ct)' = \gamma[(ct) - \beta x] \\ x' = \gamma[x - \beta(ct)] \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right.$$

可以看到, 洛伦兹变换对于 x 和 (ct) 在形式上是完全对称的。

再是关于能动量变换。能量相对于动量, 多出了量纲 $\left[\frac{L}{T}\right]$, 可以用光速来除去。因此, 接下来, 我们把 $\left(\frac{E}{c}\right)$ 看作整体。

定理 6.5 Energy and Momentum Transformation With Unified Dimension

I - P338 引



设 S' 系相对 S 系有 x 方向的速度 v , 并分别用 p, p' 表示任一物体在 S

系, S' 系中的动量, 用 E, E' 表示该物体在 S 系, S' 系中的能量, 则有

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{E}{c}\right)' = \gamma \left[\left(\frac{E}{c}\right) - \beta p_x \right] \\ p'_x = \gamma \left[p_x - \beta \left(\frac{E}{c}\right) \right] \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \end{array} \right.$$

此处的 γ 为 $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ 。

可以看到, 能动量变换对于 p_x 和 $\left(\frac{E}{c}\right)$ 在形式上是完全对称的。

如果我们统观洛伦兹变换和能动量变换, 我们还可以发现, 这两个变换在形式上也是完全相同的。这意味着, 任何依据洛伦兹变换得到的结论, 都可以用变量替代的方式⁽⁶⁾类推到能动量里面去。

6.4.2 Invariant_{III}

在各种变换中, 变换前后的不变量总是引人注目。

比如, 在伽利略变换中, 物体之间的距离作为一个不变量, 可以用于度量空间。在洛伦兹变换中, 由于我们还引入了 (ct) 作为变量, 单单 x, y, z 似乎已经无法构造不变量了。我们需要综合考虑 $x, y, z, (ct)$ 构造出不变量, 而这个不变量, 也许可以用于度量时空。

注意到洛伦兹变换中 (ct) 与 x 的高度对称性, 我们取 $(ct)^2 - x^2$, 可得

$$\begin{aligned} (ct)'^2 - x'^2 &= \gamma^2[(ct)^2(1 - \beta^2) - x^2(1 - \beta^2)] \\ &= \gamma^2[(ct)^2 - x^2] \frac{1}{\gamma^2} \\ &= (ct)^2 - x^2 \end{aligned} \tag{6.9}$$

这说明, $(ct)^2 - x^2$ 正是我们寻找的一个不变量。如果我们将 y, z 也加进去, 显然有 $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ 是一个不变量。那么, 这个不变量就可以用来“度量时空”^[4]。

^[4] 所谓度量时空的含义, 将在闵氏时空图的介绍中说明

(6)
 $x \sim p_x, (ct) \sim \left(\frac{E}{c}\right)$

I - P105 引

II - P339 引

同样地，利用变量替代的方式，也可以得到 $\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = (m_0 c)^2$ ⁽⁷⁾ 是一个不变量。这个不变量就反映了洛伦兹变换前后物体的能动量关系。

(7) 更常见的是
 $E^2 - (cp)^2 = (m_0 c^2)^2$

6.5 Doppler Effect

在相对论中，多普勒效应表现得与经典力学中不太一样。我们通过一个例题来说明这件事。

例题 6.3 光的多普勒效应

如下图所示，波源 S 发出频率为 ν_0 的光波，一观察者相对波源以速度 v 靠近，问观察者观察到的波源的频率是多少？如果改为观察者静止，波源靠近，结果会有变化吗？



解答 6.3 光的多普勒效应

注意到要解决的是光子在观察者参考系中的频率问题。显然地，有可能与频率有联系的量是光子的能动量。

不妨设光子在 S 系中的动量为 p ，能量为 E ，在观察者系中的动量为 p' ，且设观察者系中光子的频率为 ν 。

注意到观察者系相对 S 系的速度为 $-v$ ，由动量变换有

$$p' = \gamma \left(p + v \frac{E}{c^2} \right)$$

且对于光子有

$$E = h\nu_0 \quad , \quad p = \frac{h\nu_0}{c}$$

代入后即

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu_0}{c} \sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2}} (1 + \beta)$$

化简即得

$$\nu = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \nu_0$$

依据相对论的基本假设 2⁽⁸⁾，我们知道，观察者相对波源运动和波源相对观察者运动，其实是等价的。因此，如果改为观察者静止，波源靠近，结

(8) 见小节 6.1.2~P 93

果也不会发生变化。

6.6 The Geometric Expression of Special Relativity

在本节，我们将通过另一个角度，即几何图形的角度，来重新描述四维空间。当然，如果无法理解或是熟练掌握本章内容，也不必担心，因为本章实际上在考核中仅占一小部分^[5]。我们大可放轻松，来看看如何从另一个角度来理解狭义相对论。

6.6.1 Minkowski Spacetime

在之前对不变量⁽⁹⁾的讨论中，我们提到，不变量 $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ 可以用来“度量时空”。在这里，我们将实现这件事。

为了形式上的统一性，接下来，我们记

$$\begin{cases} x_0 = (ct) \\ x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \end{cases}$$

则有不变量 $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ 。

再为了简化分析，我们不再考虑 x_2, x_3 ，而只用 x_0, x_1 来描述时空。那么，在这个被限制的时空中，有不变量^[6]

$$s^2 = x_0^2 - x_1^2$$

请注意，这里的 s 与 $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ 不同。我们称这里的 s^2 为时空间隔。还需要注意的是，尽管符号上 s^2 带有平方，它的值却有可能是负数。

如果再取极小量，我们可以定义闵氏线元 ds^2 为

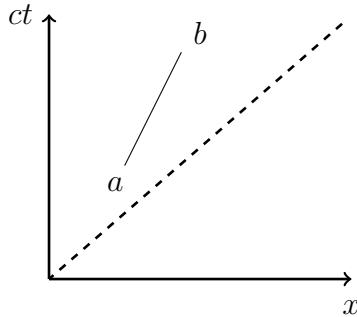
$$ds^2 \equiv dx_0^2 - dx_1^2$$

^[5] 斑鸠：由于该句大胆放弃对闵氏时空图复习导致期末失分的情况，本书概不负责。

^[6] 关于这里的不变量，你可以在不同的参考资料上看到不同的定义，有 $s^2 = x_0^2 - x_1^2$ ，也有 $s^2 = x_1^2 - x_0^2$ ，本书选择了第一种。

容易证明这也是一个不变量。

现在，我们尝试着使用坐标 x （即 x_1 ）， ct （即 x_0 ）来绘制一张时空图^[7]。



在时空图中，我们定义线长⁽¹⁰⁾为

$$l_{ab}^2 = \int_a^b ds^2 \quad (11)$$

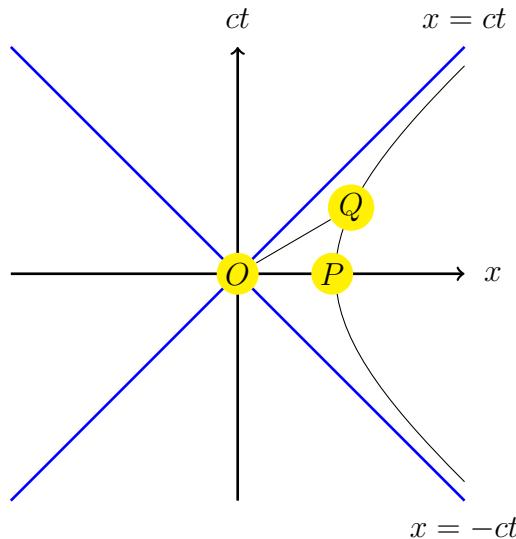
例如，对于上图的 a, b ，就有

$$l_{ab}^2 = c^2(t_b - t_a)^2 - (x_b - x_a)^2$$

由上述定义，我们知道，在第一象限的角平分线上，无论视觉上取多长的线段，其长度都是 0。时空图中的长度，不再和视觉上线段的长度相同了。

对于这样定义线长的几何，我们称之为 *Minkowski Geometry*^[8]。

为了可视化地理解闵氏几何中的线长，我们常常绘制双曲线作为等长线。



在图上，我们绘制了双曲线 $x^2 - (ct)^2 = Constant$ 。依据闵氏线长的定义，我们可以知道， $l_{OP}^2 = l_{OQ}^2$ ，尽管在视觉上并非如此。像这样用于比较闵氏线长的双曲线，被称为校准曲线。

^[7]关于时空图的画法也并不统一，有将 (ct) 作为纵轴的，也有将 (ct) 作为横轴的，本书取纵轴。

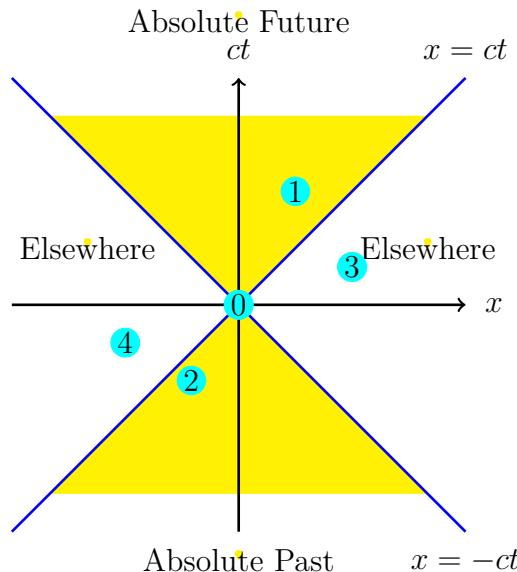
^[8]如有兴趣，可以学习双曲几何。

(10) 当计算线长 l_{ab} 时，应取 $l_{ab} = \sqrt{|l_{ab}^2|}$

(11) 这里的积分应取 a 端点到 b 端点的路径积分的意思

6.6.2 Lorentz Transformation In Minkowski Geometry

在上一小节中，我们已经初步绘制了闵氏时空图。在本小节，我们将介绍更多的概念，并展现闵氏几何中的洛伦兹变换。



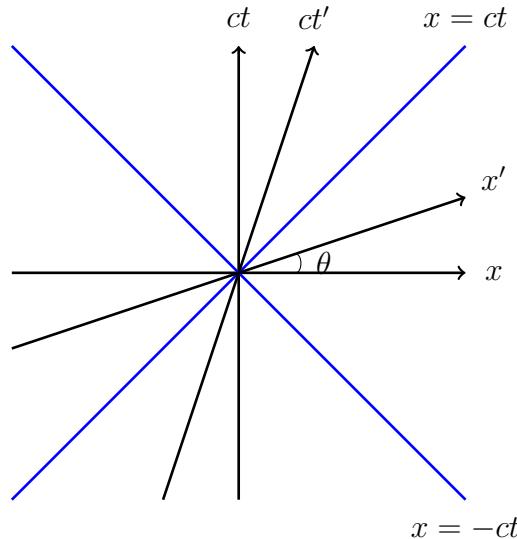
- *World Line* 对于某一个物体，它的每一个事件都可以用一个时空点表示在闵氏时空图中。我们称这些点连接成的曲线为 *World Line*。
e.g. 上图中的 $x = ct, x = -ct$ 线，就可以看成是光子的世界线⁽¹²⁾。
- *Light Cone* 我们把光子的世界线称为 *Light Cone*，并认为图中的黄色区域在 *Light Cone* 内部，其余区域在 *Light Cone* 外部。
- *Absolute Future* 对于发生在 $(0, 0)$ 的事件 0，发生在光锥内，且 $ct > 0$ 的事件（如事件 1）处于它的 *Absolute Future*。参与了事件 0 的人可以用小于 c 的速度抵达事件 1，这说明，发生在绝对未来的事件是可以被当前事件影响的。
- *Absolute Past* 对于发生在 $(0, 0)$ 的事件 0，发生在光锥内，且 $ct < 0$ 的事件（如事件 2）处于它的 *Absolute Past*。参与了事件 2 的人可以用小于 c 的速度抵达事件 0，这说明，发生在绝对过去的事件可以影响当前事件。
- *Elsewhere* 对于发生在 $(0, 0)$ 的事件 0，发生在光锥外的事件（如事件 3, 4）处于它的 *Elsewhere*。参与了事件 0 的人无法抵达事件 3，参与了事件 4 的人也无法抵达事件 0，这说明，发生在其他区的事件既不能被当前事件影响，也不能影响当前事件。

(12) x 和 ct 的变化速度相同，只有速度为 c 的物质才能做到，必然为光子

接下来，我们开始分析闵氏时空图中的洛伦兹变换。为了使形式与时空图适应，我们选择统一量纲后的洛伦兹变换如下：

$$\begin{cases} (ct)' = \gamma[(ct) - \beta x] \\ x' = \gamma[x - \beta(ct)] \end{cases}$$

回忆一下轴的性质： x' 轴上， $ct' = 0$ ； ct' 轴上， $x' = 0$ 。因此，我们只要分别在闵氏时空图上绘制直线 $\gamma[(ct) - \beta x] = 0$ 和 $\gamma[x - \beta(ct)] = 0$ ，就可以得到洛伦兹变换后的 x' 轴和 ct' 轴。



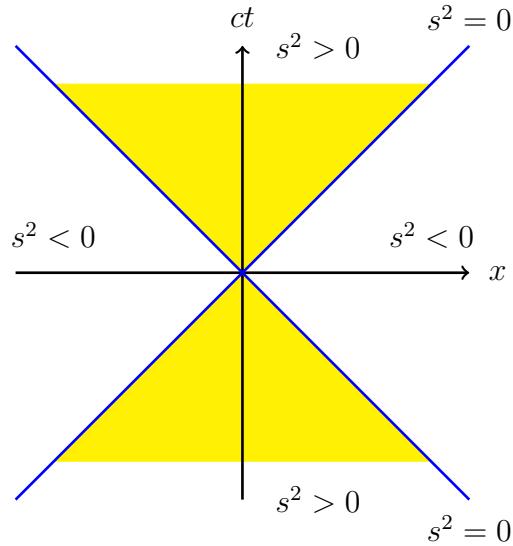
依据直线的解析式，可以得知图中的 θ 满足 $\tan \theta = \beta$ ⁽¹³⁾，且 x', ct' 轴关于 $x = ct$ 对称。

在闵氏时空图中，正交这件事情也变得和视觉上不一样。你可以凭直觉觉得 x 轴和 ct 轴是正交的，但你可能不会认为 x' 轴和 ct' 轴是正交的，尽管根据与时空距离相对应的闵氏内积 $(x_1, x_0) \cdot (y_1, y_0) = x_0 y_0 - x_1 y_1$ ， x' 轴和 y' 轴的方向向量点积 $(1, \beta) \cdot (1, \frac{1}{\beta}) = 0$ ，也就是说， x' 轴和 ct' 轴事实上是正交的。

(13) 依据 $-1 < \beta < 1$ 可知，洛伦兹变换可以使 x' 轴和 ct' 轴无限接近于光锥。

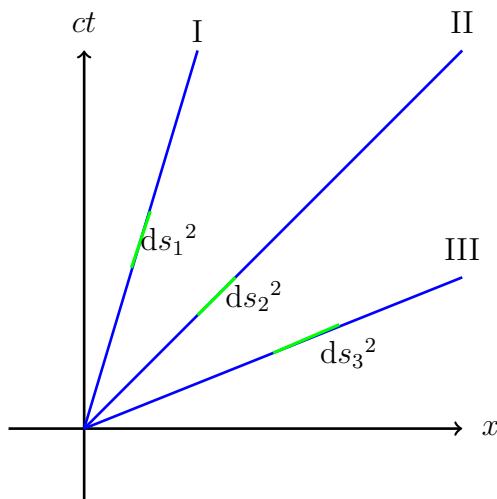
6.6.3 Time Order And Causality

我们可以依据事件点的 s^2 ，将闵氏时空图分为三个部分：



- *Timelike Separation* 我们称 $s^2 > 0$ 的部分为 *Timelike Separation*。对于在这样的区域发生的事件，总有办法找到一个惯性系，使得在这个惯性系中，该事件和原点事件发生在同一空间。事实上，你只需要作一个洛伦兹变换，使得该事件点落在 ct' 轴上。
- *Spacelike Separation* 我们称 $s^2 < 0$ 的部分为 *Spacelike Separation*。对于在这样的区域发生的事件，总有办法找到一个惯性系，使得在这个惯性系中，该事件和原点事件发生在同一时间。事实上，你只需要作一个洛伦兹变换，使得该事件点落在 x' 轴上。
- *Lightlike Separation* 我们称 $s^2 = 0$ 的部分为 *Lightlike Separation*。

上述对闵氏时空图的分区属于固定一个事件点在原点的特殊情况。对于一般的时间间隔，我们也可以把它们分为三种类型：



- $ds^2 > 0$: 对应图中曲线 I 中的某段间隔，此时称该间隔为类时的。对于类时的间隔，我们总可以通过洛伦兹变换使得两个在原系的不同空间发生的事件在新系的同一空间发生，即我们总可以找到一个系，使得 $dx' = 0$ 。
- $ds^2 < 0$: 对应图中曲线 III 中的某段间隔，此时称该间隔为类空的。对于类空的间隔，我们总可以通过洛伦兹变换使得两个在原系的不同时间发生的事件在新系的同一时间发生，即我们总可以找到一个系，使得 $dct' = 0$ 。
- $ds^2 = 0$: 对应图中曲线 II 中的某段间隔，此时称该间隔为类光的。对于类光的间隔，其闵氏线长 l 恒等于 0。

日常生活中，我们常常提到因果关系。如“手枪的子弹发射了”是因，“子弹击中 Frank 导致 Frank 领盒饭”是果。因果关系是讲求时序的，即手枪的子弹必须先发射，Frank 才能领盒饭；我们不可能说 Frank 先领盒饭，子弹才发射。

在狭义相对论中，究竟什么样的事件间隔是保时序的呢？以下定理给出了答案。

定理 6.6 Time order-preserving law —Prove 6.7~P 264

- 若两事件的间隔为类时或类光，则任何洛伦兹变换下都保时序；
- 若两事件的间隔为类空的，则存在变时序的洛伦兹变换。

6.6.4 Look Back

在这个子小节，我们尝试用闵氏时空图解释狭义相对论中的一些效应。

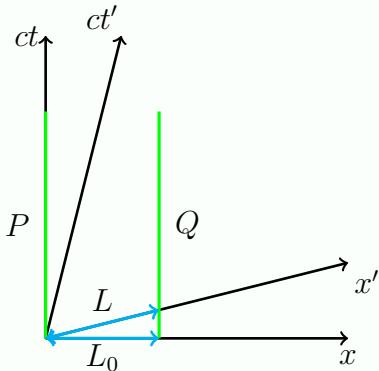
例题 6.4 Using Minkowski graph to solve problems below

- 画出“动尺收缩”所对应的时空图，尝试解释为什么会收缩，并计算出收缩因子；
- 画出“动钟变慢”所对应的时空图，尝试解释为什么会变慢，并计算出变慢因子。

解答 6.4 Using Minkowski graph to solve problems below

(a)

画出时空图如下



P, Q 是在 $x - ct$ 系中静止的两个点，其世界线由绿色线段标明。

在 $x - ct$ 系中测量 PQ 的距离，即取 ct 坐标相同的两个点求 Δx ，不妨取图中 L_0 。

在 $x'ct'$ 系中测量时，需要保证 ct' 坐标相同，因此作与 x' 轴平行的线被 P, Q 的世界线截取的部分，不妨取图中 L 。

需要注意的一点是，由于 x' 轴和 ct' 轴发生了收缩，其尺度与 x 轴和 ct 轴并不一致，所以我们不能直接凭肉眼判断 $L > L_0$ 。正确的做法是，利用时空间隔在洛伦兹变换中不变的性质，在两个参考系中分别考虑。

在 $x - ct$ 系中， L 的时空间隔为

$$(\beta L_0)^2 - L_0^2$$

而在 $x' - ct'$ 系中， L 的时空间隔为

$$-L^2$$

于是有

$$(\beta L_0)^2 - L_0^2 = -L^2$$

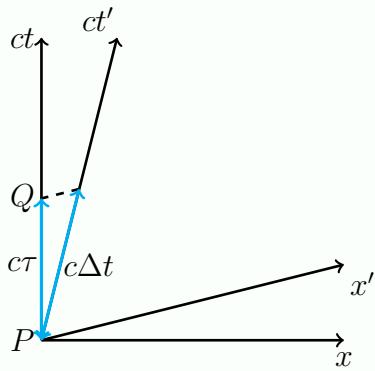
即

$$L = \sqrt{1 - \beta^2} L_0 = s L_0$$

显然， PQ 的距离在 $x' - ct'$ 系中发生了收缩。

(b)

画出时空图如下



P, Q 是 $x - ct$ 系中同一个静止的钟在不同时间下触发的指针移动事件。

在 $x - ct$ 系中, P, Q 的时间差即图中的 $c\tau$ 。

在 $x' - ct'$ 系中, P, Q 的时间差即 P, Q 两点的 ct' 差值。过 Q 作平行于 x' 轴的直线与 ct' 轴相交, 图中的 $c\Delta t$ 即为所求。

我们可以通过联立直线

$$\begin{cases} ct = \frac{1}{\beta}x \\ ct = \beta x + c\tau \end{cases}$$

解得平行线与 x' 轴的交点在 $x - ct$ 系中的坐标

$$\left(\frac{\beta c\tau}{1 - \beta^2}, \frac{c\tau}{1 - \beta^2} \right)$$

一样地, 我们分别求出在 $x - ct$ 系, $x' - ct'$ 系中 $c\Delta t$ 的时空间隔并联立, 可得

$$\left(\frac{c\tau}{1 - \beta^2} \right)^2 - \left(\frac{\beta c\tau}{1 - \beta^2} \right)^2 = (c\Delta t)^2$$

解得

$$\Delta t = \gamma\tau$$

显然, PQ 的时间差在 $x' - ct'$ 系中发生了膨胀。

除了尺缩效应和时延效应, 这里再使用闵氏时空图解释一个著名的佯谬: 双生子佯谬。

例题 6.5 双生子佯谬

考虑地球上的一对兄弟。某一天, 哥哥从地球出发, 以极快的速度进行星际旅行。若干年后, 哥哥又回到了地球。

双生子佯谬认为，以弟弟的视角看，哥哥在运动，所以他认为哥哥的时间延缓了；以哥哥的视角看，弟弟也在运动，所以他认为弟弟的时间延缓了。现在，两人面对面，到底是谁的时间延缓了？

解答 6.5 双生子佯谬

对该问题，爱因斯坦的回答是，在哥哥做星际航行的过程中，他必然经历加速和减速的过程，也就是说，哥哥的参考系不再是惯性参考系，因此无法使用狭义相对论解释这一现象。虽然这个回答符合逻辑，但有回避问题之嫌。

在使用闵氏时空图回答这个问题之前，我们需要先明确几点。

- 在非惯性参考系中，尽管全局的时空几何可能由于引力或加速度而变得复杂⁽¹⁴⁾，但在任何足够小的区域内，通过广义相对论的局部平直性原理⁽¹⁵⁾，时空可以被近似为闵氏时空。
- 在闵氏时空图中，某个物体的世界线长度等于其经历的原时（乘以光速）。

(14) 关于这个，可以查阅广义相对论。

(15) 由于本书并不直接讨论广义相对论，这里只作引入，不予证明。

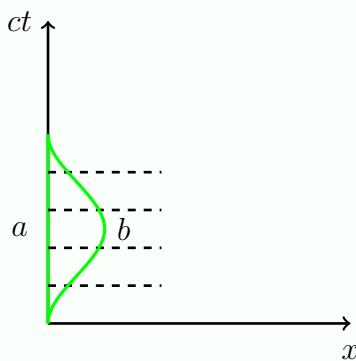
对于第二点的解释如下：

依据第一点，在极小尺度下，我们依旧可以认为闵氏线元是一个不变量。同时，当物体以自身作为参考系 $x' - ct'$ 时，其 dx' 始终保持为 0。那么，由闵氏线元不变，有：

$$ds^2 = d(ct)^2 - dx^2 = d(ct')^2 - dx'^2 = d(ct')^2 \quad (6.10)$$

依据线长的定义，对闵氏线元取路径积分，可以发现，左式的积分是世界线长度，而右式的积分其实就是物体在自身参考系中时间（乘以光速）的总流逝量，也就是原时（乘以光速）。

接下来，我们尝试在闵氏时空图中绘制弟弟和哥哥的世界线：



在图中，我们用 a 表示弟弟， b 表示哥哥。由于弟弟一直在地球，在大尺度下认为他不运动，因此弟弟的世界线在 ct 轴上。至于哥哥，则在 x 方向上有运动，并最后回到地球，和弟弟相遇，因此呈现这样的世界线。由于一开始明确的第二点，比较弟弟和哥哥经历的时间，其实就是比较他们的世界线长度。我们用与 x 轴平行的虚线将兄弟的世界线分割成多个极小的部分，并在每一个部分比较两者的长短。

由于每一小段内， a 没有 x 坐标的改变，而 b 却有，且两者 ct 坐标的改变量相同，所以都有 a 的小段长于 b 的小段。求和，即 a 的世界线短于 b 的世界线。

因此，是哥哥的时间延缓了。

6.7 课后习题：狭义相对论

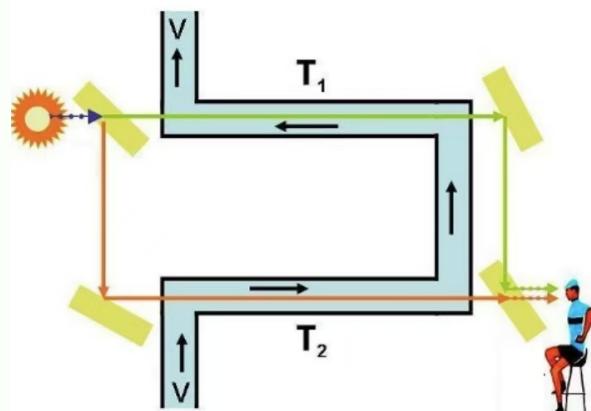
习题 6.1 Fizeau effect—Solution 6.1, ~P 324

In this problem we show that the relativistic velocity addition law can be used to explain the Fizeau experiment without invoking the existence of *ether*. The speed of light in stationary water is less than its speed c in *vacuum*. Traditionally it is written as $\frac{c}{n}$, where $n \approx \frac{4}{3}$ is the *index of refraction* of water. The water flowed in the *pipe* with velocity v . In the lower arm T_2 of the *interferometer* (as shown in the figure), one would expect that, from the nonrelativistic addition law, the speed of light in the moving water would be its speed in stationary water increased by the speed of the water in the pipe $w = \frac{c}{n} + v$. Show that the relativistic

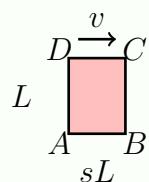
velocity addition law leads to, up to higher-order corrections:

$$w = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

The result was observed by Fizeau in 1851, but for long time viewed as a confirmation of a rather *elaborate contemporary* ether-theoretical calculation based on the idea that the water was partially successful in dragging ether along with it. Einstein later said that it was of fundamental importance in his thinking.



习题 6.2 Terrel Rotation —Solution 6.2 ~ P 325



Observer

A square with proper-length- L sides flies past you at a speed v , in a direction parallel to two of its sides. You stand in the plane of the square. When you see the square at its nearest point to you, show that it looks to you like it is rotated, instead of contracted. (Assume that L is small compared with the distance between you and the square.)

习题 6.3 Lots of transformations—Solution 6.3 ~ P 327

A train with proper length L moves at speed $\frac{c}{2}$ with respect to the ground.

A ball is thrown from the back to the front, at speed $\frac{c}{3}$ with respect to the train. How much time does this take, and what distance does the ball cover, in:

(a) The train frame?

(b) The ground frame? Solve this by:

i. Using a velocity-addition argument.

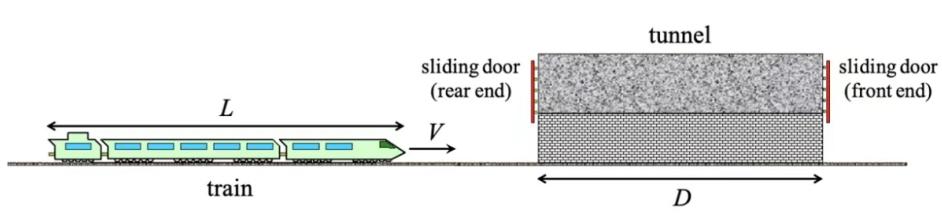
ii. Using the Lorentz transformations to go from the train frame to the ground frame.

(c) The ball frame?

(d) Verify that the *invariant interval* is indeed the same in all three frames.

习题 6.4 Train And Tunnel Paradox—Solution 6.4 ~ P 329

Consider a train running at a constant speed V on the straight track in the x direction, and passing through a tunnel (see the figure). The proper length of the train is L , and the proper length of the tunnel is D . Here we assume $L > D$. Define (x, ct) as the time and the space coordinates of the track frame, and (x', ct') as those of the train frame. Here, x and x' **are in the same direction**.



(a) Suppose that an observer standing on the ground sees that the train is shorter than the tunnel, so that the whole train can be inside the tunnel. Determine the smallest possible speed of the train.

(b) Suppose that the rear end of the tunnel (see the figure) is at $x = 0$, and set the time $t = t' = 0$ when the rear end of the train reaches the rear

end of the tunnel. Draw the Minkowski diagram **taking x coordinate for the horizontal axis and ct coordinate for the vertical axis.** In addition, *specify* L and D in the diagram.

(c) When the rear end of the train enters the rear end of the tunnel, the rear-end and front-end sliding doors of the tunnel (see the figure) are closed at the same time in the track frame. These two events are denoted by R_{close} and F_{close} , respectively. Then, when the front-end of the train reaches the front end of the tunnel, both the rear-end and front-end sliding doors are opened at the same time in the track frame. These events are denoted by R_{open} and F_{open} , respectively.

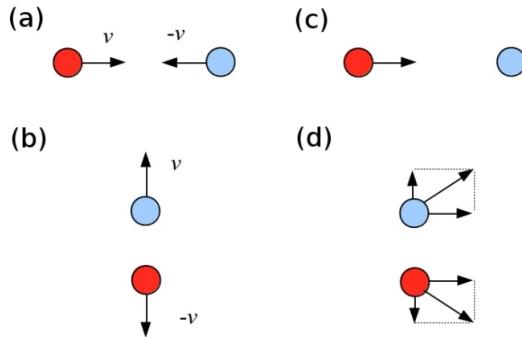
Show the events R_{close} , F_{close} , R_{open} , and F_{open} in the Minkowski diagram in (b), and put the four events in the order of being seen by an observer in the train.

习题 6.5 Conservation of momentum in SR—Solution 6.5~P 332

In class, we showed that the classical definition of the linear momentum cannot be right in the relativistic case. We illustrated by the example of the collision of two particles with equal mass m . In the rest frame (for the center of mass) K , the two particles have velocities with the same amplitude v but opposite directions along x axis before the collision, as illustrated in Fig.(a). After the collision, they move away along y axis with the same speed v , as illustrated in Fig.(b).

Now, in a frame K' that moves with speed v along the positive x direction with respect to the rest frame K , as illustrated in Fig.(c), one particle is at rest before the collision.

- (i) What is the velocity of the other particle before the collision?
- (ii) After the collision, as illustrated in Fig.(d), what are the velocities of the two particles? Specify the components of the velocities along x and y axes.
- (iii) Show that if you use the definition of the relativistic momentum, you will maintain the conservation of linear momentum in the moving frame

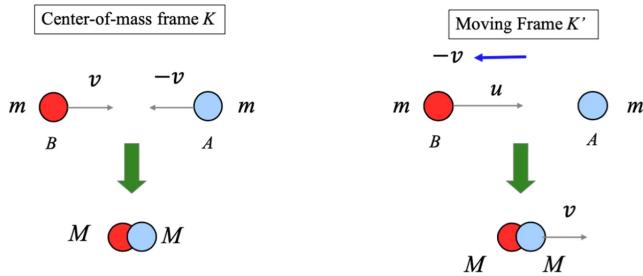
K' .

习题 6.6 Perfectly Inelastic Collision of two Relativistic Particles—

Solution 6.6 ~ P 335

Consider a perfectly inelastic collision of two relativistic particles A and B with equal rest mass m . In the center-of-mass frame K , the two particles have velocities with the same magnitude v , but opposite directions along x axis before the collision, as illustrated in the top left part of the figure. After the collision, they stick together, as illustrated in the bottom left part of the figure. Now, in another frame K' that moves with speed v along the negative x direction with respect to the K -frame (right part of the figure), particle A is at rest before the collision.

- Considering the energy conservation for the collision in K -frame, calculate the rest mass M of each particle after the collision.
- In K' -frame, what is the velocity u of particle B before the collision?
- In K' -frame, show that the linear momentum and energy are conserved in the collision process.



习题 6.7 Relativistic Scattering between a Photon and an Electron—

Solution 6.7~P 337

In this problem, a particular scattering process between a photon and an electron known as *Compton Scattering* will be addressed. For simplicity, we will consider only one spatial dimension so that spatial vectors $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_x$ possess only one non-zero component and where \mathbf{e}_x is the unit vector along the x axis. In this setting, a photon of energy E_{ph} is *propagating* along the x axis and hits an electron. We want to understand with which energy the photon is scattered back along the x axis in terms of the initial parameters. Let c be the speed of light.

(a) As a first step, write down

- (i) the relativistic expressions for the energy E and momentum \mathbf{p} of a particle of mass m and velocity $\mathbf{v} = ve_x$.
- (ii) the expressions for $\frac{E'}{c}$ and \mathbf{p}' in terms of $\frac{E}{c}$ and \mathbf{p} in an inertial frame that moves with velocity $\mathbf{u} = ue_x$ relative to the one where the particle has energy $\frac{E}{c}$ and momentum \mathbf{p} .

Hint: the Lorentz transformation of the position four-vector is

$$(ct', x', 0, 0) = (\gamma ct - \beta \gamma x, \gamma x - \beta \gamma ct, 0, 0), \beta = \frac{u}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

(b) Consider the energy-momentum four-vector \mathbf{P} defined as $\mathbf{P} = (\frac{E}{c}, \mathbf{p})$.

- (i) Show that $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}$ yields the energy-momentum relation, where $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}$ denotes the scalar product of four-vector \mathbf{P} with itself.

Hint: For four-vectors $\mathbf{A} = (a_0, \mathbf{a})$ and $\mathbf{B} = (b_0, \mathbf{b})$, the scalar product is

defined as

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

- (ii) Show that $\mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}$ where $\mathbf{P}' = (\frac{E'}{c}, \mathbf{p}')$.
- (iii) The energy-momentum relation for a photon is that of a particle *of vanishing rest mass*. If $\mathbf{K} = (\frac{E_{\text{ph}}}{c}, \mathbf{k})$ is the energy-momentum four-vector of a photon, what is the value of $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}$?
- (c) Consider now a photon of 4-momentum \mathbf{K} that is propagating along the x axis and hits an electron with mass m and 4-momentum \mathbf{P} and is scattered back elastically along the x axis with energy $E_{\text{ph}}^{\text{fi}}$. What is $E_{\text{ph}}^{\text{fi}}$ in terms of m and E_{ph} ? The result is commonly quoted in terms of $\frac{1}{E_{\text{ph}}^{\text{fi}}}$. Hint: One way to proceed is to choose the rest frame of the electron before the collision, write down the energy-momentum four-vectors before and after the collision and relate the four-vectors before and after the collision using energy and momentum conservation.

7

Thermodynamics

7.1 Introduction

假设一个体系有 N 个粒子，且体系中经典力学分析依然成立，那么对第 i 个粒子，其受到其余 $N - 1$ 个粒子的作用，其动力学方程应有如下形式：

$$\sum_{i \neq j}^N \mathbf{F}_{ij} = \mu_j \mathbf{a}_j$$

其中共有 N 个变量，故对整个系统分析将会列出共计 N^2 个变量的方程。当 N 足够大时，求解这样的方程显然是极其繁琐且不现实的。于是，我们引出 *Statistical Physics* 与 *Thermodynamics* 这两个研究超多粒子体系的分支。

Statistical Physics 从微观角度出发，利用统计学方法对宏观物体的热运动性质及其规律做出解释。本章将会介绍其中的分子动理论。

Thermodynamics 从宏观角度研究物质的热运动性质及其规律，并给出少数关键宏观量的联系。本章将重点介绍这些关键宏观量以及确立它们之间联系的热力学定律。

7.2 Ideal Gas

Ideal Gas 是一种理想模型，它满足的条件如下：

- 包含大量的分子，且分子自身占据的体积对分子间距而言可以忽略。
- 每个分子均可视为质点，服从牛顿运动定律；但作为一个整体，它们随机运动且速度分布与时间无关。

- 分子间以及分子与容器壁的碰撞都是弹性碰撞，且除分子的相互碰撞外忽略分子之间的作用力。
- 所有气体分子是相同的。

理想气体适合 *Ideal Gas Law* $pV = nRT = Nk_B T$ ，其中涉及的物理量与常数如下：

- Amount of Substance* 用于衡量分子数量，用 n 表示，国际单位为摩尔 (mol)。
- Avogadro Constant*，记为 N_A ，约为 $6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ 。表示 1mol 物质中含有的粒子数。若用 N 代表分子个数，则有 $N = nN_A$ 。
- Temperature* 表示气体热运动的剧烈程度，用 T 表示，国际单位为开尔文 (K)。热力学温度与摄氏温度的转化为： $T = t + 273.15$ ，其中 t 为摄氏温度。
- Boltzmann Constant*，记为 k_B ，约为 $1.381 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ 。玻尔兹曼常数反映了微观状态数与熵的关系。
- Gas Constant*，记为 R ，约为 $8.314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ 且有关系 $R = N_A k_B$ 。

I - P128 引

这是一个实验结论，理论上也可以证明 (*Prove 7.11~P 275*)。

7.3 Kinetic Theory of Molecules

7.3.1 the Microscopic View of Pressure

从微观角度来说，压强的本质是气体分子对容器壁不断撞击的统计平均结果。根据理想气体的假设，并认为速度向各个方向的概率均等，可以得到压强与分子数密度以及速率的关系如下 (*Prove 7.1~P 265*)：

$$p = \rho \mu \overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \rho \mu \overline{v^2}$$

其中 $\rho = \frac{N}{V}$ 表示单位体积的分子数， μ 表示单个分子的质量， $\overline{v^2}$ 为速度平方的平均值（注意与速度平均值的平方 \bar{v}^2 区分）。

利用这一结论，如果我们定义分子平均动能 $\bar{\epsilon}_k = \frac{1}{2}\mu\bar{v^2}$ ，结合理想气体方程，经过简单推导，我们即可得到其表达式为：

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2}k_B T$$

它表明，理想气体的分子平均动能只与温度有关。

7.3.2 Equipartition Theorem

首先介绍 *Degrees of Freedom* 的概念，它表示在坐标系中确定分子运动状态所需要的独立坐标数。总体来看，对于每个在三维坐标系中的原子，不考虑其内部的电子与原子核，我们需要 3 个独立坐标来确定其位置，如笛卡尔坐标系中的 x, y, z ，球坐标系中的 r, θ, φ 。故对于一个由 k 个原子组成的分子，其自由度总量为 $3k$ 。而自由度又分为三个部分：

- *Translational Degree of Freedom* 表示确定分子质心在坐标系中的位置所需要的独立坐标数，对所有分子均为 3，并且单原子分子只有平动自由度。
- *Rotational Degrees of Freedom* 表示确定分子在坐标系中的空间取向所需要的独立坐标数。对于线性分子（如 CO_2 ），由于其绕通过分子的轴的旋转不改变分子构型，故旋转自由度为 2，其余分子为 3。
- *Vibrational Degrees of Freedom* 表示确定分子内原子之间的相对运动状态所需要的独立坐标数。通常利用总自由度-平动自由度-转动自由度的方式计算，对线性分子为 $3k - 5$ ，对非线性分子为 $3k - 6$ 。

有了自由度的概念后，根据大量的实验事实总结，有如下关系成立⁽¹⁾：

$$U = \frac{i}{2}Nk_B T \quad (7.1)$$

其中 U 为 *Internal Energy*，表示气体的所有分子动能、分子势能、分子内部能量等之和。

式 (7.1) 讨论的是理想气体的内能。对于理想气体，由于其不计分子间作用与分子内部结构，故其内能等于理想气体的总动能。注意 i 为平动自由度与转

(1) 证明

见 *Prove 7.11_u~P 275*

动自由度之和^[1]，而 $\frac{1}{2}k_B T$ 正是上一部分中我们计算得到的分子动能平分到某个方向上的结果，这一结论也由此解释为气体系统动能平均分配到每一个自由度上，得名 *Equipartition Theorem*。

7.3.3 Maxwell Distribution

速率分布函数是这样一个函数，它的自变量为速度，因变量为速度落在 $[v, v + dv]$ 区间内的粒子占总粒子数的比值，定义式如下：

$$f(v) = \frac{dN}{N dv}$$

这样，速度落在 $[v_1, v_2]$ 区间内的粒子占总粒子数的比值即为：

$$\int_{v_1}^{v_2} f(v) dv$$

根据定义，速率分布函数是归一化的，即其在 $[0, +\infty)$ 上的积分为 1。

Maxwell Distribution 给出了理想气体的速率分布规律，它给出的速率分布函数如下（证明见 *Prove 7.10~P 273*）：

$$f(v) dv = \left(\frac{\mu}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}} 4\pi v^2 dv$$

可以将麦克斯韦分布分为三个部分，第一部分为 e 指数前的部分，事实上是归一化系数；第二部分为 e 指数部分，揭示了速度分布与动能以及温度的关系；第三部分 $4\pi v^2 dv$ 则为在速度空间中的球壳体积元。

利用速率分布函数，我们可以计算如下的特征速度：

- *Most Probable Speed* 表示粒子数最多的区间微元对应的速度，定义式为：

$$v_p \quad \text{where} \quad \frac{dN(v_p)}{dv} = 0$$

对麦克斯韦分布，其值等于 $\sqrt{\frac{2k_B T}{\mu}}$ 或 $\sqrt{\frac{2RT}{M}}$ ， M 为摩尔质量。

^[1]不计振动自由度、电子自由度与原子核自由度，这是因为这些自由度对应的能级能隙的数量级与 $k_B T$ 相当（振动能隙）或远大于它（电子能隙与原子核能隙），均分定理所需的假设“能级组成平滑连续能谱”不再成立，其贡献变为 0。事实上，当温度降低到一定值时，这一定理也会因为同样的原因失效。

- *Average Speed* 表示所有粒子速率的平均值，用于计算分子自由程等，定义式为：

$$\bar{v} = \int_0^{+\infty} v f(v) dv$$

对麦克斯韦分布，其值等于 $\sqrt{\frac{8k_B T}{\pi \mu}}$ 或 $\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ 。

- *Root Mean Speed* 表示所有粒子速度平方的平均值的平方根，用于计算分子动能等，定义式为：

$$v_{rms} = \sqrt{\int_0^{+\infty} v^2 f(v) dv}$$

对麦克斯韦分布，其值等于 $\sqrt{\frac{3k_B T}{\mu}}$ 或 $\sqrt{\frac{3RT}{M}}$ 。

7.3.4 Boltzmann Distribution^[2]

我们再重新观察一下麦克斯韦分布的 e 指数位置，发现可以提出 $\frac{1}{2}\mu v^2$ ，这正是分子动能，这启示我们粒子的分布的核心可能是它的能量。那么在一般的势场中，随着粒子所在位置的不同，自然其能量不同，所以对应的分布应该与空间坐标有关。

事实也确实如此，在同时考虑速度与位置的情况下，我们有如下的关系：

$$dN = \rho_0 \left(\frac{\mu}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\epsilon_p}{k_B T}} dx dy dz dv_x dv_y dv_z$$

其中 ρ_0 为势能零点处的分子数密度。仔细观察可见，若将内能拆成势能与动能的和，再分别与对应的变量组合，就有：

$$dN = \rho_0 e^{-\frac{\epsilon_p}{k_B T}} dx dy dz \times \left(\frac{\mu}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\epsilon_k}{k_B T}} dv_x dv_y dv_z$$

由于 $dv_x dv_y dv_z = 4\pi v^2 dv$ 事实上是速度在三维微分的不同表达形式，此时后一项即是麦克斯韦分布，积分为 1，故对两边进行关于速度的积分，就有：

$$dN = \rho_0 e^{-\frac{\epsilon_p}{k_B T}} dx dy dz = \rho_0 e^{-\frac{\epsilon_p}{k_B T}} dV$$

接下来只要注意到 $\rho = \frac{dN}{dV}$ ，就自然得到了一个简洁而重要的结论：

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\epsilon_p}{k_B T}}$$

^[2]本小节的推导过程不作要求

这一分布称为 *Boltzmann Distribution* (*Prove 7.9~P 271*)。若将处于势能零点的粒子称为基态粒子，那么这个式子反映了能量高于 ϵ_p 的粒子相对基态粒子的数量。

利用它，我们可以轻松推出流体力学中压强随高度（假设温度不变）的分布，只需注意到压强与分子数成正比，势能在此处为重力势能即可，有：

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu gh}{k_B T}} = p_0 e^{-\frac{mgh}{RT}}$$

7.3.5 Mean Free Path

Mean Free Path 是指分子在相邻两次碰撞之间走过的平均路程，它等于分子在一段时间内通过的路程与平均碰撞次数的比值。如将分子视为直径为 d 的球体，且分子做平均速度为 v 的折线运动，可以得到平均碰撞次数 \bar{Z} 为 (*Prove 7.2~P 266*)：

$$\bar{Z} = \sqrt{2}\pi\rho d^2 v$$

那么对应的平均自由程 l 为：

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\rho d^2} = \frac{k_B T}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$$

7.3.6 Van Der Waals Equation of State

对真实气体，范德华提出了一个基于理想气体的修正模型：

$$(p + \frac{a}{V_m^2})(V_m - b) = RT$$

其中 V_m 表示气体的摩尔体积，压强的附加项考虑分子间的引力，体积的附加项考虑分子自身占据的体积。

7.4 Zeroth Law of Thermodynamics

7.4.1 Introduction

从这节从此开始均为热力学部分。在开始之前，想阐述（吐槽）一下热力学学习中可能遇到的一些问题，复习/补天选手可以跳过。

关于各个课程热力学量符号各成一体的问题，以功为例。在高中课程与普通物理中均用 W 表示物体对外界做功，但高中时规定对内做功为正，普通物理规定对外做功为正；大学物理（甲）则用 A 表示外界对物体做功，且外界对物体做正功时为正；而物理化学则用 w 表示物体对外界做功并强调它不是一个状态量，规定对内做功为正。所以说在学习这一块的时候，请各位务必注意符号问题，很有可能课程或参考书的符号及其定义与本笔记有较大出入。

一些教材上可能会出现 dQ 这类对于过程函数的微分写法，最好从物理上理解为一个微小可逆过程的放热，因为如果把 Q 作为一个数学概念上的多元函数，那么它并不能全微分，自然不存在 dQ 这一说法。而对于状态函数的微分如 dU ，其可以视为数学上的全微分。

然后是贯穿本章的一个问题，这部分选取的统计力学与热力学由于是比较原始的部分，学完总会给人一种这章全是记忆性知识，到处给理论打补丁的感觉，不像力学与电磁学那样能自成体系，所以在证明的第二部分特意给出了这些定律到底是如何从底层给出的，供感兴趣者阅读。

7.4.2 Basic Concepts

- *System* 是选定作为研究对象的那部分物质及其所占有的空间，系统是有 *Boundary* 的，系统与环境的物质与能量交换均发生在边界上。
- *Surroundings* 是除了系统之外的部分，可以与系统交换物质与能量。
- *Open System* 与环境既有物质交换，又有能量交换。
- *Closed System* 与环境只有能量交换，没有物质交换。
- *Isolated System* 与环境既无物质交换，又无能量交换。
- *Thermodynamic Equilibrium* 是系统内的各性质与组分保持稳定的一种状态，它要求系统达到与环境的力平衡（合外力为 0，刚性器壁除外），热平衡（无能量交换）以及系统的相平衡（各相变过程达到平衡）与化学平衡（各化学反应达到平衡）。之后讨论的状态均为热力学平衡态。

- *State Function* 是函数值只与状态有关的函数，其在两个态之间的变化量与路径无关。在数学上即其因变量在定义域内可表示为自变量的全微分。
- *Process Function* 与状态函数相对，在两个态之间的函数变化量与路径有关。

7.4.3 Temperature

Temperature 是一个相对的概念，它以 *Zeroth Law of Thermodynamics* 为基础：

定理 7.1 Zeroth Law of Thermodynamics

若两个热力学系统均与第三个系统处于热平衡状态，此两个系统也必互相处于热平衡。

热力学第零定律揭示了热平衡的可传递性。在此基础上，温度被定义为描述系统中物质粒子平均动能的一种物理量，且认为当两个物体处于热平衡时，它们的温度相同。这样，只要选定两组达到热平衡的物体，分别赋予一个温度的值作为基准，就可以建立一个温度体系，而这样的基准则被称作温标。所以说，对温度的定量测量依赖于温标，这也是我们说温度是相对概念的原因。

我们知道，分子的热运动剧烈程度与温度有关。我们假设有一个极限温度，在这种温度下，分子的热运动完全停止了。这样的极限被称作 *Absolute Zero*。

热力学温度⁽²⁾是以 *Absolute Zero* 为温度零点的，且温度线斜率与摄氏温度一致。

(2) 见节 7.2

7.5 First Law of Thermodynamics

7.5.1 Heat and Work^[3]

- *Heat* 是由系统和周围环境之间的温差导致而在系统边界上传递的能量，用 Q 表示。热是过程函数。热的传递导致温度的传递，它们的关系如下：

$$\frac{dQ}{dt} = \kappa_t A \frac{dT}{dx} \quad (7.2)$$

这是 *Fourier's Law*，其中 κ_t 表示介质的热传导率，与介质种类有关； A 为截面面积； $\frac{dT}{dx}$ 则代表了温度梯度，即两端的温差大小。

- *Heat Capacity at Constant Volume* 是在体积一定的情况下，1mol 物质上升单位温度所需要吸收的热量：

$$C_V \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

对理想气体，设 i 为平动自由度与转动自由度之和，则有

$$C_V = \frac{i}{2} R$$

- *Heat Capacity at Constant Pressure* 是在压强一定的情况下，1mol 物质上升单位温度所需要吸收的热量：

$$C_p \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p$$

对理想气体，设 i 为平动自由度与转动自由度之和，则有

$$C_p = \frac{i+2}{2} R = C_V + R$$

以上对理想气体热容的证明，见 *Prove 7.3~P 267*。

^[3] 关于本小节中等容热容和等压热容的定义，有一点需要说明：有些资料，如普通化学中，等容热容和等压热容的定义与本书中定义有所出入。这些材料另用了摩尔等容热容 $C_{V,m}$ 和摩尔等压热容 $C_{p,m}$ 来表示体积（压强）一定的情况下，1mol 物质上升单位温度所需吸收的热量，而等容热容 C_V 和等压热容 C_p 则定义为体积（压强）一定的情况下，所研究物质上升单位温度所需吸收的热量。本书采用了路欣老师 2023 学年春夏学期某一节 ppt 内的定义。事实上，老师的多节 ppt 内关于该符号的定义也并未统一。

- *Work* 与力学时的定义一致，同样用 W 表示：

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \int F \, dx = \int pS \, dx = \int p \, dV$$

并规定系统对外做功取正。功也是过程函数。

改变系统内能必须通过热与功，这就是 *First Law of Thermodynamics*。

定理 7.2 *First Law of Thermodynamics*

I - P349 引

系统内能的增加量等于系统吸收的热和环境对系统所做的功的总和：

$$\Delta U = Q - W$$

热力学第一定律也可以写成微分形式：

$$dU = \delta Q - p \, dV$$

其中， Q 前不使用 d 而使用 δ 是为了暗示 Q 是一个过程函数。

7.5.2 *Process Introduction*

I - P352 引

为方便查阅，把熵的计算也写在此处。此处讨论的均为理想气体。

- *Isovolumetric/Isochoric Process* 是指系统体积不变的过程，此时一般容器为刚性容器。

$$\frac{p}{T} = \text{constant}$$

$$Q = \Delta U = nC_V\Delta T = \frac{i}{2}V\Delta p$$

$$W = 0$$

$$\Delta U = nC_V\Delta T = \frac{i}{2}V\Delta p$$

$$\Delta S = nC_V \ln \frac{p_2}{p_1} = nC_V \ln \frac{T_2}{T_1}$$

(证明见 *Prove 7.4* ~ *P 268*)

- *Isobaric Process* 是指系统压强不变的过程。

$$\frac{V}{T} = \text{constant}$$

$$Q = nC_p\Delta T = \frac{i+2}{2}p\Delta V$$

$$W = p\Delta V$$

$$\Delta U = Q - W = nC_V\Delta T = \frac{i}{2}p\Delta V$$

$$\Delta S = nC_p \ln \frac{V_2}{V_1} = nC_p \ln \frac{T_2}{T_1}$$

(证明见 *Prove 7.4_{ii}*~*P 268*)

- *Isothermal Process* 是指系统温度不变的过程。

$$pV = \text{constant}$$

$$Q = W = nRT \ln \frac{p_1}{p_2} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$W = nRT \ln \frac{p_1}{p_2} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\Delta U = 0$$

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_2}{V_1} = nR \ln \frac{p_1}{p_2}$$

(证明见 *Prove 7.5_i*~*P 268*)

- *Adiabatic Process* 是指系统不与环境交换能量的过程。

$$pV^\gamma = \text{constant} \quad \gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}$$

$$Q = 0$$

$$W = \frac{p_1 V_1^\gamma}{1-\gamma} \left(\frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}} \right)$$

$$\Delta U = -W = \frac{p_1 V_1^\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}} \right)$$

$$\Delta S = 0$$

(证明见 *Prove 7.6*~*P 268*)

7.6 Second Law of Thermodynamics

7.6.1 Heat Engine

首先介绍一些基本概念。

- *Cycle* 是终态与始态相同的过程，其在 $p - V$ 图上的路径为一闭合曲线。
- *Reversible/Quasi-Static Process* 是指存在逆过程使得系统与环境都恢复原状态的过程。可逆过程经过一系列无限接近平衡态的状态，且不存在热传导、气体的自由膨胀、扩散等过程。如果对一个过程，使系统恢复原状态一定会导致环境改变（能量耗散），则称之为 *Irreversible Process*。
- *Heat Engine* 是指各种利用内能做功的机械。
- *Efficiency of Heat Engine* 是一个循环内热机对外做功与其吸收的热的比值，即：

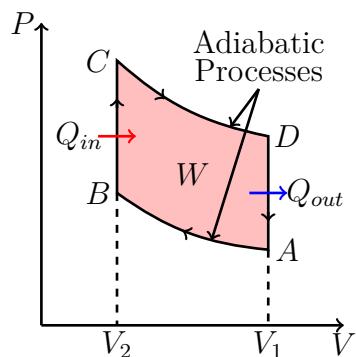
$$\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{W}{Q_{in}} = \frac{Q_{in} - Q_{out}}{Q_{in}}$$

Q_{in} 表示吸热， Q_{out} 表示放热，注意这里取的都是绝对值。

- *Perpetual Motion Machine* 是不需要物质与能量输入而可以永久向环境做功的热机，是无法实现的。第一类永动机试图寻找无能量消耗的热机，违反了能量守恒定律；第二类永动机则试图从单一热源取热并把它全部变为功，违反了热力学第二定律。

然后，我们来看两个经典的循环。

Otto Cycle 由两个等容过程与两个绝热过程组成，如图所示：

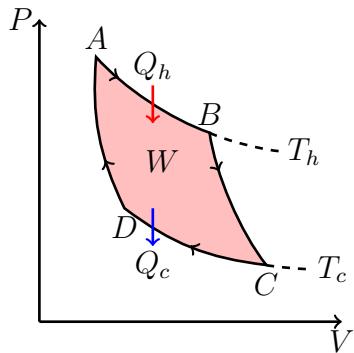


AB 与 CD 为绝热过程， BC 与 DA 为等容过程，循环沿 $ABCDA$ 方向进行

使用奥托循环的热机效率为 (*Prove 7.7~P 269*):

$$e = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$$

Carnot Cycle 由两个等温过程与两个绝热过程组成, 如图所示:



AB 与 CD 为等温过程, BC 与 DA 为绝热过程, 循环沿 ABCDA 方向进行时
为正方向

使用正卡诺循环的热机称为 *Carnot Heat Engine*, 其效率为:

$$e = 1 - \frac{T_c}{T_h} \quad (3)$$

其中 T_c 为低温热源的温度, T_h 为高温热源的温度⁽⁴⁾。

卡诺热机是所有热机中效率最高的, 它提高热机效率的手段为提高高温热源温度或降低低温热源温度。

如果倒转卡诺循环, 则得到卡诺冷机, 此时其制冷系数为:

$$e' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q_c}{W} = \frac{T_c}{T_h - T_c}$$

同样地, 其效率也是所有冷机中最高的。

7.6.2 Entropy

Entropy 的变化量被定义为可逆过程中热与温度的比值, 即:

$$\Delta S \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q_r}{T}$$

或写作微分形式, 即取近平衡态间转变的过程视为可逆过程:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

(3) 证明

见 *Prove 7.8~P 270*

(4) T_c 的下标 c 可理解成 cold, T_h 的下标 h 可理解成 heat。

由于定义中可逆过程的要求，熵是一个状态函数。它的物理意义可以从下面这个公式中体现：

$$S = k_B \ln \Omega$$

其中 Ω 表示所有可能的微观状态数量，也就是说，熵是系统可能的微观状态数量的度量，或者其他教材提到的“混乱度”。这个公式是连接微观与宏观间最重要的桥梁，也是统计力学的核心。

考虑一个 *Free Expansion* 过程，也就是说等温条件下气体向真空中膨胀。由于真空，气体自然无法做功， $W = 0$ ；由于等温， $\Delta U = 0$ ；那么由热力学第一定律，自然有 $Q = 0$ 。但是计算它的熵变，会发现这个值为

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_2}{V_1} > 0 \quad (5)$$

众所周知，自由膨胀过程是不可逆的，也就是说，它对应的 $\Delta S < 0$ 的逆过程是无法发生的。这正是 *Second Law of Thermodynamics* 所表明的。

(5)

见习题 7.6~P 139(b)

定理 7.3 Second Law of Thermodynamics

孤立系统的熵不可能减少：

$$\Delta S_{iso} \geq 0$$

在可逆过程中取得等号，熵保持不变；不可逆过程中熵一定增加。

这是热力学第二定律的本质，即熵增原理。此外热力学第二定律还有两种表述，所有表述之间相互等价。

定理 7.4 Second Law of Thermodynamics——Clausius Statement

热不可能自发的从低温物体传到高温物体。

或表述为：热不可能从低温物体传到高温物体，而不引起任何变化。

定理 7.5 Second Law of Thermodynamics——Kelvin Statement

不可能从单一热源取热，把它全部变为功而不产生其他任何影响。

或表述为：第二类永动机不能实现。

熵给出了热的本质 $\delta Q = T dS$ ，于是就有了下面的热力学基本公式：

$$dU = T dS - p dV$$

它联合了热力学的两大定律，是热力学最基本的关系之一。

7.7 *Third Law of Thermodynamics*

我们再看一下卡诺循环的热机效率 $e = 1 - \frac{T_c}{T_h}$ 。注意到当低温热源 $T_c = 0\text{K}$ 时，热机效率可以达到 100%。此时由于仍然是卡诺循环，我们并没有违反热力学第二定律，那么这是否意味着这是可行的呢？

Third Law of Thermodynamics 表明了这是无法实现的，因为我们无法找出一个温度为 *Absolute Zero* 的物体。

定理 7.6 Third Law of Thermodynamics

绝对零度无法达到。

或表述为：绝对零度下完美晶体的熵为 0。

热力学第三定律意味着我们可以确定熵的零点，即将完美晶体在绝对零度下的熵定义为 0。这样，我们就可以确定熵的绝对值了。

7.8 *Information*

本部分仅作简单介绍。

根据我们的经验，信息量与事件发生概率成负相关。必然发生的事件信息，比如“~~斑鸠~~的生日不在 2 月 30 日”，就相当于什么都没说。信息量 Q 之间服从加法原则，事件概率 P 则服从乘法原则，故两者应为负对数关系：

$$Q = -\log P$$

至于对数的底其实是任意的，彼此相差一个系数而已，通常选择的是 2。

至此，我们引出 *Information Entropy*\ *Shannon Entropy* 的概念，它是事件发生前可能产生的信息量的数学期望，即：

$$S = E(Q) = \sum Q_i P_i = -\sum P_i \log P_i$$

信息熵是信息的度量。

然后再来了解一下 *Cross Entropy*^{*}。对于某事件，假设其有两种概率分布为 $p(x)$ 与 $q(x)$ ，则其交叉熵为：

$$H(p, q) = - \sum p(x_i) \log(q(x_i))$$

两个分布的差距为其中一个事件的概率分布与信息熵之差乘积的数学期望，即：

$$D_{KL}(p||q) = - \sum p(x_i) \log\left(\frac{q(x_i)}{p(x_i)}\right) = H(p, p) - H(p, q)$$

仅当 p 与 q 分布完全一致时差距为 0，也就是说交叉熵刻画了两个分布的差距。在人工智能的逻辑回归中，其训练用的损失函数正是交叉熵损失函数。

7.9 课后习题：热力学

习题 7.1 Pressure — Solution 7.1 ~ P 341

In *state-of-the-art vacuum systems*, pressures as low as 1.00×10^{-9} Pa are being attained. Calculate the number of molecules in a 1.00m^3 *vessel* at this pressure if the temperature is 27°C .

