

Geometria 1: appunti

Davide Cossu

2018

Sommario

Una dispensa contenente gli appunti delle lezioni di Geometria 1, con anche esempi e dimostrazioni.

Indice

1	Matrici	3
1.1	Definizioni	3
1.2	Operazioni	5
2	Equazioni e sistemi lineari	9
2.1	Equazioni lineari	9
2.2	Sistemi lineari	10
2.2.1	Metodo di riduzione di Gauss	10

1 Matrici

1.1 Definizioni

Definizione 1.1: Matrice. Siano $m, n \in \mathbb{N}_0$. Una matrice di m righe e n colonne ad elementi reali è una tabella del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Definizione 1.2: Ordine. Si dice **ordine** di una matrice si intendono le sue dimensioni, in questo caso A è di ordine $m \times n$.

Dato che una matrice contiene elementi reali, l'insieme di queste matrici viene definito

$$\mathbb{R}^{m,n} \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{Matrici reali di ordine } m \times n\}$$

Spesso una matrice viene definita anche in maniera più stringata

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$$

Definizione 1.3: Matrice quadrata. Una matrice si dice quadrata quando $m = n$.

Definizione 1.4: Matrice identità. La matrice identità (o matrice unità) si definisce

$$I \in \mathbb{R}^{m,n} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ovvero quella matrice la cui diagonale principale è formata da 1 e tutto il resto da 0. Formalmente

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

Definizione 1.5: Diagonale principale. La diagonale principale di una matrice è quella descritta dagli elementi a_{ii} . Qui è colorata in blu.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Definizione 1.6: Matrice nulla. Per matrice nulla si intende

$$O \in \mathbb{R}^{m,n} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Ovvero è la matrice tale che

$$\forall i, j \quad a_{ij} = 0$$

Definizione 1.7: Matrice riga. Per matrice riga si intende quella che ha $m = 1$, ovvero

$$A = (a_{11} \quad \cdots \quad a_{1n}) \in \mathbb{R}^{1,n}$$

Definizione 1.8: Matrice colonna. Per matrice colonna si intende quella che ha $n = 1$, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,1}$$

Definizione 1.9: Matrice simmetrica. Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. A è simmetrica se ${}^tA = A$. Ovvero se

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

Definizione 1.10: Matrice antisimmetrica. Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. A è antisimmetrica se ${}^tA = -A$. Ovvero se

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

Definizione 1.11: Matrice invertibile. Sia A una matrice quadrata. A è invertibile o non singolare se

$$\exists X \in \mathbb{R}^{n,n} : AX = XA = I$$

Si noti che si indica $X = A^{-1}$.

Teorema 1.1: Unicità dell'inversa. Se $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è invertibile allora la matrice inversa è unica.

DIMOSTRAZIONE.

Sopponiamo per assurdo che $\exists X, X' \in \mathbb{R}^{n,n}$ con $X \neq X'$ tali che

$$AX' = X'A = AX = XA = I$$

Allora

$$X' = IX' = (XA)X' = X(AX') = XI = X$$

QED

Definizione 1.11.1: Proprietà della matrice inversa. La matrice inversa gode di alcune proprietà:

$$1. (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$$

DIMOSTRAZIONE.

Dobbiamo dimostrare $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} \iff AB(A^{-1}B^{-1}) = (A^{-1}B^{-1})AB = I$ per la [Definizione 1.11](#). Quindi

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I$$

e

$$AB(A^{-1}B^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$$

QED

$$2. (A^{-1})^{-1} = A \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n,n}$$

DIMOSTRAZIONE.

Per [Definizione 1.11](#)

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

QED

Definizione 1.11.2: Gruppo lineare. Si definisce un gruppo lineare l'insieme

$$GL(n, \mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid A \text{ è invertibile}\}$$

assieme al prodotto.

Definizione 1.12: Matrice diagonale. Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n} = (a_{ij})$. Si dice diagonale se

$$\forall i, j = 1, \dots, n : i \neq j \quad a_{ij} = 0$$

Ovvero

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definizione 1.13: Matrice ridotta per righe. Una matrice si dice ridotta per righe se in ogni riga di non nulla esista un elemento non nullo sotto il quale sono tutti 0. Ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definizione 1.13.1: Proprietà. Si ha che se $AX = B$, allora è equivalente a dire $\tilde{A}X = \tilde{B}$ dove le ultime matrici sono ridotte per righe.

Definizione 1.14: Rango di una matrice ridotta per righe. Il rango di una matrice ridotta per righe è il numero di righe non nulle. Si indica con $\text{rank } A$.

