Kapitola 1

Složitost

V této kapitole ukážeme několik výsledků ohledně časové a prostorové složitosti. Problém klastrové rovinnosti patří do třídy NP z pohledu časové složitosti a z hlediska prostového se dá řešit v prostoru $\mathcal{O}(n)$ na deterministiském stroji. Jako výchozí model uvažujeme RAM, případně jeho nedeterministickou verzi nRAM.

1.1 Datová reprezentace

Nejprve uvedeme možnosti reprezentace klastrového grafu a ujasníme vzhledem k čemu budeme vztahovat příslušnou složitost. Velikost grafu na vstupu je $\mathcal{O}(n + m + \|C\|)$, kde C je klastrová hierarchie. Jelikož graf musí být rovinný, platí pro m, že $m = \mathcal{O}(n)$. Nejprve musíme určit kolik klastrů se v klastrové hierarchii může nacházet. Pro zjednodušení budeme předpokládat, že klastr může obsahovat jediný vrchol nebo i všechny.

Tvrzení 1. *Maximální počet klastrů v grafu G s n ($n \geq$ 1) vrcholy je 2n-1.*

Důkaz. Důkaz indukcí podle n:
Základ indukce : n=1
Zjevně platí.
Indukční předpoklad: Tvrzení platí pro $|V| < $ n.
Indukční krok:
BÚNO: každý vrchol je minimálně obsažen v klastru obsahující pouze jej. Díky tomuto pak každý klastr, který obsahuje aspoň dva vrcholy se rozkládá aspoň na dva menší obsahující méně vrcholů.

Máme graf s n vrcholy. Podle předpokladu máme klastr K obsahující všechny vrcholy. Ten obsahuje k vzájemně disjunktních podklastrů (takových, že už jediný klastr, ve kterém jsou obsaženy je K). Velikost i-tého klastru nechť je k_{i} Každý z těchto klastrů obsahuje méně než n vrcholů. Platí pro ně tedy indukční předpoklad. Máme tedy:
max. počet klastrů $= 1 + \sum_{i=1}^{k}(2 * k_{\mathrm{i}} - 1) = 1 + 2 * \sum_{i=1}^{k} k_{\mathrm{i}} - k = 2n - k + 1$
K maximalizování dojde pokud bude vždy k=2. □

Pro reprezentaci klastrové hierarchie se nabízí dvě možnosti.

1. Seznamy vrcholů
2. Strom, kde listy představují vrcholy a vnitřní uzly představují klastry
    - Zde předpokládejme, že kořen tohoto stromu reprezentuje klastr obsahující všechny vrcholy.

První varianta má za následek, že klastrová hierarchie zabírá prostor až $\mathcal{O}(n^2)$. Příkladem takové klastrové hierarchie je graf, kde klastry jsou postupně do sebe vnořené. První klastr obsahuje všechny vrcholy, druhý o vrchol méně, třetí o další vrchol, ... Druhá varianta naproti tomu dává prostor $\mathcal{O}(n)$. Stačí tedy určovat složitost (časovou a paměťovou) vzhledem k počtu vrcholů vstupního grafu.

1.2 časová složitost

Hlavním výsledkem této části je lineární nedeterministický algoritmus pro klastrovou rovinnost.

Tvrzení 1. *Problém rozhodnotí existence rovinného klastrového nakreslení patří do třídy NP.*

Důkaz. Využíváme toho, že ekvivalentním problémem ke klastrové rovinnosti, je existence saturátoru. Ten nám zajistí, že klastry jsou souvislé. Saturátor dostaneme jako certifikát. Vzhledem k tomu, že klastrů je polynomiálně mnoho, tak ověření saturátoru se dá provést v polynomiálním čase (Například otestování souvislosti každého klastru zvlášťě). Dále jsou algoritmy testují klastrovou rovinnost v polynomiálním čase (TODO doplnit reference), pokud klastry jsou souvislé. □

Tvrzení 1. *Pro problém klastrové rovinnosti je nedeterministický algoritmus, jehož časová složitost je $\mathcal{O}(n)$.*

Důkaz. Důkaz tohoto tvrzení je pouze doplněním důkazu, že klastrová rovinnost je v NP. Pro důkaz je třeba ukázat, že umíme ověřit souvislost všech klastrů v čase $\mathcal{O}(n)$, a pak že klastrová rovinnost se dá otestovat v lineárním čase pokud jsou klastry souvislé. Druhá část viz (TODO doplnit reference) (TODO dodělat důkaz, souvislost klastrů) □

1.3 prostorová složitost

Z výsledků o časové složitosti můžeme říci, že můžeme klatrovou rovinnost rozhodovat v nedeterministickém prostoru o velikosti $\mathcal{O}(n)$. Ze Savitchovy věty (doplnit ref) plyne, že v deterministickém prostoru stačí nejvýše prostor velikosti $\mathcal{O}(n^2)$. Lepšího výsledku, ve smyslu, že potřebujeme méně prostoru, dosáhneme využítím vztahu tříd NTIME a DSPACE, který je $NTIME(t(n)) \subseteq DSPACE(t(n))$. Jelikož máme nedeterministický algoritmus pro klastrovou rovinnost pracující v lineárním čase, tak díky předešlému víme, že na existuje deterministický algoritmus využívající pouze lineárně mnoho prostoru.

Tvrzení 1. *Klastrová rovinnost lze rozhodovat na RAMu s lineárně omezeným prostorem.*

Důkaz. □