

1 Kapitola 1

2 Speciální instance

3 V této kapitole se podíváme na omezené instance klastrové rovinnosti. Klastrová
4 rovinnost se dá omezit dvěma způsoby, jednak omezením o jakých grafech
5 budeme uvažovat, a jednak omezením klastrové hierarchie. První omezenou
6 třídou klastrových grafů jsou kružnice s klastry velikosti 2 a druhou třídou
7 budou cesty s klastry velikosti 2. Pro oba případy uvedeme věty o počtu
8 zakázaných minorů.

9 1.1 Kružnice s klastry velikosti 2

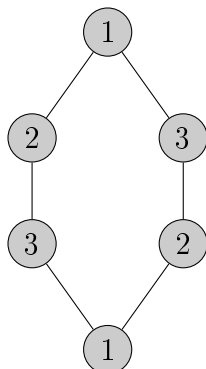
10 Hlavním výsledkem této části je výsledek ukazující, že jediným zakázaným
11 minimálním minorem pro kružnice s klastry velikosti 2 je šesticykus se třemi
12 klastry, kde se vrcholy střídají v jakém klastru jsou (viz obrázek 1.1). Výsle-
13 dek je jak pro nakreslenou, tak i nenakreslenou verzi, protože kružnice má
14 až na symetrii jen jedno nakreslení.

15 **Věta 1.1.** *Nechť (G, \mathcal{C}) je instance, kde G je kružnice a všechny klastry mají*
16 *velikost 2. (G, \mathcal{C}) je klastrově rovinný $\iff (G, \mathcal{C})$ neobsahuje C_6^Z jako minor.*

17 Před důkazem věty ukážeme, že C_6^Z není klastrově rovinný.

18 **Lemma 1.2.** *C_6^Z není klastrově rovinný.*

19 *Důkaz.* Důkaz provedeme pro nenakreslenou verzi. Jelikož klastry jsou veli-
20 kosti 2, můžeme nahrazovat klastry hranami. Nahrazení všech klastrů hra-
21 nami však vede přímo na $K_{3,3}$. A protože $K_{3,3}$ není rovinný graf, tak nemůže
22 C_6^Z být klastrově rovinný. \square



Obrázek 1.1: Čísla označují, do jakého klastru vrchol patří. Dále v textu bude tento graf označován jako C_6^Z , kde Z značí, že se jedná o zakázaný minor.

23 U kružnice můžou saturátorové hrany vést pouze vnitřkem nebo vnějškem
 24 (myšleno v nakreslení). Pro dvě hrany ze saturátoru má smysl se bavit o tom,
 25 zda mohou vést na stejné straně kružnice nebo nikoliv. To nás vede k pojmu
 26 grafu konfliktů, který reprezentuje konflikty mezi hranami ze saturátoru.

27 **Definice 1.3.** Klastry $\{x_1, x_2\}$ a $\{y_1, y_2\}$ mají spolu *konflikt*, pokud se na
 28 kružnici vyskytují v následujícím pořadí $x_1, \dots, y_1, \dots, x_2, \dots, y_2, \dots$. Graf kon-
 29 fiktů je reprezentací konfliktů saturátorových hran, kde vrcholy jsou klastry
 30 a hrany představují konfliktní klastry. Graf konfliktů pro klastrový graf (G, \mathcal{C})
 31 budeme značit $GK_{(G, \mathcal{C})}$

32 Získáváme ihned kritérium, kdy kružnice s klastry velikosti 2 je klastrově
 33 rovinný graf. Je to právě tehdy, když graf konfliktů je bipartitní. Dokážeme
 34 si to jako lemma.

35 **Lemma 1.4.** *Kružnice s klastry velikosti 2 je klastrově rovinná právě tehdy,*
 36 *když graf konfliktů je bipartitní.*

37 *Důkaz.* Klastř, jenž je tvořen sousedními vrcholy, zjevně nemůže být s ji-
 38 ným klastrem v konfliktu podle definice. Vrchol příslušného klastru v grafu
 39 konfliktů je izolovaný. Stačí tedy uvažovat, že vrcholy v klastru nejsou sou-
 40 sedními.

