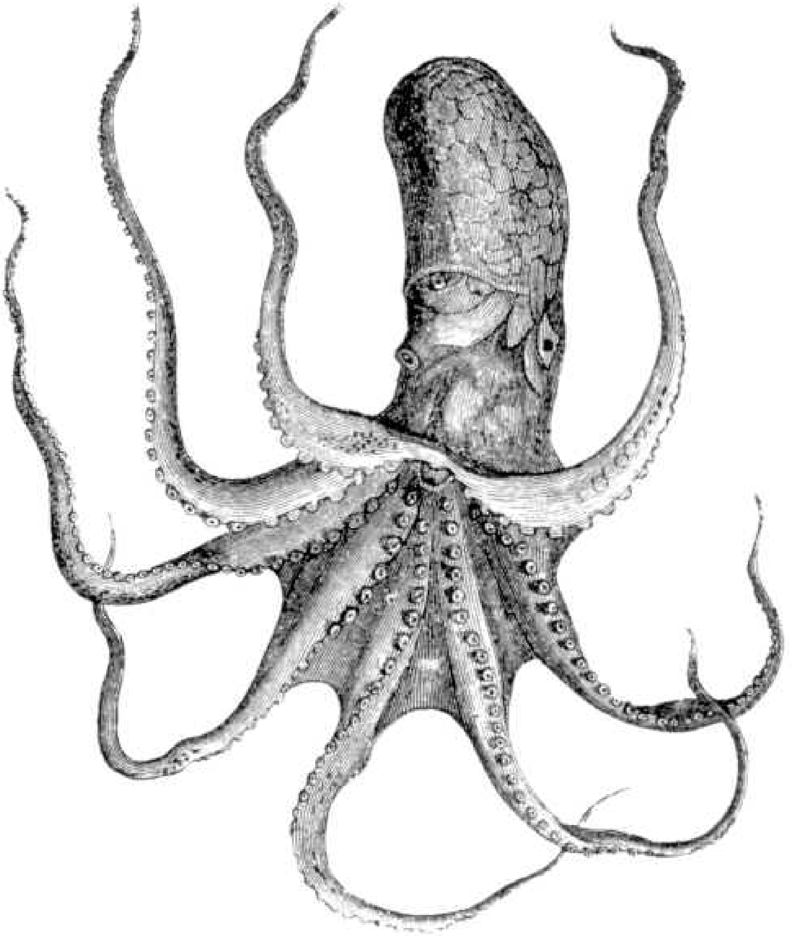


'Mi piace la libertà della matematica. Se studi fisica o chimica devi descrivere il mondo reale. Ma in matematica puoi costruire le tue strutture. Puoi camminare in mondi creati dall'immaginazione delle persone. Non sei legato al mondo reale. È come essere Dio in un certo senso. Puoi creare mondi, e studiarli. Credo sia per una combinazione della bellezza, dell'immaginazione e della libertà. '
- Aner Shalev

'La matematica, ahinoi, si presta ai colpi bassi. C'è un «terrorismo matematico», che consiste nello spaventare l'avversario sparandogli contro raffiche di equazioni, derivate, integrali, logaritmi, matrici, teoremi e corollari.'
- Sergio Ricossa

'Più scrivi, più sbagli.'
- Paolo Mainardis

Formulario di Matematica

Davide Cossu

Questo è un formulario con le formule di matematica fatte durante tutti e cinque gli anni di un liceo scientifico con alcune spiegazioni teoriche ed esercizi.

Version 2.7182818 2018-04-29

Indice

Durante tutto il formulario, si userà il sistema internazionale di notazione, ovvero . per separare interi da decimali e , per separare le migliaia se necessario.

Simboli

Qui verrano chiariti i simboli che verranno utilizzati nel formulario. Molti di essi si troveranno principalmente nelle definizioni formali ma ritorneranno utili anche negli esercizi.

$\sum_{i=l}^{n} f(i)$	$f(l) + f(l+1) + \cdots + f(n)$
$\prod_{i=l}^{n} f(i)$	$f(l) \cdot f(l+1) \cdots f(n)$
$\forall$	Per ogni
$\exists$	Esiste
$\in$	Appartiene
$\notin$	Non appartiene
$\subset$	È contenuto
$\not\subset$	Non è contenuto
$\cup$	Unito
$\cap$	Intersecato
$\mid$, :	Tale che
$\Rightarrow$	Si ha che
$\mapsto$	Diventa
$\rightarrow$	Ne segue che, tende
$\Longleftrightarrow$	Se e solo se

Generale

In questa sezione verranno trattati alcuni temi utili in tutto il formulario, come i prodotti notevoli o alcune prprietà dei radicali.
Per gli esercizi si vada a pagina 39.

Prodotti notevoli

I prodotti notevoli sono dei prodotti o delle fattorizzazioni sempre vere per qualunque numero. Risultano essere molto utili quando si deve semplificare un'espressione.

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Questi hanno la seguente formula generale

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

Questi hanno la seguente formula generale, anche conosciuto come 'Binomio di Newton', approfondito nella sezione dedicata al calcolo combinatorio.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Radicali

I radicali sono delle espressioni spesso irrazionali che contengono almeno una radice. La radice è anche pensabile come una potenza

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}.$$

Addizione e Sottrazione

Due radicali si possono addizionare o sottrarre se e solo se **sono simili**

$$m \cdot \sqrt[n]{a} \pm p \cdot \sqrt[n]{a} = (m \pm p) \cdot \sqrt[n]{a}$$

Divisione e Moltiplicazione

Due radicali si possono moltiplicare o dividere se e solo se **hanno lo stesso indice**

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab} \qquad \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}, \quad b \neq 0$$

Razionalizzare un radicale

Per razionalizzare un radicale si intende eliminare il radicale dal denominatore di una frazione in quanto non è possibile dividere un numero per un irrazionale.

$$\frac{d}{c \cdot \sqrt{b}} = \frac{d}{c \cdot \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{d \cdot \sqrt{b}}{cb} \qquad b > 0,\ c \neq 0$$
$$\frac{c}{a \pm \sqrt{b}} = \frac{c}{a \pm \sqrt{b}} \cdot \frac{a \mp \sqrt{b}}{a \mp \sqrt{b}} = \frac{c \cdot (a \pm \sqrt{b})}{a^2 - b} \qquad a \pm \sqrt{b} \neq 0$$
$$\frac{c}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{c}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b} \qquad \sqrt{a} \pm \sqrt{b} \neq 0$$

Per razionalizzare si deve moltiplicare per un fattore che annulli il radicale stesso, spesso quel fattore è il radicale stesso.

Radicale di un radicale

Per risolvere o semplificare espressioni come $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ si può usare questa formula

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Disequazioni con radicali

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left\{ \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \right\}$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \lesseqgtr \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) \geqslant 0 \\ f(x) \lesseqgtr g(x) \end{cases}$$

Equazioni particolari

Ci sono infiniti tipi di equazioni, alcune però hanno delle soluzioni immediate, eccone alcune.

Equazioni binomie

Le equazioni binomie sono nella forma $x^n = a$. Le loro soluzioni sono le seguenti

$$x = \pm \sqrt[n]{a} \qquad \text{Se } n \text{ è pari e } a \geqslant 0$$
$$x = \sqrt[n]{a} \qquad \text{Se } n \text{ è dispari}$$

Equazioni di secondo grado

Le equazioni di secondo grado sono tra le più diffuse. Presentano alcune caratteristiche.
Sia $ax^2 + bx + c = 0$ la nostra equazione, allora x_1 e x_2 sono le sue soluzioni. Per trovarle si usi la seguente formula

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Conoscendo le soluzioni si può semplificare l'equazione in questo modo

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

È sempre vero che

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Equazioni trinomie e biquadratiche

Le equazioni trinomie sono nella forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$. Se $n = 2$ sono definite biquadratiche.
Per risolverle si ponga $t = x^n$ e si risolva l'equazione di secondo grado che ne deriva

$$at^2 + bt + c = 0$$

e poi si risolva $x^n = t_1$ e $x^n = t_2$.

Ruffini

Il metodo di Ruffini permette di ridurre di grado qualsiasi equazione. Prima di usare questo metodo si dovrebbe però verificare che non sia possibile usare prodotti notevoli in quanto il processo richiede tempo.
Per prima cosa si deve trovare uno **zero** dell'equazione, ovvero una soluzione. Essi sono da ricercarsi tra le seguenti frazioni

$$\text{Zeri} = \frac{\text{Divisori termine noto}}{\text{Divisori } a}$$

Per dimostrare l'utilizzo di questa regola, prendiamo come esempio la seguente equazione

$$2x^3 + 3x + 5 = 0 \tag{1}$$

Lo zero di quest'equazione è -1, infatti $2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1) + 5 = 0$. Il seguente disegno chiarisce i passaggi da seguire per ridurre di grado un'equazione.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & 0 & 3 & +5 \\ -1 & & -2 & 2 & -5 \\ \hline & 2 & -2 & 5 & 0 \end{array}$$

Coefficienti/Quoziente Resto

Il processo da seguire è il seguente:

1. Moltiplicare il coefficiente del grado massimo per lo zero
2. Aggiungere al grado successivo il risultato
3. Continuare fino a che non si arriva al termine noto

Così si otterranno i nuovi coefficienti dell'equazione. Nel nostro caso otteniamo

$$2x^2 - 2x + 5 \tag{2}$$

però questo non basta in quanto le equazioni (1) e (2) non sono equivalenti. Per renderle equivalenti, si moltiplichi per $(x - x_0)$ dove x_0 è lo zero dell'equazione originale. Quindi ora abbiamo ottenuto che

$$2x^3 + 3x + 5 = (2x^2 - 2x + 5)(x + 1)$$

E che quindi possiamo dire che $P_n(x) = P_{n-1}(x) \cdot (x - x_0)$ dove $P_n(x)$ è un polinomio di grado n nella variabile x.

Regola di Cramer

La regola di Cramer permette di risolvere sistemi lineari a n-incognite. Generalmente non è molto comodo per grandi valori di n in quanto diventa lungo da risolvere però per due o tre equazioni è molto comodo.

Ogni sistema può essere definito come

$$Ax = c$$

dove A è una matrice e x e c sono vettori. Le soluzioni $(x_1, \ldots, x_n)$ sono determinabili

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

dove A_i è la matrice costruita con la i-esima colonna di A con il vettore c.
Esempio a 2 equazioni

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

quindi

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

Valori assoluti

Verranno qui elencate alcune caratteristiche dei valori assoluti.

Definizione

$$|P(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) & \text{se } x \geqslant 0 \\ -P(x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Proprietà

Dalla definizione ne derivano alcune proprietà

$$|x| = |-x| \qquad \left|x^2\right| = |x|^2 = x^2$$
$$|a + b| \leqslant |a| + |b| \qquad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

Funzioni e valori assoluti

Vengono ora riportati i sistemi risolutivi di disequazioni con valori assoluti

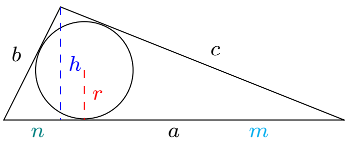
$$|f(x)| \geqslant g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant -g(x) \\ f(x) \geqslant g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| \leqslant g(x) \Leftrightarrow -g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$$

Geometria

Qui vengono elencate alcune formule particolari che riguardano la geometria euclidea.

Teoremi di Euclide



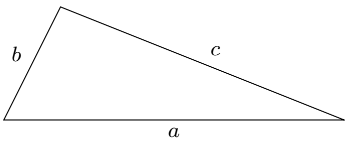
Primo teorema
$$\begin{cases} \dfrac{m}{c} = \dfrac{c}{a} \\ \dfrac{n}{b} = \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Secondo teorema
$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$$

Proprietà
$$\begin{cases} h = \dfrac{bc}{a} \\ r = \dfrac{b+c-a}{2} \end{cases}$$

Formula di Erone

La formula di Erone permette di trovare l'area di un triangolo qualsiasi conoscendo i valori dei tre lati



$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Raggio di una circonferenza inscritta di un triangolo

$$r = \frac{\mathscr{A}}{p}$$

Raggio di una circonferenza circosccritta di un triangolo

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{abc}{4\mathscr{A}}$$

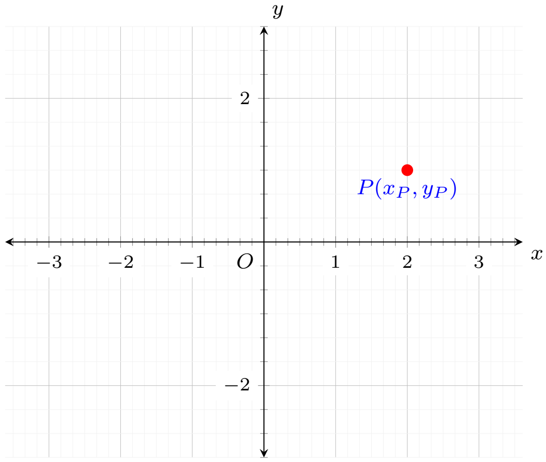
α: angolo opposto al lato a

Geometria analitica

La geometria analitica è la geometria che si occupa di lavorare nel piano cartesiano (xOy).
Per gli esercizi si vada a pagina 39.

Generale

Le formule qui riportate sono generali a tutto l'ambito della geometria analitica e non si riferiscono ad una figura particolare.
Di seguito viene rappresentato il tipico piano cartesiano con i suoi quattro quadranti.



D'ora in poi, si darà per scontata la convenzione di nominare le coordinate di un punto in base al nome del punto stesso. Ad esempio $P(x_P, y_P)$. Si noti anche che è possibile definire un punto attraverso un vettore bidimensionale. Ovvero

$$P(x_P, y_P) = \begin{bmatrix} x_P \\ \\ y_P \end{bmatrix}$$

Distanza tra due punti

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Punto medio

$$M\left(\frac{x_A - x_B}{2}, \frac{y_A - y_B}{2}\right)$$

Punto su un segmento in un rapporto $\frac{m}{n}$

Siano m e n due rapporti a cui sta un punto rispetto al segmento. Ovvero il punto $P(x_P, y_P)$ divide il segmento in due parti una lunga $\dfrac{n}{m+n}$ e l'altra $\dfrac{m}{m+n}$.

$$P\left(\frac{nx_A + mx_B}{m+n}, \frac{ny_A + my_B}{m+n}\right)$$

Baricentro di un triangolo

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

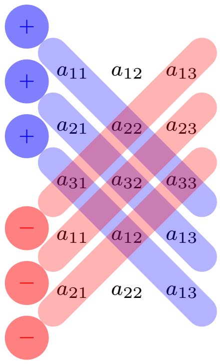
Area di un poligono qualsiasi

$$\mathscr{A}(P) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ \vdots & \vdots & 1 \end{vmatrix}$$

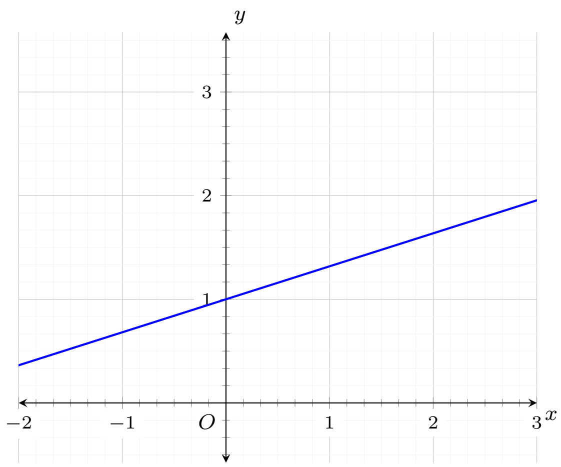
usando la regola di Sarrus. Questa formula è anche chiamata la formula di Gauss per le aree di poligoni.
Il modo di calcolare il determinante della matrice è il seguente (andare in diagonale dall'alto per ogni elemento della prima colonna moltiplicando gli elementi e quando si cambia colonna si sommi. Andare poi dal basso sottraendo).
Il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

è dato dalla risoluzione come segue



Rette



Le rette sono definite da un'equazione che ha due forme equivalenti:

$$y = mx + q \tag{1}$$

$$ax + by + c = 0 \tag{2}$$

La forma (1) è chiamata *esplicita*, la forma (2) è chiamata *implicita*. Da queste due forme possiamo evincere che

$$m = -\frac{a}{b} \qquad q = -\frac{c}{b}$$

Retta passante per due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad x_1 \neq x_2 \wedge y_1 \neq y_2$$

Condizione di parallelismo

Perché due rette siano parallele, **il loro coefficiente angolare deve essere uguale**, ovvero

$$r_1 \| r_2 \iff m_1 = m_2$$

Condizione di perpendicolarità

Perché due rette siano perpendicolari, **il prodotto dei coefficienti angolari deve essere** -1, ovvero

$$r_1 \perp r_2 \iff m_1 m_2 = -1$$

Retta parallela ad una data e passante per un punto $P(x_P, y_P)$

$$y - y_P = m(x - x_P)$$

Retta perpendicolare ad una data e passante per un punto $P(x_P, y_P)$

$$y - y_P = -\frac{1}{m}(x - x_P)$$

Distanza d tra un punto $P(x_P, y_P)$ e una retta

Sia r una retta in forma esplicita $ax + by + c$ e P un punto del piano, allora la distanza minima tra le due è

$$d = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Coefficiente angolare m di una retta passante per due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Fasci di Rette

Un fascio di rette è una combinazione lineare di tutte le rette generabili modificando un solo parametro di una quantità costante.

Fascio di rette a due parametri

Sceglti appropriati α e β si possono generare tutte le rette possibili utilizzando questa forma

$$\alpha(ax + by + c) + \beta(a_1 x + b_1 y + c_1) = 0$$

$$(\alpha a + \beta a_1)x + (\alpha b + \beta b_1)y + \alpha c + \beta c_1 = 0$$

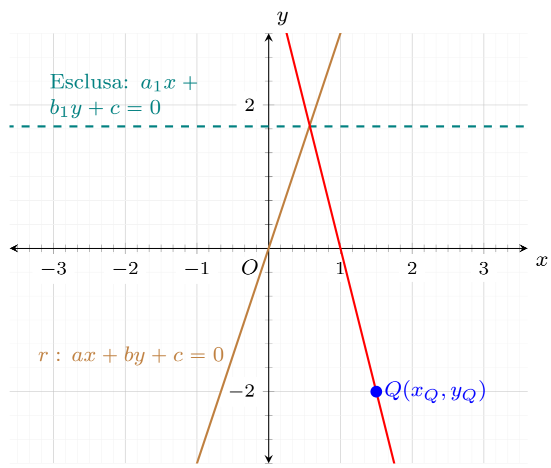
Fascio di rette ad un parametro

Questa forma esclude una sola retta, per $k = 0$.

$$ax + by + c + k(a_1 x + b_1 y + c_1) = 0$$

Si noti che $k = \dfrac{\beta}{\alpha}$

k avendo una retta del fascio, la retta esclusa e un punto su $a_1 x + b_1 y + c = 0$



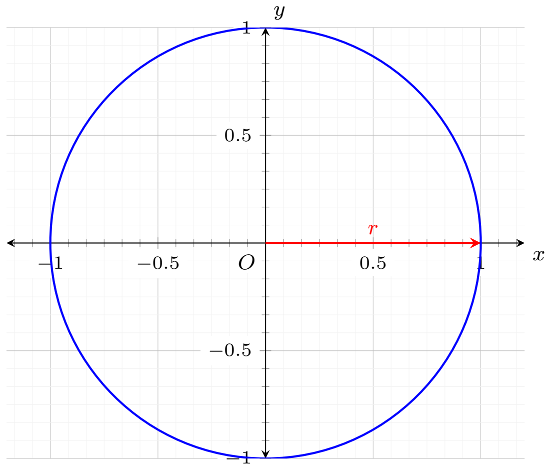
$$k = -\frac{ax_Q + by_Q + c}{a_1 x_Q + b_1 y_Q + c_1}$$

Retta di un fascio con coefficiente angolare m passante per un punto $P(x_P, y_P)$

$$y - y_P = m(x - x_P)$$

Circonferenza

La circonferenza è una conica i cui punti sono tutti equidistanti dal centro C.



Le equazioni delle circonferenze hanno 2 forme

$$\mathscr{C} : (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

$$\mathscr{C} : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Da queste due formule derivano le coordinate del centro

$$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$$

e la misura del raggio

$$r = \sqrt{x_C{}^2 + y_C{}^2 - c} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$$

Tangente in $P(x_P, y_P)$

$$x \cdot x_P + y \cdot y_P + a\frac{x + x_P}{2} + b\frac{y + y_P}{2} + c = 0$$

Area del cerchio

$$\mathscr{A}(\mathscr{C}) = \pi r^2$$

Lunghezza della circonferenza

$$C = 2\pi r$$

Lunghezza dell'arco

$$l = r\alpha$$

Si noti che α è in radianti.

Area del settore

$$\mathscr{A}(\mathscr{S}) = \frac{1}{2}r^2\alpha$$

Si noti che α è in radianti.

Fasci di circonferenze

Un fascio di circonferenze è una combinazione lineare di utte le circonferenze generabili modificando un parametro di una certa quantità costante.

Fascio di circonferenze ad un parametro

Scelti appropriati α e β si possono generare tute le circonferenze possibili utilizzando questa forma

$$\alpha(x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1) + \beta(x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

$$(\alpha+\beta)x^2 + (\alpha+\beta)y^2 + (\alpha a_1 + \beta a_2)x + (\alpha b_1 + \beta b_2)y + \alpha c_1 + \beta c_2 = 0$$

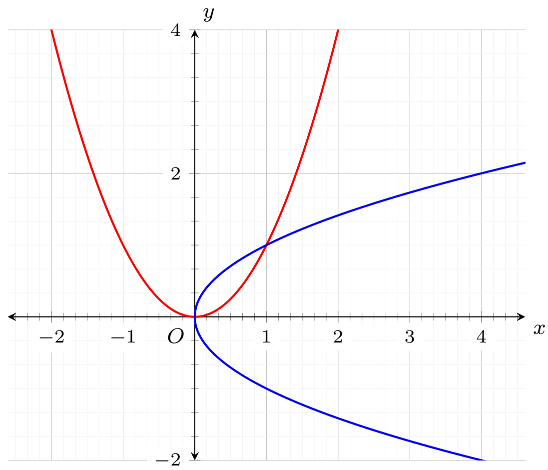
Fascio di circonferenze a due parametri

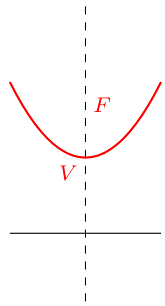
Questa forma esclude una circonferenza per $k = 0$.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c + k(x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1) = 0$$

Si noti che $k = \dfrac{\alpha}{\beta}$

Parabola





Una parabola può essere descritta con l'asse focale parallelo all'asse x o all'asse y.

$$\mathscr{P} : y = ax^2 + bx + c$$

$$\mathscr{P} : x = ay^2 + by + c$$

La direttrice di una parabola è quella che ne da l'inclinazione ed è perpendicolare all'asse di simmetria.
Il vertice di una parabola è il punto più vicino alla direttrice.
Il fuoco è il punto la cui distanza da qualsiasi punto della parabola è pari a quella della proiezione sulla direttrice del punto stesso.

Elementi di una parabola con asse focale parallelo a x

Fuoco	$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$
Vertice	$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$
Direttrice	$y = -\frac{1+\Delta}{4a}$
Asse di simmetria	$x = -\frac{b}{2a}$
Tangente in un punto	$\frac{y+y_0}{2} = axx_0 + b\frac{x+x_0}{2} + c$

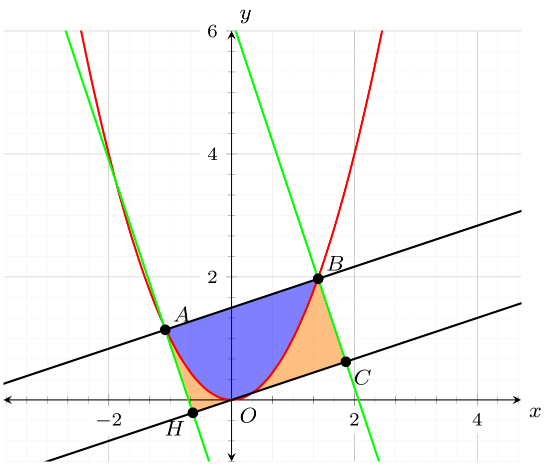
Elementi di una parabola con asse focale parallelo a y

Fuoco	$\left(\frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$
Vertice	$\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$
Direttrice	$x = -\frac{1+\Delta}{4a}$
Asse di simmetria	$y = -\frac{b}{2a}$
Tangente in un punto	$\frac{x+x_0}{2} = ayy_0 + b\frac{y+y_0}{2} + c$

Parabole di vertice $V(x_V, y_V)$

$$y - y_V = a(x - x_V)^2$$

Area di un segmento parabolico



$$\mathscr{A}(\mathscr{F}) = \frac{2}{3}\overline{AB} \cdot \overline{AH}$$

E ovviamente l'area esterna alla curva sarebbe

$$\mathscr{A}(\mathscr{F}') = \frac{1}{3}\overline{AB} \cdot \overline{AH}$$

Formule di sdoppiamento

Le formule di sdoppiamento servono per determinare le tangenti in un punto $P(x_0, y_0)$.
Se $d \| y$

$$\frac{y+y_0}{2} = axx_0 + b\frac{x+x_0}{2} + c$$

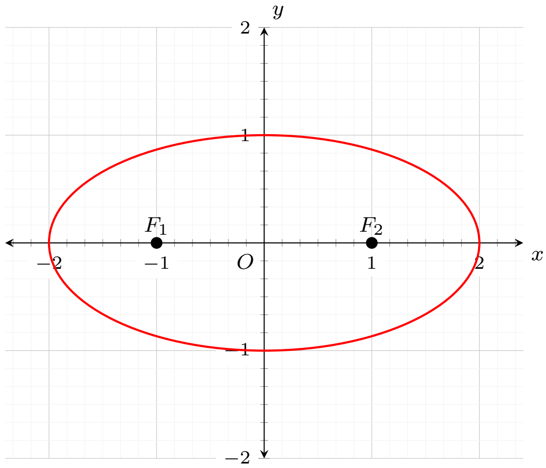
Se $d \| x$

$$\frac{x+x_0}{2} = ayy_0 + b\frac{y+y_0}{2} + c$$

Coefficiente angolare della tangente

$$m = \frac{1}{2ay_0 + b} = 2ax_0 + b$$

Ellisse



Un'ellissi ha due assi, uno maggiore uno minore. Le loro semi-lunghezze (quindi i semi-assi) si denominano a (che contiene i fuochi) e b.
I fuochi sono i due punti tali che preso un punto $P \in \mathscr{E}$, $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$.

$$\mathscr{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Tra i semi-assi vige la seguente proprietà

$$a^2 - c^2 = b^2$$

e quindi

$$c = \begin{cases} a^2 - b^2, & \text{se } a > b \\ b^2 - a^2, & \text{se } a < b \end{cases}$$

Eccentricità

L'eccentricità è lo schiacciamento dell'ellisse sull'asse maggiore. È un valore compreso tra 0 e 1.
Se $a > b$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Se $b > a$

$$e = \frac{c}{b} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$$

Area dell'ellisse

$$\mathscr{A}(\mathscr{E}) = ab\pi$$

Tangenti all'ellisse

Per trovare la tangente all'esllise abbiamo due modi:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

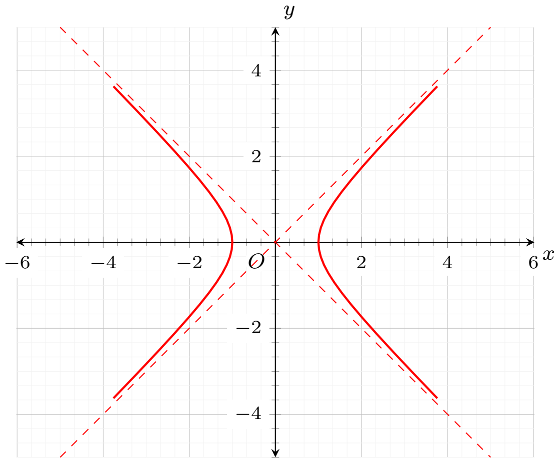
oppure fare il sistema tra la retta generica per P e fare in modo che il discriminante si annulli:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases} \rightarrow$$

$$\frac{\Delta}{4} = a^4m^2q^2 - a^2(q^2 - b^2)(b^2 + a^2m^2) = 0$$

Il vantaggio di questo secondo metodo è che può anche trovare le rette secanti ed esterne all'ellisse (rispettivamente con $\frac{\Delta}{4} > 0$ e $\frac{\Delta}{4} < 0$). È sicuramente più laborioso e difficile da ricordare.

Iperbole



L'iperbole può essere descritta in più modi.
I fuochi sono i due punti tali che per un punto $P \in \mathscr{I}$, $|\overline{PF_1} - \overline{PF_1}| = 2a$.
L'equazione dell'iperbole con i fuochi su x è

$$\mathscr{I}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Quella con i fuochi su y è

$$\mathscr{I}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

Tra i parametri a e b vige che $a < c$ e $c^2 = a^2 + b^2$.

Asintoti

Gli asintoti sono le rette che l'iperbole tende a raggiungere senza mai toccare

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

Eccentricità

L'eccentricità dell'iperbole è il rapporto

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

se l'iperbole ha i fuochi su x,

$$e = \frac{c}{b} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}$$

altrimenti. Si noti anche che $e > 1$ per ogni iperbole.

Iperbole equilatera

Se $a = b$, l'iperbole si definisce equilatera e le equazioni diventano

$$x^2 - y^2 = a^2$$

se $F \in x$,

$$y^2 - x^2 = a^2$$

se $F \in y$.
Questo comporta che $c = a\sqrt{2}$ e che $e = \sqrt{2}$.

Può anche essere descritta l'iperbole da

$$xy = k$$

Formule di sdoppiamento

Vengono ora riportate le formule di sdoppiamento che cambiano in base all'equazione dell'iperbole

Equazione	Tangente
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$	$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = -1$
$x^2 - y^2 = a^2$	$xx_0 - yy_0 = a^2$
$x^2 - y^2 = -a^2$	$xx_0 - yy_0 = -a^2$
$xy = k$	$xx_0 \cdot yy_0 = k$

Iperbole equilatera traslata

Si trova molto spesso una versione traslata di un'iperbole. Questa è la sua generale forma

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

E gli asintoti sono

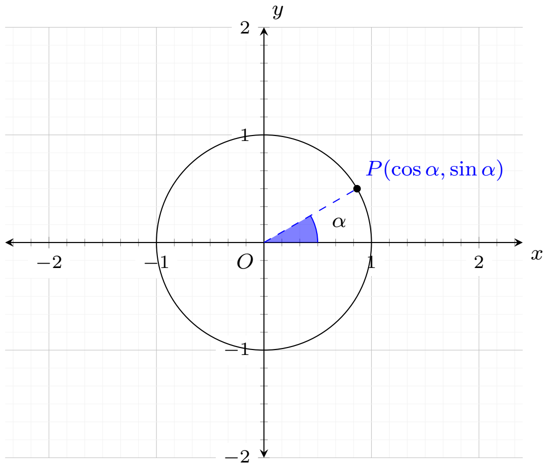
$$x = -\frac{d}{c} \qquad y = \frac{a}{c}$$

con il centro di simmetria

$$O\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$$

Goniometria

La gonioetria studia la *circonferenza goniometrica* che non è altro che una circonferenza di centro $O(0;0)$ e di raggio $r = 1$.
Per convenzione la circonferenza è divisa in 360 gradi (o 2π radianti), gli angoli vengono definiti a partire dall'asse x e si definiscono positivi quando proseguono in senso antiorario.



Già nella figura identifichiamo le due funzioni fondamentali della goniometria: coseno (cos) e sendo (sin). Esse, rappresentano rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del punto P al variare di α.
Seno e coseno non sono le uniche funzioni goniometriche, esistono infatti anche

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$
$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Da notare che spesso csc si trova anche scritto nella forma più estesa cosec.
sin e cos rappresentano anche in un triangolo rettangolo

$$\cos\alpha = \frac{\text{Lunghezza cateto adiacente}}{\text{Lunghezza ipotenusa}}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{Lunghezza cateto opposto}}{\text{Lunghezza ipotenusa}}$$

Per gli esercizi si vada a pagina 45.

Angoli particolari

Seno e coseno sono funzioni periodiche, ovvero che il loro valore sta all'interno di un insieme e si ripete con un certo periodo.
Gli angoli particolari principali sono

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Come si può notare ricordarli è piuttosto semplice: $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{6}$ sono gli angoli di un triangolo equilatero, $\frac{\pi}{4}$ è la diagonale di un quadrato.

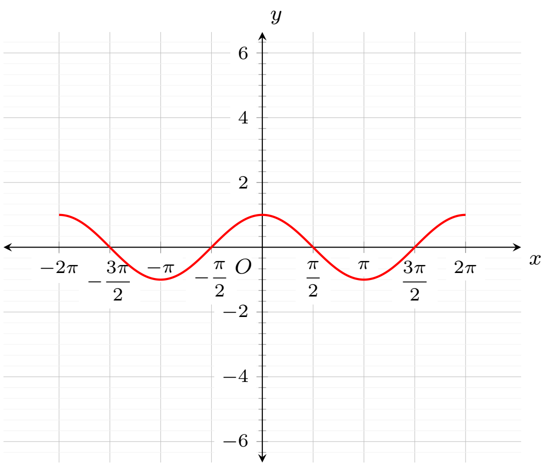
Relazione fondamentale

La relazione fondamentale è quella che permetterà di trovare molte delle formule successive. Essa è

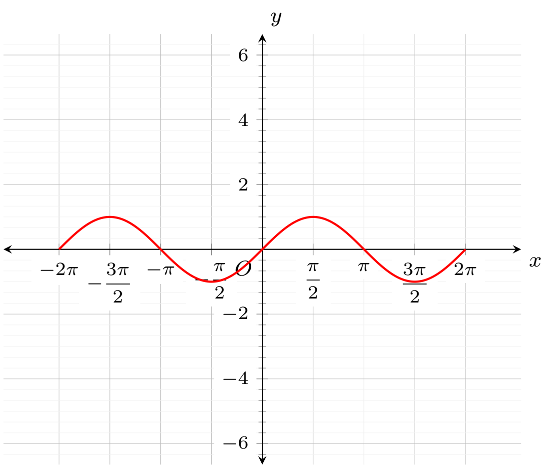
$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Grafico delle funzioni

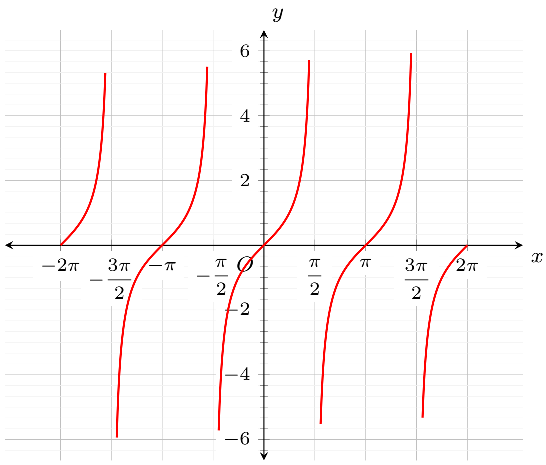
$y = \cos\alpha$



$y = \sin\alpha$



$y = \tan\alpha$



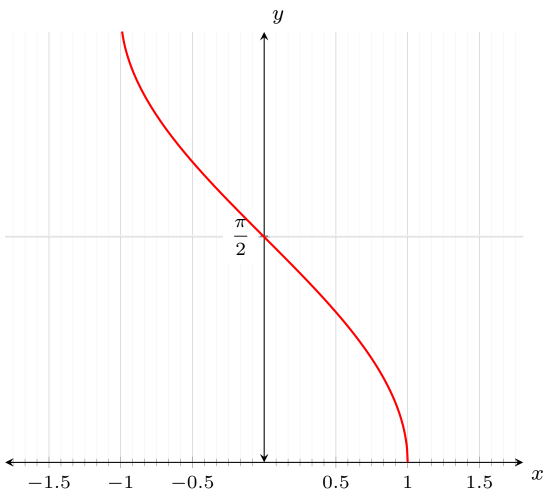
Funzioni inverse

Ovviamente se da un angolo possiamo ottenere un numero, possiamo fare anche il contrario. Per indicare le funzioni inverse abbiamo due possibilità

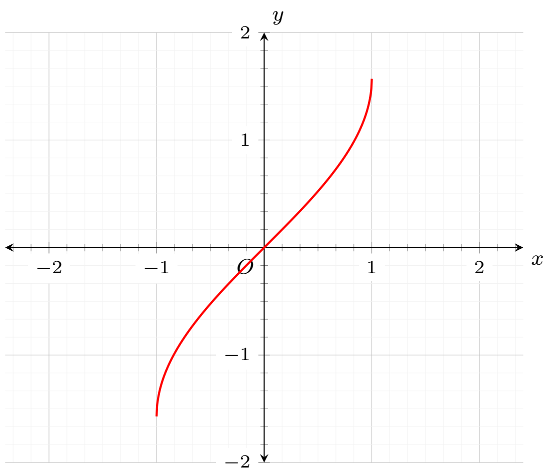
1. Scrivere $f^{-1}(x)$
2. Dare un nuovo nome alla funzione (arco...)

