Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Filip Šedivý

Klastrová rovinnost

Informatický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jelínek Vít, Ph.D.

Studijní program: Informatika

Studijní obor: obecná informatika

Praha 2015

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavženíí licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Klastrová rovinnost

Autor: Filip Šedivý

Katedra / Ústav: Informatický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jelínek Vít, Ph.D. , Informatický ústav Univerzity Karlovy

Abstrakt: Práce se zabývá problémem klastrové rovinnosti a ubírá se dvěma směry. Jedním směrem je otázka výpočetní složitosti, kde ukážeme, jak klastrovou rovinnost řešit v lineárním nedeterministickém čase vzhledem k počtu vrcholů vstupního grafu. Druhým směrem je charakterizace omezených verzí klastrové rovinnosti a to pro klastrové grafy, kde klastry mají velikost 2 a grafem je kružnice v jednom případě a v druhém je to cesta. Charakterizaci provedeme pomocí operací redukucící klastrový graf a o těchto operacích dokážeme, že zachovávají klastrovou rovinnost. Pro tento účel jsem definoval pojem klastrového minoru, který mi umožnil studovat minimální klastrově nerovinné instance. Kromě toho uvedeme i již známe výsledky o tomto problému.

Klíčová slova: Klastrová rovinnost, klastrové minory, výpočetní složitost, charakterizace minimálních klastrových grafů bez nakreslení

Title: Clustered planarity

Author: Filip Šedivý

Department: Computer Science Institute of Charles University

Supervisor: RNDr. Jelínek Vít, Ph.D. , Computer Science Institute of Charles University

Abstract: Thesis looks into a problem of clustered planarity and has two ways. First way is question about computational complexity where we show how clustered planarity could be solved in linear nondeterministic time in consideration of number of vertices of input graph. Second way is characterization of bounded version of clustered planarity and so for clustered graphs where clusters have size two and graphs is cycle in first case and in second case it is path. We make a characterization using operation which reduce clustered graph and we show about them that they preserve clustered planarity. For this purpose I define a notion of clustered minor that it is help me to study minimal nonclustered planarity instances. We also mention known results about this problem.

Keywords: Clustered planarity, clustered minors, computational complexity, characterization of minimal clustered graphs without embedding

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Problém existence rovinného klastrového nakreslení grafu (dále jen klastrová rovinnost) je jedním možným zobecněním klasické grafové rovinnosti pro případ, kdy kromě vrcholů a hran máme hierarchii skupin vrcholů. Skupinu vrcholů nazýváme klastrem. Pro klastrovou rovinnost není znám polynomiální algoritmus, a není známo, zda je tento problém NP-úplný.

Definice 1.1. Mějme graf $G = (V, H)$. Pod *klastrem* C budeme uvažovat podmnožinu vrcholů $C \subseteq V$.
Klastrovou hierarchií jest množina klastrů, kde pro každé dva klastry C_1 a C_2 platí následující

- buď $C_1 \cap C_2 = \emptyset$
- nebo $C_1 \subset C_2$

Klastrový graf je dvojice $(G, \mathcal{C})$, kde G je graf a $\mathcal{C}$ je klastrová hierarchie.

Formálně se můžeme dívat na klastrovou hierarchii jako podmnožinu $\mathcal{P}(V)$. To může vést k tomu, že bychom si mohli myslet, že klastrů může být velmi mnoho vzhledem k velikosti původního grafu. V kapitole složitost ukážeme, že počet klastrů je lineární vzhledem k počtu vrcholů grafu G. V některých situacích se hodí předpokládat, že množina všech vrcholů vždy tvoří klastr a též jednotlivé vrcholy tvoří klastry. Například se tento předpoklad hodí v důkazu o počtu klastrů.

Definice 1.2. Pod *klastrovým nakreslením* rozumíme to, že vrcholy a hrany nakreslíme do roviny jako u rovinného nakreslení a navíc doplníme nakreslení klastrů.

Nakreslením klastru v rovině je topologická kružnice. Ve vnitřku kružnice leží pouze vrcholy z daného klastru a hrany grafu smí protínat hranici nakreslení klastru nejvýše jedenkrát. Pro libovolné dva klastry se nesmí stát, že by se jejich nakreslení protínala. Nakreslení klastru K budeme značít γ_K

Klastrový graf $(G, \mathcal{C})$ je *klastrově rovinný* pokud existuje nějaké jeho klastrové nakreslení.

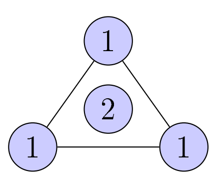
Omezení pro hrany v nakreslení klastru nám zaručuje, že hrany vedoucí mezi vrcholy klastru leží celé ve vnitřku nakreslení klastru. Podobně hrany spojující vrcholy mimo klastr musí ležet ve vnějšku. Hrana protínající nakreslenou kružnici tedy musí spojovat vrchol z klastru s vrcholem mimo klastr.

Nyní můžeme úvest definici rozhodovacího problému klastrové rovinnosti. Klastrová rovinnost má dvě základní verze. A to nakreslená a nenakreslená verze.

Definice 1.3. V *nenakreslené verze klastrové rovinnosti* máme rozhodnout zda pro daný klastrový graf existuje jeho klastrové nakreslení.

U *nakreslené verze klastrové rovinnosti* máme na vstupu nakreslení grafu a klastrovou hierarchii a máme rozhodnout zda lze dokreslit klastry, tak abychom obdrželi klastrové nakreslení.

Nakreslená verze klastrové rovinnosti je už na pohled omezena silnější podmínkou a to nakreslením vstupního grafu. Pokud tedy nelze dokreslit klastry tak, abychom obdrželi klastrové nakreslení, pak klastrový graf stále může být klastrově rovinný. Viz následující příklad



Obrázek 1.1: Čísla označují, do jakého klastru vrchol patří. Na první pohled je zřejmé, že není možné dokreslit klastr 1 tak, aby vrchol označený jako 2 nebyl ve vnitřku nakreslení klastru, ale je také zjevné, že příslušný klastrový graf je klastrově rovinný.

Nyní definujeme několik pojmů, které jsou potřeba pro uvedení věty dávající kombinatorický pohled na problém klastrové rovinnosti.

Definice 1.4. Mějme klastrový graf $(G[V,E],\mathcal{C})$. Klastr K je *souvislý* pokud graf indukovaný na vrcholech klastru je souvislý.

Definice 1.5. Mějme klastrový graf $(G[V,E],\mathcal{C})$. *Saturátor* S je podmnožina $\binom{V}{2} \setminus E$ taková, že každý klastr je v $(G[V,E \cup S],\mathcal{C})$ souvislý.
Mejmě nakreslení grafu G, označme jej ρ. *Nakreslený saturátor* S je množina nakreslených hran takových, že v nakreslení $\rho \cup S$ je každý každý klastr souvislý.

