

# Formule di Matematica

Daide Cossu

Questo è un formulario con le formule di matematica fatte e con alcune spiegazioni teoriche.

## Indice

### Simboli

2

### Generale

2

Prodotti notevoli . . . . .	2
Radicali . . . . .	3
Addizione e Sottrazione . . . . .	3
Divisione e Moltiplicazione . . . . .	3
Razionalizzare un radicale . . . . .	3
Radicale di un radicale . . . . .	3
Disequazioni con radicali . . . . .	3
Equazioni particolari . . . . .	3
Equazioni binomie . . . . .	3
Equazioni trinomie e biquadratiche . . . . .	3
Equazioni di secondo grado . . . . .	3
Ruffini . . . . .	3
Valori assoluti . . . . .	4
Definizione . . . . .	4
Proprietà . . . . .	4
Funzioni e valori assoluti . . . . .	4
Geometria . . . . .	4
Teoremi di Euclide . . . . .	4
Formula di Erone . . . . .	4
Raggio di una circonferenza inscritta di un triangolo . . . . .	4
Raggio di una circonferenza circoscritta di un triangolo . . . . .	4

### Geometria analitica

4

Generale . . . . .	4
Distanza tra due punti . . . . .	5
Punto medio . . . . .	5
Punto su un segmento in un rapporto $\frac{m}{n}$ . . . . .	5
Baricentro di un triangolo . . . . .	5
Area di un triangolo qualsiasi . . . . .	5
Rette . . . . .	5
Retta passante per due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ . . . . .	5
Condizione di parallelismo . . . . .	5
Condizione di perpendicolarità . . . . .	5
Retta parallela ad una data e passante per un punto $P(x_P, y_P)$ . . . . .	5
Retta perpendicolare ad una data e passante per un punto $P(x_P, y_P)$ . . . . .	6
Distanza $d$ tra un punto $P(x_P, y_P)$ e una retta . . . . .	6
Coefficiente angolare $m$ di una retta passante per due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ . . . . .	6
Fasce di Rette . . . . .	6
Fascio di rette a due parametri . . . . .	6
Fascio di rette ad un parametro . . . . .	6
$k$ avendo una retta del fascio, la retta esclusa e un punto su $a_1x + b_1y + c = 0$ . . . . .	6
Retta di un fascio con coefficiente angolare $m$ passante per un punto $P(x_P, y_P)$ . . . . .	6
Circonferenza . . . . .	6
Tangente in $P(x_P, y_P)$ . . . . .	6
Area del cerchio . . . . .	6
Lunghezza della circonferenza . . . . .	6
Lunghezza dell'arco . . . . .	6
Area del settore . . . . .	6
Fasce di circonferenze . . . . .	6

Fascio di circonferenze ad un parametro . . . . .	6
Fascio di circonferenze a due parametri . . . . .	7
Parabola . . . . .	7
Elementi di una parabola con asse focale parallelo a $x$ . . . . .	7
Elementi di una parabola con asse focale parallelo a $y$ . . . . .	7
Parabole di vertice $V(x_V, y_V)$ . . . . .	7
Area di un segmento parabolico . . . . .	7
Formule di sdoppiamento . . . . .	7
Coefficiente angolare della tangente . . . . .	8
Ellisse . . . . .	8
Eccentricità . . . . .	8
Area dell'ellisse . . . . .	8
Tangenti all'ellisse . . . . .	8
Iperbole . . . . .	8
Asintoti . . . . .	8
Eccentricità . . . . .	8
Iperbole equilatera . . . . .	8
Formule di sdoppiamento . . . . .	9
Iperbole equilatera traslata . . . . .	9
<b>Goniometria</b> . . . . .	<b>9</b>
Angoli particolari . . . . .	9
Relazione fondamentale . . . . .	9
Grafico delle funzioni . . . . .	9
$\cos \alpha$ . . . . .	9
$\sin \alpha$ . . . . .	10
$\tan \alpha$ . . . . .	10
Funzioni inverse . . . . .	10
$\arccos x$ . . . . .	10
$\arcsin x$ . . . . .	10
Formule goniometriche . . . . .	10
Addizione e sottrazione . . . . .	10
Duplicazione . . . . .	11
Bisezione . . . . .	11
Parametriche . . . . .	11
Prostaferesi . . . . .	11
Werner . . . . .	11
Equazioni goniometriche . . . . .	11
$\sin x = m$ . . . . .	11
$\cos x = m$ . . . . .	11
$\tan x = m$ . . . . .	11
Equazioni lineari . . . . .	11
Equazioni omogenee . . . . .	11
Teoremi sui triangoli . . . . .	11
Area di un triangolo qualsiasi . . . . .	11
Teorema della corda . . . . .	12
Teorema dei seni . . . . .	12
Teoremi di Carnot . . . . .	12
<b>Logaritmi</b> . . . . .	<b>12</b>
Teoremi sui logaritmi . . . . .	12
Logaritmo del prodotto . . . . .	12
Logaritmo del quoziente . . . . .	12
Logaritmo di una potenza . . . . .	12
Cambiamento di base . . . . .	12
Grafici dei logaritmi . . . . .	12
$\log_a c$ con $a > 0$ . . . . .	12
$\log_a x$ con $0 < a < 1$ . . . . .	12
$a^x$ con $a > 1$ . . . . .	13
$a^x$ con $0 < a < 1$ . . . . .	13
<b>Esercizi</b> . . . . .	<b>13</b>
Generale . . . . .	13
Prodotti notevoli . . . . .	13
Geometria Analitica . . . . .	13
Rette . . . . .	13
Fasce di rette . . . . .	15
Circonferanza . . . . .	16

Fasce di circonferenze . . . . .	18
Parabola . . . . .	19
Ellisse . . . . .	20
Goniometria . . . . .	21
Logaritmi . . . . .	22

**Durante tutto il formulario, si userà il sistema internazionale di notazione, ovvero . per separare interi da decimali e , per separare le migliaia se necessario.**

## Simboli

Qui verranno chiariti i simboli che verranno utilizzati nel formulario. Molti di essi si troveranno principalmente nelle definizioni formali ma ritorneranno utili anche negli esercizi.

$\sum_{i=l}^n f(i)$	$f(l) + f(l+1) + \dots + f(n)$
$\prod_{i=l}^n f(i)$	$f(l) \cdot f(l+1) \cdot \dots \cdot f(n)$
$\forall$	Per ogni
$\exists$	Esiste
$\in$	Appartiene
$\notin$	Non appartiene
$\cup$	Unito
$\cap$	Intersecato
$ , :$	Tale che
$\Rightarrow$	Si ha che
$\mapsto$	Diventa
$\rightarrow$	Ne segue che, tende
$\Longleftrightarrow$	Se e solo se

## Generale

In questa sezione verranno trattati alcuni temi utili in tutto il formulario, come i prodotti notevoli o alcune proprietà dei radicali.

Per gli esercizi si vada [qui](#).

## Prodotti notevoli

I prodotti notevoli sono dei prodotti o delle fattorizzazioni sempre vere per qualunque numero. Risultano essere molto utili quando si deve semplificare un'espressione.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Questi hanno la seguente formula generale

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

Questi hanno la seguente formula generale, anche conosciuto come 'Binomio di Newton'

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

## Radicali

I radicali sono delle espressioni spesso irrazionali che contengono almeno una radice. La radice è anche pensabile come

una potenza:  $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ .

### Addizione e Sottrazione

Due radicali si possono addizionare o sottrarre se e solo se **sono simili**

$$m \cdot \sqrt[n]{a} \pm p \cdot \sqrt[n]{a} = (m \pm p) \cdot \sqrt[n]{a}$$

### Divisione e Moltiplicazione

Due radicali si possono moltiplicare o dividere se e solo se **hanno lo stesso indice**

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad b \neq 0$$

### Razionalizzare un radicale

Per razionalizzare un radicale si intende eliminare il radicale dal denominatore di una frazione in quanto non è possibile dividere un numero per un irrazionale.

$$\frac{d}{c \cdot \sqrt{b}} = \frac{d}{c \cdot \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{d \cdot \sqrt{b}}{cb} \quad b > 0, c \neq 0$$

$$\frac{c}{a \pm \sqrt{b}} = \frac{c}{a \pm \sqrt{b}} \cdot \frac{a \mp \sqrt{b}}{a \mp \sqrt{b}} = \frac{c \cdot (a \pm \sqrt{b})}{a^2 - b} \quad a \pm \sqrt{b} \neq 0$$

$$\frac{c}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{c}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b} \quad \sqrt{a} \pm \sqrt{b} \neq 0$$

In generale per razionalizzare si deve moltiplicare per un fattore che annulli il radicale stesso, generalmente quel fattore è il radicale o il suo reciproco.

### Radicale di un radicale

Per risolvere o semplificare espressioni come  $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$  si può usare questa formula

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

## Disequazioni con radicali

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{array} \right.$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{array} \right.$$

$$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{array} \right.$$

## Equazioni particolari

Ci sono infiniti tipi di equazioni, alcune però hanno delle soluzioni immediate, eccone alcune.

### Equazioni binomie

Le equazioni binomie sono nella forma  $x^n = a$ . Le loro soluzioni sono le seguenti

$$x = \pm \sqrt[n]{a} \quad \text{Se } n \text{ è pari e } a \geq 0$$

$$x = \sqrt[n]{a} \quad \text{Se } n \text{ è dispari}$$

### Equazioni trinomie e biquadratiche

Le equazioni trinomie sono nella forma  $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ . Se  $n = 2$  sono definite biquadratiche.

Per risolverle si ponga  $t = x^n$  e si risolva l'equazione di secondo grado che ne deriva

$$at^2 + bt + c = 0$$

e poi si risolva  $x^n = y_1$  e  $x^n = y_2$ .

### Equazioni di secondo grado

Le equazioni di secondo grado sono tra le più diffuse. Presentano alcune caratteristiche.

Sia  $ax^2 + bx + c = 0$  la nostra equazione, allora  $x_1$  e  $x_2$  sono le sue soluzioni. Per trovarle si usi la seguente formula

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Conoscendo le soluzioni si può semplificare l'equazione in questo modo

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Vige anche questa particolarità

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

## Ruffini

Il metodo di Ruffini permette di ridurre di grado qualsiasi equazione. Prima di usare questo metodo si dovrebbe però verificare che non sia possibile usare [prodotti notevoli](#) in quanto il processo richiede tempo.

Per prima cosa si deve trovare uno **zero** dell'equazione, ovvero una soluzione. Essi sono da cercarsi tra le seguenti frazioni

$$\text{Zeri} = \frac{\text{Divisori termine noto}}{\text{Divisori } a}$$

Per dimostrare l'utilizzo di questa regola, prendiamo come esempio la seguente equazione

$$2x^3 + 3x + 5 = 0 \quad (1)$$

Lo zero di quest'equazione è  $-1$ , infatti  $2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1) + 5 = 0$ . Il seguente disegno chiarisce i passaggi da seguire per ridurre di grado un'equazione.

	2	0	3	+5
		↓	+	
-1	→	-2	2	-5
	2	-2	5	0
	Coefficienti/Quoziente		Resto	

Il processo da seguire è il seguente:

1. Moltiplicare il coefficiente del grado massimo per lo zero
2. Aggiungere al grado successivo il risultato
3. Continuare fino a che non si arriva al termine noto

Così si otterranno i nuovi coefficienti dell'equazione. Nel nostro caso otteniamo

$$2x^2 - 2x + 5 \quad (2)$$

però questo non basta in quanto le equazioni (1) e (2) non sono equivalenti. Per renderle equivalenti, si moltiplichino per  $(x - x_0)$  dove  $x_0$  è lo zero dell'equazione originale. Quindi ora abbiamo ottenuto che

$$2x^3 + 3x + 5 = (2x^2 - 2x + 5)(x + 1)$$

E che quindi possiamo dire che  $P_n(x) = P_{n-1}(x) \cdot (x - x_0)$  dove  $P_n(x)$  è un polinomio di grado  $n$  nella variabile  $x$ .

## Valori assoluti

Verranno qui elencate alcune caratteristiche dei valori assoluti.

