



# 普通物理の超絶援助

---

## General Physics Assistance

混合普物 (H) 笔记小组 © 著



## 目录

前言	i
约定	ii
正文部分	1
第一章 测量	2
1.1 单位与量纲	2
1.2 数据处理	3
1.3 课后习题: 测量	3
第二章	4
2.1	4
第三章 转动动力学	5
3.1 刚体	5
3.2 转动	5
3.2.1 极坐标系	5
3.2.2 叉乘	7
3.2.3 运动学概念	8
3.2.4 动力学概念	9
3.3 平行轴定理/施泰纳定理	11
3.4 刚体中的能量	12
3.4.1 纯转动中的能量	12
3.4.2 同时发生转动与平动时的能量	12
3.5 角动量	13
3.5.1 定义	13

---

---

3.5.2	角动量守恒	13
3.5.3	质心系转化	14
3.6	重心	14
3.7	非惯性系情形	15
3.7.1	非惯性力	15
3.7.2	科里奥利力 *	15
3.8	回顾与总结	16
3.9	课后习题: 转动动力学	17
<b>第四章</b>	<b>流体力学</b>	<b>21</b>
4.1	流体的定义与性质	21
4.2	流体动力学	22
4.3	课后习题: 流体力学	23
<b>第五章</b>	<b>狭义相对论</b>	<b>25</b>
5.1	相对论运动学	25
5.1.1	基本假设	25
5.1.2	洛伦兹变换	26
5.1.3	动尺收缩	27
5.1.4	动钟变慢	27
5.1.5	速度变换	28
<b>第六章</b>	<b>热力学</b>	<b>29</b>
6.1	导论	29
6.2	理想气体	29
6.3	分子动理论	30
6.3.1	压强的微观解释	30
6.3.2	能量均分原理	30
6.3.3	麦克斯韦分布	31
6.3.4	玻尔兹曼分布	32
6.3.5	平均自由程	33
6.3.6	范德华状态方程	33
6.4	热力学第零定律	33
6.4.1	引言	33
6.4.2	基本概念	34
6.4.3	温度	34
6.5	热力学第一定律	35
6.5.1	热与功	35
6.5.2	过程介绍	36

---

---

6.6 热力学第二定律 . . . . .	37
6.6.1 热机 . . . . .	37
6.6.2 熵 . . . . .	38
6.7 热力学第三定律 . . . . .	39
6.8 信息 . . . . .	40
<b>证明部分</b>	<b>41</b>
<b>第一章 测量</b>	<b>42</b>
<b>第二章</b>	<b>43</b>
<b>第三章 转动动力学</b>	<b>44</b>
<b>第四章 流体力学</b>	<b>51</b>
<b>第五章 热力学</b>	<b>52</b>
5.1 Part 1 . . . . .	52
5.2 Part 2 . . . . .	56
<b>答案部分</b>	<b>62</b>
<b>第一章 测量</b>	<b>63</b>
<b>第二章</b>	<b>64</b>
<b>第三章 转动动力学</b>	<b>65</b>
<b>第四章 流体力学</b>	<b>74</b>

在普物(H)的学习中,深感几个问题:

- 英文好难,不想看 ppt
- 老师讲得好抽象(我的问题,老师其实讲得很好了),听不懂
- 作业好烦,看不懂也找不到答案
- 小测好杂,内容好广
- 资料好少,复习好难
- 考试好可怕,还要读英文题目

因此,我产生了一个念头:编写一份中英混搭的普物资料,把 ppt 和其它教科书全都迭代掉。这个想法可能有些大胆,但我依旧相信,我们可以做到。

感谢普物 H 笔记计划的所有人<sup>[1]</sup>,感谢大家的热情加入与支持。

另外,感谢学长薛宇航及其朋友提供的普物笔记,没有他们提供的资料,这份文档的出生将会走更长更长的路。

---

<sup>[1]</sup>此处无先后顺序:陈锦浩,倪晟翔,陈若轩,刘远鉴,薛宇航,杨宏毅

## 约定

不要跳过一本书的约定，因为它能帮助你更好地阅读学习。

本书约定如下：

**语言风格** 中英混搭。可能一个中英混搭的文档看起来不伦不类，但我希望它能让还没那么习惯英文的学生能更好地度过这一段过渡期。本文档内，**解释说明**的语句将采用**中文**，而对于**问题的叙述**，以及一些**关键词**，将采用**英文**，以保证大家的英语阅读思维能得到培养，不至于面对作业题与考试题束手无措。

**交互图层** 很多关键词往往头一次见不是那么容易认得，因此，本文档提供交互图层：我们默认，当文字的颜色显示为**青色**时，它将是可交互的（这个除外），读者可以通过在 PDF 阅读器中打开并用鼠标点击的方式切换它的中英文显示。

**超链接** 为了便于阅读，在文档中将出现许多的超链接。我们默认，当文字的颜色显示为**蓝色**时（这个也除外），它将可以作为超链接被点击。

**跳转卡片** 很多理科书目的前后引用在实际阅读中其实是一件麻烦的事情，本书将提供可以反向跳转的超链接跳转卡片（如右），读者可以通过在 PDF 阅读器中打开并用鼠标点击的方式点击跳转（**章 零<sub>i</sub>~P ii**）。

***I - P ii*** 引

**\* 标记** 普物 I 中的部分内容较为困难，在实际考核中较少涉及。本书中部分内容用 \* 标记，表示这些内容只需了解即可，不必掌握证明。

**矢量与标量** 本书中，不加粗的符号（如  $v$ ）表示标量或取矢量的大小；加粗的符号（如  $\boldsymbol{v}$ ）则表示矢量。



正文部分

G.P.A



本章节内容较为简单，一般相关题目会出现在日常上课的课后小测与作业内，大型考试基本不涉及。重点是掌握物理学的基本单位，以及利用国际单位制以及相关比例关系推导特殊物理量的单位表达式与可能的公式表达式。

## 1.1 Unit & Dimension

- **Basic Quantity** e.g. Length( $L$ ), Mass( $M$ ), Time( $T$ )

在自然世界中，我们会用各种物理量来描述物质的性质。就像在平面几何中我们可以基于几大公理推出各种定理，在物理中，我们也可以规定一些“基本的量”，使得所有的物理量可以由这些量导出。自然地，我们就称呼这些量为基本量。

- **Unit** 在规定好一些物理量之后，我们会想办法去度量它们。既出于定量测量的要求，又出于减少物理公式参数的考量，人们定义了各种各样的单位。

- **SI Units** <sup>[1]</sup> e.g. meter(m), kilogram(kg), second(s)

- **Non SI Units** e.g. mm,  $\mu\text{m}$ , g

*If you convert everything to the basic SI units, you can omit them during the calculation, but remember to put back the correct units at the end.*

事实上，可以在计算过程中省略的约定也算是国际单位制存在的意义之一（斑鸠：大概吧）。

- **Dimension** 一个物理量的量纲指的是这个物理量关于基本量的导出式。e.g. 速度的量纲可以表示为  $[v] = \frac{L}{T}$
- **Dimension Analysis** 量纲分析是检验物理公式正确性的方法。简而言之，你可以简单地通过分析一个物理等式左右两边的量纲是否一致来初步判断这个等式可不可能成立。当然，量纲分析也可以作为导出实验公式大方向的一个指导，又或者……是你忘记了公式中的某一个物理量时尝试硬添物理量时的救命稻草。

<sup>[1]</sup>SI  $\Leftrightarrow$  International System of Units



## 1.2 *Data Processing*

这部分普通物理学实验 I 会详细说明并实际计算运用，非常抱歉，此处略去。

## 1.3 课后习题: 测量

### 习题 1.1 量纲分析—Solution 1.1, ~P 63

The *displacement* of a particle moving under *uniform acceleration* is some function of the *elapsed time* and the acceleration. Suppose we write this displacement  $s = ka^m t^n$ , where  $A$  is a *dimensionless constant*.

- (1) Show by dimensional analysis that this expression is satisfied if  $m = 1$  and  $n = 2$ .
- (2) Can this analysis give the value of  $A$ ?



2

**2.1**

在质点运动学中，我们讨论的都是质点。然而，物体往往是占据着一定的空间，有着自己的质量分布特性的。那么，只靠质点运动学，还能够解决物体的运动问题吗？答案是否定的。为了解决这个问题<sup>(1)</sup>，物理学家们建立了转动动力学。

(1) 更严谨地说，刚体的运动问题

### 3.1 Rigid Body

想象一个物体，它受到力产生加速度的同时，各个部位还会发生形变，这样的运动显然是非常复杂的。我们简化了研究对象，选择那些具有体积，且形状固定不变的物体。这样的物体就叫做刚体。

- *rigid body*: An object that is *nondeformable*, or in other words, an object in which the separations between all parts of particles remain constant.

### 3.2 Rotation

我们已经非常了解平动了。鉴于刚体的运动可以分为平动和转动，我们不妨先放弃平动，单独对转动做出分析。

#### 3.2.1 Polar Coordinate & Cylindrical Coordinate

转动显然涉及旋转，旋转又显然涉及角度，而角度大小的确定需要一个基准，这就给了我们“选定一个旋转轴”分析转动的思想。

为了描述角度，我们引入极坐标系这一数学工具。

极坐标系的基本要素是极点和极轴，其中极轴是一条从极点引出的有向轴。

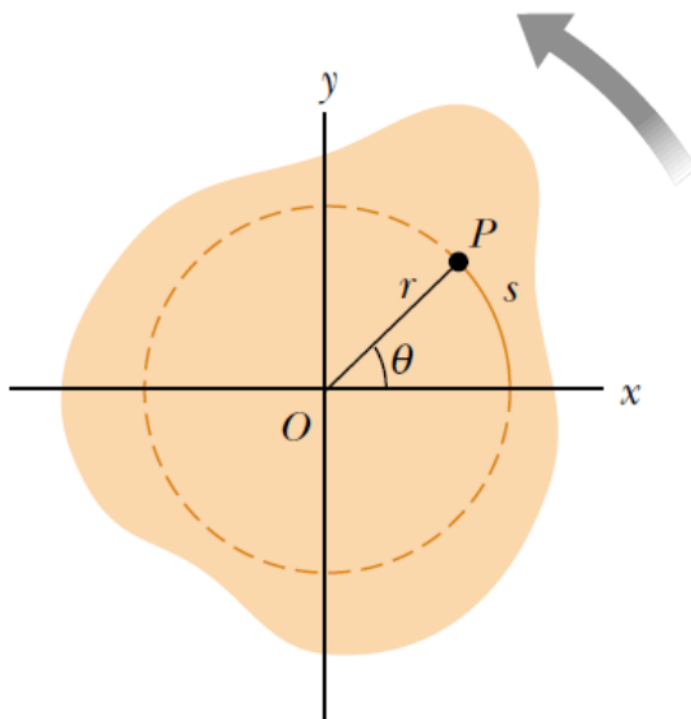


图 3.1: 极坐标系 (O 为极点, O 点出发 x 轴方向为极轴方向)

*A planar, rigid object of arbitrary shape confined to the xy plane and rotating about a fixed axis through O. The axis is perpendicular to the plane of the figure, and O is the origin of an xy coordinate system*

在极坐标系中, 我们使用坐标  $(r, \theta)$  或者  $(|\mathbf{r}|, |\boldsymbol{\theta}|)$  描述点的位置。

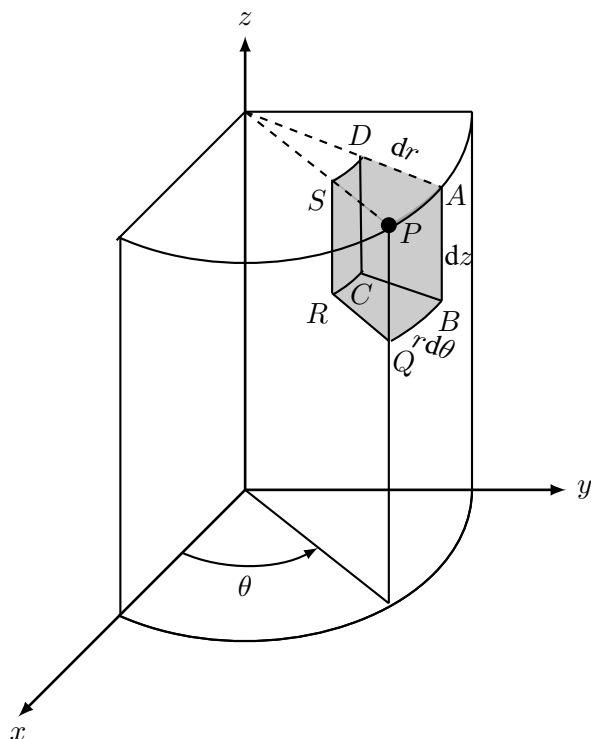
- $\mathbf{r}$  即起点为极点, 终点为被描述点的向量, 称为极径矢量。
- $\boldsymbol{\theta}$  即角度矢量, 方向垂直于坐标平面向纸面外。我们规定, 从极轴出发旋转到位矢的旋转角, *counterclockwise* 时方向为正, *clockwise* 时方向为负<sup>[1]</sup>。

I-P7 引

然而, 仅仅介绍极坐标系是不足够的, 因为极坐标系仅有二维, 但一个刚体的运动却极有可能是三维的。因此, 我们还需要进一步介绍柱坐标系。

柱坐标系是极坐标系往  $z$  轴平面的延伸。柱坐标相比极坐标的  $r, \theta$  还多了一个  $z$ , 用于指示点在  $z$  轴上的投影位置。

<sup>[1]</sup>当然, 对于一个第四象限的点, 你可以认为它是逆时针旋转得到的优角 (就是大于 180 度的角), 也可以认为它是顺时针旋转得到的锐角。在本书中, 由于叉乘的考量, 我们往往取锐角考虑。



如图, 这是一个以  $x$  轴为极轴的柱坐标系,  $P$  的坐标为  $(r, \theta, z)$ 。

$$OP = r + z$$

阴影部分是一个极小的体积元 (这里放大绘制)。

图 3.2: 柱坐标系<sup>a</sup>

<sup>a</sup>本图来自<https://www.latexstudio.net/index/details/index/mid/813.html>

在对刚体运动进行描述时, 我们往往选取刚体的旋转轴作为  $z$  轴建立柱坐标系, 然后借助柱坐标系说明其运动的相关参数。

### 3.2.2 Cross Product

I-P9 引

在介绍转动的有关概念前, 我们还需引入叉乘这一数学工具。

由于叉乘的具体内容介绍属于线性代数与数学分析的任务, 这里并不会展开讲。

叉乘可以看成这样一个运算: 按顺序输入两个向量  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ , 输出一个特定长度且与它们都正交的向量  $\mathbf{C}$ 。当然, 这样的描述是不精确的, 一是长度需要确定的值, 二是与  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  都正交的向量方向不唯一<sup>[2]</sup>。因此, 接下来, 我们要对长度和方向作出具体描述。

- 长度:  $C = AB \sin \theta$ , 其中  $\theta$  是由  $\mathbf{A}$  旋转至  $\mathbf{B}$  所成的小于  $\frac{\pi}{2}$  的角<sup>[3]</sup>。在几何意义上,  $|\mathbf{C}|$  即是  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  构成的平行四边形的面积。
- 方向:  $\mathbf{C}$  的方向是介绍长度时所述的  $\theta$  (角度矢量的方向: 小节 3.2.1<sub>I</sub>~P6) 的方向。在几何意义上,  $\mathbf{C}$  与  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  所张成平面的法向量平行。

<sup>[2]</sup>除了  $\mathbf{0}$ , 还有正反两个方向

<sup>[3]</sup>事实上, 这里不规定旋转, 对于长度是没有影响的。这里这么说, 主要是希望在介绍长度和方向时, 这个角度可以统一。回想一下, 在介绍极坐标系时, 我们就规定逆时针是正方向了, 所以这么规定可以合理地引出正负。

如果这么说不够直观，我们可以参考右手定则：

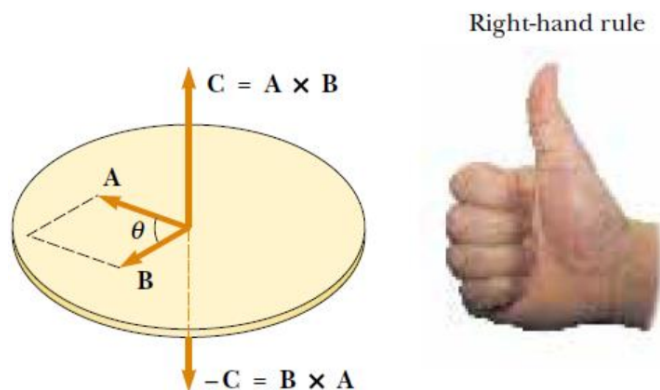


图 3.3: *Right-Hand Rule*

以  $A$  为起始，右手手指向  $B$  弯曲（取  $< \frac{\pi}{2}$  方向），大拇指方向为  $C$  的方向  
我们称  $A$  叉乘  $B$  等于  $C$ ，记作  $A \times B = C$

下面不加证明地给出叉乘的有关性质和定理：

- *Anti-Commutative Law*  $A \times B = -B \times A$ ，即交换两向量顺序，它们的夹角方向会取反。

- *Distributive Law*  $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

- *Derivative*  $\frac{d}{dt}(A \times B) = \frac{dA}{dt} \times B + A \times \frac{dB}{dt}$

*It is important to preserve the multiplicative order of A and B*

鉴于反交换率，保证叉乘的顺序正确是十分重要的。

- *Lagrange's Identity*  $(A \times B) \cdot (C \times D) = \begin{vmatrix} A \cdot C & A \cdot D \\ B \cdot C & B \cdot D \end{vmatrix}$

- *Double Cross Product*  $_{III}$

$$(A \times B) \times C = (A \cdot C)B - (B \cdot C)A$$

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$$

这里也可以发现，叉乘不满足结合律。

有些同学初次看见那么多公式难免慌张。事实上，普通物理 I 对于叉乘的考察非常有限，基本只要清楚定义和基本的运算律即可。

### 3.2.3 Concepts in Kinematics

在定好一个柱坐标系后之后，确定刚体的角度矢量及其与时间的关系，就能确定刚体的转动。

*I - P47 引*

*I - P44 引*

*II - P46 引*

*III - P50 引*

- *Angular displacement*<sup>[4]</sup>  $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$
- *Instantaneous angular velocity*  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
- *Instantaneous angular acceleration*  $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

