

1

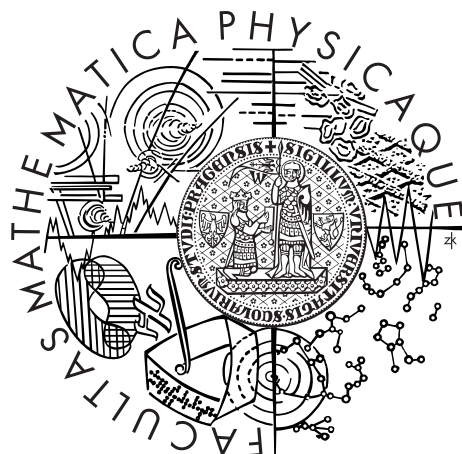
Univerzita Karlova v Praze

2

Matematicko-fyzikální fakulta

3

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



4

Filip Šedivý

5

Klastrová rovinnost

6

Informatický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jelínek Vít, Ph.D.

7

Studijní program: Informatika

Studijní obor: obecná informatika

8

Praha 2015

9 Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně
10 s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

11 Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplýva-
12 jící ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména
13 skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční
14 smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského
15 zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Klastrová rovinnost

Autor: Filip Šedivý

Katedra / Ústav: Informatický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jelínek Vít, Ph.D. , Informatický ústav Univerzity Karlovy

Abstrakt: (TODO sem vložit abstrakt)

Klíčová slova: Klastrová rovinnost, klastrové minory, výpočetní složitost, charakterizace minimálních klastrových grafů bez nakreslení

Title: Clustered planarity

Author: Filip Šedivý

Department: Computer Science Institute of Charles University

Supervisor: RNDr. Jelínek Vít, Ph.D. , Computer Science Institute of Charles University

Abstract: (TODO sem vložit abstrakt v angličtině)

Keywords: Clustered planarity, clustered minors, computational complexity, characterization of minimal clustered graphs without embedding

16 Obsah

17	1 Úvod	2
18	1.1 Aplikace klastrové rovinnosti	4
19	2 Složitost	5
20	2.1 Datová reprezentace	5
21	2.2 časová složitost	7
22	2.3 prostorová složitost	9
23	3 Minorové operace	10
24	4 Speciální instance	14
25	4.1 Kružnice s klastry velikosti 2	14
26	4.2 Cesty s klastry velikosti 2	18

27 Kapitola 1

28 Úvod

29 Problém existence rovinného klastrového nakreslení grafu (dále jen klastrová
30 rovinnost) je jedním možným zobecněním klasické grafové rovinnosti pro pří-
31 pad, kdy kromě vrcholů a hran máme hierarchii skupin vrcholů. Skupinu vr-
32 cholů nazýváme klastrem. Pro klastrovou rovinnost není znám polynomiální
33 algoritmus, a není známo, zda je tento problém NP-úplný.

34 **Definice 1.1.** Mějme graf $G = (V, H)$. Pod *klastrem* C budeme uvažovat
35 podmnožinu vrcholů $C \subseteq V$.

36 *Klastrovou hierarchií* jest množina klastřů, kde pro každé dva klastry C_1 a
37 C_2 platí následující

- 38 • buď $C_1 \cap C_2 = \emptyset$
- 39 • nebo $C_1 \subset C_2$

40 *Klastrový graf* je dvojice (G, \mathcal{C}) , kde G je graf a \mathcal{C} je klastrová hierarchie.

41 Formálně se můžeme dívat na klastrovou hierarchii jako podmnožinu
42 $\mathcal{P}(V)$. To může vést k tomu, že bychom si mohli myslet, že klastřů může
43 být velmi mnoho vzhledem k velikosti původního grafu. V kapitole složitost
44 ukážeme, že počet klastřů je lineární vzhledem k počtu vrcholů grafu G . V ně-
45 kterých situacích se hodí předpokládat, že množina všech vrcholů vždy tvoří
46 klastř a též jednotlivé vrcholy tvoří klastry. Například se tento předpoklad
47 hodí v důkazu o počtu klastřů.

48 **Definice 1.2.** Pod *klastrovým nakreslením* rozumíme to, že vrcholy a hrany
49 nakreslíme do roviny jako u rovinného nakreslení a navíc doplníme nakreslení

50 klastřů.

51 *Nakreslením klastru* v rovině je topologická kružnice. Ve vnitřku kružnice leží
52 pouze vrcholy z daného klastru a hrany grafu smí protínat hranici nakreslení
53 klastru nejvýše jedenkrát. Pro libovolné dva klastry se nesmí stát, že by se
54 jejich nakreslení protínala. Nakreslení klastru K budeme značit γ_K
55 Klastrový graf (G, \mathcal{C}) je *klastrově rovinný* pokud existuje nějaké jeho klastrové
56 nakreslení.

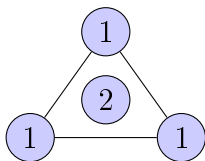
57 Omezení pro hrany v nakreslení klastru nám zaručuje, že hrany vedoucí
58 mezi vrcholy klastru leží celé ve vnitřku nakreslení klastru. Podobně hrany
59 spojující vrcholy mimo klastr musí ležet ve vnějšku. Hrana protínající nakres-
60 lenou kružnici tedy musí spojovat vrchol z klastru s vrcholem mimo klastr.

61 Nyní můžeme uvést definici rozhodovacího problému klastrové rovinnosti.
62 Klastrová rovinnost má dvě základní verze. A to nakreslená a nenakreslená
63 verze.

64 **Definice 1.3.** V *nenakreslené verze klastrové rovinnosti* máme rozhodnout
65 zda pro daný klastrový graf existuje jeho klastrové nakreslení.

