

# Geometria 1: appunti

Davide Cossu

2018

## **Sommario**

Una dispensa contenente gli appunti delle lezioni di Geometria 1, con anche esempi e dimostrazioni.

# Indice

<b>1</b>	<b>Matrici</b>	<b>3</b>
1.1	Definizioni . . . . .	3
1.2	Operazioni . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Equazioni e sistemi lineari</b>	<b>10</b>
2.1	Equazioni lineari . . . . .	10
2.2	Sistemi lineari . . . . .	10
2.2.1	Metodo di riduzione di Gauss . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Esempi</b>	<b>13</b>
3.1	Matrici . . . . .	13
3.2	Equazioni e sistemi lineari . . . . .	13
3.2.1	Numero di soluzioni di un sistema . . . . .	13
3.2.2	Uso del teorema di Rouché-Capelli . . . . .	13

# 1 Matrici

## 1.1 Definizioni

**Definizione 1.1: Matrice.** Siano  $m, n \in \mathbb{N}_0$ . Una matrice di  $m$  righe e  $n$  colonne ad elementi reali è una tabella del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

con  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  e  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ .

**Definizione 1.2: Ordine.** Si dice **ordine** di una matrice si intendono le sue dimensioni, in questo caso  $A$  è di ordine  $m \times n$ .

Dato che una matrice contiene elementi reali, l'insieme di queste matrici viene definito

$$\mathbb{R}^{m,n} \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{Matrici reali di ordine } m \times n\}$$

Spesso una matrice viene definita anche in maniera più stringata

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$$

**Definizione 1.3: Matrice quadrata.** Una matrice si dice quadrata quando  $m = n$ .

**Definizione 1.4: Matrice identità.** La matrice identità (o matrice unità) si definisce

$$I \in \mathbb{R}^{m,n} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ovvero quella matrice la cui diagonale principale è formata da 1 e tutto il resto da 0. Formalmente

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

**Definizione 1.5: Diagonale principale.** La diagonale principale di una matrice è quella descritta dagli elementi  $a_{ii}$ . Qui è colorata in blu.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

**Definizione 1.6: Matrice nulla.** Per matrice nulla si intende

$$O \in \mathbb{R}^{m,n} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Ovvero è la matrice tale che

$$\forall i, j \quad a_{ij} = 0$$

**Definizione 1.7: Matrice riga.** Per matrice riga si intende quella che ha  $m = 1$ , ovvero

$$A = (a_{11} \quad \cdots \quad a_{1n}) \in \mathbb{R}^{1,n}$$

**Definizione 1.8: Matrice colonna.** Per matrice colonna si intende quella che ha  $n = 1$ , ovvero

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,1}$$

**Definizione 1.9: Matrice simmetrica.** Sia  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ .  $A$  è simmetrica se  ${}^tA = A$ . Ovvero se

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

**Definizione 1.10: Matrice antisimmetrica.** Sia  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ .  $A$  è antisimmetrica se  ${}^tA = -A$ . Ovvero se

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

**Definizione 1.11: Matrice invertibile.** Sia  $A$  una matrice quadrata.  $A$  è invertibile o non singolare se

$$\exists X \in \mathbb{R}^{n,n} : AX = XA = I$$

Si noti che si indica  $X = A^{-1}$ .

**Teorema 1.1: Unicità dell'inversa.** Se  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  è invertibile allora la matrice inversa è unica.

**DIMOSTRAZIONE.**

Sopponiamo per assurdo che  $\exists X, X' \in \mathbb{R}^{n,n}$  con  $X \neq X'$  tali che

$$AX' = X'A = AX = XA = I$$

Allora

$$X' = IX' = (XA)X' = X(AX') = XI = X$$

QED

**Definizione 1.11.1: Proprietà della matrice inversa.** La matrice inversa gode di alcune proprietà:

$$1. (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$$

**DIMOSTRAZIONE.**

Dobbiamo dimostrare  $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} \iff AB(A^{-1}B^{-1}) = (A^{-1}B^{-1})AB = I$  per la [Definizione 1.11](#). Quindi

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I$$

e

$$AB(A^{-1}B^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$$

QED

$$2. (A^{-1})^{-1} = A \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n,n}$$

**DIMOSTRAZIONE.**

Per [Definizione 1.11](#)

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

QED

**Definizione 1.11.2: Calcolare la matrice inversa.** Trovare l'inversa di una matrice  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  significa risolvere  $AX = I$ . Definendo  $X = (x_{ij})$ , si può riscrivere come

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix} = I$$

Si definisce  $R_i \in \mathbb{R}^n$  la  $i$ -esima riga di  $X$ .