习题 7.2 Ideal Gas — Solution 7.2 ~ P 341

The root-mean-square speed of molecules in air (mostly N_2) is comparable to the speed of sound in air (or in an ideal gas).

- (a) Using the equation of state of an ideal gas, calculate the *bulk modulus* (at temperature T), which is defined as:

$$B = \frac{\text{volume stress}}{\text{volume strain}} = -\frac{\Delta F/A}{\Delta V/V} = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}$$

- (b) Recall that the speed of sound in a fluid $v = \sqrt{B/\rho}$ depends on the elastic and inertial properties of the fluid, where B is the bulk modulus and ρ is the density of air. Express the speed of sound waves in terms of molecular mass m , temperature T , as well as the Boltzmann's constant k_B .
(c) In fact, the speed of sound has an additional factor of $\sqrt{\gamma}$, where γ is the *adiabatic index* ($\gamma = 7/5 = 1.400$ for *diatomic molecules* at room temperature). Compute the result in (b) at room temperature (The molar mass of air is 29g/mol).

习题 7.3 The Van Der Waals Gas —Solution 7.3~P 343

The van der Waals equation of state is as follows:

$$(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = nRT$$

- (a) Calculate the *isothermal compressibility* of the van der Waals gas in terms of (V, T) and determine the high-temperature limit. How does this result compare to that for an ideal gas?

Hint: The isothermal compressibility κ_T is defined through $\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$

- (b) The van der Waals equation possesses a so-called critical point, where

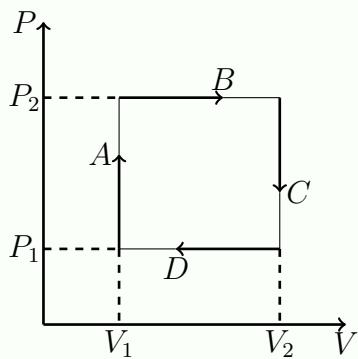
$$\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_T = 0$$

Determine the critical pressure p_c , the critical volume V_c and the critical temperature T_c . What is the behavior of κ_T at the critical point?

- (c) Use the expressions for V_c , p_c , and T_c in the van der Waals equation of state and show that it assumes a simple form independent of a and b when T, V , and p are measured in terms of T_c , V_c , p_c , i.e., when expressing the van der Waals equation in terms of T/T_c , V/V_c , p/p_c .

习题 7.4 Heat and Work —Solution 7.4~P 345

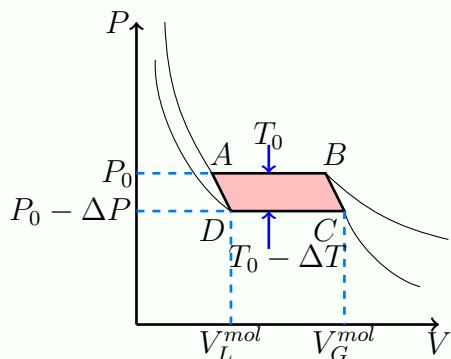
An ideal *diatomic* gas, in a *cylinder* with a movable *piston*, undergoes the rectangular cyclic process shown . Assume that the temperature is always such that rotational degrees of freedom are active, but vibrational modes are “frozen out.” Also assume that the only type of work done on the gas is *quasistatic* compression-expansion work.



- (a) For each of the four steps A through D , compute the work done on the gas, the heat added to the gas, and the change in the internal energy of the gas. Express all answers in terms of P_1 , P_2 , V_1 , and V_2 .
- (b) Compute the net work done on the gas, the net heat added to the gas, and the net change in the internal energy of the gas during the entire cycle. Are the results as you expected? Explain briefly.

习题 7.5 Carnot Cycle —Solution 7.5~P 347

For a van der Waals gas, its equation of state implies a phase transition between liquid and gas below a critical temperature T_c : In the $P - V$ phase diagram, the *isothermal line* for a given temperature $T_0 < T_c$ is not *monotonically* decreasing with respect to V , but a constant function of V in some region (see the figure). This region corresponds to a phase transition from liquid to gas state (with a volume change from V_L^{mol} to V_G^{mol}), and the mole *latent heat* is L for the transition. Suppose we use 1 mole of this van der Waals gas/liquid mixture as the *medium* for a Carnot cycle operating between the high temperature T_0 and the low temperature $T_0 - \Delta T$ — which are connected by two *adiabatic processes* $D \rightarrow A$ and $B \rightarrow C$. The pressure in the flat region changes from P_0 to $P_0 - \Delta P$ when the temperature changes from T_0 to $T_0 - \Delta T$.



- (a) Specify the heat transfer and work done in each process of $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$, $C \rightarrow D$, and $D \rightarrow A$ in such a Carnot cycle. Here, we assume that the volume change in $B \rightarrow C$ and $D \rightarrow A$ is negligible.
- (b) Calculate the total work done to the environment for this Carnot cycle and express its efficiency ϵ from $\epsilon = W/Q_H$. where W and Q_H is the total work output in the cycle and the heat input at the high temperature, respectively.
- (c) For a Carnot engine with efficiency $\epsilon = 1 - \frac{T_C}{T_H}$, verify the *Clapeyron equation* :

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T(V_G^{\text{mol}} - V_L^{\text{mol}})}$$

for the liquid/gas mixture.

习题 7.6 Entropy — Solution 7.6 ~ P 351

I – P134 引

Consider the Carnot cycle operating with a hot and cold heat baths whose temperatures are T_h and T_c ($T_h > T_c$), respectively. Working *substance* means the gas in the engine, and we consider a gas in general for the working substance.

- (a) Suppose the amount of heat exchange during the *isothermal process* with the hot (cold) heat bath is Q_h (Q_c), and determine the entropy change ΔS_h and ΔS_c of the working substance in the respective process. Then, specify ΔS_h and ΔS_c are positive or negative. Here, take the positive sign of Q_h and Q_c for the heat input from the heat bath to the working substance.
- (b) Now we use an ideal gas as the working substance and consider a free

expansion process. Suppose the initial temperature of the gas is T_i and the volume of the gas increases from V_i to V_f . Determine the heat input Q_{fe} and the entropy change ΔS_{fe} of the working substance through the free expansion process.

(c) By replacing a *quasi-static* isothermal expansion process in the Carnot cycle by a free expansion process, it seems that it is possible to construct a cycle with a single heat bath. Does this fact *violate* the second law of thermodynamics? Answer by yes or no, then explain your answer using the case of the Carnot cycle.

8

Electromagnetism

从电磁学开始，即为普通物理学 II(H) 的内容。首先请相信一点，这一章将会是整个课程中最重要的一章，也是整个课程中时间最长、考试占比最高的一章（无论期中还是期末）。所以请务必课上认真听讲并及时与同学交流。

8.1 *Introduction*

电磁学的重要基础是麦克斯韦方程组，简单的四个公式将电与磁的性质展现地一览无余。当然，你们可能还不知道具体公式如何理解，但我们预先给出方程形式，希望各位在本章节一直认识到它的存在：

定理 8.1 *Maxwell's equations*

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{(真空中)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \text{(真空中)}$$

在上述公式中， ∇ 表示微分算子， E 、 B 表示电场强度和磁感应强度， ρ 表示电荷密度， J 表示电流密度， ε_0 、 μ_0 分别表示真空介电常数和真空磁导率， c

表示光速。

另外作为额外补充，我们简单介绍一下麦克斯韦方程组的一些内容。

- ∇ 为微分算子，在三维空间中， $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$
- ∇ 直接作用于函数 F ，表示为对函数求梯度， $\nabla F = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$
- ∇ 以点乘形式作用于函数 F ，表示散度，物理意义上，散度表征了场的有源性。
- ∇ 以叉乘形式作用于函数 F ，表示旋度。

最后我们默认一些中学物理知识，此处不多赘述：

- *Coulomb's law*: $F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$
其中 k 为常数，一般将库仑定律公式写成 $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$ ，其中 ϵ_0 是真空介电常数
- 点电荷的电场强度： $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$
- 点电荷形成的电场电势： $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$ (以无穷远处为 0 电势)
- 电荷在电场中受力： $\mathbf{F} = \mathbf{E}q$
- 电场电势能： $U = \varphi q$

电磁学部分共有四个基本矢量，分别为：

场	场量	符号	单位
电场	电场强度	\mathbf{E}	V/m
	电通量密度（电位移矢量）	\mathbf{D}	C/m^2
磁场	磁通量密度（磁感应强度）	\mathbf{B}	T
	磁场强度	\mathbf{H}	A/m

我们将会在之后逐个讲解相关矢量。

8.2 Fundamentals of Vector Analysis*

第一节我们看到，麦克斯韦方程组是矢量微分方程。作为补充，我们简要介绍一些矢量分析的相关内容。考试不涉及该部分。

对于一般的空间矢量，我们已经了解到其线性运算以及叉乘和内积运算法则。作为约定，我们在本小节中出现的矢量 \mathbf{a} 均代表单位方向矢量。

8.2.1 Spatial coordinate systems

一般而言，我们最常用的坐标系是空间直角坐标系（也被称为正交坐标系）。坐标系的基矢量为 $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ 。在右手坐标系下满足以下关系式：

$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y$$

这三个等式是相互蕴含的关系。且三个方向矢量相互正交，模长为 1。在电磁学中，经常需要计算线积分、面积分和体积分，也就需要将相关的线、面、体积的微分变化转换为坐标的微分变化。

假设坐标为 $u_i, i = 1, 2, 3$ ，也许这个坐标并不是长度，我们需要一个度量系数将坐标的微分与线的微分联系起来，即：

$$dl_i = h_i du_i$$

因此，任意长度的微分变化为：

$$d\mathbf{l} = \mathbf{a}_{u_1}(h_1 du_1) + \mathbf{a}_{u_2}(h_2 du_2) + \mathbf{a}_{u_3}(h_3 du_3)$$

体积元可表示为：

$$dv = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$$

而面积元的表示需要注意一点的是，由于经常需要计算通量，通量必须垂直于面，因此我们的面微元需要垂直于平面的方向。在这一前提下，垂直于单位矢量 \mathbf{a}_{u_1} 的面积元可表示为：

$$ds_1 = dl_2 dl_3 = h_2 h_3 du_2 du_3$$

在另外的两个方向上也类似于上述表达式，读者可自行类比。一般而言，我们常用的坐标系是笛卡尔直角坐标系、柱坐标系和球坐标系。直角坐标系的运算我们默认读者已经熟悉。

在柱坐标系中， $(u_1, u_2, u_3) = (r, \phi, z)$ 。其中角度 ϕ 从 x 轴正方向开始度量，单位矢量 a_ϕ 与圆柱相切：

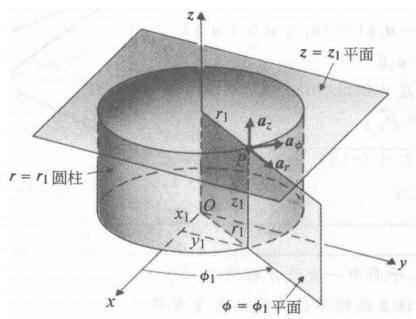


图 8.1: 柱坐标系

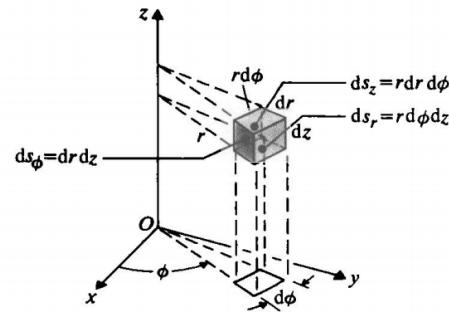


图 8.2: 柱坐标系下的微元

柱坐标系下，矢量表示为 $\mathbf{A} = a_r A_r + a_\phi A_\phi + a_z A_z$ 。

柱坐标系下，线元表示为：

$$dl = a_r dr + a_\phi r d\phi + a_z dz$$

面元和体积元表示为：

$$ds_r = r d\phi dz \quad ds_\phi = dr dz \quad ds_z = r dr d\phi$$

$$dv = r dr d\phi dz$$

柱坐标系和直角坐标系的基变换中，若 $\mathbf{A} = a_r A_r + a_\phi A_\phi + a_z A_z = a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z$ ，则满足以下等式：

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$x = r \cos \phi \quad y = r \sin \phi \quad z = z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \phi = \arctan \frac{y}{x} \quad z = z$$

在球坐标系中， $(u_1, u_2, u_3) = (R, \theta, \phi)$ 。其中基矢量 a_ϕ 与柱坐标系一致， a_θ 位于 $\phi = \phi_0$ 平面上并与球面相切。

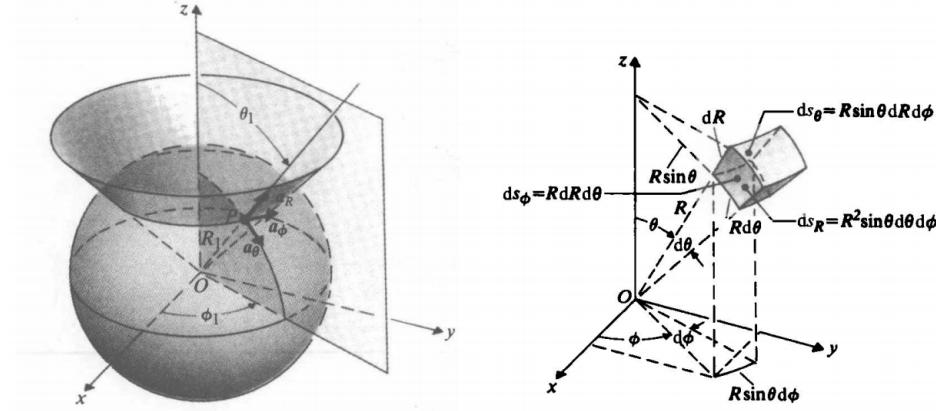


图 8.3: 球坐标系及其微元

球坐标系下，矢量表示为 $\mathbf{A} = \mathbf{a}_R A_R + \mathbf{a}_\theta A_\theta + \mathbf{a}_\phi A_\phi$ 。

球坐标系下，线元、面元和体积元表示为：

$$d\mathbf{l} = \mathbf{a}_R dR + \mathbf{a}_\theta R d\theta + \mathbf{a}_\phi R \sin \theta d\phi$$

$$ds_R = R^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad ds_\theta = R \sin \theta dR d\phi \quad ds_\phi = R dR d\theta$$

$$dv = R^2 \sin \theta dR d\theta d\phi$$

球坐标系和直角坐标系的转换关系为：

$$x = R \sin \theta \cos \phi \quad y = R \sin \theta \sin \phi \quad z = R \cos \theta$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad \phi = \arctan \frac{y}{x}$$

8.2.2 Gradient, divergence, curl

梯度、散度和旋度都是场矢量的重要衡量指标。这之中最重要的便是微分算子，其定义为：

$$\nabla \equiv (\mathbf{a}_{u_1} \frac{\partial}{h_1 \partial u_1} + \mathbf{a}_{u_2} \frac{\partial}{h_2 \partial u_2} + \mathbf{a}_{u_3} \frac{\partial}{h_3 \partial u_3})$$

梯度大家应该很熟悉了，它表征了一个标量函数 $V(x, y, z)$ 的空间最大变化率，梯度是一个矢量，方向为标量增加率最大的方向：

$$\nabla V = \mathbf{a}_n \frac{dV}{dn} = \mathbf{a}_{u_1} \frac{\partial V}{h_1 \partial u_1} + \mathbf{a}_{u_2} \frac{\partial V}{h_2 \partial u_2} + \mathbf{a}_{u_3} \frac{\partial V}{h_3 \partial u_3}$$

最后一个等号是广义正交曲线坐标系下的表示。在坐标系部分我们可以发现，当使用笛卡尔空间正交坐标系时，度量系数均为 1，下同。

矢量场是与位置和时间有关的物理量 $V(u_1, u_2, u_3, t)$ 。我们中学经常用有向箭头表示矢量场，并且关注其密度或长度。场的强度由通过单位大小面积的通量衡量，通量类似于不可压缩流体。

矢量场 A 的散度定义为包围该点的体积趋于 0 时，单位体积内流出的 A 净通量，用 $\text{div}A$ 表示：

$$\nabla \cdot A = \text{div}A = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint A \cdot ds}{\Delta v}$$

在广义正交曲线坐标系下：

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$$

当且仅当 A 点处有 *source* 时， $\nabla \cdot A > 0$ ；当且仅当 A 点处有 *sink* 时， $\nabla \cdot A < 0$ 。

散度定义的源是流量源，另外一种是漩涡源，用旋度表征，它引起矢量场的环流。矢量场 A 的旋度定义为面积趋于 0 时单位面积上的最大净环流，方向为净环流最大时面积的法线方向：

$$\nabla \times A = \text{curl}A = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} [\mathbf{a}_n \oint A \cdot dl]_{max}$$

在广义正交曲线坐标系下：

$$\nabla \times A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} a_{u_1} h_1 & a_{u_2} h_2 & a_{u_3} h_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

8.2.3 Vector identities and related theorems

首先我们必须明确，三个矢量的内积连乘 $A \cdot B \cdot C$ 是没有意义的。

定理 8.2 矢量等式

标量三重积： $A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B)$

矢量三重积： $A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$

任意标量场的梯度的旋度恒等于 0（恒等式 1）： $\nabla \times \nabla A = 0$

任意矢量场的旋度的散度恒等于 0 (恒等式 2): $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

其中标量三重积的结果是由三个矢量张成的空间中的六面体的体积 (由于使用了叉乘, 因此务必注意叉乘的顺序以及结果的正负号)。对于后两个恒等式, 各自有一个等价的表述:

恒等式 1 等价于: 如果一个矢量场的旋度为 0, 则该矢量场可以表示为一个标量场的梯度。例如电势与电场的关系。

恒等式 2 等价于: 如果一个矢量场是无散的, 那么它可以表示为另一个矢量场的旋度。例如矢量磁势 (本课程不涉及) 与磁场的关系。

定理 8.3 相关定理

- 散度定理: 矢量场的散度的体积积分等于该矢量穿过包围该体积的封闭面流出的总通量, 即:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

- 斯托克斯定理: 矢量场的旋度在一开放曲面上的积分等于该矢量沿包围该曲面的包面的闭合线积分, 即:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot dl$$

- 亥姆霍茨定理 (刻画电磁场唯一性的基本定理): 如果一个矢量场的散度和旋度处处唯一确定, 那么这个矢量场就确定, 最多附加一个常量。亦可表述为: 一个矢量场可以分解为一个有散无旋场和一个有旋无散场的叠加。

8.3 Gauss' law

我们先假定在真空中的理想情况。对于存在介质的情况会在之后说明。

首先让我们将目光聚集在麦克斯韦方程组的第一个公式。介绍这个公式之前, 我们先定义通量和散度、旋度的直观概念。在上一节我们已经看到, 散度和旋度可以使用散度定理和斯托克斯定理转化为积分形式。它们的对应结果如下:

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \quad \oint \mathbf{v} \cdot dl \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases}$$

散度对应的表达式 旋度对应的表达式

$d\mathbf{A}$ 的方向定义为平面法向量的方向，从内表面指向外部。根据麦克斯韦方程，在静电场中，若包面内部有电荷存在，则散度的结果必定不为 0；而静电场的旋度永远为 0。

高斯定理即为第一个方程的积分形式，我们给出结论：

定理 8.4 Gauss' law — Prove 8.1 ~ P 279

假设 \mathbf{E} 表示电场， $d\mathbf{A}$ 是对于面积的微元，其方向与平面法向量方向平行。

ϵ_0 是真空介电常数。则有：

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{\sum q_{in}}{\epsilon_0}$$

左边为散度的积分，表征为通过某一包面的电场的向外的通量的总代数和， $\sum q_{in}$ 表示该包面内部包含的电荷总数的代数和。

高斯定理表明，真空中任意闭合面上，电场强度的总向外通量等于其包围的电荷的代数和与真空介电常数的比值。这巧妙地将电荷数与电场强度结合在一起，从而简化了电场叠加所需的积分步骤。一般而言，这种简化在面对具有一定对称性的电场时最为简便，以下为电场求解的基本思路：

1. 取一个高斯面，这个面可以是球形、圆柱形等等。
2. 获取该高斯面内部包含的电荷量，并列写高斯定理表达式。
3. 根据电场与选定高斯面的关系（例如垂直、平行等），写出积分结果
4. 化简结果，求出电场强度

另外，我们给出一些具体的例子，这些推导很简单，读者需要重点领悟其中的方法，不需要记忆公式。

- 无限长直导线周围的电场：方向：垂直于导线延伸方向。

设导线上电荷密度为 λ (单位长度的电荷量), 取长度为 h , 半径为 r 的圆柱面包围导线, 则有:

$$E \cdot 2\pi rh = \frac{h\lambda}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

- 无限大带电平板周围的电场: 方向: 垂直于平板平面的方向。

设平板上电荷密度为 σ (单位面积的电荷量), 取一个立方体垂直穿过该平面, 则有:

$$E \cdot 2A = \frac{A\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

- 类似的, 我们可以得到均匀带电的圆球壳内部和周围的电场大小为:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

- 均匀带电球体的内部和周围的电场大小为:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R \\ \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & r < R \end{cases}$$

这个表达式与质量均匀的球体内部周围的万有引力表达式有异曲同工之妙, 是一个正比例函数和幂函数构成的分段函数, 其在 $r > R$ 范围中与均匀带电球壳的表达式完全相同。

与库仑定律相比, 二者具备相同的含义。但高斯定理有一些优点:

- 提供了一种更简单的方法用于计算高度对称的电场。
- 在高速移动的电荷的情况下依然有效。
- 更清楚地说明电场和磁场的关系。
- 可推导出库仑定律。

8.4 Electric Potential

讨论过第一个公式之后，我们转向另一个与电场有关的公式：

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

为了简化分析，我们先针对静电场讨论。很明显，静电场中等式右边为 0。即表示沿着静电场线任意围绕一圈的积分结果为 0。这一特征表明电场是一个保守场（无旋场），因此我们定义物理量电势，一般用 V 表示。

定理 8.5 电场的功能关系与电势

利用电场强度与力的关系可知，电场做功与电势能的变化的表达式为：

$$\Delta U = -W = - \int_a^b q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

电场是保守场，电场做功与路径无关，静电场中不存在环形电场。

消去外加电荷这一变量，即为电势的物理量：

$$\Delta V = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

进一步地，电势的下降最快的方向即为电场的方向，在每个方向上的电场大小等于电势的负偏导，而电场矢量即为电势的负梯度：

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

电势的大小与电荷无关。通常我们将无限远处电势设为 0，则在点电荷形成的电场中，我们对于其中任意一点 a ，都可以得到它的电势为：

$$V_a - V_\infty = - \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \Rightarrow V_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

电场的电势在数值上也可以视为将单位带正电的点电荷从电场中某一点移动到无限远处，电场力所做功的大小。

当然，我们更希望了解多个点电荷构成的系统的总电势，让我们先从两个点电荷开始，如下图所示。

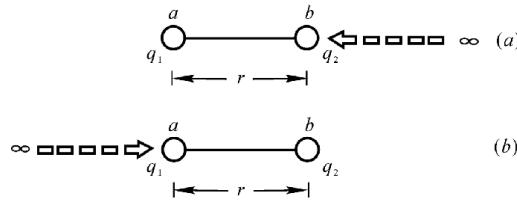


图 8.4: 电荷系统示意图

我们做如下考量:

1. 首先, 将电荷 a 从无限远处移入系统并固定在一个地方, 电荷 b 不进入系统中。这时 a 的位置不影响系统势能, 系统势能大小为 0 (单个电荷并没有受到电场力作用, 我们并没有对它做功, 也就不存在势能变化)
2. 接着我们将 b 从无限远处移入电场中至与点电荷 a 距离为 r, 这时存在电场力作用, 我们需要对这个点电荷做功, 其大小为 $W = q_2 V_2$, 即电荷 b 的带电量与在 b 点的电势的乘积
3. 等效地, 我们也可以先把 b 点移入系统, 再把 a 点移入电场。由于势能是状态量, 我们可以知道对于系统总势能 U , 有:

$$U = q_1 V_1 = q_2 V_2 \Rightarrow U = \frac{1}{2} (q_1 V_2 + q_2 V_2)$$

定理 8.6 多点电荷系统总势能

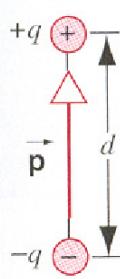
类似地, 我们可以推广到多个点电荷系统的总势能:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i \Rightarrow U = \frac{1}{2} \int q dV$$

8.5 Electric Dipole

8.5.1 Electric dipoles and their properties

我们接下来补充介绍一种特殊的电学系统: 电偶极子。电偶极子由两个带有相同大小、不同电性的两个点电荷构成, 点电荷之间的距离为 d 。其示意图如下:



电偶极子的电学性质一般用 *electric dipole moment* 描述, 定义为:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}$$

电偶极矩是矢量, 方向定义为从带负电的点电荷指向带正电的点电荷。

对于一个电中性系统, 总会存在正电中心和负电中心。因此此时的电偶极矩方向是由负电中心指向正电中心, 例如H₂O, 水分子的电偶极矩方向是从氧原子中心指向两个氢原子球心连线的中点。

我们将会针对电偶极子运用前文阐述的理论, 并探究电偶极子的性质。为方便讨论, 我们约定采用电偶极子中两个点电荷连线的中心点作为坐标系原点。需要注意的是, 该部分的记忆应当着重关注其中使用的近似化简技巧。下面我们将给出结论:

定理 8.7 Properties of electric dipoles —Prove 8.2 ~ P 280

对于如下的电偶极子系统:

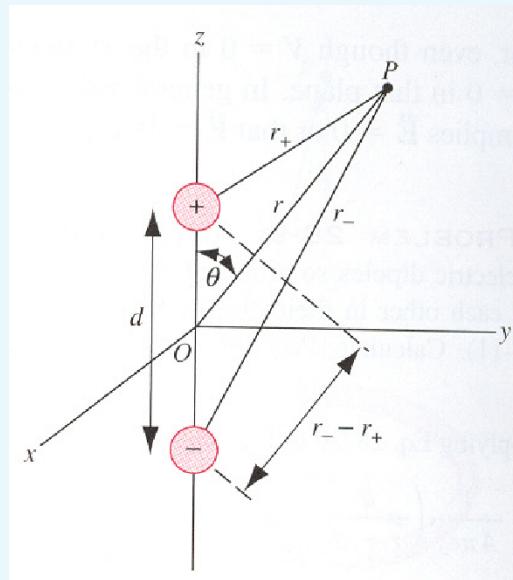


图 8.5: 电偶极子系统示意图

- 系统中 P 点的电场:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [-\mathbf{p} + 3 \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})\mathbf{r}}{r^2}]$$

特别地, 当 p 点在 z 轴上时: $\mathbf{E}_p = \frac{\mathbf{p}}{2\pi\epsilon_0 r^3}$

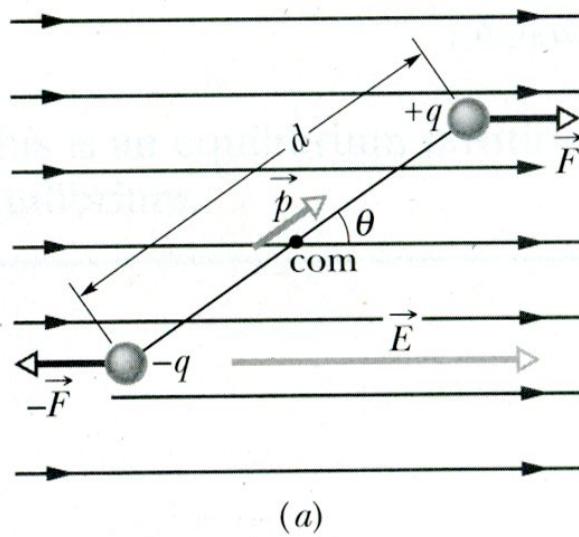
当 p 点在 y 轴上时: $\mathbf{E}_p = -\frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

- 系统中 P 点的电势:

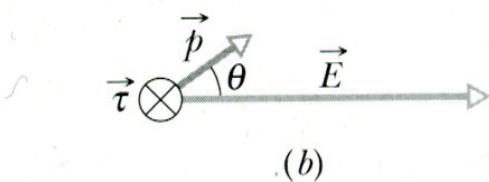
$$V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

通过上述结论我们可以发现, 电偶极矩在表示电偶极子相关性质的过程中具有重要作用。

除了电偶极子产生的电场和电势, 作为一个带电体, 我们也希望了解一下电偶极子在电场中的情况。理想情况下, 我们假定为外加的匀强电场, 如下图所示:



(a)



(b)

图 8.6: 电场中的电偶极子

首先受力分析，电偶极子受到的电场力有且仅有两个点电荷受到的力，这两个力大小相等、方向相反。因此我们能够得到：

$$\sum \mathbf{F} = (q^+ + q^-) \mathbf{E} = 0$$

在两个力的作用下电偶极子没有平动产生，但依然处于不平衡状态，它将会围绕中心点旋转。在旋转动力学中我们定义力矩来描述这一种旋转运动，我们将这个物理量使用到此处的分析中以计算系统的总力矩：

$$\tau = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 2 \frac{\mathbf{d}}{2} \times q \mathbf{E} \Rightarrow \tau = (dq) \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

受力有了之后，在电场中电偶极子也具有一定的能量。这是很显然的，例如在上面的示意图中，如果除了电场力而没有其他力的作用，电偶极子很明显会在电场中做往复运动以至于产生特定频率的振动。我们继续探究电偶极子具有的能量。

分析受力可以发现，当 $\theta = 0$ 时电偶极子的能量最低，当 $\theta = \pi$ 时电偶极子的能量最高。我们规定当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时电偶极子的能量为 0，由力与能量的关系可以得到：

定理 8.8 Energy of an electric dipole

电偶极子系统的能量为：

$$U = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \tau \cdot d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} p E \sin \theta \, d\theta \Rightarrow U = -p E \cos \theta = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

8.5.2 Summary of electric dipoles

上面我们针对电偶极子这一特殊物理量，分析了它的电场、电势以及在匀强电场中的受力情况和能量情况。结合上面的结论我们可以看到，对于这一特殊的物理系统，电偶极矩始终是描述这些性质的重要物理量。因此对于电偶极子，我们很少讨论具体的受力和能量，而一般用电偶极矩描述它的性质。

同时，上述内容中对于电偶极子的电场和电势的计算给出的详细的计算过程，证明过程可能涉及到考题内容，学习技巧在于领会一些近似算法和等式，并充分理解上述结论。

类似地，在磁学部分有与之存在对偶关系的磁偶极子，我们预先提示读者，后续部分届时将捎带简略地介绍。

8.6 Conductors and Equipotential Surface

下面我们不加证明地给出等势面的一些性质，这与中学物理是一致的：

- 等势面是电场中具有相同电势的所有点连成的面
- 在电场中，电场线处处垂直于等势面
- 利用等势面和电势的状态函数属性，我们能够通过等势面表示的电势大小迅速计算电势差

当导体处于自然状态时，导体是一个电中性体。而当导体放入电场中时，其中的电子运动将导致导体内部产生电场与外加电场抵消。当导体在电场中处于稳定状态时，利用前文所述的公式我们可以发现如下性质：

- 导体是一个等势体，导体中的任何点处的电势均相等，导体内部电场处处为 0。这是因为假如电场不为 0，则必然会有电子运动，这将导致导体不是稳定状态。
- 导体表面的任何电场线均垂直于导体表面，即导体表面的电场没有沿着导体表面切面的分量。否则，电子将会在导体表面移动，这与稳定状态的假设也是不符的。
- 导体内部的电荷数为 0，所有电荷均分布于导体表面。这一点可通过高斯定理说明：

$$q_{in} = \varepsilon_0 \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = 0$$

- 表面电场强度和电荷密度成正比。对于导体与真空的界面，我们在表面取一个很小的高斯面，利用高斯定理可得：

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \mathbf{E} \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

或者也可以假想一个球形带电体，我们有：

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{q}{R^2} \right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

- 对于有内腔的导体，我们应用高斯定理可知它的内部没有电场。当导体空腔内部没有电荷存在而导体处于电场中时，导体内部的电子受到电场力的

作用而运动，使得外加电场和导体电子移动产生的电场抵消。系统稳定后空腔内不存在任何电场，这被称为 *Electrostatics Shielding*。导体连同空腔中的电势均相等。

- 对于有空腔且空腔内部存在电荷的情况时，空腔内部存在电场，导体部分不存在电场，导体外部存在由于空腔内部电荷产生的电场。导体内表面和外表面的导体部分电势相等。

最后我们给出等势面上电荷密度与曲率半径的关系公式，该结论可通过高斯定理结合上述推论共同给出：

定理 8.9 导体表面电场与曲率半径的关系—*Prove 8.3 ~ P 281*

对于等势体，其内部电场为 0，但表面电荷密度（电场强度）与曲率半径成反比。即：

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

或表示为：

$$\sigma \propto \frac{1}{R}$$

这表明：对于一个带电导体的表面，越尖锐的地方会聚集越多的电荷并产生越大的电场。

8.7 Capacitance and Capacitor

8.7.1 Definition and Calculation

电容器是由两个平板构成的能够储存电场能量的电气元件，其重要的物理量参数是电容。电容器的两个平板的形状无论如何，都被称为电容器的 *plate*。

定义电容器的电容是其每个板上带有的电荷与两个板间电压的比值，即：

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

我们以平行板电容器为例简单说明公式中的物理量：

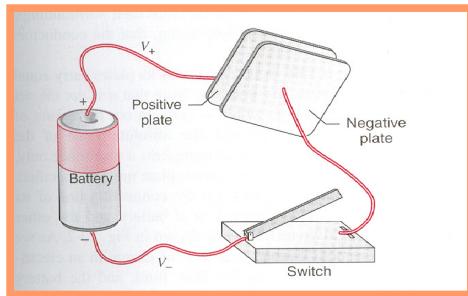


图 8.7: 电容器示意图

在左图所示的情况下，电容器两端接到电源两端，使得电容器的两极板间产生电势差。因此定义式中的 V 表示极板间的电势差。另外，由于本身系统电荷代数和呈现中性，所以正极板上带有的正电荷与负极板带有的负电荷相等。因此定义式中的 q 表示其中任意一个极板上带有的电荷量的绝对值。(而并非两个极板的电荷量之和)

电容是物质本身产生的性质。它取决于电容器板的形状、尺寸、板间距和两极板间空间中填充的物质，而与带电量和极板间电势差无关。电容的国际制单位是 Farad (法拉)，用 F 表示。

下面给出计算任意电容器电容的一般步骤：

- 假设两极板间带电，带电量分别是 $\pm q$
- 利用已知或高斯定理等方法求解出两极板间空间中的电场强度大小 E
- 计算正负极板间的电势差，利用公式：

$$\Delta V = V_+ - V_- = \int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

- 列写电容的定义式并带入上述得到的等式求解

不加证明地，下面给出一些结论，以下结论均可以通过上述步骤推导，建议读者自行推导练习：

- Parallel Plate Capacitor:*

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

- Cylindrical Capacitor:* 我们假设圆柱轴共轴，小圆柱和大圆柱半径分别为 a, b ，长度为 L 。电容的部分是两个圆柱体之间的部分。

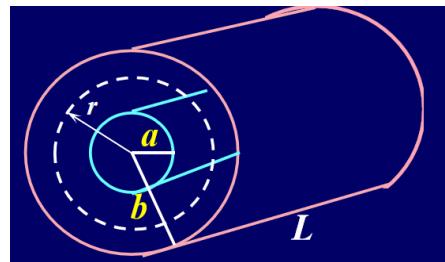


图 8.8: 圆柱形电容器

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

- *Spherical Capacitor :*

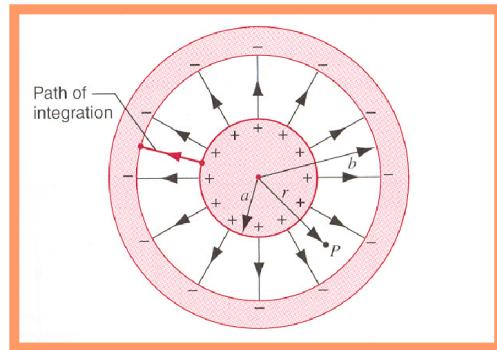


图 8.9: 球形电容器

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

8.7.2 Properties of capacitors

电容的性质部分，我们主要介绍由于电容串并联或插入导体导致的电容变化，以及电容的储能性质。

对于单纯的电容组成的一小段电路，会存在串并联现象。对于串联电容，我们可以知道相邻电容板的带电量的大小相同（包括同一个电容的两个板以及不同电容之间被导线连接的板），这可以根据电荷守恒得到。对于并联电容，我们可以知道两个（或以上）电容两端的电压相等。

对于中间插入导体的电容，我们可以将其视为两个小电容的串联。或者说对于任意形状的电容，我们可以通过微元的方法将其视为电容的串并联结构，在空间上，这种结构可以表示为电容间的空间的加和。

使用前面介绍的电容推导方法，我们不加证明地给出整体电容的计算表达式：

定理 8.10 电容的性质

对于并联电容： $C = \sum C_i$

对于串联电容： $\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}$

对于加入导体的平行板电容：设导体厚度为 t ，极板间距为 d ，极板正对面积为 S ，则最终电容为：

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d - t}$$

此外，电容也是能量储存元件。电容通过电荷以及其产生的电场储存能量。我们将电场能考虑为移动电荷需要克服电场力做的功，利用定义式我们可以知道：

定理 8.11 电容的储能性质

电容储存的能量为：

$$U = \int_0^U dU = \int_0^q q dV = \int_0^q q d(q/C) = \frac{q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{1}{2}qV$$

而另外地，我们也可以利用电场强度的方向考虑电场能。下面以平行板电容器为例说明：

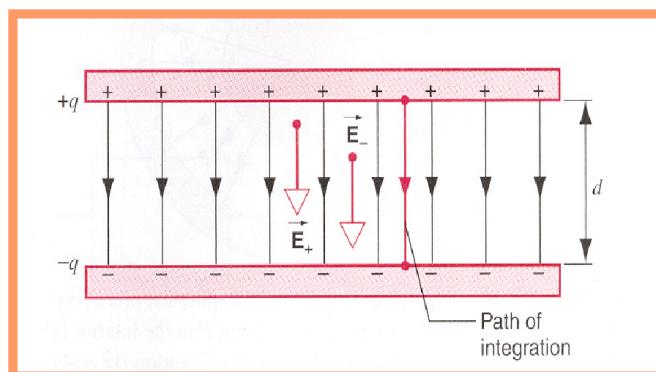


图 8.10: 平行板电容器

我们在上面的推导式中已经知道这种电容器的表达式为: $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$, 所以:

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 A} \Rightarrow U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{q}{\varepsilon_0 A}\right)^2 Ad = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \Omega$$

这里一定注意, 我们利用新的字符定义: $\Omega = Ad$, 这个物理量表示的含义是两极板间空间的体积。利用这个定义, 我们继续定义电场的能量密度:

定理 8.12 电容中电场的能量密度

电容中电场的能量密度定义为电场能相对于电容间体积的密度, 即:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

电场的能量密度仅与电场强度以及介质有关。

8.8 *Polarization of The Dielectric*

我们需要首先说明的是, 极化部分的推导可能略显复杂且新定义的符号较多。但同时这一部分也是考试的重点之一。为了便于读者理解含义, 我们将不时的进行一些规律的提醒, 读者需要注意从中提取规律并实现理解和记忆。另外我们特别提醒读者注意该部分的定义及定义式。为了便于讲解, 其中的推导过程将不再在证明部分给出, 而选择随同该内容同步介绍。

我们在导体中已经知道, 导体在外加电场作用下的内部电场强度为 0。而自然界中存在一些不是导体的物质, 在电场作用下依然会产生一些效应。

8.8.1 *Definition of Polarization*

当一个非导体极化时, 由于此时含有的是束缚电荷, 并不能够像导体一样通过移向导体表面从而生成感应自由电荷以抵消外部电场的影响。外部电场施加的作用力导致正负电荷微小位移产生感应电偶极子。即使没有外部电场, 部分介质本身也有极化粒子。此时若施加外加电场, 电偶极子在电场的作用下将会调整方向, 从而呈现同向排列的特性。这两部分分别被称为感生电偶极矩和电子位移极化, 其中后者在高频场中作用明显。

此时的物质内部将会产生一个与原电场方向相反的电场, 但电偶极子无法随意移动, 使得物质内部叠加的总电场强度不为 0。我们称此时的现象叫做

Polarization.

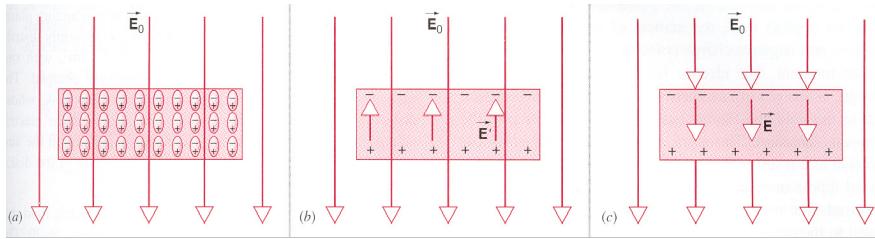


图 8.11: 极化的宏观效应

这里外加电场为 E_0 , 由于极化现象产生的电场为 E' , 因此此时物质内部的总电场为:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$$

为了描述这种在电介质中电场的削弱效应, 我们定义无量纲的常数来表示叠加电场和外加电场的关系:

定理 8.13 Relative dielectric constant

我们定义 *relative dielectric constant* 表示这种关系, 该关系满足:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_r} \mathbf{E}_0$$

relative dielectric constant 除了写作 ε_r , 有时也写作 κ_e 。一般的, 常数 $\varepsilon_r > 1$

注意, 由于课程内容的深度限制, 这里的常数的定义没有严谨的计算与证明, 仅仅是依据两个电场的正比例关系而定义。该常数与物质本身有关。

另外, 我们也可以从微观角度分析:

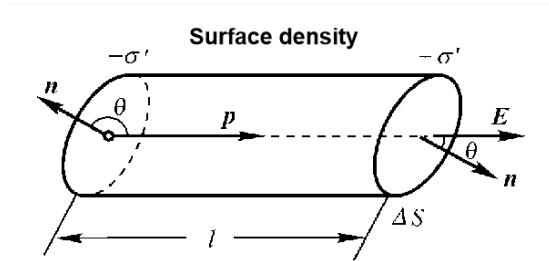


图 8.12: 电极化率示意图

在微观表达中, 极化电场是由于无数电偶极子的方向的规律排列产生的, 因此利用电偶极子进行分析是必要的。

我们知道电偶极矩为 $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$, 在这里定义极化矢量(也称为极化强度):
 $|\mathbf{P}| = \frac{|\sum \mathbf{p}_i|}{\Delta V}$, 如上图所示, 这个密度是关于体积的密度。

在实验中已经证明:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_{in} \quad \chi_e \text{ 被称为电极化率, } \mathbf{E}_{in} \text{ 为导体内部电场}$$

按照示意, 我们圈定一个空间, 其中的电荷视为分布在两个表面的电荷, 并定义电荷密度(正负电荷密度相等)。这个物体是一个斜圆柱体。按照我们的约定, 对于电偶极矩的密度, 我们有:

$$|\sum \mathbf{p}_i| = \sigma' \Delta Sl \quad |\mathbf{P}| = \frac{|\sum \mathbf{p}_i|}{\Delta V} = \frac{\sigma' \Delta Sl}{\Delta Sl \cos \theta}$$

因此:

$$\sigma' = |\mathbf{P}| \cos \theta = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad \mathbf{n} \text{ 是两个平面的单位法向量}$$

(1) 相应地, 可以得到
 $q' = \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A}$ 以及等价的散度表达式
 $\nabla \cdot \mathbf{P} = \rho'$

8.8.2 Gauss' Law For Dielectric and it's Application

了解极化的简单定义后, 我们在电场中运用前面的定理探究极化的特点。一般情况下, 我们只需要了解前文中的常数 ε_r , 而不需要细究 χ_e 。

我们以平行板电容器展开探究, 对于其他形式的电容或者电场与电介质关系, 我们可以类似地思考。

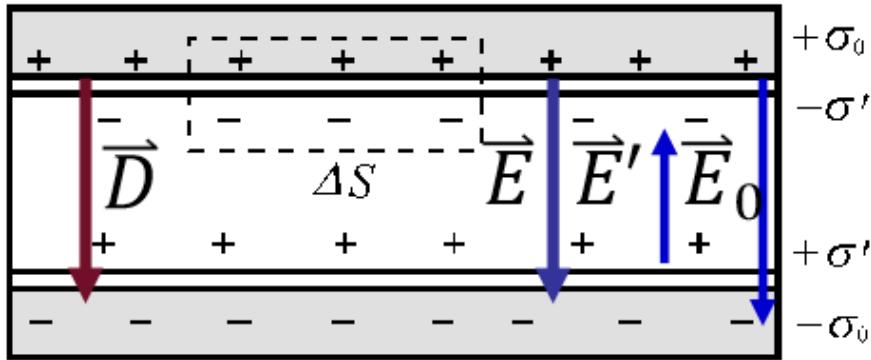


图 8.13: 极化对电场的影响

我们可以取如图所示的高斯面, 根据高斯定理以及前文中的电偶极矩密度的概念可知:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\sigma_0 \Delta S - \sigma' \Delta S) = \frac{1}{\varepsilon_0} (\sum q_0 + \sum q')$$

$$\sigma' \Delta S = P \Delta S = \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$$

因此：

$$\oint \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \sigma' \Delta S = \oint (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} = \sigma_0 \Delta S = \sum q_0$$

这里我们定义新的物理量：

定理 8.14 Definition: Electric displacement vector

Electric displacement vector 通常用字母 \mathbf{D} 表示。其定义式为：

$$\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

因此我们获得了高斯定理的另一个形式：

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_0$$

这表明任意闭合面上向外的总电位移通量等于其包围的自由电荷。

注意，这里的自由电荷并不包括束缚电荷及其产生的感应电偶极子。也就是说，这个量仅与外部影响有关。

我们分析电位移矢量的物理含义，对于电场线来说，外加电场的电场线方向为 $+q_0 \rightarrow -q_0$ ，对于受到激发而产生的电介质内部自身的电场，其方向为 $+q' \rightarrow -q'$

而对于电位移矢量 \mathbf{D} ，其方向为 $+q_0 \rightarrow -q_0$ ，可见，电位移矢量的方向由外加电场（或者说仅由自由电荷）决定。另外观察定义式，结合电极化率有关的公式与高斯定理的公式，我们也可以对比发现，电位移矢量与原电场存在如下关系：

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \quad \varepsilon_r \equiv 1 + \chi_e$$

获得极化情况下的电位移矢量后，我们定义： $\varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon$ ，可以对前面得到的各个公式进行修正。 ε 称为 *absolute dielectric constant*。我们下面角标为 0 的各项表示考虑极化前的各个物理量：

- 当极板上的电荷总量一定时，两极板间的电场改变，极板间的新电容：

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_r} \mathbf{E}_0 \Rightarrow C = \varepsilon_r C_0$$

- 极板间的能量密度：

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$$

- 极板间电势差（带电量一定时）：

$$V = \frac{V_0}{\varepsilon_r}$$

- 极板上带电量（电势差一定时）：

$$Q' = \varepsilon_r Q_0$$

类似的我们可以发现，利用绝对介电常数替换真空介电常数，或者利用相对介电常数对电场做一定的比例替换，我们能够将极化应用于各种情况下，而不改变原本公式的形式，这样的修正可以应用于高斯定理的最初形式。需要注意的是，这里的比例替换的原因在于极化作用下的电场强度变化。

8.9 Ohm's Law

8.9.1 Stationary Current

我们已经知道，电流是由于电子的运动产生的。当然，这种运动也可以是其他带电粒子的运动。因此，我们知道电流相关的定义式如下：

$$i = \frac{dq}{dt} \quad q = \int i dt$$

接下来定义 *Electric Density*：

定理 8.15 电流密度与连续性方程

Electric Density and Continuity Equation *Electric Density* 定义为单位面积内通过的电流的变化量。用符号 J 表示，定义式如下：

$$J = \frac{i}{S_{\perp}} = \frac{dq}{dt dS_{\perp}} \Rightarrow i = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

电流也是电流密度的通量。当电流是由于电子运动产生时，电流和电流密度方向均与电子移动方向相反。考虑到电荷守恒原理，通过某一个面的电流会导致其内部包含的电荷的变化，因此上述公式在考虑符号后写作：

$$\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt}^{(2)}$$

(2) 在一些专业教材中
该式也写作
 $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

当 $\frac{dq}{dt} = 0$ 时，也被称为 *Stationary Current*，注意这里与电流的定义不同，这里表示的是包围包面的体积内部的电荷密度是稳定的，该电流的电流线总是一条无散闭合回路。

上面都是一些宏观的定义，那么从微观来说，电流是由于电荷的运动，虽然电流是以光速运动的，但是电荷并不是。假设有如下的导线，我们利用其中电子的漂移速度 v_d ，电荷密度为 n ，可以分析得到：

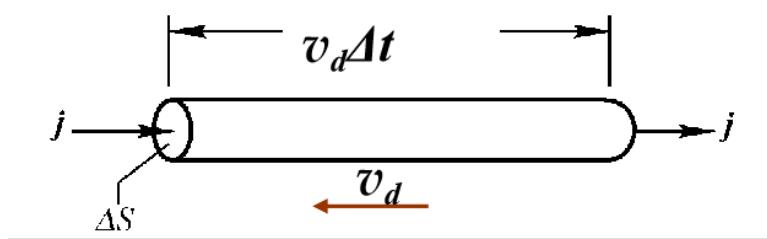


图 8.14: 电流的微观表达

$$i = \frac{dq}{dt} = env_d \Delta S \Rightarrow J = env_d \Rightarrow \mathbf{J} = -env_d$$

8.9.2 Ohm's Law

中学时我们已经非常熟悉欧姆定律 $I = \frac{U}{R}$ ，现在想象一段导体和电流，假设在电流方向上的一小段距离为 dR 的范围内电压的变化量为 dU ，我们利用欧姆定律定义式、电阻的决定式的微元形式 $dR = \rho \frac{dl}{dS}$ 、均匀电场中的 $E = -\frac{dU}{dl}$ 以及上面电流密度的概念可以得到：

$$dI = -\frac{dU}{dR} \quad E = -\frac{dU}{dl}$$

定理 8.16 Ohm's Law

我们给出欧姆定律的微观状态的表达式：

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}$$

其中 σ 表示电导率。这一结论可以推导功率关于体积的密度：

$$w = \sigma E^2 \quad (\text{焦耳定律的微观形式})$$

接下来，我们从微观上讨论一下电阻的形成。在没有附加电场时，电子的运动是随机的，而加上电场后则同向流动。我们将电流的形成考虑为众多电子的运动，在运动中会产生碰撞、加速等情况。因此我们定义同一个电子在相邻两次碰撞的时间间隔的平均值为 $\tau = \frac{\sum t_i}{n}$ ，对于每一个原子，有：

$$v_i = v_{0i} + \frac{eE}{m}t_i$$

由于最初的粒子完全无规则运动，没有施加电场时没有电流产生，因此：

$$\sum ev_{0i} = 0$$

取电子的运动速度为平均速度，所以：

$$J = \sum e \frac{v_{0i} + v_i}{2} = \sum \frac{e^2 E}{2m} t_i = \frac{ne^2 \tau}{2m} E$$

$$\sigma = \frac{ne^2 \tau}{2m}$$

这个理论实际上并不符合微观世界中的电子运动情况，但在研究早期，这一采用经典力学的思考为后续的研究提供了宝贵的借鉴。

利用速度的麦克斯韦分布（如果你忘记麦克斯韦分布，请参考热力学章节），我们可知：

$$\tau = \frac{\lambda}{\bar{v}} = \lambda \sqrt{\frac{\pi m}{8kT}} \propto \sqrt{\frac{1}{T}}$$

对于微观下的电流密度，做出以下说明：

- 在电路的外部路径中，电流密度 J 的方向与电场 E 的方向相同，即 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$
- 电导率 σ 的国际单位制是西门子每米（S/m），电导率越高，导电性能越好
- 电导率的倒数是电阻率，二者均是与电流电压无关的常数

8.10 Circuit Theory

电路理论部分主要是宏观角度的、简单的电路分析方法。受限于物理课程特性，理论较为晦涩。因此我们利用电路原理的知识进行该部分的介绍。编者在这里特殊提示：本部分内容仅供了解，面向考试拟合的话无需过多研究，因为单凭运用的话过于套路且简单化。在具体内容前，我们给出该部分的一些定义：

- Electromotive Force (EMF): 一种能够将各种能量转化为电能的装置，例如电池等
- 支路: 单个或多个二端元件（如电阻、电容、电感）串联的不分支的电路
- 节点: 三条及三条以上支路的连接点
- 回路: 若干条支路组成的闭合路径
- 网孔: 内部没有支路的回路
- 参考方向: 电路分析中可以预先设置参考方向作为一个假想的电流和电压方向，若计算结果为正，则实际电流方向与参考方向相同，反之则方向相反。对于电压的表示也是同理。

8.10.1 Kirchhoff's law

基尔霍夫定律是电路原理的基本原理之一，它在理论上揭示了电路中的电流与电压关系。其具体表述为：

- 基尔霍夫电流定律 (KCL): 电路中任一节点上的电流的代数和为 0，即：

$$\sum I_i = 0$$

其中以流入节点为“+”，流出节点为“-”。

- 基尔霍夫电流定律推论：若假设某单连通的封闭区域（包面）覆盖（或者包围）电路的一部分，流经该包面的电流代数和为 0，包面可视为一个广义节点。
- 基尔霍夫电压定律 (KVL): 电路中任一回路的电压的代数和为 0，即：

$$\sum V_i = 0$$

其中沿着任意假设的回路绕行方向，与该方向相同记为“+”，相反记为“-”