66 U *nakreslené verze klastrové rovinnosti* máme na vstupu nakreslení grafu
67 a klastrovou hierarchii a máme rozhodnout zda lze dokreslit klastry, tak
68 abychom obdrželi klastrové nakreslení.

69 Nakreslená verze klastrové rovinnosti je už na pohled omezena silnější
70 podmínkou a to nakreslením vstupního grafu. Pokud tedy nelze dokreslit
71 klastry tak, abychom obdrželi klastrové nakreslení, pak klastrový graf stále
72 může být klastrově rovinný. Viz následující příklad



Obrázek 1.1: Čísla označují, do jakého klastru vrchol patří. Na první pohled je zřejmé, že není možné dokreslit klastr 1 tak, aby vrchol označený jako 2 nebyl ve vnitřku nakreslení klastru, ale je také zjevné, že příslušný klastrový graf je klastrově rovinný.

73 Nyní definujeme několik pojmů, které jsou potřeba pro uvedení věty dá-
74 vající kombinatorický pohled na problém klastrové rovinnosti.

75 **Definice 1.4.** Mějme klastrový graf $(G[V, E], \mathcal{C})$. Klastř K je *souvislý* pokud
76 graf indukovaný na vrcholech klastř je souvislý.

77 **Definice 1.5.** Mějme klastrový graf $(G[V, E], \mathcal{C})$. *Saturátor* S je podmnožina
78 $\binom{V}{2} \setminus E$ taková, že každý klastř je v $(G[V, E \cup S], \mathcal{C})$ souvislý.

79 Mejmě nakreslení grafu G , označme jej ρ . *Nakreslený saturátor* S je množina
80 nakreslených hran takových, že v nakreslení $\rho \cup S$ je každý každý klastř
81 souvislý.

82 **Definice 1.6.** Mějme klastrový graf $(G[V, E], \mathcal{C})$. V nakreslení klastrového
83 grafu rozumíme *dírou* kružnici v grafu ležící v klastř K takovou, že v na-
84 kreslení γ_K je uvnitř nakreslení kružnice vrchol nepatřící do klastř K .

85 Větu uvedeme zvlášť pro nakreslenou verzi a zvlášť pro nenakreslenou
86 verzi.

87 **Věta 1.7.** *Mějme nakreslenou verzi klastrové rovinnosti. Nakreslený klast-*
88 *rový graf (G, \mathcal{C}) je klastrově rovinný právě tehdy, když existuje nakreslený*
89 *saturátor S takový, že $(G \cup S, \mathcal{C})$ nemá díru.*

90 **Věta 1.8.** *Mějmene nakreslenou verzi klastrové rovinnosti. Klastrový graf*
91 *(G, \mathcal{C}) je klastrově rovinný právě tehdy, když existuje saturátor S takový, že*
92 *$G \cup S$ má rovinné nakreslení, v němž není díra vzhledem k $(G \cup S, \mathcal{C})$.*

93 1.1 Aplikace klastrové rovinnosti

94 Klastrová rovinnost nachází aplikaci například při vizualizace různých sítí,
95 grafů, apod., kde je potřeba seskupovat uzly (vrcholy, ...) do celků.

96 Kapitola 2

97 Složitost

98 V této kapitole ukážeme několik výsledků ohledně časové a prostorové slo-
99 žitosti. Problém klastrové rovinnosti patří do třídy NP z pohledu časové
100 složitosti a z hlediska prostorového se dá řešit v prostoru $\mathcal{O}(n)$ na determi-
101 nistickém stroji, kde n je počet vrcholů.

102 Jako výchozí model uvažujeme RAM s logaritmickou velikostí paměťo-
103 vých buněk vzhledem k velikosti vstupu a jednotkovou cenou za aritmetické
104 operace s čísly, případně jeho nedeterministickou verzi nRAM. Tedy s poly-
105 nomiálně velkými čísly lze uložit a operovat s nimi v konstantním prostoru
106 a čase. Je to standardní model u tohoto typu problémů, díky němuž lze říci,
107 že graf s n vrcholy a m hranami je uložen v prostoru $\mathcal{O}(n + m)$.

108 2.1 Datová reprezentace

109 Nejprve uvedeme možnosti reprezentace klastrového grafu a ujasníme vzhle-
110 dem k čemu budeme vztahovat příslušnou složitost. Pro reprezentaci klastrové
111 hierarchie se nabízí dvě možnosti.

- 112 1. Seznamy vrcholů
- 113 2. Strom, kde listy představují vrcholy a vnitřní uzly představují klastry
 - 114 • Zde předpokládejme, že kořen tohoto stromu reprezentuje klastr
 - 115 obsahující všechny vrcholy a listy přísluší vrcholům

116 V této kapitole budeme několikrát hovořit o maximálních podklastrech
 117 (vzhledem na inkluzi) v nějakém klastru K . Proto si zavedeme následující
 118 definici.

119 **Definice 2.1.** Pod *maximálním podklastrem vzhledem ke klastru K* myslíme
 120 klaster takový, že je přímým potomkem K v klastrové hierarchii.

121 Nejprve musíme určit, kolik klastrů se v klastrové hierarchii může nachá-
 122 zet. Pro zjednodušení budeme předpokládat, že v klastrové hierarchii máme
 123 vždy klaster obsahující všechny všechny vrcholy a každá jednovrcholová mno-
 124 žina je též klastrem v klastrové hierarchii.