Una funzione può essere invertita solo se strettamente crescente/decrescente. Quindi quelle goniometriche sono invertibili solo in uno specifico intorno. I grafici sono i seguenti

$\arccos x$



$\arcsin x$



Formule goniometriche

Le formule goniometriche permettono di passare da una funzione ad un'altra. Una delle caratteristiche più importanti è l'esistenza dei così denominati **angoli associati**. Essi sono angoli particolari che assumono valori facili da ricordare. Essi sono

$$\cos(\pi \pm x) = -\cos x \qquad \cos(-x) = \cos x$$
$$\sin(\pi \pm x) = \mp \sin x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$
$$\tan(\pi \pm x) = \pm \tan x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

In associazione a questi che sono i più comuni, sono anche presenti i seguenti

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x \qquad \cos\left(\frac{3}{2}\pi \pm x\right) = \pm \sin x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \pm \cos x \qquad \sin\left(\frac{3}{2}\pi \pm x\right) = -\cos x$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \cot x \qquad \tan\left(\frac{3}{2}\pi \pm x\right) = \mp \cot x$$

Si presti molta attenzione ai segni in quanto è molto facile confondersi.

Addizione e sottrazione

$$\cos(\gamma \pm \theta) = \cos\gamma\cos\theta \mp \sin\gamma\sin\theta$$
$$\sin(\gamma \pm \theta) = \sin\gamma\cos\theta \pm \cos\gamma\sin\theta$$
$$\tan(\gamma \pm \theta) = \frac{\tan\gamma \pm \tan\theta}{1 \mp \tan\gamma\tan\theta}$$

Duplicazione

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \qquad \cos 2x = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 1 - 2\sin^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 \end{cases}$$
$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \qquad \cot 2 = \frac{\cot^2 - 1}{2\cot x}$$

Bisezione

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$
$$\tan\frac{x}{2} = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{1+\cos x} \\ \dfrac{1-\cos x}{\sin x} \end{cases} \qquad \cot\frac{x}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+\cos x}{\sin x} \\ \dfrac{\sin x}{1-\cos x} \end{cases}$$

Il segno nella prima riga è da scegliersi $+$ se $\sin\frac{x}{2} \geqslant 0 \vee \cos\frac{x}{2} \geqslant 0$, $-$ altrimenti.

Parametriche

Per queste formule poniamo

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

per comodità.

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2} \qquad \cot x = \frac{1-t^2}{2t}$$

Prostaferesi

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{q}\sin\frac{p-q}{2}$$

Werner

$$\cos\gamma\cos\theta = \frac{1}{2}[\cos(\gamma+\theta) + \cos(\gamma-\theta)]$$
$$\cos\gamma\sin\theta = \frac{1}{2}[\sin(\gamma+\theta) - \sin(\gamma-\theta)]$$
$$\sin\gamma\sin\theta = \frac{1}{2}[\cos(\gamma-\theta) - \cos(\gamma+\theta)]$$

Equazioni goniometriche

Si definisce un'equazione goniometrica una qualsiasi equazione che abbia almeno una funzione goniometrica e che ha soluzioni solo per particolari angoli.

$\sin x = m$

$$x = \arcsin m + 2k\pi \vee x = \arcsin m + 2k\pi - \pi$$

$\cos x = m$

$$x = \pm\arccos m + 2k\pi$$

$\tan x = m$

$$x = \arctan x + k\pi$$

Equazioni lineari

Le equazioni lineari vengono così definite perché sono simili alla forma di una retta implicita.

$$a\sin x + b\cos x + c = 0$$

La risoluzione di questa può essere semplice per $b = 0 \vee a = 0$ in quanto si ritorna alle forme precedenti. Se invece $a \neq 0 \wedge b \neq 0$ si hanno due strade:

1. metodo algebrico;
2. metodo grafico;

Il metodo algebrico è molto lungo e generalmente sconsigliato. In generale si sfrutta la parametrizzazione di sin e cos in $\tan\frac{x}{2}$.
Il metodo grafico consiste nel porre

$$\cos x = X \text{ e } \sin x = Y$$

e poi risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} aY + bX + c = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

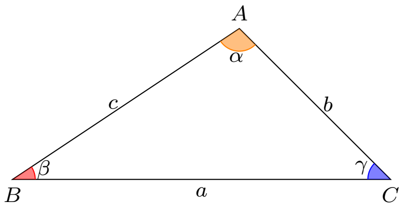
Equazioni omogenee

Si dicono omogenee se tutti i suoi elementi sono dello stesso grado. Per risolvere queste equazioni in questa forma, abbiamo varie strade

- Se **è presente il termine di grado** n **in** $\sin x$, si divide tutto per $\cos^n x \neq 0$ ottenendo un'equazione di grado n in $\tan x$ equivalente alla data;
- Se **è presente il termine di grado** n **in** $\cos x$, si divide tutto per $\sin^n x \neq 0$ ottenendo un'equazione di grado n in $\cot x$ equivalente alla data;
- Se **nessuno dei precedenti è valido**, si raccolga a fattore comune;

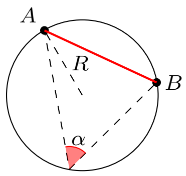
Teoremi sui triangoli

Area di un triangolo qualsiasi



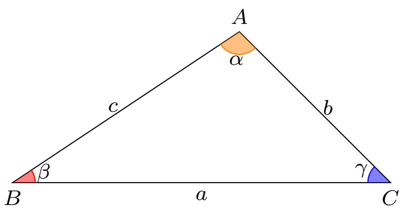
$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

Teorema della corda



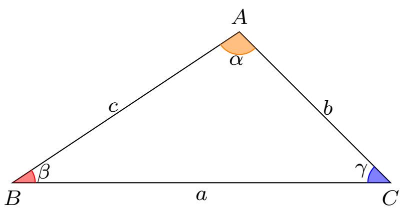
$$\overline{AB} = 2R\sin\alpha$$

Teorema dei seni



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Teoremi di Carnot



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Logaritmi

Il logaritmo è la seconda funzione inversa della potenza, essendo la prima la radice.
Presa un'equazione del tipo

$$a^x = b$$

le soluzioni di x si esprimono come

$$x = \log_a b$$

quindi si ha anche che

$$a^{\log_a b} = b$$

Si legge "*logaritmo in base a di b*". Perché un logaritmo esista è necessario che $a > 0 \wedge a \neq 1 \wedge b > 0$.
Quando si vede scritto log si intende $\log_{10}$, quando invece è presente ln si intende $\log_e$.
Per gli esercizi si vada a pagina 46.

Teoremi sui logaritmi

Logaritmo del prodotto

$$\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

Logaritmo del quoziente

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$$

Logaritmo di una potenza

$$\log_a b^k = k\log_a b$$

Cambiamento di base

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

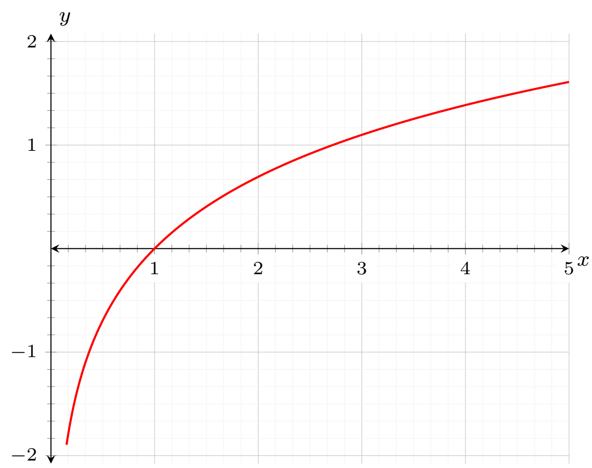
Da questa particolare formula si nota anche che

$$\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$$

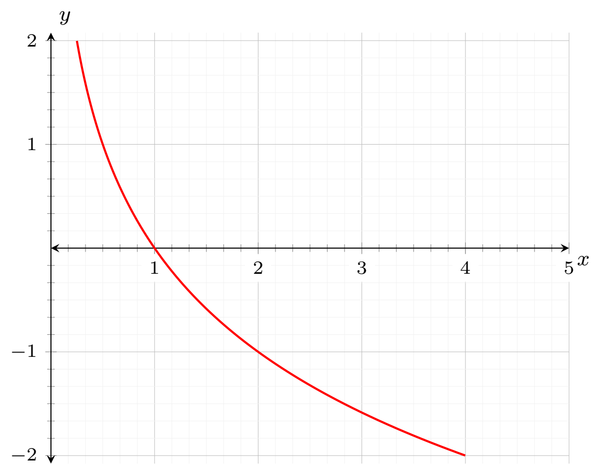
Grafici dei logaritmi

I logaritmi hanno due grafici dipendentemente al valore della base

$\log_a x$ **con** $a > 1$

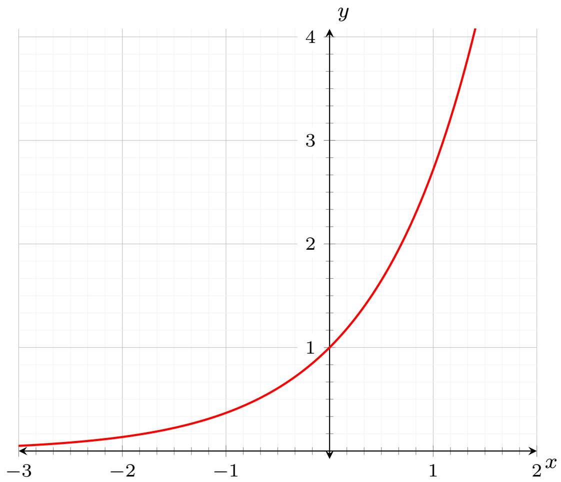


$\log_a x$ **con** $0 < a < 1$

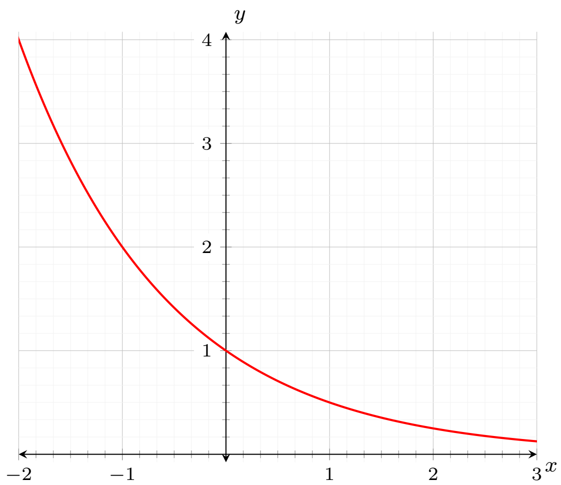


Essendo i logaritmi molto correlati alle funzioni esponenziali, riporto di seguito i loro grafici

a^x con $a > 1$



a^x con $0 < a < 1$



Progressioni

Le progressioni sono una serie di numeri in modo che tra due numeri successivi ci sia una costante relazione. Si dividono in **aritmetiche** e **geometriche**.
Per gli esercizi si vada a pagina 47.

Progressioni Aritmetiche

Le progressioni aritmetiche hanno la caratteristica che la differenza tra due termini successivi è sempre costante. Questa differenza si chiama *ragione*.

$$a_n - a_{n-1} = d \quad d = \frac{a_n - 1}{n - 1}$$

dove d è la ragione e a_n è un elemento qualunque di una progressione.

n-esimo elemento

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

s-esimo elemento riferito ad un r-esimo elemento

Questa è considerabile una generalizzazione della formula precedente.

$$a_s = a_r + d(s-r)$$

Proprietà di simmetria

$$a_1 + a_n = a_{k+1} + a_{n-k} \qquad \forall k$$

Somma di una progressione

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Progressioni Geometriche

Le progressioni geometriche hanno la caratteristica che il rapporto tra due successivi elementi è costante. Questo rapporto si chiama *ragione*

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \quad q : \begin{cases} q = \sqrt[n-1]{\dfrac{a_n}{a_1}} & \text{se concordi, per } n > 2 \\ q = -\sqrt[n-1]{\left|\dfrac{a_n}{a_1}\right|} & \text{se discordi} \end{cases}$$

dove q è la ragione e a_n è un elemento qualunque di una progressione.

n-esimo elemento

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

s-esimo elemento riferito ad un r-esimo elemento

Questa è considerabile una generalizzazione della formula precedente.

$$a_s = a_s \cdot q^{s-r}$$

Proprietà di simmetria

$$a_1 \cdot a_n = a_{k-1} \cdot a_{n-k}$$

Somma di una progressione

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Calcolo combinatorio

Il calcolo combinatorio descrive i diversi modi di disporre e organizzare un numero finito di oggetti.
Per gli esercizi si vada a pagina 47.

Fattoriale

Un concetto fondamentale del calcolo combinatorio è quello di fattoriale. Esso è definito come

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = \prod_1^n n$$

Disposizioni

Due disposizioni si considerano distinte se almeno un elemento è diverso e non tutti devono essere presenti. L'ordine è importante.

Semplici

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

Con ripetizione

$$D'_{n,k} = n^k$$

Permutazioni

Due permutazioni si considerano distine se almeno un elemento è diverso.

Semplici

$$P_n = D_{n,n} = n!$$

Con ripetizione

$$P_n^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}$$

dove α_n identifica il numero di ripetizioni per il relativo oggetto.

Combinazioni

Le combinazioni rappresentano tutti i gruppi che si possono formare da n elementi considerando distinti due gruppi se almeno un elemento è diverso.

Semplici

$$C_{n,k} = \frac{\mathscr{D}_{n,k}}{k!} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Con ripetizione

$$C'_{n,k} = \binom{n+k+1}{k}$$

Proprietà del coefficiente binomiale

Simmetria

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Per $1 \leqslant k \leqslant n-1$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Per $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{k}{k-1} + \binom{k-1}{k-1}$$

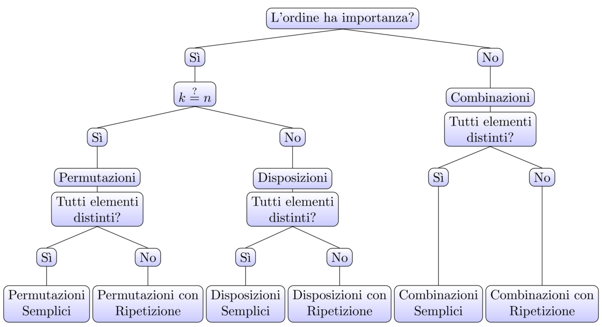
Binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

da cui deriva

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Schema riassuntivo



Si risponda a ciascuna domanda per sapere che tipo di situazione il problema pone.

Probabilità

La probabilità è una funzione $p(U)$ che ritorna un valore compreso tra 0 e 1 che definisce la probilità di un *evento*.

$$p : p(U) = \frac{\text{Casi favorevoli}}{\text{Casi possibili}} \mapsto [0,1]$$

Evento ed insieme universo

Per un qualsiasi caso di studio esiste un insieme *Universo* definito $\mathbb{U}$ che contiene tutte le possibili uscite dell'oservazione. Ciascuna di queste uscite è definito *evento*. Quindi

$$\mathbb{E} \subseteq \mathbb{U}$$

e detto in altri termini, un evento è un insieme di possibilità. Ad esempio

$$\mathbb{E} = \{2,4,5\}$$

può essere un evento nel lancio di un dado.
$p(\mathbb{U}) = 1$ per qualsiasi tipo di osservazione. Quindi la probabilità che **non** avvenga un evento è $1 - p(\mathbb{E})$

Eventi incompatibili

Due eventi si dicono incompatibili quando

$$\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{E}_2 = \varnothing$$

Eventi indipendenti

Due eventi si dicono indipendenti quando

$$p(\mathbb{E}_1 \mid \mathbb{E}_2) = p(\mathbb{E}_1)$$

Probabilità di eventi incompatibili

$$p(\mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_2) = p(\mathbb{E}_1) + p(\mathbb{E}_2)$$

Probabilità di eventi compatibili

$$p(\mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_2) = p(\mathbb{E}_1) + p(\mathbb{E}_2) - p(\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{E}_2)$$

Si estenda questa formula in modo che si tolgano tutte le intersezioni fra eventi per non ripetere risultati.

Probabilità condizionata

La probabilità condizionata indica la probabilità che si verifichi l'evento $\mathbb{E}_1$ verificatosi $\mathbb{E}_2$.

$$p(\mathbb{E}_1 \mid \mathbb{E}_2) = \frac{p(\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{E}_2)}{p(\mathbb{E}_2)}$$

Probabilità composta

Indica la probabilità che si verifichi un evento intersezione di altri due.

$$p(\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{E}_2) = p(\mathbb{E}_1) \cdot p(\mathbb{E}_1 \mid \mathbb{E}_2)$$

Però se sono eventi indipendenti si semplifica in

$$p(\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{E}_2) = p(\mathbb{E}_1) \cdot p(\mathbb{E}_2)$$

Formule di Bayes

Prima formula

Essendo $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \ldots, \mathbb{F}_n$ n eventi incompatibili tali che

$$\mathbb{U} = \mathbb{F}_1 \cup \mathbb{F}_2 \cup \cdots \cup \mathbb{F}_n$$

si consideri un evento $\mathbb{E}$ tale che

$$\mathbb{E} = (\mathbb{E} \cap \mathbb{F}_1) \cup (\mathbb{E} \cap \mathbb{F}_2) \cup \cdots \cup (\mathbb{E} \cap \mathbb{F}_n)$$

si ha

$$p(\mathbb{E}) = \sum_{i=1}^{n} p(\mathbb{E} \cap \mathbb{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \big(p(\mathbb{E} \mid \mathbb{F}_i) \cdot p(\mathbb{F}i)\big)$$

Seconda formula

Essendo $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \ldots, \mathbb{F}_n$ n eventi incompatibili tali che

$$\mathbb{U} = \mathbb{F}_1 \cup \mathbb{F}_2 \cup \cdots \cup \mathbb{F}_n$$

sia $\mathbb{E}$ un evento tale che $p(\mathbb{E}) > 0$, per calcolare le probabilità condizionali si usi

$$p\left(\mathbb{F}_i \mid \mathbb{E}\right) = \frac{p\left(\mathbb{E} \mid \mathbb{F}_i\right) \cdot p(\mathbb{F}_i)}{\sum \left(p\left(\mathbb{E} \mid \mathbb{F}_i\right) \cdot p(\mathbb{F}_i)\right)}$$

Affinità

Si definisce un'affinità come una corrispondenza biunivoca tra due piani e tra punti dello stesso piano che trasformi rette in rette conservando il parallelismo.
Un'affinità generica denominata T può essere espressa nei seguenti modi

$$T: \begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$$

$$T: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

$$T: (x, y) \mapsto (ax + by + e, cx + dy + f)$$

Tutte le affinità hanno il determinante della matrice dei coefficienti è sempre diverso da zero

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb \neq 0$$

Se il determinante è pari a 1 è un'isometria e quindi mantiene le distanze.

Si definisce punto unito qualunque punto che si trasforma in sé stesso, ovvero

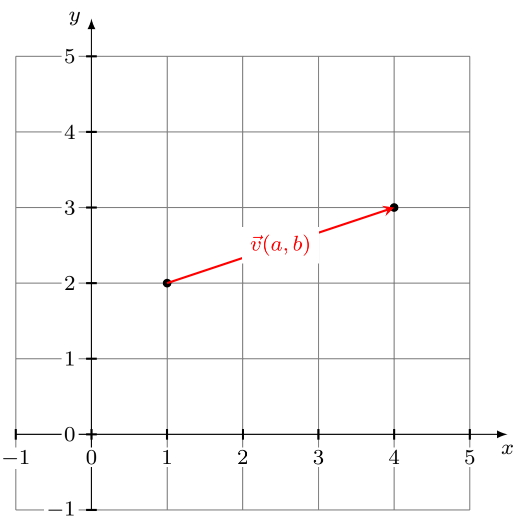
$$T(U) \equiv U(\equiv U')$$

Essendo le affinità proprietà binuivoche, esiste anche la trasformazione inversa, generalmente indicata con T^{-1}.
Per gli esercizi si vada a pagina 48.

Prodotto di trasformazioni

Se si hanno due trasformazioni T e T', il loro prodotto è descritto come $T * T'$ e si ottiene effettuando prima T' e successivamente T. Quindi è equivalente a $T(T'(P))$.
La matrice dei coefficienti si ottiene moltiplicando le due matrici $A * A'$.

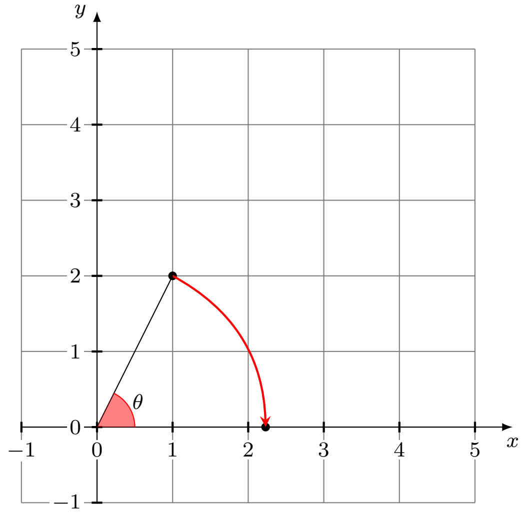
Traslazione



$$\tau_{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}: \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

$$\tau^{-1}_{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}: \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases}$$

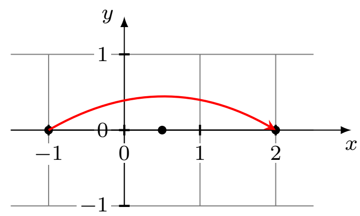
Rotazione



$$\rho_{O,\theta}: \begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

$$\rho_{O,\theta}: \begin{cases} x = x'\cos\theta + y'\sin\theta \\ y = -y'\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

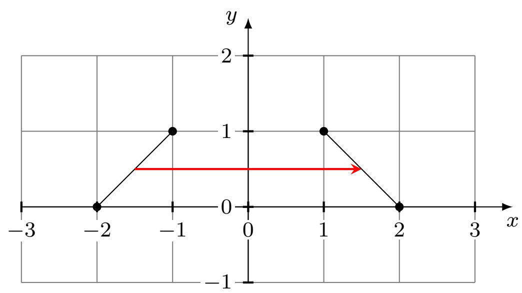
Simmetria centrale



$$\sigma_{C(x_C, y_C)}: \begin{cases} x' = -x + 2x_C \\ y' = -y + 2y_C \end{cases}$$

$$\sigma^{-1}_{C(x_C, y_C)}: \begin{cases} x = -x' + 2x_C \\ y = -y' + 2y_C \end{cases}$$

Simmetria assiale



Rispetto a $r: y = y_0$

$$\sigma_r: \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2y_0 \end{cases}$$

Rispetto a $r: x = x_0$

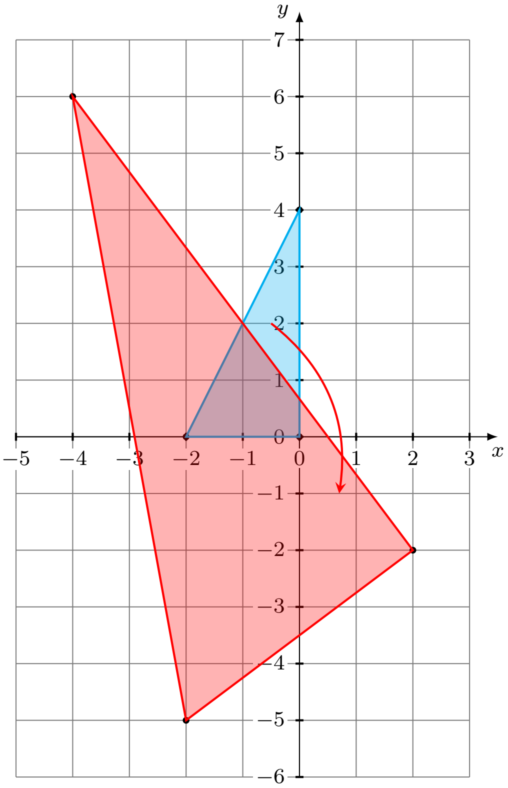
$$\sigma_r: \begin{cases} x' = -x + 2x_0 \\ y' = y \end{cases}$$

Rispetto a $r: y = mx + q$

$$\sigma_r : \begin{cases} x' = \dfrac{1}{1+m^2}[(1-m^2)x + 2my - 2mq] \\ y' = \dfrac{1}{1+m^2}[2mx + (m^2-1)y + 2q] \end{cases}$$

$$\sigma_r^{-1} : \begin{cases} x = \dfrac{1}{1+m^2}[(1-m^2)x + 2my' - 2mq] \\ y = \dfrac{1}{1+m^2}[2mx' + (m^2-1)y' + 2q] \end{cases}$$

Similitudine

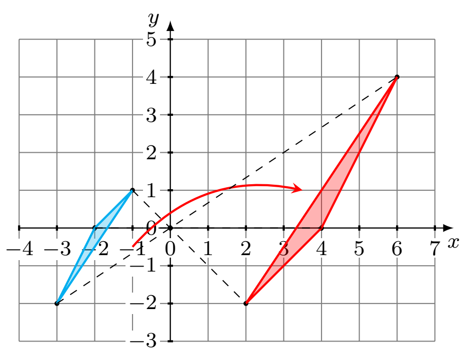


$$\Sigma : \begin{cases} \begin{cases} x' = ax - by + e \\ y' = bx + ay + f \end{cases} & \text{Se diretta, } \det A = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & -a \end{vmatrix} > 0 \\ \begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = bx - ay + f \end{cases} & \text{Se indiretta, } \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix} < 0 \end{cases}$$

Il rapporto di similitudine è pari a

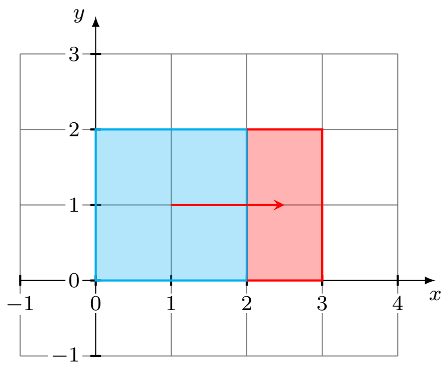
$$k = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Omotetia



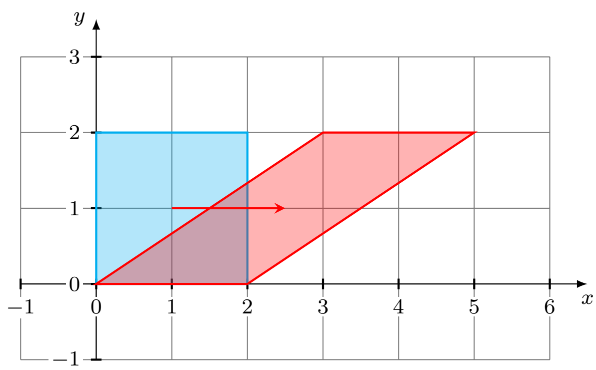
$$\omega_{C,a} : \begin{cases} x' = a(x - x_C) + x_C \\ y' = a(y - y_C) + y_C \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = ax + h \\ y' = ay + k \end{cases}$$

Dilatazione



$$\delta_{x,k} : \begin{cases} x' = kx \\ y' = y \end{cases} \qquad \delta_{y,k} : \begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases}$$

Inclinazione



$$\xi_{x,k} : \begin{cases} x' = x_k y \\ y' = y \end{cases} \qquad \xi_{y,k} : \begin{cases} x' = x \\ y' = y + kx \end{cases}$$

Numeri complessi

Fino ad adesso abbiamo sempre lavorato con numeri appartenenti ad $\mathbb{R}$ al di più. Ci sono però alcune operazioni che non sono possibili da fare in questo insieme numerico. Una di queste è

$$\sqrt{-r} \qquad \forall r \in \mathbb{R}^+$$

oppure

$$\log(n) \qquad \forall n \in \mathbb{R}^-$$

Per sopperire a questa mancanza, è stata introdotta l'unità immaginaria i che è definita come

$$i = \sqrt{-1}$$

Un numero complesso è un numero composto da una parte reale e una immaginaria. Esso può essere scritto come

$$z = \overbrace{a}^{\text{Reale}} + \overbrace{ib}^{\text{Immaginaria}}$$

Quindi

$$\Re(z) = a \quad \text{e} \quad \Im(z) = ib$$

Questo non è l'unico modo di identificare un numero complesso. Più avanti vedremo anche gli altri.
$\mathbb{C}$ è quindi definito come

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$$

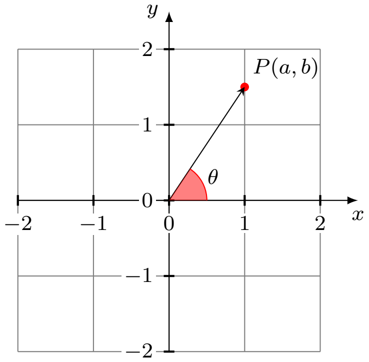
Il numero complesso $\bar{z}$ è definito il *coniugato* di z quindi

$$z = a + ib \qquad \text{e} \qquad \bar{z} = a - ib$$

Si noti che se si deve fare ricorso a Ruffini si ricerchi lo zero anche in $\mathbb{C}$.
Per gli esercizi si vada a pagina 50.

Rappresentazione cartesiana

Essendo questo numero composto da parte reale e immaginaria, il piano cartesiano non basta più. Quindi si è deciso di estenderlo a quello che viene comunemente denominato il piano di **Argrand-Gauss**. Esso è composto dall'asse delle ascisse come parte reale e quello delle ordinate come parte immaginaria.



La distanza $\overline{OP}$ è detta *modulo* del numero immaginario ed è descritto come
$$\rho = \|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Operazioni tra numeri complessi

Somma

La somma tra due numeri complessi richiede solo di sommare le parti simili fra di loro.

$$z_1 = a_1 + i + b_1 \qquad \text{e} \qquad z_2 = a_2 + i_b 2$$

La loro somma è

$$z = z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$$

Nella somma vige la seguente caratteristica

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Differenza

La differenza è esattamente come la somma, ovvero si opera parte a parte.

$$z_1 = a_1 + i + b_1 \qquad \text{e} \qquad z_2 = a_2 + i_b 2$$

La loro differenza è

$$z = z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + i(b_1 - b_2)$$

Nella somma e differenza vigono le seguenti caratteristiche

$$z + \overline{z} = 2a \qquad \text{e} \qquad z - \overline{z} = 2ib$$

Prodotto

Il prodotto si effettua moltiplicando fra di loro parti simili.

$$z_1 = a_1 + i + b_1 \qquad \text{e} \qquad z_2 = a_2 + i_b 2$$

Il loro prodotto è

$$z = z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(b_1 a_2 + a_1 b_2)$$

Quoziente

Il quoziente è un'operazione particolare.

$$z_1 = a_1 + i + b_1 \qquad \text{e} \qquad z_2 = a_2 + i_b 2$$

Il loro quoziente è

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_1 a_2 - a_2 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Rappresentazione trigonometrica di un numero complesso

Un modo per definire un numero complesso è già stato chiarito. Ne esiste un altro però che fa capo alla rappresentazione polare del numero (tramite un altro sistema di assi che identifica un punto tramite l'angolo che compie un segmento dall'asse x).

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

dove θ rappresenta l'angolo indicato nella sottosezione Rappresentazione cartesiana.

Prodotto

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

Il loro prodotto è

$$z = z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2)_i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Quoziente

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

Il loro quoziente è

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2)_i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

Elevazione a potenza

Messa successivamente alle altre operazioni perché varia in base alla notazione scelta.

Algebrica

$$z^n = (a + ib)^n$$

Trigonometrica (Formula di De Moivre)

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Radici di un numero complesso

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

La radice n-esima è pari a

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

Una caratteristica interessante delle radici è la loro rappresentazione grafica. Infatti se si prendono le coordinate e si uniscono fra di loro si costruirà un poligono regolare con n lati inscritto all'interno di una circonferenza di raggio ρ.
Per calcolarle, sostituire k con i numeri che vanno da 0 a $n - 1$.

Teroema fondamentale dell'algebra

Esso cita:
Teorema fondamentale dell'Algebra. *Ogni polinomio di grado $n \geqslant 1$*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

a coefficienti $\mathbb{C}$ ha almeno uno zero in $\mathbb{C}$.

Da questo deriva
Toerema fondamentale dell'Algebra esteso. *Per ogni polinomio di grado $n \geqslant 1$*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

a coefficienti $\mathbb{C}$ ha esattamente n zeri in $\mathbb{C}$, con la convenzione di contare r volte uno zero di molteplicità r.

Per molteplicità si intende
Molteplicità di un polinomio. *Se il polinomio $P(x)$ si può scomporre nel prodotto*

$$P(x) = (x-\alpha)^r P_r(x)$$

dove il polinomio $P_r(x)$ è di grado $(n-r)$, si dice che $P(x)$ è divisibile per $(x-\alpha)^r$ e se $P_r(x)$ non è divisibile per $(x-\alpha)$, si dice che α è uno ***zero di molteplicità*** *r per $P(x)$.*

Esponenziali complessi

Detta e la costante di Nepero (anche chiamato numero di Eulero)

$$e \approx 2.71828\ldots$$

si definisce per ogni numero complesso $z = a + ib$ l'esponenziale complesso e^{a+ib} come il numero complesso

$$w = e^x(\cos a + i \sin b)$$

Quindi possiamo dire che

$$e^z = \rho e^{i\theta}$$

Proprio da questa formula ne viene ricavata una delle più famose della storia della matematica

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

che collega 5 unità fondamentali della matematica.

Formule di Eulero

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$

Queste formule permettono di trasferire tutte le caratteristiche della notazione trigonometrica in quella esponenziale.