### Definizione

$$|x| \Leftrightarrow \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

### Proprietà

Dalla definizione ne derivano alcune proprietà

$$\begin{aligned} |x| &= |-x| & |x^2| &= |x|^2 = x^2 \\ |a + b| &\leq |a| + |b| & |a \cdot b| &= |a| \cdot |b| \end{aligned}$$

### Funzioni e valori assoluti

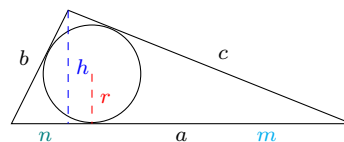
Vengono ora riportati i sistemi risolutivi di funzioni con valori assoluti

$$\begin{aligned} |f(x)| \geq g(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq -g(x) \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \\ |f(x)| \leq g(x) &\Leftrightarrow -g(x) \leq f(x) \leq g(x) \end{aligned}$$

## Geometria

Qui vengono elencate alcune formule particolari che riguardano la geometria euclidea.

### Teoremi di Euclide



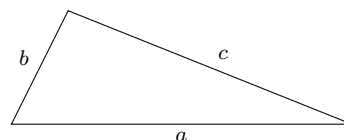
**Primo teorema**  $\begin{cases} \frac{m}{c} = \frac{c}{a} \\ \frac{n}{b} = \frac{b}{a} \end{cases}$

**Secondo teorema**  $\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$

**Proprietà**  $\begin{cases} h = \frac{bc}{a} \\ r = \frac{b + c - a}{2} \end{cases}$

### Formula di Erone

La formula di Erone permette di trovare l'area di un triangolo qualsiasi conoscendo il semi-perimetro.



$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

### Raggio di una circonferenza inscritta di un triangolo

$$r = \frac{\mathcal{A}}{p}$$

### Raggio di una circonferenza circoscritta di un triangolo

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{abc}{4\mathcal{A}}$$

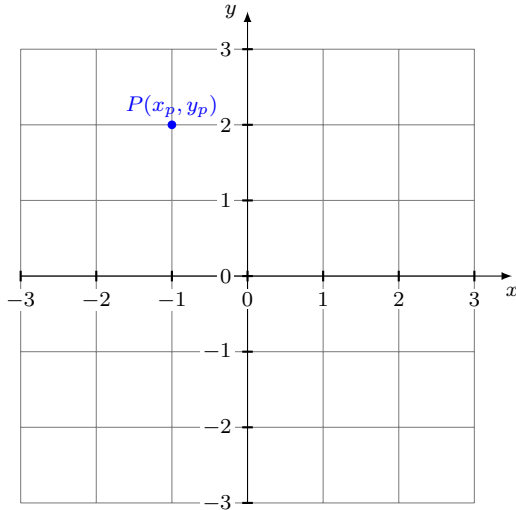
## Geometria analitica

La geometria analitica è la geometria che si occupa di lavorare nel piano cartesiano  $(xOy)$ . Per gli esercizi si vada [qui](#).

### Generale

Le formule qui riportate sono generali a tutto l'ambito della geometria analitica e non si riferiscono ad una figura particolare.

Di seguito viene rappresentato il tipico piano cartesiano con i suoi quattro quadranti.



D'ora in poi, si darà per scontata la convenzione di nominare le coordinate di un punto in base al nome del punto stesso. Ad esempio  $P(x_P, y_P)$ . Si noti anche che è possibile definire un punto attraverso un vettore bidimensionale. Ovvero

$$P(x_P, y_P) = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix}$$

#### Distanza tra due punti

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

#### Punto medio

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

#### Punto su un segmento in un rapporto $\frac{m}{n}$

Siano  $m$  e  $n$  due rapporti a cui sta un punto rispetto al segmento. Ovvero il punto  $P(x_P, y_P)$  divide il segmento in  $n$  parti sulla proiezione della  $x$ , in  $m$  parti su quella di  $y$ .

$$P\left(\frac{nx_A + mx_B}{m + n}, \frac{ny_A + my_B}{m + n}\right)$$

#### Baricentro di un triangolo

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

#### Area di un triangolo qualsiasi

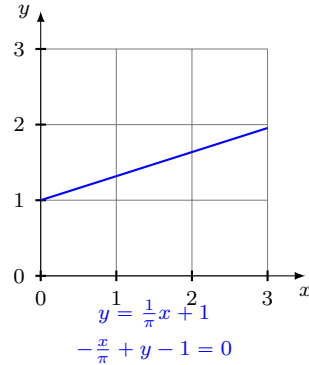
$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} |x_1 y_2 + y_1 x_3 + x_2 y_3 - x_3 y_2 - y_3 x_1 - x_2 y_1|$$

Oppure si può risolvere questa versione

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

usando la regola di Sarrus.

#### Rette



Le rette sono definite da un'equazione che ha due forme equivalenti:

$$y = mx + q \quad (1)$$

$$ax + by + c = 0 \quad (2)$$

La forma (1) è chiamata *esplicita*, la forma (2) è chiamata *implicita*. Da queste due forme possiamo evincere che

$$m = -\frac{a}{b} \quad q = -\frac{c}{b}$$

#### Retta passante per due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad x_1 \neq x_2 \wedge y_1 \neq y_2$$

#### Condizione di parallelismo

Perché due rette siano parallele, **il loro coefficiente angolare deve essere uguale**, ovvero

$$r_1 \parallel r_2 \iff m_1 = m_2$$

#### Condizione di perpendicolarità

Perché due rette siano perpendicolari, **il prodotto dei coefficienti angolari deve essere -1**, ovvero

$$r_1 \perp r_2 \iff m_1 m_2 = -1$$

#### Retta parallela ad una data e passante per un punto $P(x_P, y_P)$

$$y - y_P = m(x - x_P)$$

**Retta perpendicolare ad una data e passante per un punto  $P(x_P, y_P)$**

$$y - y_P = -\frac{1}{m}(x - x_P)$$

**Distanza  $d$  tra un punto  $P(x_P, y_P)$  e una retta**

$$d = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Coefficiente angolare  $m$  di una retta passante per due punti  $P_1(x_1, y_1)$  e  $P_2(x_2, y_2)$**

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

## Faschi di Rette

Un fascio di rette è una combinazione lineare di tutte le rette generabili modificando un solo parametro di una quantità costante.

**Fascio di rette a due parametri**

Scegli appropriati  $\alpha$  e  $\beta$  si possono generare tutte le rette possibili utilizzando questa forma

$$\alpha(ax + by + c) + \beta(a_1x + b_1y + c_1) = 0$$

$$(\alpha a + \beta a_1)x + (\alpha b + \beta b_1)y + \alpha c + \beta c_1 = 0$$

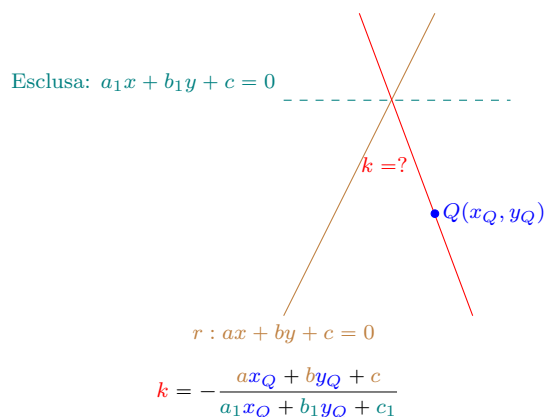
**Fascio di rette ad un parametro**

Questa forma esclude una sola retta, per  $k = 0$ .

$$ax + by + c + k(a_1x + b_1y + c_1) = 0$$

Si noti che  $k = \frac{\beta}{\alpha}$

**$k$  avendo una retta del fascio, la retta esclusa e un punto su  $a_1x + b_1y + c = 0$**

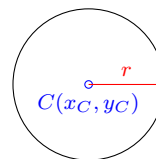


**Retta di un fascio con coefficiente angolare  $m$  passante per un punto  $P(x_P, y_P)$**

$$y - y_P = m(x - x_P)$$

## Circonferenza

La circonferenza è una conica i cui punti sono tutti equidistanti dal centro  $C$ .



Anche le equazioni delle circonferenze hanno 2 forme

$$\mathcal{C} : (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Da queste due formule derivano le coordinate del centro

$$C \left( -\frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \right)$$

e la misura del raggio

$$r = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - c} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$$

**Tangente in  $P(x_P, y_P)$**

$$x \cdot x_P + y \cdot y_P + a \frac{x + x_P}{2} + b \frac{y + y_P}{2} + c = 0$$

**Area del cerchio**

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \pi r^2$$

**Lunghezza della circonferenza**

$$C = 2\pi r$$

**Lunghezza dell'arco**

$$l = r\alpha$$

Si noti che  $\alpha$  è in radianti.

**Area del settore**

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} r^2 \alpha$$

Si noti che  $\alpha$  è in radianti.

## Faschi di circonferenze

Un fascio di circonferenze è una combinazione lineare di tutte le circonferenze generabili modificando un parametro di una certa quantità costante.

**Fascio di circonferenze ad un parametro**

Scegli appropriati  $\alpha$  e  $\beta$  si possono generare tutte le circonferenze possibili utilizzando questa forma

$$\alpha(x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1) + \beta(x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

$$(\alpha + \beta)x^2 + (\alpha + \beta)y^2 + (\alpha a_1 + \beta a_2)x + (\alpha b_1 + \beta b_2)y + \alpha c_1 + \beta c_2 = 0$$

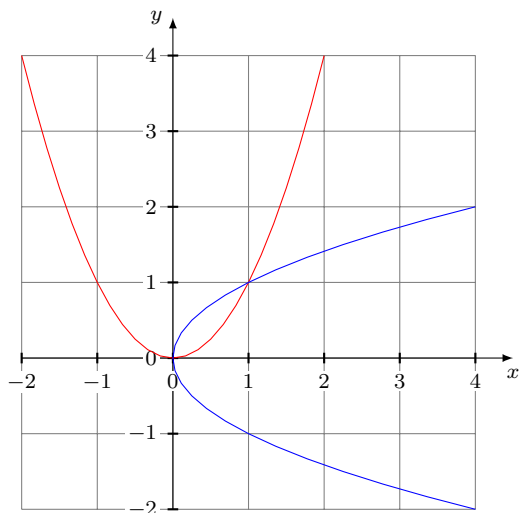
## Fascio di circonferenze a due parametri

Questa forma esclude una circonferenza per  $k = 0$ .

$$x^2 + y^2 + ax + by + c + k(x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1) = 0$$

Si noti che  $k = \frac{\alpha}{\beta}$

## Parabola



Una parabola può essere descritta con l'asse focale parallelo all'asse  $x$  o all'asse  $y$ .

$$\mathcal{P} : y = ax^2 + bx + c$$

$$\mathcal{P} : x = ay^2 + by + c$$

La direttrice di una parabola è quella che ne dà l'inclinazione ed è perpendicolare all'asse di simmetria. Il vertice di una parabola è il punto più vicino alla direttrice. Il fuoco è il punto la cui distanza da qualsiasi punto della parabola è pari a quella della proiezione sulla direttrice del punto stesso.

## Elementi di una parabola con asse focale parallelo a $x$

Vertice	$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$
Fuoco	$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$
Direttrice	$y = -\frac{1 + \Delta}{4a}$
Asse di simmetria	$x = -\frac{b}{2a}$
Tangente in un punto	$\frac{y + y_0}{2} = axx_0 + b\frac{x + x_0}{2} + c$

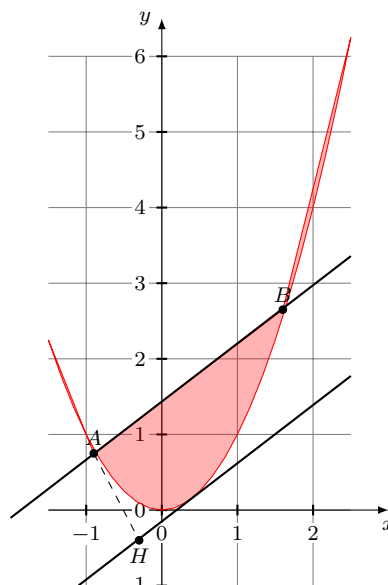
## Elementi di una parabola con asse focale parallelo a $y$

Vertice	$\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$
Fuoco	$\left(\frac{1 - \Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$
Direttrice	$x = -\frac{1 + \Delta}{4a}$
Asse di simmetria	$y = -\frac{b}{2a}$
Tangente in un punto	$\frac{x + x_0}{2} = ayy_0 + b\frac{y + y_0}{2} + c$

## Parabole di vertice $V(x_V, y_V)$

$$y - y_V = a(x - x_V)^2$$

## Area di un segmento parabolico



$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \frac{2}{3} \overline{AB} \cdot \overline{AH}$$

E ovviamente l'area esterna alla curva sarebbe

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}') = \frac{1}{3} \overline{AB} \cdot \overline{AH}$$

## Formule di sdoppiamento

Le formule di sdoppiamento servono per determinare le tangenti in un punto  $P(x_0, y_0)$ .