125 **Tvrzení 2.2.** *Maximální počet klastrů v grafu G s n ($n \geq 1$) vrcholy je $2n - 1$.*

126 *Důkaz.* Důkaz indukci podle n :

127 Základ indukce : $n=1$

128 Zjevně platí.

129 Indukční předpoklad: Tvrzení platí pro $|V| < n$.

130 Indukční krok:

131 Díky předpokladům víme, že klaster, který obsahuje aspoň dva vrcholy, má
 132 aspoň dva maximální podklastry.

133 Máme graf s n vrcholy. Podle předpokladu máme klaster K obsahující všechny
 134 vrcholy. Ten obsahuje k vzájemně disjunktních maximálních podklastrů. Ve-
 135 likost i -tého klastru nechť je k_i . Každý z těchto klastrů obsahuje méně než n
 136 vrcholů. Platí pro ně tedy indukční předpoklad. Máme tedy:

$$137 \# \text{ max. počet klastrů } = 1 + \sum_{i=1}^k (2 * k_i - 1) = 1 + 2 * \sum_{i=1}^k k_i - k = 2n - k + 1$$

138 K maximalizování dojde pokud bude vždy $k = 2$. \square

139 Velikost grafu na vstupu je $\mathcal{O}(n + m + |\mathcal{C}|)$, \mathcal{C} je klastrová hierarchie
 140 a $|\mathcal{C}|$ její velikost. První varianta reprezentace klastrové hierarchie má za
 141 následek, že klastrová hierarchie zabírá prostor až $\mathcal{O}(n^2)$. Příkladem takové
 142 klastrové hierarchie je graf, kde klastry jsou postupně do sebe vnořené. První
 143 klaster obsahuje všechny vrcholy, druhý o vrchol méně, třetí o další vrchol,
 144 Druhá varianta reprezentace naproti tomu dává prostor $\mathcal{O}(n)$. Nejvíce
 145 nám tedy o časové a prostorové složitosti problému prozradí, když budeme
 146 složitost vyjadřovat vzhledem k počtu vrcholů vstupního grafu. Dostali jsme,
 147 že klastrový graf (G, \mathcal{C}) , kde G je rovinný graf, lze reprezentovat v prostoru
 148 $\mathcal{O}(n)$.

149 Dále v textu budeme pracovat výhradně se stromovou reprezentací klastrové
 150 hierarchie.

151 2.2 časová složitost

152 Hlavním výsledkem této části je lineární nedeterministický algoritmus pro
153 klastrovou rovinnost.

154 **Tvrzení 2.3.** *Problém rozhodnutí existence rovinného klastrového nakreslení*
155 *patří do třídy NP.*

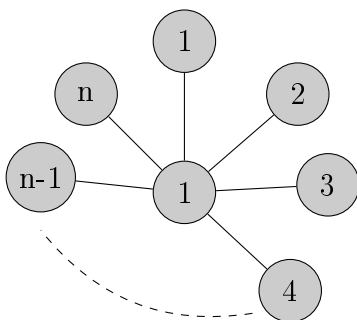
156 *Důkaz.* Využíváme toho, že ekvivalentním problémem ke klastrové rovinnosti
157 je existence saturátoru. Ten nám zajistí, že klastry jsou souvislé. Saturá-
158 tor dostaneme jako certifikát. Vzhledem k tomu, že klastrů je polynomiálně
159 mnoho, tak ověření saturátoru se dá provést v polynomiálním čase (například
160 otestováním souvislosti každého klastru zvlášť). Dále jsou algoritmy testující
161 klastrovou rovinnost v polynomiálním čase (TODO doplnit reference), pokud
162 klastry jsou souvislé. \square

163 **Tvrzení 2.4.** *Pro problém klastrové rovinnosti je nedeterministický algorit-*
164 *mus, jehož časová složitost je $\mathcal{O}(n)$.*

165 *Důkaz.* Důkaz tohoto tvrzení je pouze doplněním důkazu, že klastrová rovin-
166 nost je v NP. Pro důkaz je třeba ukázat, že umíme ověřit souvislost všech
167 klastrů v čase $\mathcal{O}(n)$, a pak že klastrová rovinnost se dá otestovat v lineárním
168 čase pokud jsou klastry souvislé. Druhá část viz (TODO doplnit reference)

169 Prosté otestování všech klastrů zvlášť na souvislost vede na algoritmus s
170 časovou složitostí $\mathcal{O}(n^2)$, protože klastrů je až lineárně mnoho a jejich celková
171 velikost je až kvadratická. Pro zlepšení půjdeme cestou, kdy budeme testo-
172 vat souvislost klastrů od nejmenších k největším. A po otestování klastru
173 na souvislost daný klastr zkontruujeme do jediného vrcholu, abychom při
174 testování nadklastrů nemuseli opětovně procházet přes vrcholy otestovaného
175 klastru.

176 Při testování klastru na souvislost použijeme klasický algoritmus na tes-
177 tování souvislosti. Hrany, které vedou ven z klastru, si při průchodu si je
178 zapamatujeme, a po doběhnutí testu je aktualizujeme, tedy nasměrujeme je
179 do nového vrcholu vzniklého kontrakcí klastru. Časová složitost pro jeden
180 klastř C je $\mathcal{O}(n_C + m_C + \#\text{počet hran ven z klastru})$, kde n_C je počet vrcholů
181 klastru a m_C je počet hran mezi vrcholy klastru. Problémem je, že tohle
182 stále vede na algoritmus s kvadratickou časovou složitostí (TODO obrázek
183 klastrového klastru dosvědčující tuto složitost). Problémem je, že se hrany
184 můžou aktualizovat příliš často.



Obrázek 2.1: Klastrový graf, pro který poběží kvadraticky dlouho vzhledem k počtu vrcholů algoritmus s aktualizací hran. Je to hvězda, kde i -tý klastr je tvořen vrcholy s čísly nejvýše i . Důvodem neefektivity je to, že kontrakce vždy zasáhne středový vrchol hvězdy a všechny hrany se musí přesměrovat do nového vrcholu vzniklého kontrakcí.