*When rotating about a fixed axis, every particle on a rigid object rotates through the same angle and has the same angular speed and the same angular acceleration.*

平动与转动有如下关系：

I - P44 51

- *arc length*  $s = r\theta$ ，此指圆周运动。
- $\mathbf{v}_t = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  &  $v_t = \omega r$ ，其中  $t$  下标指 *tangential*， $\mathbf{v}_t$  即同时垂直于  $z$  轴<sup>[5]</sup>和  $\mathbf{r}$  的速度分量。
- $\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$  &  $a_t = \alpha r$ ， $\mathbf{a}_t$  即同时垂直于  $z$  轴和  $\mathbf{r}$  的加速度分量。

这里叉乘的先后顺序可能并不那么好记，推荐读者自己画一个圆周运动的图，用右手定则对应验证一遍如上关系，以加深理解与记忆。

### 3.2.4 Concepts in Dynamics

在引入了叉乘 (见 [小节 3.2.2](#) ~ [P 7](#)) 这一数学工具后，我们得以较为轻松地描述转动的动力学概念。

以下默认已经选定转轴。

I - P11 51

- *The Moment of Inertia*  $I = \sum_i m_i r_i^2$ ，其中把刚体看成由多个质点组合而成， $r_i$  即是质点  $m_i$  的极径矢量大小。

*The moment of inertia is a measure of the resistance of an object to changes in its rotational motion, just as mass is a measure of the tendency of an object to resist changes in its linear motion.*

- *Torque*  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{/z}$ ，其中  $\mathbf{r}$  是力  $\mathbf{F}$  的作用点对应的极径矢量， $\mathbf{F}_{/z} = \mathbf{F} - \mathbf{F}_z$ ， $\mathbf{F}_z$  即  $\mathbf{F}$  在  $z$  轴上的分矢量<sup>[6]</sup>。
- *Net Torque*  $\boldsymbol{\tau}_{net} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i$
- 类似牛顿第二定律，有：在惯性系中， $\boldsymbol{\tau}_{net} = I\boldsymbol{\alpha}$ ，即合外力矩等于刚体的转动惯量乘以角加速度。

<sup>[4]</sup>  $\theta$  的单位 rad 属于数学单位，它是一个无量纲量。

<sup>[5]</sup> 注意这里垂直于  $z$  轴的条件，我们考虑的是绕轴旋转，所以任何轴向的速度分量也不在我们研究转动的考虑之中。

<sup>[6]</sup> 事实上，力矩拥有两种定义，一种是对点定义的，为  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ；另一种是对轴定义的，为  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{/z}$ 。鉴于我们使用了柱坐标系建立这些概念，这里选择对轴定义的力矩。

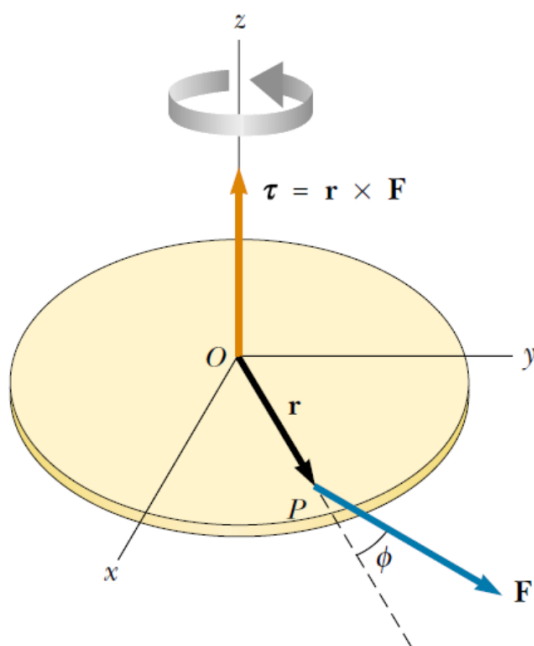


图 3.4: 力矩示意图

在本图中, 由于  $\mathbf{F}$  没有  $z$  轴上的分量, 所以  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{/z}$ 。

事实上, 普物 I 中基本没有出现  $\mathbf{F}$  有  $z$  轴分量的情况。

关于以上内容的证明, 见 [Prove 3.1<sub>r</sub> ~ P 44](#)。

其中, 为了便于计算力矩, 我们可以引入 [moment arm/force arm](#) 的概念, 其大小即为转轴到力的作用线的距离。有了这一点, 力矩的大小就可以通过力臂乘以力得到。

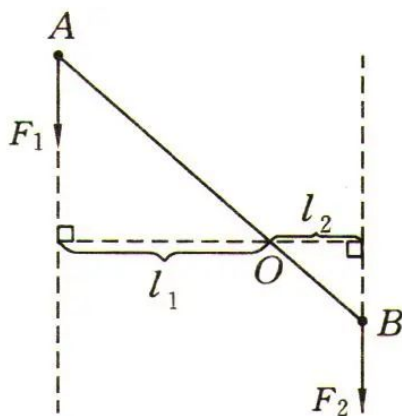


图 3.5: 力臂示意图

$l_1$  是  $\mathbf{F}_1$  的力臂,  $l_2$  是  $\mathbf{F}_2$  的力臂。

对于常见的物体, 其转动惯量是应当记住的:



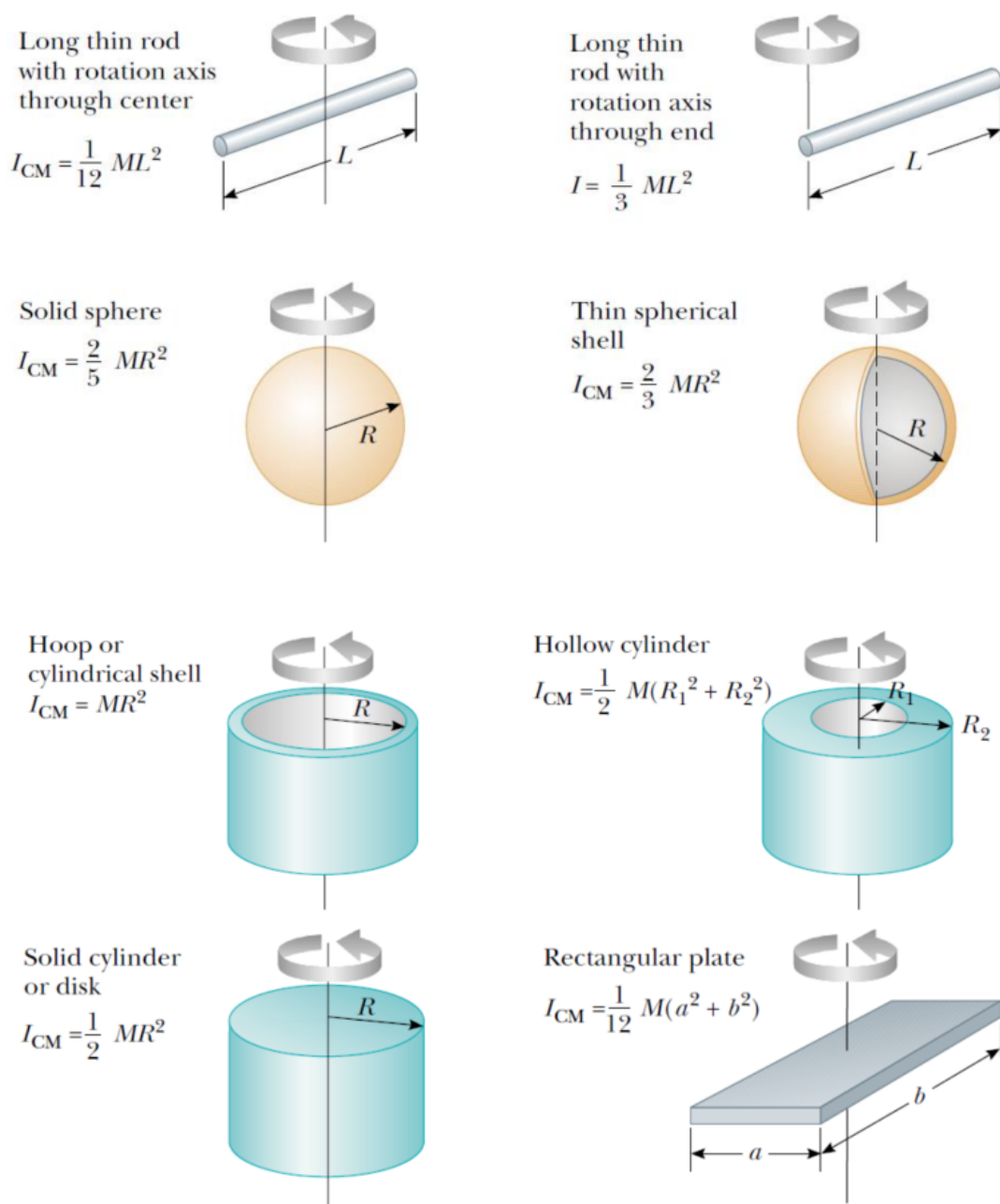


图 3.6: 常见物体的转动惯量。

I - P67 51

对于更一般的物体，则往往通过积分的方式求取它们的转动惯量。

### 3.3 Parallel Axis Theorem/Steiner Theorem

在之前对转动的动力学概念的讨论中，我们默认转轴是选定的（见小节 3.2.4<sub>1</sub>~P9），这是因为，当转轴不同时，转动惯量与合力矩都会发生变化。平行轴定理是解决转轴变化过程中转动惯量变化的利器，其表述如下：

**定理 3.1** *Parallel Axis Theorem/Steiner Theorem—Prove 3.2<sub>i</sub>~P45*

*I—P69 引*

记刚体  $M$  以过质心的轴 (简称质心轴) 为转动轴时的转动惯量为  $I_{CM}$ , 以任意平行于质心轴的轴为转动轴时的转动惯量为  $I$ , 这两条轴之间的距离为  $h$ , 则有

$$I = I_{CM} + Mh^2$$

幸于拥有平行轴公式, 我们在背诵常见刚体的转动惯量时, 一般只要记下其以质心轴为转动轴时的转动惯量即可。

### 3.4 *Energy in a Rigid Body*

好比从牛顿三律进发到能量定律, 我们将开始研究刚体中的能量。

#### 3.4.1 *Energy in Rotation ONLY*

首先, 让我们思考一个只发生转动的刚体所带的能量 (*Prove 3.3<sub>i</sub>~P45*)。

- 动能定理  $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$
- 做功  $dW = \tau d\theta$
- 功率  $P = \tau\omega$
- 旋转势能  $U = \frac{1}{2}\kappa\theta^2$

其中, 旋转势能是指由弹性旋转体扭转回原位的趋势产生的, 只依赖于其状态的能量, 在数值上等于将旋转体自原位扭转至当前位置所做的功。  $\kappa$  称为扭转常数, 单位为  $\text{N} \cdot \text{m}$ 。

当旋转体扭转了角度  $\theta$  时, 就会产生反力矩  $\tau = -\kappa\theta$ 。

#### 3.4.2 *Energy in Rotation & Translation*

现在, 让我们思考一个问题:

一个刚体在质心系中能够发生平动吗?

答案是否定的。如果刚体在质心系中发生平动, 那么质心就会拥有平动速度, 然而, 在质心系中, 质心又一直处于原点, 这与质心拥有平动速度相矛盾, 因此刚体在质心系中只能发生转动。

既然如此, 我们便会有这样的想法: 利用质心系, 把同时发生平动和转动的物体转化成只发生转动的物体来研究。如此, 便产生了柯尼希定理:

*I—P46 引*

**定理 3.2 Konig's Theorem—Prove 3.4, ~P 45**

记一个系统  $M$  的质心速度为  $v_{CM}$ ，在质心系中的动能为  $K^{CM}$ ，在静止参考系中的动能为  $K$ ，并记  $K_{CM} = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$ ，则有

$$K = K_{CM} + K^{CM}$$

如果考虑对一个刚体使用柯尼希定理，则有：

$$K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

在研究一个同时发生平动和转动的物体的动能时，我们往往使用柯尼希定理，分别求解其质心的平动动能和在质心系中的转动动能。

### 3.5 Angular Momentum

与平动时的动量类似，我们可以定义刚体的角动量。

#### 3.5.1 Definition

- **Angular Momentum**  $L = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_{i/z} = I\omega$ ，其中  $\mathbf{p}_{i/z} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{iz}$ ， $\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_{i/z}$  应视作质点  $m_i$  的角动量。角动量的方向总是与角速度的方向一致<sup>[7]</sup>。
- 类似动量，我们有  $\frac{dL}{dt} = \tau_{net}$ 。

以上内容证明见 **Prove 3.5, ~P 46**。

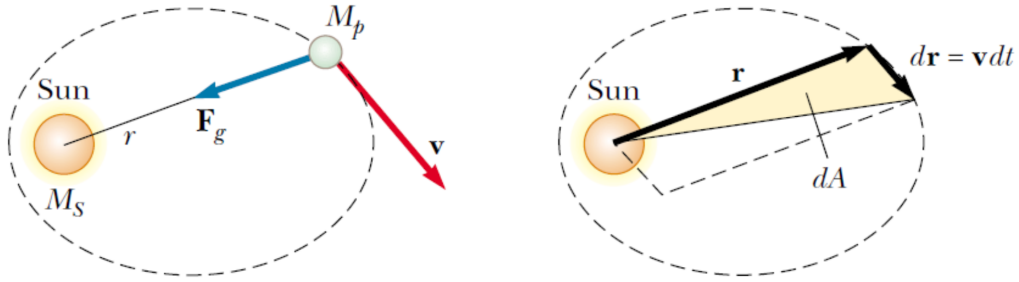
#### 3.5.2 Conservation of Angular Momentum

- **Conservation of Angular Momentum** 由角动量的性质，我们可以发现，当合外力矩的值为  $\mathbf{0}$  时，系统的角动量保持守恒。

$$\tau_{net} = 0 \Leftrightarrow L = Constant$$

利用角动量守恒，可以解释开普勒第二定律。

<sup>[7]</sup>对于这句话需持谨慎态度。在本文所定义的概念体系中，这句话是成立的，但由于大多数对角动量的定义都是对点定义，即  $\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ ，就出现了角动量方向与角速度方向不一致的说法。当出现这类判断时，请优先考虑不一致的说法。

图 3.7: *Kepler's Second Law*

对  $M_p$  分析, 有  $\tau_{net} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_g = \mathbf{0}$ , 因此角动量守恒

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = \frac{L}{M_p} \Rightarrow \text{单位时间扫过面积相等}$$

*When a force is directed toward or away from a fixed point and is function of  $\mathbf{r}$  only, it is called a Central Force*

总是可以选择合适的轴, 使得中心力产生的力矩为  $\mathbf{0}$ 。

花样滑冰时选手收紧胳膊旋转较快, 而张开双臂后旋转变慢, 这也是角动量守恒的功劳。你可能会发现, 收紧胳膊时, 人的动能变大了, 这是生物能的功劳。

### 3.5.3 Center of Frame Translation

角动量在静止参考系和质心系间的转化与柯尼希定理类似。

**定理 3.3** *Angular Momentum Translation Using C.M. Frame*<sup>[8]</sup>—*Prove 3.6, ~P47*

记质心角动量为  $\mathbf{L}_{CM} = M\mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{v}_{CM}$ , 刚体在质心系中的角动量为  $\mathbf{L}^{CM} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i^{CM} \times \mathbf{v}_i^{CM}$ , 刚体在静止参考系中的角动量为  $\mathbf{L}$ , 且保证两个参考系中选取的轴平行, 则有

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} + \mathbf{L}^{CM}$$

## 3.6 Center of Gravity

我们会注意到, 在分析重力产生的合力矩时, 依据定义, 应该对每一个质元求分力矩, 然后进行求和。这似乎是一件复杂的事情。有没有办法寻找一个点, 使得刚体的合重力在此作用时, 得到的力矩恰等于重力的合力矩呢? 事实上, 我们把这样的点称作重心。

一个重要的结论是:

对于均匀的重力场, 刚体的重心与质心重合 (*Prove 3.7, ~P48*)。

至于不均匀的情况, 就需要依据定义进行计算了。

<sup>[8]</sup>对于对点定义的角动量, 也有类似的结论, 证明方法也基本相同。

## 3.7 Non-Inertial Frame Situation

### 3.7.1 Inertial Force

由于转动动力学的所有定律都是基于牛顿运动定律，结合数学方法推出的，因此，对于一个拥有加速度  $\mathbf{a}_{frame}$  的平动非惯性参考系，我们需要在分析其中的物体时添上惯性力  $\mathbf{F}_{fictitious} = -m\mathbf{a}_{frame}$ ，其中  $m$  为物体的质量。此时，牛顿运动定律保持成立，转动动力学中的定律也保持成立。

I - P15 引

### 3.7.2 Coriolis Force \*

你可能注意到了，之前的表述中，我们讲的是“拥有加速度  $\mathbf{a}_{frame}$  的平动非惯性参考系” (小节 3.7.1<sub>I</sub> ~ P15)。这暗示着，如果参考系还发生着转动，情况又会有所不同。

对于一个仅发生转动的参考系，有如下定理：

**定理 3.4 Frame Translation with Rotation \***—Prove 3.8<sub>I</sub> ~ P48

如果希望牛顿运动定律在一个转动参考系  $\mathcal{F}'$  中依然成立，我们需要对  $\mathcal{F}'$  中的物体添加三个假想力，分别是  $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ ,  $-m\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}'$ ,  $m\omega^2\mathbf{r}'$ 。

其中， $\boldsymbol{\omega}$  是  $\mathcal{F}'$  的角速度， $\boldsymbol{\alpha}$  是  $\mathcal{F}'$  的角加速度， $\mathbf{v}$  是物体在  $\mathcal{F}'$  中的速度， $\mathbf{r}'$  是物体在  $\mathcal{F}'$  中的极径矢量。

如果我们将条件简化，认为  $\mathcal{F}'$  没有角加速度，则无需考虑  $-m\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}'$ 。

我们称  $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$  为 *Coriolis Force*， $m\omega^2\mathbf{r}'$  为 *Centrifugal Force*。