Se  $d \parallel y$

$$\frac{y + y_0}{2} = axx_0 + b\frac{x + x_0}{2} + c$$

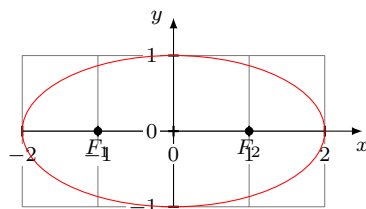
Se  $d \parallel x$

$$\frac{x + x_0}{2} = ayy_0 + b\frac{y + y_0}{2} + c$$

## Coefficiente angolare della tangente

$$m = \frac{1}{2ay_0 + b} = 2ax_0 + b$$

## Ellisse



Un'ellisse ha due assi, uno maggiore uno minore. Loro semilunghezze (quindi i semi-assi) si denominano  $a$  (che contiene i fuochi) e  $b$ .

I fuochi sono i due punti tali che preso un punto  $P \in \mathcal{E}$ ,  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ .

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Tra i semi-assi vige la seguente proprietà

$$a^2 - c^2 = b^2$$

e quindi

$$c = \begin{cases} a^2 - b^2, & \text{se } a > b \\ b^2 - a^2, & \text{se } a < b \end{cases}$$

## Eccentricità

L'eccentricità è lo schiacciamento dell'ellisse sull'asse maggiore. È un valore compreso tra 0 e 1.

Se  $a > b$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Se  $b > a$

$$e = \frac{c}{b} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$$

## Area dell'ellisse

$$\mathcal{A}(\mathcal{E}) = ab\pi$$

## Tangenti all'ellisse

Per trovare la tangente all'ellisse abbiamo due modi:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

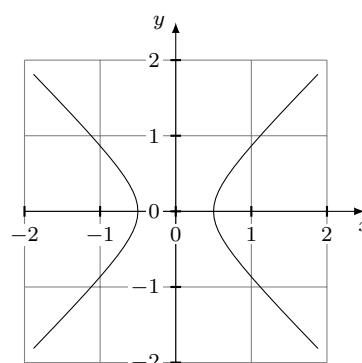
oppure fare il sistema tra la retta generica per  $P$  e fare in modo che il discriminante si annulli:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases} \rightarrow$$

$$\frac{\Delta}{4} = a^4 m^2 q^2 - a^2 (q^2 - b^2) (b^2 + a^2 m^2) = 0$$

Il vantaggio di questo secondo metodo è che può anche trovare le rette secanti ed esterne all'ellisse (rispettivamente con  $\frac{\Delta}{4} > 0$  e  $\frac{\Delta}{4} < 0$ ). È sicuramente più laborioso e difficile da ricordare.

## Iperbole



L'iperbole può essere descritta sia analiticamente sia in modo parametrico con le funzioni cosh e sinh.

I fuochi sono i due punti tali che per un punto  $P \in \mathcal{I}$ ,  $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$ .

L'equazione dell'iperbole con i fuochi su  $x$  è

$$\mathcal{I} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Quella con i fuochi su  $y$  è

$$\mathcal{I} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

Tra i parametri  $a$  e  $b$  vige che  $a < c$  e  $c^2 = a^2 + b^2$ .

## Asintoti

Gli asintoti sono le rette che l'iperbole tende a raggiungere senza mai toccare

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

## Eccentricità

L'eccentricità dell'iperbole è il rapporto

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

se l'iperbole ha i fuochi su  $x$ ,

$$e = \frac{c}{b} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}$$

altrimenti. Si noti anche che  $e > 1$  per ogni iperbole.

## Iperbole equilatera

Se  $a = b$ , l'iperbole si definisce equilatera e le equazioni diventano

$$x^2 - y^2 = a^2$$

se  $F \in x$ ,

$$y^2 - x^2 = a^2$$

se  $F \in y$ .

Questo comporta che  $c = a\sqrt{2}$  e che  $e = \sqrt{2}$ .

Può anche essere descritta l'iperbole in base agli asintoti e in tal caso diventa

$$xy = k$$



## Formule di sdoppiamento

Vengono ora riportate le formule di sdoppiamento che cambiano in base all'equazione dell'iperbole

Equazione	Tangente
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$	$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = -1$
$x^2 - y^2 = a^2$	$xx_0 - yy_0 = a^2$
$x^2 - y^2 = -a^2$	$xx_0 - yy_0 = -a^2$
$xy = k$	$\frac{xy_0 + x_0y}{2} - k = 0$

## Iperbole equilatera traslata

Si trova molto spesso una versione traslata di un'iperbole. Questa è la sua generale forma

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

E gli asintoti sono

$$x = -\frac{d}{c} \quad y = \frac{a}{c}$$

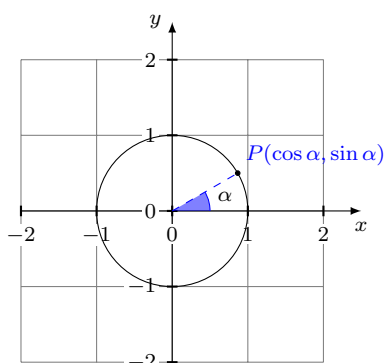
con il centro di simmetria

$$O\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$$

## Goniometria

La goniometria si incentra tutta sulla *circonferenza goniometrica* che non è altro che una circonferenza di centro  $O(0;0)$  e di raggio  $r = 1$ .

Per convenzione, gli angoli vengono definiti a partire dall'asse  $x$  e si definiscono positivi quando proseguono in senso antiorario. Si noti che  $2\pi = 360^\circ$ .



Già nella figura identifichiamo le due funzioni fondamentali della goniometria:  $\cos$  e  $\sin$ . Esse, numericamente, rappresentano rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del punto  $P$  al variare di  $\alpha$ .

Seno e coseno non sono le uniche funzioni goniometriche, esistono infatti anche

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha &= \frac{1}{\tan \alpha} \\ \sec \alpha &= \frac{1}{\cos \alpha} \\ \csc \alpha &= \frac{1}{\sin \alpha}\end{aligned}$$

Da notare che spesso  $\csc$  si trova anche scritto nella forma più estesa  $\operatorname{cosec}$ .

$\sin$  e  $\cos$  rappresentano anche in un triangolo rettangolo

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{\text{Lunghezza cateto adiacente}}{\text{Lunghezza ipotenusa}} \\ \sin \alpha &= \frac{\text{Lunghezza cateto opposto}}{\text{Lunghezza ipotenusa}}\end{aligned}$$

Per gli esercizi si vada [qui](#).

## Angoli particolari

Seno e coseno sono funzioni periodiche, ovvero che il loro valore sta all'interno di un insieme e si ripete con un certo periodo.

Gli angoli particolari principali sono

$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2} & \cos \frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos \frac{\pi}{3} &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Come si può notare ricordarli è piuttosto semplice:  $\frac{\pi}{3}$  e  $\frac{\pi}{6}$  sono gli angoli di un triangolo equilatero,  $\frac{\pi}{4}$  è la diagonale di un quadrato.

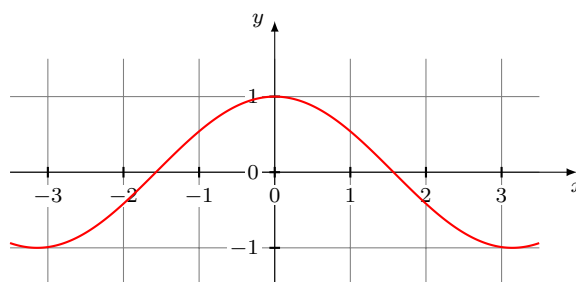
## Relazione fondamentale

La relazione fondamentale è quella che permetterà di trovare molte delle formule successive. Essa è

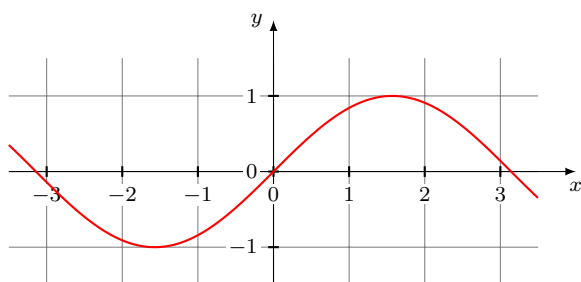
$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

## Grafico delle funzioni

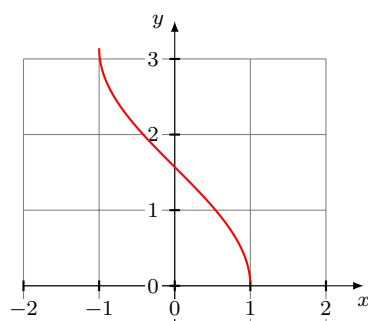
$\cos \alpha$



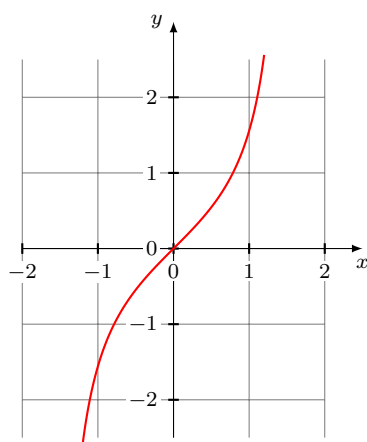
$\sin \alpha$



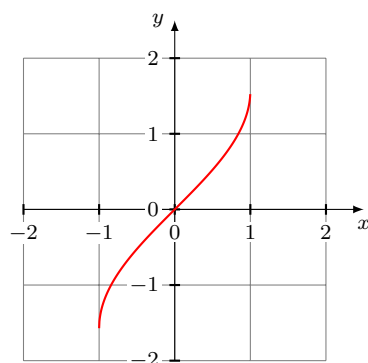
$\arccos x$



$\tan \alpha$



$\arcsin x$



## Funzioni inverse

Ovviamente se da un angolo possiamo ottenere un numero, possiamo fare anche il contrario. Per indicare le funzioni inverse abbiamo due possibilità

1. Scrivere  $f^{-1}(x)$
2. Dare un nuovo nome alla funzione

Nelle calcolatrici è molto più comune trovare  $\sin^{-1}$  e gli altri però non sono precisi e quindi sarebbe da preferire arcsin o asin per brevità. Il motivo è che se

$$f : A \mapsto B, f^{-1} : B \mapsto A$$

però per le funzioni goniometriche questo non accade infatti

$$\sin x : \mathbb{R} \mapsto [-1, +1] \quad \cos c : \mathbb{R} \mapsto [-1, 1]$$

quando però

$$\arcsin x : [-1, 1] \mapsto \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \arccos : [-1, 1] \mapsto [0, \pi]$$

I grafici sono i seguenti

## Formule goniometriche

Le formule goniometriche permettono di passare da una funzione ad un'altra. Una delle caratteristiche più importanti è l'esistenza dei così denominati **angoli associati**. Essi sono angoli particolari che assumono valori facili da scambiare e ricordare. Essi sono

$$\begin{aligned} \cos(\pi \pm x) &= -\cos x & \cos(-x) &= \cos x \\ \sin(\pi \pm x) &= \mp \sin x & \sin(-x) &= -\sin x \\ \tan(\pi \pm x) &= \pm \tan x & \tan(-x) &= -\tan x \end{aligned}$$

In associazione a questi che sono i più comuni, sono anche presenti i seguenti

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) &= \mp \sin x & \cos\left(\frac{3}{2}\pi \pm x\right) &= \pm \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) &= \pm \cos x & \sin\left(\frac{3}{2}\pi \pm x\right) &= -\cos x \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) &= \mp \cot x & \tan\left(\frac{3}{2}\pi \pm x\right) &= \mp \cot x \end{aligned}$$

Si presti molta attenzione ai segni in quanto è molto facile confondersi.