Definice 1.6. Mějme klastrový graf $(G[V,E],\mathcal{C})$.V nakreslení klastrového grafu rozumíme *dírou* kružnici v grafu ležící v klastru K takovou, že v nakreslení γ_K je uvnitř nakreslení kružnice vrchol nepatřící do klastru K.

Větu uvedeme zvlášť pro nakreslenou verzi a zvlášť pro nenakreslenou verzi.

Věta 1.7. *Mějme nakreslenou verzi klastrové rovinnosti. Nakreslený klastrový graf* $(G,\mathcal{C})$ *je klastrově rovinný právě tehdy, když existuje nakreslený saturátor* S *takový, že* $(G \cup S,\mathcal{C})$ *nemá díru.*

Věta 1.8. *Mějmene nakreslenou verzi klastrové rovinnosti. Klastrový graf* $(G,\mathcal{C})$ *je klastrově rovinný právě tehdy, když existuje saturátor* S *takový, že* $G \cup S$ *má rovinné nakreslení, v němž není díra vzhledem k* $(G \cup S,\mathcal{C})$.

1.1 Aplikace klastrové rovinnosti

Klastrová rovinnost nachází aplikaci například při vizualizace různých sítí, grafů, apod., kde je potřeba seskupovat uzly (vrcholy, ...) do celků.

Kapitola 2

Rešerše

V této kapitole seznámíme se známými výsledky v oblasti klastrové rovinnosti. Jedná se o výsledky, kde pro omezenou verzi klastrové rovinnosti je znám polynomiální deterministický algoritmus pro otestování klastrové rovinnosti, případně je znám i algoritmus pro nakreslení.

Věta 2.1. *Mějme klastrový graf* $(G, \mathcal{C})$*, kde každý klastr* $K \in \mathcal{C}$ *je souvislý. Pak existuje lineární deterministický algoritmus rozhodující zda* $(G, \mathcal{C})$ *je klastrově rovinný.*

Viz [1]

Tento výsledek užijeme později při konstrukci lineární nedeterministického algoritmu pro obecné klastrové grafy (viz kapitola Složitost).

Před uvedením dalšího výsledku uvedeme jednu definici tak zvaného úplně souvislého klastrové grafu

Definice 2.2. Klastrový graf $(G, \mathcal{C})$ je *úplně souvislý*, pokud pro každý klastr $K \in \mathcal{C}$ je K souvislý a i $V \setminus K$ je souvislý.

Věta 2.3. *Úplně souvislý klastrový graf* $(G, \mathcal{C})$ *je klastrově rovinný* $\iff$ G *je rovinný.*

Rovinnost lze rozpoznávat v lineárním čase. A navíc je i možné získat v tomto případě v lineárním čase klastrové nakreslení. Viz [2]

Věta 2.4. *Mějme klastrový graf* $(G, \mathcal{C})$ *a nakreslení grafu* G*. Pokud každý klastr* $K \in \mathcal{C}$ *indukuje nejvýše dvě komponenty , pak existuje lineární algoritmus pro rozhodnutí, zda* $(G, \mathcal{C})$ *je klastrově rovinný.*

Viz [3]

Věta 2.5. *Všechny nesouvislé klastry leží na stejné cestě začínající v koření klastrové hierarchie. Pak pro klastrový graf* $(G, \mathcal{C})$ *lze v kvadratickém čase rozhodnout, zda je klastrově rovinný.*

Věta 2.6. *Mějme klastrový graf* $(G, \mathcal{C})$*. Pro každý nesouvislý klastr* $K \in \mathcal{C}$ *platí, že jeho rodič a sourozenci v klastrové hierarchii jsou souvislé klastry.*

Pro obě věty viz [4]

Věta 2.7. *Mějme klastrový graf* $(G, \mathcal{C})$*. Každý nesouvislý klastr* K *má souvislého rodiče a souvislé komponenty* K *mají napojení mimo rodiče. Pak je algoritmus pracující v polynomiálním čase rozhodující o klastrové rovinnosti a dávající klastrové nakreslení v případě kladné odpovědi.*

Viz [5]

Další výsledky se týkají tak zvaných placatých klastrových grafů

Definice 2.8. Klastrový graf $(G, \mathcal{C})$ je *placatý* pokud všechny klastry kromě kořene (klastru obsahující všechny vrcholy) mají jako rodiče kořen (jednovrcholové klastry ignorujeme).

Věta 2.9. *Mějme placatý klastrový graf* $(G, \mathcal{C})$*, kde* G *je kružnice. Pokud každý klastr obsahuje nejvýše tři vrcholy, pak lze v polynomiálním čase rozhodnout, zda je* $(G, \mathcal{C})$ *klastrově rovinný.*

Viz [6]

Věta 2.10. *Mějme placatý klastrový graf* $(G, \mathcal{C})$*, kde* G *je kružnice. Pokud klastry jsou uspořádané do cyklu nebo cesty, pak lze v polynomiálním čase rozhodnout, zda je* $(G, \mathcal{C})$ *klastrově rovinný.*

Viz [7]

Věta 2.11. *Mějme placatý klastrový graf* $(G, \mathcal{C})$*, kde* G *je kružnice. Pokud klastry jsou uspořádané do nakresleného rovinného grafu, pak lze v polynomiálním čase rozhodnout, zda je* $(G, \mathcal{C})$ *klastrově rovinný.*

Viz [8]

Věta 2.12. *Mějme placatý klastrový graf* $(G, \mathcal{C})$*, kde* G *je 3-souvislý a všechny stěny mají velikost nejvýše 4, pak lze v polynomiálním čase rozhodnout, zda je* $(G, \mathcal{C})$ *klastrově rovinný.*

Viz [6]

Věta 2.13. *Mějme placatý klastrový graf* $(G, \mathcal{C})$*, kde všechny stěny mají velikost nejvýše 5 a mějme pevné nakreslení grafu* G*, pak lze v polynomiálním čase rozhodnout, zda je* $(G, \mathcal{C})$ *klastrově rovinný.*

Viz [9]

Věta 2.14. *Mějme klastrový graf* $(G, \mathcal{C})$*, kde klastry mají velikost nejvýše 3 (kromě kořene) a* G *je vrcholově 3-souvislý, pak lze v polynomiálním čase rozhodnout, zda je* $(G, \mathcal{C})$ *klastrově rovinný.*

Viz [6]

Věta 2.15. *Mějme klastrový graf* $(G, \mathcal{C})$*, kde klastry mají velikost nejvýše 3 (kromě kořene) a* G *je dělení vrcholově 3-souvislého multigrafu, který má* $\mathcal{O}(1)$ *vrcholů, a* G *má všechny stupně sudé , pak lze v polynomiálním čase rozhodnout, zda je* $(G, \mathcal{C})$ *klastrově rovinný.*

Tamtéž.

