Formule di Matematica

Davide Cossu

Questo è un formulario con le formule di matematica fatte e con alcune spiegazioni teoriche.

Indice

Durante tutto il formulario, si userà il sistema internazionale di notazione, ovvero . per separare interi da decimali e , per separare le migliaia se necessario.

Simboli

Qui verrano chiariti i simboli che verranno utilizzati nel formulario. Molti di essi si troveranno principalmente nelle definizioni formali ma ritorneranno utili anche negli esercizi.

$\sum_{i=l}^{n} f(i)$	$f(l) + f(l+1) + \cdots + f(n)$
$\prod_{i=l}^{n} f(i)$	$f(l) \cdot f(l+1) \cdot \cdots \cdot f(n)$
$\forall$	Per ogni
$\exists$	Esiste
$\in$	Appartiene
$\notin$	Non appartiene
$\cup$	Unito
$\cap$	Intersecato
$\vert, :$	Tale che
$\Rightarrow$	Si ha che
$\mapsto$	Diventa
$\rightarrow$	Ne segue che, tende
$\iff$	Se e solo se

Generale

In questa sezione verranno trattati alcuni temi utili in tutto il formulario, come i prodotti notevoli o alcune prprietà dei radicali.
Per gli esercizi si vada qui.

Prodotti notevoli

I prodotti notevoli sono dei prodotti o delle fattorizzazioni sempre vere per qualunque numero. Risultano essere molto utili quando si deve semplificare un'espressione.

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Questi hanno la seguente formula generale

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

Questi hanno la seguente formula generale, anche conosciuto come 'Binomio di Newton'

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Radicali

I radicali sono delle espressioni spesso irrazionali che contengono almeno una radice. La radice è anche pensabile come una potenza: $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$.

Addizione e Sottrazione

Due radicali si possono addizionare o sottrarre se e solo se **sono simili**

$$m \cdot \sqrt[n]{a} \pm p \cdot \sqrt[n]{a} = (m \pm p) \cdot \sqrt[n]{a}$$

Divisione e Moltiplicazione

Due radicali si possono moltiplicare o dividere se e solo se **hanno lo stesso indice**

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab} \qquad \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}, \quad b \neq 0$$

Razionalizzare un radicale

Per razionalizzare un radicale si intende eliminare il radicale dal denominatore di una frazione in quanto non è possibile dividere un numero per un irrazionale.

$$\frac{d}{c \cdot \sqrt{b}} = \frac{d}{c \cdot \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{d \cdot \sqrt{b}}{cb} \qquad b > 0,\, c \neq 0$$
$$\frac{c}{a \pm \sqrt{b}} = \frac{c}{a \pm \sqrt{b}} \cdot \frac{a \mp \sqrt{b}}{a \mp \sqrt{b}} = \frac{c \cdot (a \pm \sqrt{b})}{a^2 - b} \qquad a \pm \sqrt{b} \neq 0$$
$$\frac{c}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{c}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b} \qquad \sqrt{a} \pm \sqrt{b} \neq 0$$

In generale per razionalizzare si deve moltiplicare per un fattore che annulli il radicale stesso, generalmente quel fattore è il radicale o il suo reciproco.

Radicale di un radicale

Per risolvere o semplificare espressioni come $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ si può usare questa formula

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Disequazioni con radicali

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left\{ \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \right\}$$
$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$
$$\sqrt{f(x)} \lesseqgtr \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) \geqslant 0 \\ f(x) \lesseqgtr g(x) \end{cases}$$

Equazioni particolari

Ci sono infiniti tipi di equazioni, alcune però hanno delle soluzioni immediate, eccone alcune.

Equazioni binomie

Le equazioni binomie sono nella forma $x^n = a$. Le loro soluzioni sono le seguenti

$$x = \pm \sqrt[n]{a} \qquad \text{Se } n \text{ è pari e } a \geqslant 0$$
$$x = \sqrt[n]{a} \qquad \text{Se } n \text{ è dispari}$$

Equazioni trinomie e biquadratiche

Le equazioni trinomie sono nella forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$. Se $n = 2$ sono definite biquadratiche.
Per risolverle si ponga $t = x^n$ e si risolva l'equazione di secondo grado che ne deriva

$$at^2 + bt + c = 0$$

e poi si risolva $x^n = y_1$ e $x^n = y_2$.

Equazioni di secondo grado

Le equazioni di secondo grado sono tra le più diffuse. Presentano alcune caratteristiche.
Sia $ax^2 + bx + c = 0$ la nostra equazione, allora x_1 e x_2 sono le sue soluzioni. Per trovarle si usi la seguente formula

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Conoscendo le soluzioni si può semplificare l'equazione in questo modo

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Vige anche questa particolarità

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Ruffini

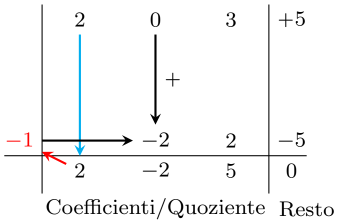
Il metodo di Ruffini permette di ridurre di grado qualsiasi equazione. Prima di usare questo metodo si dovrebbe però verificare che non sia possibile usare prodotti notevoli in quanto il processo richiede tempo.
Per prima cosa si deve trovare uno **zero** dell'equazione, ovvero una soluzione. Essi sono da ricercarsi tra le seguenti frazioni

$$\text{Zeri} = \frac{\text{Divisori termine noto}}{\text{Divisori } a}$$

Per dimostrare l'utilizzo di questa regola, prendiamo come esempio la seguente equazione

$$2x^3 + 3x + 5 = 0 \tag{1}$$

Lo zero di quest'equazione è -1, infatti $2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1) + 5 = 0$. Il seguente disegno chiarisce i passaggi da seguire per ridurre di grado un'equazione.



Il processo da seguire è il seguente:

1. Moltiplicare il coefficiente del grado massimo per lo zero
2. Aggiungere al grado successivo il risultato
3. Continuare fino a che non si arriva al termine noto

Così si otterranno i nuovi coefficienti dell'equazione. Nel nostro caso otteniamo

$$2x^2 - 2x + 5 \tag{2}$$

però questo non basta in quanto le equazioni (1) e (2) non sono equivalenti. Per renderle equivalenti, si moltiplichi per $(x - x_0)$ dove x_0 è lo zero dell'equazione originale. Quindi ora abbiamo ottenuto che

$$2x^3 + 3x + 5 = (2x^2 - 2x + 5)(x + 1)$$

E che quindi possiamo dire che $P_n(x) = P_{n-1}(x) \cdot (x - x_0)$ dove $P_n(x)$ è un polinomio di grado n nella variabile x.

Valori assoluti

Verranno qui elencate alcune caratteristiche dei valori assoluti.

Definizione

$$|x| \Leftrightarrow \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Proprietà

Dalla definizione ne derivano alcune proprietà

$$\begin{array}{cc} |x| = |-x| & \left|x^2\right| = |x|^2 = x^2 \\ |a+b| \leqslant |a| + |b| & |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \end{array}$$

Funzioni e valori assoluti

Vengono ora riportati i sistemi risolutivi di funzioni con valori assoluti

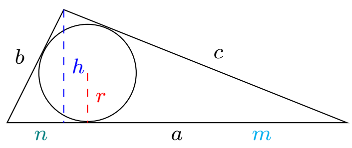
$$|f(x)| \geqslant g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant -g(x) \\ f(x) \geqslant g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| \leqslant g(x) \Leftrightarrow -g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$$

Geometria

Qui vengono elencate alcune formule particolari che riguardano la geometria euclidea.

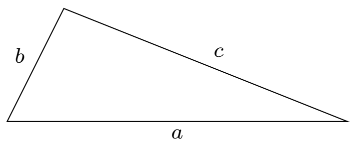
Teoremi di Euclide



Primo teorema	$\begin{cases} \dfrac{m}{c} = \dfrac{c}{a} \\ \dfrac{n}{b} = \dfrac{b}{a} \end{cases}$
Secondo teorema	$\dfrac{m}{h} = \dfrac{h}{n}$
Proprietà	$\begin{cases} h = \dfrac{bc}{a} \\ r = \dfrac{b+c-a}{2} \end{cases}$

Formula di Erone

La formula di Erone permette di trovare l'area di un triangolo qualsiasi conoscendo il semi-perimetro.



$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Raggio di una circonferenza inscritta di un triangolo

$$r = \frac{\mathscr{A}}{p}$$

Raggio di una circonferenza circosccritta di un triangolo

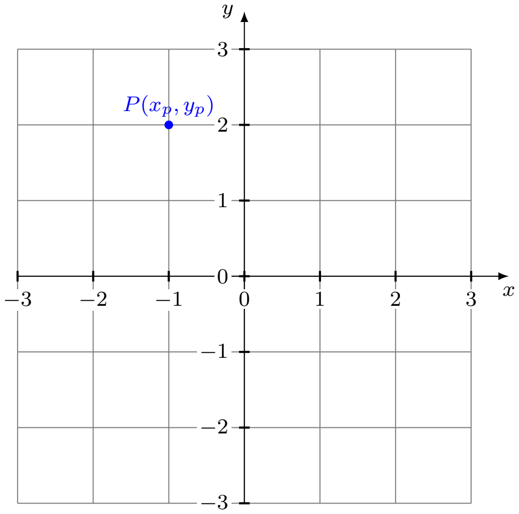
$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{abc}{4\mathscr{A}}$$

Geometria analitica

La geometria analitica è la geometria che si occupa di lavorare nel piano cartesiano (xOy).
Per gli esercizi si vada qui.

Generale

Le formule qui riportate sono generali a tutto l'ambito della geometria analitica e non si riferiscono ad una figura particolare.
Di seguito viene rappresentato il tipico piano cartesiano con i suoi quattro quadranti.



D'ora in poi, si darà per scontata la convenzione di nominare le coordinate di un punto in base al nome del punto stesso. Ad esempio $P(x_P, y_P)$. Si noti anche che è possibile definire un punto attraverso un vettore bidimensionale. Ovvero

$$P(x_P, y_P) = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix}$$

Distanza tra due punti

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Punto medio

$$M\left(\frac{x_A - x_B}{2}, \frac{y_A - y_B}{2}\right)$$

Punto su un segmento in un rapporto $\frac{m}{n}$

Siano m e n due rapporti a cui sta un punto rispetto al segmento. Ovvero il punto $P(x_P, y_P)$ divide il segmento in n parti sulla proiezione della x, in m parti su quella di y.

$$P\left(\frac{nx_A + mx_B}{m+n}, \frac{ny_A + my_B}{m+n}\right)$$

Baricentro di un triangolo

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Area di un triangolo qualsiasi

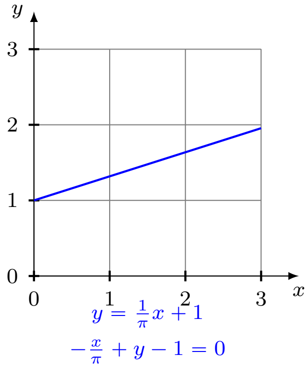
$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 + y_1x_3 + x_2y_3 - x_3y_2 - y_3x_1 - x_2y_1\right|$$

Oppure si può risolvere questa versione

$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

usando la regola di Sarrus.

Rette



Le rette sono definite da un'equazione che ha due forme equivalenti:

$$y = mx + q \tag{1}$$

$$ax + by + c = 0 \tag{2}$$

La forma (1) è chiamata *esplicita*, la forma (2) è chiamata *implicita*. Da queste due forme possiamo evincere che

$$m = -\frac{a}{b} \qquad q = -\frac{c}{b}$$

Retta passante per due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad x_1 \neq x_2 \wedge y_1 \neq y_2$$

Condizione di parallelismo

Perché due rette siano parallele, **il loro coefficiente angolare deve essere uguale**, ovvero

$$r_1 \| r_2 \iff m_1 = m_2$$

Condizione di perpendicolarità

Perché due rette siano perpendicolari, **il prodotto dei coefficienti angolari deve essere** -1, ovvero

$$r_1 \perp r_2 \iff m_1 m_2 = -1$$

Retta parallela ad una data e passante per un punto $P(x_P, y_P)$

$$y - y_P = m(x - x_P)$$

Retta perpendicolare ad una data e passante per un punto $P(x_P, y_P)$

$$y - y_P = -\frac{1}{m}(x - x_P)$$

Distanza d tra un punto $P(x_P, y_P)$ e una retta

$$d = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Coefficiente angolare m di una retta passante per due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Fasci di Rette

Un fascio di rette è una combinazione lineare di tutte le rette generabili modificando un solo parametro di una quantità costante.