41 \implies

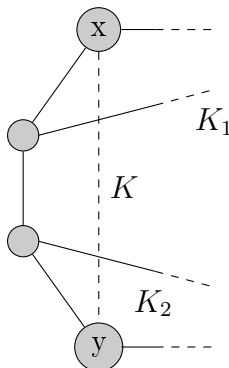
42 Místo klastřů uvažujme hrany saturátoru, ty mohou vést, buď vnitřní
 43 stěnou kružnice, nebo vnější stěnou kružnice. Hrana v grafu konfliktů vede

44 mezi jeho vrcholy právě tehdy, pokud saturované hrany příslušných klastrů
 45 vedou různými stěnami. To proto, že podle definice konfliktu, kdyby vedly
 46 stejnou stěnou, tak by se musely křížit, což by byl spor s tím, že máme
 47 klastrové nakreslení. Jako partity označíme klastry, jež vedou, buď vnější
 48 stěnou (jedna partita), nebo vnitřní stěnou (druhá partita). Izolované vrcholy
 49 dáme libovolně partity.

50 Opačná implikace se dokáže obdobně. \square

51 Uvedeme ještě jedno lemma, ukazující vztah mezi kružnicí v grafu kon-
 52 fliktů a odpovídající strukturou v klastrovém grafu.

53 **Lemma 1.5.** *Nechť (G, \mathcal{C}) je klastrový graf, G je kružnice a \mathcal{C} má klastry*
 54 *velikosti 2. Nechť Q je indukovaná kružnice v grafu konfliktů $GK_{(G, \mathcal{C})}$ a nechť*
 55 *$K = \{x, y\}$ klastř obsažený v Q . Nechť A, B jsou dvě cesty v G spojující x, y*
 56 *a K_1, K_2 jsou sousedi K v Q . Když se omezíme na vrcholy klastrů z Q , pak*
 57 *BÚNO jediné dva vrcholy v A jsou z klastrů K_1 a K_2 (po jednom vrcholu z*
 58 *každého klastru a zbylé vrcholy leží v B .*



Obrázek 1.2: Znázornění, čemu odpovídá kružnice v grafu konfliktů. Nalevo od K je část A , napravo je část B .

59 Struktura v klastrovém grafu, která odpovídá kružnici v grafu konfliktů,
 60 se jinými slovy „chová slušně a není divoce rozházená po grafu“.

61 *Důkaz.* Sporem předpokládejme, že v části A , kde klastry K_1 a K_2 mají
 62 po jednom vrcholu, je ještě jeden jiný klastř K_3 . Ten musí mít v A oba
 63 své vrcholy, jinak by byl v konfliktu s K , což je spor s tím, že K má jen
 64 dva sousedy v Q . Uvažujme cestu v Q z K_1 do K_2 neobsahující K (tedy

65 přes K_3). Prvním krokem se z K_1 dostaneme do druhé části. Po cestě se ale
66 musíme vrátit zpět do části A kvůli klastru K_3 pomocí klastru K_i dříve, než
67 se vrátíme pomocí klastru K_2 . Klastř K_i ale musí být v konfliktu s klastrem
68 K , což je spor s tím, že K má jen sousedy K_1 a K_2 , K_i by podle všeho též
69 musel být sousedem K . \square

70 **Tvrzení 1.6.** *Graf konfliktů $GK_{(G,C)}$ obsahuje lichou kružnici \implies instance*
71 *(G,C) obsahuje zakázaný minor C_6^Z .*

72 *Důkaz.* Důkaz indukcí podle velikosti nejkratší liché kružnice v $GK_{(G,C)}$. V
73 základu indukce ukážeme, že liché kružnici velikosti 3 v grafu konfliktů odpoví
74 dá C_6^Z . V indukčním kroku pak pomocí minorových operací zredukujeme
75 délku liché kružnice o dva klastry.