1.2 Operazioni

Definizione 1.15: Uguaglianza. Due matrici $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{p,q}$ si dicono uguali se

1. A e B appartengono allo stesso insieme $\mathbb{R}^{m,n}$, ovvero $m = p$ e $n = q$
2. $a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall i : 1 \leq i \leq m \quad \forall j : 1 \leq j \leq n$

Definizione 1.16: Somma. La somma tra matrici è solo definita se le due matrici appartengono allo stesso insieme.

Siano $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ due matrici. La loro somma $A + B$ è

$$A + B \stackrel{\text{def}}{=} (a_{ij} + b_{ij})$$

Si definisce quindi anche l'operatore somma nel seguente modo

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^{m,n} \times \mathbb{R}^{m,n} &\rightarrow \mathbb{R}^{m,n} \\ (A, B) &\mapsto A + B \end{aligned}$$

Definizione 1.16.1: Proprietà della somma tra matrici. Per la somma tra matrici valgono le seguenti proprietà:

1. Commutativa: $A + B = B + A \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$
2. Associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C \quad \forall A, B, C \in \mathbb{R}^{m,n}$

3. Esistenza dell'elemento neutro: $O + A = A + O \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$
4. Esistenza dell'opposto: $A + (-A) = 0 \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$

Definizione 1.17: Prodotto tra matrice e scalare. Si definisce il prodotto tra $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ la matrice

$$\lambda A \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda a_{ij})$$

Definizione 1.17.1: Proprietà del prodotto con uno scalare. Per il prodotto tra una matrice e uno scalare vigono le seguenti proprietà:

1. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$
2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$
3. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$
4. $1A = A \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$

Definizione 1.18: Prodotto tra matrici. Il prodotto tra due matrici $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{R}^{p,q}$ è possibile solo se $n = p$. La matrice risultante avrà ordine $m \times q$. Formalmente si scrive che

$$C \stackrel{\text{def}}{=} A \cdot B = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,q}$$

con

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

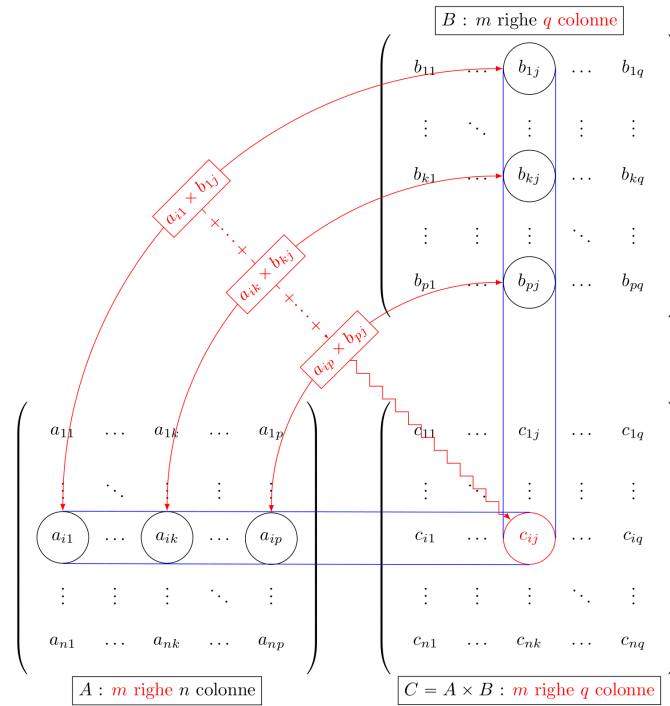


Figura (1): Illustrazione grafica per la moltiplicazione tra matrici

Definizione 1.18.1: Proprietà del prodotto tra matrici. Per il prodotto tra matrici vigono alcune proprietà:

1. Associativa: $(AB)C = A(BC) \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}, B \in \mathbb{R}^{n,k}, C \in \mathbb{R}^{k,q}$

DIMOSTRAZIONE.

Definiamo $D = AB \in \mathbb{R}^{m,k} = (d_{ij}) = \sum_{l=1}^n a_{il}b_{li}$ e $E = BC \in \mathbb{R}^{n,q} = (e_{ij}) = \sum_{p=1}^k b_{ip}c_{pi}$. Allora svolgiamo i calcoli

$$(AB)C = DC = \sum_{f=1}^q d_{if}c_{fi} = \sum_{f=1}^q (a_{if}b_{fi})c_{fi}$$

e

$$A(BC) = AE = \sum_{f=1}^n a_{if}c_{fi} = \sum_{f=1}^q a_{if}(b_{fi}c_{fi})$$

Dato che f va da 1 a q e che in \mathbb{R} vale la proprietà associativa del prodotto, si può dire che

$$\sum_{f=1}^q (a_{if}b_{fi})c_{fi} = \sum_{f=1}^q a_{if}(b_{fi}c_{fi})$$

QED

2. Distributiva del prodotto per la somma: $A(B + C) = AB + AC \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}, B, C \in \mathbb{R}^{n,p}$

DIMOSTRAZIONE.

