Kapitola 1

Speciální instance

V této kapitole se podíváme na omezené instance klastrové rovinnosti. Klastrová rovinnost se dá omezit dvěma způsoby, jednak omezením o jakých grafech budeme uvažovat, a jednak omezením klastrové hierarchie. První omezenou třídou klastrových grafů jsou kružnice s klastry velikosti 2 a druhou třídou budou cesty s klastry velikosti 2. Pro oba případy uvedeme věty o počtu zakázaných minorů.

1.1 Kružnice s klastry velikosti 2

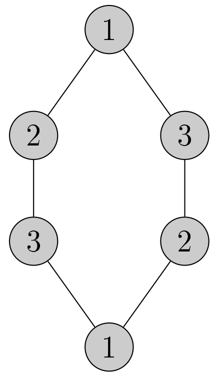
Hlavním výsledkem této části je výsledek ukazující, že jediným zakázaným minimálním minorem pro kružnice s klastry velikosti 2 je šesticyklus se třemi klastry, kde se vrcholy střídají v jakém klastru jsou (viz obrázek 1.1). Výsledek je jak pro nakreslenou, tak i nenakreslenou verzi, protože kružnice má až na symetrii jen jedno nakreslení.

Věta 1.1. *Nechť $(G, \mathcal{C})$ je instance, kde G je kružnice a všechny klastry mají velikost 2. $(G, \mathcal{C})$ je klastrově rovinný $\iff$ $(G, \mathcal{C})$ neobsahuje C_6^Z jako minor.*

Před důkazem věty ukážeme, že C_6^Z není klastrově rovninný.

Lemma 1.2. C_6^Z *není klastrově rovinný.*

Důkaz. Důkaz provedeme pro nenakreslenou verzi. Jelikož klastry jsou velikosti 2, můžeme nahrazovat klastry hranami. Nahrazení všech klastrů hranami však vede přímo na $K_{3,3}$. A protože $K_{3,3}$ není rovinný graf, tak nemůže C_6^Z být klastrově rovinný. $\square$



Obrázek 1.1: Čísla označují, do jakého klastru vrchol patří. Dále v textu bude tento graf označován jako C_6^Z, kde Z značí, že se jedná o zakázaný minor.

U kružnice můžou saturátorové hrany vést pouze vnitřkem nebo vnějškem (myšleno v nakreslení). Pro dvě hrany ze saturátoru má smysl se bavit o tom, zda mohou vést na stejné straně kružnice nebo nikoliv. To nás vede k pojmu grafu konfliktů, který reprezentuje konflikty mezi hranami ze saturátoru.

Definice 1.3. Klastry $\{x_1, x_2\}$ a $\{y_1, y_2\}$ mají spolu *konflikt*, pokud se na kružnici vyskytují v následujícím pořádí $x_1, ..., y_1, ..., x_2, ..., y_2, ...$. Graf konfliktů je reprezentací konfliktů saturátorových hran, kde vrcholy jsou klastry a hrany představují konfliktní klastry. Graf konfliktů pro klastrový graf $(G, \mathcal{C})$ budeme značit $GK_{(G,\mathcal{C})}$

Získáme ihned kritérium, kdy kružnice s klastry velikosti 2 je klastrově rovinný graf. Je to právě tehdy, když graf konfliktů je bipartitní. Dokážeme si to jako lemma.

Lemma 1.4. *Kružnice s klastry velikosti 2 je klastrově rovinná právě tehdy, když graf konfliktů je bipartitní.*

Důkaz. Klastr, jenž je tvořen sousedními vrcholy, zjevně nemůže být podle definice s jiným klastrem v konfliktu. Vrchol příslušného klastru v grafu konfliktů je izolovaný. Stačí tedy uvažovat, že vrcholy v klastru nejsou sousedními.