Fascio di rette a due parametri

Sceglti appropriati α e β si possono generare tutte le rette possibili utilizzando questa forma

$$\alpha(ax + by + c) + \beta(a_1x + b_1y + c_1) = 0$$

$$(\alpha a + \beta a_1)x + (\alpha b + \beta b_1)y + \alpha c + \beta c_1 = 0$$

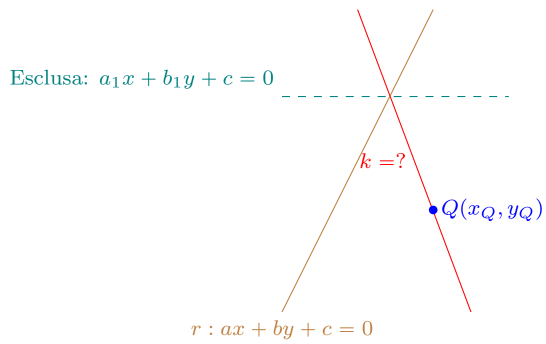
Fascio di rette ad un parametro

Questa forma esclude una sola retta, per $k = 0$.

$$ax + by + c + k(a_1x + b_1y + c_1) = 0$$

Si noti che $k = \frac{\beta}{\alpha}$

k avendo una retta del fascio, la retta esclusa e un punto su $a_1x + b_1y + c = 0$



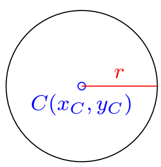
$$k = -\frac{ax_Q + by_Q + c}{a_1x_Q + b_1y_Q + c_1}$$

Retta di un fascio con coefficiente angolare m passante per un punto $P(x_P, y_P)$

$$y - y_P = m(x - x_P)$$

Circonferenza

La circonferenza è una conica i cui punti sono tutti equidistanti dal centro C.



Anche le equazioni delle circonferenze hanno 2 forme

$$\mathscr{C} : (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

$$\mathscr{C} : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Da queste due formule derivano le coordinate del centro

$$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$$

e la misura del raggio

$$r = \sqrt{x_C{}^2 + y_C{}^2 - c} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$$

Tangente in $P(x_P, y_P)$

$$x \cdot x_P + y \cdot y_P + a\frac{x + x_P}{2} + b\frac{y + y_P}{2} + c = 0$$

Area del cerchio

$$\mathscr{A}(\mathscr{C}) = \pi r^2$$

Lunghezza della circonferenza

$$C = 2\pi r$$

Lunghezza dell'arco

$$l = r\alpha$$

Si noti che α è in radianti.

Area del settore

$$\mathscr{A}(\mathscr{S}) = \frac{1}{2}r^2\alpha$$

Si noti che α è in radianti.

Fasci di circonferenze

Un fascio di circonferenze è una combinazione lineare di utte le circonferenze generabili modificando un parametro di una certa quantità costante.

Fascio di circonferenze ad un parametro

Scelti appropriati α e β si possono generare tute le circonferenze possibili utilizzando questa forma

$$\alpha(x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1) + \beta(x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

$$(\alpha+\beta)x^2 + (\alpha+\beta)y^2 + (\alpha a_1 + \beta a_2)x + (\alpha b_1 + \beta b_2)y + \alpha c_1 + \beta c_2 = 0$$

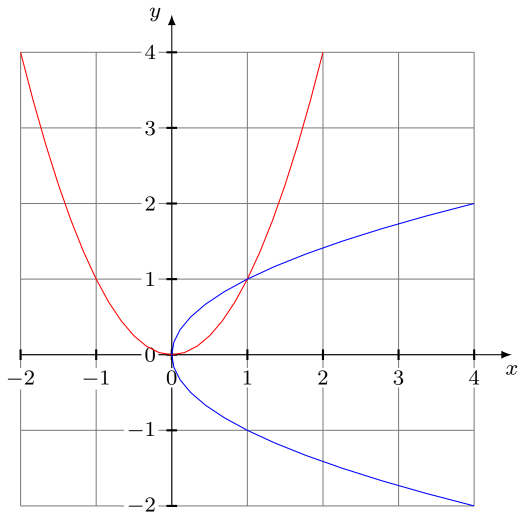
Fascio di circonferenze a due parametri

Questa forma esclude una circonferenza per $k = 0$.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c + k(x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1) = 0$$

Si noti che $k = \frac{\alpha}{\beta}$

Parabola



Una parabola può essere descritta con l'asse focale parallelo all'asse x o all'asse y.

$$\mathscr{P} : y = ax^2 + bx + c$$

$$\mathscr{P} : x = ay^2 + by + c$$

La direttrice di una parabola è quella che ne da l'inclinazione ed è perpendicolare all'asse di simmetria.
Il vertice di una parabola è il punto più vicino alla direttrice.
Il fuoco è il punto la cui distanza da qualsiasi punto della parabola è pari a quella della proiezione sulla direttrice del punto stesso.

Elementi di una parabola con asse focale parallelo a x

Vertice	$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$
Fuoco	$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$
Direttrice	$y = -\frac{1+\Delta}{4a}$
Asse di simmetria	$x = -\frac{b}{2a}$
Tangente in un punto	$\frac{y+y_0}{2} = axx_0 + b\frac{x+x_0}{2} + c$

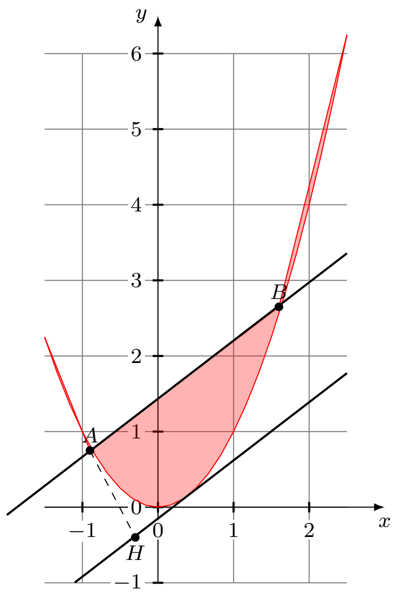
Elementi di una parabola con asse focale parallelo a y

Vertice	$\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$
Fuoco	$\left(\frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$
Direttrice	$x = -\frac{1+\Delta}{4a}$
Asse di simmetria	$y = -\frac{b}{2a}$
Tangente in un punto	$\frac{x+x_0}{2} = ayy_0 + b\frac{y+y_0}{2} + c$

Parabole di vertice $V(x_V, y_V)$

$$y - y_V = a(x - x_V)^2$$

Area di un segmento parabolico



$$\mathscr{A}(\mathscr{F}) = \frac{2}{3}\overline{AB} \cdot \overline{AH}$$

E ovviamente l'area esterna alla curva sarebbe

$$\mathscr{A}(\mathscr{F}') = \frac{1}{3}\overline{AB} \cdot \overline{AH}$$

Formule di sdoppiamento

Le formule di sdoppiamento servono per determinare le tangenti in un punto $P(x_0, y_0)$.
Se $d \| y$

$$\frac{y+y_0}{2} = axx_0 + b\frac{x+x_0}{2} + c$$

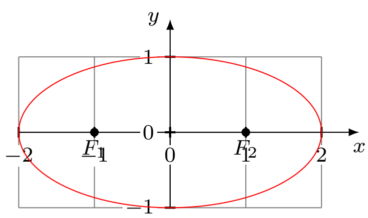
Se $d \| x$

$$\frac{x+x_0}{2} = ayy_0 + b\frac{y+y_0}{2} + c$$

Coefficiente angolare della tangente

$$m = \frac{1}{2ay_0 + b} = 2ax_0 + b$$

Ellisse



Un'ellissi ha due assi, uno maggiore uno minore. Loro semilunghezze (quindi i semi-assi) si denominano a (che contiene i fuochi) e b.
I fuochi sono i due punti tali che preso un punto $P \in \mathscr{E}$, $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$.

$$\mathscr{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Tra i semi-assi vige la seguente proprietà

$$a^2 - c^2 = b^2$$

e quindi

$$c = \begin{cases} a^2 - b^2, & \text{se } a > b \\ b^2 - a^2, & \text{se } a < b \end{cases}$$

Eccentricità

L'eccentricità è lo schiacciamento dell'ellisse sull'asse maggiore. È un valore compreso tra 0 e 1.
Se $a > b$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Se $b > a$

$$e = \frac{c}{b} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$$

Area dell'ellisse

$$\mathscr{A}(\mathscr{E}) = ab\pi$$

Tangenti all'ellisse

Per trovare la tangente all'esllise abbiamo due modi:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

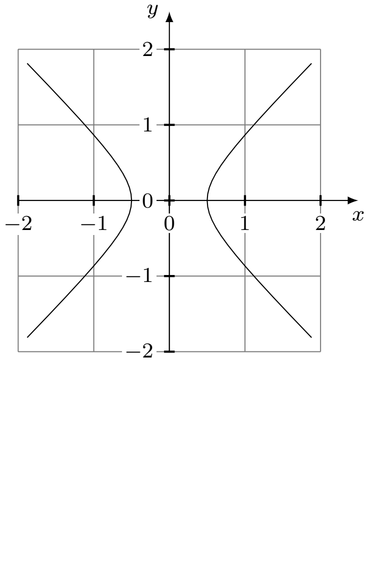
oppure fare il sistema tra la retta generica per P e fare in modo che il discriminante si annulli:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases} \rightarrow$$

$$\frac{\Delta}{4} = a^4 m^2 q^2 - a^2(q^2 - b^2)(b^2 + a^2 m^2) = 0$$

Il vantaggio di questo secondo metodo è che può anche trovare le rette secanti ed esterne all'ellisse (rispettivamente con $\frac{\Delta}{4} > 0$ e $\frac{\Delta}{4} < 0$). È sicuramente più laborioso e difficile da ricordare.

Iperbole



L'iperbole può essere descritta sia anlaliticamente sia in modo parametrico con le funzioni cosh e sinh.
I fuochi sono i due punti tali che per un punto $P \in \mathscr{I}$, $|\overline{PF_1} - \overline{PF_1}| = 2a$.
L'equazione dell'iperbole con i fuochi su x è

$$\mathscr{I} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Quella con i fuochi su y è

$$\mathscr{I} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

Tra i parametri a e b vige che $a < c$ e $c^2 = a^2 + b^2$.

Asintoti

Gli asintoti sono le rette che l'iperbole tende a raggiungere senza mai toccare

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

Eccentricità

L'eccentricità dell'iperbole è il rapporto

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

se l'iperbole ha i fuochi su x,

$$e = \frac{c}{b} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}$$

altrimenti. Si noti anche che $e > 1$ per ogni iperbole.

Iperbole equilatera

Se $a = b$, l'iperbole si definisce equilatera e le equazioni diventano

$$x^2 - y^2 = a^2$$

se $F \in x$,

$$y^2 - x^2 = a^2$$

se $F \in y$.
Questo comporta che $c = a\sqrt{2}$ e che $e = \sqrt{2}$.

Può anche essere descritta l'iperbole in base agli asintoti e in tal caso diventa

$$xy = k$$

Formule di sdoppiamento

Vengono ora riportate le formule di sdoppiamento che cambiano in base all'equazione dell'iperbole

Equazione	Tangente
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$	$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = -1$
$x^2 - y^2 = a^2$	$xx_0 - yy_0 = a^2$
$x^2 - y^2 = -a^2$	$xx_0 - yy_0 = -a^2$
$xy = k$	$\frac{xy_0 + x_0 y}{2} - k = 0$

Iperbole equilatera traslata

Si trova molto spesso una versione traslata di un'iperbole. Questa è la sua generale forma

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

E gli asintoti sono

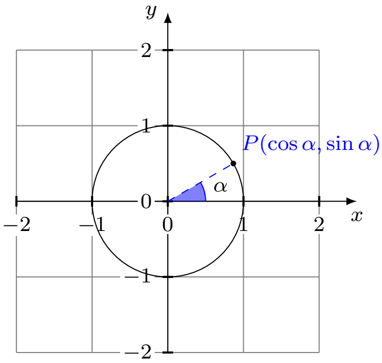
$$x = -\frac{d}{c} \qquad y = \frac{a}{c}$$

con il centro di simmetria

$$O\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$$

Goniometria

La gonioetria si incentra tutta sulla *circonferenza goniometrica* che non è altro che una circonferenza di centro $O(0;0)$ e di raggio $r = 1$.
Per convenzione, gli angoli vengono definiti a partire dall'asse x e si definiscono positivi quando proseguono in senso antiorario. Si noti che $2\pi = 360°$.