Kapitola 3

Složitost

V této kapitole ukážeme několik výsledků ohledně časové a prostorové složitosti. Problém klastrové rovinnosti patří do třídy NP z pohledu časové složitosti a z hlediska prostorového se dá řešit v prostoru $\mathcal{O}(n)$ na deterministickém stroji, kde n je počet vrcholů.

Jako výchozí model uvažujeme RAM s logaritmickou velikostí paměťových buněk vzhledem k velikosti vstupu a jednotkovou cenou za aritmetické operace s čísly, případně jeho nedeterministickou verzi nRAM. Tedy s polynomiálně velkými čísly lze uložit a operovat s nimi v konstantním prostoru a čase. Je to standardní model u tohoto typu problémů, díky němuž lze říci, že graf s n vrcholy a m hranami je uložen v prostoru $\mathcal{O}(n+m)$.

3.1 Datová reprezentace

Nejprve uvedeme možnosti reprezentace klastrového grafu a ujasníme vzhledem k čemu budeme vztahovat příslušnou složitost. Pro reprezentaci klastrové hierarchie se nabízí dvě možnosti.

1. Seznamy vrcholů
2. Strom, kde listy představují vrcholy a vnitřní uzly představují klastry
    - Zde předpokládejme, že kořen tohoto stromu reprezentuje klastr obsahující všechny vrcholy a listy přísluší vrcholům

V této kapitole budeme několikrát hovořit o maximálních podklastrech (vzhledem na inkluzi) v nějakém klastru K. Proto si zavedeme následující definici.

Definice 3.1. Pod *maximálním podklastrem vzhledem ke klastru* K myslíme klastr takový, že je přímým potomkem K v klastrové hierarchii.

Nejprve musíme určit, kolik klastrů se v klastrové hierarchii může nacházet. Pro zjednodušení budeme předpokládat, že v klastrové hierarchii máme vždy klastr obsahující všechny všechny vrcholy a každá jednovrcholová množina je též klastrem v klastrové hierarchii.

Tvrzení 3.2. *Maximální počet klastrů v grafu G s n $(n \geq 1)$ vrcholy je $2n-1$.*

Důkaz. Důkaz indukcí podle n:
Základ indukce : n=1
Zjevně platí.
Indukční předpoklad: Tvrzení platí pro $|V| < n$.
Indukční krok:
Díky předpokladům víme, že klastr, který obsahuje aspoň dva vrcholy, má aspoň dva maximální podklastry.
Máme graf s n vrcholy. Podle předpokladu máme klastr K obsahující všechny vrcholy. Ten obsahuje k vzájemně disjunktních maximálních podklastrů. Velikost i-tého klastru nechť je k_i. Každý z těchto klastrů obsahuje méně než n vrcholů. Platí pro ně tedy indukční předpoklad. Máme tedy:

$$\# \text{ max. počet klastrů } = 1 + \sum_{i=1}^{k}(2 * k_i - 1) = 1 + 2 * \sum_{i=1}^{k} k_i - k = 2n - k + 1$$

K maximalizování dojde pokud bude vždy $k = 2$. □

Velikost grafu na vstupu je $\mathcal{O}(n + m + |\mathcal{C}|)$, $\mathcal{C}$ je klastrová hierarchie a $|\mathcal{C}|$ její velikost. První varianta reprezentace klastrové hierarchie má za následek, že klastrová hierarchie zabírá prostor až $\mathcal{O}(n^2)$. Příkladem takové klastrové hierarchie je graf, kde klastry jsou postupně do sebe vnořené. První klastr obsahuje všechny vrcholy, druhý o vrchol méně, třetí o další vrchol, ... Druhá varianta reprezentace naproti tomu dává prostor $\mathcal{O}(n)$. Nejvíce nám tedy o časové a prostorové složitosti problému prozradí, když budeme složitost vyjadřovat vzhledem k počtu vrcholů vstupního grafu. Dostali jsme, že klastrový graf $(G, \mathcal{C})$, kde G je rovinný graf, lze reprezentovat v prostoru $\mathcal{O}(n)$.

Dále v textu budeme pracovat výhradně se stromovou reprezentací klastrové hierarchie.

3.2 časová složitost

Hlavním výsledkem této části je lineární nedeterministický algoritmus pro klastrovou rovinnost.

Tvrzení 3.3. *Problém rozhodnutí existence rovinného klastrového nakreslení patří do třídy NP.*

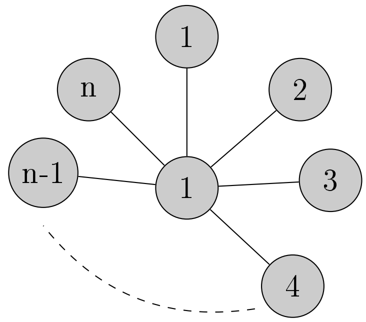
Důkaz. Využíváme toho, že ekvivalentním problémem ke klastrové rovinnosti je existence saturátoru. Ten nám zajistí, že klastry jsou souvislé. Saturátor dostaneme jako certifikát. Vzhledem k tomu, že klastrů je polynomiálně mnoho, tak ověření saturátoru se dá provést v polynomiálním čase (například otestováním souvislosti každého klastru zvlášť). Dále jsou algoritmy testující klastrovou rovinnost v polynomiálním čase (TODO doplnit reference), pokud klastry jsou souvislé. □

Tvrzení 3.4. *Pro problém klastrové rovinnosti je nedeterministický algoritmus, jehož časová složitost je $\mathcal{O}(n)$.*

Důkaz. Důkaz tohoto tvrzení je pouze doplněním důkazu, že klastrová rovinnost je v NP. Pro důkaz je třeba ukázat, že umíme ověřit souvislost všech klastrů v čase $\mathcal{O}(n)$, a pak že klastrová rovinnost se dá otestovat v lineárním čase pokud jsou klastry souvislé. Druhá část viz (TODO doplnit reference)

Prosté otestování všech klastrů zvlášť na souvislost vede na algoritmus s časovou složitostí $\mathcal{O}(n^2)$, protože klastrů je až lineárně mnoho a jejich celková velikost je až kvadratická. Pro zlepšení půjdeme cestou, kdy budeme testovat souvislost klastrů od nejmenších k největším. A po otestování klastru na souvislost daný klastr zkontrahujeme do jediného vrcholu, abychom při testování nadklastrů nemuseli opětovně procházet přes vrcholy otestovaného klastru.

Při testování klastru na souvislost použijeme klasický algoritmus na testování souvislosti. Hrany, které vedou ven z klastru, si při průchodu si je zapamatujeme, a po doběhnutí testu je aktualizujeme, tedy nasměrujeme je do nového vrcholu vzniklého kontrakcí klastru. Časová složitost pro jeden klastr C je $\mathcal{O}(n_C + m_C + \#\text{počet hran ven z klastru})$, kde n_C je počet vrcholů klastru a m_C je počet hran mezi vrcholy klastru. Problémem je, že tohle stále vede na algoritmus s kvadratickou časovou složitostí (TODO obrázek klastrového klastru dosvědčující tuto složitost). Problémem je, že se hrany můžou aktualizovat příliš často.