## Addizione e sottrazione

$$\begin{aligned} \cos(\gamma \pm \theta) &= \cos \gamma \cos \theta \mp \sin \gamma \sin \theta \\ \sin(\gamma \pm \theta) &= \sin \gamma \cos \theta \pm \cos \gamma \sin \theta \\ \tan(\gamma \pm \theta) &= \frac{\tan \gamma \pm \tan \theta}{1 \mp \tan \gamma \tan \theta} \end{aligned}$$

## Duplicazione

Cercare come fare delle linee al posto delle graffe

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \cos 2x = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 1 - 2 \sin^2 x \\ 2 \cos^2 x - 1 \end{cases}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad \cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}$$

## Bisezione

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\tan \frac{x}{2} = \begin{cases} \frac{\sin x}{1 + \cos x} \\ \frac{1 - \cos x}{\sin x} \end{cases} \quad \cot \frac{x}{2} = \begin{cases} \frac{1 + \cos x}{\sin x} \\ \frac{\sin x}{1 - \cos x} \end{cases}$$

Il segno nella prima riga è da scegliersi + se  $\sin \frac{x}{2} \geq 0 \vee \cos \frac{x}{2} \geq 0$ , - altrimenti.

## Parametriche

Per queste formule poniamo

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

per comodità.

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2} \quad \cot x = \frac{1-t^2}{2t}$$

## Prostaferesi

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

## Werner

$$\cos \gamma \cos \theta = \frac{1}{2} [\cos(\gamma + \theta) + \cos(\gamma - \theta)]$$

$$\cos \gamma \sin \theta = \frac{1}{2} [\sin(\gamma + \theta) - \sin(\gamma - \theta)]$$

$$\sin \gamma \sin \theta = \frac{1}{2} [\cos(\gamma - \theta) - \cos(\gamma + \theta)]$$

## Equazioni goniometriche

Si definisce un'equazione goniometrica una qualsiasi equazione che abbia almeno una funzione goniometrica e che ha soluzioni solo per particolari angoli.

$$\sin x = m$$

$$x = \arcsin m + 2k\pi \vee x = \arcsin m + 2k\pi - \pi$$

$$\cos x = m$$

$$x = \pm \arccos m + 2k\pi$$

$$\tan x = m$$

$$x = \arctan x + k\pi$$

## Equazioni lineari

Le equazioni lineari vengono così definite perché sono simili alla forma di una retta esplicita.

$$a \sin x + b \cos x + c = 0$$

La risoluzione di questa può essere semplice per  $b = 0 \vee a = 0$  in quanto si ritorna alle forme precedenti. Se invece  $a \neq 0 \wedge b \neq 0$  si hanno due strade:

1. metodo algebrico;
2. metodo grafico;

Il metodo algebrico è molto lungo e generalmente sconsigliato. In generale si sfrutta la parametrizzazione di  $\sin$  e  $\cos$  in  $\tan \frac{x}{2}$ .

Il metodo grafico consiste nel porre

$$\cos x = X \text{ e } \sin x = Y$$

e poi risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} aY + bX + c = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

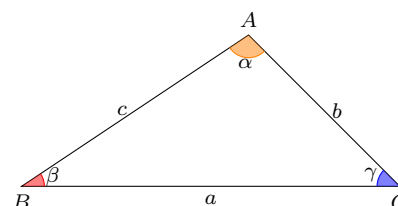
## Equazioni omogenee

Si dicono omogenee se tutti i suoi elementi sono dello stesso grado. Per risolvere queste equazioni in questa forma, abbiamo varie strade

- Se è presente il termine di grado  $n$  in  $\sin x$ , si divide tutto per  $\cos^n x \neq 0$  ottenendo un'equazione di grado  $n$  in  $\tan x$  equivalente alla data;
- Se è presente il termine di grado  $n$  in  $\cos x$ , si divide tutto per  $\sin^n x \neq 0$  ottenendo un'equazione di grado  $n$  in  $\cot x$  equivalente alla data;
- Se nessuno dei precedenti è valido, si raccoglie a fattore comune;

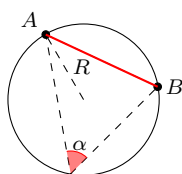
## Teoremi sui triangoli

### Area di un triangolo qualsiasi



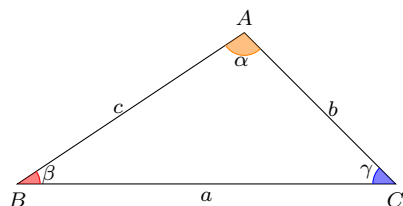
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} ac \sin \beta = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

### Teorema della corda



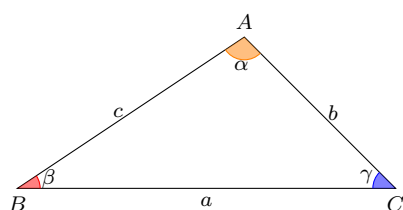
$$\overline{AB} = 2R \sin \alpha$$

### Teorema dei seni



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

### Teoremi di Carnot



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

## Logaritmi

Il logaritmo è la seconda funzione inversa della potenza, essendo la prima la radice.

Preso un'equazione del tipo

$$a^x = b$$

le soluzioni di  $x$  si esprimono come

$$x = \log_a b$$

quindi si ha anche che

$$a^{\log_a b} = b$$

Si legge “*logaritmo in base a di b*”. Perché un logaritmo esista è necessario che  $a > 0 \wedge a \neq 1 \wedge b > 0$ .

Quando si vede scritto  $\log$  si intende  $\log_{10}$ , quando invece è presente  $\ln$  si intende  $\log_e$ .

Per gli esercizi si vada [qui](#).

## Teoremi sui logaritmi

### Logaritmo del prodotto

$$\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

### Logaritmo del quoziente

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$$

### Logaritmo di una potenza

$$\log_a b^k = k \log_a b$$

### Cambiamento di base

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

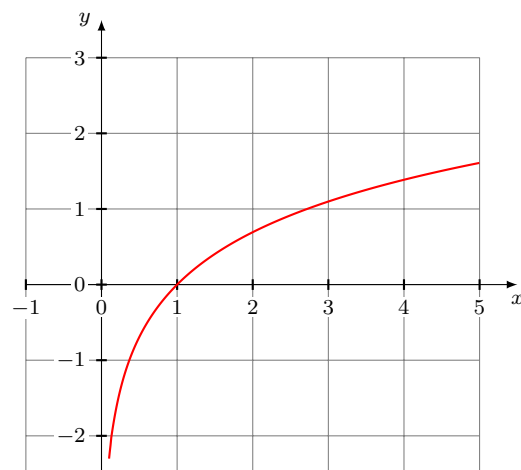
Da questa particolare formula si nota anche che

$$\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$$

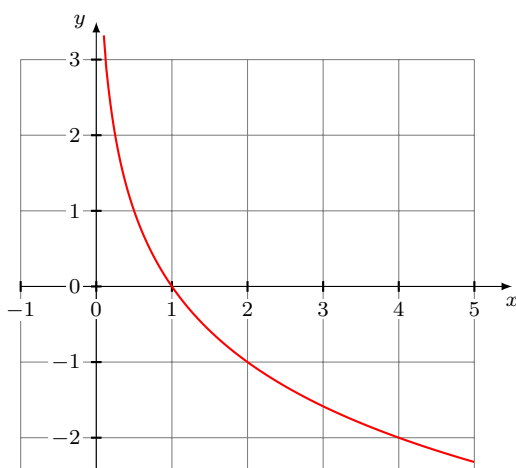
## Grafici dei logaritmi

I logaritmi hanno due grafici dipendentemente al valore della base

$\log_a c$  con  $a > 0$

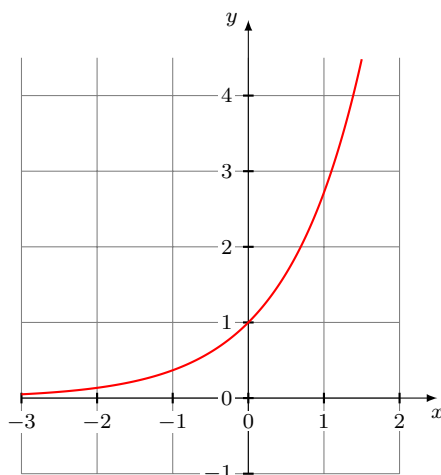


$\log_a x$  con  $0 < a < 1$

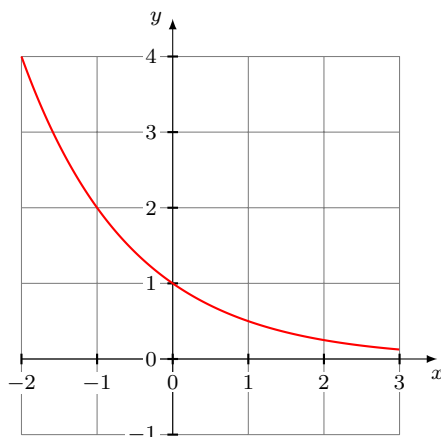


Essendo i logaritmi molto correlati alle funzioni esponenziali, riporto di seguito i loro grafici

$a^x$  con  $a > 1$



$a^x$  con  $0 < a < 1$



## Esercizi

Questa sezione è dedicata ad alcuni esercizi con relativa risoluzione e spiegazione. Il suo scopo è quello di chiarire i concetti teorici con esempi pratici.

### Generale

#### Prodotti notevoli

**Esercizio 1** Si scompongano i seguenti polinomi usando i prodotti notevoli.

$$18x^3 - 4 - 8x + 9x^2 \quad (1)$$

$$a^2x^2 - a^2y^2 - b^2x^2 + b^2y^2 \quad (2)$$

Per semplificare (1) innanzitutto riscriviamo il polinomio in modo decrescente

$$18x^3 + 9x^2 - 8x - 4$$

Ora possiamo notare che i primi due elementi sono semplificabili, così come anche i secondi due per uno stesso fattore.

$$\underbrace{18x^3 + 9x^2}_{9x^2(2x+1)} \underbrace{-8x - 4}_{-4(2x+1)} = (9x^2 - 4)(2x + 1)$$

Ora abbiamo solo un altro prodotto da semplificare. Ricordando che  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  possiamo espandere la prima parentesi

$$(3x - 2)(3x + 2)(2x + 1)$$

Per semplificare (2) possiamo raccogliere i coefficienti di  $x$  e  $y$

$$a^2x^2 - a^2y^2 - b^2x^2 + b^2y^2 = x^2(a^2 - b^2) + y^2(b^2 - a^2)$$

Ora però, se si guardano attentamente i coefficienti, si vede che sono semplicemente opposti di segno, quindi possiamo portare fuori il meno dal secondo e renderli uguali

$$x^2(a^2 - b^2) + y^2(b^2 - a^2) = x^2(a^2 - b^2) - y^2(a^2 - b^2) = (x^2 - y^2)(a^2 - b^2)$$

Ricordando che  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  possiamo espandere e concludere

$$(x^2 - y^2)(a^2 - b^2) = (x - y)(x + y)(a - b)(a + b)$$

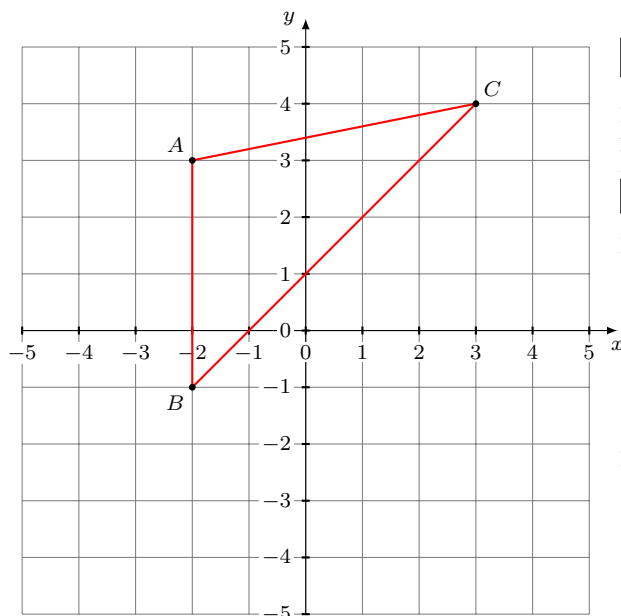
## Geometria Analitica

### Rette

**Esercizio 1** Dato il triangolo di vertici  $A(-2, 3)$ ,  $B(-2, -1)$  e  $C(3, 4)$ , determinare:

1. le equazioni dei lati;
2. il perimetro e l'area del triangolo
3. detta  $t$  la retta passante per  $C$  e perpendicolare alla retta  $BC$  e detto  $D$  il punto d'intersezione di  $t$  con l'asse  $x$ , l'area del quadrilatero  $ACDB$ ;
4. i punti della retta  $y = 2x$  che hanno distanza uguale a 3 dalla retta  $AB$ .