对于基尔霍夫定律做出如下解释：

- 基尔霍夫电流定律基于恒定电流的特性：流入任意区域的电荷一定等于流出该区域的电荷，遵循电荷守恒定律。
- 基尔霍夫电压定律基于能量守恒定律与环路定理，表示沿着电流方向绕行一圈，整体电势下降为 0。
- 基尔霍夫定律基于严格的物理依据，可适用于任何稳态电流的情况下。
- 基尔霍夫定律可适用于任何线性（电阻）或者非线性（电容、电感、可变电阻）电路中，是任何电路必须遵守的底层的定律。

基于串并联电路的电流、电压关系，我们一般有以下方法求解宏观电路：

- 回路电流法/网孔电流法：假设每一个回路所提供的电流为未知数 I_i ，每个支路的电流为经过它的回路的电流的代数和 $\sum I_i$ ，根据电压、电流与电阻列写 KVL 方程，每个方程对应选择的一个完整闭合回路（网孔）。
- 节点电压法：适合回路较多但节点少的电路，通常选择一个节点的电势为参考电势 0，假设其他节点的电势为未知数 U （对于只含有已知电源的支路，可直接获取另一端节点的电压）。对每个节点列写 KCL 方程。
- 上述方法的理论依据为 KCL 和 KVL，因此适用于任意电路。

在前面的介绍中我们发现电路有“线性”和“非线性”之分。对于一般的电路，我们称其为线性电路，这是由于单纯的回路、节点以及电压源、电流源和电阻并不会给电路带来微分项。而对于带有电容电感的电路，由于带来了微分项，我们则称为非线性电路。当然，电路也有直流电路和交流电路等等不同的分类。

8.10.2 *First-order circuits and complex circuits**

这一部分介绍一些关于宏观电路的分析法，一般不作为主观题目出现。

First-order circuits

简单的 RC 和 RL 电路被称为一阶电路，在稳定状态下，电容和电感可分别视为开路和短路（理想化模型中）。但是有时电路会发生突变，导致电容和电感中出现变化的电流和电压：

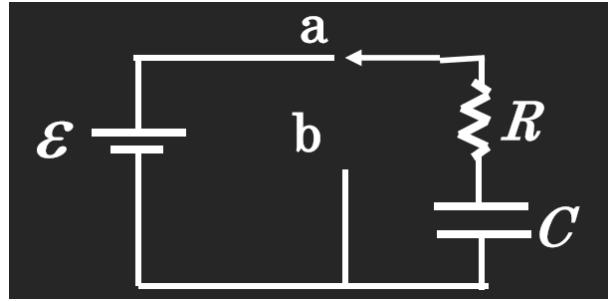


图 8.15: 简单一阶 RC 电路

读者可以通过电路原理知识结合常微分方程的知识去证明下述结论:

定理 8.17 一阶电路的结论—Prove 8.4~P 282

我们的目的是解决电容/电感两端的电压或电流大小。

电路从没有接通电源到接通电源后的变化过程称为零状态响应，该过程中电容两端的电压为：

$$u = \varepsilon(1 - e^{-t/RC})$$

当电容完全充电后，将开关闭换到 b 点，该过程称为零输入响应，该过程中电容两端的电压为：

$$u = \varepsilon e^{-t/RC}$$

其中， RC 是一个非常重要的量，一般我们将其定义为 $\tau = RC$ ，称为时间常数。在上述情境下，时间常数是一个用来衡量电路是否达到稳态的重要依据。在电路分析中，一般认为当 $t=3\tau \sim 5\tau$ 时电路达到稳态。

若既有输入又有一定的初值，我们称为全响应。全响应满足：

$$\text{全响应} = \text{零输入响应} + \text{零状态响应}$$

对于电感与电阻组成的 RL 电路，我们定义该一阶电路的时间常数如下：

$$\tau = \frac{L}{R}$$

其余所有公式与 RC 电路一致。

一阶电路可以用时间常数非常简单地写出电路突变后电压或者电流随着时间的表达式。当一个电路中既有电容又有电感时，电路很可能成为二阶电路，常常需要考虑各元件间的相互作用、LC 的关系等，会出现二阶微分方程。

complex circuits

首先我们提到“线性电路”这一概念，顾名思义这种电路应当满足线性性——加法和数乘。另外我们假设电源是理想的无内阻，事实上，电源有内阻，我们中学已经学过将其视为一个无内阻的电源和一个电阻串联的思想。这两个就是典型的电路原理。

1. 线性定理：线性电路中独立电压（电流）源同时增加（或缩小） K 倍，则电路中各支路电压、电流均增加（或减小）为原来的 K 倍。
2. 叠加定理：线性电路中任一支路的电压（电流）等于各个独立源分别单独作用情况下所产生的电压（电流）之和。
3. 替代定理：若有一个支路的电压（或电流）已知，则可以用一个等于该确定电压（或电流）的电压源（或电流源）替代，电路中其他部分的电压、电流保持不变。
4. 戴维宁定理：任一线性有源一端口网络（简单理解为一块完整的复杂电路，你可以将其视为黑盒，并引出两个导线构成一组端口），对于其余部分而言，可以等效为一个理想电压源和一个电阻的串联。
5. 诺顿定理：任一线性有源一端口网络，可以等效为一个理想电流源和一个电阻的并联。

上述定理 3 可以用于非线性电路，而其余只能用于线性电路。

复杂电路分析希望将电路简化，因此需要用到一些等效电路。所谓“等效”要求将这一部分电路替换后，不影响电路的其他部分的电压和电流。最为常见的等效为“Y- Δ ”等效，如下图所示：

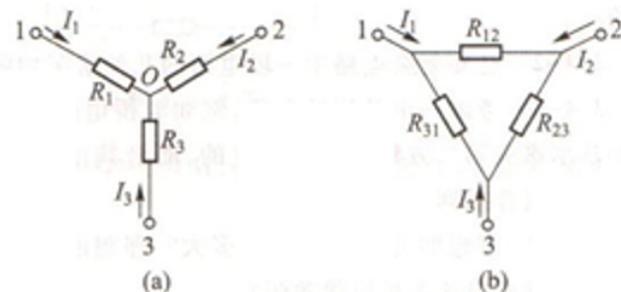


图 8.16: Y- Δ 等效电路

所谓“Y”型连接和“ Δ ”型连接是根据电路的样子定义的，上图左边为 Y 型连接，右边为 Δ 型连接。

定理 8.18 Y-等效—Prove 8.5~P 283

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_3} \\ R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_1} \\ R_{31} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_2} \end{array} \right. & \quad Y - \Delta \text{变换} \\ \left\{ \begin{array}{l} R_1 = \frac{R_{31} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 = \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{array} \right. & \quad \Delta - Y \text{变换} \end{aligned}$$

8.11 Magnetic field

经历了九九八十一难，我们终于跳脱出电学的庞大领域，开启磁学的部分。作为与电学具备极强对偶关系的物理量，磁学部分我们将会一一介绍各种与电学部分类似的知识，这些知识通常可以与电学知识进行对比记忆和理解以减轻记忆负担。

这里的磁感应强度的定义与中学不同。根据中学时已经学过的洛伦茨力，我们已经知道运动粒子在磁场中的受力为：

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

因此，普物中对于磁感应强度的定义为： $B = \frac{F_{Bmax}}{|q|v}$ ，单位为特斯拉 (T)。类似于电场线，我们也可以定义磁场线，磁场线的方向由 N 极指向 S 极，磁场线的密度表征了磁感应强度的大小。

此外，对于在磁场中通电的导线，也会受到力的作用。我们利用洛伦茨力从微观的角度分析。假设导线截面为 S ，电流为 i ，单位体积内的电子数量为 n ，电子漂移速度为 v_d 则有：

$$d\mathbf{F} = -(enS dl)\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$$

由于 $i = -neSv_d$ ，代入可得我们中学时已经熟知的 $F = ILB$ ：

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F} = \int i dl \times \mathbf{B}$$

我们假设匀强磁场中存在一个旋转轴垂直于磁场的方形线圈，通入稳定电流后其四条边中有两条边受力。利用力矩的定义可知，其总力矩为：

$$\tau = 2r\mathbf{F} = iA\mathbf{n} \times \mathbf{B}$$

这里的 A 表示线圈的面积， \mathbf{n} 为单位矢量，方向由电流方向通过右手定则判断。

结合洛伦茨力、圆周运动以及电场磁场的复合场受力分析，我们可以对单一的点电荷进行运动分析。该部分结论已在中学有完整介绍并应用，相关推导请读者自行完成。假设磁场强度为 B ，粒子圆周运动半径为 r ，带电量为 q ，质量为 m ，电场强度大小为 E ，我们简单列举结论：

- 匀强磁场中匀速圆周运动的点电荷的运动半径为 $R = \frac{mv}{qB}$
- 匀强磁场中匀速圆周运动的点电荷的运动周期为 $T = \frac{2\pi m}{qB}$
- 匀强磁场中匀速圆周运动的点电荷的运动频率为 $f = \frac{qB}{2\pi m}$
- 匀强磁场中匀速圆周运动的点电荷的运动动能为 $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2B^2R^2}{2m}$
- 添加垂直于磁场方向的匀强电场后，能够沿原方向通过电场的粒子满足 $qvB = Eq$

上面第五种情况中，我们知道对于电磁复合场可以实现粒子的直线运动。若两个平板内施加磁场并通过带电粒子，粒子由于偏移撞向平板，将会逐渐形成两个极板间的电压，被称为霍尔电压，该现象被称为 *Hall Effect*。在这个过程中，粒子运动方向、磁感应强度方向和电场强度方向是正交的。

此外，对于回旋加速器等中学已经了解的内容，我们也不多解释。相关的粒子运动分析，读者可依靠中学受力分析解决。

最后，我们分析一下磁场中的做功现象。明显，我们可以知道带电粒子在磁场中的运动中洛伦茨力并没有给他做功。同时不同于电场的一点是，磁场力并非保守力，因此它并不能通过状态分析磁场力的做功情况。

那么从微观角度，经过实验验证，磁场强度的大小与电荷运动有关。

定理 8.19 Biot-Savart Law

如下图所示，对于以某一速度运动的带点电荷，在其距离为 r 的位置的磁感应强度表示为：

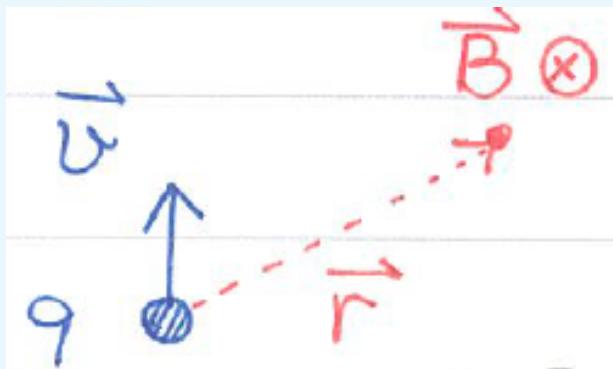


图 8.17: 电流产生的磁场

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

其中 \mathbf{r} 为该点电荷到空间中一点的矢量， μ_0 是真空磁导率。

上面这个微观公式可以如何联想呢？其实这与电场的库仑定律类似，是从点电荷引起的磁场。类似地，我们也可以用库仑定律类似的方式进行积分，从而求得一些情况下的磁场分布。

8.12 Ampere's Law

我们已经分析过两个与电场有关的麦克斯韦方程组中的公式。接下来我们关注与磁场有关的公式的一部分

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

暂时不考虑其中的电场强度的相关部分，我们单独就磁场进行分析。这时可以考虑为恒定的磁场和电场。

首先第一个散度公式，我们根据以电场类似的观点思考。在电场中是一个有源无旋场，而这里的右侧结果为 0，表明磁场是一个无源场，在任何包面中都必然是进入包面的磁场线等于从包面中发散的磁场线。

然后我们重点关注第二个公式，它这表明磁场与电流有一定关系。类似地，利用高斯定律类似的想法可知，沿着任意一条线封闭曲线，在线上某一点的磁场强度的大小仅由该线所包围的电流决定。而与该封闭曲线外部的电流无关。在这里，各个均使用国际单位制。它的积分形式即为安培定律：

定理 8.20 Ampere's Law —Prove 8.6 ~ P 285

安培定律表示为：

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \sum \mu_0 I_i$$

其中 \mathbf{B} 为磁感应强度， I_i 为单个电流，此处的求和为代数和，存在正负抵消，正负号依靠自行定义的电流方向。

同样地，我们给出一些样例，具体的计算方法与电学部分的高斯定理类似，请读者自行体会：

- 无限长直流导线周围的磁场分布：方向：利用右手定则判断

假设距离导线 r 处，导线中电流为 I 且恒定。由安培定律可得：

$$\mathbf{B} \cdot 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

类似地，假设圆柱的半径为 R ，则均匀带电的通电直流圆柱体的磁场分布：

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} & r < R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & r > R \end{cases}$$

以及直流通电圆柱壳的磁场分布为：

$$\mathbf{B} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & r > R \end{cases}$$

- 直流螺线圈（不考虑线圈边界效应）：方向：利用右手定则判断

假设螺线管的缠绕密度（即每单位径向长度缠绕圈数）为 n ，通过的电流为 I ，如图所示：

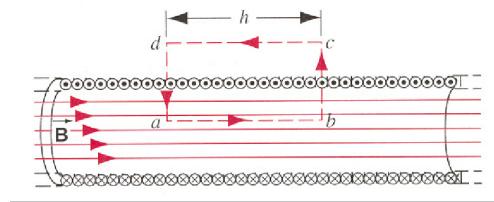


图 8.18: 螺线圈的磁场分布

我们取图中示意的一个闭合曲线，在螺线圈外部的磁场为 0（可以利用安培定律证明线圈外部的磁场很小，与内部磁场相比可忽略不计），内部磁场方向一致且恒定。由安培定律可得：

$$\mathbf{B} \cdot l = nl\mu_0 I \Rightarrow \mathbf{B} = n\mu_0 I$$

类似地，假如螺线管以首尾连接的形式围成一圈，如下图所示：

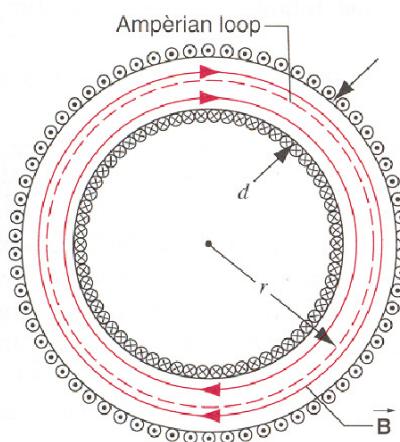


图 8.19: 环形螺线圈/环面直导线

其内部的磁感应强度可表示为：

$$\mathbf{B} = \mu_0 n I$$

其余类型的磁场计算可以利用类似方法得出，此处不再赘述。

8.13 Magnetic Dipole

磁场本身不是保守场，磁力并非保守力，因此没有类似电势的概念。此处我们直接讲解一种重要的磁学系统——磁偶极子。磁偶极子与电偶极子是高度

对偶的，因此一些概念与计算上有异曲同工之妙，例如力矩和势能的公式均呈现了较高的与电学的对称性，我们将在下面细讲。其示意图如下：

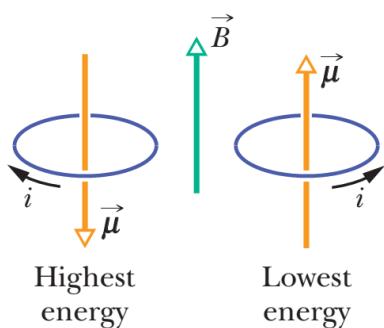


图 8.20: 磁偶极子

首先，参考电偶极矩的定义，我们类似地定义磁偶极子的对应物理量 *magnetic dipole moment*。在磁学中，磁偶极子是一个圆形的恒定电流。根据之前提到的，电流可以产生磁场。因此该恒定电流产生了垂直于其环形平面的磁场 \mathbf{B} 。我们定义：磁偶极矩为该磁感应强度与圆形平面的乘积，磁偶极矩方向与该电流产生的磁感应强度方向一致：

$$\mu = iAn$$

这里的 n 为单位矢量，仅表示方向，不改变大小。

单个磁偶极子的磁场很容易可以通过前面的方法计算，同时磁场没有势能的概念，因此我们直接分析磁场中磁偶极子的情况。如下图所示：

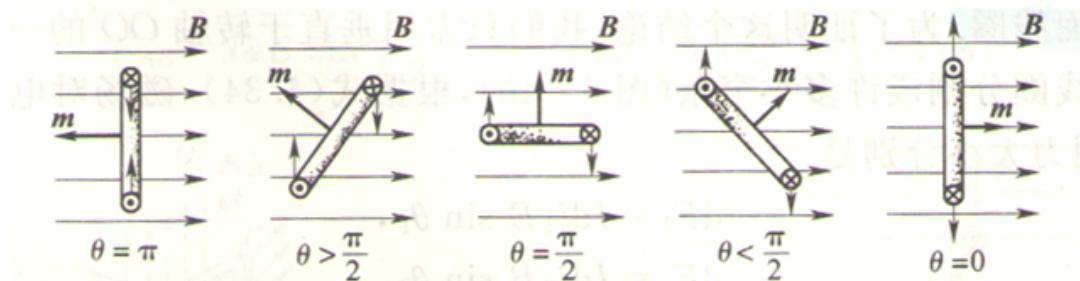


图 8.21: 磁场中的磁偶极子

类似地，我们首先分析受力。受力的分析依据是电流受到磁场的力矩，即我们已经知道的公式 $\tau = iAn \times \mathbf{B}$ 。结合磁偶极矩的定义式可知，磁偶极子的力矩为：

$$\tau = \mu \times \mathbf{B}$$

如果把其中的磁偶极矩按照定义式代换一下，是不是有点眼熟？没错！磁偶极子的力矩就是通电导线圈的力矩。

类似地，我们也根据力与势能的关系，给出磁场中磁偶极矩的势能。我们

定义磁偶极矩方向与磁场方向垂直时的势能为 0，如上图所示。因此可得：

定理 8.21 Energy of a magnetic dipole

磁偶极矩的势能为：

$$U = -W = -\left(-\int_{\pi/2}^{\theta} \boldsymbol{\tau} \cdot d\theta\right) = -\mu B \cos\theta = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$$

8.14 Magnetization of magnetic media

8.14.1 Definition of Magnetization

电介质有极化，那么介质在磁场中也必然产生类似现象。就好比我们用一个磁铁一直同向摩擦铁针，铁针也能够短暂地带有磁性。我们接下来要介绍的就是与极化非常类似的磁化现象。

磁化的产生同样借助于磁偶极子。介质内的磁偶极子是什么呢？就是我们的分子和原子。采用经典视角下的原子磁铁思想，我们可以得知外加磁场对分子或原子中电子角动量以及磁偶极矩的影响如下：

定理 8.22 外加磁场对磁偶极子的影响—Prove 8.7~P 286

如下图所示，对于中心带正电量为 Z 的原子，核外电子以一定角速度绕其旋转。对这样的磁偶极子外加匀强磁场 \mathbf{B} ，有：

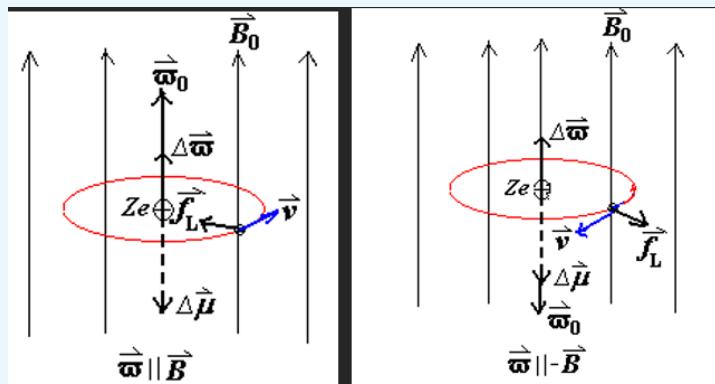


图 8.22: 磁场对磁偶极子的影响

电子角速度的改变量： $\Delta\omega = \frac{eB}{2m_e}$

$$\text{磁偶极矩的改变量: } \Delta\mu = -\frac{er^2}{2}\Delta\omega = -\frac{e^2r^2}{4m_e}B$$

因此可见磁偶极矩的改变量永远与外加磁场方向相反。同时，这个改变量相比于原本的磁偶极矩是很小的

类似地我们也可以从微观角度分析：

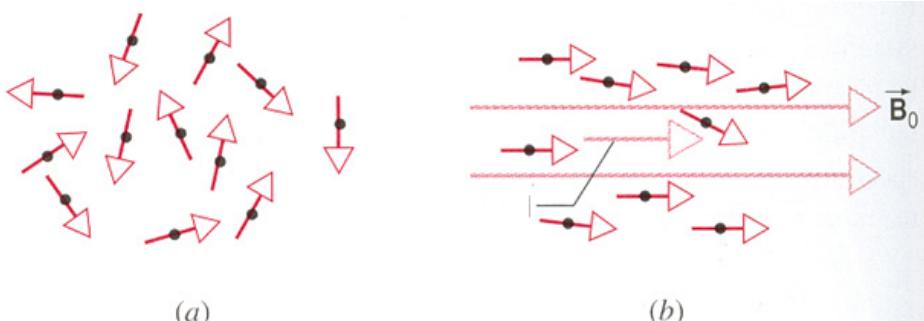


图 8.23: 磁化的微观解释

在微观表达中，磁化是由于无数原子或分子构成的磁偶极子的磁偶极矩的规律排列产生的。

类似地我们定义磁化矢量： $\mathbf{M} = \frac{\sum \mu_i}{\Delta V}$ 。同样的，这也是关于体积的密度。因此发生磁化时，同时存在外加磁场 B_0 ，磁化磁场 B_M 以及最终的磁场 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_M$ 。在此基础上，我们根据磁化磁场的方向不同，将介质分为：

- *Paramagnetism*：满足： $\mathbf{B}_M \parallel \mathbf{B}_0, \mathbf{B} > \mathbf{B}_0$ 。例如锰、铬、铝、钨、氧等。
- *Diamagnetism*：满足： $\mathbf{B}_M \parallel -\mathbf{B}_0, \mathbf{B} < \mathbf{B}_0$ 。例如铜、银、汞、铋、惰性气体等。
- *Ferromagnetism*：顺磁性的一种但磁化更强， $\mathbf{B} \gg \mathbf{B}_0$ 。例如铁、钴、镍等。

8.14.2 Ampere's Law of Magnetic Media and Its Applications

类似地，我们利用安培环路定理来分析磁化的影响。首先我们定义一段无限长且填充磁介质的线圈，由于内部通有电流，因此经过一系列操作（读者懂的都懂），产生如下情况：

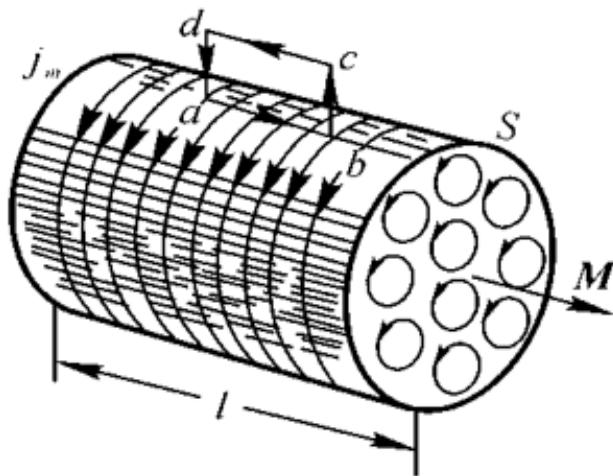


图 8.24: 磁化对磁场的影响

我们预先定义磁化电流 $I_M = J_M l$, J 为相对于长度的电流密度。在这里我们可以把磁化电流看作是如图所示的内部无数个小的磁偶极子的电流, 它们整体可以视为围绕这个线圈的电流 I_M 。因此可得:

$$|\sum_i \mu_i| = i_M S = J_M l S$$

$$|M| = \frac{|\sum_i \mu_i|}{\Delta V} = J_M$$

取一个方形 abcd, 我们应用安培环路定理。由于 ad、bc 边垂直于线圈, cd 边在外部, 因此实际有效的部分只有线圈内部的 ab 边:

$$\oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a = \int_a^b \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = M \cdot ab = J_M \cdot ab = \sum i_M$$

我们也知道最终的磁感应强度为原本线圈中电流产生的磁感应强度与磁偶极子激发的磁感应强度的矢量叠加, 因此:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_M \Rightarrow \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l} + \oint_L \mathbf{B}_M \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (\sum i_0 + \sum i_M)$$

对于第二项我们将 $\sum i_M$ 替换为 $\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$, 展开括号并将两个积分项合并可得:

$$\oint_L \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{l} = \sum i_0$$

定理 8.23 Definition: Magnetic field intensity

Magnetic field intensity 通常用字母 H 表示, 其定义式为:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

因此我们获得了与安培环路定理高度相似的另一个表达式:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum i_0$$

根据 \mathbf{H} 的定义式我们可以获得: $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ 。事实上, 磁化强度与磁场强度存在正比例关系 $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$, 其中 χ_m 为磁化率, 我们定义 $1 + \chi_m$ 为相对磁导率 μ_r , 由此可得最终结论:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu_0\mu_r\mathbf{H} = \mu_r\mathbf{B}_0 = \kappa_m\mathbf{B}_0$$

这里 $\mu_r = \kappa_m$ 。通过该常数, 我们可以对顺磁性和逆磁性做出量化的说明: 顺磁性时 $\mu_r > 1$, 逆磁性则反之, 铁磁性时 $\mu_r \gg 1$; 特殊地, 超导体的相对磁导率为 0。

最后, 对于顺磁性介质物质, 当磁感应强度增大时磁化强度也增大, 同时这也受到温度的影响。当 $\frac{B_0}{T}$ 很小时, 存在:

$$M = C \frac{B_0}{T}$$

对于铁磁性介质, 近邻原子间存在强烈的相互作用, 因此容易出现磁滞现象, 这是由于部分磁体在磁化后磁偶极子的规律排列不会立刻消失, 随着外加磁场变化而内部磁化矢量也会变化。下图中这个标注箭头的线被称为磁滞回线:

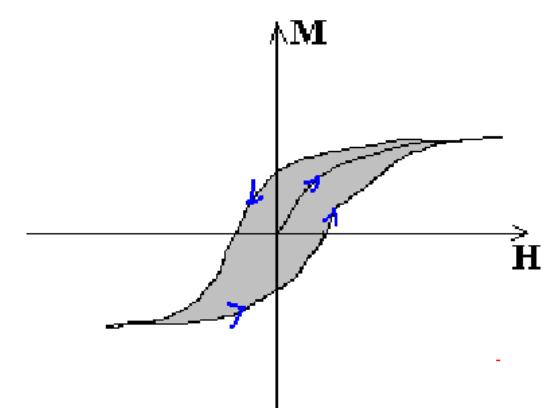


图 8.25: 磁滞回线

由此对磁介质有以下分类:

- *Soft ferromagnets*: 当磁场去除时, 磁畴(当没有外加磁场时, 小范围内磁偶极子集中规律排列)会恢复。
- *Hard ferromagnets*: 当磁场去除时, 磁畴不会恢复(即会大范围磁偶极子维持规律排列的情况被维持), 例如永久磁体。

施加不同方向的场时磁畴会改变。另外, 突然的外力以及超过居里点的环境, 也可能导致磁畴的恢复。

8.15 Electromagnetic Induction and Inductance

截止目前为止, 我们已经讨论完毕电学与磁学各自单独的内容。作为具备强对偶性质的两个领域, 电与磁的相互作用也是历来关注的焦点。因此, 我们不再拘泥于静止的电场和磁场, 下面的内容将借助运动的(或者说是变化的)电场与磁场展开。

当然, 为了方便起见, 我们先给出电场和磁场的通量的公式表达式, 其中磁通量的单位为韦伯(Wb), 国际单位制中 $1Wb = 1Tm^2$:

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad \Phi_B = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

另外我们定义 *Electromotive force(EMF)*, 其含义为电源内部电场移动单位电荷需要做的功:

$$\varepsilon = \frac{A_k}{q} = \frac{q \int_{-}^{+} \mathbf{E}_k \cdot dl}{q} = \int_{-}^{+} \mathbf{E}_k \cdot dl \quad \text{or} \quad = \oint \mathbf{E}_k \cdot dl$$

8.15.1 Faraday's Law of Induction and Motional EMF

我们来关注下面这个麦克斯韦方程 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, 类似于在安培定理中的证明过程, 我们可以最终得到:

定理 8.24 Faraday's Law of Induction

变化的磁场将产生电场, 即 *Induced EMF*, 满足:

$$\varepsilon = \oint \mathbf{E} \cdot dl = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

该定理说明磁通量的变化将导致电动势的产生，进而在电路中产生感生电流。要注意的是，由电磁感应激发的电流一般为涡流，其电场线的形式是闭合的回路。

进一步地，法拉第电磁感应定律能够与中学的楞次定律（感应电流的变化将趋于抵消导致它的磁通量的变化）完美契合，它揭示出感生电动势将会趋向于阻碍磁通量的变化。在这个定理中产生电场一个重要的需求是磁通量的改变，我们可以通过磁感应强度、面积或者二者的夹角的改变进而改变磁通量。

除了感生电动势，我们还有 *Motional EMF*。想象我们运动一个与磁场相切的导体棒，在运动过程中导体内部的电子受到洛伦茨力的影响将会定向移动产生电流，可以视为产生了电场和电动势。

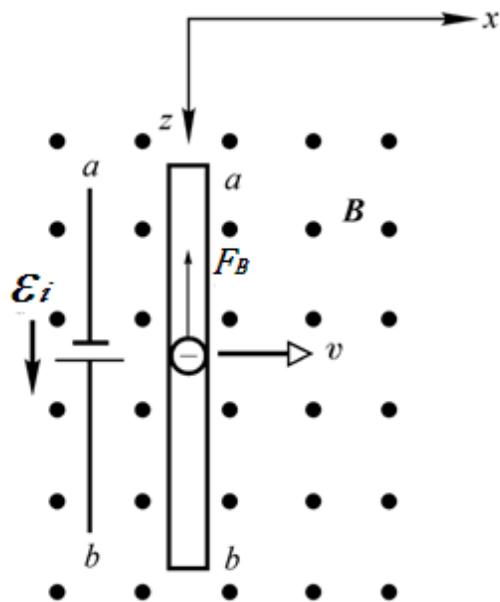


图 8.26: 动生电动势

因此我们有：

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \frac{\mathbf{F}_B}{-e} \cdot d\mathbf{l} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\ d\varepsilon &= (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}\end{aligned}$$

上面这些内容实际上各位中学都学过，大部分应用也可以从中学的公式理解。当然从两种电动势出发，各种发电设备及其相关的电路计算也就迎刃而解，这里作者就不多说啦。

8.15.2 Inductance and its properties

当我们对一个螺线圈通电再断电，断电后螺线圈中的电流不会立刻消失，这是由于电感的存在。作为与电容非常类似的物理量，电感的很多性质与公式和电容有异曲同工之妙。

定理 8.25 Definition: Inductance

电感通常是一个螺线圈。*Inductance coefficient* 被定义为电感线圈总的磁通量与通过的电流的比值，即：

$$L = \frac{N\Phi_B}{i}$$

由此可得感生电动势为 $\varepsilon = -L \frac{di}{dt}$ ，该公式常用于含电感的电路分析和计算。

下面给出计算任意电感的电感系数的一般步骤：

- 假设电感线圈通有电流 i
- 利用已知或安培环路定理等方法求解其中的磁感应强度大小 B ，并进一步求出磁通量 Φ_B
- 通过上述定义式或感生电动势的公式求解 L

不加证明地，下面给出一些结论，以下结论均可以通过上述步骤推导，建议读者自行推导练习：

- Solenoid*：假设其横截面积为 S ，单位长度内的线圈匝数为 n ，总长度为 l 。

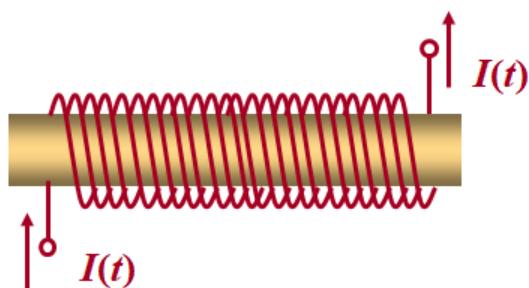


图 8.27: 电磁阀

$$L = \mu_0 n^2 l S$$

- **Toroid:** 我们假设圆柱轴共轴，小圆柱和大圆柱半径分别为 a, b , 厚度为 h , 匝数为 N 。

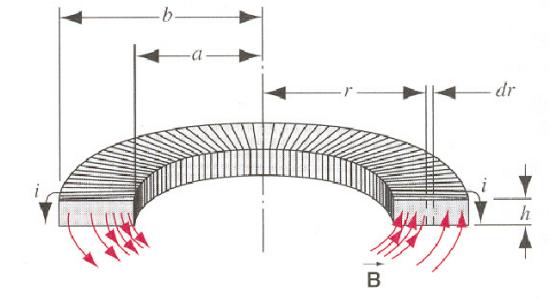


图 8.28: 环面

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

考虑我们之前介绍的磁化效应。在线圈中通过的电流不变的情况下，当我们在电感线圈中嵌入一个介质时，电感线圈激发的磁感应强度、磁通量以及相应的电感系数都将会变为没有该介质时的 μ_r 倍。

类似于电容的储能性质，电感也有其储能性质。它是利用了磁场的储能。

对于一个仅含有电源、电阻和电感的典型的 RL 电路系统，根据 KVL 方程 $\varepsilon = iR + L\frac{di}{dt}$ ，两边同乘电流可以得到关于电功率的方程：

$$\varepsilon i = i^2 R + L i \frac{di}{dt}$$

其中右边第二项表示了电感的电功率，因此：

定理 8.26 电感的储能性质

电感储存的能量为：

$$\int_0^t P dt = \int_0^U dU = \int_0^i L i di \Rightarrow U = \frac{1}{2} L i^2$$

这一公式也可以利用能量的定义式 $U = \varepsilon it$ 以及 $\varepsilon = L \frac{di}{dt}$ 积分得到。

类似的，我们在电感线圈中进一步讨论磁场能。对于图 1-27 所示的电感线圈：

假设通入的电流为 I ，我们可以得到下列三个方程：

$$U = \frac{1}{2}LI^2 \quad L = \mu_0 N^2 lS \quad B = \mu_0 nI$$

整理上述公式可得：

$$U = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 lS = \frac{B^2}{2\mu_0} lS$$

这里 lS 表示的也是这一段空间的体积，因此我们定义磁场的能量密度：

定理 8.27 磁场的能量密度

电感中磁场的能量密度定义为磁场能相对于电感体积的密度，即：

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

8.15.3 Mutual Induction

我们知道电感线圈的自感。由于电感线圈产生的磁场可能被其他电感线圈所接受从而产生感应电动势，因此我们提出了互感。明显，互感产生的电动势与产生它的电流成正比关系，因此我们可以定义互感系数：

定理 8.28 Mutual Induction

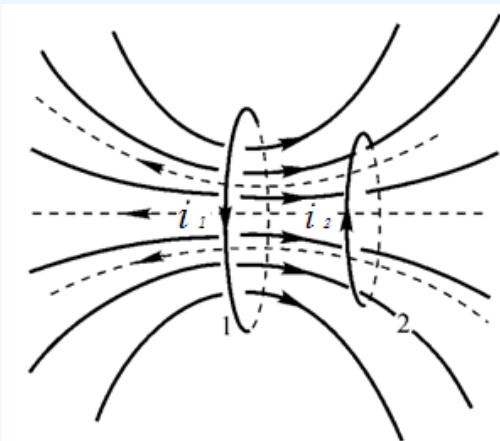


图 8.29: 互感的定义

如上图所示，定义互感系数为：

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{i_1} \quad M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_2}$$

由互感产生的电动势为（角标可能与其他教材有出入，读者应分辨并对应是哪个电流对哪个线圈的互感）：

$$\varepsilon_{12} = -M_{12} \frac{di_1}{dt}$$

当线圈匝数不为 1 时，磁通量要相应考虑线圈匝数 N ，这里的互感性质同时满足：

$$M_{12} = M_{21} = M$$

类似于电感的能量，由于互感产生的能量为：

$$U = \int_0^{i_2} \varepsilon_{12} i_1 \, di = M_{12} i_1 i_2$$

特殊地，对于下图所示的互感：

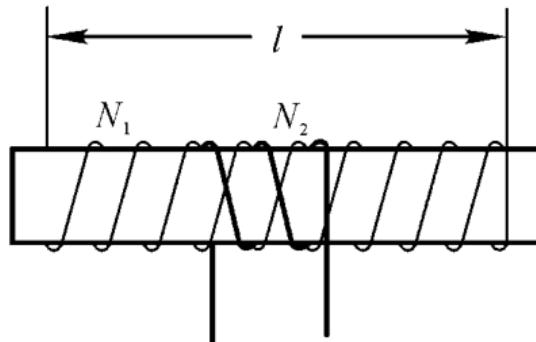


图 8.30: 互感

这里两个线圈重叠绕在一起，通过计算线圈 1 对线圈 2 产生的磁通量，结合电感的结论，我们很容易得到下面三个方程：

$$L_1 = \mu \frac{N_1^2}{l} S \quad L_2 = \mu \frac{N_2^2}{l} S \quad M = \frac{N_1 N_2}{l} S$$

我们可以得到 $M = \sqrt{L_1 L_2}$ ，实际上，这个互感系数与两个线圈的相对程度有关，当二者相互垂直时互感系数为 0。因此我们需要多算一个系数，得到：

$$M = K \sqrt{L_1 L_2} \quad 0 \leq K \leq 1$$

8.16 LC-circuit and circuit oscillation

具体的计算过程读者可以列写微分方程解决。纯 LC 电路中电场能和磁场能存在相互转化的关系，其能量总和不变，即：

$$U_E + U_B = \text{constant}$$

LC 电路电磁震荡的频率满足：

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

在此基础上，LCR 电路实现了电磁震荡。这种电路能够生成一定频率的电磁波，通过适当的结构设计，电磁波便能够向远处传播，送去远方的信息。

8.17 Boundary Conditions

本节内容仅讨论静态电磁场。

在我们分析平行板电容器为例的极化过程中很容易发现，内部空间的两个表面其实也聚集了部分电荷。在之前的讨论中，我们只分析了单一介质内部的电磁场，而没有考虑不同介质之间的电磁场。边界条件即是分析多种不同介质边界处的电场、磁场等，与电荷、电流等的关系，主要依靠麦克斯韦方程组的推论。

8.17.1 Boundary conditions of electric field and current density

我们首先以电场开始。我们以极化现象中的平行板为例：

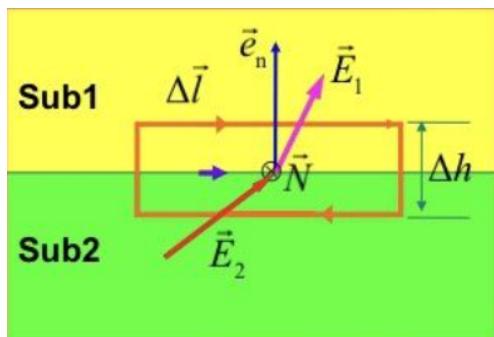


图 8.31: 无旋性的结论

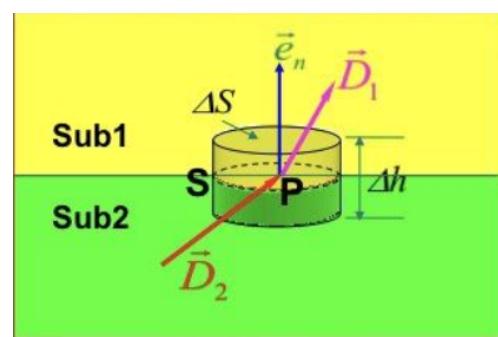


图 8.32: 有源性的结论

针对第一种边界条件，我们利用静电场的无旋性：

取两种介质的接触面上很小一个厚度的区域 Δh 以及一个闭合回路线，由于无旋性，我们可得：

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E}_1 \cdot \Delta \mathbf{l} + \mathbf{E}_2 \cdot \Delta(-\mathbf{l}) = 0$$

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \Rightarrow E_{1t} = E_{2t}$$

上面的 E_{1t} 和 E_{2t} 分别表示两个电场边界面的切向方向的分量。此时若再考虑两个电场的电介质不同，我们可以得到关于两个电场的电位移矢量的水平分量的关系：

$$\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$$

上面的讨论也告诉我们，电场的切向分量（即此处的水平分量）在界面上是连续的。

针对第二种边界条件，我们利用静电场的有源性：

取两种介质的接触面上很小一个厚度的区域 Δh 以及一个闭合的体积，由于有源性以及电位移矢量的积分公式，我们可得：

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{D}_1 \cdot \Delta \mathbf{S} + \mathbf{D}_2 \cdot \Delta(-\mathbf{S}) = q_0$$

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{e}_n \Delta S = \rho_s \Delta S \Rightarrow (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{e}_n = \mathbf{D}_{1n} - \mathbf{D}_{2n} = \rho_s$$

上面的 ρ_s 表示接触面的电荷的面密度。带有角标 n 的物理量均表示 \mathbf{e}_n 方向的分量

若 $\rho_s = 0$ 则有进一步的结论：

$$\mathbf{D}_{1n} = \mathbf{D}_{2n} \Rightarrow \varepsilon_1 \mathbf{E}_{1n} = \varepsilon_2 \mathbf{E}_{2n}$$

另外，由于稳恒电流保证了固定封闭面内电荷的恒定，同时我们结合 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ 和电场旋度方程，也容易得到 $\nabla \times \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = 0$ ，类别之前的分析，容易知道：

$$J_{1n} = J_{2n}$$

$$\frac{J_{1t}}{J_{2t}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

这便是电流密度的边界条件。

8.17.2 Current boundary condition

还是一样地，我们取和分析电场时一致的环路和面：

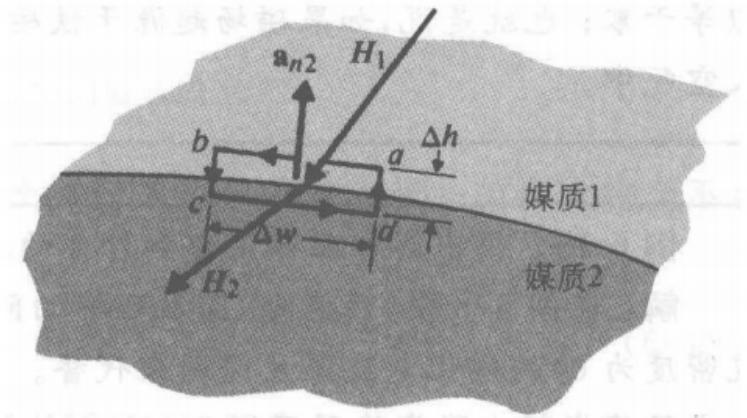


图 8.33: 磁场边界条件

磁场的无散性使得磁感应强度的法向分量是连续的，即：

$$\mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n}$$

考虑介质的存在，可以替换为磁场强度：

$$\mu_1 \mathbf{H}_{1n} = \mu_2 \mathbf{H}_{2n}$$

而由于磁场强度的积分公式可得：

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{H}_1 \cdot \Delta l - \mathbf{H}_2 \cdot \Delta l = J_n \Delta l$$

从而发现磁场强度的切向分量的关系：

$$\mathbf{H}_{1t} - \mathbf{H}_{2t} = J_n$$

和之前定义的电流密度不同，这里的电流密度是垂直于周线的面电流密度，方向为回路绕行方向的右手定则确定的方向。可能定义有点奇怪，明明你使用的不是线微元上的电流密度吗，怎么是“面”电流密度？确实是这样，面电流密度是指通过一个很薄的面上的电流密度，而我们之前定义的通过截面的电流密度被称为体电流密度。

当两种介质的电导率是有限值的时候，电流密度由体电流密度定义，即电流密度是在一定厚度内分布的，在很薄的面上的电流密度应当为 0。如果不是

这样会怎么样？由电场的切向分量连续性以及 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ ，电导率无穷小（因为截面积无穷小）将会导致我们必须在这个无限小的厚度上产生无限大的电流密度（如果体电流密度是有限值，那么面电流密度将会为 0），这对于有限大的电场是不可能的。因此分界面上不存在自由电流。进一步地，在绝大多数介质的分界面上，磁场强度的法向分量也就会是连续的。

当然，如果我们的分界面是理想导体或超导体时，磁场强度的法向分量就将会是不连续的。

8.18 Electromagnetic Waves

8.18.1 displacement current

在理解位移电流之前，我们首先思考下面这个现象：

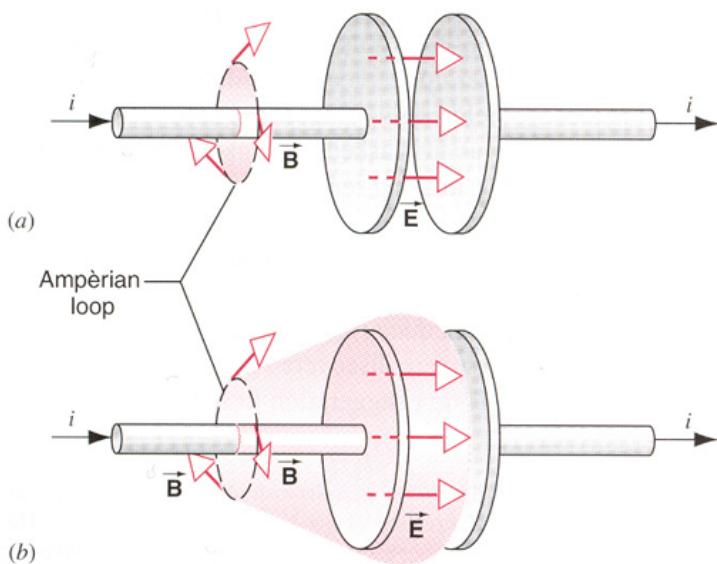


图 8.34: 位移电流引入

我们对一个平行板电容器充电放电过程中，在导线部分绕一个安培环路，它包围的部分首先是 S_1 ，很明显其中包围了一个电流，我们能够计算这个磁感应强度。当然，安培定理也指出这样的面可以是任意的，因此维持边界圆形不变，我们可以把包面从平行板间穿过（即 S_2 ），这时不存在实际的电流，安培定理推论此时的磁感应强度为 0。

那么问题产生了，同一个地方不可能出现两个不同的磁感应强度，因此我们推测此时安培定理除了原本的 $\mu_0 I$ 之外还有另外的一些项以维持结果相同。结合法拉第电磁感应定律中指出的，磁通量的变化将导致电的产生，我们自然会想到电通量的变化是否也会产生磁场。进一步地，我们希望有一个类似于电流的意义的物理量的出现。

继续使用电容器充电过程分析。我们已知平行板电容器产生的电场为 $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ，那么我们取平行于极板的平面试着计算一下电场通量相对于时间的变化率，如下：

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{d(\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A})}{dt} = \frac{d\sigma S}{\epsilon_0 dt} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dQ}{dt}$$

对于最终的一项微分，我们已经知道 $\frac{dQ}{dt}$ 的含义即为电流，那么这个与电流具有类似物理意义的一项已经显而易见了，我们把它定义为 *displacement current*

：

定理 8.29 Definition: Displacement current

我们定义 *displacement current* 与电通量随时间的变化率成正比，具体为：

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

以及位移电流密度：

$$J_d = \epsilon_0 \frac{dE}{dt} = \frac{dD}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}$$

由此我们得到了最终完整的麦克斯韦方程：

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

定理 8.30 Ampere-Maxwell law

该定理为麦克斯韦方程中关于磁感应强度计算的积分形式，如下：

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

考虑介质，该方程的完整形式应当为：

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

8.18.2 Nature of Electromagnetic Waves

麦克斯韦方程组的重要意义不仅仅在于提供了计算电和磁的方法，其中也同时包含了很多电磁学的理论，包括我们耳熟能详的光速不变性。一般而言，推导的考察并非重点，而对于采用了真空间题的推导，在有介质的空间中需要对相关方程进行一定的修正。

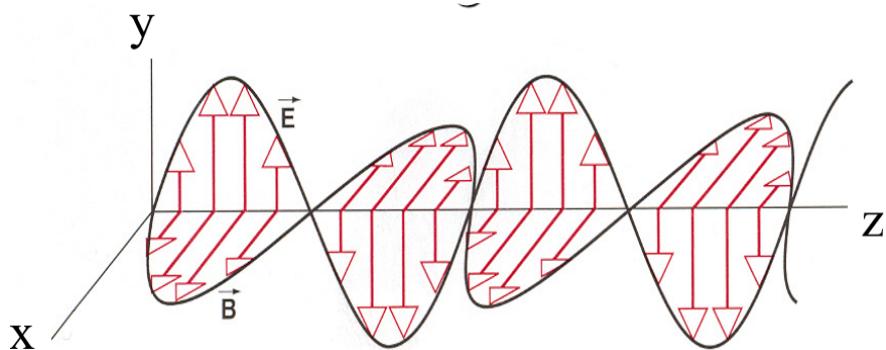


图 8.35: 电磁波

电磁波人为可以通过 LC 电路等产生，通过一定的设计实现波动的传播，实现远距离通信等作用。在传播过程中，根据麦克斯韦方程有相应的结论：

定理 8.31 电磁波的性质—Prove 8.8~P 286

在自由空间（电荷密度 $\rho = 0$ ，电流密度 $J = 0$ 的空间）中，电磁波满足：

- 麦克斯韦方程组满足狭义相对论。
- 电与磁作为波的存在性：麦克斯韦方程组证明了电磁波的存在，且电磁波是横波且是偏振的。 E 、 B 、传播方向两两相互正交。
- 电磁波中电场和磁场始终是共面的，二者相位差为 0。
- 光是一种电磁波，且真空中光速满足 $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$
- 守恒律：电荷总量、动量、能量三者均守恒。
- $E = cB$ ，因此大多数仪器包括人眼对于电场的变化更为敏感。

既然电磁波能够包含一定的能量进行传播，我们希望定量化这个能量，由此下面给出 *Poynting vector* 的定义：

定理 8.32 Poynting vector

我们定义 *Poynting vector* 为:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

该变量也可以用字母 P 。

在单位制的含义上，坡印廷矢量代表了单位时间内通过单位面积的能量，即相对于面积的功率密度。由定义式可见，该矢量的方向等同于电磁波的传播方向。

同时也有相应的坡印廷定理：闭合面上坡印廷矢量的面积分，等于从这个包面所包围的体积散发的功率。

当然我们可以进一步理解为什么这样定义，根据光速的表达式以及之前已知的能量密度的概念，我们可以得到总的能量密度为 $u = \frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{B^2}{2\mu}$ 使用 $E = cB$ 代换后可以最终得到：

$$u = \epsilon E^2 \Rightarrow S = cu$$

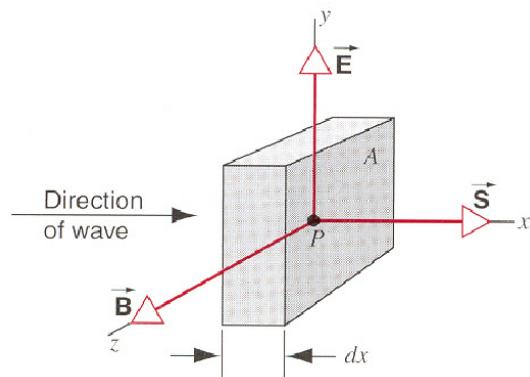


图 8.36: 功率密度的进一步理解

如上图所示。我们假设一段很小的时间 dt ，此时考虑这段时间里穿过一个平面的能量。则有：

$$dU = u dV = \frac{SA}{c} dx = SA dt \Rightarrow S = \frac{P}{A}$$

对于一个振动的波而言，我们定义电磁波的强度为：

$$I = \bar{S} = \frac{1}{2\mu} EB$$

当然我们知道磁场强度与磁感应强度的关系，因此上述结论均可以将 B 替换为 H 。对于一个一般的电磁波可得：

$$S = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

最后，光作为一种电磁波，根据波长（或者说频率）的不同，可以分为不同的类别：

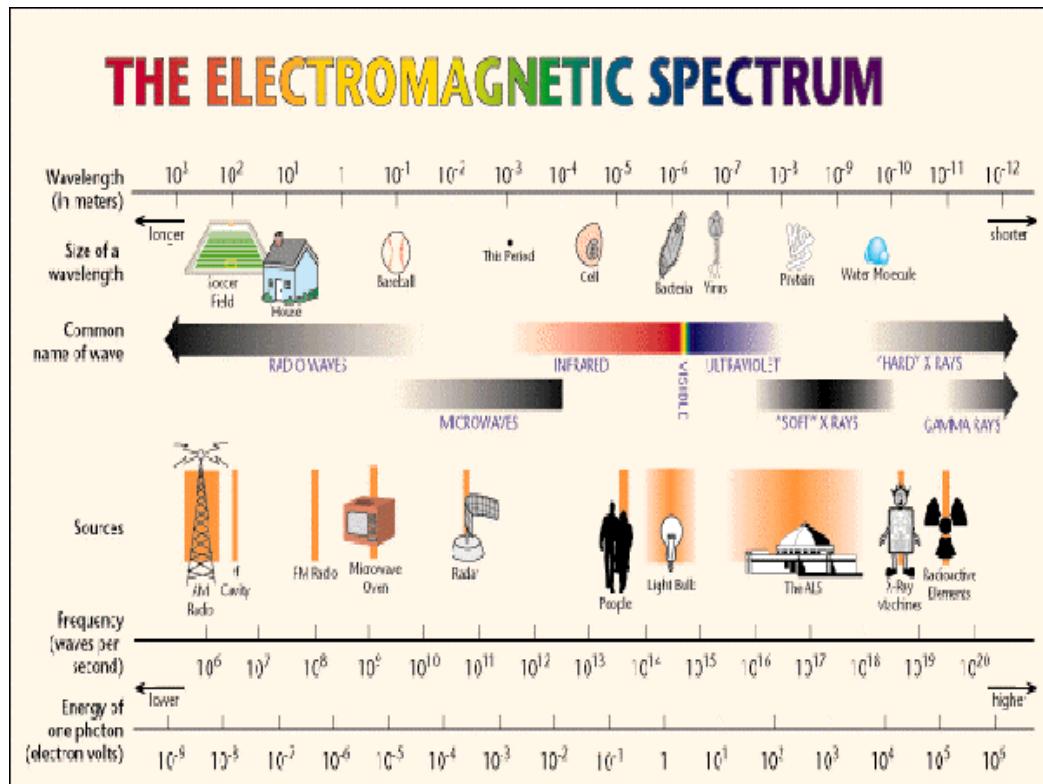


图 8.37: 光

- 可见光（波长 400nm-700nm）：光谱中很窄的一段。电子的能级跃迁将释放光子，为探测物质结构提供方法。
- 红外线（波长 $0.7\mu\text{m}$ -1mm）：原子或分子改变其旋转或振动时会释放红外线，所有物体都会发射电磁辐射，可用于红外线夜视仪、辐射温度计等。
- 微波（波长 1mm-1m）：通常由电路中的电磁震荡产生，微波可用于通信。宇宙中存在微波背景辐射。
- 无线电波（波长大于 1m）：通常由电子振动产生，地球大气对无线电波的吸收很小。

- 紫外线（波长 1nm-400nm）：一般会由外层电子跃迁产生，太阳射向地球的紫外线大多会被臭氧层吸收。
- X 射线（波长 0.1nm-10nm）：一般由电子跃迁产生，可用于医学诊疗和天体观测（如观测黑洞等）
- 伽马射线（波长小于 10pm）：一般在一个原子核状态转变为另一种状态，或在某些粒子衰变的过程中产生。

8.19 Summary

电磁学这一章节过于长且复杂，同时考试占比较高。为了让读者能够更加充分地看到电与磁的对偶关系，我们将上面的重点内容展示如下。需要注意的是，下面例如 \hat{r} 是仅表示方向的单位矢量：

Electric Field	Magnetic Field
$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$	$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q \mathbf{v} \times \hat{r}}{4\pi r^2}$
	$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i d\mathbf{l} \times \hat{r}}{4\pi r^2}$
$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$	$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$
$\mathbf{p} = q\mathbf{d}$	$\boldsymbol{\mu} = i\mathbf{A}$
电偶极子连线的中垂线上： $\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 x^3} \frac{\mathbf{p}}{x^3}$	磁偶极子轴线上： $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi z^3} \boldsymbol{\mu}$
$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$	$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{B}$
$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$	$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{B}$
$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{\sum q}{\epsilon_0}$	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$
$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum i$
极化时： $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}' = \frac{1}{\epsilon_r} \mathbf{E}_0$	磁化时： $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{M} = \mu_r \mathbf{B}_0$
$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$	$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$
$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_0$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum i_0$

Electric Field	Magnetic Field
$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad \varepsilon_r = \kappa_e$	$\mu = \mu_0 \mu_r \quad \mu_r = \kappa_m$
$\varepsilon = \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{E}}$	$\mu = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{H}}$
电容 $C = \frac{q}{\Delta V} \quad i = C \left \frac{dV}{dt} \right $	电感 $L = \frac{N \Phi_B}{i} \quad \varepsilon = -L \frac{di}{dt}$
$q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-t/\tau}) \quad \tau = RC$	$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-t/\tau}) \quad \tau = \frac{L}{R}$
$U_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$	$U_B = \frac{1}{2} L i^2$
$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$	$u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$
$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 i_d = \mu_0 \varepsilon_0 \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$
动生电动势 $\varepsilon = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$	

另外如果面向历年卷拟合，读者应当对于坡印廷矢量也有所了解。

8.20 课后习题：电磁学

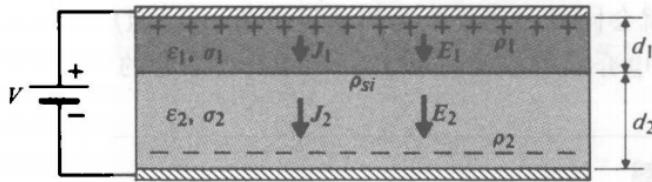
习题 8.1 Polarization — Solution 8.1 ~ P 354

A positive point charge Q is located at the center of a spherical shell dielectric with an inner radius of R_i and an outer radius of R_o , where the dielectric constant is ε_r . Determine the functions \mathbf{E} , V , \mathbf{D} , and \mathbf{P} as a function of the radial distance R .

