

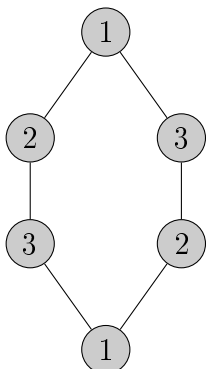
¹ Kapitola 1

² Speciální instance

³ V této kapitole se podíváme na omezené instance klastrové rovinnosti. Klastrová
⁴ rovinnost se dá omezit dvěma způsoby. Jednak omezením, jaké grafy budeme
⁵ uvažovat, a jednak omezením klastrové hierarchie. První omezenou třídou
⁶ klastrových grafů jsou kružnice s klastry velikosti 2 a druhou třídou budou
⁷ cesty s klastry velikosti 2. Uvedeme věty o počtu zakázaných minorů.

⁸ 1.1 Kružnice s klastry velikosti 2

⁹ Hlavním výsledkem této části je výsledek ukazující, že jediným zakázaným
¹⁰ minimálním minorem pro kružnice s klastry velikosti 2 je šesticyklus se třemi
¹¹ klastry, kde se vrcholy střídají v jakém klastru jsou (viz následující obrázek).
¹² Výsledek je jak pro nakreslenou, tak i nenakreslenou verzi.



Obrázek 1.1: Čísla označují, do jakého klastru vrchol patří. Dále v textu bude tento graf označován jako C_6^Z , kde Z značí, že se jedná o zakázaný minor

13 **Věta 1.1.** *Instance (G, \mathcal{C}) je klastrově rovinná $\iff (G, \mathcal{C})$ neobsahuje C_6^Z*
 14 *jako minor .*

15 Před důkazem věty ukážeme, že C_6^Z není klastrově rovinný.

16 **Lemma 1.2.** C_6^Z není klastrově rovinný.

17 *Důkaz.* Důkaz provedeme pro nenakreslenou verzi. Jelikož klastry jsou veli-
 18 kosti 2, můžeme nahrazovat klastry hranami. Nahrazení všech klastrů hra-
 19 nami však vede přímo na $K_{3,3}$. A protože $K_{3,3}$ není rovinný graf, tak ne-
 20 může C_6^Z klastrově rovinný. Poslední nahrazení klastru hranou tedy nelze
 21 provést □

22 U kružnice můžou saturátorové hrany vést pouze vnitřkem nebo vnějškem
 23 (myšleno v nakreslení). Pro dvě hrany ze saturátoru má smysl se bavit o tom,
 24 zda mohou vést na stejné straně kružnice nebo nikoliv. To nás vede k pojmu
 25 grafu konfliktů, který reprezentuje konflikty mezi hranami ze saturátoru.

26 **Definice 1.3.** Graf konfliktů je reprezentací konfliktů saturátorových hran,
 27 kde vrcholy jsou klastry a hrany představují konfliktní klastry. Klastry $\{x_1, x_2\}$
 28 a $\{y_1, y_2\}$ mají spolu konflikt, pokud se na kružnici vyskytují v následujícím
 29 pořadí $x_1, \dots, y_1, \dots, x_2, \dots, y_2, \dots$. Graf konfliktů pro klastrový graf (G, \mathcal{C}) bu-
 30 deme značit $GK_{(G, \mathcal{C})}$

31 Získáme ihned kritérium, kdy kružnice s klastry velikosti 2 je klastrově
 32 rovinný graf. Je to právě tehdy, když graf konfliktů je bipartitní. Dokážeme
 33 si to jako lemma.

34 **Lemma 1.4.** *Kružnice s klastry velikosti 2 je klastrově rovinná právě tehdy,*
 35 *když graf konfliktů je bipartitní.*

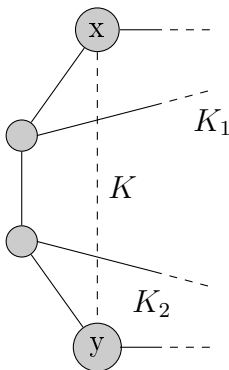
36 *Důkaz.* Klastř, jenž je tvořen sousedními vrcholy, zjevně nemůže být podle
 37 definice s jiným klastrem v konfliktu. Vrchol příslušného klastru v grafu kon-
 38 fiktů je izolovaný. Stačí tedy uvažovat, že vrcholy v klastru nejsou soused-
 39 ními.

40 " \implies "Místo klastřů uvažujme hrany saturátoru, ty mohou vést buď
 41 vnitřní stěnou kružnice nebo vnější stěnou kružnice. Hrana v grafu kon-
 42 fiktů vede mezi jeho vrcholy právě tehdy pokud saturované hrany příslušných
 43 klastřů vedou různými stěnami. To proto, že podle definice konfliktu, kdyby
 44 vedly stejnou stěnou, tak by se musely křížit, což by byl spor s tím, že máme
 45 klastrově nakreslení. Pokud jako partity označíme klastry, jež vedou buď
 46 vnější stěnou (jedna partita) nebo vnitřní stěnou (druhá partita). Izolované
 47 vrcholy dáme libovolně někam.