Già nella figura identifichiamo le due funzioni fondamentali della goniometria: cos e sin. Esse, numericamente, rappresentano rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del punto P al variare di α.
Seno e coseno non sono le uniche funzioni goniometriche, esistono infatti anche

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$
$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Da notare che spesso csc si trova anche scritto nella forma più estesa cosec.
sin e cos rappresentano anche in un triangolo rettangolo

$$\cos\alpha = \frac{\text{Lunghezza cateto adiacente}}{\text{Lunghezza ipotenusa}}$$
$$\sin\alpha = \frac{\text{Lunghezza cateto opposto}}{\text{Lunghezza ipotenusa}}$$

Per gli esercizi si vada qui.

Angoli particolari

Seno e coseno sono funzioni periodiche, ovvero che il loro valore sta all'interno di un insieme e si ripete con un certo periodo.
Gli angoli particolari principali sono

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Come si può notare ricordarli è piuttosto semplice: $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{6}$ sono gli angoli di un triangolo equilatero, $\frac{\pi}{4}$ è la diagonale di un quadrato.

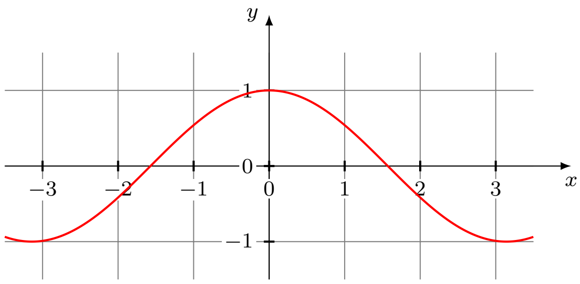
Relazione fondamentale

La relazione fondamentale è quella che permetterà di trovare molte delle formule successive. Essa è

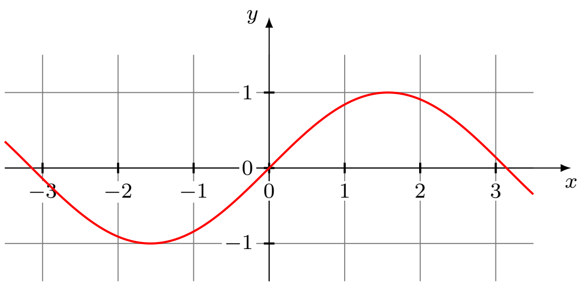
$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Grafico delle funzioni

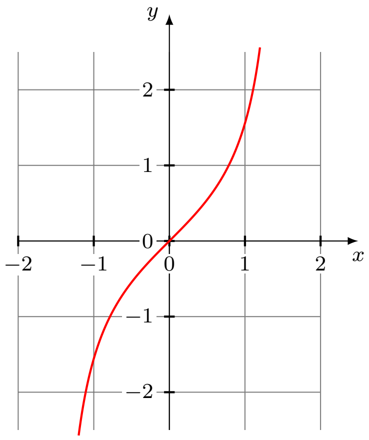
$\cos\alpha$



$\sin\alpha$



$\tan\alpha$



Funzioni inverse

Ovviamente se da un angolo possiamo ottenere un numero, possiamo fare anche il contrario. Per indicare le funzioni inverse abbiamo due possibilità

1. Scrivere $f^{-1}(x)$
2. Dare un nuovo nome alla funzione

Nelle calcolatrici è molto più comune trovare $\sin^{-1}$ e gli altri però non sono precisi e quindi sarebbe da preferire arcsin o asin per brevità. Il motivo è che se

$$f:\ A \mapsto B,\ f^{-1}:\ B \mapsto A$$

però per le funzioni goniometriche questo non accade infatti

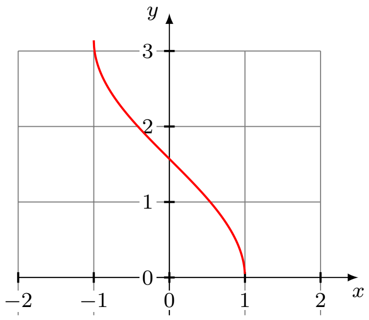
$$\sin x:\ \mathbb{R} \mapsto [-1,+1] \qquad \cos x:\ \mathbb{R} \mapsto [-1,1]$$

quando però

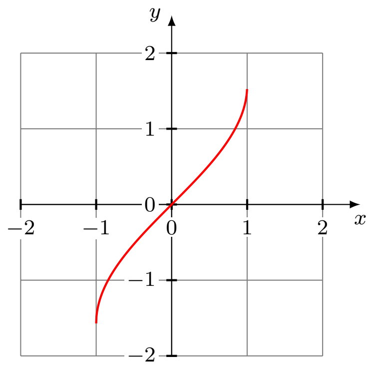
$$\arcsin x:\ [-1,1] \mapsto [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \qquad \arccos:\ [-1,1] \mapsto [0,\pi]$$

I grafici sono i seguenti

$\arccos x$



$\arcsin x$



Formule goniometriche

Le formule goniometriche permettono di pasare da una funzione ad un'altra. Una delle caratteristiche più importanti è l'esistenza dei così denominati **angoli associati**. Essi sono angoli particolari che assumono valori facili da scambiare e ricordare. Essi sono

$$\begin{aligned}
\cos(\pi \pm x) &= -\cos x & \cos(-x) &= \cos x\\
\sin(\pi \pm x) &= \mp\sin x & \sin(-x) &= -\sin x\\
\tan(\pi \pm x) &= \pm\tan x & \tan(-x) &= -\tan x
\end{aligned}$$

In associazione a questi che sono i più comuni, sono anche presenti i seguenti

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) &= \mp\sin x & \cos\left(\frac{3}{2}\pi \pm x\right) &= \pm\sin x\\
\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) &= \pm\cos x & \sin\left(\frac{3}{2}\pi \pm x\right) &= -\cos x\\
\tan\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) &= \mp\cot x & \tan\left(\frac{3}{2}\pi \pm x\right) &= \mp\cot x
\end{aligned}$$

Si presti molta attenzione ai segni in quanto è molto facile confondersi.

Addizione e sottrazione

$$\begin{aligned}
\cos(\gamma \pm \theta) &= \cos\gamma\cos\theta \mp \sin\gamma\sin\theta\\
\sin(\gamma \pm \theta) &= \sin\gamma\cos\theta \pm \cos\gamma\sin\theta\\
\tan(\gamma \pm \theta) &= \frac{\tan\gamma \pm \tan\theta}{1 \mp \tan\gamma\tan\theta}
\end{aligned}$$

Duplicazione

Cercare come fare delle linee al posto delle graffe

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \qquad \cos 2x = \begin{cases}\cos^2 x - \sin^2 x\\ 1 - 2\sin^2 x\\ 2\cos^2 x - 1\end{cases}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \qquad \cot 2 = \frac{\cot^2 -1}{2\cot x}$$

Bisezione

$$\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\qquad \cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$
$$\tan\frac{x}{2}=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\\ \dfrac{1-\cos x}{\sin x}\end{cases}\qquad \cot\frac{x}{2}=\begin{cases}\dfrac{1+\cos x}{\sin x}\\ \dfrac{\sin x}{1-\cos x}\end{cases}$$

Il segno nella prima riga è da seglersi $+$ se $\sin\frac{x}{2}\geqslant 0 \vee \cos\frac{x}{2}\geqslant 0$, $-$ altrimenti.

Parametriche

Per queste formule poniamo

$$t=\tan\frac{x}{2}$$

per comodità.

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\tan x=\frac{2t}{1-t^2}\qquad \cot x=\frac{1-t^2}{2t}$$

Prostaferesi

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{q}\sin\frac{p-q}{2}$$

Werner

$$\cos\gamma\cos\theta=\frac{1}{2}[\cos(\gamma+\theta)+\cos(\gamma-\theta)]$$
$$\cos\gamma\sin\theta=\frac{1}{2}[\sin(\gamma+\theta)-\sin(\gamma-\theta)]$$
$$\sin\gamma\sin\theta=\frac{1}{2}[\cos(\gamma-\theta)-\cos(\gamma+\theta)]$$

Equazioni goniometriche

Si definisce un'equazione goniometrica una qualsiasi equazione che abbia almeno una funzione goniometrica e che ha soluzioni solo per particolari angoli.

$\sin x=m$

$$x=\arcsin m+2k\pi \vee x=\arcsin m+2k\pi-\pi$$

$\cos x=m$

$$x=\pm\arccos m+2k\pi$$

$\tan x=m$

$$x=\arctan x+k\pi$$

Equazioni lineari

Le equazioni lineari vengono così definite perché sono simili alla forma di una retta esplicita.

$$a\sin x+b\cos x+c=0$$

La risoluzione di questa può essere semplice per $b=0\vee a=0$ in quanto si ritorna alle forme precedenti. Se invece $a\neq 0\wedge b\neq 0$ si hanno due strade:

1. metodo algebrico;
2. metodo grafico;

Il metodo algebrico è molto lungo e generalmente sconsigliato. In generale si sfrutta la parametrizzazione di sin e cos in $\tan\frac{x}{2}$.
Il metodo grafico consiste nel porre

$$\cos x=X \text{ e } \sin x=Y$$

e poi risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases}aY+bX+c=0\\ X^2+Y^2=1\end{cases}$$

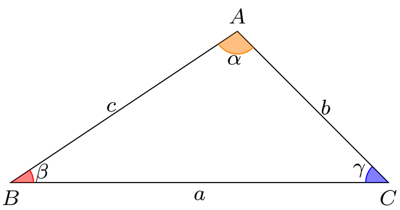
Equazioni omogenee

Si dicono omogenee se tutti i suoi elementi sono dello stesso grado. Per risolvere queste equazioni in questa forma, abbiamo varie strade

- Se **è presente il termine di grado n in** $\sin x$, si divide tutto per $\cos^n x\neq 0$ ottenendo un'equazione di grado n in $\tan x$ equivalente alla data;
- Se **è presente il termine di grado n in** $\cos x$, si divide tutto per $\sin^n x\neq 0$ ottenendo un'equazione di grado n in $\cot x$ equivalente alla data;
- Se **nessuno dei precedenti è valido**, si raccolga a fattore comune;

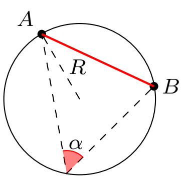
Teoremi sui triangoli

Area di un triangolo qualsiasi



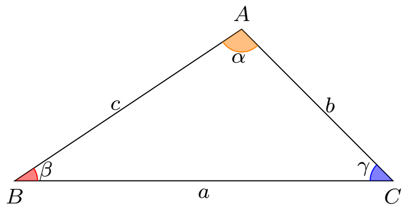
$$\mathscr{A}=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

Teorema della corda



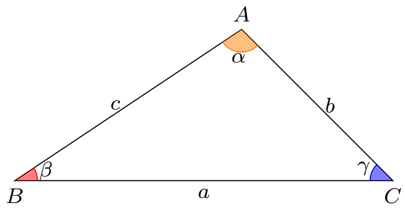
$$\overline{AB}=2R\sin\alpha$$

Teorema dei seni



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Teoremi di Carnot



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Logaritmi

Il logaritmo è la seconda funzione inversa della potenza, essendo la prima la radice.
Presa un'equazione del tipo

$$a^x = b$$

le soluzioni di x si esprimono come

$$x = \log_a b$$

quindi si ha anche che

$$a^{\log_a b} = b$$

Si legge "*logaritmo in base a di b*". Perché un logaritmo esista è necessario che $a > 0 \wedge a \neq 1 \wedge b > 0$.
Quando si vede scritto log si intende $\log_{10}$, quando invece è presente ln si intende $\log_e$.
Per gli esercizi si vada qui.