习题 8.2 Current Density/Boundary Condition — Solution 8.2 ~ P 355

As shown in Figure bellow. An electric field is applied between the plates of a parallel plate capacitor with an area S . The space between the two metal plates is filled with two dielectric materials of different thicknesses d_1 and d_2 , with dielectric constants ε_1 and ε_2 , and conductivities σ_1 and σ_2 .

Determine the following:



- (a) The current density between the two parallel plates.
- (b) The electric field strength in the two dielectric materials.
- (c) The surface charge density on the two parallel plates and at the interface.

习题 8.3 Magnetic Field —Solution 8.3~P 357

As shown in Fig.a. There is a toroidal iron core with a relative magnetic permeability $\mu_r = 3000$, an average radius $R = 80$ mm, and a circular cross-sectional radius $b = 25$ mm. The length of the air gap is $l_g = 3$ mm. A winding of $N = 500$ turns produces a magnetic flux $\Phi = 10^{-5}$ Wb. Neglecting magnetic leakage and using the average path length, calculate:

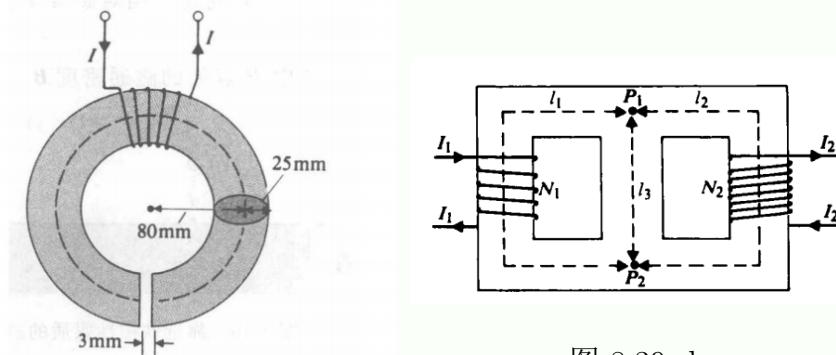


图 8.39: b

图 8.38: a

- (a) The magnetic induction intensity B_g and magnetic field strength H_g in the air gap, and B_c and H_c in the iron core
- (b) The required current I
- (c) Similar to circuits and resistors, there are also concepts of magnetic circuits and *magnetic resistance* in magnetism. The latter is a constant independent of the number of turns in a coil and is only related to the object itself. Magnetic resistance characterizes the hindrance to the magnetic flux

passing through the magnetic circuit, and its unit is H^{-1} . Given that the scaling coefficient in its expression is 1 (with no additional constant factor). Taking Fig.a as an example, calculate the magnetic resistance of the iron core R_c and air gap R_g respectively, and denote the magnetic flux by N , I , R_g and R_c

(Hint: The unit of inductance is H)

(d) Consider the magnetic circuit in Fig.b. Two windings with turns N_1 and N_2 are wound on the two side limbs of the ferromagnetic core. The cross-sectional area of the core is S , and the permeability is μ . The length of the left, center and right limb is l_1, l_2, l_3 respectively. Determine the magnetic flux in the center limb.

(Hint: Observe the expression of magnetic flux in (c) and attempt to extend Kirchhoff's law to magnetic circuits)

习题 8.4 Poynting's Vector —Solution 8.4~P 360

A long and straight cylindrical wire with a radius of b and an electrical conductivity of σ carries a direct current of I , and the current is uniformly distributed in the wire, as shown in the following figure. Find the Poynting vector on the surface of a cylindrical wire and prove the Poynting theorem: The surface integral of the Poynting vector on a closed surface is equal to the power radiated by the volume enclosed by this closed surface.

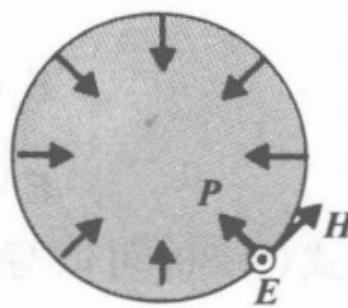


图 8.40: a

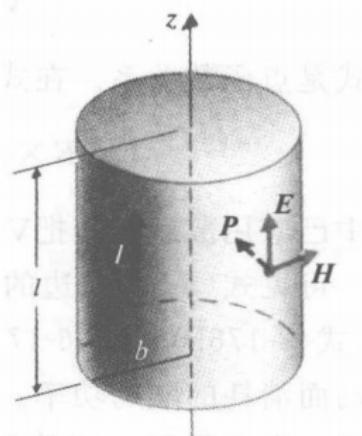


图 8.41: b

习题 8.5 Polarization —Solution 8.5~P 361

There is a permanently polarized insulating sphere of radius R with the polarization $\mathbf{P} = P_0 \frac{r}{R} \hat{r}$. Find the electric field E_{in} inside sphere and E_{out} outside sphere as functions of r respectively.

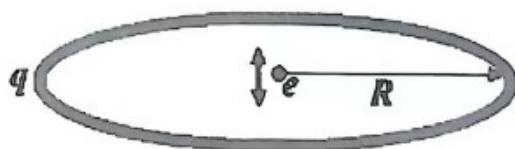
习题 8.6 Mutual Induction —Solution 8.6~P 361

Please prove: In any case, for mutual inductance M_{12} and M_{21} , the following equation exists:

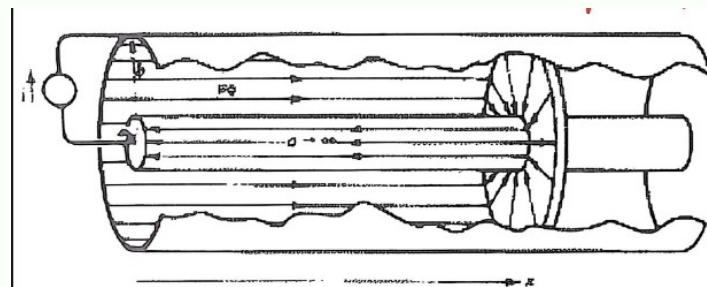
$$M_{12} = M_{21}$$

习题 8.7 Point charge —Solution 8.7~P 364

As shown in figure below, an electron is constrained to move along the axis of the ring with a charge q . If the electron can perform small oscillations through the center of the ring, calculate its oscillation frequency.

**习题 8.8 Magnetic Field and Current —Solution 8.8~P 364**

As shown in figure below, there is a *coaxial cable* made of superconducting material ($\sigma \rightarrow \infty$), and having short *circuited end* free to move along the x axis. The radius of its central rod is a and its outer diameter is b .



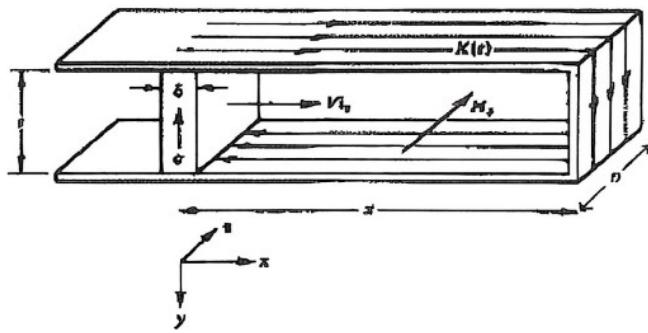
(a) What is the inductance of the cable as a function of x ?

(b) What is the force on the end? If the magnitude of the current it carries

is i .

习题 8.9 Electromagnetic field —Solution 8.9 ~ P 365

As shown in figure below, a thin block with conductivity σ and thickness δ moves with constant velocity v_{ix} between short circuited superconducting parallel plates. An initial surface current K_0 (the current per width) is imposed at $t = 0$ when $x = x_0$, but the source is then removed.



- (a) The surface current on the plates $K(t)$ will vary with time. What is the magnetic field in term of $K(t)$? Neglect fringing effects.
- (b) Because the moving block is so thin, the current is uniformly distributed over the thickness δ . Please find $K(t)$ as a function of time.
- (c) What value of velocity will just keep the magnetic field constant with time until the moving block reaches the end?

9

Optics

BLANK

期待你的建设

10

Quantum Physics

首先恭喜各位马上将会结束普物的考验。最初作者本人本想以“近代物理”作为章节标题，但考虑到具体内容和难度，还是以“量子物理”作为标题。

我们需要预先告诉各位的是，本章节的内容相较于前面的内容更为抽象化。但面向课程受众与期末考核的话，课程依然仅仅停留在量子力学的表面，并不需要各位很强的数理功底，因此大家需要尤其记忆重点公式以学会套用结论即可（偶尔需要适当举一反三 doge）。



图 10.1: 人类群星闪耀时

1927 年第五届索维尔会议，人类群星闪耀的时刻。

愿各位读者在本章节能够大神附体、所向披靡！

10.1 *Everything starts with light*

中学物理已经告诉我们，量子力学的故事要从光开始说起。在前面一个章节中我们已经了解到光的波动性，但学界争论许久的光的问题并未完全解决。在

著名的黑体辐射问题上科学家发现了一些端倪 ······

黑体模型是一个理想模型，我们预先给出一些概念：

- 黑体能够完全吸收所有入射辐射
- 黑体能够发出所有波长的辐射，但在某些波长上出现峰值，该波长仅与黑体的温度有关
- 许多高温物体与黑体有类似的辐射。
- *emissivity* 是物体发射的单色辐射强度与相应黑体辐射的比值，即：

$$\varepsilon_\lambda = \frac{I_\lambda(\text{emitted})}{B_\lambda(T)}$$

- *absorptivity* 是入射单色强度被吸收的分数，即：

$$A_\lambda = \frac{I_\lambda(\text{absorbed})}{I_\lambda(\text{incident})}$$

- 基尔霍夫定律指出，在热力学平衡条件下， $\varepsilon_\lambda = A_\lambda$ ，这暗示了在特定波长下能很好地吸收能量的物体在该波长下也是很好的发射器。
- *Spectral emittance*：单位面积单位时间中每个波长间隔之间的强度，即

$$R_\lambda(T) = \frac{dR_\lambda}{d\lambda} \quad \text{单位 W} \cdot \text{m}^{-3}$$

- *total intensity* : 单位面积单位时间，在所有波长上分布函数的积分，即

$$R(T) = \int_0^\infty R_\lambda(T) d\lambda \quad \text{单位 W} \cdot \text{m}^{-2}$$

定理 10.1 Stefan-Boltzmann law

一个黑体表面单位面积辐射出的总辐射强度与黑体本身的热力学温度 T （又称绝对温度）的四次方成正比，即：

$$R(T) = \sigma T^4$$

其中常数 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ 。

定理 10.2 Wien displacement law

黑体辐射过程中，随着黑体温度的不同，其发射的最大波长也不同，满足以下等式：

$$T\lambda_{max} = b$$

其中常数 $b = 2.898 \times 10^{-3}$ mK。

在探索黑体辐射的完整公式的过程中，诸多物理学家提出多个公式，但无一例外地，都无法正确符合最终的实验结论。最终普朗克通过量子的观点提出了普朗克公式：

定理 10.3 Planck's radiation law

$$R(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(e^{hc/\lambda kT} - 1)}$$

其中 h 为普朗克常数， c 为光速， k 为玻尔兹曼常数。同时普朗克常数给出粒子的能量为 $E = h\nu$ 。

- 当 λ 足够小时即为维恩公式 $R(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5}e^{-C_2/\lambda T}$ ，根据普朗克的公式可见 $C_1 = 2\pi hc^2$, $C_2 = hc/k$ 。
- 当 λ 足够大时即为瑞利-琼斯定律， $R(\lambda, T) = \frac{2\pi ckT}{\lambda^4}$ 。
- 对该公式在 0 到正无穷积分，可得斯特藩-玻尔兹曼定律。
- 对该公式微分求最大值，可得维恩位移定律。

在对于光电效应的研究中，物理学家也发现一些问题，光电效应存在最大电流密度、截止频率，并且其从初态到产生光电效应的时间间隔非常小。最终爱因斯坦通过普朗克的量子理论成功解释了光电效应。在光电效应中，光被视为粒子作用于金属表面激发出光电子。具体结论中学已经学过：

定理 10.4 Photoelectric effect

$$h\nu = K + A$$

其中 K 表示逸出的电子的动能， A 表示逸出功。由此可以解释电流密度不同为光子的数量导致电子逸出的数量不同，进而表征了光辐射强度

$I = N h \nu$, 并且可以计算出截止频率。

10.2 The Compton Effect

康普顿在通过光击打特定物质的时候发现, 散射出的光中存在一些新的波长, 波长差与散射角度以及粒子质量有关。同样的, 他使用普朗克的量子理论推论得到康普顿散射公式^[1]。

定理 10.5 The Compton Effect—Prove 10.1~P 291

入射和出射光的波长差为:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi)$$

其中 m 为粒子的质量, 康普顿散射考虑了相对论效应。

进一步地, 我们可以得到光的波粒二象性。同时二象性能够推广到所有物质, 称为物质波(或者叫德布罗意波)。德布罗意在其博士论文中预言了物质波的存在, 并在不久的将来, 电子的波动性被成功观测, 德布罗意因此凭借博士学位论文获得诺贝尔奖。

下面我们给出结论, 这些都是量子理论的核心思想:

定理 10.6 Wave-Particle duality

经过量子观念的思考并推广, 我们得到波动与粒子的相互关系:

- 光子的能量 $E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$
- 光子的动量 $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$
- 光辐射强度 $I = N h \nu$

需要注意的是, 这里的公式还需要考虑相对论对于粒子质量的影响, 若没有特殊提示, 则不需要参数修正。

^[1]温馨提示: 该公式的推导曾经作为部分老师的期末考试大题出现

10.3 Discussion on Atoms Stability

“原子”之义，在于世界本源的基本粒子。但随着科学的进展，越来越多的实验发现了原子的内部组成，对于原子结构的理解也在不断地发展。

汤姆孙于 1897 年发现电子的存在，并提出一种布丁模型——正电荷均匀分布在原子内部，带负电的电子则被放置在适当的平衡位置；但同时也出现一些问题，例如该理论认为受到扰动后电子振动并发出特定频率的光，但实际的氢原子光谱却异常复杂。卢瑟福基于 α 粒子散射实验提出了一种新的模型——正电荷在原子中心形成微小的原子核并聚集了原子的绝大部分质量，电子绕着原子核运动，原子远大于原子核的大小；但这一理论违背了麦克斯韦方程，移动电荷意味着光的辐射，危害了原子的稳定性。

对于最简单的氢原子，物理学家开始关注于他的原子光谱，并致力于得到能够适配光谱实验数据的理论体系。其中巴耳末系具有深远影响，该理论认为氢原子的光谱波长满足：

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad R_H = 1.0967758 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

更一般地，我们可以替换其中的 2 为 k ，即为 $\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = k+1, k+2, \dots$ ，根据 k 值的不同有不同的名字，从 1 到 4，依次为莱曼系（紫外波段）、巴耳末系（可见光波段）、帕申系（红外波段）、布拉开系（远红外波段）。

这时，一个叫做波尔的物理学家想到了普朗克的天才发现。不加证明地（实际上波尔本人也没有给出证明），他给出了一个新的氢原子模型：

- 原子中的电子能够维持在稳定的状态而不产生辐射。
- 原子吸收或发射特定波长的辐射后将会从一个稳定的状态转移到另一个稳定的状态。
- 原子外部运动的电子的角动量是约化普朗克常数的整数倍，即 $L = n\hbar^{[2]}$

这可以概括为三个假设：能级假设、跃迁假设以及轨道量子化假设。

在波尔的天才设想之下，我们利用经典观念中的原子模型，以氢原子为例，获得了一些关于量化轨道与能量的结论：

^[2]由于普朗克常数与 π 经常同时出现，因此定义约化普朗克常数 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

定理 10.7 Quantized Orbits and Energy —Prove 10.2~P 292

我们利用波尔的原子模型中的正整数 n 作为各个物理量的下角标，可得：

- 波尔半径 $r_1 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 5.29 \times 10^{-11} \text{m}$
- 氢原子的 *Ground State* 能量 $E_1 = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} = -13.6 \text{eV}$
- 多个能级之间的能量关系 $E_n = \frac{E_1}{n^2}$
- 从高能级 i 到低能级 j 的过程中辐射的光的频率为：

$$\nu_{ij} = \frac{E_i - E_j}{h} = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2} \right)$$

通过对比巴耳末系等相关的光谱理论，我们可以推导出其中相应的常数。

后续，波尔的理论也进一步被弗兰克-赫兹实验证实，他们测出了汞原子存在 4.9eV 的基态，与波尔的预测相符。

在这样一群人类脑力斗智斗勇的领域，量子力学四个最重要的思想产生了：

- 波尔的互补原理/海森堡测不准原理
- 波粒二象性
- 用概率解释波函数
- 对应原理——在更大的量子数下量子力学与经典力学的结合。

在德布罗意将光的波粒二象性拓展到所有物质的时候且有诸多实验证实之后，有人会思考，既然粒子具有波的特性，那么波上最稳定的驻波位置是否能够保证原子的稳定性？答案是否定的。驻波存在的情况下我们依然会发现有震荡的产生，这并不利于保证稳定性。

10.4 Uncertainty principle

这时，一个叫做海森堡的人站了出来，他提出了利用矩阵描述量子力学的方法，并进一步提出了不确定性原理。海森堡认为，与其考虑那些无法被测量

的神奇的原子轨道，不如考虑其他的由这些状态表现的物理量。他认为所有物理量都应该使用矩阵表示，并提出：

定理 10.8 Uncertainty principle

$$xp - px = i\hbar$$

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2 \quad (\text{注})^a$$

根据海森堡的不确定性原理，我们进一步可以得到：

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar/2 \quad \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar/2 \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar/2$$

以及能量-时间不确定性公式：

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$$

^a事实上，不确定性原理展示的所谓误差应当为测量的标准差，即 $\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \hbar/2$

不确定性原理的含义有两个层面，一是测量某个属性时存在不确定性，二是对于一组有不确定性关系的属性，其标准差的乘积应当不小于某个大于 0 的常数值。

原子的稳定性通过舍弃轨道的思想，转而使用波的概念进行了解释。为了解释这些定态的存在，我们需要找到具有静态概率密度的时变波函数 $\psi(x, t)$ 。

波通常以三角函数表示，我们有必要对相关思考进行一些了解。我们首先需要了解复平面以及欧拉公式：

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

因此，三角函数（及其四则运算）均能够转化为复数形式的运算。这也是薛定谔方程推导的第一个思考：我们已经明白波粒二象性。在“波”这一概念下，我们写出其一般方程：

$$y(x, t) = \cos(\omega t - kx)$$

因此我们得到波函数：

$$\Psi(x, t) = \psi_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

展开后取实部就是我们一般认为的采用三角函数表示的波的形式。

其共轭表示为：

$$\Psi^* = \psi_0 e^{-i(kx+\omega t)}$$

波函数及其共轭的乘积为实数，这是一个概率密度函数（概率与概率密度是两个不同的概念），它表征了量子世界中粒子出现的概率：

$$P(x) = \Psi\Psi^* = |\psi_0|^2$$

波函数具有一些性质：

- 波函数 Ψ 是单值的、连续的；
- 波函数利用薛定谔方程，可以简化能量的计算；
- 如果粒子存在，那么探寻所有的位置，找到粒子的概率为 1。波函数存在以下性质：

$$\int_0^\infty P(x) dx = 1$$

在波函数的概率诠释中，我们无法找到一个粒子在某一时刻的准确量，我们只能找到其统计量，比如某个物理量的期望值。也就是说能够表述这个物理量的平均值，以及其方差等在统计学上的概念。类似下面这个例子：

位置的期望⁽¹⁾ $\bar{x} = \int xP(x) dx$

那么，我们需要找到这么一个可以应用波函数的方程，学界需要一股新的思想潮流。

(1) 在专业书籍中，通常用符号 $\langle x \rangle$ 表示

10.5 Schrödinger Equation and Its Applications

10.5.1 Schrödinger Equation

物理学界天才横空出世，提出 *Schrödinger Equation*。该方程成为波动力学的重要方程之一，并经受住了时间的考验。我们给出薛定谔方程的形式如下^[3]：

^[3] 少数教师的期末会考到该方程的默写，请注意记忆

定理 10.9 Schrödinger Equation —Prove 10.3, ~P 293

低速自由粒子的一维薛定谔方程：

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x, t) \right] \Psi(x, t) \quad (\text{一维})$$

或者：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(x, t) + U(x, t) \Psi(x, t) \quad (\text{三维})$$

其中 $\psi(x, t)$ 为波函数， $U(x, t)$ 为势函数。

当参数不随时间变化的时候，为定态薛定谔方程，定态可以理解为不随时间变化，例如静止的电场。方程简化如下：

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(x)] \psi(x) = 0 \quad (\text{一维})$$

或者：

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x) + U(x) \psi(x) = E \psi(x) \quad (\text{三维})$$

如果我们定义一些算符，可以将这个方程进行简化的表述。我们定义四个算符：

- 能量算符： $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \cong E$
- 动量算符⁽²⁾： $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \cong p$
- 动能算符： $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cong \frac{p^2}{2m}$
- 哈密顿算符： $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U \cong H$

因此简化表达为： $E\Psi = H\Psi$ ，其中满足方程的函数 Ψ 为本征函数， E 为对应本征值。

⁽²⁾ 事实上，这一算符是基于波函数概率诠释的基础，求解动量的期望值得到的。光的波动方程形式与波函数一致，亦可类比。

后续，狄拉克等人对薛定谔方程进行了相对论下的修正。但本章节，我们更多对于定态，尤其是一维非相对论情况下的定态进行分析。

对于一维自由粒子，其势函数为 0；且 $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$ ⁽³⁾， E 为能量。

⁽³⁾ 后面的指数项被称为时间因子

此时的薛定谔方程将简化为二阶微分方程：

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) = E\Psi(x)$$

解得最终结果：

$$\Psi(x) = \psi_0 e^{ikx} \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

采用这一理论解决驻波问题有了眉目。在一维空间中，宽度为 L 的无限深势阱前提下的波函数满足：⁽⁴⁾

$$\Psi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(kx) e^{i\omega t}$$

(4) 这一结论将会在下一部分详细讲解求解过程

根据能量和动量的关系：

$$E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

此时电子的概率密度表示为：

$$P(x) = \frac{2}{L} \sin^2(kx)$$

明显，这是一个与时间无关的不小于 0 的常量⁽⁵⁾。其再乘上电子电荷 $-e$ 即为电荷密度（统计学意义上）。不随时间而改变则意味着原子是稳定的，且电荷密度是稳定的。电荷密度的稳定带来的是静电场，是没有辐射的，因此能量也不会被耗散。综上，困扰科学家的原子稳定性之谜有了合理的解释。

(5) 对于定态的波函数而言，时间因子会在概率的表达式中被消去，这与之定态的情况相符

定理 10.10 Principle of superposition of states

对于满足薛定谔方程的解 Ψ ，称为粒子的一个状态。如果多个状态 Ψ_i 都满足是粒子的状态，则其线性组合也是粒子的一个可能的状态，称为 *Principle of superposition of states*：

$$\Psi = \sum_i c_i \Psi_i \quad c_i \text{ 为复常数}$$

态叠加原理是“波的叠加性”和“波函数完全描述一个体系的量子态”的概括。假设有这样一个粒子，在本征态 Ψ_1 下测量一个力学量可以得到一个确切的测量结果 a_1 ，在本征态 Ψ_2 下测量可以得到另一个确切的结果 a_2 。那么在定态下测量，可以得到一个概率为 1 的确切结果，且测量后状态不变。而在非

定态时，由于叠加态的存在，多个本征态测量结果中的任意一个本征值都可能出现，它们出现的概率由权重 c_i 确定，分别为 $|c_i|^2$ ($\sum |c_i|^2 = 1$)。粒子有多种可能的状态，而测量时单次只能观测到一种状态的结果，这被称为量子态坍缩。事实上，薛定谔的猫阐述的就是这样的理论。

态叠加原理表明，测量一个物理量时，微观世界的行为会由于某种不知名的影响而产生概率化的表现。一些观念认为，某一刻时我们测量的一个值，在波的行为上呈现为一个尖锐的峰，而测量之后它会立刻以波的形式弥散开来。不过无论是否这个解释合理，我们不得不承认，在大多数情况下，我们对同一个粒子的同一个力学量测量许多次，每一次的测量都是不可预知的，测量的结果种类也是多种多样的。

10.5.2 *Infinitely Deep Potential Well in 1D*

我们以一维为例探索薛定谔方程的应用。所谓无限深势阱，是针对势函数 U 而言的。以金属原子为例，其势函数相当复杂，我们希望简化波函数的计算就需要近似。首先，粒子除非受到非常大的外部作用，否则只能在原子内部有限体积内运动，因此外部可以视为势函数无穷大。而原子内部的势函数可以近似为定值，使用平均势能代替晶格势能，也就是电子是一定区域内的自由电子，不考虑电子间以及电子与晶格离子间的作用。零点势能的选择是任意的，因此可以得到无限深势阱。求解薛定谔方程，重点在于找边界条件。

对于下面所示的势函数（请注意，势函数的不同将导致波函数不同，此处仅为示例）：

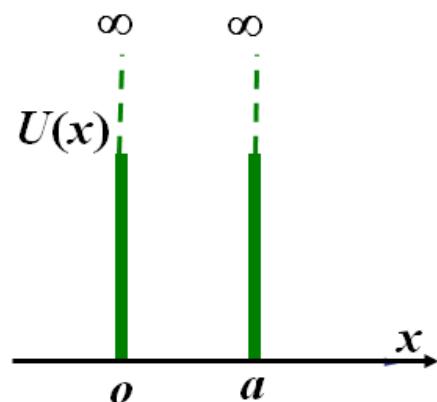


图 10.2: 一种一维无限深势阱

我们对于该势阱的势函数的定义为：

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x \in (0, a) \\ \infty & x \notin (0, a) \end{cases}$$

定理 10.11 An Infinitely Deep Potential Well in 1D —Prove 10.4 ~ P 294

对于上面所述的一维定态无限深势阱，通过薛定谔方程能够解得其波函数为：

$$\Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) & x \in (0, a) \\ 0 & x \notin (0, a) \end{cases}$$

10.5.3 The Quantized Energy and Probability of Detection

根据之前的结论（部分结论为上述公式推导中得到，若不理解可以参考推导过程），我们现在得到了以下等式：

$$k = \frac{n\pi}{a}$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

我们因此可以得到量化的能量表达式：

$$E = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

$n = 1$ 时为零点能，我们发现等式并不为 0。这可以用不确定性原理解释。当能量趋近于 0 时，则动量（及其变化率）趋近于 0，由此得到位置的测量误差 Δx 区域无穷大。但是我们又已知粒子只可能在势函数为 0 的位置出现，这是一个有限值，由此导出矛盾，因此能量有最低的非 0 值。

进一步地，我们可以得到概率密度分布，这可以有效说明粒子的稳定性等现象，当然我们知道，概率密度较高处发现粒子的概率较大：

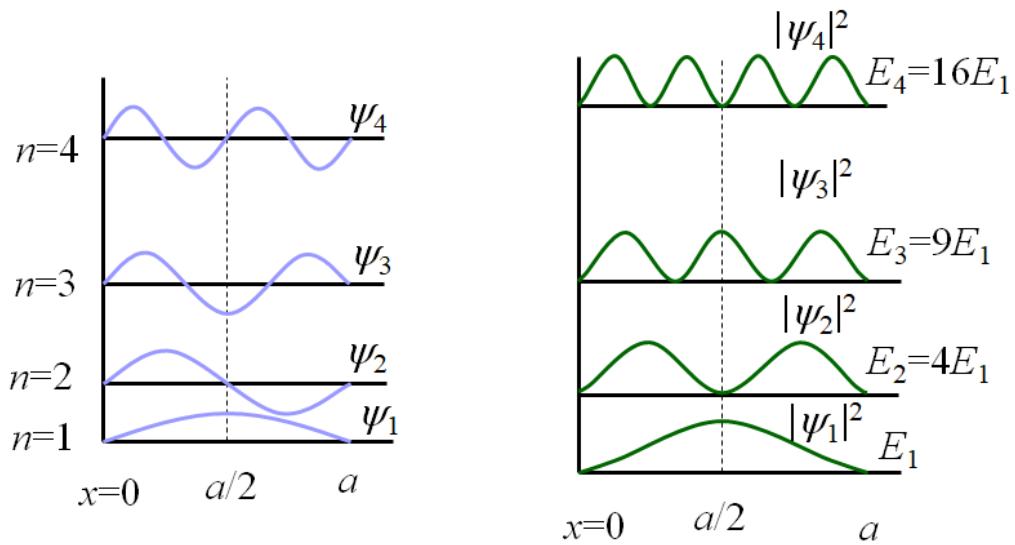


图 10.3: 波函数与概率分布

当然，粒子大多数情况下是振动的，我们可以将其运动简化为一个谐振子。采用经典力学中的机械波，我们有：

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

继续使用一维定态薛定谔方程，解得：

$$E_n = \left(\frac{1}{2} + n\right)\hbar\omega$$

$n = 0$ 时也是零点能。

10.5.4 Tunnelling Effect

之前我们讨论了一维无限深势阱，那么如果势函数（或者说势垒）不是无限大会如何呢？我们考虑一个粒子的波动在沿着一维运动，恰好前方遇到一堵高墙，单凭借粒子自身的动能无法达到墙的最高点，那么所有粒子都会被反射吗？答案是否定的，根据隧穿效应，这种情况下依然有可能使得部分粒子越过这堵高墙跨到另一侧，就好比在你马上撞到墙的时候你发现身体穿过了墙，这就是隧穿效应的直观表现。隧穿效应就是微观版的崂山道士。

考虑如下的势垒以及其势函数：

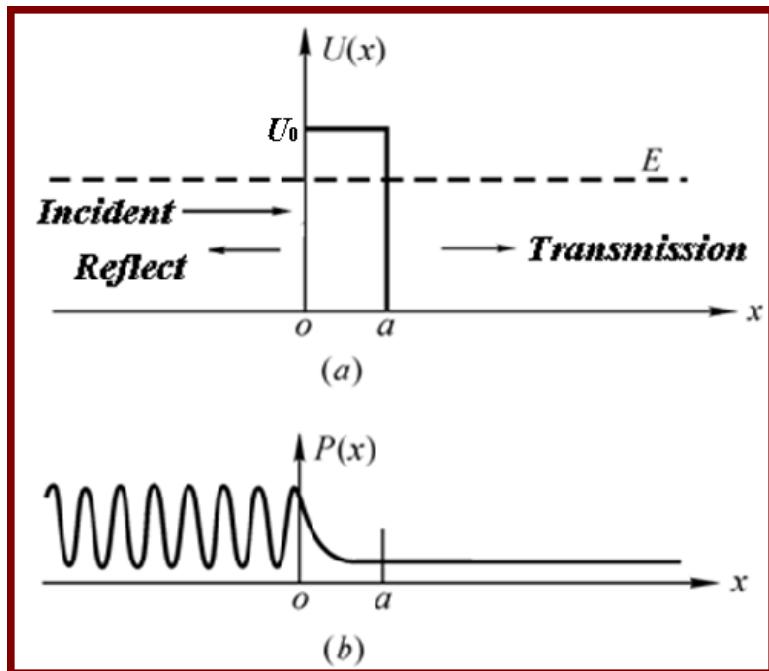


图 10.4: 隧穿效应示意图

$$U(x) = \begin{cases} U_0 & x \in [0, a] \\ 0 & x \notin [0, a] \end{cases}$$

定理 10.12 Tunnelling Effect —Prove 10.5 ~ P 295

对于上述的隧穿效应，其隧穿概率（穿过势垒的粒子与入射的粒子的比值）为⁽⁶⁾：

$$T \propto e^{-2ka} \quad k = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

(6) 注意这里是正比关系，不能取等。精确值见推导过程

类似隧穿效应，如果粒子在运动的时候遇到一个势垒较低的坑，粒子能够完全跳过去吗？答案也是否定的。粒子完全穿透的情况只有势垒水平恒定时才会出现。

因为隧穿效应的伟大发现，我们能够进一步探微，量子隧道显微镜因此得以发明和应用，同时隧穿效应也成功解释了在原子核巨大吸引力的情况下放射性元素依然能够 α 衰变释放核子的原因。

10.6 Hydrogen Atom

由于氢原子假想为一个球体，我们可以用球坐标轴替换其薛定谔方程，其中三个参数可分离。其中涉及的计算过于复杂，有兴趣的同学可以参考详细的量子力学的书籍。我们这里只描述得到的一些概念：

定理 10.13 Three quantum numbers

我们给出一些符号及其概念，他们与普通化学课程的定义一致：

- *Principle quantum number* : $n \quad n = 1, 2, 3, \dots$, 表征能量量子化，这里的符号与前面的公式中的 n 相同。

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} = -\frac{13.6eV}{n^2} \text{(数值仅对于氢原子)}.$$

- *Orbital Angular momentum quantum number* : $l \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1$ or s, p, d, f, \dots , 它表征了电子云的空间形态。

$$\text{轨道角动量 } L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$$

- *Magnetic quantum number* : $m_l \quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$.

外加磁场时角动量在磁场方向的分量 $L_z = m_l \hbar$, 它也表明轨道角动量的方向是量子化的。

- *Spin quantum number* : $s = \frac{1}{2}$

$$\text{spin angular momentum } S = \sqrt{s(s+1)}\hbar$$

- *Spin magnetic quantum number* : 根据自旋与外加磁场的关系得到

$$m_s = \pm \frac{1}{2}$$

如果外加磁场方向与自旋角动量方向平行，则有 $L_{sz} = S_z = m_s \hbar = \pm \frac{1}{2} \hbar$

在上述几个定义中， L_z 是 L 在 z 轴上的分量。轨道角动量与其沿 z 轴旋转的角度依然符合不确定性原理。

另外，在球坐标求解氢原子波函数的过程中，我们定义径向概率密度：

$$P(r) = r^2 |R_{nl}(r)|^2$$

其中 $R_{nl}(r)$ 是球坐标下三个变量中关于半径距离的函数，径向概率密度函数与波函数的概率密度函数含义一致，区别在于径向概率是在半径方向上积分得到，即 $P(r) dr$

主量子数标定能级；轨道量子数标定电子在哪个轨道上；磁量子数是指在外加磁场的情况下，原子光谱出现的单个条带分裂成多个条带（也就是磁场作用下出现同一能级下的电子能量变化，由单个 E_m 能量产生 $E_m + \Delta E$ 、 $E_m - \Delta E$ 等多种能量的条带）。这被称为 *Zeeman effect*。例如下图所示的原子光谱图：

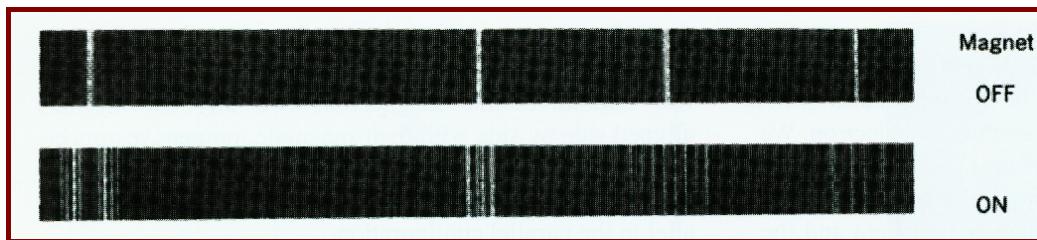


图 10.5: 塞曼效应

而自旋角动量与自旋量子数并非由薛定谔方程直接分析氢原子得到。当时物理学家推测的理论认为，没有磁场作用下金属发射的电子经过单狭缝后会呈现单一条带，而加上磁场后应该是奇数个条带（因为磁量子数一共奇数个）。但 1921 年，德国施特恩 (Otto Stern, 1888—1969) 和格拉赫 (Walter Gerlach, 1889—1979) 在实验中将碱金属原子束经过一不均匀磁场射到屏幕上时，发现射线束分裂成两束，并向不同方向偏转。这暗示人们，电子除了有轨道运动外，还有自旋运动，是自旋磁矩顺着或逆着磁场方向取向的结果^[4]。

上面的推导与发现，也为元素周期表的排布带来一些帮助。

10.7 X-rays, Lasers, and Bandgap

若精力有限，下面的内容仅满足了解性质。观察近些年的考题较少涉及该部分知识。

谈了这么多理论，量子物理的应用有哪些呢？我们下面主要讲解三个应用。

^[4]在量子力学的解释中，电子的自旋是一个完全随机的方向，它只会在我们测量时在我们所测量的方向上进行选择性表现

10.7.1 X-rays

1895 年，伦琴发现了 X 射线（又被称为阴极射线，因为与电子有关）。这是一种高频的电磁波。

关于 X 射线的产生，常用的方法是利用高速运动的电子击打金属靶材，通过碰撞产生的能量损耗释放电磁波。这通常在一个真空环境中进行。X 射线可以分为 *The continuous X-Ray spectrum* 以及 *The characteristic X-Ray spectrum*：

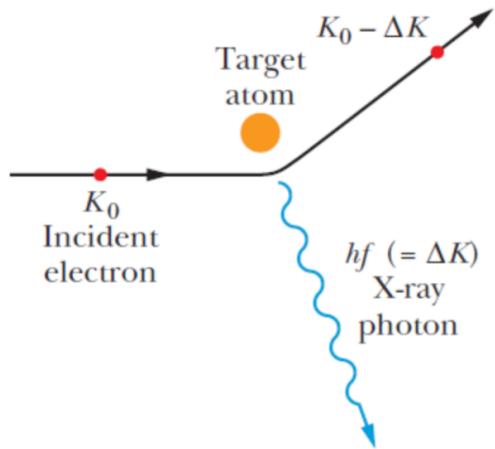


图 10.6: 连续 X 射线光谱

由电子碰撞原子后的能量损失形成。这一能量变化是允许连续的。

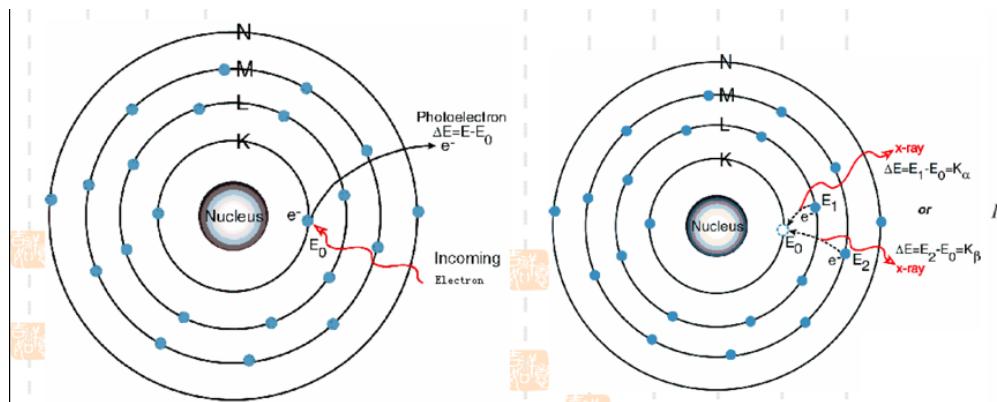


图 10.7: 特征 X 射线光谱

由电子碰撞原子后原子内部结构变化形成。这一能量变化释放的电磁波长是特定的。

我们假设经过电场加速后的电子能量为 K_0 。对于连续光谱，由于这一碰撞

是可以造成不大于电子能量的任意能量损耗，而能量损耗以电磁波的形式释放，由此可见光谱是连续的。

而如果能量足够大，以至于部分电子直接将原子内的电子击出原子范围内，会导致一瞬间内部缺少一个电子，这时处于较高能级的电子将会跃迁到较低能级，并释放特定波长的电磁波。这是则为特征光谱。跃迁的电子可能来自于不同的能级，因此辐射的电磁波也会产生不同波长。

以上的内容我们可以用下图所示的图像表述：

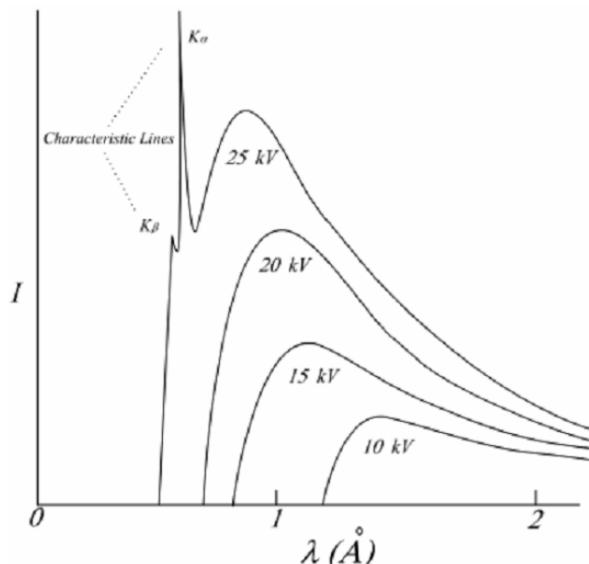


图 10.8: X 射线光谱示意图

对于不同的金属靶材，其图像会有具体数值上的差异。观察图像我们可以清楚地找到连续光谱和特征光谱。特征光谱的产生需要加速电压足够大才能够呈现。另外我们也发现这里的 X 射线光谱存在最小的临界值，且这个值与加速电压有关，这是为什么？很容易理解，我们的电子的能量是有上限的。也就是说电子的能量损耗不会超过其本身能量的上限，从而存在最小波长的 X 射线：

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{K_0}$$

10.7.2 Lasers

激光，全称受激辐射光放大。顾名思义，激光的产生需要受到外部激励，同时还需要进行一定的光放大。1917 年，爱因斯坦从理论上指出：除自发辐射外，处于高能级上的粒子还可以另一方式跃迁到较低能级。他指出当频率为

$\nu = (E_2 - E_1)/h$ 的光子入射时，也会引发粒子以一定的概率，迅速地从能级 E_2 跃迁到能级 E_1 ，同时辐射两个与外来光子频率、相位、偏振态以及传播方向都相同的光子，这个过程称为受激辐射。

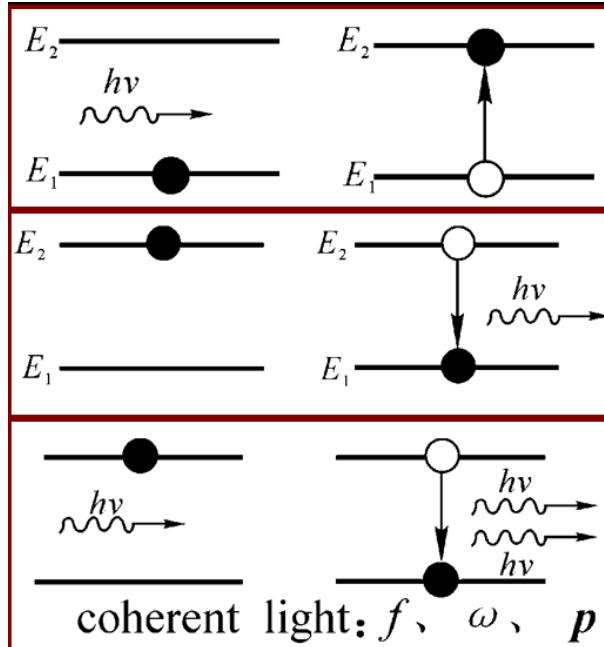


图 10.9: 激光的产生

受激辐射的存在一定产生激光吗？答案是否定的。很明显，我们的世界中没有自然存在的激光。在具体解释激光的产生机制之前，我们需要首先了解到辐射的发射和吸收是与处于相应能级的粒子数有关的。

现在假定两个能级 $E_1 < E_2$ ，两个能级在某一时刻都会有一定的处于相应能级的粒子数，设为 N_1 和 N_2 。对于自发辐射过程（上图第二个过程），我们有自发辐射常数 A_{21} ，表示从能级 E_2 跃迁到能级 E_1 的概率，或者称为单位时间内跃迁的粒子数占高能级粒子数的比例。因此我们有：

$$\left(\frac{dN_{21}}{dt}\right)_{SA} = A_{21}N_2$$

而对于受激吸收以及受激辐射过程，也是类似地存在上述表达式。但同时，这一概率系数是与外来光场的单色能量密度 $\rho(v)$ 成正比。因此我们有：

$$\left(\frac{dN_{12}}{dt}\right)_{SE} = B_{12}\rho(v)N_1 \quad \left(\frac{dN_{21}}{dt}\right)_{STE} = B_{21}\rho(v)N_2$$

$$B_{21} = B_{12}$$

其中 B_{12} 、 B_{21} 称为受激辐射跃迁爱因斯坦系数。

对于一般的粒子，它倾向于能量较低的能级。热力学平衡状态下遵循玻尔兹曼定律，有 $N_i = Ce^{-E_i/kT}$ 。我们可以明显地发现，能量越高的能级其粒子数是越少的，也就会导致受激辐射的概率远小于受激吸收，很容易导致光子大多被吸收而很少有释放。为了产生激光，我们必须要让三个同时进行的过程中的受激辐射过程占据主要优势。怎么办？我们应该想到要尽量使得高能级的粒子数更多，这便是激光产生过程中的重要步骤——粒子数反转（也称为布居数反转/集居数反转）。

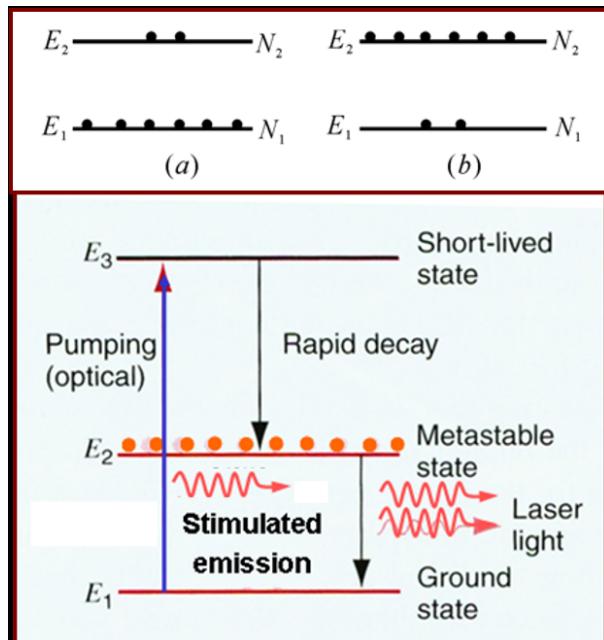


图 10.10: 粒子数反转

粒子数反转的主要过程如上图所示。粒子数反转首先不能是二能级系统。在三能级或者四能级系统中，一般需要通过泵浦将低能级的粒子提升到更高的能级，在高能级的状态下是不稳定的，会很快自发辐射并跃迁到较低的能级。而此时的中间能级处于亚稳态，粒子保持稳定的时间会比高能级长很多（当然不可否认为为了热平衡这些粒子还是要回到基态）。我们只要能够给予系统足够的能量，使得泵浦到高能级的粒子速率超过粒子跃迁回基态的速率即可。

三能级系统的基态可能有些时候基态粒子数还是太多了，一些激光发生器采用了四能级系统，将 E_2 、 E_3 作为激光产生的上下能级，通过将基态的粒子泵浦到 E_4 并自发辐射跃迁到 E_3 。由于 E_2 粒子数比基态少很多，因此这种粒子数反转更容易实现。

粒子数反转使得受激辐射成为主导过程，多次的受激辐射产生了越来越多的频率相位等完全一致的光子。但这些光子并不够，我们希望他们能够维持一个稳定的光强并发射出来。这就需要使用到 *Optical Resonator*。

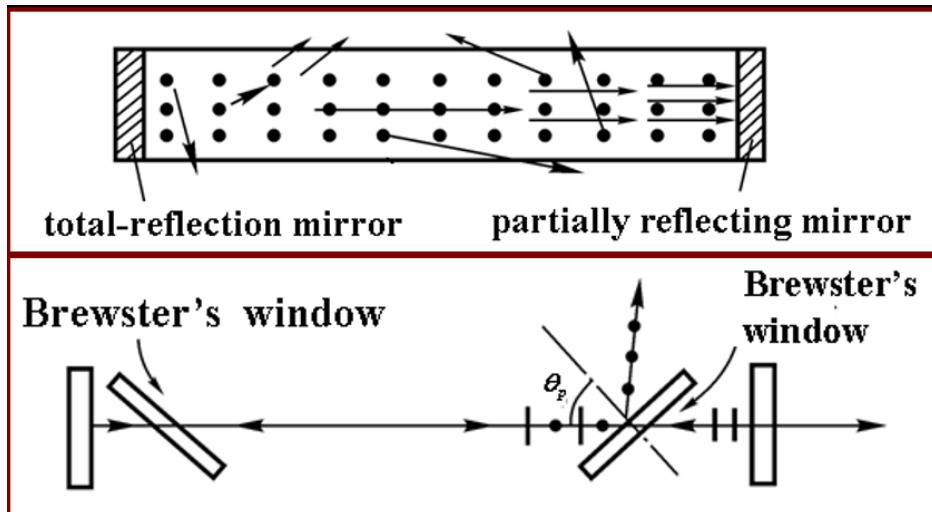


图 10.11: 光学谐振器

外部的能量输入到光学谐振腔中，引发谐振腔内部的物质的受激辐射。在光学谐振器中，一侧为全反射镜，一侧为部分反射镜。多次的反射提供了足够的受激辐射时间和距离，产生了更多我们想要的光子，同时谐振腔的长度要求满足光的驻波条件，以免相互抵消，即：

$$2nL = q\lambda$$

在这个过程中，方向平行于轴线的光被放大增强，偏离轴线的则通过四周被释放出去。多次反射积累的足够光子将通过部分反射镜发射。同时，光学谐振腔也通过布儒斯特窗这一元件，通过设定入射光角度为布儒斯特角，实现对光的偏振性选择。

激光具有以下特征：

- 高度的单色性：激光的波长范围极小，从而呈现单色激光。
- 高度的相干性：易于实现干涉。时间上的相干性：相干长度很大，可达 $2 \times 10^7 \text{ km}$ ；空间的相干性：发射角度极小，约为毫弧度量级。
- 高度的方向性：散射角度极小，约为毫弧度。
- 极高的光亮度：可以清晰聚焦，实现激光的小范围内的极高能量密度。

10.7.3 Bandgap

我们知道，对于单个独立的原子，其核外电子通常处于不同的能级。单个能级的能量是一个定值，画图表示为一条线的范围。但是当多个原子相互靠近形成金属固体时，单一的能级的范围将会扩大，称为一段连续的能量范围，称为能带。

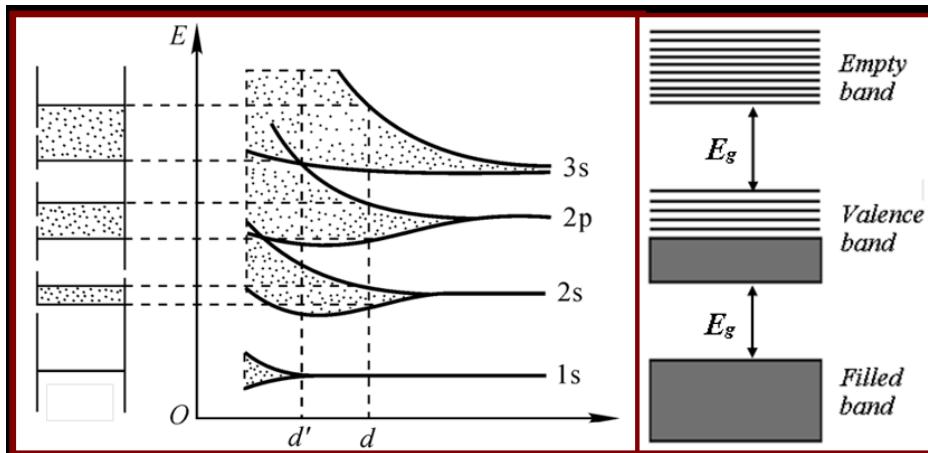


图 10.12: 能带

为什么单一的能级会变成能带？我们可以用不确定性原理解释。首先介绍紧束缚近似：从孤立原子的核外电子状态出发，将晶体视为原子间相互靠近的结果。根据量子理论，此时核外电子云会靠近并连接在一起，也就是说电子是所有原子核所共有的，可以在不同原子核外运动。因此，单个原子所拥有该电子的时间是有限的。根据不确定性原理， Δt 是一个有限值，因此 ΔE 不能为 0，故而能级成为条带的样子。根据图像可见，距离足够远时能量范围很小，而距离越近能量范围越大，甚至于部分不同能级的条带出现交叉现象。

在能带之间的不可能出现电子的能量范围，称为禁带（或者称为带隙）。禁带宽度 E_g 与原子有关，对于导体而言，禁带一般较小甚至为 0（能带之间重叠），使得电子能够轻易跃迁，从而易于导电；而对于绝缘体，禁带宽度一般较大，电子难以跃迁到不同的能级对应的能带，从而难以导电；而对于半导体，则介于两者之间。

能带概念充分应用于半导体元件中，我们常见的半导体是硅等元素。中学我们已经学过，价电子是表征原子稳定性的重要依据。单质硅中最外层电子形成稳定的共价键，纯度极高的硅单质称为本征硅，它具有绝缘体的导电特性。一

般情况下，极少数的电子会挣脱束缚成为自由电子，并留下空穴（可视为带正电的粒子），即电子-空穴对。

单质中电子-空穴对很少，浓度极低，因此难以导电，从微观能级的角度理解为低能级的价带被填充满，但高能级的导带是空的没有电子。为了增强半导体材料的导电性，我们选择在大量硅原子中掺杂少量价电子数不为 4 的其他原子，具体分为两种情况：

- N 型半导体：掺杂诸如磷、砷等 +5 价元素，使得材料中出现额外的无法被固定的共价键束缚的电子；
- P 型半导体：掺杂诸如硼、镓等 +3 价元素，使得材料中部分共价电子对中缺少电子，产生空穴。

掺杂粒子如何影响导电性呢？这是由于新的原子带来了杂质能级所致。对于 N 型半导体，额外的电子被离子吸引不能随意移动，能量低于导带，但又没有像共价键那么强，因此很容易就可以跃迁到导带。这一处于带隙中间的能级为施主能级。而 P 型半导体正好相反，拥有处于带隙中且离价带很近的能级，被称为供主能级。激发的电子可以很容易进入供主能级中从而导电。当然，不同的原子导致的杂质能级是不同的，带来的导电性能也是不同的。同时这些能级会由于温度变化有较为明显的变化，这也是半导体材料的性质对于温度敏感的原因之一。

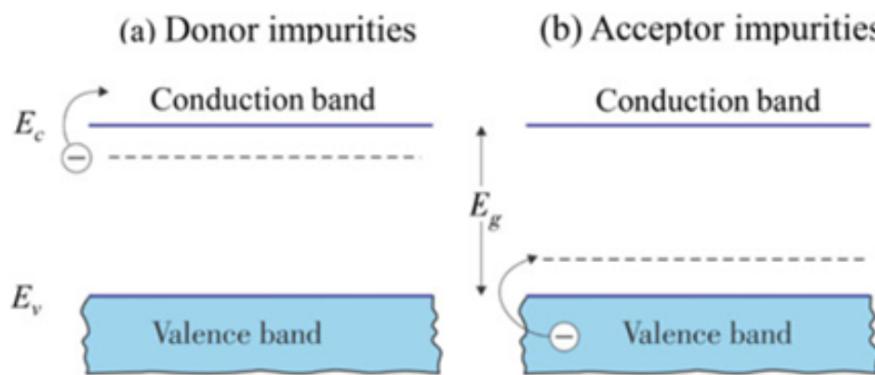
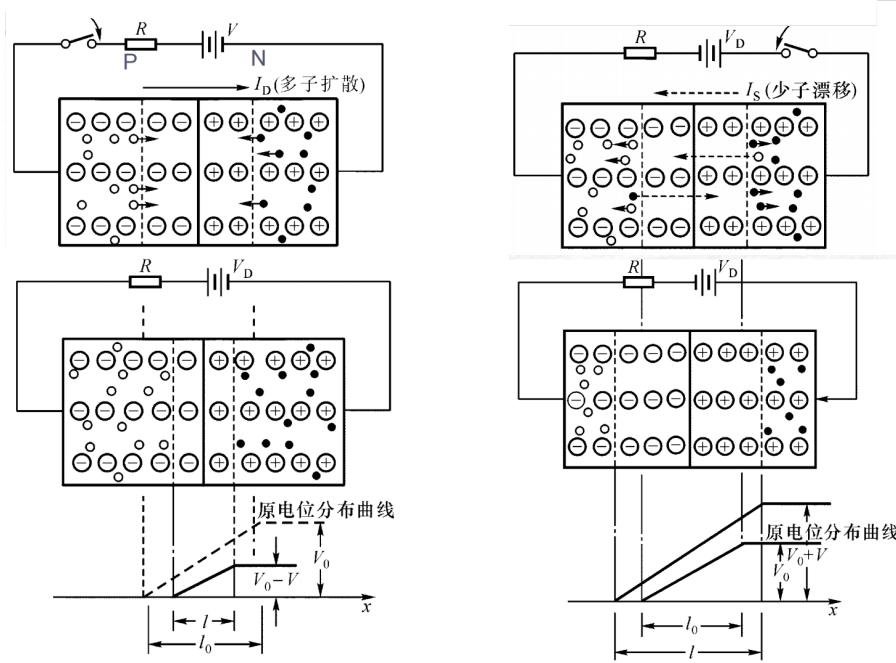


图 10.13: 施主能级和供主能级
(a) 为施主能级, (b) 为供主能级^[5]

在 N 型和 P 型半导体中，掺杂的原子是少数，它们提高了单一硅单质的导电性。此时，若将 P 型和 N 型半导体接触，由于电子和空穴的浓度差异，接触

面附近的电子将会扩散到空穴中，使得中间一段区域内的原子共价键为完整的4个共价键，形成一定的区域称为PN结。PN结的产生导致了整体物质中间形成了一个内建电场，方向由N型半导体指向P型半导体。



PN结有正反偏，这与二极管的正向导通反向截止、导通电压等密切相关。

P型半导体连接电源正极时，空穴和电子继续向对侧的方向扩散，使得PN结宽度变窄，达到一定程度后顺利导通；而反偏则相反，空穴和电子相互远离使得PN结宽度变大，电子更加难以跃迁，从而无法导电。当反向电压不断增大，会最终产生击穿。

10.8 课后习题：量子物理

我认为有必要声明，量子物理的应试应当以熟悉各种概念以及薛定谔方程及其一维定态的两种模型的求解为主，基本与作业题匹配。但由于个别班级的个别期末关于波函数的题目难度较大，因此本章节习题多来自专业书籍且集中于波函数的知识点，难度把控较为困难，仅供参考。

关于推导和计算，请多参考相关定理的证明。关于光电效应、原子结构等的题目，请参考教师布置的课后作业题。

习题 10.1 Probability of Detection —Solution 10.1~P 369

A particle is confined in a one-dimensional infinite square well potential of width a . Its wave function is given by:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) (0 < x < a)$$

If the particle is in the $n = 1$ state (ground state), what is the probability of finding it in the region between $x = 0$ and $x = a/4$?