48 Opačná implikace je ten samý argument jen obrácené pořadí. \square

49 Uvedeme ještě jedno lemma, ukazující vztah mezi kružnicí v grafu kon-
 50 fiktů a odpovídající strukturou v klastrovém grafu.

51 **Lemma 1.5.** *Nechť (G, \mathcal{C}) je klastrový graf, G je kružnice a \mathcal{C} má klastry*
 52 *velikosti 2. Nechť Q je kružnice v grafu konfliktů $GK_{(G, \mathcal{C})}$, $K = x, y$ klastř*
 53 *obsažen v Q . Nechť A, B jsou dvě cesty v G spojující x, y a nechť K_1, K_2 jsou*
 54 *sousedě K v Q , pak BÚNO jediné dva vrcholy v A jsou z klastřů K_1 a K_2 (po*
 55 *jednom vrcholu z každého klastru a zbylé vrcholy leží v B .*



Obrázek 1.2: Znázornění, čemu odpovídá kružnice v grafu konfliktů. Nalevo od K je část A, napravo je část B.

56 Struktura v klastrovém grafu, která odpovídá kružnici v grafu konfliktů
 57 se jinými slovy „chová slušně a není divoce rozházená po grafu“.

58 *Důkaz.* Sporem předpokládejme, že v části, kde jsou klastry K_1 a K_2 , je ještě
 59 jeden jiný klastř K_3 . Uvažujme procházku z K_1 do K_2 cestou neobsahující K
 60 (tedy přes K_3). Prvním krokem se z K_1 dostaneme do druhé části. Po cestě
 61 ale musíme se vrátit zpět do první části kvůli klastřu K_3 pomocí klastřu K_i
 62 dříve, než se vrátíme pomocí klastřu K_2 . Klastř K_i ale musí být v konfliktu
 63 s klastřem K , což je spor s tím, že K má jen sousedy K_1 a K_2 , K_i by podle
 64 všeho též musel být sousedem K . \square

65 **Tvrzení 1.6.** *Graf konfliktů obsahuje lichou kružnici \implies instance (G, C)*
 66 *obsahuje zakázaný minor C_6^Z .*

67 *Důkaz.* Důkaz indukci podle velikosti liché kružnice. V základu indukce uká-
 68 žeme, že liché kružnici velikosti 3 v grafu konfliktů odpovídá C_6^Z a v indukč-
 69 ním kroku, pak pomocí minorových operací zredukujeme velikost podgrafu
 70 odpovídající liché kružnici o dva klastry.

71 Základ indukce: Mějme trojcyklus v grafu konfliktů. Mějme příslušné
 72 klastry $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}, \{z_1, z_2\}$ Podle definice konfliktů máme následující
 73 pořadí vrcholů:

74 Podle konfliktu klastřů $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}$ je pořadí x_1, y_1, x_2, y_2 .

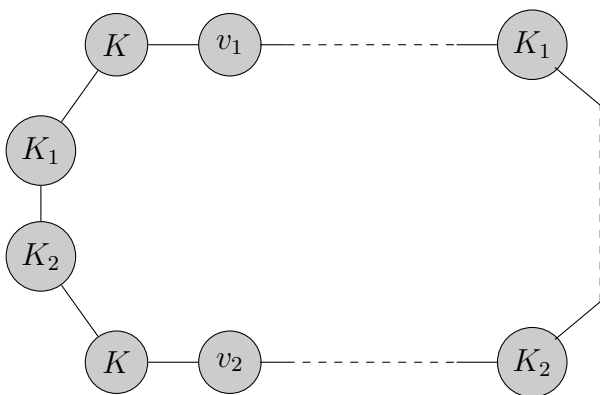
75 Podle konfliktu klastřů $\{y_1, y_2\}, \{z_1, z_2\}$ je pořadí y_1, z_1, y_2, z_2 .

76 Podle konfliktu klastřů $\{x_1, x_2\}, \{z_1, z_2\}$ je pořadí x_1, z_1, x_2, z_2 .

77 Dohromady máme pořadí $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, což je C_6^Z . Základ indukce
 78 je tedy dokázaný.

