Kapitola 1

Minorové operace

V této kapitole zavedeme operace s klastrovým grafem, které zachovávají klastrovou rovinnost. V závěru kapitoly zavedeme pojem klastrového minoru, jakožto hlavní pojem této kapitoly, jenž v následující kapitole použijeme pro charakterizaci zakázaných minorů omezených problémů klastrové rovinnosti.

Definice 1.1. Mějme klastrový graf $(G, \mathcal{C})$. *Minorové operace* na klastrových grafech jsou následující:

(Pozn.: Pokud se neřekne jinak, operace se smí provést v nakreslené i nenakreslené verzi)

Odebráním vrcholu v z klastrového grafu $(G, \mathcal{C})$ vznikne klastrový graf $(G', \mathcal{C}')$, kde $G' = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{f|$ hrana f obsahovala vrchol $v\})$ a $\mathcal{C}'$ je klastrová hierarchie, kde se z klastrů odebere vrchol v, pokud v nich byl.

Odebráním hrany e z klastrového grafu $(G, \mathcal{C})$ vznikne klastrový graf $(G', \mathcal{C})$, kde $G' = (V, E \setminus \{e\})$.

Odebráním klastru K z klastrového grafu $(G, \mathcal{C})$ vznikne klastrový graf $(G, \mathcal{C}')$, kde $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \setminus K$.

Kontrakcí hrany $e = \{x, y\}$ z klastrového grafu $(G, \mathcal{C})$ vznikne klastrový graf $(G', \mathcal{C}')$, kde G' je graf, který obdržíme kontrakcí hrany e a $\mathcal{C}'$ získáme nahrazením vrcholů x a y ve všech klastrech, kde byly, vrcholem vzniklým kontrakcí. Kontrakci můžeme provést za předpokladu, že koncové vrcholy x, y leží ve stejných klastrech.

Nahrazením klastru $K = \{x, y\}$ *o velikosti 2 hranou* e z klastrového grafu klastrového grafu $(G, \mathcal{C})$ vznikne klastrový graf $(G', \mathcal{C}')$, kde $G' = (V, E \cup e)$ a $\mathcal{C}' = C \setminus K$. Předpokládáme, že vrcholy x, y nejsou spojeny hranou, neboť v tom případě tato operace není potřebná. U nakreslené verze navíc předpokládáme, že e má jednoznačně dané kombinatorické nakreslení.

Odebráním vrcholu v z klastru K z klastrového grafu $(G, \mathcal{C})$ vznikne klastrový graf $(G, \mathcal{C}')$, kde $\mathcal{C}'$ vznikne nahrazením klastru K klastrem $K \setminus \{v\}$. Tuto operaci lze provést za předpokladu, že z vrcholu v vychází právě jedna hrana ven z K a K je nejmenší (vzhledem k inkluzi) klastr obsahující v.

Sjednocení disjuktních klastrů K_1 a K_2 z klastrového grafu $(G, \mathcal{C})$ vznikne klastrový graf $(G, \mathcal{C}')$, kde $C' := (C \setminus \{K_1, K_2\}) \cup \{K_1 \cup K_2\}$. Sjednocení klastrů můžeme provést za předpokladů, že K_1, K_2 jsou dva minimální klastry (nemají podklastry) se společným rodičem, $K_1 \cup K_2$ neindukuje kružnici s vrcholem mimo $K_1 \cup K_2$ uvnitř. Jinými slovy $K_1 \cup K_2$ nemá díru v G (v nakreslené verzi). V nenakreslené verzi je podmínkou, že existuje nakreslení ρ grafu G takové, že $K_1 \cup K_2$ nemá díru v ρ. Posledním předpokladem je, že existuje hrana spojující K_1 s K_2.