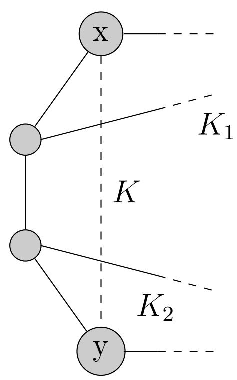
$\Longrightarrow$

Místo klastrů uvažujme hrany saturátoru, ty mohou vést, buď vnitřní stěnou kružnice, nebo vnější stěnou kružnice. Hrana v grafu konfliktů vede mezi jeho vrcholy právě tehdy, pokud saturované hrany příslušných klastrů vedou různými stěnami. To proto, že podle definice konfliktu, kdyby vedly stejnou stěnou, tak by se musely křížit, což by byl spor s tím, že máme klastrové nakreslení. Jako partity označíme klastry, jež vedou, buď vnější stěnou (jedna partita), nebo vnitřní stěnou (druhá partita). Izolované vrcholy dáme libovolně partity.

Opačná implikace se dokáže obdobně. □

Uvedeme ještě jedno lemma, ukazující vztah mezi kružnicí v grafu konfliktů a odpovídající strukturou v klastrovém grafu.

Lemma 1.5. *Nechť $(G, \mathcal{C})$ je klastrový graf, G je kružnice a $\mathcal{C}$ má klastry velikosti 2. Nechť Q je indukovaná kružnice v grafu konfliktů $GK_{(G,\mathcal{C})}$ a nechť $K = \{x, y\}$ klastr obsažený v Q. Nechť A, B jsou dvě cesty v G spojující x, y a K_1, K_2 jsou sousedi K v Q. Když se omezíme na vrcholy klastrů z Q, pak BÚNO jediné dva vrcholy v A jsou z klastrů K_1 a K_2 (po jednom vrcholu z každého klastru a zbylé vrcholy leží v B.*



Obrázek 1.2: Znázornění, čemu odpovídá kružnice v grafu konfliktů. Nalevo od K je část A, napravo je část B.

Struktura v klastrovém grafu, která odpovídá kružnici v grafu konfliktů, se jinými slovy „chová slušně a není divoce rozházená po grafu“.

Důkaz. Sporem předpokládejme, že v části A, kde klastry K_1 a K_2 mají po jednom vrcholu, je ještě jeden jiný klastr K_3. Ten musí mít v A oba své vrcholy, jinak by byl v konfliktu s K, což je spor s tím, že K má jen dva sousedy v Q. Uvažujme cestu v Q z K_1 do K_2 neobsahující K (tedy přes K_3). Prvním krokem se z K_1 dostaneme do druhé části. Po cestě se ale musíme vrátit zpět do části A kvůli klastru K_3 pomocí klastru K_i dříve, než se vrátíme pomocí klastru K_2. Klastr K_i ale musí být v konfliktu s klastrem K, což je spor s tím, že K má jen sousedy K_1 a K_2, K_i by podle všeho též musel být sousedem K. □

Tvrzení 1.6. *Graf konfliktů $GK_{(G,\mathcal{C})}$ obsahuje lichou kružnici $\Longrightarrow$ instance (G,C) obsahuje zakázaný minor C_6^Z.*

Důkaz. Důkaz indukcí podle velikosti nejkratší liché kružnice v $GK_{(G,\mathcal{C})}$. V základu indukce ukážeme, že liché kružnici velikosti 3 v grafu konfliktů odpovídá C_6^Z. V indukčním kroku pak pomocí minorových operací zredukujeme délku liché kružnice o dva klastry.

Základ indukce: Mějme trojcyklus v grafu konfliktů. Mějme příslušné klastry $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}, \{z_1, z_2\}$. Podle definice konfliktů máme následující pořadí vrcholů:

Podle konfliktu klastrů $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}$ je pořadí x_1, y_1, x_2, y_2.