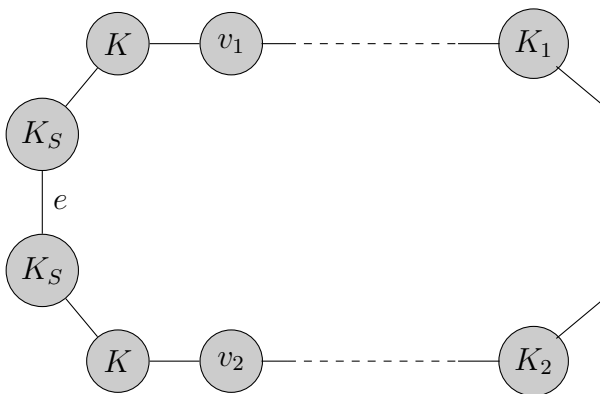
79 Nyní předpokládejme, že chceme dokázat tvrzení pro lichou kružnici ve-
 80 likosti k , a že tvrzení platí pro kružnici o 2 menší.

81 Indukční krok: Podle lematu 1.5 máme v (G, C) strukturu konfliktních
 82 klastřů odpovídající liché kružnici v grafu konfliktů. Předpokládejme, že jsme
 83 si (G, C) zjednodušili pomocí minorových operací tak, že nemáme nic jiného
 84 než klastry získané z liché kružnice v grafu konfliktů.



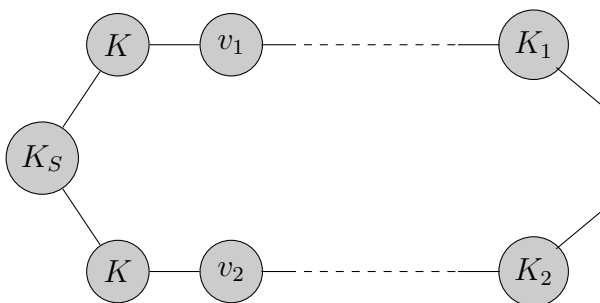
Obrázek 1.3: Výchozí stav, v_1, v_2 jsou sousedé vrcholů klastru K

85 Provedeme následující posloupnost minorových operací. Vezmeme předě-
 86 lový klaster K . Klastery jež jsou s ním v konfliktu (K_1 a K_2), můžeme sjednodit
 87 (ubyl jeden klaster). Sjednocený klaster označme K_S



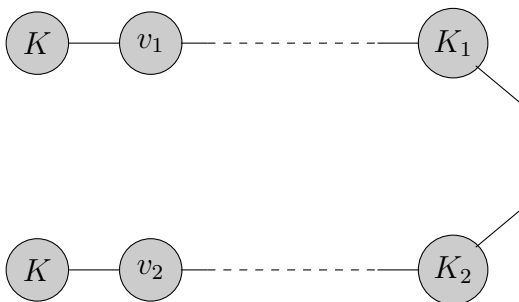
Obrázek 1.4: Sjednocení klastrů K_1 a K_2

88 V části, kde měly vrchol jen oni, tak sdílejí hranu e , tu můžeme po pro-
 89 vedení sjednocení zkontrahovat.



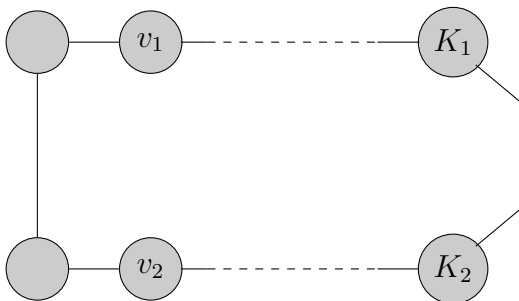
Obrázek 1.5: Kontrakce hrany e

90 Vrchol vzniklý kontrakcí odebereme. Nyní se nám kružnice přerušila.



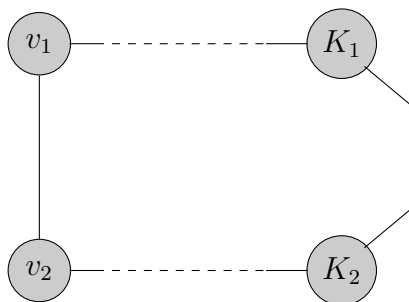
Obrázek 1.6: Odebrání vrcholu vzniklého kontrakcí

91 Přes rozdělení nám vede klastř K , pro nějž máme jedinou možnost, jak jej
92 nahradit hranou, tak to učiníme (jinými slovy, je to korektní i v nakreslené
93 verzi).



Obrázek 1.7: Nahrazení klastru K hranou

94 Tuto hranu můžeme rovnou zkontrahovat a vzniklý vrchol přidáme do jed-
 95 noho z klastrů (opět sjednocení klastrů a ubytí druhého klastru), které s ním
 96 mají sousední vrchol. Hranu, která jej spojovala se sousedem zkontrahujeme.