Insiemi numerici

Se durante la nostra carriera scolastica abbiamo sempre lavorato con $\mathbb{R}$ o al massimo in $\mathbb{C}$, nulla vieta che noi creiamo nuovi insiemi numerici e li studiamo per trovarne alcune caratteristiche.
Ogni insieme numerico possiede delle caratteristiche che noi possiamo studiare

1. È limitato/illimitato
2. Possiede un max e un min
3. Possiede *maggioranti* o *minoranti*
4. Possiede un sup o un inf

Per le seguenti definizioni ed esempi, prenderemo in considerazione

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

Condizioni di limitazione

La o le condizioni di limitazione indicani quale può essere un limite o i limiti di un insieme. In insieme può essere illimitato (ovvero che per qualunque numero noi scegliamo, esisterà un punto sulla retta che lo rappresenta), limitato *superiormente*, *inferiormente* o entrambi contemporaneamente.
In generale la condizione di limitazione (superiore ed inferiore per uno stesso valore) è

$$\exists\, k > 0 \wedge k \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A, |x| \leqslant k$$

Generalizzando ancora per due valori diversi

$$\exists\, k_1, k_2 > 0 \wedge k_1, k_2 \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A, k_1 \leqslant x \leqslant k_2$$

Maggioranti e minoranti

Prendendo le condizioni di limitazione separatamente

$$\exists\, m \in \mathbb{R} \mid \forall x \in Ax \geqslant m$$

e

$$\exists\, M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in Ax \leqslant M$$

m rappresenta un **minorante** di A e M rappresenta un **maggiorante** di A.

Massimi e minimi

Un numero si definisce *massimo* se

$$\exists\, L \in \mathbb{A} \mid \forall x \in A, L \geqslant x$$

quindi è il valore più alto che l'insieme contiene.
Un numero si definisce *minimo* se

$$\exists\, l \in \mathbb{A} \mid \forall x \in A, l \leqslant x$$

quindi è il valore più basso che l'insieme contiene.

Intervalli

Un *intervallo* può essere aperto (illimitato) o chiuso (limitato). La notazione più comune è la seguente

$$\textbf{Limitato}\ [1,4] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 4\}$$
$$\textbf{Illimitato}\ ]-\infty, \pi[\coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < \pi\}$$

Da notare che $\pm\infty$ è sempre escluso in quanto tecnicamente non appartiene a $\mathbb{R}$.
Un *intorno* non è altro che un intervallo che comprende un numero specifico. In simboli

$$I(x_0) \coloneqq]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2[\qquad (\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R})$$

Ovviamente si può definire un intorno che sia limitato con una distanza

$$I_\varepsilon(x_0) \coloneqq]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$$

Questo è completo e ovviamente possiamo anche fare intorni non completi (quindi solo da un lato). Essi sono di conseguenza denominati sinistri o destri.

Punti isolati

Un punto isolato è un punto i cui intorni non contengono alcun elemento dell'insieme.

$$x_0 \in A, \exists\, I(x_0) \mid \forall x \in A \backslash \{x_0\} \not\ni I(x_0)$$

Punti di accumulazione

Un punto di accumulazione è un punto in cui ogni suo intorno cade almeno un elemento distinto dell'insieme.

$$x_0, y \in A, \forall I(x_0), y \in I(x_0)$$

Estremi

L'estremo superiore è quel valore che non viene mai superato. A seconda dei casi può essere il *più grande elemento dell'insieme* o il *più piccolo dei maggioranti.*

$$\forall x \in A \implies x \leqslant \Lambda \quad \text{e} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+, \exists\, x \in A \mid x > \Lambda - \varepsilon$$

L'estremo inferiore è quel valore che non non ha valori inferiori. A seconda dei casi può essere il *più piccolo elemento dell'insieme* o il *più grande dei minoranti.*

$$\forall x \in A \implies x \geqslant \lambda \quad \text{e} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+, \exists\, x \in A \mid x < \lambda + \varepsilon$$

Limiti

Per introdurre il concetto di limite, prendiamo ad esempio la funzione

$$f : \mathscr{D}_f \mapsto \mathbb{R} \mid x \mapsto \frac{2x^2 - 8}{x - 2}$$

essendo

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

La funzione non è definita per $x = 2$ però possiamo comunque trovare i valori della funzione per numeri che si avvicinano sempre più a 2

x	$f(x)$
1	6
1.5	7
1.9	7.8
1.9991	7.9982
...	...
2.0001	8.002
2.1	8.2
2.5	9
3	10

Come notiamo dalla tabella, più i ci si avvicina a 2 più i valori si avvicinano a 8. A questo comportamento diamo il nome di **limite finito**.
Possiamo quindi dire che per un numero ε positivo

$$\left| \frac{2x^2 - 8}{x - 2} - 8 \right| < \varepsilon$$

Questa disequazione ammette come soluzioni un intervallo opportuno di centro $x = 2$. Tenuto conto che

$$2x^2 - 8 = 2(x - 2)(x + 2)$$

riducendo

$$|2x - 4| < \varepsilon \quad x \neq 2$$

ovvero

$$-\varepsilon < 2x - 4 < \varepsilon \quad x \neq 2$$

ossia

$$2 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{2} \quad x \neq 2$$

Questo vuol dire che se

$$x \in \left] 2 - \frac{\varepsilon}{2}, 2 + \frac{\varepsilon}{2} \right[\quad x \neq 2$$

i corrispondenti valori di $f(x)$ distano da 8 meno di ε

Scriveremo allora

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = 8$$

che si legge *il limite per* x *che tende a* 2 *di* $\frac{2x^2 - 8}{x - 2}$ *è uguale a* 8.

Consideriamo ora la funzione

$$f : \mathscr{D}_f \mapsto \mathbb{R} \mid x \mapsto \frac{1}{(x + 1)^2}$$

essendo

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Attribuiamo ora a x valori sempre più vicini a -1

x	$f(x)$
-2	1
-1.5	4
-1.001	$1,000,000$
...	...
0	1
-0.5	4
-0.99995	$400,000,000$

Notiamo che per valori che si avvicinano a -1 otteniamo sempre valori molto grandi. A questo comportamento si da il nome di **limite a più infinito** $(+\infty)$.
Quindi si può scrivere

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{(x + 1)^2} = +\infty$$

che sgnifica che comunque si prenda un numero M la disuguaglianza

$$\frac{1}{(x + 1)^2} > M$$

è soddisfatta dai punti di un intorno di -1, escluso -1 stesso.
Supposto che $x \neq -1$ l'equazione equivale a

$$(x + 1)^2 < \frac{1}{M}$$

verificata per

$$-\frac{1}{\sqrt{M}} < x + 1 < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

cioè

$$-1 - \frac{1}{\sqrt{M}} < x < -1 + \frac{1}{\sqrt{M}} \quad x \neq -1$$

Tali valori effettivamente rappresentano un intorno di -1 escluso -1 stesso.
Analogamente al limite che tende a $+\infty$, si può trovare il limite a $-\infty$.

Un problema simile a quelli precedenti è quello di un valore che dopo un po' si stabilizza. In altre parole, un valore che tendendo ad ∞ tende ad un numero finito. Questi sono definiti **limiti finiti di una funzione all'infinito**. In simboli

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

Possiamo ulteriormente estendere il concetto a **limiti infiniti di una funzione all'infinito**. Ad esempio

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Definizione di limite finito

Limite finito. *Sia* f *una funzione definita in un intorno* I *del punto* x_0*, senza che sia necessariamente definita in* x_0.
Si dice che il numero l *è il* ***limite*** *della funzione* f *nel punto* x_0 *e si scrive*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se, fissato comunque un numero $\varepsilon > 0$*, è possibile determinare in corrispondenza di esso un numero* $\delta_\varepsilon > 0$ *tale che, per ogni* x *appartenente a* I *verificante la condizione*

$$0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$$

risulti

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

In simboli

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \varepsilon, \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Definizione di limite infinito

A $+\infty$

Limite infinito $+\infty$**.** *Sia f una funzione definita in un intorno I di x_0, escluso al più il punto x_0. Si dice che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

se, fissato comunque un numero M, è possibile determinare in corrispondenza di esso un numero $\delta_M > 0$ tale che, per ogni x di I verificante la condizione

$$0 < |x - x_0| < \delta_M$$

risulti

$$f(x) > M$$

In simboli

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall M > 0, \exists\, \delta_M > 0 \mid \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_M \Rightarrow f(x) > M$$

A $-\infty$

Limite infinito $-\infty$**.** *Sia f una funzione definita in un intorno I di x_0, escluso al più il punto x_0. Si dice che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

se, fissato comunque un numero M, è possibile determinare in corrispondenza di esso un numero $\delta_M > 0$ tale che, per ogni x di I verificante la condizione

$$0 < |x - x_0| < \delta_M$$

risulti

$$f(x) < M$$

In simboli

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall M, \exists\, \delta_M > 0 \mid \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_M \Rightarrow f(x) < M$$

Definizione di limite finito di una funzione all'infinito

Per $x \to +\infty$

Limite finito per $x \to +\infty$**.** *Sia f una funzione definita in un insieme $\mathscr{D}_f$ illimitato superiormente.*
Si dice che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

se, fissato comunque un numero $\varepsilon > 0$ è possibile determinare in corrispondenza di esso un numero k_ε tale che, per ogni $x \in \mathscr{D}_f$ e maggiore di k_ε, risulti

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

In simboli

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon, \exists\, k_\varepsilon > 0 \mid \forall x : x > k_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Per $x \to -\infty$

Limite finito per $x \to -\infty$**.** *Sia f una funzione definita in un insieme $\mathscr{D}_f$ illimitato superiormente.*
Si dice che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

se, fissato comunque un numero $\varepsilon > 0$ è possibile determinare in corrispondenza di esso un numero k_ε tale che, per ogni $x \in \mathscr{D}_f$ e minore di k_ε, risulti

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

In simboli

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon, \exists\, k_\varepsilon > 0 \mid \forall x : x < k_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Definizione di limte infinito di una funzione all'infinito

A $+\infty$

Limite a $+\infty$ **per** $x \to \pm\infty$**.** *Sia f una funzione definita in un insieme $\mathscr{D}_f$ illimitato superiormente [inferiormente]. Si dice che*

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ [x \to -\infty]}} f(x) = +\infty$$

se, fissato comunque un numero M, è possibile determinare in corrispondenza di esso un numero k_M tale che, per ogni $x \in \mathscr{D}_f$ che verifichi la condizione $x > k_M$ $[x < k_M]$, risulti

$$f(x) > M$$

In simboli

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ [x \to -\infty]}} f(x) = +\infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall k_M > 0, \exists\, M > 0 \mid \forall x : x > k_M [< k_M] \Rightarrow f(x) > M$$

A $-\infty$

Limite a $-\infty$ **per** $x \to \pm\infty$**.** *Sia f una funzione definita in un insieme $\mathscr{D}_f$ illimitato superiormente [inferiormente]. Si dice che*

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ [x \to -\infty]}} f(x) = -\infty$$

se, fissato comunque un numero M, è possibile determinare in corrispondenza di esso un numero k_M tale che, per ogni $x \in \mathscr{D}_f$ che verifichi la condizione $x > k_M$ $[x < k_M]$, risulti

$$f(x) < M$$

In simboli

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ [x \to -\infty]}} f(x) = +\infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall k_M, \exists\, M > 0 \mid \forall x : x > k_M [< k_M] \Rightarrow f(x) < M$$

Limite sinistro e destro

Avere limite l in un punto x_0 significa per una funzione essere regolare, ovvero assumere valori sempre più prossimi a l tanto x è prossimo a x_0.
Questa regolarità però può mancare in senso assoluto. Ciò avviene quando la funzione si stabilizza su due numeri diversi a seconda che ci si avvicini da destra o da sinistra.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

indica un limite destro,

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

un limite sinistro.
Limite finito destro. *Sia f una funzione definita in un intorno destro $I^+(x_0)$ di x_0, privato al più del punto x_0.*
Si dice che

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

se, fissato comunque un numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare in corrispondenza di esso un numero $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x \in I^+(x_0)$ verificante la condizione

$$0 < x - x_0 < \delta_\varepsilon$$

risulti

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

In simboli

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon, \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall x : x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Limite finito sinistro. *Sia f una funzione definita in un intorno sinistro $I^-(x_0)$ di x_0, privato al più del punto x_0.*
Si dice che

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

se, fissato comunque un numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare in corrispondenza di esso un numero $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x \in I^-(x_0)$ verificante la condizione

$$0 < x - x_0 < \delta_\varepsilon$$

risulti

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

In simboli

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \varepsilon, \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall x : x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Definizione generale di limite

Fin'ora abbiamo elencato varie definizioni formali ma ce n'è una generale, che le comprenda tutte? Certo che sì e anzi, è anche più facile da ricordare in quanto è una unica. Sapendo poi adattarla, si ricavano tute le altre.
Limite generale. *Siano $V(l)$ e $U(x_0)$ due intorni dei rispettivi parametri. Si ha allora che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall V(l), \exists\, U(x_0) \mid \forall x \in U(x_0) \backslash \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V(l)$$

Questo permette di imparare una sola formula che però, opportunamente adattata, permette di ricavare le definizioni formali di ogni limite.

Teroemi sui limiti

Unicità del limite. *Se una funzione ammette limite per $x \to x_0$, tale limite è unico.*
Teorema del confronto. *Siano f, g e h tre funzioni definite in un intorno I di x_0, escluso al più x_0, e tali che per ogni $x \in I$ risulti*

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

Se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$$

allora risulterà

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

Teorema della permanenza del segno. *Se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq 0$$

esiste un intorno $I(x_0)$, privato al più del punto x_0, in cui la funzione assume lo stesso segno di l.
Viceversa, se esiste un intorno $I(x_0)$ di x_0 privato al più di x_0, in cui risulta $f(x) > 0$ [$f(x) < 0$], e se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ si avrà

$$l \geqslant 0 \quad [l \leqslant 0]$$

Operazioni sui limiti

Somma

Limite di una somma. *Il limite di una somma di funzioni è uguale alla somma dei limiti se questi sono finiti.*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2$$

Prodotto

Limite di un prodotto. *Il limite di un prodotto di funzioni è uguale al prodotto dei limiti delle funzioni se questi sono finiti.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = l_1 \cdot l_2$$

Dal prodotto si possono ricavare anche i seguenti 2 teoremi
Limite di un prodotto (esteso). *Se $f(x)$ è una funzione che ammette limite l per x che tende a x_0 e k è un numero reale, si ha*

$$\lim_{x \to x_0} k\, f(x) = k \cdot l$$

Limite di un prodotto (esteso ulteriormente). *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni che per x che tende a x_0 hanno limiti l_1 e l_2, e λ e μ sono due numeri reali, si ha*

$$\lim_{x \to x_0} [\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda l_1 + \mu l_2$$

Quoziente

Limite di un quoziente. *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni aventi rispettivamente i limiti l_1 e l_2 per x che tende a x_0 e se $l_2 \neq 0$ si ha*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$$

Potenza

Limite di una potenza ($a^{f(x)}$). *Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $a \in \mathbb{R}_0^+$*

$$\lim_{x \to x_0} a^{f(x)} = a^l$$

Limite di una potenza ($[f(x)]^a$). *Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0$ e $a \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^a = l^a$$

Limite di una potenza ($[f(x)]^{g(x)}$). *Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 > 0$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} = l_1^{l_2}$$

Modulo

Limite di un modulo. *Se $\lim_{x \to x_0} = l$*

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$$

Logaritmo

Limite di un logaritmo. *Se $\lim_{x \to x_0} = l > 0$ e $a \in \mathbb{R}_0^+ \backslash \{1\}$*

$$\lim_{x \to x_0} \log_a f(x) = \log_a l$$

Forme indeterminate

Le forme indeterminate si ottengono quando si cerca di fare operazioni con limiti all'infinito. Le forme indeterminate indicano che la sola conoscenza dei limiti delle due funzioni non determina la conoscenza del limite della loro operazione.
Quelle che vengono riquadrate di seguito sono le forme indeterminate nei vari casi.

Somma

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim[f(x)+g(x)]$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\mp\infty$	$\boxed{+\infty-\infty}$

Prodotto

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim[f(x)\cdot g(x)]$
$l\neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	∞
0	$\pm\infty$	$\boxed{0\cdot\infty}$

Quoziente

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$
l	$\pm\infty$	0
$\pm\infty$	$l\neq 0$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\boxed{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}$
0	0	$\boxed{\frac{0}{0}}$

Potenza

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim[f(x)]^{g(x)}$
l	$\pm\infty$	$\pm\infty$
1	$\pm\infty$	$\boxed{1^{\pm\infty}}$
$+\infty$	0	$\boxed{+\infty^0}$
0	0	$\boxed{0^0}$

Per la risoluzione delle forme indeterminate, si utilizzino i limiti di una funzione razionale o limiti notevoli.

Limite finito di una funzione razionale

Limite finito di una funzione razionale. *Quando x tende a x_0, il limite di un polinomio coincide con il limite calcolato con sostituzione.*

Prendiamo ad esempio

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-5x+6}{(x-3)^2}$$

Se provassimo a sostituire otterremmo

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-5x+6}{(x-3)^2}=\frac{0}{0}$$

che è una forma indeterminata. In questa situazione si usa Ruffini per ridurlo di grado e ottenere

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-5x+6}{(x-3)^2}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\cancel{(x-3)}(x-2)}{\cancel{(x-3)}(x-2)}$$

e per i teoremi dei limiti

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{(x-2)}{(x-2)}=+\infty$$

In generale quindi

$$\lim_{x\to x_0}\frac{p(x)}{q(x)}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{p_1(x)}{q_1(x)}=\cdots=\begin{cases}\text{Ruffini se } \dfrac{0}{0}\\ l\end{cases}$$

Limite all'infinito di una funzione razionale

Limite all'infinito di una funzione razionale. *Quando x tende a $\pm\infty$, il limte di un polinomio coincide con il limite del suo monomio di grado più alto.*

Ad esempio consideriamo

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^3-5x^2+4x+1)$$

Poiché per $x\neq 0$

$$3x^3-5x^2+4x+1=x^3\left(3-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$$

si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=3$$

allora

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^3-5x^2+4x+1)=\lim_{x\to+\infty}(3x^3)=+\infty$$

Se invece abbiamo una frazione, abbiamo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\right)=\begin{cases}\infty, & \text{se } n>m\\ \dfrac{a_n}{b_n}, & \text{se } n=m\\ 0, & \text{se } n<m\end{cases}$$

Limiti di funzioni irrazionali

Creiamo questa sottosezione per la particolarità che i limiti con radicali possono avere. Prendiamo ad esempio

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-x\right)$$

Notiamo subito che se proviamo a sostituire, otteniamo la forma indeterminata

$$-\infty+\infty$$

Per risolvere questo tipo di limite, isoliamo il termine di grado massimo (quello che cresce più velocemente). Quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}-x\right)$$

Ora possiamo portare fuori x^2 dalla radice

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-x\right)$$

Ora possiamo sostituire $|x|=x$ perché siamo in un intorno di $+\infty$. Questo perché sono numeri sicuramente >0 quindi il loro valore assoluto è esattamente lo stesso loro. (Se fossimo in un $I(-\infty)$ sostituiremmo $|x|=-x$). Proseguendo nella risoluzione

$$\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\overbrace{x}^{\to+\infty}\overbrace{\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-x\right)}^{\to\sqrt{4+0}-1\to 2-1\to 1}=$$

$$+\infty\cdot 1=\boxed{+\infty}$$

In generale, quindi, si deve sempre isolare il termine che cresce più rapidamente utilizzando a proprio favore l'operatore lim.

Limiti notevoli

Ci sono dei limiti particolari che è estremamente comodo conoscere a memoria. Principalmente sono 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

Da questi due se ne possono ricavare altri 6. Dal primo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

Dal secondo

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \; \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \; \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+1)}{x}=\log_a e$$

Infine ne esiste un ultimo che è molto simile al primo ma non identico

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

Consigli nella risoluzione di limiti deducibili

Prendiamo ad esempio

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{1}{\log_2 x-2}$$

Per trovare questo limite, sostituiamo $x = 4$ nella funzione. Otteniamo

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{1}{\log_2 2}\to\lim_{x\to 4^-}\frac{1}{1}=1$$

Abbiamo molto semplicemente trovato il limite sostituendo. Spesso però bisogna anche stare attenti da che parte x tende.

Prendiamo un altra funzione

$$\lim_{x\to 2^+}\sqrt{\log_2\frac{x+2}{x-2}}$$

Questa può far paura ma andando con calma, scopriamo che non è affatto difficile. Dobbiamo un po' lavorare come con i domini: dall'interno all'esterno. Con valori numerici, sostiuiamo ad x il valore di x_0

$$\lim_{x\to 2^+}x+2\to 2^++2\to 4^+$$

(Il segno qui non è obbligatorio da mantenere in quanto stiamo lavorando su 4, se invece stessimo usando 0, è determinante in quanto può cambiare il risultato).

$$\lim_{x\to 2^+}x-2\to 2^+-2\to 0^+$$

(Il segno invece qui è indispensabile, ora capiremo perché)

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x+2}{x-2}\to\lim_{x\to 2^+}\frac{4^+}{0^+}\to+\infty$$

Se avessimo avuto 0^- non ci saremmo più avvicinati da destra, ma da sinistra e quindi avremmo ottenuto $-\infty$ in quanto il grafico di $\frac{1}{x}$ per $x\to 0^+$ tende all'infinito positivo, per $x\to 0^-$ a quello negativo. Proseguendo

$$\lim_{x\to 2^+}\log_2+\infty\to+\infty$$

Questo lo si può capire molto facilmente dal grafico (si veda sopra). Ecco perché conoscere i grafici generali delle funzioni più comuni è molto comodo.

$$\lim_{x\to 2^+}\sqrt{+\infty}\to+\infty$$

Quindi, con questo

$$\lim_{x\to 2^+}\sqrt{\log_2\frac{x+2}{x-2}}=+\infty$$

In definitiva quindi il consiglio è di andare con molta calma e ricordarsi le possibilità che la funzione lim offre.

Asintoti

Un asintoto è quella retta a cui la funzione tende sempre di più. Sia $f(x)$ la funzione in questione, allora $G(f)$ è il suo grafico. Se r è la retta che stiamo cercando, $P\in G(f)$, PH è la distanza punto-retta. Si ha quindi

$$\lim_{x\to\infty}\overline{PH}=0$$

Ci sono 3 tipi di asintoti: *verticali*, *orizzontali* e *obliqui*.

Verticali

$$x=x_0 \qquad \lim_{x\to x_0^\pm}f(x)=\pm\infty$$

Una funzione può avere nessuno, 1 o infiniti asintoti verticali.

Orizzontali

$$y=l \qquad \lim_{x\to\pm\infty}f(x)=l$$

Perché ci siano asintoti orizzontali è necessario che negli intorni di $\pm\infty$ il dominio sia illimitato.

Obliqui

$$y=mx+q \quad m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \quad q=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)$$

Per trovare gli asintoti obliqui prima si trovi m e poi la si inserisca per trovare q.

Generalizzazione

In generale, una funzione $\alpha(x)$ si può definire asintoto di una funzione $\beta(x)$ se

$$\lim_{x\to\infty}(\alpha(x)-\beta(x))=0$$

Quindi se la differenza tra le ordinate della funzione asintotica (α) e della funzione cercata (β) è 0 per un intorno di ∞.

Inoltre si può anche dire che un asintoto obliquo sia il quoziente tra un polinomio $f(x)$ e un altro $g(x)$. Da un quoziente di polinomi otteniamo un resto e un quoziente. Ovvero

$$y=\frac{f(x)}{g(x)} \quad f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$$

sistemando la seconda equazione otteniamo

$$\frac{f(x)}{g(x)}-q(x)=\frac{r}{g(x)}$$

questo ci viene molto utile specialmente dato che

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{g(x)}-q(x)\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{r}{g(x)}=0$$

In definitiva si segua

- Eseguire la divisione fra polinomi
- Ottenere il resto e il quoziente

Il quoziente che otterremo sarà la funzione asintotica quella data. Per trovare see l'asintoto è superiore o inferiore alla funzione, si trovi il segno di $\frac{r}{g(x)}$. Se è >0 anche il grafico della funzione è sopra l'asintoto, sotto altrimenti.

Da questo si ricava una cosa molto interessante ovvero che se $f(x)$ è di grado 3 e $g(x)$ è di primo grado, otteniamo che il quoztiente viene di grado secondo, quindi l'asintoto non è una retta, ma è una parabola!

Funzioni continue

Una funzione f si dice continua o in un punto (x_0) o in un intervallo (I). La continuità in un punto si ha se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

La definizione formale quindi diventa

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall x : |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

che, se confrontata con la definizione di limite manca di un $0 <$ in quanto la funzione è continua, quindi $x_0 \in \mathscr{C}(f)$.
La continuità in un intervallo è una generalizzazione di quella di un punto, ovvero una funzione è continua in un intervallo se

$$\forall x_0 \in I\ f \text{ è continua in } x_0 \Rightarrow f \text{ è continua in } I$$

Proprietà delle funzioni continue

Nelle funzioni continue si mantengono i teoremi dei limiti. Ovvero siano f e g due funzioni. Se entrambe sono continue in x_0

$$f \pm g \text{ è continua in } x_0$$
$$f \circ g \text{ è continua in } x_0$$
$$\frac{f}{g} \text{ è continua in } x_0 \quad (g(x_0)) \neq 0$$

Da queste proprietà ricaviamo subito che qualsiasi funzione polinomiale è continua. Questo perché, sia $P(x)$ una funzione polinomiale del tipo $a_n x^n + \cdots + a_0$. La funzione costante $(y = a)$ è continua in quanto non dipende da alcuna variabile. Per x^n possiamo pensarlo come $x \cdot x \underbrace{\cdots\cdots}_{n-\text{volte}} x$. Considerato le precedenti relazioni ed essendo $y = x$ continua in quanto il suo dominio è tutto $\mathbb{R}$, il prodotto di funzioni continue è un'altra funzione continua. La somma di funzioni continue è un'altra funzione continua. Quindi **ogni funzione polinomiale è continua in ogni** x_0.

Punti di discontinuità

Una funzione può essere continua solo se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

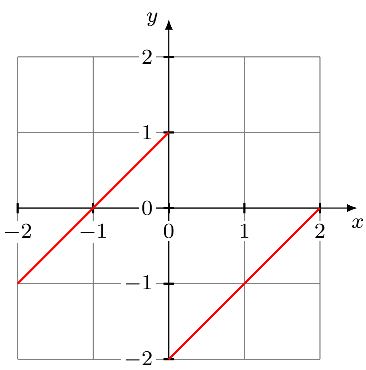
e questo limite esiste, la funzione è definita in x_0 e $l = f(x_0)$. Ovviamente ci sono casi in cui queste tre caratteristiche non si verificano. Ecco che si classificano quindi i punti di discontinuità, ovvero quei x_0 in cui la funzione pecca di queste particolarità.

Prima specie

Si ha quando

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Questa specie è anche definita "salto" in quanto visualmente si ha un salto della funzione. Ad esempio



ha una discontinuità di prima specie in quanto ha un "salto" nella funzione e in $x_0 = 0$ la funzione non è continua.

Seconda specie

La seconda specie si ha quando

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \vee \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

Un tipico esempio può essere la funzione tangente o un'iperbole equilatera.

Terza specie

Avviene quando

$$\nexists f(x_0) \vee \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

Questa specie viene anche definita "eliminabile" in quanto si può trovare una funzione $\tilde{f}$ che contenga al suo interno anche un punto. Ad esempio

$$\tilde{f} = \begin{cases} x_0, & x = x_0 \\ f(x), & x \neq x_0 \end{cases}$$

Teoremi sulle funzioni continue

Teorema di Weistrass

Teorema di Weistrass. *Se $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso $[a, b]$, allora ammette* $\max f$ *e* $\min f$ *assoluti.*

Per comprendere questo teorema bisogna fare una distinzione tra massimi/minimi relativi ed assoluti.
In x_0 si ha un $\max f\,[\min f]$ relativo se

$$\forall x \in I,\ \exists\, I(x_0) \mid f(x) \leqslant [\geqslant] f(x_0)$$

In x_0 si ha un $\max f\,[\min f]$ assoluto se

$$\forall x \in \mathscr{D} \Rightarrow f(x) \leqslant [\geqslant] f(x_0)$$

Teorema dei valori intemedi

Teorema dei valori intermedi. *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$, allora assume tutti i valori compresi tra il minimo (m) e il massimo M.*

Questo teorema in pratica ci dice che in un intervallo esistono $\max f$ e $\min f$ per Weistrass e che la funzione assume ogni valore al suo interno.

Teorema degli zeri

Teoremi degli zeri. *Se $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso $[a, b]$ tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora ammette almeno uno $z \in\,]a, b[\ \mid f(z) = 0$.*

In pratica dice che se la funzione da positiva diventa negativa, o il contrario, deve intersecare l'asse delle X.

Successioni

Una successione è una particolare funzione definita in modo

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

ovvero

$$n \mapsto a_n = f(n)$$

Una successione quindi è una serie di numeri interi relazionati fra di loro. Ci sono generalmente 3 modi per definire una successione:

1. **Algebrica**
$$a_n = 2n^2 + 1$$
2. **Ricorsiva**
$$\begin{cases} a_0 &= 1 \\ a_n &= 2a_{n-1} - 1 \end{cases}$$
3. **Elencativa**
$$a_n = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$$

Per andare a studiare una successione, calcoliamo il limite. Dato che per polimorfismo $\mathbb{N}$ ha un solo punto di accumulazione che corrisponde a $+\infty$, il solo limite che possiamo calcolare è

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

che può assumere 4 valori e a seconda del valore che ottiene, si definisce la successione in modo diverso.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} l, & \text{la successione } \{a_n\} \text{ è convergente} \\ +\infty, & \text{la succcessone } \{a_n\} \text{ è divergente positivamente} \\ -\infty, & \text{la successione } \{a_n\} \text{ è divergente negativamente} \\ \nexists, & \text{la successione } \{a_n\} \text{ è indeterminata} \end{cases}$$

La definizione formale del limite quindi cambia leggermente definizione

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists \bar{n}_\varepsilon \mid \forall n > \bar{n}_\varepsilon \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$$

Teorema sulle successioni

Teorema delle Successioni Monotone. *Se a_n è crescente e limitata superiormente, allora ammette limite che coincide con l'estremo superiore.*

Serie numeriche

Una serie numerica è una somma di una successione. Una somma infinita però. Quindi

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Per studiare una serie, si studia il limite a ll'infinito ma facendolo così direttamente non è possibile, quindi si devono creare delle somme parziali. Ad esempio

$$\begin{aligned} &\text{Sia } a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \text{ una successione} \\ s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_n &= \sum_{i=1}^{n} a_i \end{aligned}$$

Se quindi $\{s_n\}$ è una successione di somme parziali,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S$$

dove s_n deve essere convergente e S è la somma della serie. Generalizzando quindi

$$\sum_{i=1}^{\infty} = \lim_{n\to\infty} s_n = S$$

Serie di Mengoli-Cauchy

Questa serie è forse la più celebre e può far capire come approcciarsi alle serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)}$$

Per andare a risolvere questa serie bisogna riscrivere il parametro in quanto altrimenti il limite all'infinito avrebbe una forma indeterminata del tipo $\infty \cdot \infty$. Quindi possiamo scrivere

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{A(i+1)+Bi}{i(i+1)} = \frac{(A+B)i+A}{i(i+1)}$$

dove A e B rappresentano i coefficienti. Per la proprietà d'identità dei polinomi scriviamo

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-1 \\ A=1 \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

Di conseguenza la nostra serie diventa

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$$

Ora quindi abbiamo riscritto la serie in modo che sia di facile verifica. Andando ora ad osservare le somme parziali

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ s_2 &= 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ s_3 &= 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Notiamo che 1 rimane sempre e che rimane anche il termine $-\frac{1}{i+1}$. Quindi la somma parziale generalizzata è

$$s_i = 1 - \frac{1}{i+1}$$

Il limite dunque diventa

$$\lim_{i\to\infty} \left(1 - \frac{1}{i+1}\right) = 1$$

Di conseguenza

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = 1$$

Progressioni geometriche

Sia $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ una progressione geometrica i cui elementi sono

$$\begin{aligned} a_2 &= q_a 1 \\ a_3 &= q^2 a_1 \\ a_4 &= q^3 a_1 \\ a_n &= q^{n-1} a_1 \end{aligned}$$

Dove le somme parziali sono uguali a

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

stando alle formule trattate nelle sezioni precedenti. Quindi la serie di una progressione geometrica è

$$\sum_{i=1}^{\infty} x^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

e il limite della somma parziale

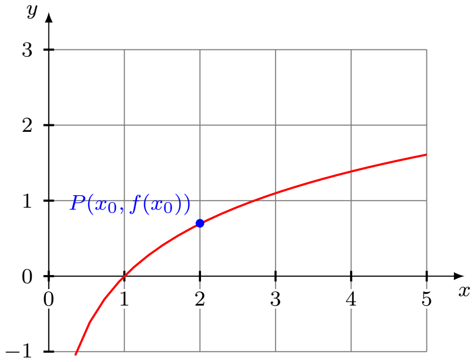
$$\lim_{n\to\infty} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} \lim_{n\to\infty} (1-q^n)$$

che può assumere 3 valori a seconda della ragione (q) della progressione.

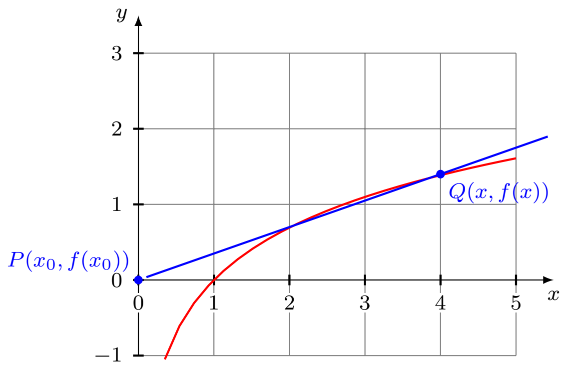
$$\frac{a_1}{1-q} \lim_{n\to\infty} (1-q^n) = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ \pm\infty, & q > 1 \\ \nexists, & q \leqslant -1 \end{cases}$$

Derivate

Il concetto di derivata è uno dei concetti fondamentali della matematica. È la base delle equazioni differenziali, integrali, calcolo infinitesimale e molto altro.
Per arrivare ad una definizione di derivata, si possono prendere due strade, le stesse che Newton e Leibniz intrapresero. Osserveremo il metodo di Leibniz in quanto è più matematico. Quello di Newton invece ha più riferimenti con la fisica.
Leibniz si era posto il problema di come trovare la tangente in un punto di una curva. Ad esempio



come troviamo la tangente ad $f(x)$ (in rosso) in P (in blu)? L'idea qui è quella di fissare un altro punto (Q) di coordinate $((x, f(x)))$ e trovare la retta che passa tra questi due punti che, ovviamente, risulterà secante alla curva. Poi si avvicinerà sempre di più il punto Q a P in modo che la retta tra i due punti, risulti in definitiva tangente alla curva.



Ora noi vorremmo trovare questa retta. Per prima cosa, troviamo il coefficiente angolare

$$m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Questa frazione, è definita **rapporto incrementale nel punto** x_0. Spesso è scritta anche come

$$m = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

o, ponendo $x - x_0 = h$

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ora per trovare quello della tangente, dobbiamo avvicinare Q a P, quindi

$$m_t = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Se questo limite esiste ed è finito, la funzione f si dice *derivabile* in x_0 e si pone

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Altre notazioni sono

$$\mathrm{D}f(x_0) \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

Teoremi sulle derivate

Tra i teoremi sulle derivate e le derivate delle funzioni elementari, si potranno calcolare con estrema facilità tutte le derivate che si proporranno.