Per definizione di somma

$$B + C = (b_{ij} + c_{ij})$$

Quindi

$$A(B + C) = A(b_{ij} + c_{ij})$$

e infine

$$A(b_{ij} + c_{ij}) = \sum_{f=1}^p a_{if}(b_{fi}c_{fi}) = \sum_{f=1}^p [a_{if}b_{fi} + a_{if}c_{fi}] = \sum_{f=1}^p a_{if}b_{fi} + \sum_{f=1}^p a_{if}c_{fi} = AB + AC$$

QED

3. $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B) \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}, B \in \mathbb{R}^{n,p}$

DIMOSTRAZIONE.

Per [Definizione 1.17](#) si ha che

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$

Si ha quindi

$$(\lambda A)B = \sum_{f=1}^p \lambda a_{if}b_{fi} = \sum_{f=1}^p \overbrace{a_{if}\lambda b_{fi}}^{A(\lambda B)} = \lambda \sum_{f=1}^p a_{if}b_{fi} = \lambda(AB)$$

QED

4. Solo per le matrici quadrate: $IA = A = AI \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n,n}$

Si noti che per il prodotto $\exists A, B : AB = 0 \not\Rightarrow A = O \vee B = O$. Si noti anche che sempre per il prodotto, in generale $AB = AC \not\Rightarrow B = C$ con $A \neq O$.

Definizione 1.19: Trasposto di una matrice. Data $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ si dice trasposta di A e si indica con tA la matrice che si ottiene invertendo righe con colonne. Formalmente

$$\text{Se } A = (a_{ij}), {}^tA = (b_{ij}) \implies b_{ij} = a_{ji} \quad \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

Definizione 1.19.1: Proprietà del trasposto di una matrice. Il trasposto gode di alcune proprietà

1. ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$
2. ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{m,n}$
3. ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$
4. Se $A \in GL(n, \mathbb{R})$ e A^{-1} è la sua inversa, allora anche ${}^tA \in GL(n, \mathbb{R})$ e si ha $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

DIMOSTRAZIONE.

Si deve dimostrare che

$$({}^t(A^{-1})) {}^tA = {}^t(AA^{-1}) = {}^tI = I$$

e

$${}^tA {}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tI = I$$

QED

Definizione 1.20: Traccia di una matrice quadrata. Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Si definisce la sua traccia

$$\text{tr}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Definizione 1.20.1: Proprietà della traccia. La traccia gode di alcune proprietà:

1. $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$

DIMOSTRAZIONE.

Per [Definizione 1.16](#) si ha che

$$\text{tr}(A + B) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

QED

2. $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{n,n}$

DIMOSTRAZIONE.

Per [Definizione 1.17](#) si ha che

$$\text{tr}(\lambda A) = \sum_{i=1}^n \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^n a_{ii} = \lambda \text{tr}(A)$$

QED

3. $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$

DIMOSTRAZIONE.

Siano $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$. Allora $AB = (c_{ij})$. Per la [Definizione 1.18](#)

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}$$

Per la [Definizione 1.20](#)

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} b_{ki} \quad (1.1)$$

Sia $BA = (d_{ij})$, allora

$$d_{ii} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{ki}$$

Per la [Definizione 1.20](#)

$$\text{tr}(BA) = \sum_{i=1}^n d_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{ki} = \sum_{i,k=1}^n b_{ik} a_{ki} \quad (1.2)$$

Dato che in \mathbb{R} il prodotto è commutativo e che sia i che k , sia in (1.1) e (1.2) variano da 1 a n , si può affermare che

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{i,k}^n b_{ik} a_{ki}$$

QED

$$4. \text{tr}({}^t A) = \text{tr}(A) \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n,n}$$

DIMOSTRAZIONE.

Per [Definizione 1.19](#) si ha che se A è una matrice diagonale, ${}^t A = A$. Dato che la traccia prende solo gli elementi sulla diagonale, farne il trasposto non modifica il risultato. QED

2 Equazioni e sistemi lineari

2.1 Equazioni lineari

Definizione 2.1: Equazione lineare. Un'equazione lineare nelle incognite x_1, x_2, \dots, x_n è un'espressione del tipo

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b \quad (2.1)$$

dove $a, b \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$.

a_i sono detti coefficienti, b è detto termine noto.