Si può svolgere il prodotto e ottenere

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_{11} + \cdots + a_{1n}x_{n1} & \cdots & a_{11}x_{1n} + \cdots + a_{1n}x_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_{1n} + \cdots + a_{mn}x_{n1} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Si nota che  $a_{11}x_{11} + \cdots + a_{1n}x_{n1}$  è il primo elemento della somma  $a_{11}R_1 + \cdots + a_{1n}R_n$ . Invece l'elemento  $a_{1m}x_{1m} + \cdots + a_{1n}x_{nm}$  è l' $n$ -esimo elemento della stessa somma.

In questo modo possiamo definire

$$X = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$$

Riportando alla forma di sistema

$$\begin{cases} a_{11}R_1 + \cdots + a_{1n}R_n &= (1, 0, \dots, 0) \\ \vdots &= \vdots \\ a_{m1}R_1 + \cdots + a_{mn}R_n &= (0, \dots, 1) \end{cases}$$

Andando a risolvere il sistema, si trova la matrice inversa.

Alternativamente si può usare un altro metodo che sfrutta la riduzione di Gauss-Jordan. Presa una matrice  $(A|B)$ , si riduce fino ad ottenere  $(I|B')$  dove  $B'$  sarà  $A^{-1}$ .

**Definizione 1.11.3: Gruppo lineare.** Si definisce un gruppo lineare l'insieme

$$GL(n, \mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid A \text{ è invertibile}\}$$

assieme al prodotto.

**Definizione 1.12: Matrice diagonale.** Sia  $A \in \mathbb{R}^{n,n} = (a_{ij})$ . Si dice diagonale se

$$\forall i, j = 1, \dots, n : i \neq j \quad a_{ij} = 0$$

Ovvero

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**Definizione 1.13: Matrice ridotta per righe.** Una matrice si dice ridotta per righe se in ogni riga di non nulla esista un elemento non nullo sotto il quale sono tutti 0. Ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Definizione 1.13.1: Proprietà.** Si ha che se  $AX = B$ , allora è equivalente a dire  $\tilde{A}X = \tilde{B}$  dove le ultime matrici sono ridotte per righe.

**Definizione 1.14: Rango di una matrice ridotta per righe.** Il rango di una matrice ridotta per righe è il numero di righe non nulle. Si indica con  $\text{rank } A$ .

**Definizione 1.15: Matrice ridotta a scala.** Una matrice  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  è ridotta a scala se il primo termine non nullo di ogni riga viene dopo il primo termine non nullo della riga precedente.

$$\begin{pmatrix} a_{11} \neq 0 & \cdots & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} \neq 0 & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Il primo elemento non nullo è detto **pivot**.

Si noti che non necessariamente devono essere consecutivi, si può anche avere una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

## 1.2 Operazioni

**Definizione 1.16: Uguaglianza.** Due matrici  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$  e  $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{p,q}$  si dicono uguali se

1.  $A$  e  $B$  appartengono allo stesso insieme  $\mathbb{R}^{m,n}$ , ovvero  $m = p$  e  $n = q$
2.  $a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall i : 1 \leq i \leq m \quad \forall j : 1 \leq j \leq n$

**Definizione 1.17: Somma.** La somma tra matrici è solo definita se le due matrici appartengono allo stesso insieme.

Siano  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$  e  $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$  due matrici. La loro somma  $A + B$  è

$$A + B \stackrel{\text{def}}{=} (a_{ij} + b_{ij})$$

Si definisce quindi anche l'operatore somma nel seguente modo

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^{m,n} \times \mathbb{R}^{m,n} &\rightarrow \mathbb{R}^{m,n} \\ (A, B) &\mapsto A + B \end{aligned}$$

**Definizione 1.17.1: Proprietà della somma tra matrici.** Per la somma tra matrici valgono le seguenti proprietà:

1. Commutativa:  $A + B = B + A \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$
2. Associativa:  $A + (B + C) = (A + B) + C \quad \forall A, B, C \in \mathbb{R}^{m,n}$
3. Esistenza dell'elemento neutro:  $O + A = A + O \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$
4. Esistenza dell'opposto:  $A + (-A) = O \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$

**Definizione 1.18: Prodotto tra matrice e scalare.** Si definisce il prodotto tra  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$  la matrice

$$\lambda A \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda a_{ij})$$

**Definizione 1.18.1: Proprietà del prodotto con uno scalare.** Per il prodotto tra una matrice e uno scalare vigono le seguenti proprietà:

1.  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$
2.  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$
3.  $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$
4.  $1A = A \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$

**Definizione 1.19: Prodotto tra matrici.** Il prodotto tra due matrici  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n,q}$  è possibile solo se  $n = p$ . La matrice risultante avrà ordine  $m \times q$ . Formalmente si scrive che

$$C \stackrel{\text{def}}{=} A \cdot B = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,q}$$

con

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

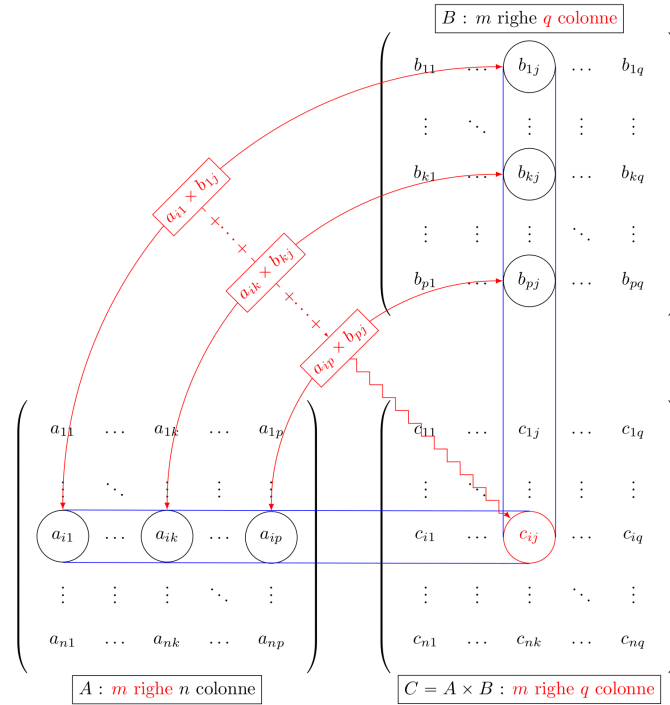


Figura (1): Illustrazione grafica per la moltiplicazione tra matrici

**Definizione 1.19.1: Proprietà del prodotto tra matrici.** Per il prodotto tra matrici vigono alcune proprietà:

1. Associativa:  $(AB)C = A(BC) \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}, B \in \mathbb{R}^{n,k}, C \in \mathbb{R}^{k,q}$

**DIMOSTRAZIONE.**

Definiamo  $D = AB \in \mathbb{R}^{m,k} = (d_{ij}) = \sum_{l=1}^n a_{il} b_{li}$  e  $E = BC \in \mathbb{R}^{n,q} = (e_{ij}) = \sum_{p=1}^k b_{ip} c_{pi}$ . Allora svolgiamo i calcoli

$$(AB)C = DC = \sum_{f=1}^q d_{if} c_{fi} = \sum_{f=1}^q (a_{if} b_{fi}) c_{fi}$$

e

$$A(BC) = AE = \sum_{f=1}^n a_{if} c_{fi} = \sum_{f=1}^q a_{if} (b_{if} c_{fi})$$

Dato che  $f$  va da 1 a  $q$  e che in  $\mathbb{R}$  vale la proprietà associativa del prodotto, si può dire che

$$\sum_{f=1}^q (a_{if} b_{fi}) c_{fi} = \sum_{f=1}^q a_{if} (b_{if} c_{fi})$$

QED

2. Distributiva del prodotto per la somma:  $A(B + C) = AB + AC \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}, B, C \in \mathbb{R}^{n,p}$

**DIMOSTRAZIONE.**

Per definizione di somma

$$B + C = (b_{ij} + c_{ij})$$

Quindi

$$A(B + C) = A(b_{ij} + c_{ij})$$

e infine

$$A(b_{ij} + c_{ij}) = \sum_{f=1}^p a_{if} (b_{fi} c_{fi}) = \sum_{f=1}^p [a_{if} b_{fi} + a_{if} c_{fi}] = \sum_{f=1}^p a_{if} b_{fi} + \sum_{f=1}^p a_{if} c_{fi} = AB + AC$$

QED

3.  $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B) \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}, B \in \mathbb{R}^{n,p}$

**DIMOSTRAZIONE.**

Per [Definizione 1.18](#) si ha che

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$

Si ha quindi

$$(\lambda A)B = \sum_{f=1}^p \lambda a_{if} b_{fi} = \sum_{f=1}^p \overbrace{a_{if} \lambda b_{fi}}^{A(\lambda B)} = \lambda \sum_{f=1}^p a_{if} b_{fi} = \lambda(AB)$$

QED

4. Solo per le matrici quadrate:  $IA = A = AI \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n,n}$

Si noti che per il prodotto  $\exists A, B : AB = 0 \not\Rightarrow A = O \vee B = O$ . Si noti anche che sempre per il prodotto, in generale  $AB = AC \not\Rightarrow B = C$  con  $A \neq O$ .