Somma

$$\mathrm{D}\,[f(x) \pm g(x)] = \mathrm{D}f(x) \pm \mathrm{D}g(x)$$

Si estenda la proprietà al numero di funzioni desiderato. Si faccia comunque la somma algebrica.

Prodotto

$$\mathrm{D}\,[f(x) \cdot g(x)]\,[\mathrm{D}f(x)]\,g(x) + f(x)\,[\mathrm{D}g(x)]$$

Si noti che se $g(x) = k \vee f(x) = k$,

$$\mathrm{D}\,[k \cdot f(x)] = k\,\mathrm{D}f(x)$$

Si noti che per un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ di funzioni $f(x)$, il loro prodotto diventerebbe una pontenza, in particolar modo

$$\mathrm{D}[f(x)]^{\alpha} = \alpha f'(x)[f(x)]^{\alpha - 1}$$

Quoziente

$$\mathrm{D}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{[\mathrm{D}f(x)]g(x) - f(x)\,\mathrm{D}g(x)}{[g(x)]^2}$$

Derivata di una funzione inversa

$$\mathrm{D}f^{-1}(x_0) = \frac{1}{\mathrm{D}f(x_0)}$$

Derivata di una funzone composta

$$\mathrm{D}[f(g(x))] = \mathrm{D}f(g(x)) \cdot \mathrm{D}g(x)$$

Se sono presenti più funzioni si estenda di conseguenza. Quindi

$$\mathrm{D}[f(g(h(x)))] = \mathrm{D}f(g(h(x))) \cdot \mathrm{D}g(h(x)) \cdot \mathrm{D}h(x)$$

e così via per altre funzioni.

Derivate fondamentali

Verranno ora riportate le derivate fondamentali delle funzioni elementari. Con queste e con i teoremi sarà possibile trovare una qualunque derivata di una qualunque funzione.

Funzione	**Derivata**
$c\,(c \in \mathbb{R})$	0
$f(x)^{\alpha}\ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1} f'(x)$
$\sin f(x)$	$\cos(f(x))f'(x)$
$\cos f(x)$	$-\sin(f(x))f'(x)$
$\tan f(x)$	$(1 + \tan^2 f(x))f'(x) = \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
$\cot f(x)$	$-(1 - \cot^2 f(x)f'(x) = -\dfrac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$
$\log_a f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)} \log_a e$
$a^{f(x)}$	$a^{f(x)} \ln a f'(x)$
$\arcsin f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}$
$\arccos f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}$

Funzione	Derivata
$\arctan f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}$
$\text{arccot}\, f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}$

Si noti che è presente anche questa formula

$$\mathrm{D}[f(x)]^{g(x)} = [f(x)]^{g(x)}\left[\mathrm{D}g(x)\ln f(x) + g(x)\frac{\mathrm{D}f(x)}{f(x)}\right]$$

che risulta essere molto difficile da ricordare ma è facilmente ricavabile sfruttando la nota caratteristica

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

Derivate successive

Le derivate successive sono derivate di derivate di derivate ...
La notazione può essere o usando numeri romani sopra la funzione

$$f^{I}(x),\ f^{II}(x),\ f^{III}(x)$$

oppure con numeri arabi come pedice

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)$$

o infine usare gli apostrofi conseguentemente (da preferirsi per numeri piccoli)

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)$$

Rapporto tra continuità e derivabilità

Andiamo a verificare se dalla continuità di una funzione, possiamo dedurre la derivabilità. Prendiamo come funzione

$$f(x) = |x|$$

È continua in quanto $\mathbb{R}$ è il suo dominio e il suo codominio. L'unico punto che può essere di qualche difficoltà è $x_0 = 0$. Quindi andiamo a verificare la derivata sinistra e la derivata destra.

$$f'_+(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = 1$$

$$f'_-(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} = -1$$

Dato che le due derivate sono diverse,

$$\nexists\, f'(0)$$

Quindi **se $f(x)$ è continua in x_0 non è detto che sia derivabile in quel punto**.

Ora invece proviamo a vedere se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Scriviamo l'identità

$$f(x) = f(x)$$

Addizioniamo e sottraiamo $f(x_0)$ e dividiamo e moltiplichiamo $x - x_0$, otteniamo

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

Quindi ora possiamo scrivere

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left[f(x_0) + \frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{f'(x_0)}}{x - x_0}\overbrace{(x - x_0)}^{0}\right] = f(x_0)$$

Abbiamo quindi dimostrato che **se $f(x)$ è derivabile in x_0, allora $f(x)$ è continua**.

Punti di non derivabilità

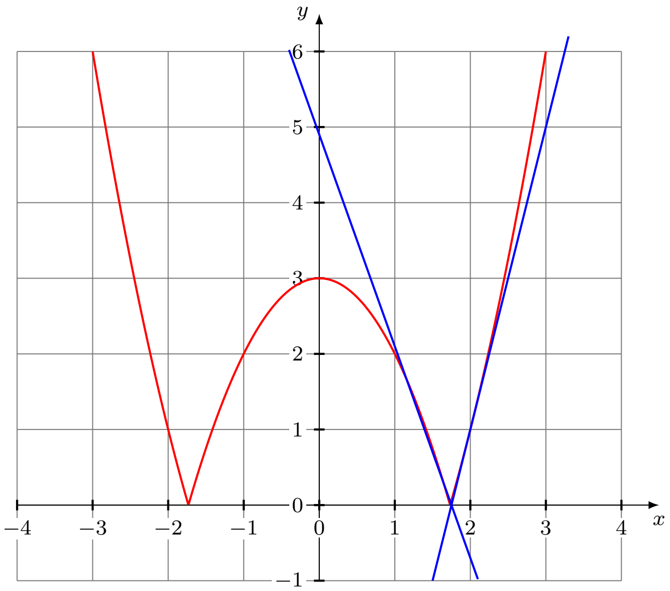
I punti di non derivabilità sono quei punti che vengono fuori da

$$\mathcal{D}_f - \mathcal{D}_{f'}$$

Esistono 3 tipi di non derivabilità.

Punti angolosi

x_0 è un punto angoloso per $f(x)$ se $f'_+(x)$ e $f'_-(x)$sono finiti (o al massimo uno è infinito) e $f'_+(x) \neq f'_-(x)$.
Un chiaro esempio si vede in $f(x) = |x^2 - c|$.



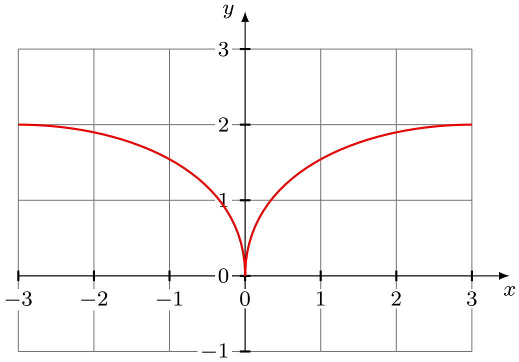
I punti in cui $f(x) = 0$ sono detti angolosi in quanto le due tangenti verso destra e verso sinistra sono diverse.

Cuspidi

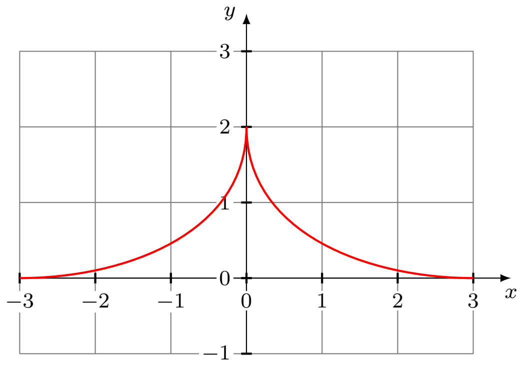
x_0 si definisce cuspide se

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta f}{\Delta x} = -\infty \qquad \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta f}{\Delta x} = +\infty$$

I due tipici cuspidi sono



e

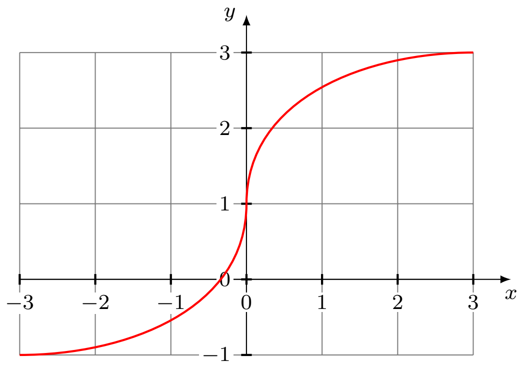


Flessi a tangente verticale

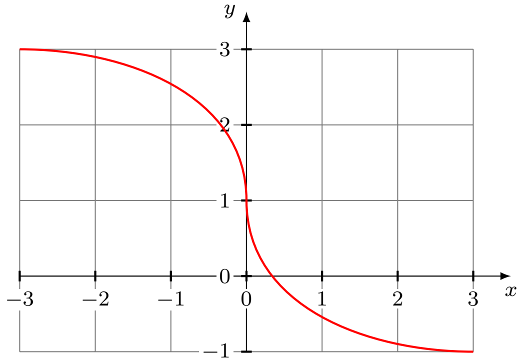
x_0 è un flesso se

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \pm\infty$$

I due tipici flessi sono



e



Problemi di ottimizzazione

I problemi di ottimizzazione sono problemi come ad esempio trovare l'area massima di un rettangolo sotto una curva, il volume minimo di un solido che soddisfi certe condizioni, ... I passi per risolvere questi esercizi sono i seguenti

1. Scegliere una x appropriata
2. Trovare una funzione da ottimizzare
3. Determinare un intervallo $I(x)$
4. Fare la derivata della funzione per ricavarne massimi e minimi

Prendiamo per esempio il seguente problema: data la funzione $f(x) = \sqrt{x}$, si trovi il punto $P \in f(x)$ più vicino a $(4, 0)$.

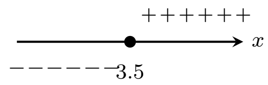
Come procedere? Innanzitutto bisogna identificare il punto P. Esso, dato che appartiene alla funzione, ha coordinate $P(x, \sqrt{x})$. La distanza è data dalla relazione pitagorica

$$d = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{x})^2} = \sqrt{x^2 + 16 - 8x + x} = \sqrt{x^2 - 7x + 16}$$

A questo punto, dobbiamo minimizzare questa funzione. Prendiamone la derivata

$$d' = \frac{2x - 7}{2\sqrt{x^2 - 7x + 16}}$$

Ora non resta che determinare il segno della derivata



Questo significa che per $x = \dfrac{7}{2}$ abbiamo un punto di minimo relativo! Ovvero il punto della funzione che è più vicino a $(4, 0)$. Quindi si ha che

$$P\left(\frac{7}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$$

Integrali

Integrali indefiniti

Sia f una funzione continua in $[a, b]$. Allora $f'(x)$ è la sua derivata, $F(x)$ è una primitiva. Bisogna quindi definire una primitiva di una funzione

Primitiva di una funzione. *Una funzione $F(x)$ si dice primitiva della funzione $f(x)$ continua in $[a, b]$ se*

$$F'(x) = f(x)$$

Sia ad esempio $f(x) = \cos x$, $F(x)$ sarà allora quella funzione la cui derivata è $f(x)$. Quindi $F(x) = \sin x$. Ma è soltanto questa? No, infatti anche $\sin x + 1$ o $\sin x - \frac{e}{4}$ o qualsiasi altra funzione che abbia una costante. Così possiamo definire un insieme denominato **totalità delle primitive** che le raccoglie tutte. L'operatore che permette di trovare questo insieme è **l'integrale indefinito**

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = \{F(x) + c\}$$

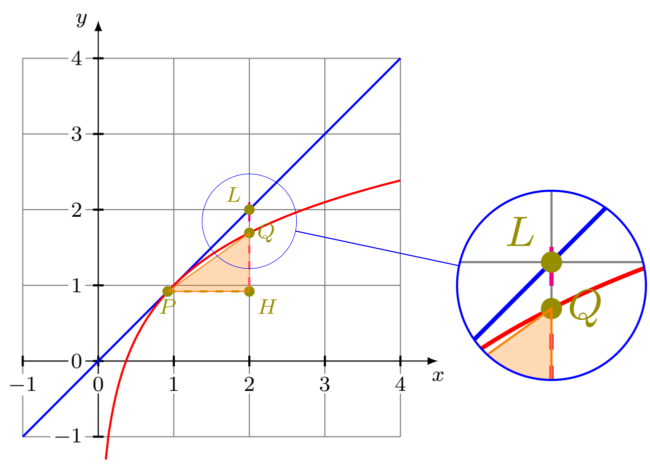
Scrivere $\mathrm{d}x$ è necessario perché, come nella scrittura di Leibniz per le derivate, indica per quale lettera si deve integrare.

Differenziale

Nella scrittura dell'integrale

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x$$

vediamo un termine $\mathrm{d}x$ che non appartiene alla funzione. Quel termine prende il nome di **differenziale**. Osserviamo il significato geometrico.
Innanzitutto perché una funzione possieda differenziale, deve essere derivabile in x_0. Prendiamo ad esempio un grafico



Come vediamo dalla figura, possiamo definire un punto $P(x_0, f(x_0))$ appartenente a $f(x)$ e un altro punto $Q(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ appartenente sempre alla curva. L invece si trova nell'intersezione tra il prolungamento di $\overline{HQ}$ e la tangente in x_0 alla curva. $\overline{LH}$ viene definito il **differenziale** di f. Ma a quanto equivale? Se proviamo a trovare l'angolo che la tangente fa con l'asse delle X

$$\tan\alpha = \frac{\overline{LH}}{\overline{PH}} = \frac{\mathrm{d}f}{\Delta x}$$

dove $\mathrm{d}f$ è il nostro differenziale. Ma l'angolo della tangente è equivalente al coefficiente angolare, quindi alla derivata calcolata nel punto. Quindi

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\Delta x}$$

da cui ne deriva che

$$\mathrm{d}f = f'(x_0)\Delta x$$

Se ora immaginiamo di avvicinare il punto Q sempre di più al punto P, come si farebbe per la derivata, si nota che $\overline{LQ} \to 0$. Quindi $\mathrm{d}f \approx \Delta f$.

Prendiamo ora come esempio la funzione identica $f(x) = x$. Qual è il suo differeniziale?

$$\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}x$$

Quindi possiamo anche dire che

$$\mathrm{d}x \approx \Delta x$$

Di conseguenza riscrivendo il differenziale

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

Proprietà dell'integrale indefinito

Per la definizione stessa di integrale si ha che

$$\mathrm{D}\int f(x)\ \mathrm{d}x = f(x)$$

e

$$\int \mathrm{D}f(x)\ \mathrm{d}x = f(x) + c$$

Se $f(x)$ è una funzione continua e k una costante, si ha

$$\int kf(x)\ \mathrm{d}x = k\int f(x)\ \mathrm{d}x$$

Se si ha una una somma di funzioni $\sum f$,

$$\int \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}\int f_i(x)\ \mathrm{d}x$$

Integrali indefiniti immediati

Di seguito verrà riportata una tabella con i principali integrali indefiniti immediati e le principali funzioni composte

$\int [f(x)]^\alpha\ \mathrm{d}x = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}\ \mathrm{d}x = -\cot f(x) + c$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ \mathrm{d}x = \ln\lvert f(x)\rvert + c$	$\int f'(x)a^{f(x)}\ \mathrm{d}x = a^{f(x)}\log_a e + c$

$\int f'(x)\sin f(x)\ \mathrm{d}x = -\cos f(x) + c$	$\int f'(x)\cos f(x)\ \mathrm{d}x = \sin f(x) + c$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\ \mathrm{d}x = \arcsin f(x) + c$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\ \mathrm{d}x = \tan f(x) + c$
$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\ \mathrm{d}x = \arctan f(x) + c$	

Integrazione di funzioni razionali fratte

Sia dato l'integrale

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\ \mathrm{d}x$$

se **il grado del numeratore è maggiore o uguale al grado del denominatore**, si proceda ad eseguire la divisione con resto della frazione integranda. Così si potrà scrivere

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\ \mathrm{d}x = \int Q(x)\ \mathrm{d}x + \int \frac{R(x)}{D(x)}\ \mathrm{d}x$$

A questo punto si distingueranno solo due casi in base al grado del denominatore. Si darà anche per scontato il termine

$$\int Q(x)\ \mathrm{d}x$$

in quanto non ha importanza essendo immediato.

Grado 1 In questo caso si ha un integrale nella forma

$$\int \frac{c}{ax+b}\ \mathrm{d}x = \frac{c}{a}\int \frac{a}{ax+b}\ \mathrm{d}x$$

A questo punto diventa un integrale immediato.

Grado 2 In questo caso si ha un integrale nella forma

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\ \mathrm{d}x$$

In questa situazione si deve osservare il Δ dell'espressione di secondo grado al denominatore.

$\Delta > 0$ Si ha che si può scrivere

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{mx+n}{(x-x_1)(x-x_2)}\ \mathrm{d}x$$

Si potranno ora trovare due numeri A e B tali che si possa scrivere infine

$$\frac{1}{a}\left(\int \frac{A}{x-x_1}\ \mathrm{d}x + \frac{B}{x-x_2}\ \mathrm{d}x\right)$$

$\Delta = 0$ Si ha che si può scrivere

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\ \mathrm{d}x = \int \frac{mx+n}{a(x-x_0)^2}\ \mathrm{d}x$$

In questa situazione si divide l'integrale

$$\int \frac{mx+n}{a(x-x_0)^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\left(\int \frac{mx}{(x-x_0)^2}\ \mathrm{d}x + \int \frac{n}{(x-x_0)^2}\ \mathrm{d}x\right)$$

Il secondo integrale è immediato, il primo invece richiede di aggiungere e togliere un numero l tale che al numeratore si abbia la derivata del denominatore.

$\Delta < 0$ Si deve fare in modo che il numeratore sia la derivata del denominatore, così che si possa scrivere

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\ \mathrm{d}x = \int \frac{hx+j}{ax^2+bx+c}\ \mathrm{d}x + \int \frac{n}{ax^2+bx+c}\ \mathrm{d}x$$

Il primo integrale ora è immediato. Per il secondo si ha che si può trovare un numero l tale per cui si possa identificare un quadrato

$$\int \frac{n}{ax^2+bx+c}\ \mathrm{d}x = \int \frac{n}{\underbrace{ax^2+bx+l}_{(r+s)^2} - l + c}\ \mathrm{d}x$$

Si può ora ricondurre il nuovo integrale ad un nuovo nella forma

$$l \int \frac{n}{t^2+1} \, \mathrm{d}x$$

dove n è la derivata di t. Quindi diventa un integrale immediato.

In generale si ha che in linea di massima le soluzioni sono nelle seguenti forme

$\Delta > 0$ Soluzioni:

$$\ln \blacksquare + \ln \nabla$$

$\Delta = 0$ Soluzioni:

$$\ln \blacksquare + \frac{\nabla}{x - x_0}$$

$\Delta < 0$ Soluzioni:

$$\ln \blacksquare + \arctan \nabla$$

Integrazione per parti

Sia dato l'integrale

$$\int f(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x$$

Come risolverlo nel caso in cui $f(x) \neq g'(x)$? Entra qui in gioco l'integrazione per parti che deriva dalla moltiplicazione delle derivate. Infatti la formula finale è:

$$\int f(x)g(x) \, \mathrm{d}x = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x) \, \mathrm{d}x$$

Alternativamente la si può vedere

$$\int f(x)g'(x) \, \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, \mathrm{d}x$$

Per capire meglio, prendiamo un esempio:

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x$$

Come risolvere questo integrale? Non è riconducibile ad alcun integrale immediato e tantomeno è una funzione razionale fratta. Quindi? Possiamo immaginare la funzione integranda come

$$\ln x = 1 \cdot \ln x$$

A questo punto proviamo a risolverlo utilizzando entrambe le forme della formula.

$$\int 1 \cdot \ln x \, \mathrm{d}x = \int x' \ln x \, \mathrm{d}x =$$
$$x \ln x - \int \frac{1}{x} x \, \mathrm{d}x = x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

Questo è usando la seconda formula. La prima

$$\int \ln x \cdot 1 \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int \frac{1}{x} x \, \mathrm{d}x =$$
$$x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

Integrazione per sostituzione

Dato l'integrale

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x$$

può essere necessario sostituire la funzione con cun'altra per rendere più facile o possibile l'integrazione. In generale quindi si avrà

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x = \int f(g(t)) \, \mathrm{d}g = \int f(g(t))g'(t) \, \mathrm{d}t$$

Quindi per capire meglio partiamo da un esempio

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$$

Poniamo $\sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2$. Quindi abbiamo anche che il differenziale $\mathrm{d}x$ diventa $\mathrm{d}x = 2t \, \mathrm{d}t$. Quindi ora possiamo riscrivere

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^2 + t} 2t \, \mathrm{d}t = \int \frac{2\cancel{t}}{\cancel{t}(t+1)} \, \mathrm{d}t$$

A questo punto diventa un integrale immediato

$$2 \int \frac{1}{t+1} \, \mathrm{d}t = 2 \ln|t+1| + c$$

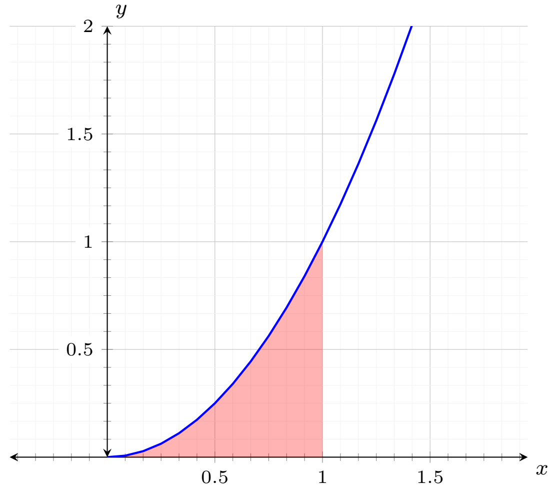
Torniamo a sostituire per ottenere

$$2 \ln|t+1| + c = 2 \ln|\sqrt{x} + 1| + c$$

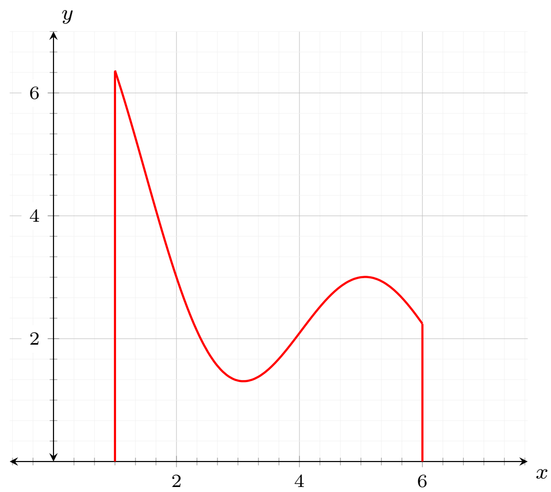
La grossa difficoltà con l'integrazione per sostituzione è la scelta della funzione sostituente. In generale se è necessario questo passaggio, la funzione sostitutiva viene indicata in quanto non ci sono modi chiari e semplici per identficarla.

Integrali definiti

Ipotizziamo che si voglia calcolare l'area colorata del seguente grafico



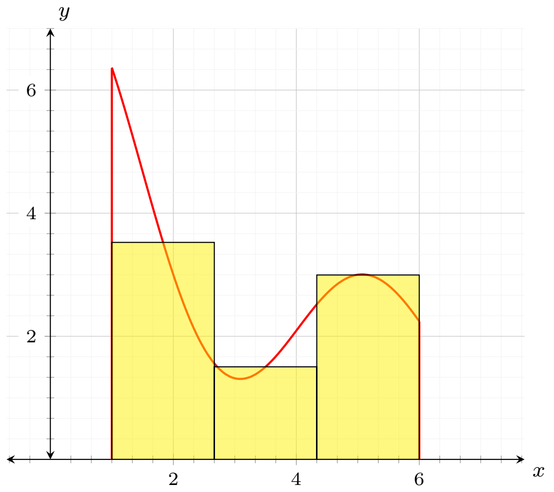
Come faremmo? Questo esatto problema lo aveva anche Archimede che inventò il così detto **metodo di esaustione** che consiste nel suddividere il grafico in tanti piccoli rettangoli. Prendiamo ora un grafico casuale



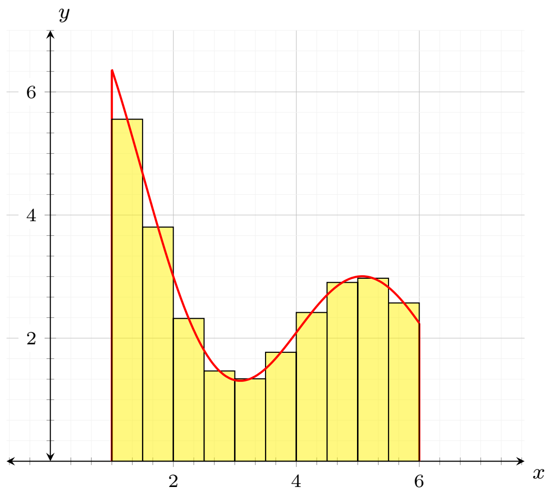
Questa figura è definita **trapezoide mistilineo** in quanto è composto dall'asse x, dai segmenti e dalla funzione. Formalmente è

$$T = \{(x, y) \, : a \leqslant x \leqslant b \wedge 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

dove a e b sono i limiti della funzione. Noi possiamo quindi trovare dei rettangoli che approssimano l'area



E aumentando il numero di rettangoli si aumenta la precisione



Abbiamo quindi n possibili rettangoli che hanno coordinate x_i. Come si può vedere dal disegno ci sono delle parti in difetto e altre in eccesso. Quindi se dividiamo la funzione in tanti piccoli sotto-intervalli, essi contengono un massimo e un minimo

$$m = \min_{x \in [x_1 \ldots, x_n]} f(x) \quad M = \max_{x \in [x_1, \ldots, x_n]} f(x)$$

Se ora andiamo a calcolare l'area dei rettangoli in eccesso ed in difetto otteniamo

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

e

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

È palese che $s < S$ e che $s < \mathcal{A}_f < S$. Dato che le somme sono limitate, ammettono limite e quindi

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \mathcal{A}_f$$

Si definisce quindi

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x = \mathcal{A}_f$$

Si noti che se la funzione è sempre postiva, l'integrale definito calcola l'area della funzione, altrimenti calcola la differenza di aree tra la parte positiva della funzione e quella negativa.

Proprietà dell'integrale definito

Per l'integrale definito valgono le seguenti caratteristiche

$$\int_a^a f(x)\ \mathrm{d}x = 0 \quad \forall x$$

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x$$

Come per gli integrali indefiniti valgono portare fuori la costante e dividere una somma

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$$

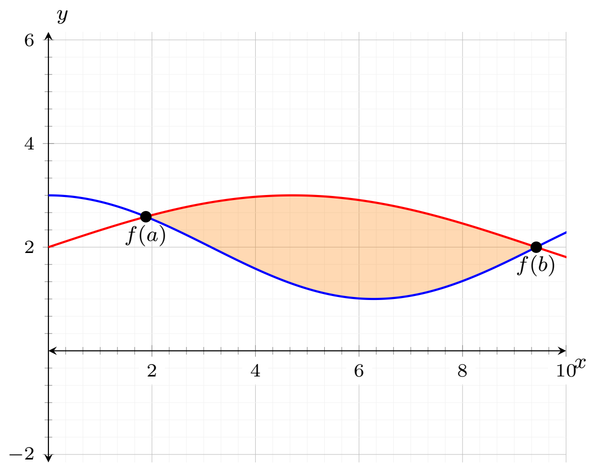
Per gli integrali definiti esiste anche la **proprietà additiva** che consiste nel dividere l'intervallo $[a, b]$ in altri intervalli $[a, c_1]$, $[c_1, c_2]$, ... fino a $[c_n, b]$. Questo permette di scrivere

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^{c_1} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\ \mathrm{d}x + \cdots + \int_{c_n}^{b} f(x)\ \mathrm{d}x$$

Vige anche la proprietà che se $f(x) \leqslant g(x)$, allora

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$$

Questo significa che ad esempio



l'area arancione diventa

$$\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)]\ \mathrm{d}x$$

Teorema della media

Teorema del valor medio. *Sia f continua in $[a, b]$, allora esiste un $c \in [a, b]$ tale che*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Funzione integrale

La funzione integrale è una funzione definita come

$$F(x) = \int_a^x f(x)\ \mathrm{d}x$$

Molto spesso però in ambito liceale, per evitare possibili confusioni, si sfrutta la caratteristica che le variabili negli integrali definiti sono mute (ovvero non cambiano il risultato) e quindi viene riscritta

$$F(x) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema fondamentale del calcolo integrale. *Sia f continua in $[a,b]$, la funzione integrale*

$$F(x) = \int_a^x f(x)\ \mathrm{d}x$$

è derivabile per ogni $x \in [a,b]$ e si ha che $F'(x) = f(x)$ in modo che $F(a) = 0$.

Questo teorema può essere esteso ad una funzione

$$F(\chi(x), \varphi(x)) = \int_{\chi(x)}^{\varphi(x)} f(x)\ \mathrm{d}x$$

che ha come limiti dell'integrali due funzioni. Qual è la derivata di quest'integrale? Considerato il fatto che, presa x si ha che viene a crearsi una funzione composta, per derivare si usa la solita regola

$$F'(\chi(x), \varphi(x)) = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\chi(x))\chi'(x)$$

Da questo teorema poi possiamo ottenere un modo estremamente rapido per calcolare l'integrale definito. Se definiamo

$$\phi(x) = F(x) + k = \int_a^x f(x)\ \mathrm{d}x + k \quad \forall x \in [a,b]$$

Abbiamo che

$$\phi(a) = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x + k$$

e quindi

$$\phi(x) = \int_a^x f(x)\ \mathrm{d}x + \phi(a)$$

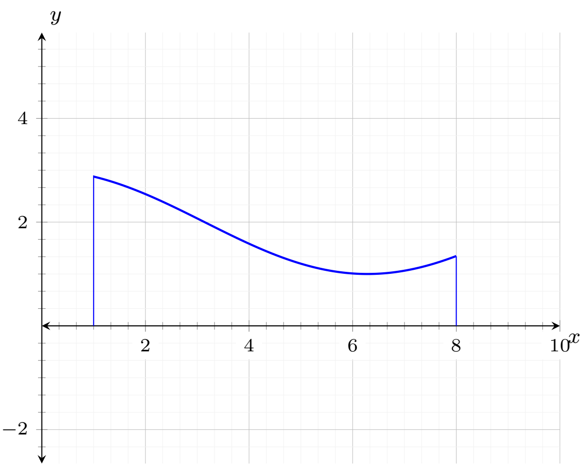
Ponendo $x = b$

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \phi(b) - \phi(a) = \phi(x)|_a^b$$

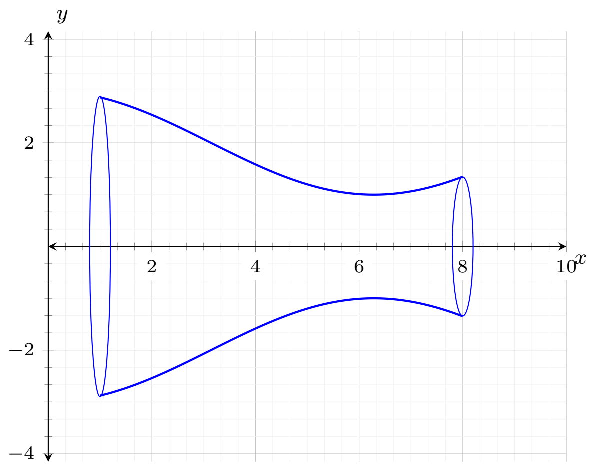
Ma dato che $\phi(x)$ è una primitiva $f(x)$ per il teorema, il calcolo dell'integrale definito diventa immediato.

Volumi di rotazione

Presa una curva come la seguente



si può ruotare attorno all'asse delle ascisse, si otterrà un solido che ha come linea la funzione.

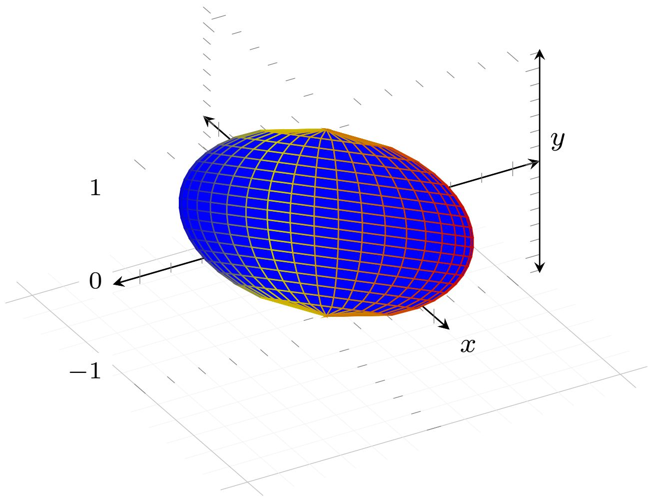


Il volume di quel solido è pari a

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\ \mathrm{d}x$$

Volumi con sezioni normali

Preso un solido è possibile calcolarne il volume sapendo l'area di una sezione. Ad esempio



Questo solido non è uno di quelli il cui volume è immediato, però possiamo immaginare di suddividerlo in tante superifici perpendicolare ad un asse. Conoscendo l'area di questa superficie $S(x)$, il volume del solido diventa semplicemente

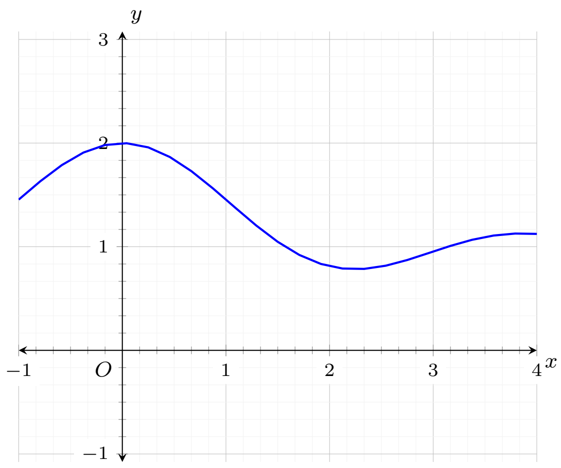
$$V = \int_a^b S(x)\ \mathrm{d}x$$

Si tenga conto che, in una piramide o in un cono, definita B la base, S una superficie parallela alla base, h l'altezza del solido e h' la distanza tra la punta e la superifice S, si ha che

$$B : S = h^2 : h'^2$$

Lunghezza di un arco di curva

Data una funzione $f(x)$ il cui grafico può essere



In un intorno $[a, b]$, la lunghezza di quell'arco di curva è pari a

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)}\ \mathrm{d}x$$

Integrali imprpri

Non tutte le funzioni sono continue su tutto $\mathbb{R}$ e quindi non è sempre possibile integrare in un qualsiasi intorno $[a, b]$. Ad esempio se in a la funzione ha un asintoto verticale, si può prendere un intorno $[a+\varepsilon, b]$ in cui $f(x)$ sia continua, tale che $a < a+\varepsilon < b$. Si ha allora che

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Alternativamente si può scrivere anche

$$\lim_{a'\to a} \int_{a'}^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Ovviamente se l'asintoto è in b, si modifichi il limite di conseguenza. Nel caso in cui invece nell'intorno $[a, b]$ ci siano più punti di discontinuità, si divida l'integrale in sotto-intorni e si utilizzi il metodo già descritto.
Ad esempio prendiamo un integrale del tipo

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{(x-2)^2}}\ \mathrm{d}x$$

Notiamo un $+\infty$ come limite di integrazione. Dato che non è un numero, non si può usare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. Ciò che si fa quindi è sostituire con una variabile e prendere il limite.

