Geometria 1: appunti

Davide Cossu

2018

Sommario

Una dispensa contenente gli appunti delle lezioni di Geometria 1, con anche esempi e dimostrazioni.

Indice

1 Matrici

1.1 Definizioni

Definizione 1.1: Matrice. Siano $m, n \in \mathbb{N}_0$. Una matrice di m righe e n colonne ad elementi reali è una tabella del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & {}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Definizione 1.2: Ordine. Si dice **ordine** di una matrice si intendono le sue dimensioni, in questo caso A è di ordine $m \times n$.

Dato che una matrice contiene elementi reali, l'insieme di queste matrici viene definito

$$\mathbb{R}^{m,n} \overset{\text{def}}{=} \{\text{Matrici reali di ordine } m \times n\}$$

Spesso una matrice viene definita anche in maniera più stringata

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$$

Definizione 1.3: Matrice quadrata. Una matrice si dice quadrata quando $m = n$.

Definizione 1.4: Matrice identità. La matrice identità (o matrice unità) si definisce

$$I \in \mathbb{R}^{m,n} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ovvero quella matrice la cui diagonale principale è formata da 1 e tutto il resto da 0. Formalmente

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

Definizione 1.5: Diagonale principale. La diagonale principale di una matrice è quella descritta dagli elementi a_{ii}. Qui è colorata in blu.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Definizione 1.6: Matrice nulla. Per matrice nulla si intende

$$O \in \mathbb{R}^{m,n} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Ovvero è la matrice tale che

$$\forall i, j \quad a_{ij} = 0$$

Definizione 1.7: Matrice riga. Per matrice riga si intende quella che ha $m = 1$, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1,n}$$

Definizione 1.8: Matrice colonna. Per matrice colonna si intende quella che ha $n = 1$, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,1}$$

Definizione 1.9: Matrice simmetrica. Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. A è simmetrica se ${}^{t}A = A$. Ovvero se

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

Definizione 1.10: Matrice antisimmetrica. Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. A è antisimmetrica se ${}^{t}A = -A$. Ovvero se

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

Definizione 1.11: Matrice invertibile. Sia A una matrice quadrata. A è in vertibile o non singolare se

$$\exists X \in \mathbb{R}^{n,n} \ : AX = XA = I$$

Si noti che si indica $X = A^{-1}$.

Teorema 1.1: Unicità dell'inversa. Se $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è invertibile allora la matrice inversa è unica.

Dimostrazione.
Sopponiamo per assurdo che $\exists X, X' \in \mathbb{R}^{n,n}$ con $X \neq X'$ tali che

$$AX' = X'A = AX = XA = I$$

Allora

$$X' = IX' = (XA)X' = X(AX') = XI = X$$

QED

Definizione 1.11.1: Proprietà della matrice inversa. La matrice inversa gode di alcune proprietà:

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$

   Dimostrazione.
   Dobbiamo dimostrare $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} \iff AB(A^{-1}B^{-1}) = (A^{-1}B^{-1})AB = I$ per la Definizione 1.11. Quindi

   $$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I$$

   e

   $$AB(A^{-1}B^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$$

   QED

2. $(A^{-1})^{-1} \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n,n}$

   Dimostrazione.
   Per Definizione 1.11

   $$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

   QED

Definizione 1.11.2: Gruppo lineare. Si definisce un gruppo lineare l'insieme

$$GL(n, \mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid A \text{ è invertibile}\}$$

assieme al prodotto.

Definizione 1.12: Matrice diagonale. Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n} = (a_{ij})$. Si dice diagonale se

$$\forall i, j = 1, \dots, n : i \neq j \quad a_{ij} = 0$$

Ovvero

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1.2 Operazioni

Definizione 1.13: Uguaglianza. Due matrici $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{p,q}$ si dicono uguali se

1. A e B appartengono allo stesso insieme $\mathbb{R}^{m,n}$, ovvero $m = p$ e $n = q$
2. $a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall i : 1 \leq i \leq m \quad \forall j : 1 \leq j \leq n$

Definizione 1.14: Somma. La somma tra matrici è solo definita se le due matrici appartengono allo stesso insieme.
Siano $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ due matrici. La loro somma $A + B$ è

$$A + B \stackrel{\text{def}}{=} (a_{ij} + b_{ij})$$

Si definisce quindi anche l'operatore somma nel seguente modo

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^{m,n} \times \mathbb{R}^{m,n} &\to \mathbb{R}^{m,n} \\ (A, B) &\mapsto A + B \end{aligned}$$

Definizione 1.14.1: Proprietà della somma tra matrici. Per la somma tra matrici valgono le seguenti proprietà:

1. Commutativa: $A + B = B + A \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$
2. Associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C \quad \forall A, B, C \in \mathbb{R}^{m,n}$
3. Esistenza dell'elemento neutro: $O + A = A + O \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$
4. Esistenza dell'opposto: $A + (-A) = 0 \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$

Definizione 1.15: Prodotto tra matrice e scalare. Si definisce il prodotto tra $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ la matrice

$$\lambda A \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda a_{ij})$$

Definizione 1.15.1: Proprietà del prodotto con uno scalare. Per il prodotto tra una matrice e uno scalare vigono le seguenti proprietà:

1. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$
2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$

3. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$
4. $1A = A \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$

Definizione 1.16: Prodotto tra matrici. Il prodotto tra due matrici $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{R}^{p,q}$ è possibile solo se $n = p$. La matrice risultante avrà ordine $m \times q$. Formalmente si scrive che

$$C \stackrel{\text{def}}{=} A \cdot B = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,q}$$

con

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

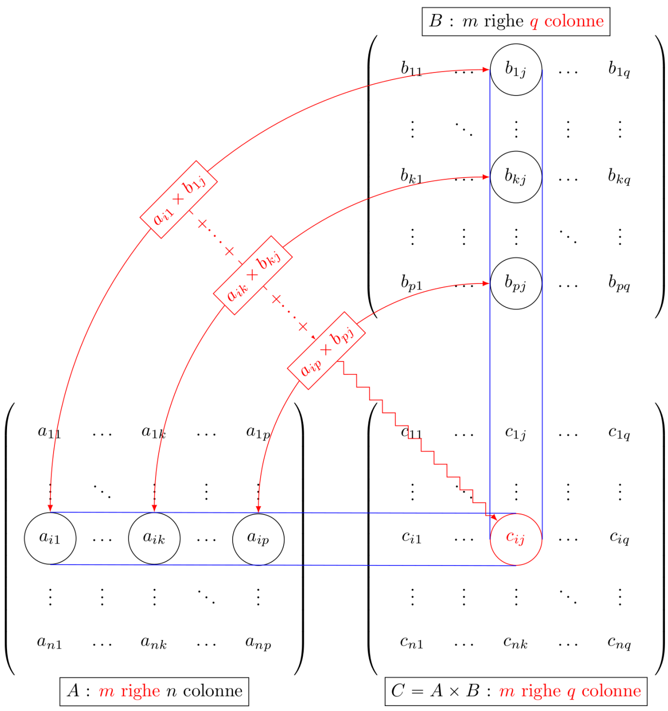

Figura (1): Illustrazione grafica per la moltiplicazione tra matrici

Definizione 1.16.1: Proprietà del prodotto tra matrici. Per il prodotto tra matrici vigono alcune proprietà:

1. Associativa: $(AB)C = A(BC) \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}, B \in \mathbb{R}^{n,k}, C \in \mathbb{R}^{k,q}$

   Dimostrazione.
   Definiamo $D = AB \in \mathbb{R}^{m,k} = (d_{ij}) = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{li}$ e $E = BC \in \mathbb{R}^{n,q} = (e_{ij}) = \sum_{p=1}^{k} b_{ip} c_{pi}$. Allora svolgiamo i calcoli

   $$(AB)C = DC = \sum_{f=1}^{q} d_{if} c_{fi} = \sum_{f=1}^{q} (a_{if} b_{fi}) c_{fi}$$

   e

   $$A(BC) = AE = \sum_{f=1}^{n} a_{if} c_{fi} = \sum_{f=1}^{q} a_{if} (b_{if} c_{fi})$$

Dato che f va da 1 a q e che in $\mathbb{R}$ vale la proprietà associativa del prodotto, si può dire che

$$\sum_{f=1}^{q}(a_{if}b_{fi})c_{fi} = \sum_{f=1}^{q} a_{if}(b_{if}c_{fi})$$

QED

2. Distributiva del prodotto per la somma: $A(B+C) = AB + AC \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}, B, C \in \mathbb{R}^{n,p}$

   Dimostrazione.
   Per definizione di somma
   $$B + C = (b_{ij} + c_{ij})$$
   Quindi
   $$A(B+C) = A(b_{ij} + c_{ij})$$
   e infine
   $$A(b_{ij} + c_{ij}) = \sum_{f=1}^{p} a_{if}(b_{fi}c_{fi}) = \sum_{f=1}^{p} [a_{if}b_{fi} + a_{if}c_{fi}] = \sum_{f=1}^{p} a_{if}b_{fi} + \sum_{f=1}^{p} a_{if}c_{fi} = AB + AC$$
   QED

3. $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B) \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}, B \in \mathbb{R}^{n,p}$