185 Nyní uvedeme algoritmus s lineární časovou složitostí. Ten vychází z před-
 186 chozího pokusu, kde jsme si zdánlivě nepomohli. Pro zlepšení musíme dosáhnout
 187 toho, že hrany opakovaně nenavštěvujeme. To provedeme následovně:
 188 Pro každý klastr budeme mít pomocný graf, kde vrcholy představují maxi-
 189 mální podklastry daného klastru. Hrany v těchto pomocných grafech předsta-
 190 vují hrany jdoucí mezi klastry. Abychom mohli určit, do kterého pomocného
 191 grafu hrana patří, tak potřebujeme určit nejmenší klastr, který sdílí vrcholy
 192 příslušné hrany. Navíc také potřebujeme znát podklastry, kam vrcholy patří.
 193 To je ale problém nejmenšího společného předka v zakořeněném stromu, kdy
 194 potřebné dotazy se provádí v konstantním čase a s lineárním předvýpočtem
 195 a využívající lineární prostor. Jednoduchou úpravou získáme i ty potřebné
 196 informace (ty podklastry). (TODO přidat referenci na LCA a RMQ)

197 Náš algoritmus tedy napřed provede předvýpočet potřebný pro problém
 198 hledání minimálního společného předka, kde se hrany rozdělí do pomocných
 199 grafů. Následně se pro každý pomocný graf provede test souvislosti. První
 200 část algoritmu pracuje v čase $\mathcal{O}(n)$ díky tomu, že umístění hrany do pomoc-
 201 ného grafu umíme provést v konstantním čase a hran je pouze $\mathcal{O}(n)$. Druhá
 202 část algoritmu pracuje v čase $\sum_{C \in \mathcal{C}} (n_C + m_C) = \sum_{C \in \mathcal{C}} n_C + \sum_{C \in \mathcal{C}} m_C \leq |\mathcal{C}| + m =$
 203 $\mathcal{O}(n) + \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n)$, zde n_C značí počet vrcholů pomocného grafu a m_C
 204 počet jeho hran. \square

205 2.3 prostorová složitost

206 Z výsledků o časové složitosti můžeme říci, že můžeme klatrovou rovin-
207 nost rozhodovat v nedeterministickém prostoru o velikosti $\mathcal{O}(n)$. Ze Savit-
208 chovy věty (doplnit ref) plyne, že v deterministickém prostoru stačí nej-
209 výše prostor velikosti $\mathcal{O}(n^2)$. Lepšího výsledku, ve smyslu, že potřebujeme
210 méně prostoru, dosáhneme využitím vztahu tříd NTIME a DSPACE, který
211 je $NTIME(t(n)) \subseteq DSPACE(t(n))$. Jelikož máme nedeterministický algo-
212 ritmus pro klatrovou rovinnost pracující v lineárním čase, tak díky přede-
213 šlému víme, že existuje deterministický algoritmus využívající pouze lineárně
214 mnoho prostoru.

215 **Tvrzení 2.5.** *Klatrová rovinnost lze rozhodovat na RAMu s lineárně ome-*
216 *zeným prostorem.*

217 *Důkaz.*

□

218 Kapitola 3

219 Minorové operace

220 V této kapitole zavedeme operace s klastrovým grafem, které zachovávají
221 klastrovou rovinnost. V závěru kapitoly zavedeme pojem klastrového minoru
222 jakožto hlavní pojem této kapitoly, jenž v následující kapitole použijeme pro
223 charakterizaci zakázaných minorů omezených problémů klastrové rovinnosti.

224 **Definice 3.1.** (minorové operace) Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}) . Minorové
225 operace na klastrových grafech jsou následující:

226 (Pozn.: Pokud se neřekne jinak, operace se smí provést v nakreslené i
227 nenakreslené verzi)

228 *Odebráním vrcholu v* z klastrového grafu (G, \mathcal{C}) vznikne klastrový graf
229 (G', \mathcal{C}') , kde $G' = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{f \mid \text{hrana } f \text{ obsahovala vrchol } v\})$ a \mathcal{C}' je
230 klastrová hierarchie, kde se z klastrů odebere vrchol v , pokud v nich byl.

231 *Odebráním hrany e* z klastrového grafu (G, \mathcal{C}) vznikne klastrový graf
232 (G', \mathcal{C}) , kde $G' = (V, E \setminus \{e\})$.

233 *Odebráním klastru K* z klastrového grafu (G, \mathcal{C}) vznikne klastrový graf
234 (G, \mathcal{C}') , kde $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \setminus K$.

235 *Kontrakcí hrany $e = \{x, y\}$* z klastrového grafu (G, \mathcal{C}) vznikne klastrový
236 graf (G', \mathcal{C}) , kde G' je graf, který obdržíme kontrakcí hrany e . Kontrakci
237 můžeme provést za předpokladu, že koncové vrcholy x, y leží ve stejných
238 klastrech.

239 *Nahrazení klastru K o velikosti 2 hranou e* z klastrového grafu klastrového
240 grafu (G, \mathcal{C}) vznikne klastrový graf (G', \mathcal{C}') , kde $G' = (V, E \cup e)$ a $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \setminus K$.
241 Nahrazení smíme provést pokud v grafu G' nevznikne minor $K_{3,3}$ nebo K_5 .
242 U nakreslené verze navíc jen pokud to lze provést jednoznačně.

243 *Odebráním vrcholu v z klastru K* z klastrového grafu (G, \mathcal{C}) vznikne klast-
244 rový graf (G, \mathcal{C}') , kde \mathcal{C}' vznikne přeražením vrcholu v z Klastru K do jeho

245 rodiče. Tahle operace lze provést za předpokladu, že z vrcholu v vychází právě
246 jedna hrana ven z K a K je nejmenší (vzhledem k inkluzi) klastř obsahující
247 v .