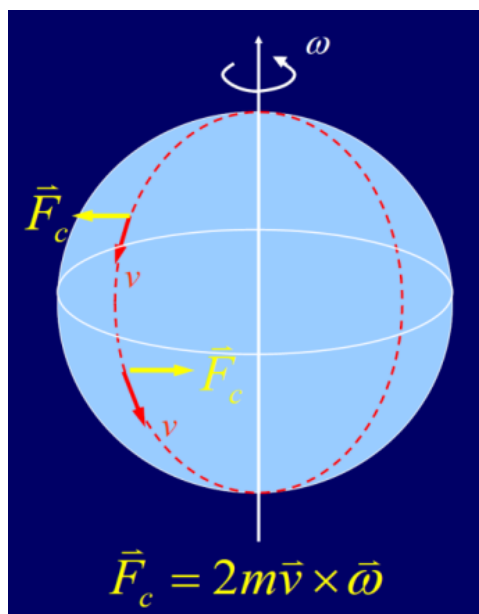


图 3.8: 地球的科里奥利力

如果考虑地球的科里奥利力，我们会发现，在北半球上，科里奥利力永远指向物体运动方向的右侧，而在南半球正好相反。

台风的旋转方向在北半球是逆时针，在南半球是顺时针，这也是科里奥利力的影响。科里奥利力是一种假想力<sup>[9]</sup>。

### 3.8 Review and Summary

在我们的推导中，我们发现，转动动力学的结论与平动力学有着惊人的相似性。关注这份相似性既能体会物理的美感，又能加深对结论的记忆。

Angular speed  $\omega = d\theta/dt$

Angular acceleration  $\alpha = d\omega/dt$

Resultant torque  $\sum \tau = I\alpha$

If

$$\alpha = \text{constant} \begin{cases} \omega_f = \omega_i + \alpha t \\ \theta_f - \theta_i = \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \end{cases}$$

$$\text{Work } W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta$$

$$\text{Rotational kinetic energy } K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$\text{Power } P = \tau \cdot \omega$$

$$\text{Angular momentum } L = I\omega$$

$$\text{Resultant torque } \sum \tau = dL/dt$$

Linear speed  $v = dx/dt$

Linear acceleration  $a = dv/dt$

Resultant force  $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$

If

$$\mathbf{a} = \text{constant} \begin{cases} \mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}t \\ \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_i = \mathbf{v}_i t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \\ v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \end{cases}$$

$$\text{Work } W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

$$\text{Kinetic energy } K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{Power } P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

$$\text{Linear momentum } \mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

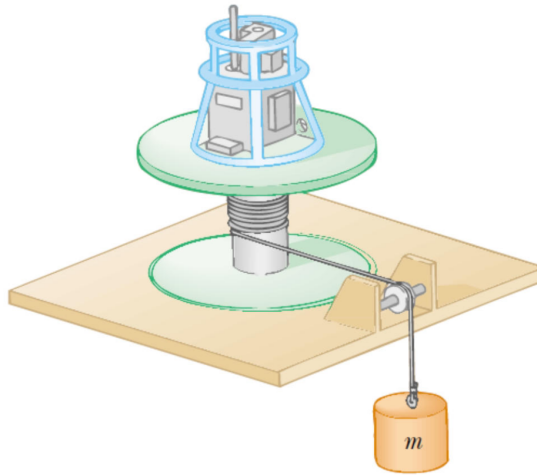
$$\text{Resultant force } \sum \mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$$

<sup>[9]</sup>我们有时会看见类似“科里奥利力是由于地球自转而施加给地球上的物体的力”的说法，这么讲可能是因为我们往往以地球为参考系分析问题，此时要想保证牛顿第二定律成立，就要认为物体受到科里奥利力。不过，一般而言，科里奥利力较小，在日常生活的分析中大多可忽略不计。

## 3.9 课后习题：转动动力学

## 习题 3.1 Determine the Moment of Inertia of an Irregularly Shaped Object—Solution 3.1, ~ P 65

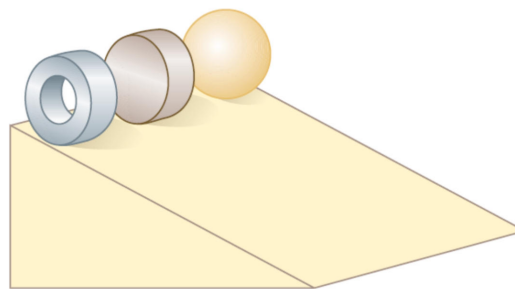
This problem describes one experimental method of determining the moment of inertia of an irregularly shaped object such as the *payload* for a satellite.



The figure shows a mass  $m$  *suspended* by a *cord wound* around a spool of radius  $r$ , forming part of a *turntable* supporting the object. When the mass is released from rest, it *descends* through a distance  $h$ , acquiring a speed  $v$ . Show that the moment of inertia  $I$  of the equipment (including the turntable) is  $mr^2\left(\frac{2gh}{v^2} - 1\right)$ .

## 习题 3.2 Rolling Items—Solution 3.2, ~ P 66

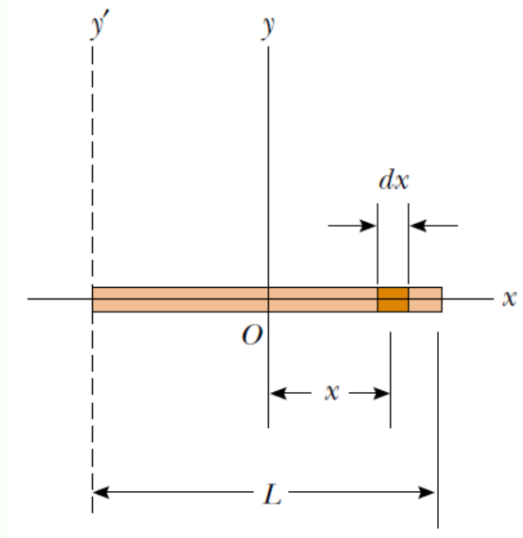
Three objects of *uniform density* — a *solid sphere*, a *solid cylinder*, and a *hollow cylinder* — are placed at the top of an *incline*.



If they all are released from rest at the same *elevation* and roll without *slipping*, which object reaches the bottom first?

## 习题 3.3 Calculation of the Moment of Inertia—Solution 3.3, ~P 68

A rod's *linear density* is given by  $\lambda = kx$ , where  $x$  represents the distance from the point to the rod's center.

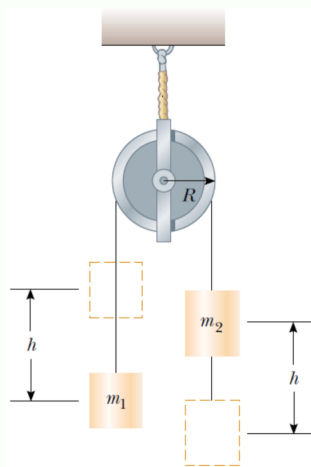


Given the length of the rod  $l$ , try to calculate the moment of inertia of the rod, given the rotation axis at:

- (1) Center  $O$  as the  $y$  axis shows.
- (2) One end as the  $y'$  axis shows.

## 习题 3.4 Massive Pulley—Solution 3.4, ~P 69

Consider two *cylinders* having masses  $m_1$  and  $m_2$ , where  $m_1 < m_2$ , connected by a string passing over a pulley. The pulley has a radius  $R$  and moment of inertia  $I$  about its axis of rotation.



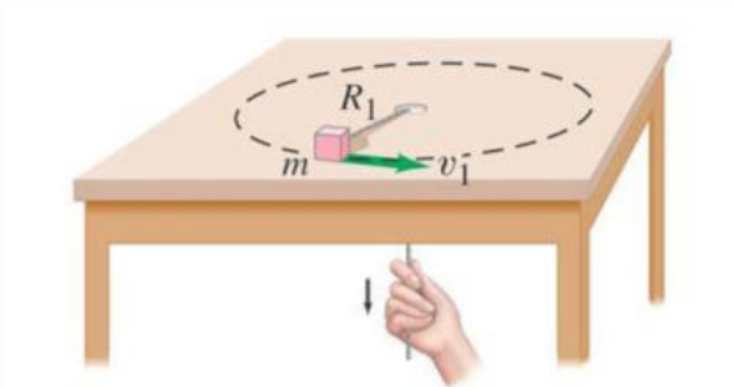
The string does not *slip* on the pulley, and the system is released from rest.



Find the linear speeds of the cylinders after cylinder 2 *descends* through a distance  $h$ , and the angular speed  $\omega$  of the pulley at this time.

习题 3.5 *Object rotating on a string of changing length*—Solution 3.5, ~ P 70

Initially, the mass *revolves* with a speed  $v_1 = 2.4$  m/s in a circle of radius  $R_1 = 0.80$  m. The string is then pulled slowly through the hole so that the radius is reduced to  $R_2 = 0.48$  m. What is the speed,  $v_2$ , of the mass now?



习题 3.6 *Rotation of a sliding rigid rod*—Solution 3.6, ~ P 71

Consider a rod with mass  $m$  and length  $L$  standing straight on the friction-less ground. When we release the rod, it will fall from the unstable *equilibrium position*.

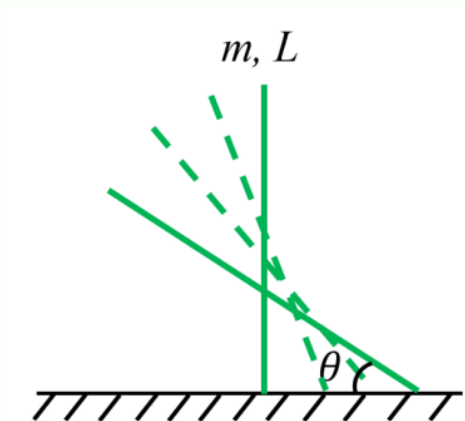


Figure 1

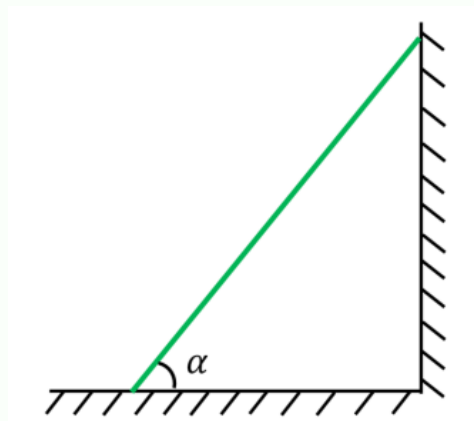


Figure 2

- Calculate the angular velocity of the rod, when it has an angle of  $\theta$  with respect to the ground as illustrated in Figure 1.
- What is the final angular velocity  $\omega_1$  of the rod before it hits the ground?
- If the same rod is leaning to a frictionless wall with an initial angle of  $\alpha$  to the frictionless ground (see Figure 2), what is the final angular velocity  $\omega_2$  of the rod before it hits the ground?

*Note that there is a possibility that the right end of the rod leaves from the wall before the rod hits the ground.*

本章节存在一定的特殊性：在 2022 年及之前，流体力学是普物 I 的内容，而在 2023 级，这一块内容被路欣老师为代表的教学组删去了。

当看到流体力学的时候，你想到的是什么？或许是初中的水的压强，又或者是湍流等复杂情景。其实都无所谓，毕竟它们都是流体的研究。当今世界对于流体力学的探究也是一个重要的力学方向，小到潜水，大到飞机飞船，都需要关注流体对于物体的影响。但是，我们这门课程的流体力学相当简单和浅层，按照笔者当时授课较为简单的 pzz 老师的内容，我用一句话定义这一块内容：两个公式走天下！这是由于我们使用了大量的理想情景，抛开复杂情景所致。

## 4.1 Definition & Properties of Fluids

生活中的物体可分为固体、液体和气体三大类，其中，我们一般将液体和气体统称为流体。它们一般受到的力是不一样的：

- *solid*: *compression force* (指物体能够从两侧被挤压), *tensile force* (指物体能够受力被拉伸), *shearing force* (指物体能够受到不在同一直线上的两个相反方向的力而保持形状不变)
- *liquid*: *compression force*, *tensile force*, no *shearing force*
- *gas*: *compression force*, no *tensile force*, no *shearing force*

在静止的液体中，我们已经了解到物体一定会受到水的压力，进而定义压强。

### 定理 4.1 静止流体中的压强

利用微元法分析，我们可以知道物体受到的静止流体的压强为：

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g, \text{ 积分可得 } p = p_0 + \rho gh$$

其中  $p_0$  是液体表面的压力， $h$  为深度， $y$  为该点相对于参考平面的高度。

对于静止流体，我们也有两个重要的而且很直观的性质：

**定理 4.2** *Pascal's Principle*

施加在封闭流体上的力被不减弱地传递到流体的每一部分和容器的壁上。假设流体中受力面积为  $S$  的某点处原有压强为  $p_0$ ，在其上方平面施加垂直向下的力  $F$ ，则该点处当前的压力为：

$$F' = p_0 S + F$$

这是很容易理解的，我们以按压海绵为例，力的作用会逐渐传导到物体的每个位置。当然，帕斯卡原理强调了在流体中这个力是不会减弱的，而海绵是固体，力是会减弱的。

**定理 4.3** *Archimedes's Principle*

一个部分或者完全浸入液体中的物体受到的浮力等同于它所排出的液体的重力。

最简单的例子，就是我们初中学过的物体受到水的浮力的公式：

$$F = \rho g V$$

我们可以很容易地知道这个公式的本质就是阿基米德原理。

在液体中存在表面张力，表面张力是一种由于液体分子间的相互吸引与拉扯而产生的力的作用，其大小与物体间的接触长度有关。定义表面张力系数为：

$$\gamma = \frac{F}{l}$$

其中  $F$  为该处受到的表面张力大小， $l$  表示接触面的长度。这里的表面张力定义与普通化学（H）中的定义相同。当表面张力产生时，由于物体具有一定厚度，一般情况下会产生两个液体膜的拉力作用，因此计算时通常需要将长度以两倍长度，即  $2l$  计算。

由于物体与液体间的表面张力系数不同，会产生浸润与非浸润的区别。这个概念与普化课程一致，且一般不作考察，因此我们暂不讨论。

## 4.2 *Fluid Dynamics*

或许你一直有疑问：我感觉我也没学啥呀，怎么就动力学了？确实，我们到目前的流体力学都是初中水平。而接下来，就是流体力学两个方程走天下的经典例子。

我们定义流体的通量为： $Q = \frac{\delta m}{\delta t} = \rho A v$ ，表示单位时间内流过截面积为  $A$  的流体的质量，其中  $\rho$  表示流体密度， $A$  表示流体通过的截面面积， $v$  表示通过这个截面时的流体流速。首先考虑一个水管，里面充满了水，水管不可压缩变形，水也不可压缩变形。那么很明显，水管的一端进入多少水，另一端就会有多少水流出。

**定理 4.4** 管流原理 (连续性原理)

流体流入某个管的通量等于流出该管的通量，即： $\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$

在这个方程中, 我们看到了同一个流体的管流特点。当然, 这个方程忽略了压强和位置的变化。因此, 我们针对理想流体, 即不可被压缩、遵循管流原理、没有湍流现象或其他扰动的流体, 提出了伯努利方程:

**定理 4.5 Bernoulli's Equation**

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho gy = \text{constant}$$

只需要在使用中注意的一点是, 这里的  $y$  表示的是位置相对于参考平面的高度, 而非相对于液面的深度。在满足上述条件的情况下, 只要是同一个连通的流体, 在其内部每一点处, 上述等式左边的结果均相等。

当然, 看到这里, 我们已经了解了两个重要的方程。结合中学的压强的定义, 我们已经可以用两个方程大步走入流体力学的世界了。最后, 这些已经足够我们普物的内容了, 更为复杂的情况, 交给流体力学的专家们解决吧

### 4.3 课后习题: 流体力学

**习题 4.1 流体静力学—Solution 4.1~P 74**

A fluid is rotating at constant angular velocity  $\omega$  about the central vertical axis of a cylindrical container. As shown in Figure 4-1:

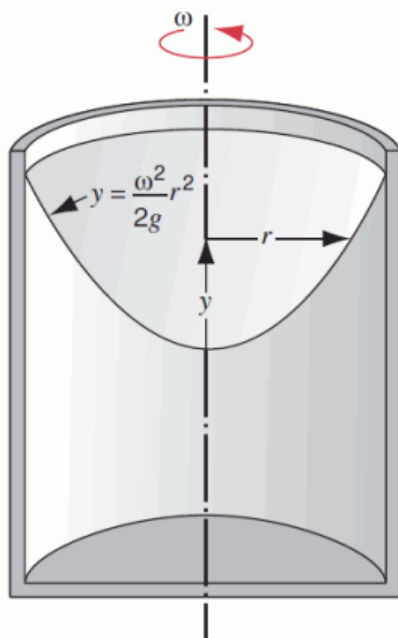


图 4.1: 流体静力学

(a) Show that the **variation** of pressure in the **radial direction** is given by  $\frac{dp}{dr} = \rho\omega^2 r$ .

(b) Take  $p = p_c$  at the axis of rotation ( $r = 0$ ) and show that the pressure  $p$  at any point  $r$  is

$$p = p_c + \frac{1}{2}\rho\omega^2r^2$$

(c) Show that the liquid surface is of *paraboloidal* form (Figure 4-1); that is, a vertical cross section of the surface is the curve  $y = \frac{\omega^2r^2}{2g}$

习题 4.2 流体动力学—Solution 4.2, ~ P 76

As shown in Figure 4-2, it is an *air suction device*. Given that the depth of the centerline of the *catheter* below the liquid level in container  $A$  is  $h$ , the height difference between the liquid level in container  $B$  and the centerline of the horizontal catheter is  $h_b$ , the *cross-sectional area* at the *nozzle*  $d$  is  $S_d$ , and the cross-sectional area at the *contraction section*  $c$  is  $S_c$ . What are the conditions for the *ratio* of  $S_d$  to  $S_c$  to occur for *suction*?