(Hint: $\int \sin^2(x) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x) + C$)

习题 10.2 An Infinitely Deep Potential Well in 1D —Solution 10.2~P 370

A particle is in a one-dimensional infinite deep potential well with a width of a . At a certain moment, the two walls of the well suddenly move in opposite directions, causing the width of the well to change to $2a$. The potential wells before and after the change are symmetrical about $x = 0$. The particle wave function has no time to change. What is the probability that the particle remains in the ground state for the widened infinite deep potential well?

(Hint 1: Principle of superposition of states $\psi_{1,1} = \sum c_i \psi_{2,i}$ $P_1 = |c_1|^2$)

(Hint 2: $\int \cos(2x) \cos(x) dx = \frac{1}{6}(3 \sin(x) + \sin(3x)) + C$)

习题 10.3 Tunnelling Effect —Solution 10.3~P 371

The $\delta(x)$ is a very important function in engineering technology, and it is defined as:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x) dx = 1$$

There is a one-dimensional δ barrier at $x = 0$:

$$U(x) = A\delta(x) \quad (A > 0)$$

When a particle with energy E is incident from the left, find the transmission coefficient. (Hint: In this question, $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}$ is divergent. Consider

integrating it in $[-\varepsilon, \varepsilon]$ $\varepsilon \rightarrow 0$)

习题 10.4 Schrödinger Equation —Solution 10.3~P 371

Consider a particle of mass m confined in a 2D rectangular infinite square well. The potential energy function is:

$$U(x, y) = \begin{cases} 0 & 0 < x < L_x, 0 < y < L_y \\ \infty & \text{boundary and exterior} \end{cases}$$

The wave function is separable: $\psi(x, y) = X(x)Y(y)$, with total energy $E = E_x + E_y$.

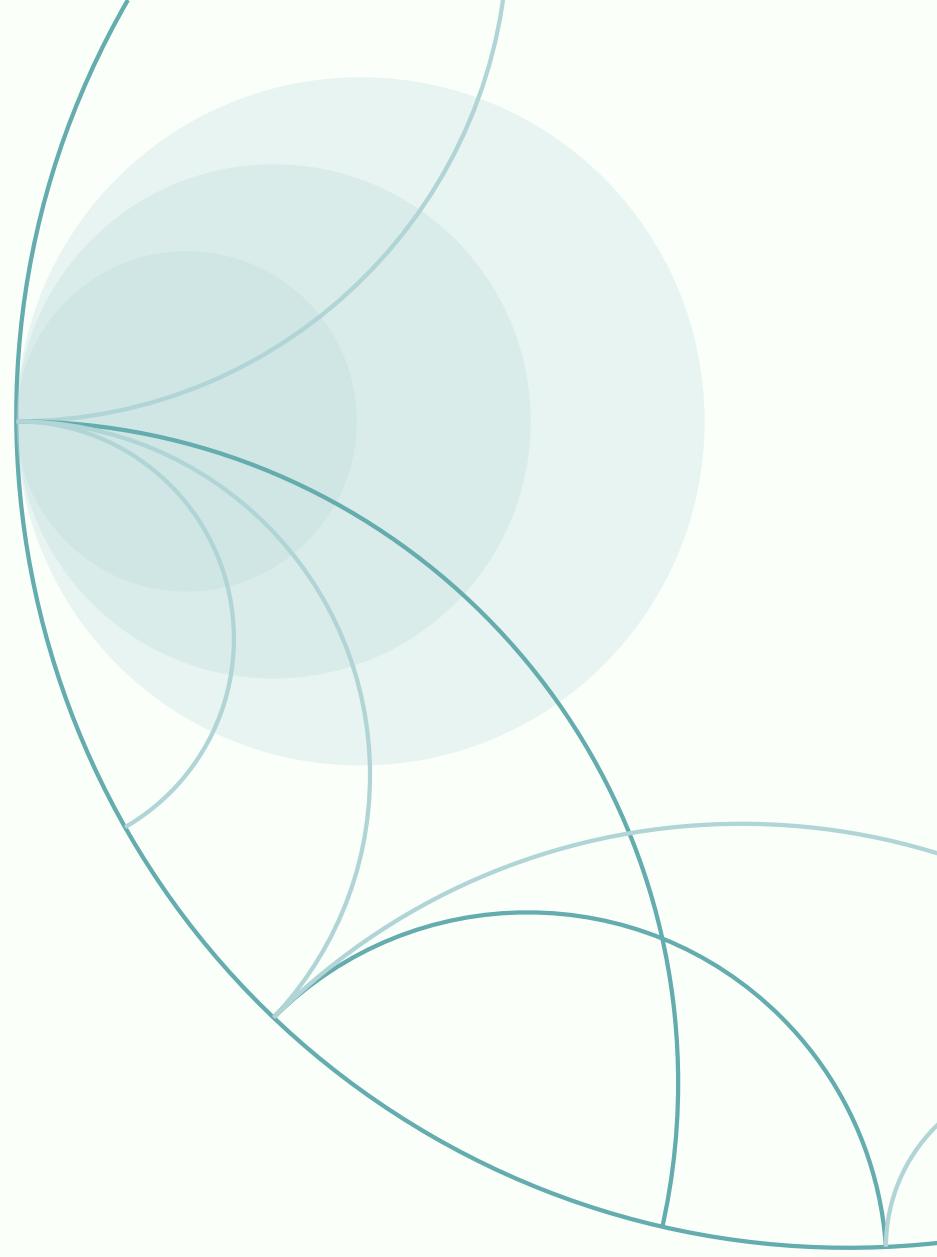
(a) Calculate the normalized wave function $\psi_{n_x, n_y}(x, y)$, and prove the particle energy is:

$$E_{n_x, n_y} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} \right)$$

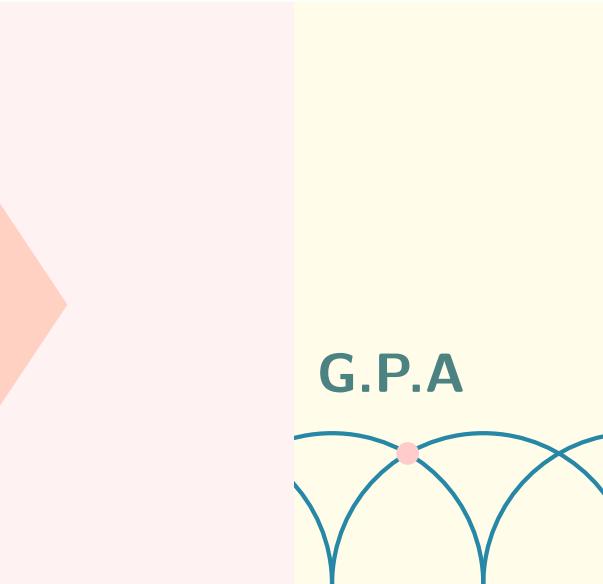
(b) Given $L_y = 2L_x = 2L$, calculate the second excited state (provide quantum numbers (n_x, n_y) and energy value).

(c) For the Schrödinger Equation $\hat{H}\psi = E\psi$, the set of all eigenvalues E of operator \hat{H} is called the *spectrum*. When two or more linearly independent eigenfunctions share the same eigenvalue, it is called degeneracy of spectra, and the number of such eigenfunctions is the *degeneracy degree*.

Given $L_y = \alpha L_x$ ($\alpha > 1$), if the degeneracy degree of the second excited state is 2, find the α satisfying this condition.



证明部分



G.P.A

1

Measurement

BLANK

期待你的建设

2

Fundamentals of particle kinematics and dynamics

证明 2.1 *Newton's First Law of Motion*

I - P16 引

在十七世纪以前，人们普遍认为力是维持物体运动的原因。用力推车，车子才前进，停止用力，车子就要停下来。古希腊的哲学家亚里士多德（公元前 384~322）根据这类经验事实得出结论说：必须有力作用在物体上，物体才能运动，没有力的作用，物体就要静止下来。

在亚里士多德以后的两千年内，动力学一直没有多大进展。直到十七世纪，意大利的著名物理学家伽利略才根据实验揭示了现象的本质，指出了亚里士多德的观点的错误。伽利略发现，运动物体之所以会停下来，是因为受到摩擦阻力的缘故。他断言：一旦物体具有某一速度，只要没有加速或减速的原因，这个速度将保持不变，而这种情况只有在摩擦力极小的水平面上才能近似达到。根据这种观点看来，力不是维持物体的运动即维持物体的速度的原因，而是改变物体运动状态即改变物体速度的原因。

伽利略是怎样得到这个结论的呢？伽利略并没有脱离日常经验，而是对经验进行了分析。他研究了物体在斜面上的运动，发现物体沿斜面向下运动，有加速的原因出现，速度不断增加；沿斜面向上运动，有减速的原因出现，速度不断减小。他根据这一事实进行推论，指出在没有倾斜的光滑水平面上，物体的运动应当是既没有加速也没有减速，速度应当是不变的。当然，伽利略知道，由于物体受到摩擦力的阻碍，这种水平运动的速度实际上并不是不变的。摩擦越小，物体以接近于恒定速度运动的时间就越长。在没

有摩擦的理想情况下，物体将以恒定的速度持续运动下去。

我们可以用现代的实验设备来近似地验证上述结论。把物体放在一个水平导轨上，并设法使物体和导轨之间形成气层，物体沿这种气垫导轨运动时摩擦很小。推动一下物体，可以看到物体沿气垫导轨的运动很接近匀速直线运动。

伽利略还根据下面的理想实验进行推论，如图 2.1：A 所示，让小球沿一个斜面从静止滚下来，小球将滚上另一个斜面。如果没有摩擦，小球将上升到原来的高度，他推论说，如果减小第二个斜面的倾角（图 2.1：B），小球在这个斜面上达来的高度，而要沿着水平面以恒定速度持续运动下去，到原来的高度就要通过更长的距离。继续减小第二个斜面的倾角，使它最终成为水平面（图 2.1：C），小球就再也达不到原来的高度，而是要沿着水平面以恒定速度持续运动下去。

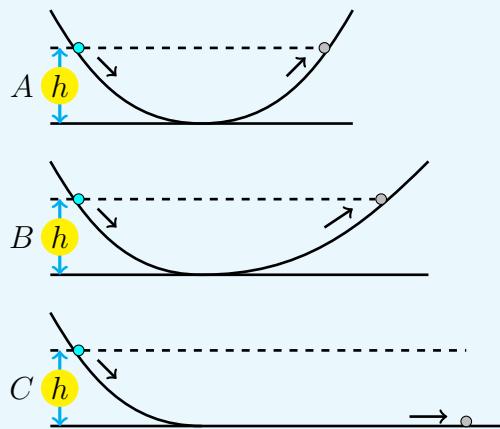


图 2.1：伽利略的理想实验

伽利略同时代的法国科学家笛卡儿（1596~1650）进一步补充和完善了伽利略的论点，第一次明确地表述了惯性定律。笛卡儿认为：如果没有其他原因，运动的物体将继续以同一速度沿着一条直线运动，既不会停下来，也不会偏离原来的方向。这样，笛卡儿为发展动力学又迈出了重要一步。牛顿在伽利略等人的研究基础上，并根据他自己的研究，系统地总结了力学的知识，提出了牛顿第一定律：一切物体总保持匀速直线运动状态或静止状态，直到有外力迫使它改变这种状态为止。

以上内容引自 <https://enjoyphysics.cn/Article1873>。

证明 2.2 Newton's Second Law of Motion

I - P17 引

牛顿第二定律主要来自伽利略的自由落体定律。

伽利略已经通过实验证明自由落体运动是匀加速运动，即加速度不变的运动。只要物体在自由下落时它的重量（所受到的重力）保持不变，就说明物体在匀加速运动中受到的作用力是恒定不变的。如果说，一个物体在地面上的重量跟它在距地面 10 英尺高处的重量一样或基本一样，质量也保持不变，这在当时是不会有任何争议的。所以，牛顿第二定律是从自由落体定律延伸出来的。

另外，托里拆利已经运用过一个等式： $Ft = \Delta(mv)$ ，即恒力与作用时间的乘积和动量的变化相等。这就是我们现在熟知的动量定理。如果这个等式两边同时除以时间 t ，那么就可以得出 $F = m\frac{\Delta v}{t}$ 。 $\frac{\Delta v}{t}$ 就是速度变化率，即加速度。

证明 2.3 Newton's Third Law of Motion

I - P17 引

十七世纪中叶，碰撞问题成为科学界共同关心的课题，不少科学家都致力于该问题的研究。当时，对碰撞问题研究较早的有笛卡尔。1664 年，牛顿受到笛卡尔的影响，也开始研究二个球形非弹性刚体的碰撞问题。1665—1666 年间，牛顿又研究了两个球形刚体的碰撞问题。他没有像其它科学家那样把注意力集中在动量和动量守恒方面，而是把注意力放在物体之间的相互作用上，对于两刚体的碰撞，他提出，“……一于是在它们向彼此运动的时间中（就是它们相碰的瞬间）它们的压力处于最大值，……它们的整个运动是被此一瞬间彼此之间的压力所阻止，……只要这两个物体都不互相屈服，它们之间将会持有同样猛烈的压力，……它们将会象以前弹回之前彼此趋近那样多的运动相互离开。”

上面这段话可看出，牛顿当时就已认识到在物体相互碰撞的瞬间，它们的运动被彼此之间的压力所改变。稍后，牛顿又认识到：“如果二物体 p 和 r 彼此相遇，因为 p 压 r 和 r 压 p 是一样大小，所以二者的阻力是相同的。”同时，他还用图形明确表示 p 压 r 和 r 压 p 的力是在同一条直线上。

证明 2.4 Newton's Second Law in non-inertial frame

I - P17 引

在惯性参考系中，牛顿第二定律 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 成立，其中 \mathbf{F} 与 m 不会随参考系的变化而变化。这时，看另一个非惯性参考系，由于它相对于惯性参考系不保持匀速直线运动或静止，这个参考系中同一物体的加速度 \mathbf{a}' 显然不同于原惯性参考系中的 \mathbf{a} 。如此，便有 $\mathbf{F} = m\mathbf{a} \neq m\mathbf{a}'$ ，即牛顿第二定律不成立。

那么，在这个非惯性参考系中，如何去修正牛顿第二定律呢？假设非惯性参考系相对惯性参考系的加速度为 $\Delta\mathbf{a}$ ，则有 $\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \Delta\mathbf{a}$ ，那么 $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\mathbf{a}' + m\Delta\mathbf{a}$ ，也就是 $\mathbf{F} - m\Delta\mathbf{a} = m\mathbf{a}'$ 。这可以认为是在这个非惯性参考系中全新的牛顿第二定律。然而，若是这样，每个非惯性参考系都有不同的牛顿第二定律，这显然是不方便、不合理的。

虽然修正牛顿第二定律是不合理的，但是我们可以去修正力。引入虚拟力 $\mathbf{f}_{fictitious} = -m\Delta\mathbf{a}$ ，那么在上面的非惯性参考系中，就有

$$\mathbf{F} + \mathbf{f}_{fictitious} = m\mathbf{a}'$$

我们将真实力与虚拟力的合力称为表现力，即

$$\mathbf{F}_{effective} = \mathbf{F} + \mathbf{f}_{fictitious}$$

如此，对于非惯性参考系的表现力来说，牛顿第二定律依然成立，这样就极大的方便了我们的计算。

证明 2.5 Work-kinetic energy theorem

I - P21 引

$$\begin{aligned}\sum W &= \int_{x_i}^{x_f} (\sum F_x) dx = \int_{x_i}^{x_f} ma_x dx \\ a_x &= \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \\ \Rightarrow \sum W &= \int_{x_i}^{x_f} mv \frac{dv}{dx} dx = \int_{v_i}^{v_f} mv dv = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2\end{aligned}$$

大家有没有疑惑，动能的公式和动能定理，到底谁是鸡谁是蛋？网上的一些动能定理的推导，都是基于 $\frac{1}{2}mv^2$ 就是物体动能。然而网上物体动能的推导，却是基于外力做功等于物体动能增加量的动能定理。这样的循环论

证很让人疑惑。个人认为，动能定理属于能量守恒定律的范畴，因为功是能量转化的量度，是能量守恒定律中的桥梁。在此基础上，人为规定了合理的动能的表达式，而且经过实验和理论的验证，这个定义是合理，体系是自洽的。至于能量守恒定律为什么是对的... 基于实验？基于经验？详见热力学吧。

证明 2.6 Impulse-Momentum Theorem

I - P25 引

由牛顿第二定理就可以推出：

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\ \implies \mathbf{F} dt &= d\mathbf{p} \\ \implies \mathbf{I} &= \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt = \int_{p_i}^{p_f} d\mathbf{p} = m\mathbf{v}_f - m\mathbf{v}_i \end{aligned}$$

证明 2.7 质心系中，系统的总动量为 0

I - P27 引

设有 N 个质点，质量分别为 m_1, m_2, \dots, m_N ，位矢为 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ 。质心的位置 \mathbf{R} 定义为：

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i$$

其中 $M = \sum_{i=1}^N m_i$ 是系统的总质量。

在质心系中，质点的位矢变为：

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R} \quad (2.1)$$

任意参考系中，系统的总动量 \mathbf{P} 为：

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i$$

其中 \mathbf{v}_i 是对应质点的速度矢量。代入式 (2.1) 可得：

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} + \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)$$

由质心的定义，质心速度 \mathbf{V} 为：

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i$$

因此,

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} + M\mathbf{V}$$

注意到在质心系中, $\mathbf{V} = \mathbf{0}$, 因此

$$\mathbf{P}^{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt}$$

又由质心系的定义, 有

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0}$$

综上可知, 质心系中系统总动量为零, 即

$$\mathbf{P}^{CM} = \mathbf{0}$$

证明 2.8. *Newton's Law of Universal Gravitation*

I - P28 引

一方面, 平方反比的规律是牛顿根据开普勒的行星周期与它们的距离轨道中心的距离的二分之三次方成正比的规律(开普勒行星运动第三定律)得出的结论。牛顿从一个完完全全的运动学结论中得出了动力学的结论:

由开普勒第三定律:

$$\frac{r^3}{T^2} = K$$

由圆周运动的规律:

$$F = m \frac{v^2}{r}$$

加之

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

就有

$$F = \frac{4\pi^2 m K}{r^2}$$

另一方面, 引力同时与两物体质量成正比的规律, 是基于牛顿自己的三个定律。根据第三定律, 力的作用是相互的, 行星受到的引力 F 与其质量

m 成正比，同理，太阳受到的力 F' 与太阳的质量 M 成正比，而 $F = F'$ ，
则 F 必同时与 m 和 M 成正比。

3

Rotation Dynamics

证明 3.1 *Concepts in Dynamics* $\tau_{net} = I\alpha$

I - P42 引

要搞清楚的一点是，我们依旧基于牛顿力学来思考有关转动的问题。

我们先承认一件事实：刚体的内部存在着非常复杂的相互作用力，这些作用力合理地分配，最终使得整个刚体可以做转动。于是，任意取一个质元 dm 分析，都有

$$d\mathbf{F}_t = dm \mathbf{a}_t$$

依据平动和转动的联系（见小节 3.2.3~P40），我们有

$$\mathbf{a}_t dm = (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) dm$$

于是在等式两侧同左叉乘以 \mathbf{r} ，即有

$$\mathbf{r} \times d\mathbf{F}_t = \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) dm$$

由双重叉乘的运算律（见小节 3.2.2~P40），知

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \boldsymbol{\alpha} = r^2 \boldsymbol{\alpha}$$

注意到

$$\mathbf{r} \times d\mathbf{F}_t = \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_{/z}$$

即得

$$\mathbf{r} \times d\mathbf{F}_{/z} = r^2 \boldsymbol{\alpha} dm \Leftrightarrow d\boldsymbol{\tau} = r^2 \boldsymbol{\alpha} dm$$

等式两侧取积分，即有

$$\tau_{net} = I\alpha$$

证明 3.2₄ *Parallel Axis Theorem* $I = I_{CM} + Mh^2$

I - P44 引

不妨设 \mathbf{h} 的方向为从质心轴到任意轴，并取任意一质点 m_i ，其在选择质心轴时，位矢为 \mathbf{r}_{CMi} ，选择任意轴时，位矢为 \mathbf{r}_i ，则有

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{CMi} - \mathbf{h}$$

于是有

$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i (\mathbf{r}_{CMi} - \mathbf{h})^2 \\ &= \sum_i m_i (r_{CMi}^2 + h^2 - 2\mathbf{r}_{CMi} \cdot \mathbf{h}) \\ &= \sum_i m_i r_{CMi}^2 + \sum_i m_i h^2 - 2\mathbf{h} \cdot \sum_i m_i \mathbf{r}_{CMi} \\ &= I_{CM} + Mh^2 + 0 \quad (\text{由质心的性质知最后一项为 } 0) \\ &= I_{CM} + Mh^2 \end{aligned}$$

证明 3.3₄ *Energy in Rotation ONLY*

I - P44 引

在只发生转动的物体中，有

$$v = v_t = \omega r$$

于是有

$$\begin{aligned} K_R &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 & U &= \int_0^\theta \kappa \alpha \, d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \sum_i (m_i r_i^2) \omega^2 & &= \frac{1}{2} \kappa \alpha^2 \Big|_0^\theta \\ &= \frac{1}{2} I \omega^2 & &= \frac{1}{2} \kappa \theta^2 \\ P &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} & dW &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \\ &= F_t v & &= F_t \, dx \\ &= F_t r_\omega & &= F_t r \, d\theta \\ &= \tau \omega & &= \tau \, d\theta \end{aligned}$$

证明 3.4₄ Konig's Theorem $K = K_{CM} + K^{CM}$

I - P45 引

我们取质点 m_i , 记它在静止参考系中的速度为 \mathbf{v}_i , 在质心系中的速度为 \mathbf{v}_i^{CM} , 并记刚体的质心速度为 \mathbf{v}_{CM} , 则有

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^{CM} + \mathbf{v}_{CM}$$

于是有

$$\begin{aligned} K &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_i^{CM} + \mathbf{v}_{CM})^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^{CM 2} + \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{CM}^2 + (\sum_i m_i \mathbf{v}_i^{CM}) \cdot \mathbf{v}_{CM} \\ &= K^{CM} + K_{CM} \quad (\text{由质心定义知前式最后一项为 } 0) \end{aligned}$$

由刚体在质心系中只存在转动₍₁₎, 有

(1) 见小节 3.4.2~P45

$$K^{CM} = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

于是

$$K = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

证明 3.5₄ Angular Momentum $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_{i/z} = I\boldsymbol{\omega}$ & $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}$

I - P45 引

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_{i/z} \\ &= \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\mathbf{v}_{ir} + \mathbf{v}_{it}) \\ &= \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_{ir} + \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_{it}) \\ &= \sum_i m_i (\mathbf{0} + \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i))_{(2)} \\ &= \sum_i m_i ((\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i) \\ &= \sum_i m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega} \\ &= I\boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

(2) 有关双重叉乘

见小节 3.2.2₁₁~P40

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_{i/z}) \\
&= \sum_i \frac{d(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_{i/z})}{dt} \\
&= \sum_i \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{p}_{i/z} + \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_{i/z}}{dt} \right) \text{ 有关微分见小节 3.2.2~P39} \\
&= \sum_i (\mathbf{v}_{i/z} \times \mathbf{p}_{i/z} + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i/z}) \\
&= \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i/z} \\
&= \boldsymbol{\tau}_{net}
\end{aligned}$$

证明 3.6.1 $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} + \mathbf{L}^{CM}$

I - P47 引

我们取质点 m_i , 记它在静止参考系中的速度为 \mathbf{v}_i , 极径矢量为 \mathbf{r}_i 在质心系中的速度为 \mathbf{v}_i^{CM} , 极径矢量为 \mathbf{r}_i^{CM} , 并记刚体在静止参考系中的质心速度为 \mathbf{v}_{CM} , 极径矢量为 \mathbf{r}_{CM} 则有

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^{CM} + \mathbf{v}_{CM}$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^{CM} + \mathbf{r}_{CM}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \\
&= \sum_i m_i (\mathbf{r}_i^{CM} + \mathbf{r}_{CM})(\mathbf{v}_i^{CM} + \mathbf{v}_{CM}) \\
&= \sum_i m_i \mathbf{r}_i^{CM} \times \mathbf{v}_i^{CM} + \sum_i m_i \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{v}_{CM} \\
&\quad + \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i^{CM} \right) \times \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{r}_{CM} \times \left(\sum_i m_i \mathbf{v}_i^{CM} \right) \\
&= \mathbf{L}^{CM} + \mathbf{L}_{CM} + \mathbf{0} \times \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{0} \quad (\text{利用质心性质}) \\
&= \mathbf{L}^{CM} + \mathbf{L}_{CM}
\end{aligned}$$

证明 3.7_{I-II} Center of Gravity: 对于均匀的重力场，刚体的重心与质心重合

记重力的合力矩为 τ_g ，等效于质心的重力力矩为 $\tau_{g_{CM}}$ ，有

$$\begin{aligned}\tau_g &= \sum_i \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{g}_{/z}) \\ &= (\sum_i m_i \mathbf{r}_i) \times \mathbf{g}_{/z} \\ &= M \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{g}_{/z} \quad (\text{由质心定义知}) \\ &= \mathbf{r}_{CM} \times (M \mathbf{g}_{/z}) \\ &= \tau_{g_{CM}}\end{aligned}$$

I - P47 引

II - P306 引

即刚体重心与质心重合。

在这里的证明中，我们发现，只要一个力仅与质量成正比，方向不变，那么分析力矩时，就可以把这些力等效作用在质点上。

证明 3.8_I Frame Translation with Rotation *

I - P48 引

这一次，我们采用坐标分解的观点思考问题。

首先，考虑一个惯性系，并建立一个常规的空间直角坐标系 \mathcal{F} ，它的基为 $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ ，即为 x, y, z 轴方向的单位向量（单位向量没有量纲，长度为 1）。那么，任取一个质点，它的位矢 \mathbf{P} 可以表示为

$$\mathbf{P} = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}$$

我们另建立一个拥有 x', y', z' 轴的，以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转的坐标系 \mathcal{F}' ，其中 z' 轴作为旋转轴与 z 轴平行。设该坐标系原点位矢 \mathbf{O}' 在原参考系中的表达式为 $\mathbf{O} = x_0 \hat{\mathbf{i}} + y_0 \hat{\mathbf{j}} + z_0 \hat{\mathbf{k}}$ ，那么在 \mathcal{F}' 中，设

$$\mathbf{P} - \mathbf{O}' = \mathbf{P}' = x' \hat{\mathbf{i}}' + y' \hat{\mathbf{j}}' + z' \hat{\mathbf{k}}'$$

如此，我们说， \mathbf{P} 在 \mathcal{F} 中的坐标为 (x, y, z) ，在 \mathcal{F}' 中的坐标为 (x', y', z') 。
接下来，我们考虑在不同坐标系中的速度。

\mathcal{F} 中的速度定义为

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} + v_z \hat{\mathbf{k}}$$

其中

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}$$

于是

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d(x\hat{\mathbf{i}})}{dt} + \frac{d(y\hat{\mathbf{j}})}{dt} + \frac{d(z\hat{\mathbf{k}})}{dt} \quad (3.1)$$

$$= \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}} \quad (3.2)$$

$$= v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}} \quad (3.3)$$

$$= \mathbf{v} \quad (3.4)$$

其中由 (3.2) 到 (3.3) 的理由是该参考系的基 $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ 始终不变。

同理, \mathcal{F}' 中的速度定义为

$$\mathbf{v}' = v'_x\hat{\mathbf{i}}' + v'_y\hat{\mathbf{j}}' + v'_z\hat{\mathbf{k}}'$$

其中

$$v'_x = \frac{dx'}{dt}, v'_y = \frac{dy'}{dt}, v'_z = \frac{dz'}{dt}$$

由 $\mathbf{P}' = \mathbf{P} - \mathbf{O}'$, 且 \mathbf{O}' 不变, 知 $\frac{d\mathbf{P}'}{dt} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{v}$ 。于是有

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{P}'}{dt} \quad (3.5)$$

$$= \frac{d(x'\hat{\mathbf{i}}')}{dt} + \frac{d(y'\hat{\mathbf{j}}')}{dt} + \frac{d(z'\hat{\mathbf{k}}')}{dt} \quad (3.6)$$

$$= \frac{dx'}{dt}\hat{\mathbf{i}}' + \frac{d\hat{\mathbf{i}}'}{dt}x' + \frac{dy'}{dt}\hat{\mathbf{j}}' + \frac{d\hat{\mathbf{j}}'}{dt}y' + \frac{dz'}{dt}\hat{\mathbf{k}}' + \frac{d\hat{\mathbf{k}}'}{dt}z' \quad (3.7)$$

注意到

$$\frac{d\hat{\mathbf{i}}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{i}}', \frac{d\hat{\mathbf{j}}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{j}}'$$

续 (3.7) 有

$$\mathbf{v} = v'_x\hat{\mathbf{i}}' + v'_y\hat{\mathbf{j}}' + v'_z\hat{\mathbf{k}}' + \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{i}}'x' + \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{j}}'y' \quad (3.8)$$

$$= \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (\text{这里记 } \mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{i}}' + y'\hat{\mathbf{j}}') \quad (3.9)$$

关于加速度，我们有类似的定义

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}} + a_z \hat{\mathbf{k}} \\ a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}' = a'_x \hat{\mathbf{i}}' + a'_y \hat{\mathbf{j}}' + a'_z \hat{\mathbf{k}}' \\ a'_x = \frac{dv'_x}{dt}, a'_y = \frac{dv'_y}{dt}, a'_z = \frac{dv'_z}{dt} \end{array} \right.$$

对 (3.9) 左右两侧同时对时间微分，有

$$\text{LHS} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (3.10)$$

$$= \frac{dv_x}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt} \hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z}{dt} \hat{\mathbf{k}} \quad (3.11)$$

$$= \mathbf{a} \quad (3.12)$$

$$\text{RHS} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')}{dt} \quad (3.13)$$

$$= \frac{d(v'_x \hat{\mathbf{i}}')}{dt} + \frac{d(v'_y \hat{\mathbf{j}}')}{dt} + \frac{d(v'_z \hat{\mathbf{k}}')}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \quad (3.14)$$

$$= \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times (v'_x \hat{\mathbf{i}}' + v'_y \hat{\mathbf{j}}') + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \quad (3.15)$$

记 $v'_x \hat{\mathbf{i}}' + v'_y \hat{\mathbf{j}}' = \mathbf{v}'_{/z}$ ，则续 (3.15) 有

$$\text{RHS} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'_{/z} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}'_{/z} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (3.16)$$

$$= \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'_{/z} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' - \omega^2 \mathbf{r}' \quad (3.17)$$

这里注意到 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'_{/z} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ ，因为 $\mathbf{v}'_{/z}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 平行。

于是将左式与右式联立，得

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' + \omega^2 \mathbf{r}'$$

两侧同时乘以 m ，即得牛顿第二定律形式

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' + m\omega^2 \mathbf{r}'$$

这意味着，如果希望牛顿运动定律在 \mathcal{F}' 中依然成立，我们需要对 \mathcal{F}' 中的物体添加三个假想力，分别是 $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ ， $-m\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}'$ ， $m\omega^2 \mathbf{r}'$ 。

(3) 有关双重叉乘，见小节 3.2.2_{II} ~ P40

如果我们将条件简化，认为 \mathcal{F}' 没有角加速度，则有

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + m\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}'$$

当 \mathcal{F}' 还拥有平动速度，平动加速度时，只需依照矢量叠加原理分析，再添上惯性力，牛顿第二定律就能继续保持成立。

4

Fluid Mechanics

BLANK

期待你的建设

5

Oscillations and Waves

证明 5.1_I 平衡的物体重新选取转轴位置后，总力矩依旧为零

I - P60 引

记 $\mathbf{r}_{i,O}$ 为以 O 点为起点的位矢，

$$\begin{aligned}\sum_i \boldsymbol{\tau}_{i,O} &= \sum_i \mathbf{r}_{i,O} \times \mathbf{F}_i \\ &= \sum_i (\mathbf{r}_{i,O} - \mathbf{r}_{i,O'} + \mathbf{r}_{i,O'}) \times \mathbf{F}_i \\ &= (\mathbf{r}_{i,O} - \mathbf{r}_{i,O'}) \times \sum_i \mathbf{F}_i + \sum_i \mathbf{r}_{i,O'} \times \mathbf{F}_i \\ &= \sum_i \mathbf{r}_{i,O'} \times \mathbf{F}_i \\ &= \sum_i \boldsymbol{\tau}_{i,O'}\end{aligned}$$

证明 5.2_I 求解简谐振动的微分方程

I - P61 引

解以下微分方程

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_0)$$

这是一个二阶常系数非齐次线性微分方程，显然它有特解 $x^* = x_0$

考虑对应的齐次方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

特征方程为

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

解得

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} i$$

于是齐次方程的解可以写作

$$X = A_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + A_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t = A \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi)$$

最终解得原微分方程

$$x = X + x^* = A \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi) + x_0$$

证明 5.3 求解阻尼振动的微分方程

I - P64 引

解以下微分方程

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - x_0) - b \frac{dx}{dt}$$

这是一个二阶常系数非齐次线性微分方程，显然它有特解 $x^* = x_0$

考虑对应的齐次方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

特征方程为

$$\lambda^2 + b\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

根据判别式

$$\Delta = \left(\frac{b}{m}\right)^2 - 4 \frac{k}{m} = 4 \left[\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}\right]$$

的符号，解分为以下三种情况：

- $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} > 0$, 特征方程有两个互异实根

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b}{2m} - \left(\frac{k}{m}\right)^2}$$

解为

$$X =$$

$$A_1 \exp \left[\left(-\frac{b}{2m} + \sqrt{\frac{b}{2m} - (\frac{k}{m})^2} \right) t \right] + A_2 \exp \left[\left(-\frac{b}{2m} - \sqrt{\frac{b}{2m} - (\frac{k}{m})^2} \right) t \right]$$

- $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} < 0$, 特征方程有一对共轭虚根

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{(\frac{k}{m})^2 - \frac{b}{2m}} i$$

解为

$$X = e^{-\frac{b}{2m}t} \left(A_1 \cos \sqrt{(\frac{k}{m})^2 - \frac{b}{2m}} t + A_2 \sin \sqrt{(\frac{k}{m})^2 - \frac{b}{2m}} t \right)$$

- $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$, 特征方程有一对重根

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2m}$$

解为

$$X = (A_1 + A_2 t) e^{-\frac{b}{2m}}$$

于是原方程的解只需加上特解即可得到

证明 5.4.1 求解受迫振动的微分方程

I - P65 引

考虑如下二阶线性非齐次微分方程:

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) - b\dot{x} + F_{\text{ext}} \cos \omega t$$

将方程整理为标准形式:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = kx_0 + F_{\text{ext}} \cos \omega t$$

首先求解齐次方程:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

设解的形式为 $x_h(t) = e^{rt}$, 代入齐次方程, 得到特征方程:

$$mr^2 + br + k = 0$$

解得特征根:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

根据判别式 $\Delta = b^2 - 4mk$ 的不同情况, 齐次解分为以下三种情况:

- 当 $\Delta > 0$ 时, 特征根为两个不同的实数:

$$x_h(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

- 当 $\Delta = 0$ 时, 特征根为重根:

$$x_h(t) = (C_1 + C_2 t) e^{rt}$$

- 当 $\Delta < 0$ 时, 特征根为共轭复数:

$$x_h(t) = e^{-\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$$

$$\text{其中 } \alpha = \frac{b}{2m}, \beta = \frac{\sqrt{4mk-b^2}}{2m}.$$

非齐次方程为:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = kx_0 + F_{\text{ext}} \cos \omega t$$

其特解 $x_p(t)$ 由两部分组成:

1. 常数项 kx_0 对应的特解 $x_{p1}(t)$,
2. 外力项 $F_{\text{ext}} \cos \omega t$ 对应的特解 $x_{p2}(t)$ 。

对于常数项 F_0 , 设特解为常数:

$$x_{p1}(t) = A$$

代入非齐次方程, 得到:

$$0 + 0 + kA = kx_0 \implies A = x_0$$

因此:

$$x_{p1}(t) = x_0$$

对于外力项 $F_{\text{ext}} \cos \omega t$, 设特解为:

$$x_{p2}(t) = B \cos \omega t + C \sin \omega t$$

代入非齐次方程，整理后，比较 $\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ 的系数：

$$\begin{cases} (-m\omega^2 + k)B + b\omega C = F_{\text{ext}} \\ -b\omega B + (-m\omega^2 + k)C = 0 \end{cases}$$

解得：

$$B = \frac{(-m\omega^2 + k)F_{\text{ext}}}{(-m\omega^2 + k)^2 + (b\omega)^2}, \quad C = \frac{b\omega F_{\text{ext}}}{(-m\omega^2 + k)^2 + (b\omega)^2}$$

因此：

$$x_{p2}(t) = \frac{(-m\omega^2 + k)F_{\text{ext}}}{(-m\omega^2 + k)^2 + (b\omega)^2} \cos \omega t + \frac{b\omega F_{\text{ext}}}{(-m\omega^2 + k)^2 + (b\omega)^2} \sin \omega t$$

将齐次解和特解相加，得到通解：

$$x(t) = x_h(t) + x_{p1}(t) + x_{p2}(t)$$

即：

$$x(t) = x_h(t) + x_0 + \frac{(-m\omega^2 + k)F_{\text{ext}}}{(-m\omega^2 + k)^2 + (b\omega)^2} \cos \omega t + \frac{b\omega F_{\text{ext}}}{(-m\omega^2 + k)^2 + (b\omega)^2} \sin \omega t$$

可以将其写成振幅-相位形式：

$$x = A'e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega't + \varphi') + A \cos(\omega t - \varphi) + x_0$$

其中：

$$A = \frac{F_{\text{ext}}}{\sqrt{(-m\omega^2 + k)^2 + (b\omega)^2}}, \quad \phi = \arctan \left(\frac{b\omega}{-m\omega^2 + k} \right)$$

证明 5.5 波动方程在不同边界条件下的求解

I - P75 引

求解波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

这是一个线性偏微分方程。做变量代换：

$$\begin{cases} \xi = x - vt \\ \eta = x + vt \end{cases}$$

容易得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

积分两次，有

$$u = F(\xi) + G(\eta) = F(x - vt) + G(x + vt)$$

此为方程的通解。

根据定义域不同，可以分为以下三种情况

- 无界: $-\infty < x < +\infty$
- 半无界: $x_0 < x$ 或 $x > x_0$
- 有界: $a < x < b$

为了讨论方便起见，我们不妨令上述分类中的 $x_0 = 0, a = 0, b = L$ 。对于一般情况，进行变量代换即可。

首先求解无界情况：

补充初值条件（D'Alembert 条件）

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

利用通解，代入初值条件，我们有

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = \varphi(x) \\ vF'(x) - vG'(x) = \psi(x) \end{cases}$$

于是

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{v} \int_0^x \psi(s) ds + 2C$$

进一步解得

$$\begin{cases} F(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2v} \int_0^x \psi(s) ds + C \\ G(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2v} \int_0^x \psi(s) ds - C \end{cases}$$

于是

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + vt) + \varphi(x - vt)}{2} + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x-vt} \psi(s) ds$$

求解半无界情况：

对于半无界情况，定义域为 $0 < x < +\infty$ ，初值条件为：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 < x < +\infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

此外，还需要边界条件。假设边界条件为 $u(0, t) = 0$ （固定边界条件），则解的形式为：

$$u(x, t) = F(x - vt) + G(x + vt)$$

根据边界条件 $u(0, t) = 0$ ，我们有：

$$F(-vt) + G(vt) = 0$$

因此， $F(-vt) = -G(vt)$ 。为了满足这一条件，可以将 F 和 G 表示为：

$$F(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2v} \int_0^x \psi(s) ds + C$$

$$G(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2v} \int_0^x \psi(s) ds - C$$

对于 $x < 0$ ，我们需要将 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 进行奇延拓：

$$\varphi(-x) = -\varphi(x), \quad \psi(-x) = -\psi(x)$$

因此，半无界情况的解为：

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + vt) + \varphi(x - vt)}{2} + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \psi(s) ds$$

其中 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 为奇延拓后的函数。

对于 $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0$ （自由边界条件），考虑偶延拓即可。

对于有界情况，定义域为 $0 < x < L$ ，初值条件为：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 < x < L) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

边界条件为 $u(0, t) = u(L, t) = 0$ (固定边界条件)。此时, 我们可以使用分离变量法求解。设解的形式为:

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

代入波动方程, 得到:

$$\frac{T''(t)}{v^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

其中 λ 为常数。于是, 我们得到两个常微分方程:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$T''(t) + v^2 \lambda T(t) = 0$$

根据边界条件 $X(0) = X(L) = 0$, 解得:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

对应的 $T_n(t)$ 为:

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi vt}{L}\right)$$

因此, 通解为:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

利用初值条件, 可以确定系数 A_n 和 B_n :

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi v} \int_0^L \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

于是, 有界情况的解为:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

此解也被称为驻波解。对于一端自由, 或者两端自由的情况, 也可类似处理。

证明 5.6 傅里叶级数

I - P82 引

在物理中，我们默认函数都是“好”的。于是，函数都可展开成

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + B_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right]$$

对于 A_0 ，我们在两侧同时积分

$$\int_0^T f(t) dt = \int_0^T \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + B_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right] dt = T A_0$$

即得

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

再利用三角函数的正交性 ($m \geq 1, n \geq 1$)

$$\begin{aligned} \frac{2}{T} \int_0^T \cos(m\omega t) \cos(n\omega t) dt &= \delta_{m,n} \\ \frac{2}{T} \int_0^T \sin(m\omega t) \sin(n\omega t) dt &= \delta_{m,n} \\ \frac{2}{T} \int_0^T \sin(m\omega t) \cos(n\omega t) dt &= 0 \end{aligned}$$

对于 $n \geq 1$ ，将 $f(t)$ 分别与 $\cos(n\omega t)$ 和 $\sin(n\omega t)$ 相乘并积分，得到：

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt, \\ B_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt. \end{aligned}$$

证明 5.7 傅里叶变换

I - P82 引

设 $f(t)$ 满足狄利克雷条件。

对于

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega t} dt \right] e^{in\omega t}$$

我们对上式做变形

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-it\frac{2n\pi}{T}} dt \right] e^{it\frac{2n\pi}{T}} \frac{2\pi}{T}$$

由于 $T \rightarrow \infty$, 根据定积分定义, 我们有

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{it\frac{2\pi}{T}} dt \right] e^{-it\frac{2\pi}{T}} d\left(\frac{2\pi}{T}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \right] e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

我们令

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{in\omega t} dt$$

为 $f(t)$ 的傅里叶变换, 记作 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$

令

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-in\omega t} d\omega$$

为 $F(\omega)$ 的傅里叶逆变换, 记作 $f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$

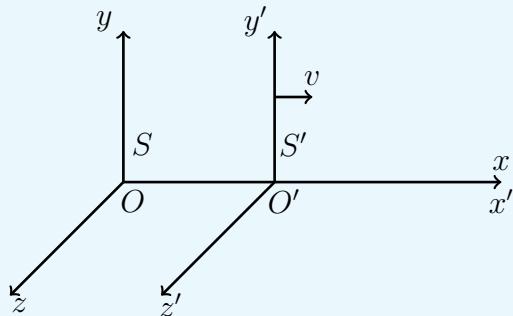
6

Special relativity

证明 6.1 *Lorentz Transformation*

I - P93 引

这里仅仅给出简单证明。



考虑对于坐标 (x, t) 的伽利略变换

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases}$$

得出这样的结果，是因为在绝对时空观的假设中，长度和时间对于坐标系 S, S' 是相同的。

现在，我们不再假设长度和时间对于 S 系和 S' 系是相同的，那么，两系中长度和时间的联系应该是怎样的？

简单起见，我们大胆猜想，洛伦兹变换在伽利略变换的基础上只要添加一些变换因子。用数学表达式来描述就是

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (6.1)$$

其中 γ 是变换因子。

如果这个式子真的能够描述两个坐标系间坐标的关系，那么，反过来，从 S' 系到 S 系，也一定有

$$x = \gamma(x' + vt') \quad (6.2)$$

现在，两个方程有三个未知数，还不足以支持我们解出 γ 。不过，我们还有光速不变的假设没有使用。

不妨取一束在 x 轴上传播的光，并设光传播到某两个位置的事件在 S 系中为 $(x_1, t_1), (x_2, t_2)$ ，在 S' 系中为 $(x'_1, t'_1), (x'_2, t'_2)$ ，由光速不变，可知

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1) \\ x'_2 - x'_1 = c(t'_2 - t'_1) \end{cases} \quad (6.3)$$

将式 (6.1), (6.2) 代入式 (6.3) 中，可得

$$\begin{cases} \gamma[(x'_2 - x'_1) + v(t'_2 - t'_1)] = \gamma(c + v)(t'_2 - t'_1) = c(t_2 - t_1) \\ \gamma[(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)] = \gamma(c - v)(t_2 - t_1) = c(t'_2 - t'_1) \end{cases} \quad (6.4)$$

于是解得

$$\gamma^2(c^2 - v^2) = c^2$$

即

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6.5)$$

现在，我们已经得到了坐标 $(x, t) \rightarrow x'$ 的变换公式：

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(x - vt) \quad (6.6)$$

我们将式 (6.5), (6.6) 再回代入式 (6.2)，就可以得到时间 $(x, t) \rightarrow t'$ 的变换公式：

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \quad (6.7)$$

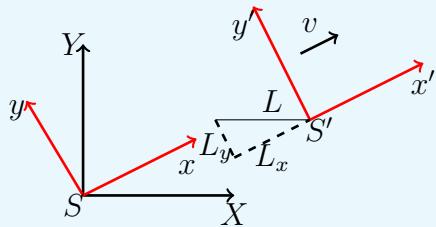
综上，我们就得出了一个符合相对时空观两大假设的时空坐标变换公式

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(x - vt) = \gamma(x - vt) \\ t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \quad (6.8)$$

至于为什么这个变换公式就是我们需要的洛伦兹变换，就不在本书讨论的范围内了。

证明 6.2 就长度而言，尺缩效应只对物体长度方向的速度生效

I - P95 引



如图，我们省略 z 轴，考虑一根杆子，它在拥有 X, Y 轴的坐标系中静止，拥有原长 L 。考虑另一个坐标系，相对原坐标系有 X, Y 方向的速度，速度大小为 v 。

我们之前关于洛伦兹变换的讨论中，两坐标系之间的相对速度都是只有一个坐标轴上的分量的。因此，这里我们选择重新建立坐标系 S, S' ，其中 S 系保持与杆相对静止，而 S' 系与 S 系有相对速度 v ，且 S, S' 系的 x, x' 轴与相对速度方向平行。

这样， S 系和 S' 系的相对速度就只有一个坐标轴上的分量，我们得以使用之前讨论的洛伦兹变换处理问题。

设在 S 系中，杆的左端点坐标为 (x_1, y_1) ，右端点坐标为 (x_2, y_2) ，并记

$$\begin{cases} L_x = x_2 - x_1 \\ L_y = y_2 - y_1 \end{cases}$$

依据洛伦兹变换，有

$$\begin{cases} x'_1 = \gamma(x_1 - vt) \\ y'_1 = y_1 \\ x'_2 = \gamma(x_2 - vt) \\ y'_2 = y_2 \end{cases}$$

可以发现， $L'_x = x'_2 - x'_1$ 的情况与尺缩效应中讨论的情况相同，易知

$$L'_x = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L_x$$

又显然有

$$L'_y = L_y$$

于是

$$L' = \sqrt{(L'_x)^2 + (L'_y)^2} = \sqrt{L^2 - \frac{v^2}{c^2} L_x^2}$$

由几何关系有

$$\frac{L_x}{L} = \frac{v_X}{v}$$

可得

$$L' = \sqrt{1 - \frac{v_X^2}{c^2}} L$$

v_X 即是 v 在 X 轴方向上的分量，与杆子长度方向平行，于是我们可以认为，就长度而言，尺缩效应只对物体长度方向的速度生效。

需要注意的是，在 S' 系中，由于 x' 方向上的收缩，杆子的方向将与 S 系中的方向不同。

证明 6.3 Speed Transformation

I - P97 引

对于满足洛伦兹变换

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \beta \frac{x}{c}) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

的 S 系和 S' 系，设物体在 S 系中的速度坐标为 (u_x, u_y, u_z) ， S' 系中的速度坐标为 (u'_x, u'_y, u'_z) ，则有

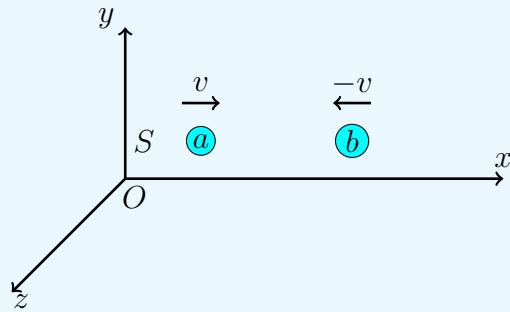
$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} & u'_y &= \frac{dy'}{dt'} & u'_z &= \frac{dz'}{dt'} \\ &= \frac{d(x - vt)}{d(t - \frac{v}{c^2}x)} & &= \frac{dy}{\gamma d(t - \frac{v}{c^2}x)} & &= \frac{dz}{\gamma d(t - \frac{v}{c^2}x)} \\ &= \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} & &= s \frac{\frac{dy}{dt}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} & &= s \frac{\frac{dz}{dt}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} & &= s \frac{u_y}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} & &= s \frac{u_z}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \end{aligned}$$

證明 6.4 $p = \gamma mv$

I - P99 引

動量守恒定律是非常重要的定律。因此，我們希望，在相對論中，動量守恒定律依舊成立。

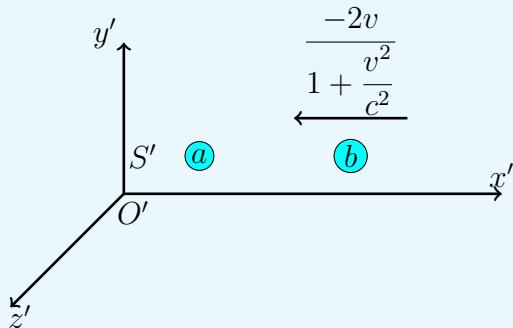
以此為突破點，我們嘗試將牛頓力學中的動量修正為相對論動量。



我們考慮在慣性系 S 中分別擁有速度 v 和 $-v$ 的小球 a, b ，且滿足 a, b 在靜止時，質量都為 m_0 。請注意，此時我們還沒有“靜質量”的概念。

由於我們已經假設速度有上限 c 了，不妨再假設物体的質量是速度的函數。由於 a, b 的速度大小相同，我們認為，兩個小球的質量相同。如果動量依舊保持 $p = mv$ 的形式，那麼兩個小球動量大小相同，方向相反，在保證動量守恒的前提下，兩個小球將會靜止。

我們再考慮一個與 a 相對靜止的慣性系 S' 。



在 S' 系中，由速度變換公式，有 b 的速度為

$$\frac{-v - v}{1 - \frac{v(-v)}{c^2}} = \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

按照在 S 系中討論的結果，我們知道，在 S' 系看來，碰撞後兩個小球應當都以速度 $-v$ 運動。

不妨設碰撞前 a 的質量為 m_1 ， b 的質量為 m_2 ，碰撞後兩球的質量為 m_3 ，

则有

$$m_2 \left(\frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \right) = 2m_3(-v) \quad (6.9)$$

除此之外，我们还希望碰撞前后依旧保持质量守恒，所以还应有

$$m_1 + m_2 = 2m_3 \quad (6.10)$$

注意到 m_1 等于 b 静止时的质量，我们尝试求解 m_1 和 m_2 ⁽¹⁾ 的关系。

综合式 (6.9), (6.10)，有

$$m_2 \left(\frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \right) = (m_1 + m_2)(-v)$$

解得

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{1 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (6.11)$$

需要注意的是，这里要研究的是 $\frac{m_2}{m_1}$ 与 m_2 的速度的关系 (m_1 速度为 0)。

我们不妨记 $v_b = \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$ ，并尝试将式 (6.11) 中的 v 都替换成 v_b 。

注意到

$$\left(\frac{v_b}{c} \right)^2 = \frac{\left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^2}{\left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right)^2}$$

于是恰好有

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_b^2}{c^2}}} \quad (6.12)$$

可以注意到，(6.12) 式恰好等价于

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{1/\sqrt{1 - \frac{v_b^2}{c^2}}}{1/\sqrt{1 - \frac{0^2}{c^2}}} \quad (6.13)$$

(1) 这里不可以选择求解 m_1 和 m_3 的关系，尽管 m_3 对应的速度 v 看上去更为简单。这是因为，我们讨论的是完全非弹性碰撞，在牛顿力学中，这会引入内能，而在我们的推导中，我们并不清楚这个能量会不会对质量也产生影响，因此研究 m_3 和 m_1 的关系有可能导致错误的结论。

所以可以推測，對於一個一般的物體，其質量 m 可以表示成靜止質量 m_0 乘以一個與速度有關的系數的形式，即

$$m = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m_0 = \gamma m_0 \quad (6.14)$$

當然，上面的內容嚴格來說並不能算證明，而只能說是得出相對論動量的一個合理的思路。至於其严谨性，還請不要過度深究。

證明 6.5 $K = W = (\gamma - 1)M_0 c^2$

I - P100 引

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{x_f} \frac{dp}{dt} dx = \int_0^{p_f} \frac{dx}{dt} dp \\ &= \int_0^{p_f} v d(Mv) = \int_0^{v_f} v(M dv) + \int_{M_0}^{M_f} v(v dM) \\ &= \int_0^{v_f} (Mv + v^2 \frac{dM}{dv}) dv \end{aligned}$$

注意到

$$\frac{dM}{dv} = \frac{d}{dv} \left(\frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{\gamma^2}{c^2} Mv$$

於是

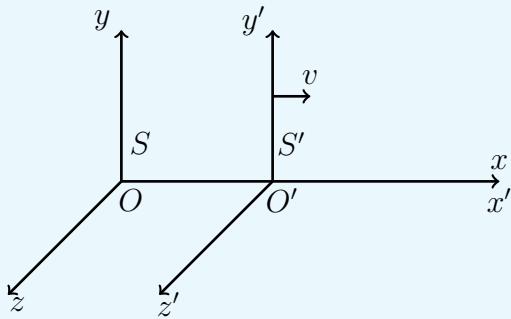
$$\begin{aligned} W &= \int_0^{v_f} \left(Mv + \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 Mv \right) dv \\ &= \int_0^{v_f} \gamma^2 Mv dv \\ &= \int_0^{v_f} c^2 \left(\frac{\gamma^2}{c^2} Mv^2 \right) dv \\ &= \int_{M_0}^{M_f} c^2 dM = Mc^2 \Big|_{M_0}^{M_f} \\ &= (\gamma - 1)M_0 c^2 \end{aligned}$$

其中也取 $M_f = \gamma M_0$ 。

證明 6.6_{I-II} Energy and Momentum Transformation

I - P101 引

II - P338 引



設 S' 系相對 S 系有 x 方向的速度 v ，並分別用 p, p' 表示任一物体在 S 系， S' 系中的動量，用 E, E' 表示該物体在 S 系， S' 系中的能量。

不妨設物体在 S 系中有質量 γm_0 ，速度 $u = (u_x, u_y, u_z)$ ，由速度變換公式得

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{u_y}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_z = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{u_z}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \end{array} \right.$$

於是

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z}{c^2}}} = \frac{1 - \frac{vu_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1 - \frac{vu_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \gamma$$

(此处省略億點計算)

故有

$$\left\{ \begin{array}{l} E' = \gamma' m_0 c^2 = \gamma m_0 c^2 \frac{1 - \frac{vu_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} E \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) \\ p'_x = \gamma' m_0 u'_x = \gamma m_0 \frac{u_x - v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (p_x - \frac{v}{c^2} E) \\ p'_y = \gamma' m_0 u'_y = \gamma m_0 u_y = p_y \\ p'_z = \gamma' m_0 u'_z = \gamma m_0 u_z = p_z \end{array} \right.$$