Scritta in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

Definizione 2.2: Soluzione dell'equazione lineare. Una soluzione dell'equazione lineare (2.1) è una n -upla di numeri reali $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \dots, \widetilde{x}_n)$ che sostituiti nell'equazione, la verifica.

Definizione 2.3: Equazione lineare omogenea. L'equazione (2.1) si dice omogenea se $b = 0$.

Definizione 2.3.1: Soluzione particolare. La n -upla $(0, 0, \dots, 0)$ è soluzione dell'equazione omogenea.

Definizione 2.3.2: Soluzione particolare. Se $(\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n)$ è soluzione, lo è anche $(t\widetilde{x}_1, \dots, t\widetilde{x}_n)$.

2.2 Sistemi lineari

Definizione 2.4: Sistema lineare. Un sistema lineare di m equazioni e n incognite x_1, \dots, x_n è un insieme di equazioni lineari del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases} \quad (2.2)$$

a_{ij} si dicono coefficienti (con $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$).

b_i si dicono termini noti.

Scritto in forma matriciale

$$AX = B$$

in cui

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n} \quad \text{Matrice dei coefficienti}$$
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,1} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,1}$$

Definizione 2.5: Matrice completa. Si definisce matrice completa

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Ciascuna riga si indica con R_i .

Definizione 2.6: Sistema lineare omogeneo. Un sistema lineare è omogeneo se $b_j = 0 \forall j = 1, \dots, m$, ovvero

$$AX = O$$

Definizione 2.7: Soluzione del sistema lineare. Soluzione del sistema lineare (2.2) è una n -upla di numeri reali $(\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n)$ che sostituita nelle incognite verifica tutte le equazioni.

Definizione 2.7.1: Soluzioni di un sistema omogeneo. Se un sistema lineare è omogeneo, allora $(0, \dots, 0)$ è una sua soluzione. Si conclude quindi che un sistema lineare omogeneo è sempre compatibile.

Definizione 2.8: Sistema compatibile. Un sistema lineare si dice compatibile se ammette soluzioni, incompatibile altrimenti.

Definizione 2.9: Sistema equivalente. Un sistema si dice equivalente ad un altro se ammette le stesse soluzioni.

2.2.1 Metodo di riduzione di Gauss

Il metodo di riduzione di Gauss permette di semplificare un sistema lineare in uno equivalente.

Teorema 2.1: Operazioni elementari di riduzione per righe. Eseguendo un numero finito di volte le tre operazioni

- (i) Scambiare due equazioni
- (ii) Moltiplicare per un numero reale diverso da 0
- (iii) Sostituire ad un'equazione la somma di se stessa con un'altra equazione moltiplicata per un qualsiasi numero reale

si ottiene un sistema lineare equivalente.

DIMOSTRAZIONE.

Dimostrare (i) è ovvio, in quanto le equazioni non si modificano.

Il punto (ii) invece deve essere dimostrato che se una n -upla è soluzione di un sistema, lo è anche dell'altro e viceversa. Si ha quindi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots a_{mn}x_m &= b_m \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda(a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n) &= \lambda b_1 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots a_{mn}x_m &= b_m \end{cases}$$

Per [Definizione 2.3.2](#) si ha che la seconda equazione ha le stesse soluzioni della prima.

$$\begin{cases} \lambda(a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n) &= \lambda b_1 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots a_{mn}x_m &= b_m \end{cases} \implies \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots a_{mn}x_m &= b_m \end{cases}$$

dividendo per $\lambda \neq 0$. Per [Definizione 2.3.2](#) si ha che hanno le stesse soluzioni.

Per il punto (iii) si procede analogamente al punto (ii).

QED

Dal punto di vista matriciale, le trasformazioni si applicano nei seguenti modi

$$\begin{aligned} R_i &\leftrightarrow R_j \\ R_i &\leftrightarrow \lambda R_i \quad \lambda \neq 0 \\ R_i &\leftrightarrow R_i + \lambda R_j \quad \lambda \in \mathbb{R}, j \neq i \end{aligned}$$

Eeguire queste operazioni un numero finito di volte significa trasformare $(A|B)$ in $(\tilde{A}|\tilde{B})$ in modo che ogni riga di \tilde{A} non nulla esista un elemento non nullo sotto il quale sono tutti 0.

Definizione 2.10: Sistema ridotto. Un sistema lineare è ridotto se è ridotta A .

Note