Obrázek 3.1: Klastrový graf, pro který poběží kvadraticky dlouho vzhledem k počtu vrcholů algoritmus s aktualizací hran. Je to hvězda, kde i-tý klastr je tvořen vrcholy s čísly nejvýše i. Důvodem neefektivity je to, že kontrakce vždy zasáhne středový vrchol hvězdy a všechny hrany se musí přesměrovat do nového vrcholu vzniklého kontrakcí.

Nyní uvedeme algoritmus s lineární časovou složitostí. Ten vychází z předchozího pokusu, kde jsme si zdánlivě nepomohli. Pro zlepšení musíme dosáhnout toho, že hrany opakovaně nenavštěvujeme. To provedeme následovně: Pro každý klastr budeme mít pomocný graf, kde vrcholy představují maximální podklastry daného klastru. Hrany v těchto pomocných grafech představují hrany jdoucí mezi klastry. Abychom mohli určit, do kterého pomocného grafu hrana patří, tak potřebujeme určit nejmenší klastr, který sdílejí vrcholy příslušné hrany. Navíc také potřebujeme znát podklastry, kam vrcholy patří. To je ale problém nejmenšího společného předka v zakořeněném stromu, kdy potřebné dotazy se provádí v konstantním čase a s lineárním předvýpočtem a využívající lineární prostor. Jednoduchou úpravou získame i ty potřebné informace (ty podklastry). (TODO přidat referenci na LCA a RMQ)

Náš algoritmus tedy napřed provede předvýpočet potřebný pro problém hledání minimální společného předka, kde se hrany rozdělí do pomocných grafů. Následně se pro každý pomocný graf provede test souvislosti. První část algoritmu pracuje v čase $\mathcal{O}(n)$ díky tomu, že umístění hrany do pomocného grafu umíme provést v konstantním čase a hran je pouze $\mathcal{O}(n)$. Druhá část algoritmu pracuje v čase $\sum_{C \in \mathcal{C}} (n_C + m_C) = \sum_{C \in \mathcal{C}} n_C + \sum_{C \in \mathcal{C}} m_C \leq |\mathcal{C}| + m = \mathcal{O}(n) + \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n)$, zde n_C značí počet vrcholů pomocného grafu a m_C počet jeho hran. $\square$

3.3 prostorová složitost

Z výsledků o časové složitosti můžeme říci, že můžeme klatrovou rovinnost rozhodovat v nedeterministickém prostoru o velikosti $\mathcal{O}(n)$. Ze Savitchovy věty (doplnit ref) plyne, že v deterministickém prostoru stačí nejvýše prostor velikosti $\mathcal{O}(n^2)$. Lepšího výsledku, ve smyslu, že potřebujeme méně prostoru, dosáhneme využitím vztahu tříd NTIME a DSPACE, který je $NTIME(t(n)) \subseteq DSPACE(t(n))$. Jelikož máme nedeterministický algoritmus pro klastrovou rovinnost pracující v lineárním čase, tak díky předešlému víme, že existuje deterministický algoritmus využívající pouze lineárně mnoho prostoru.

Tvrzení 3.5. *Klastrová rovinnost lze rozhodovat na RAMu s lineárně omezeným prostorem.*

Důkaz. □

Kapitola 4

Minorové operace

V této kapitole zavedeme operace s klastrovým grafem, které zachovávají klastrovou rovinnost. V závěru kapitoly zavedeme pojem klastrového minoru jakožto hlavní pojem této kapitoly, jenž v následující kapitole použijeme pro charakterizaci zakázaných minorů omezených problémů klastrové rovinnosti.

Definice 4.1. (minorové operace) Mějme klastrový graf $(G, \mathcal{C})$. Minorové operace na klastrových grafech jsou následující:

(Pozn.: Pokud se neřekne jinak, operace se smí provést v nakreslené i nenakreslené verzi)

Odebráním vrcholu v z klastrového grafu $(G, \mathcal{C})$ vznikne klastrový graf $(G', \mathcal{C}')$, kde $G' = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{f|$ hrana f obsahovala vrchol $v\}$ a $\mathcal{C}'$ je klastrová hierarchie, kde se z klastrů odebere vrchol v, pokud v nich byl.

Odebráním hrany e z klastrového grafu $(G, \mathcal{C})$ vznikne klastrový graf $(G', \mathcal{C})$, kde $G' = (V, E \setminus \{e\})$.

Odebráním klastru K z klastrového grafu $(G, \mathcal{C})$ vznikne klastrový graf $(G, \mathcal{C}')$, kde $\mathcal{C}' = C \setminus K$.

Kontrakcí hrany $e = \{x, y\}$ z klastrového grafu $(G, \mathcal{C})$ vznikne klastrový graf $(G', \mathcal{C})$, kde G' je graf , který obdržíme kontrakcí hrany e. Kontrakci můžeme provést za předpokladu, že koncové vrcholy x, y leží ve stejných klastrech.

Nahrazení klastru K o velikosti 2 hranou e z klastrového grafu klastrového grafu $(G, \mathcal{C})$ vznikne klastrový graf $(G', \mathcal{C}')$, kde $G' = (V, E \cup e)$ a $\mathcal{C}' = C \setminus K$. Nahrazení smíme provést pokud v grafu G' nevznikne minor $K_{3,3}$ nebo K_5. U nakreslené verze navíc jen pokud to lze provést jednoznačně.

Odebrání vrcholu v z klastru K z klastrového grafu $(G, \mathcal{C})$ vznikne klastrový graf $(G, \mathcal{C}')$, kde $\mathcal{C}'$ vznikne přeřazením vrcholu v z Klastru K do jeho rodiče. Tahle operace lze provést za předpokladu, že z vrcholu v vychází právě jedna hrana ven z K a K je nejmenší (vzhledem k inkluzi) klastr obsahující v.

Sjednocení disjuktních klastrů K_1 a K_2 z klastrového grafu $(G, \mathcal{C})$ vznikne klastrový graf $(G, \mathcal{C}')$, kde $C' := (C \setminus \{K_1, K_2\}) \cup \{K_1 \cup K_2\}$. Sjednocení klastrů můžeme provést za předpokladů, že m K_1, K_2 jsou dva minimální klastry (nemají podklastry) se společným rodičem, $K_1 \cup K_2$ neindukuje kružnici s vrcholem mimo $K_1 \cup K_2$ uvnitř. Jinými slovy $K_1 \cup K_2$ nemá díru v G (v nakreslené verzi). V nenakreslené verzi je podmínkou, že existuje nakreslení takové, že $K_1 \cup K_2$ nemá díru v G. Posledním předpokladem je, že existuje hrana spojující K_1 s K_2.