248 *Sjednocení disjunktních klastřů K_1 a K_2 z klastrového grafu (G, \mathcal{C}) vznikne*
249 *klastrový graf (G, \mathcal{C}') , kde $\mathcal{C}' := (\mathcal{C} \setminus \{K_1, K_2\}) \cup \{K_1 \cup K_2\}$. Sjednocení*
250 *klastřů můžeme provést za předpokladů, že m K_1, K_2 jsou dva minimální*
251 *klastry (nemají podklastry) se společným rodičem, $K_1 \cup K_2$ neindukuje kruž-*
252 *nici s vrcholem mimo $K_1 \cup K_2$ uvnitř. Jinými slovy $K_1 \cup K_2$ nemá díru v G (v*
253 *nakreslené verzi). V nenakreslené verzi je podmínkou, že existuje nakreslení*
254 *takové, že $K_1 \cup K_2$ nemá díru v G . Posledním předpokladem je, že existuje*
255 *hrana spojující K_1 s K_2 .*

256 Název minorové operace je užít proto, že každá operace zjednoduše daný
257 vstupní klastrový graf. Nyní vyzkoumáme dopad minorových operací na
258 klastrový graf, konkrétně na dopad existence klastrového nakreslení.

259 **Definice 3.2.** Mějme klastrově rovinný klastrový graf (G, \mathcal{C}) . Operace s
260 klastrovým grafem OP zachovává klastrovou rovinnost pokud (G, \mathcal{C}) zůstane
261 klastrově rovinný.

262 **Tvrzení 3.3.** *Minorové operace zachovávají klastrovou rovinnost.*

263 *Důkaz.* Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}) a jeho klastrové nakreslení ρ .

264 Odebrání vrcholu, hrany, klastru zachovává klastrovou rovinnost:
265 Mějme dáno klastrové nakreslení. Odebrání hrany zapříčiní jedině to, že se
266 nemusí v daném nakreslení hrana kreslit. Podobně pro odebraný vrchol, kdy
267 se odebere hrany vedoucí do něj. Odebraný klastř se též prostě nenakreslí

268 Kontrakce hrany zachovává klastrovou rovinnost:
269 Mějme dáno klastrové nakreslení. Kontrakce je jen vlastně smrštění hrany do
270 jediného bodu, jenž zastupuje vrchol vzniklý kontrakcí.

271 Nahrazení klastru hranou zachovává klastrovou rovinnost:
272 Stačí si uvědomit, že takový klastř se chová jako hrana. V nakreslené verzi
273 je požadavek na jednoznačnost (jen jediná stěna, kde lze hranu dokreslit),
274 protože by jinak se mohlo stát nahrazením klastru hranou, že vznikne díra.

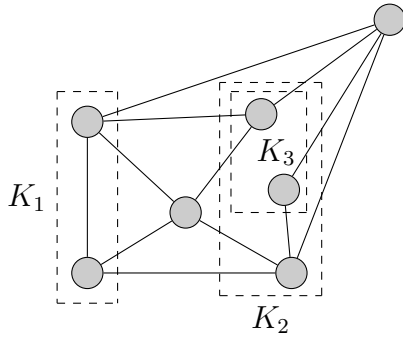
275 Odebrání vrcholu z klastru zachovává klastrovou rovinnost:
276 Jednoduchý překreslovací argument, kdy podél hrany protáhneme hranici
277 klastru až ji přetáhneme přes vyjímáný vrchol. (TODO dát ilustrativní ob-
278 rázek)

279 Sjednocení klastřů zachovává klastrovou rovinnost:
280 Nechť S je minimální saturátor (G, \mathcal{C}) takový, že $(G[V, E \cup S], \mathcal{C})$ nemá díru.

281 S je saturátorem i pro klastrový graf (G, \mathcal{C}') , kde ale může být díra. Necht'
 282 existuje minimální saturátor $S' \subseteq S$ takový, tvrdíme že $(G[V, E \cup S'], \mathcal{C})$ nemá
 283 díru. To dokážeme sporem.

284 Necht' D je díra. Ta musí být ve sjednocení klastrů K_1 a K_2 , neboť kdyby
 285 byla jinde, bylo by to ve sporu s předpokladem, že původní klastrový graf
 286 je klastrově rovinný. Díra D má neprázdný průnik se saturátorem S' . Kdyby
 287 průnik byl prázdný, znamenalo by to, že příslušná díra byla v původním
 288 klastrovém grafu. Označme tuto hranu $e = \{x, y\}$, kde x a y jsou její koncové
 289 vrcholy. Jako S'' označme $S' \setminus e$. Množina S'' je saturátorem, protože každý
 290 klastr $K \in \mathcal{C}'$ obsahující vrcholy x a y obsahuje i cestu $D \setminus \{e\}$. Dostali jsme
 291 tedy spor s minimalitou S' . S' tedy neobsahuje díry. \square

292 Sjednocení klastrů má dost předpokladů, a proto uvedeme proč jsou
 293 tyto předpoklady nutné. Předpoklad o společném rodiči je z důvodu zacho-
 294 vání klastrové hierarchie. Následující příklad klastrové grafu ukazuje, proč je
 295 nutný předpoklad o tom, že sjednocované klastry nesmějí mít podklastry.



Obrázek 3.1: Klastř K_3 brání sjednocení klastrů K_1 a K_2 , neboť jeho saturování (nahrazení hranou) by v $K_1 \cup K_2$ vznikla díra. Kdybychom vynechali K_3 , pak už je snadné najít klastrové nakreslení.

296 Nyní se podíváme na dva speciální případy sjednocení klastrů. Jeden pří-
 297 pad je přidání vrcholu do klastru, který je vlastně inverzí k odebrání vrcholu
 298 z klastru.