Teoremi sui logaritmi

Logaritmo del prodotto

$$\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

Logaritmo del quoziente

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$$

Logaritmo di una potenza

$$\log_a b^k = k \log_a b$$

Cambiamento di base

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

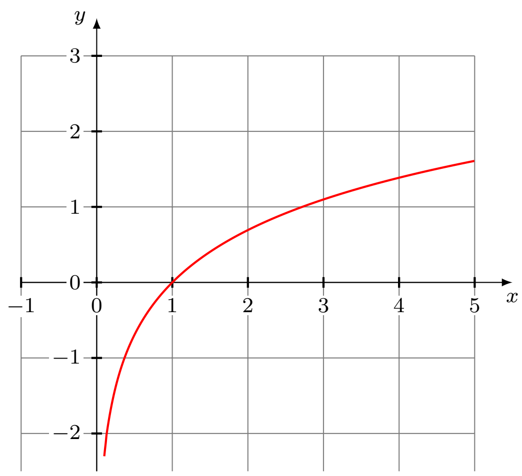
Da questa particolare formula si nota anche che

$$\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$$

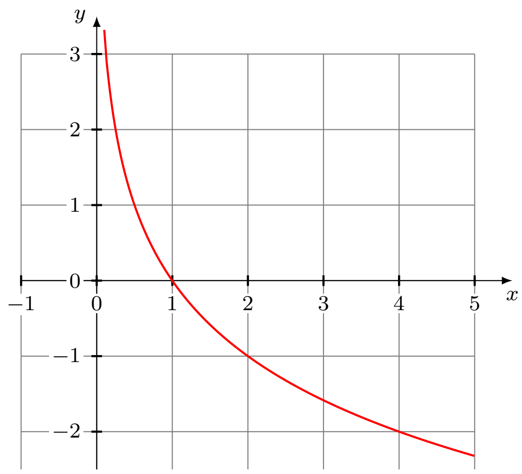
Grafici dei logaritmi

I logaritmi hanno due grafici dipendentemente al valore della base

$\log_a c$ **con** $a > 0$

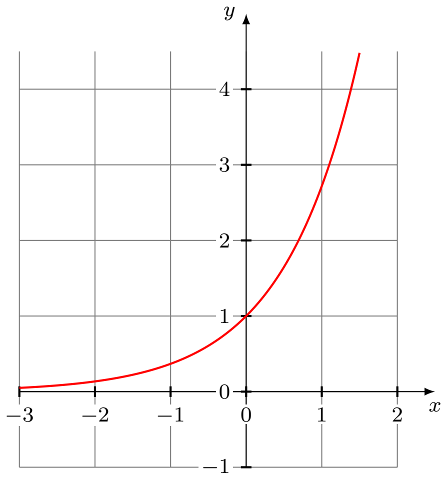


$\log_a x$ **con** $0 < a < 1$

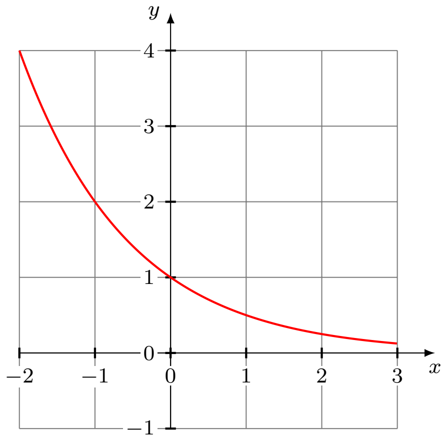


Essendo i logaritmi molto correlati alle funzioni esponenziali, riporto di seguito i loro grafici

a^x **con** $a > 1$



a^x **con** $0 < a < 1$



Progressioni

Le progressioni sono una serie di numeri in modo che tra due numeri successivi ci sia una costante relazione. Si dividono in **aritmetiche** e **geometriche**.

Progressioni Aritmetiche

Le progressioni aritmetiche hanno la caratteristica che la differenza tra due termini successivi è sempre costante. Questa differenza si chiama *ragione*.

$$a_n - a_{n-1} = d \quad d = \frac{a_n - 1}{n - 1}$$

dove d è la ragione e a_n è un elemento qualunque di una progressione.

n-esimo elemento

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

s-esimo elemento riferito ad un r-esimo elemento

Questa è considerabile una generalizzazione della formula precedente.

$$a_s = a_r + d(s-r)$$

Proprietà di simmetria

$$a_1 + a_n = a_{k+1} + a_{n-k} \qquad \forall k$$

Somma di una progressione

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Progressioni Geometriche

Le progressioni geometriche hanno la caratteristica che il rapporto tra due successivi elementi è costante. Questo rapporto si chiama *ragione*

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \quad q : \begin{cases} q = \sqrt[n-1]{\dfrac{a_n}{a_1}} & \text{se concordi, per } n > 2 \\ q = -\sqrt[n-1]{\left|\dfrac{a_n}{a_1}\right|} & \text{se discordi} \end{cases}$$

dove q è la ragione e a_n è un elemento qualunque di una progressione.

n-esimo elemento

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

s-esimo elemento riferito ad un r-esimo elemento

Questa è considerabile una generalizzazione della formula precedente.

$$a_s = a_s \cdot q^{s-r}$$

Proprietà di simmetria

$$a_1 \cdot a_n = a_{k-1} \cdot a_{n-k}$$

Somma di una progressione

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Calcolo combinatorio

Il calcolo combinatorio descrive i diversi modi di disporre e organizzare un finito numero di oggetti.

Fattoriale

Un concetto fondamentale del calcolo combinatorio è quello di fattoriale. Esso è definito come

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = \prod_1^n n$$

Disposizioni

Due disposizioni si considerano distinte se almeno un elemento è diverso e non tutti devono essere presenti. L'ordine è importante.

Semplici

$$\mathscr{D}_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

Con ripetizione

$$\mathscr{D}'_{n,k} = n^k$$

Permutazioni

Due permutazioni si considerano distine se almeno un elemento è diverso.

Semplici

$$\mathscr{P}_n = \mathscr{D}_{n,n} = n!$$

Con ripetizione

$$\mathscr{P}_n^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}$$

dove α_n identifica il numero di ripetizioni per il relativo oggetto.

Combinazioni

Le combinazioni rappresentano tutti i gruppi che si possono formare da n elementi considerando distinti due gruppi se almeno un elemento è diverso.

Semplici

$$\mathscr{C}_{n,k} = \frac{\mathscr{D}_{n,k}}{k!} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Con ripetizione

$$\mathscr{C}'_{n,k} = \binom{n+k+1}{k}$$

Proprietà del coefficiente binomiale

Simmetria

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Per $1 \leqslant k \leqslant n-1$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Per $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{k}{k-1} + \binom{k-1}{k-1}$$

Binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

da cui deriva

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Schema riassuntivo

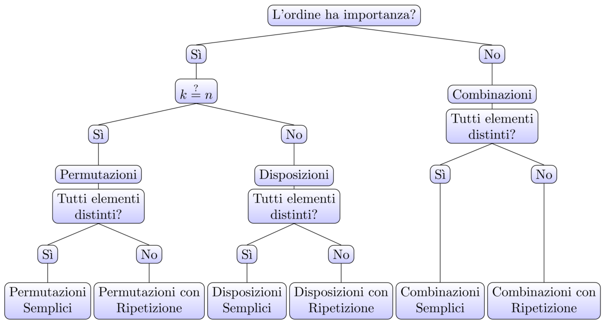


Figura 1: Si risponda a ciascuna domanda per sapere che tipo di situazione il problema pone

Esercizi

Questa sezione è dedicata ad alcuni esercizi con relativa risoluzione e spiegazione. Il suo scopo è quello di chiarire i concetti teorici con esempi pratici.

Generale

Prodotti notevoli

Esercizio 1 Si scompongano il seguenti polinomi usando i prodotti notevoli.

$$18x^3 - 4 - 8x + 9x^2 \tag{1}$$

$$a^2x^2 - a^2y^2 - b^2x^2 + b^2y^2 \tag{2}$$

Per semplificare (1) innanzitutto riscriviamo il polinomio in modo decrescente

$$18x^3 + 9x^2 - 8x - 4$$

Ora possiamo notare che i primi due elementi sono semplificabili, così come anche i secondi due per uno stesso fattore.

$$\underbrace{18x^3 + 9x^2}_{9x^2(2x+1)} \overbrace{-8x - 4}^{-4(2x+1)} = (9x^2 - 4)(2x+1)$$

Ora abbiamo solo un altro prodotto da semplificare. Ricordando che $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ possiamo espandere la prima parentesi

$$\boxed{(3x-2)(3x+2)(2x+1)}$$

Per semplificare (2) possiamo raccogliere i coefficienti di x e y

$$a^2x^2 - a^2y^2 - b^2x^2 + b^2y^2 = x^2(a^2 - b^2) + y^2(b^2 - a^2)$$

Ora però, se si guardano attentamente i coefficienti, si vede che sono semplicemente opposti di segno, quindi possiamo portare fuori il meno dal secondo e renderli uguali

$$x^2(a^2-b^2)+y^2(b^2-a^2) = x^2(a^2-b^2)-y^2(a^2-b^2) = (x^2-y^2)(a^2-b^2)$$

Ricordando che $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ possiamo espandere e concludere

$$(x^2 - y^2)(a^2 - b^2) = \boxed{(x-y)(x+y)(a-b)(a+b)}$$

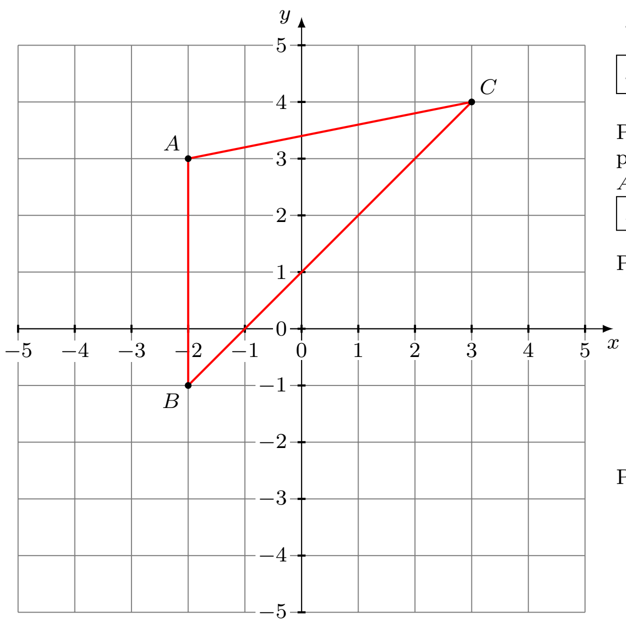
Geometria Analitica

Rette

Esercizio 1 Dato il triangolo di vertici $A(-2, 3)$, $B(-2, -1)$ e $C(3, 4)$, determinare:

1. le equazioni dei lati;
2. il perimetro e l'area del triangolo
3. detta t la retta passante per C e perpendicolare alla retta BC e detto D il punto d'intersezione di t con l'asse x, l'area del quadrilatero ACDB;
4. i punti della retta $y = 2x$ che hanno distanza uguale a 3 dalla retta AB.

Come in ogni esercizio di geometria, partiamo dal disegno. Lo miglioreremo man mano che andiamo avanti.



Per i primi due punti, questo è tutto quello che ci serve.
Per il punto 1, possiamo semplicemente usare la formula per la retta passante per due punti. Per convenienza, denominiamo le rette in base ai vertici che attraversano.
Per la retta AB è immediato: si nota che hanno la stessa ascissa, quindi la retta passante per i due punti è solo $\boxed{AB : x = -2}$.

Per AC:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \to \frac{y-3}{4-3} = \frac{x-(-2)}{3-(-2)} \to$$
$$\frac{y-3}{1} = \frac{x+2}{5} \to y = \frac{x+2}{5} + 3$$
$$y = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5} + \frac{15}{5} \to \boxed{AC : y = \frac{1}{5}x + \frac{17}{5}}$$

Infine per BC

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \to \frac{y+1}{4+1} = \frac{x-(-2)}{3+2}$$
$$\frac{y+1}{5} = \frac{x+2}{5} \to \boxed{BC : y = x + 1}$$

Ci avviamo ora al punto 2 e per l'area possiamo usare la matrice

$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Che poi si semplifica usando Sarrus in

$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 + y_1x_3 + x_2y_3 - x_3y_2 - y_3x_1 - x_2y_1\right|$$

E sostituendo otteniamo

$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2}\left|-2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 3\right|$$
$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2}\left|-2 + 9 - 8 - 3 + 8 + 6\right|$$
$$\boxed{\mathscr{A}(ABC) = 10}$$

Per trovare il perimetro, possiamo usare la distanza tra due punti e trovare tutte le lunghezze.
AB è immediato in quanto hanno la stessa ascissa. $\boxed{AB = 3 + 1 = 4}$.