Název minorové operace je užit proto, že každá operace zjednoduše daný vstupní klastrový graf. Nyní vyzkoumáme dopad minorových operací na klastrový graf, konkrétně na dopad existence klastrového nakreslení.

Definice 4.2. Mějme klastrově rovinný klastrový graf $(G, \mathcal{C})$. Operace s klastrovým grafem *OP zachovává* klastrovou rovinnost pokud $(G, \mathcal{C})$ zůstane klastrově rovinný.

Tvrzení 4.3. *Minorové operace zachovávají klastrovou rovinnost.*

Důkaz. Mějme klastrový graf $(G, \mathcal{C})$ a jeho klastrové nakreslení ρ.

Odebrání vrcholu, hrany, klastru zachovává klastrovou rovinnost:
Mějme dáno klastrové nakreslení. Odebrání hrany zapříčiní jedině to, že se nemusí v daném nakreslení hrana kreslit. Podobně pro odebraný vrchol, kdy se odebereu hrany vedoucí do něj. Odebrány klastr se též prostě nenakreslí

Kontrakce hrany zachovává klastrovou rovinnost:
Mějme dáno klastrové nakreslení. Kontrakce je jen vlastně smrštění hrany do jediného bodu, jenž zastupuje vrchol vzniklý kontrakcí.

Nahrazení klastru hranou zachovává klastrovou rovinnost:
Stačí si uvědomit, že takový klastr se chová jako hrana. V nakreslené verzi je požadavek na jednoznačnost (jen jediná stěna, kde lze hranu dokreslit), protože by jinak se mohlo stát nahrazením klastru hranou, že vznikne díra.

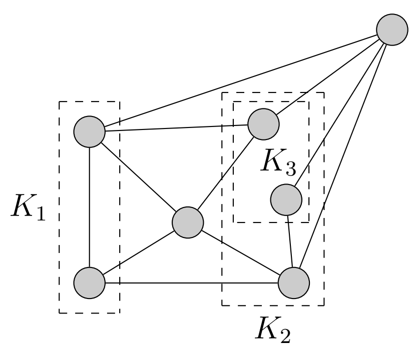
Odebraní vrcholu z klastru zachovává klastrovou rovinnost:
Jednoduchý překreslovací argument, kdy podél hrany protáhneme hranici klastru až ji přetáhneme přes vyjímaný vrchol. (TODO dát ilustrativní obrázek)

Sjednocení klastrů zachovává klastrovou rovinnost:
Nechť S je minimální saturátor $(G, \mathcal{C})$ takový, že $(G[V, E \cup S], \mathcal{C})$ nemá díru.

S je saturátorem i pro klastrový graf $(G, \mathcal{C}')$, kde ale může být díra. Nechť existuje minimální saturátor $S' \subseteq S$ takový, tvrdíme že $(G[V, E \cup S'], \mathcal{C})$ nemá díru. To dokážeme sporem.

Nechť D je díra. Ta musí být ve sjednocení klastrů K_1 a K_2, neboť kdyby byla jinde, bylo by to ve sporu s předpokladem, že původní klastrový graf je klastrově rovinný. Díra D má neprázdný průnik se saturátorem S'. Kdyby průnik byl prázdný, znamenalo by to, že příslušná díra byla v původním klastrovém grafu. Označme tuto hranu $e = \{x, y\}$, kde x a y jsou její koncové vrcholy. Jako S" označme $S' \setminus e$. Množina S" je saturátorem, protože každý klastr $K \in C'$ obsahující vrcholy x a y obsahuje i cestu $D \setminus \{e\}$. Dostali jsme tedy spor s minimalitou S'. S' tedy neobsahuje díry. □

Sjednocení klastrů má dost přepodkladů, a proto uvedeme proč jsou tyto předpoklady nutné. Předpoklad o společném rodiči je z důvodu zachování klastrové hierarchie. Následující příklad klastrové grafu ukazuje, proč je nutný předpoklad o tom, že sjednocované klastry nesmějí mít podklastry.



Obrázek 4.1: Klastr K_3 brání sjednocení klastrů K_1 a K_2, neboť jeho saturováním (nahrazení hranou) by v $K_1 \cup K_2$ vznikla díra. Kdybychom vynechali K_3, pak už je snadné najít klastrové nakreslení.

Nyní se podíváme na dva speciální případy sjednocení klastrů. Jeden případ je přidání vrcholu do klastru, který je vlastně inverzí k odebrání vrcholu z klastru.

Tvrzení 4.4. *Připojení vrcholu do klastru*
$(G, \mathcal{C})$ nakreslená instance klastrové rovinnosti, $v \in V(G)$ a $K \in \mathcal{C}$.
$\mathcal{C}' = (\mathcal{C} \setminus \{K\}) \cup \{K \cup \{v\}\}$

1. *v sousedí s K (je spojen s nějakým vrcholem v K hranou)*

2. *Každý klastr obsahující v obsahuje i K*

3. *K nemá podklastry*

4. *$K \cup \{v\}$ neindukuje kružnici s vrcholem mimo K uvnitř*

Potom $(G, \mathcal{C})$ je klastrově rovinný $\implies$ $(G, \mathcal{C}')$ je klastrově rovinný.

Důkaz. Jednoduše, budeme vrchol vydávat za jednovrcholový klastr. Zbytek plyne z toho, že sjednocení zachovává klastrovou rovinnost. □

Podobně pro nenakreslenou verzi. Druhý případ je, když klastry spojuje právě jedna hrana.

Tvrzení 4.5. *Mějme klastrový graf $(G, \mathcal{C})$ a dva disjunktní klastry K_1 a K_2, které spojuje právě jedna hrana e. K_1 a K_2 mají společného rodiče a nemají podklastry. Mějme klastrový graf $(G, \mathcal{C}')$, kde $C' := (C \setminus \{K_1, K_2\}) \cup \{K_1 \cup K_2\}$. Potom $(G, \mathcal{C})$ je klastrově rovinný $\implies$ $(G, \mathcal{C}')$ je klastrově rovinný.*

Důkaz. Jednoduchý překreslovací argument, kdy podél hrany e protáhneme hranici klastru, viz obrázek. Jelikož je G rovinný, tak se s hranou e žádná jiná hrana nekříží, proto lze provést to překreslení. Požadavek na podklastry zajišťuje, že nakreslení klastru $K_1 \cup K_2$ se neprotne s jiným klastrem. □

Vyzbrojeni minorovými operacemi můžeme definovat pojem klastrového minoru

Definice 4.6. Mějme klastrový graf $(G, \mathcal{C})$. Klastrový graf $(G', \mathcal{C}')$ je klastrovým minorem, pokud jej lze získat konečnou posloupností minorových operací z klastrového grafu $(G, \mathcal{C})$.