Obrázek 1.8: Výsledný klastrový graf

97 Vzniklému klastrovému grafu (G', \mathcal{C}') odpovídá v grafu konfliktů lichá
 98 kružnice o velikosti $k - 2$. Tedy (G', \mathcal{C}') obsahuje podle indukčního před-
 99 pokladu C_6^Z jako klastrový minor. A jelikož (G', \mathcal{C}') je minorem (G, \mathcal{C}) , tak
 100 C_6^Z je i minorem (G, \mathcal{C}) , čímž je důkaz hotov. (TODO doplnit o ilustrující
 101 obrázky) \square

102 Nyní již můžeme dokázat hlavní větu této sekce

103 *Důkaz.* věty 1.1.

104 \implies

105 Pokud je (G, \mathcal{C}) klastrově rovinný, tak podle lemmatu 1.4 je graf konfliktů
 106 bipartitní, což je ekvivalentní tomu, že graf konfliktů neobsahuje lichou kruž-
 107 nici, což je podle tvrzení 1.6 dává, že (G, \mathcal{C}) neobsahuje C_6^Z jako minor.

108 \impliedby

109 Dokazujeme sporem, tedy (G, \mathcal{C}) není klastrově rovinný, ale neobsahuje C_6^Z
 110 jako minor. Podle lemmatu 1.4 není graf konfliktů bipartitní, tedy obsahuje
 111 lichou kružnici, což podle tvrzení 1.6 říká, že (G, \mathcal{C}) má jako minor C_6^Z , což
 112 je spor s tím, že jsme předpokládali, že takový minor nemá. \square

113 1.2 Cesty s klastry velikosti 2

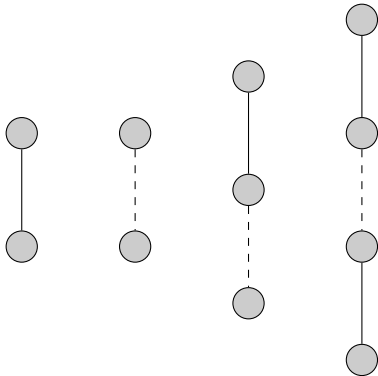
114 Pro cesty uvedeme o něco slabší výsledek, a to že zakázaných minorů je
 115 konečně mnoho.

116 **Věta 1.7.** *Zakázaných minorů pro cesty s klastry velikosti 2 je konečně*
 117 *mnoho.*

118 *Důkaz.* Mějme klastrový graf $(G[V, E], \mathcal{C})$. Vezměme saturátor S a zkou-
 119 mejme graf $(G[V, E \cup S])$. V tomto grafu mají vrcholy stupeň nejvýše 3. Tudíž
 120 zde nemůže být dělení K_5 , ale může být dělení $K_{3,3}$. (TODO příklad klastrové
 121 cesty s dělením $K_{3,3}$) Jako minor zde můžou být obě možnosti bránící rovin-
 122 nosti. Nám ale stačí, že když graf má dělení $K_{3,3}$, tak má i příslušný minor
 123 $K_{3,3}$.

124 Stačí se ptát, jak vypadají spojnice v dělení $K_{3,3}$ a jak je můžeme zredu-
 125 kovat pomocí minorových operací. Pomocí minorových operací dosáhneme
 126 nejprve, že se zbavíme všeho nepotřebného, tedy vrcholů, hran a klastrů
 127 (resp. saturovaných hran) nepodílejících se na dělení $K_{3,3}$. Dále si spojnice
 128 zjednodušíme do podoby takové, že to jsou cesty, kde se střídají hrany a
 129 klastry. Pokud totiž máme na spojnici více hran za sebou, tak pomocí kon-
 130 trakcí se zbavíme nadbytečných hran. Nyní tvrdíme, že spojnice dokážeme
 131 zredukovat pomocí minorových operací do jedné z následujících 4 typů:

- 132 1) jedna hrana
- 133 2) jeden klaster
- 134 3) klaster a hrana
- 135 4) hrana, klaster a hrana



Obrázek 1.9: Typy spojníc v dělení $K_{3,3}$. Plná čára představuje hranu, čár-
 kovaná znamená klaster.

136 Toho dosáhneme následovně. Pokud máme na spojnici následující situaci,
 137 že máme klaster $K_1 = \{x, y\}$, hranu $e = \{y, z\}$ a klaster $K_2 = \{z, w\}$ za sebou
 138 viz obrázek 1.10, tak sjednotíme klastry K_1 a K_2 . Ty spojuje právě jedna

139 hrana, takže sjednocení můžeme provést bez problémů. Nyní jen vyhodíme
140 vrcholy y a z a zbyde nám jen klastř $\{x, w\}$. Opakováním tohoto postupu,
141 každou spojnici zredukujeme na jeden z čtyř výše uvedených typů. Grafů,
142 jenž jsou dělením $K_{3,3}$ a mají tyto typy spojnic, je konečně mnoho \square



Obrázek 1.10: Hledaná struktura, která jde zjednodušit pomocí minorových operací