Název minorové operace je užit proto, že každá operace zjednodušuje daný vstupní klastrový graf. U sjednocení klastrů v nenakresleném klastrovém grafu je obtížné říci, kdy potřebné nakreslení existuje, to činí operaci méně použitelnou. Kromě nahrazení klastru hranou můžeme uvážit i nahrazení hrany klastrem velikosti 2. To můžeme provést v případě, že konce hrany patří do stejných klastrů. Nyní vyzkoumáme dopad minorových operací na klastrový graf, konkrétně dopad na existenci klastrového nakreslení.

Tvrzení 1.2. *Nechť $(G', \mathcal{C}')$ vznikne z $(G, \mathcal{C})$ minorovou operací. Potom pokud $(G, \mathcal{C})$ je klastrově rovinný, tak $(G', \mathcal{C}')$ je klastrově rovinný.*

Důkaz. Mějme klastrový graf $(G, \mathcal{C})$ a jeho klastrové nakreslení ρ.

Odebrání vrcholu, hrany či klastru zachovává klastrovou rovinnost:
Mějme dáno klastrové nakreslení. Odebrání hrany zapříčiní jedině to, že se nemusí v daném nakreslení hrana kreslit. Podobně pro odebraný vrchol, kdy se odeberou hrany vedoucí do něj. Odebraný klastr se též prostě nenakreslí.

Kontrakce hrany zachovává klastrovou rovinnost:
Mějme dáno klastrové nakreslení. Kontrakce je jen vlastně smrštění hrany do jediného bodu, jenž zastupuje vrchol vzniklý kontrakcí.

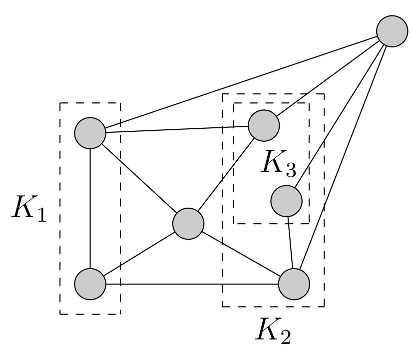
Nahrazení klastru $K = \{x, y\}$ hranou e zachovává klastrovou rovinnost:
Jelikož $(G, \mathcal{C})$ je klastrově rovinný, tak máme saturátor S. Jelikož K je podle předpokladu nesouvislý, tak po přidání saturátoru jsou vrcholy x, y spojeny hranou. Tato hrana ze saturátoru spojující x, y je hledanou hranou e. V nakreslené verzi je požadavek na jednoznačnost z toho důvodu, že by se mohlo stát, že nahrazením klastru hranou vznikne díra.

Odebrání vrcholu z klastru zachovává klastrovou rovinnost: Jednoduchý překreslovací argument, kdy podél hrany protáhneme hranici klastru až ji přetáhneme přes vyjímaný vrchol.

Sjednocení klastrů zachovává klastrovou rovinnost: Nechť S je minimální saturátor $(G, \mathcal{C})$ takový, že $(G \cup S, \mathcal{C})$ nemá díru. S je saturátorem i pro klastrový graf $(G, \mathcal{C}')$, kde ale může být díra. Nechť S' je minimální saturátor $(G, \mathcal{C}')$ a $S' \subseteq S$. Tvrdíme, že $(G \cup S', \mathcal{C}')$ nemá díru. To dokážeme sporem.

Nechť D je díra. Ta musí být ve sjednocení klastrů K_1 a K_2, neboť kdyby byla jinde, bylo by to ve sporu s předpokladem, že $(G \cup S, \mathcal{C})$ nemá díru. Díra D má neprázdný průnik se saturátorem S'. Kdyby průnik byl prázdný, znamenalo by to, že příslušná díra byla v původním klastrovém grafu. Označme tuto hranu $e = \{x, y\}$, kde x a y jsou její koncové vrcholy. Jako S'' označme $S' \setminus e$. Množina S'' je saturátorem, protože každý klastr $K \in C$ obsahující vrcholy x a y obsahuje i cestu $D \setminus \{e\}$. Dostali jsme tedy spor s minimalitou S'. S' tedy neobsahuje díry. $\square$

Sjednocení klastrů má dost přepokladů, a proto uvedeme, proč jsou tyto předpoklady nutné. Předpoklad o společném rodiči je z důvodu zachování klastrové hierarchie. Klastrový graf z obrázku 1.1 ukazuje, proč je nutný předpoklad o tom, že sjednocované klastry nesmějí mít podklastry.



