

1 Kapitola 1

2 Úvod

3 Při vizualizaci různých systémů, kde máme nějaké objekty a spoje mezi nimi,
4 jako jsou například sítě, grafy, apod., můžeme mít na zobrazení různé poža-
5 davky. Častým požadavkem je, aby se spoje nekřížily. Další možným poža-
6 davkem je, že objekty mají být zobrazeny „blízko“ sebe. Velmi podobným
7 požadavkem se zabývá klastrová rovinnost, kde máme objekty seskupené do
8 skupin nazývané klastry a požadavkem na vizualizaci je, aby každou skupinu
9 bylo možno ohraničit do vymezeného regionu.

10 Problém existence rovinného klastrového nakreslení grafu (dále jen klastrová
11 rovinnost) je jedním možným zobecněním klasické grafové rovinnosti pro pří-
12 pad, kdy kromě vrcholů a hran máme hierarchii skupin vrcholů. Skupinu vr-
13 cholů nazýváme klastrem. Pro klastrovou rovinnost není znám polynomiální
14 algoritmus, a není známo, zda je tento problém NP-úplný.

15 **Definice 1.1.** Mějme graf $G = (V, E)$. Pod *klastrem* K budeme uvažovat
16 podmnožinu vrcholů $K \subseteq V$.

17 *Klastrovou hierarchií* jest množina klastrů, kde pro každé dva klastry K_1 a K_2
18 platí následující

- 19 • buď $K_1 \cap K_2 = \emptyset$
- 20 • nebo $K_1 \subset K_2$, případně nebo $K_2 \subset K_1$

21 *Klastrový graf* je dvojice (G, \mathcal{C}) , kde G je graf a \mathcal{C} je klastrová hierarchie
22 vrcholů G .

23 Formálně se můžeme dívat na klastrovou hierarchii jako podmnožinu
24 $\mathcal{P}(V)$. To může vést k tomu, že bychom si mohli myslet, že klastrů může

být velmi mnoho vzhledem k velikosti původního grafu. V kapitole složitost (kap. ??) ukážeme, že počet klastřů je lineární vzhledem k počtu vrcholů grafu G . V některých situacích se hodí předpokládat, že množina všech vrcholů vždy tvoří klastř a též jednotlivé vrcholy tvoří klastry. Například se tento předpoklad hodí v důkazu o počtu klastřů.

Definice 1.2. Pod *klastrovým nakreslením* rozumíme to, že vrcholy a hrany nakreslíme do roviny jako u rovinného nakreslení a navíc doplníme nakreslení klastřů.

Nakreslením klastru K v rovině je topologická kružnice γ_K . Vrcholy z K leží ve vnitřku γ_K a vrcholy nepatřící do K leží vně γ_K . Hrany grafu smí protínat γ_K nejvýše jedenkrát. Pro libovolné dva klastry se nesmí stát, že by se jejich nakreslení protínala.

Klastrový graf (G, \mathcal{C}) je *klastrově rovinný* pokud existuje nějaké jeho klastrové nakreslení.

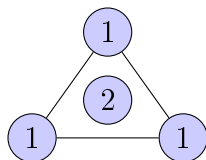
Omezení pro hrany v nakreslení klastru K nám zaručuje, že hrany vedoucí mezi vrcholy klastru K leží celé ve vnitřku γ_K . Podobně hrany spojující vrcholy mimo K musí ležet ve vnějšku γ_K . Definice nakreslení klastru nám zaručuje, že každá hrana křížící γ_K spojuje vrchol z K s vrcholem z $V \setminus K$.

Nyní můžeme uvést definici rozhodovacího problému klastrové rovinnosti. Klastrová rovinnost má dvě základní verze, a to nakreslená a nenakreslená verze.

Definice 1.3. V *nenakreslené verze klastrové rovinnosti* máme rozhodnout, zda pro daný klastrový graf (G, \mathcal{C}) existuje jeho klastrové nakreslení. Instanci nenakreslené verze klastrové rovinnosti budeme nazývat *nenakreslený klastrový graf*.

U *nakreslené verze klastrové rovinnosti* máme na vstupu trojici (G, \mathcal{C}, ρ) , kde ρ je rovinné nakreslení G a (G, \mathcal{C}) je klastrový graf. Máme rozhodnout, zda lze ρ rozšířit na klastrové nakreslení (G, \mathcal{C}) dokreslením klastřů. Instanci nakreslené verze klastrové rovinnosti budeme nazývat *nakreslený klastrový graf*.

Nakreslená verze klastrové rovinnosti je už na pohled omezena silnější podmínkou a to nakreslením vstupního grafu. Pokud tedy nelze dokreslit klastry tak, abychom obdrželi klastrové nakreslení, pak klastrový graf stále může být klastrově rovinný (viz obrázek 1.1).



Obrázek 1.1: Čísla označují, do jakého klastru vrchol patří. Na první pohled je zřejmé, že není možné dokreslit klastr 1 tak, aby vrchol označený jako 2 nebyl ve vnitřku nakreslení klastru, ale je také zjevné, že příslušný klastrový graf je klastrově rovinný.

58 Nyní definujeme několik pojmů, které jsou potřeba pro uvedení věty dá-
59 vající kombinatorický pohled na problém klastrové rovinnosti.

60 **Definice 1.4.** Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}) . Klastř K je *souvislý* pokud pod-
61 graf indukovaný na vrcholech klastru je souvislý.

62 **Definice 1.5.** Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}) , kde $G = (V, E)$. *Saturátor* S
63 je podmnožina $\binom{V}{2} \setminus E$ taková, že každý klastř je v $(G \cup S, \mathcal{C})$ souvislý, kde
64 $G \cup S = (V, E \cup S)$.

65 Mějme nakreslení grafu G , označme jej ρ . *Nakreslený saturátor* S je množina
66 nakreslených hran takových, že nakreslení $\rho \cup S$ je rovinné nakreslení $G \cup S$
67 a v $G \cup S$ je každý klastř souvislý.

68 **Definice 1.6.** Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}) . V nakreslení ρ grafu G rozumíme
69 *dírou* kružnici C v grafu G , jejíž vrcholy náležejí klastř K takovou, že v
70 nakreslení ρ je uvnitř nakreslení C vrchol nepatřící do klastř K .

71 Pokud má nakreslení ρ grafu G díru, tak jej nelze rozšířit na klastrově na-
72 kreslení, proto jej zde uvádíme. Větu o kombinatorickém pohledu na klastro-
73 vou rovinnost uvedeme zvlášť pro nakreslenou verzi a zvlášť pro nenakresle-
74 nou verzi.

75 **Věta 1.7** (Di Battista, Frati [?]). *Nakreslený klastrový graf (G, \mathcal{C}, ρ) je klastrově*
76 *rovinný právě tehdy, když existuje nakreslený saturátor S takový, že $(G \cup S, \mathcal{C})$*
77 *nemá díru v ρ .*

78 **Věta 1.8** (Di Battista, Frati [?]). *Nenakreslený klastrový graf (G, \mathcal{C}) je*
79 *klastrově rovinný právě tehdy, když existuje saturátor S takový, že $G \cup S$*
80 *má rovinné nakreslení, v němž není díra vzhledem k $(G \cup S, \mathcal{C})$.*