Per trovare AC

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \to$$
$$AB = \sqrt{(3+2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{5^2 + 1^2}$$
$$= \sqrt{25 + 1} = \boxed{\sqrt{26}}$$

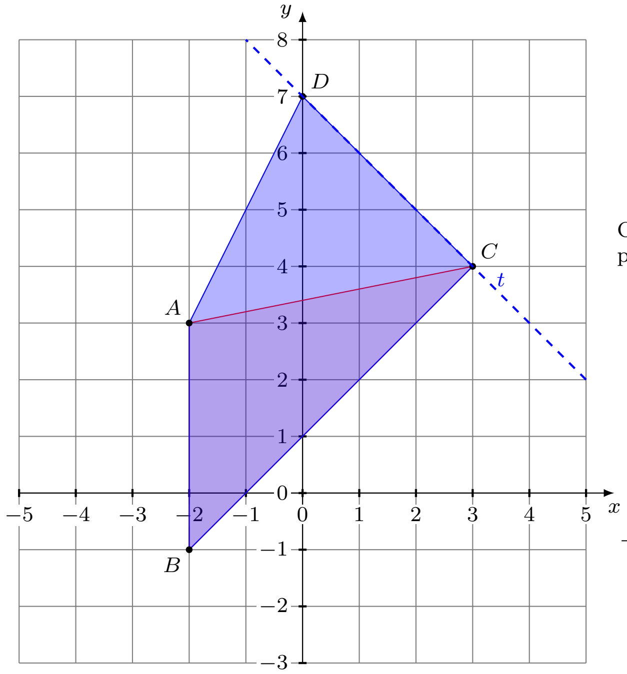
Per trovare BC

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \to$$
$$BC = \sqrt{(3+2)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 25}$$
$$= \sqrt{50} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \boxed{5\sqrt{2}}$$

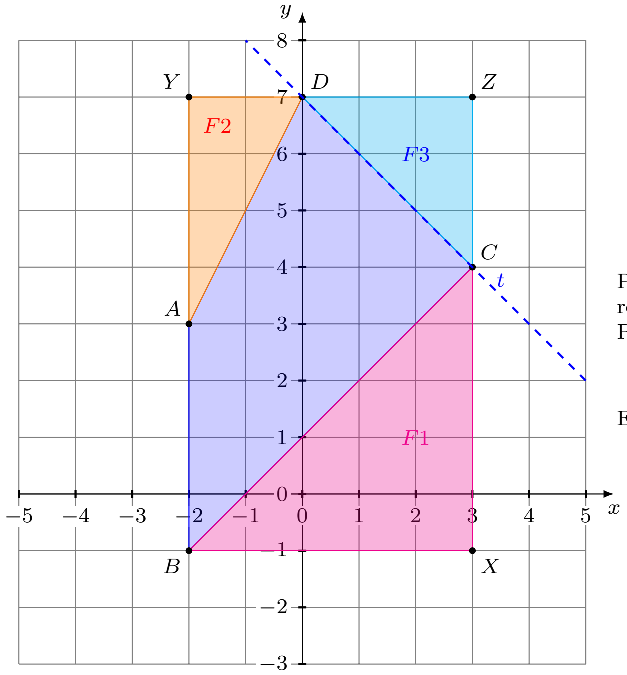
E ora non resta che sommare

$$2p = AB + AC + BC = 4 + \sqrt{26} + 5\sqrt{2}$$

Per il punto 3 aggiorniamo il disegno



Noi dobbiamo calcolare l'area di $ABCD$. Abbiamo varie strade che possiamo seguire. Ne propongo una che può essere usata per praticamente ogni figura. Il tutto si basa su trovare l'area del rettangolo che contiene la figura e togliere dei triangoli che possiamo individuare. Nel nostro caso



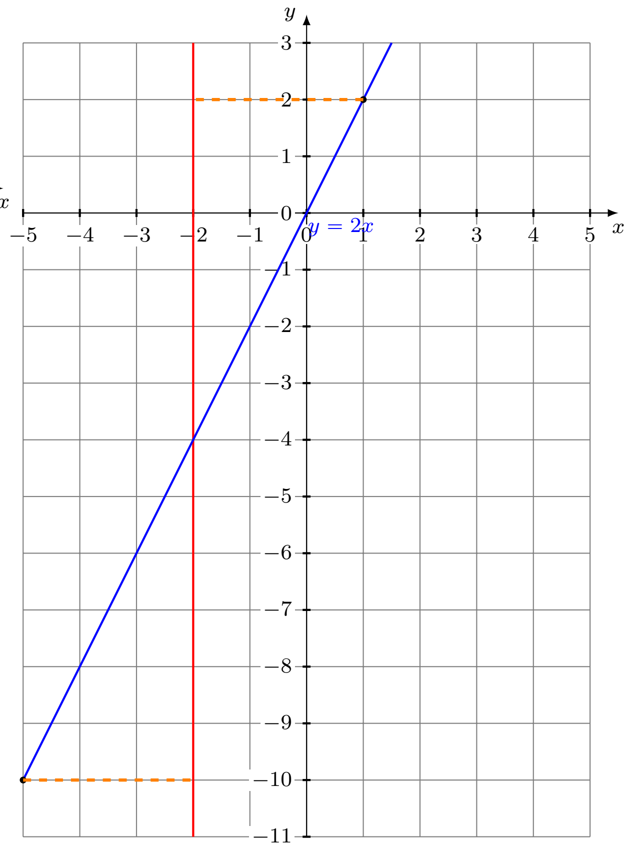
vediamo che possiamo trovare l'area facendo

$$\mathscr{A}(YZXB) - \mathscr{A}(F1) - \mathscr{A}(F2) - \mathscr{A}(F3)$$

o più semplicemente, sostituendo

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABCD) &= BX \cdot BY - \overbrace{\frac{5^2}{2}}^{\mathscr{A}(F1)} - \overbrace{\frac{2\cdot 4}{2}}^{\mathscr{A}(F2)} - \overbrace{\frac{3^2}{2}}^{\mathscr{A}(F3)} \\ &= 5 \cdot 8 - 12.5 - 4 - 4.5 = 40 - 21 = 19\end{aligned}$$

Ora per **l'ultimo punto** possiamo semplificare il disegno e pulirlo un po'.



Per prima cosa dobbiamo trasformare in forma esplicita la retta $x = -2$ per poter usare la formula della distanza Punto-Retta.

$$r : x + 2 = 0$$

E ora possiamo scrivere la formula della distanza

$$d = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \to 3 = \frac{|x+2|}{\sqrt{1^2}}$$

$$3 = \frac{|x+2|}{\sqrt{1}} \to 3 \cdot 1 = |x+2|$$

$$\pm 3 = x + 2 \to \begin{cases} x + 5 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = -5 \\ x = 1 \end{cases}$$

Abbiamo le ascisse di intersezione con la retta $y = 2x$. Ora possiamo sostituire e trovare y.

$$\begin{cases} y = -5 \cdot 2 \\ y = 1 \cdot 2 \end{cases} \to \boxed{\begin{cases} P_1(-5, -10) \\ P_2(1, 2) \end{cases}}$$

Fasci di rette

Esercizio 1 Dopo aver verificato che l'equazione

$$(2k+1)x - 4ky + 3 + 2k = 0 \qquad (k \in \mathbb{R})$$

rappresenta un fascio proprio di rette, determinare:

1. il centro C del fascio;
2. la retta r_1 del fascio perpendicolare alla bisettrice del 2° e 3° quadrante; detto H il loro punto di incontro, trovare poi l'area del triangolo CHO, essendo O l'orgine degli assi;
3. le rette del fascio che intersecano il segmento OH;
4. le bisettrici degli angoli formati dalle rette CO e CH.

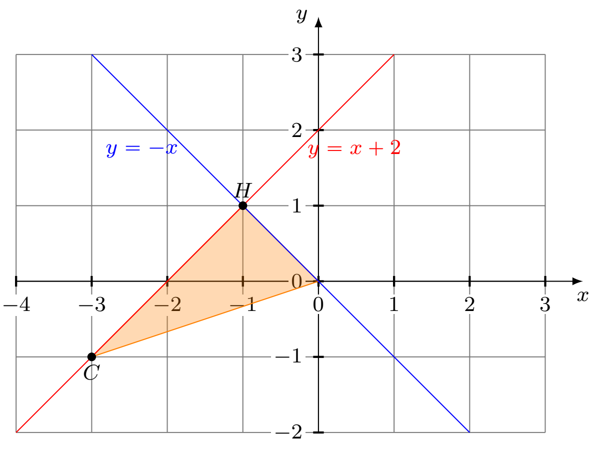
Prima di avere il disegno, dobbiamo avere qualcosa da disegnare. Se disegnassimo l'intero fascio sarebbe come colorare tutto il piano.
Per il punto 1 dobbiamo mettere a sistema le due rette generatrici. Nella forma attuale, le due equazioni non sono facilmente riconoscibili, quindi raccogliamo k così da isolare le due rette

$$(2k+1)x - 4ky + 3 + 2k = 0 \to 2kx + x - 4ky + 3 + 2k = 0 \to$$
$$k\underbrace{(2x - 4y + 2)}_{\text{Generatrice 1}} + \underbrace{x+3}_{\text{Generatrice 2}} = 0$$

Avendo ora questa forma, possiamo evidentemente vedere che effettivamente si tratta di un fascio proprio di rette.
Come trovare il centro del fascio? Avendo le due generatrici, le mettiamo a sistema e troviamo la loro intersezione

$$\begin{cases} 2x - 4y + 2 = 0 \\ x = -3 \end{cases} \to \begin{cases} -x - 4y + 2 = 0 \\ x = -3 \end{cases} \to$$
$$\begin{cases} \cancel{-4}y = \cancel{4}^{\,-1} \\ x = -3 \end{cases} \to \boxed{\begin{cases} y = -1 \\ x = -3 \end{cases}}$$

Per il punto 2 facciamo il disegno



Ho già inserito le cose che ora andiamo a trovare.
Innanzitutto sappiamo che la bisettrice del 2° e 3° quadrante è $y = -x$, quindi sappiamo che la m della perpendicolare deve essere uguale a 1. Sappiamo anche che fa parte del fascio quindi passa per $C(-3,-1)$.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \to y + 1 = x + 3 \to \boxed{y = x + 2}$$

E ora ci troviamo H, ovvero il punto di intersezione

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x \end{cases} \to \begin{cases} -x = x + 2 \\ y = -x \end{cases} \to \boxed{\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}}$$

Ora possiamo trovare l'area del triangolo

$$\mathscr{A}(CHO) = \frac{1}{2}|x_1y_2 + y_1x_3 + x_2y_3 - x_3y_2 - y_3x_1 - x_2y_1| \to$$
$$\mathscr{A}(CHO) = \frac{1}{2}|x_1y_2 + \cancel{y_1x_3} + \cancel{x_2y_3} - \cancel{x_3y_2} - \cancel{y_3x_1} - x_2y_1| \to$$
$$\mathscr{A}(CHO) = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1| \to \mathscr{A}(CHO) = \frac{1}{2}|-3-1| =$$
$$\frac{1}{2}|-4| \to \mathscr{A}(CHO) = \frac{1}{2}\cdot 4 = \boxed{2}$$

Il punto 3, richiede di trovare i k per cui una retta del fascio passi in mezzo al segmento OH. La prima cosa da fare è quindi trovare i k degli "estremi" O e H.

$$k_O = -\frac{a_1x_O + b_1y_O + c_1}{ax_O + by_O + c} \to k_O = -\frac{c_1}{c} = -\frac{3}{2}$$

$$k_H = -\frac{a_1x_H + b_1y_H + c_1}{ax_H + by_H + c} \to k_H = -\frac{-1+0+3}{-2-4+2} = \frac{1}{2}$$