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{(x-2)^2}}\ \mathrm{d}x = \lim_{h\to+\infty} \int_3^h (x-2)^{-\frac{2}{5}}\ \mathrm{d}x$$

A questo punto si integra normalmente

$$\lim_{h\to+\infty} \left.\frac{(x-2)^{-\frac{2}{5}+1}}{-\frac{2}{5}+1}\right|_3^{+\infty} \lim_{h\to+\infty} \left.\frac{3(x-2)^{-\frac{3}{5}}}{5}\right|_3^{+\infty} =$$

$$\lim_{h\to+\infty} \left[\frac{5}{3}\sqrt[5]{(x-2)^2} - \frac{5}{3}\right] = +\infty$$

Questo è un metodo risolutivo di un integrale improprio.

Studio di funzione

Lo studio di funzione è una tecnica per ricavare il grafico di una funzione che viene fornita. Questo si basa su edi teoremi fondamentali e su tutte le conoscenze pregresse.

Teoremi fondamentali del calcolo differenziale

I teoremi fondamentali sono 3. Ciascuno di essi prende una parte più generale del precedente.

Teorema di Rolle

Teorema di Rolle. *Sia f una funzione definita e continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$ e inoltre si abbia $f(a) = f(b)$. Allora*

$$\exists\, x_0 \in\ ]a, b[\ : f'(x_0) = 0$$

Teorema di Lagrange

Teorema di Lagrange. *Sia f una funzione definita e continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Allora*

$$\exists\, x_0 \in]a, b[: f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Il teorema di Lagrange contiene al suo interno anche due lemmi (o corollari)
Monotonia $\leftrightarrow$ Crescenza/Decrescenza. *Sia f una funzione definita e continua in $I = [a, b]$ e derivabile in $\dot{I} =]a, b[$ e tale che*

$$\forall x \in \dot{I} \Rightarrow f'(x) > 0$$

*allora f è **crescente** in I e tale che*

$$\forall x \in \dot{I} \Rightarrow f'(x) < 0$$

*allora f è **decrescente** in I.*
Costanza. *Sia f una funzione definita e continua in $I = [a, b]$ con derivata nulla in $\dot{I} =]a, b[$, allora*

$$f(x) = k$$

Teorema di Cauchy

Teorema di Cauchy. *Siano f e g due funzioni continue e definite in $[a, b]$ e derivabili in $]a, b[$ con $g'(x) \neq 0\, \forall x \in]a, b[$; allora*

$$\exists\, c \in]a, b[: \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Da questo teorema, si ricava uno dei principali teoremi per il calcolo di limiti.
Teorema de l'Hôpital. *Siano f e g continue in $[a, b]$, derivabile in $]a, b[\backslash\{x_0\}$ con $g'(x) \neq 0 \forall x \in]a, b[$ e $f(x_0) = 0 \wedge g(x_0) = 0$ o $f(x_0) = \infty \wedge g(x_0) = \infty$. Se esiste finito*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

allora esiste

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Con questo teorema si possono calcolare tutte le forme indeterminate, con opportune modifiche. Infatti se si ha uno $^0/_0$ o un $^\infty/_\infty$ si risolve direttamente. Se si ha un 0∞ si può ricondurre facilmente. Se si ha un $\pm\infty \pm \infty$ si fa il limite di

$$f\left[1 - \frac{g}{f}\right]$$

o se è uno $^0/_0$ si faccia il denominatore comune. Infine tutte le 0^0, 1^∞ e ∞^∞ si riconducono alla 0∞.

Teoremi sulle derivate seconde

Il teorema di Lagrange e il suo primo lemma associa la monotonia al segno della derivata prima. Ci sono però dei teoremi che associano la derivata seconda alla concavità.
Massimi e minimi e flessi con derivata seconda. *Sia $x_0 \in]a, b[$ e f derivabile nello stesso intorno n-volte. Se in x_0 si ha*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

si hanno i seguenti casi

n **pari** *se*

$f^{(n)}(x_0) > 0$ *x_0 è un minimo relativo*

$f^{(n)}(x_0) < 0$ *x_0 è un massimo relativo*

n **dispari** *in x_0 è presente un flesso a tangente orizzontale*

Concavità con derivata seconda. *Sia f una funzione tale che $\exists\, f''(x)$*

Se $f''(x_0) > 0$ *ha concavità verso l'alto*

Se $f''(x_0) < 0$ *ha concavità verso il basso*

Se $f''(x_0) = 0$ **e** $f'''(x_0) \neq 0$ *in x_0 ha un flesso*

Teorema del criterio della derivabilità

Teorema del criterio di derivabilità. *Sia f continua in x_0 e derivabile in $U \backslash \{x_0\}$. Se esiste finito*

$$\lim_{x \to x_0} f'(x)$$

allora f è derivabile in x_0 e si ha che

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$$

Esempio

Avendo ora tutte le cose necessarie per farlo, definiamo i passaggi per studiare una funzione

1. Dominio
2. Intersezione con gli assi
3. Simmetria
4. Periodicità
5. Segno
6. Asintoti
7. Continuità e derivabilità
8. Massimi e minimi
9. Concavità e flessi

Per chiarire il tutto, prendiamo ad esempio la seguente funzione

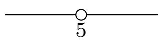
$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$$

Per prima cosa quindi troviamo il dominio

$$x^2 - x \neq 0 \to x(x-1) \neq 0$$

quindi

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$$



Trovato il dominio, troviamo le intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x - 5x + 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{1/2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Quindi i due punti di intersezione con x sono

$$A(4, 0) \quad B(1, 0)$$

Ora con y

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{4}{5} \end{cases}$$

e quindi il punto è immediato

$$C\left(-\frac{4}{5}, 0\right)$$

Prima di andare a disegnare queste informazioni, troviamone altre due che miglioreranno enormemente il disegno. La prima sono gli asintoti.

Troviamo gli eventuali asintoti verticali. Dato che $5 \notin \mathcal{D}$,

$$\lim_{x \to 5^-} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

e

$$\lim_{x \to 5^+} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

Sappiamo quindi che $x = 5$ è **asintoto verticale**.

Andiamo alla ricerca di un asintoto orizzontale (anche se vedendo la funzione possiamo subito vedere che non è presente in quanto il grado del numeratore è maggiore di quello del denominatore)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 \left(-\frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}\right)}{x\left(1 - \frac{5}{x}\right)} = \infty$$

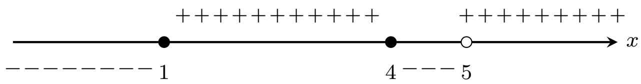
Quindi non ci sono asintoti orizzontali e dobbiamo andare a cercarne di obliqui quindi

$$q = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 5x} = 1$$

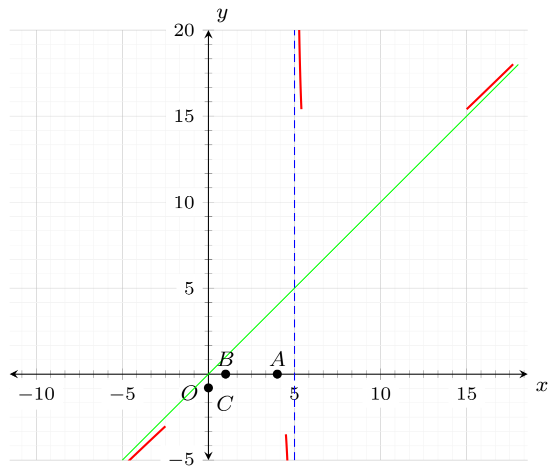
$$m = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} - x\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 5x + 4 - 5x^2 + 5x}{x - 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{x - 5} = 0$$

Questo significa che $y = x$ è **asintoto obliquo**.

Prima di disegnare, verifichiamo che i conti siano corretti andando a calcolare il segno della funzione



Vediamo che effettivamente le informazioni degli asintoti e quella del segno combaciano. Prima di 5 la funzione tende a $-\infty$ quindi è negativa, poi diventa positiva. Vediamo anche che 1 e 4 sono punti d'intersezione e quindi che il segno cambia. Disegnamo ciò che sappiamo



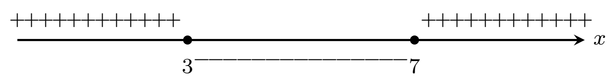
Questo rapido grafico contiene le informazioni che abbiamo già trovato, i due asintoti e il segno. Sono anche riportati i punti di intersezione precedentemente trovati.

A questo punto vediamo che la funzione è continua in quanto è polinomiale. Andiamo a vedere se è derivabile e qual è la sua derivata prima.

$$f'(x) = \frac{\mathrm{D}(x^2 - 5x + 4)(x - 5) - (x^2 - 5x + 4)\,\mathrm{D}(x - 5)}{(x - 5)^2} =$$

$$= \frac{(2x - 5)(x - 5) - (x^2 - 5x + 4)}{(x - 5)^2} = \frac{x^2 - 10x + 21}{(x - 5)^2}$$

Trovata la derivata, studiando il segno si vede che



Questo significa che in $x = 3$ e in $x = 7$ cambia segno. La funzione da crescente diventa decrescente e viceversa. Questo significa che se la derivata calcolata in quel punto è pari a 0, sono un punto di minimo e uno di massimo.

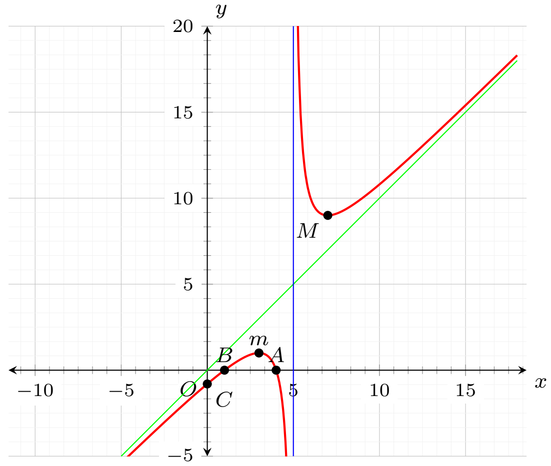
$$f'(3) = \frac{9 - 30 + 21}{(3 - 5)^2} = 0$$

$$f'(7) = \frac{49 - 70 + 21}{(7 - 5)^2} = 0$$

E quindi in 3 e 7 si hanno rispettivamente un punto di massimo e uno di minimo. Calcoliamone il valore della y e completiamo lo studio

$$m\,(3,1) \quad M\,(7,9)$$

Quindi il disegno ora completo è



Equazioni differenziali

Se nell'algebra tradizionale si lavora con variabiili come x che rappresentanoun numero, non è l'unica possibilità. Se si mettono in relazione una variabile x, una funzione $f(x)$ e sue derivate successive, si ottiene un'equazione differenziale. Essa è spesso espressa nella forma

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

Si definisce **ordine** di un'equazione differenziale il massimo ordine di derivazione. Si definisce **grado** il grado della funzione di ordine massimo.
Ci sono due tipi di soluzioni: **generale** ovvero una funzione che soddisfa la relazione con la presenza di una costante (essa sarà nella forma $y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$) e **particolare** ovvero una funzione che soddisfa la relazione senza costante. Per questo secondo tipo, sono necessarie ulteriori condizioni.
Se si riesce a scrivere un'equazione differenziale nella forma

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

si dice che è scritta in **forma normale**.

Equazioni differenziali a variabili separabili

Se nell'equazione

$$y^{(n)} = G(x, y)$$

è possibile scrivere $G(x, y)$ come $M(x) \cdot N(y)$, allora si definisce un'equazione differenziale a variabili separabili. Per risolverla quindi si ha che

$$y' = M(x) \cdot N(y)$$
$$\int \frac{y'}{N(y)}\,\mathrm{d}x = \int M(x)\,\mathrm{d}x$$

Problema di Cauchy

Dato il sistema

$$\begin{cases} y' = G(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Esiste ed è unica la soluzione. Ovviamente per un maggiore ordine, sono necessarie maggiori condizioni se si vogliono eliminare tutte le costanti.

Equazioni differenziali lineari di primo ordine

Sia data

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Se $b(x) = 0$ si definisce lineare **omogenea**. Per risolvere questo tipo di equazioni si deve moltiplicare tutto per un fattore. Esso è

$$e^{\int a(x)\ \mathrm{d}x}$$

Quindi l'equazione diventa

$$\underbrace{y' e^{\int a(x)\ \mathrm{d}x} + a(x) e^{\int a(x)\, difx}}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[y e^{\int a(x)\ \mathrm{d}x}\right]} = b(x) e^{\int a(x)\ \mathrm{d}x}$$

E quindi possiamo scrivere semplicemente

$$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[y e^{\int a(x)\ \mathrm{d}x}\right] \mathrm{d}x = \int b(x) e^{\int a(x)\ \mathrm{d}x}\ \mathrm{d}x$$

e infine, isolando

$$y = e^{-\int a(x)\ \mathrm{d}x} \int b(x) e^{\int a(x)\ \mathrm{d}x}\ \mathrm{d}x$$

Equazioni differenziali lineari di secondo ordine

Sia data

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

Se $g(x) = 0$ si definisce lineare **omogenea**. Dato che a, b, c sono coefficienti costanti, si può dividere tutto per a e ottenere

$$y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0$$

che si riscrive in

$$y'' + by' + c = 0$$

Le soluzioони sono del tipo $y = e^{\lambda x}$ e quindi si ha che

$$y = e^{\lambda x} \quad y' = \lambda e^{\lambda x} \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

E quindi

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + c e^{\lambda x} = 0$$

e raccogliendo

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

Questo accade solo se $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ visto che $\forall \lambda \in \mathbb{R}, e^{\lambda x} >\neq 0$. $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ si definisce **equazione caratteristica**. Per risolvere queste equazioni differenziali, si distingue in base al delta dell'equazione caratteristica.

$\Delta > 0$

Se $\Delta > 0$ allora si avranno due soluzioni $e^{\lambda_1 x} \wedge e^{\lambda_2 x}$. La soluzione generale quindi sarà $y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$ per qualche A e B.

$\Delta = 0$

Se $\Delta = 0$ allora si avranno due soluzioni coincidenti. Quindi la soluzione generale sarà nella forma $y = Ae^{\lambda x} + Bxe^{\lambda x}$ per qualche A e B.

$\Delta < 0$

Se $\Delta < 0$ si avranno due soluzioni distinte, complesse coniugate $\lambda_{1/2} = \alpha + i\beta$. Utilizzando la formula di Eulero per i numeri complessi, la soluzione generale diventa $y = Ae^{\alpha + i\beta} + Be^{\alpha + i\beta}$ che diventa, prendendo le parti reali $y = Ae^{\alpha x}\cos\beta x + Be^{\alpha x}\sin\beta x$ per qualche A e B.

Se l'equazione non è omogenea, si avrà la soluzione generale come

$$y = y_{\text{omogenea}} + y_{\text{particolare}}$$

dove $y_{\text{particolare}}$ si ricava tramite tabelle.

Geometria analitica nello spazio

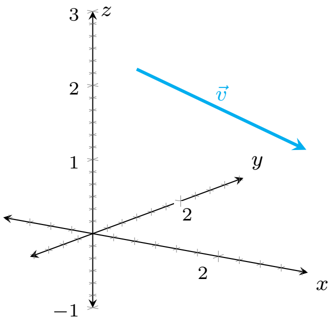
La geometria analitica non erelativa esclusivamente a piani bidimensionali. Di seguito verrano proposte le formule e spiegazioni di quella in tre dimensioni.

Vettori

Molto spesso si utilizzerà il concetto di *vettore*.Un vettore può essere rappresentato in molti modi, tra cui:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ \vdots \end{bmatrix} = (a, b, \dots)$$

Un vettore è composto di un numero definito di *componenti*, solitamente una per ciascuna dimensione in cui si lavora. Quindi è decisamente più comune trovare vettori *bidimensionali* che non con un numero maggiore di componenti.



In questa immagine è possibile vedere un vettore $\vec{v}(x, y, z)$ e le sue componenti.

D'ora in poi sarà dato per scontato che i vettori siano tri-dimensionali.

Operazioni tra vettori

Le operazioni come addizione e sottrazione funzionano molto semplicemente sommando algebricamente le componenti tra di loro:

$$\vec{v_1}\,(x_1, y_1, z_1) \pm \vec{v_2}\,(x_2, y_2, z_1) = \vec{v}\,(x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$$

La moltiplicazione tra vettori può avere come risultato o un *vettore* o uno *scalare*.

Prodotto scalare

$$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Come si può notare il prodotto scalare tra due vettori torna uno scalare (ovvero un numero). È molto comune trovare questa definizione di prodotto scalare:

$$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = \|\vec{v_1}\| \cdot \|\vec{v_2}\| \cos\theta$$

$\|\vec{v}\|$ è il modulo del vettore $\vec{v}$, ovvero la sua lunghezza. θ è l'angolo formato dai due vettori. Si noti che

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

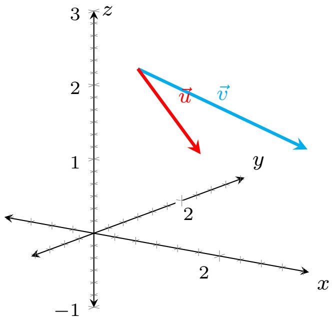
Prodotto vettoriale

$$\vec{v_1} \times \vec{v_2} = n\|\vec{v_1}\| \cdot \|\vec{v_2}\| \sin\theta$$

$\|\vec{v}\|$ è il modulo del vettore $\vec{v}$, ovvero la sua lunghezza. θ è l'angolo formato dai due vettori. n è la *normale* del piano su cui stanno i vettori. Una *normale* è un vettore perpendicolare ad un oggetto dato.
Per scoprire la direzione del nuovo vettore si può usare la così detta "regola della mano". Essa dice:

1. Usare il pollice della mano destra in direzione e verso del **primo** vettore
2. Usare l'indice o le altre dite in direzione e verso del **secondo** vettore
3. Il nuovo vettore avrà la direzione che attraversa il palmo perpendicolarmente e il vers o uscente dalla mano.

Angolo tra vettori



Partendo dalla definizione precedente abbiamo che

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = (x_vx_u, y_uy_v, z_uz_v) = \|v\|\|u\| \cos\theta$$

Invertendo si ottiene semplicemente

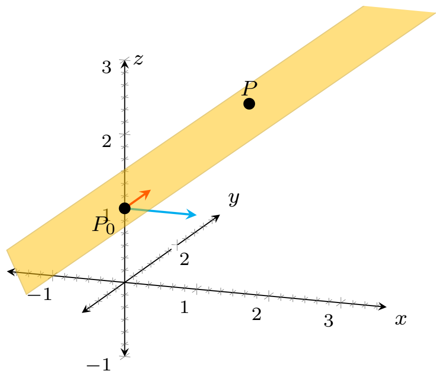
$$\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{\|v\|\|u\|} = \frac{x_vx_u + y_vy_u + z_vz_u}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}\sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}}$$

Piani

Come definire l'equazione del piano nello spazio? Ci sono due modi per esprimerlo: in forma parametrica o geometrica/analitica.

Forma parametrica

L'idea è di prendere un punto $P(x, y, z)$ nello spazio e un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Si prendono inoltre due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ a partire da P_0 in modo che la loro somma sia $\overline{PP_0}$.



$\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono linearmente dipendenti dato che la loro somma deve essere $\overline{P_0P}$. Se i due vettori giaciono su di un piano π, allora anche il vettore somma lo farà. Si ha quindi che, per due costanti λ e μ

$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + \vec{P_0P} = \vec{OP_0} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{u}$$

Per la proprietà distributiva si può scrivere

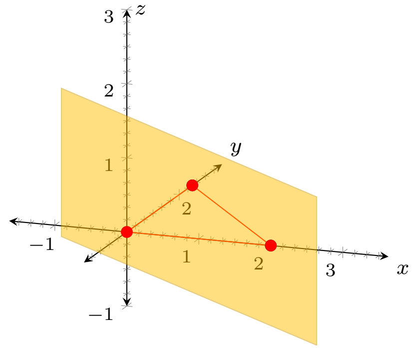
$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (\lambda v_x, \lambda v_y, \lambda v_z) + (\mu u_x, \mu u_y, \mu u_z)$$

E si ottiene quindi un sistema

$$\begin{cases} x &= x_0 + \lambda v_x + \mu u_x \\ y &= y_0 + \lambda v_y + \mu u_y \\ z &= z_0 + \lambda v_z + \mu u_z \end{cases}$$

Geometrica

Si prendono due punti $Q(a, b, c)$ e $P(x, y, z)$ in modo che si ha un angolo retto tra i segmenti $\overline{OQ}$ e $\overline{QP}$.



Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= a^2+b^2+c^2+(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \\ 0 &= ax+by+cz-a^2-b^2-c^2 \\ 0 &= ax+by+cz+d \end{aligned}$$

Esercizi

Questa sezione è dedicata ad alcuni esercizi con relativa risoluzione e spiegazione. Il suo scopo è quello di chiarire i concetti teorici con esempi pratici.

Generale

Prodotti notevoli

Esercizio 1 Si scompongano il seguenti polinomi usando i prodotti notevoli.

$$18x^3 - 4 - 8x + 9x^2 \tag{1}$$

$$a^2x^2 - a^2y^2 - b^2x^2 + b^2y^2 \tag{2}$$

Per semplificare (1) innanzitutto riscriviamo il polinomio in modo decrescente

$$18x^3 + 9x^2 - 8x - 4$$

Ora possiamo notare che i primi due elementi sono semplificabili, così come anche i secondi due per uno stesso fattore.

$$\underbrace{18x^3 + 9x^2}_{9x^2(2x+1)} \overbrace{-8x - 4}^{-4(2x+1)} = (9x^2 - 4)(2x + 1)$$

Ora abbiamo solo un altro prodotto da semplificare. Ricordando che $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ possiamo espandere la prima parentesi

$$\boxed{(3x - 2)(3x + 2)(2x + 1)}$$

Per semplificare (2) possiamo raccogliere i coefficienti di x e y

$$a^2x^2 - a^2y^2 - b^2x^2 + b^2y^2 = x^2(a^2 - b^2) + y^2(b^2 - a^2)$$

Ora però, se si guardano attentamente i coefficienti, si vede che sono semplicemente opposti di segno, quindi possiamo portare fuori il meno dal secondo e renderli uguali

$$x^2(a^2 - b^2) + y^2(b^2 - a^2) = x^2(a^2 - b^2) - y^2(a^2 - b^2) = (x^2 - y^2)(a^2 - b^2)$$

Ricordando che $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ possiamo espandere e concludere

$$(x^2 - y^2)(a^2 - b^2) = \boxed{(x - y)(x + y)(a - b)(a + b)}$$

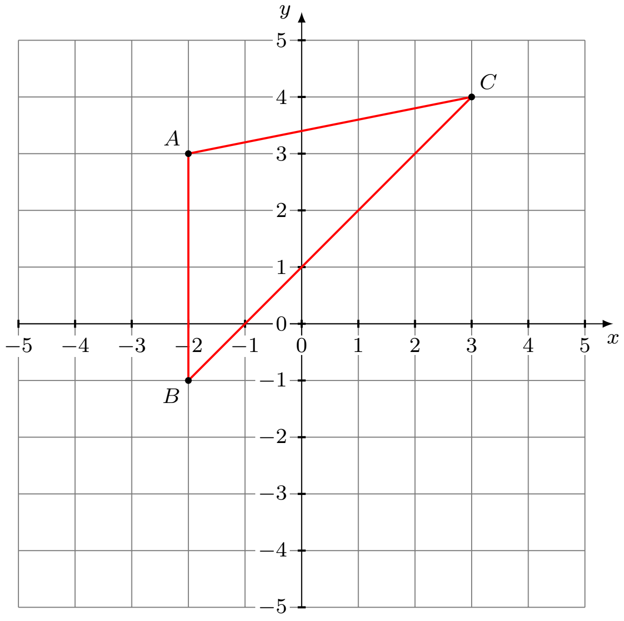
Geometria Analitica

Rette

Esercizio 1 Dato il triangolo di vertici $A(-2, 3)$, $B(-2, -1)$ e $C(3, 4)$, determinare:

1. le equazioni dei lati;
2. il perimetro e l'area del triangolo
3. detta t la retta passante per C e perpendicolare alla retta BC e detto D il punto d'intersezione di t con l'asse x, l'area del quadrilatero ACDB;
4. i punti della retta $y = 2x$ che hanno distanza uguale a 3 dalla retta AB.

Come in ogni esercizio di geometria, partiamo dal disegno. Lo miglioreremo man mano che andiamo avanti.



Per i primi due punti, questo è tutto quello che ci serve.
Per il punto 1, possiamo semplicemente usare la formula per la retta passante per due punti. Per convenienza, denominiamo le rette in base ai vertici che attraversano.
Per la retta AB è immediato: si nota che hanno la stessa ascissa, quindi la retta passante per i due punti è solo $\boxed{AB : x = -2}$.

Per AC:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \to \frac{y - 3}{4 - 3} = \frac{x - (-2)}{3 - (-2)} \to$$
$$\frac{y - 3}{1} = \frac{x + 2}{5} \to y = \frac{x + 2}{5} + 3$$
$$y = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5} + \frac{15}{5} \to \boxed{AC : y = \frac{1}{5}x + \frac{17}{5}}$$

Infine per BC

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \to \frac{y + 1}{4 + 1} = \frac{x - (-2)}{3 + 2}$$
$$\frac{y + 1}{5} = \frac{x + 2}{5} \to \boxed{BC : y = x + 1}$$

Ci avviamo ora al punto 2 e per l'area possiamo usare la matrice

$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Che poi si semplifica usando Sarrus in

$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 + y_1x_3 + x_2y_3 - x_3y_2 - y_3x_1 - x_2y_1\right|$$

E sostituendo otteniamo

$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2}\left|-2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 3\right|$$
$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2}\left|-2 + 9 - 8 - 3 + 8 + 6\right|$$
$$\boxed{\mathscr{A}(ABC) = 10}$$

Per trovare il perimetro, possiamo usare la distanza tra due punti e trovare tutte le lunghezze.
AB è immediato in quanto hanno la stessa ascissa. $\boxed{AB = 3 + 1 = 4}$.

Per trovare AC

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \to$$
$$AB = \sqrt{(3 + 2)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{5^2 + 1^2}$$
$$= \sqrt{25 + 1} = \boxed{\sqrt{26}}$$

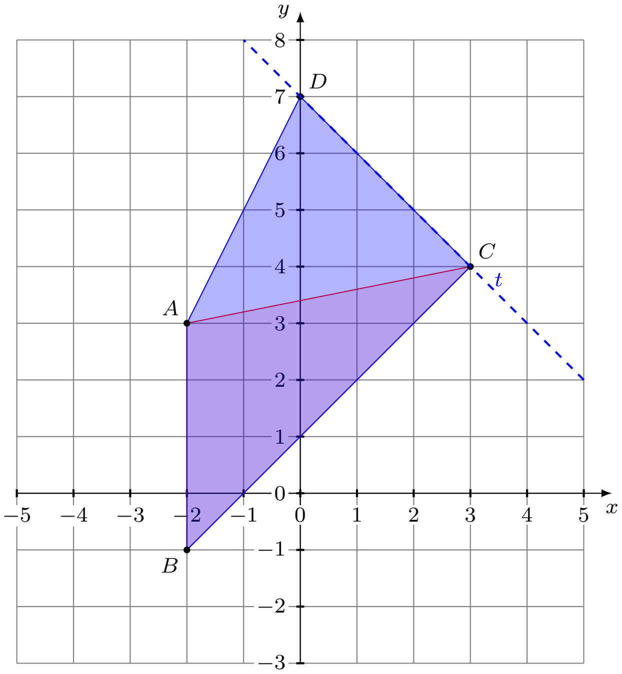
Per trovare BC

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \to$$
$$BC = \sqrt{(3+2)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{25+25}$$
$$= \sqrt{50} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \boxed{5\sqrt{2}}$$

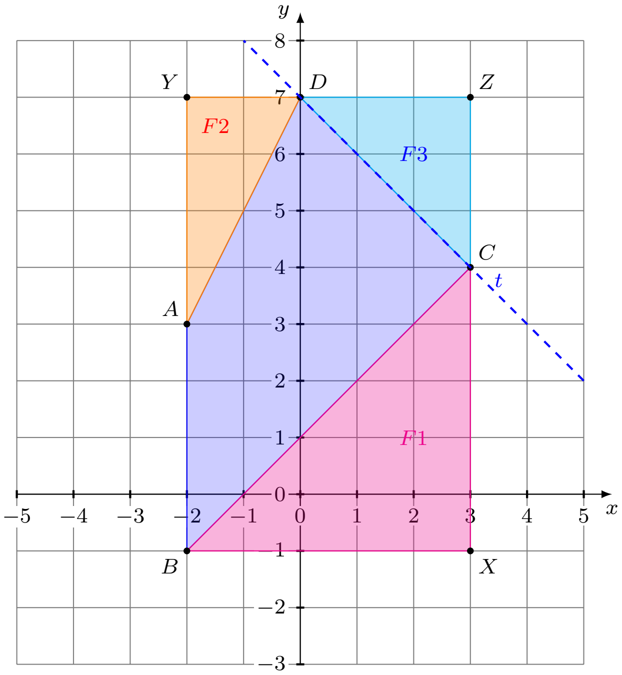
E ora non resta che sommare

$$2p = AB + AC + BC = 4 + \sqrt{26} + 5\sqrt{2}$$

Per il punto 3 aggiorniamo il disegno



Noi dobbiamo calcolare l'area di $ABCD$. Abbiamo varie strade che possiamo seguire. Ne propongo una che può essere usata per praticamente ogni figura. Il tutto si basa su trovare l'area del rettangolo che contiene la figura e togliere dei triangoli che possiamo individuare. Nel nostro caso



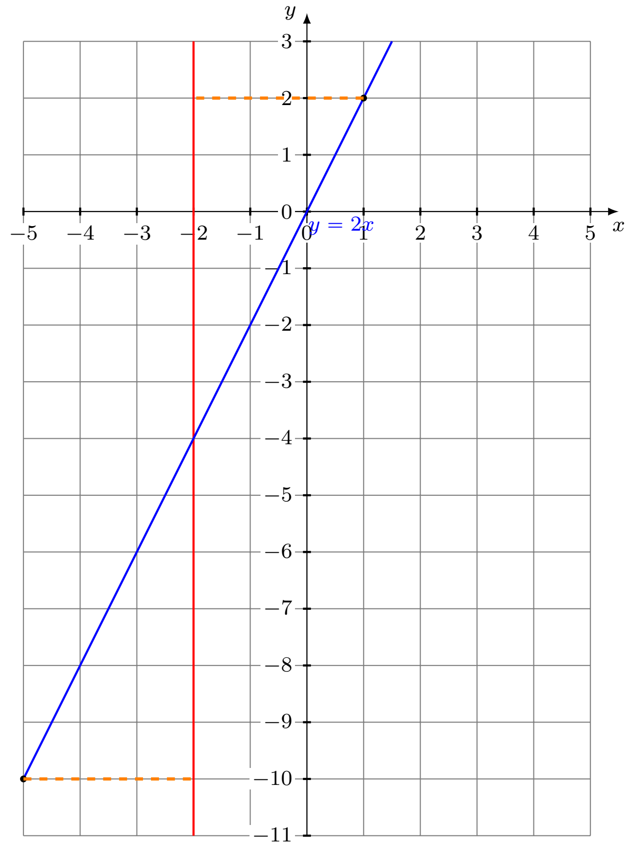
vediamo che possiamo trovare l'area facendo

$$\mathscr{A}(YZXB) - \mathscr{A}(F1) - \mathscr{A}(F2) - \mathscr{A}(F3)$$

o più semplicemente, sostituendo

$$\mathscr{A}(ABCD) = BX \cdot BY - \overbrace{\frac{5^2}{2}}^{\mathscr{A}(F1)} - \overbrace{\frac{2\cdot 4}{2}}^{\mathscr{A}(F2)} - \overbrace{\frac{3^2}{2}}^{\mathscr{A}(F3)}$$
$$= 5 \cdot 8 - 12.5 - 4 - 4.5 = 40 - 21 = 19$$

Ora per **l'ultimo punto** possiamo semplificare il disegno e pulirlo un po'.



Per prima cosa dobbiamo trasformare in forma esplicita la retta $x = -2$ per poter usare la formula della distanza Punto-Retta.

$$r : x + 2 = 0$$

E ora possiamo scrivere la formula della distanza

$$d = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \to 3 = \frac{|x+2|}{\sqrt{1^2}}$$
$$3 = \frac{|x+2|}{\sqrt{1}} \to 3 \cdot 1 = |x+2|$$
$$\pm 3 = x + 2 \to \begin{cases} x+5=0 \\ x-1=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=-5 \\ x=1 \end{cases}$$

Abbiamo le ascisse di intersezione con la retta $y = 2x$. Ora possiamo sostituire e trovare y.

$$\begin{cases} y = -5 \cdot 2 \\ y = 1 \cdot 2 \end{cases} \to \boxed{\begin{cases} P_1(-5,-10) \\ P_2(1,2) \end{cases}}$$

Fasci di rette

Esercizio 1 Dopo aver verificato che l'equazione

$$(2k+1)x - 4ky + 3 + 2k = 0 \qquad (k \in \mathbb{R})$$

rappresenta un fascio proprio di rette, determinare:

1. il centro C del fascio;
2. la retta r_1 del fascio perpendicolare alla bisettrice del 2° e 3° quadrante; detto H il loro punto di incontro, trovare poi l'area del triangolo CHO, essendo O l'orgine degli assi;
3. le rette del fascio che intersecano il segmento OH;
4. le bisettrici degli angoli formati dalle rette CO e CH.

Prima di avere il disegno, dobbiamo avere qualcosa da disegnare. Se disegnassimo l'intero fascio sarebbe come colorare tutto il piano.

