1. 行列式

> 行列式是一个数，它是不同行不同列元素乘积的代数和

1.1 n 阶行列式

规定 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 为逆序数

$$|A| = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}$$

仅三阶行列式 = 主对角减副对角

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = abcd$$

1.2 性质

1. 转置，不变
2. 两行互换，变号
3. 某行公因数 k 可提出
4. 某行是两个元素的和，拆成两行列式的和
5. 某行 k 倍加到另一行，不变
6. 某行全零，$|A| = 0$

1.3 展开公式

代数余子式

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

一行元素与`该行`代数余子式的乘积之和 = $|A|$

一行元素与`另一行`代数余子式乘积之 = 0，即 A_{ij} 与 a_{ij} 无关。将另一行的元素全部换成该行的元素，结果为 0

1.4 特殊行列式

上下三角行列式

$$|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

副对角线行列式

$$|A| = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

拉普拉斯

$$\begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$$

范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-a)(c-b)(b-a)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n}(x_i - x_j)$$

爪型行列式

下面的 -1 倍加到上边变成上三角行列式

对角线相等，其余元素相等（特殊爪型）

- 每行加到第一行
- 第一行 -1 倍加到其他行
- 逐行相加
- 加边法
- 特征值，构造仅含 0 和 λ 成比例的行

1.5 克拉默法则

D_i 为 D 的第 i 列元素换成常数项

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$

- 非齐次方程 $|A| \neq 0$，有唯一解
- 齐次 $|A| \neq 0$，有唯一零解
- （逆否）齐次有非零解，$|A| = 0$

1.6 思考

当 $|A| = 0$ 则

1. `r(A)<n`，某行为 0 行列式必为 0
2. `线性相关`，被消去的向量可被线性表出
3. `无穷多解或无解`

行列式与列向量

$$(-a-2b, 2b+3c, -3c+2a) = (a, b, c)\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

2. 矩阵

2.1 概念

- 零矩阵 O
- 单位阵 E
- 对角阵 Λ
- 上（下）三角阵
- 对称阵 $A^T = A$
- 反对称阵 $A^T = -A$
- 正交阵 $Q^TQ = QQ^T = E$

2.1 运算

矩阵与行列式

- $|AB| = |A||B|$
- $|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$

矩阵与方程组

将 $Ax = b$ 的矩阵 A 按列分块

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = b$$

得 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = b$，转化为 `线性表出` 问题

矩阵与向量

$\alpha, \beta, \alpha^T, \beta^T$ 的乘积关系

矩阵有转置关系，数是 n 阶方阵的迹 $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

对称阵（二次型），平方和

2.2 伴随矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} A_{11} & \color{red}{A_{21}} \\ \color{red}{A_{12}} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$AA^* = A^*A = |A|E$

2.3 可逆矩阵

单位阵的常见变换 $E = AA^{-1}$

可逆充要条件

- $|A| \neq 0$，$r(A) = n$，行（列）向量线性无关
- 齐次只有零解
- 非齐次有唯一解
- A 的特征值全不为 0

求逆方法

- 初等行变换 $(A \mid E) \to (E \mid A^{-1})$
- 分块矩阵
- 定义法（利用多项式除法）
    - $A^2 + A - 2E = O$，求 A^{-1}

- $A^2=O$，求 $(E-A)^{-1}$
- $A^2-A-3E=O$，求 A^{-1}

2.4 行阶梯矩阵

初等变换

倍乘，互换，倍加

初等矩阵

左乘行变换，右乘列变换

行阶梯矩阵

$\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\0 & 1 & 4\\0 & 2 & 5\end{bmatrix}$ 不是行阶梯矩阵

行最简矩阵

行阶梯矩阵清零归一

2.5 分块矩阵

$$\begin{bmatrix}A & B\\C & D\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}A^T & C^T\\B^T & D^T\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}B & O\\O & C\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}B^{-1} & O\\O & C^{-1}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}O & B\\C & O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O & C^{-1}\\B^{-1} & O\end{bmatrix}$$

2.6 思考

两个矩阵相乘，如果某个零比较多，左右乘变成行列变换的思想

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+2x_3\\-x_3\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & 18 & 21\\-7 & -8 & -9\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