Come in ogni esercizio di geometria, partiamo dal disegno. Lo miglioreremo man mano che andiamo avanti.



Per i primi due punti, questo è tutto quello che ci serve.

**Per il punto 1**, possiamo semplicemente usare la formula per la retta passante per due punti. Per convenienza, denominiamo le rette in base ai vertici che attraversano.

Per la retta  $AB$  è immediato: si nota che hanno la stessa ascissa, quindi la retta passante per i due punti è solo  $\boxed{AB : x = -2}$ .

Per  $AC$ :

$$\begin{aligned} \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \rightarrow \frac{y - 3}{4 - 3} = \frac{x - (-2)}{3 - (-2)} \rightarrow \\ \frac{y - 3}{1} &= \frac{x + 2}{5} \rightarrow y = \frac{x + 2}{5} + 3 \\ y &= \frac{1}{5}x + \frac{2}{5} + \frac{15}{5} \rightarrow \boxed{AC : y = \frac{1}{5}x + \frac{17}{5}} \end{aligned}$$

Infine per  $BC$

$$\begin{aligned} \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \rightarrow \frac{y + 1}{4 + 1} = \frac{x - (-2)}{3 + 2} \\ \frac{y + 1}{5} &= \frac{x + 2}{5} \rightarrow \boxed{BC : y = x + 1} \end{aligned}$$

**Ci avviamo ora al punto 2** e per l'area possiamo usare la matrice

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Che poi si semplifica usando Sarrus in

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} |x_1 y_2 + y_1 x_3 + x_2 y_3 - x_3 y_2 - y_3 x_1 - x_2 y_1|$$

E sostituendo otteniamo

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} |-2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 3|$$

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} |-2 + 9 - 8 - 3 + 8 + 6|$$

$$\boxed{\mathcal{A}(ABC) = 10}$$

Per trovare il perimetro, possiamo usare la distanza tra due punti e trovare tutte le lunghezze.

$AB$  è immediato in quanto hanno la stessa ascissa.

$$\boxed{AB = 3 + 1 = 4}$$

Per trovare  $AC$

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \rightarrow \\ AB &= \sqrt{(3 + 2)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{25 + 1} = \boxed{\sqrt{26}} \end{aligned}$$

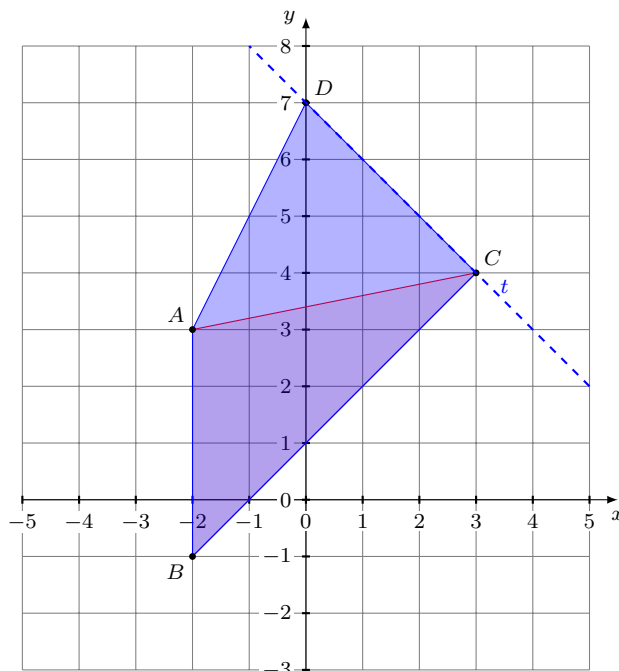
Per trovare  $BC$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \rightarrow \\ BC &= \sqrt{(3 + 2)^2 + (4 + 1)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 25} \\ &= \sqrt{50} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \boxed{5\sqrt{2}} \end{aligned}$$

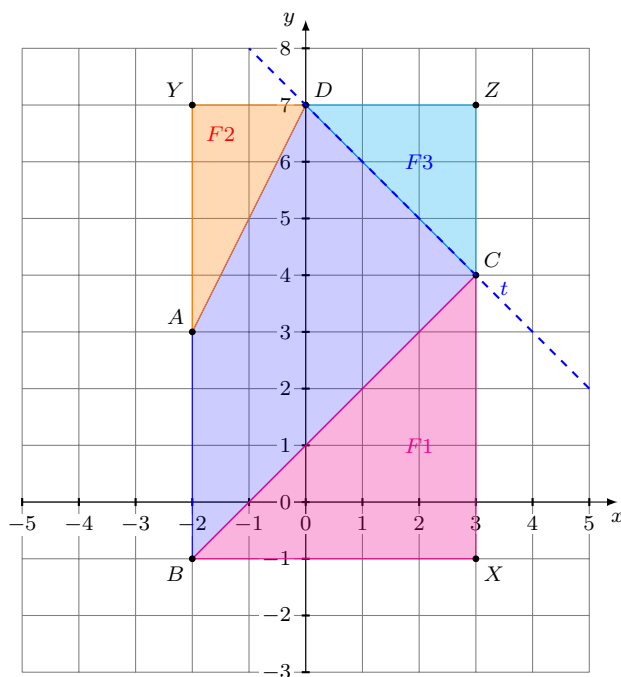
E ora non resta che sommare

$$2p = AB + AC + BC = 4 + \sqrt{26} + 5\sqrt{2}$$

**Per il punto 3** aggiorniamo il disegno



Noi dobbiamo calcolare l'area di  $ABCD$ . Abbiamo varie strade che possiamo seguire. Ne propongo una che può essere usata per praticamente ogni figura. Il tutto si basa su trovare l'area del rettangolo che contiene la figura e togliere dei triangoli che possiamo individuare. Nel nostro caso



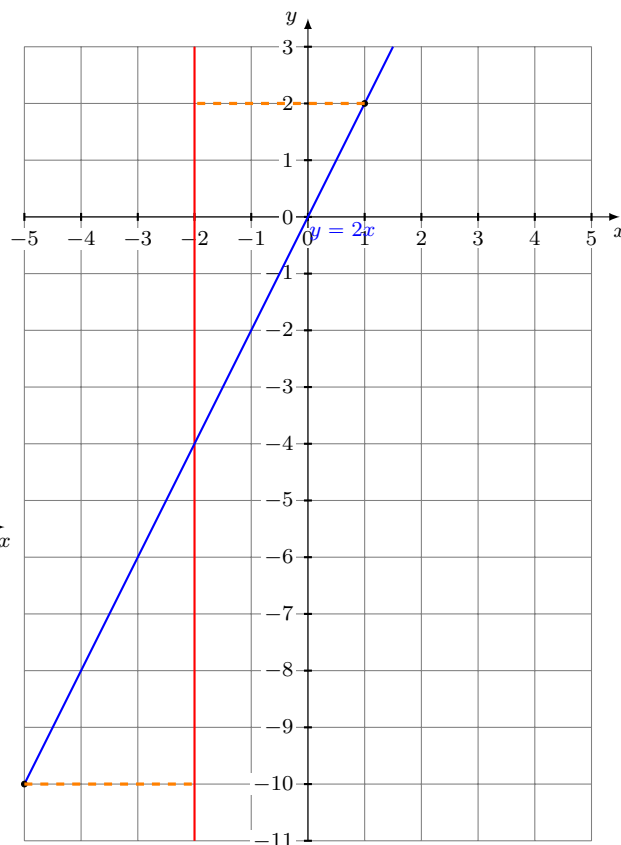
vediamo che possiamo trovare l'area facendo

$$\mathcal{A}(YZXB) - \mathcal{A}(F1) - \mathcal{A}(F2) - \mathcal{A}(F3)$$

o più semplicemente, sostituendo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(ABCD) &= BX \cdot BY - \overbrace{\frac{5^2}{2}}^{\mathcal{A}(F1)} - \overbrace{\frac{2 \cdot 4}{2}}^{\mathcal{A}(F2)} - \overbrace{\frac{3^2}{2}}^{\mathcal{A}(F3)} \\ &= 5 \cdot 8 - 12.5 - 4 - 4.5 = 40 - 21 = 19 \end{aligned}$$

Ora per l'ultimo punto possiamo semplificare il disegno e pulirlo un po'.



Per prima cosa dobbiamo trasformare in forma esplicita la retta  $x = -2$  per poter usare la formula della distanza Punto-Retta.

$$r : x + 2 = 0$$

E ora possiamo scrivere la formula della distanza

$$\begin{aligned} d &= \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \rightarrow 3 = \frac{|x + 2|}{\sqrt{1^2}} \\ 3 &= \frac{|x + 2|}{\sqrt{1}} \rightarrow 3 \cdot 1 = |x + 2| \\ \pm 3 &= x + 2 \rightarrow \begin{cases} x + 5 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Abbiamo le ascisse di intersezione con la retta  $y = 2x$ . Ora possiamo sostituire e trovare  $y$ .

$$\begin{cases} y = -5 \cdot 2 \\ y = 1 \cdot 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_1(-5, -10) \\ P_2(1, 2) \end{cases}$$

### Fasci di rette

**Esercizio 1** Dopo aver verificato che l'equazione

$$(2k + 1)x - 4ky + 3 + 2k = 0 \quad (k \in \mathbb{R})$$

rappresenta un fascio proprio di rette, determinare:

1. il centro  $C$  del fascio;
2. la retta  $r_1$  del fascio perpendicolare alla bisettrice del 2° e 3° quadrante; detto  $H$  il loro punto di incontro, trovare poi l'area del triangolo  $CHO$ , essendo  $O$  l'origine degli assi;
3. le rette del fascio che intersecano il segmento  $OH$ ;

4. le bisettrici degli angoli formati dalle rette  $CO$  e  $CH$ .

Prima di avere il disegno, dobbiamo avere qualcosa da disegnare. Se disegnassimo l'intero fascio sarebbe come colorare tutto il piano.

Per il punto 1 dobbiamo mettere a sistema le due rette generatrici. Nella forma attuale, le due equazioni non sono facilmente riconoscibili, quindi raccogliamo  $k$  così da isolare le due rette

$$(2k+1)x - 4ky + 3 + 2k = 0 \rightarrow 2kx + x - 4ky + 3 + 2k = 0$$

$$k \underbrace{(2x - 4y + 2)}_{\text{Generatrice 1}} + \underbrace{x + 3}_{\text{Generatrice 2}} = 0$$

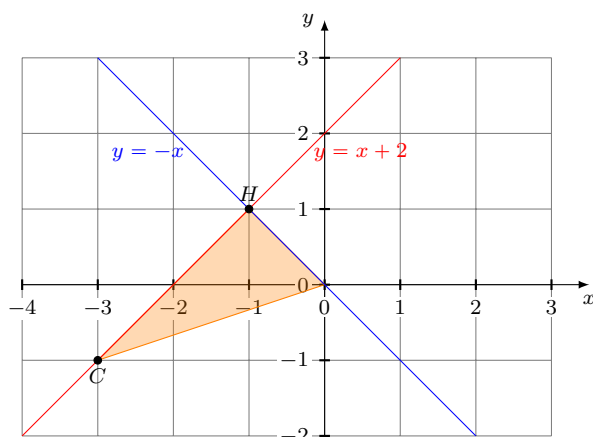
Avendo ora questa forma, possiamo evidentemente vedere che effettivamente si tratta di un fascio proprio di rette.

Come trovare il centro del fascio? Avendo le due generatrici, le mettiamo a sistema e troviamo la loro intersezione

$$\begin{cases} 2x - 4y + 2 = 0 \\ x = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x - 4y + 2 = 0 \\ x = -3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 4y = 5 \\ x = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{4} \\ x = -3 \end{cases}$$

Per il punto 2 facciamo il disegno



Ho già inserito le cose che ora andiamo a trovare. Innanzitutto sappiamo che la bisettrice del 2° e 3° quadrante è  $y = -x$ , quindi sappiamo che la  $m$  della perpendicolare deve essere uguale a 1. Sappiamo anche che fa parte del fascio quindi passa per  $C(-3, -1)$ .