Důsledek 4.7. *Klastrový minor klastrově rovinného klastrového grafu je klastrově rovinný.*

Důkaz. Důkaz se provede indukcí podle délky posloupnosti, kde se využije toho, že minorové operace zachovávají klastrovou rovinnost. □

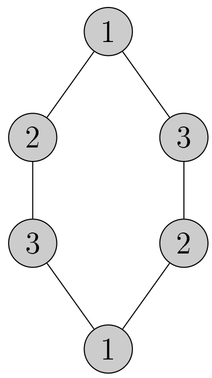
Kapitola 5

Speciální instance

V této kapitole se podíváme na omezené instance klastrové rovinnosti. Klastrová rovinnost se dá omezit dvěma způsoby. Jednak omezením, jaké grafy budeme uvažovat, a jednak omezením klastrové hierarchie. První omezenou třídou klastrových grafů jsou kružncice s klastry velikosti 2 a druhou třídou budou cesty s klastry velikosti 2. Uvedeme věty o počtu zakázaných minorů.

5.1 Kružnice s klastry velikosti 2

Hlavním výsledkem této části je výsledek ukazující, že jediným zakázaným minimálním minorem pro kružnice s klastry velikosti 2 je šesticyklus se třemi klastry, kde se vrcholy střídají v jakém klastru jsou (viz následující obrázek). Výsledek je jak pro nakreslenou, tak i nenakreslenou verzi.



Obrázek 5.1: Čísla označují, do jakého klastru vrchol patří. Dále v textu bude tento graf označován jako C_6^Z, kde Z značí, že se jedná o zakázaný minor

Věta 5.1. *Instance* $(G, \mathcal{C})$ *je klastrově rovinná* $\iff$ $(G, \mathcal{C})$ *neobsahuje* C_6^Z *jako minor .*

Před důkazem věty ukážeme, že C_6^Z není klastrově rovninný.

Lemma 5.2. C_6^Z *není klastrově rovinný.*

Důkaz. Důkaz provedeme pro nenakreslenou verzi. Jelikož klastry jsou velikosti 2, můžeme nahrazovat klastry hranami. Nahrazení všech klastrů hranami však vede přímo na $K_{3,3}$. A protože $K_{3,3}$ není rovinný graf, tak nemůže C_6^Z klastrově rovinný. Poslední nahrazení klastru hranou tedy nelze provést □

U kružnice můžou saturátorové hrany vést pouze vnitřkem nebo vnějškem (myšleno v nakreslení). Pro dvě hrany ze saturátoru má smysl se bavit o tom, zda mohou vést na stejné straně kružnice nebo nikoliv. To nás vede k pojmu grafu konfliktů, který reprezentuje konflikty mezi hranami ze saturátoru.

Definice 5.3. Graf konfliktů je reprezentací konfliktů saturátorových hran, kde vrcholy jsou klastry a hrany představují konfliktní klastry. Klastry $\{x_1, x_2\}$ a $\{y_1, y_2\}$ mají spolu konflikt, pokud se na kružnici vyskytují v následujícím pořádí $x_1, ..., y_1, ..., x_2, ..., y_2, ...$. Grak konfliktů pro klastrový graf $(G, \mathcal{C})$ budeme značit $GK_{(G,\mathcal{C})}$

Získáme ihned kritérium, kdy kružnice s klastry velikosti 2 je klastrově rovinný graf. Je to právě tehdy, když graf konfliktů je bipartitní. Dokážeme si to jako lemma.

Lemma 5.4. *Kružnice s klastry velikosti 2 je klastrově rovinná právě tehdy, když graf konfliktů je bipartitní.*

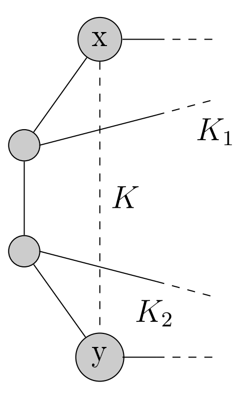
Důkaz. Klastr, jenž je tvořen sousedními vrcholy, zjevně nemůže být podle definice s jiným klastrem v konflkitu. Vrchol příslušného klastru v grafu konfliktů je izolovaný. Stačí tedy uvažovat, že vrcholy v klastru nejsou sousedními.

" $\Longrightarrow$ "Místo klastrů uvažujme hrany saturátoru, ty mohou vést buď vnitřní stěnou kružnice nebo vnější stěnou kružnice. Hrana v grafu konfliktů vede mezi jeho vrcholy právě tehdy pokud saturované hrany příslušných klastrů vedou různými stěnami. To proto, že podle definice konfliktu, kdyby vedly stejnou stěnou, tak by se musely křížit, což by byl spor s tím, že máme klastrové nakreslení. Pokud jako partity označíme klastry, jež vedou buď vnější stěnou (jedna partita) nebo vnitřní stěnou (druhá partita). Izolované vrcholy dáme libovolně někam.

Opačná implikace je ten samý argument jen obrácené pořadí. $\square$

Uvedeme ještě jedno lemma, ukazující vztah mezi kružnicí v grafu konfliktů a odpovídající strukturou v klastrovém grafu.

Lemma 5.5. *Nechť $(G, \mathcal{C})$ je klastrový graf, G je kružnice a $\mathcal{C}$ má klastry velikosti 2. Nechť Q je kružnice v grafu konfliktů $GK_{(G,\mathcal{C})}$, $K = x, y$ klastr obsažen v Q. Nechť A, B jsou dvě cesty v G spojující x, y a něchť K_1, K_2 jsou sousedi K v Q, pak BÚNO jediné dva vrcholy v A jsou z klastrů K_1 a K_2 (po jednom vrcholu z každého klastru a zbylé vrcholy leží v B .*



Obrázek 5.2: Znázornění, čemu odpovídá kružnice v grafu konfliktů. Nalevo od K je část A, napravo je část B.

Struktura v klastrovém grafu, která odpovídá kružnici v grafu konfliktů se jinými slovy „chová slušně a není divoce rozházená po grafu“.

Důkaz. Sporem předpokládejme, že v části, kde jsou klastry K_1 a K_2, je ještě jeden jiný klastr K_3. Uvažujme procházku z K_1 do K_2 cestou neobsahující K (tedy přes K_3). Prvním krokem se z K_1 dostaneme do druhé části. Po cestě ale musíme se vrátit zpět do první části kvůli klastru K_3 pomocí klastru K_i dříve, než se vrátíme pomocí klastru K_2. Klastr K_i ale musí být v konfliktu s klastrem K, což je spor s tím, že K má jen sousedy K_1 a K_2, K_i by podle všeho též musel být sousedem K. $\square$

Tvrzení 5.6. *Graf konfliktů obsahuje lichou kružnici $\implies$ instance (G,C) obsahuje zakázaný minor C_6^Z.*

Důkaz. Důkaz indukcí podle velikosti liché kružnice. V základu indukce ukážeme, že liché kružnici velikosti 3 v grafu konfliktů odpovídá C_6^Z a v indukčním kroku, pak pomocí minorových operací zredukujeme velikost podgrafu odpovídající liché kružnici o dva klastry.