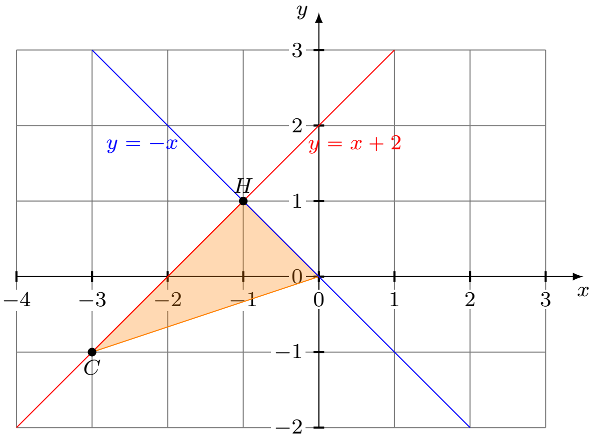
Per il punto 1 dobbiamo mettere a sistema le due rette generatrici. Nella forma attuale, le due equazioni non sono facilmente riconoscibili, quindi raccogliamo k così da isolare le due rette

$$(2k+1)x - 4ky + 3 + 2k = 0 \to 2kx + x - 4ky + 3 + 2k = 0 \to$$
$$k\underbrace{(2x-4y+2)}_{\text{Generatrice 1}} + \underbrace{x+3}_{\text{Generatrice 2}} = 0$$

Avendo ora questa forma, possiamo evidentemente vedere che effettivamente si tratta di un fascio proprio di rette.
Come trovare il centro del fascio? Avendo le due generatrici, le mettiamo a sistema e troviamo la loro intersezione

$$\begin{cases} 2x - 4y + 2 = 0 \\ x = -3 \end{cases} \to \begin{cases} -x - 4y + 2 = 0 \\ x = -3 \end{cases} \to$$
$$\begin{cases} \cancel{-4}y = \cancel{4}^{-1} \\ x = -3 \end{cases} \to \boxed{\begin{cases} y = -1 \\ x = -3 \end{cases}}$$

Per il punto 2 facciamo il disegno



Ho già inserito le cose che ora andiamo a trovare.
Innanzitutto sappiamo che la bisettrice del 2° e 3° quadrante è $y = -x$, quindi sappiamo che la m della perpendicolare deve essere uguale a 1. Sappiamo anche che fa parte del fascio quindi passa per $C(-3,-1)$.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \to y + 1 = x + 3 \to \boxed{y = x + 2}$$

E ora ci troviamo H, ovvero il punto di intersezione

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x \end{cases} \to \begin{cases} -x = x + 2 \\ y = -x \end{cases} \to \boxed{\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}}$$

Ora possiamo trovare l'area del triangolo

$$\mathscr{A}(CHO) = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 + y_1x_3 + x_2y_3 - x_3y_2 - y_3x_1 - x_2y_1\right| \to$$
$$\mathscr{A}(CHO) = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 + \cancel{y_1x_3} + \cancel{x_2y_3} - \cancel{x_3y_2} - \cancel{y_3x_1} - x_2y_1\right| \to$$
$$\mathscr{A}(CHO) = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 - x_2y_1\right| \to \mathscr{A}(CHO) = \frac{1}{2}\left|-3-1\right| =$$
$$\frac{1}{2}\left|-4\right| \to \mathscr{A}(CHO) = \frac{1}{2}\cdot 4 = \boxed{2}$$

Il punto 3, richiede di trovare i k per cui una retta del fascio passi in mezzo al segmento OH. La prima cosa da fare è quindi trovare i k degli "estremi" O e H.

$$k_O = -\frac{a_1x_O + b_1y_O + c_1}{ax_O + by_O + c} \to k_O = -\frac{c_1}{c} = -\frac{3}{2}$$

$$k_H = -\frac{a_1x_H + b_1y_H + c_1}{ax_H + by_H + c} \to k_H = -\frac{-1+0+3}{-2-4+2} = \frac{1}{2}$$

Ora sapendo che la retta esclusa attraversa anch'essa il segmento (per dimostrarlo basta semplicemente disegnarla), deduciamo che ai lati della esclusa ci siano le rette per $k \to \pm\infty$, ovvero man mano che ci si avvicina alla retta esclusa più ci si avvicina all'infinito. Questo ci porta a trovare l'intervallo che è

$$\boxed{k \leqslant -\frac{3}{2} \vee k \geqslant \frac{1}{2}}$$

Infine, il **punto 4** richiede un po' di ragionamento. Una bisettrice è la retta passante per due punti equidistanti alle rette dell'angolo. Per prima cosa quindi, definiamo $P(x,y)$ un punto del piano in modo che sia $d_{P,CO} = d_{P,CH}$. Per prima cosa dunque dobbiamo trovare le rette che passano per CO e CH.

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \to \frac{y+1}{1+1} = \frac{x+3}{-1+3} \to$$
$$y + 1 = x + 3 \to CO: x - y + 2 = 0$$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \to \frac{y+1}{1} = \frac{x+3}{3} \to$$
$$3y + 3 = x + 3 \to CH: -x + 3y = 0$$

E ora possiamo scrivere le formule per le distanze

$$\frac{|x-y+2|}{1} = \frac{|-x+3y|}{\sqrt{10}} \to$$
$$\sqrt{10}(|x-y+2|) = |-x+3y| \to$$
$$\sqrt{10}x - \sqrt{10}y + 2\sqrt{10} = \pm(-x+3y) \to$$
$$\begin{cases} \sqrt{10}x - \sqrt{10}y + 2\sqrt{10} = -x + 3y \\ \sqrt{10}x - \sqrt{10}y + 2\sqrt{10} = x - 3y \end{cases} \to$$
$$\begin{cases} x(\sqrt{10}+1) - y(\sqrt{10}+3) + 2\sqrt{10} \\ x(\sqrt{10}-1) - y(\sqrt{10}-3) + 2\sqrt{10} \end{cases} \to$$
$$\boxed{x(\sqrt{10}\pm 1) - y(\sqrt{10}\pm 3) + 2\sqrt{10}}$$

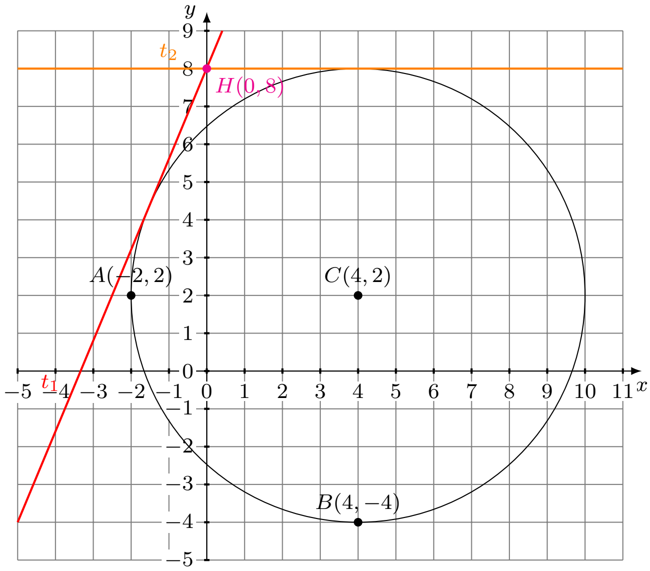
Circonferanza

Esercizio 1 Determinare l'equazione della circonferenza passante per $A(-2,2)$ e $B(4,-4)$ e avente il centro sulla retta $x + 2y - 8 = 0$, e le equazioni delle rette t_1 e t_2 passanti per $H(0,8)$ e tangenti alla circonferenza. detta poi t_1 la tangente con coefficiente angolare positivo, determinare le rette ad essa perpendicolari che formano con gli assi cartesiani un triangolo di area $\frac{54}{5}$. Determinare, inoltre, i punti di t_1 che hanno distanza uguale a $\sqrt{2}$ dal la retta $x+y-1=0$.

Per prima cosa dobbiamo trovare l'equazione della circonferenza $\mathscr{C}$. Come fare? Sappiamo che A e B appartengono alla circonferenza e che il centro appartiene a $x + 2y - 8 = 0$. Mettiamo queste informazioni a sistema e risolviamo

$$\begin{cases} 4 + 4 - 2a + 2b + c = 0 \\ 16 + 16 + 4a - 4b + c = 0 \\ -\frac{a}{2} - b - 8 = 0 \end{cases} \to$$
$$\begin{cases} -8 + 2a - 2b = c \\ 32 + 4a - 4b - 8 + 2a - 2b = 0 \\ -\frac{a}{2} - b - 8 = 0 \end{cases} \to$$
$$\begin{cases} -8 + 2a - 2b = c \\ \cancel{24}^{4} + \cancel{6}^{1}a - \cancel{6}^{1}b = 0 \\ -\frac{a}{2} - b - 8 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} -8 + 2a - 2b = c \\ 4 + a + \frac{a}{2} + 8 = 0 \\ b = -\frac{a}{2} - 8 \end{cases} \to$$
$$\begin{cases} -8 + 2a - 2b = c \\ \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}a = -\cancel{12}^{8} \\ b = -\frac{a}{2} - 8 \end{cases} \to \begin{cases} \cancel{-8} - 16 \cancel{+8} = c \\ a = -8 \\ b = -\frac{8}{2} - 8 \end{cases} \to$$
$$\begin{cases} c = -16 \\ a = -8 \\ b = -4 \end{cases} \to \boxed{\mathscr{C}: x^2 + y^2 - 8x - 4y - 16 = 0}$$

Avendo ora l'equazione possiamo disegnarla.



Per trovare le due tangenti alla circonferenza che passano per H, ci troviamo il fascio di rette che ha H come centro

$$y - y_0 = m(x - x_0) \to y - mx - 8 = 0$$

e sappiamo che le tangenti hanno il loro punto di tangenza che dista dal centro esattamente r, quindi

$$\frac{|ax_P + y_P + c_P|}{\sqrt{a^2+b^2}} = d \to \frac{|-4m+2-8|}{\sqrt{1^2+m^2}} = 6 \to$$
$$|-4m+2-8|^2 = (6\sqrt{1^2+m^2}) \to$$
$$16m^2 \cancel{+36} + 48m = \cancel{36} + 36m^2 \to$$
$$\cancelto{5}{-20}m^2 + \cancelto{12}{48}m = 0 \to 5m^2 - 12m = 0$$
$$m_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144+0}}{10} \to \boxed{\begin{cases} m_1 = \dfrac{12}{5} \\ m_2 = 0 \end{cases}}$$

e le tangenti sono

$$\boxed{t_1 : y = \frac{12}{5}x + 8 \qquad t_2 : y = 8}$$

Ora dobbiamo trovare tutte le perpendicolari a t_1 che, con l'intere-sezione degli assi forma un triangolo di area $\frac{54}{5}$. Per farlo, intanto troviamo le perpendicolari.

$$\mathscr{F}_{\perp} : y = -\frac{5}{12}x + q$$

E ora possiamo trovare le intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = q \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{12}{5}q \\ y = 0 \end{cases}$$

E ora imponiamo che l'area del triangolo formato con gli assi sia uguale a $\frac{54}{5}$

$$\frac{54}{5} = \frac{1}{2}\left|q \cdot -\frac{12}{5}q\right| \to \frac{54}{5} = \frac{6}{5}|q^2| \to 9 = q^2 \to q = \pm 3$$

quindi le rette cercate sono

$$\boxed{y = -\frac{5}{12}x \pm 3}$$

Finalmente possiamo avviarci alla conclusione. Dobbiamo cercare i punti di t_1 che distano $\sqrt{2}$ da $x+y-1$. Per prima cosa quindi, troviamo le rette che distano $\sqrt{2}$ dalla data

$$\frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \to |x+y-1| = 2 \to$$
$$\begin{cases} x+y-1 = 2 \\ x+y-1 = -2 \end{cases} \to \begin{cases} x+y-3 = 0 \\ x+y+1 = 0 \end{cases}$$

e ora non resta che trovare le intersezioni con t_1

$$\begin{cases} x+y+1 = 0 \\ y = \dfrac{12}{5}x + 8 \end{cases} \to \begin{cases} x + \dfrac{12}{5}x + 8 + 1 = 0 \\ y = \dfrac{12}{5}x + 8 \end{cases} \to \boxed{\begin{cases} x = -\dfrac{45}{17} \\ y = \dfrac{76}{17} \end{cases}}$$

$$\begin{cases} x+y-3 = 0 \\ y = \dfrac{12}{5}x + 8 \end{cases} \to \begin{cases} x + \dfrac{12}{5}x + 5 = 0 \\ y = \dfrac{12}{5}x + 8 \end{cases} \to \boxed{\begin{cases} x = -\dfrac{25}{17} \\ y = \dfrac{76}{17} \end{cases}}$$

Fasci di circonferenze

Esecizio 1 Avendo il fascio

$$x^2 + y^2 - 2(k+1)x - 2ky - 4k + 1 = 0$$

indicare con γ_1 quella il cui centro C appartiene alla retta $3x-y+5 = 0$. Detti E ed F i punti di intersezione di γ_1 con l'asse y, trovare le equazioni delle tangenti a γ_1 in E ed F; detto inoltre T il loro punto di intersezione, dopo aver dimostrato che il quadrilatero $CETF$ è un quadrato, calcolarne l'area. Determinare inoltre l'equazione della circonfereza d centro T e tangente esternamente a γ_1.

Per prima cosa riordiniamo l'equazione per avere tutti i coefficienti

$$x^2 + y^2 - 2(k+1)x - 2ky - 4k + 1 = 0 \to$$
$$x^2 + y^2 + x(-2k-2) + y(-2k) + 4k + 1 = 0$$

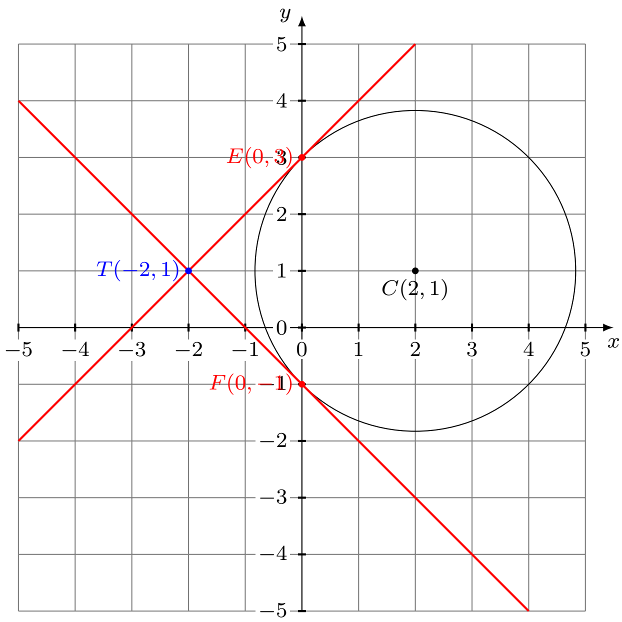
avendo ora i coefficienti, possiamo imporre la condizione che il centro sia un punto della retta

$$3\left(-\frac{a}{2}\right) - \left(-\frac{b}{2}\right) - 5 = 0 \to 3\frac{2k+2}{2} - k - 5 = 0 \to$$
$$6k + 6 - 2k - 10 = 0 \to k = 1$$

e sostituire per ottenere

$$\boxed{\gamma_1 : x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0}$$

Prima di proseguire, disegnamo la circonferenza



Sono già segnati i punti che ora andremo a trovare: E e F ovvero le intersezioni con y.

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \to y_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \to \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = -1 \end{cases}$$

Quindi i due punti sono

$$\boxed{E(0,3) \qquad F(0,-1)}$$

Ora troviamo le tangenti in E ed F.

$$x \cdot x_P + y \cdot y_P + a\frac{x + x_P}{2} + b\frac{y + y_P}{2} + c = 0 \rightarrow$$
$$t_E : x \cdot 0 + y \cdot 3 - 4\frac{x+0}{2} - 2\frac{y+3}{2} - 3 = 0 \rightarrow$$
$$\boxed{-x + y - 3 = 0 \rightarrow y = x + 3}$$

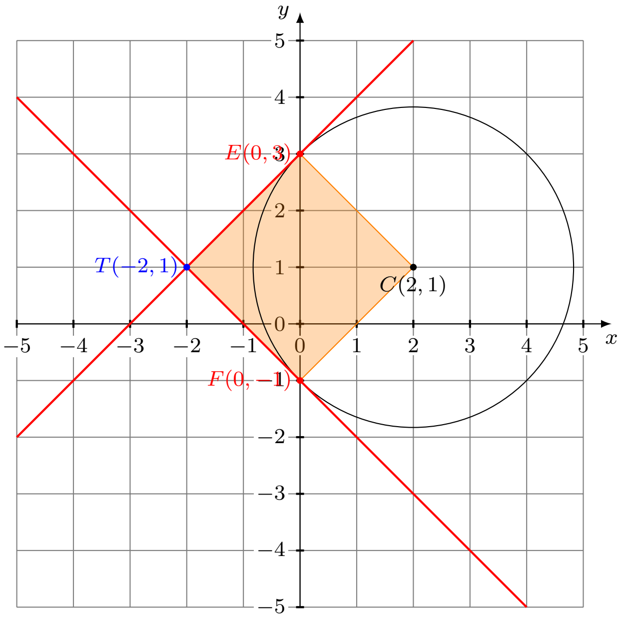
e

$$x \cdot x_P + y \cdot y_P + a\frac{x + x_P}{2} + b\frac{y + y_P}{2} + c = 0 \rightarrow$$
$$t_F : x \cdot 0 + y \cdot (-1) - 4\frac{x+0}{2} - 2\frac{y-1}{2} - 3 = 0 \rightarrow$$
$$\boxed{-x - y - 1 = 0 \rightarrow y = -x - 1}$$

E ora possiamo trovare il punto di intersezione

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x - 1 = x + 3 \\ y = -x - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Aggiorniamo ora il disegno per mettere in luce il quadrato $CETF$



Come possiamo dimostrare che è un quadrato? Proviamo a guardare gli angoli: l'angolo $C\widehat{F}T$ e l'angolo $C\widehat{E}T$ sono sicuramente retti in quanto sono angoli formati da un raggio e una tangente e per definizione stessa di tangente sono retti. Anche l'angolo $F\widehat{T}E$ è retto in quanto i coefficienti angolari delle tangenti sono reciprocamente opposti ($m_1 m_2 = -1$). Ora manca solo l'angolo $E\widehat{C}F$ da dimostrare. Possiamo semplicemente guardare il coefficiente angolare della retta che passa tra F e C e vedere che risulta pari a

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow m = \frac{1+1}{2-0} = 1$$

che è esattamente uguale a quello di t_E quindi le due rette sono parallele. Se t_F incide su t_E con un angolo retto, deve per forza incidere con lo stesso angolo anche nelle sue parallele.
Abbiamo dimostrato che ha quattro angoli retti, per dimostrare che è un quadrato basta vedere che due dei lati (che formano un angolo retto) sono uguali in quanto sono raggi. Quindi $CETF$ è un quadrato.
Per trovarne l'area basta elevare alla seconda la lunghezza del raggio

$$r = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - c} \rightarrow r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

E quindi l'area vale

$$\mathscr{A}(CETF) = r^2 \rightarrow \mathscr{A}(CETF) = \sqrt{8}^2 = 8$$

Infine dobbiamo trovare la circonferenza con centro T e tangente esternamente a γ_1. Per farlo abbiamo molti modi, ecco il più semplice. Sappiamo già quanto deve valere il raggio perché tocchi la circonferenza. Deve essere pari a $TC - r_{\gamma_1}$. Quindi

$$r = TC - r_{\gamma_1} \rightarrow r = 4 - 2\sqrt{2}$$

Usando la formula per trovare il raggio possiamo scrivere

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} \rightarrow 4 - 2\sqrt{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$$

Abbiamo 3 variaibli quindi dobbiamo trovare un modo per toglierne 2. a e b sono utilizzate anche nella formula per trovare il centro della circonferenza. Si da il caso che noi abbiamo il centro! Quindi

$$\begin{cases} -\dfrac{a}{2} = -2 \\ -\dfrac{b}{2} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \end{cases}$$

e ora possiamo trovare c

$$4 - 2\sqrt{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} \rightarrow 4 - 2\sqrt{2} = \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{4}{4} - c} \rightarrow$$
$$4 - 2\sqrt{2} = \sqrt{5 - c} \rightarrow 24 - 16\sqrt{2} = 5 - c \rightarrow$$
$$c = 16\sqrt{2} - 19$$

Quindi la nostra circonferenza sarà

$$\boxed{\gamma : x^2 + y^2 + 4x - 2y + 16\sqrt{2} - 19 = 0}$$

Parabola

Esercizio 1 Nel piano xOy determinare

1. l'equazione della parabola $\mathscr{P}_1$ avente asse parallelo all'asse y e passante per $A(2, 0)$, $B(6, 0)$ e $C(0, 6)$;
2. l'area del triangolo ACH essendo H l'ulteriore punto di intersezione di $\mathscr{P}_1$ con la perpendicolare per A alla retta AC;
3. l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo CAH;

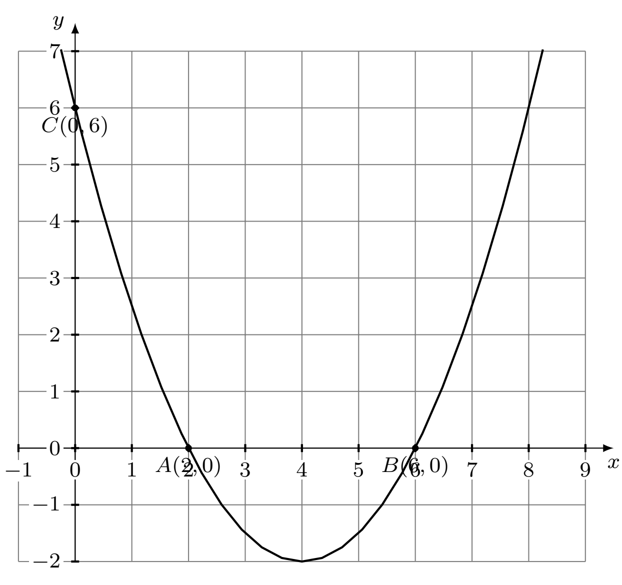
Per trovare l'equazione della parabola, possiamo sfruttare i 3 punti conosciuti e metterli a sistema

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ 36a + 6b + c = 0 \\ c = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-b-3}{2} \\ \cancelto{18}{36}\dfrac{-b-3}{\cancel{2}} + 6b + 6 = 0 \\ c = 6 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{-b-3}{2} \\ -18b - 54_6 b + 6 = 0 \\ c = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -4 \\ c = 6 \end{cases} \rightarrow$$

$$\boxed{\mathscr{P}_1 : y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6}$$

E per concludere il punto 1 disegnamo il grafico



Il punto 2 richiede qualche passaggio intermedio. Per prima cosa troviamo la retta passante per AC

$$r_{AC}: \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \rightarrow \frac{y}{6} = \frac{x-2}{-2} \rightarrow r_{AC}: y = -3x+6$$

E ora dobbiamo trovare la perpendicolare passante per A.

$$r_{\perp AH}: y = -\frac{1}{m}x + q \rightarrow y = \frac{x}{3} + q \rightarrow 0 = \frac{2}{3} + q \rightarrow$$
$$r_{\perp AH}: y = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$$

E possiamo trovare H facendo l'intersezione con la parabola $\mathscr{P}_1$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \\ y = \frac{x}{3} - \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \\ y = \frac{x}{3} - \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow$$
$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{3}x - \frac{20}{3} = 0 \rightarrow x_{1/2} =$$
$$\frac{-\frac{13}{3} \pm \sqrt{\frac{169}{9} - 4 \cdot -\frac{1}{2} \cdot -\frac{20}{3}}}{-1} \rightarrow$$
$$-\frac{13}{3} \pm \frac{7}{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{20}{3} \end{cases}$$

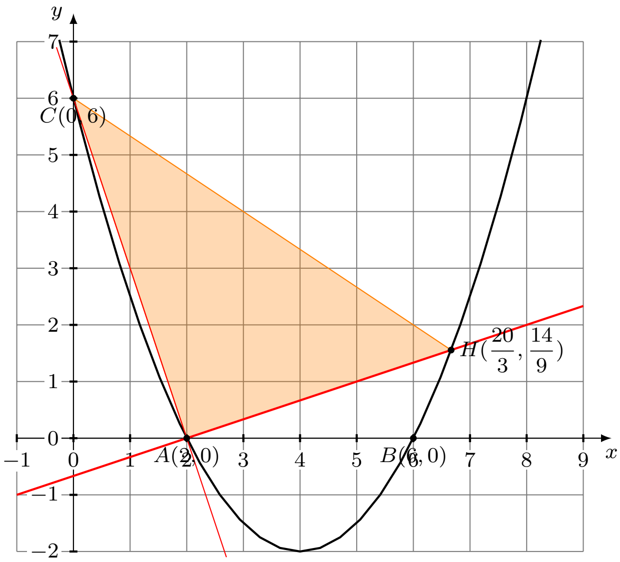
Il primo risultato ce lo aspettavamo in quanto è il punto A che fa parte sia della retta che della parabola.

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \,\text{con}\, x = \frac{20}{3} \rightarrow y = \frac{14}{9}$$

E quindi il nostro punto è

$$H\left(\frac{20}{3}, \frac{14}{9}\right)$$

Prima di proseguire, aggiorniamo il disegno



L'area del triangolo è facilmente calcolabile con la formula

$$\mathscr{A}(\mathscr{T}) = \frac{1}{2}|x_1y_2 + y_1x_3 + x_2y_3 - x_3y_2 - y_3x_1 - x_2y_1|$$

e quindi sostituendo

$$\mathscr{A}(\mathscr{T}) = \frac{1}{2}|\cancel{x_1y_2} + y_1x_3 + x_2y_3 \cancel{-x_3y_2} \cancel{-y_3x_1} - x_2y_1| \rightarrow$$
$$\mathscr{A}(\mathscr{T}) = \frac{1}{2}|6\frac{20}{3} + 2\frac{14}{9} - 2 \cdot 6| = \frac{1}{2}\frac{280}{9} = \boxed{\frac{140}{9}}$$

Il punto 3 richiede qualche passaggio intermedio anch'esso. Per trovare la circonferenza circoscritta al triangolo, dobbiamo innanzitutto trovare il centro. In un triangolo qualsiasi, il centro della circonferenza circoscritta è denominato *circocentro* ed esso è il punto di intersezione degli assi dei lati. Quindi per prima cosa si trovino i punti medi dei lati utilizzando la formula

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

e otteniamo i seguenti risultati

$$M(1,3) \qquad N\left(\frac{13}{3}, \frac{7}{9}\right) \qquad K\left(\frac{10}{3}, \frac{34}{9}\right)$$

Dobbiamo poi trovarci le rette dei lati per poi poter trovarne le perpendicolari. Avendo già fatto il processo, riporto solo i risultati

$$r_{AC}: y = -3x + 6$$
$$r_{CH}: y = -\frac{2}{3}x + 6$$
$$r_{AH}: y = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$$

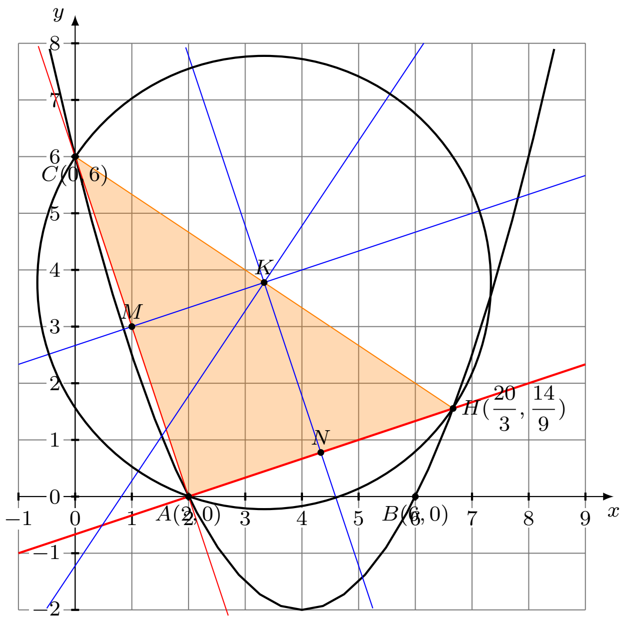
Per trovare le perpendicolari abbiamo una formula molto comoda

$$y = -\frac{1}{m}(x - x_0) + mx_0 + q$$

Essendo anche qui solo una questione di calcoli, riporto solo i risultati

$$r_{\perp AC}: y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$$
$$r_{\perp CH}: y = \frac{3}{2}x + \frac{65}{9}$$
$$r_{\perp AH}: y = -3x + \frac{124}{9}$$

E ora possiamo disegnare



Da questo disegno possiamo vedere che il punto di intersezione tra le tre rette è esattamente K. Quindi per definire la circonferenza, basta solo trovare il raggio che equivale alla distanza $CK = KH$.

$$r = CK = \sqrt{(x_C - x_K)^2 + (y_C - y_K)^2} \rightarrow$$
$$r = \sqrt{\left(0 - \frac{10}{3}\right)^2 + \left(6 - \frac{34}{9}\right)^2} \rightarrow r = \sqrt{\frac{400}{9} + \frac{1600}{81}} =$$
$$\frac{20\sqrt{13}}{9}$$

E quindi la circonferenza diventa

$$\boxed{\mathscr{C}: \left(x - \frac{10}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{34}{9}\right)^2 = \frac{20\sqrt{13}}{9}}$$

Ellisse

Esercizio 1 Scritta l'equazione della parabola del tipo $x = ay^2 + by + c$ avente il vertice V sull'asse x e passante per i punti $(6, 2)$ e $(16, 3)$, determinare l'equazione dell'ellisse avente un vertice in V e due altri vertici nei punti di intersezione della parabola con l'asse y. Determinare i punti P_1 e P_2 dell'ellisse che hanno distanza $\frac{\sqrt{39}}{2}$ da V.

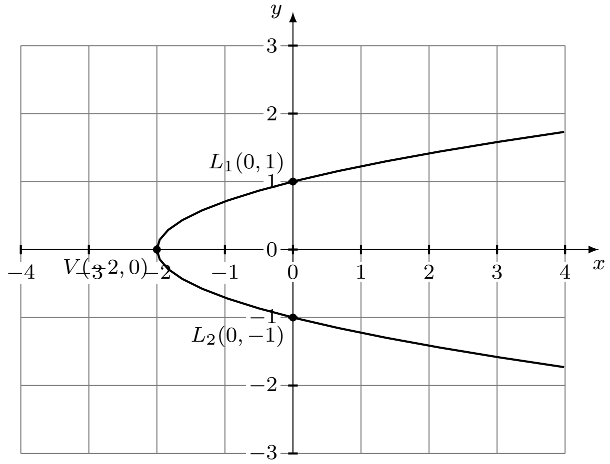
Trovare l'equazione della parabola è estremamente semplice, infatti basta mettere a sistema le informazioni che si hanno.

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 0 \\ 6 = 4a + 2b + c \\ 16 = 9a + 3b + c \end{cases} \to \begin{cases} b = 0 \\ 4a + c - 6 = 0 \\ c = -9a + 16 \end{cases} \to \begin{cases} b = 0 \\ a = 2 \\ c = -2 \end{cases}$$

Quindi la nostra parabola è $\boxed{\mathscr{P} : x = 2y^2 - 2}$ e possiamo anche subito trovare il vertice

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4} \to -\frac{-4 \cdot 2 \cdot -2}{4} = -2 \to V(-2, 0)$$

Disegnamo ora ciò che abbiamo



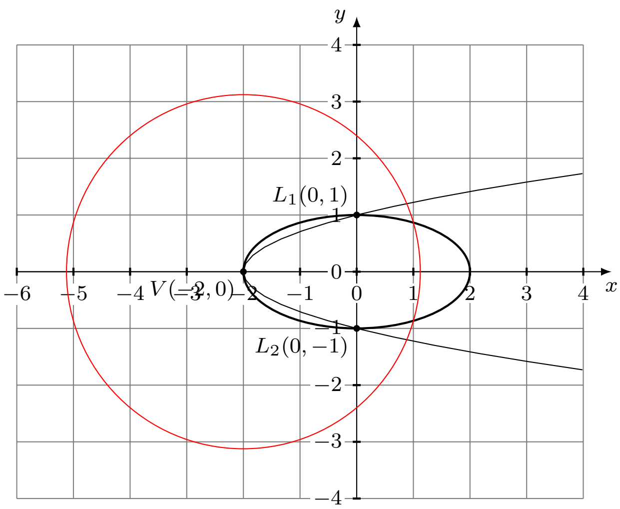
Troviamo subito gli altri due vertici dell'ellisse sostituendo $x = 0$ nell'equazione della parabola

$$y^2 = 1 \to y = \pm 1 \to L(0, \pm 1)$$

E ora possiamo trovare l'ellisse sapendo che passa attraverso V e L_1 (bastano solo questi due vertici in quanto è simmetrica).

$$\begin{cases} \dfrac{4}{a} = 1 \\ \dfrac{1}{b} = 1 \end{cases} \to \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases} \to \boxed{\mathscr{E} : \frac{x^2}{16} + y^2 = 1}$$

Prima di disegnarla, osserviamo il punto successivo: ci chiede i punti dell'ellisse che si trovano ad una certa distanza da V. Abbiamo un paio di modi, uno di questi è immaginare una circonferenza di centro V che abbia raggio pari alla distanza richiesta e vedere le intersezioni con l'ellisse.



La nostra circonferenza è

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r \to \mathscr{C} : (x + 2)^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{39}}{2}\right)^2$$

Per trovare i punti di intersezione, mettiamo a sistema le due equazioni

$$\begin{cases} (x + 2)^2 + y^2 = \dfrac{39}{4} \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \to \begin{cases} y^2 = \dfrac{-4x^2 - 16x - 23}{4} \\ x^2 + 4 \cdot \dfrac{-4x^2 - 16x - 23}{4} = 4 \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} y^2 = \dfrac{-4x^2 - 16x - 23}{4} \\ \begin{cases} x_1 = -\dfrac{19}{3} \\ x_2 = 1 \end{cases} \end{cases} \to \left\{\begin{array}{l} \begin{cases} y_1 = \pm \dfrac{5\sqrt{13}\,\imath}{6} \\ y_2 = \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = -\dfrac{19}{3} \\ x_2 = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Da queste soluzioni, eliminiamo quelle che non appartengono ad $\mathbb{R}$ e quindi otteniamo i punti di intersezione

$$\boxed{P_1\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad P_2\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Goniometria

Esercizio 1 Risolvere la seguente equazione

$$(\sqrt{3} + 2)\cos x + \sin x + 1 = 0$$

Abbiamo già la fortuna che questa equazione è già stata semplificata ed organizzata. Notiamo osservandola che si tratta di un'equazione goniometrica lineare. Quindi procediamo con la risoluzione

Poniamo

$$\cos x = X \text{ e } \sin x = Y$$

$$\begin{cases} (\sqrt{3} + 2)X + Y + 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} Y = -1 - (\sqrt{3} + 2)X \\ X^2 + 1 + (7 + 4\sqrt{3})X^2 + 2(2 + \sqrt{3})X = 1 \end{cases}$$

Quindi otteniamo le due possibili soluzioni

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = - - 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} X = -\dfrac{1}{2} \\ Y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

I due sistemi rappresentano le intersezioni con la circonferenza quindi ora non resta che trovare quali angoli (o archi) intersecano la circonferenza in quelle posizione. Ed essi sono

$$x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \qquad x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

Esercizio 2 Risolvere la seguente equazione

$$\sin^2 x + (1 - \sqrt{3})\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$$

Notiamo che l'equazione è omogenea in quanto tutti i suoi termini sono di secondo grado. Dato che
contiene sia il termine di secondo grado in $\sin x$ sia in $\cos x$, possiamo scegliere per cosa dividere. Per preferenza personale, dividiamo per $\cos^2 x$.

$$\frac{\sin^2 x + (1 - \sqrt{3})\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0 \to$$

$$\tan^2 x + (1 - \sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0$$

che risolta dà

$$(\tan x)_{1/2} = \frac{\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{1 + 3 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}}{2} =$$

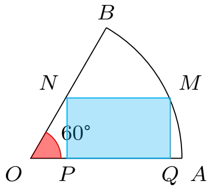
$$\frac{\sqrt{3} - 1 \pm (1 - \sqrt{3})}{2} = \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = \sqrt{3} \end{cases}$$

che forniscono le soluzioni

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ e } x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Esercizio 3 Nel settore circolare AOB di raggio r, centro O e angolo di apertura di 60° è inscritto il rettangolo $MNPQ$ avente il vertice M sull'arco $\overset{\frown}{AB}$, il vertice N sul raggio OB e il lato PQ su OA. Determinare la posizione del vertice M in modo che l'area di detto rettangolo valga $\frac{\sqrt{3}}{6}r^2$.

