

# 1 Kapitola 1

## 2 Speciální instance

3 V této kapitole se podíváme na omezené instance klastrové rovinnosti. Klastrová  
4 rovinnost se dá omezit dvěma způsoby. Jednak omezením, jaké grafy budeme  
5 uvažovat, a jednak omezením klastrové hierarchie. První omezenou třídou  
6 klastrových grafů jsou kružnice s klastry velikosti 2 a druhou třídou budou  
7 cesty s klastry velikosti 2. Uvedeme věty o počtu zakázaných minorů.

### 8 1.1 Kružnice s klastry velikosti 2

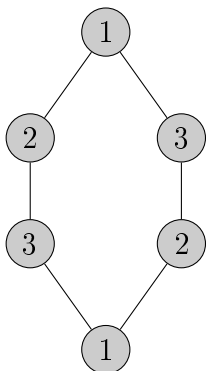
9 Hlavním výsledkem této části je výsledek ukazující, že jediným zakázaným  
10 minimálním minorem pro kružnice s klastry velikosti 2 je šesticyklus se třemi  
11 klastry, kde se vrcholy střídají v jakém klastru jsou (viz obrázek 1.1). Výsle-  
12 dek je jak pro nakreslenou, tak i nenakreslenou verzi, protože kružnice má  
13 až na symetrii jen jedno nakreslení.

14 **Věta 1.1.** *Nechť  $(G, \mathcal{C})$  je instance, kde  $G$  je kružnice a všechny klastry mají*  
15 *velikost 2.  $(G, \mathcal{C})$  je klastrově rovinný  $\iff (G, \mathcal{C})$  neobsahuje  $C_6^Z$  jako minor*  
16 *.*

17 Před důkazem věty ukážeme, že  $C_6^Z$  není klastrově rovinný.

18 **Lemma 1.2.**  $C_6^Z$  není klastrově rovinný.

19 *Důkaz.* Důkaz provedeme pro nenakreslenou verzi. Jelikož klastry jsou veli-  
20 kosti 2, můžeme nahrazovat klastry hranami. Nahrazení všech klastrů hra-  
21 nami však vede přímo na  $K_{3,3}$ . A protože  $K_{3,3}$  není rovinný graf, tak nemůže  
22  $C_6^Z$  klastrově rovinný.  $\square$



Obrázek 1.1: Čísla označují, do jakého klastru vrchol patří. Dále v textu bude tento graf označován jako  $C_6^Z$ , kde  $Z$  značí, že se jedná o zakázaný minor

23 U kružnice můžou saturátorové hrany vést pouze vnitřkem nebo vnějškem  
 24 (myšleno v nakreslení). Pro dvě hrany ze saturátoru má smysl se bavit o tom,  
 25 zda mohou vést na stejné straně kružnice nebo nikoliv. To nás vede k pojmu  
 26 grafu konfliktů, který reprezentuje konflikty mezi hranami ze saturátoru.

27 **Definice 1.3.** Klastry  $\{x_1, x_2\}$  a  $\{y_1, y_2\}$  mají spolu *konflikt*, pokud se na  
 28 kružnici vyskytují v následujícím pořadí  $x_1, \dots, y_1, \dots, x_2, \dots, y_2, \dots$ . Graf kon-  
 29 fiktů je reprezentací konfliktů saturátorových hran, kde vrcholy jsou klastry  
 30 a hrany představují konfliktní klastry. Graf konfliktů pro klastrový graf  $(G, \mathcal{C})$   
 31 budeme značit  $GK_{(G, \mathcal{C})}$

32 Získáme ihned kritérium, kdy kružnice s klastry velikosti 2 je klastrově  
 33 rovinný graf. Je to právě tehdy, když graf konfliktů je bipartitní. Dokážeme  
 34 si to jako lemma.

35 **Lemma 1.4.** *Kružnice s klastry velikosti 2 je klastrově rovinná právě tehdy,*  
 36 *když graf konfliktů je bipartitní.*

37 *Důkaz.* Klastř, jenž je tvořen sousedními vrcholy, zjevně nemůže být podle  
 38 definice s jiným klastrem v konfliktu. Vrchol příslušného klastru v grafu kon-  
 39 fiktů je izolovaný. Stačí tedy uvažovat, že vrcholy v klastru nejsou soused-  
 40 ními.