證明 6.7 Time order-preserving law*I - P110 引*

由洛伦兹变换

$$d(ct)' = \gamma[d(ct) - \beta dx]$$

我们知道，要说明一个事件的时序是否颠倒，只需看 $d(ct)'$ 的符号和 $d(ct)$ 的是否相反。

不妨设 $d(ct) > 0$ ，则只需注意 $d(ct)'$ 的符号即可。

对于类时和类光的间隔而言，

$$\left| \frac{dx}{d(ct)} \right| \leq 1$$

故有

$$d(ct)' = \gamma[d(ct) - \beta dx] \geq \gamma[|d(ct)| - |dx|] \geq 0$$

所以事件间隔是保时序的。

对于类空的间隔而言，

$$\left| \frac{dx}{d(ct)} \right| > 1$$

故存在变换使得

$$d(ct)' = \gamma[d(ct) - \beta dx] < 0$$

所以事件间隔不保时序。

反之，当 $d(ct) < 0$ ，亦然。

7

Thermodynamics

本章将分为两部分，第一部分是一些简单理论与结果的推导，按照笔记顺序给出；第二部分则涉及统计力学与热力学的一些本质问题，希望从熵这一核心量开始建立统计力学与热力学的图景。由于逻辑问题，这里证明的排列顺序无法与笔记中保持一致，将按照定理需要的先后来排布，供拓展阅读^[1]。

7.1 Part 1

证明 7.1 *the Microscopic View of Pressure*

I - P122 引

首先，假设一些必要的物理量。设容器中的气体粒子质量为 μ ，分子数密度为 ρ 。

然后，考虑某个撞击器壁的气体分子，如果把垂直于器壁的方向设为 x 正方向，且气体分子在 x 正方向的速度为 v_x ，则该气体分子具有 μv_x 的动量。由于理想气体的假设，其与器壁的碰撞为弹性碰撞，那么施加的冲量为 $2\mu v_x$ 。

然后考虑在 Δt 时间内撞击器壁的分子数。取器壁上一块面积为 S 的面积区域，以这块区域为底，高为 $v_x \Delta t$ 的体积区域中的粒子，向器壁运动的部分将会撞击器壁。由于粒子运动随机，撞向器壁与远离器壁的粒子数可视为相同。若设单位体积中粒子数为 ρ ，则参与撞击的粒子数为：

$$N_{collision} = \frac{1}{2} \rho S v_x \Delta t$$

^[1]仅从应试角度而言，第二部分的证明大多是拓展性质的，仅用作兴趣阅读。

从而有撞向器壁的总冲量大小为：

$$I = N_{\text{collision}} \mu v_x = \rho \mu S v_x^2 \Delta t$$

那么根据压强的定义就有：

$$p = \frac{\bar{F}}{S} = \frac{\bar{I}}{\Delta t S} = \rho \mu v_x^2$$

再次使用粒子运动随机的条件，可认为 $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$ 。于是有：

$$p = \frac{1}{3} \rho \mu \overline{v^2} \quad (7.1)$$

这样就得到了压强的表达式。

注意 $\rho = \frac{N}{V}$ ，将理想气体方程写成 $p = \rho k_B T$ 后，代入上式有：

$$\overline{\epsilon_k} = \frac{1}{2} \mu \overline{v^2} = \frac{3pV}{2N} = \frac{3}{2} k_B T \quad (7.2)$$

从而有理想气体分子的平均动能仅和温度有关。

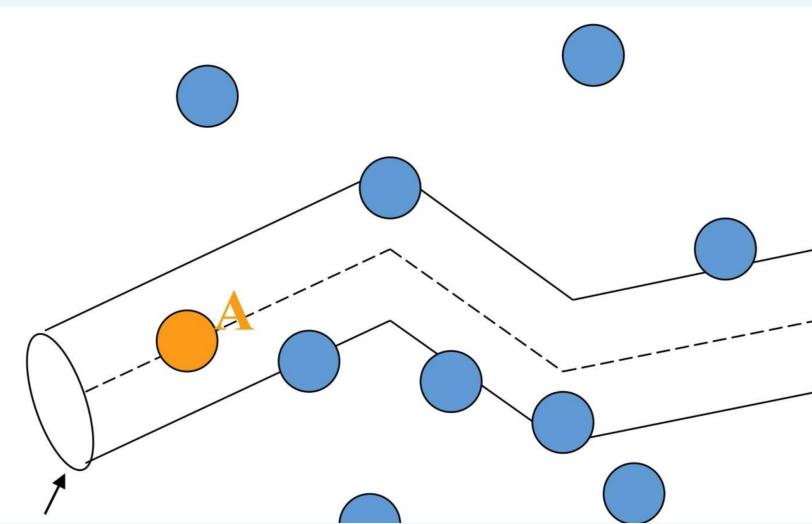
证明 7.2 Mean Free Path

I - P126 引

首先，我们假设除了作为研究对象的分子外，其余分子均静止。

设所有分子直径均为 d ，平均速度为 \bar{v} ，分子数密度为 ρ 。

那么，当两个分子间的球心距离小于 d 时，它们将发生碰撞，故某个分子的碰撞截面将是一个半径为 d 的圆，扫过的区域可以视为若干个圆柱体。



分子 A 的碰撞区域 (该图片来自 <https://zhuanlan.zhihu.com/p/579175648>)

那么，在 Δt 时间内，分子扫过体积内的分子数（即碰撞次数）为：

$$Z = \rho S L = \rho \pi d^2 \bar{v} \Delta t$$

但分子其实是运动的，所以我们需要用相对平均速度 $\bar{u} = \sqrt{2\bar{v}}$ ⁽¹⁾ 代替这里的平均速度，这样我们就得到了碰撞频率的表达式：

$$Z = \sqrt{2\pi} d^2 \rho \bar{v} \Delta t \quad (7.3)$$

于是平均自由程等于通过的路程与碰撞频率的比值：

$$l = \frac{s}{Z} = \frac{\bar{v} \Delta t}{\sqrt{2\pi} d^2 \rho \bar{v} \Delta t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} d^2 \rho} \quad (7.4)$$

证明 7.3 Heat Capacity of Ideal Gas

对 1mol 理想气体，其内能等于：

$$U = \frac{i}{2} RT$$

等容条件下，系统不做功，故由热力学第一定律有 $Q = \Delta U$ ，代入等容热容定义中：

$$C_V \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V = \frac{\Delta U}{\Delta T} = \frac{i}{2} R \quad (7.5)$$

(1) 若对具体证明有兴趣，

见 *Prove 7.13_i ~ P 277*。

I - P129 引

等压条件下，系统做功为：

$$W = \Delta(pV) = \Delta(RT) = R\Delta T$$

结合热力学第一定律，代入等压热容定义中：

$$C_p \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p = \frac{\Delta U + W}{\Delta T} = \frac{i+2}{2} R \quad (7.6)$$

证明 7.4 *Isochoric Process and Isobaric Process*

I - P130 引

对等容过程，其他物理量的求法是显然的，熵则将 Q 微分得到 $\delta Q = nC_V dT$ ，代入定义中：

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{nC_V dT}{T} = nC_V \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (7.7)$$

等压过程的熵类似等容过程，略。

II - P131 引

证明 7.5 *Isothermal Process*

I - P131 引

对等温过程，由于无温度变化，故 $\Delta U = 0$ ，由于 $PV = nRT = \text{constant}$ ，有：

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (7.8)$$

由热力学第一定律， $Q = W$ ，代入熵的定义中：

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nR}{V} dV = nR \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (7.9)$$

证明 7.6 *Adiabatic Process*

I - P131 引

对绝热过程，有 $Q = 0$ ，故 $\Delta S = 0$ 。故由热力学第一定律，有 $\Delta U = -W$ ，我们将两边都用微分形式表示出来：

$$\frac{i}{2} nR dT = -p dV$$

然后我们对理想气体定律 $pV = nRT$ 两边微分，注意 p , V , T 均为变量：

$$p dV + V dp = nR dT$$

II - P270 引

注意到上面两个式子 dT 的部分类似，于是尝试消去 dT :

$$\frac{i}{2}(p dV + V dp) = -p dV$$

整理一下并把两个变量分别放到两边:

$$\frac{i+2}{i} \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p}$$

对两边积分:

$$\frac{i+2}{i} \ln V = -\ln p + C$$

设 $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{2+i}{i}$, 那么就有:

$$pV^\gamma = constant \quad (7.10)$$

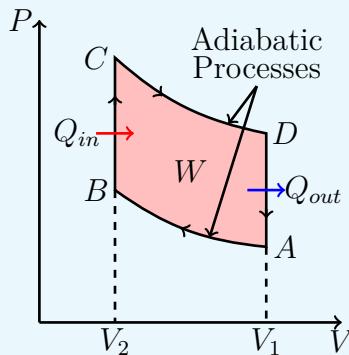
然后来求做功，把上面的结论直接代入计算即可:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1^\gamma}{V^\gamma} dV = \frac{p_1 V_1^\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}} \right) \quad (7.11)$$

证明 7.7 Efficiency of a Otto Cycle

I - P133 引

奥托循环如下:



AB 与 CD 为绝热过程， $Q = 0$ ，我们只需考虑 BC 过程的吸热与 DA 过程的放热。这是两个等压过程，它们的热（这里取绝对值）为:

$$Q_{in} = |nC_V \Delta T_{BC}| = nC_V(T_C - T_B)$$

$$Q_{out} = |nC_V \Delta T_{DA}| = nC_V(T_D - T_A)$$

那么有热机效率:

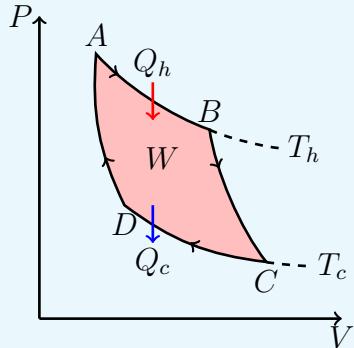
$$e = \frac{Q_{in} - Q_{out}}{Q_{in}} = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} \quad (7.12)$$

证明 7.8 Efficiency of a Carnot Cycle

I - P133 引

这和奥托循环的证明几乎一样。

卡诺循环如下：



AB 与 CD 为绝热过程， $Q = 0$ ，我们只需考虑 AB 过程的吸热与 CD 过程的放热。这是两个等温过程，它们的热（这里取绝对值）为：

$$Q_h = nRT_h \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$Q_c = nRT_c \ln \frac{V_C}{V_D}$$

绝热过程 (*Prove 7.6_{ii}~P 268*) 有：

$$P_C V_C^\gamma = P_B V_B^\gamma \quad P_A V_A^\gamma = P_D V_D^\gamma$$

根据理想气体定律 $PV = nRT$ ，可得绝热过程温度与体积的关系：

$$T_c V_C^{\gamma-1} = T_h V_B^{\gamma-1} \quad T_c V_D^{\gamma-1} = T_h V_A^{\gamma-1}$$

那么两式左右分别对应相除，易得：

$$\frac{V_C}{V_D} = \frac{V_B}{V_A}$$

那么有热机效率：

$$e = \frac{Q_h - Q_c}{Q_h} = 1 - \frac{T_c}{T_h} \quad (7.13)$$

7.2 Part 2

证明 7.9 Boltzmann Distribution

I - P126 引

虽然笔记主体先给出麦克斯韦分布，然后利用其结论进行玻尔兹曼分布的推导，但实际上顺序是有问题的，下面给出事实上的推导过程。

首先需要了解，在经典体系中，粒子被认为是可辨的，即每个粒子都被认为是不同的对象；将所有微观粒子排布到能级（假设每个能级所能容纳的粒子是无限的）上，产生一种微观态。这些微观态中，所有对应能级上粒子数均相同的微观态属于同一个分布；而这些分布中出现概率最大的，称为**最概然速率**

接着是一个统计力学的基本假设，由玻尔兹曼提出：处在平衡的孤立系统，其每个微观态的出现概率是相等的。

由于宏观态事实上是所有微观态的叠加，其能级分布是各分布的叠加，而最概然分布对其中贡献最大，可以认为宏观分布就是最概然分布。有了这些知识和这个前提，我们来推导最概然分布。

假设有 N 个粒子以及 k 个能级，第 i 个能级的简并度为 w_i 。先考虑向第 1 个能级填入 a_1 个粒子，这相当于先从 N 个粒子中选出 a_1 个，然后将每个粒子可以填入 w_1 个简并轨道中的其中任意一个，对应的情况总共有：

$$\Omega_1 = C_{a_1}^N (w_1)^{a_1} = \frac{N!}{a_1!(N-a_1)!} (w_1)^{a_1} \quad (7.14)$$

然后粒子数变为 $N - a_1$ ，用同样的方法考虑第 2 个能级，得到：

$$\Omega_2 = C_{a_2}^{N-a_1} (w_2)^{a_2} = \frac{(N-a_1)!}{a_2!(N-a_1-a_2)!} (w_2)^{a_2} \quad (7.15)$$

以此类推，并将所有可能数相乘，得到分布数：

$$\Omega = \prod_{i=1}^k \Omega_i = \frac{N!}{\prod_{i=1}^k a_i!} \prod_{i=1}^k (w_i)^{a_i} \quad (7.16)$$

因为对数与原函数在同一点取极值，所以我们对它取个对数，有：

$$\ln \Omega = \ln(N!) \sum_{i=1}^k [a_i \ln(w_i) - \ln(a_i!)] \quad (7.17)$$

N 是一个很大的数，我们假设所有的 a_i 也是很大的数⁽²⁾，使用如下的积分估值：

$$\ln(N!) = \ln\left(\prod_{i=1}^N i\right) = \sum_{i=1}^N \ln(i) \approx \int_1^N \ln x \, dx = N \ln N - N \quad (7.18)$$

(2) 这一假设对真实气体并不严谨，但推导理想气体够用了。

并且注意到 $\sum_{i=1}^k a_i = N$, 就可以得到:

$$\begin{aligned}\ln \Omega &= N \ln N - N - \sum_{i=1}^k a_i \ln(a_i) + \sum_{i=1}^k a_k + \sum_{i=1}^k a_i \ln(w_i) \\ &= N \ln N - \sum_{i=1}^k a_i \ln(a_i) + \sum_{i=1}^k a_i \ln(w_i)\end{aligned}\quad (7.19)$$

全微分:

$$d(\ln \Omega) = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial(\ln \Omega)}{\partial a_i} \right)_{a_j (j \neq i)} da_i = - \sum_{i=1}^k (1 + \ln a_i - \ln w_i) da_i \quad (7.20)$$

考虑存在如下两个约束条件, 所有能级上的粒子之和等于 N , 所有粒子的能量之和等于内能 U , 设第 i 个能级的能量为 ϵ_i , 即有:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k a_i &= N \\ \sum_{i=1}^k a_i \epsilon_i &= U\end{aligned}\quad (7.21)$$

要求极值, 显然使用拉格朗日乘因子法, 分别对上式微分后乘以 $\alpha + 1$, β 加到 7.20 中, 可得到:

$$\sum_{i=1}^k \left[\ln\left(\frac{w_i}{a_i}\right) + \alpha + \beta \epsilon_i \right] da_i = 0 \quad (7.22)$$

此时变量相互独立, 只需令每一项均为 0 即可, 得到:

$$\ln\left(\frac{w_i}{a_i}\right) + \alpha + \beta \epsilon_i = 0 \quad (7.23)$$

写成指数形式也就是:

$$a_i = w_i e^{\alpha + \beta \epsilon_i} \quad (7.24)$$

下面我们更进一步, 来试试把 α 与 β 的表达式求出来。

我们现在重新观察一下 7.19, 并将其写成如下形式:

$$\ln \Omega = N \ln N + \sum_{i=1}^k a_i \ln\left(\frac{w_i}{a_i}\right) \quad (7.25)$$

这样我们较为方便的把 7.23 代入, 并注意一下 7.21, 不难得到:

$$\ln \Omega = N \ln N - \alpha \sum_{i=1}^k a_i - \beta \sum_{i=1}^k \epsilon_i a_i = N \ln N - \alpha N - \beta U \quad (7.26)$$

接着我们利用熵的微观表达式，即玻尔兹曼公式，并结合最概然分布的假设，代入有：

$$S = k_B \ln \sum \Omega_i = k_B \ln \Omega = k_B N \ln N - k_B \alpha N - k_B \beta U \quad (7.27)$$

最后结合温度的定义即可求得 β ：

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial U} &= -k_B \beta = \frac{1}{T} \\ \beta &= -\frac{1}{k_B T} \end{aligned} \quad (7.28)$$

定义配分函数如下：

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^k w_i e^{-\frac{\epsilon_i}{k_B T}} \quad (7.29)$$

将7.24代入7.21的 N 中，可以得到：

$$\begin{aligned} N &= Z e^\alpha \\ \alpha &= \ln \left(\frac{N}{Z} \right) \end{aligned} \quad (7.30)$$

就有了最基本的形式：

$$a_i = \frac{w_i N}{Z} e^{-\frac{\epsilon_i}{k_B T}} \quad (7.31)$$

设第一个能级为基态，其能量为 0（由于习惯，基态用下标“0”表示），且能级无简并 ($w_i = 1$)：

$$a_0 = e^\alpha \quad (7.32)$$

从而得到有：

$$a_i = a_0 e^{-\frac{\epsilon_i}{k_B T}} \quad (7.33)$$

这样我们就得到了玻尔兹曼分布的表达式。

证明 7.10 _{J-II} Maxwell Distribution

想象速度的分布表示在三维坐标系中，也就是速度空间，向 x, y, z 坐标分别表示 v_x, v_y, v_z ，速度相同的粒子分布在同一点。在这样一个空间中，我们来考察速度在 v 到 $v + dv$ 的粒子，相当于不计速度方向而考虑速度

I - P124 引

II - P277 引

大小，那么它所覆盖的体积显然是一个厚度为 dv 的球壳。它的体积为：

$$dV = \frac{4}{3}\pi(dv + v)^3 - \frac{4}{3}\pi v^3 = 4\pi v^2 dv + o(dv) = 4\pi v^2 dv \quad (7.34)$$

根据玻尔兹曼分布 7.31，在这个速度的粒子数密度与动能的关系为^a：

$$a = \frac{N}{Z} e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}} \quad (7.35)$$

下面来求配分函数，在连续空间中，我们把累加化为积分。因为位置和速度都可能影响能级能量^b，所以积分区间应遍历整个空间与速度空间，即相空间：

$$Z = \int \dots \int e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}} dx dy dz dv_x dv_y dv_z \quad (7.36)$$

注意到能量与空间分布无关，所以对空间的积分就等于 V ，然后看对速度的积分，由于只需考虑速度大小且积分区间为全速度空间，我们选择从球壳逐层积分，即 $dv_x dv_y dv_z = 4\pi v^2 dv$ ，从而：

$$\begin{aligned} Z &= 4\pi V \int_0^{+\infty} v^2 e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}} dv \\ &= -\frac{4\pi V k_B T}{\mu} (ve^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}} dv) \end{aligned} \quad (7.37)$$

前一项显然为 0，后一项是经典的高斯积分，在概率论与数学分析中都有涉及它的求解，这里直接给出结果：

$$Z = \frac{4\pi V k_B T}{\mu} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{\mu}} \right) = V \left(\frac{2\pi k_B T}{\mu} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (7.38)$$

将它代入粒子数的表达式，我们可以得到粒子密度随动量的分布：

$$\rho = \frac{a}{V} = N \left(\frac{\mu}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}} \quad (7.39)$$

这样就可以求 dN 了，它等于速度空间体积元内的粒子数：

$$dN = \rho dV = N 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}} dv \quad (7.40)$$

联系速率分布函数的定义，其实我们已经得到了麦克斯韦分布：

$$f(v) = \frac{dN}{N dv} = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}} \quad (7.41)$$

证毕。

^a 这里我们不考虑能级简并问题，因为经典动能是连续的，导致了对 $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = A$ 来说，在 $A > 0$ 的情况下总是有无数组解。

^b 虽然这里的空间分布不影响能量，但不代表积分时可以不考虑。

证明 7.11_{I-II} Ideal Gas Law

先回到玻尔兹曼分布7.27，我们已经求出了这里的 α 与 β ，直接代入：

$$S = k_B N \ln N - k_B N \ln \frac{N}{Z} + \frac{U}{T} = k_B N \ln Z + \frac{U}{T} \quad (7.42)$$

定义亥姆霍兹自由能 $A = U - TS$ ，从而上式化为：

$$A = -k_B NT \ln Z \quad (7.43)$$

这里的配分函数我们已经计算过了，直接代入7.38₍₃₎：

$$A = -k_B NT \ln \left[V \left(\frac{2\pi k_B T}{\mu} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (7.44)$$

代入热力学基本方程 $dU = T dS - p dV$ ，可以得到₍₄₎：

$$dA = -S dT - p dV \quad (7.45)$$

A 为状态函数，上式是全微分，所以：

$$\left(\frac{\partial A}{\partial V} \right)_T = -p \quad (7.46)$$

代入 A 有：

$$\left(\frac{\partial A}{\partial V} \right)_T = -\frac{k_B NT}{V} = -p \quad (7.47)$$

这就是理想气体定律，重写为：

$$pV = Nk_B T \quad (7.48)$$

证毕。

I - P122 引

II - P123 引

(3) 严谨来说应该把外势场以及转动动能考虑进去，不过那样配分函数还是 $Z = \ln(Vf(T))$ 的形式，区别只是 $f(T)$ 不影响推导

(4) 事实上热力学基本方程有四个，这也被视为其中一个，还有两个分别关于焓 H 与吉布斯自由能 G

证明 7.12 Equipartition Theorem

首先考虑最简单的单原子分子，其只有平动动能，故其 A 与 7.44 一致，结合 7.45，得到熵的表达式：

$$\begin{aligned} S &= - \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)_V \\ &= k_B N \ln \left[V \left(\frac{2\pi k_B T}{\mu} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{3}{2} k_B N \\ &= -\frac{A}{T} + \frac{3}{2} k_B N \end{aligned} \quad (7.49)$$

由 $U = A + ST$ 即得到：

$$U = \frac{3}{2} k_B N T = \frac{3}{2} R T \quad (7.50)$$

这与单原子分子只有三个平动自由度相吻合。

然后把转动动能考虑进来，先来看非线性分子。令 $I = \frac{1}{2} J w^2$ 为转动动能，取类似于速度空间的角速度空间，这样考虑了转动后的配分函数变为：

$$Z = \int \dots \int e^{-\frac{\mu v^2 + J w^2}{2k_B T}} dx dy dz dv_x dv_y dv_z dw_x dw_y dw_z \quad (7.51)$$

由于非线性分子实际上平动动能与转动动能形式一致，故积分结果也一致，有：

$$Z = V \left(\frac{4\pi^2 k_B^2}{\mu J} \right)^{\frac{3}{2}} T^3 \quad (7.52)$$

经过与前面相同的推导可以得到：

$$U = 3k_B N T = 3R T \quad (7.53)$$

到这里已经可以发现，平动与转动自由度影响了配分函数对温度的次数，后者与内能对 RT 的系数一致。

对线性分子，绕穿过分子的那条轴的转动惯量过小，对应方向上的转动动能可以忽略。假设忽略 w_z ，则体积元从球壳变为圆柱体壳，即 $dw_x dw_y dw_z = 2\pi w dw$ ，即下面的积分：

$$2\pi \int_0^{+\infty} w e^{-\frac{J w^2}{2k_B T}} dw = \frac{2\pi k_B T}{J} \quad (7.54)$$

于是有 $Z \propto T^{\frac{5}{2}}$, 对应的:

$$U = \frac{5}{2} k_B N T = \frac{5}{2} R T \quad (7.55)$$

必须指出, 我们用积分计算配分函数意味着我们假设平动能级和转动能级的能隙相对于 $k_B T$ 来说很小, 所以把能级近似为连续的考虑。这一假设对于振动能级开始已经不再成立, 我们必须使用求和代替积分, 这个计算出来的贡献相对前两者来说可以忽略, 不过这部分的计算需要使用量子力学, 这里就不给出振动贡献可忽略的证明了。

证明 7.13 *Relative average velocity of molecules*

I - P267 引

我们需要先做一个基本假设, 分子的速度在各个方向上的分布是均匀的, 即球对称分布。

设其中一个分子的速度为 \mathbf{v}_1 , 另一个分子的速度为 \mathbf{v}_2 , 相对速度 $\mathbf{u} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ 。

直接研究向量比较麻烦, 我们选取某一个方向上的分量, 比如 x 方向。此时我们需要一维的麦克斯韦分布, 速度空间一维只有两个方向, 设微元为 dv , 积分区间为 $-\infty$ 至 $+\infty$ 即可, 其他与三维一致 (见 *Prove 7.10_{ii}~P273*), 由:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}} dv = \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{\mu}} \quad (7.56)$$

得到归一化系数 $\sqrt{\frac{\mu}{2\pi k_B T}}$, 从而有一维分布:

$$f(v) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi k_B T}} e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}}$$

那么这两个粒子在 x 方向上的速度分布为:

$$f_1(v_{1x}) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi k_B T}} e^{-\frac{\mu v_{1x}^2}{2k_B T}}$$

$$f_2(v_{2x}) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi k_B T}} e^{-\frac{\mu v_{2x}^2}{2k_B T}}$$

设 $f(u_x) = f(v_{2x} + (-v_{1x}))$ 为相对速率分布函数, 它的变量是两个独立变量的和, 那么这个函数是这两个独立变量的分布函数的卷积 (可参考任意

“概率论与数理统计”教材)⁽⁵⁾:

$$\begin{aligned}
 f(u_x) &= f_1(v_{1x}) * f_2(v_{2x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(-v_{1x}) f_2(u_x + v_{1x}) dv_{1x} \\
 &= \frac{\mu}{2\pi k_B T} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\mu v_{1x}^2}{2k_B T}} e^{-\frac{\mu(v_{1x}+u_x)^2}{2k_B T}} dv_{1x} \\
 &= \frac{\mu}{2\pi k_B T} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\mu(2v_{1x}^2+2v_{1x}u_x+u_x^2)}{2k_B T}} dv_{1x} \\
 &= \frac{\mu}{2\pi k_B T} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\mu[2(v_{1x}+\frac{1}{2}u_x)^2+\frac{1}{2}u_x^2]}{2k_B T}} dv_{1x}
 \end{aligned}$$

这是对 v_{1x} 的积分，利用 $t = v_{1x} + \frac{1}{2}u_x$ 换元即可，结果为：

$$f(u_x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\pi k_B T}} e^{\frac{\mu u_x^2}{4k_B T}}$$

根据假设，速率分布与坐标轴的选取无关。这意味着对任意方向，我们都有以上的相对速率分布，那么我们可以肯定 $f(u_y)$ 、 $f(u_z)$ 与 $f(u_x)$ 的形式一致；同样由于速度分布于坐标轴的选取无关，而相对速度的结果在任意坐标系中应一致，那么它与速度分布一样是球对称的。我们取一个球壳元 $4\pi du$ ，其中的粒子数为：

$$dN = f(u) du = f(u_x) f(u_y) f(u_z) 4\pi du = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\mu}{\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} u^2 e^{\frac{\mu u^2}{4k_B T}} du$$

即：

$$f(u) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\mu}{\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} u^2 e^{\frac{\mu u^2}{4k_B T}}$$

相对平均分子速率即数学期望：

$$\begin{aligned}
 \bar{u} &= \int_0^{+\infty} u f(u) du \\
 &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\mu}{\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} u^3 e^{\frac{\mu u^2}{4k_B T}} du \\
 &= \frac{\pi}{4} \left(\frac{\mu}{\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} v e^{\frac{\mu v}{4k_B T}} dv \quad (v = u^2) \\
 &= \sqrt{2} \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi \mu}} \\
 &= \sqrt{2} \bar{v}
 \end{aligned}$$

证毕。

(5) 这里假设不考虑量子效应，即假设速度分布是连续的

8

Electromagnetism

证明 8.1 *Gauss's Law*

I - P148 引

我们考虑直接通过麦克斯韦方程组证明。首先已知 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, 现在假设一个很小的立方体包围带点电荷空间, 沿着 x, y, z 方向, 我们有关于电场通量的表达式:

$$\begin{aligned}\Phi &= \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \\ &= [E_x(x + dx) - E_x(x)] dy dz \\ &\quad + [E_y(y + dy) - E_y(y)] dx dz \\ &\quad + [E_z(z + dz) - E_z(z)] dx dy\end{aligned}$$

使用微积分中的高斯定理, 可以得到:

$$\begin{aligned}\Phi &= \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \nabla \cdot \mathbf{E} dV \\ &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho dV) \\ &= \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

当然, 我们也理解, 对于多个这样的微元立方体, 其叠加的时候, 总的电场通量是各个小的电通量的累加。此时考虑两个微元立方体的接触面, 对于一个立方体进入的通量等于另一个立方体离开的通量, 这一部分是可以

相互抵消的，因此：

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \oint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_i = \sum_{i=1}^N V_i \frac{\oint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_i}{V_i}$$

再结合积分与求和的关系，可以最终得到：

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_V \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_i}{\Delta V} dV \\ &= \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV \\ &= \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \\ &= \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

证明 8.2 *Properties of electric dipoles*

I - P152 引

对于如下的电偶极子系统：

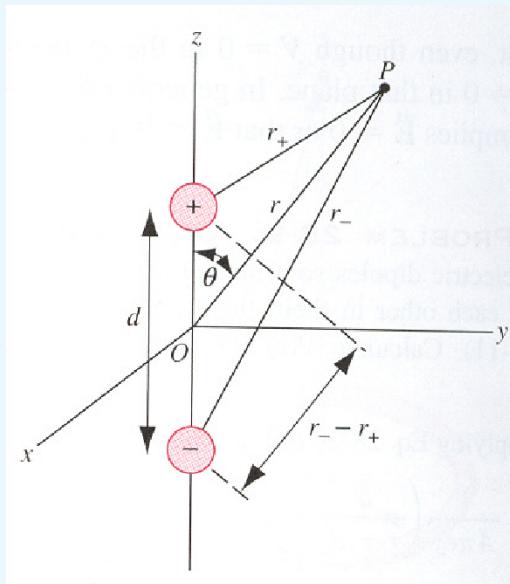


图 8.1: 电偶极子系统示意图

(1) 关于电偶极子系统周围的电场，我们主要利用库仑定律推导，根据近似关系，我们有：

$$\mathbf{r}_{\pm} = (r \cos \theta \mp \frac{d}{2}) \hat{k} + r \sin \theta \hat{j}$$

$$r_{\pm}^2 \approx r^2 \mp rd \cos \theta \quad (d \ll r)$$

其中第二个公式利用了余弦定理，且我们在这个问题的思考中默认 d 远小于 r 。然后我们列写库仑定律表达式（这里我们利用矢量计算，因此对库仑定律公式做出些许改变，以符合单位制的要求）：

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(+q)\mathbf{r}_+}{r_+^3} + \frac{(-q)\mathbf{r}_-}{r_-^3} \right] \quad (\text{库仑定律公式}) \\ &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(rcos\theta - \frac{d}{2})\hat{k} + rsin\theta\hat{j}}{(r^2 - rdcos\theta)^{3/2}} - \frac{(rcos\theta + \frac{d}{2})\hat{k} + rsin\theta\hat{j}}{(r^2 + rdcos\theta)^{3/2}} \right] \quad r^3 = (r^2)^{3/2}\end{aligned}$$

由于以下近似关系：

$$\frac{1}{(r^2 \mp rdcos\theta)^{3/2}} = \frac{1}{r^3} (1 \mp \frac{d}{r} cos\theta)^{-3/2} \approx \frac{1}{r^3} (1 \pm \frac{3d}{2r} cos\theta)$$

代入化简上式可得：

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[-d\hat{k} + \frac{3dcos\theta}{r} (rcos\theta\hat{k} + rsin\theta\hat{j}) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[(-qd\hat{k}) + \frac{3(qd)rcos\theta}{r^2} (rcos\theta\hat{k} + rsin\theta\hat{j}) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[-\mathbf{p} + 3 \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})\mathbf{r}}{r^2} \right]\end{aligned}$$

(2) 关于电偶极子系统周围的电势，我们也利用近似处理与基础公式结合的方式推导。我们默认无限远处为 0 电势。近似关系包括：

$$r_- - r_+ \approx dcos\theta \quad r_- r_+ \approx r^2$$

因此利用点电荷的电势表达式计算可得：

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+} + \frac{-q}{r_-} \right) = \frac{qdcos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= \frac{pcos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}\end{aligned}$$

证明 8.3_J 导体表面电场与曲率半径的关系

I - P156 引

我们假想两个球形带电体，他们具有不同的半径。现在使用一个导线连接两个球体表面，电荷将会在两个带电导体上出现移动并最终实现平衡。很

明显，这时候两个球体表面是等电势的。我们有电势的推导公式：

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

所以：

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

同时按照推论，我们也有 $E \propto \sigma$ ，因此：

$$E \propto \frac{1}{R} \quad \sigma \propto \frac{1}{R}$$

证明 8.4 一阶电路的结论

I - P169 引

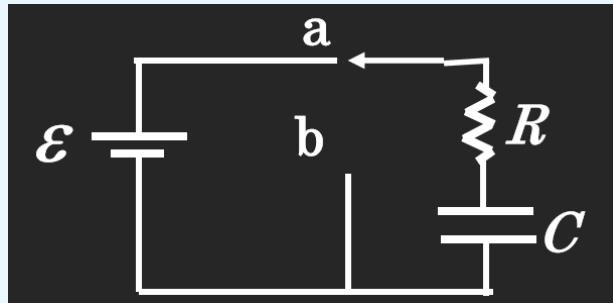


图 8.2: 简单一阶 RC 电路

首先考虑当电路从没有接通电源到接通电源后的变化过程。

根据电容特性以及基尔霍夫定律，假设变量为回路电流和电容两端的电压，可知：

$$i = C \frac{du}{dt}$$

$$\varepsilon = iR + u$$

初值条件： $u = 0$

整理可得：

$$\varepsilon = u + RC \frac{du}{dt}$$

根据微分方程的结果可知，该方程的解为：

$$u = \varepsilon(1 - e^{-t/RC})$$

当电容完全充电后，将开关切换到 b 点，此时也可以列写出相应的微分方程：

$$RC \frac{du}{dt} + u = 0$$

初值条件： $u = \varepsilon$

可解得：

$$u = \varepsilon e^{-t/RC}$$

对于 RL 电路读者可采用类似方法证明，此处不多赘述。

证明 8.5. Y-Δ 等效

I - P171 引

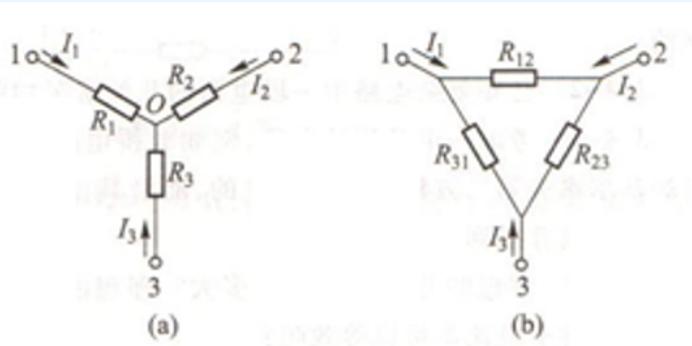


图 8.3: Y-Δ 等效电路

等效要求不改变电路中其他部分的电压和电流等各项电路性质，因此我们可以假设三个端口的电势和电流，这在两种连接中应该是分别对应相等的。考虑到用电流表示电压时“Δ”型连接需要表示六个电流参数，而电压表示电流时“Y”型连接只需要四个电势参数，所以我们采用电压表示电流。

注意到，“Y”型连接有一个公共点 O，如果希望表示电压电流的话，知道这一点处的信息将能够极大地简化相关物理量的表示。另外，电压表示电流我们可以采用电导率来降低公式的复杂度：

$$I_1 = G_1 U_{10} = (\varphi_1 - \varphi_0) \times G_1$$

$$I_2 = G_2 U_{20} = (\varphi_2 - \varphi_0) \times G_2$$

$$I_3 = G_3 U_{30} = (\varphi_3 - \varphi_0) \times G_3$$

由 KCL 定律:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \Rightarrow \varphi_1 G_1 + \varphi_2 G_2 + \varphi_3 G_3 - \varphi_0 (G_1 + G_2 + G_3) = 0$$

因此:

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 G_1 + \varphi_2 G_2 + \varphi_3 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

由 Y 电路将电势 φ_0 代入最初的三个表达式可得:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} (\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} (\varphi_1 - \varphi_3) \\ I_2 &= \frac{G_2 G_1}{G_1 + G_2 + G_3} (\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} (\varphi_2 - \varphi_3) \\ I_3 &= \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3} (\varphi_3 - \varphi_1) + \frac{G_3 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} (\varphi_3 - \varphi_2) \end{aligned}$$

由 Δ 电路:

$$I_1 = G_{12} U_{12} + G_{31} U_{13} = G_{12} (\varphi_1 - \varphi_2) + G_{31} (\varphi_1 - \varphi_3)$$

$$I_2 = G_{12} U_{21} + G_{23} U_{23} = G_{12} (\varphi_2 - \varphi_1) + G_{23} (\varphi_2 - \varphi_3)$$

$$I_3 = G_{31} U_{31} + G_{23} U_{32} = G_{31} (\varphi_3 - \varphi_1) + G_{23} (\varphi_3 - \varphi_2)$$

根据系数相等可得:

$$\begin{aligned} G_{12} &= \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \\ G_{23} &= \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \\ G_{31} &= \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3} \end{aligned}$$

根据电导率反解电阻表达式:

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_3}$$

$$R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_1}$$

$$R_{31} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_2}$$

再次反解表达式，可以得到逆变换的结果：

$$\begin{cases} R_1 = \frac{R_{31}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{cases}$$

证明 8.6 *Ampere's Law*

I - P174 引

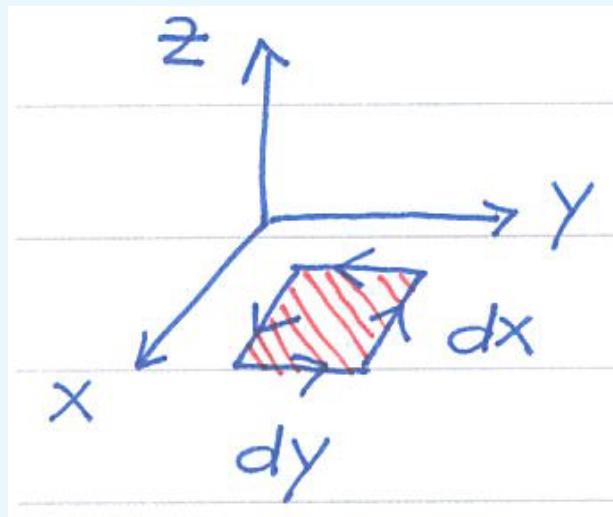


图 8.4: 安培定理的证明

如上图所示，我们取 xOy 平面内很小的一个方形区域，应用麦克斯韦方程 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ ，有：

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= [B_x(y) - B_x(y + dy)] dx + [B_y(x + dx) - B_y(x)] dy \\ &= \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) dx dy \\ &= (\nabla \times \mathbf{B})_z dx dy = (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \mu_0 \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I \end{aligned}$$

证明 8.7 外加磁场对磁偶极子的影响

I - P177 引

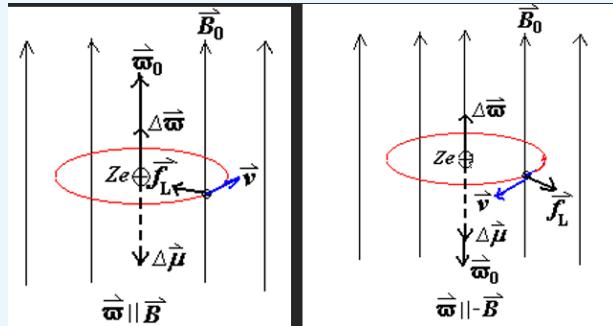


图 8.5: 磁场对磁偶极子的影响

我们使用经典力学分析，根据圆周运动易得初始平衡状态时 $\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = m_e\omega_0^2 r$ ，此时外加一个磁场，其中的电子会多受到一个洛伦兹力的影响。以 $\Delta\omega \parallel B_0$ 为例，则：

$$\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + e\omega r B = m_e\omega^2 r$$

此处有 $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ ，因此：

$$\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + e\omega_0 r B + e\Delta\omega r B = m_e\omega_0^2 r + 2\omega_0\Delta\omega m_e r + m_e\Delta\omega^2 r$$

由于 $\omega \gg \Delta\omega$ 以及最初平衡的等式，我们在该展开式中删除原等式的部分以及仅含有 $\Delta\omega$ 的部分，可得：

$$e\omega_0 r B = 2\omega_0\Delta\omega m_e r \Rightarrow \Delta\omega = \frac{eB}{2m_e}$$

代入磁偶极矩与角速度的关系式即得最终结论。当 $\Delta\omega \parallel -B_0$ 的推导也类似，此处不再赘述。

证明 8.8 电磁波的性质

I - P192 引

在自由空间（电荷密度 $\rho = 0$ ，电流密度 $J = 0$ 的空间）中，电磁波满足：

- 麦克斯韦方程组满足狭义相对论。
- 电与磁作为波的存在性：麦克斯韦方程组证明了电磁波的存在，且电磁波是横波且是偏振的。 E 、 B 、传播方向两两相互正交。

- 电磁波中电场和磁场始终是共面的，二者相位差为 0。
 - 光是一种电磁波，且光速满足 $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$
 - 守恒律：电荷总量、动量、能量三者均守恒。
 - $E = cB$ ，因此大多数仪器包括人眼对于电场的变化更为敏感。
-

首先引入平面波的概念。在传播过程中，单点产生的电磁波将会扩散到无穷远的地方。半径越大，对于其中有限大的局部电磁波，就越接近于平面。因此电磁波的性质将在平面传播的基础上讨论。

根据麦克斯韦方程，在自由空间中，我们有：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\mu_r \mu_0 \left(\frac{\partial H_x}{\partial t} \hat{i} + \frac{\partial H_y}{\partial t} \hat{j} + \frac{\partial H_z}{\partial t} \hat{k} \right) \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \epsilon_r \epsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} \hat{i} + \frac{\partial E_y}{\partial t} \hat{j} + \frac{\partial E_z}{\partial t} \hat{k} \right) \end{aligned}$$

进一步地，我们展开所有行列式，得到下面 8 个等式：

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_r \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad (2-1)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu_r \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (2-2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu_r \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (2-3)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (4-1)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (4-2)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (4-3)$$

电磁波是以一点向外传播的，在包络的球面上每一点的电场和磁场强度都相等。对于平面波而言（假设平面是 xOy 平面），就是在这一面上的电场和磁场与 x 和 y 轴都无关。因此有：

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} &= \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} &= \frac{\partial H_y}{\partial y} = \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

根据式 (1)(2-3)(3)(4-3) 可得：

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 0 & \frac{\partial H_z}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial H_z}{\partial z} &= 0 & \frac{\partial E_z}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

因此可得到 H_z 和 E_z 与 z 轴以及时间无关，即满足平面波：

$$E_z(z, t) = \text{constant}$$

$$H_z(z, t) = \text{constant}$$

进一步地， z 轴方向分量与电磁波无关：

$$E_z = H_z = 0$$

由于分量为 0，我们可以处理上一阶段剩余的四个方程，并得到如下的结果：

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_r \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad (2-1')$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_r \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (2-2')$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (4-1')$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (4-2')$$

我们不妨假设电场强度沿着 x 轴方向（即 $E_y = 0$ ），则进一步简化得到：

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z} = 0$$

也就是说磁场强度没有 x 轴分量，它应当是在 y 轴。故电场方向和磁场方向垂直，并与电磁波传播方向分别垂直。

根据方程 (2-2')(4-1')，分别对其两边对 z 偏导，得到：

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\mu_r \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial H_y}{\partial z} = \mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = -\varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_x}{\partial z} = \mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}$$

很明显，这是一个波动方程，波速：

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0}}$$

波速是与参考系无关的（计算所需的数据均为与介质唯一有关的常数）。因此麦克斯韦方程组的存在不依赖于参考系，且证明了光速的唯一性。

对于波，可以用复数表示为 $E_x = E_0 e^{i\varphi_E} e^{i(kz-\omega t)}$ 、 $H_y = H_0 e^{i\varphi_H} e^{i(kz-\omega t)}$ ，这样就包含了相位以及幅值等参数。利用方程 (2-2')(4-2') 可得：

$$ikE_0 e^{i\varphi_E} e^{i(kz-\omega t)} = i\mu_r \mu_0 \omega H_0 e^{i\varphi_H} e^{i(kz-\omega t)}$$

由于 $\frac{\omega}{k} = v$ ，所以：

$$E_0 e^{i\varphi_E} = \mu_r \mu_0 \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0}} H_0 e^{i\varphi_H} = v B_0 e^{i\varphi_H}$$

除了复指数外所有变量均为时数。因此从上面的公式可以得到以下结论：

$$\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu_r \mu_0} H_0$$

$$\varphi_E = \varphi_H$$

$$E_0 = c B_0 \quad (\text{真空中})$$

9

Optics

BLANK

期待你的建设

10

Quantum Physics

证明 10.1 *The Compton Effect*

I - P205 引

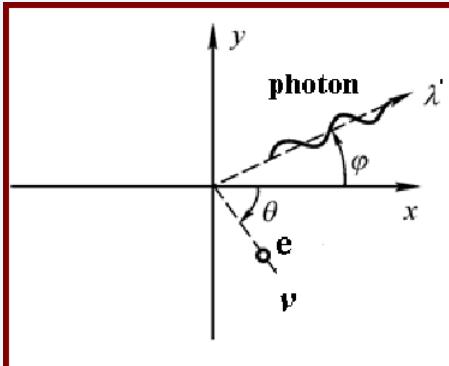
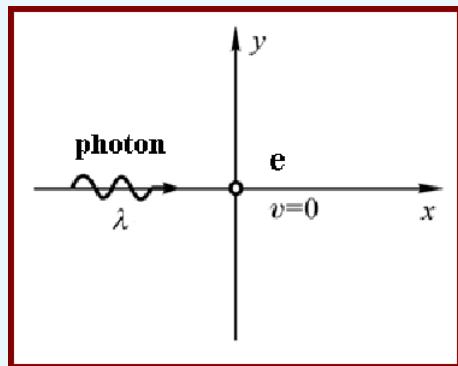


图 10.1: 散射前图示

图 10.2: 散射后图示

以上图为例分析。假设粒子最初为静止状态。

对于光而言，其能量为 $E = h\nu$ ，动量为 $p = \frac{h\nu}{c}$ 。

对于粒子而言，其动能为 $E = m_0c^2$ （质能公式），动量为 $p = mv$ 。

由于碰撞后速度变化导致的相对论条件下的质量变化，因此电子质量不守恒。我们得到下面这几个公式：

$$m_0c^2 + h\nu = mc^2 + h\nu' \quad \text{能量守恒} \quad (1)$$

$$X : \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \varphi + mv \cos \theta \quad (2)$$

$$Y : 0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \varphi - mv \sin \theta \quad (3)$$

先处理动量公式，我们整理出含 mv 的部分并单独放到公式一侧，平方后相加，使得三角函数被消掉，得到：

$$\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - \frac{2h^2\nu\nu'}{c^2} \cos\varphi = m^2v^2$$

再处理能量守恒公式，对两边平方：

$$h^2(\nu - \nu')^2 + m_0^2c^4 + 2m_0c^2h(\nu - \nu') = m^2c^4$$

对上式使用相对论质量公式，采取原公式直接平方的方法，得到：

$$m^2 = \frac{m_0^2c^2}{c^2 - v^2}$$

将其代入我们整理的两个公式中，消去 m^2 ，并将 m_0c^4 移到另一侧与 m^2c^4 相减，约掉后发现等式右边一样，因此得到：

$$h(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos\varphi) = h(\nu - \nu')^2 + 2m_0c^2(\nu - \nu')$$

即：

$$h\nu\nu'(1 - \cos\varphi) = m_0c^2(\nu - \nu')$$

我们希望求解波长差，观察发现：

$$\frac{\Delta\lambda}{c} = \frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{\nu - \nu'}{\nu\nu'} = \frac{h}{m_0c^2}(1 - \cos\varphi)$$

最终得到：

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\varphi)$$

证明 10.2 Quantized Orbits and Energy

I - P207 引

在波尔的氢原子模型下应用经典力学以及原子角动量的结论，即：

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

$$L = mv_n r_n = n\hbar$$

整理以上两个公式，我们知道 n 不同则轨道半径也不同，因此可得：

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2} = m \frac{v_n^2}{r_n} \Rightarrow r_n = n^2 \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$$

另外可以得到能量为:

$$E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{n^2}\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^2}$$

其他结论可以因此迅速导出，此处不再赘述，读者可以尝试使用上面的推导结论理解。

证明 10.3 *Schrödinger Equation*

I - P210 引

首先，我们知道能量和动量的关系式:

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

由德布罗意关系， $p = k\hbar$ 、 $E = \hbar\omega$ ⁽¹⁾ 因此我们替换原本波函数的符号，并将其乘到等式两边，得到:

$$E\psi_0 e^{i(px-Et)/\hbar} = \frac{p^2}{2m}\psi_0 e^{i(px-Et)/\hbar}$$

其中波函数表示为 $\Psi = \psi_0 e^{i(px-Et)/\hbar}$ ，观察得到:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}$$

进一步，考虑能量包含外加势场 $U(x,t)$ ，即 $E = \frac{p^2}{2m} + U(x,t)$ ，则:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x,t)\right]\Psi(x,t)$$

当定态时，波函数可以简化为 $\Phi = \psi e^{-iEt/\hbar}$ ，则:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}e^{-iEt/\hbar} \quad \frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar}\psi e^{-iEt/\hbar}$$

代回原式并整理，得到:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - U(x)]\psi(x) = 0$$

对于三维空间的情况，把对于位置的二阶导数 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 换成 ∇^2 即可。

(1) 这个可以根据德布罗意波的结论，结合机械波中各个变量的关系得到

证明 10.4 *An Infinitely Deep Potential Well in 1D*

I - P213 引

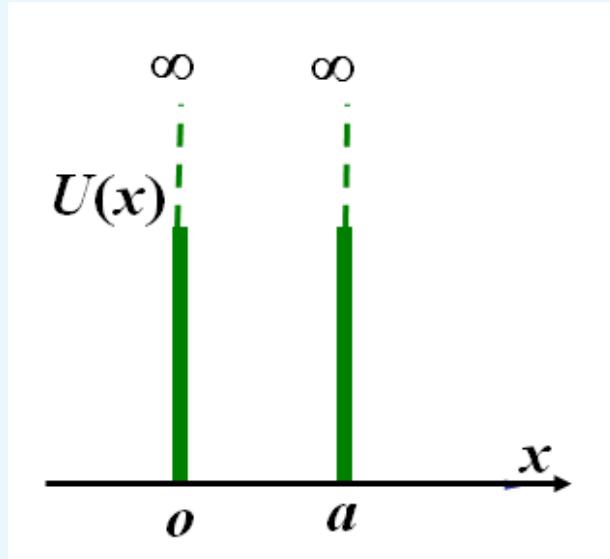


图 10.3: 一种一维无限深势力井

我们对于该势力井的势函数的定义为:

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x \in (0, a) \\ \infty & x \notin [0, a] \end{cases}$$

在势函数无限大的位置，波函数为 0，因为如此大的能量并不存在，以至于粒子不会在这些地方出现。我们只考虑 $0 < x < a$ 的部分，这里使用薛定谔方程。类似与一维定态自由粒子的结论，我们有：

$$\Psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

根据无限深势力井，有如下等式存在：

$$\Psi(0) = B = 0$$

$$\Psi(a) = A \sin(ka) + B \cos(ka) = 0$$

因此 $A \sin(ka) = 0 = \sin(ka)$ 。因此我们有 $ka = n\pi$ 。原本的波函数因此可以写作：

$$\Psi(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

应用波函数的概率性质，我们可以最终求出系数 A :

$$\int_0^\infty \Psi(x)\Psi(x)^* dx = A^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = A^2 \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

并得到最终的波函数表达式:

$$\Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) & x \in (0, a) \\ 0 & x \notin (0, a) \end{cases}$$

证明 10.5₁ Tunnelling Effect

I - P215 引

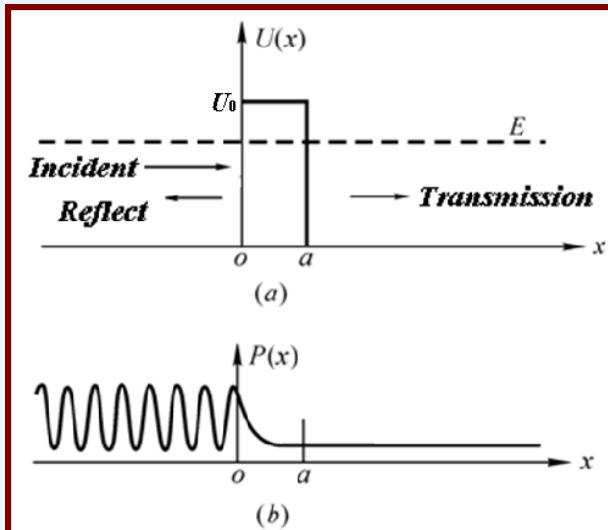


图 10.4: 隧穿效应示意图

我们依然考虑一维定态薛定谔方程:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(x)] \psi(x) = 0$$

其中 $\frac{2m}{\hbar^2} [E - U(x)]$ 为分段函数，每一段内是定值。因此方程可以简化为二阶微分方程:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k'^2 \psi(x) = 0$$

根据微分方程，可以得到 $(-\infty, 0)$ 、 $[0, a]$ 、 (a, ∞) 的波函数表达式可以分别写作：

$$\psi(x) = \begin{cases} A_1 e^{i\alpha x} + A_2 e^{-i\alpha x} & x \in (-\infty, 0) \\ B_1 e^{i\beta x} + B_2 e^{-i\beta x} & x \in [0, a] \\ C_1 e^{i\gamma x} + C_2 e^{-i\gamma x} & x \in (a, \infty) \end{cases}$$

$$\text{其中 } \alpha = \gamma = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \beta = \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\hbar}.$$

同时，根据波动方程的物理含义，正指数部分代表函数向 x 轴正向传播，负指数部分代表向 x 轴负方向传播。在上述三个区间，前两个区间都有原有正向传播的波动以及遇到高势垒的反射波动，但第三个区间没有反射波（该区间的波动仅来自于穿过势垒的波而没有反射波）。因此 $C_2 = 0$ 。

结合波函数的单值连续的性质，我们有以下等式存在：

$$\begin{aligned} \psi_1(0) &= \psi_2(0) \\ \frac{d\psi_1(0)}{dx} &= \frac{d\psi_2(0)}{dx} \\ \psi_2(a) &= \psi_3(a) \\ \frac{d\psi_2(a)}{dx} &= \frac{d\psi_3(a)}{dx} \end{aligned}$$

求解以下方程。首先我们代入已知，得：

$$A_1 + A_2 = B_1 + B_2 \quad (1)$$

$$i\alpha(A_1 - A_2) = i\beta(B_1 - B_2) \quad (2)$$

$$B_1 e^{i\beta a} + B_2 e^{-i\beta a} = C_1 e^{i\alpha a} \quad (3)$$

$$i\beta(B_1 e^{i\beta a} + B_2 e^{-i\beta a}) = i\alpha C_1 e^{i\alpha a} \quad (4)$$

由方程 (3) 和 (4) 求解，得：

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{C_1 e^{i\alpha a}}{2\beta} (\beta + \alpha) e^{-i\beta a} \\ B_2 &= \frac{C_1 e^{i\alpha a}}{2\beta} (\beta - \alpha) e^{i\beta a} \end{aligned}$$

代入(1)和(2)中，并结合双曲三角函数 $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 、 $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 化简，得到：

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= C_1 e^{i\beta a} [\cosh(i\beta a) - \frac{\alpha}{\beta} \sinh(i\beta a)] \\ A_1 - A_2 &= C_1 e^{i\beta a} [\cosh(i\beta a) - \frac{\beta}{\alpha} \sinh(i\beta a)] \end{aligned}$$

因此：

$$A_1 = C_1 e^{i\alpha a} [\cosh(i\beta a) - \frac{1}{2} (\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}) \sinh(i\beta a)]$$

由双曲三角函数的奇偶性易得以下关系：

$$\cosh(-x) = \cosh(x) \quad \sinh(-x) = -\sinh(x)$$

注意到这里 β 是一个虚数，因此做变量代换 $\beta = i\kappa$ ($\kappa = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$)，得到：

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1 e^{i\alpha a} [\cosh(-\kappa a) - \frac{1}{2} (\frac{\alpha}{i\kappa} + \frac{i\kappa}{\alpha}) \sinh(-\kappa a)] \\ &= C_1 e^{i\alpha a} [\cosh(\kappa a) + \frac{i}{2} (\frac{\kappa}{\alpha} - \frac{\alpha}{\kappa}) \sinh(\kappa a)] \end{aligned}$$

隧穿概率的定义为 $T = \frac{|C_1|^2}{|A_1|^2}$ ，因此 $\frac{1}{T} = \frac{|A_1|^2}{|C_1|^2}$ 。

此时：

$$\frac{1}{T} = \cosh^2(\kappa a) + \frac{1}{4} (\frac{\kappa}{\alpha} - \frac{\alpha}{\kappa})^2 \sinh^2(\kappa a)$$

由双曲三角函数的性质 $\cosh^2(x) = \sinh^2(x) + 1$ ，同时注意到 $1 + \frac{1}{4} (\frac{\kappa}{\alpha} - \frac{\alpha}{\kappa})^2 = \frac{1}{4} (\frac{\kappa}{\alpha} + \frac{\alpha}{\kappa})^2$ 可以得到：

$$T = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} (\frac{\kappa}{\alpha} + \frac{\alpha}{\kappa})^2 \sinh^2(\kappa a)} \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar} \quad \alpha = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

当 $\kappa a \gg 1$ 时， $\sinh(\kappa a) \approx \frac{1}{2} e^{\kappa a} \gg 1$ （这被称为 WKB 近似），因此：

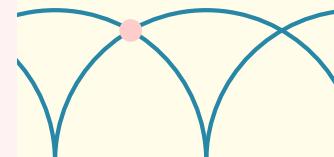
$$T = \frac{16E(U_0 - E)}{U_0^2} e^{-2\kappa a} \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$



答案部分



G.P.A



1

Measurement

Solution: 1.1 量纲分析

I - P3 引

The *displacement* of a particle moving under *uniform acceleration* is some function of the *elapsed time* and the acceleration. Suppose we write this displacement $s = ka^m t^n$, where k is a *dimensionless constant*.