**Definizione 1.20: Trasposto di una matrice.** Data  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  si dice trasposta di  $A$  e si indica con  ${}^tA$  la matrice che si ottiene invertendo righe con colonne. Formalmente

$$\text{Se } A = (a_{ij}), {}^tA = (b_{ij}) \implies b_{ij} = a_{ji} \quad \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

**Definizione 1.20.1: Proprietà del trasposto di una matrice.** Il trasposto gode di alcune proprietà

1.  ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$
2.  ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{m,n}$



$$3. {}^t(AB) = {}^tB {}^tA \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$$

$$4. \text{ Se } A \in GL(n, \mathbb{R}) \text{ e } A^{-1} \text{ è la sua inversa, allora anche } {}^tA \in GL(n, \mathbb{R}) \text{ e si ha } ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

**DIMOSTRAZIONE.**

Si deve dimostrare che

$${}^t(A^{-1}) {}^tA = {}^t(AA^{-1}) = {}^tI = I$$

e

$${}^tA {}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tI = I$$

QED

**Definizione 1.21: Traccia di una matrice quadrata.** Sia  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Si definisce la sua traccia

$$\text{tr}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

**Definizione 1.21.1: Proprietà della traccia.** La traccia gode di alcune proprietà:

$$1. \text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$$

**DIMOSTRAZIONE.**

Per [Definizione 1.17](#) si ha che

$$\text{tr}(A + B) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

QED

$$2. \text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{n,n}$$

**DIMOSTRAZIONE.**

Per [Definizione 1.18](#) si ha che

$$\text{tr}(\lambda A) = \sum_{i=1}^n \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^n a_{ii} = \lambda \text{tr}(A)$$

QED

$$3. \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$$

**DIMOSTRAZIONE.**

Siano  $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Allora  $AB = (c_{ij})$ . Per la [Definizione 1.19](#)

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}$$

Per la [Definizione 1.21](#)

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} b_{ki} \quad (1.1)$$

Sia  $BA = (d_{ij})$ , allora

$$d_{ii} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{ki}$$

Per la [Definizione 1.21](#)

$$\text{tr}(BA) = \sum_{i=1}^n d_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{ki} = \sum_{i,k=1}^n b_{ik} a_{ki} \quad (1.2)$$

Dato che in  $\mathbb{R}$  il prodotto è commutativo e che sia  $i$  che  $k$ , sia in (1.1) e (1.2) variano da 1 a  $n$ , si può affermare che

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{i,k}^n b_{ik} a_{ki}$$

QED

$$4. \text{tr}({}^t A) = \text{tr}(A) \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n,n}$$

**DIMOSTRAZIONE.**

Per [Definizione 1.20](#) si ha che se  $A$  è una matrice diagonale,  ${}^t A = A$ . Dato che la traccia prende solo gli elementi sulla diagonale, farne il trasposto non modifica il risultato. QED

## 2 Equazioni e sistemi lineari

### 2.1 Equazioni lineari

**Definizione 2.1: Equazione lineare.** Un'equazione lineare nelle incognite  $x_1, x_2, \dots, x_n$  è un'espressione del tipo

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b \quad (2.1)$$

dove  $a, b \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ .

$a_i$  sono detti coefficienti,  $b$  è detto termine noto.

Scritta in forma matriciale

$$(a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

**Definizione 2.2: Soluzione dell'equazione lineare.** Una soluzione dell'equazione lineare (2.1) è una  $n$ -upla di numeri reali  $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \dots, \widetilde{x}_n)$  che sostituiti nell'equazione, la verifica.

**Definizione 2.3: Equazione lineare omogenea.** L'equazione (2.1) si dice omogenea se  $b = 0$ .

**Definizione 2.3.1: Soluzione particolare.** La  $n$ -upla  $(0, 0, \dots, 0)$  è soluzione dell'equazione omogenea.

**Definizione 2.3.2: Soluzione particolare.** Se  $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$  è soluzione, lo è anche  $(t\tilde{x}_1, \dots, t\tilde{x}_n)$ .