41  $\implies$

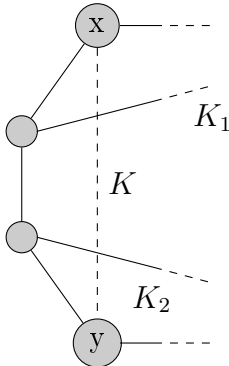
42 Místo klastřů uvažujme hrany saturátoru, ty mohou vést buď vnitřní  
 43 stěnou kružnice nebo vnější stěnou kružnice. Hrana v grafu konfliktů vede

44 mezi jeho vrcholy právě tehdy pokud saturované hrany příslušných klastrů  
 45 vedou různými stěnami. To proto, že podle definice konfliktu, kdyby vedly  
 46 stejnou stěnou, tak by se musely křížit, což by byl spor s tím, že máme  
 47 klastrové nakreslení. Jako partity označíme klastry, jež vedou buď vnější  
 48 stěnou (jedna partita) nebo vnitřní stěnou (druhá partita). Izolované vrcholy  
 49 dáme libovolně partity.

50 Opačná implikace se dokáže obdobně.  $\square$

51 Uvedeme ještě jedno lemma, ukazující vztah mezi kružnicí v grafu kon-  
 52 fliktů a odpovídající strukturou v klastrovém grafu.

53 **Lemma 1.5.** *Nechť  $(G, \mathcal{C})$  je klastrový graf,  $G$  je kružnice a  $\mathcal{C}$  má klastry*  
 54 *velikosti 2. Nechť  $Q$  je indukovaná kružnice v grafu konfliktů  $GK_{(G, \mathcal{C})}$  a nechť*  
 55  *$K = \{x, y\}$  klastř obsažený v  $Q$ . Nechť  $A, B$  jsou dvě cesty v  $G$  spojující  $x, y$*   
 56 *a  $K_1, K_2$  jsou sousedi  $K$  v  $Q$ . Když se omezíme na vrcholy klastrů z  $Q$ , pak*  
 57  *$BÚNO$  jediné dva vrcholy v  $A$  jsou z klastrů  $K_1$  a  $K_2$  (po jednom vrcholu z*  
 58 *každého klastru a zbylé vrcholy leží v  $B$ .*



Obrázek 1.2: Znázornění, čemu odpovídá kružnice v grafu konfliktů. Nalevo od  $K$  je část  $A$ , napravo je část  $B$ .

59 Struktura v klastrovém grafu, která odpovídá kružnici v grafu konfliktů  
 60 se jinými slovy „chová slušně a není divoce rozházená po grafu“.

61 *Důkaz.* Sporem předpokládejme, že v části  $A$ , kde klastry  $K_1$  a  $K_2$  mají po  
 62 jednom vrcholu, je ještě jeden jiný klastř  $K_3$ . Ten musí mít v  $A$  oba své  
 63 vrcholy, jinak by byl v konfliktu s  $K$ , což je spor s tím, že  $K$  má jen dva  
 64 sousedy v  $Q$ . Uvažujme cestu v  $Q$  z  $K_1$  do  $K_2$  neobsahující  $K$  (tedy přes

65  $K_3$ ). Prvním krokem se z  $K_1$  dostaneme do druhé části. Po cestě ale musíme  
66 se vrátit zpět do první části kvůli klastru  $K_3$  pomocí klastru  $K_i$  dříve, než  
67 se vrátíme pomocí klastru  $K_2$ . Klastř  $K_i$  ale musí být v konfliktu s klastrem  
68  $K$ , což je spor s tím, že  $K$  má jen sousedy  $K_1$  a  $K_2$ ,  $K_i$  by podle všeho též  
69 musel být sousedem  $K$ .  $\square$

70 **Tvrzení 1.6.** *Graf konfliktů  $GK_{(G,C)}$  obsahuje lichou kružnici  $\implies$  instance*  
71  *$(G,C)$  obsahuje zakázaný minor  $C_6^Z$ .*

72 *Důkaz.* Důkaz indukcí podle velikosti nejkratší liché kružnice v  $GK_{(G,C)}$ . V  
73 základu indukce ukážeme, že liché kružnici velikosti 3 v grafu konfliktů odpoví  
74 dá  $C_6^Z$ . V indukčním kroku pak pomocí minorových operací zredukujeme  
75 délku liché kružnice o dva klastry.

