Kapitola 1

Minorové operace

V této kapitole zavedeme operace s klastrovým grafem, které zachovávají klastrovou rovinnost. V závěru kapitoly zavedeme pojem klastrového minoru jakožto hlavní pojem této kapitoly, jenž v následující kapitole použijeme pro charakterizaci zakázaných minorů omezených problémů klastrové rovinnosti.

Definice 1.1. (minorové operace) Mějme klastrový graf $(G,\mathcal{C})$. Minorové operace na klastrových grafech jsou následující:

(Pozn.: Pokud se neřekne jinak, operace se smí provést v nakreslené i nenakreslené verzi)

Odebráním vrcholu v z klastrového grafu $(G,\mathcal{C})$ vznikne klastrový graf $(G',\mathcal{C}')$, kde $G' = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{f|$ hrana f obsahovala vrchol $v\}$ a $\mathcal{C}'$ je klastrová hierarchie, kde se z klastrů odebere vrchol v, pokud v nich byl.

Odebráním hrany e z klastrového grafu $(G,\mathcal{C})$ vznikne klastrový graf $(G',\mathcal{C})$, kde $G' = (V, E \setminus \{e\})$.

Odebráním klastru K z klastrového grafu $(G,\mathcal{C})$ vznikne klastrový graf $(G,\mathcal{C}')$, kde $\mathcal{C}' = C \setminus K$.

Kontrakcí hrany $e = \{x, y\}$ z klastrového grafu $(G,\mathcal{C})$ vznikne klastrový graf $(G',\mathcal{C})$, kde G' je graf , který obdržíme kontrakcí hrany e. Kontrakci můžeme provést za předpokladu, že koncové vrcholy x, y leží ve stejných klastrech.

Nahrazení klastru K o velikosti 2 hranou e z klastrového grafu klastrového grafu $(G,\mathcal{C})$ vznikne klastrový graf $(G',\mathcal{C}')$, kde $G' = (V, E \cup e)$ a $\mathcal{C}' = C \setminus K$. Nahrazení smíme provést pokud v grafu G' nevznikne minor $K_{3,3}$ nebo K_5. U nakreslené verze navíc jen pokud to lze provést jednoznačně.

Odebrání vrcholu v z klastru K z klastrového grafu $(G,\mathcal{C})$ vznikne klastrový graf $(G,\mathcal{C}')$, kde $\mathcal{C}'$ vznikne přeřazením vrcholu v z Klastru K do jeho rodiče. Tahle operace lze provést za předpokladu, že z vrcholu v vychází právě jedna hrana ven z K a K je nejmenší (vzhledem k inkluzi) klastr obsahující v.

Sjednocení disjuktních klastrů K_1 *a* K_2 z klastrového grafu $(G, \mathcal{C})$ vznikne klastrový graf $(G, \mathcal{C}')$, kde $C' := (C \setminus \{K_1, K_2\}) \cup \{K_1 \cup K_2\}$. Sjednocení klastrů můžeme provést za předpokladů, že m K_1, K_2 jsou dva minimální klastry (nemají podklastry) se společným rodičem, $K_1 \cup K_2$ neindukuje kružnici s vrcholem mimo $K_1 \cup K_2$ uvnitř. Jinými slovy $K_1 \cup K_2$ nemá díru v G (v nakreslené verzi). V nenakreslené verzi je podmínkou, že existuje nakreslení takové, že $K_1 \cup K_2$ nemá díru v G. Posledním předpokladem je, že existuje hrana spojující K_1 s K_2.

Název minorové operace je užit proto, že každá operace zjednoduše daný vstupní klastrový graf. Nyní vyzkoumáme dopad minorových operací na klastrový graf, konkrétně na dopad existence klastrového nakreslení.

Definice 1.2. Mějme klastrově rovinný klastrový graf $(G, \mathcal{C})$. Operace s klastrovým grafem *OP zachovává* klastrovou rovinnost pokud $(G, \mathcal{C})$ zůstane klastrově rovinný.

Tvrzení 1.3. *Minorové operace zachovávají klastrovou rovinnost.*

Důkaz. Mějme klastrový graf $(G, \mathcal{C})$ a jeho klastrové nakreslení ρ.

Odebrání vrcholu, hrany, klastru zachovává klastrovou rovinnost:
Mějme dáno klastrové nakreslení. Odebrání hrany zapříčiní jedině to, že se nemusí v daném nakreslení hrana kreslit. Podobně pro odebraný vrchol, kdy se odebereu hrany vedoucí do něj. Odebrány klastr se též prostě nenakreslí

Kontrakce hrany zachovává klastrovou rovinnost:
Mějme dáno klastrové nakreslení. Kontrakce je jen vlastně smrštění hrany do jediného bodu, jenž zastupuje vrchol vzniklý kontrakcí.

Nahrazení klastru hranou zachovává klastrovou rovinnost:
Stačí si uvědomit, že takový klastr se chová jako hrana. V nakreslené verzi je požadavek na jednoznačnost (jen jediná stěna, kde lze hranu dokreslit), protože by jinak se mohlo stát nahrazením klastru hranou, že vznikne díra.