299 **Tvrzení 3.4.** *Připojení vrcholu do klastru*

300 (G, \mathcal{C}) nakreslená instance klastrové rovinnosti, $v \in V(G)$ a $K \in \mathcal{C}$.

301 $\mathcal{C}' = (\mathcal{C} \setminus \{K\}) \cup \{K \cup \{v\}\}$

302 1. *v sousedí s K (je spojen s nějakým vrcholem v K hranou)*

303 2. *Každý klastr obsahující v obsahuje i K*

304 3. *K nemá podklastry*

305 4. *$K \cup \{v\}$ neindukuje kružnici s vrcholem mimo K uvnitř*

306 *Potom (G, \mathcal{C}) je klastrově rovinný $\implies (G, \mathcal{C}')$ je klastrově rovinný.*

307 *Důkaz.* Jednoduše, budeme vrchol vydávat za jednovrcholový klastr. Zbytek
308 plyne z toho, že sjednocení zachovává klastrovou rovinnost. \square

309 Podobně pro nenakreslenou verzi. Druhý případ je, když klastry spojuje
310 právě jedna hrana.

311 **Tvrzení 3.5.** *Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}) a dva disjunktí klastry K_1 a K_2 ,
312 které spojuje právě jedna hrana e . K_1 a K_2 mají společného rodiče a nemají
313 podklastry. Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}') , kde $\mathcal{C}' := (\mathcal{C} \setminus \{K_1, K_2\}) \cup \{K_1 \cup K_2\}$.
314 Potom (G, \mathcal{C}) je klastrově rovinný $\implies (G, \mathcal{C}')$ je klastrově rovinný.*

315 *Důkaz.* Jednoduchý překreslovací argument, kdy podél hrany e protáhneme
316 hranici klastru, viz obrázek. Jelikož je G rovinný, tak se s hranou e žádná
317 jiná hrana nekříží, proto lze provést to překreslení. Požadavek na podklastry
318 zajišťuje, že nakreslení klastru $K_1 \cup K_2$ se neprotne s jiným klastrem. \square

319 Vyzbrojení minorovými operacemi můžeme definovat pojem klastrového
320 minoru

321 **Definice 3.6.** Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}) . Klastrový graf (G', \mathcal{C}') je klastro-
322 vým minorem, pokud jej lze získat konečnou posloupností minorových operací
323 z klastrového grafu (G, \mathcal{C}) .

324 **Důsledek 3.7.** *Klastrový minor klastrově rovinného klastrového grafu je
325 klastrově rovinný.*

326 *Důkaz.* Důkaz se provede indukcí podle délky posloupnosti, kde se využije
327 toho, že minorové operace zachovávají klastrovou rovinnost. \square

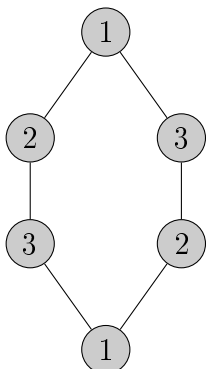
328 Kapitola 4

329 Speciální instance

330 V této kapitole se podíváme na omezené instance klastrové rovinnosti. Klastrová
331 rovinnost se dá omezit dvěma způsoby. Jednak omezením, jaké grafy budeme
332 uvažovat, a jednak omezením klastrové hierarchie. První omezenou třídou
333 klastrových grafů jsou kružnice s klastry velikosti 2 a druhou třídou budou
334 cesty s klastry velikosti 2. Uvedeme věty o počtu zakázaných minorů.

335 4.1 Kružnice s klastry velikosti 2

336 Hlavním výsledkem této části je výsledek ukazující, že jediným zakázaným
337 minimálním minorem pro kružnice s klastry velikosti 2 je šesticyklos se třemi
338 klastry, kde se vrcholy střídají v jakém klastru jsou (viz následující obrázek).
339 Výsledek je jak pro nakreslenou, tak i nenakreslenou verzi.



Obrázek 4.1: Čísla označují, do jakého klastru vrchol patří. Dále v textu bude tento graf označován jako C_6^Z , kde Z značí, že se jedná o zakázaný minor

340 **Věta 4.1.** *Instance (G, \mathcal{C}) je klastrově rovinná $\iff (G, \mathcal{C})$ neobsahuje C_6^Z*
 341 *jako minor .*

342 Před důkazem věty ukážeme, že C_6^Z není klastrově rovinný.

343 **Lemma 4.2.** C_6^Z není klastrově rovinný.

344 *Důkaz.* Důkaz provedeme pro nenakreslenou verzi. Jelikož klastry jsou veli-
 345 kosti 2, můžeme nahrazovat klastry hranami. Nahrazení všech klastrů hra-
 346 nami však vede přímo na $K_{3,3}$. A protože $K_{3,3}$ není rovinný graf, tak ne-
 347 může C_6^Z klastrově rovinný. Poslední nahrazení klastru hranou tedy nelze
 348 provést \square

349 U kružnice můžou saturátorové hrany vést pouze vnitřkem nebo vnějškem
 350 (myšleno v nakreslení). Pro dvě hrany ze saturátoru má smysl se bavit o tom,
 351 zda mohou vést na stejné straně kružnice nebo nikoliv. To nás vede k pojmu
 352 grafu konfliktů, který reprezentuje konflikty mezi hranami ze saturátoru.

353 **Definice 4.3.** Graf konfliktů je reprezentací konfliktů saturátorových hran,
 354 kde vrcholy jsou klastry a hrany představují konfliktní klastry. Klastry $\{x_1, x_2\}$
 355 a $\{y_1, y_2\}$ mají spolu konflikt, pokud se na kružnici vyskytují v následujícím
 356 pořadí $x_1, \dots, y_1, \dots, x_2, \dots, y_2, \dots$. Graf konfliktů pro klastrový graf (G, \mathcal{C}) bu-
 357 deme značit $GK_{(G, \mathcal{C})}$

358 Získáme ihned kritérium, kdy kružnice s klastry velikosti 2 je klastrově
 359 rovinný graf. Je to právě tehdy, když graf konfliktů je bipartitní. Dokážeme
 360 si to jako lemma.