76 Základ indukce: Mějme trojcyklus v grafu konfliktů. Mějme příslušné
77 klastry $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}, \{z_1, z_2\}$. Podle definice konfliktů máme následující
78 pořadí vrcholů:

79 Podle konfliktu klastřů $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}$ je pořadí x_1, y_1, x_2, y_2 .

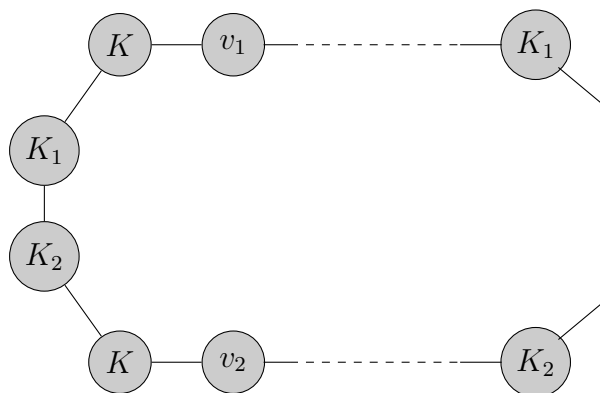
80 Podle konfliktu klastřů $\{y_1, y_2\}, \{z_1, z_2\}$ je pořadí y_1, z_1, y_2, z_2 .

81 Podle konfliktu klastřů $\{x_1, x_2\}, \{z_1, z_2\}$ je pořadí x_1, z_1, x_2, z_2 .

82 Dohromady máme pořadí $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, což je C_6^Z . Základ indukce
83 je tedy dokázán.

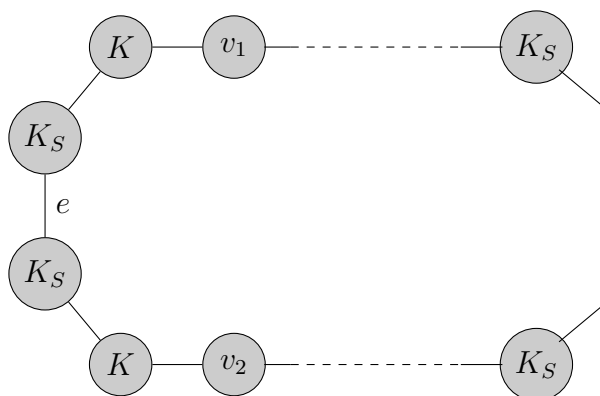
84 Nyní předpokládejme, že chceme dokázat tvrzení pro lichou kružnici ve-
85 likosti k , a že tvrzení platí pro kružnici o 2 menší.

86 Indukční krok: Podle lemmatu 1.5 máme v (G, C) strukturu konfliktních
87 klastřů odpovídající liché kružnici v grafu konfliktů. Předpokládejme, že jsme
88 si (G, C) zjednodušili pomocí minorových operací tak, že nemáme nic jiného
89 než klastry získané z liché kružnice v grafu konfliktů.



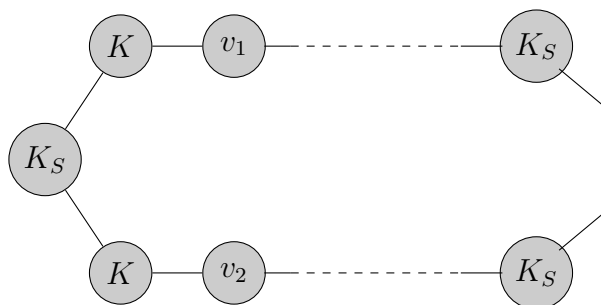
Obrázek 1.3: Výchozí stav, v_1, v_2 jsou sousedé vrcholů klastru K .

90 Provedeme následující posloupnost minorových operací. Vezměme libo-
 91 volný klaster K . Klastery jež jsou s ním v konfliktu (K_1 a K_2), můžeme sjed-
 92 nodit (ubyl jeden klaster). Sjednocený klaster označme K_S .