Ora sapendo che la retta esclusa attraversa anch'essa il segmento (per dimostrarlo basta semplicemente disegnarla), deduciamo che ai lati della esclusa ci siano le rette per $k \to \pm\infty$, ovvero man mano che ci si avvicina alla retta esclusa più ci si avvicina all'infinito. Questo ci porta a trovare l'intervallo che è

$$\boxed{k \leqslant -\frac{3}{2} \vee k \geqslant \frac{1}{2}}$$

Infine, il **punto 4** richiede un po' di ragionamento. Una bisettrice è la retta passante per due punti equidistanti alle rette dell'angolo. Per prima cosa quindi, definiamo $P(x,y)$ un punto del piano in modo che sia $d_{P,CO} = d_{P,CH}$. Per prima cosa dunque dobbiamo trovare le rette che passano per CO e CH.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \to \frac{y+1}{1+1} = \frac{x+3}{-1+3} \to$$
$$y + 1 = x + 3 \to CO:\ x - y + 2 = 0$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \to \frac{y+1}{1} = \frac{x+3}{3} \to$$
$$3y + 3 = x + 3 \to CH:\ -x + 3y = 0$$

E ora possiamo scrivere le formule per le distanze

$$\frac{|x - y + 2|}{1} = \frac{|-x + 3y|}{\sqrt{10}} \to$$
$$\sqrt{10}(|x - y + 2|) = |-x + 3y| \to$$
$$\sqrt{10}x - \sqrt{10}y + 2\sqrt{10} = \pm(-x + 3y) \to$$
$$\begin{cases} \sqrt{10}x - \sqrt{10}y + 2\sqrt{10} = -x + 3y \\ \sqrt{10}x - \sqrt{10}y + 2\sqrt{10} = x - 3y \end{cases} \to$$
$$\begin{cases} x(\sqrt{10}+1) - y(\sqrt{10}+3) + 2\sqrt{10} \\ x(\sqrt{10}-1) - y(\sqrt{10}-3) + 2\sqrt{10} \end{cases} \to$$
$$\boxed{x(\sqrt{10}\pm 1) - y(\sqrt{10}\pm 3) + 2\sqrt{10}}$$

Circonferanza

Esercizio 1 Determinare l'equazione della circonferenza passante per $A(-2,2)$ e $B(4,-4)$ e avente il centro sulla retta $x+2y-8=0$, e le equazioni delle rette t_1 e t_2 passanti per $H(0,8)$ e tangenti alla circonferenza. detta poi t_1 la tangente con coefficiente angolare positivo, determinare le rette ad essa perpendicolari che formano con gli assi cartesiani un triangolo di area $\frac{54}{5}$. Determinare, inoltre, i punti di t_1 che hanno distanza uguale a $\sqrt{2}$ dalla retta $x+y-1=0$.

Per prima cosa dobbiamo trovare l'equazione della circonferenza $\mathscr{C}$. Come fare? Sappiamo che A e B appartengono alla circonferenza e che il centro appartiene a $x+2y-8=0$. Mettiamo queste informazioni a sistema e risolviamo

$$\begin{cases} 4+4-2a+2b+c=0 \\ 16+16+4a-4b+c=0 \\ -\frac{a}{2}-b-8=0 \end{cases} \to$$

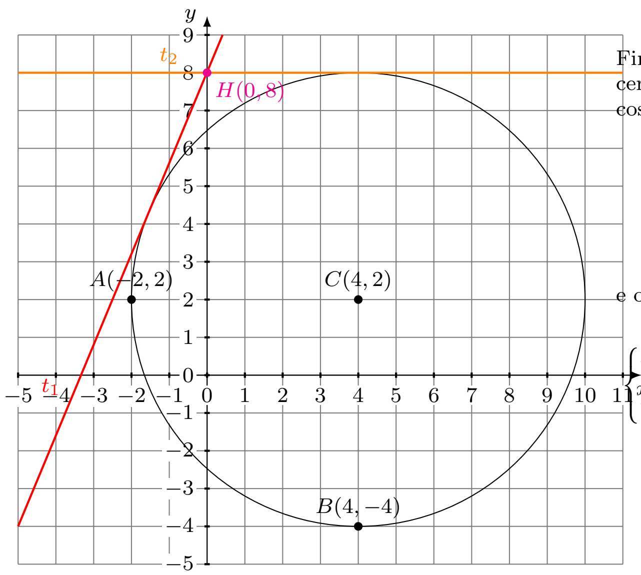
$$\begin{cases} -8+2a-2b=c \\ 32+4a-4b-8+2a-2b=0 \\ -\frac{a}{2}-b-8=0 \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} -8+2a-2b=c \\ \cancelto{4}{24}+\cancelto{1}{6}a-\cancelto{1}{6}b=0 \\ -\frac{a}{2}-b-8=0 \end{cases} \to \begin{cases} -8+2a-2b=c \\ 4+a+\frac{a}{2}+8=0 \\ b=-\frac{a}{2}-8 \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} -8+2a-2b=c \\ \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}a=-\cancelto{8}{12} \\ b=-\frac{a}{2}-8 \end{cases} \to \begin{cases} \cancel{-8}-16\cancel{+8}=c \\ a=-8 \\ b=-\frac{8}{2}-8 \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} c=-16 \\ a=-8 \\ b=-4 \end{cases} \to \boxed{\mathscr{C}: x^2+y^2-8x-4y-16=0}$$

Avendo ora l'equazione possiamo disegnarla.



Per trovare le due tangenti alla circonferenza che passano per H, ci troviamo il fascio di rette che ha H come centro

$$y-y_0=m(x-x_0) \to y-mx-8=0$$

e sappiamo che le tangenti hanno il loro punto di tangenza che dista dal centro esattamente r, quindi

$$\frac{|ax_P+y_P+c_P|}{\sqrt{a^2+b^2}}=d \to \frac{|-4m+2-8|}{\sqrt{1^2+m^2}}=6 \to$$

$$|-4m+2-8|^2=(6\sqrt{1^2+m^2}) \to$$

$$16m^2\cancel{+36}+48m=\cancel{36}+36m^2 \to$$

$$-\cancelto{5}{20}m^2+\cancelto{12}{48}m=0 \to 5m^2-12m=0$$

$$m_{1/2}=\frac{12\pm\sqrt{144+0}}{10} \to \boxed{\begin{cases} m_1=\frac{12}{5} \\ m_2=0 \end{cases}}$$

e le tangenti sono

$$\boxed{t_1: y=\frac{12}{5}x+8 \qquad t_2: y=8}$$

Ora dobbiamo trovare tutte le perpendicolari a t_1 che, con l'interesezione degli assi forma un triangolo di area $\frac{54}{5}$. Per farlo, intanto troviamo le perpendicolari.

$$\mathscr{F}_\perp: y=-\frac{5}{12}x+q$$

E ora possiamo trovare le intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x=0 \\ y=q \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-\frac{12}{5}q \\ y=0 \end{cases}$$

E ora imponiamo che l'area del triangolo formato con gli assi sia uguale a $\frac{54}{5}$

$$\frac{54}{5}=\frac{1}{2}\left|q\cdot-\frac{12}{5}q\right| \to \frac{54}{5}=\frac{6}{5}|q^2| \to 9=q^2 \to q=\pm3$$

quindi le rette cercate sono

$$\boxed{y=-\frac{5}{12}x\pm3}$$

Finalmente possiamo avviarci alla conclusione. Dobbiamo cercare i punti di t_1 che distano $\sqrt{2}$ da $x+y-1$. Per prima cosa quindi, troviamo le rette che distano $\sqrt{2}$ dalla data

$$\frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \to |x+y-1|=2 \to$$

$$\begin{cases} x+y-1=2 \\ x+y-1=-2 \end{cases} \to \begin{cases} x+y-3=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$$

e ora non resta che trovare le intersezioni con t_1

$$\begin{cases} x+y+1=0 \\ y=\frac{12}{5}x+8 \end{cases} \to \begin{cases} x+\frac{12}{5}x+8+1=0 \\ y=\frac{12}{5}x+8 \end{cases} \to \boxed{\begin{cases} x=-\frac{45}{17} \\ y=\frac{76}{17} \end{cases}}$$

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ y=\frac{12}{5}x+8 \end{cases} \to \begin{cases} x+\frac{12}{5}x+5=0 \\ y=\frac{12}{5}x+8 \end{cases} \to \boxed{\begin{cases} x=-\frac{25}{17} \\ y=\frac{76}{17} \end{cases}}$$

Fasci di circonferenze

Esecizio 1 Avendo il fascio

$$x^2 + y^2 - 2(k+1)x - 2ky - 4k + 1 = 0$$

indicare con γ_1 quella il cui centro C appartiene alla retta $3x - y + 5 = 0$. Detti E ed F i punti di intersezione di γ_1 con l'asse y, trovare le equazioni delle tangenti a γ_1 in E ed F; detto inoltre T il loro punto di intersezione, dopo aver dimostrato che il quadrilatero $CETF$ è un quadrato, calcolarne l'area. Determinare inoltre l'equazione della circonfereza d centro T e tangente esternamente a γ_1.

Per prima cosa riordiniamo l'equazione per avere tutti i coefficienti

$$x^2 + y^2 - 2(k+1)x - 2ky - 4k + 1 = 0 \rightarrow$$
$$x^2 + y^2 + x(-2k-2) + y(-2k) + 4k + 1 = 0$$

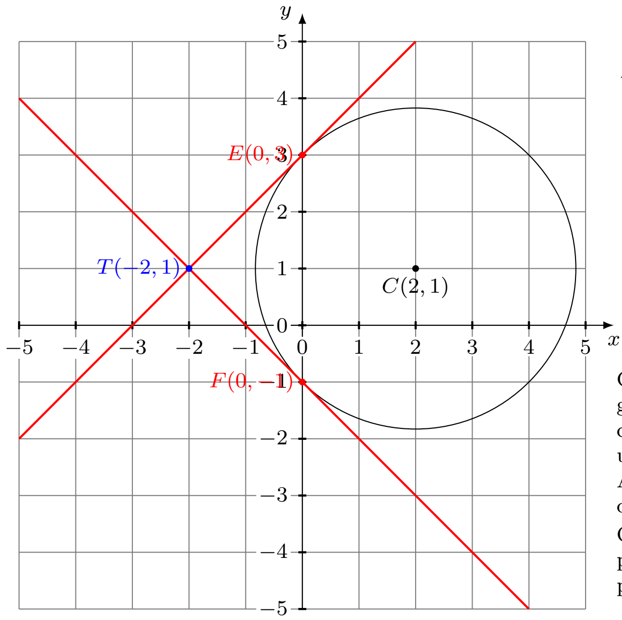
avendo ora i coefficienti, possiamo imporre la condizione che il centro sia un punto della retta

$$3\left(-\frac{a}{2}\right) - \left(-\frac{b}{2}\right) - 5 = 0 \rightarrow 3\frac{2k+2}{2} - k - 5 = 0 \rightarrow$$
$$6k + 6 - 2k - 10 = 0 \rightarrow k = 1$$

e sostituire per ottenere

$$\boxed{\gamma_1 : x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0}$$

Prima di proseguire, disegnamo la circonferenza



Sono già segnati i punti che ora andremo a trovare: E e F ovvero le intersezioni con y.