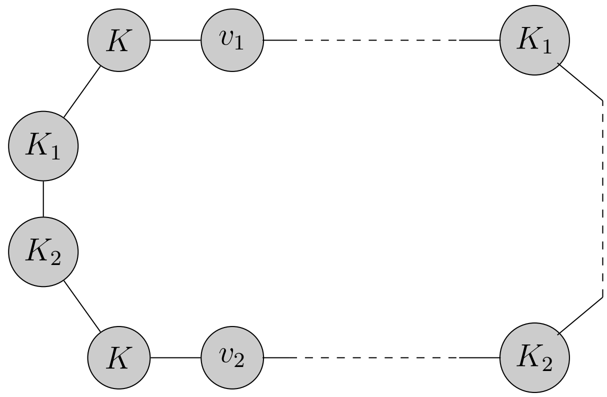
Podle konfliktu klastrů $\{y_1, y_2\}, \{z_1, z_2\}$ je pořadí y_1, z_1, y_2, z_2.

Podle konfliktu klastrů $\{x_1, x_2\}, \{z_1, z_2\}$ je pořadí x_1, z_1, x_2, z_2.

Dohromady máme pořadí $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, což je C_6^Z. Základ indukce je tedy dokázaný.

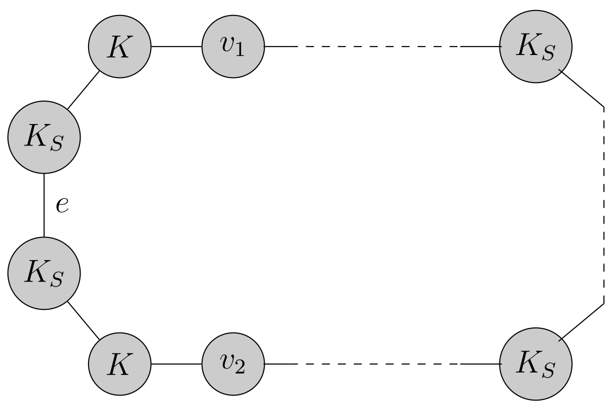
Nyní předpokládejme, že chceme dokázat tvrzení pro lichou kružnici velikosti k, a že tvrzení platí pro kružnici o 2 menší.

Indukční krok: Podle lemmatu 1.5 máme v $(G, \mathcal{C})$ strukturu konfliktních klastrů odpovídající liché kružnici v grafu konfliktů. Předpokládejme, že jsme si $(G, \mathcal{C})$ zjednodušili pomocí minorových operací tak, že nemáme nic jiného než klastry získané z liché kružnice v grafu konfliktů.



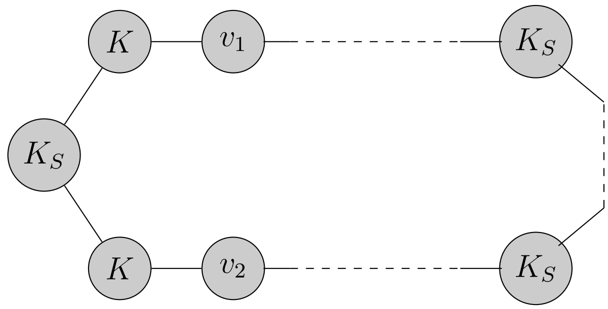
Obrázek 1.3: Výchozí stav, v_1, v_2 jsou sousedé vrcholů klastru K.

Provedeme následující posloupnost minorových operací. Vezměme libovolný klastr K. Klastry jež jsou s ním v konfliktu (K_1 a K_2), můžeme sjednodit (ubyl jeden klastr). Sjednocený klastr označme K_S.



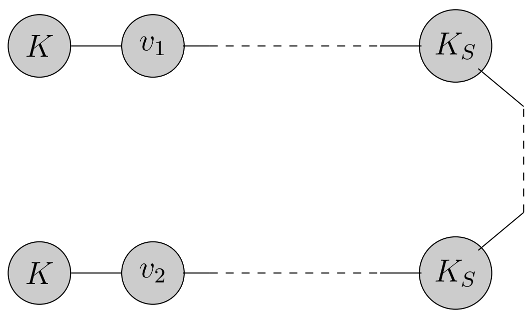
Obrázek 1.4: Sjednodcení klastrů K_1 a K_2

V části, kde měly vrchol jen ony, tak sdílejí hranu e, tu můžeme po provedení sjednocení zkontrahovat.