361 **Lemma 4.4.** *Kružnice s klastry velikosti 2 je klastrově rovinná právě tehdy,*
362 *když graf konfliktů je bipartitní.*

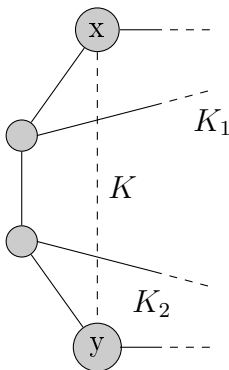
363 *Důkaz.* Klastř, jenž je tvořen sousedními vrcholy, zjevně nemůže být podle
364 definice s jiným klastrem v konfliktu. Vrchol příslušného klastru v grafu kon-
365 fiktů je izolovaný. Stačí tedy uvažovat, že vrcholy v klastru nejsou soused-
366 ními.

367 " \implies "Místo klastřů uvažujme hrany saturátoru, ty mohou vést buď
368 vnitřní stěnou kružnice nebo vnější stěnou kružnice. Hrana v grafu kon-
369 fiktů vede mezi jeho vrcholy právě tehdy pokud saturované hrany příslušných
370 klastřů vedou různými stěnami. To proto, že podle definice konfliktu, kdyby
371 vedly stejnou stěnou, tak by se musely křížit, což by byl spor s tím, že máme
372 klastrově nakreslení. Pokud jako partity označíme klastry, jež vedou buď
373 vnější stěnou (jedna partita) nebo vnitřní stěnou (druhá partita). Izolované
374 vrcholy dáme libovolně někam.

375 Opačná implikace je ten samý argument jen obrácené pořadí. \square

376 Uvedeme ještě jedno lemma, ukazující vztah mezi kružnicí v grafu kon-
377 fiktů a odpovídající strukturou v klastrovém grafu.

378 **Lemma 4.5.** *Nechť (G, \mathcal{C}) je klastrový graf, G je kružnice a \mathcal{C} má klastry*
379 *velikosti 2. Nechť Q je kružnice v grafu konfliktů $GK_{(G, \mathcal{C})}$, $K = x, y$ klastř*
380 *obsažen v Q . Nechť A, B jsou dvě cesty v G spojující x, y a nechť K_1, K_2 jsou*
381 *sousedě K v Q , pak BÚNO jediné dva vrcholy v A jsou z klastřů K_1 a K_2 (po*
382 *jednom vrcholu z každého klastru a zbylé vrcholy leží v B .*



Obrázek 4.2: Znázornění, čemu odpovídá kružnice v grafu konfliktů. Nalevo od K je část A, napravo je část B.

383 Struktura v klastrovém grafu, která odpovídá kružnici v grafu konfliktů
384 se jinými slovy „chová slušně a není divoce rozházená po grafu“.

385 *Důkaz.* Sporem předpokládejme, že v části, kde jsou klastery K_1 a K_2 , je ještě
386 jeden jiný klaster K_3 . Uvažujme procházku z K_1 do K_2 cestou neobsahující K
387 (tedy přes K_3). Prvním krokem se z K_1 dostaneme do druhé části. Po cestě
388 ale musíme se vrátit zpět do první části kvůli klasteru K_3 pomocí klasteru K_i
389 dříve, než se vrátíme pomocí klasteru K_2 . Klaster K_i ale musí být v konfliktu
390 s klastrem K , což je spor s tím, že K má jen sousedy K_1 a K_2 , K_i by podle
391 všeho též musel být sousedem K . \square

392 **Tvrzení 4.6.** *Graf konfliktů obsahuje lichou kružnici \implies instance (G, C)*
393 *obsahuje zakázaný minor C_6^Z .*

394 *Důkaz.* Důkaz indukcí podle velikosti liché kružnice. V základu indukce uká-
395 žeme, že liché kružnici velikosti 3 v grafu konfliktů odpovídá C_6^Z a v indukč-
396 ním kroku, pak pomocí minorových operací zredukujeme velikost podgrafu
397 odpovídající liché kružnici o dva klastery.

398 Základ indukce: Mějme trojcyklus v grafu konfliktů. Mějme příslušné
399 klastery $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}, \{z_1, z_2\}$ Podle definice konfliktů máme následující
400 pořadí vrcholů:

401 Podle konfliktu klasterů $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}$ je pořadí x_1, y_1, x_2, y_2 .

402 Podle konfliktu klasterů $\{y_1, y_2\}, \{z_1, z_2\}$ je pořadí y_1, z_1, y_2, z_2 .

403 Podle konfliktu klasterů $\{x_1, x_2\}, \{z_1, z_2\}$ je pořadí x_1, z_1, x_2, z_2 .

404 Dohromady máme pořadí $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, což je C_6^Z . Základ indukce
405 je tedy dokázán.

406 Nyní předpokládejme, že chceme dokázat tvrzení pro lichou kružnici ve-
407 likosti k , a že tvrzení platí pro kružnici o 2 menší.