Per prima cosa, facciamo il disegno



Da questo possiamo dire che l'area di un rettangolo qualsiasi è definita come base $\cdot$ altezza, in questo caso come $\overline{PQ} \cdot \sin(\theta)r$ (r è inserito per avere il seno corretto qualunque sia il raggio, $\theta = \overset{\frown}{AOM}$). Il problema ora è trovare $\overline{PQ}$.
Definiamo y_M e y_N le due ordinate dei rispettivi punti.

$$y_N = \overline{ON}\sin(60°) = y_M = r\sin(\theta)$$

Questo lo vediaom chiaramente dal disegno.
P si trova al piede di N, quindi la sua coordinata è

$$\frac{y_N}{\tan(60°)} = \frac{r\sin\theta}{\tan(60°)}$$

Perché da $y_N = \overline{ON}\sin(60°)$ abbiamo isolato $\overline{ON}$ e moltiplicato per il $\cos(60°)$.
Infine Q si trova al $\cos\theta$. Con queste informazioni, possiamo scrivere che

$$\frac{\sqrt{3}}{6}r^2 = \left(r\cos\theta - \frac{r\sin\theta}{\tan(60°)}\right) r\sin\theta$$

Raccogliendo e semplificando r, risolvendo $\tan(60°)$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} = \sin\theta\cos\theta - \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{3}}$$

Sostituiamo $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} = \sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{3}}$$

Poniamo $\sin\theta = t$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} = t\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}t^2$$

Moltiplichiamo per $2\sqrt{3}$

$$1 = 2\sqrt{3}t\sqrt{1-t^2} - 2t^2$$

Spostiamo t^2

$$1 + 2t^2 = 2\sqrt{3}t\sqrt{1-t^2}$$

Eleviamo al quadrato

$$1 + 4t^2 + 4t^4 = 12t^2 - 14t^4$$

Semplifichiamo

$$-16t^4 + 8t^2 - 1 = 0$$

Poniamo $u = t^2$

$$-16u^2 - 8u - 1 = 0$$

Risolviamo per u

$$u = \frac{1}{4}$$

Torniamo a sostituire $t^2 = u$

$$t = \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

Verifichiamo che solo $\frac{1}{2}$ è soluzione e torniamo a sostituire $t = \sin\theta$

$$\sin\theta = \frac{1}{2} \to \theta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{30°}$$

Logaritmi

Esercizio 1 Risolvi

$$50\left(\frac{4}{25}\right)^x - 133\left(\frac{2}{5}\right)^x + 20 = 0$$

Per risolvere questo tipo di equazioni in modo semplice possiamo osservare attentamente e notare che il primo termine tra parentesi $(\frac{4}{25})$ non è altro che il quadrato del secondo $(\frac{2}{5})$! Questo ci porta riscrivere l'equazione come

$$50\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 133\left(\frac{2}{5}\right) + 20 = 0$$

E ora possiamo risolvere semplicemente.

Poniamo

$$t = \left(\frac{2}{5}\right)^x$$

si ha quindi

$$50t^2 - 133t + 20 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{133 \pm \sqrt{133 - 4\cdot 50 \cdot 20}}{100} = \frac{133 \pm 117}{100}$$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{5}{2} \\ t_2 = \frac{4}{25} \end{cases}$$

Torniamo a sostituire per t_1

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{5}{2} \to x = \log_{\frac{2}{5}}\frac{5}{2}$$

Ricordando la proprietà $\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$

$$x = -\log_{\frac{5}{2}}\frac{5}{2} = \boxed{-1}$$

Sostituiamo per t_2

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{4}{25} \to x = \log_{\frac{2}{5}}\frac{4}{25}$$

Ricordando che $\log_a b^k = k\log_a b$

$$x = 2\log_{\frac{2}{5}}\frac{2}{5} = \boxed{2}$$

Progressioni

Esercizio 1 Trovare la somma dei primi 8 termini di una progressione geometrica sapendo che il secondo termine è 4 e il quinto è 108.

Indichiamo come a_1 il primo termine e q la ragione. Possiamo ora scrivere un sistema che ci "matematizza" ciò che ci viene detto

$$\begin{cases} a_1 q = 4 \\ a_1 q^4 = 108 \end{cases}$$

da questo possiamo dividere membro a membro

$$\frac{a_1 q}{a_1 q^4} = q^3 = \frac{108}{4} = 27 \rightarrow q = 3$$

Sostituendo nella prima equazione

$$a_1 = \frac{4}{3}$$

E possiamo quindi trovare la somma di 8 elementi

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \rightarrow S_8 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1-3^8}{1-3} = \boxed{\frac{13120}{3}}$$

Esercizio 2 Una progressione aritmetica ha il primo termine $a_1 = a$ e ragione $d = 10$. La somma dei primi n termini è pari a 10000. Determinare l'espressione che fornisce a_1 in funzione di n e calcolare il valore di a_{20}.

Ricordando la formula per la somma di una progressione

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

vediamo che per trovare a_1 ci manca solo a_n. Per trovarlo usiamo la formula per trovare l'n-esimo elemento

$$a_n = a_1 + d(n-1) \rightarrow a_n = a + dn - d = a_n = a + 10n - 10$$

A questo punto riscriviamo la formula della somma con tutti i dati

$$10000 = \frac{a + a + 10n - 10}{2} n \rightarrow 20000 = 2an + 10n^2 - 10n$$

Isoliamo a

$$\boxed{a = \frac{10000}{n} - 5n + 5}$$

A questo punto troviamo l'elemento riapplicando la formula

$$a_{20} = a_1 + d(20-1) = \frac{10000}{20} - 5 \cdot 20 + 5 + 10 \cdot (20-1) = \boxed{595}$$

Calcolo combinatorio

Esercizio 1 Determinare in quanti modi è possibile estrarre due carte da un mazzo di 52 in modo che

- le due carte estratte siano entrambe rosse
- una sia rossa e l'altra nera
- una almeno sia rossa

Per il primo punto vediamo che ci chiedono 2 carte rosse. Un mazzo da 52 contiene 26 nere e altrettante rosse essendo un mazzo di carte francesi. Dato che l'ordine non ha importanza e che tutti gli elementi sono distinti, le possibilità sono le combinazioni semplici. Quindi

$$\boxed{\binom{26}{2}}$$

26 perché ci interessano solo le rosse, non tutto il mazzo.

Il prossimo punto chiede una carta rossa e una carta nera. Immaginiamo di avere quindi due spazi. Nel primo mettiamo una carta rossa (quindi 26 possibilità), nel secondo una nera (sempre 26). Quindi le totali possibilità si ottengono semplicemente moltiplicando

$$26 \cdot 26 = \boxed{676}$$

Per l'ultimo punto, dobbiamo sottrarre da tutte le possibilità quelle che non contengono una carta rossa. Dato che ci viene detto *almeno* una rossa, possono essere anche entrambe. Quindi

$$\boxed{\binom{52}{2} - \binom{26}{2}}$$

Esercizio 2 Dimostrare

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$$

Partiamo sviluppando il lato sinistro

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!}$$

Se osserviamo attentamente notiamo che ci manca semplicemente un $n-k$ da aggiungere per ottenere il desiderato. Quindi possiamo moltiplicare per $n-k$ e ottenere

$$\frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$$

Q.E.D.

Probabilità

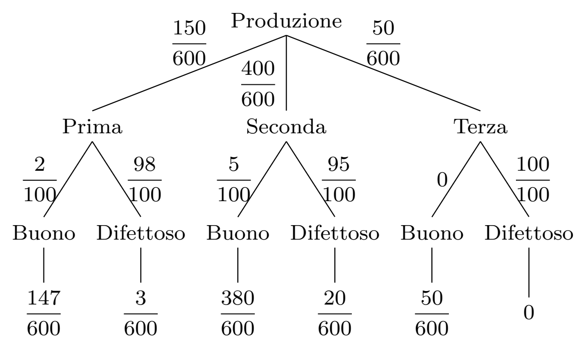
Esercizio 1 Tre macchine utensili producono lo stesso tipo di pezzi. La prima ne produce 150 al giorno con il 2% dei pezzi difettosi, la seconda ne produce 500 con il 5% di pezzi difettosi, la terza 50 con nessun pezzo difettoso. Supponiamo ora di prendere un pezzo a caso della produzione di un dato giorno, calcolare la probabilità che

1. il pezzo sia stato prodotto dalla prima macchina
2. il pezzo sia stato prodotto dalla seconda macchina
3. il pezzo sia stato prodotto dalla terza macchina
4. il pezzo sia difettoso

Supponendo che il pezzo sia difettoso, calcolare la probabilità che

1. sia stato prodotto dalla prima macchina
2. sia stato prodotto dalla seconda macchina
3. sia stato prodotto dalla terza macchina

Una cosa che ritorna estremamente utile nella risoluzione dei problemi di probabilità è il grafico ad albero per mostrare tutte le possibilità. Come questo



I risultati che si vedono sono semplicemente ricavati dal prodotto delle due probabilità secondo la formula $p(\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{E}_2) = p(\mathbb{E}_1) \cdot p(\mathbb{E}_2)$.

In totale vi sono 23 pezzi difettosi in un giorno (infatti se andiamo ad osservare i numeratori e sommiamo i difettosi vediamo $3+20+0=23$). Quindi la probabilità che un pezzo sia difettoso è

$$p(\text{Difettoso}) = \frac{23}{600} \approx \boxed{3.8\%}$$

Allora, la probabilita che sia difettoso e dalla prima macchina è

$$p(\text{Prima} \mid \text{Difettoso}) = \frac{\frac{3}{600}}{\frac{23}{600}} \approx \boxed{13\%}$$

e dalla seconda

$$p(\text{Seconda} \mid \text{Difettoso}) = \frac{\frac{20}{600}}{\frac{23}{600}} \approx \boxed{8.7\%}$$

Affinità

Esercizio 1 Data l'affinità

$$T: \begin{cases} x' = 2x + y - 1 \\ y' = x - y - 2 \end{cases}$$

determinare

1. il punto unito U
2. i trasformati O', A' e B' dei punti $O(0,0)$, $A(2,-1)$, $B(-3,4)$ e l'area del triangolo $A'O'B'$
3. la trasformazione inversa T^{-1}
4. le trasformate delle curve

$$y = 3x + 4 \qquad x - y + 5 = 0 \qquad y = x^2$$

Trovare il punto unito di T è semplice, basta solo porre $x' = x$ e $y' = y$.

$$\begin{cases} x = 2x + y - 1 \\ y = x - y - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x + 1 \\ -x + 1 = x + x - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{3} \\ x = \frac{4}{3} \end{cases} \rightarrow$$

$$U\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Trovare i trasformati è estremamente semplice: basta sostituire i valori di x e y dei punti all'interno dell'affinità

$$\boxed{O': \begin{cases} x' = -1 \\ y' = -2 \end{cases} \quad A': \begin{cases} x' = 4 - 2 = 2 \\ y' = 2 + 1 - 2 = 1 \end{cases} \quad B': \begin{cases} x' = -3 \\ y' = -9 \end{cases}}$$

L'area del triangolo è facilmente trovabile usando la matrice

$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

e risolvendola con Sarrus. Quindi inserendo i valori e risolvendo otteniamo

$$\mathscr{A}(A'O'B') = \frac{1}{2} \left| -1 + (-18) + 6 - (-3 + 9 - 4) \right| =$$
$$\frac{1}{2} \left| -1 - 18 + 6 + 3 - 9 + 4 \right| =$$
$$\frac{1}{2} \left| -15 \right| = \boxed{\frac{15}{2}}$$

Trovare la trasformazione inversa richiede solo di risolvere il sistema in x e y.

$$\begin{cases} 2x + y = x' + 1 \\ x - y = y' + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y' + 4 + 3y' = x' + 1 \\ x =' + 2 + y \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} y = \frac{x'}{3} + \frac{2}{3}y' - 1 \\ x = \frac{x'}{3} + \frac{y'}{3} + 1 \end{cases}}$$

Trovare le trasformate di un'equazione è relativamente semplice. Piuttosto tedioso per alcune formule ma non complicato. Quello che si fa è applicare la trasformazione inversa alla nostra equazione. Questo perché immaginiamo che ciò che abbiamo sia un risultato e noi dobbiamo trovare l'equazione che ha portato a quella data. Quindi torniamo indietro e dunque usiamo l'inversa.

$$y = 3x + 4 \rightarrow$$
$$\frac{x'}{3} - \frac{2}{3}y' - 1 = 3\left(\frac{x'}{3} + \frac{y'}{3} + 1\right) + 4 \rightarrow$$
$$\frac{x'}{3} - \frac{2}{3}y' - 1 = x' + y' + 7 \rightarrow$$
$$\boxed{2x' + 5y' + 24 = 0}$$

$$x - y + 5 = 0 \rightarrow$$
$$\cancel{\frac{x'}{3}} + \frac{y'}{3} + 1 - \cancel{\frac{x'}{3}} + \frac{2}{3}y' + 1 + 5 \rightarrow \boxed{y' + 5 = 0}$$

$$y = x^2 \rightarrow$$
$$0 = -\frac{x'}{3} + \frac{2}{3}y' + 1 + \frac{x'}{9} + \frac{2}{9}xy + \frac{2}{9}x + \frac{y^2}{9} + \frac{2}{9}y + 1$$
$$\boxed{{x'}^2 + 2x'y' + {y'}^2 + 3x' + 12y' + 18 = 0}$$

Esercizio 2 Considera nel piano xOy la famiglia di curve di equazione

$$y = \frac{mx - 8}{x - 2m}$$

determinare:

1. per quali valori di m l'equazione rappresenta un'iperbole equilatera traslata e il luogo di simmetria delle iperboli della famiglia
2. le iperboli Φ_1 e Φ_2 della famiglia che sono tangenti, nel loro punto di ascissa nulla, alla retta con coefficiente angolare $\frac{1}{2}$. Sia Φ_1 quella relativa al valore $m > 0$
3. il luogo γ dei centri delle circonferenze passanti per O e tangenti al luogo di simmetria delle iperboli
4. detta θ' la curva corrispondente di θ nella trasformazione

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases}$$

determinare il punto P di θ' nel primo quadrante in corrispondenza del quale è **massima** l'area del quadrilatero $OVPM$ essendo V il punto di θ' di ordinata nulla e M il punto di intersezione di θ' con i semiasse negativo delle ordinate. Sia θ la circonferenza con raggio pari a 1 che si trova nella parte positiva di y.

Per il punto uno dobbiamo vedere in che caso l'equazione non descrive più un'iperbole. Per fare questo proviamo a semplificare e vediamo che dividendo

$$\frac{mx}{x} \quad \text{e} \quad \frac{8}{2m}$$

otteniamo

$$m = \frac{8}{2m} \rightarrow m^2 = 4 \rightarrow \boxed{m = \pm 2}$$

Quindi i valori che noi dobbiamo esculdere sono $m \neq \pm 2$ in quanto annullano l'equazione che diventerebbe una retta passante per $y = \pm 2$.
Il luogo dei centri di simmetria è quella retta su cui giaciono tutti i centri. Un centro è il punto

$$C\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$$

ed inserendo i nostri valori otteniamo

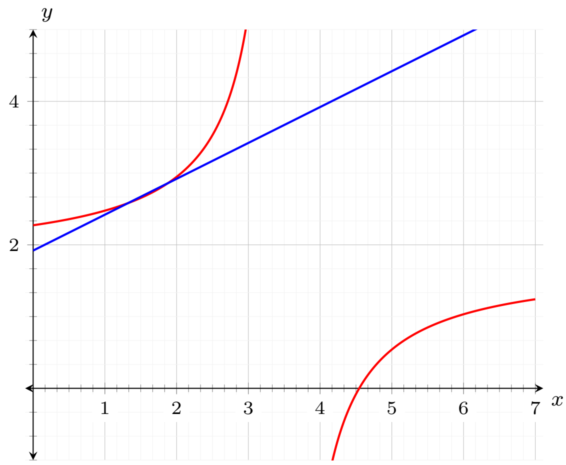
$$C(2m, m)$$

quindi il luogo è dato dall'equazione $\boxed{y = \frac{x}{2}}$. Dobbiamo però escludere i punti

$$(4,2) \qquad (-4,-2)$$

in quanto abbiamo escluso $m = \pm 2$.

Per il punto due possiamo trovare i punti che distano 0 dal fascio di rette $y = \frac{1}{2}x + q$ e che appartengono alla nostra famiglia di iperboli che al tempo stesso hanno $x = 0$ ma non otterremmo nulla di significativo.
Perché? Guardiamo un attimo il disegno



Notiamo che per due valori di q e m scelti appositamente il più vicino punto di intersezione tra la retta e l'iperbole ha come ascissa un valore leggermente inferiore a 2. Andando a disegnare altre iperboli e altre rette modificando i due parametri si andrà a notare che è impossibile che la retta $y = \frac{x}{2} + q$ per qualunque q sia tangente all'iperbole Φ in modo che $x = 0$.

Per il punto tre abbiamo un problema interessante. Abbiamo una circonferenza che passa per $O(0,0)$ e il cui centro abbia distanza dalla retta pari al raggio. Scriviamo quindi il sistema

$$\begin{cases} c = 0 \\ \dfrac{\left|-\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{b^2}{4} - c} \end{cases} \rightarrow \frac{|a-2b|}{2\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}}$$

Semplifichiamo e otteniamo

$$b = -2a$$

Cosa ci dice questo? Proviamo a inserire le informazioni all'interno della coordinata del centro

$$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \rightarrow C\left(-\frac{a}{2}, a\right)$$

Da questo vediamo che $y = -2x$. Quindi il nostro luogo dei centri è

$$\boxed{\gamma : y = -2x}$$

Avremmo potuto farlo in un altro modo? Con un po' di ragionamento, sì, senza dubbio. Sappiamo che le circonferenze devono passare per $O(0,0)$ e essere tangenti a $y = \frac{x}{2}$. Però anche questa retta passa per $O(0,0)$ in quanto ha $q = 0$. Quindi il punto di tangenza è esattamente il centro degli assi. Se sappiamo questo e sappiamo che le circonferenze devono essere tangenti, significa che sappiamo il raggio è perpendicolare alla retta. Quindi la retta passante per il centro e perpendicolare a $y = \frac{x}{2}$ è proprio $y = -2x$.

Per il punto quattro troviamo la circonferenza che ha il centro su quella retta e che abbia il raggio pari a 1.

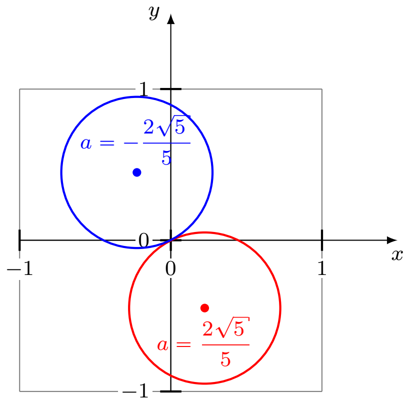
L'equazione della generica circonferenza è

$$x^2 + y^2 + ax - 2ay = 0$$

perché avendo visto prima la soluzione dell'equazione del luogo geometrico sappiamo che $b = -2a$. Scriviamo tutto in funzione di a per comodità. Con questo chiarito, troviamo il valore di a sapendo che il raggio è pari a 1

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = 1 \rightarrow \frac{4}{5}a^2 = 1 \rightarrow a = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Per scegliere quale dei due è accettabile, disegnamoli



Quindi tra queste due quella da scegliere è quella con $a < 0$. Scriviamola

$$\theta : x^2 + y^2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{4\sqrt{5}}{5}y = 0$$

La trasformazione che dobbiamo applicare è

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x' - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x' + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases}$$

che osservandola rappresenta una rotazione di $\alpha = 45°$. Come mai? Beh, abbiamo la matrice dei coefficienti che è

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

che messa accanto a quella della rotazione

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

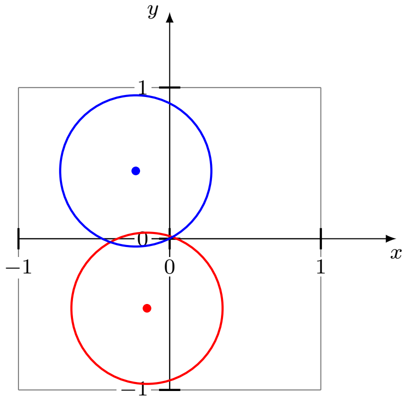
risultano estremamente simili con $\theta = \frac{\pi}{4}$. Tanto simili da coincidere. Quindi sappiamo che abbiamo una rotazione di 45°. Applichiamo la trasformazione inversa alla nostra equazione e otteniamo

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 +$$
$$-\frac{2\sqrt{5}}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) + \frac{4\sqrt{5}}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) = 0$$

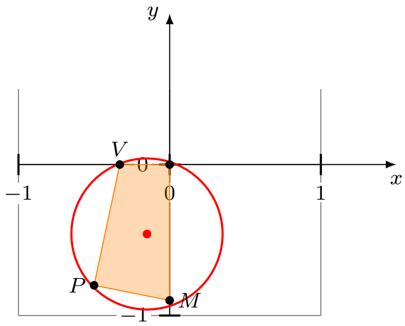
Che semplificata tramite calcoli che non riporto perché eccessivamente lunghi

$$\boxed{\theta' : x'^2 + y^2 + \sqrt{\frac{2}{5}}\,x + 3\sqrt{\frac{2}{5}}\,y = 0}$$

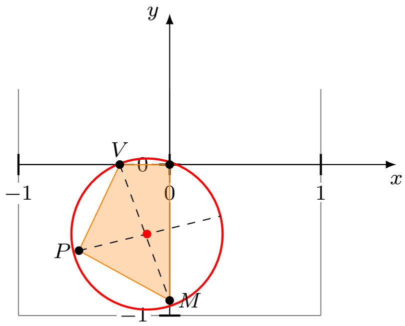
Che disegnata è



Disegnamo ora i punti che ci vengono forniti



dove P è un punto variabile. Per calcolare l'area massima di questo quadrilatero dobbiamo trovare dove deve essere P perché sia massima. Ovviamente deve appartenere alla circonferenza, quindi deve essere il più lontano possibile da V e M. Quindi il punto più distante è quello in cui la retta passante tra lui e il centro della circonferenza è perpendicolare alla retta passante tra i due punti. Disegnamo per far capire.



L'area del quadrilatero è sempre ricavabile con la matrice

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

usando la formula di Gauss. Prima troviamo i punti

$$V : x^2 + \sqrt{\frac{2}{5}} = 0 \to x = -\sqrt{\frac{2}{5}} \to V\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, 0\right)$$

$$M : y^2 + 3\sqrt{\frac{2}{5}} = 0 \to y = -3\sqrt{\frac{2}{5}} \to M\left(0, -3\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$$

La retta passante tra i due punti risulta essere

$$r_{VM} : y = -3x - 3\sqrt{\frac{2}{5}}$$

La tangente per P invece

$$t_{PC} : y = \frac{x}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$$

Il punto P si trova facendo l'intersezione tra la tangente e la circonferenza. Si trova quindi

$$P\left(-2\sqrt{\frac{2}{5}}, \frac{1}{15}(5x - 4\sqrt{10})\right)$$

Quindi l'area massima si trova risolvendo il determinante di

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sqrt{\frac{2}{5}} & 0 & 1 \\ 0 & -3\sqrt{\frac{2}{5}} & 1 \\ -2\sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{1}{15}(5x - 4\sqrt{10} & 1 \end{bmatrix}$$

che risulta essere

$$\frac{1}{2}\left|-\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \left(-3\sqrt{\frac{2}{5}}\right) - \left(-2\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \left(-3\sqrt{\frac{2}{5}}\right)\right)\right|$$

che semplificato risulta in

$$\boxed{\mathscr{A}(VOMP) = \frac{3}{5}}$$

Numeri Complessi

Esercizio 1 Calcolare le radici quarte di $z = 2 + i2\sqrt{3}$

Calcoliamo ρ e θ

$$\rho = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4 \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

Quindi si ha

$$z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

da cui

$$w = \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right) =$$
$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right)$$

Le radici quarte si ottengono sostituendo a k i valori in $0, 1, 2, 3$. Quindi otteniamo

$$\boxed{w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)}$$

$$w_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{4}\right) =$$

$$\boxed{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi\right)}$$

$$w_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 4\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 4\pi}{4}\right) =$$

$$\boxed{\sqrt{2}\left(\cos\frac{13}{12}\pi + i\sin\frac{13}{12}\pi\right)}$$

$$w_4 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 6\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 6\pi}{4}\right) =$$

$$\boxed{\sqrt{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi + i\sin\frac{19}{12}\pi\right)}$$

Esercizio 2 Risolvere nel campo complesso

$$z^2 + (1 - 4i)z - 3 - 3i = 0$$

Applichiamo la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado che solitamente si usa per i reali

$$z_{1/2} = \frac{1 - 4i + \sqrt{(1 - 4i)^2 + 12 + 12i}}{2} = \frac{1 - 4i + \sqrt{-3 + 4i}}{2}$$

avendo $\sqrt{-3 + 4i}$ ad indicare le radici del numero complesso $-3 + 4i$. Per determinarle poniamo

$$\sqrt{-3 + 4i} = a + ib$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Eleviamo al quadrato

$$-3+4i = a^2 - b^2 + 2iab$$

e imponiamo che le due parti reali e immaginarie siano uguali

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ ab = 2 \end{cases}$$

Ricavando $b = \dfrac{2}{a}$ dalla seconda equazione e sostituendolo nella prima otteniamo un'equazione biquadratica

$$a^4 + 3a^2 - 4 = 0 \to a^2 = -8 \text{ Non accettabile e } \ x^2 = 1$$

da cui

$$x_1 = -1 \quad \text{e} \quad x_2 = 1$$

Ricavando i corrispondendi valori di b otteniamo le radici cercate

$$1 - 2i \quad \text{e} \quad 1 + 2i$$

Sostituendo quei valori nella prima formula

$$z_1 = \frac{1 - 4i + 1 + 2i}{2} = 1 - i \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{1 - 4i - 1 - 2i}{2} = -3i$$

Di conseguenza l'equazione ammette due soluzioni

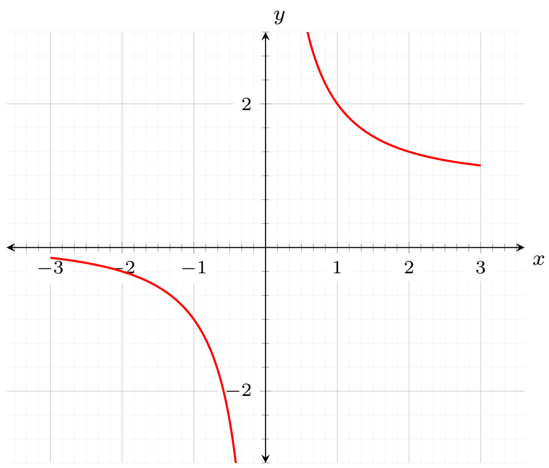
$$\boxed{z_1 = 1 - i \quad \text{e} \quad z_2 = -3i}$$

Insiemi numerici

Esercizio 1 Determinare l'estremo inferiore, superiore, gli eventuali punti di accumulazione del seguente insieme numerico

$$A = \left\{ x_k \in \mathbb{R} \mid x_k = \frac{1}{1 - 2^{-k}}, \forall k \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

Come vedere se ha estremi? Beh, possiamo ad esempio provare a vedere il grafico di tale funzione



Da questo vediamo (e anche dalla formula) che descrive un'iperbole equilatera. Essendo l'iperbole una curva che può continuare all'infinito e $k \in \mathbb{N}_0$ quindi ci sono infiniti elementi che proseguono in entrambi gli assi. Quindi non ci sono estremi né superiori né inferiori. O per scriverlo in simboli

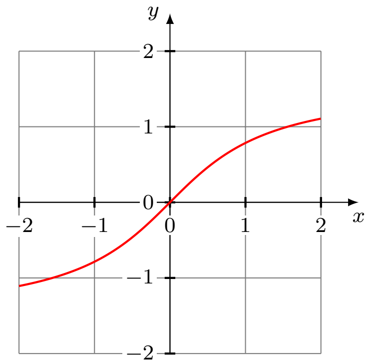
$$]-\infty, \infty[$$

I punti di accumulazione sono relativamente facili da trovare dal grafico. Dobbiamo trovare un punto i cui intorni, qualunque essi siano, contengono almeno un elemento dell'insieme. Osservando il disegno vediamo che 0 è un punto di accumulazione in quanto sia da destra che da sinistra, diminuendo sempre più la distanza, c'è sempre un elmento dell'insieme.

Esercizio 2 Dato l'insieme di numeri reali $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \arctan n, n \in \mathbb{N}\}$, quale delle seguenti affermazioni è vera?

1. È limitato, ma non ammette massimo
2. È limitato e ammette sia massimo che minimo
3. Non ha punti di accumulazione
4. Tutte le precedenti sono false

Come prima cosa, facciamo il grafico.



Come sappiamo, l'arcotangente tenderà ad avvicinarsi a $\pm\dfrac{\pi}{2}$ senza però effettivamente raggiungerlo. Quindi non ammette né un massimo e tantomeno un minimo in quanto per qualunque valore di x ci sarà sempre un elemento corrispondente dell'insieme. Di conseguenza **sia il punto 1 e il punto 2 falso**.
Punti di accomulazione ci sono? Guardiamo nuovamente il grafico. Quale punto permette di essere sicuri che sia da sinitra che da destra ci siano intorni sempre più vicini che contengono un punto dell'insieme. Vediamo che 0 è un punto di questi (l'unico fra l'altro). Perché 0 e non altro? Prendiamo un altro punto e vediamo che per quanto ci allontaniamo o sforziamo, non garantisce che per ogni punto ce ne sia uno relativo in A.

Limiti

Esercizio 1 Verificare che

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \frac{1}{6}$$

Consideriamo la disequazione

$$\left| \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} - \frac{1}{6} < \varepsilon \right|$$

che per $x \neq 3$ si riduce in

$$\left| \frac{5x - 15}{6(x+3)} \right| < \varepsilon$$

Da questa successivamente si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{5x - 15}{6(x+3)} < \varepsilon \\ \dfrac{5x - 15}{6(x+3)} > -\varepsilon \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} \dfrac{(5 - 6\varepsilon)x - 15 - 18\varepsilon}{x+3} < 0 \\ \dfrac{(5 - 6\varepsilon)x - 15 + 18\varepsilon}{x+3} > 0 \end{cases}$$

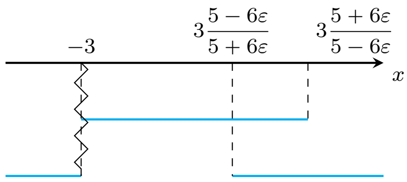
Risolvendo per $0 < \varepsilon < \dfrac{5}{6}$ si ha

$$\begin{cases} -3 < x < 3\dfrac{5 + 6\varepsilon}{5 - 6\varepsilon} \\ x < -3;\ x > 3\dfrac{5 - 6\varepsilon}{5 + 6\varepsilon} \end{cases}$$

Che quindi diventa

$$x \in \left] 3\frac{5 - 6\varepsilon}{5 + 6\varepsilon}, 3\frac{5 + 6\varepsilon}{5 - 6\varepsilon} \right[\setminus \{3\}$$

Questo intervallo costituisce a tutti gli effetti un intorno di 3, escluso 3 stesso. Quindi il limite è verificato. (Per verificare sia un intorno, si sotituiscano a ε valori sempre più vicini a 0 (ad esempio 0.1, 0.01, ...) e si verifichi che si avvicinano sempre più ad un valore.
La rappresentazione grafica di questo sistema è



Esercizio 2 Verificare che

$$\lim_{x\to 0} \ln|x| = -\infty$$

Consideriamo per $x \neq 0$ la disequazione

$$\ln|x| < M$$

Se essa risulterà soddisfatta in un intorno di $x_0 = 0$ per $M < 0$, lo sarà certamente per $M \geqslant 0$.
Sia dunque $M < 0$; si ha

$$|x| < e^M \quad \text{cioè} \quad -e^M < x < e^M$$

Pertanto il limite risulta verificato perché le soluzioni costituiscono un intorno privato dello 0. L'asse y è asintoto verticale in questo caso.

Esercizio 3 Determinare il limite di

$$f(x) = \frac{2}{1-x^3}$$

La funzione è definita in $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Studiamo il segno per trovare i limiti sinistri e destri di $x_0 = 1$ (in quanto è escluso dal dominio).

$$1 - x^3 > 0 \to x^3 < 1 \to x < 1$$

Quindi quando $x < 1$ è positiva, negativa altrimenti.
Poiché $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^3) = 0$ si ha

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+} \frac{2}{1+x^3} = -\infty} \quad \text{e} \quad \boxed{\lim_{x\to 1^-} \frac{2}{1-x^3} = +\infty}$$

Esercizio 4 Si deduca

$$\lim_{x\to +\infty} \arctan \ln x$$

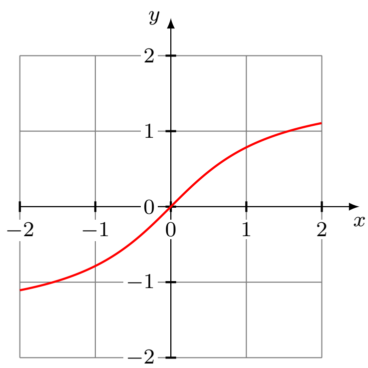
Deducendo il limite e spezzandolo parte per parte

$$\lim_{x\to +\infty} \ln x \to +\infty$$

Questo lo si scopre anche dal grafico se non ce lo si ricorda

$$\lim_{x\to +\infty} \arctan +\infty \to \frac{\pi}{2}$$

Questo lo si capisce dal grafico



La funzione è illimitata ma è contenuta all'interno di $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ quindi per una x che cresce sempre di più, la funzione tende a $\frac{\pi}{2}$.

Esercizio 5 Si risolva

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2 - x + 5}{4x^2 - 1}$$

Se provassimo a sostituire $x = +\infty$ otterremmo

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2 - x + 5}{4x^2 - 1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3\infty^2 - \infty + 5}{4\infty^2 - 1} =$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\boxed{+\infty - \infty} + 5}{\infty - 1}$$

notiamo una forma indeterminata al numeratore. Quindi dobbiamo utilizzare qualche teorema. Possiamo usare i limiti di funzioni razionali. Questo ci dice di guardare i gradi del numeratore e del denominatore. Notiamo che entrambi sono $n = m = 2$. Quindi il valore di quel limite è pari al quoziente dei coefficienti

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2 - x + 5}{4x^2 - 1} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

Esercizio 6 Trovare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

Quando affrontiamo esercizi di questo tipo, è sicuramente comodo provare a sostituire ma troviamo subito che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{0}{0}$$

Quindi ora che fare? Possiamo ad esempio provare a portare quel limite ad uno dei limiti notevoli. Notiamo un x^3 sotto, quindi $x^3 = x \cdot x^2$. Tra i limiti notevoli che conosciamo, ce ne sono alcuni. Quindi questa può essere una strada giusta.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x - \cos x \sin x}{\cos x}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$$

Arrivati a questo punto, possiamo notare due cose:

1. Abbiamo $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan}{x}$
2. Abbiamo $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

Entrambi sono limiti notevoli di cui sappiamo il valore. Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Esercizio 7 Risolvere

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$$

Se proviamo a sostituire, notiamo subito che

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{0}{0}$$

Ora potremmo provare a ricondurre il seno al coseno o viceversa ma presto scopriremmo che diventerebbe anche troppo lungo da risolvere. Quindi, dato che non abbiamo quella strada percorribile e non possiamo immediatamente ricondurlo ad un limite noto, non resta che fare il cambio di variabile.

