Kapitola 1

Rešerše

V této kapitole čtenáře seznámíme se známými výsledky v oblasti klastrové rovinnosti. Jedná se o výsledky, kde pro omezenou verzi klastrové rovinnosti je znám polynomiální deterministický algoritmus pro otestování klastrové rovinnosti, případně je znám i algoritmus pro nakreslení.

Jedním směrem, kde omezení přineslo nějaké výsledky, je omezení se na souvislé klastry. Pro další výsledky v tomto směru se vždy požadavek na souvislost upravil. Například, že klastry indukují nejvýše dvě komponenty či některé klastry jsou obecně nesouvislé. Nyní uvedeme několik výsledků dosažených v tomto směru.

Věta 1.1 (Cortese et al. [1])**.** *Mějme klastrový graf $(G, \mathcal{C})$, kde každý klastr $K \in \mathcal{C}$ je souvislý. Pak existuje lineární deterministický algoritmus rozhodující zda $(G, \mathcal{C})$ je klastrově rovinný.*

Tento výsledek využijeme později při konstrukci lineárního nedeterministického algoritmu pro obecné klastrové grafy (viz kapitola **??**).

Před uvedením dalšího výsledku uvedeme definici takzvaného úplně souvislého klastrové grafu.

Definice 1.2. Klastrový graf $(G, \mathcal{C})$ je *úplně souvislý*, pokud pro každý klastr $K \in \mathcal{C}$ je K souvislý a i $V \setminus K$ je souvislý.

Věta 1.3 (Cornelsen a Wagner [2])**.** *Úplně souvislý klastrový graf $(G, \mathcal{C})$ je klastrově rovinný $\iff$ G je rovinný.*

Rovinnost lze rozpoznávat v lineárním čase. A navíc je i možné získat v tomto případě v lineárním čase klastrové nakreslení.

Věta 1.4 (Jelínek et al. [3])**.** *Mějme nakreslený klastrový graf* $(G, \mathcal{C}, \rho)$. *Pokud každý klastr* $K \in \mathcal{C}$ *indukuje nejvýše dvě komponenty, pak existuje lineární algoritmus pro rozhodnutí, zda* $(G, \mathcal{C})$ *je klastrově rovinný.*

Věta 1.5 (Gutwenger et al. [4])**.** *Pokud všechny nesouvislé klastry klastrového grafu* $(G, \mathcal{C})$ *leží na stejné cestě začínající v kořeni klastrové hierarchie, pak pro* $(G, \mathcal{C})$ *lze v kvadratickém čase rozhodnout, zda je klastrově rovinný.*

Věta 1.6 (Goodrich et al. [5])**.** *Mějme klastrový graf* $(G, \mathcal{C})$. *Nechť pro každý nesouvislý klastr* $K \in \mathcal{C}$ *platí, že jeho rodič a sourozenci v klastrové hierarchii jsou souvislé klastry. Potom pro* $(G, \mathcal{C})$ *lze v kvadratickém čase rozhodnout, zda je klastrově rovinný.*

Věta 1.7 (Gutwenger et al. [4])**.** *Mějme klastrový graf* $(G, \mathcal{C})$. *Každý nesouvislý klastr* K *má souvislého rodiče a souvislé komponenty* K *mají napojení mimo rodiče. Pak je algoritmus pracující v polynomiálním čase rozhodující o klastrové rovinnosti a dávající klastrové nakreslení v případě kladné odpovědi.*

Další směr, který přinesl výsledky, se týká takzvaných placatých klastrových grafů. Jedná se o omezení klastrové hierarchie, kde klastry jsou po dvou disjunktní (nepočítaje klastr obsahující všechny vrcholy a jednovrcholové klastry).

Definice 1.8. Klastrový graf $(G, \mathcal{C})$ je *placatý* pokud všechny klastry kromě kořene (klastru obsahující všechny vrcholy) mají jako rodiče kořen (jednovrcholové klastry ignorujeme).

Věta 1.9 (Jelínková et al. [6])**.** *Mějme placatý klastrový graf* $(G, \mathcal{C})$, *kde* G *je kružnice. Pokud každý klastr obsahuje nejvýše tři vrcholy, pak lze v polynomiálním čase rozhodnout, zda je* $(G, \mathcal{C})$ *klastrově rovinný.*

Věta 1.10 (Cortese et al [7])**.** *Mějme placatý klastrový graf* $(G, \mathcal{C})$, *kde* G *je kružnice. Pokud klastry jsou uspořádané do cyklu nebo cesty, pak lze v polynomiálním čase rozhodnout, zda je* $(G, \mathcal{C})$ *klastrově rovinný.*

Věta 1.11 (Cortese et al [8])**.** *Mějme placatý klastrový graf* $(G, \mathcal{C})$, *kde* G *je kružnice. Pokud klastry jsou uspořádané do nakresleného rovinného grafu, pak lze v polynomiálním čase rozhodnout, zda je* $(G, \mathcal{C})$ *klastrově rovinný.*

Věta 1.12 (Jelínková et al. [6])**.** *Mějme placatý klastrový graf* $(G, \mathcal{C})$, *kde* G *je 3-souvislý a všechny stěny mají velikost nejvýše 4, pak lze v polynomiálním čase rozhodnout, zda je* $(G, \mathcal{C})$ *klastrově rovinný.*

Věta 1.13 (DiBattista a Frati [9]). *Mějme placatý nakreslený klastrový graf* $(G, \mathcal{C}, \rho)$*, kde všechny stěny mají velikost nejvýše 5 a mějme pevné nakreslení grafu* G*, pak lze v polynomiálním čase rozhodnout, zda je* $(G, \mathcal{C})$ *klastrově rovinný.*

Jiným směrem bylo omezení grafu na vrcholově 3 souvislý.