Základ indukce: Mějme trojcyklus v grafu konfliktů. Mějme příslušné klastry $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}, \{z_1, z_2\}$ Podle definice konfliktů máme následující pořadí vrcholů:

Podle konfliktu klastrů $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}$ je pořádí x_1, y_1, x_2, y_2.

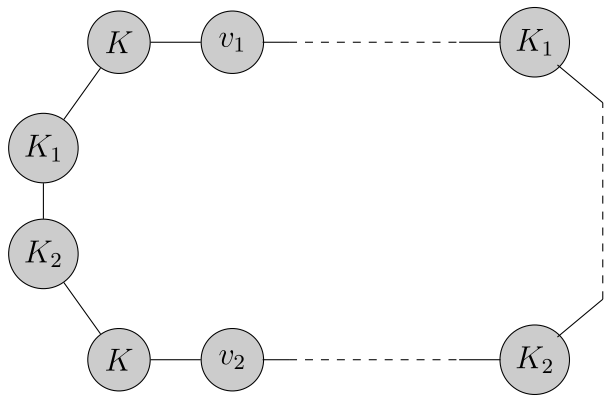
Podle konfliktu klastrů $\{y_1, y_2\}, \{z_1, z_2\}$ je pořádí y_1, z_1, y_2, z_2..

Podle konfliktu klastrů $\{x_1, x_2\}, \{z_1, z_2\}$ je pořádí x_1, z_1, x_2, z_2.

Dohromady máme pořadí $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, což je C_6^Z. Základ indukce je tedy dokázaný.

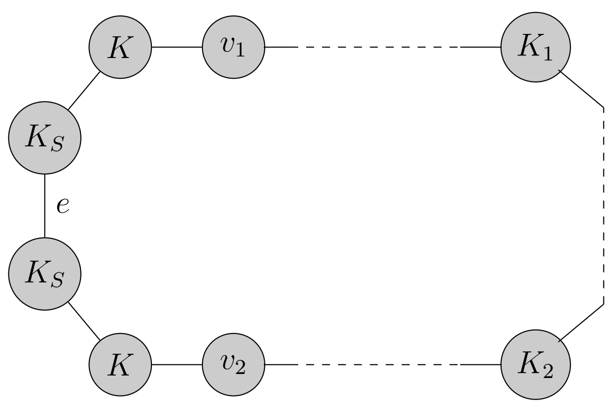
Nyní předpokládejme, že chceme dokázat tvrzení pro lichou kružnici velikosti k, a že tvrzení platí pro kružnici o 2 menší.

Indukční krok: Podle lemmatu 5.5 máme v $(G, \mathcal{C})$ strukturu konfliktních klastrů odpovídající liché kružnici v grafu konfliktů. Předpokládejme, že jsme si $(G, \mathcal{C})$ zjednodušili pomocí minorových operací tak, že nemáme nic jiného než klastry získané z liché kružnice v grafu konfliktů.



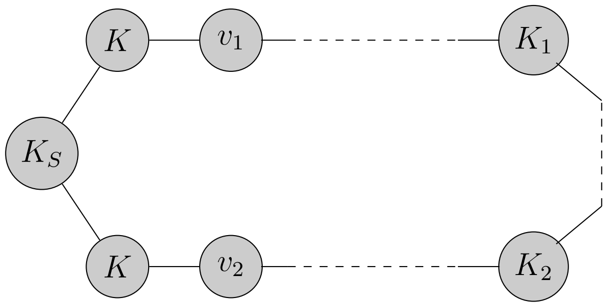
Obrázek 5.3: Výchozí stav, v_1, v_2 jsou sousedé vrcholů klastru K

Provedeme následující posloupnost minorových operací. Vezměmě předělový klastr K. Klastry jež jsou s ním v konfliktu (K_1 a K_2), můžeme sjednodit (ubyl jeden klastr). Sjednocený klastr označme K_S



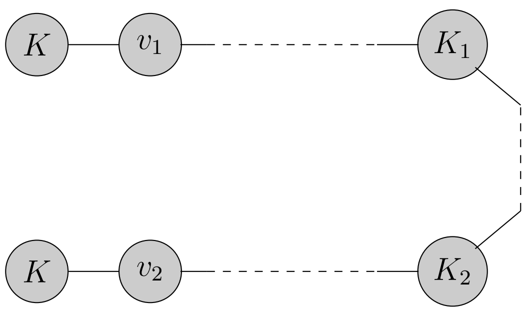
Obrázek 5.4: Sjednodcení klastrů K_1 a K_2

V části, kde měly vrchol jen oni, tak sdílejí hranu e, tu můžeme po provedení sjednocení zkontrahovat.



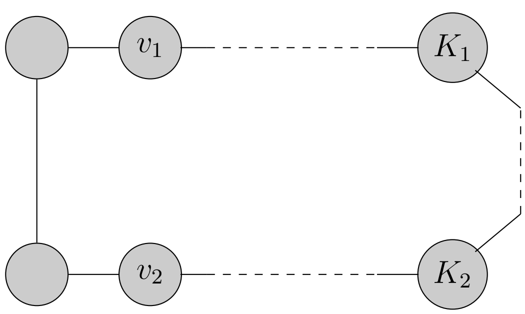
Obrázek 5.5: Kontrakce hrany e

Vrchol vzniklý kontrakcí odebereme. Nyní se nám kružnice přerušila.



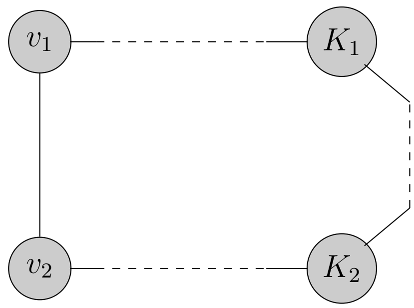
Obrázek 5.6: Odebrání vrcholu vzniklého kontrakcí

Přes rozdělení nám vede klastr K, pro nějž máme jedinou možnost, jak jej nahradit hranou, tak to učiníme (jinými slovy, je to korektní i v nakreslené verzi).



Obrázek 5.7: Nahrazení klastru K hranou

Tuto hranu můžeme rovnou zkontrahovat a vzniklý vrchol přidáme do jednoho z klastrů (opět sjednocení klastrů a ubytí druhého klastru), které s ním mají sousední vrchol. Hranu, která jej spojovala se sousedem zkontrahujeme.