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y + 1 = x + 3 \rightarrow \boxed{y = x + 2}$$

E ora ci troviamo  $H$ , ovvero il punto di intersezione

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x = x + 2 \\ y = -x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ora possiamo trovare l'area del triangolo

$$\mathcal{A}(CHO) = \frac{1}{2} |x_1y_2 + y_1x_3 + x_2y_3 - x_3y_2 - y_3x_1 - x_2y_1| \rightarrow$$

$$\mathcal{A}(CHO) = \frac{1}{2} |x_1y_2 + y_1x_3 + x_2y_3 - x_3y_2 - y_3x_1 - x_2y_1| \rightarrow$$

$$\mathcal{A}(CHO) = \frac{1}{2} |x_1y_2 - x_2y_1| \rightarrow \mathcal{A}(CHO) = \frac{1}{2} |-3 - 1| =$$

$$\frac{1}{2} |-4| \rightarrow \mathcal{A}(CHO) = \frac{1}{2} \cdot 4 = \boxed{2}$$

Il punto 3, richiede di trovare i  $k$  per cui una retta del fascio passi in mezzo al segmento  $OH$ . La prima cosa da fare è quindi trovare i  $k$  degli "estremi"  $O$  e  $H$ .

$$k_O = -\frac{a_1x_O + b_1y_O + c_1}{ax_O + by_O + c} \rightarrow k_O = -\frac{c_1}{c} = -\frac{3}{2}$$

$$k_H = -\frac{a_1x_H + b_1y_H + c_1}{ax_H + by_H + c} \rightarrow k_H = -\frac{-1 + 0 + 3}{-2 - 4 + 2} = \frac{1}{2}$$

Ora sapendo che la retta esclusa attraversa anch'essa il segmento (per dimostrarlo basta semplicemente disegnarla), deduciamo che ai lati della esclusa ci siano le rette per  $k \rightarrow \pm\infty$ , ovvero man mano che ci si avvicina alla retta esclusa più ci si avvicina all'infinito. Questo ci porta a trovare l'intervallo che è

$$\boxed{k \leq -\frac{3}{2} \vee k \geq \frac{1}{2}}$$

Infine, il punto 4 richiede un po' di ragionamento. Una bisettrice è la retta passante per due punti equidistanti alle rette dell'angolo. Per prima cosa quindi, definiamo  $P(x, y)$  un punto del piano in modo che sia  $d_{P,CO} = d_{P,CH}$ . Per prima cosa dunque dobbiamo trovare le rette che passano per  $CO$  e  $CH$ .

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \rightarrow \frac{y + 1}{1 + 1} = \frac{x + 3}{-1 + 3}$$

$$y + 1 = x + 3 \rightarrow CO : x - y + 2 = 0$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \rightarrow \frac{y + 1}{1} = \frac{x + 3}{3}$$

$$3y + 3 = x + 3 \rightarrow CH : -x + 3y = 0$$

E ora possiamo scrivere le formule per le distanze

$$\frac{|x - y + 2|}{1} = \frac{|-x + 3y|}{\sqrt{10}} \rightarrow$$

$$\sqrt{10}(|x - y + 2|) = |-x + 3y| \rightarrow$$

$$\sqrt{10}x - \sqrt{10}y + 2\sqrt{10} = \pm(-x + 3y) \rightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{10}x - \sqrt{10}y + 2\sqrt{10} = -x + 3y \\ \sqrt{10}x - \sqrt{10}y + 2\sqrt{10} = x - 3y \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x(\sqrt{10} + 1) - y(\sqrt{10} + 3) + 2\sqrt{10} \\ x(\sqrt{10} - 1) - y(\sqrt{10} - 3) + 2\sqrt{10} \end{cases} \rightarrow$$

$$\boxed{x(\sqrt{10} \pm 1) - y(\sqrt{10} \pm 3) + 2\sqrt{10}}$$

## Circonferanza

**Esercizio 1** Determinare l'equazione della circonferenza passante per  $A(-2, 2)$  e  $B(4, -4)$  e avente il centro sulla retta  $x + 2y - 8 = 0$ , e le equazioni delle rette  $t_1$  e  $t_2$  passanti per  $H(0, 8)$  e tangenti alla circonferenza. detta poi  $t_1$  la tangente con coefficiente angolare positivo, determinare le rette ad essa perpendicolari che formano con gli assi cartesiani un triangolo di area  $\frac{54}{5}$ . Determinare, inoltre, i punti di  $t_1$  che hanno distanza uguale a  $\sqrt{2}$  dalla retta  $x + y - 1 = 0$ .

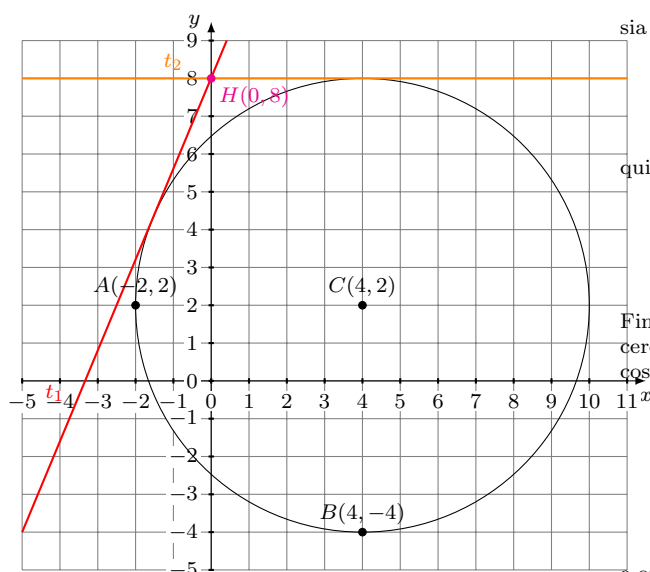
Per prima cosa dobbiamo trovare l'equazione della circonferenza  $\mathcal{C}$ . Come fare? Sappiamo che  $A$  e  $B$  appartengono



alla circonferenza e che il centro appartiene a  $x + 2y - 8 = 0$ . Mettiamo queste informazioni a sistema e risolviamo

$$\begin{cases} 4 + 4 - 2a + 2b + c = 0 \\ 16 + 16 + 4a - 4b + c = 0 \rightarrow \\ -\frac{a}{2} - b - 8 = 0 \\ -8 + 2a - 2b = c \\ 32 + 4a - 4b - 8 + 2a - 2b = 0 \rightarrow \\ -\frac{a}{2} - b - 8 = 0 \\ -8 + 2a - 2b = c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -8 + 2a - 2b = c \\ 4 + a + \frac{a}{2} + 8 = 0 \rightarrow \\ b = -\frac{a}{2} - 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -8 + 2a - 2b = c \\ \frac{3}{2}a = -12 \rightarrow \\ b = -\frac{a}{2} - 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = -16 \\ a = -8 \\ b = -4 \end{cases} \rightarrow \mathcal{C}: x^2 + y^2 - 8x - 4y - 16 = 0$$

Avendo ora l'equazione possiamo disegnarla.



Per trovare le due tangenti alla circonferenza che passano per  $H$ , ci troviamo il fascio di rette che ha  $H$  come centro

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - mx - 8 = 0$$

e sappiamo che le tangenti hanno il loro punto di tangenza

che dista dal centro esattamente  $r$ , quindi

$$\begin{aligned} \frac{|ax_P + y_P + c_P|}{\sqrt{a^2 + b^2}} &= d \rightarrow \frac{|-4m + 2 - 8|}{\sqrt{1^2 + m^2}} = 6 \rightarrow \\ |-4m + 2 - 8|^2 &= (6\sqrt{1^2 + m^2})^2 \rightarrow \\ 16m^2 - 36 + 48m &= 36 + 36m^2 \rightarrow \\ -20m^2 + 48m &= 0 \rightarrow 5m^2 - 12m = 0 \\ m_{1/2} &= \frac{12 \pm \sqrt{144 + 0}}{10} \rightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{12}{5} \\ m_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

e le tangenti sono

$$\begin{cases} t_1: y = \frac{12}{5}x + 8 \\ t_2: y = 8 \end{cases}$$

Ora dobbiamo trovare tutte le perpendicolari a  $t_1$  che, con l'intersezione degli assi forma un triangolo di area  $\frac{54}{5}$ . Per farlo, intanto troviamo le perpendicolari.

$$\mathcal{F}_\perp: y = -\frac{5}{12}x + q$$

E ora possiamo trovare le intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = q \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{12}{5}q \\ y = 0 \end{cases}$$

E ora imponiamo che l'area del triangolo formato con gli assi sia uguale a  $\frac{54}{5}$

$$\frac{54}{5} = \frac{1}{2} \left| q \cdot -\frac{12}{5}q \right| \rightarrow \frac{54}{5} = \frac{6}{5} |q^2| \rightarrow 9 = q^2 \rightarrow q = \pm 3$$

quindi le rette cercate sono

$$y = -\frac{5}{12}x \pm 3$$

Finalmente possiamo avviarcia alla conclusione. Dobbiamo cercare i punti di  $t_1$  che distano  $\sqrt{2}$  da  $x + y - 1$ . Per prima cosa quindi, troviamo le rette che distano  $\sqrt{2}$  dalla data

$$\begin{aligned} \frac{|x + y - 1|}{\sqrt{2}} &= \sqrt{2} \rightarrow |x + y - 1| = 2 \rightarrow \\ \begin{cases} x + y - 1 = 2 \\ x + y - 1 = -2 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

e ora non resta che trovare le intersezioni con  $t_1$

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y = \frac{12}{5}x + 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + \frac{12}{5}x + 8 + 1 = 0 \\ y = \frac{12}{5}x + 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{45}{17} \\ y = \frac{76}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ y = \frac{12}{5}x + 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + \frac{12}{5}x + 5 = 0 \\ y = \frac{12}{5}x + 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{25}{17} \\ y = \frac{76}{17} \end{cases}$$

## Fasci di circonferenze

**Esercizio 1** Avendo il fascio

$$x^2 + y^2 - 2(k+1)x - 2ky - 4k + 1 = 0$$

indicare con  $\gamma_1$  quella il cui centro  $C$  appartiene alla retta  $3x - y + 5 = 0$ . Detti  $E$  ed  $F$  i punti di intersezione di  $\gamma_1$  con l'asse  $y$ , trovare le equazioni delle tangenti a  $\gamma_1$  in  $E$  ed  $F$ ; detto inoltre  $T$  il loro punto di intersezione, dopo aver dimostrato che il quadrilatero  $CETF$  è un quadrato, calcolarne l'area. Determinare inoltre l'equazione della circonferenza di centro  $T$  e tangente esternamente a  $\gamma_1$ .

Per prima cosa riordiniamo l'equazione per avere tutti i coefficienti

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2(k+1)x - 2ky - 4k + 1 &= 0 \rightarrow \\ x^2 + y^2 + x(-2k-2) + y(-2k) + 4k + 1 &= 0 \end{aligned}$$

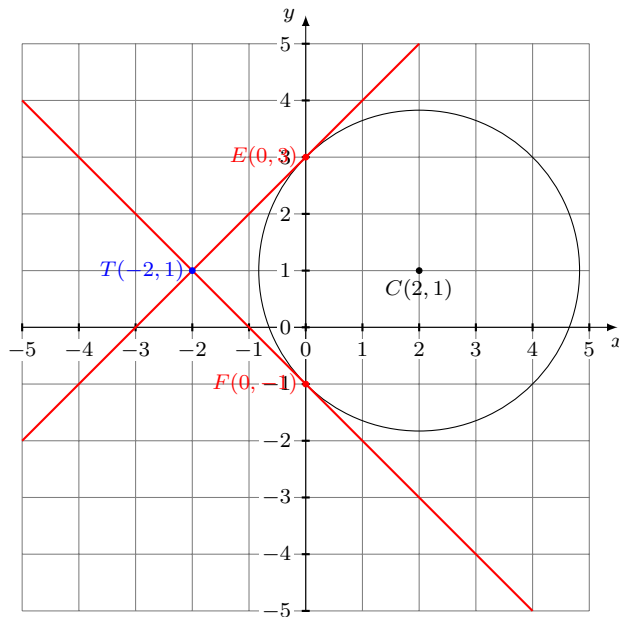
avendo ora i coefficienti, possiamo imporre la condizione che il centro sia un punto della retta

$$\begin{aligned} 3\left(-\frac{a}{2}\right) - \left(-\frac{b}{2}\right) - 5 &= 0 \rightarrow 3\frac{2k+2}{2} - k - 5 = 0 \rightarrow \\ 6k + 6 - 2k - 10 &= 0 \rightarrow k = 1 \end{aligned}$$

e sostituire per ottenere

$$\boxed{\gamma_1 : x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0}$$

Prima di proseguire, disegniamo la circonferenza



Sono già segnati i punti che ora andremo a trovare:  $E$  e  $F$  ovvero le intersezioni con  $y$ .