Obrázek 1.1: Klastr K_3 brání sjednocení klastrů K_1 a K_2, neboť jeho saturováním (nahrazení hranou) by v $K_1 \cup K_2$ vznikla díra. Kdybychom vynechali K_3, pak už je snadné najít klastrové nakreslení.

Nyní se podíváme na dva speciální případy sjednocení klastrů. Jeden případ je přidání vrcholu do klastru, který je vlastně inverzí k odebrání vrcholu z klastru.

Tvrzení 1.3. *Mějme klastrový graf $(G, \mathcal{C})$ a vrchol $v \in V(G)$ a klastr $K \in \mathcal{C}$. Nechť K neobsahuje podklastry a každý klastr obsahující v obsahuje i K, v sousedí s K, tedy v je spojen s nějakým vrcholem v K hranou a $K \cup \{v\}$ neindukuje kružnici s vrcholem mimo K uvnitř. $\mathcal{C}' = (\mathcal{C} \setminus \{K\}) \cup \{K \cup \{v\}\}$ Potom $(G, \mathcal{C})$ je klastrově rovinný $\implies$ $(G, \mathcal{C}')$ je klastrově rovinný.*

Důkaz. Jednoduše budeme vrchol vydávat za jednovrcholový klastr. Zbytek plyne z toho, že sjednocení zachovává klastrovou rovinnost, jelikož jsou splněny všechny předpoklady. □

Podobně pro nenakreslenou verzi. Druhý případ je, když klastry spojuje právě jedna hrana. Tento případ nám dává příklad, kdy můžeme provést sjednocení klastrů i pro nenakreslené klastrové grafy.

Tvrzení 1.4. *Mějme klastrový graf $(G, \mathcal{C})$ a dva disjunktní klastry K_1 a K_2, které spojuje právě jedna hrana e. Nechť K_1 a K_2 mají společného rodiče a nemají podklastry. Mějme klastrový graf $(G, \mathcal{C}')$, kde $\mathcal{C}' := (\mathcal{C} \setminus \{K_1, K_2\}) \cup \{K_1 \cup K_2\}$. Potom $(G, \mathcal{C})$ je klastrově rovinný $\implies$ $(G, \mathcal{C}')$ je klastrově rovinný.*

Důkaz. Pro použití výsledku o sjednocení klastrů nám stačí ukázat, že $K_1 \cup K_2$ neobsahuje díru. Protože klastry K_1 a K_2 spojuje právě jedna hrana, tak jediné kružnice ve sjednocení jsou buď K_1 nebo v K_2. Podle předpokladu, že $(G, \mathcal{C})$ je klastrově rovinný, tak K_1 ani K_2 neobsahují díru. Podle tvrzení 1.2 je $\implies$ $(G, \mathcal{C}')$ klastrově rovinný. □

Vyzbrojeni minorovými operacemi můžeme definovat pojem klastrového minoru.

Definice 1.5. Mějme klastrový graf $(G, \mathcal{C})$. Klastrový graf $(G', \mathcal{C}')$ je *klastrovým minorem*, pokud jej lze získat konečnou posloupností minorových operací z klastrového grafu $(G, \mathcal{C})$.

Důsledek 1.6. *Klastrový minor klastrově rovinného klastrového grafu je klastrově rovinný.*

Důkaz. Důkaz se provede indukcí podle délky posloupnosti, kde se využije toho, že minorové operace zachovávají klastrovou rovinnost. □