Sia $t = x - \dfrac{\pi}{4}$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t + \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t} - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{2}\sin t}{t} = \sqrt{2}\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}$$

Notiamo a questo punto un limite notevole

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} = \boxed{\sqrt{2}}$$

Esercizio 8 Risolvere

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^x$$

Abbiamo due modi per approcciare questo esercizio: o con un cambio di variabile o con trasformazioni algebriche. Generalmente è consigliabile questo secondo perché è più "leggero" sui calcoli e si rischiano meno errori nel procedimento.
Innanzitutto riscriviamolo in una forma simile ad un limite notevole

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$$

Ora noi abbiamo un limite che è quasi identico ad uno notevole. Il prerequisito perché funzioni però è che entrambi i termini che contengono x "crescano" alla stessa velocità. Quindi per ottenere un 1 nella frazione superiore, possiamo fare un piccolo trucchetto

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^x$$

Ora però abbiamo una x come potenza quando ci serve $\frac{x}{5}$. Nulla ci vieta di moltiplicare per $\frac{5}{5}$. Quindi

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{5}{5}\cdot x}$$

che per le proprietà delle potenze

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{5}{5}\cdot x} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^5$$

Notiamo dentro le quadre un limite fondamentale quindi

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^5 = \boxed{e^5}$$

Funzioni continue

Esercizio 1 Dimostrare che l'espressione $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ammetta almeno una soluzione reale.

Innanzitutto dall'equazione che abbiamo, dobbiamo tornare alla funzione

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Con questo, per verificare abbia almeno una soluzione reale, possiamo tornare al teorema degli zeri. Per usarlo però dobbiamo dimostrare che la funzione è continua. Essendo una funzione polinomiale è sicuramente continua. Ora dobbiamo trovare un intorno I adeguato. Dato che non abbiamo informazioni riguardo ai coefficienti per provare a trovare analiticamente gli zeri, l'unico intorno che possiamo usare è

$$I \equiv \mathbb{R}$$

Dato che però non abbiamo un limite inferiore o inferiore, essendo $\mathbb{R}$ illimitato, usiamo la scrittura di limite a più o meno infinito. Quindi la relazione principale perché ci sia almeno uno zero

$$\left(\lim_{x\to-\infty} ax^3 + bx^2 + cx + d\right)\left(\lim_{x\to+\infty} ax^3 + bx^2 + cx + d\right) \overset{?}{<} 0$$

In questo caso, perché sia negativo il prodotto, uno dei due (solo uno dei due) deve essere negativo. Essendo l'equazione di terzo grado, mantiene il segno di ax^3 che a sua volta dipende da a. Quindi possiamo distinguere 2 casi a seconda di a: $a < 0$ e $a > 0$.

$$\begin{cases} -\infty(+\infty) < 0, & a > 0 \\ \infty(-\infty) < 0, & a < 0 \end{cases}$$

In ogni caso quindi, sia che a sia positivo che negativo il loro prodotto sarà negativo. Di conseguenza, per il teorema degli zeri, essendo $f(x)$ continua ed essendo il prodotto degli estremi negativo, esiste almeno uno $z \in \mathbb{R} \mid f(z) = 0$.

Successioni

Esercizio 1 Si trovi il valore di

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \sin\frac{1}{n}$$

Questa è una successione e lo possiamo capire dal fatto che abbiam un n come indice e generalmente questo indica la natura della successione. Per calcolarlo, possiamo ricondurci ai limiti fondamentali che continuano a valere

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} n\cdot n\sin\frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

ora riconosciamo il limite notevole quindi

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n\cdot 1 = \infty\cdot 1 = \boxed{\infty}$$

Derivate

Esercizio 1 Si trovino le tangenti in $P(0,-1)$ alla parabola $y = x^2 + 1$.

Volendo potremmo risolvere questo problema utilizzando un fascio di rette ma con le derivate, diventa estremamente più semplice.
Sapendo che la derivata in un punto di una funzione, rappresenta il coefficiente angolare della tangente, ricordiamo che

$$t:\ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Di conseguenza possiamo sostituire con la funzione che ci è data.

$$y - (x_0^2 + 1) = 2x_0(x - x_0)$$

$2x_0$ è la derivata della funzione $f(x)$, facilmente individuabile dalle derivate di funzioni elementari.
La formula che abbiamo ottenuto trova la tangente in un punto generico. Noi dobbiamo farlo passare per il punto dato, quindi

$$-1 - (x_0^2 + 1) = 2x_0(0 - x_0) \to -2 = -x_0^2 \to x_0 = \pm\sqrt{2}$$

Ora quindi non solo ci siamo trovati le tangenti, ma anche i punti di tangenza! Infatti x_0 rappresenta l'ascissa dei punti di tangenza. Quindi, per concludere l'esercizio le tangenti sono

$$y - (2+1) = 2\cdot\pm\sqrt{2}(x \mp \sqrt{2}) \to y = \pm 2\sqrt{2}(x \mp \sqrt{2}) + 3$$

che risolta in un'unica forma viene

$$\boxed{y = \pm 2\sqrt{2}x - 1}$$

Esercizio 2 Data la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x}$$

determinare

- L'insieme di definizione ed eventuali asintoti
- I punti della funzione la cui tangente sia parallela all'asse X
- I punti in cui il coefficiente angolare della tangente sia positivo

---

Per l'insieme di definizione è molto semplice, infatti basta trovare il dominio. Vediamo che il numeratore non ha problemi in quanto $\forall\, x \in \mathbb{R}$ esiste. Il denominatore invece deve essere diverso da 0, quindi

$$1 - x \neq 0 \to x \neq 1$$

quindi espresso in modo più chiaro

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$$

Per gli asintoti analizziamoli tipo per tipo.
Verticali:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^2}{1-x} = \pm\infty$$

L'unico caso in cui può accadere questo è quando $1-x \to 0$, quindi $1-x_0 = 0 \to x_0 = 1$. L'asintoto verticale è

$$\boxed{x = 1}$$

Orizzontali:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}(x)}{\cancel{x}\left(-1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\infty}{-1} = -\infty$$

Dato che per esistere il limite deve essere finito, non ci sono asintoti orizzontali.
Obliqui: Prima troviamo il coefficiente angolare

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1-x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-x^2} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x}-1\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}-1} = \frac{1}{-1^{\pm}} = -1$$

Ora possiamo trovare il punto d'incontro dell'ascissa

$$q = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{1-x} + x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2} + x - \cancel{x^2}}{1-x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{-1+\frac{1}{x}} = -1$$

Ora non resta che scrivere la retta

$$y = mx + q \to \boxed{y = -x - 1}$$

E questo è il primo punto. Il secondo richiede la tangente parallela a $y = 0$. Quindi perché sia parallela all'asse delle X la derivata nel suo punto deve essere uguale a 0

$$\mathrm{D}\frac{x^2}{1-x} = \frac{\mathrm{D}(1-x)x^2 - (1-x)\,\mathrm{D}x^2}{(1-x)^2} =$$

$$\frac{-x^2-(1-x)2x}{(1-x)^2} = \frac{-x^2-(2x-2x^2)}{(1-x)^2} = \frac{-x^2+2x^{-}2x}{(1-x)^2} = \frac{x^2-2x}{(1-x)^2}$$

Perché questa funzione venga uguale a 0, il numeratore deve essere 0, quindi

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Quindi i punti sono

$$\boxed{(0,0) \quad \text{e} \quad (2,-4)}$$

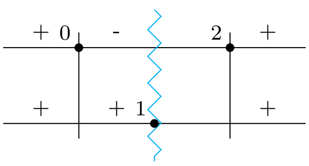
Il terzo punto chiede quando la tangente ha coefficiente angolare positivo. Quindi la derivata della funzione deve essere positiva.

$$\mathrm{D}\frac{x^2}{1-x} > 0$$

Avendo già trovato la derivata, possiamo sostituirla ed evitare molti conti

$$\frac{x^2}{(1-x)^2} > 0 \to x^2 - 2 > 0 \wedge (1-x)^2$$

Disegnando i segni



Dato che a noi interessano i strettamente positivi, scriviamo

$$\boxed{]0,2[}$$

Integrali

Esercizio 1 Si risolva

$$\int \frac{x}{2x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

Vediamo un integrale indefinito con una frazione razionale fratta. La prima cosa da fare è controllare se il numeratore è la derivata del denominatore

$$\mathrm{D}(2x^2+x+1) = 4x+1 \neq x$$

No, non è quindi il caso dell'integrale immediato con il logaritmo. Vediamo però che è sufficientemente simile, quindi possiamo provare a ricondurlo.

$$\int \frac{x}{2x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{4x}{2x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

Quasi ma non ancora. Possiamo aggiungere e togliere una stessa quantità però

$$\frac{1}{4}\int \frac{4x}{2x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{4x+1-1}{2x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

A questo punto possiamo dividere i due integrali

$$\frac{1}{4}\int \frac{4x+1-1}{2x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{4x+1}{2x^2+x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int \frac{x}{2x^2+x+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|2x^2+x+1| - \frac{1}{4}\int \frac{x}{2x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

Il secondo integrale ora ovviamente non è nella forma desiderata. Andiammo a calcolare il delta per vedere quale procedimento seguire

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4\cdot 2\cdot 1 < 0$$

Ora osserviamo il denominatore

$$2x^2 + x + 1$$

Dobbiamo trovare un numero in modo che si ottenga un quadrato. In questo caso osserviamo che se aggiungiamo e togliamo $\frac{1}{8}$

$$2x^2 + x + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + 1 = \left(\sqrt{2}\,x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{7}{8}$$

Possiamo ora continuare il nostro integrale

$$\frac{1}{4}\ln|2x^2+x+1| + \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\sqrt{2}\,x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{7}{8}}\,\mathrm{d}x$$

A questo punto non resta che riscriverlo in modo che si abbia un qualcosa del tipo $\blacksquare^2 + 1$.

$$\frac{1}{4}\ln|2x^2+x+1| - \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\sqrt{2}\,x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{7}{8}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|2x^2+x+1| - \frac{1}{4}\int \frac{1}{\frac{7}{8}\left[1 + \dfrac{\sqrt{2}\,x + \dfrac{1}{2\sqrt{2}\,x}}{\frac{7}{8}}\right]^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|2x^2+x+1| - \frac{2}{7}\int \frac{1}{1 + \dfrac{\left(\frac{4x+1}{2\sqrt{2}}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{7}{8}}\right)^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|2x^2+x+1| - \frac{2}{7}\int \frac{1}{1 + \left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}}\right)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|2x^2+x+1| - \frac{1}{2\sqrt{7}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{7}}}{1 + \left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}}\right)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \boxed{\frac{1}{4}\ln|2x^2+x+1| - \frac{1}{2\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}}\right) + k}$$

Esercizio 2 Si risolva

$$\int \frac{\sin x}{e^x}\,\mathrm{d}x$$

Innanzitutto vediamo che l'integrale non è immediato in quanto $\sin x \neq \mathrm{D}e^x$. Quindi, non essendo neanche una funzione razionale fratta, integriamo per parti.

$$\int \sin x \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$$

Avendo un altro integrale non immediato, torniamo ad integrare per parti ed otteniamo

$$-e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x \text{ d}x = -e^{-x}\cos x - e^{-x} - \int e^{-x}\sin x \text{ d}x$$

E siamo tornati all'integrale originale. Quindi se ora facciamo l'uguaglianza

$$\int e^{-x}\sin x \text{ d}x = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\sin x \text{ d}x$$

e isoliamo l'integrale otteniamo

$$2\int e^{-x}\sin x \text{ d}x = -e^{-x}(\cos x + \sin x)$$

Dividiamo ed otteniamo il risultato

$$\boxed{\int e^{-x}\sin x \text{ d}x = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x)}$$

Esercizio 3 Data la funzione

$$F(x) = \int_1^{\frac{x}{2}} \frac{x}{x^2+1} \text{ d}x$$

si dimostri che è derivabile su tutto $\mathbb{R}$, cha ha un minimo in 0 che ha valore $-\ln\sqrt{2}$ e in $(2,0)$ e $(-2,0)$ ha dei flessi.

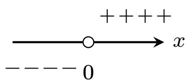
Partiamo dall'analizzare l'argomento dell'integrale. Questa funzione

$$\frac{x}{x^2+1}$$

è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$. Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale, è derivabile. La sua derivata quindi non è altro che

$$F'(x) = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}+1}\cdot\frac{1}{2} = \frac{x}{x^2+4}$$

Andando a calcolare il segno della funzione otteniamo



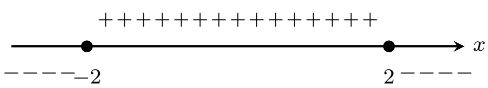
E quindi vediamo che in $x = 0$ ha un minimo. Andando a calcolare il valore

$$F(0) = \int_1^0 \frac{x}{x^2+1} \text{ d}x = \frac{1}{2}\int_1^0 \frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln|x^2+1|\Big|_1^0 = -\frac{1}{2}\ln 2 = \boxed{-\ln\sqrt{2}}$$

che è esattamente quelo che dovevamo dimostrare.
Ora andiamo a dimostrare i flessi. Per farlo calcoliamo la derivata seconda della funzione

$$F''(x) = \frac{(x^2+4)-(x)(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}$$

E guardando il segno

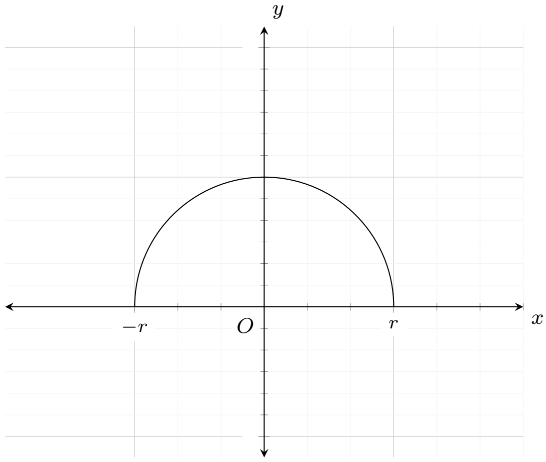


Vediamo che ha dei flessi in $x = -2$ e $x = 2$, come diceva l'esercizio.

Esercizio 4 Si dimostri che il volume di una sfera è pari a

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Una sfera può essere immaginata come una semicirconferenza che ruota attorno all'asse delle ascisse. Questo significa che, centrando la circonferenza in $O(0,0)$ e definendo r il suo raggio, si ha



Quindi, integrando sull'equazione della semicirconferenza

$$y = \sqrt{r^2-x^2}$$

da $-r$ a r, otteniamo

$$V = \pi\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}^2 \text{ d}x = \pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2) \text{ d}x$$

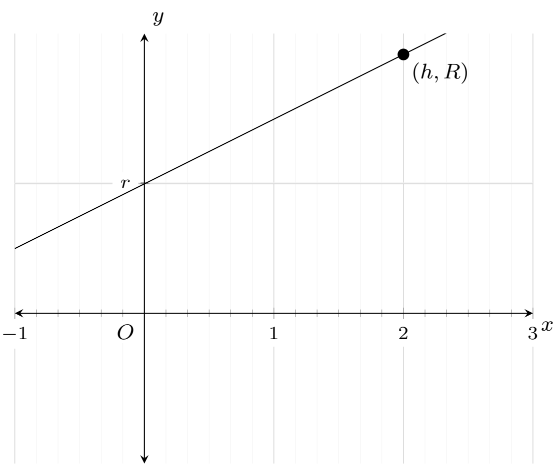
$$\pi\left[r^2x-\frac{r^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \pi\left[r^3-\frac{r^3}{3}-\left(-r^3+\frac{r^3}{3}\right)\right] =$$

$$\pi\left(2r^3-\frac{2}{3}r^3\right) = \boxed{\frac{4}{3}\pi r^3} \qquad \text{QED}$$

Esercizio 5 Dimostrare che il volume di un cono è pari a

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Andremo a dimostrare prima il caso più generale, il tronco di cono. Un tronco di cono non è altro che una retta che è ruotata attorno all'asse delle ascisse. Ad esempio



Troviamo innanzitutto il coefficiente angolare della retta

$$m = \frac{R-r}{h}$$

Ora la retta ha equazione

$$y = \frac{R-r}{h}x + r$$

Troviamo il volume del tronco di cono che si ottiene ruotando.

$$V = \pi \int_0^h \left[\frac{R-r}{h} x + r \right]^2 \mathrm{d}x =$$

$$\pi \int_0^h \left[\frac{(R-r)^2}{h} x^2 + r^2 + \frac{2r(R-r)}{h} \right] \mathrm{d}x =$$

$$\pi \left[\frac{(R-r)^2}{h} \frac{x^3}{3} + r^2 x + \frac{\cancel{2}r(R-r)}{h} \frac{x^2}{\cancel{2}} \right]_0^h =$$

$$\pi \left[\frac{(R-r)^2}{\cancel{h^2}} \frac{h^{\cancel{3}}}{3} + r^2 h + \frac{r(R-r)}{\cancel{h}} h^{\cancel{2}} \right] =$$

$$\pi \frac{h}{3} [R^2 + r^2 + 2rR + 3r^2 + 3r(R-r)] =$$

$$\frac{1}{3} h\pi [R^2 + r^2 + 2rR + \cancel{3r^2} + 3rR - \cancel{3r^2}] = \frac{1}{3} h\pi [R^2 + rR + r^2]$$

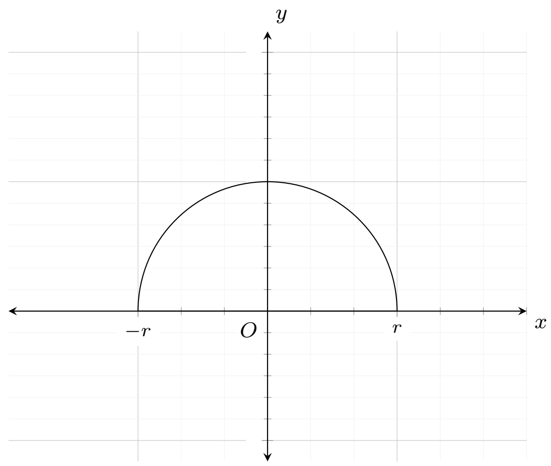
E questo è il volume di un tronco di cono. Un cono generico invece, non è altro che un tronco in cui $R = 0$, sostituendo otteniamo

$$V = \boxed{\frac{1}{3} h\pi r^2} \qquad \text{QED}$$

Esercizio 6 Si dimostri che la lunghezza di una circonferenza è pari a

$$C = 2\pi r$$

Dato che la circonferenza non è un luogo geometrico descrivibile da una funzione, possiamo considerarne metà. Avendo quindi un disegno come



L'equazione di quella curva è quindi

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Integrando per trovare l'arco, otteniamo

$$\frac{C}{2} = \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \, \mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} \sqrt{\frac{r^2 - \cancel{x^2} + \cancel{x^2}}{r^2 - x^2}} \, \mathrm{d}x =$$

$$r \int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \, \mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2 \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)}} \, \mathrm{d}x =$$

$$r \int_{-r}^{r} \frac{1}{r\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{r^2}\right)^2}} \, \mathrm{d}x = r \int_{-r}^{r} \frac{\frac{1}{r}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}} \, \mathrm{d}x =$$

$$r \arcsin \frac{x}{2} \Big|_{-r}^{r} = r(\arcsin 1 - \arcsin(-1)) = r \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$\pi r$$

Dato che però questa è solo mezza circonferenza, abbiamo che

$$C = \boxed{2\pi r} \qquad \text{QED}$$

Dimostrazioni

Qui verranno inserite alcune dimostrazioni di teoremi o formule che vengono usate nel formulario.

Teorema fondamentale dell'Algebra esteso.

Il polinomio $P(x)$ in virtù del teorema fondamentale dell'Algebra, ha in $\mathbb{C}$ almeno uno zero. Indicato con α_1 tale zero, risulta:

$$P(x) = (x - \alpha_1)P_1(x)$$

essendo il quoziente $P_1(x)$ un polinomio, a coefficienti in $\mathbb{C}$, di grado $(n-1)$.
Se $n-1 > 0$, allora, per il teorema fondamentale dell'Algebra, anche il polinomio $P_1(x)$ ha in $\mathbb{C}$ almeno uno zero. Indicando tale zero con α_2 avremo:

$$P_1(x) = (x - \alpha_2)P_2(x)$$

essendo il quoziente $P_2(x)$ un polinomio, a coefficienti in $\mathbb{C}$, di grado $(n-2)$.
Risulta quindi:

$$P(x) = \underbrace{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)P_n(x)}_{n \text{ fattori}} =$$
$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)c$$

essendo l'ultimo termine di grado zero pari ad una costante c.
Poiché la costante c è il coefficiente del termine di grado massimo x^n, ne segue che $c = a_n$ da cui

$$P(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

QED

Limite di una funzione razionale.

Se

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

è un polinomio di grado $n > 0$, si può scrivere per $x \neq 0$

$$P(x) = x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right)$$

e quindi, poiché $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, risulta

$$\lim_{x\to\infty} x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right) = a_n$$

Si ha

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \lim_{x\to\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0\right) =$$
$$\lim_{x\to\infty}(a_nx^n)$$

QED

Unicità del limite.

Supponiamo per assurdo che la funzione f per $x \to x_0$ ammetta due limiti distinti l_1 e l_2, cioè che si abbia

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = l_2$$

In base alla definizione di limite, preso comunque un numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare due numeri positivi δ'_ε e δ''_ε tali che, per ogni $x \in \mathscr{D}_f$, verificante la condizione

$$0 < |x - x_0| < \delta'_\varepsilon \qquad \text{risulti} \quad |f(x) - l_1| < \varepsilon$$
$$0 < |x - x_0| < \delta''_\varepsilon \qquad \text{risulti}|f(x) - l_2| < \varepsilon$$

Ora, sia δ_ε il minore tra i due numeri $\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon$ per

$$0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$$

risulteranno verificate entrambe le disequazioni precedenti e potremo scrivere

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \leqslant |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| < \varepsilon + \varepsilon = \varepsilon 2$$

Data l'arbitrarietà di ε, la condizione $|l_1 - l_2| < 2\varepsilon$ implica che sia $|l_1 - l_2| = 0$ cioè $l_1 = l_2$. QED

Teorema del confronto.

In base alla definizione di limite, preso comunque un numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare due numeri positivi δ'_ε e δ''_ε tali che, per ogni $x \in \mathscr{D}_f$, verificante la condizione

$$0 < |x - x_0| < \delta'_\varepsilon \qquad \text{risulti} \quad |f(x) - l_1| < \varepsilon$$
$$0 < |x - x_0| < \delta''_\varepsilon \qquad \text{risulti}|f(x) - l_2| < \varepsilon$$

Ora, sia δ_ε il minore tra i due numeri $\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon$ per

$$0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$$

saranno verificate entrambe le disequazioni precedenti quindi

$$l - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < l + \varepsilon$$

cioè

$$|g(x) - l| < \varepsilon$$

QED

Teorema della permanenza del segno.

Dimostriamo innanzitutto la prima parte del teorema.
Sia $\varepsilon = \frac{|l|}{2}$; per la definizione di limite è possibile determinare in corrispondenza di tale ε, un numero $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $x \in \mathscr{D}_f$

$$0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \quad \text{implichi} \quad l - \frac{|l|}{2} < f(x) < l + \frac{|l|}{2}$$

Ne consegue la tesi non appena si osservi che

$$\text{se}\, l < 0 \quad l + \frac{|l|}{2} < 0 \quad \text{quindi} \quad f(x) < 0$$

$$\text{se}\, l > 0 \quad l - \frac{|l|}{2} > 0 \quad \text{quindi} \quad f(x) > 0$$

Dimostriamo ora la seconda parte.
Sia per esempio $f(x) > 0$. Dalla definizione di limite è possibile determinare in corrispondenza di tale ε, un numero $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $x \in \mathscr{D}_f$

$$0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \quad \text{implichi} \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

Supponiamo ora per assurdo che sia $l < 0$, scegliendo $\varepsilon = -\frac{l}{2} > 0$; si avrebbe

$$f(x) < \frac{l}{2} < 0$$

contro l'ipotesi che sia $f(x) > 0$. Sarà dunque $l \geqslant 0$ QED

Limite di una somma.

Si ha intanto

$$|[f(x) + g(x)]| - (l_1 + l_2) \leqslant |f(x) - l_1| + |g(x) - l)2|$$

e quindi, preso $\varepsilon > 0$, se si vuol provare che il primo membro è più piccolo di ε, basta verificare che ciascuno dei due addendi a secondo membro è più piccolo di $\frac{\varepsilon}{2}$.
Ma questo è evidente per le definizioni stesse di limiti. Il primo addendo sarà minore di $\frac{\varepsilon}{2}$ se

$$0 < |x - x_0| < \delta'_\varepsilon$$

e il secondo se

$$0 < |x - x_0| < \delta''_\varepsilon$$

ove i due numeri δ'_ε e δ''_ε possono essere diversi in quanto si riferiscono a funzioni diverse.
Detto allora δ_ε il minore dei due, scegliendo x tale che

$$0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$$

si soddisfano entrambe le condizioni; quindi per valori di x così scelti si avrà

$$|f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad |g(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e di conseguenza

$$|[f(x) + g(x)]| - (l_1 + l_2) < \varepsilon$$

QED

Limite di un prodotto.

Si ha

$$\begin{aligned}&|f(x)\cdot g(x)-l_1\cdot l_2| =\\&|f(x)\cdot g(x)+l_1\cdot g(x)-l_1\cdot g(x)-l_1\cdot l_2| =\\&|g(x)\cdot(f(x)-l_1)+l_1\cdot(g(x)-l_2)| \leqslant\\&|g(x)|\cdot|f(x)-l_1|+|l_1|\cdot|g(x)-l_2|\end{aligned}$$

Fissato allora ε' in modo che sia $0<\varepsilon'<1$, esiste in corrispondenza di esso un numero positivo $\delta_{\varepsilon'}$ tale che, $\forall x\in I$ verificante la condizione $0<|x-x_0|<\delta_{\varepsilon'}$, risulti

$$|f(x)-1|<\varepsilon' \quad |g(x)-l_2|<\varepsilon' \quad |g(x)|<|l_2|+\varepsilon'$$

Si ricava quindi

$$|f(x)\cdot g(x)-l_1\cdot l_2|<(|l_2|+\varepsilon')\varepsilon'+|l_2|\varepsilon'<(|l_2|+|l_1|+1)\varepsilon'$$

poiché $\varepsilon'^2<\varepsilon'$, essendo $0<\varepsilon'<1$, se scegliamo ε' non solo positivo e minore di 1 ma anche minore di

$$\frac{\varepsilon}{|l_1|+|l_2|+1}$$

si ottiene, per x appartenente ad un opportuno intorno di x_0

$$|f(x)\cdot g(x)-l_1\cdot l_2|<\varepsilon$$

QED

Teorema di Rolle.

Ipotesi:

- f definita e continua in $[a,b]$
- f derivabile in $]a,b[$
- $f(a)=f(b)$

Tesi:

$$\exists\, c\in\,]a,b[\ : f'(c)=0$$

Per il teorema di Weistrass la f ammette max e min assoluti.

$$m=\min_{x\in[a,b]} f \quad M=\max_{x\in[a,b]} f$$

Si distinguono due casi

1. I punti di max e/o min coincidono con gli estremi

   $$m\leqslant f(x)\leqslant M$$

   Visto che

   $$f(a)=f(b)$$

   si ha che

   $$m=f(x)$$

   Quindi

   $$f'(x)=0 \quad \forall x\in[a,b]$$

2. Almeno uno fra max e min sono interni all'intervallo $[a,b]$

   $$f(c)=M$$

   Visto che in c, $\exists$ max f e f è derivabile,

   $$f'(c)=0$$

QED

Teorema di Lagrange.

Ipotesi:

- f definita e continua in $[a,b]$
- f derivabile in $]a,b[$

Tesi:

$$\exists\, x\in[a,b]\ : f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Sia $\phi(x)=f(x)-kx$ per una costante k in modo che abbia le stesse caratteristiche di f, ovvero è continua ($f(x)$ è continua per ipotesi, kx è continua perché polinomiale) e derivablie ($\phi'(x)=f'(x)-k$). Per ricondursi a Rolle

$$\phi(a)=\phi(b)$$

quindi

$$\begin{aligned}f(a)-ak&=f(b)-kb\\kb-ka&=f(b)-f(a)\\k(b-a)&=f(b)-f(a)\\k&=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\end{aligned}$$

Dato che il Teorema di Rolle ci dice

$$\exists\, x_0\in[a,b]\ : f'(x)=0$$

si ha che

$$\phi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

da cui si deriva che

$$f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

QED

Monotonia ↔ Crescenza/Decrescenza.

Ipotesi:

- f definita e continua in $[a,b]$
- f derivabile in $]a,b[$

Tesi:

- Se $f'(x)>0$, allora la funzione è crescente
- Se $f'(x)<0$, allora la funzione è decrescente

Preso un intorno $I=[a,b]$ possiamo prendere un altro intorno $[x_1,x_2]\in I$. Per il teorema di Lagrange,

$$\exists\, c\in]x_1,x_2[:\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

Si distinguono i due casi

$f'(c)>0$ allora $x_2-x_1>0 \implies f(x_2)-f(x_1)>0 \implies$ crescente

$f'(c)<0$ allora $x_2-x_1<0 \implies f(x_2)-f(x_1)<0 \implies$ decrescente

QED

Costanza.

Ipotesi:

- f definita e continua in $[a,b]$
- f con derivata nulla in $]a,b[$

Tesi:

$$f(x)=k$$

Si prenda un intorno $]x_1,x_2[\in I$, allora per il teorema di Lagrange

$$\exists\, c\in]x_1,x_2[:\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)=0$$

per ipotesi. Quindi si ha che

$$f(x_2)-f(x_1)=0\implies f(x_2)=f(x_1)$$

QED

Massimi e minimi e flessi con derivata seconda.

Ipotesi:

- f sia continua e derivabile almeno 3 volte

Tesi:

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0\wedge f^{(n)}(x_0)\neq 0$$

1. Se n pari è un massimo o un minimo a seconda del segno
2. Se n dispari è un flesso a tangente orizzontale

Dimostriamo il punto 1). Se $f''(x)$ è continua in x_0 allora

$$\lim_{x \to x_0} f''(x) = f''(x_0)[> 0]$$

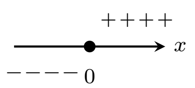
Per il teorema della permanenza del segno

$$\exists\, I(x_0) \, : \, f''(x) > 0$$

Possiamo riscrivere

$$f''(x) = \mathrm{D}[f'(x)]$$

Dato che sappiamo che $f''(x)$ è maggiore di zero, significa che $f'(x)$ è crescente nell'intorno per il primo Lemma del teorema di Lagrange. Se $f'(x_0) = 0$ come da ipotesi significa che questa funzione interseca l'asse delle x. Essendo crescente significa che il segno è



e che quindi la funzione $f(x)$ di cui è derivata è prima decrescente e poi crescente in modo da avere una tangente orizzontale a x_0. Ciò significa che in x_0 c'è un minimo relativo. Per il massimo, si dimostra in modo analogo.

Dimostriamo il punto 2). Se $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) > 0$ si ha che $\mathrm{D}[f'(x_0)] = 0 \wedge \mathrm{D}[f''(x_0)] > 0$. Da ciò si deduce che in x_0, $f'(x)$ ha un punto di minimo relativo. Dato che f' è sempre positivo, significa che f è crescente e in x_0 ha una tangente orizzontale. Quindi il punto x_0 è un punto di flesso per f. QED

Concavità con derivata seconda.

Ipotesi:

- f sia continua e derivabile in $]a, b[$
- Esiste $f''(x)$

Tesi:

Se $f''(x_0) > 0$ ha concavità verso l'alto

Se $f''(x_0) < 0$ ha concavità verso il basso

Se $f''(x_0) = 0$ **e** $f'''(x_0) \neq 0$ in x_0 ha un flesso

---

Dimostriamo il primo punto, gli altri due si fanno in modo analogo. Avendo concavità verso l'alto significa che

$$\exists\, I(x_0) \, : \, \forall x \in I(x_0) \Rightarrow f(x) - t(x) \geqslant 0$$

Definiamo ora $\varphi(x) = f(x) - t(x)$, ovvero

$$\varphi(x) = f(x) - t(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

Andando a calcolare le prime derivate vediamo che

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_0) \qquad \varphi''(x) = f''(x)$$

Ponendo ora $\varphi(x_0) = 0$, vediamo che

$$\varphi'(x_0) = 0 \qquad \varphi''(x_0) = f''(x_0) > 0$$

Dato che $\varphi'(x_0) = 0$, significa che x_0 è un punto di minimo, di massimo o di flesso a tangente orizzontale per φ. Dato che la derivata seconda è positiva, significa che è un punto di minimo, perciò

$$\exists\, I(x_0) \, : \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0) \geqslant 0 \Rightarrow f(x) - t(x) \geqslant 0$$

QED

Teorema del valor medio.

Ipotesi:

- f continua e definita in $[a, b]$

Tesi:

- $\exists\, c \in [a, b] \, : \, f(c) = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$

Se f è continua in $[a, b]$, per il teorema di Weistrass ammette $m = \min f$ e $M = \max f$.

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

$$\int_a^b m \, \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M \, \mathrm{d}x$$

$$mx|_a^b \leqslant \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leqslant Mx|_a^b$$

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

$$m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leqslant M$$

Ora per il teorema dei valori intermedi

$$\exists\, c \in [a, b] \, : \, f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

QED

Teorema fondamentale del calcolo integrale.

Ipotesi:

- f continua in $[a, b]$

Tesi:

- $F(x)$ derivabile per ogni $x \in [a, b]$
- $F'(x) = f(x)$ e $F(a) = 0$

Se $F(x)$ è derivabile, significa che

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Abbiamo quindi che

$$F(x) = \int_a^x f(x) \, \mathrm{d}x$$

e

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^x f(x) \, \mathrm{d}x + \int_x^{x+h} f(x) \, \mathrm{d}x$$

Il numeratore quindi diventa

$$F(x+h) - F(x) = \cancel{\int_a^x f(x) \, \mathrm{d}x} + \int_x^{x+h} f(x) \, \mathrm{d}x - \cancel{\int_a^x f(x) \, \mathrm{d}x}$$

Possiamo quindi scrivere

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) \, \mathrm{d}x$$

Se è continua in $[a, b]$, deve esserlo anche in $[x, x+h] \subseteq [a, b]$. Per il teorema della media

$$\exists c \in [x, x+h] \, : \, f(c) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) \, \mathrm{d}x$$

e quindi

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{h} h f(c) = f(c)$$

Quindi infine possiamo scrivere

$$\overbrace{\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}}^{F'(x)} = \lim_{h \to 0} f(x) = \overbrace{\lim_{c \to x} f(c)}^{\text{Continua}} = f(x)$$

E quindi

$$F'(x) = f(x)$$

QED

Teorema del criterio di derivabilità.

Ipotesi:

- $f(x)$ continua in x_0
- $f(x)$ derivabile in $U \setminus \{x_0\}$

Tesi:

- $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$

Per definizione

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Dato che f è continua si può dire che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

quindi, risolvendo la forma indeterminata $^0/_0$ usando l'Hôpital

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{\mathrm{H}}{\overset{[\frac{0}{0}]}{=}} \lim_{x \to x_0} f'(x)$$

Se questo limite esiste ed è finito, si può scrivere l'equivalenza

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f'(x)$$

QED

Note