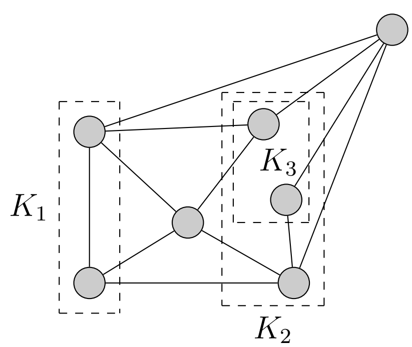
Odebraní vrcholu z klastru zachovává klastrovou rovinnost:
Jednoduchý překreslovací argument, kdy podél hrany protáhneme hranici klastru až ji přetáhneme přes vyjímaný vrchol. (TODO dát ilustrativní obrázek)

Sjednocení klastrů zachovává klastrovou rovinnost:
Nechť S je minimální saturátor $(G, \mathcal{C})$ takový, že $(G[V, E \cup S], \mathcal{C})$ nemá díru.

S je saturátorem i pro klastrový graf $(G, \mathcal{C}')$, kde ale může být díra. Nechť existuje minimální saturátor $S' \subseteq S$ takový, tvrdíme že $(G[V, E \cup S'], \mathcal{C})$ nemá díru. To dokážeme sporem.

Nechť D je díra. Ta musí být ve sjednocení klastrů K_1 a K_2, neboť kdyby byla jinde, bylo by to ve sporu s předpokladem, že původní klastrový graf je klastrově rovinný. Díra D má neprázdný průnik se saturátorem S'. Kdyby průnik byl prázdný, znamenalo by to, že příslušná díra byla v původním klastrovém grafu. Označme tuto hranu $e = \{x, y\}$, kde x a y jsou její koncové vrcholy. Jako S" označme $S' \setminus e$. Množina S" je saturátorem, protože každý klastr $K \in C'$ obsahující vrcholy x a y obsahuje i cestu $D \setminus \{e\}$. Dostali jsme tedy spor s minimalitou S'. S' tedy neobsahuje díry. □

Sjednocení klastrů má dost přepodkladů, a proto uvedeme proč jsou tyto předpoklady nutné. Předpoklad o společném rodiči je z důvodu zachování klastrové hierarchie. Následující příklad klastrové grafu ukazuje, proč je nutný předpoklad o tom, že sjednocované klastry nesmějí mít podklastry.



Obrázek 1.1: Klastr K_3 brání sjednocení klastrů K_1 a K_2, neboť jeho saturováním (nahrazení hranou) by v $K_1 \cup K_2$ vznikla díra. Kdybychom vynechali K_3, pak už je snadné najít klastrové nakreslení.

Nyní se podíváme na dva speciální případy sjednocení klastrů. Jeden případ je přidání vrcholu do klastru, který je vlastně inverzí k odebrání vrcholu z klastru.

Tvrzení 1.4. *Připojení vrcholu do klastru*
$(G, \mathcal{C})$ nakreslená instance klastrové rovinnosti, $v \in V(G)$ a $K \in \mathcal{C}$.
$\mathcal{C}' = (\mathcal{C} \setminus \{K\}) \cup \{K \cup \{v\}\}$

1. v sousedí s K (je spojen s nějakým vrcholem v K hranou)

2. Každý klastr obsahující v obsahuje i K

3. K nemá podklastry

4. $K \cup \{v\}$ neindukuje kružnici s vrcholem mimo K uvnitř

Potom $(G, \mathcal{C})$ je klastrově rovinný $\implies$ $(G, \mathcal{C}')$ je klastrově rovinný.

Důkaz. Jednoduše, budeme vrchol vydávat za jednovrcholový klastr. Zbytek plyne z toho, že sjednocení zachovává klastrovou rovinnost. □

Podobně pro nenakreslenou verzi. Druhý případ je, když klastry spojuje právě jedna hrana.

Tvrzení 1.5. *Mějme klastrový graf $(G, \mathcal{C})$ a dva disjunktní klastry K_1 a K_2, které spojuje právě jedna hrana e. K_1 a K_2 mají společného rodiče a nemají podklastry. Mějme klastrový graf $(G, \mathcal{C}')$, kde $C' := (C \setminus \{K_1, K_2\}) \cup \{K_1 \cup K_2\}$. Potom $(G, \mathcal{C})$ je klastrově rovinný $\implies$ $(G, \mathcal{C}')$ je klastrově rovinný.*

Důkaz. Jednoduchý překreslovací argument, kdy podél hrany e protáhneme hranici klastru, viz obrázek. Jelikož je G rovinný, tak se s hranou e žádná jiná hrana nekříží, proto lze provést to překreslení. Požadavek na podklastry zajišťuje, že nakreslení klastru $K_1 \cup K_2$ se neprotne s jiným klastrem. □

Vyzbrojeni minorovými operacemi můžeme definovat pojem klastrového minoru

Definice 1.6. Mějme klastrový graf $(G, \mathcal{C})$. Klastrový graf $(G', \mathcal{C}')$ je klastrovým minorem, pokud jej lze získat konečnou posloupností minorových operací z klastrového grafu $(G, \mathcal{C})$.

Důsledek 1.7. *Klastrový minor klastrově rovinného klastrového grafu je klastrově rovinný.*

Důkaz. Důkaz se provede indukcí podle délky posloupnosti, kde se využije toho, že minorové operace zachovávají klastrovou rovinnost. □