### 2.2 Sistemi lineari

**Definizione 2.4: Sistema lineare.** Un sistema lineare di  $m$  equazioni e  $n$  incognite  $x_1, \dots, x_n$  è un insieme di equazioni lineari del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases} \quad (2.2)$$

$a_{ij}$  si dicono coefficienti (con  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ ).

$b_i$  si dicono termini noti.

Scritto in forma matriciale

$$AX = B$$

in cui

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n} \quad \text{Matrice dei coefficienti}$$
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,1} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,1}$$

**Definizione 2.5: Matrice completa.** Si definisce matrice completa

$$(A|B) = \left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Ciascuna riga si indica con  $R_i$ .

**Definizione 2.6: Sistema lineare omogeneo.** Un sistema lineare è omogeneo se  $b_j = 0 \forall j = 1, \dots, m$ , ovvero

$$AX = O$$

**Definizione 2.7: Soluzione del sistema lineare.** Soluzione del sistema lineare (2.2) è una  $n$ -upla di numeri reali  $(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n)$  che sostituita nelle ingognite verifica tutte le equazioni.

**Definizione 2.7.1: Soluzioni di un sistema omogeneo.** Se un sistema lineare è omogeneo, allora  $(0, \dots, 0)$  è una sua soluzione. Si conclude quindi che un sistema lineare omogeneo è sempre compatibile.

**Definizione 2.8: Sistema compatibile.** Un sistema lineare si dice compatibile se ammette soluzioni, incompatibile altrimenti.

**Definizione 2.9: Sistema equivalente.** Un sistema si dice equivalente ad un altro se ammette le stesse soluzioni.

### 2.2.1 Metodo di riduzione di Gauss

Il metodo di riduzione di Gauss permette di semplificare un sistema lineare in uno equivalente.

**Teorema 2.1: Operazioni elementari di riduzione per righe.** Eseguendo un numero finito di volte le tre operazioni

1. Scambiare due equazioni
2. Moltiplicare per un numero reale diverso da 0
3. Sostituire ad un'equazione la somma di se stessa con un'altra equazione moltiplicata per un qualsiasi numero reale

si ottiene un sistema lineare equivalente.

**DIMOSTRAZIONE.**

Dimostrare 1 è ovvio, in quanto le equazioni non si modificano.

Il punto 2 invece deve essere dimostrato che se una  $n$ -upla è soluzione di un sistema, lo è anche dell'altro e viceversa. Si ha quindi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots a_{mn}x_m &= b_m \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda(a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n) &= \lambda b_1 \\ \vdots &= \vdots \\ \lambda(a_{m1}x_1 + \dots a_{mn}x_m) &= \lambda b_m \end{cases}$$

Per [Definizione 2.3.2](#) si ha che la seconda equazione ha le stesse soluzioni della prima.

$$\begin{cases} \lambda(a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n) &= \lambda b_1 \\ \vdots &= \vdots \\ \lambda(a_{m1}x_1 + \dots a_{mn}x_m) &= \lambda b_m \end{cases} \implies \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots a_{mn}x_m &= b_m \end{cases}$$

dividendo per  $\lambda \neq 0$ . Per [Definizione 2.3.2](#) si ha che hanno le stesse soluzioni.

Per il punto 3 si procede analogamente al punto 2.

QED

Dal punto di vista matriciale, le trasformazioni si applicano nei seguenti modi

$$\begin{aligned} R_i &\leftrightarrow R_j \\ R_i &\leftrightarrow \lambda R_i \quad \lambda \neq 0 \\ R_i &\leftrightarrow R_i + \lambda R_j \quad \lambda \in \mathbb{R}, j \neq i \end{aligned}$$

Eseguire queste operazioni un numero finito di volte significa trasformare  $(A|B)$  in  $(\tilde{A}|\tilde{B})$  in modo che ogni riga di  $\tilde{A}$  non nulla esista un elemento non nullo sotto il quale sono tutti 0.

**Definizione 2.10: Sistema ridotto.** Un sistema lineare è ridotto se è ridotta  $A$ .

**Teorema 2.2: Teorema di Rouché-Capelli.** Un sistema lineare di  $m$  equazioni e  $n$  incognite

$$AX = B$$

è compatibile se e solo se

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A|B)$$

In particolare si ha che se  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|B) = n$  la soluzione è unica. Se invece  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = k < n$  ci sono infinite soluzioni che dipendono da  $n - k$  variabili. Quindi ci sono  $\infty^{n-k}$  soluzioni.