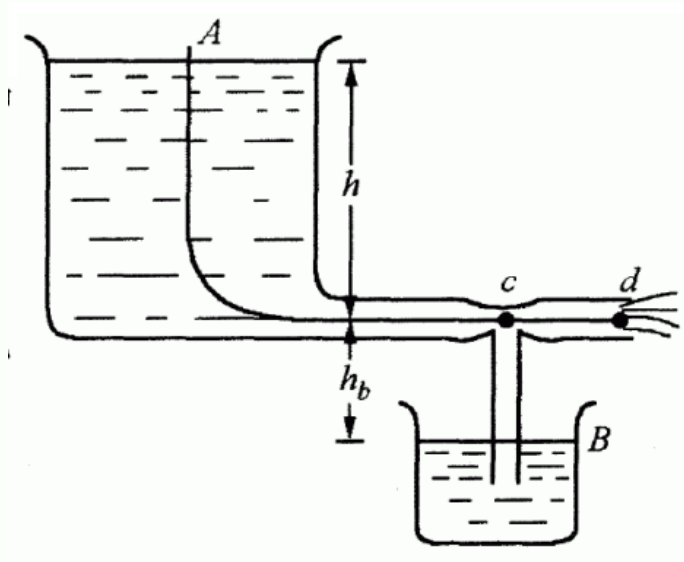


图 4.2: 流体动力学

进入狭义相对论，我们就开始从熟悉的三维世界来到了陌生的四维世界。作为三维世界的生物大家都一样，谁都没有进化出适用于四维空间的大脑。也许我们并不能建立对于四维世界的直观认知——

我们能做的，仅仅是通过一些抽象的数学工具来尝试刻画这个神秘而又复杂的四维空间。

## 5.1 Time and Space in Special relativity

在开始我们的讨论前，有必要先强调一下如下概念：

**同一事件** 我们要注意的，在狭义相对论中，只有**同时同地**发生的事件才叫做同一事件，同一事件是无论在哪个参考系中都要承认的<sup>[1]</sup>。

**观察与“看”** 在狭义相对论中的题目中，我们遇到的大部分情形是观察。比如说，“在地面系看来火车系上的追击过程花了多久时间”，这种“看”应该理解为观察，也就是通过实验、测量等方式，以一种上帝视角<sup>(1)</sup>得出的结果<sup>(2)</sup>；我们也许还会遇到一种“看”，这种看应该理解为一个单独的观察者所观察到的情况，如“高速运动的物体的视觉效应”。我们之后的练习也会涉及到这一点。

(1) 可以有无数个在同一个系里的观察者

(2) 也就是用洛伦兹变换

(图 5.1<sub>1</sub> ~ P 26) 得到的结果

### 5.1.1 Basic assumptions

- *Principle of the Constancy of Lightspeed* 光速与光源和接收器的运动无关。
- *The Principle of Relativity* 对于任何两个匀速运动的观察者来说，基本物理定律完全相同。（相对性假设）

<sup>[1]</sup>e.g. 若  $S$  系中的李同学在自己的钟读数为 5:00 时，与  $S'$  系中的王同学在同一位置相遇，并看见王同学的钟读数为 4:00，那么，王同学也必须承认，当自己的钟读数为 4:00 时，他与李同学相遇且看到李同学的钟读数为 5:00。

## 5.1.2 Lorentz Transformation

洛伦兹变换是狭义相对论的核心。在理解种种狭义相对论现象之前，我们不妨先引入洛伦兹变换。

## 定理 5.1 Lorentz Transformation

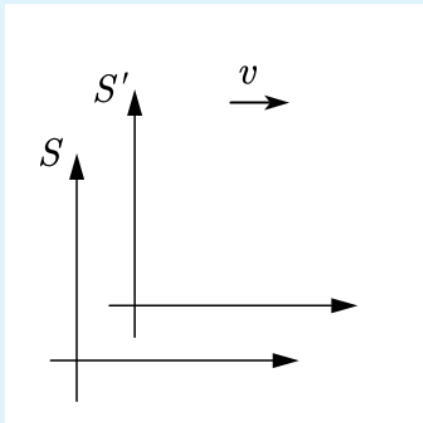


图 5.1: 洛伦兹变换

I-P25 引

设  $S'$  系相对  $S$  系有  $x$  方向的速度  $v$ ，并分别用  $t, t'$  表示  $S$  系， $S'$  系中的时间，用  $x, y, z$  与  $x', y', z'$  表示  $S$  系， $S'$  系中的坐标，则有

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \beta x/c) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

其中  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ ， $\beta = \frac{v}{c}$ 。

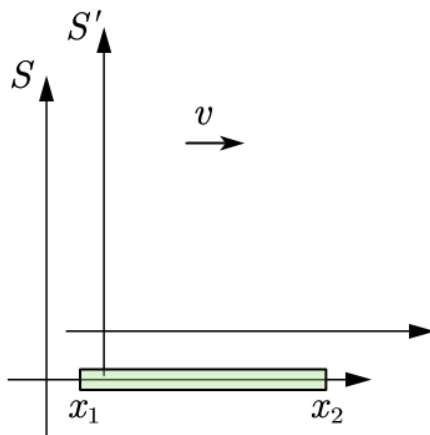
注意到这里我们仅仅介绍了正逆变换中的一个。实际上，由基本假设 2（相对性假设）可知，无论在哪个参考系下，洛伦兹变换都应该具有相同的形式。所以，我们自然而然的引入一种符号法则，即给  $v$  带上正负号，并约定：

在等号左边的系看来，等号右边的系沿着等号左边的系的正方向运动时， $v$  取正号；负方向运动时， $v$  取负号。

比如说，在定理说明时， $S$  系沿着  $S'$  系的负方向运动，所以  $v$  前与  $\beta$  前取负号。



## 5.1.3 Lorentz Contradiction



考虑一根在参考系  $S$  静止的杆，它顺着  $x$  轴放置。因为杆在  $S$  系中静止，其端点的位置坐标  $x_1$  和  $x_2$  与时间无关。因此，

$$L_0 = x_2 - x_1$$

被称为杆的原长或静止长度。

下记  $S'$  系中测量杆长的结果为  $L$ ，由洛伦兹变换有

$$x_1 = \gamma (x'_1 + vt'_1),$$

$$x_2 = \gamma (x'_2 + vt'_2),$$

于是有

$$x_2 - x_1 = L_0 = \gamma (x'_2 - x'_1) + \gamma v (t'_2 - t'_1)$$

由于我们是在  $S'$  系下做的测量，故令  $t'_2 = t'_1$ ，从而得到

$$L_0 = \gamma L$$

由上述讨论，我们不难发现，之所以尺子会变短，是因为我们的测量出了问题：

我们的测量仅仅保证了在  $S$  系下是同时的。

然而，在  $S'$  系看来，这两种操作并不是同时的。

事实上，在  $S'$  看来， $S$  系进行的测量是先测的头后测的尾，其仅仅测量了尺子的一部分，故必然会得到尺缩的结论。

## 5.1.4 Time dilation

在时钟静止的参考系中，时间间隔的测量结果记为

$$\tau = t_2 - t_1$$

它称为原时或本征时间。然后用洛伦兹变换得到

$$t'_2 = \gamma \left( t_2 - \frac{\beta x_2}{c} \right),$$

$$t'_1 = \gamma \left( t_1 - \frac{\beta x_1}{c} \right),$$

注意到我们是在  $S'$  系下测量  $S$  系下同一处的钟的时间，故有  $x_2 - x_1 = 0$ ，所以可得

$$t'_2 - t'_1 = \gamma \tau$$

实际上，我们之所以会得到如此结果，是因为光速不变这条基本假设。由于在  $S$  中静止的钟在  $S'$  下却是运动的，这两个事件在  $S$  看来不是同地发生的。由于光速不变，这两个信息以光速传播到  $S$  中的观察者时，必然会产生一个时间差，故看起来就像时间膨胀了一样。

### 5.1.5 Speed Transformation

#### 定理 5.2 Speed Transformation

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x},$$

$$u_y = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u'_y}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x},$$

$$u_z = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u'_z}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}$$

同样的我们约定一种符号法则， $v$  正负号的选取和洛伦兹变换一样，即等号左边的参考系看来右边的参考系相对左边参考系向正方向运动就取正号反之取负号；其他的速度如  $u_x, u_y, u_z$  其在相应的参考系下朝正半轴运动就取正号反之取负号，所得到的  $u'_x, u'_y, u'_z$  也满足上述符号法则。

## 6.1 Introduction

假设一个有  $N$  个粒子的体系且经典力学分析依然成立，那么对第  $i$  个粒子，其受到其余  $N - 1$  个粒子的作用，其动力学方程应有如下形式：

$$\sum_{i \neq j}^N \mathbf{F}_{ij} = \mu_j \mathbf{a}_j$$

其中共有  $N$  个变量，故对整个系统将会列出共计  $N^2$  个变量的方程，当  $N$  足够大时求解这样的方程显然是极其繁琐且不现实的，于是就引出了 *Statistical Physics* 与 *Thermodynamics* 这两个研究超多粒子体系的分支。

*Statistical Physics* 从微观角度出发，利用统计学方法对宏观物体的热运动性质及其规律做出解释。本章将会介绍其中的分子动理论。

*Thermodynamics* 从宏观角度研究物质的热运动性质及其规律，并给出少数关键宏观量的联系。本章将重点介绍这些关键宏观量以及确立它们之间联系的热力学定律。

## 6.2 Ideal Gas

*Ideal Gas* 是一种理想模型，它满足以下条件：

- 包含大量的分子，且分子自身占据的体积对分子间距而言可以忽略。
- 每个分子均可视为质点，服从牛顿运动定律；但作为一个整体，它们随机运动且速度分布与时间无关。
- 分子间以及分子与容器壁的碰撞都是弹性碰撞，且除分子的相互碰撞外忽略分子之间的作用力。
- 所有气体分子是相同的。

理想气体适合 *Ideal Gas Law*  $pV = nRT = Nk_B T$ , 其中涉及的物理量与常数:

- *Amount of Substance* 用于衡量分子数量, 用  $n$  表示, 国际单位为摩尔 (mol)。
- *Avogadro Constant*, 记为  $N_A$ , 约为  $6.022 \times 10^{23} \text{mol}^{-1}$ 。表示  $1 \text{mol}$  物质中含有的粒子数, 即若用  $N$  代表分子个数, 其关系为  $N = nN_A$ 。
- *Temperature* 表示气体热运动的剧烈程度, 用  $T$  表示, 国际单位为开尔文 (K)。其与摄氏温度的转化为:  $T = t + 273.15$ ,  $t$  为摄氏温度。
- *Boltzmann Constant*, 记为  $k_B$ , 约为  $1.381 \times 10^{-23} \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ 。反应微观状态数与熵的关系。
- *Gas Constant*, 记为  $R$ , 约为  $8.314 \text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  且  $R = N_A k_B$ 。

## 6.3 Kinetic Theory of Molecules

### 6.3.1 the Microscopic View of Pressure

从微观角度来说, 压强的本质是气体分子对容器壁不断撞击的统计平均结果。根据理想气体的假设, 并认为速度向各个方向的概率均等, 可以得到压强与分子数密度以及速率的关系如下:

$$p = \rho \mu \overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \rho \mu \overline{v^2}$$

其中  $\rho = \frac{N}{V}$  表示单位体积的分子数密度,  $\mu$  表示单个分子的质量,  $\overline{v^2}$  为速度平方的平均值 (注意与速度平均值的平方  $\overline{v}^2$  区分)。

利用这一结论, 如果我们定义分子平均动能  $\overline{\epsilon_k} = \frac{1}{2} \mu \overline{v^2}$ , 结合理想气体方程, 经过简单推导, 我们即可得到其表达式为:

$$\overline{\epsilon_k} = \frac{3}{2} k_B T$$

它表明分子平均动能只与温度有关。

### 6.3.2 Equipartition Theorem

首先介绍 *Degrees of Freedom* 的概念, 它表示在坐标系中确定分子运动状态所需要的独立坐标数。总体来看, 对于每个在三维坐标系中的原子, 不考虑其内部的电子与原子核, 我们需要 3 个独立坐标来确定其位置, 如笛卡尔坐标系中的  $x$ 、 $y$ 、 $z$ , 球坐标系中的  $r$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ 。故对于一个由  $k$  个原子组成的分子, 其自由度总量为  $3k$ 。而自由度又分为三个部分:

- *Translational Degree of Freedom* 表示确定分子质心在坐标系中的位置所需要的独立坐标数，对所有分子均为 3，并且单原子分子只有平动自由度。
- *Rotational Degrees of Freedom* 表示确定分子在坐标系中的空间取向所需要的独立坐标数。对于线性分子（如  $\text{CO}_2$ ），由于其绕通过分子的轴的旋转不改变分子构型，故旋转自由度为 2，其余分子为 3。
- *Vibrational Degrees of Freedom* 表示确定分子内原子之间的相对运动状态所需要的独立坐标数。通常利用总自由度-平动自由度-转动自由度的方式计算，对线性分子为  $3k - 5$ ，对非线性分子为  $3k - 6$ 。

有了自由度的概念，根据大量的实验事实总结有如下关系成立：

$$U = \frac{i}{2} N k_B T$$

其中  $U$  为 *Internal Energy*，表示气体的所有分子动能、分子势能、分子内部能量等之和，但由于理想气体不计分子间作用与分子内部结构，故其理想气体内能等于理想气体的总动能； $i$  为平动自由度与转动自由度之和<sup>[1]</sup>；而  $\frac{1}{2} k_B T$  正是上一部分中我们计算得到的分子动能平分到某个方向上的结果，这一结论也由此解释为内能平均分配到每一个自由度上，得名 *Equipartition Theorem*。

### 6.3.3 Maxwell Distribution

速率分布函数是这样一个函数，它的自变量为速度，因变量为速度落在  $[v, v + dv]$  区间内的粒子占总粒子数的比值，定义式如下：

$$f(v) = \frac{dN}{N dv}$$

这样速度落在  $[v_1, v_2]$  区间内的粒子占总粒子数的比值即为：

$$\int_{v_1}^{v_2} f(v) dv$$

根据定义，速率分布函数是归一化的，即其在  $[0, +\infty)$  上的积分为 1。

*Maxwell Distribution* 给出了理想气体的速率分布规律，它给出的速率分布函数如下：

$$f(v) dv = \left( \frac{\mu}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}} 4\pi v^2 dv$$

可以将麦克斯韦分布分为三个部分，第一部分为  $e$  指数前的部分，事实上是归一化系数；第二部分为  $e$  指数部分，揭示了速度分布与动能以及温度的关系；第三部分  $4\pi v^2 dv$  则为在速度空间中的球壳体积元。

<sup>[1]</sup> 不计振动自由度、电子自由度与原子核自由度，这是因为这些自由度对应的能级能隙的数量级与  $k_B T$  相当（振动能隙）或远大于它（电子能隙与原子核能隙），均分定理所需的假设“能级组成平滑连续能谱”不再成立，其贡献变为 0。事实上当温度降低到一定值时，这一定理也会因为同样的原因失效。

利用速率分布函数，我们可以计算如下的特征速度：

- *Most Probable Speed* 表示粒子数最多的区间微元对应的速度，定义式为：

$$v_p \quad \text{where} \quad \frac{dN(v_p)}{dv} = 0$$

对麦克斯韦分布，其值等于  $\sqrt{\frac{2k_B T}{\mu}}$  或  $\sqrt{\frac{2RT}{M}}$ ， $M$  为摩尔质量。

- *Average Speed* 表示所有粒子速率的平均值，用于计算分子自由程等，定义式为：

$$\bar{v} = \int_0^{+\infty} v f(v) dv$$

对麦克斯韦分布，其值等于  $\sqrt{\frac{8k_B T}{\pi\mu}}$  或  $\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ 。

- *Root Mean Speed* 表示所有粒子速度平方的平均值的平方根，用于计算分子动能等，定义式为：

$$v_{rms} = \sqrt{\int_0^{+\infty} v^2 f(v) dv}$$

对麦克斯韦分布，其值等于  $\sqrt{\frac{3k_B T}{\mu}}$  或  $\sqrt{\frac{3RT}{M}}$ 。

### 6.3.4 Boltzmann Distribution

我们再重新观察一下麦克斯韦分布的  $e$  指数位置，发现可以提出  $\frac{1}{2}\mu v^2$ ，这正是分子动能，这启示我们粒子的分布的核心可能是它的能量。那么在一般的势场中，随着粒子所在位置的不同，自然其能量不同，所以对应的分布应该与空间坐标有关。

事实也确实如此，在同时考虑速度与位置的情况下，我们有如下的关系：

$$dN = \rho_0 \left( \frac{\mu}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\epsilon_p}{k_B T}} dx dy dz dv_x dv_y dv_z$$

其中  $\rho_0$  为势能零点处的分子数密度。仔细观察可见，若将内能拆成势能与动能的和，再分别与对应的变量组合，就有：

$$dN = \rho_0 e^{-\frac{\epsilon_p}{k_B T}} dx dy dz \times \left( \frac{\mu}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\epsilon_k}{k_B T}} dv_x dv_y dv_z$$

由于  $dv_x dv_y dv_z = 4\pi v^2 dv$  事实上是速度在三维微分的不同表达形式，此时后一项即是麦克斯韦分布，积分为 1，故对两边进行关于速度的积分，就有：

$$dN = \rho_0 e^{-\frac{\epsilon_p}{k_B T}} dx dy dz = \rho_0 e^{-\frac{\epsilon_p}{k_B T}} dV$$

接下来只要注意到  $\rho = \frac{dN}{dV}$ ，就自然得到了一个简洁而重要的结论：

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\epsilon_p}{k_B T}}$$

这一分布称为 *Boltzmann Distribution*，我们将处于势能零点的粒子称为基态粒子，那么这个式子反映了能量高于  $\epsilon_p$  的粒子相对基态粒子的数量。

利用它，我们可以轻松推出流体力学中压强随高度（假设温度不变）的分布，只需注意到压强与分子数成正比，势能在此处为重力势能即可，有：

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g h}{k_B T}} = p_0 e^{-\frac{m g h}{RT}}$$

### 6.3.5 Mean Free Path

*Mean Free Path*是指分子在相邻两次碰撞之间走过的平均路程，它等于分子在一段时间内通过的路程与平均碰撞次数的比值。如将分子视为直径为  $d$  的球体且分子做平均速度为  $v$  的折线运动，可以得到平均碰撞次数  $\bar{Z}$  为：

$$\bar{Z} = \sqrt{2} \pi \rho d^2 v$$

那么对应的平均自由程  $l$  为：

$$l = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \rho d^2} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$$

### 6.3.6 Van Der Waals Equation of State

对真实气体，范德华提出了一个基于理想气体的修正模型：

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$$

其中  $V_m$  表示气体的摩尔体积，压强的附加项考虑分子间的引力，体积的附加项考虑的分子自身占据的体积。

## 6.4 Zeroth Law of Thermodynamics

### 6.4.1 Introduction

从这节从此开始均为热力学部分，在开始之前，想阐述（吐槽）一下热力学学习中可能遇到的一些问题，复习/补天选手可以跳过。

关于各个课程热力学量符号各成一体的问题，以功为例。在高中课程与普通物理中均用  $W$  表示物体对外界做功，但高中时规定对内做功为正，普通物理规定对外做功为正；大学物理（甲）则用  $A$  表示外界对物体做功，且外界对物体做正功时为正；而物理化学则用  $w$  表示物体对外界做功并强调它不是一个状态量，规定对内做功为正。所以说在学习这一块的时候，请各位务必注意符号问题，很有可能课程或参考书的符号及其定义与本笔记有较大出入。