76 Základ indukce: Mějme trojcyklus v grafu konfliktů. Mějme příslušné  
77 klastry  $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}, \{z_1, z_2\}$  Podle definice konfliktů máme následující  
78 pořadí vrcholů:

79 Podle konfliktu klastrů  $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}$  je pořadí  $x_1, y_1, x_2, y_2$ .

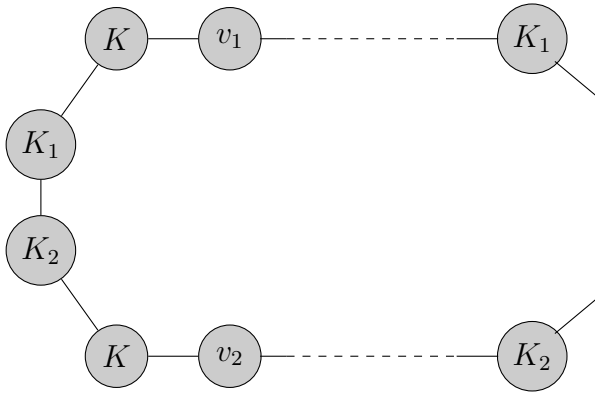
80 Podle konfliktu klastrů  $\{y_1, y_2\}, \{z_1, z_2\}$  je pořadí  $y_1, z_1, y_2, z_2$ .

81 Podle konfliktu klastrů  $\{x_1, x_2\}, \{z_1, z_2\}$  je pořadí  $x_1, z_1, x_2, z_2$ .

82 Dohromady máme pořadí  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ , což je  $C_6^Z$ . Základ indukce  
83 je tedy dokázán.

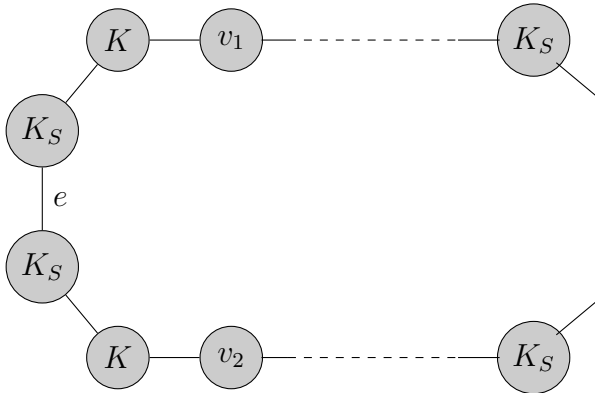
84 Nyní předpokládejme, že chceme dokázat tvrzení pro lichou kružnici ve-  
85 likosti  $k$ , a že tvrzení platí pro kružnici o 2 menší.

86 Indukční krok: Podle lemmatu 1.5 máme v  $(G, C)$  strukturu konfliktních  
87 klastrů odpovídající liché kružnici v grafu konfliktů. Předpokládejme, že jsme  
88 si  $(G, C)$  zjednodušili pomocí minorových operací tak, že nemáme nic jiného  
89 než klastry získané z liché kružnice v grafu konfliktů.



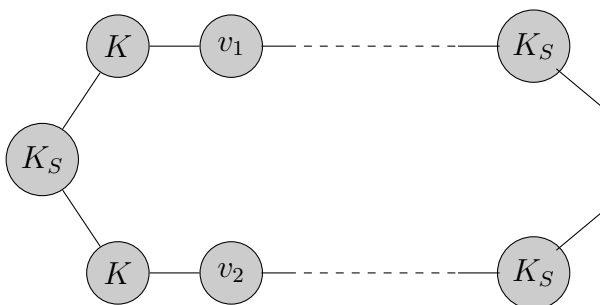
Obrázek 1.3: Výchozí stav,  $v_1, v_2$  jsou sousedé vrcholů klastru  $K$

90 Provedeme následující posloupnost minorových operací. Vezměme libo-  
 91 volný klaster  $K$ . Klastry jež jsou s ním v konfliktu ( $K_1$  a  $K_2$ ), můžeme sjed-  
 92 nodit (ubyl jeden klaster). Sjednocený klaster označme  $K_S$



