Kapitola 1

Minorové operace

V této kapitole zavedeme operace s klastrovým grafem, které zachovávají klastrovou rovinnost. V závěru kapitolu zavedeme pojem klastrové minoru jakožto

Definice: 1.1. *(minorové operace) Minorové operace jsou následující:*

1. *Odebrání hrany nebo vrcholu z grafu*
2. *Odebrání klastru z klastrové hierarchie*
3. *Kontrakce hrany*
   - *pokud oba konce hrany patří do stejných klastrů*
4. *Nahrazení klastru velikosti 2 hranou*
   - *v nakreslené verzi problému jenom tehdy, pokud to lze provést jednoznačně*
5. *Odebrání vrcholu v z klastru K (v nakreslené verzi)*
   - *K je nejmenší (vzhledem na inkluzi) klastr obsahující v*
   - *z v vychází právě 1 hrana ven z K*
6. *Sjednocení dvou disjunktní klastrů $K_1, K_2 \in \mathcal{C}$ (nakreslená verze)*
   - *K_1, K_2 jsou dva minimální klastry (nemají podklastry) se společným rodičem*

- *$K_1 \cup K_2$ neindukuje kružnici s vrcholem mimo $K_1 \cup K_2$ uvnitř. Jinými slovy $K_1 \cup K_2$ nemá díru v G.*
- *existuje hrana spojující K_1 s K_2*
- $C' := (C \setminus \{K_1, K_2\}) \cup \{K_1 \cup K_2\}$

Tvrzení 1.1. *Minorové operace (1) a (2) zachovávají klastrovou rovinnost*

Důkaz. Mějme dáno klastrové nakreslení. Odebrání hrany zapříčiní jedině to, že se nemusí v daném nakreslení hrana kreslit. Podobně pro odebraný vrchol, kdy se odebereu hrany vedoucí do něj. Odebráný klastr se též prostě nenakreslí □

Tvrzení 1.2. *Kontrakce hrany (3) zachovává klastrovou rovinnost*

Důkaz. Mějme dáno klastrové nakreslení. Kontrakce je jen vlastně smrštění hrany do jediného bodu, jenž zastupuje vrchol vzniklý kontrakcí. □

Tvrzení 1.3. *Operace (4) zachovává klastrovou rovinnost*

Důkaz. Stačí si uvědomit, že takový klastr se chová jako hrana. V nakreslené verzi je požadavek na jednoznačnost (jen jediná stěna, kde lze hranu dokreslit), protože by jinak se mohlo stát nahrazením klastru hranou, že vznikne díra. □

Tvrzení 1.4. *Odebraní vrcholu z klastru (5) zachovává klastrovou rovinnost.*

Důkaz. Jednoduchý překreslovací argument, kdy podél hrany protáhneme hranici klastru až ji přetáhneme přes vyjímaný vrchol. (TODO dát ilustrativní obrázek) □

Tvrzení 1.5. *Připojení vrcholu do klastru*
(G,C) "nakreslená"instance klastrové rovinnosti, $v \in V(G)$ a $K \in C$
$C' = (C \setminus \{K\}) \cup \{K \cup \{v\}\}$

1. *v sousedí s K (je spojen s nějakým vrcholem v K hranou)*
2. *Každý klastr obsahující v obsahuje i K*
3. *K nemá podklastry*
4. *$K \cup \{v\}$ neindukuje kružnici s vrcholem mimo K uvnitř*

Potom (G,C) je kl. rovinný $\Longrightarrow$ (G,C') je kl. rovinný

Důkaz. Toto tvrzení je speciálním případem následujícího lemmatu. Jednoduše, budeme vrchol vydávat za jednovrcholový klastr. □

Tvrzení 1.6. *Sjednocení klastrů (6) zachovává klastrovou rovinnost.*

Důkaz. Nechť S je minimální saturátor $(G, \mathcal{C})$ takový, že $(G[V, E \cup S], \mathcal{C})$ nemá díru. S je saturátorem i pro klastrový graf $(G, \mathcal{C}')$, kde ale může být díra. Nechť existuje minimální saturátor $S' \subseteq S$ takový, že $(G[V, E \cup S'], \mathcal{C})$ nemá díru. To dokážeme sporem.

Nechť D je díra. Ta musí být ve sjednocení klastrů K_1 a K_2, neboť kdyby byla jinde, bylo by to ve sporu s předpokladem, že původní klastrový graf je klastrově rovinný. Díra D má neprázdný průnik se saturátorem S'. Kdyby průnik byl prázdný, znamenalo by to, že příslušná díra byla v původním klastrovém grafu. Označme tuto hranu $e = \{x, y\}$, kde x a y jsou její koncové vrcholy. Jako S" označme $S' \setminus e$. Množina S" je saturátorem, protože každý klastr $K \in C'$ obsahující vrcholy x a y obsahuje i cestu $D \setminus \{e\}$. Dostali jsme tedy spor s minimalitou S'. S' tedy neobsahuje díry. □

(TODO vysvětlení předpokladů)

Vyzbrojeni minorový operace můžeme definovat pojem klastrového minoru

Definice: 1.2. *Mějme klastrový graf $(G, \mathcal{C})$. Klastrový graf $(G', \mathcal{C}')$ je klastrovým minorem, pokud jej lze získat konečnou posloupností minorových operací z klastrového grafu $(G, \mathcal{C})$.*