Věta 1.14 (Jelínková et al. [6]). *Mějme klastrový graf* $(G, \mathcal{C})$*, kde klastry mají velikost nejvýše 3 (kromě kořene) a* G *je vrcholově 3-souvislý, pak lze v polynomiálním čase rozhodnout, zda je* $(G, \mathcal{C})$ *klastrově rovinný.*

Věta 1.15 (Jelínková et al. [6]). *Mějme klastrový graf* $(G, \mathcal{C})$*, kde klastry mají velikost nejvýše 3 (kromě kořene) a* G *je dělení vrcholově 3-souvislého multigrafu, který má* $\mathcal{O}(1)$ *vrcholů, a* G *má všechny stupně sudé, pak lze v polynomiálním čase rozhodnout, zda je* $(G, \mathcal{C})$ *klastrově rovinný.*

Ještě jedním směrem je omezení počtu klastrů. Konkrétně na dva klastry, viz články [10], [11], [12]. Dokazuje se v nich (mimo jiné) lineární algoritmus pro situaci, kdy množina vrcholů je rozdělena na právě dva neprázdné disjunktní klastry (nepoužívá se v nich terminologie klastrové rovinnosti, ale je to ekvivalentní).

Závěrem je nutno poznamenat, že jinak se jedná o otevřené problémy. Například pro obecné placaté grafy se neví, jestli lze efektivně rozhodovat o klastrové rovinnosti. Pro obecnou klastrovou rovinnost je otevřeným problémem zda patří do P nebo jestli je NP-úplný.

Literatura

[1] Cortese, P.F., Di Battista, G., Frati, F., Patrignani, M., Pizzonia, M.: C-planarity of cconnected clustered graphs. J. Graph Alg. Appl. 12(2), 225–262 (2008)

[2] S. Cornelsen and D. Wagner. Completely connected clustered graphs. Journal of Discrete Algorithms, 4(2):313–323, 2006.

[3] V. Jelínek, E. Jelínková, J. Kratochvíl, B. Lidický: Clustered Planarity: Embedded Clustered Graphs with Two-Component Clusters (extended abstract), Proceedings of Graph Drawing 2008, LNCS 5417 (2009), 121-132

[4] Gutwenger, C., Jünger, M., Leipert, S., Mutzel, P., Percan, M., Weiskircher, R.: Advances in c-planarity testing of clustered graphs. In: Goodrich, M.T., Kobourov, S.G. (eds.) GD'02. LNCS, vol. 2528, pp. 220–235. Springer (2002)

[5] Goodrich, M.T., Lueker, G.S., Sun, J.Z.: C-planarity of extrovert clustered graphs. In: Healy,P., Nikolov, N.S. (eds.) GD'05. LNCS, vol. 3843, pp. 211–222. Springer (2006)

[6] Jelínková, E., Kára, J., Kratochvíl, J., Pergel, M., Suchý, O., Vyskocil, T.: Clustered planarity: Small clusters in cycles and eulerian graphs. J. Graph Alg. Appl. 13(3), 379–422 (2009)

[7] P. F. Cortese, G. Di Battista, M. Patrignani, and M. Pizzonia. Clustering cycles into cycles of clusters. Journal of Graph Algorithms and Applications, 9(3):391–413, 2005.

[8] P. F. Cortese, G. Di Battista, M. Patrignani, and M. Pizzonia. On embedding a cycle in a plane graph. In Proceedings of 13th International

Symposium on Graph Drawing 2005, volume 3843 of LNCS, pages 49–60. Springer, Heidelberg, 2006.

[9] Di Battista, G., Frati, F.: Efficient c-planarity testing for embedded flat clustered graphs with small faces. In: Hong, S.H., Nishizeki, T., Quan, W. (eds.) GD'07. LNCS, vol. 4875, pp. 291–302. Springer (2008)

[10] Biedl, T.: Drawing planar partitions I; LL-drawings and LH-drawings. Technical Report RRR 11-98, RUTCOR, Rutgers University, 1998.

[11] Bied, T., Kaufmannl, M., Mutzel, P.: Drawing planar partitions II: HH-drawings. Technical Report RRR 12-98, RUTCOR, Rutgers University, 1998.

[12] Biedl, T.: Drawing planar partitions I; LL-drawings and LH-drawings. Technical Report RRR 11-98, RUTCOR, Rutgers University, 1998.