Obrázek 5.8: Výsledný klastrový graf

Vzniklému klastrovému grafu $(G', \mathcal{C}')$ odpovídá v grafu konfliktů lichá kružnice o velikosti $k-2$. Tedy $(G', \mathcal{C}')$ obsahuje podle indukčního předpokladu C_6^Z jako klastrový minor. A jelikož $(G', \mathcal{C}')$ je minorem $(G, \mathcal{C})$, tak C_6^Z je i minorem $(G, \mathcal{C})$, čímž je důkaz hotov. (TODO doplnit o ilustrující obrázky) $\square$

Nyní již můžeme dokázat hlavní větu této sekce

Důkaz. věty 5.1.

$\Longrightarrow$

Pokud je $(G, \mathcal{C})$ klastrově rovinný, tak podle lemmatu 5.4 je graf konfliktů bipartitní, což je ekvivalentní tomu, že graf konfliktů neobsahuje lichou kružnici, což je podle tvrzení 5.6 dává, že $(G, \mathcal{C})$ neobsahuje C_6^Z jako minor.

$\Longleftarrow$

Dokazujme sporem, tedy $(G, \mathcal{C})$ není klastrově rovinný, ale neobsahuje C_6^Z jako minor. Podle lemmatu 5.4 není graf konfliktů bipartitní, tedy obsahuje lichou kružnici, což podle tvrzení 5.6 říká, že $(G, \mathcal{C})$ má jako minor C_6^Z, což je spor s tím, že jsme předpokládáli, že takový minor nemá. $\square$

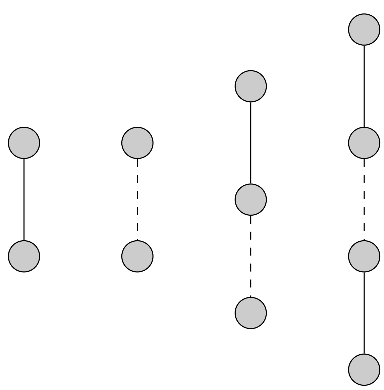
5.2 Cesty s klastry velikosti 2

Pro cesty uvedeme o něco slabší výsledek, a to že zakázaných minorů je konečně mnoho.

Věta 5.7. *Zakázaných minorů pro cesty s klastry velikosti 2 je konečně mnoho.*

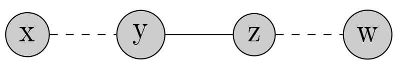
Důkaz. Mějme klastrový graf $(G[V,E],\mathcal{C})$. Vezměme saturorátor S a zkoumejme graf $(G[V, E \cup S]$. V tomto grafu mají vrcholy stupeň nejvýše 3. Tudíž zde nemůže být dělení K_5, ale může být dělení $K_{3,3}$. (TODO příklad klastrové cesty s dělením $K_{3,3}$) Jako minor zde můžou být obě možnosti bránící rovinnosti. Nám ale stačí, že když graf má dělení $K_{3,3}$, tak má i příslušný minor $K_{3,3}$.

Stačí se ptát, jak vypadají spojnice v dělení $K_{3,3}$ a jak je můžeme zredukovat pomocí minorových operací. Pomocí minorových operací dosáhneme nejprve, že se zbavíme všeho nepotřebného, tedy vrcholů, hran a klastrů (resp. saturovaných hran) nepodílejících se na dělení $K_{3,3}$. Dále si spojnice zjednodušíme do podoby takové, že to jsou cesty, kde se střídájí hrany a klastry. Pokud totiž máme na spojnici více hran za sebou, tak pomocí kontrakcí se zbavíme nadbytečných hran. Nyní tvrdíme, že spojnice dokážeme zredukovat pomocí minorových operací do jedné z následujících 4 typů:
1) jedna hrana
2) jeden klastr
3) klastr a hrana
4) hrana, klastr a hrana



Obrázek 5.9: Typy spojnic v dělení $K_{3,3}$. Plná čára představuje hranu, čárkovaná znamená klastr.

Toho dosáhneme následovně. Pokud máme na spojnici následující situaci, že máme klastr $K_1 = \{x, y\}$, hranu $e = \{y, z\}$ a klastr $K_2 = \{z, w\}$ za sebou viz obrázek 5.10, tak sjednotíme klastry K_1 a K_2. Ty spojuje právě jedna hrana, takže sjednocení můžeme provést bez problémů. Nyní jen vyhodíme vrcholy y a z a zbyde nám jen klastr $\{x, w\}$. Opakováním tohoto postupu, každou spojnici zredukujeme na jeden z čtyř výše uvedených typů. Grafů, jenž jsou dělením $K_{3,3}$ a mají tyto typy spojnic, je konečně mnoho $\square$



Obrázek 5.10: Hledaná struktura, která jde zjednodušit pomocí minorových operací

Literatura

[1] Cortese, P.F., Di Battista, G., Frati, F., Patrignani, M., Pizzonia, M.: C-planarity of cconnected clustered graphs. J. Graph Alg. Appl. 12(2), 225–262 (2008)

[2] S. Cornelsen and D. Wagner. Completely connected clustered graphs. Journal of Discrete Algorithms, 4(2):313–323, 2006.

[3] V. Jelínek, E. Jelínková, J. Kratochvíl, B. Lidický: Clustered Planarity: Embedded Clustered Graphs with Two-Component Clusters (extended abstract), Proceedings of Graph Drawing 2008, LNCS 5417 (2009), 121-132

[4] Gutwenger, C., Jünger, M., Leipert, S., Mutzel, P., Percan, M., Weiskircher, R.: Advances in c-planarity testing of clustered graphs. In: Goodrich, M.T., Kobourov, S.G. (eds.) GD'02. LNCS, vol. 2528, pp. 220–235. Springer (2002)

[5] Goodrich, M.T., Lueker, G.S., Sun, J.Z.: C-planarity of extrovert clustered graphs. In: Healy,P., Nikolov, N.S. (eds.) GD'05. LNCS, vol. 3843, pp. 211–222. Springer (2006)

[6] Jelínková, E., Kára, J., Kratochvíl, J., Pergel, M., Suchý, O., Vyskocil, T.: Clustered planarity: Small clusters in cycles and eulerian graphs. J. Graph Alg. Appl. 13(3), 379–422 (2009)

[7] P. F. Cortese, G. Di Battista, M. Patrignani, and M. Pizzonia. Clustering cycles into cycles of clusters. Journal of Graph Algorithms and Applications, 9(3):391–413, 2005.

[8] P. F. Cortese, G. Di Battista, M. Patrignani, and M. Pizzonia. On embedding a cycle in a plane graph. In Proceedings of 13th International

Symposium on Graph Drawing 2005, volume 3843 of LNCS, pages 49–60. Springer, Heidelberg, 2006.

[9] Di Battista, G., Frati, F.: Efficient c-planarity testing for embedded flat clustered graphs with small faces. In: Hong, S.H., Nishizeki, T., Quan, W. (eds.) GD'07. LNCS, vol. 4875, pp. 291–302. Springer (2008)