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \rightarrow y_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = -1 \end{cases}$$

Quindi i due punti sono

$$\boxed{E(0,3) \qquad F(0,-1)}$$

Ora troviamo le tangenti in E ed F.

$$x \cdot x_P + y \cdot y_P + a\frac{x + x_P}{2} + b\frac{y + y_P}{2} + c = 0 \rightarrow$$
$$t_E : x \cdot 0 + y \cdot 3 - 4\frac{x+0}{2} - 2\frac{y+3}{2} - 3 = 0 \rightarrow$$
$$\boxed{-x + y - 3 = 0 \rightarrow y = x + 3}$$

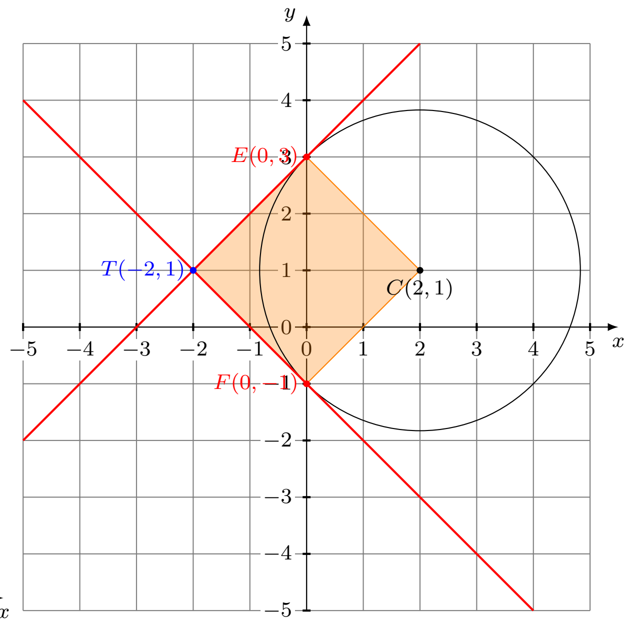
e

$$x \cdot x_P + y \cdot y_P + a\frac{x + x_P}{2} + b\frac{y + y_P}{2} + c = 0 \rightarrow$$
$$t_F : x \cdot 0 + y \cdot (-1) - 4\frac{x+0}{2} - 2\frac{y-1}{2} - 3 = 0 \rightarrow$$
$$\boxed{-x - y - 1 = 0 \rightarrow y = -x - 1}$$

E ora possiamo trovare il punto di intersezione

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x - 1 = x + 3 \\ y = -x - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Aggiorniamo ora il disegno per mettere in luce il quadrato $CETF$



Come possiamo dimostrare che è un quadrato? Proviamo a guardare gli angoli: l'angolo $C\hat{F}T$ e l'angolo $C\hat{E}T$ sono sicuramente retti in quanto sono angoli formati da un raggio e una tangente e per definizione stessa di tangente sono retti. Anche l'angolo $F\hat{T}E$ è retto in quanto i coefficienti angolari delle tangenti sono reciprocamente opposti ($m_1 m_2 = -1$). Ora manca solo l'angolo $E\hat{C}F$ da dimostrare. Possiamo semplicemente guardare il coefficiente angolare della retta che passa tra F e C e vedere che risulta pari a

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow m = \frac{1+1}{2-0} = 1$$

che è esattamente uguale a quello di t_E quindi le due rette sono parallele. Se t_F incide su t_E con un angolo retto, deve per forza incidere con lo stesso angolo anche nelle sue parallele.
Abbiamo dimostrato che ha quattro angoli retti, per dimostrare che è un quadrato basta vedere che due dei lati (che formano un angolo retto) sono uguali in quanto sono raggi. Quindi $CETF$ è un quadrato.

Per trovarne l'area basta elevare alla seconda la lunghezza del raggio

$$r = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - c} \rightarrow r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

E quindi l'area vale

$$\mathscr{A}(CETF) = r^2 \rightarrow \mathscr{A}(CETF) = \sqrt{8}^2 = 8$$

Infine dobbiamo trovare la circonferenza con centro T e tangente esternamente a γ_1. Per farlo abbiamo molti modi, ecco il più semplice. Sappiamo già quanto deve valere il raggio perché tocchi la circonferenza. Deve essere pari a $TC - r_{\gamma_1}$. Quindi

$$r = TC - r_{\gamma_1} \rightarrow r = 4 - 2\sqrt{2}$$

Usando la formula per trovare il raggio possiamo scrivere

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} \rightarrow 4 - 2\sqrt{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$$

Abbiamo 3 variaibli quindi dobbiamo trovare un modo per toglierne 2. a e b sono utilizzate anche nella formula per trovare il centro della circonferenza. Si da il caso che noi abbiamo il centro! Quindi

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} = -2 \\ -\frac{b}{2} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \end{cases}$$

e ora possiamo trovare c

$$4 - 2\sqrt{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} \rightarrow 4 - 2\sqrt{2} = \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{4}{4} - c} \rightarrow$$
$$4 - 2\sqrt{2} = \sqrt{5 - c} \rightarrow 24 - 16\sqrt{2} = 5 - c \rightarrow$$
$$c = 16\sqrt{2} - 19$$

Quindi la nostra circonferenza sarà

$$\boxed{\gamma : x^2 + y^2 + 4x - 2y + 16\sqrt{2} - 19 = 0}$$

Parabola

Esercizio 1 Nel piano xOy determinare

1. l'equazione della parabola $\mathscr{P}_1$ avente asse parallelo all'asse y e passante per $A(2, 0)$, $B(6, 0)$ e $C(0, 6)$;
2. l'area del triangolo ACH essendo H l'ulteriore punto di intersezione di $\mathscr{P}_1$ con la perpendicolare per A alla retta AC;
3. l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo CAH;

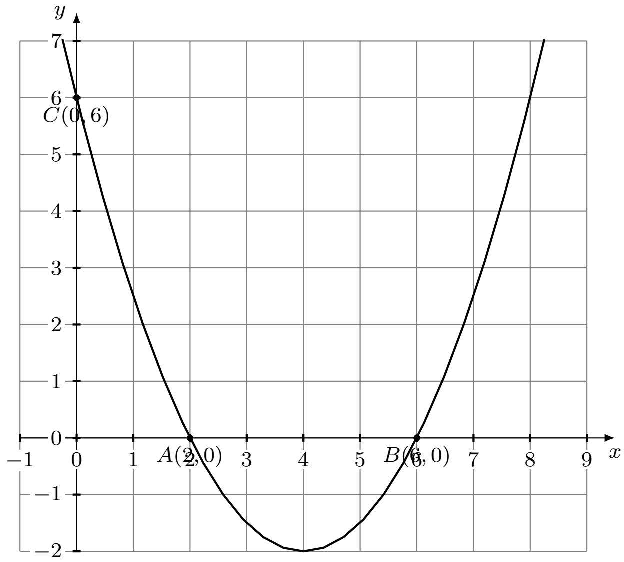
Per trovare l'equazione della parabola, possiamo sfruttare i 3 punti conosciuti e metterli a sistema

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ 36a + 6b + c = 0 \\ c = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{-b-3}{2} \\ \cancel{36}^{18}\frac{-b-3}{\cancel{2}} + 6b + 6 = 0 \\ c = 6 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} a = \frac{-b-3}{2} \\ -18b - 54_6b + 6 = 0 \\ c = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -4 \\ c = 6 \end{cases} \rightarrow$$

$$\boxed{\mathscr{P}_1 : y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6}$$

E per concludere il punto 1 disegnamo il grafico



Il punto 2 richiede qualche passaggio intermedio. Per prima cosa troviamo la retta passante per AC

$$r_{AC} : \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \rightarrow \frac{y}{6} = \frac{x-2}{-2} \rightarrow r_{AC} : y = -3x+6$$

E ora dobbiamo trovare la perpendicolare passante per A.

$$r_{\perp AH} : y = -\frac{1}{m}x+q \rightarrow y = \frac{x}{3}+q \rightarrow 0 = \frac{2}{3}+q \rightarrow r_{\perp AH} : y = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$$

E possiamo trovare H facendo l'intersezione con la parabola $\mathscr{P}_1$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \\ y = \frac{x}{3} - \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \\ y = \frac{x}{3} - \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{3}x - \frac{20}{3} = 0 \rightarrow x_{1/2} = \frac{-\frac{13}{3} \pm \sqrt{\frac{169}{9} - 4 \cdot -\frac{1}{2} \cdot -\frac{20}{3}}}{-1} \rightarrow$$

$$-\frac{13}{3} \pm \frac{7}{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{20}{3} \end{cases}$$

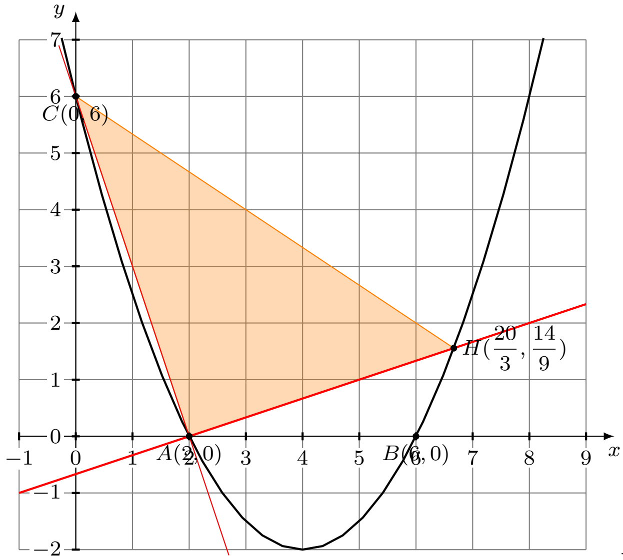
Il primo risultato ce lo aspettavamo in quanto è il punto A che fa parte sia della retta che della parabola.

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \,\text{con}\, x = \frac{20}{3} \rightarrow y = \frac{14}{9}$$

E quindi il nostro punto è

$$H\left(\frac{20}{3}, \frac{14}{9}\right)$$

Prima di proseguire, aggiorniamo il disegno



L'area del triangolo è facilmente calcolabile con la formula

$$\mathscr{A}(\mathscr{T}) = \frac{1}{2}|x_1y_2 + y_1x_3 + x_2y_3 - x_3y_2 - y_3x_1 - x_2y_1|$$

e quindi sostituendo

$$\mathscr{A}(\mathscr{T}) = \frac{1}{2}|\cancel{x_1y_2} + y_1x_3 + x_2y_3 \cancel{- x_3y_2} \cancel{- y_3x_1} - x_2y_1| \rightarrow$$

$$\mathscr{A}(\mathscr{T}) = \frac{1}{2}|6\frac{20}{3} + 2\frac{14}{9} - 2 \cdot 6| = \frac{1}{2}\frac{280}{9} = \boxed{\frac{140}{9}}$$

Il punto 3 richiede qualche passaggio intermedio anch'esso. Per trovare la circonferenza circoscritta al triangolo, dobbiamo innanzitutto trovare il centro. In un triangolo qualsiasi, il centro della circonferenza circoscritta è denominato *circocentro* ed esso è il punto di intersezione degli assi dei lati. Quindi per prima cosa si trovino i punti medi dei lati utilizzando la formula

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

e otteniamo i seguenti risultati

$$M(1,3) \qquad N\left(\frac{13}{3}, \frac{7}{9}\right) \qquad K\left(\frac{10}{3}, \frac{34}{9}\right)$$

Dobbiamo poi trovarci le rette dei lati per poi poter trovarne le perpendicolari. Avendo già fatto il processo, riporto solo i risultati

$$r_{AC} : y = -3x + 6$$
$$r_{CH} : y = -\frac{2}{3}x + 6$$
$$r_{AH} : y = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$$

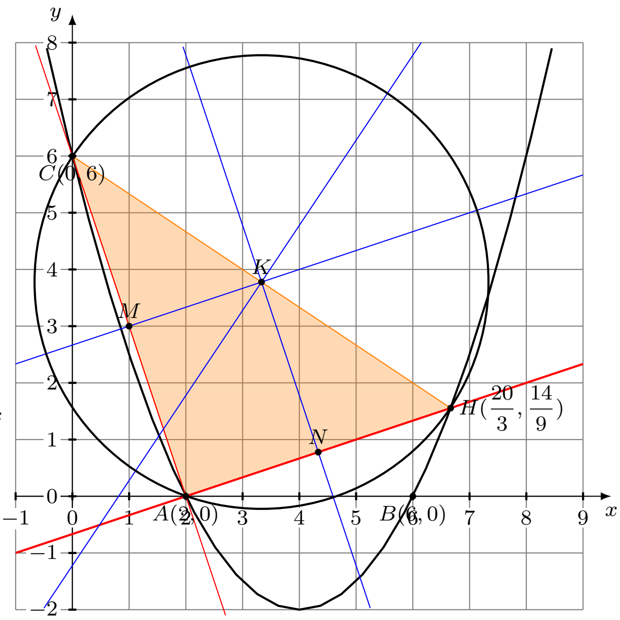
Per trovare le perpendicolari abbiamo una formula molto comoda

$$y = -\frac{1}{m}(x - x_0) + mx_0 + q$$

Essendo anche qui solo una questione di calcoli, riporto solo i risultati

$$r_{\perp AC} : y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$$
$$r_{\perp CH} : y = \frac{3}{2}x + \frac{65}{9}$$
$$r_{\perp AH} : y = -3x + \frac{124}{9}$$

E ora possiamo disegnare



Da questo disegno possiamo vedere che il punto di intersezione tra le tre rette è esattamente K. Quindi per definire la circonferenza, basta solo trovare il raggio che equivale alla distanza $CK = KH$.

$$r = CK = \sqrt{(x_C - x_K)^2 + (y_C - y_K)^2} \rightarrow$$

$$r = \sqrt{\left(0 - \frac{10}{3}\right)^2 + \left(6 - \frac{34}{9}\right)^2} \rightarrow r = \sqrt{\frac{400}{9} + \frac{1600}{81}} = \frac{20\sqrt{13}}{9}$$

E quindi la circonferenza diventa

$$\boxed{\mathscr{C} : \left(x - \frac{10}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{34}{9}\right)^2 = \frac{20\sqrt{13}}{9}}$$

Ellisse

Esercizio 1 Scritta l'equazione della parabola del tipo $x = ay^2 + by + c$ avente il vertice V sull'asse x e passante per i punti $(6,2)$ e $(16,3)$, determinare l'equazione dell'ellisse avente un vertice in V e due altri vertici nei punti di intersezione della parabola con l'asse y. Determinare i punti P_1 e P_2 dell'ellisse che hanno distanza $\frac{\sqrt{39}}{2}$ da V.