(1) Show by dimensional analysis that this expression is satisfied if $m = 1$ and $n = 2$.

(2) Can this analysis give the value of k ? (1) 观察等式 $s = ka^m t^n$, 有:

$$\text{左式量纲} = L$$

$$\text{右式量纲} = \left(\frac{L}{T^2}\right)^m \cdot (T)^n = L^m T^{n-2m}$$

联立两式即得

$$m = 1, n = 2$$

(2) 不能, 量纲分析只是定性分析, 无法解决值上的问题。

2

Fundamentals of particle kinematics and dynamics

Solution: 2.1 质点运动学计算

I - P33 引

计算练习：已知 $a(t) = at^\alpha$, α 是正的常数，初始时间、速度和位置 t_i , v_i , x_i 都是已知的，求出 $v(t)$, $x(t)$ 这两个表达式。

解：

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_{t_i}^t a(t') dt' + v_i \\ &= a \int_{t_i}^t (t')^\alpha dt' + v_i \\ &= \frac{a}{\alpha+1} (t^{\alpha+1} - t_i^{\alpha+1}) + v_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t_i}^t v(t') dt' + x_i \\ &= \int_{t_i}^t \left(\frac{a}{\alpha+1} (t^{\alpha+1} - t_i^{\alpha+1}) + v_i \right) dt' + x_i \\ &= \frac{a}{(\alpha+1)(\alpha+2)} (t^{\alpha+2} - t_i^{\alpha+2}) + (t - t_i) \left(-\frac{a}{\alpha+1} t_i^{\alpha+1} + v_i \right) + x_i \\ &= \frac{a}{(\alpha+1)(\alpha+2)} t^{\alpha+2} + \frac{a}{\alpha+2} t_i^{\alpha+2} + t \left(-\frac{a}{\alpha+1} t_i^{\alpha+1} + v_i \right) - t_i v_i + x_i \end{aligned}$$

Solution:2.2 质点运动学计算

I - P33 引

Automotive engineers refer to the time rate of change of acceleration as the ‘*jerk*’. If an object moves in one dimension such that its jerk J is constant,

- (a) determine expressions for its acceleration a_t , velocity v_t , and position x_t , given that its initial acceleration, speed, and position are a_0 , v_0 , and x_0 , respectively.
- (b) Show that $a_t^2 = a_0^2 + 2J(v_t - v_0)$.

(a) 这是一道基础的质点运动学的题目，只需利用积分求解即可。

$$\begin{cases} a_t = a_0 + \int_0^t J dt' = a_0 + Jt \\ v_t = v_0 + \int_0^t a_t dt' = v_0 + a_0 t + \frac{1}{2} J t^2 \\ x_t = x_0 + \int_0^t v_t dt' = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 + \frac{1}{6} J t^3 \end{cases}$$

(b) 用上面的表达式代入易证明

Solution:2.3 质点动力学计算

I - P33 引

Assume that the *resistive force* acting on a speed skater is $f = -kmv^2$, where k is a constant and m is the skater’s mass. The skater crosses the finish line of a straight-line race with speed v_f and then slows down by coasting on his skates. Show that the skater’s speed at any time t after crossing the finish line is $v_t = v_f / (1 + kt v_f)$.

首先由牛顿第二定律，过线后 t 时刻的加速度为

$$a_t = \frac{f}{m} = -kv^2$$

由加速度定义式

$$\frac{dv}{dt} = a = -kv^2$$

综上可改写为

$$\frac{dv}{v^2} = -k dt$$

式子两边同时积分，注意起止的对应

$$\int_{v_f}^{v_t} \frac{dv}{v^2} = \int_0^t -k dt$$

化简即证。

Solution: 2.4 质点动力学计算

I - P34 引

A *semisphere* of mass M and radius R is put on a *frictionless* horizontal table and can move freely. A block of mass m is located on the top of this semisphere. Initially both the semisphere and the block are at rest. Then the block is *perturbed* such that it starts to slide down the semisphere from rest. The block *detaches* the semisphere at angle θ . Neglect the size of the block and the friction between the block and the semisphere.

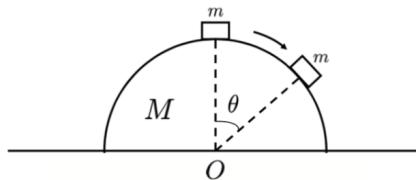


图 2.1: 第四题图

- (a) Find the angle θ (It is enough to give the equation in which θ is the only unknown quantity. You do not need to solve this equation if it is too complicated for you).
- (b) What is the value of θ when $m \ll M$ and $m \gg M$?

-
- (a) 假设 M 向左运动的速度为 v_1 , m 相对 M 的速度为 v_2 , 在脱离的临

界时刻有下面三个关系式：

$$\begin{cases} Mv_1 = m(v_2 \cos \theta - v_1) & \cdots \text{水平方向动量守恒} \\ \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \theta) = mgR(1 - \cos \theta) & \cdots \text{机械能守恒} \\ mg \cos \theta = m \frac{v_2^2}{R} & \cdots \text{脱离瞬间圆周运动方程} \end{cases}$$

综上解得关于 θ 的隐式方程为

$$\frac{m}{M+m} \cos^3 \theta - 3 \cos \theta + 2 = 0$$

(b) 根据两个条件对隐式方程近似化简即可。

当 $m \ll M$ 时，

$$\theta \rightarrow \arccos \frac{2}{3}$$

当 $m \gg M$ 时，

$$\theta \rightarrow 0$$

Solution: 2.5 质点动力学计算

A small mass m is pulled to the top of a *frictionless half-cylinder* (of radius R) by a *cord* that passes over the top of the cylinder.

I - P34 引

(a) If the mass moves at a constant speed, show that $F = mg \cos \theta$ (Hint: If the mass moves at a constant speed, the component of its acceleration tangent to the cylinder must be zero at all times.).

(b) By directly integrating $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, find the work done in moving the mass at constant speed from the bottom to the top of the half-cylinder.

Here $d\mathbf{s}$ represents an *incremental* displacement of the small mass.

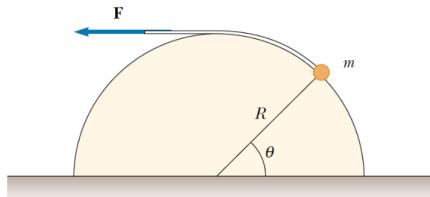


图 2.2: 第五题图

(a) 沿切线方向分解 m 所受的力。由于 m 匀速直线运动，合力为 $\mathbf{0}$ ，即得

$$F = mg \cos \theta$$

(b)

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} mg \cos \theta R d\theta = mgR$$

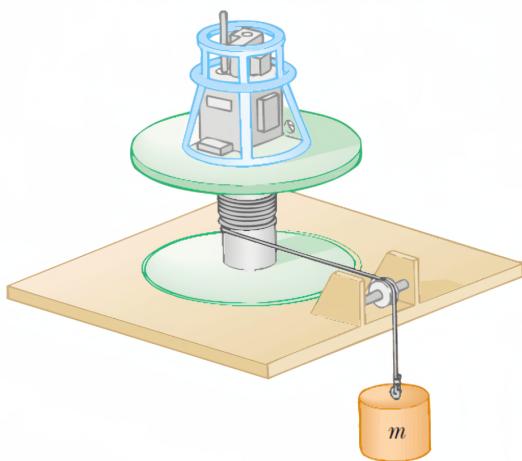
3

Rotation Dynamics

Solution: 3.1 Determine the Moment of Inertia of an Irregularly Shaped Object

I – P50 ↗|

This problem describes one experimental method of determining the moment of inertia of an irregularly shaped object such as the *payload* for a satellite.



The figure shows a mass m *suspended* by a *cord wound* around a spool of radius r , forming part of a *turntable* supporting the object. When the mass is released from rest, it *descends* through a distance h , acquiring a speed v . Show that the moment of inertia I of the equipment (including the turntable) is $mr^2\left(\frac{2gh}{v^2} - 1\right)$.

这是一道基础的转动力学题目，一般的求解思路为：列力学方程—列运动方程—列关联方程—求解。

设绳子的张力为 T ，物体的转动惯量为 I ，有：

$$\left\{ \begin{array}{l} Tr = I\alpha \\ mg - T = ma \\ v^2 = 2ah \\ a = r\alpha \end{array} \right. \begin{array}{l} \cdots \text{力学方程} \\ \cdots \text{运动方程} \\ \cdots \text{关联方程} \end{array}$$

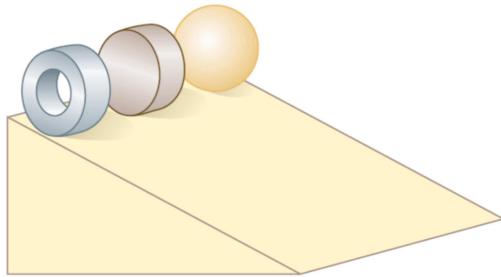
联立求解即得

$$I = mr^2 \left(\frac{2gh}{v^2} - 1 \right)$$

Solution: 3.2 Rolling Items

I - P50 引

Three objects of *uniform density* — a *solid sphere*, a *solid cylinder*, and a *hollow cylinder* — are placed at the top of an *incline*.



If they all are released from rest at the same *elevation* and roll without *slipping*, which object reaches the bottom first?

本题是经典的纯滚动问题。所谓纯滚动，就是滚动体与接触面接触的点速度为 $\mathbf{0}$ (即旋转速度和质心速度相抵消)。

我们往往选择过质心的轴作为旋转轴，建立参考系。这是因为，即使这样建立的参考系是一个非惯性系，只要它不发生转动，那么，使用证明“均匀重力场中重力可以等效作用在质心”中用到的方法 (*Prove 3.7~P 241*)，就可以证明惯性力可以等效作用在质心。由于我们选择的是质心轴，惯性力产生的力矩恒为 0，因此也就不会对转动的分析产生影响^a。

现在，让我们选择质心系分析问题^b。

若记球体 m_1 的转动惯量为 I_1 , 实心圆柱 m_2 的转动惯量为 I_2 , 空心圆柱 m_3 的转动惯量为 I_3 , 斜面倾角为 θ , 则有:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 a_1 = m_1 g \sin \theta - f_1 \\ m_2 a_2 = m_2 g \sin \theta - f_2 \\ m_3 a_3 = m_3 g \sin \theta - f_3 \\ f_1 r_1 = I_1 \alpha_1 \\ f_2 r_2 = I_2 \alpha_2 \\ f_3 r_3 = I_3 \alpha_3 \\ a_1 = r_1 \alpha_1 \\ a_2 = r_2 \alpha_2 \\ a_3 = r_3 \alpha_3 \end{array} \right.$$

于是解得

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{m_1 r_1^2}{I_1 + m_1 r_1^2} g \sin \theta \\ a_2 = \frac{m_2 r_2^2}{I_2 + m_2 r_2^2} g \sin \theta \\ a_3 = \frac{m_3 r_3^2}{I_3 + m_3 r_3^2} g \sin \theta \end{array} \right.$$

由常见物体的转动惯量⁽¹⁾知

(1) 见图 3.4~P43

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{5} m_1 r_1^2 \\ I_2 &= \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \\ I_3 &= \frac{1}{2} m_3 (r_{3(inner)}^2 + r_3^2) \end{aligned}$$

易知

$$a_1 > a_2 > a_3$$

故实心球快于实心圆柱快于空心圆柱。

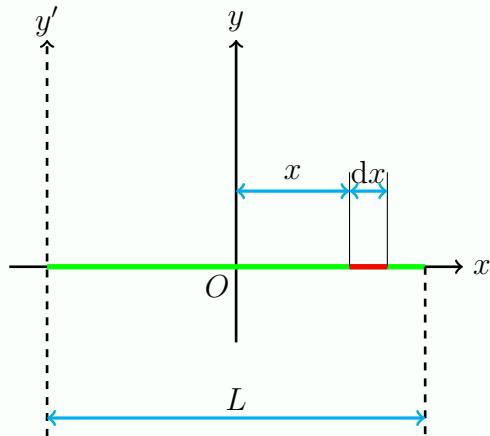
^a很多解析都直接选择了一个非惯性质心系来分析转动，却并没有讲解惯性力可以忽略的原因。

^b当然，过质心的轴有很多，但是大家应该能意识到选择了怎样的轴（对称性好的轴），就不再描述了

Solution: 3.3 Calculation of the Moment of Inertia

I - P51 引

A rod's *linear density* is given by $\lambda = kx$, where x represents the distance from the point to the rod's center.



Given the length of the rod L , try to calculate the moment of inertia of the rod, given the rotation axis at:

- (1) Center O as the y axis shows.
- (2) One end as the y' axis shows.

(1) 由于 O 也是质心位置, 不妨先求 I_{CM} , 再利用平行轴定理求解 I_{end} 。

注意到

$$dm = \lambda dx = k|x| dx$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (x^2)(k|x|) dx &= 2 \int_0^{\frac{L}{2}} kx^3 dx \\ &= 2 \left(\frac{1}{4}kx^4 \right) \Big|_0^{\frac{L}{2}} \\ &= \frac{1}{32}kL^4 \end{aligned}$$

(2) 欲用平行轴定理 (定理 3.1~P44), 则需知晓棍子的质量。

$$\begin{aligned} m &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} k|x| dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{L}{2}} kx dx \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} kx^2 \right) \Big|_0^{\frac{L}{2}} \\ &= \frac{1}{4} kL^2 \end{aligned}$$

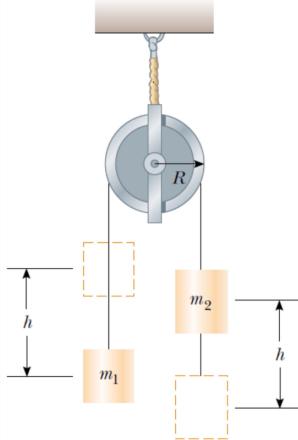
故

$$I_{end} = I_{CM} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{3}{32}kL^4$$

Solution: 3.4 Massive Pulley

I - P51 51

Consider two *cylinders* having masses m_1 and m_2 , where $m_1 < m_2$, connected by a string passing over a pulley. The pulley has a radius R and moment of inertia I about its axis of rotation.



The string does not *slip* on the pulley, and the system is released from rest.

Find the linear speeds of the cylinders after cylinder 2 *descends* through a distance h , and the angular speed ω of the pulley at this time.

本题可从运动角度或能量角度考虑。

法一：运动分析

设左绳的张力为 T_1 , 右绳的张力为 T_2 , 则有

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g = m_1 a \\ T_2 R - T_1 R = I \alpha \\ m_2 g - T_2 = m_2 a \\ a = R \alpha \end{cases}$$

于是解得

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} g$$

则

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} 2gh}, \quad \omega = \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{(m_1 + m_2)R^2 + I} 2gh}$$

法二：能量分析

系统机械能守恒, 于是有

$$\begin{cases} m_2 gh = m_1 gh + \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \\ v = R \omega \end{cases}$$

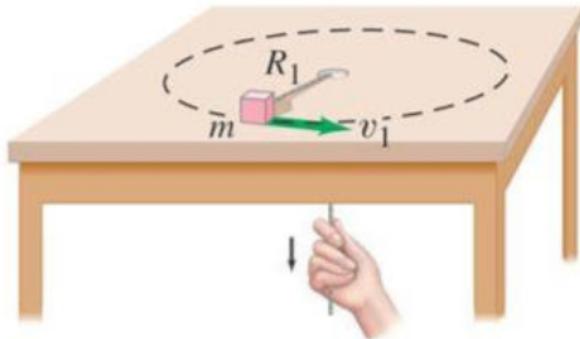
亦可解得

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} 2gh}, \quad \omega = \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{(m_1 + m_2)R^2 + I} 2gh}$$

Solution: 3.5 Object rotating on a string of changing length

Initially, the mass *revolves* with a speed $v_1 = 2.4$ m/s in a circle of radius $R_1 = 0.80$ m. The string is then pulled slowly through the hole so that the radius is reduced to $R_2 = 0.48$ m. What is the speed, v_2 , of the mass now?

I – P52 ↵



本题考察角动量守恒。可以注意到，绳子对物块的力始终是径向的，对应的力矩始终为 0，因此，物块的角动量守恒。不妨就以洞为轴，有

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow R_1^2\omega_1 = R_2^2\omega_2$$

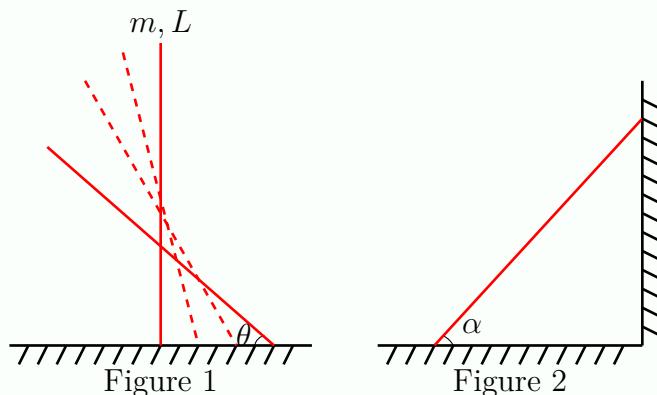
代入 $\omega_1 = \frac{v_1}{R_1}$, $\omega_2 = \frac{v_2}{R_2}$, 即得

$$v_1 R_1 = v_2 R_2$$

代入数据即得 $v_2 = 4.0\text{m/s}$.

Solution: 3.6. *Rotation of a sliding rigid rod*

Consider a rod with mass m and length L standing straight on the frictionless ground. When we release the rod, it will fall from the unstable equilibrium position.



- (a) Calculate the angular velocity of the rod, when it has an angle of θ with

I - P52 引

respect to the ground as illustrated in Figure 1.

- (b) What is the final angular velocity ω_1 of the rod before it hits the ground?
- (c) If the same rod is leaning to a frictionless wall with an initial angle of to the frictionless ground (see Figure 2), what is the final angular velocity ω_2 of the rod before it hits the ground?

Note that there is a possibility that the right end of the rod leaves from the wall before the rod hits the ground.

本题主要考察转动中的能量守恒，以及对平动速度和角速度关系的分析。

- (a) 首先，由题意知不存在摩擦力，而支持力做功始终为零，所以以棍子为研究对象，有机械能守恒。又注意到，棍子在水平方向始终不受力，因此质心是在垂直下降。于是有

$$mg\frac{L}{2} - mg\frac{L}{2} \sin \theta = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (3.1)$$

研究质心的运动，有

$$v_{CM} = \frac{d(\frac{L}{2} \sin \theta)}{dt} \quad (3.2)$$

$$= \frac{L}{2} \frac{d \sin \theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (3.3)$$

$$= \frac{L}{2} \cos \theta \omega \quad (3.4)$$

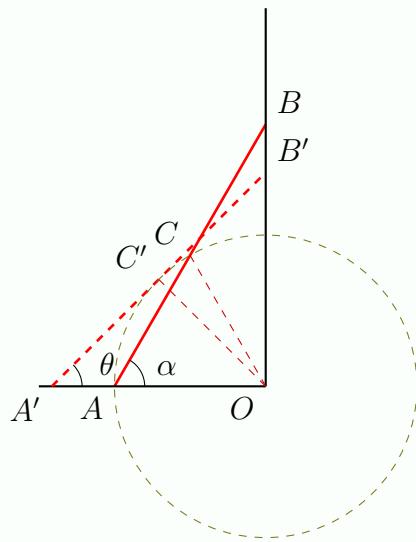
将 (3.4) 代入 (3.1) 即得

$$\omega = 2\sqrt{\frac{3g}{L} \frac{1 - \sin \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta}} \quad (3.5)$$

(b) 即考虑 (a) 中的极限情况，将 $\theta = 0$ 代入 (3.5) 中即得

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{L}} \quad (3.6)$$

(c)



如图，先考虑棍未与墙壁脱离情形，注意到质心 C 到 O 的距离始终为 $\frac{L}{2}$ ，因此确定质心的运动轨迹是一个圆。由 $\angle COA = \angle CAO$ ，知 $v_{CM} = \omega \frac{L}{2}$ ，即关系式。再由

“无摩擦力”，“支持力不做功”知棍子机械能守恒，于是可以列出守恒式：

$$mg\left(\frac{L}{2} \sin \alpha - \frac{L}{2} \sin \theta\right) = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (3.7)$$

由 (3.7) 可解得

$$\omega = \sqrt{\frac{3g(\sin \alpha - \sin \theta)}{L}} \quad (3.8)$$

接下来，我们考虑临界条件。当棍子脱离墙时，来自墙的支持力消失，也就是说，质心在水平方向不再拥有加速度。于是， v_{CMx} 最大时，棍子将脱离墙。

$$v_{CMx} = v_{CM} \sin \theta \quad (3.9)$$

$$= \omega \frac{L}{2} \sin \theta \quad (3.10)$$

$$= \frac{\sin \theta}{2} \sqrt{3gL(\sin \alpha - \sin \theta)} \quad (3.11)$$

$$= \sqrt{3gL} \cdot \sqrt{\frac{\sin \theta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sin \theta}{2}} \cdot \sqrt{\sin \alpha - \sin \theta} \quad (3.12)$$

$$\leq \frac{1}{3} \sin \alpha \sqrt{gL \sin \alpha} \quad (\text{当且仅当 } \sin \theta = \frac{2}{3} \sin \alpha) \quad (3.13)$$

之后，在水平方向，质心的运动保持不变。由 (3.4) 知，当棍子即将落地

时，有

$$v_{CMy} = \frac{L}{2}\omega_2 \quad (3.14)$$

于是可以列守恒式

$$mg\frac{L}{2}\sin\alpha = \frac{1}{2}m(v_{CMx}^2 + v_{CMy}^2) + \frac{1}{2}I\omega_2^2 \quad (3.15)$$

将 (3.14) 代入 (3.15) 即得

$$\omega_2 = \sqrt{(9\sin\alpha - \sin^3\alpha)\frac{g}{3L}} \quad (3.16)$$

斑叶
斑鳩 PS: 这大概是本章考察的天花板了。

Solution: 4.1 流体静力学

I - P57 引

A fluid is rotating at constant angular velocity ω about the central vertical axis of a cylindrical container. As shown in Figure 4-1:

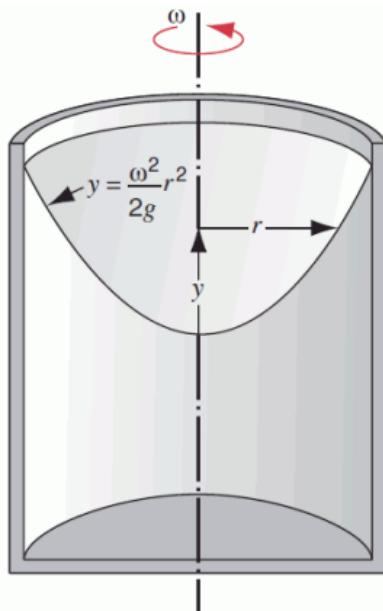


图 4.1: 流体静力学

- (a) Show that the *variation* of pressure in the *radial direction* is given by $\frac{dp}{dr} = \rho\omega^2r$.
- (b) Take $p = p_c$ at the axis of rotation ($r = 0$) and show that the pressure p at any point r is

$$p = p_c + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2$$

(c) Show that the liquid surface is of *paraboloidal* form (Figure 4-1); that is, a vertical cross section of the surface is the curve $y = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$.

(a) 取一段竖直方向的薄平面，设其截面积为 A ，沿半径方向的厚度为 dr ，深度为 h 。如下图所示：

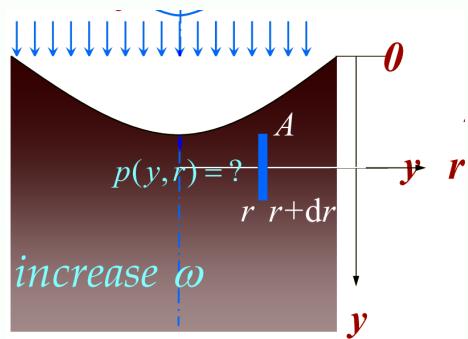


图 4.2: A-4-1

可知水平方向的压强差为 $dp = p_{r+dr}(h) - p_r(h)$ ，其中 $p = p_0 + \rho gh$ 。由受力关系结合匀速圆周运动可得：

$$F = A dp = A dr \rho \omega^2 r$$

整理得到 (a) 中的公式。

(b) 化简上式并积分：

$$\int_{p_{h,0}}^{p_{h,r}} dp = \int_0^r \rho \omega^2 r dr$$

得到： $p = p_0 + \rho gh + \frac{\rho \omega^2 r^2}{2}$ 。其中前两项与半径无关，即为 p_c ，可得：

$$p = p_c + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2$$

(c) 液体表面的压强均为大气压强，将 $p = p_0$ 、 $p_c = p_0 + \rho gh$ 代入 (b) 中得到的公式，得：

$$\rho gh + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 = 0$$

由于深度的坐标轴是向下的，我们以页面最低点处的水平方向为 r 轴，沿中心线竖直方向作为 y 轴，也就是调转一下坐标系。应用上述公式可知：

$$y = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

Solution: 4.2 流体动力学

I - P58 引

As shown in Figure 4-3, it is an *air suction device*. Given that the depth of the centerline of the *catheter* below the liquid level in container A is h , the height difference between the liquid level in container B and the centerline of the horizontal catheter is h_b , the *cross-sectional area* at the *nozzle* d is S_d , and the cross-sectional area at the *contraction section* c is S_c . What are the conditions for the *ratio* of S_d to S_c to occur for *suction*?

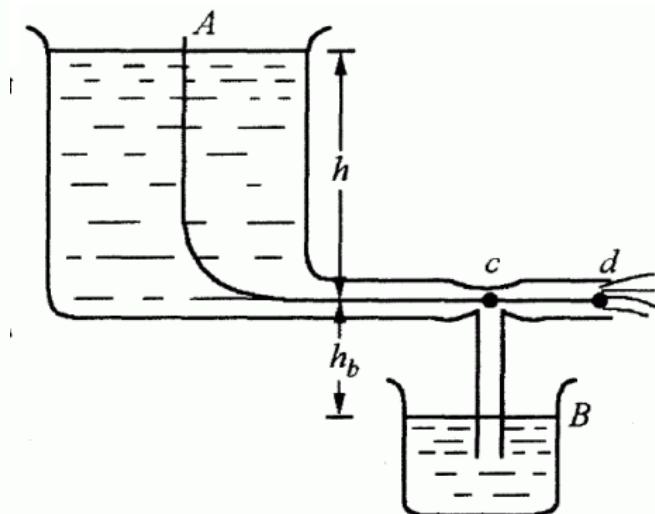


图 4.3: 流体动力学

取一个流线 Acd ，对 c 、 d 两点应用伯努利公式可得：

$$\frac{1}{2}\rho v_c^2 + p_c = \frac{1}{2}\rho v_d^2 + p_d$$

其中 d 点的流速为 $v_d = \sqrt{2gh}$ ，气压为大气压强 $p_d = p_0$ 。且由于连续性原理，有：

$$v_c S_c = v_d S_d$$

因此 c、d 两点的压强差为：

$$p_c - p_0 = \rho g h \left(1 - \left(\frac{S_d}{S_c}\right)^2\right)$$

而容器 B 液面的压强也是大气压强。发生空吸作用只要满足条件：

$$p_c < p_0 - \rho g h_b$$

代入公式即可得到：

$$\frac{S_d}{S_c} > \sqrt{1 + \left(\frac{h_b}{h}\right)}$$

5

Oscillations and Waves

Solution: 5.1 *Traveling Sinusoidal Wave*

I - P89 引

A sinusoidal wave traveling in the $-x$ direction (to the left) has an amplitude of 20.0 cm, a wavelength of 35.0 cm, and a frequency of 12.0 Hz. The displacement of the wave at $t = 0$, $x = 0$ is $y = -3.00$ cm, and at this same point, a particle of the medium has a positive velocity.

在 $t = 0$ 时, 波形是 x 的正弦函数。在 $x = 0$ 处, 位移为 $y = -3.00$ cm, 且该点的介质粒子具有正速度。这意味着波在 $x = 0$ 处向上运动。波形图应显示一个振幅为 20.0 cm、波长为 35.0 cm 的正弦波, 并且具有相位偏移, 使得 $y(0, 0) = -3.00$ cm。1. 角波数 (k):

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{35.0 \text{ cm}} = 0.1795 \text{ rad/cm.}$$

2. 周期 (T):

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{12.0 \text{ Hz}} = 0.0833 \text{ s.}$$

3. 角频率 (ω):

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 12.0 \text{ Hz} = 75.40 \text{ rad/s.}$$

4. 波速 (v):

$$v = f\lambda = 12.0 \text{ Hz} \cdot 35.0 \text{ cm} = 420 \text{ cm/s.}$$

沿 $-x$ 方向传播的正弦波的一般形式为：

$$y(x, t) = A \sin(kx + \omega t + \phi),$$

其中 A 是振幅， k 是角波数， ω 是角频率， ϕ 是相位常数。

1. 确定相位常数 (ϕ)：在 $t = 0$ 和 $x = 0$ 处，位移为 $y(0, 0) = -3.00 \text{ cm}$ 。

将其代入波的函数：

$$-3.00 = 20.0 \sin(\phi).$$

解得：

$$\sin(\phi) = \frac{-3.00}{20.0} = -0.15.$$

相位常数为：

$$\phi = \arcsin(-0.15) = -0.1506 \text{ rad}.$$

2. 写出波的函数：代入已知值：

$$y(x, t) = 20.0 \sin(0.1795x + 75.40t - 0.1506).$$

(a) 在 $t = 0$ 时，波形是一个振幅为 20.0 cm 、波长为 35.0 cm 的正弦波，且具有相位偏移，使得 $y(0, 0) = -3.00 \text{ cm}$ 。

(b) 波的参数为：

$$k = 0.1795 \text{ rad/cm}, \quad T = 0.0833 \text{ s}, \quad \omega = 75.40 \text{ rad/s}, \quad v = 420 \text{ cm/s}.$$

(c) 波的函数为：

$$y(x, t) = 20.0 \sin(0.1795x + 75.40t - 0.1506).$$

Solution: 5.2 Measuring Ocean Depth

An earthquake on the ocean floor in the Gulf of Alaska produces a tsunami (sometimes called a “tidal wave”) that reaches Hilo, Hawaii, 4450 km away, in a time of 9 hours 30 minutes. Tsunamis have enormous wavelengths (100–200 km), and the propagation speed of these waves is $u \approx \sqrt{gd}$, where d is the average depth of the water. From the information given, find the average wave speed and the average ocean depth between Alaska and

I – P89 ↗|

Hawaii.

已知:

- 距离 $D = 4450 \text{ km} = 4.45 \times 10^6 \text{ m}$
- 时间 $t = 9 \text{ hours } 30 \text{ minutes} = 34200 \text{ s}$
- 波速公式 $u \approx \sqrt{gd}$, 其中 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

波速 u 可以通过距离和时间计算:

$$u = \frac{D}{t} = \frac{4.45 \times 10^6 \text{ m}}{34200 \text{ s}} \approx 130.12 \text{ m/s}$$

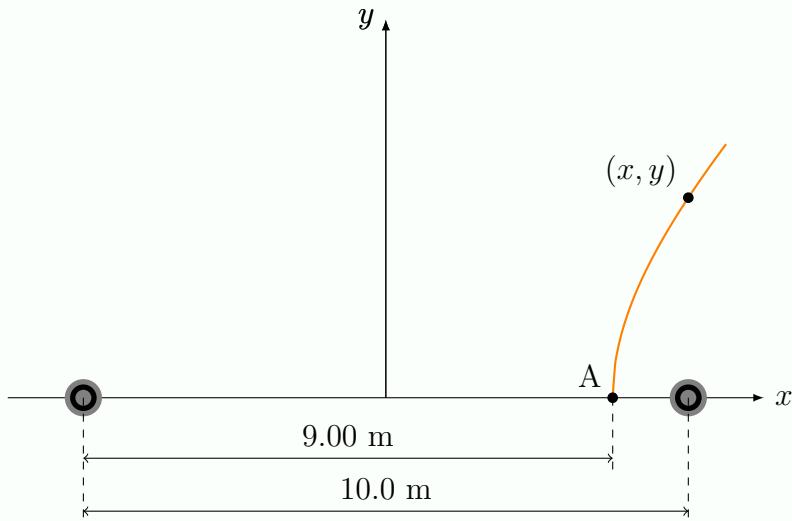
根据波速公式 $u \approx \sqrt{gd}$, 可以解出深度 d :

$$d = \frac{u^2}{g} = \frac{(130.12 \text{ m/s})^2}{9.8 \text{ m/s}^2} \approx 1727 \text{ m}$$

Solution: 5.3 Two Speakers

I - P90 3|

Two identical *speakers* 10.0 m apart are driven by the same *oscillator* with a frequency of $f = 21.5 \text{ Hz}$.



- (a) Explain why a receiver at point A records a minimum in sound intensity from the two speakers.

- (b) If the receiver is moved in the plane of the speakers, what path should it take so that the intensity remains at a minimum? That is, determine the relationship between x and y (the coordinates of the receiver) that causes the receiver to record a minimum in sound intensity. Take the speed of sound to be 343 m/s.

两个相同的扬声器由同一振荡器驱动，因此它们发出的声波是相干波。当两列波到达接收器时，会发生干涉现象。如果两列波的相位差为 π 的奇数倍（即路径差为半波长的奇数倍），则会发生相消干涉，导致声强最小。

在点 A，假设两列波的路径差为 Δr ，则相消干涉的条件为：

$$\Delta r = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

其中 λ 为波长，计算公式为：

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{343 \text{ m/s}}{21.5 \text{ Hz}} \approx 15.95 \text{ m}$$

因此，点 A 处的路径差满足上述条件，导致接收器记录到声强最小。

为了使接收器始终记录到声强最小，接收器的位置 (x, y) 必须满足两列波的路径差为半波长的奇数倍。设两个扬声器的位置分别为 $(-5.0 \text{ m}, 0)$ 和 $(5.0 \text{ m}, 0)$ ，接收器的位置为 (x, y) 。

两列波的路径差为：

$$\Delta r = \sqrt{(x + 5)^2 + y^2} - \sqrt{(x - 5)^2 + y^2}$$

相消干涉的条件为：

$$\Delta r = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

将 $\lambda = 15.95 \text{ m}$ 代入，得到：

$$\sqrt{(x + 5)^2 + y^2} - \sqrt{(x - 5)^2 + y^2} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \times 15.95$$

x 和 y 之间的关系式描述了接收器移动的路径。

(a) 接收器在点 A 记录到声强最小，是因为两列波的路径差满足相消干涉的条件。

(b) 接收器移动的路径满足关系式：

$$\sqrt{(x+5)^2 + y^2} - \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \times 15.95$$

其中 $n = 0, 1, 2, \dots$

Solution: 5.4

A 2.00-m-long wire having a mass of 0.100 kg is fixed at both ends. The tension in the wire is maintained at 20.0 N. What are the frequencies of the first three allowed modes of vibration? If a node is observed at a point 0.400 m from one end, in what mode and with what frequency is it vibrating?

I - P90 引

6

Special relativity

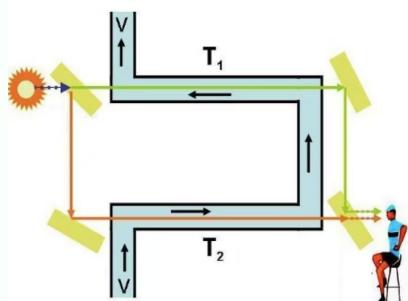
Solution: 6.1 *Fizeau effect*

I – P114 ⏵

In this problem we show that the relativistic velocity addition law can be used to explain the Fizeau experiment without invoking the existence of *ether*. The speed of light in stationary water is less than its speed c in *vacuum*. Traditionally it is written as $\frac{c}{n}$, where $n \approx \frac{4}{3}$ is the *index of refraction* of water. The water flowed in the *pipe* with velocity v . In the lower arm T_2 of the *interferometer* (as shown in the figure), one would expect that, from the nonrelativistic addition law, the speed of light in the moving water would be its speed in stationary water increased by the speed of the water in the pipe $w = \frac{c}{n} + v$. Show that the relativistic velocity addition law leads to, up to higher-order corrections:

$$w = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

The result was observed by Fizeau in 1851, but for long time viewed as a confirmation of a rather *elaborate contemporary* ether-theoretical calculation based on the idea that the water was partially successful in dragging ether along with it. Einstein later said that it was of fundamental importance in his thinking.



此类题目主要是要选取恰当的参考系，并列出对应参数。

以地面为 S 系，水流为 S' 系，并设光前进方向为 x 轴正方向。

在 S 系中，静止的水中光速为 $\frac{c}{n}$ ，下方水的速度即 S' 系相对 S 系的速度为 v

那么在 S' 系中，由速度变换

$$w = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{cv}{nc^2}} = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{nc}}$$

注意到 $v \ll c$ ，故 $\frac{v}{nc}$ 为小量，利用泰勒展开至一阶：

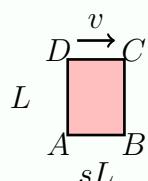
$$\frac{1}{1 + \frac{v}{nc}} = 1 - \frac{v}{nc} + o(v^2)$$

代入表达式中，并忽略 v^2 相关的高阶小量，即有：

$$w \approx \left(\frac{c}{n} + v\right)\left(1 - \frac{v}{nc}\right) = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Solution: 6.2 Terrel Rotation

I - P115 引

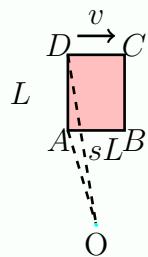


Observer

A square with proper-length- L sides flies past you at a speed v ，in a direction

parallel to two of its sides. You stand in the plane of the square. When you see the square at its nearest point to you, show that it looks to you like it is rotated, instead of contracted. (Assume that L is small compared with the distance between you and the square.)

Terrel Rotation 是相對論效應之一，即當物體以接近光速運動時，觀察者會看到物體在視覺上旋轉。



首先，正如圖中標明的，由於尺縮效應，與運動同向的邊 AB, CD 在 O 系中長度縮短為 sL 。

之後，注意到我們處理的是視覺效應，那麼我們就要考慮光信號到達人眼中才能成像的問題。舉邊 AD 為例，邊上的每一個點發出的光到達人眼的時間都是不同的。在這裡，我們考慮 A, D 兩點。

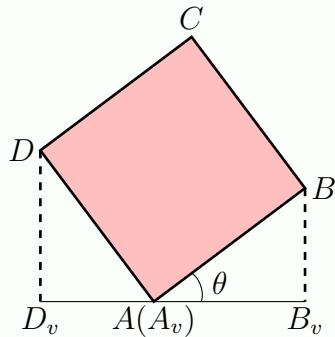
連接 AO, DO ，由於題目條件中說，人與正方形的距離遠遠大於 L ，可以認為 D, A, O

近似成一條直線。因此， A 發出的光比 D 發出的光提前 $\frac{L}{c}$ 的時間到達人眼。

換而言之，人眼中接受的光信號，其實是某個時刻的 A 發出的信號，以及該時刻前

$\frac{L}{c}$ 的時刻時 D 發出的信號。人眼同時處理這兩個信號，產生了“觀察到 DA 邊”的

效果。



这张图中的 $D_v - A_v - B_v$ 显示了人眼中观察到的现象。 $A_v B_v$ 的长度即由于尺缩效

应得到的 sL , 而 $A_v D_v$ 的长度则等于光信号时间差 $\frac{L}{c}$ 乘以正方形运动的速度 v , 也

即 βL 。

这里我们发现, 恰有 $(\beta L)^2 + (sL)^2 = L^2$ 。因此, 人眼所看见的, 就好像是图中旋转后的正方形 $ABCD$ 在运动方向的投影。且对于旋转的角度 θ , 有

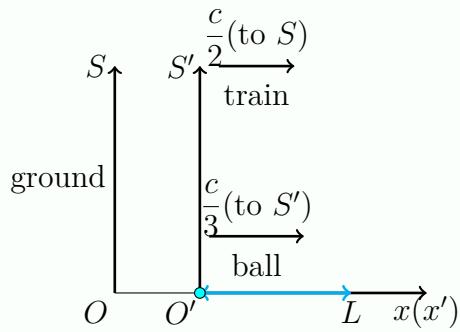
$$\sin \theta = \frac{\beta L}{L} = \beta$$

Solution: 6.3 *Lots of transformations*

A train with proper length L moves at speed $\frac{c}{2}$ with respect to the ground. A ball is thrown from the back to the front, at speed $\frac{c}{3}$ with respect to the train. How much time does this take, and what distance does the ball cover, in:

- (a) The train frame?
- (b) The ground frame? Solve this by:
 - i. Using a velocity-addition argument.
 - ii. Using the Lorentz transformations to go from the train frame to the ground frame.
- (c) The ball frame?
- (d) Verify that the *invariant interval* is indeed the same in all three frames.

I – P116 引



(a) 火車相對自身是靜止的，故火車系下其長度就是原長，而火車系下球的速度已知，故有

$$\Delta x_1 = L$$

$$\Delta t_1 = \frac{L}{c/3} = \frac{3L}{c}$$

(b) 選取地面為 S 系，火車為 S' 系，火車前進方向為 x 正方向。 S' 系相對 S 系的速度 u 為

$$u = \frac{c}{2}$$

(i) S' 系中球的速度為 $v' = \frac{c}{3}$ ，由速度變換公式有 S 系中，球的速度

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{v'u}{c^2}} = \frac{5c}{7}$$

列車在地面看來會發生尺縮效應，且尺縮因子 $s = \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，得地面系中列車長度

$$d = sL = \frac{\sqrt{3}}{2}L$$

在 S 系中是一個追及問題，所需時間：

$$\Delta t_2 = \frac{d}{v - u} = \frac{7\sqrt{3}L}{3c}$$

所走距離

$$\Delta x_2 = vt_2 = \frac{5\sqrt{3}L}{3}$$

(ii) 利用洛倫茲變換的變化量形式：

$$\Delta t_2 = \gamma(\Delta t_1 + \frac{u}{c^2}\Delta x_1)$$

$$\Delta x_2 = \gamma(\Delta x_1 + u\Delta t_1)$$

可求得

$$\Delta t_2 = \frac{7\sqrt{3}L}{3c}$$

$$\Delta x_2 = \frac{5\sqrt{3}L}{3}$$

(c) 在設球參考系為 S'' 系，顯然 S'' 系下球是靜止的：

$$\Delta x_3 = 0$$

S'' 系相對 S' 系速度 $u' = \frac{c}{3}$ ，有 $\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u'}{c}\right)^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ ，利用洛倫茲

變換得

$$\Delta t_3 = \gamma'(\Delta t_1 - \frac{u'\Delta x_1}{c^2}) = \frac{2\sqrt{2}L}{c}$$

(d) 題意其實就是要證明時空間隔 $(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ 的不變性，將之前所求代入驗證即可：

$$(c\Delta t_1)^2 - (\Delta x_1)^2 = 8L^2$$

$$(c\Delta t_2)^2 - (\Delta x_2)^2 = 8L^2$$

$$(c\Delta t_3)^2 - (\Delta x_3)^2 = 8L^2$$

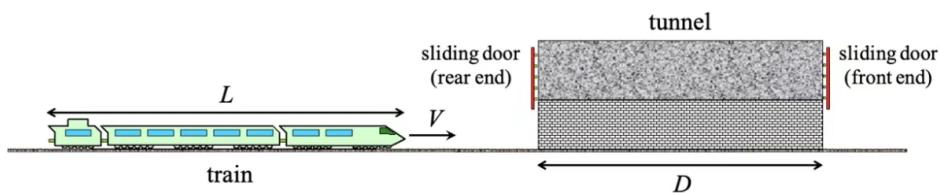
可見事件的時空間隔確實不變。

注：如果老師上課時定義的時空間隔與此處不同，注意符號問題或者在回答時說明好。

Solution: 6.4 Train And Tunnel Paradox

I - P116 引

Consider a train running at a constant speed V on the straight track in the x direction, and passing through a tunnel (see the figure). The proper length of the train is L , and the proper length of the tunnel is D . Here we assume $L > D$. Define (x, ct) as the time and the space coordinates of the track frame, and (x', ct') as those of the train frame. Here, x and x' are in the same direction.



(a) Suppose that an observer standing on the ground sees that the train is shorter than the tunnel, so that the whole train can be inside the tunnel. Determine the smallest possible speed of the train.

(b) Suppose that the rear end of the tunnel (see the figure) is at $x = 0$, and set the time $t = t' = 0$ when the rear end of the train reaches the rear end of the tunnel. Draw the Minkowski diagram **taking x coordinate for the horizontal axis and ct coordinate for the vertical axis**. In addition, *specify* L and D in the diagram.

(c) When the rear end of the train enters the rear end of the tunnel, the rear-end and front-end sliding doors of the tunnel (see the figure) are closed at the same time in the track frame. These two events are denoted by R_{close} and F_{close} , respectively. Then, when the front-end of the train reaches the front end of the tunnel, both the rear-end and front-end sliding doors are opened at the same time in the track frame. These events are denoted by R_{open} and F_{open} , respectively.

Show the events R_{close} , F_{close} , R_{open} , and F_{open} in the Minkowski diagram in (b), and put the four events in the order of being seen by an observer in the train.

(a)

根据尺缩效应，在轨道参考系中，火车的长度为

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L$$

故如需火车能够完全在隧道中，则有

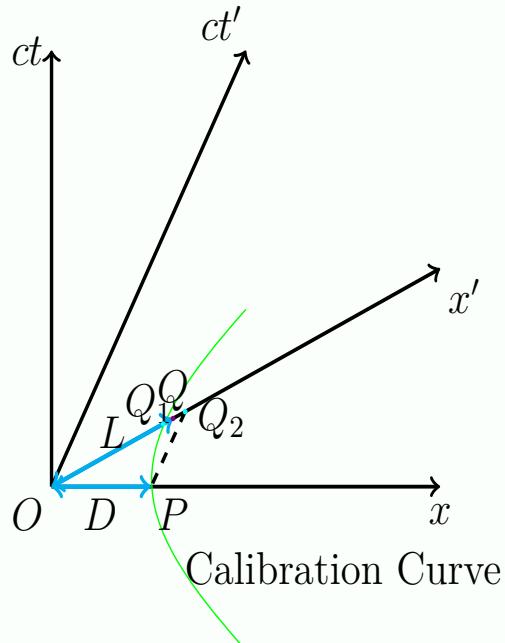
$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L \leq D$$

可解得

$$v \geq \sqrt{1 - \frac{D^2}{L^2}} c$$

(b)

作图如下：



依据题意，隧道尾和火车尾在 0 时刻都处于 O 点。由于隧道在轨道系中静止，隧道在轨道系中的长度即为其原长 D 。因此，在 x 轴上取长度 D ，对应的 P 点即是 0 时刻时隧道头的位置。

接下来，设 OQ 是 x' 轴上的，可以表示 L 的线段。

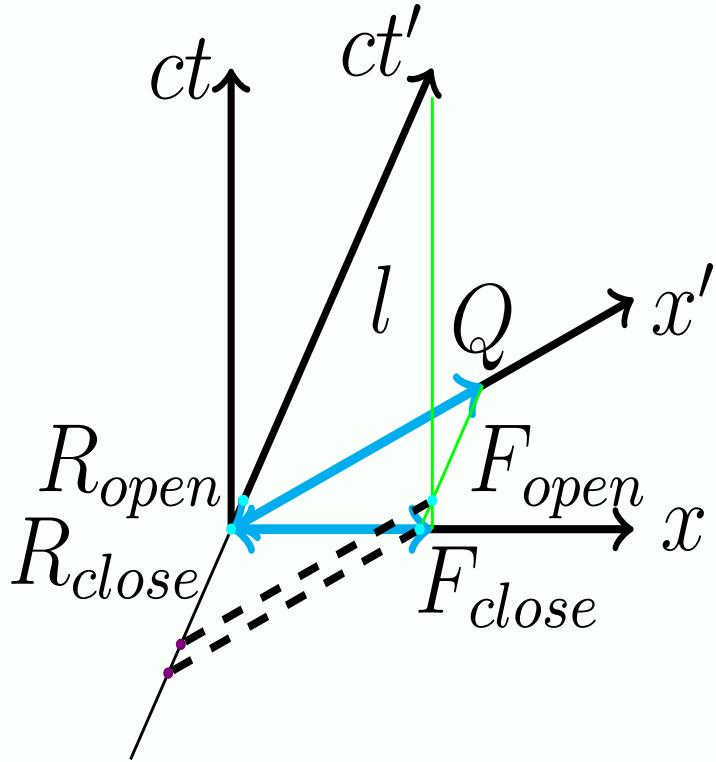
首先，需要过 P 作校准曲线，与 x' 轴相交于 Q_1 点。由于题目条件 $L > D$ ，因此 Q 在 Q_1 右侧。

另外，还需要过 P 作 ct' 轴的平行线，交 x' 轴于 Q_2 点。这是因为列车在轨道系（也就是 $x - ct$ 系）中的长度应当小于 D ，且列车头的世界线斜率与 ct' 轴斜率相同。于是，过 Q 的 ct' 轴的平行线与 x 轴的交点应在 P 的左侧，等价于 Q 在 Q_1, Q_2 之间。

综上， Q 在 Q_1, Q_2 之间。

(c)

作圖如下：

由題意易知原點即代表 R_{close} 。過 (b) 中確定的 Q 作 ct' 的平行線，則該線即是列車頭的世界線。那麼，它與 x 軸的交點即代表 F_{close} 。過 (b) 中確定的 P 作 ct 的平行線 l ，則該線即是隧道頭的世界線。那麼，它與列車頭世界線的交點即代表列車頭到達隧道頭，也即 F_{open} 題目中已說明，在軌道系中， F_{open} 和 R_{open} 同時發生，則過 F_{open} 作 x 軸的平行線，它與 ct' 軸的交點即是 R_{open} 。由於題目要求比較在列車系中各時間的發生先後，我們取四個事件在 ct' 軸上的分量。由圖即得時序為

$$F_{close} \rightarrow F_{open} \rightarrow R_{close} \rightarrow R_{open}$$

Solution: 6.5. Conservation of momentum in SR

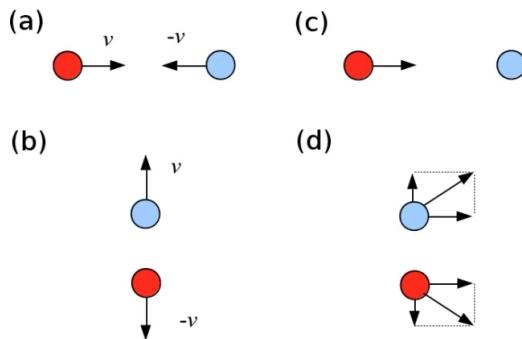
I - P117 引

In class, we showed that the classical definition of the linear momentum cannot be right in the relativistic case. We illustrated by the example of

the collision of two particles with equal mass m . In the rest frame (for the center of mass) K , the two particles have velocities with the same amplitude v but opposite directions along x axis before the collision, as illustrated in Fig.(a). After the collision, they move away along y axis with the same speed v , as illustrated in Fig.(b).

Now, in a frame K' that moves with speed v along the positive x direction with respect to the rest frame K , as illustrated in Fig.(c), one particle is at rest before the collision.

- (i) What is the velocity of the other particle before the collision?
- (ii) After the collision, as illustrated in Fig.(d), what are the velocities of the two particles? Specify the components of the velocities along x and y axes.
- (iii) Show that if you use the definition of the relativistic momentum, you will maintain the conservation of linear momentum in the moving frame K' .



-
- (i) 不妨記“the other particle”在 K' 系中碰撞前的速度為 v' ，由速度變換公式有

$$v' = \frac{v + v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

- (ii) 這題相當於考察我們 K 系中如圖 (b) 的速度在 K' 系中如何變化，使用速度變換公式即可。

對於紅色粒子，設在 K' 系中，其 x 方向速度分量為 v_{rx} ， y 方向速度分量為 v_{ry} ，則有

$$\begin{cases} v_{rx} = \frac{0+v}{1-\frac{0\cdot v}{c^2}} = v \\ v_{ry} = \frac{v\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{0\cdot v}{c^2}} = v\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \end{cases}$$

同理，對於藍色粒子，設在 K' 系中，其 x 方向速度分量為 v_{bx} ， y 方向速度分量為 v_{by} ，則有

$$\begin{cases} v_{bx} = \frac{0+v}{1-\frac{0\cdot v}{c^2}} = v \\ v_{by} = \frac{-v\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{0\cdot v}{c^2}} = -v\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \end{cases}$$

(iii) 設在 K' 系下，系統碰前動量為 p_i ，碰後動量為 p_f ，則有

$$p_i = \gamma_i m v' + 0$$

其中

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}$$

解得

$$p_i = \frac{2mv}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

注意到 K' 系中，兩球碰後 y 軸方向速度等大反向，故無需考慮 p_f 的 y 軸分量。

於是

$$p_f = \gamma_f m v + \gamma_f m v$$

其中

$$\gamma_f = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2+\left(v\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2}{c^2}}}$$

解得

$$p_f = \frac{2mv}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

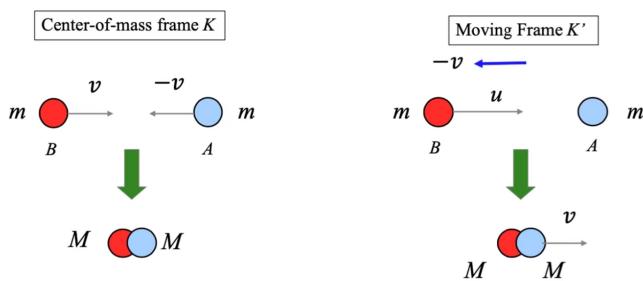
故 $p_i = p_f$, 系統保持動量守恒

Solution: 6.6 Perfectly Inelastic Collision of two Relativistic Particles

I - P118 引

Consider a perfectly inelastic collision of two relativistic particles A and B with equal rest mass m . In the center-of-mass frame K , the two particles have velocities with the same magnitude v , but opposite directions along x axis before the collision, as illustrated in the top left part of the figure. After the collision, they stick together, as illustrated in the bottom left part of the figure. Now, in another frame K' that moves with speed v along the negative x direction with respect to the K -frame (right part of the figure), particle A is at rest before the collision.

- (a) Considering the energy conservation for the collision in K -frame, calculate the rest mass M of each particle after the collision.
- (b) In K' -frame, what is the velocity u of particle B before the collision?
- (c) In K' -frame, show that the linear momentum and energy are conserved in the collision process.



(a) 由能量守恒

$$2 \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2Mc^2$$

解得

$$M = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(b) 由速度变换易知

$$u = \frac{v + v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

(c) 设在 K' 系下, 系统碰前动量为 p_i , 碰后动量为 p_f , 则有

$$p_i = \frac{mu}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

可解得

$$p_i = \frac{2mv}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

碰撞后, 由速度变换公式易知两质点的速度均为 v (正如图中所示), 故有

$$p_f = \frac{2Mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

亦可解得

$$p_f = \frac{2mv}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

故 $p = p_f$, 动量守恒

设在 K' 系下, 系统碰前能量为 E_i , 碰后能量为 E_f , 则有

$$E_i = mc^2 + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

可解得

$$E_i = \frac{2mc^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

碰撞後能量

$$E_f = \frac{2Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

亦可解得

$$E_f = \frac{2mc^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

故 $E_i = E_f$, 能量守恒。

PS: 其實狹義相對論考察能動量相對來說是最為簡單的, 如果不涉及變換, 只要列出守恒方程一頓算就好了 (不是)

Solution: 6.7 Relativistic Scattering between a Photon and an Electron

I – P119 引

In this problem, a particular scattering process between a photon and an electron known as *Compton Scattering* will be addressed. For simplicity, we will consider only one spatial dimension so that spatial vectors $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_x$ possess only one non-zero component and where \mathbf{e}_x is the unit vector along the x axis. In this setting, a photon of energy E_{ph} is *propagating* along the x axis and hits an electron. We want to understand with which energy the photon is scattered back along the x axis in terms of the initial parameters.

Let c be the speed of light.

(a) As a first step, write down

(i) the relativistic expressions for the energy E and momentum \mathbf{p} of a particle of mass m and velocity $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$.

(ii) the expressions for $\frac{E'}{c}$ and \mathbf{p}' in terms of $\frac{E}{c}$ and \mathbf{p} in an inertial frame that moves with velocity $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x$ relative to the one where the particle has energy $\frac{E}{c}$ and momentum \mathbf{p} .

Hint: the Lorentz transformation of the position four-vector is

$$(ct', x', 0, 0) = (\gamma ct - \beta \gamma x, \gamma x - \beta \gamma ct, 0, 0), \beta = \frac{u}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

(b) Consider the energy-momentum four-vector \mathbf{P} defined as $\mathbf{P} = (\frac{E}{c}, \mathbf{p})$.