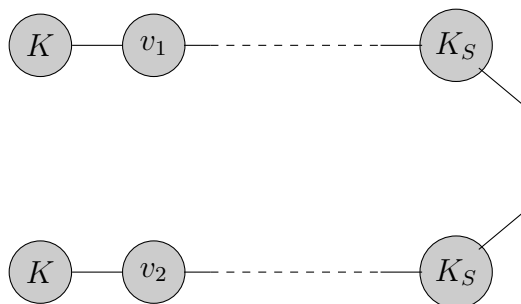
Obrázek 1.4: Sjednocení klastrů K_1 a K_2

93 V části, kde měly vrchol jen ony, tak sdílejí hranu e , tu můžeme po pro-
 94 vedení sjednocení zkontrahovat.



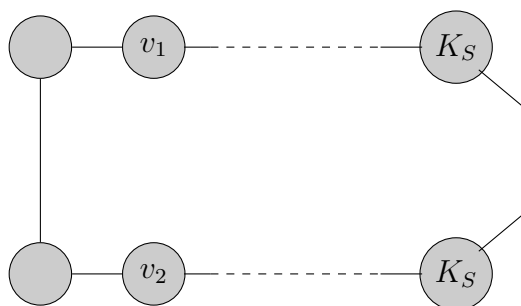
Obrázek 1.5: Kontrakce hrany e

95 Vrchol vzniklý kontrakcí odebereme. Nyní se nám kružnice přerušila.



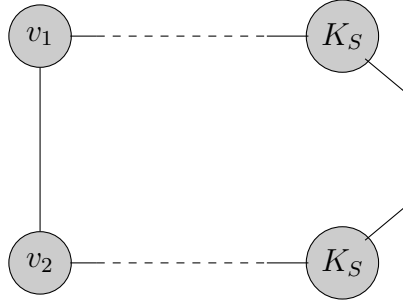
Obrázek 1.6: Odebrání vrcholu vzniklého kontrakcí

96 Přes rozdělení nám vede klastř K , pro nějž máme jedinou možnost, jak jej
97 nahradit hranou, tak to učiníme (jinými slovy, je to korektní i v nakreslené
98 verzi).



Obrázek 1.7: Nahrazení klastřu K hranou

99 Tuto hranu můžeme rovnou zkontrahovat a vzniklý vrchol přidáme do jed-
 100 noho z klastrů (opět sjednocení klastrů a ubytí druhého klastru), které s ním
 101 mají sousední vrchol. Hranu, která jej spojovala se sousedem zkontrahujeme.



Obrázek 1.8: Výsledný klastrový graf

102 Vzniklému klastrovému grafu (G', \mathcal{C}') odpovídá v grafu konfliktů lichá
 103 kružnice o velikosti $k - 2$. Tedy (G', \mathcal{C}') obsahuje podle indukčního předpo-
 104 kladu C_6^Z jako klastrový minor. A jelikož (G', \mathcal{C}') je minorem (G, \mathcal{C}) , tak C_6^Z
 105 je i minorem (G, \mathcal{C}) , čímž je důkaz hotov. \square

106 Nyní již můžeme dokázat hlavní větu této sekce.

107 *Důkaz Věty 1.1. .*

108 \implies

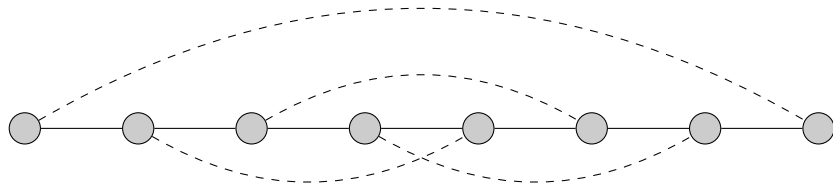
109 Pokud je (G, \mathcal{C}) klastrově rovinný, pak podle lemmatu 1.2 neobsahuje C_6^Z jako
 110 minor, neboť klastrový minor klastrově rovinného grafu je klastrově rovinný
 111 (viz důsledek ??).