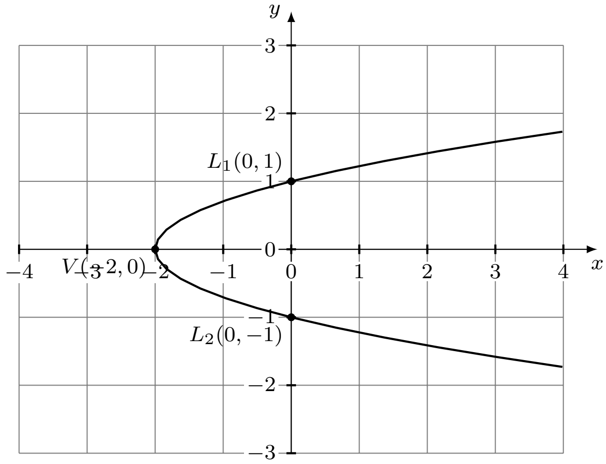
Trovare l'equazione della parabola è estremamente semplice, infatti basta mettere a sistema le informazioni che si hanno.

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 0 \\ 6 = 4a + 2b + c \\ 16 = 9a + 3b + c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 4a + c - 6 = 0 \\ c = -9a + 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 2 \\ c = -2 \end{cases}$$

Quindi la nostra parabola è $\boxed{\mathscr{P} : x = 2y^2 - 2}$ e possiamo anche subito trovare il vertice

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4} \rightarrow -\frac{-4 \cdot 2 \cdot -2}{4} = -2 \rightarrow V(-2,0)$$

Disegnamo ora ciò che abbiamo



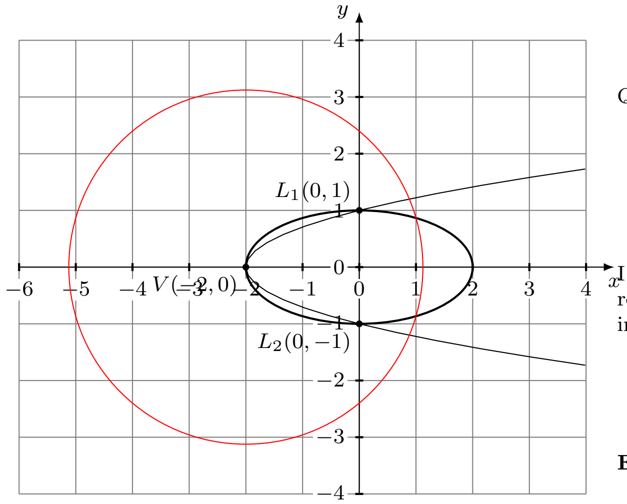
Troviamo subito gli altri due vertici dell'ellisse sostituendo $x = 0$ nell'equazione della parabola

$$y^2 = 1 \to y = \pm 1 \to L(0, \pm 1)$$

E ora possiamo trovare l'ellisse sapendo che passa attraverso V e L_1 (bastano solo questi due vertici in quanto è simmetrica).

$$\begin{cases} \frac{4}{a} = 1 \\ \frac{1}{b} = 1 \end{cases} \to \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases} \to \boxed{\mathscr{E} : \frac{x^2}{16} + y^2 = 1}$$

Prima di disegnarla, osserviamo il punto successivo: ci chiede i punti dell'ellisse che si trovano ad una certa distanza da V. Abbiamo un paio di modi, uno di questi è immaginare una circonferenza di centro V che abbia raggio pari alla distanza richiesta e vedere le intersezioni con l'ellisse.



La nostra circonferenza è

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r \to \mathscr{C} : (x + 2)^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{39}}{2}\right)^2$$

Per trovare i punti di intersezione, mettiamo a sistema le due equazioni

$$\begin{cases} (x+2)^2 + y^2 = \frac{39}{4} \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \to \begin{cases} y^2 = \frac{-4x^2 - 16x - 23}{4} \\ x^2 + 4 \cdot \frac{-4x^2 - 16x - 23}{4} = 4 \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} y^2 = \frac{-4x^2 - 16x - 23}{4} \\ \begin{cases} x_1 = -\frac{19}{3} \\ x_2 = 1 \end{cases} \end{cases} \to \begin{cases} \begin{cases} y_1 = \pm \frac{5\sqrt{13}\,i}{6} \\ y_2 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = -\frac{19}{3} \\ x_2 = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Da queste soluzioni, eliminiamo quelle che non appartengono ad $\mathbb{R}$ e quindi otteniamo i punti di intersezione

$$\boxed{P_1\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad P_2\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Goniometria

Esercizio 1 Risolvere la seguente equazione

$$(\sqrt{3} + 2)\cos x + \sin x + 1 = 0$$

Abbiamo già la fortuna che questa equazione è già stata semplificata ed organizzata. Notiamo osservandola che si tratta di un'equazione goniometrica lineare. Quindi procediamo con la risoluzione

Poniamo

$$\cos x = X \text{ e } \sin x = Y$$

$$\begin{cases} (\sqrt{3} + 2)X + Y + 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} Y = -1 - (\sqrt{3} + 2)X \\ X^2 + 1 + (7 + 4\sqrt{3})X^2 + 2(2 + \sqrt{3})X = 1 \end{cases}$$

Quindi otteniamo le due possibili soluzioni

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = --1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} X = -\frac{1}{2} \\ Y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

I due sistemi rappresentano le intersezioni con la circonferenza quindi ora non resta che trovare quali angoli (o archi) intersecano la circonferenza in quelle posizione. Ed essi sono

$$x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \qquad x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

Esercizio 2 Risolvere la seguente equazione

$$\sin^2 x + (1 - \sqrt{3})\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$$

Notiamo che l'equazione è omogenea in quanto tutti i suoi termini sono di secondo grado. Dato che contiene sia il termine di secondo grado in $\sin x$ sia in

$\cos x$, possiamo scegliere per cosa dividere. Per preferenza personale, dividiamo per $\cos^2 x$.

$$\frac{\sin^2 x + (1-\sqrt{3})\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0 \to$$
$$\tan^2 x + (1-\sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0$$

che risolta dà

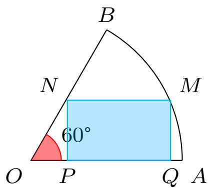
$$(\tan x)_{1/2} = \frac{\sqrt{3}-1\pm\sqrt{1+3-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}}}{2} =$$
$$\frac{\sqrt{3}-1\pm(1-\sqrt{3})}{2} = \begin{cases}\tan x = -1\\ \tan x = \sqrt{3}\end{cases}$$

che forniscono le soluzioni

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ e } x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Esercizio 3 Nel settore circolare AOB di raggio r, centro O e angolo di apertura di 60° è inscritto il rettangolo $MNPQ$ avente il vertice M sull'arco $\overset{\frown}{AB}$, il vertice N sul raggio OB e il lato PQ su OA. Determinare la posizione del vertice M in modo che l'area di detto rettangolo valga $\frac{\sqrt{3}}{6}r^2$.

Per prima cosa, facciamo il disegno



Da questo possiamo dire che l'area di un rettangolo qualsiasi è definita come base·altezza, in questo caso come $\overline{PQ}\cdot\sin(\theta)r$ (r è inserito per avere il seno corretto qualunque sia il raggio, $\theta = \overset{\frown}{AOM}$). Il problema ora è trovare $\overline{PQ}$.
Definiamo y_M e y_N le due ordinate dei rispettivi punti.

$$y_N = \overline{ON}\sin(60°) = y_M = r\sin(\theta)$$

Questo lo vediaom chiaramente dal disegno.
P si trova al piede di N, quindi la sua coordinata è

$$\frac{y_N}{\tan(60°)} = \frac{r\sin\theta}{\tan(60°)}$$

Perché da $y_N = \overline{ON}\sin(60°)$ abbiamo isolato $\overline{ON}$ e moltiplicato per il $\cos(60°)$.
Infine Q si trova al $\cos\theta$. Con queste informazioni, possiamo scrivere che

$$\frac{\sqrt{3}}{6}r^2 = \left(r\cos\theta - \frac{r\sin\theta}{\tan(60°)}\right)r\sin\theta$$

Raccogliendo e semplificando r, risolvendo $\tan(60°)$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} = \sin\theta\cos\theta - \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{3}}$$

Sostituiamo $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} = \sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{3}}$$

Poniamo $\sin\theta = t$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} = t\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}t^2$$

Moltiplichiamo per $2\sqrt{3}$

$$1 = 2\sqrt{3}t\sqrt{1-t^2} - 2t^2$$

Spostiamo t^2

$$1 + 2t^2 = 2\sqrt{3}t\sqrt{1-t^2}$$

Eleviamo al quadrato

$$1 + 4t^2 + 4t^4 = 12t^2 - 14t^4$$

Semplifichiamo

$$-16t^4 + 8t^2 - 1 = 0$$

Poniamo $u = t^2$

$$-16u^2 - 8u - 1 = 0$$

Risolviamo per u

$$u = \frac{1}{4}$$

Torniamo a sostituire $t^2 = u$

$$t = \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

Verifichiamo che solo $\frac{1}{2}$ è soluzione e torniamo a sostituire $t = \sin\theta$

$$\sin\theta = \frac{1}{2} \to \theta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{30°}$$

Logaritmi

Esercizio 1 Risolvi

$$50\left(\frac{4}{25}\right)^x - 133\left(\frac{2}{5}\right)^x + 20 = 0$$

Per risolvere questo tipo di equazioni in modo semplice possiamo osservare attentamente e notare che il primo termine tra parentesi $(\frac{4}{25})$ non è altro che il quadrato del secondo $(\frac{2}{5})$! Questo ci porta riscrivere l'equazione come

$$50\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 133\left(\frac{2}{5}\right) + 20 = 0$$

E ora possiamo risolvere semplicemente.

Poniamo

$$t = \left(\frac{2}{5}\right)^x$$

si ha quindi

$$50t^2 - 133t + 20 = 0$$
$$t_{1/2} = \frac{133\pm\sqrt{133-4\cdot50\cdot20}}{100} = \frac{133\pm117}{100}$$
$$\begin{cases}t_1 = \frac{5}{2}\\ t_2 = \frac{4}{25}\end{cases}$$

Torniamo a sostituire per t_1

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{5}{2} \rightarrow x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{5}{2}$$

Ricordando la proprietà $\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$

$$x = -\log_{\frac{5}{2}} \frac{5}{2} = \boxed{-1}$$

Sostituiamo per t_2

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{4}{25} \rightarrow x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{4}{25}$$

Ricordando che $\log_a b^k = k \log_a b$

$$x = 2\log_{\frac{2}{5}} \frac{2}{5} = \boxed{2}$$

Esercizio 2

Definizione di limiti

Migliorare la formattazione

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} l \,, & \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \\ \infty \,, & \forall k > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > k \\ -\infty \,, & \forall k > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < k \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \begin{cases} l \,, & \forall \varepsilon > 0, \exists h > 0 \mid \forall x : x > h \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \\ \infty \,, & \forall k > 0, \exists h > 0 \mid \forall x : x > h \Rightarrow f(x) > k \\ -\infty \,, & \forall k > 0, \exists h > 0 \mid \forall x : x > h \Rightarrow f(x) < k \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} l \,, & \forall \varepsilon > 0, \exists h > 0 \mid \forall x : x < h \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \\ \infty \,, & \forall k > 0, \exists h > 0 \mid \forall x : x < h \Rightarrow f(x) > k \\ -\infty \,, & \forall k > 0, \exists h > 0 \mid \forall x : x < h \Rightarrow f(x) < k \end{cases}$$

Note