关于热力学函数的  $dQ$  这类对于过程函数的微分，最好从物理上理解为一个微小可逆过程的放热，因为如果把  $Q$  作为一个数学概念上的多元函数，那么它并不能全微分，自然不存在  $dQ$  这一说法。而对于状态函数的微分如  $dU$ ，其可以视为数学上的全微分。

然后是贯穿本章的一个问题，这部分选取的统计力学与热力学由于是比较原始的部分，学完总会给人一种这章全是记忆性知识，到处给理论打补丁的感觉，不像力学与电磁学那

样能自成体系，所以在证明的第二部分特意给出了这些定律到底是如何从底层给出的，供感兴趣者阅读。

### 6.4.2 Basic Concepts

- *System* 是选定作为研究对象的那部分物质及其所占有的空间，系统是有 *Boundary* 的，系统与环境的物质与能量交换均发生在边界上。
- *Surroundings* 是除了系统之外的部分，可以与系统交换物质与能量。
- *Open System* 与环境既有物质交换，又有能量交换。
- *Closed System* 与环境只有能量交换，没有物质交换。
- *Isolated System* 与环境既无物质交换，又无能量交换。
- *Thermodynamic equilibrium* 是系统内的各性质与组分保持稳定的一种状态，它要求系统达到与环境的力平衡（合外力为 0，刚性器壁除外），热平衡（无能量交换）以及系统的相平衡（各相变过程达到平衡）与化学平衡（各化学反应达到平衡）。之后讨论的状态均为热力学平衡态。
- *State Function* 是函数值只与状态有关的函数，其在两个态之间的变化量与路径无关。在数学上即其因变量在定义域内可表示为自变量的全微分。
- *Process Function* 与状态函数相对，在两个态之间的函数变化量与路径有关。

### 6.4.3 Temperature

*Temperature* 是一个相对的概念，它的建立基于 *Zeroth Law of Thermodynamics*

#### 定理 6.1 Zeroth Law of Thermodynamics

若两个热力学系统均与第三个系统处于热平衡状态，此两个系统也必互相处于热平衡。

它揭示了热平衡的可传递性，这样只需选定两个温度作为基准，就可以建立一个温度体系。

热力学温度是以 *Absolute Zero* 为温度零点的，且温度线斜率与摄氏温度一致。



## 6.5 First Law of Thermodynamics

### 6.5.1 Heat and Work

- *Heat* 是由系统和周围环境之间的温差导致而在系统边界上传递的能量，用  $Q$  表示。热是过程函数。热的传递导致温度的传递，它们的关系如下：

$$\frac{dQ}{dt} = \kappa_t A \frac{dT}{dx} \quad (6.1)$$

这是 *Fourier's Law*，其中  $\kappa_t$  表示介质的热传导率，与介质种类有关； $A$  为截面面积； $\frac{dT}{dx}$  代表了温度梯度，即两端的温差大小。

- *Heat Capacity at Constant Volume* 是在体积一定的情况下上升单位温度所需要吸收的热量：

$$C_V \stackrel{def}{=} \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

对理想气体，设  $i$  为平动自由度与转动自由度之和：

$$C_V = \frac{i}{2} R$$

- *Heat Capacity at Constant Pressure* 是在压强一定的情况下上升单位温度所需要吸收的热量：

$$C_p \stackrel{def}{=} \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p$$

对理想气体，设  $i$  为平动自由度与转动自由度之和：

$$C_p = \frac{i+2}{2} R = C_V + R$$

- *Work* 与力学时的定义一致，同样用  $W$  表示：

$$W \stackrel{def}{=} \int F dx = \int p S dx = \int p dV$$

并规定系统对外做功取正。功也是过程函数。

功与热是改变系统内能的两条也是唯二的途径，这就是 *First Law of Thermodynamics*

#### 定理 6.2 First Law of Thermodynamics

系统内能的增加量等于系统吸收的热和环境对系统所做的功的总和：

$$\Delta U = Q - W$$

热力学第一定律也可以写成微分形式：

$$dU = dQ - p dV$$

6.5.2 Process Introduction <sup>(1)</sup>

(1) 为方便查阅把熵的计算也写在此处

- *Isochoric Process* 是指系统体积不变的过程，此时一般容器为刚性容器。

$$\frac{p}{T} = \text{constant}$$

$$Q = \Delta U = nC_V \Delta T = \frac{i}{2} V \Delta p$$

$$W = 0$$

$$\Delta U = nC_V \Delta T = \frac{i}{2} V \Delta p$$

$$\Delta S = nC_V \ln \frac{p_2}{p_1} = nC_V \ln \frac{T_2}{T_1}$$

- *Isobaric Process* 是指系统压强不变的过程。

$$\frac{V}{T} = \text{constant}$$

$$Q = nC_p \Delta T = \frac{i+2}{2} p \Delta V$$

$$W = p \Delta V$$

$$\Delta U = Q - W = nC_V \Delta T = \frac{i}{2} p \Delta V$$

$$\Delta S = nC_p \ln \frac{V_2}{V_1} = nC_p \ln \frac{T_2}{T_1}$$

- *Isothermal Process* 是指系统温度不变的过程。

$$pV = \text{constant}$$

$$Q = W = nRT \ln \frac{P_1}{P_2} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$W = nRT \ln \frac{P_1}{P_2} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\Delta U = 0$$

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_2}{V_1} = nR \ln \frac{P_1}{P_2}$$

- *Adiabatic Process* 是指系统不与环境交换能量的过程。

$$pV^\gamma = \text{constant} \quad \gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}$$

$$Q = 0$$

$$W = \frac{p_1 V_1^\gamma}{1-\gamma} \left( \frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}} \right)$$

$$\Delta U = -W = \frac{p_1 V_1^\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}} \right)$$

$$\Delta S = 0$$

## 6.6 Second Law of Thermodynamics

### 6.6.1 Heat Engine

首先介绍一些基本概念

- *Cycle* 是终态与始态相同的过程，其在  $p - V$  上的路径为一闭合曲线。
- *Reversible Process* 是指存在逆过程使得系统与环境都恢复原状态的过程。可逆过程经过一系列无限接近平衡态的状态，且不存在热传导、气体的自由膨胀、扩散等过程。如果对一个过程，使系统恢复原状态一定会导致环境改变（能量耗散），则称为 *Irreversible Process*
- *Heat Engine* 是指各种利用内能做功的机械。
- *Efficiency of Heat Engine* 是一个循环内热机对外做功与其吸收的热量的比值，即：

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \frac{W}{Q_{in}} = \frac{Q_{in} - Q_{out}}{Q_{in}}$$

$Q_{in}$  表示吸热， $Q_{out}$  表示放热，注意这里取的都是绝对值。

- *Perpetual Motion Machine* 是不需要物质与能量输入而可以永久向环境做功的热机，是无法实现的。第一类永动机试图寻找无能量消耗的热机，违反了能量守恒定律；第二类永动机则试图从单一热源取热并把它全部变为功，违反了热力学第二定律。

然后我们来看两个经典的循环。

*Otto Cycle* 由两个等容过程与两个绝热过程组成，如图所示：

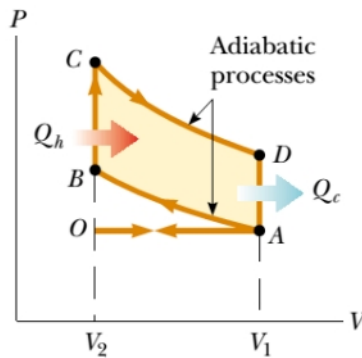


图 6.1: Otto Cycle

$AB$  与  $CD$  为绝热过程， $BC$  与  $DA$  为等容过程，循环沿  $ABCD A$  方向进行

使用奥托循环的热机效率为：

$$e = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$$

*Carnot Cycle* 由两个等温过程与两个绝热过程组成，如图所示：

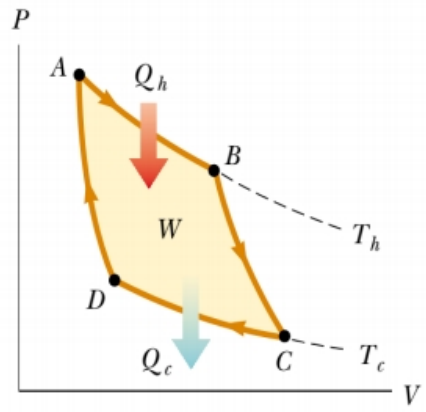


图 6.2: Carnot Cycle

$AB$  与  $CD$  为等温过程,  $BC$  与  $DA$  为绝热过程, 循环沿  $ABCD A$  方向进行时为正方向

使用正卡诺循环的热机称为 *Carnot Heat Engine*, 其热机效率为:

$$e = 1 - \frac{T_c}{T_h}$$

其中  $T_c$  为低温热源的温度,  $T_h$  为高温热源的温度。

卡诺热机是所有热机中效率最高的, 提高热机效率的手段为提高高温热源温度或降低低温热源温度。

如果倒转卡诺循环, 则得到卡诺冷机, 此时其制冷系数为:

$$e' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q_c}{W} = \frac{T_c}{T_h - T_c}$$

同样的, 其效率也是所有冷机中最高的。

### 6.6.2 Entropy

*Entropy* 的变化量被定义为可逆过程中热与温度的比值, 即:

$$\Delta S \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q_r}{T}$$

或写作微分形式, 即取近平衡态间转变的过程视为可逆过程:

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

熵是一个状态函数, 熵的物理意义可以从下面这个公式中体现:

$$S = k_B \ln \Omega$$

其中  $\Omega$  表示所有可能的微观状态数量, 也就是说, 熵是系统可能的微观状态数量的度量, 或者其他教材提到的“混乱度”。这个公式是连接微观与宏观间最重要的桥梁, 也是统计力学的核心。

考虑一个 *Free Expansion* 过程，也就是说等温条件下气体向真空中膨胀。由于真空，气体自然无法做功， $W = 0$ ；由于等温， $\Delta U = 0$ ；那么由热力学第一定律，自然有  $Q = 0$ 。但是计算它的熵变，这个值为  $\Delta S = nR \ln \frac{V_2}{V_1} > 0$ 。众所周知，这个过程是不可逆的，也就是说那个  $\Delta S < 0$  的逆过程是无法发生的，这正是 *Second Law of Thermodynamics* 表明的。

#### 定理 6.3 *Second Law of Thermodynamics*

孤立系统的熵不可能减少：

$$\Delta S_{iso} \geq 0$$

在可逆过程中取等号，熵保持不变；不可逆过程中熵一定增加。

这是热力学第二定律的本质，即熵增原理。此外热力学第二定律还有两种表述，所有表述之间相互等价。

#### 定理 6.4 *Second Law of Thermodynamics*——*Clausius Statement*

热不可能自发的从低温物体传到高温物体。

或表述为：热不可能从低温物体传到高温物体，而不引起任何变化。

#### 定理 6.5 *Second Law of Thermodynamics*——*Kelvin Statement*

不可能从单一热源取热，把它全部变为功而不产生其他任何影响。

或表述为：第二类永动机不能实现。

熵给出了热的本质  $dQ = TdS$ ，于是就有了下面的热力学基本公式：

$$dU = TdS - pdV$$

它联合了热力学的两大定律，是热力学最基本的关系之一。

## 6.7 *Third Law of Thermodynamics*

我们再看一下卡诺循环的热机效率  $e = 1 - \frac{T_c}{T_h}$ ，注意到当低温热源  $T_c = 0K$  时，热机效率可以达到 100%。此时由于仍然是卡诺循环，我们并没有违反热力学第二定律，那么这是否意味着这是可行的呢？

*Third Law of Thermodynamics* 表明了这是无法实现的，因为我们无法找出一个 *Absolute Zero* 的物体。

#### 定理 6.6 *Third Law of Thermodynamics*

绝对零度无法达到。

或表述为：绝对零度下完美晶体的熵为 0。

热力学第三定律意味着我们可以确定熵的零点，即将完美晶体在绝对零度下的熵定义为 0，这样我们就可以确定熵的绝对值了。

## 6.8 Information

本部分仅作简单介绍。

根据我们的经验，信息量与事件发生概率成负相关，必然发生的事件比如斑鸠的生日不在 2 月 30 日，就相当于什么都没说；信息量  $Q$  之间服从加法原则，事件概率  $P$  则服从乘法原则，故两者应为负对数关系：

$$Q = -\log P$$

至于对数的底其实是任意的，彼此相差一个系数而已，通常选择的是 2。

至此我们引出 *Information Entropy* \ *Shannon Entropy* 的概念，它是事件发生前可能产生的信息量的数学期望，即：

$$S = E(Q) = \sum Q_i P_i = - \sum P_i \log P_i$$

信息熵是信息的度量。

然后再来了解一下 *Cross Entropy*，对于某事件，假设其有两种概率分布为  $p(x)$  与  $q(x)$ ，则其交叉熵为：

$$H(p, q) = - \sum p(x_i) \log(q(x_i))$$

两个分布的差距为其中一个事件的概率分布与信息熵之差乘积的数学期望，即：

$$D_{KL}(p||q) = - \sum p(x_i) \log\left(\frac{q(x_i)}{p(x_i)}\right) = H(p, p) - H(p, q)$$

仅当  $p$  与  $q$  分布完全一致时差距为 0，也就是说交叉熵刻画了两个分布的差距。在人工智能的逻辑回归中，其训练用的损失函数正是交叉熵损失函数。

# 证明部分

G.P.A

1

*Measurement*

*BLANK*

期待你的建设





2

证明 3.1, Concepts in Dynamics  $\tau_{net} = I\alpha$ 

I - P10 51

要搞清楚的一点是，我们依旧基于牛顿力学来思考有关转动的问题。

我们先承认一事实：刚体的内部存在着非常复杂的相互作用力，这些作用力合理地分配，最终使得整个刚体可以做转动。于是，任意取一个质元  $dm$  分析，都有

$$d\mathbf{F}_t = dm\mathbf{a}_t$$

依据平动和转动的联系 (见小节 3.2.3, ~P9)，我们有

$$\mathbf{a}_t dm = (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) dm$$

于是在等式两侧同左叉乘以  $\mathbf{r}$ ，即有

$$\mathbf{r} \times d\mathbf{F}_t = (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) dm$$

由双重叉乘的运算律 (见小节 3.2.2, ~P8)，知

$$\mathbf{r} \times \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\alpha} - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} = r^2\boldsymbol{\alpha}$$

注意到

$$\mathbf{r} \times d\mathbf{F}_t = \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_{/z}$$

即得

$$\mathbf{r} \times d\mathbf{F}_{/z} = r^2\boldsymbol{\alpha} dm \Leftrightarrow d\boldsymbol{\tau} = r^2\boldsymbol{\alpha} dm$$

等式两侧取积分，即有

$$\boldsymbol{\tau}_{net} = I\boldsymbol{\alpha}$$

证明 3.2, *Parallel Axis Theorem*  $I = I_{CM} + Mh^2$ 

I-P12 引

不妨设  $\mathbf{h}$  的方向为从质心轴到任意轴，并取任意一质点  $m_i$ ，其在选择质心轴时，位矢为  $\mathbf{r}_{CMi}$ ，选择任意轴时，位矢为  $\mathbf{r}_i$ ，则有

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{CMi} - \mathbf{h}$$

于是有

$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i (\mathbf{r}_{CMi} - \mathbf{h})^2 \\ &= \sum_i m_i (r_{CMi}^2 + h^2 - 2\mathbf{r}_{CMi} \cdot \mathbf{h}) \\ &= \sum_i m_i r_{CMi}^2 + \sum_i m_i h^2 - 2\mathbf{h} \cdot \sum_i m_i \mathbf{r}_{CMi} \\ &= I_{CM} + Mh^2 + 0 \quad (\text{由质心的性质知最后一项为 } 0) \\ &= I_{CM} + Mh^2 \end{aligned}$$

证明 3.3, *Energy in Rotation ONLY*

I-P12 引

在只发生转动的物体中，有

$$v = v_t = \omega r$$

于是有

$$\begin{aligned} K_R &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 & U &= \int_0^\theta \kappa \alpha d\alpha \\ &= \sum_i \left( \frac{1}{2} m_i r_i^2 \right) \omega^2 & &= \frac{1}{2} \kappa \alpha^2 \Big|_0^\theta \\ &= I \omega^2 & &= \frac{1}{2} \kappa \theta^2 \\ P &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} & dW &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \\ &= F_t v & &= F_t dx \\ &= F_t r \omega & &= F_t r d\theta \\ &= \tau \omega & &= \tau d\theta \end{aligned}$$

证明 3.4, *König's Theorem*  $K = K_{CM} + K^{CM}$ 

I-P13 引

我们取质点  $m_i$ ，记它在静止参考系中的速度为  $\mathbf{v}_i$ ，在质心系中的速度为  $\mathbf{v}_i^{CM}$ ，并

记刚体的质心速度为  $\mathbf{v}_{CM}$ ，则有

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^{CM} + \mathbf{v}_{CM}$$

于是有

$$\begin{aligned} K &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_i^{CM} + \mathbf{v}_{CM})^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^{CM2} + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \left( \sum_i m_i \mathbf{v}_i^{CM} \right) \cdot \mathbf{v}_{CM} \\ &= K^{CM} + K_{CM} \quad (\text{由质心定义知前式最后一项为 } 0) \end{aligned}$$

由刚体在质心系中只存在转动 (见 [小节 3.4.2<sub>I</sub> ~ P 12](#))，有

$$K^{CM} = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

于是

$$K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

**证明 3.5<sub>I</sub> Angular Momentum**

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_{i/z} = I \boldsymbol{\omega} \quad \& \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}$$

[I - P 13 §1](#)

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_{i/z} \\ &= \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\mathbf{v}_{ir} + \mathbf{v}_{it}) \\ &= \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_{ir} + \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_{it}) \\ &= \sum_i m_i (\mathbf{0} + \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)) \quad \text{有关双重叉乘见 [小节 3.2.2<sub>II</sub> ~ P 8](#)} \\ &= \sum_i m_i ((\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i) \\ &= \sum_i m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega} \\ &= I \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_{i/z})}{dt} \\
&= \sum_i \frac{d(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_{i/z})}{dt} \\
&= \sum_i \left( \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{p}_{i/z} + \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_{i/z}}{dt} \right) \text{ 有关微分见 小节 3.2.2, } \sim P8 \\
&= \sum_i (\mathbf{v}_{i/z} \times \mathbf{p}_{i/z} + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i/z}) \\
&= \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i/z} \\
&= \boldsymbol{\tau}_{net}
\end{aligned}$$