112 \impliedby

113 Dokazujeme sporem, tedy (G, \mathcal{C}) není klastrově rovinný, ale neobsahuje C_6^Z
 114 jako minor. Podle lemmatu 1.4 není graf konfliktů bipartitní, tedy obsahuje
 115 lichou kružnici, což podle tvrzení 1.6 říká, že (G, \mathcal{C}) má jako minor C_6^Z , což
 116 je spor s tím, že jsme předpokládali, že takový minor nemá. \square

117 1.2 Cesty s klastry velikosti 2

118 Pro cesty uvedeme o něco slabší výsledek, a to že zakázaných minorů je
 119 konečně mnoho.



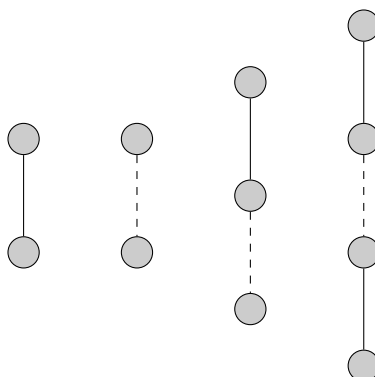
Obrázek 1.9: Příklad klastrové cesty (G, \mathcal{C}) , kde hrany jsou vyznačeny nepřerušovanou čarou a klastry přerušovanou. Po nahrazení klastrů saturátorem S graf $G \cup S$ obsahuje dělení $K_{3,3}$.

120 **Věta 1.7.** *Minimálních zakázaných minorů pro cesty s klastry velikosti 2 je*
121 *konečně mnoho.*

122 *Důkaz.* Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}) , kde G je cesta. Vezměme saturátor S a
123 zkoumejme graf $G \cup S$. V tomto grafu mají vrcholy stupeň nejvýše 3. Tudíž
124 zde nemůže být dělení K_5 , ale může být dělení $K_{3,3}$. (viz obrázek 1.9) Jako
125 minor zde můžou být obě možnosti bránící rovinnosti. Využíváme zde, že
126 (G, \mathcal{C}) je klastrově rovinný $\iff G \cup S$ rovinný.

127 Stačí se ptát, jak vypadají spojnice v dělení $K_{3,3}$ a jak je můžeme zredu-
128 kovat pomocí minorových operací. Pomocí minorových operací dosáhneme
129 nejprve, že se zbavíme všeho nepotřebného, tedy vrcholů, hran a klastrů
130 (resp. saturovaných hran) nepodílejících se na dělení $K_{3,3}$. Dále si spojnice
131 zjednodušíme do podoby takové, že to jsou cesty, kde se střídají hrany a
132 klastry. Pokud totiž máme na spojnici více hran za sebou, tak pomocí kon-
133 trakcí se zbavíme nadbytečných hran. Nyní tvrdíme, že spojnice dokážeme
134 zredukovat pomocí minorových operací do jednoho z následujících 4 typů:

- 135 1) jedna hrana
- 136 2) jeden klastr
- 137 3) klastr a hrana
- 138 4) hrana, klastr a hrana



Obrázek 1.10: Typy spojnic v dělení $K_{3,3}$. Plná čára představuje hranu, čárkovaná znamená klastr.

139 Toho dosáhneme následovně. Pokud máme na spojnici následující situaci,
 140 že máme klastr $K_1 = \{x, y\}$, hranu $e = \{y, z\}$ a klastr $K_2 = \{z, w\}$ za sebou
 141 (viz obrázek 1.11), tak sjednotíme klastry K_1 a K_2 . Ty spojuje právě jedna
 142 hrana, takže sjednocení můžeme provést bez problémů. Nyní jen smažeme
 143 vrcholy y a z a zbyde nám jen klastr $\{x, w\}$. Opakováním tohoto postupu
 144 každou spojnici zredukujeme na jeden ze čtyř výše uvedených typů. Grafů,
 145 jenž jsou dělením $K_{3,3}$ a mají tyto typy spojnic, je konečně mnoho. \square



Obrázek 1.11: Hledaná struktura, která jde zjednodušit pomocí minorových operací.