3. 向量

> n 个数形成的有序数组

3.1 线性表出

$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$

已知向量组，`线性表出`转为`非齐次方程是否有解`

例题

若 β 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的增广矩阵如下

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \end{array}\right]$$

问 λ 为何值时，(1) 可线性表出 (2) 不可线性表出

$$\overline{A} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ -\lambda & \lambda & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & \lambda & \lambda^2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} \lambda+3 & 0 & 0 & -\lambda-1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \lambda \end{array}\right]$$

$\lambda = 0$ 有解，$\lambda = -3$ 无解，$\lambda \neq -3$ 有解

3.2 线性相关

$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$

已知向量坐标，`线性相关`转为`齐次方程组有无非零解`

例题

已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，证明 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$ 线性无关

- 合并同类项，向量组无关，行列式不为零

$k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_1 + \alpha_3) = 0$

$(k_1 + k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 = 0$

- 矩阵可逆，秩相等

$$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

3.3 向量组的秩

极大线性无关组

向量组线性无关，再加任一向量线性相关

向量组等价

向量组 (I) 可由 (II) 线性表示，则 $r(\mathrm{I})\le r(\mathrm{II})$

向量组等价，则 $r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})$

向量组的秩

求 `极大线性无关组` 转为求 `向量组的秩`

由 $PA=B$ 得 A 与 B 的列向量有相同的相关性、组合系数，为求向量组的秩、极大线性无关组提供了方法

例题

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)\xrightarrow{\text{行变换为阶梯矩阵}}\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是一个极大线性无关组

3.4 矩阵的秩

k 阶子式

存在 r 阶子式不为零，r 阶以上子式均为零，$r(A)=r$

公式

- $r(A)=r(A^T)=r(A^TA)$
- $r(kA)=r(A)$
- $r(A+B)\le r(A)+r(B)$

- $r(AB) = \min(r(A), r(B))$
- $\max(r(A), r(B)) \le r(A, B) \le r(A) + r(B)$
- $r(A) = r(PA) = r(AP)$
- $AB = O, r(A) + r(B) \le n$
- $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$

三秩相等

按行分块之后，行向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，按分量写出

$$(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \cdots, \alpha_n^T) \to \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_3 \end{pmatrix}^T$$

按列分块之后，列向量为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$，按分量写出

$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$

3.5 正交化

内积

$(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha$

$||\alpha|| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$

Schmidt 正交化

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关

1. 正交化

$$\beta_1 = \alpha_1$$
$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$$
$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$$

2. 单位化

$$\eta_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|},\eta_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|},\eta_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}$$

【注】单位化可以不用管提取的公因式

正交矩阵

$AA^T=A^TA=E$

每个行（列）向量 α 都有 $(\alpha,\alpha)=||\alpha||^2=1$ 且 $(\alpha,*)=0$

3.6 思考

> 向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 线性相关

含多个向量的向量组线性相关，某个向量可以被其他向量线性表出，即它们之间存在一个关系式。

> 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 线性相关，则 β 能由 α_i 线性表出，且方法唯一

线性相关的向量组关系式中，必有 $k\beta\neq 0$ 得线性表出，反证得方法唯一。

> 如何求行向量组的一个极大线性无关组

行向量转置组成列向量组。

4. 线性方程组

4.1 齐次方程组

基础解系

$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是 $Ax=0$ 的解向量

- $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性无关
- 任一解 η 可由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性表示

构成一个基础解系，其中 $t=n-r(A)$

解的性质

$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 是 $Ax=0$ 的解，则 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$ 也是方程组的解。所以齐次方程有无穷多个解，但是只有 $n-r(A)$ 个线性无关的解。

步骤

1. 同解行变换，找 $n-r$ 个自由变量
2. 基础解系
3. 通解

例题

P177 例4

4.2 非齐次方程组

有解判定

- 有解 r(A)=r(A)
    - 唯一 r(A)=n
    - 无穷解 r(A)<n
- 无解 r(A)+1=r(A)

解的性质

- 齐次 $\rightarrow$ 齐次
- 非齐次 $\rightarrow$ 齐次
- 齐次 $+$ 非齐次 $\rightarrow$ 非齐次

解的结构

基础解系 + 特解

例题

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 2 & 0 & 12 & 10 \\ & 1 & -1 & 0 & -8 & -6 \\ & & & 1 & -3 & -2 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{通解} \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -12 \\ 8 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, k_1, k_2 \text{ 任意常数}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 5 & 0 & 29 \\ & -3 & 1 & -18 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right] \text{通解} \begin{bmatrix} 29 \\ 0 \\ -18 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, k \text{ 任意常数}$$