证明 3.6,  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} + \mathbf{L}^{CM}$

I - P14 51

我们取质点  $m_i$ , 记它在静止参考系中的速度为  $\mathbf{v}_i$ , 极径矢量为  $\mathbf{r}_i$  在质心系中的速度为  $\mathbf{v}_i^{CM}$ , 极径矢量为  $\mathbf{r}_i^{CM}$ , 并记刚体在静止参考系中的质心速度为  $\mathbf{v}_{CM}$ , 极径矢量为  $\mathbf{r}_{CM}$  则有

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^{CM} + \mathbf{v}_{CM}$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^{CM} + \mathbf{r}_{CM}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \\
&= \sum_i m_i (\mathbf{r}_i^{CM} + \mathbf{r}_{CM}) (\mathbf{v}_i^{CM} + \mathbf{v}_{CM}) \\
&= \sum_i m_i \mathbf{r}_i^{CM} \times \mathbf{v}_i^{CM} + \sum_i m_i \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{v}_{CM} \\
&\quad + \left( \sum_i m_i \mathbf{r}_i^{CM} \right) \times \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{r}_{CM} \times \left( \sum_i m_i \mathbf{v}_i^{CM} \right) \\
&= \mathbf{L}^{CM} + \mathbf{L}_{CM} + \mathbf{0} \times \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{0} \quad (\text{利用质心性质}) \\
&= \mathbf{L}^{CM} + \mathbf{L}_{CM}
\end{aligned}$$

**证明 3.7<sub>41</sub> Center of Gravity:** 对于均匀的重力场, 刚体的重心与质心重合

I-P14 引

II-P66 引

记重力的合力矩为  $\tau_g$ , 等效于质心的重力力矩为  $\tau_{g_{CM}}$ , 有

$$\begin{aligned}
 \tau_g &= \sum_i \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{g}_{/z}) \\
 &= \left( \sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) \times \mathbf{g}_{/z} \\
 &= M \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{g}_{/z} \quad (\text{由质心定义知}) \\
 &= \mathbf{r}_{CM} \times (M \mathbf{g}_{/z}) \\
 &= \tau_{g_{CM}}
 \end{aligned}$$

即刚体重心与质心重合。

在这里的证明中, 我们发现, 只要一个力仅与质量成正比, 方向不变, 那么分析力矩时, 就可以把这些力等效作用在质点上。

**证明 3.8<sub>4</sub> Frame Translation with Rotation \***

I-P15 引

这一次, 我们采用坐标分解的观点思考问题。

首先, 考虑一个惯性系, 并建立一个常规的空间直角坐标系  $\mathcal{F}$ , 它的基为  $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ , 即为  $x, y, z$  轴方向的单位向量 (单位向量没有量纲, 长度为 1)。那么, 任取一个质点, 它的位矢  $\mathbf{P}$  可以表示为

$$\mathbf{P} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

我们另建立一个拥有  $x', y', z'$  轴的, 以角速度  $\boldsymbol{\omega}$  旋转的坐标系  $\mathcal{F}'$ , 其中  $z'$  轴作为旋转轴与  $z$  轴平行。设该坐标系原点位矢  $\mathbf{O}'$  在原参考系中的表达式为  $\mathbf{O} = x_0\hat{\mathbf{i}} + y_0\hat{\mathbf{j}} + z_0\hat{\mathbf{k}}$ , 那么在  $\mathcal{F}'$  中, 设

$$\mathbf{P} - \mathbf{O}' = \mathbf{P}' = x'\hat{\mathbf{i}}' + y'\hat{\mathbf{j}}' + z'\hat{\mathbf{k}}'$$

如此, 我们说,  $\mathbf{P}$  在  $\mathcal{F}$  中的坐标为  $(x, y, z)$ , 在  $\mathcal{F}'$  中的坐标为  $(x', y', z')$ 。

接下来, 我们考虑在不同坐标系中的速度。

$\mathcal{F}$  中的速度定义为

$$\mathbf{v} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}}$$

其中

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}$$

于是

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d(x\hat{\mathbf{i}})}{dt} + \frac{d(y\hat{\mathbf{j}})}{dt} + \frac{d(z\hat{\mathbf{k}})}{dt} \quad (3.1)$$

$$= \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}} \quad (3.2)$$

$$= v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}} \quad (3.3)$$

$$= \mathbf{v} \quad (3.4)$$

其中由 (3.2) 到 (3.3) 的理由是该参考系的基  $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$  始终不变。

同理,  $\mathcal{F}'$  中的速度定义为

$$\mathbf{v}' = v'_x\hat{\mathbf{i}}' + v'_y\hat{\mathbf{j}}' + v'_z\hat{\mathbf{k}}'$$

其中

$$v'_x = \frac{dx'}{dt}, v'_y = \frac{dy'}{dt}, v'_z = \frac{dz'}{dt}$$

由  $\mathbf{P}' = \mathbf{P} - \mathbf{O}'$ , 且  $\mathbf{O}'$  不变, 知  $\frac{d\mathbf{P}'}{dt} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{v}$ 。于是有

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{P}'}{dt} \quad (3.5)$$

$$= \frac{d(x'\hat{\mathbf{i}}')}{dt} + \frac{d(y'\hat{\mathbf{j}}')}{dt} + \frac{d(z'\hat{\mathbf{k}}')}{dt} \quad (3.6)$$

$$= \frac{dx'}{dt}\hat{\mathbf{i}}' + \frac{d\hat{\mathbf{i}}'}{dt}x' + \frac{dy'}{dt}\hat{\mathbf{j}}' + \frac{d\hat{\mathbf{j}}'}{dt}y' + \frac{dz'}{dt}\hat{\mathbf{k}}' + \frac{d\hat{\mathbf{k}}'}{dt}z' \quad (3.7)$$

注意到

$$\frac{d\hat{\mathbf{i}}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{i}}', \frac{d\hat{\mathbf{j}}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{j}}'$$

续 (3.7) 有

$$\mathbf{v} = v'_x\hat{\mathbf{i}}' + v'_y\hat{\mathbf{j}}' + v'_z\hat{\mathbf{k}}' + \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{i}}'x' + \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{j}}'y' \quad (3.8)$$

$$= \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (\text{这里记 } \mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{i}}' + y'\hat{\mathbf{j}}') \quad (3.9)$$

关于加速度, 我们有类似的定义

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}} \\ a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}' = a'_x\hat{\mathbf{i}}' + a'_y\hat{\mathbf{j}}' + a'_z\hat{\mathbf{k}}' \\ a'_x = \frac{dv'_x}{dt}, a'_y = \frac{dv'_y}{dt}, a'_z = \frac{dv'_z}{dt} \end{array} \right.$$

对 (3.9) 左右两侧同时对时间微分，有

$$\text{LHS} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (3.10)$$

$$= \frac{dv_x}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt} \hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z}{dt} \hat{\mathbf{k}} \quad (3.11)$$

$$= \mathbf{a} \quad (3.12)$$

$$\text{RHS} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')}{dt} \quad (3.13)$$

$$= \frac{d(v'_x \hat{\mathbf{i}}')}{dt} + \frac{d(v'_y \hat{\mathbf{j}}')}{dt} + \frac{d(v'_z \hat{\mathbf{k}}')}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \quad (3.14)$$

$$= \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times (v'_x \hat{\mathbf{i}}' + v'_y \hat{\mathbf{j}}') + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \quad (3.15)$$

记  $v'_x \hat{\mathbf{i}}' + v'_y \hat{\mathbf{j}}' = \mathbf{v}'_{/z}$ ，则续 (3.15) 有

$$\text{RHS} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'_{/z} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}'_{/z} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (3.16)$$

$$= \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'_{/z} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' - \omega^2 \mathbf{r}' \quad (3.17)$$

这里注意到  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'_{/z} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ ，因为  $\mathbf{v}'_{/z}$  与  $\boldsymbol{\omega}$  平行。

于是将左式与右式联立，得

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' + \omega^2 \mathbf{r}'$$

其中 (3.16)  $\Rightarrow$  (3.17) 有关双重叉乘见 [小节 3.2.2<sub>III</sub> ~ P8](#)

两侧同时乘以  $m$ ，即得牛顿第二定律形式

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' + m\omega^2 \mathbf{r}'$$

这意味着，如果希望牛顿运动定律在  $\mathcal{F}'$  中依然成立，我们需要对  $\mathcal{F}'$  中的物体添加三个假想力，分别是  $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ ， $-m\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}'$ ， $m\omega^2 \mathbf{r}'$ 。

如果我们将条件简化，认为  $\mathcal{F}'$  没有角加速度，则有

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + m\omega^2 \mathbf{r}'$$

当  $\mathcal{F}'$  还拥有平动速度，平动加速度时，只需依照矢量叠加原理分析，再添上惯性力，牛顿第二定律就能继续保持成立。



*BLANK*

期待你的建设

本章将分为两部分，第一部分是一些简单理论与结果的推导，按照笔记顺序给出；第二部分则涉及统计力学与热力学的一些本质问题，希望从熵这一核心量开始建立统计力学与热力学的图景。由于逻辑问题，这里证明的排列顺序无法与笔记中保持一致，将按照定理需要的先后来排布，供拓展阅读。

## 5.1 Part 1

### 证明 5.1 the Microscopic View of Pressure

首先假设一些必要的物理量，设容器中的气体粒子质量为  $\mu$ ，分子数密度为  $\rho$ 。然后我们分析一下某个撞击器壁的气体分子，如果分子垂直于器壁方向设为  $x$  正方向，其在  $x$  正方向的速度为  $v_x$ ，则其具有  $\mu v_x$  的动量。由于理想气体的假设，其与器壁的碰撞为弹性碰撞，那么施加的冲量为  $2\mu v_x$ 。

然后考虑在  $\Delta t$  时间内撞击器壁的分子数，取器壁上一块面积为  $S$  的区域，以这块区域为底，高为  $v_x \Delta t$  的区域的粒子中向器壁运动的部分将会撞击器壁，由于粒子运动随机，撞向器壁与远离器壁的粒子数可视为相同，即粒子数为：

$$n = \frac{1}{2} \rho S v_x \Delta t$$

从而有撞向器壁的总冲量大小为：

$$I = n \mu v_x = \rho \mu S v_x^2 \Delta t$$

那么根据压强的定义就有：

$$p = \frac{\bar{F}}{S} = \frac{\bar{I}}{\Delta t S} = \rho \mu \overline{v_x^2}$$

再次使用粒子运动随机的条件，其速度向规定的  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向的几率相等，从而：

$$p = \frac{1}{3} \rho \mu \overline{v^2} \quad (5.1)$$

这样就得到了压强的表达式。

注意  $\rho = \frac{N}{V}$ , 将理想气体方程写成  $p = \rho k_B T$  后, 代入上式有:

$$\overline{\epsilon_k} = \frac{1}{2} \mu \overline{v^2} = \frac{3pV}{2N} = \frac{3}{2} k_B T \quad (5.2)$$

从而有分子平均动能仅和温度有关。

### 证明 5.2 Mean Free Path

首先我们假设除了作为研究对象的分子外, 其余分子均是静止的理想情况。设所有分子半径均为  $d$ , 平均速度为  $\bar{v}$ , 分子数密度为  $\rho$  那么当两个分子间的球心距离小于  $d$  时, 它们将发生碰撞, 故碰撞截面将是一个半径为  $d$  的圆, 扫过的区域可以视为若干个圆柱体。那么在  $\Delta t$  时间内, 分子扫过体积内的分子数 (即碰撞次数) 为:

$$Z = \rho S L = \rho \pi d^2 \bar{v} \Delta t$$

但分子其实是运动的, 所以我们需要用相对平均速度  $\bar{u} = \sqrt{2}\bar{v}$  (具体证明有兴趣可以看) 代替这里的平均速度, 这样我们就得到了碰撞频率的表达式:

$$Z = \sqrt{2} \pi d^2 \rho \bar{v} \Delta t \quad (5.3)$$

于是平均自由程等于通过的路程与碰撞频率的比值:

$$l = \frac{s}{Z} = \frac{\bar{v} \Delta t}{\sqrt{2} \pi d^2 \rho \bar{v} \Delta t} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 \rho} \quad (5.4)$$

证毕。

### 证明 5.3 Heat Capacity of Ideal Gas

对 1mol 理想气体, 其内能等于:

$$U = \frac{i}{2} RT$$

等容条件下, 系统不做功, 故根据热力学第一定律  $Q = \Delta U$ , 代入等容热容定义中:

$$C_V \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V = \frac{\Delta U}{\Delta T} = \frac{i}{2} R \quad (5.5)$$

等压条件下, 系统做功为:

$$W = \Delta(pV) = \Delta(RT) = R\Delta T$$

结合热力学第一定律, 代入等压热容定义中:

$$C_p \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p = \frac{\Delta U + W}{\Delta T} = \frac{i+2}{2} R \quad (5.6)$$

**证明 5.4 Isochoric Process and Isobaric Process**

对等容过程, 其他物理量的求法是显然的, 熵则将  $Q$  微分得到  $dQ = nC_V dT$ , 代入定义中:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{nC_V dT}{T} = nC_V \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (5.7)$$

等压过程的熵类似等容过程, 略。

**证明 5.5 Isothermal Process**

对等温过程, 由于无温度变化, 故  $\Delta U = 0$ , 由于  $PV = nRT = \text{constant}$ , 有:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (5.8)$$

由热力学第一定律,  $Q = W$ , 代入熵的定义中:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dW}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nR}{V} dV = nR \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (5.9)$$

**证明 5.6 Adiabatic Process**

对绝热过程, 有  $Q = 0$ , 故  $\Delta S = 0$ , 故由热力学第一定律有  $\Delta U = -W$ , 我们将两边都用微分形式表示出来:

$$\frac{i}{2} nR dT = -p dV$$

然后我们对理想气体定律  $pV = nRT$  两边微分, 注意  $p, V, T$  均为变量:

$$p dV + V dp = nR dT$$

注意到上面两个式子  $dT$  的部分类似, 于是尝试消去  $dT$ :

$$\frac{i}{2} (p dV + V dp) = -p dV$$

整理一下并把两个变量分别放到两边:

$$\frac{i+2}{i} \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p}$$

对两边积分:

$$\frac{i+2}{i} \ln V = -\ln p + C$$

设  $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{2+i}{i}$ , 那么就有:

$$pV^\gamma = \text{constant} \quad (5.10)$$

然后来求做功, 把上面的结论直接代入计算即可:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1^\gamma}{V^\gamma} dV = \frac{p_1 V_1^\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}} \right) \quad (5.11)$$

## 证明 5.7 Efficiency of a Otto Cycle

奥托循环如下：

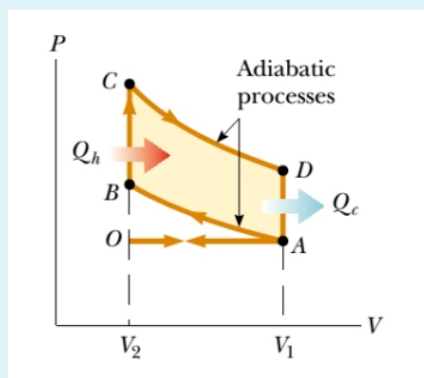


图 5.1: Otto Cycle

AB 与 CD 为绝热过程， $Q = 0$ ，我们只需考虑 BC 过程的吸热与 DA 过程的放热。这是两个等压过程，它们的热为：

$$Q_{in} = Q_{BC} = nC_V \Delta T_{BC} = nC_V (T_C - T_B)$$

$$Q_{out} = -Q_{DA} = -nC_V \Delta T_{DA} = nC_V (T_D - T_A)$$

那么有热机效率：

$$e = \frac{Q_{in} - Q_{out}}{Q_{in}} = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} \quad (5.12)$$

## 证明 5.8 Efficiency of a Carnot Cycle

这和奥托循环的证明几乎一样

卡诺循环如下：

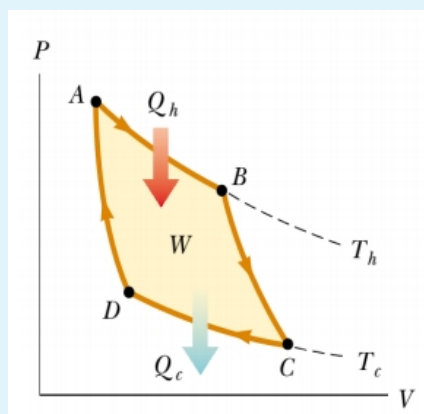


图 5.2: Carnot Cycle

AB 与 CD 为绝热过程,  $Q = 0$ , 我们只需考虑 AB 过程的吸热与 CD 过程的放热。这是两个等温过程, 它们的热为:

$$Q_{in} = Q_{AB} = nRT_h \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$Q_{out} = -Q_{CD} = nRT_c \ln \frac{V_C}{V_D}$$

绝热过程有:

$$P_C V_C^\gamma = P_B V_B^\gamma \quad P_A V_A^\gamma = P_D V_D^\gamma$$

而根据理想气体定律  $PV = nRT$ , 得到绝热过程温度与体积的关系:

$$T_c V_C^{\gamma-1} = T_h V_B^{\gamma-1} \quad T_c V_D^{\gamma-1} = T_h V_A^{\gamma-1}$$

那么两式左右分别对应相除, 易得:

$$\frac{V_C}{V_D} = \frac{V_B}{V_A}$$

那么有热机效率:

$$e = \frac{Q_{in} - Q_{out}}{Q_{in}} = 1 - \frac{T_c}{T_h} \quad (5.13)$$

## 5.2 Part 2

### 证明 5.9 Boltzmann Distribution

虽然笔记主体先给出麦克斯韦分布, 然后利用其结论进行玻尔兹曼分布的推导, 但实际上顺序是有问题的, 下面给出事实上的推导过程。

首先需要了解, 在经典体系中, 粒子被认为是**可辨的**, 即每个粒子都被认为是不同的对象; 将所有微观粒子排布到能级 (假设每个能级所能容纳的粒子是无限的) 上, 产生一种**微观态**。这些微观态中, 所有对应能级上粒子数均相同的微观态属于同一个**分布**; 而这些分布中出现概率最大的, 称为**最概然速率**