(i) Show that $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}$ yields the energy-momentum relation, where $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}$ denotes the scalar product of four-vector \mathbf{P} with itself.

Hint: For four-vectors $\mathbf{A} = (a_0, \mathbf{a})$ and $\mathbf{B} = (b_0, \mathbf{b})$, the scalar product is defined as

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

- (ii) Show that $\mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}$ where $\mathbf{P}' = (\frac{E'}{c}, \mathbf{p}')$.
 (iii) The energy-momentum relation for a photon is that of a particle *of vanishing rest mass*. If $\mathbf{K} = (\frac{E_{\text{ph}}}{c}, \mathbf{k})$ is the energy-momentum four-vector of a photon, what is the value of $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}$?

- (c) Consider now a photon of 4-momentum \mathbf{K} that is propagating along the x axis and hits an electron with mass m and 4-momentum \mathbf{P} and is scattered back elastically along the x axis with energy $E_{\text{ph}}^{\text{fi}}$. What is $E_{\text{ph}}^{\text{fi}}$ in terms of m and E_{ph} ? The result is commonly quoted in terms of $\frac{1}{E_{\text{ph}}^{\text{fi}}}$.

Hint: One way to proceed is to choose the rest frame of the electron before the collision, write down the energy-momentum four-vectors before and after the collision and relate the four-vectors before and after the collision using energy and momentum conservation.

(a-i) (純純默寫公式)

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \mathbf{P} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(a-ii) 即能動量變換的同一量纲形式 (*定理 6.5~P 102, Prove 6.6_i~P 263*)

$$\begin{cases} \left(\frac{E}{c}\right)' = \gamma_u \left[\left(\frac{E}{c}\right) - \beta_u p \right] \\ \mathbf{p}' = \gamma_u \left[\mathbf{p} - \boldsymbol{\beta}_u \left(\frac{E}{c}\right) \right] \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_u = \frac{\mathbf{u}}{c} \\ \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{cases}$$

(b-i) 由題給定義有

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \frac{E^2}{c^2} - P^2$$

由洛倫茲不變量 $\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = (mc)^2$ 得

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = m^2 c^2$$

(1)

見小節 6.4.2~P 103

(b-ii) 處理方法同 (b-i), 有

$$\mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}' = \frac{E'^2}{c^2} - P'^2 = m^2 c^2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}$$

(b-iii) 我們知道, 沒有靜質量的光子的能動量較為特殊 (2) , 有

$$\frac{E_{\text{ph}}}{c} = k$$

(2)

見小節 6.3.2~P 100

注意這裡根據題意, \mathbf{k} 即表示光子的動量, 不要在符號上疑惑。

故有

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{K} = \frac{E_{\text{ph}}^2}{c^2} - k^2 = 0$$

(c) 我們就按照 Hint 的做法來, 首先選擇與碰撞前電子速度相同的參考系, 书写對應的四維能動量矢量, 然後結合碰撞前後情況列出能動量守恒方程。

在選定的參考系中, 有碰撞前

$$\mathbf{P} = (mc, 0, 0, 0) \quad \mathbf{K} = \left(\frac{E_{\text{ph}}}{c}, \frac{E_{\text{ph}}}{c} \mathbf{e}_x, 0, 0 \right) \quad (6.1)$$

碰撞後 (注意光子被反彈, 動量方向為負方向)

$$\mathbf{P}' = \left(\frac{E'}{c}, \mathbf{p}', 0, 0 \right) \quad \mathbf{K}' = \left(\frac{E_{\text{ph}}^{\text{fi}}}{c}, -\frac{E_{\text{ph}}^{\text{fi}}}{c} \mathbf{e}_x, 0, 0 \right) \quad (6.2)$$

由能動量守恒有

$$\begin{cases} mc + \frac{E_{\text{ph}}}{c} = \frac{E'}{c} + \frac{E_{\text{ph}}^{\text{fi}}}{c} \\ \frac{E_{\text{ph}}}{c} = p' - \frac{E_{\text{ph}}^{\text{fi}}}{c} \end{cases} \quad (6.3)$$

單凭式 (6.3) 似乎還無法解出 $\frac{E_{\text{ph}}^{\text{fi}}}{c}$ 關於 $\frac{E_{\text{ph}}}{c}$ 和 m 的表达式, 但由洛倫茲不變量知

$$\left(\frac{E'}{c} \right)^2 - p'^2 = (mc)^2 \quad (6.4)$$

故將式 (6.3) 整理為

$$\begin{cases} \frac{E'}{c} = mc + \frac{E_{\text{ph}}}{c} - \frac{E_{\text{ph}}^{\text{fi}}}{c} \\ p' = \frac{E_{\text{ph}}^{\text{fi}}}{c} + \frac{E_{\text{ph}}}{c} \end{cases} \quad (6.5)$$

並取平方差，則有

$$\left(mc + \frac{E_{\text{ph}}}{c} - \frac{E_{\text{ph}}^{\text{fi}}}{c} \right)^2 - \left(\frac{E_{\text{ph}}^{\text{fi}}}{c} + \frac{E_{\text{ph}}}{c} \right)^2 = m^2 c^2 \quad (6.6)$$

展開並化簡得

$$2mc \frac{E_{\text{ph}}}{c} - 2mc \frac{E_{\text{ph}}^{\text{fi}}}{c} - 4 \frac{E_{\text{ph}}}{c} \frac{E_{\text{ph}}^{\text{fi}}}{c} = 0 \quad (6.7)$$

可得表达式為

$$\frac{E_{\text{ph}}^{\text{fi}}}{c} = \frac{mc E_{\text{ph}}}{mc^2 + 2E_{\text{ph}}} \quad (6.8)$$

注：一般我們會將這個關係記作

$$\frac{1}{E_{\text{ph}}^{\text{fi}}} = \frac{1}{E_{\text{ph}}} + \frac{2}{mc^2} \quad (6.9)$$

7

Thermodynamics

Solution: 7.1 Pressure

I - P136 引

In *state-of-the-art vacuum systems*, pressures as low as 1.00×10^{-9} Pa are being attained. Calculate the number of molecules in a 1.00m^3 *vessel* at this pressure if the temperature is 27°C .

由理想气体方程 $pV = Nk_B T$ 得：

$$N = \frac{pV}{k_B T} = \frac{1.00 \times 10^{-9} \times 1.00}{1.38 \times 10^{-23} \times (27 + 273)} = 2.40 \times 10^{11}$$

很简单的题目，一是强调热力学温度单位应统一使用开尔文；二是想说明热力学的题目套公式记得从已知条件出发。有的同学可能会考虑压强的微观表达公式，但这里并没有给出方均根速率，还需要结合麦克斯韦分布，这就显得繁琐了。

Solution: 7.2 Idea Gas

I - P136 引

The root-mean-square speed of molecules in air (mostly N_2) is comparable to the speed of sound in air (or in an ideal gas).

- (a) Using the equation of state of an ideal gas, calculate the *bulk modulus* (at temperature T), which is defined as:

$$B = \frac{\text{volume stress}}{\text{volume strain}} = -\frac{\Delta F/A}{\Delta V/V} = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}$$

- (b) Recall that the speed of sound in a fluid $v = \sqrt{B/\rho}$ depends on the elastic and inertial properties of the fluid, where B is the bulk modulus and ρ is the density of air. Express the speed of sound waves in terms of molecular mass m , temperature T , as well as the Boltzmann's constant k_B .
- (c) In fact, the speed of sound has an additional factor of $\sqrt{\gamma}$, where γ is the *adiabatic index* ($\gamma = 7/5 = 1.400$ for *diatomic molecules* at room temperature). Compute the result in (b) at room temperature (The molar mass of air is 29g/mol).

读懂题目照着意思写就行。

(a) 根据 $pV = nRT$, 在温度确定时有 $p = \frac{nRT}{V}$, 即:

$$\Delta p = -\frac{nRT}{V^2} \Delta V$$

于是代入定义即有:

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} = \frac{nRT}{V} = \frac{Nk_B T}{V}$$

(b) 直接代入即可:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{\frac{Nk_B T}{V}}{\frac{Nm}{V}}} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$$

(c) 由 (b) 也有

$$v = \sqrt{\frac{k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

经绝热膨胀系数的修正, 即 $\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ 代入数据, 注意室温一般取 298K, 以及把摩尔质量的单位转化为 kg:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{1.400 \times 8.314 \times 298}{29 \times 10^{-3}}} \text{m/s} = 346 \text{m/s}$$

这一结果 (这里没有注意有效数字) 与声速常用值 340m/s 十分相近。

Solution: 7.3. The Van Der Waals Gas

I - P137 引

The van der Waals equation of state is as follows:

$$(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = nRT$$

- (a) Calculate the *isothermal compressibility* of the van der Waals gas in terms of (V, T) and determine the high-temperature limit. How does this result compare to that for an ideal gas?

Hint: The isothermal compressibility κ_T is defined through $\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$

- (b) The van der Waals equation possesses a so-called critical point, where

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_T = 0$$

Determine the critical pressure p_c , the critical volume V_c and the critical temperature T_c . What is the behavior of κ_T at the critical point?

- (c) Use the expressions for V_c , p_c , and T_c in the van der Waals equation of state and show that it assumes a simple form independent of a and b when T, V , and p are measured in terms of T_c, V_c, p_c , i.e., when expressing the van der Waals equation in terms of $T/T_c, V/V_c, p/p_c$.

本质仍然是一道阅读理解，理解后难度只在计算。

- (a) 利用隐函数求导法则两边求导：

$$(1 - \frac{2a}{V^3} \frac{\partial V}{\partial p})(V - b) + (p + \frac{a}{V^2}) \frac{\partial V}{\partial p} = 0$$

整理有：

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{-V + b}{\frac{2ab}{V^3} - \frac{a}{V^2} + p}$$

故

$$\kappa_T(p, V) = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{1 - \frac{b}{V}}{\frac{2ab}{V^3} - \frac{a}{V^2} + p}$$

观察范德华状态方程，发现我们可以分离 p :

$$p = \frac{nRT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

代入 κ_T 的表达式中，并整理得到：

$$\kappa_T(V, T) = \frac{V^2(V-b)^2}{nRTV^3 - 2a(V-b)^2}$$

然后看高温极限，当 $T \rightarrow +\infty$ 时，同样有 $V \rightarrow +\infty$ 。为计算方便，我们取 $\kappa_T(p, V)$ ，令 $V \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \kappa_T = \lim_{V \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{b}{V}}{\frac{2ab}{V^3} - \frac{a}{V^2} + p} = \frac{1}{p}$$

对理想气体 $V = \frac{nRT}{p}$ ，其 κ_T 如下：

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{nRT}{pV^2} = \frac{1}{p}$$

可以看到范德华气体 κ_T 的高温极限与理想气体一致。

(b) 由范德华状态方程分离 p :

$$p = \frac{nRT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

对 V 偏导：

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = -\frac{nRT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} = 0$$

继续对 V 偏导：

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_T = \frac{2nRT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{V^4} = 0$$

整理消去 nRT 即可求出 V_c :

$$\frac{2a(V-b)^2}{V^3} = nRT = \frac{3a(V-b)^3}{V^4}$$

$$V_c = 3b$$

回代得到 T_c :

$$T_c = \frac{3a(V_c-b)^3}{nRV_c^4} = \frac{8a}{27nRb}$$

回代到 p 的表达式中得到 p_c :

$$p_c = \frac{nRT_c}{V_c - b} - \frac{a}{V_c^2} = \frac{a}{27b^2}$$

回代到 κ_T 的表达式中, 发现分母为

$$\frac{2ab}{V_c^3} - \frac{a}{V_c^2} + p_c = 0$$

且分子不为 0, 故在临界点有 $\kappa_T \rightarrow +\infty$ 。

(c) 题意其实就是用临界参数来表示 a , b 与 R , 这里先用量纲看一下怎么表示好, 即用 T/T_c , V/V_c , p/p_c 代替范德华方程中的 T , V , p , 同时用无量纲量 a_0 , b_0 , R_0 代替 a , b , R :

$$\left(\frac{p}{p_c} + \frac{a_0}{\left(\frac{V}{V_c}\right)^2}\right)\left(\frac{V}{V_c} - b_0\right) = nR_0 \frac{T}{T_c}$$

也即

$$(p + \frac{a_0 p_c V_c^2}{V^2})(V - b_0 V_c) = n(\frac{R_0 p_c V_c}{T_c})T$$

比较一下原来的形式, 我们有:

$$\begin{cases} a = a_0 p_c V_c^2 \\ b = b_0 V_c \\ R = \frac{R_0 p_c V_c}{T_c} \end{cases}$$

接下来只需把 (b) 中临界参数的表达式代入, 解出三个常数即可, 过程略。

记 $T_R = T/T_c$, $V_R = V/V_c$, $p_R = p/p_c$, 则最后的形式为:

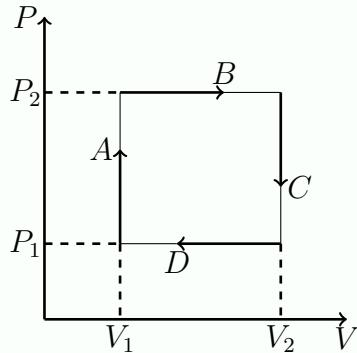
$$(p_R + \frac{3}{V_R^2})(V_R - \frac{1}{3}) = \frac{8}{3}T_R$$

Solution: 7.4 Heat and Work

I - P137 引

An ideal *diatomic* gas, in a *cylinder* with a movable *piston*, undergoes the rectangular cyclic process shown . Assume that the temperature is always such that rotational degrees of freedom are active, but vibrational modes

are “frozen out.” Also assume that the only type of work done on the gas is *quasistatic* compression-expansion work.



- (a) For each of the four steps A through D , compute the work done on the gas, the heat added to the gas, and the change in the internal energy of the gas. Express all answers in terms of P_1 , P_2 , V_1 , and V_2 .
- (b) Compute the net work done on the gas, the net heat added to the gas, and the net change in the internal energy of the gas during the entire cycle. Are the results as you expected? Explain briefly.

基本的 $p - V$ 图计算，注意认清每个过程。根据题意，忽略振动对于内能的贡献，所有功均为体积功。双原子气体必然为线性分子，故有 $i = 5$ 。

(a) A 为等容过程：

$$\begin{aligned} W_A &= 0 \\ Q_A &= n \frac{5}{2} R \Delta T = \frac{5}{2} (p_2 - p_1) V_1 \\ \Delta U_A &= Q_A = \frac{5}{2} (p_2 - p_1) V_1 \end{aligned}$$

B 为等压过程：

$$\begin{aligned} W_B &= p_2 (V_2 - V_1) \\ Q_B &= n \left(\frac{5}{2} + 1 \right) R \Delta T = \frac{7}{2} p_2 (V_2 - V_1) \\ \Delta U_B &= Q_B - W_B = \frac{5}{2} p_2 (V_2 - V_1) \end{aligned}$$

C 为等容过程:

$$W_C = 0$$

$$Q_C = n \frac{5}{2} R \Delta T = \frac{5}{2} (p_1 - p_2) V_2$$

$$\Delta U_C = Q_C = \frac{5}{2} (p_1 - p_2) V_2$$

D 为等压过程:

$$W_D = p_1 (V_1 - V_2)$$

$$Q_D = n \left(\frac{5}{2} + 1 \right) R \Delta T = \frac{7}{2} p_1 (V_1 - V_2)$$

$$\Delta U_D = Q_D - W_D = \frac{5}{2} p_1 (V_1 - V_2)$$

(b) 净功为:

$$W = W_A + W_B + W_C + W_D = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$$

数值上等于循环对应的闭合曲线在 $p - V$ 图中围成的面积（注意一定要是 $p - V$ 图）

净热量为:

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C + Q_D = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$$

可见净热量等于净功。

净内能变化量为:

$$\Delta U = \Delta U_A + \Delta U_B + \Delta U_C + \Delta U_D = 0$$

内能为状态函数，由于始态与终态相同，故净内能变化量一定为 0。

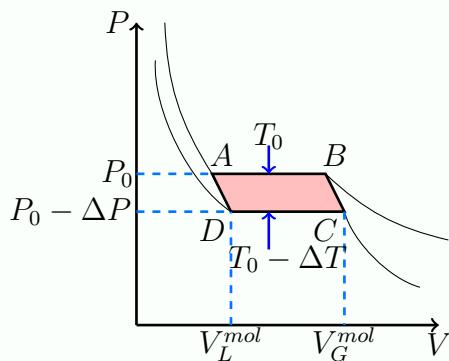
对总过程有 $\Delta U = Q - W$ 成立。这是符合预期的。

Solution: 7.5. Carnot Cycle

I - P138 引

For a van der Waals gas, its equation of state implies a phase transition between liquid and gas below a critical temperature T_c : In the $P - V$ phase diagram, the *isothermal line* for a given temperature $T_0 < T_c$ is not *monotonically* decreasing with respect to V , but a constant function

of V in some region (see the figure). This region corresponds to a phase transition from liquid to gas state (with a volume change from V_L^{mol} to V_G^{mol}), and the mole *latent heat* is L for the transition. Suppose we use 1 mole of this van der Waals gas/liquid mixture as the *medium* for a Carnot cycle operating between the high temperature T_0 and the low temperature $T_0 - \Delta T$ — which are connected by two *adiabatic processes* $D \rightarrow A$ and $B \rightarrow C$. The pressure in the flat region changes from P_0 to $P_0 - \Delta P$ when the temperature changes from T_0 to $T_0 - \Delta T$.



- (a) Specify the heat transfer and work done in each process of $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$, $C \rightarrow D$, and $D \rightarrow A$ in such a Carnot cycle. Here, we assume that the volume change in $B \rightarrow C$ and $D \rightarrow A$ is negligible.
- (b) Calculate the total work done to the environment for this Carnot cycle and express its efficiency ϵ from $\epsilon = W/Q_H$, where W and Q_H is the total work output in the cycle and the heat input at the high temperature, respectively.
- (c) For a Carnot engine with efficiency $\epsilon = 1 - \frac{T_C}{T_H}$, verify the *Clapeyron equation*:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T(V_G^{mol} - V_L^{mol})}$$

for the liquid/gas mixture.

-
- (a) 注意对理想气体成立的结论对范德华气体不再成立。

$A \rightarrow B$ 是等压相变过程，由于假设，体积变化量视为 $V_G^{mol} - V_L^{mol}$:

$$W_1 = p\Delta V = p_0(V_G^{mol} - V_L^{mol})$$

$$Q_1 = L$$

$B \rightarrow C$ 与 $D \rightarrow A$ 为绝热过程，故 $Q_2 = Q_4 = 0$ 。

又一次由题目假设，忽略 $B \rightarrow C$ 与 $D \rightarrow A$ 过程中的体积变化，所以认为

$$W_2 \approx 0 \quad W_4 \approx 0$$

请注意，这里使用约等号而非等号是必要的。具体原因，会在本小题的最后解释。

$C \rightarrow D$ 是等压相变过程，计算方式与 $A \rightarrow B$ 类似：

$$W_3 = p\Delta V = -(p_0 - \Delta p)(V_G^{mol} - V_L^{mol})$$

$$Q_3 = -L$$

至此，有各过程的热与功如下：

$$\left\{ \begin{array}{ll} A \rightarrow B & W_1 = p\Delta V = p_0(V_G^{mol} - V_L^{mol}) \\ & Q_1 = L \\ \\ B \rightarrow C & W_2 \approx 0 \\ & Q_2 = 0 \\ \\ C \rightarrow D & W_3 = p\Delta V = -(p_0 - \Delta p)(V_G^{mol} - V_L^{mol}) \\ & Q_3 = -L \\ \\ D \rightarrow A & W_4 \approx 0 \\ & Q_4 = 0 \end{array} \right.$$

根据热力学第一定律 (定理 7.2~P 130)，应有

$$\Delta U = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 - (W_1 + W_2 + W_3 + W_4) = 0$$

如果写成 $W_2 \approx 0 \quad W_4 \approx 0$ ，那么右边的等号就无法取得，这就与热力学第一定律冲突了。

拓展内容 *(不作掌握要求, 补天选手自行跳过)

如果不认为 $B \rightarrow C, D \rightarrow A$ 过程体积变化可忽略, 那么将涉及范德华气体绝热过程下功的计算, 在此介绍。

首先, 我们利用范德华方程得到 p 的表达式:

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

内能对 T, V 两个变量全微分:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

不难注意到全微分的前一项 $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = nC_V$, 至于后一项, 我们需要先得到普适的能态方程。

熵对 T, V 两个变量全微分:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV$$

代入热力学基本方程中:

$$dU = T dS - p dV = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left[T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - p\right] dV$$

定义亥姆霍兹自由能 $A = U - TS$, 关于其热力学基本方程为

$$dA = dU - d(TS) = dU - T dS - S dT = -S dT - p dV$$

利用二元函数全微分的必要条件, 即偏导次序可交换, 有下面的关系, 称为麦克斯韦关系 (之一):

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left[\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_V\right]_T = \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_T\right]_V = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

从而得到下面的式子, 事实上被称为能态方程:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

将范德华气体的状态方程代入, 有:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{RT}{V-b} - p = \frac{a}{V^2}$$

这样我们就得到了范德华气体内能的微分形式：

$$dU = nC_V dT + \frac{a}{V^2} dV$$

积分有（可以证明，事实上范德华气体的 $C_V = C_V(T)$ ，与体积无关）：

$$\Delta U = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT + \frac{a}{V_1} - \frac{a}{V_2}$$

从而根据热力学第一定律 $\Delta U = -W$ ：

$$W_2 = \int_{T_0-\Delta T}^{T_0} nC_V dT - \frac{a}{V_B} + \frac{a}{V_G^{mol}}$$

$$W_4 = - \int_{T_0-\Delta T}^{T_0} nC_V dT + \frac{a}{V_A} - \frac{a}{V_L^{mol}}$$

(b) 利用 (a) 中的结果代入即可：

$$\epsilon = \frac{W}{Q_H} = \frac{W_1}{Q_1} = \frac{\Delta P(V_G^{mol} - V_L^{mol})}{L}$$

(c) 在这里 $T_H = T_0$, $T_C = T_0 - \Delta T$, 代入有：

$$\epsilon = \frac{T_H - T_C}{T_H} = \frac{\Delta T}{T_0} \quad (7.1)$$

结合 (b) 知

$$\epsilon = \frac{\Delta P(V_G^{mol} - V_L^{mol})}{L} \quad (7.2)$$

联立式 (7.1), (7.2), 知

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta P(V_G^{mol} - V_L^{mol})}{L}$$

对近平衡可逆过程，用 dT 与 dP 代替 ΔT 与 ΔP ，并移项，即有

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T(V_G^{mol} - V_L^{mol})}$$

Solution: 7.6 Entropy

I - P139 引

Consider the Carnot cycle operating with a hot and cold heat baths whose temperatures are T_h and T_c ($T_h > T_c$), respectively. Let working substance

be the gas in the engine, and we consider a gas in general for the working substance.

- (a) Suppose that the amount of heat exchange during the *isothermal process* with the hot (cold) heat bath is Q_h (Q_c), determine the entropy change ΔS_h and ΔS_c of the working substance in the respective process. Then, specify ΔS_h and ΔS_c are positive or negative. Here, take the positive sign of Q_h and Q_c for the heat input from the heat bath to the working substance.
- (b) Now we use an ideal gas as the working substance and consider a free expansion process. Suppose the initial temperature of the gas is T_i and the volume of the gas increases from V_i to V_f . Determine the heat input Q_{fe} and the entropy change ΔS_{fe} of the working substance through the free expansion process.
- (c) By replacing a *quasi-static* isothermal expansion process in the Carnot cycle by a free expansion process, it seems that it is possible to construct a cycle with a single heat bath. Does this fact *violate* the second law of thermodynamics? Answer by yes or no, then explain your answer using the case of the Carnot cycle.

- (a) 等温过程，高温时系统吸热，低温时系统放热，代入熵的定义中：

$$\Delta S_h = \frac{Q_h}{T_h}$$

$$\Delta S_c = \frac{Q_c}{T_c}$$

此处 Q_h 为正， Q_c 为负，故 ΔS_h 为正， ΔS_c 为负。

- (b) 根据自由膨胀，有条件外界真空 ($W_{fe} = 0$) 与绝热 ($Q_{fe} = 0$)。

熵变则利用熵是状态函数与自由膨胀始态与终态温度相等的特性，用等温过程⁽¹⁾ 连接始态与终态，熵变为：

$$\Delta S_{fe} = nR \ln \frac{V_f}{V_i}$$

(1)

见小节 7.5.2~P 130

(c) 否。因为自由膨胀并不是一个可逆过程，压缩时会导致外界环境发生变化，符合热力学第二定律。

若从利用公式的角度解释，则由热力学第一定律，对一个循环有

$$\Delta U = Q - W = Q_{fe} + Q_c - W = Q_c - W = 0$$

由 $Q_c < 0$ 知 $W < 0$ ，即外界需要对系统做功，这符合热力学第二定律。

8

Electromagnetism

Solution: 8.1 *Polarization*

I - P196 引

A positive point charge Q is located at the center of a spherical shell dielectric with an inner radius of R_i and an outer radius of R_o , where the dielectric constant is ε_r . Determine the functions \mathbf{E} , V , \mathbf{D} , and \mathbf{P} as a function of the radial distance R .

本题目是高斯定律的简单应用。取以该点电荷为中心的一系列同心球面作为高斯面，无限远处电势为 0。

(1) $R > R_o$ 时，我们易得：

$$\begin{aligned} E_{R1} &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \\ V_1 &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \\ D_{R1} &= \varepsilon_0 E = \frac{Q}{4\pi R^2} \end{aligned}$$

在真空中，极化矢量 $\mathbf{P} = 0$

(2) $R_i < R < R_o$ 时：

$$\begin{aligned} E_{R2} &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^2} \\ D_{R2} &= \frac{Q}{4\pi R^2} \end{aligned}$$

由关系式 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ 可得 $\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\mathbf{E}$ ，即：

$$P = (1 - \frac{1}{\varepsilon_r}) \frac{Q}{4\pi R^2}$$

在与外部的交界处电势应当连续，取积分可得：

$$V_2 = V_1|_{R=R_o} - \int_{R_o}^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^2} dR = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \frac{1}{R_o} + \frac{1}{\varepsilon_r R} \right]$$

(3) $R < R_i$ 时：

$$E_{R3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

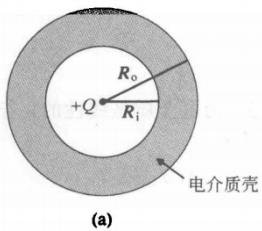
$$D_{R3} = \varepsilon_0 E = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$\mathbf{P} = 0$$

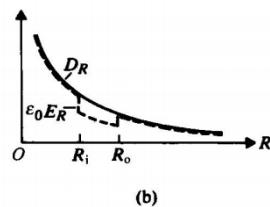
采用类似方法，可得：

$$V_3 = V_2|_{R=R_i} - \int_{R_i}^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} dR = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \frac{1}{R_o} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R} \right]$$

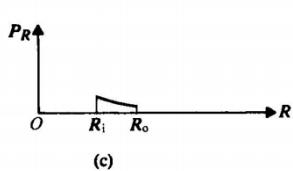
综上图像如下：



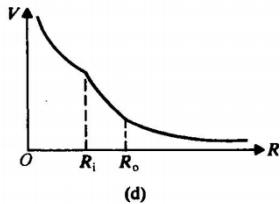
(a)



(b)



(c)



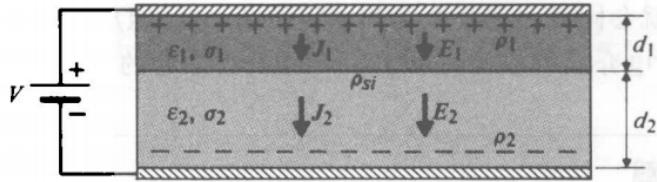
(d)

Solution: 8.2 Current Density/Boundary Condition

As shown in Figure bellow. An electric field is applied between the plates of a parallel plate capacitor with an area S . The space between the two metal plates is filled with two dielectric materials of different thicknesses d_1 and d_2 , with dielectric constants ε_1 and ε_2 , and conductivities σ_1 and σ_2 .

Determine the following:

I - P196 ⏵



- (a) The current density between the two parallel plates.
 (b) The electric field strength in the two dielectric materials.
 (c) The surface charge density on the two parallel plates and at the interface.

(a) 忽略边界效应，考虑稳恒电流。稳态下平行板间电流密度是不变的包括介质交界面处，因此电流也是不变的。因此有：

$$V = (R_1 + R_2)I$$

$$R_1 = \frac{d_1}{\sigma_1 S} \quad R_2 = \frac{d_2}{\sigma_2 S}$$

$$J = \frac{I}{S}$$

可解得：

$$J = \frac{I}{S} = \frac{V}{d_1/\sigma_1 + d_2/\sigma_2} = \frac{\sigma_1 \sigma_2 V}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

(b) 由 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ 可得：

$$E_1 = \frac{\sigma_2 V}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

$$E_2 = \frac{\sigma_1 V}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

当然，该结果亦可由 $V = E_1 d_1 + E_2 d_2$ 和边界条件 $\sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2$ 联立解得

(c) 取上极板、下极板、界面处三个平面，将空间分为四个区域三个交界面，分别使用边界条件 $\varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 = \rho_s$

对于上下极板，其另一侧的电场为 0，因此：

$$\rho_{s1} = \varepsilon_1 E_1 = \frac{\varepsilon_1 \sigma_2 V}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

$$\rho_{s2} = -\varepsilon_2 E_2 = -\frac{\varepsilon_2 \sigma_1 V}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

交界面处：

$$\rho_{si} = \frac{(\varepsilon_2 \sigma_1 - \varepsilon_1 \sigma_2) V}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

Solution: 8.3 Magnetic Field

I - P197 引

As shown in Fig.a. A toroidal iron core with a relative magnetic permeability $\mu_r = 3000$, an average radius $R = 80$ mm, and a circular cross-sectional radius $b = 25$ mm. The length of the air gap $l_g = 3$ mm. A winding of $N = 500$ turns produces a magnetic flux $\Phi = 10^{-5}$ Wb. Neglecting magnetic leakage and using the average path length, calculate:

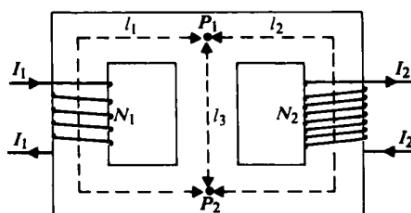
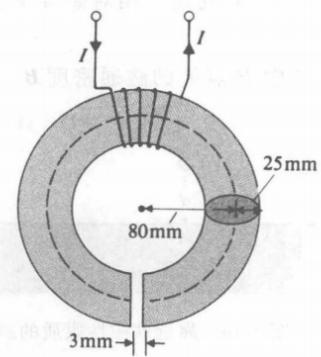


图 8.2: b

图 8.1: a

- (a) The magnetic induction intensity B_g and magnetic field strength H_g in the air gap, and B_c and H_c in the iron core
- (b) The required current I
- (c) Similar to circuits and resistors, there are also concepts of magnetic circuits and *magnetic resistance* in magnetism. The latter is a constant independent of the number of turns in a coil and is only related to the object itself. Magnetic resistance characterizes the hindrance to the magnetic flux passing through the magnetic circuit, and its unit is H^{-1} . Given that the scaling coefficient in its expression is 1 (with no additional constant factor). Taking Fig.a as an example, calculate the magnetic resistance of the iron core R_c and air gap R_g respectively, and denote the magnetic flux by N , I , R_g and R_c (hint: The unit of inductance is H)
- (d) Consider the magnetic circuit in Fig.b. Two windings with turns N_1 and N_2 are wound on the two side limbs of the ferromagnetic core. The cross-sectional area of the core is S , and the permeability is μ . The length of the left, center and right limb is l_1, l_2, l_3 respectively. Determine the

magnetic flux in the center limb. (hint: Observe the expression of magnetic flux in (c) and attempt to extend Kirchhoff's law to magnetic circuits)

注意：本题目 (c)(d) 小问涉及新定义，旨在运用和探究已知内容，不涉及为具体考点。

(a) 由磁通量定义式易得：

$$B_g = B_c = \frac{\Phi}{S} = \frac{10^{-5}}{\pi \times 0.025^2} = 5.09 \times 10^{-3}(T)$$

由磁感应强度与磁场强度的关系，可得：

$$H_g = \frac{B_g}{\mu_0} = 4.057 \times 10^3(A/m)$$

$$H_c = \frac{B_c}{\mu_0 \mu_r} = 1.35(A/m)$$

(b) 以完整的一圈作为积分路径，可得：

$$\oint H dl = \sum I \Rightarrow H_g l_g + H_c l_c = NI$$

$$l_c = 2\pi \times 0.08 - 0.003$$

解得：

$$I = 25.6mA$$

(c) 电感的定义式为 $L = \frac{N\Phi}{I}$ ，磁阻的物理量纲为其倒数，且与匝数无关，考虑量纲 $\frac{NI}{\Phi}$ 。比例系数为 1，不考虑其他的常数系数。

进一步拆分，该物理量与电阻类似，仅与物体本身有关，已知 $\Phi = BS$ ，考虑通过 $\oint H dl = \sum I$ 将分子进行拆分以抵消 B ，可得：

$$\frac{NI}{BS} = \frac{H_g l_g + H_c l_c}{BS} = \frac{H_g l_g}{BS} + \frac{H_c l_c}{BS} = \frac{l_g}{\mu_0 S} + \frac{l_c}{\mu_0 \mu_r S}$$

可得表达式 $R = \frac{l}{\mu S}$ ，这是与电阻表达式 $R = \frac{l}{\sigma S}$ 形式一致的物理量。代入数据求得：

$$R_g = 1.21 \times 10^6 H^{-1}$$

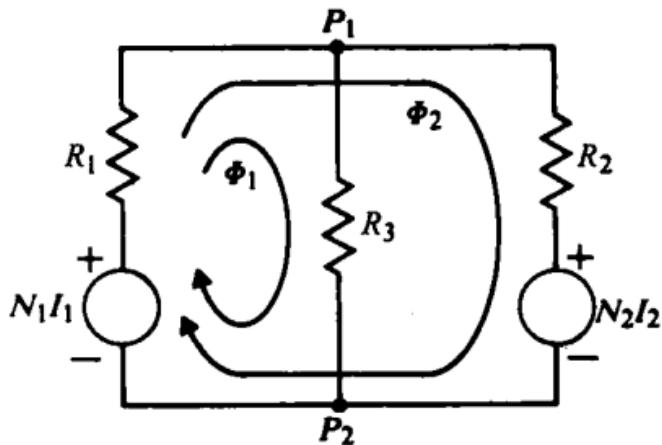
$$R_c = 6.75 \times 10^4 H^{-1}$$

结合上面求得的结果 $\frac{NI}{\Phi} = R_g + R_c$ 可得关系:

$$\Phi = \frac{NI}{R_g + R_c}$$

(d) 考虑与电路的对应, 电路中关注电阻电压电流, 根据关系 $NI = \Phi R$, R 对应电阻, 则 NI 对应电压, Φ 对应电流。

简化模型为磁路, 如下:



三条路径的磁阻分别为:

$$R_1 = \frac{l_1}{\mu S}$$

$$R_2 = \frac{l_2}{\mu S}$$

$$R_3 = \frac{l_3}{\mu S}$$

仿照 KVL 定律列写回路方程:

$$N_1 I_1 = (R_1 + R_3) \Phi_1 + R_1 \Phi_2$$

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 = R_1 \Phi_1 + (R_1 + R_2) \Phi_2$$

解得:

$$\Phi_1 = \frac{R_2 N_1 I_1 + R_1 N_2 I_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

Solution: 8.4 Poynting Vector

I - P198 引

A long and straight cylindrical wire with a radius of b and an electrical conductivity of σ carries a direct current of I , and the current is uniformly distributed in the wire, as shown in the following figure. Find the Poynting vector on the surface of a cylindrical wire and prove the Poynting theorem: The surface integral of the Poynting vector on a closed surface is equal to the power radiated by the volume enclosed by this closed surface.

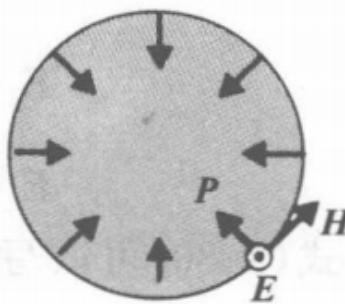


图 8.3: a

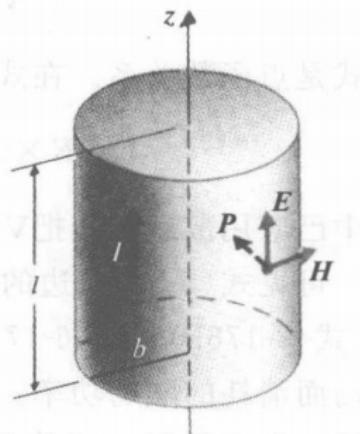


图 8.4: b

由关系 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ 以及定义式 $J = \frac{I}{S}$ 可得:

$$E = \frac{I}{\sigma S} = \frac{I}{\sigma \pi b^2}$$

在导体表面取平行于截面的一圈作为环路:

$$H = \frac{I}{2\pi b}$$

由图示, \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 垂直:

$$P = EH = \frac{I^2}{2\sigma\pi^2 b^3}$$

我们对此结果进行面积分。图中坡印亭矢量没有垂直于截面的分量, 因此只需积分侧表面:

$$\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} = \frac{I^2}{2\sigma\pi^2 b^3} 2\pi b l$$

由于电阻的决定式 $R = \frac{l}{\sigma S}$:

$$\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} = \frac{I^2 l}{\sigma \pi b^2} = I^2 R$$

后者为通电导线消耗的功率，因此坡印亭定理得证。

Solution: 8.5 *Polarization*

There is a permanently polarized insulating sphere of radius R with the polarization $\mathbf{P} = P_0 \frac{r}{R} \hat{r}$. Find the electric field E_{in} inside sphere and E_{out} outside sphere as functions of r respectively.

I - P199 引

在极化矢量部分我们已经提到 $\sigma' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ 。题干描述为只存在极化矢量没有外加电场的情形。我们可以得到它的电荷分布：

$$q' = \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi P_0 \frac{r^3}{R}$$

对于一个球体，利用高斯公式可以求解电场强度：

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi r^2 \mathbf{E} = \frac{q'}{\epsilon_0}$$

考虑方向，极化矢量由负电荷指向正电荷，球体内部的电荷为负电荷，因此：

$$E_{in} = -\frac{P_0 r}{\epsilon_0 R} \quad E_{out} = -\frac{P_0 R^2}{\epsilon_0 r^2}$$

事实上，类似于高斯定理，结合球坐标系的偏导以及极化矢量是与半径唯一有关的函数的特点，体电荷密度可以表示为：

$$\rho' = -\nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \mathbf{P})}{\partial r} = -\frac{3P_0}{R}$$

Solution: 8.6 *Mutual Induction*

I - P199 引

Please prove: In any case, for mutual inductance M_{12} and M_{21} , the following equation exists:

$$M_{12} = M_{21}$$

我们考虑能量。在电感中能量表示为 $W = \frac{1}{2}LI^2$ 。

现在考虑两个电感线圈 1 和 2。首先闭合线圈 1 所在回路，系统能量为

$$W_1 = \frac{1}{2}L_1I_1^2$$

再闭合线圈 2，首先线圈 2 自身电流从 0 到 I_2 ，其自身能量为

$$W_2 = \frac{1}{2}L_2I_2^2$$

在电流 I_2 的影响下，对线圈 1 产生互感电动势，为了保持电流 I_1 不变，需要克服互感电动势做功：

$$W_{21} = - \int_0^{I_2} \varepsilon I_1 dt = - \int_0^{I_2} M_{21}I_1 di = \frac{1}{2}M_{21}I_1I_2$$

这部分能量储存于磁场中，因此系统磁场的能量为

$$W = W_1 + W_2 + W_{21} = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + \frac{1}{2}M_{21}I_1I_2$$

当然，如果先接通线圈 2 所在回路再接通线圈 1 所在回路，这个系统的能量应当 $W' = W$ ，由此：

$$M_{12} = M_{21}$$

当然，除了能量的角度，我们给出场波教材中的另一种解释：^a

在麦克斯韦方程组中我们已知磁感应强度的散度为 0：

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

由数学结论，旋度的散度为 0。我们必然能够找到一个场矢量 \mathbf{A} 使得其旋度为 \mathbf{B} ，即：

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

将这一等式带入静磁场旋度公式，可得：

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 J$$

由亥姆霍兹定理，空间中任意确定的场是一个无散的场与无旋的场的叠加。我们不妨令 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ （这也被称为库仑规范），那么：

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 J$$

这是一个矢量泊松方程，对照我们很熟悉的公式及其方程的解 $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ ， $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho}{R} dV$ ，我们可知：

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J}{R} dV$$

由此定义的 A 被称为磁矢势，对标于电场中的电势。

我们先求解互感 M_{12} ，由其定义式为基础，带入磁矢势的定义：

$$M_{12} = \frac{N_2}{I_1} \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 = \frac{N_2}{I_1} \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}_1) \cdot d\mathbf{S}_2$$

由 Stokes 公式，面积分转换为线积分：

$$M_{12} = \frac{N_2}{I_1} \oint_{C_2} \mathbf{A}_1 \cdot dl_2$$

由电流密度的定义：

$$\mathbf{J} dV = JS dl = I dl$$

代入可得：

$$A_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{4\pi} \oint_C \frac{dl_1}{R}$$

原本的公式只有一圈积分，这里将多匝的影响也考虑在内。

进一步代入可得：

$$M_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{R}$$

其中 R 是微分长度 dl_1 和 dl_2 之间的距离。上式习惯将匝数归并到沿电路 C_1 和 C_2 的积分中，因此也写作：

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{R}$$

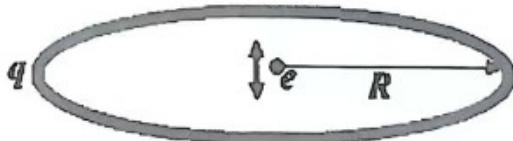
上式被称为计算互感的纽曼公式。观察可见角标 1 和 2 可互换，因此原命题得证。

^a本来想把这个思路作为题目的，但是不仅数理要求很高而且难以以题目形式给出，因此仅供欣赏。

Solution:8.7 Point charge

I - P199 引

As shown in figure below, an electron is constrained to move along the axis of the ring with a charge q . If the electron can perform small oscillations through the center of the ring, calculate its oscillation frequency.



带电圆环在其圆心中心线上形成的电场强度表达式为 (假设中心线为 z 轴):

$$E = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

由于微小振动, $R \gg z$, 因此:

$$E = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

构建振动方程:

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -eE = -\frac{eqz}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

解得:

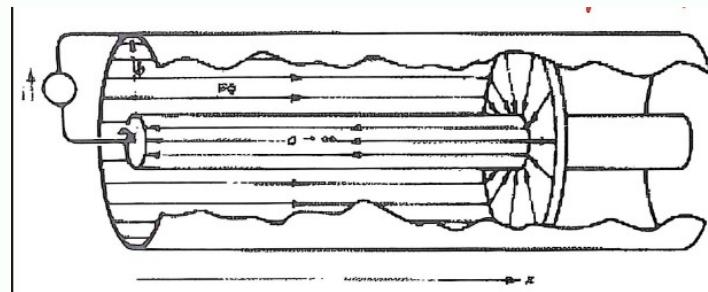
$$\omega = \sqrt{\frac{eq}{4m\pi\varepsilon_0 R^3}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 R^3}}$$

Solution:8.8 Magnetic Field and Current

I - P199 引

As shown in figure below, there is a *coaxial cable* made of superconducting material ($\sigma \rightarrow \infty$), and having short *circuited end* free to move along the x axis. The radius of its central rod is a and its outer diameter is b .



- (a) What is the inductance of the cable as a function of x ?
 (b) What is the force on the end? If the magnitude of the current it carries is i .

(a) 按照固定步骤，假设中心杆中通有电流 i ，则有：

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \Rightarrow \Phi = \int_a^b Bx \, dr = \frac{\mu_0 i x}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

(注意这里的磁通量是螺旋环绕的磁场的磁通量， $x \, dr$ 表示了面积)

因此自感系数为：

$$L = \frac{\phi}{i} = \frac{\mu_0 x}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

(b) 在电感中储存的系统能量为 $U = \frac{1}{2}Li^2$ ，因此在本题中：

$$U = \frac{\mu_0 x i^2}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

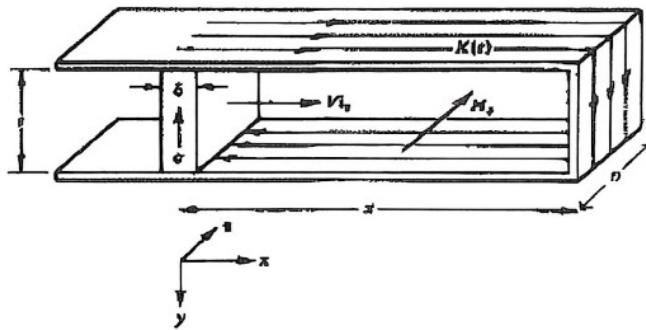
接下来应用虚功原理，可得：

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\mu_0 i^2}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Solution: 8.9 Electromagnetic field

As shown in figure below, a thin block with conductivity σ and thickness δ moves with constant velocity v_{ix} between short circuited superconducting parallel plates. An initial surface current K_0 (the current per width) is imposed at $t = 0$ when $x = x_0$, but the source is then removed.

I - P200 引



- (a) The surface current on the plates $K(t)$ will vary with time. What is the magnetic field in term of $K(t)$? Neglect fringing effects.
- (b) Because the moving block is so thin, the current is uniformly distributed over the thickness δ . Please find $K(t)$ as a function of time.
- (c) What value of velocity will just keep the magnetic field constant with time until the moving block reaches the end?

(a) 由安培环路定理:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot b = \mu_0 K(t) \cdot b$$

$$B = \mu_0 K(t)$$

(b) 薄物块在运动，运动产生磁通量的变化，产生感生电动势，感生电动势维持了电流。

假设 y 轴方向物块高度为 a , z 轴方向长度为 b , 则电阻满足:

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S} = \frac{a}{\sigma b \delta}$$

假设 x 轴方向运动的函数为 $x(t)$, 则磁场通量为:

$$\Phi = B x(t) a = \mu_0 a K(t) x(t)$$

感生电动势为：

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 a \frac{d}{dt} [K(t)x(t)] \\
 &= -\mu_0 a \left[\frac{dK(t)}{dt} x(t) + K(t) \frac{dx(t)}{dt} \right] \\
 &= -\mu_0 a \left[\frac{dK(t)}{dt} x(t) - vK(t) \right] \\
 &= IR = K(t)b \frac{a}{\sigma b \delta} \\
 &= \frac{aK(t)}{\sigma \delta}
 \end{aligned}$$

其中 $x(t) = x_0 - vt$, 代入上式整理, 得到:

$$\mu_0(x_0 - vt) \frac{dK(t)}{dt} = (\mu_0 v - \frac{1}{\sigma \delta}) K(t)$$

分离微分方程的变量, 得到:

$$\frac{dK(t)}{K(t)} = \frac{\mu_0 v - \frac{1}{\sigma \delta}}{\mu_0 v \left(\frac{x_0}{v} - t \right)} dt$$

求解一阶微分方程, 可得:

$$K(t) = K' \left(\frac{x_0}{v} - t \right)^{1/\mu_0 v \sigma \delta - 1}$$

代入初值条件求解系数, 得:

$$K_0 = K' \left(\frac{x_0}{v} \right)^{1/\mu_0 v \sigma \delta - 1}$$

反解出 K' 并最终代入结果, 得:

$$K(t) = K_0 \left(1 - \frac{v}{x_0} t \right)^{1/\mu_0 v \sigma \delta - 1}$$

(c) 由上一问求得的结果可知, 若 $B = constant$, 则 $K(t) = constant$, 因此:

$$\frac{1}{\mu_0 v \sigma \delta} - 1 = 0$$

所以:

$$v = \frac{1}{\mu_0 \sigma \delta}$$

9

Optics

BLANK

期待你的建设

10

Quantum Physics

Solution: 10.1 **I** Probability of Detection

I - P226 ⏷

A particle is confined in a one-dimensional infinite square well potential of width a . Its wave function is given by:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) (0 < x < a)$$

If the particle is in the $n = 1$ state (ground state), what is the probability of finding it in the region between $x = 0$ and $x = \frac{a}{4}$?

(Hint: $\int \sin^2(x) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x) + C$)

题目所给是典型一维无限深势阱的波函数，根据波函数表示的概率密度的定义，可得概率密度函数：

$$dP(x) = |\psi_1(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

因此粒子位于 $0 \sim \frac{a}{4}$ 的概率为：

$$P = \int_0^{a/4} \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi x}{2a} - \frac{1}{4} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \right] \Big|_0^{a/4}$$

解得：

$$P = \frac{\pi - 2}{4\pi}$$

Solution: 10.2 An Infinitely Deep Potential Well in 1D

I - P226 ⏵

A particle is in a one-dimensional infinite deep potential well with a width of a . At a certain moment, the two walls of the well suddenly move in opposite directions, causing the width of the well to change to $2a$. The potential wells before and after the change are symmetrical about $x = 0$. The particle wave function has no time to change. What is the probability that the particle remains in the ground state for the widened infinite deep potential well?

(Hint 1: Principle of superposition of states $\psi_{1,1} = \sum c_i \psi_{2,i}$ $P_1 = |c_1|^2$)

(Hint 2: $\int \cos(2x) \cos(x) dx = \frac{1}{6}(3 \sin(x) + \sin(3x)) + C$)

根据我们已经求解过的波函数，对其进行坐标平移变换，可以得到原先的波函数以及势阱增宽后的波函数分别如下 $\psi_{1,n}(x)$ 和 $\psi_{2,n}(x)$:

$$\psi_{1,n}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a} + \frac{n\pi}{2}\right) \quad \left(-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}\right)$$

$$\psi_{2,n}(x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{2a} + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (-a < x < a)$$

在非上述定义域的部分，波函数分别为 0.

加宽后，本征态为 $\psi_{2,n}$ ，但此时波函数为 $\psi_{1,1}$ ，后者为前者的线性表示。考虑三角函数的级数分解与内积空间，我们希望提取 c_1 ，需要内积实现:

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_{-a/2}^{a/2} \psi_{1,1} \psi_{2,1} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) dx \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2t) \cos(t) dt \quad (t = \frac{\pi x}{2a}) \\ &= \frac{8}{3\pi} \end{aligned}$$

因此留在基态的概率为:

$$P = |c_1|^2 = \frac{64}{9\pi^2}$$

Solution: 10.3 Tunnelling Effect**I - P226 引****II - P227 引**

The $\delta(x)$ is a very important function in engineering technology, and it is defined as:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x) dx = 1$$

There is a one-dimensional δ barrier at $x = 0$:

$$U(x) = A\delta(x) \quad (A > 0)$$

When a particle with energy E is incident from the left, find the transmission coefficient. (Hint: In this question, $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}$ is divergent. Consider integrating it in $[-\varepsilon, \varepsilon]$ $\varepsilon \rightarrow 0$)

首先写出薛定谔方程:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(x)] \psi(x) = 0$$

$x = 0$ 处二阶微分项发散, 在区间 $[-\varepsilon, \varepsilon]$ $\varepsilon \rightarrow 0$ 内对方程两边积分。由于波函数为有限值, 在无穷小区间内积分为 0, 可得:

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = \frac{2mA}{\hbar^2} \psi(0)$$

假设波函数为:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx} & x < 0 \\ Se^{ikx} & x > 0 \end{cases}$$

其中 $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

代入上面得到的边界条件和波函数连续性条件, 可得:

$$\begin{cases} 1 + R = S \\ ik(S - 1 + R) = \frac{2mAS}{\hbar^2} \end{cases}$$

求解方程组, 得到隧穿概率为:

$$T = |S|^2 = \left| \frac{ik\hbar^2}{ik\hbar^2 - mA} \right|^2 = \left(1 + \frac{m^2 A^2}{k^2 \hbar^4} \right)^{-1} = \left(1 + \frac{mA^2}{2\hbar^2 E} \right)^{-1}$$

Solution:10.4 Schrödinger Equation

Consider a particle of mass m confined in a 2D rectangular infinite square well. The potential energy function is:

$$U(x, y) = \begin{cases} 0 & 0 < x < L_x, 0 < y < L_y \\ \infty & \text{boundary and exterior} \end{cases}$$

The wave function is separable: $\psi(x, y) = X(x)Y(y)$, with total energy $E = E_x + E_y$.

(a) Calculate the normalized wave function $\psi_{n_x n_y}(x, y)$, and prove the particle energy is:

$$E_{n_x n_y} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} \right)$$

(b) Given $L_y = 2L_x = 2L$, calculate the second excited state (provide quantum numbers (n_x, n_y) and energy value).

(c) For the Schrödinger Equation $\hat{H}\psi = E\psi$, the set of all eigenvalues E of operator \hat{H} is called the *spectrum*. When two or more linearly independent eigenfunctions share the same eigenvalue, it is called degeneracy of spectra, and the number of such eigenfunctions is the *degeneracy degree*.

Given $L_y = \alpha L_x$ ($\alpha > 1$), if the degeneracy degree of the second excited state is 2, find the α satisfying this condition.

(a) 由于可以分离变量，因此薛定谔方程可以在两个分量上单独计算。首先， $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 。根据薛定谔方程：

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x) + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

取势函数为 0 的区域，分离变量，得到：

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) = EXY$$

两边同除 XY ，得到：

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) = E_x + E_y$$

因此可以拆分到两个方向上，即：

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = E_x X$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = E_y Y$$

在一维无限深势阱中，我们有：

$$\psi_x = \sqrt{\frac{2}{L_x}} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L_x}\right) \quad (0 < x < L_x)$$

$$\psi_y = \sqrt{\frac{2}{L_y}} \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L_y}\right) \quad (0 < y < L_y)$$

因此：

$$\psi_{n_x, n_y}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{L_x L_y}} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L_y}\right)$$

对应地，上面的方程中可以得到各自的能量：

$$E_x = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \frac{n_x^2}{L_x^2} \quad E_y = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \frac{n_y^2}{L_y^2}$$

因此得证⁽¹⁾：

$$E = E_x + E_y = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} \right)$$

(b) 根据 (a) 的证明，代入数据，能量表示为：

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8m L^2} (4n_x^2 + n_y^2)$$

为了便于比较，令系数 $C = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8m L^2}$ ，则能量为 $E = C(4n_x^2 + n_y^2)$ 。明显， $n_x = n_y = 1$ 是基态。

⁽¹⁾ 如果觉得证明麻烦的话，直接在两个分量上分别当做一维无限深势阱计算即可

$$(n_x, n_y) = (1, 2) \quad E = 8C$$

$$(n_x, n_y) = (2, 1) \quad E = 17C$$

$$(n_x, n_y) = (2, 2) \quad E = 20C$$

$$(n_x, n_y) = (3, 1) \quad E = 37C$$

$$(n_x, n_y) = (1, 3) \quad E = 13C$$

比较能量值，明显，第二激发态及其对应能量为：

$$(n_x, n_y) = (1, 3) \quad E = 13C = \frac{13\pi^2\hbar^2}{8mL^2}$$

(c) 在题目条件下，能量函数改写为：

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2\alpha^2mL^2}(\alpha^2n_x^2 + n_y^2)$$

同理，(b) 中已经求过的几个能量值为：

$$(n_x, n_y) = (1, 1) \quad E = (\alpha^2 + 1)C$$

$$(n_x, n_y) = (1, 2) \quad E = (\alpha^2 + 4)C$$

$$(n_x, n_y) = (2, 1) \quad E = (4\alpha^2 + 1)C$$

$$(n_x, n_y) = (2, 2) \quad E = (4\alpha^2 + 4)C$$

$$(n_x, n_y) = (3, 1) \quad E = (9\alpha^2 + 1)C$$

$$(n_x, n_y) = (1, 3) \quad E = (\alpha^2 + 9)C$$

观察结果，明显， $(n_x, n_y) = (1, 1)$ 为基态， $(n_x, n_y) = (1, 2)$ 为第一激发态，且这两个不存在与之同能量的态。 $(n_x, n_y) = (2, 2)$ 和 $(n_x, n_y) = (3, 1)$ 时能量明显高于 $(n_x, n_y) = (2, 1)$ ，故不可能为第二激发态。

此时要满足简并态要求，只能：

$$4\alpha^2 + 1 = \alpha^2 + 9 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

当 $n_x + n_y > 4$ 时，对于每一种情况，存在 $n_x + n_y = 4$ 中至少一种情况使得其能量高于该情况，而 $n_x + n_y = 4$ 中至少为第二激发态。而题目要求简并度为第二激发态的简并度，不考虑此情况。

后记

啊，终于做完了。我这辈子排过最复杂的 L^AT_EX 文档恐怕就是这个了吧。

恰恰是在我生日的前一天（或者当天？），我完成了这个项目最后的收尾工作。在这学期听到王业伍老师说普物教学小组有自己编纂一本教材的想法，不知道进度怎样了，我们的项目不会白做了吧（不是）？

这是我第一次组织一个多人合作的项目。在这个过程中，我做过很多努力，也犯过一些错误，感谢愿意加入我的朋友，感谢所有的帮助与批评，正是这些让我继续成长。

我已经要进入大二下学期了，我的精力将不再支持我做普物笔记第二季了，真希望能有人能接过这个项目啊。

冬天好冷。

未来会更好的吧。

致谢：

Ch1 斑鸠

Ch2 刘远鉴

Ch3 斑鸠

Ch4 薛宇航

Ch5 大怪 (倪晨翔)

Ch6 杨宏毅

Ch7 陈若轩

斑鸠 2025 年 2 月 12 日于宿舍