4.3 应用

（不）可逆矩阵乘法 $Ax = B$，A 不可逆

带未知数的线性表出、线性相关问题求解，转为齐次、非齐次方程求解

4.4 公共解，同解

5. 特征值，特征向量

5.1 特征值

$A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$

- 特征值不同，特征向量线性无关
- $\sum \lambda_i = \sum a_{ii}$
- $\prod \lambda_i = |A|$

步骤

含具体数值的矩阵

1. 特征方程 $|\lambda E - A| = 0$ 求特征值
2. 求 $(\lambda_i E - A)x = 0$ 基础解系
3. 求特征向量

非具体的矩阵

1. 假设矩阵的特征值 λ、特征向量 α
2. 定义法构造
   - $(A + kE)\alpha = (\lambda + k)\alpha$
   - $A^n\alpha = \lambda^n\alpha$

例题

$$\begin{vmatrix} \lambda - 17 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 14 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda - 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 17 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 14 & 4 \\ 0 & 18 - \lambda & \lambda - 18 \end{vmatrix}$$

特征值 $\lambda=9$ 的特征向量是 $k\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix},k\neq 0$

特征值 $\lambda=18$ 的特征向量是 $k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix},k_1,k_2$ 不全为 0

5.2 相似矩阵

$A\sim B$，即 $P^{-1}AP=B$

判断相似，找中间矩阵，一般是对角阵

矩阵相似，基相等
矩阵相似，n次方相似，矩阵n次方

相似对角化

$P^{-1}AP=\Lambda$

n 阶方阵可对角化 $\Leftrightarrow$ 有 n 个线性无关的特征向量

求可逆矩阵 P 的步骤（三阶方阵）

1. 求特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$
2. 求线性无关的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$
3. 构造可逆矩阵 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}$

例题

求 A^n 则 $A^n=P\Lambda^nP^{-1}$

5.3 实对称矩阵

A 为实对称矩阵，则

- 必存在正交阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda$
- 不同特征值对应的特征向量必正交

步骤

1. 求特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
2. 求线性无关的特征向量 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$
3. 改特征向量
   i. 特征值不同向量必正交，单位化
   ii. 特征值有重根
      a. 向量正交，单位化
      b. 向量非正交，正交化
4. 构造正交阵 $Q=(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$，则 $Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}$

例题

P192 例14

6. 二次型

6.1 二次型及其矩阵表示

二次型矩阵一定是对称矩阵

二次方程化成

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & d & e\\ d & b & f\\ e & f & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

二次型的秩=r(A)

标准型

只有平方项，其矩阵为对角矩阵

正负惯性指数 p,q：标准型平方项的系数

规范型

标准型系数只有 0 1 -1

坐标变换

存在可逆矩阵 P 使 $x^TAx\xRightarrow{x=Py}y^TBy$

合同 $B=P^TAP$

任意二次型 x^TAx 存在正交变化 $x=Qy$，可化为标准型，标准型的系数是 A 的特征值（实对称矩阵性质）

也可通过配方变成标准型

6.2 正定

正定二次型

$x\neq 0, x^TAx>0$

可逆线性变换（坐标变换）不改变二次型的正定性

充分必要条件

- 正惯性指数 $p=n$
- $A\simeq E$
- A 全部特征值 $\lambda_i>0$
- A 全部顺序主子式大于 0

必要条件

- $a_{ii}>0$
- $|A|>0$

顺序主子式

$$|A|\Rightarrow|a_{11}|,\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\cdots$$

方法

- 顺序主子式
- 特征值
- 正惯性指数（配方）

7 疑问

03 2:14:06
04 0:26:27

矩阵的关系

- 等价 $A \cong\ B$
  - A 经有限次初等变换得到 B
  - $A \cong \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$，后者为 A 的等价标准型
- 相似 $A \sim B$
  - $P^{-1}AP = B$
- 合同 $A \simeq B$
  - $P^{\mathrm{T}}AP = B$

对角化

- 相似对角化，简称对角化
- 正交对角化
- 合同对角化