   Dimostrazione.
   Per Definizione 1.15 si ha che
   $$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$
   Si ha quindi
   $$(\lambda A)B = \sum_{f=1}^{p} \lambda a_{if}b_{fi} = \overbrace{\sum_{f=1}^{p} a_{if}\lambda b_{fi}}^{A(\lambda B)} = \lambda \sum_{f=1}^{p} a_{if}b_{fi} = \lambda(AB)$$
   QED

4. Solo per le matrici quadrate: $IA = A = AI \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n,n}$

Si noti che per il prodotto $\exists A, B : AB = 0 \;\not\Rightarrow\; A = O \vee B = O$. Si noti anche che sempre per il prodotto, in generale $AB = AC \;\not\Rightarrow\; B = C$ con $A \neq O$.

Definizione 1.17: Trasposto di una matrice. Data $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ si dice trasposta di A e si indica con ${}^{t}A$ la matrice che si ottiene invertendo righe con colonne. Formalmente

$$\text{Se } A = (a_{ij}),\ {}^{t}A = (b_{ij}) \implies b_{ij} = a_{ji} \quad \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

Definizione 1.17.1: Proprietà del trasposto di una matrice. Il trasposto gode di alcune proprietà

1. ${}^{t}(A + B) = {}^{t}A + {}^{t}B \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$
2. ${}^{t}(\lambda A) = \lambda\, {}^{t}A \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{m,n}$
3. ${}^{t}(AB) = {}^{t}B\, {}^{t}A \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$
4. Se $A \in GL(n, \mathbb{R})$ e A^{-1} è la sua inversa, allora anche ${}^{t}A \in GL(n, \mathbb{R})$ e si ha $({}^{t}A)^{-1} = {}^{t}(A^{-1})$

Dimostrazione.
Si deve dimostrare che

$$ {}^{t}(A^{-1})\,{}^{t}A = {}^{t}(AA^{-1}) = {}^{t}I = I $$

e

$$ {}^{t}A\,{}^{t}(A^{-1}) = {}^{t}(A^{-1}A) = {}^{t}I = I $$

QED

Definizione 1.18: Traccia di una matrice quadrata. Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Di definisce la sua traccia

$$ \operatorname{tr}(A) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} $$

Definizione 1.18.1: Proprietà della traccia. La traccia gode di alcune proprietà:

1. $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$

   Dimostrazione.
   Per Definizione 1.14 si ha che

   $$ \operatorname{tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) $$

   QED

2. $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{n,n}$

   Dimostrazione.
   Per Definizione 1.15 si ha che

   $$ \operatorname{tr}(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda \operatorname{tr}(A) $$

   QED

3. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$

   Dimostrazione.
   Siano $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$. Allora $AB = (c_{ij})$. Per la Definizione 1.16

   $$ c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} $$

   Per la Definizione 1.18

   $$ \operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \tag{1.1} $$

   Sia $BA = (d_{ij})$, allora

   $$ d_{ii} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki} $$

   Per la Definizione 1.18

   $$ \operatorname{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki} = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} a_{ki} \tag{1.2} $$

Dato che in $\mathbb{R}$ il prodotto è commutativo e che sia i che k, sia in (1.1) e (1.2) variano da 1 a n, si può affermare che

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{i,k}^{n} b_{ik}a_{ki}$$

QED

4. $\operatorname{tr}({}^{t}A) = \operatorname{tr}(A) \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n,n}$

   Dimostrazione.
   Per Definizione 1.17 si ha che se A è una matrice diagonale, ${}^{t}A = A$. Dato che la traccia prende solo gli elementi sulla diagonale, farne il trasposto non modifica il risultato. QED

2 Equazioni lineari

Definizione 2.1: Equazione lineare. Un'equazione lineare nelle incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$ è un'espressione del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \tag{2.1}$$

dove $a, b \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$.
a_i sono detti coefficienti, b è detto termine noto.
Scritta in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

Definizione 2.2: Soluzione dell'equazione lineare. Una soluzione dell'equazione lineare (2.1) è una n-upla di numeri reali $(\tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \dots, \tilde{x_n})$ che sostituiti nell'equazione, la verifica.

Definizione 2.3: Equazione lineare omogenea. L'equazione (2.1) si dice omogenea se $b = 0$.

Definizione 2.3.1: Soluzione particolare. La n-upla $(0, 0, \dots, 0)$ è soluzione dell'equazione omogenea.

Definizione 2.3.2: Soluzione particolare. Se $(\tilde{x_1}, \dots, \tilde{x_n})$ è soluzione, lo è anche $(t\tilde{x_1}, \dots, t\tilde{x_n})$.

Note