146 1.3 Vztah klastrových kružnic a klastrových cest

147 Na závěr kapitoly ukážeme, že klastrová rovinnost pro klastrové kružnice lze
 148 převést na ekvivalentní problém klastrové rovinnosti pro klastrové cesty, tedy
 149 kružnice jsou v tomto smyslu jednodušší. V této části nemáme omezení pro
 150 klastrovou hierarchii. V teorii grafů je tento výsledek trochu protiintuitivní,
 151 neboť obvykle grafové problémy jsou snadnější pro cesty než pro kružnice.

152 Napřed ale ještě potřebuje definovat jednu operaci s klastrovými grafy.

Definice 1.8. Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}) , kde $G = (V, E)$, a hranu $e = \{x, y\}$. *Dělením hrany e* označujeme operaci, kdy z G odebereme e a nahradíme ji dvěma hranami $e' = \{x, w\}, e'' = \{w, y\}$, kde w je nový vrchol. Obdržíme tedy klastrový graf (G', \mathcal{C}') , kde $G' = (V \cup \{w\}, (E \setminus \{e\}) \cup \{e', e''\})$. \mathcal{C}' obdržíme z \mathcal{C} následovně:

Označme L nejmenší klastř, kam přijde w . Jestliže x a y patřili do stejných klastřů (nejmenší označme K), tak $L = K$. Pokud však e vedla mezi dvěma klastřy K_1 a K_2 , tak v případě, že jeden z klastřů je potomkem druhého (ne nutně přímým), tak pro L platí $K_1 \subseteq L \subseteq K_2$, a v případě, že klastřy K_1 a K_2 jsou disjunktní, tak pro L platí, buď $K_1 \subseteq L \subseteq K_{1,2}$, nebo platí $K_2 \subseteq L \subseteq K_{1,2}$, kde $K_{1,2}$ je nejmenší klastř obsahující K_1 a K_2 .

Takto definované dělení zachovává klastrovou rovinnost.

Lemma 1.9. *Pokud (G, \mathcal{C}) vznikne z (G', \mathcal{C}') operací dělení hrany a (G', \mathcal{C}') je klastrově rovinný, potom i (G, \mathcal{C}) je klastrově rovinný.*

Důkaz. Vezmeme klastrové nakreslení (G', \mathcal{C}') . Vrchol w vzniklý dělením hrany e jednoduše dokreslíme na její nakreslení tam podle toho, do jakých klastřů jsme jej zařadili. Podle toho, kam jsme podle definice vrchol w mohli přiřadit, jsme obdrželi klastrové nakreslení (G, \mathcal{C}) . \square

Pro následující větu předpokládejme, že každý vrchol tvoří jednovrcholový klastř a že máme tež klastř obsahující všechny vrcholy. To nám zajišťuje, že množina všech vrcholů je rozdělena aspoň do dvou maximální podklastřů.

Věta 1.10. *Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}) , kde G je kružnice, pak existuje klastrový (G', \mathcal{C}') , kde G' je cesta a takový, že (G, \mathcal{C}) je klastrovým minorem (G', \mathcal{C}') . Navíc (G, \mathcal{C}) je klastrově rovinný $\iff (G', \mathcal{C}')$ je klastrově rovinný.*

Důkaz. Vezmeme si dva maximální podklastřy klastřů obsahujícího všechny vrcholy (značme je K) takové, že mezi nimi vede hrana (takové existují, protože G je souvislý), označme ji e . Tuto hranu dvakrát podrozdělíme a vzniklé vrcholy w, w' přiřadíme do K . Hranu spojující w a w' můžeme nahradit klastřem velikosti 2, neboť w a w' jsou obsaženy ve stejných klastřech. Tento výsledný klastrový graf je hledaným (G', \mathcal{C}') , neboť G' je cesta a (G, \mathcal{C}) je klastrovým minorem (G', \mathcal{C}') (provedou se inverzní operace, tedy nahrazení klastřů hranou, kontrakce, přiřazení vrcholu do klastřů a opět kontrakce).

Jelikož všechny použité operace zachovávají klastrovou rovinnost, tak máme relativně zdarma, že (G, \mathcal{C}) je klastrově rovinný právě tehdy, když (G', \mathcal{C}') je klastrově rovinný. \square