Složitost

Filip Šedivý

5. února 2015

Pro účely následujucího tvrzení předpokládejme, že klastr může obsahovat jediný vrchol nebo i všechny.

Tvrzení 1. *Maximální počet klastrů v grafu G s n ($n \geq 1$) vrcholy je 2n-1.*

Důkaz. Důkaz indukcí podle n:
Základ indukce : n=1
Zjevně platí.
Indukční předpoklad: Tvrzení platí pro $|V| <$ n.
Indukční krok:
BÚNO: každý vrchol je minimálně obsažen v klastru obsahující pouze jej. Díky tomuto pak každý klastr, který obsahuje aspoň dva vrcholy se rozkládá aspoň na dva menší obsahující méně vrcholů.
Máme graf s n vrcholy. Podle předpokladu máme klastr K obsahující všechny vrcholy. Ten obsahuje k vzájemně disjunktních podklastrů (takových, že už jediný klastr, ve kterém jsou obsaženy je K). Velikost i-tého klastru nechť je $\mathrm{k_i}$ Každý z těchto klastrů obsahuje méně než n vrcholů. Platí pro ně tedy indukční předpoklad. Máme tedy:
max. počet klastrů $= 1 + \sum_{i=1}^{k}(2 * k_{\mathrm{i}} - 1) = 1 + 2 * \sum_{i=1}^{k} k_{\mathrm{i}} - k = 2n - k + 1$
K maximalizování dojde pokud bude vždy k=2. □