

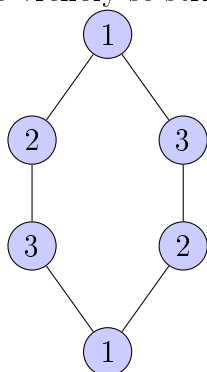
# Kapitola 1

## Speciální instance

V této kapitole se podíváme na omezené instance klastrové rovinnosti. Klastrová rovinnost se dá omezit dvěma způsoby. Jednak omezením, jaké grafy budeme uvažovat, a jednak omezením klastrové hierarchie.

### 1.1 Kružnice s klastry velikosti 2

Hlavním výsledkem této části je, že ukážeme, že u této instance klastrové rovinnosti je jediný zakázaný minimální minor je šesticyklus se třemi klastry, kde vrcholy se střídají v jakém klastru jsou.



Čísla označují, do jakého klastru vrchol patří. Dále v textu bude tento graf označován jako  $C_6^Z$ , kde  $Z$  značí, že se jedná o zakázaný minor

**Věta 1.** *Instance  $(G, C)$  je klastrově rovinná  $\iff (G, C)$  neobsahuje  $C_6^Z$  jako minor.*

Před důkazem věty ukážeme, že  $C_6^Z$  není klastrově rovinný.

**Lemma 1.**  $C_6^Z$  není klastrově rovinný.

*Důkaz.* Důkaz provedeme pro nenakreslenou verzi. Jelikož klastry jsou velikosti 2, můžeme nahrazovat klastry hranami. Nahrazení všech klastřů hranami však vede přímo na  $K_{3,3}$ . A protože  $K_{3,3}$  není rovinný graf, tak nemůže  $C_6^Z$  klastrově rovinný.  $\square$

U kružnice můžou saturátorové hrany vést pouze vnitřkem nebo vnějškem (myšleno v nakreslení). Pro dvě hrany ze saturátoru má smysl se bavit o tom, zda mohou vést na stejné straně kružnice nebo nikoliv. To nás vede k pojmu grafu konfliktů, který reprezentuje konflikty mezi hranami ze saturátoru.

**Definice 1.** *Graf konfliktů je reprezentací konfliktů saturátorových hran, kde vrcholy jsou klastry a hrany představují konfliktní klastry. Klastry  $\{x_1, x_2\}$  a  $\{y_1, y_2\}$  mají spolu konflikt, pokud se na kružnici vyskytují v následujícím pořadí  $x_1, \dots, y_1, \dots, x_2, \dots, y_2$ .*

Získáme ihned kritérium, kdy kružnice s klastry velikosti 2 je klastrově rovinný graf. Je to právě tehdy, když graf konfliktů je bipartitní. To se dá celkem snadno nahlédnout. Hrany saturátoru jedné partity povedou na jedné straně kružnice a druhé partity povedou na druhé straně. Ze znalosti saturátoru snadno rozdělíme jeho hrany do dvou partit.

**Tvrzení 1.** *Graf konfliktů obsahuje lichou kružnici  $\implies$  instance  $(G, C)$  obsahuje zakázaný minor.*

*Důkaz.* Důkaz indukcí podle velikosti liché kružnice. V základu indukce ukážeme, že liché kružnici v grafu konfliktů odpovídá  $C_6^Z$  a v indukčním kroku, pak pomocí minorových operací zredukujeme velikost podgrafu odpovídající liché kružnici o dva klastry.  $\square$