接着是一个统计力学的基本假设, 由玻尔兹曼提出: 处在平衡的孤立系统, 其每个微观态的出现概率是**相等的**。

由于宏观态事实上是所有微观态的叠加, 其能级分布是各分布的叠加, 而最概然分布对其中贡献最大, 可以认为宏观分布就是最概然分布。有了这些知识和这个前提, 我们来推导最概然分布。

假设有  $N$  个粒子以及  $k$  个能级, 第  $i$  个能级的简并度为  $w_i$ 。先考虑向第 1 个能级填入  $a_1$  个粒子, 这相当于先从  $N$  个粒子中选出  $a_1$  个, 然后将每个粒子可以填入  $w_1$  个简并轨道中的其中一个任意一个, 对应的情况总共有:

$$\Omega_1 = C_{a_1}^N (w_1)^{a_1} = \frac{N!}{a_1!(N-a_1)!} (w_1)^{a_1} \quad (5.14)$$

然后粒子数变为  $N - a_1$ ，用同样的方法考虑第 2 个能级，得到：

$$\Omega_2 = C_{a_2}^{N-a_1} (w_2)^{a_2} = \frac{(N - a_1)!}{a_2! (N - a_1 - a_2)!} (w_2)^{a_2} \quad (5.15)$$

以此类推，并将所有可能数相乘，得到分布数：

$$\Omega = \prod_{i=1}^k \Omega_i = \frac{N!}{\prod_{i=1}^k a_i!} \prod_{i=1}^k (w_i)^{a_i} \quad (5.16)$$

因为对数与原函数在同一点取极值，所以我们对它取个对数，有：

$$\ln \Omega = \ln(N!) \sum_{i=1}^k [a_i \ln(w_i) - \ln(a_i!)] \quad (5.17)$$

$N$  是一个很大的数，我们假设所有的  $a_i$  也是很大的数<sup>a</sup>，使用如下的积分估值：

$$\ln(N!) = \ln\left(\prod_{i=1}^N i\right) = \sum_{i=1}^N \ln(i) \approx \int_1^N \ln x dx = N \ln N - N \quad (5.18)$$

并且注意到  $\sum_{i=1}^k a_i = N$ ，就可以得到：

$$\begin{aligned} \ln \Omega &= N \ln N - N - \sum_{i=1}^k a_i \ln(a_i) + \sum_{i=1}^k a_i + \sum_{i=1}^k a_i \ln(w_i) \\ &= N \ln N - \sum_{i=1}^k a_i \ln(a_i) + \sum_{i=1}^k a_i \ln(w_i) \end{aligned} \quad (5.19)$$

全微分：

$$d(\ln \Omega) = \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial(\ln \Omega)}{\partial a_i} \right)_{a_j (i \neq j)} da_i = - \sum_{i=1}^k (1 + \ln a_i - \ln w_i) da_i \quad (5.20)$$

考虑存在如下两个约束条件，所有能级上的粒子之和等于  $N$ ，所有粒子的能量之和等于内能  $U$ ，设第  $i$  个能级的能量为  $\epsilon_i$ ，即有：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k a_i &= N \\ \sum_{i=1}^k a_i \epsilon_i &= U \end{aligned} \quad (5.21)$$

要求极值，显然使用拉格朗日乘因子法，分别对上式微分后乘以  $\alpha + 1$ ， $\beta$  加到 5.20 中，可得到：

$$\sum_{i=1}^k \left[ \ln\left(\frac{w_i}{a_i}\right) + \alpha + \beta \epsilon_i \right] da_i = 0 \quad (5.22)$$

此时变量相互独立，只需令每一项均为 0 即可，得到：

$$\ln\left(\frac{w_i}{a_i}\right) + \alpha + \beta \epsilon_i = 0 \quad (5.23)$$

写成指数形式也就是：

$$a_i = w_i e^{\alpha + \beta \epsilon_i} \quad (5.24)$$

下面我们更进一步，来试试把  $\alpha$  与  $\beta$  的表达式求出来。

我们现在重新观察一下 5.19，并将其写成如下形式：

$$\ln \Omega = N \ln N + \sum_{i=1}^k a_i \ln \left( \frac{w_i}{a_i} \right) \quad (5.25)$$

这样我们较为方便的把 5.23 代入，并注意一下 5.21，不难得到：

$$\ln \Omega = N \ln N - \alpha \sum_{i=1}^k a_i - \beta \sum_{i=1}^k \epsilon_i a_i = N \ln N - \alpha N - \beta U \quad (5.26)$$

接着我们利用熵的微观表达式，即玻尔兹曼公式，并结合最概然分布的假设，代入有：

$$S = k_B \ln \Omega = k_B \ln \Omega = k_B N \ln N - k_B \alpha N - k_B \beta U \quad (5.27)$$

最后结合温度的定义即可求得  $\beta$ ：

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial U} &= -k_B \beta = \frac{1}{T} \\ \beta &= -\frac{1}{k_B T} \end{aligned} \quad (5.28)$$

定义配分函数如下：

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^k w_i e^{-\frac{\epsilon_i}{k_B T}} \quad (5.29)$$

将 5.24 代入 5.21 的  $N$  中，可以得到：

$$\begin{aligned} N &= Z e^{\alpha} \\ \alpha &= \ln \left( \frac{N}{Z} \right) \end{aligned} \quad (5.30)$$

就有了最基本的形式：

$$a_i = \frac{w_i N}{Z} e^{-\frac{\epsilon_i}{k_B T}} \quad (5.31)$$

设第一个能级为基态，其能量为 0（由于习惯，基态用下标“0”表示），且能级无简并（ $w_i = 1$ ）：

$$a_0 = e^{\alpha} \quad (5.32)$$

从而得到有：

$$a_i = a_0 e^{-\frac{\epsilon_i}{k_B T}} \quad (5.33)$$

这样我们就得到了玻尔兹曼分布的表达式。

<sup>a</sup>这一假设对真实气体并不严谨，但推导理想气体够用了



## 证明 5.10 Maxwell Distribution

想象速度的分布表示在三维坐标系中，也就是速度空间，向  $x, y, z$  坐标分别表示  $v_x, v_y, v_z$ ，速度相同的粒子分布在同一点。在这样一个空间中，我们来考察速度在  $v$  到  $v + dv$  的粒子，相当于不计速度方向而考虑速度大小，那么它所覆盖的体积显然是一个厚度为  $dv$  的球壳。它的体积为：

$$dV = \frac{4}{3}\pi(dv + v)^3 - \frac{4}{3}\pi v^3 = 4\pi v^2 dv + o(dv) = 4\pi v^2 dv \quad (5.34)$$

根据玻尔兹曼分布 5.31，在这个速度的粒子数密度与动能的关系为<sup>a</sup>：

$$a = \frac{N}{Z} e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}} \quad (5.35)$$

下面来求配分函数，在连续空间中，我们把累加化为积分。因为位置和速度都可能影响能级能量<sup>b</sup>，所以积分区间应遍历整个空间与速度空间，即相空间：

$$Z = \int \cdots \int e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}} dx dy dz dv_x dv_y dv_z \quad (5.36)$$

注意到能量与空间分布无关，所以对空间的积分就等于  $V$ ，然后看对速度的积分，由于只需考虑速度大小且积分区间为全速度空间，我们选择从球壳逐层积分，即  $dv_x dv_y dv_z = 4\pi v^2 dv$ ，从而：

$$\begin{aligned} Z &= 4\pi V \int_0^{+\infty} v^2 e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}} dv \\ &= -\frac{4\pi V k_B T}{\mu} (v e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}} dv) \end{aligned} \quad (5.37)$$

前一项显然为 0，后一项是经典的高斯积分，在概率论与数学分析中都有涉及它的求解，这里直接给出结果：

$$Z = \frac{4\pi V k_B T}{\mu} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{\mu}} \right) = V \left( \frac{2\pi k_B T}{\mu} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (5.38)$$

将它代入粒子数的表达式，我们可以得到粒子密度随动量的分布：

$$\rho = \frac{a}{V} = N \left( \frac{\mu}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}} \quad (5.39)$$

这样就可以求  $dN$  了，它等于速度空间体积元内的粒子数：

$$dN = \rho dV = N 4\pi \left( \frac{\mu}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}} dv \quad (5.40)$$

联系速率分布函数的定义，其实我们已经得到了麦克斯韦分布：

$$f(v) = \frac{dN}{N dv} = 4\pi \left( \frac{\mu}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}} \quad (5.41)$$

证毕。

<sup>a</sup>这里我们不考虑能级简并问题，因为经典动能是连续的，导致了对  $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = A$  来说，在  $A > 0$  的情况下总是有无数组解。

<sup>b</sup>虽然这里的空间分布不影响能量，但不代表积分时可以不考虑。

**证明 5.11 Ideal Gas Law**

先回到玻尔兹曼分布5.27，我们已经求出了这里的  $\alpha$  与  $\beta$ ，直接代入：

$$S = k_B N \ln N - k_B N \ln \frac{N}{Z} + \frac{U}{T} = k_B N \ln Z + \frac{U}{T} \quad (5.42)$$

定义亥姆霍兹自由能  $A = U - TS$ ，从而上式化为：

$$A = -k_B N T \ln Z \quad (5.43)$$

这里的配分函数我们已经计算过了，直接代入5.38<sup>a</sup>：

$$A = -k_B N T \ln \left[ V \left( \frac{2\pi k_B T}{\mu} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (5.44)$$

代入热力学基本方程  $dU = TdS - pdV$ ，可以得到<sup>b</sup>：

$$dA = -SdT - pdV \quad (5.45)$$

$A$  为状态函数，上式是全微分，所以：

$$\left( \frac{\partial A}{\partial V} \right)_T = -p \quad (5.46)$$

代入  $A$  有：

$$\left( \frac{\partial A}{\partial V} \right)_T = -\frac{k_B N T}{V} = -p \quad (5.47)$$

这就是理想气体定律，重写为：

$$pV = Nk_B T \quad (5.48)$$

证毕。

<sup>a</sup>严谨来说应该把外势场以及转动动能考虑进去，不过那样配分函数还是  $Z = \ln(Vf(T))$  的形式，区别只是  $f(T)$  不影响推导，详见

<sup>b</sup>事实上热力学基本方程有四个，这也被视为其中一个，还有两个分别关于焓  $H$  与吉布斯自由能  $G$

**证明 5.12 Equipartition Theorem**

首先考虑最简单的单原子分子，其只有平动动能，故其  $A$  与5.44一致，结合5.45，得到熵的表达式：

$$\begin{aligned} S &= -\left( \frac{\partial A}{\partial T} \right)_V \\ &= k_B N \ln \left[ V \left( \frac{2\pi k_B T}{\mu} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{3}{2} k_B N \\ &= -\frac{A}{T} + \frac{3}{2} k_B N \end{aligned} \quad (5.49)$$

由  $U = A + ST$  即得到:

$$U = \frac{3}{2}k_B NT = \frac{3}{2}RT \quad (5.50)$$

这与单原子分子只有三个平动自由度相吻合。

然后把转动动能考虑进来, 先来看非线性分子。令  $I = \frac{1}{2}Jw^2$  为转动动能, 取类似于速度空间的角速度空间, 这样考虑了转动后的配合函数变为:

$$Z = \int \dots \int e^{-\frac{\mu v^2 + Jw^2}{2k_B T}} dx dy dz dv_x dv_y dv_z dw_x dw_y dw_z \quad (5.51)$$

由于非线性分子实际上平动动能与转动动能形式一致, 故积分结果也一致, 有:

$$Z = V \left( \frac{4\pi^2 k_B^2}{\mu J} \right)^{\frac{3}{2}} T^3 \quad (5.52)$$

经过与前面相同的推导可以得到:

$$U = 3k_B NT = 3RT \quad (5.53)$$

到这里已经可以发现, 平动与转动自由度影响了配分函数对温度的次数, 后者与内能对  $RT$  的系数一致。

对线性分子, 绕穿过分子的那条轴的转动惯量过小, 对应方向上的转动动能可以忽略。假设忽略  $w_z$ , 则体积元从球壳变为圆柱体壳, 即  $dw_x dw_y dw_z = 2\pi w dw$ , 即下面的积分:

$$2\pi \int_0^{+\infty} w e^{-\frac{Jw^2}{2k_B T}} dw = \frac{2\pi k_B T}{J} \quad (5.54)$$

于是有  $Z \propto T^{\frac{5}{2}}$ , 对应的:

$$U = \frac{5}{2}k_B NT = \frac{5}{2}RT \quad (5.55)$$

必须指出, 我们用积分计算配分函数意味着我们假设平动能级和转动能级的能隙相对于  $k_B T$  来说很小, 所以把能级近似为连续的考虑。这一假设对于振动能级开始已经不再成立, 我们必须使用求和代替积分, 这个计算出来的贡献相对前两者来说可以忽略, 不过这部分的计算需要使用量子力学, 这里就不给出振动贡献可忽略的证明了。

# 答案部分

G.P.A

*Solution: 1.1*

The displacement of a particle moving under uniform acceleration is some function of the elapsed time and the acceleration. Suppose we write this displacement  $s = ka^m t^n$ , where  $A$  is a dimensionless constant.

(1) Show by dimensional analysis that this expression is satisfied if  $m = 1$  and  $n = 2$ .

(2) Can this analysis give the value of  $A$ ?

I-P3 引

(1) 观察等式  $s = ka^m t^n$ , 有:

$$\text{左式量纲} = L$$

$$\text{右式量纲} = \left(\frac{L}{T^2}\right)^m \cdot (T)^n = L^m T^{n-2m}$$

联立两式即得

$$m = 1, n = 2$$

(2) 不能, 量纲分析只是定性分析, 无法解决值上的问题。



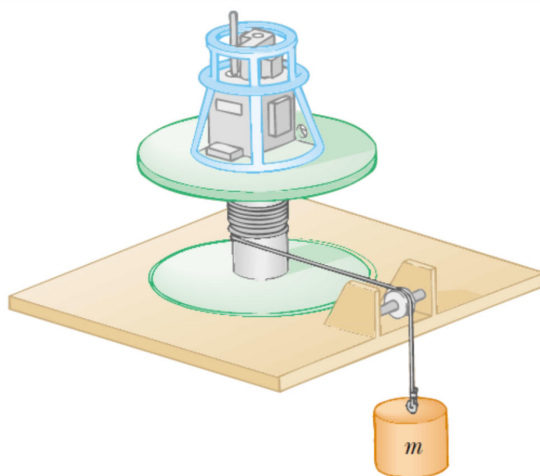
2

**Solution: 3.1 Determine the Moment of Inertia of an Irregularly Shaped Object**

This problem describes one experimental method of determining the moment of inertia of an irregularly shaped object such as the *payload* for a satellite.

The figure shows a mass  $m$  suspended by a cord wound around a spool of radius  $r$ , forming part of a turntable supporting the object. When the mass is released from rest, it descends through a distance  $h$ , acquiring a speed  $v$ . Show that the moment of inertia  $I$  of the equipment (including the turntable) is  $mr^2(\frac{2gh}{v^2} - 1)$ .

I - P17 51



这是一道基础的转动力学题目，一般的求解思路为：列力学方程—列运动方程—列关联方程—求解。

设绳子的张力为  $T$ ，物体的转动惯量为  $I$ ，有：

$$\left\{ \begin{array}{l} Tr = I\alpha \\ mg - T = ma \\ v^2 = 2ah \\ a = r\alpha \end{array} \right\} \begin{array}{l} \cdots \text{力学方程} \\ \cdots \text{运动方程} \\ \cdots \text{关联方程} \end{array}$$

联立求解即得

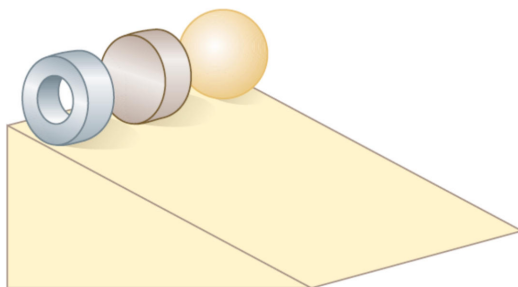
$$I = mr^2 \left( \frac{2gh}{v^2} - 1 \right)$$

**Solution: 3.2, Rolling Items**

Three objects of uniform density — a solid sphere, a solid cylinder, and a hollow cylinder — are placed at the top of an incline.

If they all are released from rest at the same elevation and roll without slipping, which object reaches the bottom first?

I – P17 51



本题是经典的纯滚动问题。所谓纯滚动，就是滚动体与接触面接触的点速度为  $\mathbf{0}$  (即旋转速度和质心速度相抵消)。

我们往往选择过质心的轴作为旋转轴，建立参考系。这是因为，即使这样建立的参考系是一个非惯性系，只要它不发生转动，那么，使用证明“均匀重力场中重力可以等效作用在质心”中用到的方法 (Prove 3.7<sub>11</sub> ~ P 48)，就可以证明惯性力可以等效作用在质心。由于我们选择的是质心轴，惯性力产生的力矩恒为 0，因此也就不会对转动的分析产生影响<sup>a</sup>。

现在，让我们选择质心系分析问题<sup>b</sup>。

若记球体  $m_1$  的转动惯量为  $I_1$ ，实心圆柱  $m_2$  的转动惯量为  $I_2$ ，空心圆柱  $m_3$  的转动惯量为  $I_3$ ，斜面倾角为  $\theta$ ，则有：

$$\begin{cases} m_1 a_1 = m_1 g \sin \theta - f_1 \\ m_2 a_2 = m_2 g \sin \theta - f_2 \\ m_3 a_3 = m_3 g \sin \theta - f_3 \\ f_1 r_1 = I_1 \alpha_1 \\ f_2 r_2 = I_2 \alpha_2 \\ f_3 r_3 = I_3 \alpha_3 \\ a_1 = r_1 \alpha_1 \\ a_2 = r_2 \alpha_2 \\ a_3 = r_3 \alpha_3 \end{cases}$$



于是解得

$$\begin{cases} a_1 = \frac{m_1 r_1^2}{I_1 + m_1 r_1^2} g \sin \theta \\ a_2 = \frac{m_2 r_2^2}{I_2 + m_2 r_2^2} g \sin \theta \\ a_3 = \frac{m_3 r_3^2}{I_3 + m_3 r_3^2} g \sin \theta \end{cases}$$

由常见物体的转动惯量 (见 图 3.6<sub>f</sub> ~ P 11) 知

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{5} m_1 r_1^2 \\ I_2 &= \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \\ I_3 &= \frac{1}{2} m_3 (r_{3(\text{inner})}^2 + r_3^2) \end{aligned}$$

易知

$$a_1 > a_2 > a_3$$

故实心球快于实心圆柱快于空心圆柱。

<sup>a</sup>很多解析都直接选择了一个非惯性质心系来分析转动，却并没有讲解惯性力可以忽略的原因。

<sup>b</sup>当然，过质心的轴有很多，但是大家应该能意会到选择了怎样的轴 (对称性好的轴)，就不再描述了

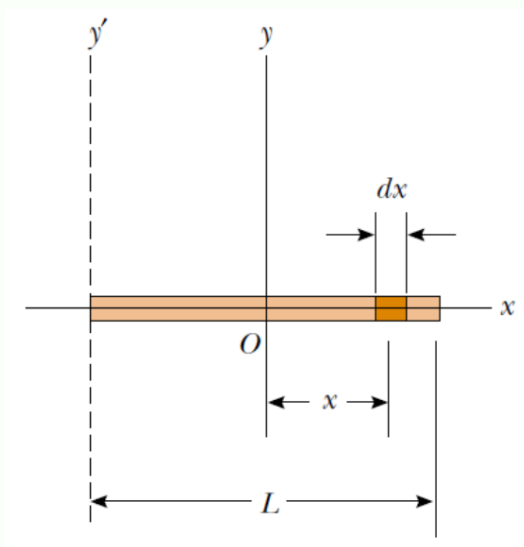
**Solution: 3.3, Calculation of the Moment of Inertia**

A rod's linear density is given by  $\lambda = kx$ , where  $x$  represents the distance from the point to the rod's center.