408 Indukční krok: Podle lematu 1.3 máme v (G, C) strukturu konfliktních
409 klasterů odpovídající liché kružnici v grafu konfliktů. Předpokládejme, že jsme
410 si (G, C) zjednodušili pomocí minorových operací tak, že nemáme nic jiného
411 než klastery získané z liché kružnice v grafu konfliktů. Provedeme následující
412 posloupnost minorových operací. Vezměme předělový klaster K . Klastery jež
413 jsou s ním v konfliktu, můžeme sjednodit (ubyl jeden klaster). V části, kde
414 měly vrchol jen oni, tak sdílejí hranu, tu můžeme po provedení sjednocení
415 zkontrahovat. Vrchol vzniklý kontrakcí odebereme. Nyní se nám kružnice pře-
416 rušila. Přes rozdělení nám vede klaster K , pro nějž máme jedinou možnost, jak
417 jej nahradit hranou, tak to učiníme (jinými slovy, je to korektní i v nakreslené
418 verzi). Tuto hranu můžeme rovnou zkontrahovat a vzniklý vrchol přidáme do

419 jednoho z klastrů (opět sjednocení klastrů a ubytí druhého klastru), které
420 s ním mají sousední vrchol. Hranu, která jej spojovala se sousedem zkon-
421 trahujeme. Vzniklému klastrovému grafu (G', \mathcal{C}') odpovídá v grafu konfliktů
422 lichá kružnice o velikosti $k - 2$. Tedy (G', \mathcal{C}') obsahuje podle indukčního před-
423 pokladu C_6^Z jako klastrový minor. A jelikož (G', \mathcal{C}') je minorem (G, \mathcal{C}) , tak
424 C_6^Z je i minorem (G, \mathcal{C}) , čímž je důkaz hotov. (TODO doplnit o ilustrující
425 obrázky) \square

426 Nyní již můžeme dokázat hlavní větu této sekce

427 *Důkaz.* věty 4.1.

428 \implies

429 Pokud je (G, \mathcal{C}) klastrově rovinný, tak podle lemmatu 4.4 je graf konfliktů
430 bipartitní, což je ekvivalentní tomu, že graf konfliktů neobsahuje lichou kruž-
431 nici, což je podle tvrzení 4.6 dává, že (G, \mathcal{C}) neobsahuje C_6^Z jako minor.

432 \impliedby

433 Dokazujeme sporem, tedy (G, \mathcal{C}) není klastrově rovinný, ale neobsahuje C_6^Z
434 jako minor. Podle lemmatu 4.4 není graf konfliktů bipartitní, tedy obsahuje
435 lichou kružnici, což podle tvrzení 4.6 říká, že (G, \mathcal{C}) má jako minor C_6^Z , což
436 je spor s tím, že jsme předpokládali, že takový minor nemá. \square

437 4.2 Cesty s klastry velikosti 2

438 Pro cesty uvedeme o něco slabší výsledek, a to že zakázaných minorů je
439 konečně mnoho.

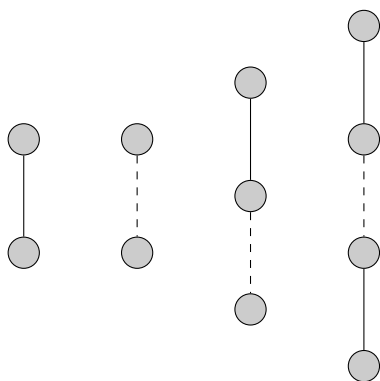
440 **Věta 4.7.** *Zakázaných minorů pro cesty s klastry velikosti 2 je konečně*
441 *mnoho.*

442 *Důkaz.* Mějme klastrový graf $(G[V, E], \mathcal{C})$. Vezměme saturátor S a zkou-
443 mejme graf $(G[V, E \cup S])$. V tomto grafu mají vrcholy stupeň nejvýše 3. Tudíž
444 zde nemůže být dělení K_5 , ale může být dělení $K_{3,3}$. (TODO příklad klastrové
445 cesty s dělením $K_{3,3}$) Jako minor zde mohou být obě možnosti bránící rovin-
446 nosti. Nám ale stačí, že když graf má dělení $K_{3,3}$, tak má i příslušný minor
447 $K_{3,3}$.

448 Stačí se ptát, jak vypadají spojnice v dělení $K_{3,3}$ a jak je můžeme zredu-
449 kovat pomocí minorových operací. Pomocí minorových operací dosáhneme
450 nejprve, že se zbavíme všeho nepotřebného, tedy vrcholů, hran a klastrů
451 (resp. saturovaných hran) nepodílejících se na dělení $K_{3,3}$. Dále si spojnice

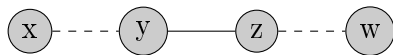
452 zjednodušíme do podoby takové, že to jsou cesty, kde se střídají hrany a
 453 klastry. Pokud totiž máme na spojnici více hran za sebou, tak pomocí kon-
 454 trakcí se zbavíme nadbytečných hran. Nyní tvrdíme, že spojnici dokážeme
 455 zredukovat pomocí minorových operací do jedné z následujících 4 typů:

- 456 1) jedna hrana
- 457 2) jeden klaster
- 458 3) klaster a hrana
- 459 4) hrana, klaster a hrana



Obrázek 4.3: Typy spojníc v dělení $K_{3,3}$. Plná čára představuje hranu, čárkovaná znamená klaster.

460 Toho dosáhneme následovně. Pokud máme na spojnici následující situaci,
 461 že máme klaster $K_1 = \{x, y\}$, hranu $e = \{y, z\}$ a klaster $K_2 = \{z, w\}$ za sebou
 462 viz obrázek 4.4, tak sjednotíme klastry K_1 a K_2 . Ty spojuje právě jedna
 463 hrana, takže sjednocení můžeme provést bez problémů. Nyní jen vyhodíme
 464 vrcholy y a z a zbyde nám jen klaster $\{x, w\}$. Opakováním tohoto postupu,
 465 každou spojnici zredukujeme na jeden z čtyř výše uvedených typů. Grafů,
 466 jenž jsou dělením $K_{3,3}$ a mají tyto typy spojníc, je konečně mnoho \square



Obrázek 4.4: Hledaná struktura, která jde zjednodušit pomocí minorových operací