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \rightarrow y_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = -1 \end{cases}$$

Quindi i due punti sono

$$\boxed{E(0, 3) \quad F(0, -1)}$$

Ora troviamo le tangenti in  $E$  ed  $F$ .

$$x \cdot x_P + y \cdot y_P + a \frac{x + x_P}{2} + b \frac{y + y_P}{2} + c = 0 \rightarrow$$

$$t_E : x \cdot 0 + y \cdot 3 - 4 \frac{x + 0}{2} - 2 \frac{y + 3}{2} - 3 = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{-x + y - 3 = 0 \rightarrow y = x + 3}$$

e

$$x \cdot x_P + y \cdot y_P + a \frac{x + x_P}{2} + b \frac{y + y_P}{2} + c = 0 \rightarrow$$

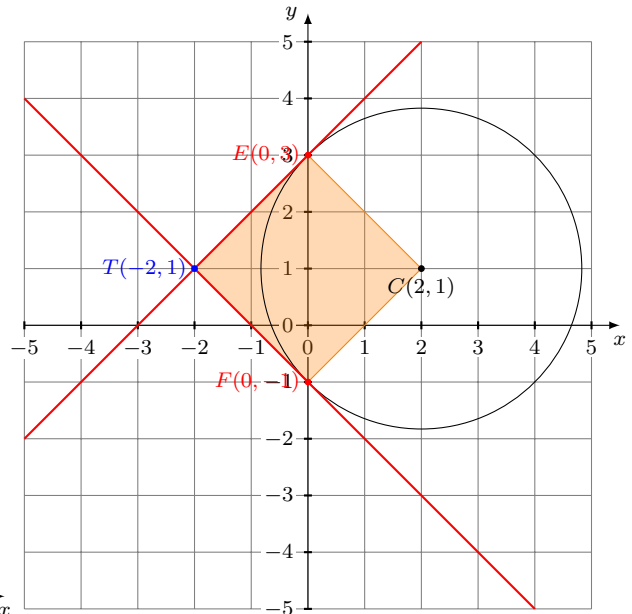
$$t_F : x \cdot 0 + y \cdot (-1) - 4 \frac{x + 0}{2} - 2 \frac{y - 1}{2} - 3 = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{-x - y - 1 = 0 \rightarrow y = -x - 1}$$

E ora possiamo trovare il punto di intersezione

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x - 1 = x + 3 \\ y = -x - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Aggiorniamo ora il disegno per mettere in luce il quadrato  $CETF$



Come possiamo dimostrare che è un quadrato? Proviamo a guardare gli angoli: l'angolo  $\widehat{CFT}$  e l'angolo  $\widehat{CET}$  sono sicuramente retti in quanto sono angoli formati da un raggio e una tangente e per definizione stessa di tangente sono retti. Anche l'angolo  $\widehat{FTE}$  è retto in quanto i coefficienti angolari delle tangenti sono reciprocamente opposti ( $m_1 m_2 = -1$ ). Ora manca solo l'angolo  $\widehat{ECF}$  da dimostrare. Possiamo semplicemente guardare il coefficiente angolare della retta che passa tra  $F$  e  $C$  e vedere che risulta pari a

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow m = \frac{1 + 1}{2 - 0} = 1$$

che è esattamente uguale a quello di  $t_E$  quindi le due rette sono parallele. Se  $t_F$  incide su  $t_E$  con un angolo retto, deve per forza incidere con lo stesso angolo anche nelle sue parallele.

Abbiamo dimostrato che ha quattro angoli retti, per dimostrare che è un quadrato basta vedere che due dei lati (che formano un angolo retto) sono uguali in quanto sono raggi. Quindi  $CETF$  è un quadrato.

Per trovarne l'area basta elevare alla seconda la lunghezza del raggio

$$r = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - c} \rightarrow r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

E quindi l'area vale

$$\mathcal{A}(CETF) = r^2 \rightarrow \mathcal{A}(CETF) = \sqrt{8}^2 = 8$$

Infine dobbiamo trovare la circonferenza con centro  $T$  e tangente esternamente a  $\gamma_1$ . Per farlo abbiamo molti modi, ecco il più semplice. Sappiamo già quanto deve valere il raggio perché tocchi la circonferenza. Deve essere pari a  $TC - r_{\gamma_1}$ . Quindi

$$r = TC - r_{\gamma_1} \rightarrow r = 4 - 2\sqrt{2}$$

Usando la formula per trovare il raggio possiamo scrivere

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} \rightarrow 4 - 2\sqrt{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$$

Abbiamo 3 variabili quindi dobbiamo trovare un modo per toglierne 2.  $a$  e  $b$  sono utilizzate anche nella formula per trovare il centro della circonferenza. Si dà il caso che noi abbiamo il centro! Quindi

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} = -2 \\ -\frac{b}{2} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \end{cases}$$

e ora possiamo trovare  $c$

$$\begin{aligned} 4 - 2\sqrt{2} &= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} \rightarrow 4 - 2\sqrt{2} = \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{4}{4} - c} \rightarrow \\ 4 - 2\sqrt{2} &= \sqrt{5 - c} \rightarrow 24 - 16\sqrt{2} = 5 - c \rightarrow \\ c &= 16\sqrt{2} - 19 \end{aligned}$$

Quindi la nostra circonferenza sarà

$$\boxed{\gamma : x^2 + y^2 + 4x - 2y + 16\sqrt{2} - 19 = 0}$$

## Parabola

**Esercizio 1** Nel piano  $xOy$  determinare

- l'equazione della parabola  $\mathcal{P}_1$  avente asse parallelo all'asse  $y$  e passante per  $A(2,0)$ ,  $B(6,0)$  e  $C(0,6)$ ;
- l'area del triangolo  $ACH$  essendo  $H$  l'ulteriore punto di intersezione di  $\mathcal{P}_1$  con la perpendicolare per  $A$  alla retta  $AC$ ;
- l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo  $CAH$ ;

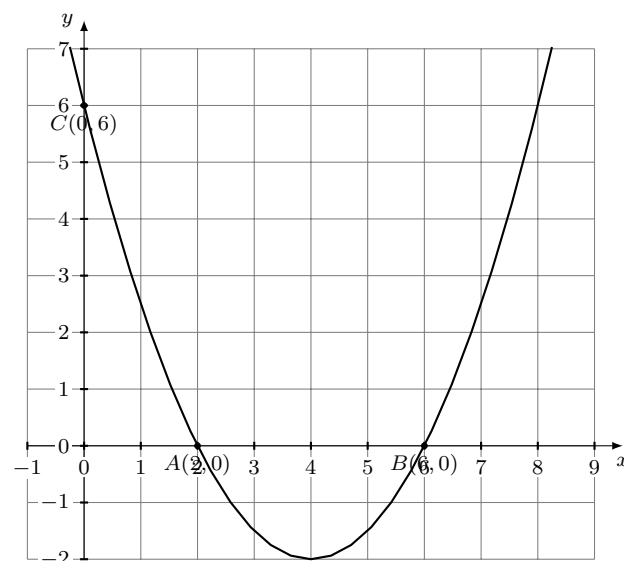
Per trovare l'equazione della parabola, possiamo sfruttare i 3 punti conosciuti e metterli a sistema

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ 36a + 6b + c = 0 \\ c = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{-b-3}{2} \\ 36\frac{-b-3}{2} + 6b + 6 = 0 \\ c = 6 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} a = \frac{-b-3}{2} \\ -18b - 54b + 6 = 0 \\ c = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -4 \\ c = 6 \end{cases} \rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{P}_1 : y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6}$$

E per concludere il punto 1 disegniamo il grafico



Il punto 2 richiede qualche passaggio intermedio. Per prima cosa troviamo la retta passante per  $AC$

$$r_{AC} : \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \rightarrow \frac{y}{6} = \frac{x - 2}{-2} \rightarrow r_{AC} : y = -3x + 6$$

E ora dobbiamo trovare la perpendicolare passante per  $A$ .

$$r_{\perp AH} : y = -\frac{1}{m}x + q \rightarrow y = \frac{x}{3} + q \rightarrow 0 = \frac{2}{3} + q \rightarrow r_{\perp AH} : y = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$$

E possiamo trovare  $H$  facendo l'intersezione con la parabola  $\mathcal{P}_1$

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \\ y = \frac{x}{3} - \frac{2}{3} \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \\ y = \frac{x}{3} - \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \\ -\frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{3}x - \frac{20}{3} &= 0 \rightarrow x_{1/2} = \frac{-\frac{13}{3} \pm \sqrt{\frac{169}{9} - 4 \cdot -\frac{1}{2} \cdot -\frac{20}{3}}}{-1} \rightarrow \\ -\frac{13}{3} \pm \frac{7}{3} &\rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{20}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

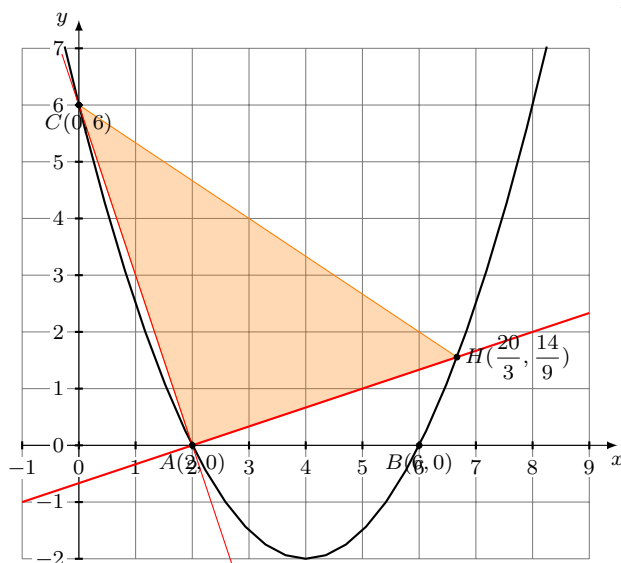
Il primo risultato ce lo aspettavamo in quanto è il punto  $A$  che fa parte sia della retta che della parabola.