Given the length of the rod  $l$ , try to calculate the moment of inertia of the rod, given the rotation axis at:

(1) Center  $O$  as the  $y$  axis shows.

(2) One end as the  $y'$  axis shows.



(1) 由于  $O$  也是质心位置, 不妨先求  $I_{CM}$ , 再利用平行轴定理求解  $I_{end}$ 。注意到

$$dm = \lambda dx = k|x|dx$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (x^2)(k|x|)dx &= 2 \int_0^{\frac{L}{2}} kx^3 dx \\ &= 2 \left( \frac{1}{4} kx^4 \right) \Big|_0^{\frac{L}{2}} \\ &= \frac{1}{32} kL^4 \end{aligned}$$

(2) 欲用平行轴定理 (定理 3.11 ~ P12), 则需知晓棍子的质量。

$$\begin{aligned}
 m &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} k|x|dx \\
 &= 2 \int_0^{\frac{L}{2}} kx dx \\
 &= 2 \left( \frac{1}{2} kx^2 \right) \Big|_0^{\frac{L}{2}} \\
 &= \frac{1}{4} kL^2
 \end{aligned}$$

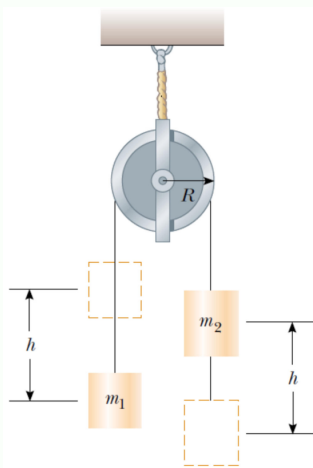
故

$$I_{\text{end}} = I_{CM} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{3}{32}kL^4$$

### Solution: 3.4, Massive Pulley

Consider two cylinders having masses  $m_1$  and  $m_2$ , where  $m_1 < m_2$ , connected by a string passing over a pulley. The pulley has a radius  $R$  and moment of inertia  $I$  about its axis of rotation. The string does not slip on the pulley, and the system is released from rest. Find the linear speeds of the cylinders after cylinder 2 descends through a distance  $h$ , and the angular speed  $\omega$  of the pulley at this time.

I - P18 引



本题可从运动角度或能量角度考虑。

法一：运动分析

设左绳的张力为  $T_1$ ，右绳的张力为  $T_2$ ，则有

$$\begin{cases}
 T_1 - m_1 g = m_1 a \\
 T_2 R - T_1 R = I \alpha \\
 m_2 g - T_2 = m_2 a \\
 a = R \alpha
 \end{cases}$$

于是解得

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} g$$

则

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} 2gh}, \quad \omega = \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{(m_1 + m_2)R^2 + I} 2gh}$$

法二：能量分析

系统机械能守恒，于是有

$$\begin{cases} m_2gh = m_1gh + \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\ v = R\omega \end{cases}$$

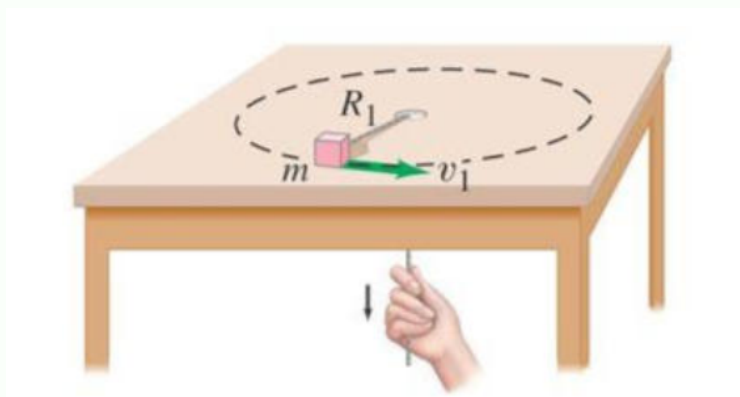
亦可解得

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} 2gh}, \quad \omega = \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{(m_1 + m_2)R^2 + I} 2gh}$$

**Solution: 3.5, Object rotating on a string of changing length**

Initially, the mass revolves with a speed  $v_1 = 2.4 \text{ m/s}$  in a circle of radius  $R_1 = 0.80 \text{ m}$ . The string is then pulled slowly through the hole so that the radius is reduced to  $R_2 = 0.48 \text{ m}$ . What is the speed,  $v_2$ , of the mass now?

I - P19 51



本题考察角动量守恒。可以注意到，绳子对物块的力始终是径向的，对应的力矩始终为  $\mathbf{0}$ ，因此，物块的角动量守恒。不妨就以洞为轴，有

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow R_1^2\omega_1 = R_2^2\omega_2$$

代入  $\omega_1 = \frac{v_1}{R_1}$ ,  $\omega_2 = \frac{v_2}{R_2}$ , 即得

$$v_1R_1 = v_2R_2$$

代入数据即得  $v_2 = 4.0 \text{ m/s}$ .

**Solution: 3.6, Rotation of a sliding rigid rod**

Consider a rod with mass  $m$  and length  $L$  standing straight on the friction-less ground. When we release the rod, it will fall from the unstable equilibrium position.

(a) Calculate the angular velocity of the rod, when it has an angle of  $\theta$  with respect to the ground as illustrated in Figure 1.

(b) What is the final angular velocity  $\omega_1$  of the rod before it hits the ground?

(c) If the same rod is leaning to a frictionless wall with an initial angle of  $\alpha$  to the frictionless ground (see Figure 2), what is the final angular velocity  $\omega_2$  of the rod before it hits the ground?

Note that there is a possibility that the right end of the rod leaves from the wall before the rod hits the ground.

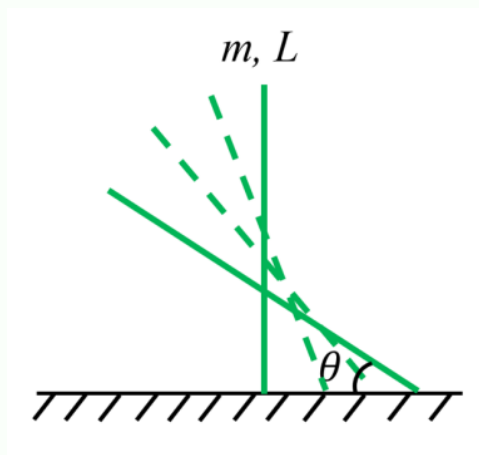


Figure 1

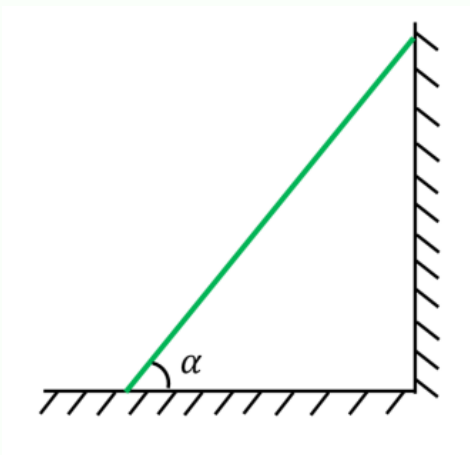


Figure 2

本题主要考察转动中的能量守恒，以及对平动速度和角速度关系的分析。

(a) 首先，由题意知不存在摩擦力，而支持力做功始终为零，所以以棍子为研究对象，有机械能守恒。又注意到，棍子在水平方向始终不受力，因此质心是在垂直下降。于是有

$$mg\frac{L}{2} - mg\frac{L}{2}\sin\theta = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (3.1)$$

研究质心的运动，有

$$v_{CM} = \frac{d(\frac{L}{2}\sin\theta)}{dt} \quad (3.2)$$

$$= \frac{L}{2} \frac{d\sin\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (3.3)$$

$$= \frac{L}{2} \cos\theta \omega \quad (3.4)$$

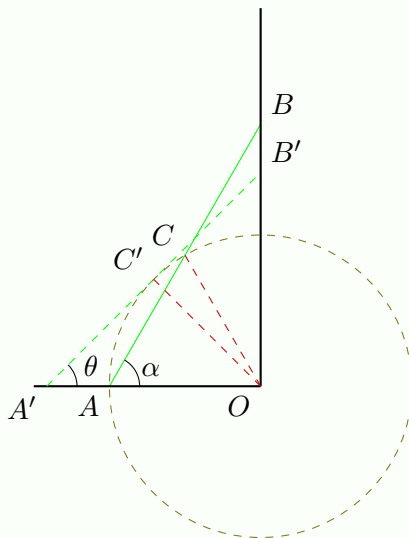
将(3.4)代入(3.1)即得

$$\omega = 2\sqrt{\frac{3g}{L} \frac{1 - \sin\theta}{1 + 3\cos^2\theta}} \quad (3.5)$$

(b) 即考虑 (a) 中的极限情况, 将  $\theta = 0$  代入 (3.5) 中即得

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{L}} \quad (3.6)$$

(c)



如图, 先考虑棍未与墙壁脱离情形, 注意到质心  $C$  到  $O$  的距离始终为  $\frac{L}{2}$ , 因此确定质心的运动轨迹是一个圆。由  $\angle COA = \angle CAO$ , 知  $v_{CM} = \omega \frac{L}{2}$ , 即关系式。再由“无摩擦力”, “支持力不做功”知棍子机械能守恒, 于是可以列出守恒式:

$$mg\left(\frac{L}{2} \sin \alpha - \frac{L}{2} \sin \theta\right) = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (3.7)$$

由 (3.7) 可解得

$$\omega = \sqrt{\frac{3g(\sin \alpha - \sin \theta)}{L}} \quad (3.8)$$

接下来, 我们考虑临界条件。当棍子脱离墙时, 来自墙的支持力消失, 也就是说, 质心在水平方向不再拥有加速度。于是,  $v_{CMx}$  最大时, 棍子将脱离墙。

$$v_{CMx} = v_{CM} \sin \theta \quad (3.9)$$

$$= \omega \frac{L}{2} \sin \theta \quad (3.10)$$

$$= \frac{\sin \theta}{2} \sqrt{3gL(\sin \alpha - \sin \theta)} \quad (3.11)$$

$$= \sqrt{3gL} \cdot \sqrt{\frac{\sin \theta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sin \theta}{2}} \cdot \sqrt{\sin \alpha - \sin \theta} \quad (3.12)$$

$$\leq \frac{1}{3} \sin \alpha \sqrt{gL \sin \alpha} \quad (\text{当且仅当 } \sin \theta = \frac{2}{3} \sin \alpha) \quad (3.13)$$

之后, 在水平方向, 质心的运动保持不变。由 (3.4) 知, 当棍子即将落地时, 有

$$v_{CM y} = \frac{L}{2} \omega_2 \quad (3.14)$$

于是可以列守恒式

$$mg\frac{L}{2}\sin\alpha = \frac{1}{2}m(v_{CMx}^2 + v_{CMy}^2) + \frac{1}{2}I\omega_2^2 \quad (3.15)$$

将 (3.14) 代入 (3.15) 即得

$$\omega_2 = \sqrt{(9\sin\alpha - \sin^3\alpha)\frac{g}{3L}} \quad (3.16)$$

咕咕 PS: 这大概是本章考察的天花板了。

*Solution: 4.1*

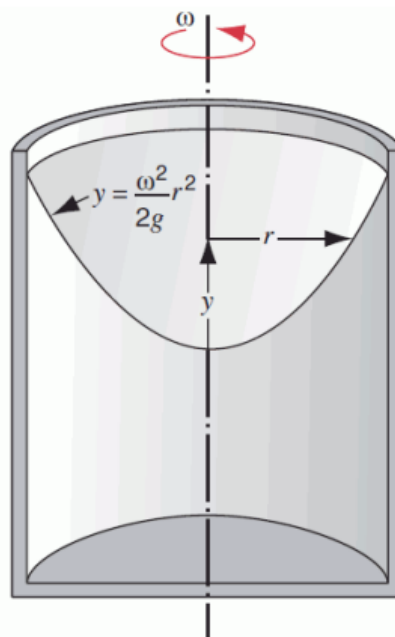
A fluid is rotating at constant angular velocity  $\omega$  about the central vertical axis of a cylindrical container.

(a) Show that the variation of pressure in the radial direction is given by  $\frac{dp}{dr} = \rho\omega^2 r$ .

(b) Take  $p = p_c$  at the axis of rotation ( $r=0$ ) and show that the pressure  $p$  at any point  $r$  is

$$p = p_c + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2$$

(c) Show that the liquid surface is of paraboloidal form; that is, a vertical cross section of the surface is the curve  $y = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$



流体静力学

I - P23 31



(a) 取一段竖直方向的薄平面，设其截面积为  $A$ ，沿半径方向的厚度为  $dr$ ，深度为  $h$ 。如下图所示：

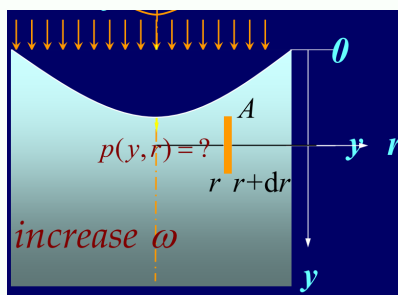


图 4.1: A-4-1

可知水平方向的压强差为  $dp = p_{r+dr}(h) - p_r(h)$ ，其中  $p = p_0 + \rho gh$ 。由受力关系结合匀速圆周运动可得：

$$F = Adp = A dr \rho \omega^2 r$$

整理得到 (a) 中的公式。

(b) 化简上式并积分：

$$\int_{p_{h,0}}^{p_{h,r}} dp = \int_0^r \rho \omega^2 r dr$$

得到：  $p = p_0 + \rho gh + \frac{\rho \omega^2 r^2}{2}$ 。其中前两项与半径无关，即为  $p_c$ ，可得：

$$p = p_c + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2$$

(c) 液体表面的压强均为大气压强，将  $p = p_0$ 、 $p_c = p_0 + \rho gh$  代入 (b) 中得到的公式，得：

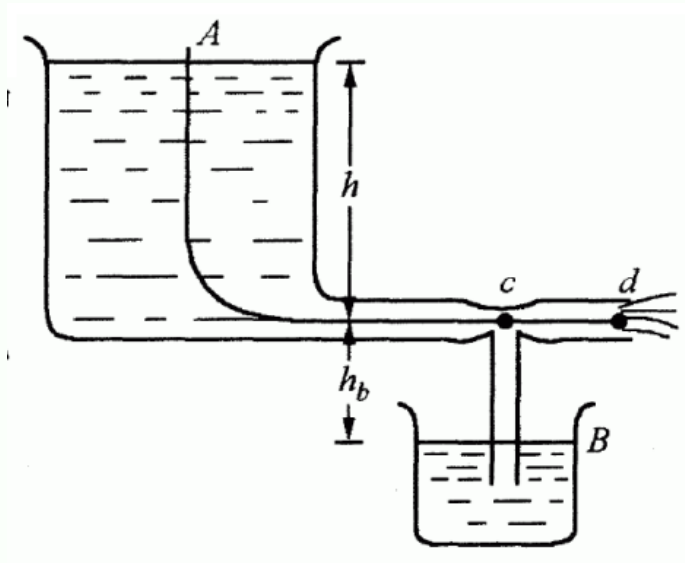
$$\rho gh + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 = 0$$

由于深度的坐标轴是向下的，我们以页面最低点处的水平方向为  $r$  轴，沿中心线竖直方向作为  $y$  轴，也就是调转一下坐标系。应用上述公式可知：

$$y = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

*Solution: 4.2*

As shown in Figure 4-2, it is an *air suction device*. Given that the depth of the centerline of the *catheter* below the liquid level in container A is  $h$ , the height difference between the liquid level in container B and the centerline of the horizontal catheter is  $h_b$ , the cross-sectional area at the *nozzle* d is  $S_d$ , and the cross-sectional area at the contraction section c is  $S_c$ . What are the conditions for the ratio of  $S_d$  to  $S_c$  to occur for suction?



流体动力学

取一个流线 Acd, 对 c、d 两点应用伯努利公式可得:

$$\frac{1}{2}\rho v_c^2 + p_c = \frac{1}{2}\rho v_d^2 + p_d$$

其中 d 点的流速为  $v_d = \sqrt{2gh}$ , 气压为大气压强  $p_d = p_0$ 。且由于连续性原理, 有:

$$v_c S_c = v_d S_d$$

因此 c、d 两点的压强差为:

$$p_c - p_0 = \rho gh \left(1 - \left(\frac{S_d}{S_c}\right)^2\right)$$

而容器 B 液面的压强也是大气压强。发生空吸作用只要满足条件:

$$p_c < p_0 - \rho gh_b$$

代入公式即可得到:

$$\frac{S_d}{S_c} > \sqrt{1 + \left(\frac{h_b}{h}\right)}$$