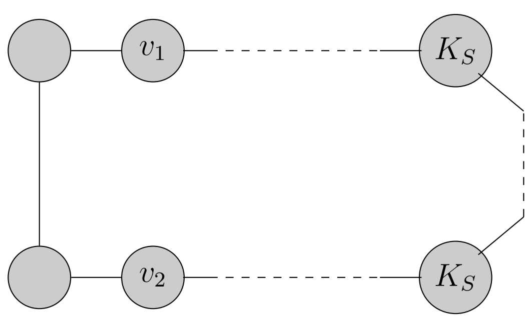
Obrázek 1.5: Kontrakce hrany e

Vrchol vzniklý kontrakcí odebereme. Nyní se nám kružnice přerušila.



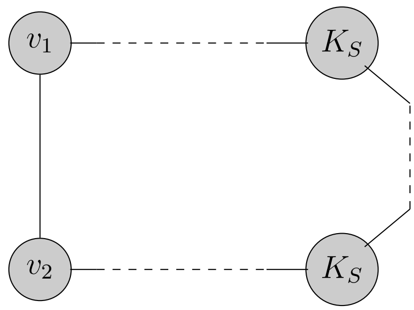
Obrázek 1.6: Odebrání vrcholu vzniklého kontrakcí

Přes rozdělení nám vede klastr K, pro nějž máme jedinou možnost, jak jej nahradit hranou, tak to učiníme (jinými slovy, je to korektní i v nakreslené verzi).



Obrázek 1.7: Nahrazení klastru K hranou

Tuto hranu můžeme rovnou zkontrahovat a vzniklý vrchol přidáme do jednoho z klastrů (opět sjednocení klastrů a ubytí druhého klastru), které s ním mají sousední vrchol. Hranu, která jej spojovala se sousedem zkontrahujeme.



Obrázek 1.8: Výsledný klastrový graf

Vzniklému klastrovému grafu $(G', \mathcal{C}')$ odpovídá v grafu konfliktů lichá kružnice o velikosti $k-2$. Tedy $(G', \mathcal{C}')$ obsahuje podle indukčního předpokladu C_6^Z jako klastrový minor. A jelikož $(G', \mathcal{C}')$ je minorem $(G, \mathcal{C})$, tak C_6^Z je i minorem $(G, \mathcal{C})$, čímž je důkaz hotov. □

Nyní již můžeme dokázat hlavní větu této sekce.

Důkaz Věty 1.1. .

$\Longrightarrow$

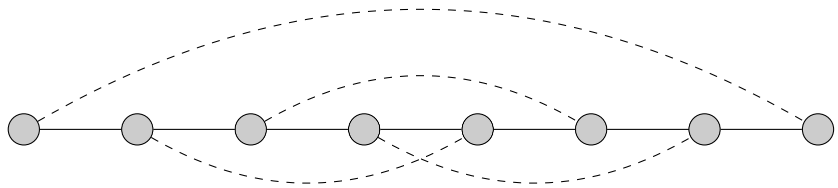
Pokud je $(G, \mathcal{C})$ klastrově rovinný, pak podle lemmatu 1.2 neobsahuje C_6^Z jako minor, neboť klastrový minor klastrově rovinného grafu je klastrově rovinný (viz důsledek **??**).

$\Longleftarrow$

Dokazujme sporem, tedy $(G, \mathcal{C})$ není klastrově rovinný, ale neobsahuje C_6^Z jako minor. Podle lemmatu 1.4 není graf konfliktů bipartitní, tedy obsahuje lichou kružnici, což podle tvrzení 1.6 říká, že $(G, \mathcal{C})$ má jako minor C_6^Z, což je spor s tím, že jsme předpokládali, že takový minor nemá. □

1.2 Cesty s klastry velikosti 2

Pro cesty uvedeme o něco slabší výsledek, a to že zakázaných minorů je konečně mnoho.