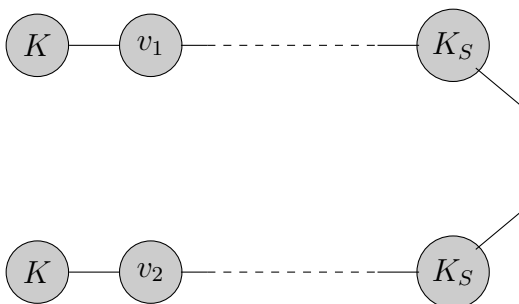
Obrázek 1.4: Sjednocení klastrů  $K_1$  a  $K_2$

93 V části, kde měly vrchol jen oni, tak sdílejí hranu  $e$ , tu můžeme po pro-  
 94 vedení sjednocení zkontrahovat.



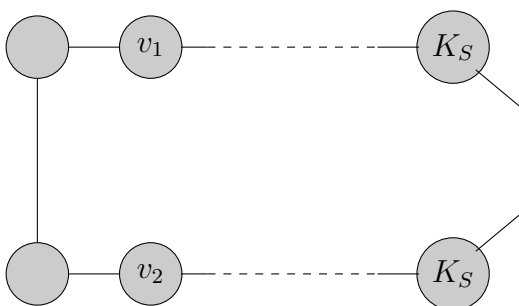
Obrázek 1.5: Kontrakce hrany  $e$

95 Vrchol vzniklý kontrakcí odebereme. Nyní se nám kružnice přerušila.



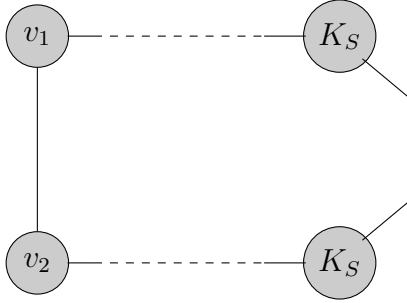
Obrázek 1.6: Odebrání vrcholu vzniklého kontrakcí

96 Přes rozdělení nám vede klastř  $K$ , pro nějž máme jedinou možnost, jak jej  
 97 nahradit hranou, tak to učiníme (jinými slovy, je to korektní i v nakreslené  
 98 verzi).



Obrázek 1.7: Nahrazení klastru  $K$  hranou

99 Tuto hranu můžeme rovnou zkontrahovat a vzniklý vrchol přidáme do jed-  
 100 noho z klastrů (opět sjednocení klastrů a ubytí druhého klastru), které s ním  
 101 mají sousední vrchol. Hranu, která jej spojovala se sousedem zkontrahujeme.



Obrázek 1.8: Výsledný klastrový graf

102 Vzniklému klastrovému grafu  $(G', \mathcal{C}')$  odpovídá v grafu konfliktů lichá  
 103 kružnice o velikosti  $k - 2$ . Tedy  $(G', \mathcal{C}')$  obsahuje podle indukčního předpo-  
 104 kladu  $C_6^Z$  jako klastrový minor. A jelikož  $(G', \mathcal{C}')$  je minorem  $(G, \mathcal{C})$ , tak  $C_6^Z$   
 105 je i minorem  $(G, \mathcal{C})$ , čímž je důkaz hotov.  $\square$

106 Nyní již můžeme dokázat hlavní větu této sekce

107 *Důkaz.* věty 1.1.

108  $\implies$

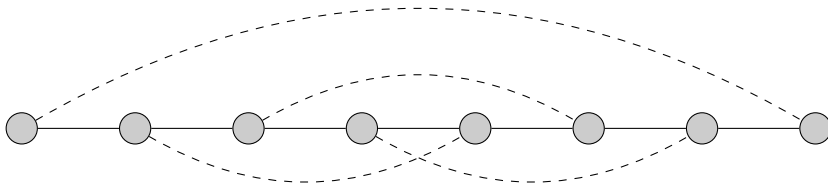
109 Pokud je  $(G, \mathcal{C})$  klastrově rovinný, pak podle lemmatu 1.2 neobsahuje  $C_6^Z$  jako  
 110 minor, neboť klastrový minor klastrově rovinného grafu je klastrově rovinný  
 111 (viz důsledek ??).