**Teorema 2.2.1: Teorema di Rouché-Capelli per un sistema lineare omogeneo.** Un sistema lineare omogeneo di  $m$  equazioni e  $n$  incognite

$$AX = O$$

è sempre compatibile. Se

$$\text{rank}(A) = n$$

esiste un'unica soluzione che è quella nulla. Se

$$\text{rank}(A) = k < n$$

il sistema ammette  $\infty^{n-k}$  soluzioni.

Si noti che se  $AX = B$  ha un'unica soluzione e utilizzando il metodo di riduzione di Gauss-Jordan si può arrivare ad una matrice ridotta a scala del tipo

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \widetilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \widetilde{b}_n \end{array} \right)$$

in cui si ha che  $A = I$ .

### 3 Esempi

Qui verranno riportati alcuni esempi di teoremi, proprietà o semplici esercizi che mostrano un'applicazione pratica della teoria.

#### 3.1 Matrici

#### 3.2 Equazioni e sistemi lineari

##### 3.2.1 Numero di soluzioni di un sistema

**Esempio 1** Si discuta il numero di soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Si scrive subito la matrice completa associata

$$(A|B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

Ora dobbiamo cercare di ridurla per righe in modo da poter determinare il numero di soluzioni.

$$(A|B) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

A questo punto abbiamo ridotto per righe questa matrice. Possiamo tornare al sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_3 = -2 \end{cases}$$

Questo sistema è in due equazioni ma tre incognite, questo significa che se due sono fissate, una è libera di modificarsi. Ovvero ci sono  $\infty^1$  soluzioni.

##### 3.2.2 Uso del teorema di Rouché-Capelli

**Esempio 1** Discutere al variare di  $h, k \in \mathbb{R}$  il sistema

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = h \end{cases}$$

Si può riscrivere il sistema in forma matriciale con la matrice completa

$$(A|B) = \left( \begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & h \end{array} \right)$$

Possiamo ora cercare di ridurre la matrice

$$\left( \begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & h \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & h \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - kR_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & 1-k & 1-k \\ 0 & 1-k & 1-k & h-1 \end{array} \right)$$

A questo punto si distinguono due casi, se  $1-k=0$  o  $1-k \neq 0$ .

Se  $1-k=0 \implies k=1$ , sostituendo

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h-1 \end{array} \right)$$

Per questa matrice ridotta per righe si ha  $\text{rank}(A) = 1$ . Per il [Teorema 2.2](#) si distinguono gli ultimi due casi per  $h$ . Se  $h=1$ , allora il sistema è compatibile con  $\infty^2$  soluzioni. Altrimenti non ci sono soluzioni in quanto  $\text{rank}(A|B) = 2 \neq \text{rank}(A)$ .

Se  $1-k \neq 0 \implies k \neq 1$  i può dividere la seconda e terza riga per  $\frac{1}{1-k}$  ottenendo

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1+k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{h-1}{1-k} \end{array} \right)$$

Andando a sommare  $R_3$  con  $R_2$ , si ha

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1+k & 1 & 1 \\ 0 & 2+k & 0 & \frac{h-1}{1-k} + 1 \end{array} \right)$$

A questo punto abbiamo due casi:  $k=-2$  e non. Immediatamente si vede che  $k \neq -2$ , si ha che  $\text{rank}(A|B) = 3 \neq \text{rank}(A)$  e quindi la soluzione è unica per il teorema [Teorema 2.2](#).

Se invece  $k=-2$  si può riscrivere

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h+2}{3} \end{array} \right)$$

Si distinguono due casi a seconda di  $h$ . Se  $h=-2$  o meno. Si vede immediatamente che se  $h \neq -2$  si ha che  $\text{rank}(A|B) = 3 \neq 2$  e quindi non ci sono soluzioni per il [Teorema 2.2](#).

Se invece  $h=-2$  si ha che  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|B) = 2$  e quindi ci sono  $\infty^1$  soluzioni.

Riassumendo

$$\left\{ \begin{array}{l} k=1, \left\{ \begin{array}{l} h=1 \implies \infty^2 \\ h \neq 1 \implies 0 \end{array} \right. \\ k \neq 1, \left\{ \begin{array}{l} k=-2 \implies \left\{ \begin{array}{l} h=-2 \implies \infty^1 \\ h=2 \implies 0 \end{array} \right. \\ k \neq -2 \implies 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

## Note