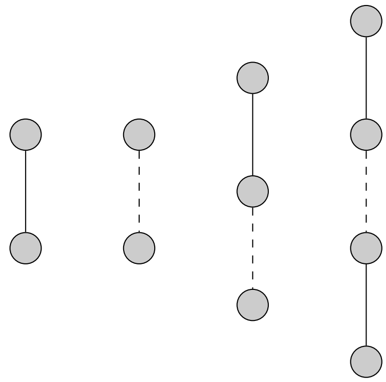


Obrázek 1.9: Příklad klastrové cesty $(G, \mathcal{C})$, kde hrany jsou vyznačeny nepřerušovanou čarou a klastry přerušovanou. Po nahrazení klastrů saturátorem S graf $G \cup S$ obsahuje dělení $K_{3,3}$.

Věta 1.7. *Minimálních zakázaných minorů pro cesty s klastry velikosti 2 je konečně mnoho.*

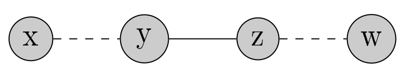
Důkaz. Mějme klastrový graf $(G, \mathcal{C})$, kde G je cesta. Vezměme saturátor S a zkoumejme graf $G \cup S$. V tomto grafu mají vrcholy stupeň nejvýše 3. Tudíž zde nemůže být dělení K_5, ale může být dělení $K_{3,3}$. (viz obrázek 1.9) Jako minor zde můžou být obě možnosti bránící rovinnosti. Využíváme zde, že $(G, \mathcal{C})$ je klastrově rovinný $\iff$ $G \cup S$ rovinný.

Stačí se ptát, jak vypadají spojnice v dělení $K_{3,3}$ a jak je můžeme zredukovat pomocí minorových operací. Pomocí minorových operací dosáhneme nejprve, že se zbavíme všeho nepotřebného, tedy vrcholů, hran a klastrů (resp. saturovaných hran) nepodílejících se na dělění $K_{3,3}$. Dále si spojnice zjednodušíme do podoby takové, že to jsou cesty, kde se střídájí hrany a klastry. Pokud totiž máme na spojnici více hran za sebou, tak pomocí kontrakcí se zbavíme nadbytečných hran. Nyní tvrdíme, že spojnice dokážeme zredukovat pomocí minorových operací do jednoho z následujících 4 typů:
1) jedna hrana
2) jeden klastr
3) klastr a hrana
4) hrana, klastr a hrana



Obrázek 1.10: Typy spojnic v dělení $K_{3,3}$. Plná čára představuje hranu, čárkovaná znamená klastr.

Toho dosáhneme následovně. Pokud máme na spojnici následující situaci, že máme klastr $K_1 = \{x, y\}$, hranu $e = \{y, z\}$ a klastr $K_2 = \{z, w\}$ za sebou viz obrázek 1.11, tak sjednotíme klastry K_1 a K_2. Ty spojuje právě jedna hrana, takže sjednocení můžeme provést bez problémů. Nyní jen smažeme vrcholy y a z a zbyde nám jen klastr $\{x, w\}$. Opakováním tohoto postupu každou spojnici zredukujeme na jeden ze čtyř výše uvedených typů. Grafů, jenž jsou dělením $K_{3,3}$ a mají tyto typy spojnic, je konečně mnoho. $\square$



Obrázek 1.11: Hledaná struktura, která jde zjednodušit pomocí minorových operací.

1.3 Vztah klastrových kružnic a klastrových cest

Na závěr kapitoly ukážeme, že klastrová rovinnost pro klastrové kružnice lze převést na ekvivalentní problém klastrové rovinnosti pro klastrové cesty, tedy kružnice jsou v tomto smyslu jednodušší. V této části nemáme omezení pro klastrovou hierarchii. V teorii grafů je tento výsledek trochu protiintuitivní, neboť obvykle grafové problémy jsou snadnější pro cesty než pro kružnice.