112  $\impliedby$

113 Dokazujeme sporem, tedy  $(G, \mathcal{C})$  není klastrově rovinný, ale neobsahuje  $C_6^Z$   
 114 jako minor. Podle lemmatu 1.4 není graf konfliktů bipartitní, tedy obsahuje  
 115 lichou kružnici, což podle tvrzení 1.6 říká, že  $(G, \mathcal{C})$  má jako minor  $C_6^Z$ , což  
 116 je spor s tím, že jsme předpokládali, že takový minor nemá.  $\square$

## 117 1.2 Cesty s klastry velikosti 2

118 Pro cesty uvedeme o něco slabší výsledek, a to že zakázaných minorů je  
 119 konečně mnoho.



Obrázek 1.9: Příklad klastrové cesty  $(G, \mathcal{C})$ , kde hrany jsou vyznačeny nepřerušovanou čarou a klastry přerušovanou. Po nahrazení klastrů saturátorem  $S$  graf  $G \cup S$  obsahuje dělení  $K_{3,3}$ .

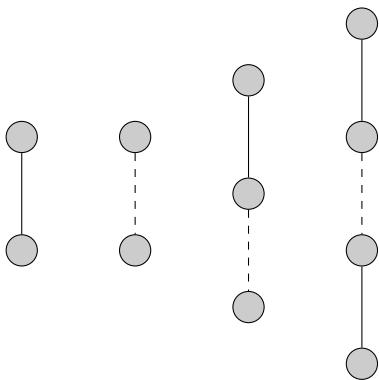
120 **Věta 1.7.** *Minimálních zakázaných minorů pro cesty s klastry velikosti 2 je*  
121 *konečně mnoho.*

122 *Důkaz.* Mějme klastrový graf  $(G, \mathcal{C})$ , kde  $G$  je cesta. Vezměme saturátor  $S$  a  
123 zkoumejme graf  $G \cup S$ . V tomto grafu mají vrcholy stupeň nejvýše 3. Tudíž  
124 zde nemůže být dělení  $K_5$ , ale může být dělení  $K_{3,3}$ . (viz obrázek 1.9) Jako  
125 minor zde můžou být obě možnosti bránící rovinnosti. Využíváme zde, že  
126  $(G, \mathcal{C})$  je klastrově rovinný  $\iff G \cup S$  rovinný.

127 Stačí se ptát, jak vypadají spojnice v dělení  $K_{3,3}$  a jak je můžeme zredu-  
128 kovat pomocí minorových operací. Pomocí minorových operací dosáhneme  
129 nejprve, že se zbavíme všeho nepotřebného, tedy vrcholů, hran a klastrů  
130 (resp. saturovaných hran) nepodílejících se na dělení  $K_{3,3}$ . Dále si spojnice  
131 zjednodušíme do podoby takové, že to jsou cesty, kde se střídají hrany a  
132 klastry. Pokud totiž máme na spojnici více hran za sebou, tak pomocí kon-  
133 trakcí se zbavíme nadbytečných hran. Nyní tvrdíme, že spojnice dokážeme  
134 zredukovat pomocí minorových operací do jednoho z následujících 4 typů:

- 135 1) jedna hrana
- 136 2) jeden klastř
- 137 3) klastř a hrana
- 138 4) hrana, klastř a hrana





Obrázek 1.10: Typy spojníc v dělení  $K_{3,3}$ . Plná čára představuje hranu, čárkovaná znamená klastr.

139 Toho dosáhneme následovně. Pokud máme na spojnici následující situaci,  
 140 že máme klastr  $K_1 = \{x, y\}$ , hranu  $e = \{y, z\}$  a klastr  $K_2 = \{z, w\}$  za sebou  
 141 viz obrázek 1.11, tak sjednotíme klastry  $K_1$  a  $K_2$ . Ty spojuje právě jedna  
 142 hrana, takže sjednocení můžeme provést bez problémů. Nyní jen smažeme  
 143 vrcholy  $y$  a  $z$  a zbyde nám jen klastr  $\{x, w\}$ . Opakováním tohoto postupu  
 144 každou spojnici zredukujeme na jeden ze čtyř výše uvedených typů. Grafů,  
 145 jenž jsou dělením  $K_{3,3}$  a mají tyto typy spojníc, je konečně mnoho  $\square$



Obrázek 1.11: Hledaná struktura, která jde zjednodušit pomocí minorových operací