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \text{ con } x = \frac{20}{3} \rightarrow y = \frac{14}{9}$$

E quindi il nostro punto è

$$H\left(\frac{20}{3}, \frac{14}{9}\right)$$

Prima di proseguire, aggiorniamo il disegno



L'area del triangolo è facilmente calcolabile con la formula

$$\mathcal{A}(\mathcal{T}) = \frac{1}{2} |x_1 y_2 + y_1 x_3 + x_2 y_3 - x_3 y_2 - y_3 x_1 - x_2 y_1|$$

e quindi sostituendo

$$\mathcal{A}(\mathcal{T}) = \frac{1}{2} |x_1 y_2 + y_1 x_3 + x_2 y_3 - x_3 y_2 - y_3 x_1 - x_2 y_1| \rightarrow$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{T}) = \frac{1}{2} |6 \cdot \frac{20}{3} + 2 \cdot \frac{14}{9} - 2 \cdot 6| = \frac{1}{2} \frac{280}{9} = \boxed{\frac{140}{9}}$$

Il punto 3 richiede qualche passaggio intermedio anch'esso. Per trovare la circonferenza circoscritta al triangolo, dobbiamo innanzitutto trovare il centro. In un triangolo qualsiasi, il centro della circonferenza circoscritta è denominato *circocentro* ed esso è il punto di intersezione degli assi dei lati. Quindi per prima cosa si trovino i punti medi dei lati utilizzando la formula

$$\left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

e otteniamo i seguenti risultati

$$M(1, 3) \quad N\left(\frac{13}{3}, \frac{7}{9}\right) \quad K\left(\frac{10}{3}, \frac{34}{9}\right)$$

Dobbiamo poi trovarci le rette dei lati per poi poter trovarne le perpendicolari. Avendo già fatto il processo, riporto solo i risultati

$$r_{AC} : y = -3x + 6$$

$$r_{CH} : y = -\frac{2}{3}x + 6$$

$$r_{AH} : y = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$$

Per trovare le perpendicolari abbiamo una formula molto comoda

$$y = -\frac{1}{m}(x - x_0) + mx_0 + q$$

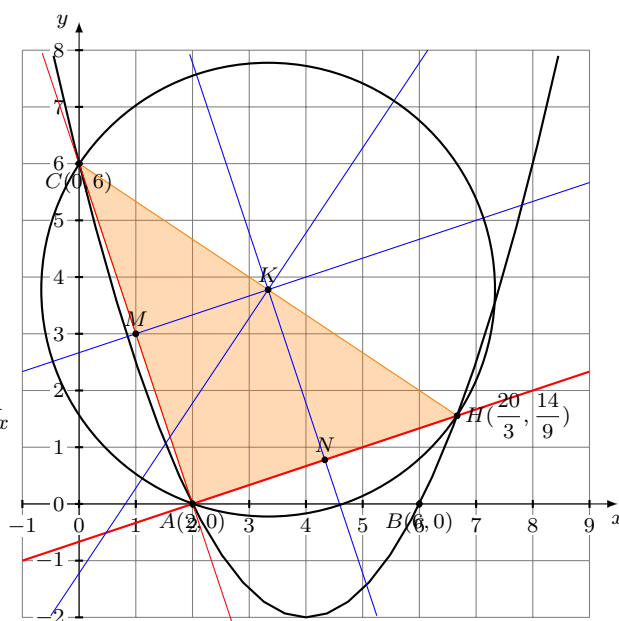
Essendo anche qui solo una questione di calcoli, riporto solo i risultati

$$r_{\perp AC} : y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$$

$$r_{\perp CH} : y = \frac{3}{2}x + \frac{65}{9}$$

$$r_{\perp AH} : y = -3x + \frac{124}{9}$$

E ora possiamo disegnare



Da questo disegno possiamo vedere che il punto di intersezione tra le tre rette è esattamente K. Quindi per definire la circonferenza, basta solo trovare il raggio che equivale alla distanza  $CK = KH$ .

$$r = CK = \sqrt{(x_C - x_K)^2 + (y_C - y_K)^2} \rightarrow$$

$$r = \sqrt{\left(0 - \frac{10}{3}\right)^2 + \left(6 - \frac{34}{9}\right)^2} \rightarrow r = \sqrt{\frac{400}{9} + \frac{1600}{81}} = \frac{20\sqrt{13}}{9}$$

E quindi la circonferenza diventa

$$\mathcal{C} : \left(x - \frac{10}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{34}{9}\right)^2 = \frac{20\sqrt{13}}{9}$$

## Ellisse

**Esercizio 1** Scritta l'equazione della parabola del tipo  $x = ay^2 + by + c$  avente il vertice  $V$  sull'asse  $x$  e passante per i punti  $(6, 2)$  e  $(16, 3)$ , determinare l'equazione dell'ellisse avente un vertice in  $V$  e due altri vertici nei punti di intersezione della parabola con l'asse  $y$ . Determinare i punti  $P_1$  e  $P_2$  dell'ellisse che hanno distanza  $\frac{\sqrt{39}}{2}$  da  $V$ .

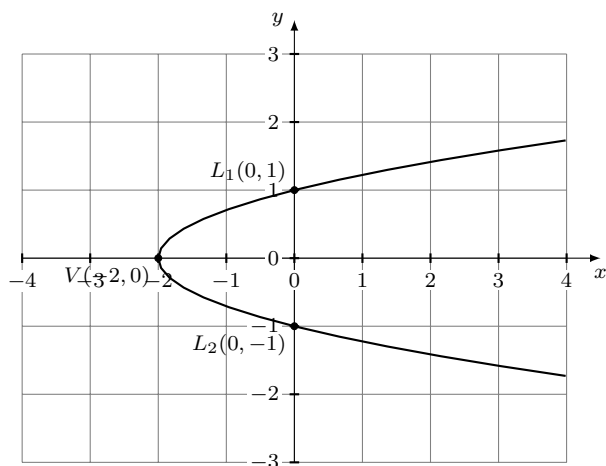
Trovare l'equazione della parabola è estremamente semplice, infatti basta mettere a sistema le informazioni che si hanno.

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 0 \\ 6 = 4a + 2b + c \\ 16 = 9a + 3b + c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 4a + c - 6 = 0 \\ c = -9a + 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 2 \\ c = -2 \end{cases}$$

Quindi la nostra parabola è  $\mathcal{P} : x = 2y^2 - 2$  e possiamo anche subito trovare il vertice

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4} \rightarrow -\frac{-4 \cdot 2 \cdot -2}{4} = -2 \rightarrow V(-2, 0)$$

Disegniamo ora ciò che abbiamo



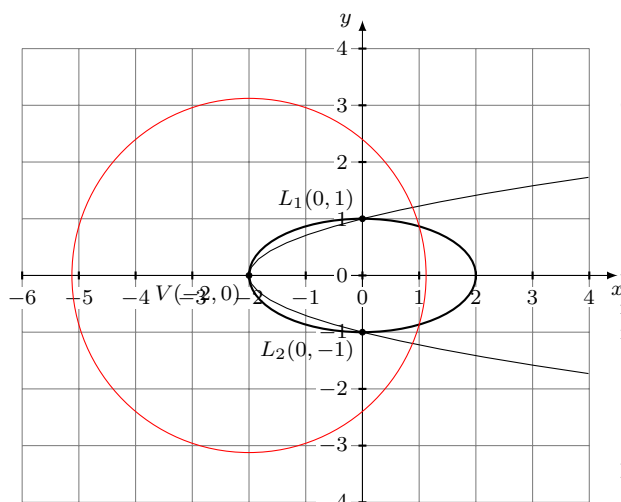
Troviamo subito gli altri due vertici dell'ellisse sostituendo  $x = 0$  nell'equazione della parabola

$$y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1 \rightarrow L(0, \pm 1)$$

E ora possiamo trovare l'ellisse sapendo che passa attraverso  $V$  e  $L_1$  (bastano solo questi due vertici in quanto è simmetrica).

$$\begin{cases} \frac{4}{a} = 1 \\ \frac{1}{b} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases} \rightarrow \mathcal{E}: \frac{x^2}{16} + y^2 = 1$$

Prima di disegnarla, osserviamo il punto successivo: ci chiede i punti dell'ellisse che si trovano ad una certa distanza da  $V$ . Abbiamo un paio di modi, uno di questi è immaginare una circonferenza di centro  $V$  che abbia raggio pari alla distanza richiesta e vedere le intersezioni con l'ellisse.



La nostra circonferenza è

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r \rightarrow \mathcal{C}: (x + 2)^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{39}}{2}\right)^2$$

Per trovare i punti di intersezione, mettiamo a sistema le due equazioni

$$\begin{cases} (x + 2)^2 + y^2 = \frac{39}{4} \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{-4x^2 - 16x - 23}{4} \\ x^2 + 4 \cdot \frac{-4x^2 - 16x - 23}{4} = 4 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} y^2 = \frac{-4x^2 - 16x - 23}{4} \\ x_1 = -\frac{19}{3} \\ x_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = \pm \frac{5\sqrt{13}}{6} \\ y_2 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x_1 = -\frac{19}{3} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Da queste soluzioni, eliminiamo quelle che non appartengono ad  $\mathbb{R}$  e quindi otteniamo i punti di intersezione

$$P_1\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad P_2\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

## Goniometria

**Esercizio 1** Risolvere la seguente equazione

$$(\sqrt{3} + 2) \cos x + \sin x + 1 = 0$$

Abbiamo già la fortuna che questa equazione è già stata semplificata ed organizzata. Notiamo osservandola che si tratta di un'equazione goniometrica lineare. Quindi procediamo con la risoluzione

Poniamo

$$\begin{aligned} \cos x &= X \text{ e } \sin x = Y \\ \begin{cases} (\sqrt{3} + 2)X + Y + 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} &\rightarrow \\ \begin{cases} Y = -1 - (\sqrt{3} + 2)X \\ X^2 + 1 + (7 + 4\sqrt{3})X^2 + 2(2 + \sqrt{3})X = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi otteniamo le due possibili soluzioni

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} X = -\frac{1}{2} \\ Y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

I due sistemi rappresentano le intersezioni con la circonferenza quindi ora non resta che trovare quali angoli (o archi) intersecano la circonferenza in quelle posizioni. Ed essi sono

$$x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

**Esercizio 2** Risolvere la seguente equazione

$$\sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0$$

Notiamo che l'equazione è omogenea in quanto tutti i suoi termini sono di secondo grado. Dato che contiene sia il termine di secondo grado in  $\sin x$  sia in

$\cos x$ , possiamo scegliere per cosa dividere. Per preferenza personale, dividiamo per  $\cos^2 x$ .

$$\frac{\sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0 \rightarrow$$

$$\tan^2 x + (1 - \sqrt{3}) \tan x - \sqrt{3} = 0$$

che risolta dà

$$(\tan x)_{1/2} = \frac{\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{1 + 3 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}}{2} =$$

$$\frac{\sqrt{3} - 1 \pm (1 - \sqrt{3})}{2} = \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = \sqrt{3} \end{cases}$$

che forniscono le soluzioni

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ e } x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Definizione di limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} l, & \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \\ \infty, & \forall k > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > k \\ -\infty, & \forall k > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -k \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} l, & \forall \varepsilon > 0, \exists h > 0 \mid \forall x : x > h \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \\ \infty, & \forall k > 0, \exists h > 0 \mid \forall x : x > h \Rightarrow f(x) > k \\ -\infty, & \forall k > 0, \exists h > 0 \mid \forall x : x > h \Rightarrow f(x) < -k \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} l, & \forall \varepsilon > 0, \exists h > 0 \mid \forall x : x < -h \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \\ \infty, & \forall k > 0, \exists h > 0 \mid \forall x : x < -h \Rightarrow f(x) > k \\ -\infty, & \forall k > 0, \exists h > 0 \mid \forall x : x < -h \Rightarrow f(x) < -k \end{cases}$$

## Logaritmi

**Esercizio 1** Risolvi

$$50 \left( \frac{4}{25} \right)^x - 133 \left( \frac{2}{5} \right) + 20 = 0$$

Per risolvere questo tipo di equazioni in modo semplice possiamo osservare attentamente e notare che il primo termine tra parentesi  $\left( \frac{4}{25} \right)$  non è altro che il quadrato del secondo  $\left( \frac{2}{5} \right)!$  Questo ci porta riscrivere l'equazione come

$$50 \left( \frac{2}{5} \right)^{2x} - 133 \left( \frac{2}{5} \right) + 20 = 0$$

E ora possiamo risolvere semplicemente.

Poniamo

$$t = \left( \frac{2}{5} \right)^x$$

si ha quindi

$$50t^2 - 133t + 20 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{133 \pm \sqrt{133^2 - 4 \cdot 50 \cdot 20}}{100} = \frac{133 \pm 117}{100}$$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{5}{2} \\ t_2 = \frac{4}{25} \end{cases}$$

Torniamo a sostituire per  $t_1$

$$\left( \frac{2}{5} \right)^x = \frac{5}{2} \rightarrow x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{5}{2}$$

Ricordando la proprietà  $\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$

$$x = -\log_{\frac{5}{2}} \frac{5}{2} = \boxed{-1}$$

Sostituiamo per  $t_2$



$$\left( \frac{2}{5} \right)^x = \frac{4}{25} \rightarrow x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{4}{25}$$

Ricordando che  $\log_a b^k = k \log_a b$

$$x = 2 \log_{\frac{2}{5}} \frac{2}{5} = \boxed{2}$$

**Esercizio 2**

## Note

	<a href="#">Cercare come fare delle linee al posto delle graffe .</a>	11
	<a href="#">Migliorare la formattazione . . . . .</a>	22