Napřed ale ještě potřebuje definovat jednu operaci s klastrovými grafy.

Definice 1.8. Mějme klastrový graf $(G, \mathcal{C})$, kde $G = (V, E)$, a hranu $e = \{x, y\}$. *Dělením hrany* e označujeme operaci, kdy z G odebereme e a nahradíme ji dvěma hranami $e' = \{x, w\}, e'' = \{w, y\}$, kde w je nový vrchol. Obdržíme tedy klastrový graf $(G', \mathcal{C}')$, kde $G' = (V \cup \{w\}, (E \setminus \{e\}) \cup \{e', e''\})$. $\mathcal{C}'$ obdržíme z $\mathcal{C}$ následovně:

Označme L nejmenší klastr, kam přijde w. Jestliže x a y patřili do stejných klastrů (nejmenší označme K), tak $L = K$. Pokud však e vedla mezi dvěma klastry K_1 a K_2, tak v případě, že jeden z klastrů je potomkem druhého (ne nutně přímým), tak pro L platí $K_1 \subseteq L \subseteq K_2$, a v případě, že klastry K_1 a K_2 jsou disjuktní, tak pro L platí, buď $K_1 \subseteq L \subseteq K_{1,2}$, nebo platí $K_2 \subseteq L \subseteq K_{1,2}$, kde $K_{1,2}$ je nejmenší klastr obsahující K_1 a K_2.

Takto definované dělení zachovává klastrovou rovinnost.

Lemma 1.9. *Pokud $(G, \mathcal{C})$ vznikne z $(G', \mathcal{C}')$ operací dělení hrany a $(G', \mathcal{C}')$ je klastrově rovinný, potom i $(G, \mathcal{C})$ je klastrově rovinný.*

Důkaz. Vezměme klastrové nakreslení $(G', \mathcal{C}')$. Vrchol w vzniklý dělením hrany e jednoduše dokreslíme na její nakreslení tam podle toho, do jakých klastrů jsme jej zařadili. Podle toho, kam jsme podle definice vrchol w mohli přiřadit, jsme obdrželi klastrové nakreslení $(G, \mathcal{C})$. $\square$

Pro následující větu předpokládejme, že každý vrchol tvoří jednovrcholový klastr a že máme též klastr obsahující všechny vrcholy. To nám zajišťuje, že množina všech vrcholů je rozdělena aspoň do dvou maximální podklastrů.

Věta 1.10. *Mějme klastrový graf $(G, \mathcal{C})$, kde G je kružnice, pak existuje klastrový $(G', \mathcal{C}')$, kde G' je cesta a takový, že $(G, \mathcal{C})$ je klastrovým minorem $(G', \mathcal{C}')$. Navíc $(G, \mathcal{C})$ je klastrově rovinný $\iff$ $(G', \mathcal{C}')$ je klastrově rovinný.*

Důkaz. Vezměme si dva maximální podklastry klastru obsahujícího všechny vrcholy (značme jej K) takové, že mezi nimi vede hrana (takové existují, protože G je souvislý), označme ji e. Tuto hranu dvakrát podrozdělíme a vzniklé vrcholy w, w' přiřadíme do K. Hranu spojující w a w' můžeme nahradit klastrem velikosti 2, neboť w a w' jsou obsažené ve stejných klastrech. Tento výsledný klastrový graf je hledaným $(G', \mathcal{C}')$, neboť G' je cesta a $(G, \mathcal{C})$ je klastrovým minorem $(G', \mathcal{C}')$ (provedou se inverzní operace, tedy nahrazení klastru hranou, kontrakce, přiřazení vrcholu do klastru a opět kontrakce).

Jelikož všechny použité operace zachovávají klastrovou rovinnost, tak máme relativně zdarma, že $(G, \mathcal{C})$ je klastrově rovinný právě tehdy, když $(G', \mathcal{C}')$ je klastrově rovinný. $\square$